Lógica para computação

Guilherme Francisco Ferreira

Introdução, Proposições e Conectivos

Lógica - Introdução

O que é Lógica? O que significa estudar Lógica? Qual a sua definição? Ao iniciar este estudo, vários autores apresentam definições populares sobre o tema. Mendelson (1987), por exemplo, afirma que "Lógica é a análise de métodos de raciocínio". No estudo desses métodos **a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdos dos argumentos**.

A Lógica tem aplicações em diversas áreas do conhecimento, como: Matemática, Filosofia, Ciência da Computação. Em Ciência de Computação podemos destacar certos aspectos fundamentais como algoritmos, linguagens formais, circuitos e técnicas de programação que são fortemente baseados na lógica formal.

Lógica - Introdução

O que isto quer dizer: “a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos **argumentos**”?

Antes disso: o que é um argumento? Adotamos a noção intuitiva de que **um argumento consiste de premissas e conclusão**.

Exemplos

- **Todo homem é mortal**. **Sócrates é um homem**. Portanto, ***Sócrates é mortal***.

Premissas: “Todo homem é mortal” e “´Sócrates é um homem”.

Conclusão: “Sócrates é mortal”.

- **Todo cão late**. **Totó é um cão**. Portanto, ***Totó late***.

Premissas: “Todo cão late” e “Totó é um cão”.

Conclusão: “Totó late”.

Lógica - Introdução

O que isto quer dizer: “a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos”?

Retomando os argumentos apresentados anteriormente:

- **Todo homem é mortal**. **Sócrates é um homem**. Portanto, ***Sócrates é mortal***.
- **Todo cão late**. **Totó é um cão**. Portanto, ***Totó late***.

Do ponto de vista da Lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma:

- **Todo X é Y**. **Z é X**. Portanto, ***Z é Y***.

Percebemos, intuitivamente, que esses argumentos são válidos.

Lógica - Introdução

Nesse sentido, em um argumento as conclusões podem ser consequência das premissas sem que as premissas sejam necessariamente verdadeiras.

<u>Exemplo</u>

- **Todo número positivo é par**. **Três é um número positivo**. Portanto, ***Três é um número par***.

Os exemplos dados até aqui mostram que qualquer critério que seja estabelecido para determinar a **validade ou não de um argumento**, deve levar mais em conta a sua estrutura, que os valores individuais das proposições componentes.

Proposição

A linguagem natural, com a qual nos expressamos diariamente, é muito suscetível a ambiguidades e imprecisões. Existem frases não gramaticais que possuem sentido (por exemplo, anúncios de classificados no jornal) e frases perfeitamente gramaticais sem sentido ou com múltiplos sentidos.

Proposição

Por esse motivo concentraremos nossa atenção em sentenças em que faça sentido atribuir às mesmas um valor verdadeiro ou falso mas não ambos simultaneamente (esta propriedade é conhecida como a Hipótese do Terceiro Excluído) e que não existam valores que sejam variáveis cuja veracidade ou não da sentença dependa do valor que se atribui a este valor variável.

Proposição

<u>Exemplo</u>

(a) Os únicos números inteiros positivos que dividem 7 são 1 e 7.
(b) A lua não é feita de queijo.
(c) Esta sentença é falsa.
(d) Você vai viajar amanhã!
(e) Domingo vai chover.
(f) A terra é o único planeta habitado.
(g) $5x = 12$.
(h) Eu gosto de sorvete.

Proposição

Temos então que só faz sentido atribuir um valor verdadeiro ou falso às sentenças (a), (b), (e) e (f).

- A sentença (c) é um paradoxo.
- A sentença (d) é um comando - Comandos e solicitações não são exatamente proposições. Quando uma ordem é dada (“feche a porta!”) ou uma solicitação feita (“por favor, me passe o prato”) não há necessariamente um valor verdade por trás destas frases.
- A sentença (g) depende do valor das variável x – Ela é verdadeira apenas quando x = 12/5.
- A sentença (h) não é possível determinar o seu valor.

Proposição

<u>Definição 1.1</u>
Chamamos de proposição a qualquer sentença para a qual tenha sentido atribuir de modo único um valor verdadeiro ou falso.

Como vimos até aqui, uma proposição é usualmente expressa por uma sentença declarativa. Em geral, vamos usar letras latinas minúsculas para denotar as proposições (p, q, r,…).

Proposição

As proposições podem ser simples ou compostas. As proposições compostas são formadas de proposições simples conectadas através de operadores (ou conetivos) lógicos. Estes operadores ou conetivos representam as seguintes operações lógicas, que serão descritas mais adiante:

- Conjunção
- Disjunção
- Negação
- Implicação (ou condicional)
- Bi-implicação (ou bicondicional)

Conectivos - Conjunção de proposições

O conetivo “e” é a forma mais usual de se formarem proposições compostas através da **conjunção** lógica de proposições. Este conetivo é usado, por exemplo, em sentenças como “gatos são mamíferos e canários são aves”, “$3 < 5$ e $2+3=5$”.

O símbolo ∧ é usado para representar formalmente a conjunção lógica. Caso p e q sejam proposições, então a fórmula **p ∧ q** representa a conjunção lógica das proposições p e q.

Conectivos - Conjunção de proposições

Exercício 1 - Responda as seguintes questões:

(a) Se **p** é verdadeira e **q** verdadeira, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(b) Se **p** é verdadeira e **q** falsa, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(c) Se **p** é falsa e **q** verdadeira, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(d) Se ambas **p** e **q** são falsas, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

Construa uma tabela resumindo o resultado das questões (a) até (d). Use V para verdadeiro e F para falso. Mostre em cada linha da tabela a combinação de valores de **p**, **q** e de **p ∧ q**.

Conectivos - Disjunção (operador ou) de proposições

O símbolo $\vee$ será empregado para representar um dos significados usuais do conetivo “ou” em frases da linguagem natural. O significado assumido por este símbolo é o do “ou inclusivo” que somente será falso se ambas as sentenças sendo conectadas por ele forem falsas, isto é, **p $\vee$ q** será falso somente se ambos **p** e **q** forem falsos. Diz-se que o símbolo $\vee$ representa a disjunção lógica das proposições **p** e **q**.

Exercício 2 – Construir uma tabela com a combinação dos valores de p, q e p $\vee$ q. Como no exercício anterior, utilize V para verdadeiro e F para falso.

Conectivos - Disjunção (operador ou) de proposições

Observação 1.1

A tabela verdade associada à disjunção p∨q não corresponde ao sentido usual que é dado à palavra ou, sendo este sentido recuperado por um outro conectivo, chamado ou exclusivo, e denotado p⨁q com a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos – Negação de uma proposição

Os símbolos ¬ ou ~ serão usados para representar a negação de uma proposição. Neste caso, se p é uma proposição verdadeira então ¬p ou ~p será uma proposição falsa e vice-versa. Ou seja ¬p é a negação lógica de p (as vezes o símbolo ‘ (apóstrofo) também é usado para simbolizar a negação). **No decorrer desta disciplina usaremos o símbolo ~ para representar a negação de uma proposição**.

Conectivos – Conjunção, Disjunção e Negação

<u>Definição 1.2</u>

Sejam p e q proposições, então a conjunção de p e q é a proposição “p e q” denotada por $\mathbf{p \wedge q}$.

A disjunção de p e q é a proposição "p ou q" denotada por $\mathbf{p \vee q}$.

E a negação de p é a proposição "não p" denotada por $\mathbf{\sim p}$.

Conectivos – Implicação

O símbolo $\rightarrow$ será usado para representar sentenças como “se chover, então a rua ficará molhada”, ou então “não estudar implica em tirar notas baixas” ou também “não fui ao cinema porque o carro estragou” e sentenças similares. Geralmente estas sentenças podem ser reescritas no formato “Se sentença p, então sentença q” que simbolicamente fica apenas: $p \rightarrow q$.

A noção que este operador lógico pretende capturar é a de existência de implicação ou de consequência entre as sentenças.

Conectivos – Implicação

Definição 1.5

Dadas duas proposições p e q, chamamos de implicação de p em q à proposição "se p então q", denotada por $\mathbf{p \rightarrow q}$.

Conectivos – Implicação

Exemplo 1.6

Consideremos a implicação $p \rightarrow q$ em que:

p: “chover”

q: “vir me buscar”

Ou seja, $p \rightarrow q$ é “se chover, então você vem me buscar”.

Conectivos – Implicação

Exemplo 1.6

Consideremos a implicação $p \rightarrow q$ em que:

p: "chover"

q: "vir me buscar"

Ou seja, $p \rightarrow q$ é "se chover, então você vem me buscar".

Notamos então que o único caso que não se pode aceitar como verdadeiro é p é verdadeiro e q é falso, todos os outros são aceitáveis. Pensemos em outros exemplos.

Conectivos – Implicação

Os exemplos servem como uma justificação informal para a tabela abaixo:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos – Bicondicional

Definição 1.7

Dadas duas proposições p e q, chamamos de bicondional à proposição "p se, e somente se q", denotada por $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$.

Expressões alternativas para “p se, e somente se q” são: “p see q” e “p é uma condição necessária e suficiente para q”.

Conectivos – Bicondicional

Exemplo

Consideremos a implicação p $\leftrightarrow$ q em que:

p: “vou te buscar”

q: “chover”

Ou seja, p $\leftrightarrow$ q é “vou te buscar se, e somente se, chover”.

Conectivos – Bicondicional

O exemplo anterior serve como justificação informal para definirmos que a operação bicondicional de duas proposições é definida de forma que esta operação resulte verdadeira apenas quando estas duas proposições forem iguais (tiverem o mesmo valor lógico). Ou seja, resulte na tabela abaixo:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conectivos – Bicondicional

O conectivo Bicondicional também é chamado de “Bi-implicação”. Vejamos o porquê disso construindo a tabela de $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$.

Conectivos – Bicondicional

O conectivo Bicondicional também é chamado de “Bi-implicação”. Vejamos o porquê disso construindo a tabela de (p→q) ∧ (q→p).

Notamos neste caso que p↔q e (p→q)∧(q→p) têm as últimas colunas de suas tabelas verdade idênticas, de fato:

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fórmulas e Precedência

Uma fórmula é construída pela composição de símbolos de sentenças simples (p, q, ...) e de conetivos lógicos binários ($\wedge$,$\vee$,$\rightarrow$ e $\leftrightarrow$) e unários (~). Também podem ser usados parênteses. A precedência usual é:

1. Fórmulas dentro de parênteses (os mais internos primeiro)
2. ~ (a negação)
3. $\wedge$ (conjunção)
4. $\vee$ (disjunção)
5. $\rightarrow$ (implicação material)
6. $\leftrightarrow$ (bicondicional)
7. Da esquerda para a direita

Fórmulas e Precedência

Uma fórmula que não tenha nenhum erro de sintaxe em sua escrita (por exemplo, não tenha excesso nem falta de parênteses, conectivos ou símbolos estranhos, etc.) é chamada de **fórmula bem-formada**.

Exemplos de fórmulas bem-formadas:

Supondo que p, q e r são proposições lógicas então as seguintes expressões são fórmulas bem-formadas (ou apenas fórmulas):

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (q \rightarrow p)$

$(p \lor \sim p) \rightarrow (q \land \sim q)$

Fórmulas e Precedência

Exemplos de fórmulas bem-formadas:

Supondo que p, q e r são proposições lógicas então as seguintes expressões são fórmulas bem-formadas (ou apenas fórmulas):

$\neg((p \land \neg q) \rightarrow \sim r)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

$((p \land q \land r) \lor \sim(q \lor p) \lor (p \land \sim r)) \rightarrow (r \lor \sim p)$

$\sim\sim(p \land r)$

Fórmulas e Precedência

As seguintes fórmulas apresentam alguns erros bastante comuns de escrita (sintaxe) que podem ocorrer nas fórmulas (do lado é indicado o tipo de erro):

$(p \rightarrow q \leftrightarrow (q \rightarrow p)$	falta um fecha parênteses
$(p \vee \sim) \rightarrow (q \wedge \sim q)$	a primeira negação não foi seguida de uma proposição
$\sim((p \sim q) \rightarrow \sim r$	falta um operador lógico entre p e ~q
$(\vee \sim p) \rightarrow (q \wedge \sim q)$	falta uma proposição no lado esquerdo do operador ∨
$(p \vee \sim p) \rightarrow (q \wedge\ )$	falta uma proposição no lado direito do operador ∧

O método das Tabelas Verdade

Uma tabela verdade mostra, em suas colunas mais a esquerda, todas as combinações de valores lógicos que as proposições de uma dada fórmula podem assumir. A partir destes valores de entrada pode-se “calcular” os valores que esta fórmula irá ter para cada uma destas combinações de valores.

Este cálculo é feito passo a passo criando-se colunas intermediárias que ficam posicionadas à direita das colunas de entrada e que contém os valores das sub-fórmulas que compõem a fórmula principal. Na última coluna mais a direita se coloca a coluna que contém os valores finais desta fórmula.

O método das Tabelas Verdade

Resumindo, para se construir a tabela-verdade de uma fórmula lógica pode-se seguir os seguintes passos:

(i) nas colunas à esquerda coloque os símbolos sentenciais simples (p, q, ...), depois

(ii) se houverem sentenças simples negadas (~p, ~q, ...) coloque-as nas próximas colunas e por fim

(iii) seguindo a precedência crie uma coluna para cada fórmula composta (não é necessário repetir as sentenças simples negadas).

A última coluna a direita deve ser a expressão ou fórmula final.

O método das Tabelas Verdade

A última coluna a direita deve ser a expressão ou fórmula final.

As sentenças ou símbolos proposicionais simples pertencentes a uma fórmula definem o número de linhas da tabela verdade para esta fórmula através de uma regra simples:

1 símbolo: p	2 linhas (2^1 combinações: V e F)
2 símbolos: p e q	4 linhas (2^2 combinações: VV, VF, FV, FF)
3 símbolos: p, q e r	8 linhas (2^3 combinações)
N símbolos: p, q, ...	2^n linhas (2^n combinações)

Eliminação de parênteses

Vamos considerar alguns aspectos do problema de se escrever sem ambiguidade as proposições.

Exemplo 1.10 – As proposições $p \vee (q \vee r)$ e $(p \vee q) \vee r$ diferem em suas expressões algébricas mas determinam a mesma função como mostram as tabelas verdade.

p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Eliminação de parênteses

Entretanto, considerando as seguintes tabelas verdade:

Exemplo 1.11

p	q	r	$p \longrightarrow q$	$(p \longrightarrow q) \wedge r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	F	V	F

p	q	r	$q \wedge r$	$p \longrightarrow (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	F
V	F	V	F	F
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Eliminação de parênteses

Podemos verificar que a tabela verdade de $(p \rightarrow q) \land r$ difere da tabela verdade de $p \rightarrow (q \land r)$. Portanto há ambiguidade na expressão:

$$\mathbf{p \rightarrow q \land r}$$

Fica, assim, evidente a necessidade de se estabelecer uma regra de colocação de parênteses nas expressões das proposições.

Eliminação de parênteses

Vamos estabelecer um conjunto de regras de colocação de parênteses que permite uma escrita sem ambiguidade até certo ponto, já que um mínimo de parênteses pode ser necessário.

Colocamos uma hierarquia na aplicação dos conectivos nos componentes da expressão do seguinte modo: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, assim, a negação está em primeiro lugar e o bicondicional em último.

Eliminação de parênteses

Fixamos as seguintes regras:

1. Omitimos os parênteses externos, e portanto escrevemos $p \vee q$ no lugar de $(p \vee q)$.
2. A negação é aplicada tão restrita quanto possível. Assim, $\sim p \wedge q$ é $(\sim p) \wedge q$ e não $(\sim p \wedge q)$.
3. Conjunções e disjunções são aplicadas do modo mais restrito possível. Por exemplo, $p \wedge q \rightarrow \sim r \vee s$ é $(p \wedge q) \rightarrow ((\sim r) \vee s)$.
4. Quando um conectivo é repetido, o agrupamento é feito à direita. Por exemplo, $p \rightarrow q \rightarrow r$ é $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Eliminação de parênteses

Exemplo 1.12: $p \leftrightarrow \sim q \vee r \rightarrow p$

$p \leftrightarrow (\sim q) \vee r \rightarrow p$

$p \leftrightarrow ((\sim q) \vee r) \rightarrow p$

$p \leftrightarrow (((\sim q) \vee r) \rightarrow p)$

$(p \leftrightarrow (((\sim q) \vee r) \rightarrow p))$

Exemplo 1.13: $\sim p \rightarrow q \rightarrow \sim r$

$(\sim p) \rightarrow q \rightarrow (\sim r)$

$(\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim r))$

$((\sim p) \rightarrow (q \rightarrow (\sim r)))$

Eliminação de parênteses

Exemplo 1.14: $\sim\sim p \rightarrow\sim q$

$\sim (\sim p) \rightarrow (\sim q)$

$(\sim (\sim p)) \rightarrow (\sim q)$

$((\sim (\sim p)) \rightarrow (\sim q))$

Exemplo 1.15: $p\wedge\sim (q \rightarrow q\wedge s)$

$p\wedge\sim (q \rightarrow (q\wedge s))$

$p\wedge(\sim (q \rightarrow (q\wedge s)))$

$(p\wedge(\sim (q \rightarrow (q\wedge s))))$

Eliminação de parênteses

Exemplo 1.16 – Nem sempre é possível eliminar todos os parênteses de uma expressão, de fato, como $p \rightarrow q \rightarrow r$ é $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ então não podemos eliminar os parênteses de $(p \rightarrow q) \rightarrow r$.

Fazer esse caso como exercício.

Equivalência Lógica

Tautologia

Anteriormente verificamos como determinar os valores verdade que uma proposição pode assumir como função dos valores de suas proposições componentes. No caso em que este valor é constante e igual a V para qualquer combinação de valores das proposições componentes, chamamos a proposição de **tautologia**.

Tautologia

Dito de outro modo, uma tautologia é uma fórmula que assume apenas o valor V, ou seja, que é sempre verdadeira. Uma tautologia é “intrinsecamente verdadeira” pela sua própria estrutura; ela é verdadeira independente de qualquer valor lógico atribuído as suas letras de proposição.

Com o uso das tautologias será possível estabelecer um critério de equivalência entre proposições que chamaremos de **Equivalência Lógica**.

Tautologia

Exemplo 2.1

Consideremos as proposições p_1= ($x \geq 0$), p_2 = (Rio Claro fica no estado do Ceará) e q = ($x^2 \geq 0$), **em que x representa um número real**, e vamos estabelecer uma tabela de valores para ($p1 \vee p2$) → q.

Tautologia

Exemplo 2.1

Consideremos as proposições $p_1 = (x \geq 0)$, p_2 = (Rio Claro fica no estado do Ceará) e $q = (x^2 \geq 0)$, **em que x representa um número real**, e vamos estabelecer uma tabela de valores para $(p1 \vee p2) \rightarrow q$.

p_1	p_2	q	$p_1 \vee p_2$	$(p_1 \vee p_2) \longrightarrow q$
V	F	V	V	V
F	F	V	F	V

Tautologia

Podemos perceber que a última coluna da tabela acima consiste somente de valores V , mas que isto pode não valer para proposições quaisquer, de fato, no caso geral da proposição $(p_1 \vee p_2) \rightarrow q$ temos:

p_1	p_2	q	$p_1 \vee p_2$	$(p_1 \vee p_2) \longrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	F
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

Tautologia

Um exemplo de tautologia:

r: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Montemos a tabela verdade desta fórmula.

Tautologia

Um exemplo de tautologia:

r: $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

Montemos a tabela verdade desta fórmula.

Definição 2.2 - Dizemos que uma proposição p é uma tautologia se sua coluna da tabela verdade consiste somente de valores V.

Contradição

Uma **contradição** é o oposto de uma tautologia, ou seja, é uma fórmula que assume apenas o valor F independente de qualquer combinação de valores verdade atribuída às proposições lógicas simples que entram em sua composição.

Um exemplo de contradição:

r: $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$

Tautologia e Contradição

Uma **contradição** é o oposto de uma tautologia, ou seja, é uma fórmula que assume apenas o valor F independente de qualquer combinação de valores verdade atribuída às proposições lógicas simples que entram em sua composição.

Um exemplo de contradição:

r: $(p \land q) \land \sim(p \lor q)$

Definição 2.2 - Dizemos que uma proposição p é uma contradição se sua coluna de sua tabela verdade consiste somente de valores F.

Tautologia e Contradição

Exercícios

Descobrir quais das seguintes fórmulas são tautologias, contradições ou fórmulas contingentes (fórmulas “simples” que não são tautologias ou contradições).

a) r: $p \vee \sim(p \wedge q)$
b) r: $\sim p \wedge (p \wedge q)$
c) r: $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
d) r: $(p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p)$
e) s: $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
f) r: $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
g) r: $(p \wedge q) \wedge q \leftrightarrow \sim ((p \wedge q) \wedge p)$

Tautologia e Contradição

Vejamos agora um resultado fundamental.

Teorema 2.1 – Se uma proposição é uma tautologia então a sua negação é uma contradição e reciprocamente.

Façamos a tabela verdade da fórmula r: $\sim (p \vee \sim(p \wedge q))$

Equivalência Lógica

O principio da Equivalência Lógica está baseado na observação que em geral, sempre que duas proposições p e q são tais que as últimas colunas de suas respectivas tabelas verdade coincidem, então $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, e reciprocamente, se $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia, então as tabelas verdade de p e q tem as respectivas últimas colunas iguais.

Equivalência Lógica

Exemplo 2.7 - Sabemos que p → q e (~p) ∨ q tem as últimas colunas de suas tabelas verdade idênticas e assim podemos concluir que:

p	q	...	$(p \longrightarrow q) \longleftrightarrow ((\sim p) \vee q)$
V	V	...	V
V	F	...	V
F	V	...	V
F	F	...	V

E portanto podemos concluir que (p → q) ↔ ((~ p) ∨ q) é uma tautologia.

Equivalência Lógica

Definição 2.3 – Dizemos que duas proposições p e q são logicamente equivalentes ou simplesmente equivalentes se, $p \leftrightarrow q$ é uma tautologia. Denotamos a equivalência lógica de p e q por:

$$p \Leftrightarrow q \text{ ou } p \equiv q$$

Como consequência da definição acima temos que $p \equiv q$ se, e somente se, as tabelas verdade de p e de q têm as colunas respectivamente iguais.

Equivalência Lógica

.

Propriedade	**Conjunção (∧)**
Comutativa	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
Associativa	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Distributiva	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
Elemento Neutro	$p \wedge V \Leftrightarrow p$
Complemento	$p \wedge \sim p \Leftrightarrow F$
Idempotência	$p \wedge p \Leftrightarrow p$

Equivalência Lógica

•

Propriedade	**Disjunção (∨)**
Comutativa	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
Associativa	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Distributiva	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Elemento Neutro	$p \vee F \Leftrightarrow p$
Complemento	$p \vee \sim p \Leftrightarrow V$
Idempotência	$p \vee p \Leftrightarrow p$

Equivalência Lógica

.

Propriedade	Equivalência de outros operadores
Dupla Negação	$\sim \sim p \Leftrightarrow p$
Equivalência da Implicação	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$
Contra Positivo (ou Posição)	$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim q \rightarrow \sim p$
Prova Condicional	$p \rightarrow (q \rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \rightarrow r$

Equivalência Lógica

Exercício – Demonstrar, pelo uso da tabela-verdade, **quatro** das equivalências tautológicas mostradas anteriormente (não precisa repetir as demonstrações para a equivalência comutativa, associativa e contraposição).

Equivalência Lógica

Exemplo 2.10 – A maioria das linguagens de programação tem estruturas dos tipos IF −THEN− ELSE, REPEAT −UNTIL e WHILE −DO e em geral podemos usar equivalência lógica para fazer algumas simplificações.

IF $((p \wedge (p \vee q)) \wedge r)$ THEN

instruções

ELSE

instruções

Equivalência Lógica

Para simplificar a expressão vamos fazer a tabela verdade de p∧(p∨q).

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Equivalência Lógica

Para simplificar a expressão vamos fazer a tabela verdade de $p \wedge (p \vee q)$.

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \wedge q)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	F
F	F	F	F

Ela mostra que $p \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q)$. E então podemos escrever o fragmento como:

```
IF p∧r THEN
instruções
ELSE
instruções
```

Equivalência Lógica – Leis de DeMorgan

Dentre as equivalências lógicas, também damos destaque às **leis de DeMorgan**:

$\sim (p \land q) \Leftrightarrow (\sim p) \lor (\sim q)$

$\sim (p \lor q) \Leftrightarrow (\sim p) \land (\sim q)$

Exemplo: “É falso que João tenha ido ao cinema e ao teatro” equivale a “Ou João não foi ao cinema ou não foi ao teatro”

Equivalência Lógica – Leis de DeMorgan

Levando em conta o que aprendeu sobre equivalências e em particular sobre as Leis de DeMorgan, escreva a negação das seguintes proposições compostas:

a) Se a comida é boa, então o serviço é excelente.

b) A comida é boa, ou o serviço é excelente.

c) A comida é boa e o serviço é excelente, ou então está caro.

d) Nem a comida é boa, nem o serviço é excelente.

e) Se é caro, então a comida é boa e o serviço é excelente.

Equivalência Lógica – Leis de DeMorgan

Exercício – Utilize as equivalências lógicas para escrever as fórmulas abaixo utilizando apenas parênteses e os conectivos de negação, conjunção e disjunção.

a) $(p \rightarrow q) \land (\sim q \rightarrow \sim p)$

b) $p \leftrightarrow q$

c) $p \rightarrow (q \rightarrow r)$

Exercício – Aplique as leis de DeMorgan nas respostas obtidas no exercício anterior e encontre uma fórmula equivalente à negação delas.

Implicação ou Inferência Lógica

Uma **inferência lógica**, ou, simplesmente uma **inferência**, é uma tautologia da forma $p \rightarrow q$; a proposição p é chamada antecedente, e q, consequente da implicação. As inferências lógicas, ou regras de inferência, são representadas por $p \Rightarrow q$.

Da definição decorre imediatamente que $p \Rightarrow q$, se e somente se, o consequente q assumir o valor lógico V, sempre que o antecedente p assumir esse valor.

Implicação ou Inferência Lógica

As regras de inferência são, na verdade, formas válidas de raciocínio, isto é, são formas que nos permitem concluir o consequente, uma vez que consideremos o antecedente verdadeiro; em termos textuais, costumamos utilizar o termo “logo” (ou seus sinônimos: portanto, em consequência, etc) para caracterizar as Regras de Inferência; a expressão $p \Rightarrow q$ pode então ser lida: p; **logo**, q.

Implicação ou Inferência Lógica

É possível mostrar que as regras de inferência têm as seguintes propriedades:

Reflexiva: $p \Rightarrow p$

Transitiva: Se $p \Rightarrow q$ e $q \Rightarrow r$, então $p \Rightarrow r$

Implicação ou Inferência Lógica

Vamos exemplificar com a regra de inferência conhecida por Modus Ponens:

$(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Implicação ou Inferência Lógica

A seguir estão listadas algumas das regras de inferência mais importantes da Lógica. Da mesma forma que no caso das equivalências, cada uma delas pode ser provada, bastando para isso construir a Tabela Verdade da condicional correspondente; se a condicional for tautológica, será uma inferência.

Regra da Adição $p \Rightarrow p \vee q$

Exemplo: “Vou ao cinema; logo vou ao cinema ou ao teatro”.

Implicação ou Inferência Lógica

Regra da Simplificação $p \land q \Rightarrow p$

Exemplo: “Fui ao cinema e ao teatro; logo fui ao cinema”.

Regra da Simplificação Disjuntiva $(p \lor q) \land (p \lor \neg q) \Rightarrow p$

Exemplo: “Ou estudo ou trabalho; ou estudo ou não trabalho; logo, estudo”.

Regra da Absorção $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \land q)$

Exemplo: “Se trabalho, ganho dinheiro; logo, se trabalho, trabalho e ganho dinheiro”

Implicação ou Inferência Lógica

Modus Tollens $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; não fiquei rico; logo não ganhei na Loteria”.

Modus Ponens $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

Exemplo: “Se ganhar na Loteria, fico rico; ganhei na Loteria; logo, fiquei rico”

Há outras regras de inferência que serão estudadas no decorrer do curso.

Forma Normal

Possui somente os operadores de **negação**, **conjunção** e **disjunção,** mas não necessariamente todos. Assim, não possui operadores de condicional e bicondicional.

Forma Normal Conjuntiva (FNC)

Operador de negação não tem alcance sobre a conjunção, disjunção e negação, ou seja, só incide sobre letras proposicionais. E a **disjunção** não tem alcance sobre a conjunção. Não se adequam casos como:

$(p \rightarrow q) \land p$	Porque tem o operador de implicação
$\sim(p \land q)$	Porque o operador de negação está incidindo sobre o operador de conjunção
$p \land \sim(\sim q)$	Porque o operador de negação está incidindo sobre outro operador de negação
$p \lor (q \land r)$ $((\sim p) \land (\sim q)) \lor (q \land p)$	Porque o operador de disjunção incide sobre o operador de conjunção

Forma Normal Disjuntiva (FND)

Operador de negação não tem alcance sobre a conjunção, disjunção e negação, ou seja, só incide sobre letras proposicionais. E a **conjunção** não tem alcance sobre a disjunção. Não se adequam casos como:

$(p \rightarrow q) \wedge p$	Porque tem o operador de implicação
$\sim(p \wedge q)$	Porque o operador de negação está incidindo sobre o operador de conjunção
$p \wedge \sim(\sim q)$	Porque o operador de negação está incidindo sobre outro operador de negação
$p \wedge (q \vee r)$ $((\sim p) \vee (\sim q)) \wedge (q \vee p)$	Porque o operador de disjunção incide sobre o operador de conjunção

FNC e FND

Exemplos de fórmulas na FNC:

$$((\sim q) \vee p \vee r) \wedge ((\sim p) \vee r\ ) \wedge q$$

$$(p \vee r) \wedge ((\sim p) \vee r) \wedge (p \vee (\sim r))$$

$$(\sim p) \vee\ q$$

Exemplos de fórmulas na FND

$$p \vee (q \wedge r) \vee\ ((\sim q) \wedge p\ )$$

$$p \vee (q \wedge r)$$

$$(\sim p) \wedge\ q$$

FNC e FND - Exemplos

a) **Determine a FNC da fórmula $p \rightarrow (q \wedge (\sim(r \vee p))$**
b) Determine a FNC da fórmula $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$.
c) **Determine a FND da fórmula $p \leftrightarrow q$**
d) Determine a FND da fórmula $\sim(((p \vee q) \wedge (\sim q)) \vee (q \wedge r))$

FNC e FND

Toda sentença pode ser escrita na FNC ou na FND. Sendo que, toda fórmula que não é uma contradição é logicamente equivalente a uma fórmula na FND e toda fórmula que não é uma tautologia é logicamente equivalente a uma fórmula na FNC.

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Há dois métodos para obter fórmulas a partir de Tabelas Verdade.

1° Método

Considerando V como p e F como ~p.

2° Método

Considerando V como ~p e F como p.

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

p	**q**	**?**
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1° método

(i) Considerando as combinações que resultam em V, as escrevemos em linguagem proposicional utilizando o conectivo de conjunção:

VV – $(p \wedge q)$

FF – $((\sim p) \wedge (\sim q))$

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Após obtermos as fórmulas das combinações que resultam em V, as unimos com o conectivo de **disjunção**.

$$(p \land q) \lor ((\sim p) \land (\sim q))$$

É importante destacar que, desse modo, obtemos uma fórmula que está na FND.

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

(ii) Agora, considerando as combinações que resultam em F na Tabela Verdade

$$VF – \sim (p \wedge (\sim q))$$

$$FV – \sim ((\sim p) \wedge q)$$

Agora juntamos as proposições obtidas por meio de conectivos de **conjunção**

$$(\sim (p \wedge (\sim q))) \wedge (\sim ((\sim p) \wedge q))$$

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

$$(\sim (p \land (\sim q))) \land (\sim ((\sim p) \land q))$$

$$((\sim p) \lor q) \land (p \lor (\sim q))$$

É importante destacar que, desse modo, obtemos uma fórmula na FNC.

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

2° Método (tomando V como ~p e F como p)

(i) Considerando as combinações que resultam em F, temos:

VF – ((~p) ∨ q)

FV – (p ∨ ~q)

Depois juntamos as proposições obtidas por meio de conectivos de conjunção

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

$$((\sim p) \vee q) \wedge (p \vee (\sim q))$$

Com isso obtemos uma fórmula na FNC

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

(ii) Considerando agora as combinações que resultam em V, temos:

$$VV – \sim((\sim p) \lor (\sim q))$$

$$FF – \sim(p \lor q)$$

Depois juntamos as proposições obtidas por meio de conectivos de disjunção

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Considerando as combinações que resultam em V, temos:

$$\sim ((\sim p) \vee (\sim q)) \vee \sim (p \vee q)$$

$$(p \wedge q) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q))$$

Com isso obtemos uma fórmula que está na FND

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Exemplo: obter as fórmulas que geram a tabela verdade abaixo a partir dos valores V e F

p	q	?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

p	q	r	?
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	F
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	F
F	F	F	V

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Procedimentos:

- Examinamos as combinações de valores que geram V

(i) VVV, (ii) VVF e (iii) FFF

Disso conseguimos três fórmulas que geram, respectivamente, o valor V para essas atribuições:

(i) $(p \wedge q \wedge r)$

(ii) $(p \wedge q \wedge (\sim r))$

(iii) $((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge (\sim r))$

Obtendo fórmulas a partir da Tabela Verdade

Note que qualquer outra atribuição de valores a essas fórmulas as farão obter o valor F. Portanto, basta as conectarmos com o conectivo de disjunção para obtermos a fórmula desejada.

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge (\sim r)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q) \wedge (\sim r))$$

De FND para FNC e vice-versa

A fórmula para a tabela verdade abaixo é $(p \land q) \lor ((\sim p) \land q)$

p	q	?
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

De FND para FNC e vice-versa

Precisamos obter uma fórmula que também esteja na FND e que seja inversa à fórmula obtida anteriormente.

p	q	(p ∧ q) ∨ ((~p) ∧ q)	~((p ∧ q) ∨ ((~p) ∧ q))
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	F	V

De FND para FNC e vice-versa

Para isso consideramos as combinações que resultam em F.

VF, F – $(p \wedge (\sim q))$

FF, F – $((\sim p) \wedge (\sim q))$

Do mesmo modo que operamos no 1° método, juntamos as proposições obtidas com o conectivo de disjunção

$$(p \wedge (\sim q)) \vee ((\sim p) \wedge (\sim q))$$

De FND para FNC e vice-versa

Com isso obtemos uma fórmula na FND que é inversa da primeira fórmula que gera a tabela verdade dada. Agora, para obtermos uma fórmula na FNC basta que que neguemos a fórmula obtida anteriormente:

Fórmula: $(p \land (\sim q)) \lor ((\sim p) \land (\sim q))$

$\sim((p \land (\sim q)) \lor ((\sim p) \land (\sim q)))$

Aplicando DeMorgan

$((\sim p) \lor q) \land (p \lor q)$

Argumentos

Argumentos - Introdução

Quando queremos demonstrar formalmente algum fato, devemos nos assegurar que os argumentos usados nas provas são válidos, ou seja que são consequências necessárias de fatos supostos conhecidos. O processo de se obter uma conclusão de uma sequência de proposições é chamado de raciocínio dedutivo. Vamos tratar agora dos argumentos dedutivos.

Argumentos - Introdução

Definição 3.1

Chamamos de argumento (lógico dedutivo) a uma sequência $p_1,p_2,...,p_n$, q de proposições, em que $p_1,p_2,...,p_n$ são chamados de premissas e q é chamado de conclusão. Denotamos o argumento por

$$p_1, p_2, ..., p_n \vdash q$$

Argumentos - Introdução

Definição 3.1

Chamamos de argumento (lógico dedutivo) a uma sequência $p_1,p_2,...,p_n$, q de proposições, em que $p_1,p_2,...,p_n$ são chamados de premissas e q é chamado de conclusão. Denotamos o argumento por

$$p_1, p_2, ..., p_n \vdash q$$

Intuitivamente, um argumento é uma asserção em que um número de proposições $p_1, ..., p_n$ tem como consequência uma proposição q.

Argumentos - Introdução

Eis um exemplo de argumento:

P1: Se José pegou as joias ou a Sra. Krasov mentiu, então ocorreu um crime.

P2: Se ocorreu um crime então o Sr. Krasov estava na cidade.

P3: O Sr. Krasov não estava na cidade.

Q: Portanto, ou José não pegou as joias ou a Sra. Krasov não mentiu.