Bibliotecas

In [ ]:
```
import sympy as sp
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import animation
from matplotlib.animation import PillowWriter
from sympy.printing import latex
```

Simbolos do sympy

In [ ]:
```
t, g, l, m, k = sp.symbols('t g l m k')

theta = sp.symbols(r'theta', cls=sp.Function)
theta = theta(t)
theta_dot = sp.diff(theta, t)
theta_ddot = sp.diff(theta_dot, t)

u = sp.symbols(r'u', cls=sp.Function)
u = u(t)
u_dot = sp.diff(u, t)
u_ddot = sp.diff(u_dot, t)
```

Equações da posição em 'x' e 'y' da massa

In [ ]:
```
x = (l+u)*sp.sin(theta)
y = -(l+u)*sp.cos(theta)
```

Equação energia cinética

In [ ]:
```
T1 = sp.Rational(1,2)*m*(sp.diff(x, t)**2 + sp.diff(y, t)**2)

T = T1

T
```

Out[ ]:

$$\frac{m\left(\left(-\left(-l-u(t)\right)\sin\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}\theta(t)-\cos\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}u(t)\right)^{2}+\left(\left(l+u(t)\right)\cos\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}\theta(t)+\sin\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}u(t)\right)^{2}\right)}{2}$$

Equação energia potencial (gravitacional + elástica)

In [ ]:

```
U1 = y*m*g
U2 = sp.Rational(1,2)*k*(u**2)

U = U1 + U2

U
```

Out[ ]:

$$gm\left(-l-u(t)\right)\cos\left(\theta(t)\right)+\frac{ku^{2}(t)}{2}$$

Equação de Lagrange

In [ ]:

```
L = T - U

L
```

Out[ ]:

$$-gm\left(-l-u(t)\right)\cos\left(\theta(t)\right)-\frac{ku^{2}(t)}{2}+\frac{m\left(\left(-\left(-l-u(t)\right)\sin\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}\theta(t)-\cos\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}u(t)\right)^{2}+\left(\left(l+u(t)\right)\cos\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}\theta(t)+\sin\left(\theta(t)\right)\frac{d}{dt}u(t)\right)^{2}\right)}{2}$$

EDO θ(t)

In [ ]:

```
eq = sp.diff(L, theta) - sp.diff(sp.diff(L, theta_dot), t)
EDOθ = sp.simplify(eq)

EDOθ
```

Out[ ]:

$$-m\left(gl\sin\left(\theta(t)\right)+gu(t)\sin\left(\theta(t)\right)+l^{2}\frac{d^{2}}{dt^{2}}\theta(t)+2lu(t)\frac{d^{2}}{dt^{2}}\theta(t)+2l\frac{d}{dt}\theta(t)\frac{d}{dt}u(t)+u^{2}(t)\frac{d^{2}}{dt^{2}}\theta(t)+2u(t)\frac{d}{dt}\theta(t)\frac{d}{dt}u(t)\right)$$

EDO u(t)

In [ ]:
```
eq2 = sp.diff(L, u) - sp.diff(sp.diff(L, u_dot), t)
EDOu = sp.simplify(eq2)

EDOu
```

Out[ ]:

$$gm\cos\left(\theta(t)\right) - ku(t) + lm\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 + mu(t)\left(\frac{d}{dt}\theta(t)\right)^2 - m\frac{d^2}{dt^2}u(t)$$

Solução das EDO

In [ ]:
```
sols = sp.solve([EDOθ, EDOu], [theta_ddot, u_ddot])

sols
```

Out[ ]:
```
{Derivative(theta(t), (t, 2)): -g*sin(theta(t))/(l + u(t)) - 2*Derivative(theta(t), t)*Derivative(u(t), t)/(l + u(t)),
 Derivative(u(t), (t, 2)): g*cos(theta(t)) - k*u(t)/m + l*Derivative(theta(t), t)**2 + u(t)*Derivative(theta(t), t)**2}
```

Transforma as equações simbólicas em equações solucionáveis

In [ ]:
```
dthetaddt_f = sp.lambdify((theta, theta_dot, u, u_dot, g, l, m, k), sols[theta_ddot])
duddt_f = sp.lambdify((theta, theta_dot, u, u_dot, g, l, m, k), sols[u_ddot])
dthetadt_f = sp.lambdify(theta_dot, theta_dot)
dudt_f = sp.lambdify(u_dot, u_dot)
Ep = sp.lambdify((theta, u, g, l, m, k), U)
Ec = sp.lambdify((theta, theta_dot, u, u_dot, m, l), T)
```

Função que será usada para retornar as posições e velocidades no intervalo de tempo proposto pela solução no método ODEINT

In [ ]:
```
def dSdt(S, t, g, l, m, k):
    theta, thetad, u, ud = S
    return [dthetadt_f(thetad),
            dthetaddt_f(theta, thetad, u, ud, g, l, m, k),
            dudt_f(ud),
            duddt_f(theta, thetad, u, ud, g, l, m, k)]
```

Define as condições iniciais e calcula a solução das EDO's

In [ ]:
```
tempo_simulacao = 10 # 10 s
passo = 1000 # 0.001 s
t = np.linspace(0, tempo_simulacao, passo+1)
g = 9.81
l = 1
m = 1
k = 24
deg = 30
theta0 = deg*np.pi/180
dtheta0 = 0
u0 = 0
du0 = 0

sol = odeint(dSdt, y0 =[theta0, dtheta0, u0, du0], t=t, args=(g, l, m, k))
```

Como a variável 'sol' é uma lista de listas onde as posições representam as soluções de cada EDO retornada em 'dSdt()', no caso as posições e velocidades de θ e u, pode-se separar cada solução em váriaveis respectivas

In [ ]:
```
thepos = sol.T[0]
upos = sol.T[2]
thedot = sol.T[1]
udot = sol.T[3]
```

Com os valores de θ(t) e u(t) é possível cálcular então a posição (x,y) da massa estudada

In [ ]:
```
def pos(t, the, u1, l):
    x1 = (l+u1)*np.sin(the)
    y1 = -(l+u1)*np.cos(the)
    return [
        x1, y1
    ]


xpos, ypos = pos(t, thepos, upos, l)
```

Também é possível estudar as energias cinética e potencial

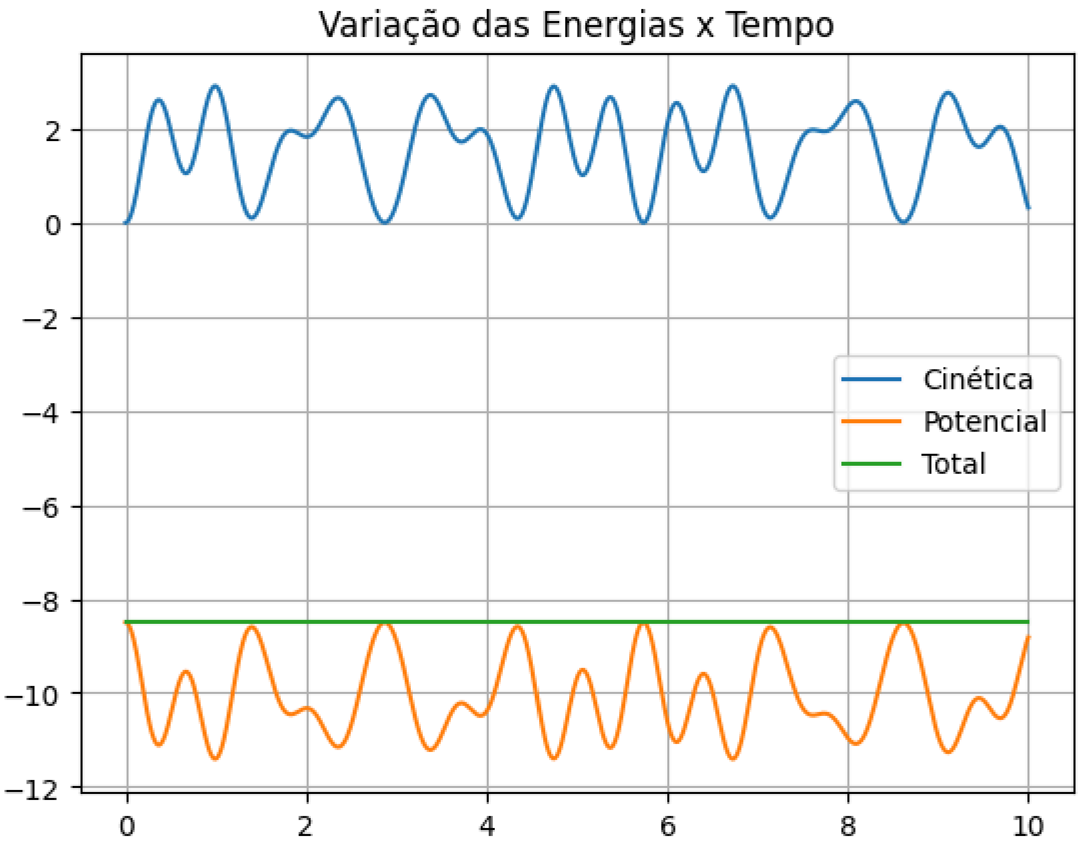
In [ ]:
```
Pot = Ep(thepos, upos, g, l, m, k)
Cine = Ec(thepos, thedot, upos, udot, m, l)

Etotal = Pot + Cine
```

A partir desse momento, todas as soluções foram calculadas e estão disponíveis para serem visualizadas, no caso do pêndulo estudado tem-se:

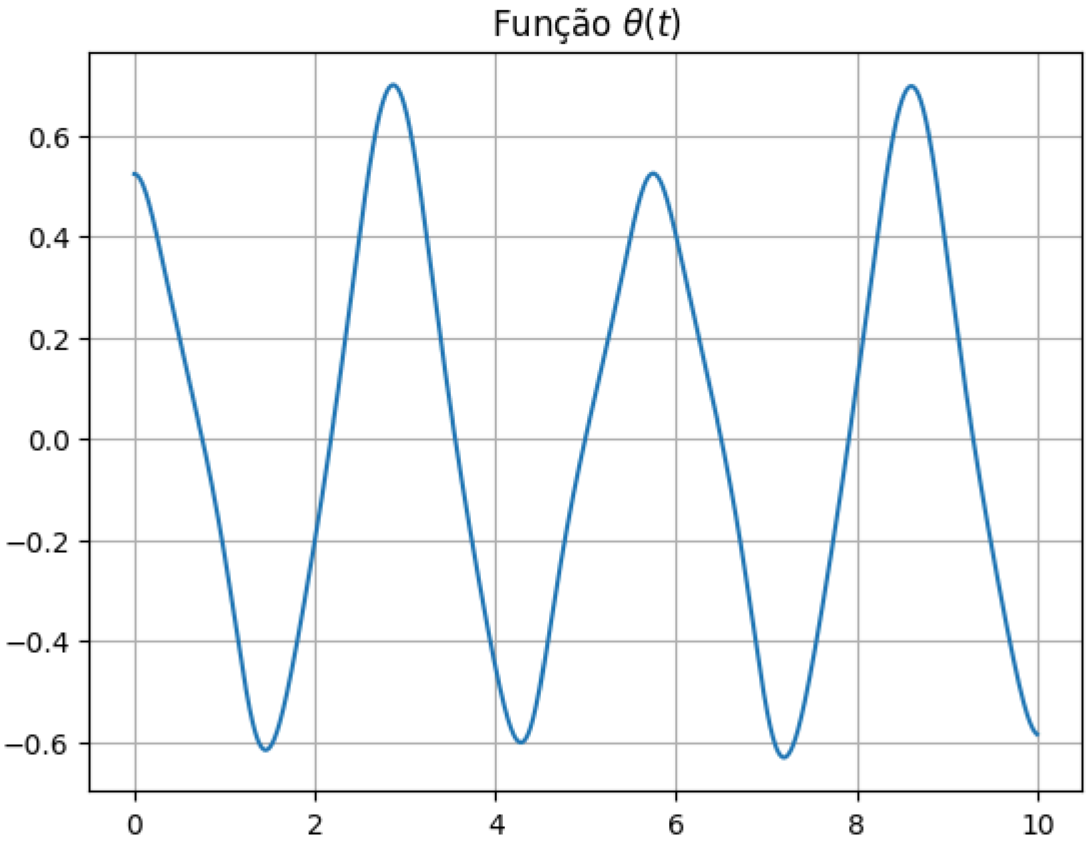
Para fins de estudo pode-se analizar a variação das energias cinética e potencial ao longo do tempo

In [ ]:
```
plt.title('Variação das Energias x Tempo')
plt.plot(t, Cine, label='Cinética')
plt.plot(t, Pot, label='Potencial')
plt.plot(t, Etotal, label='Total')
plt.legend()
plt.grid()
plt.show()
```



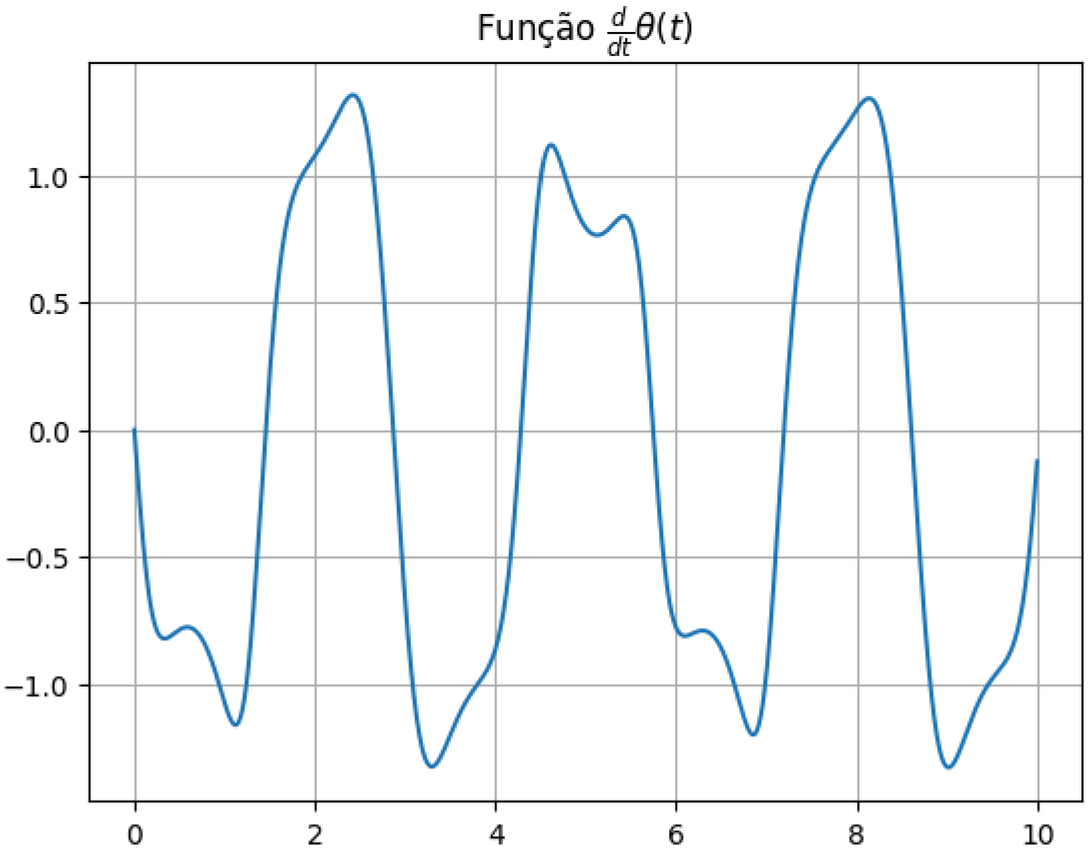
Para fins de estudo pode-se plotar a função θ(t)

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(theta)}$')
plt.plot(t, thepos)
plt.grid()
plt.show()
```



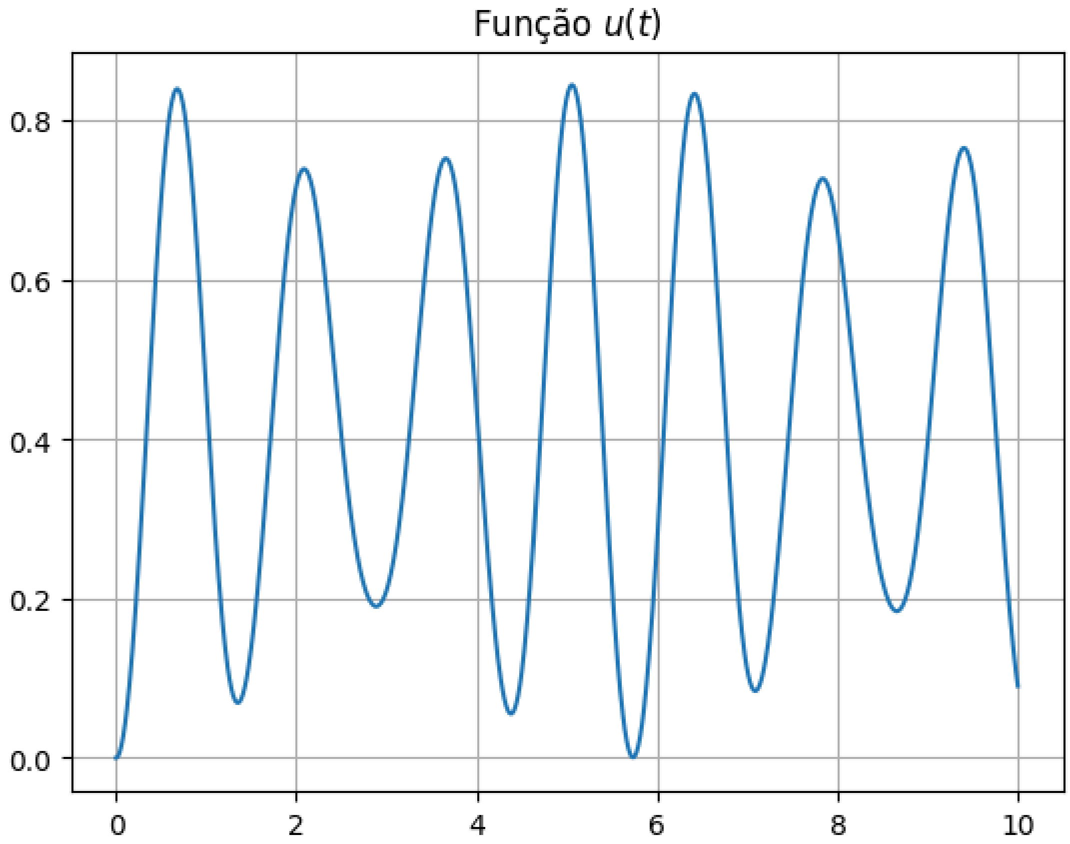
Para fins de estudo pode-se plotar a função dθ(t)/dt

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(theta_dot)}$')
plt.plot(t, thedot)
plt.grid()
plt.show()
```



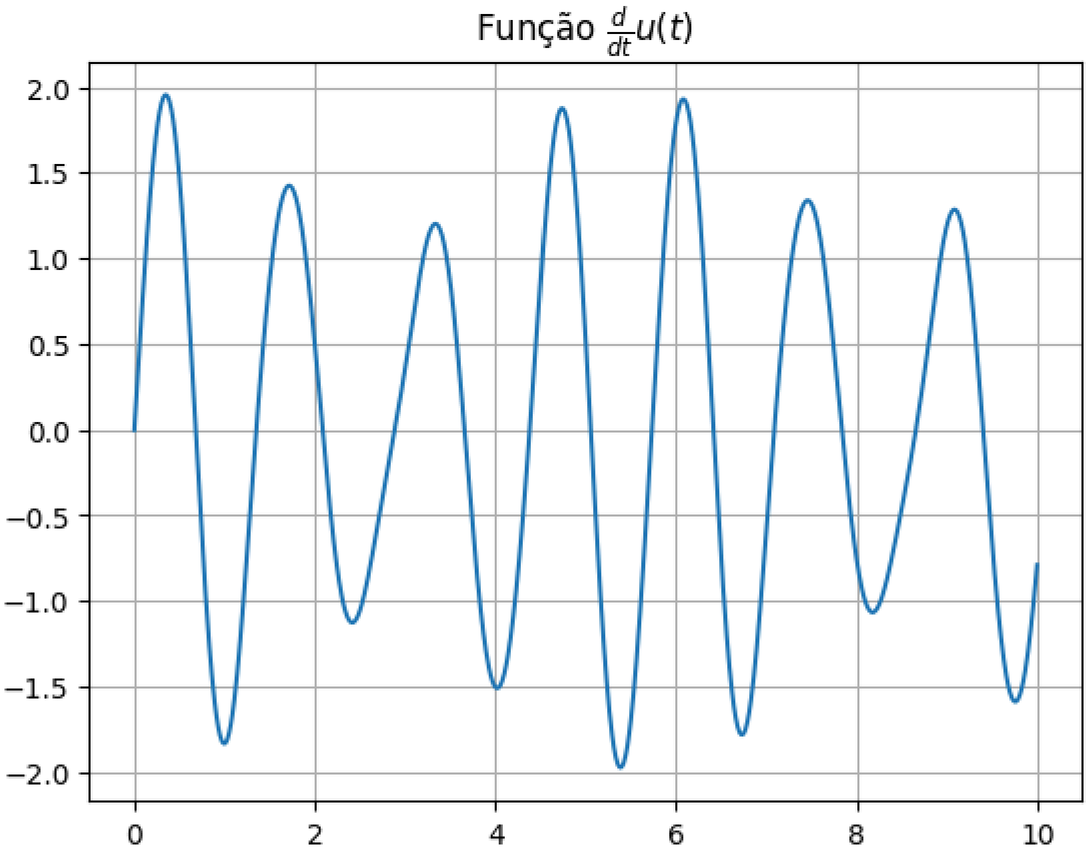
Para fins de estudo pode-se plotar a função u(t)

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(u)}$')
plt.plot(t, upos)
plt.grid()
plt.show()
```



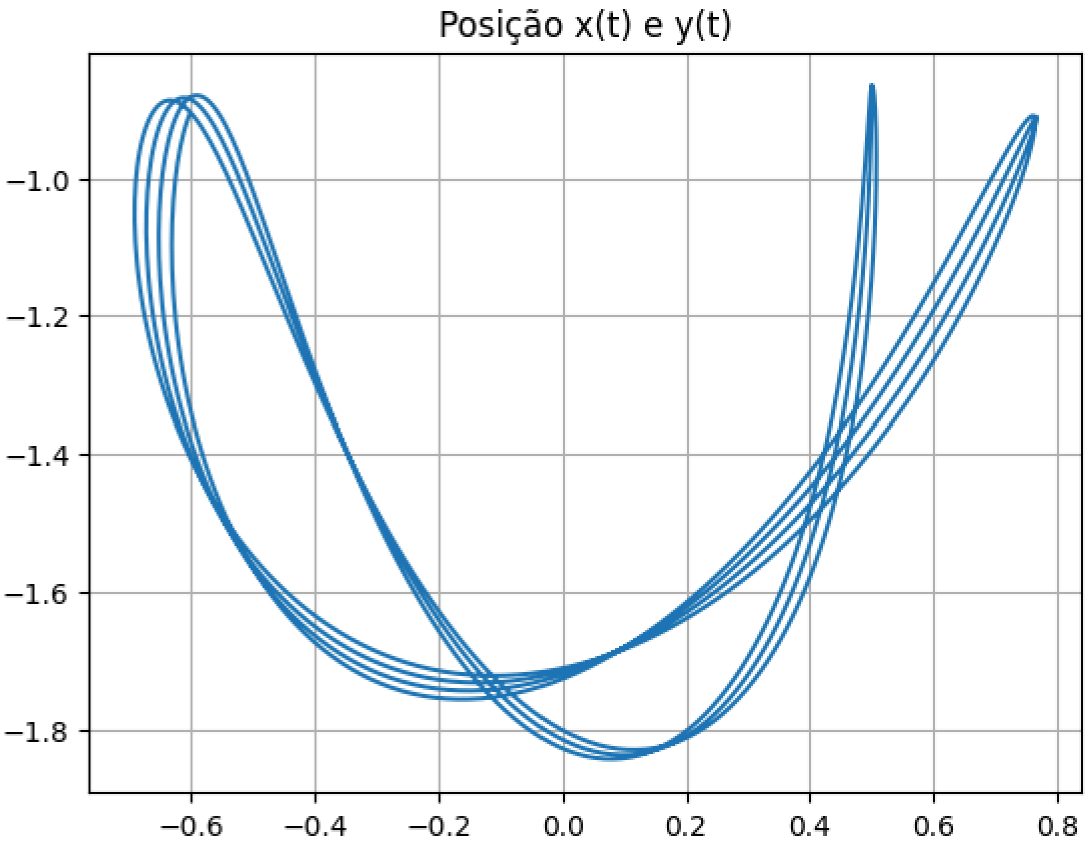
Para fins de estudo pode-se plotar a função du(t)/dt

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(u_dot)}$')
plt.plot(t, udot)
plt.grid()
plt.show()
```



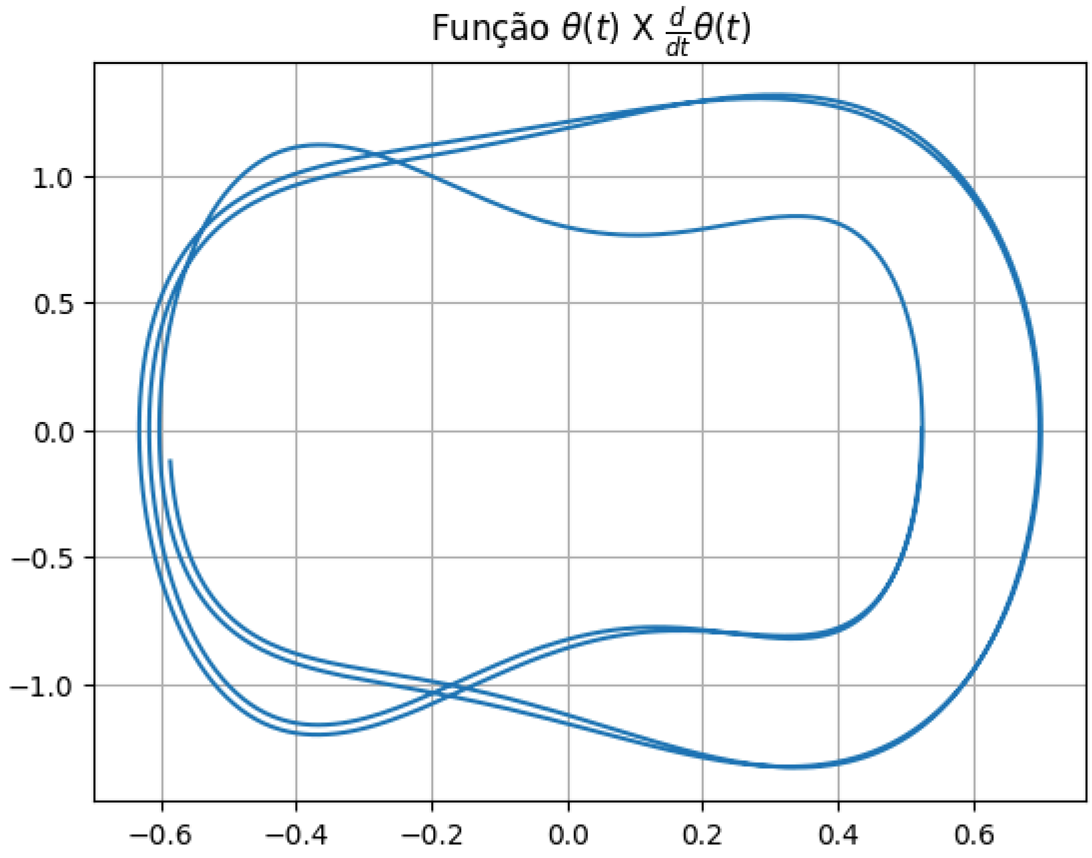
Pode-se plotar também as posições x(t) e y(t)

In [ ]:
```
plt.title(f'Posição x(t) e y(t)')
plt.plot(xpos, ypos)
plt.grid()
plt.show()
```



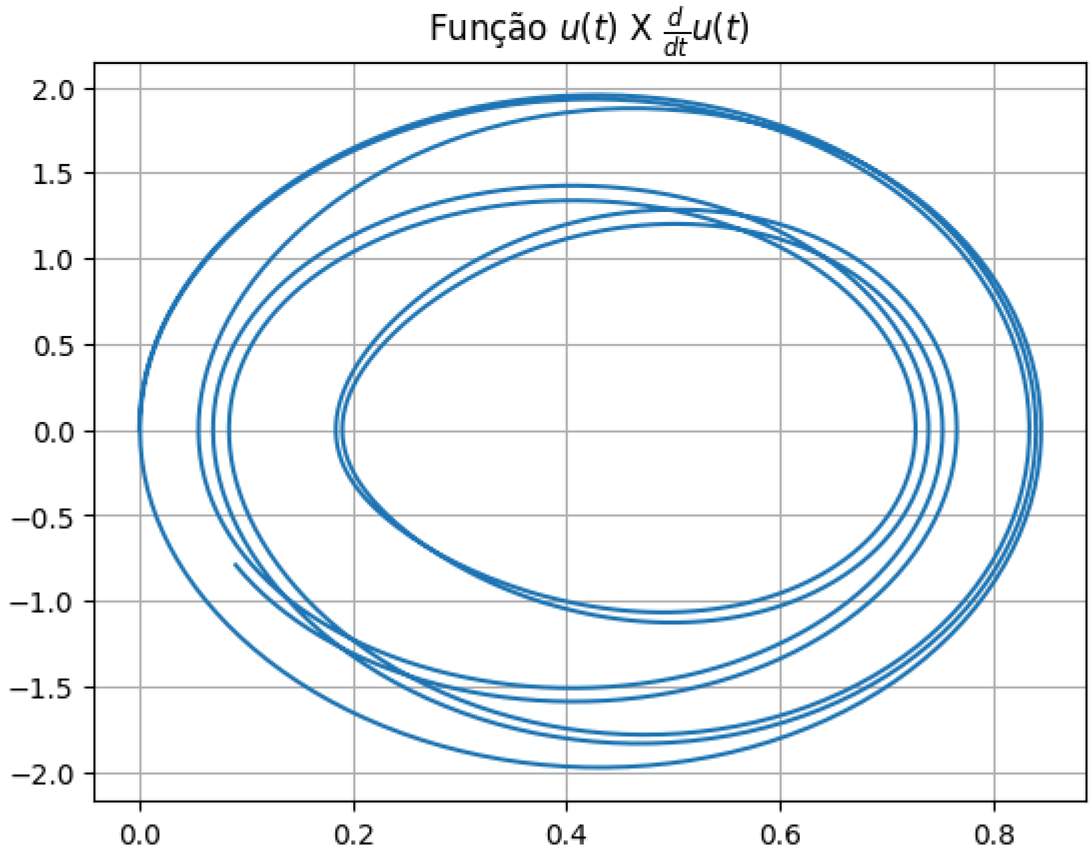
Pode-se plotar a fase θ(t) e dθ(t)/dt

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(theta)}$ X ${latex(theta_dot)}$')
plt.plot(thepos, thedot)
plt.grid()
plt.show()
```



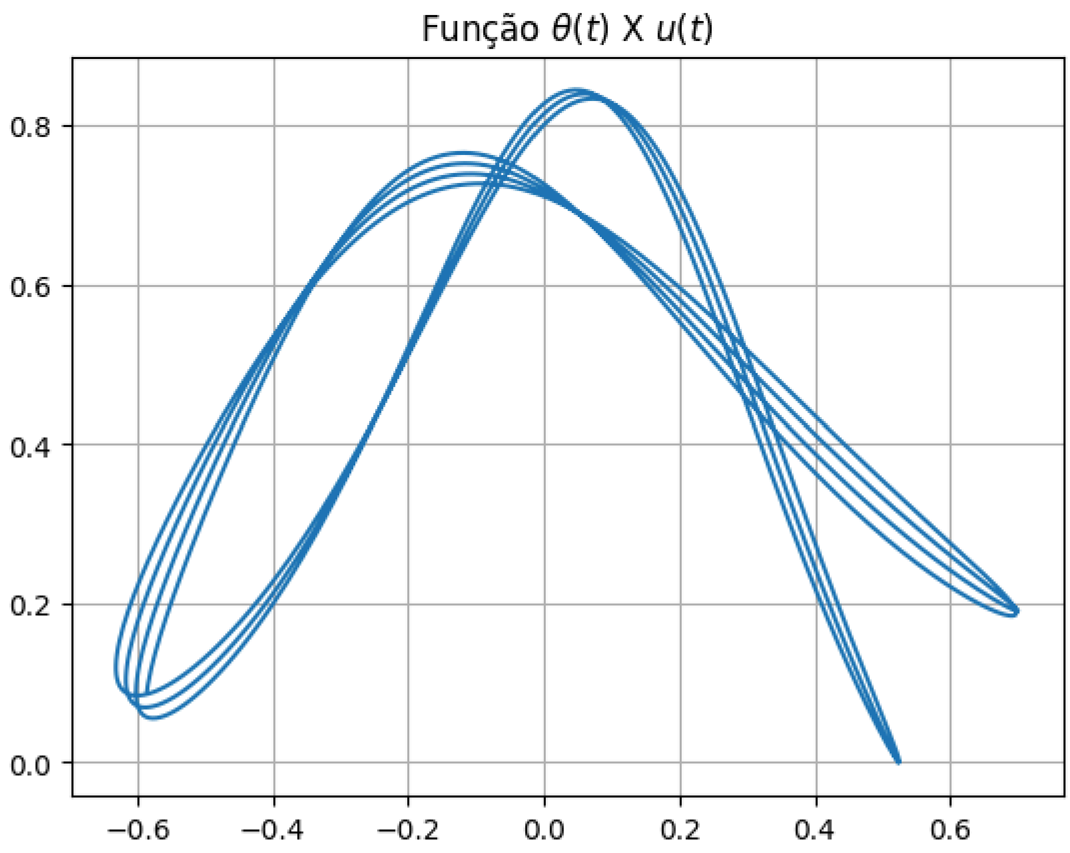
Pode-se plotar a fase u(t) e du(t)/dt

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(u)}$ X ${latex(u_dot)}$')
plt.plot(upos, udot)
plt.grid()
plt.show()
```



Pode-se ainda plotar a fase θ(t) e u(t)

In [ ]:
```
plt.title(f'Função ${latex(theta)}$ X ${latex(u)}$')
plt.plot(thepos, upos)
plt.grid()
plt.show()
```



Para fins didáticos é possível animar o pêndulo estudado

In [ ]:
```
def animate(i):
    ln.set_data([0, xpos[i]], [0, ypos[i]])
    cur.set_data(xpos[:i+1], ypos[:i+1])

fig, ax = plt.subplots(1, 1, figsize=(5, 5))
ax.set_xlim((min(xpos)-0.5), (max(xpos)+0.5))
ax.set_ylim((min(ypos)-0.5), (max(ypos)+1))
ax.grid()
ln, = ax.plot([], [], 'bo--', lw=2, markersize=8)
cur, = ax.plot(xpos[0], ypos[0], 'black', lw=1)
```

```
ani = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=passo, interval=10)
ani.save('elastico.gif', writer='pillow', fps=25)
```