IPRJ - Cálculo Numérico

Avaliação 2

Nome do aluno : Vinicius Carvalho Monnerat Bandeira
Matrícula: 202020466711

Objetivos:

Propor soluções para os exercícios, utilizando Polinômios.

Sumário:

1. Questão 1:

A e B)

Dados os 3 pares ordenados da tabela, foi desenvolvido o algoritmo em python que calcula o valor para o método da Derivação Numérica e também o Polinômio de Lagrange aplicados no ponto de interesse, nesse caso, $x = 2.8$, mostrando também o polinômio interpolador. Após, também é mostrado o gráfico para os polinômios calculados, apresentando informações como: pontos da tabela, linha dos polinômios e ponto de interesse. Assim, o resultado obtido foi (considerando 4 casas decimais):

```
==================================

Calculadora para valor aproximado pelo Polinômio da Derivação Numérica(A) e Lagrange(B) para x=2.8 dados os pontos Xi=[2.5, 3, 3.5] e Yi=[0.503, 0.0806, 1.192]

A) Dado o polinômio:

        2
0.7669·Z  - 1.1893·Z + 0.503

Onde Z é definido por:

2.8 - X₀
──────── = Z
   h

O valor aproximado pelo Polinômio da Derivação Numérica para x=2.8 é 0.0655

==================================

B) Dado o polinômio:

0.503·L₀ + 0.0806·L₁ + 1.192·L₂

Tal que:

1.006 = L₀
-0.3224 = L₁
2.384 = L₂

O valor aproximado pelo Polinômio de Lagrange para x=2.8 é 0.0655

==================================
```

Imagem 1 - Resultado do ponto de interesse aplicado (A) e (B)

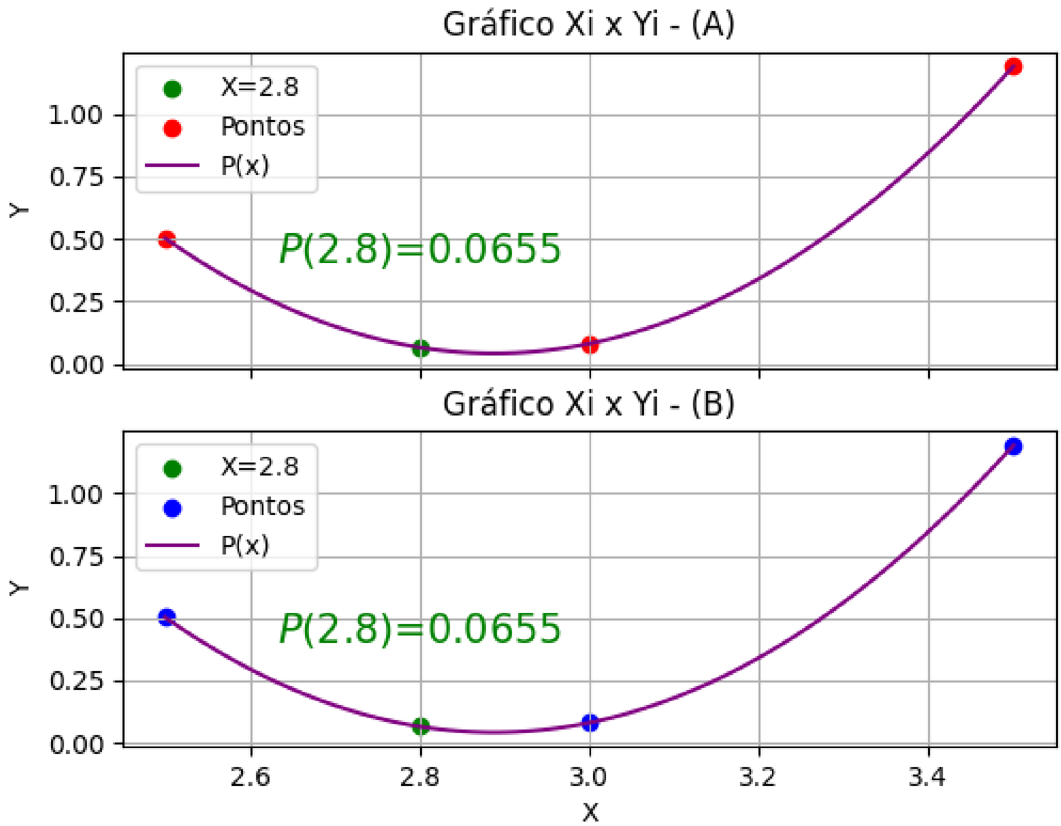

Imagem 2 - Gráficos dos Métodos de Derivação Numérica (A) e Polinômio de Lagrange (B)

C)

Considerando que o resultado obtido anteriormente, quando utilizam-se 4 casas decimais foi o mesmo para ambos os métodos, é seguro dizer que para essa precisão, ambos obtiveram resultados satisfatórios, sendo eficientes em sua resolução. Para efeito de comparação, foi removido o filtro de exibição do resultado final de ambos os métodos, mostrando então que apenas em suas últimas casas decimais as diferenças podem ser notadas. Ainda é possível dizer que este resultado pode estar atrelado à resíduos de memória, reafirmando a equivalência dos métodos para esse caso.

```
==================================

Calculadora para valor aproximado pelo Polinômio da Derivação Numérica(A) e Lagrange(B) para x=2.8 dados os
 pontos Xi=[2.5, 3, 3.5] e Yi=[0.503, 0.0806, 1.192]

A) O valor aproximado pelo Polinômio da Derivação Numérica para x=2.8 é 0.06550400000000001
B) O valor aproximado pelo Polinômio de Lagrange para x=2.8 é 0.06550400000000012

==================================
```

Imagem 3 - Comparação dos resultados para uma maior precisão

O código utiliza as bibliotecas NumPy e Matplotlib para exibição do gráfico e SymPy para cálculo do método da Derivação Numérica.

2. Questão 2:

A, B e C)

Observada a tabela e os intervalos e pontos a serem estudados, foi desenvolvido um algoritmo que pudesse calcular a Integral Numérica de 3 formas diferentes, a Regra dos Trapézios composta, a 1ª (ou $\frac{1}{3}$) Regra de Simpson composta e a 2ª (ou $\frac{3}{8}$) Regra de Simpson composta. São exibidos também os valores para os intervalos dos erros relacionados a cada espaço de integração e seus valores parciais. Assim, foi possível calcular a vazão total que atravessa a seção circular de diferentes maneiras para as questões (A) e (B):

```
Dada as expressões:

r·cos(r) = V(r)
     ⌠
2·π· ⎮ V(r) dr = F
     ⌡

==================================
A)
Para o intervalo de 5 pontos em [0,2], Yi=[0, 1.47, 2.87, 4.2, 5.43]
Com o polinômio interpolador:
                       4                         3                        2
- 0.00125000000000001·Z  + 0.00750000000000002·Z  - 0.0487499999999999·Z  + 1.5125·Z


O valor da integral utilizando a 1ª Regra de Simpson é 35.4476, com erro no intervalo ]0,-0.00194784446820031[
O valor da integral utilizando a 2ª Regra de Simpson é 31.6319, com erro no intervalo ]0,-0.00438265005345069[

E, para o intervalo de 10 pontos em [2,4], Yi=[5.43, 6.31, 7.07, 7.62, 7.77, 7.83, 8.27, 8.43, 8.79, 0]
Com o polinômio interpolador:
                       9                         8                        7                        6                        5                        4                        3                        2
- 7.11805555555553e-5·Z  + 0.00267460317460317·Z  - 0.0420054563492062·Z  + 0.357708333333332·Z  - 1.79341840277777·Z  + 5.38445833333331·Z  - 9.40474305555551·Z  + 8.60015873015869·Z  - 2.22476


190476189·Z + 5.43


O valor da integral utilizando a 1ª Regra de Simpson é 88.4254, com erro no intervalo ]-0.0000760018570125406,0.000152870584489117[
O valor da integral utilizando a 2ª Regra de Simpson é 92.0539, com erro no intervalo ]-0.000171004178278216,0.000343958815100513[


   A vazão total que se obtem utilizando a 1ª Regra de Simpson nos intervalos desejados é 123.8730, com erro no intervalo ]-0.0000760018570125406,-0.00179497388371119[
   A vazão total que se obtem utilizando a 2ª Regra de Simpson nos intervalos desejados é 123.6858, com erro no intervalo ]-0.000171004178278216,-0.00403869123835018[

==================================
```

Imagem 4 - Resultado da Integração Numérica questão (A)

```
==================================
B)
Para o intervalo de 5 pontos em [0,2], Yi=[0, 1.471, 2.879, 4.207, 5.434]
Com o polinômio interpolador:
                        4                         3                        2
- 0.000166666666666648·Z  - 0.00183333333333343·Z  - 0.0248333333333333·Z  + 1.49783333333333·Z


O valor da integral utilizando a Regra dos Trapézios é 35.4183, com erro no intervalo ]0,0.0410958825232116[
O valor da integral utilizando a 1ª Regra de Simpson é 35.5042, com erro no intervalo ]0,-0.00194784446820031[

E, para o intervalo de 6 pontos em [2,4], Yi=[5.434, 6.316, 7.072, 7.628, 7.77, 0]
Com o polinômio interpolador:
                      5           4          3           2
- 0.0595333333333333·Z  + 0.5895·Z  - 2.061·Z  + 2.8865·Z  - 0.473466666666667·Z + 5.434


O valor da integral utilizando a Regra dos Trapézios é 79.1757, com erro no intervalo ]0.0263013648148554,-0.110084785975208[
O valor da integral utilizando a 1ª Regra de Simpson é 76.1472, com erro no intervalo ]-0.000797837094174846,0.00160477424773295[


   A vazão total que se obtem utilizando a Regra dos Trapézios nos intervalos desejados é 114.5940, com erro no intervalo ]0,-0.000797837094174846[
   A vazão total que se obtem utilizando a 1ª Regra de Simpson nos intervalos desejados é 111.6514, com erro no intervalo ]-0.000797837094174846,-0.000343070220467355[

==================================
```

Imagem 5 - Resultado da Integração Numérica questão (B)

Foi possível gerar também o gráfico tomando os pontos dados nas questões (A) e (B), comparando o resultado do método em comum entre elas (1ª Regra de Simpson composta):

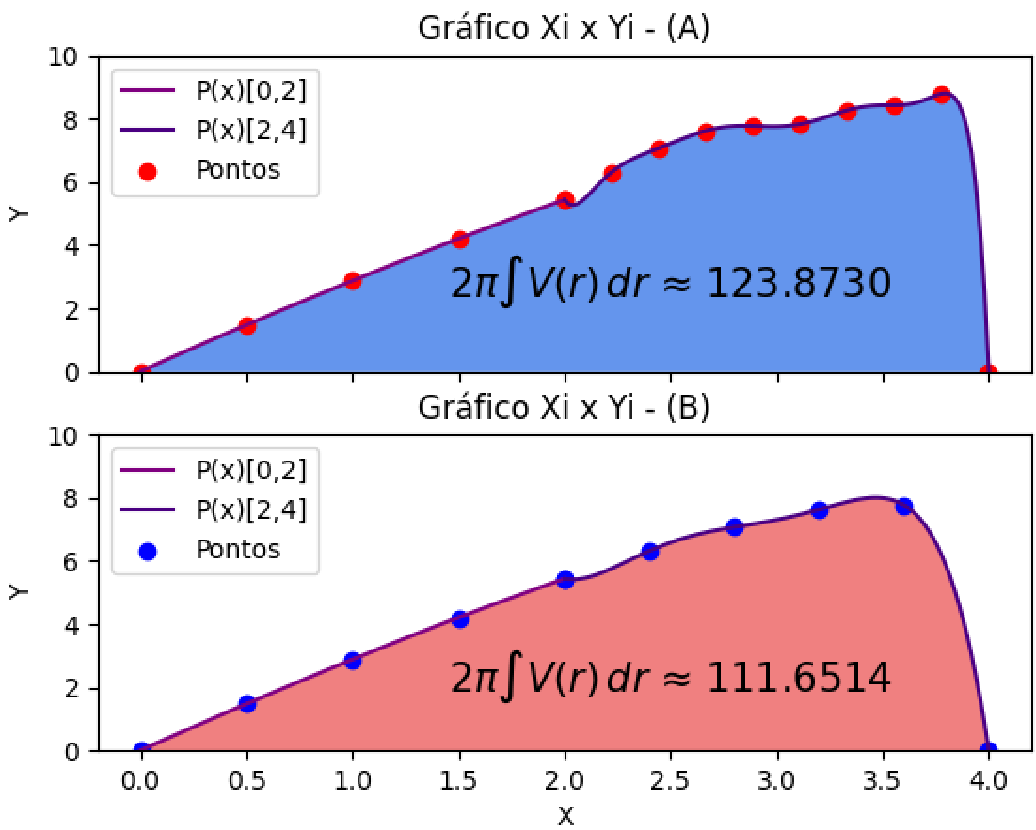

Imagem 6 - Gráficos dos pontos dados e sua área sob a curva

Com isso pode-se concluir que todos os métodos apresentaram resultados próximos, porém, o que mais influencia é a quantidade de pontos, comparando os resultados do método da 1ª Regra de Simpson composta em ambas questões, isso fica evidente. Já se relacionarmos o resultado especificamente ao erro, considerando sempre analisar a mesma quantidade de pontos, o método mais eficiente será a 2ª Regra de Simpson composta, tendo isso relacionado diretamente à fórmula geral de seu erro. Em segundo ficaria a 1ª Regra de Simpson composta e por fim a Regra dos Trapézios composta. Onde as fórmulas gerais para o erro:

- 2ª Regra de Simpson composta

  $$-\frac{(b-a)^5}{80\times n^4}\times\frac{df^4(\xi)}{dx}$$

- 1ª Regra de Simpson composta

  $$-\frac{(b-a)^5}{180\times n^4}\times\frac{df^4(\xi)}{dx}$$

- Regra dos Trapézios composta

  $$-\frac{(b-a)h^2}{12}\times\frac{df''(\xi)}{dx}$$

O programa utilizou a biblioteca Matplotlib e NumPy para exibição dos gráficos e SymPy para cálculo dos erros e exibição das expressões.