IPRJ - Cálculo Numérico

Spline Cúbica

Nome do aluno : Vinicius Carvalho Monnerat Bandeira
Matrícula: 202020466711

Objetivos:

Dado o exercício proposto pelo trabalho, foi feito o estudo acerca da aplicação de Interpolação de Spline Cúbica, com objetivo de analisar sua aplicação.

Sumário:

1. Desenvolvimento Teórico:...3

1. Desenvolvimento Teórico:

A interpolação de spline cúbica é uma técnica de interpolação polinomial que utiliza polinômios de terceiro grau (cúbicos) para interpolar dados em intervalos específicos.

Diferente da interpolação polinomial tradicional, onde um único polinômio é utilizado para interpolar todos os pontos, a interpolação de spline cúbica divide o conjunto de pontos em segmentos menores e utiliza polinômios cúbicos distintos para cada segmento.

A ideia por trás da interpolação de spline cúbica é obter uma função suave e contínua que passe por todos os pontos de dados. Essa função é construída combinando polinômios cúbicos em cada segmento, de forma que os polinômios se encaixem perfeitamente nos pontos de junção e suas derivadas também sejam contínuas.

Para construir uma interpolação de spline cúbica, são utilizados quatro critérios principais:

- Interpolação: A função deve passar por todos os pontos de dados.
- Suavidade: Os segmentos devem se encaixar de forma suave nos pontos de junção, sem descontinuidades.
- Continuidade da primeira derivada: As derivadas nos pontos de junção devem ser contínuas, garantindo uma transição suave entre os segmentos.
- Continuidade da segunda derivada: As segundas derivadas nos pontos de junção devem ser contínuas, garantindo que a função seja suave e não tenha curvas abruptas.

Esses critérios permitem que a interpolação de spline cúbica forneça uma aproximação precisa e suave dos dados originais, evitando oscilações indesejadas ou comportamentos não realistas.

Além disso, a interpolação de spline cúbica também permite a aplicação de condições adicionais nos pontos de extremidade, como fixar valores de derivadas ou segundas derivadas, para controlar o comportamento da interpolação nas bordas do intervalo. Isso é particularmente útil em problemas de interpolação que requerem uma resposta específica nas bordas dos dados.

Diante do exercício proposto temos:

$f_1(x) = (x + 1)^3,\ x \in [-2, -1],$

$f_2(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ x \in [-1, 1],$

$f_3(x) = (x - 1)^2,\ x \in [1, 2].$

Considerando a continuidade das funções nos pontos de junção, ou seja, $x = -1\ e\ x = 1$, analiza-se as derivadas primárias e secundárias de $f_1(x),\ f_2(x)\ e\ f_3(x)$.

Assim, para $x = -1$:

$\grave{f}_1(-1) = 0\ e\ \grave{f}_2(-1) = 3a - 2b + c$, para as derivadas primárias.

$f_1''(-1) = 0 \; e \; f_2''(-1) = -6a + 2b$, para as derivadas secundárias.

Para $x = 1$:

$f_1'(1) = 0 \; e \; f_2'(1) = 3a + 2b + c$, para as derivadas primárias.

$f_1''(1) = 2 \; e \; f_2''(1) = 6a + 2b$, para as derivadas secundárias.

Dessa forma podemos resolver o sistema linear para obter os valores de a, b, c. Sendo estes: $a = \frac{1}{6}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2}$. Para obter d, podemos aplicar em um dos pontos de junção na equação $f_2(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + d$. Aplicando em $x = -1$, $d = \frac{1}{6}$. Aplicando em $x = 1$, $d = \frac{1}{2}$. Observa-se então uma descontinuidade para a função. Fazendo uma análise gráfica de $f_1(x) \; e \; f_3(x)$:

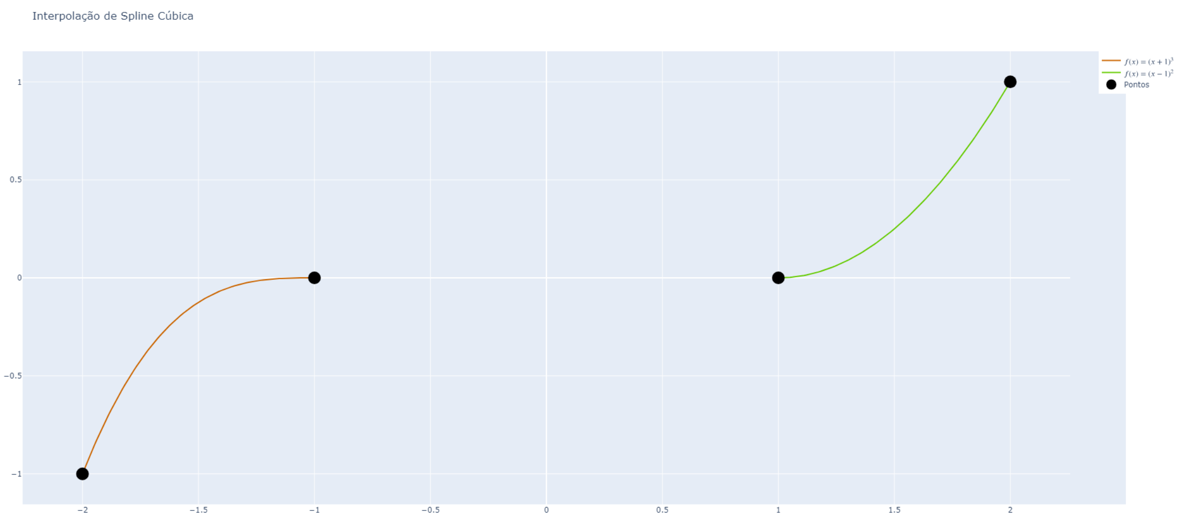

Imagem 1 - Gráficos de $f_1(x) \; e \; f_3(x)$

Considerando a derivada primária de $f_1(x) \; e \; f_3(x)$ nos pontos $x = -1 \; e \; x = 1$, temos que sua inclinação é zero, logo isso nos conduz a uma reta que liga os dois pontos. Sendo assim, os reais valores a, b, c, d na verdade é $a = 0, b = 0, c = 0, d = 0$. Logo, $f_2(x) = 0$, tendo por fim o gráfico no formato:

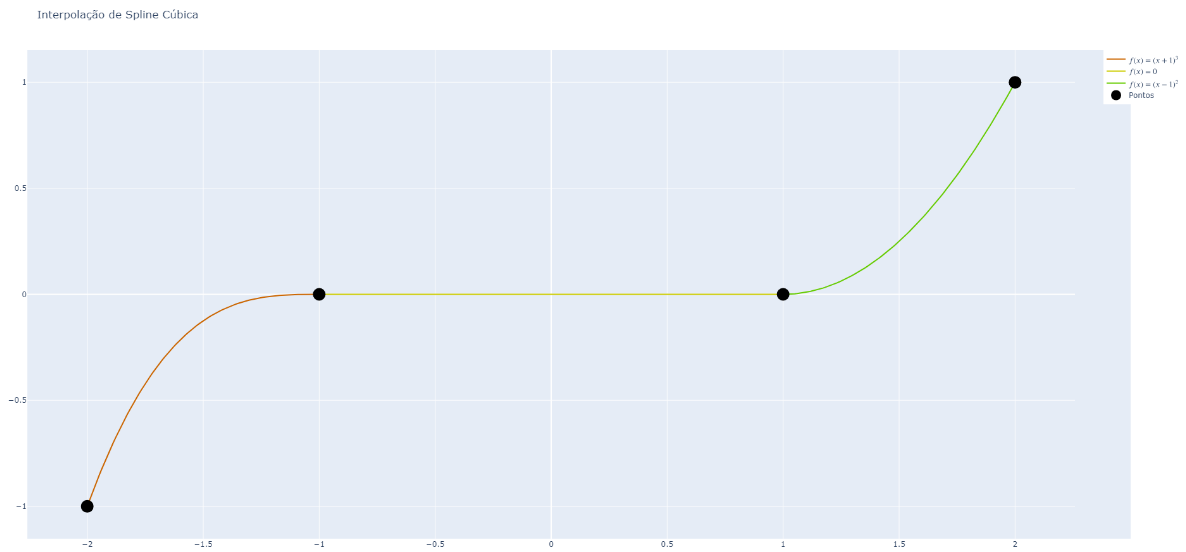

Imagem 2 - Gráfico de $f_1(x),\ f_2(x)$ *e* $f_3(x)$

Fazendo uma análise mais precisa, envolvendo a análise do polinômio interpolador nos pontos de interesse, temos:

$$S_1(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^3 + \frac{5}{4}(x + 2),\ x \in [-2, -1],$$

$$S_2(x) = \frac{1}{4}(x + 1)^3 - \frac{3}{4}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}(x + 1),\ x \in [-1, 1],$$

$$S_3(x) = -\frac{1}{4}(x - 1)^3 + \frac{3}{4}(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(x - 1),\ x \in [1, 2].$$

Seu gráfico será:

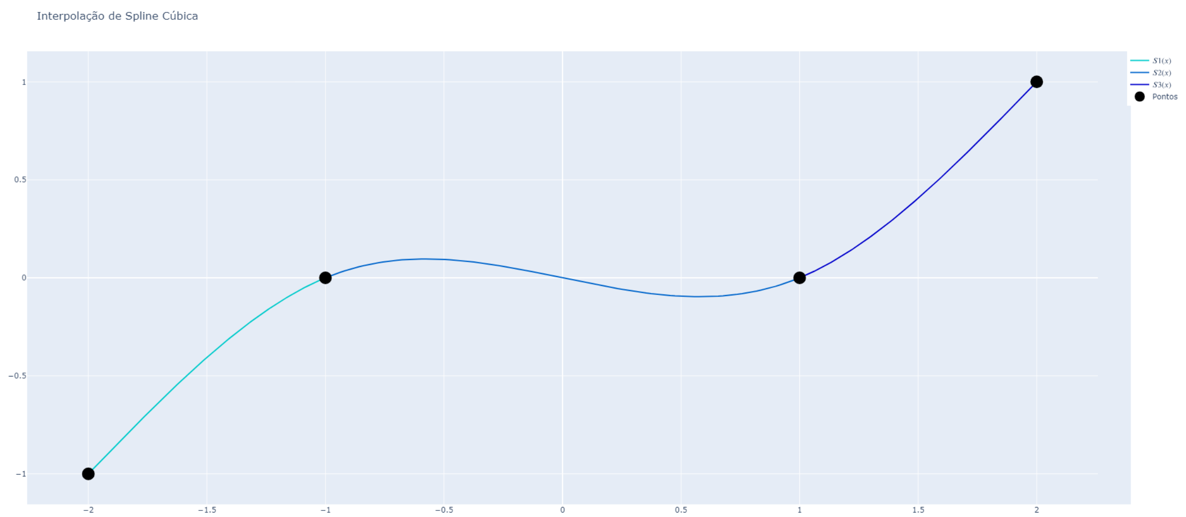

Imagem 3 - Gráfico do Polinômio Interpolador

Assim comparando as curvas temos:

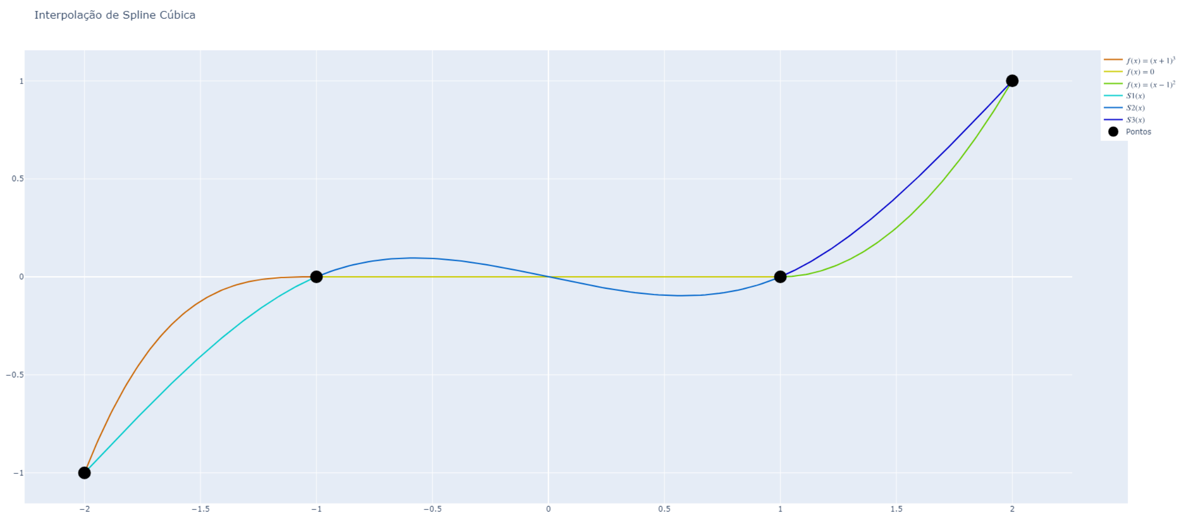

Imagem 4 - Curvas sobrepostas para comparação

A implementação gráfica e cálculo das derivadas primárias e secundárias foi feita em python, utilizando as bibliotecas NumPy, SymPy e Plotly. No terminal são impressos os valores das derivadas aplicadas nos pontos de junção e em uma nova aba é apresentado os gráficos lado a lado.