Aula 1 – Introdução, Proposições e Conectivos

Guilherme Francisco Ferreira

Lógica - Introdução

O que é Lógica? O que significa estudar Lógica? Qual a sua definição? Ao iniciar este estudo, vários autores apresentam definições populares sobre o tema. Mendelson (1987), por exemplo, afirma que "Lógica é a análise de métodos de raciocínio". No estudo desses métodos **a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdos dos argumentos**.

A Lógica tem aplicações em diversas áreas do conhecimento, como: Matemática, Filosofia, Ciência da Computação. Em Ciência de Computação podemos destacar certos aspectos fundamentais como algoritmos, linguagens formais, circuitos e técnicas de programação que são fortemente baseados na lógica formal.

Lógica - Introdução

O que isto quer dizer: “a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos **argumentos**”?

Antes disso: o que é um argumento? Adotamos a noção intuitiva de que **um argumento consiste de premissas e conclusão**.

<u>Exemplos</u>

- **Todo homem é mortal**. **Sócrates é um homem**. Portanto, ***Sócrates é mortal***.

Premissas: “Todo homem é mortal” e “´Sócrates é um homem”.

Conclusão: “Sócrates é mortal”.

- **Todo cão late**. **Totó é um cão**. Portanto, ***Totó late***.

Premissas: “Todo cão late” e “Totó é um cão”.

Conclusão: “Totó late”.

Lógica - Introdução

O que isto quer dizer: “a Lógica está interessada principalmente na forma e não no conteúdo dos argumentos”?

Retomando os argumentos apresentados anteriormente:

- **Todo homem é mortal**. **Sócrates é um homem**. Portanto, ***Sócrates é mortal***.
- **Todo cão late**. **Totó é um cão**. Portanto, ***Totó late***.

Do ponto de vista da Lógica, esses argumentos têm a mesma estrutura ou forma:

- **Todo X é Y**. **Z é X**. Portanto, ***Z é Y***.

Percebemos, intuitivamente, que esses argumentos são válidos.

Lógica - Introdução

Nesse sentido, em um argumento as conclusões podem ser consequência das premissas sem que as premissas sejam necessariamente verdadeiras.

Exemplo

- **Todo número positivo é par**. **Três é um número positivo**. Portanto, ***Três é um número par***.

Os exemplos dados até aqui mostram que qualquer critério que seja estabelecido para determinar a **validade ou não de um argumento**, deve levar mais em conta a sua estrutura, que os valores individuais das proposições componentes.

Proposição

A linguagem natural, com a qual nos expressamos diariamente, é muito suscetível a ambiguidades e imprecisões. Existem frases não gramaticais que possuem sentido (por exemplo, anúncios de classificados no jornal) e frases perfeitamente gramaticais sem sentido ou com múltiplos sentidos.

Proposição

Por esse motivo concentraremos nossa atenção em sentenças em que faça sentido atribuir às mesmas um valor verdadeiro ou falso mas não ambos simultaneamente (esta propriedade é conhecida como a Hipótese do Terceiro Excluído) e que não existam valores que sejam variáveis cuja veracidade ou não da sentença dependa do valor que se atribui a este valor variável.

Proposição

<u>Exemplo</u>

(a) Os únicos números inteiros positivos que dividem 7 são 1 e 7.
(b) A lua não é feita de queijo.
(c) Esta sentença é falsa.
(d) Você vai viajar amanhã!
(e) Domingo vai chover.
(f) A terra é o único planeta habitado.
(g) 5x = 12.
(h) Eu gosto de sorvete.

Proposição

Temos então que só faz sentido atribuir um valor verdadeiro ou falso às sentenças (a), (b), (e) e (f).

- A sentença (c) é um paradoxo.
- A sentença (d) é um comando - Comandos e solicitações não são exatamente proposições. Quando uma ordem é dada (“feche a porta!”) ou uma solicitação feita (“por favor, me passe o prato”) não há necessariamente um valor verdade por trás destas frases.
- A sentença (g) depende do valor das variável x – Ela é verdadeira apenas quando x = 12/5.
- A sentença (h) não é possível determinar o seu valor.

Proposição

<u>Definição 1.1</u>
Chamamos de proposição a qualquer sentença para a qual tenha sentido atribuir de modo único um valor verdadeiro ou falso.

Como vimos até aqui, uma proposição é usualmente expressa por uma sentença declarativa. Em geral, vamos usar letras latinas minúsculas para denotar as proposições (p, q, r,…).

Proposição

As proposições podem ser simples ou compostas. As proposições compostas são formadas de proposições simples conectadas através de operadores (ou conetivos) lógicos. Estes operadores ou conetivos representam as seguintes operações lógicas, que serão descritas mais adiante:

- Conjunção
- Disjunção
- Negação
- Implicação (ou condicional)
- Bi-implicação (ou bicondicional)

Conectivos - Conjunção de proposições

O conetivo “e” é a forma mais usual de se formarem proposições compostas através da **conjunção** lógica de proposições. Este conetivo é usado, por exemplo, em sentenças como “gatos são mamíferos e canários são aves”, “$3 < 5$ e $2+3=5$”.

O símbolo ∧ é usado para representar formalmente a conjunção lógica. Caso p e q sejam proposições, então a fórmula **p ∧ q** representa a conjunção lógica das proposições p e q.

Conectivos - Conjunção de proposições

Exercício 1 - Responda as seguintes questões:

(a) Se **p** é verdadeira e **q** verdadeira, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(b) Se **p** é verdadeira e **q** falsa, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(c) Se **p** é falsa e **q** verdadeira, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

(d) Se ambas **p** e **q** são falsas, que valor você atribuiria a **p ∧ q**?

Construa uma tabela resumindo o resultado das questões (a) até (d). Use V para verdadeiro e F para falso. Mostre em cada linha da tabela a combinação de valores de **p**, **q** e de **p ∧ q**.

Conectivos - Disjunção (operador ou) de proposições

O símbolo ∨ será empregado para representar um dos significados usuais do conetivo “ou” em frases da linguagem natural. O significado assumido por este símbolo é o do “ou inclusivo” que somente será falso se ambas as sentenças sendo conectadas por ele forem falsas, isto é, **p ∨ q** será falso somente se ambos **p** e **q** forem falsos. Diz-se que o símbolo ∨ representa a disjunção lógica das proposições **p** e **q**.

Exercício 2 – Construir uma tabela com a combinação dos valores de p, q e p ∨ q. Como no exercício anterior, utilize V para verdadeiro e F para falso.

Conectivos - Disjunção (operador ou) de proposições

Observação 1.1

A tabela verdade associada à disjunção $p \vee q$ não corresponde ao sentido usual que é dado à palavra ou, sendo este sentido recuperado por um outro conectivo, chamado ou exclusivo, e denotado $p \oplus q$ com a seguinte tabela verdade:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conectivos – Negação de uma proposição

Os símbolos ¬ ou ~ serão usados para representar a negação de uma proposição. Neste caso, se p é uma proposição verdadeira então ¬p ou ~p será uma proposição falsa e vice-versa. Ou seja ¬p é a negação lógica de p (as vezes o símbolo ‘ (apóstrofo) também é usado para simbolizar a negação). **No decorrer desta disciplina usaremos o símbolo ~ para representar a negação de uma proposição**.

Conectivos – Conjunção, Disjunção e Negação

<u>**Definição 1.2**</u>

Sejam p e q proposições, então a conjunção de p e q é a proposição “p e q” denotada por **p ∧ q**.

A disjunção de p e q é a proposição "p ou q" denotada por **p∨q**.

E a negação de p é a proposição "não p" denotada por **~p**.

Conectivos – Implicação

O símbolo → será usado para representar sentenças como “se chover, então a rua ficará molhada”, ou então “não estudar implica em tirar notas baixas” ou também “não fui ao cinema porque o carro estragou” e sentenças similares. Geralmente estas sentenças podem ser reescritas no formato “Se sentença p, então sentença q” que simbolicamente fica apenas: $p \rightarrow q$.

A noção que este operador lógico pretende capturar é a de existência de implicação ou de consequência entre as sentenças.

Conectivos – Implicação

<u>Definição 1.5</u>

Dadas duas proposições p e q, chamamos de implicação de p em q à proposição "se p então q", denotada por $\mathbf{p \rightarrow q}$.

Conectivos – Implicação

Exemplo 1.6

Consideremos a implicação $p \rightarrow q$ em que:

p: “chover”

q: “vir me buscar”

Ou seja, $p \rightarrow q$ é “se chover, então você vem me buscar”.

Conectivos – Implicação

Exemplo 1.6

Consideremos a implicação $p \rightarrow q$ em que:

p: “chover”

q: “vir me buscar”

Ou seja, $p \rightarrow q$ é “se chover, então você vem me buscar”.

Notamos então que o único caso que não se pode aceitar como verdadeiro é p é verdadeiro e q é falso, todos os outros são aceitáveis. Pensemos em outros exemplos.

Conectivos – Implicação

Os exemplos servem como uma justificação informal para a tabela abaixo:

p	q	$p \longrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Conectivos – Bicondicional

<u>Definição 1.7</u>

Dadas duas proposições p e q, chamamos de bicondional à proposição "p se, e somente se q", denotada por $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$.

Expressões alternativas para “p se, e somente se q” são: “p see q” e “p é uma condição necessária e suficiente para q”.

Conectivos – Bicondicional

Exemplo

Consideremos a implicação p ↔ q em que:

p: “vou te buscar”

q: “chover”

Ou seja, p ↔ q é “vou te buscar se, e somente se, chover”.

Conectivos – Bicondicional

O exemplo anterior serve como justificação informal para definirmos que a operação bicondicional de duas proposições é definida de forma que esta operação resulte verdadeira apenas quando estas duas proposições forem iguais (tiverem o mesmo valor lógico). Ou seja, resulte na tabela abaixo:

p	q	$p \longleftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Conectivos – Bicondicional

O conectivo Bicondicional também é chamado de "Bi-implicação". Vejamos o porquê disso construindo a tabela de $(p \rightarrow q) \land (q \rightarrow p)$.

Conectivos – Bicondicional

O conectivo Bicondicional também é chamado de “Bi-implicação”. Vejamos o porquê disso construindo a tabela de (p→q) ∧ (q→p).

Notamos neste caso que p↔q e (p→q)∧(q→p) têm as últimas colunas de suas tabelas verdade idênticas, de fato:

p	q	$p \longrightarrow q$	$q \longrightarrow p$	$(p \longrightarrow q) \wedge (q \longrightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Fórmulas e Precedência

Uma fórmula é construída pela composição de símbolos de sentenças simples (p, q, ...) e de conetivos lógicos binários (∧ ,∨ ,→ e ↔) e unários (~). Também podem ser usados parênteses. A precedência usual é:

1. Fórmulas dentro de parênteses (os mais internos primeiro)
2. ~ (a negação)
3. ∧ (conjunção)
4. ∨ (disjunção)
5. → (implicação material)
6. ↔ (bicondicional)
7. Da esquerda para a direita

Fórmulas e Precedência

Uma fórmula que não tenha nenhum erro de sintaxe em sua escrita (por exemplo, não tenha excesso nem falta de parênteses, conectivos ou símbolos estranhos, etc.) é chamada de **fórmula bem-formada**.

Exemplos de fórmulas bem-formadas:

Supondo que p, q e r são proposições lógicas então as seguintes expressões são fórmulas bem-formadas (ou apenas fórmulas):

$(p \to q) \leftrightarrow (q \to p)$

$(p \lor \sim p) \to (q \land \sim q)$

Fórmulas e Precedência

Exemplos de fórmulas bem-formadas:

Supondo que p, q e r são proposições lógicas então as seguintes expressões são fórmulas bem-formadas (ou apenas fórmulas):

$\neg((p \wedge \neg q) \rightarrow \sim r)$

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

$((p \wedge q \wedge r) \vee \sim(q \vee p) \vee (p \wedge \sim r)) \rightarrow (r \vee \sim p)$

$\sim\sim(p \wedge r)$

Fórmulas e Precedência

As seguintes fórmulas apresentam alguns erros bastante comuns de escrita (sintaxe) que podem ocorrer nas fórmulas (do lado é indicado o tipo de erro):

(p→q ↔ (q→p)	falta um fecha parênteses
(p∨~) → (q∧~q)	a primeira negação não foi seguida de uma proposição
~((p ~q) → ~r	falta um operador lógico entre p e ~q
(∨~p) → (q∧~q)	falta uma proposição no lado esquerdo do operador ∨
(p∨~p) → (q∧)	falta uma proposição no lado direito do operador ∧

O método das Tabelas Verdade

Uma tabela verdade mostra, em suas colunas mais a esquerda, todas as combinações de valores lógicos que as proposições de uma dada fórmula podem assumir. A partir destes valores de entrada pode-se "calcular" os valores que esta fórmula irá ter para cada uma destas combinações de valores.

Este cálculo é feito passo a passo criando-se colunas intermediárias que ficam posicionadas à direita das colunas de entrada e que contém os valores das sub-fórmulas que compõem a fórmula principal. Na última coluna mais a direita se coloca a coluna que contém os valores finais desta fórmula.

O método das Tabelas Verdade

Resumindo, para se construir a tabela-verdade de uma fórmula lógica pode-se seguir os seguintes passos:

(i) nas colunas à esquerda coloque os símbolos sentenciais simples (p, q, ...), depois

(ii) se houverem sentenças simples negadas (~p, ~q, ...) coloque-as nas próximas colunas e por fim

(iii) seguindo a precedência crie uma coluna para cada fórmula composta (não é necessário repetir as sentenças simples negadas).

A última coluna a direita deve ser a expressão ou fórmula final.

O método das Tabelas Verdade

A última coluna a direita deve ser a expressão ou fórmula final.

As sentenças ou símbolos proposicionais simples pertencentes a uma fórmula definem o número de linhas da tabela verdade para esta fórmula através de uma regra simples:

1 símbolo: p	2 linhas (2^1 combinações: V e F)
2 símbolos: p e q	4 linhas (2^2 combinações: VV, VF, FV, FF)
3 símbolos: p, q e r	8 linhas (2^3 combinações)
N símbolos: p, q, ...	2^n linhas (2^n combinações)