Estratégia Militares

# CURSO INTENSIVO 2022

# ITA - 2022
# Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

# Sumário

## Apresentação

Olá,

Nessa aula, vamos estudar quadriláteros e círculos. No capítulo de quadriláteros, veremos algumas propriedades válidas para cada tipo de quadrilátero e no capítulo de círculos, estudaremos os elementos presentes no círculo e alguns teoremas e propriedades válidas para essa figura geométrica.

Os exercícios ao longo da teoria dessa aula exploram melhor o conhecimento do aluno e, por isso, você poderá ter dificuldades em resolver algumas. Mas, tenha calma. Caso isso ocorra, leia a resolução e tente entender o raciocínio por trás da questão.

Lembre-se, só leia as resoluções ou comentários das questões se você tiver alguma dúvida ou não souber como resolver. Se você acha que já tem um bom conhecimento dos tópicos dessa aula, vá direto para as listas de questões, resolva e verifique se acertou no gabarito.

E qualquer dúvida, crítica ou sugestão não hesite em nos procurar pelo fórum de dúvidas ou pelos meios de contato abaixo:


/victorso

/profvictorso

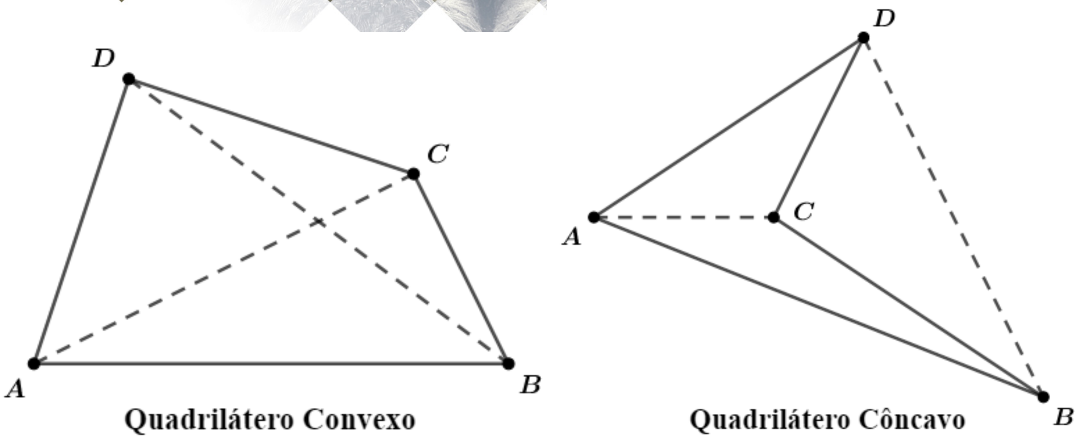
/profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

## 1. Quadriláteros Notáveis

Um quadrilátero é formado pela união de 4 pontos distintos do plano e três desses pontos não podem ser colineares. Vejamos os dois tipos de quadriláteros abaixo:




Quadrilátero Convexo Quadrilátero Côncavo

Os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ são as diagonais dos quadriláteros acima. A soma dos ângulos internos do quadrilátero é igual a $360°$ e a soma dos ângulos externos também é igual a $360°$. Basta notar que o quadrilátero é formado pela união de dois triângulos, por exemplo, no caso do quadrilátero convexo, temos a união dos triângulos $ABD$ e $CBD$.

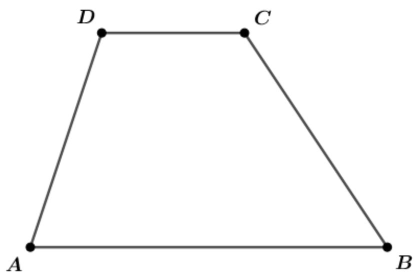
Para nossa prova, vamos estudar apenas os quadriláteros convexos. Os principais que podem ser cobrados na prova são: trapézio, paralelogramo, retângulo, losango e quadrado.

## 1.1. Trapézio

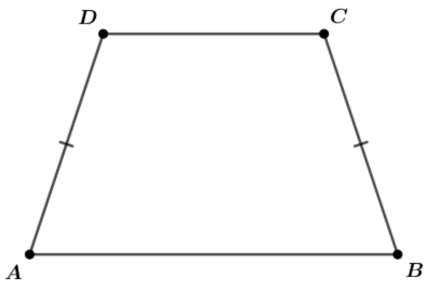
### 1.1.1. Definição

Um quadrilátero plano convexo é um trapézio se possui dois lados paralelos entre si. Chamamos esses lados de base do trapézio. Essa figura geométrica pode receber a seguinte classificação dependendo dos lados adjacentes às bases:

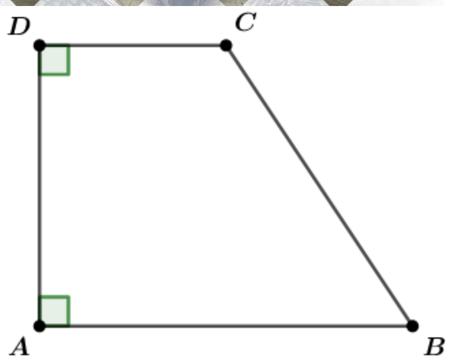
1) Trapézio Escaleno: os lados adjacentes não são congruentes.




2) Trapézio Isósceles: os lados adjacentes são congruentes.

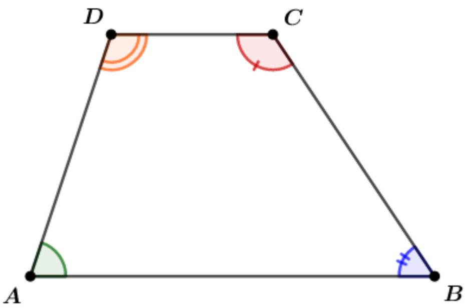



3) Trapézio Retângulo: um dos lados adjacentes forma dois ângulos retos com as bases.




## 1.1.2. Propriedades

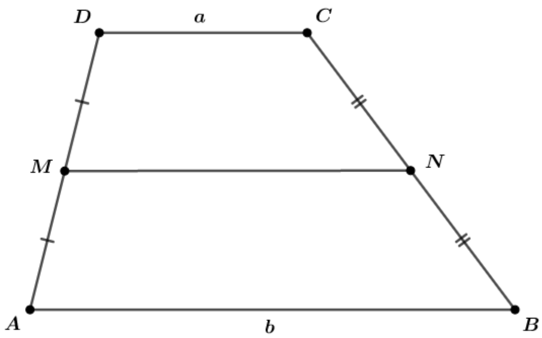
**P1) Ângulo Interno**




Sendo $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$, segmentos transversais às bases paralelas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, temos:

$$\hat{A} + \hat{D} = 180°$$
$$\hat{B} + \hat{C} = 180°$$
$$\boxed{A + D = B + C = 180°}$$

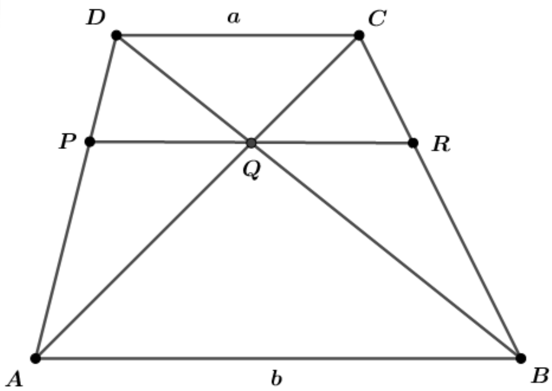
**P2) Base Média**




A base média de um trapézio de bases $a$ e $b$ possui a seguinte relação:

$$\boxed{MN = \frac{a + b}{2}}$$

**P3) Base que intercepta o encontro das diagonais**




Sejam $P, Q, R$ pontos do trapézio tal que $Q$ é o ponto de encontro das diagonais e $PR$ é paralelo às bases $AB$ e $CD$, então:

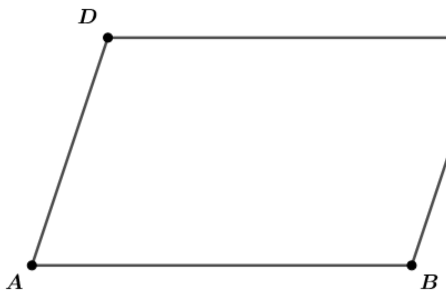
$$\boxed{PQ = QR = \frac{ab}{a+b}}$$

$$\boxed{PR = \frac{2ab}{a+b}}$$

## 1.2. Paralelogramo

### 1.2.1. Definição

Um quadrilátero plano convexo é classificado como paralelogramo quando seus lados opostos são paralelos.

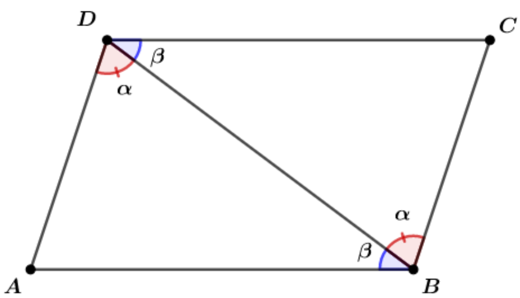



$$\overline{AB}//\overline{CD} \text{ e } \overline{AD}//\overline{BC}$$

### 1.2.2. Propriedades

**P1) Lados opostos congruentes**

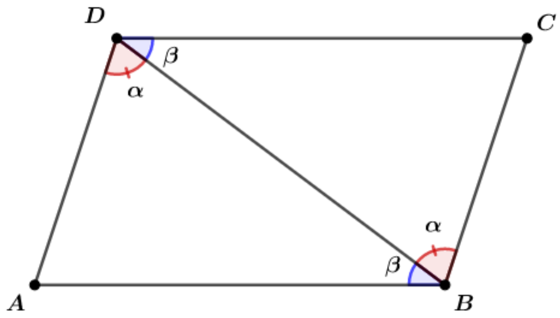
Traçando-se a diagonal $\overline{BD}$, temos pela propriedade das retas paralelas:




Pelo critério de congruência ALA, temos $\Delta ABD \equiv \Delta CDB$, então:

$$\overline{AD} = \overline{BC} \text{ e } \overline{AB} = \overline{CD}$$

**P2) Ângulos opostos congruentes**



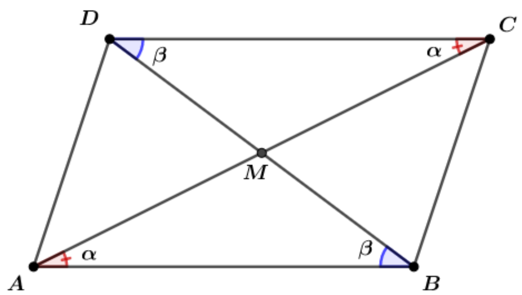

Note que $\widehat{D} = \alpha + \beta$ e $\hat{B} = \alpha + \beta$, logo:

$$\hat{B} \equiv \widehat{D}$$

Analogamente para $\hat{A}$ e $\hat{C}$:

$$\hat{A} \equiv \hat{C}$$

**P3) As diagonais se interceptam nos respectivos pontos médios**




Se $ABCD$ é um paralelogramo, então:

$$AB = CD$$

$$A\hat{B}D \equiv B\widehat{D}C \text{ e } B\hat{A}C \equiv D\hat{C}A$$

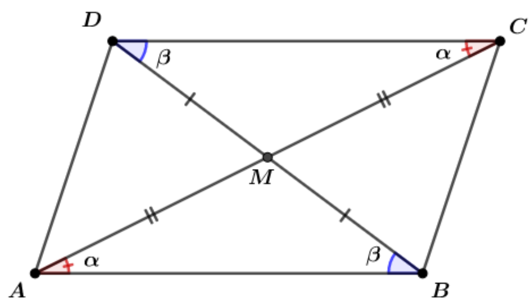
Pelo critério de congruência ALA, temos:

$$\Delta AMB \equiv \Delta CMD$$

Logo:

$$MD = MB \text{ e } AM = CM$$

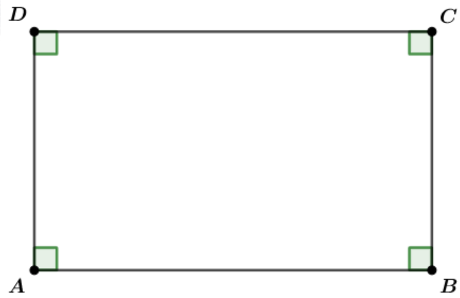
Portanto, $M$ é ponto médio das diagonais.




## 1.3. Retângulo

### 1.3.1. Definição

Se um quadrilátero plano convexo é equiângulo, então, ele é um retângulo.

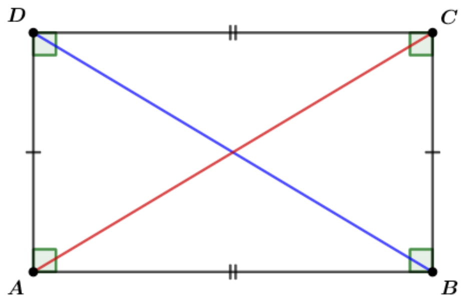



### 1.3.2. Propriedades

**P1) Todo retângulo é paralelogramo**

Pela definição de ângulos opostos congruentes do paralelogramo, como todos os ângulos internos do retângulo são congruentes, temos que todo retângulo é paralelogramo. Logo, todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o retângulo.

**P2) Diagonais congruentes**

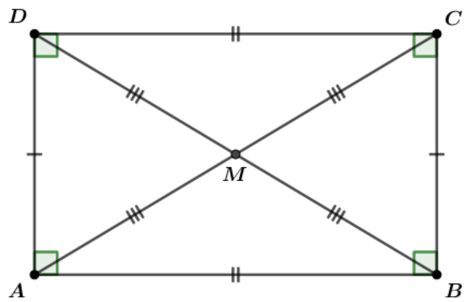



Sabendo que todo retângulo é um paralelogramo, então, $AB = CD$ e $AD = BC$. Usando o critério de congruência LAL:

$$AD = BC, \hat{A} \equiv \hat{B} \text{ e } AB = AB \Rightarrow \Delta ABD \equiv \Delta BAC \Rightarrow AC = BD$$

Uma consequência dessa propriedade é que se $M$ é o ponto de cruzamento das diagonais do retângulo, temos:

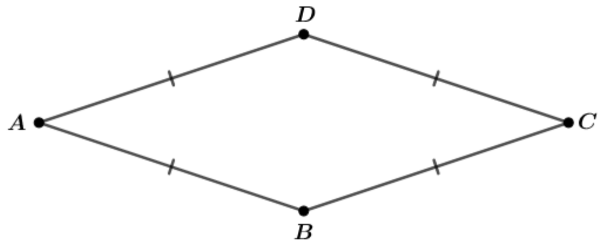
$$AM = MC = DM = MB$$




## 1.4. Losango

### 1.4.1. Definição

Um quadrilátero plano convexo é equilátero, então, ele é um losango.



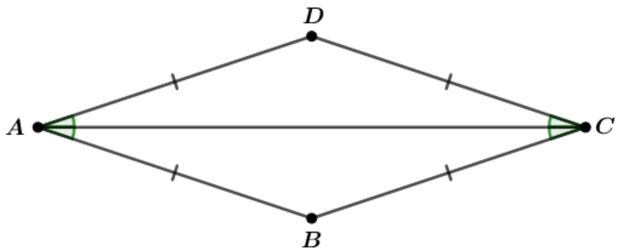

### 1.4.2. Propriedades

**P1) Todo losango é um paralelogramo.**

Todas as propriedades do paralelogramo são válidas para o losango.

**P2) As diagonais são bissetrizes e mediatrizes.**

Como o losango é equilátero, temos:



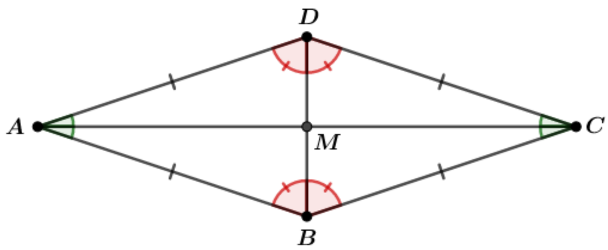

Os triângulos $ACD$ e $ACB$ são isósceles, então, como $AD = CD = AB = CB$ e $\overline{AC}$ é um segmento em comum:

$$D\hat{A}C \equiv D\hat{C}A \equiv B\hat{A}C \equiv B\hat{C}A$$

Logo, a diagonal $\overline{AC}$ é bissetriz do losango. Analogamente, podemos provar que $\overline{BD}$ também é bissetriz.

Assim, os ângulos opostos são congruentes, portanto, um losango também é um paralelogramo.

Seja $M$ o ponto de intersecção das diagonais:




Como $ABCD$ também é um paralelogramo, temos que $M$ divide as diagonais ao meio. Então:

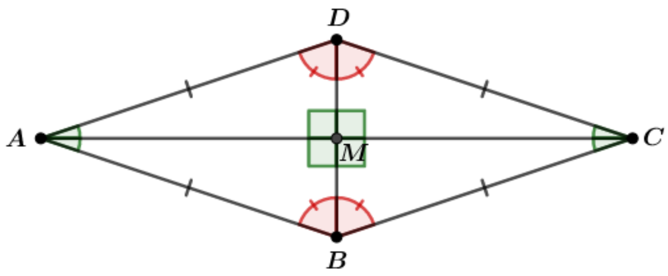
$$AM = MC \text{ e } DM = MB$$

Usando o critério de congruência LLL, temos:

$$\Delta MAD \equiv \Delta MAB \equiv \Delta MCB \equiv \Delta MCD \Rightarrow A\widehat{M}D \equiv A\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}B \equiv C\widehat{M}D = \theta$$

$$\theta + \theta + \theta + \theta = 360° \Rightarrow \theta = 90°$$

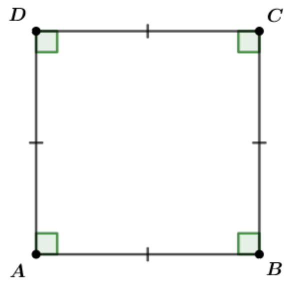
Desse modo, as diagonais são perpendiculares entre si e $M$ é o ponto médio deles, portanto, as diagonais também são mediatrizes.




## 1.5. Quadrado

### 1.5.1. Definição

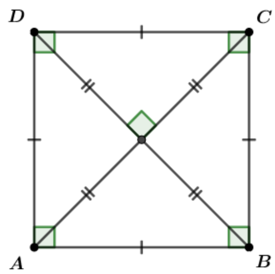
Um quadrilátero convexo plano é um quadrado quando é equilátero e equiângulo.




### 1.5.2. Propriedades

**Todo quadrado é um retângulo e losango.**

Todas as propriedades do retângulo e losango são válidas para o quadrado.




HORA DE PRATICAR!

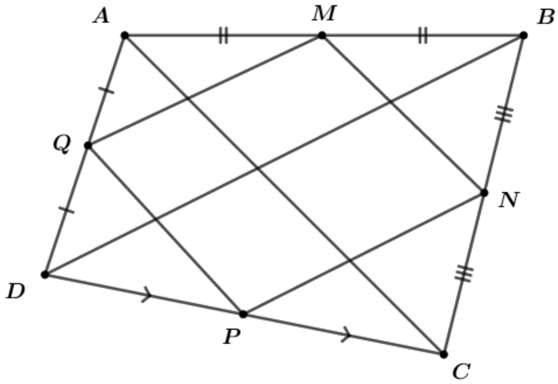
**1.** Considere um quadrilátero $ABCD$ e sejam $M, N, P$ e $Q$ os pontos médios dos lados $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$.

**a)** Demonstrar que $MNPQ$ é um paralelogramo.

**b)** Em quais condições $MNPQ$ é um retângulo, losango e quadrado?

**Resolução:**

**a)** Vamos desenhar um quadrilátero qualquer $ABCD$:




Traçamos as diagonais $AC$ e $BD$ do quadrilátero $ABCD$. Note que $MQ$ é base média do triângulo $ABD$, logo, $MQ//BD$ e $MQ = BD/2$. Analogamente, para o triângulo $BCD$, temos $NP//BD$ e $NP = BD/2$. Portanto, $NP = MQ$ e $NP//MQ$.

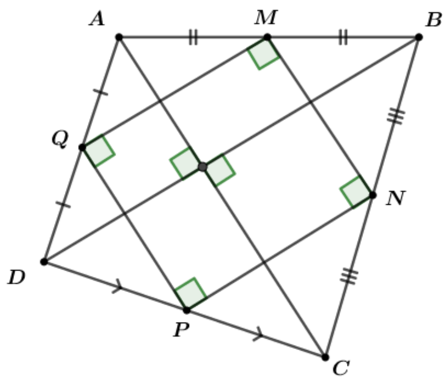
Para a diagonal $AC$, temos do triângulo $ABC$ que $MN$ é sua base média, logo, $MN//AC$ e $MN = AC/2$. Analogamente, para o triângulo $ADC$, temos $PQ//AC$ e $PQ = AC/2$. Portanto, $MN//PQ$ e $MN = PQ$.

Assim, o quadrilátero $MNPQ$ é um paralelogramo.

**b)** Vamos dividir o problema em cada caso:

Caso 1) $MNPQ$ é retângulo:

Como $MNPQ$ é um retângulo e seus lados são paralelos às diagonais do quadrilátero $ABCD$, temos que a condição para isso é $ABCD$ possuir diagonais ortogonais entre si.




Caso 2) $MNPQ$ é losango:

Vimos no item a que $MQ = NP = BD/2$ e $MN = PQ = AC/2$. Sabemos que o losango deve possuir todos os lados equiláteros, logo:

$$MQ = NP = MN = PQ \Rightarrow \frac{BD}{2} = \frac{AC}{2} \Rightarrow BD = AC$$

Portanto, uma condição é as diagonais do quadrilátero $ABCD$ devem possuir a mesma medida.

Caso 3) $MNPQ$ é quadrado:

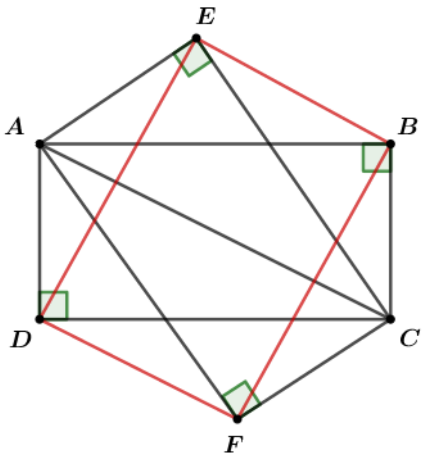
Para $MNPQ$ ser um quadrado, ele deve satisfazer as condições de um losango e de um retângulo. Logo, $ABCD$ deve possuir diagonais congruentes e ortogonais.

**Gabarito: Demonstração**

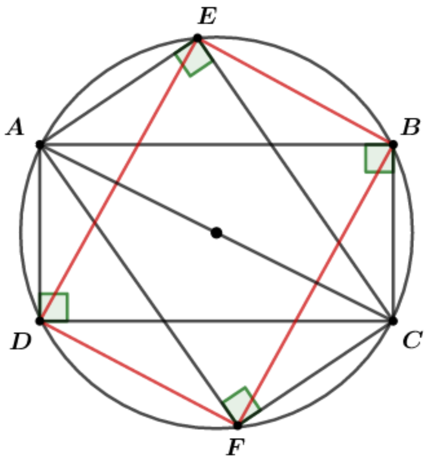
**2.** $ABCD$ e $AECF$ são dois retângulos que possuem uma diagonal comum $AC$. Demonstrar que o quadrilátero $BEDF$ também é um retângulo.

**Resolução:**

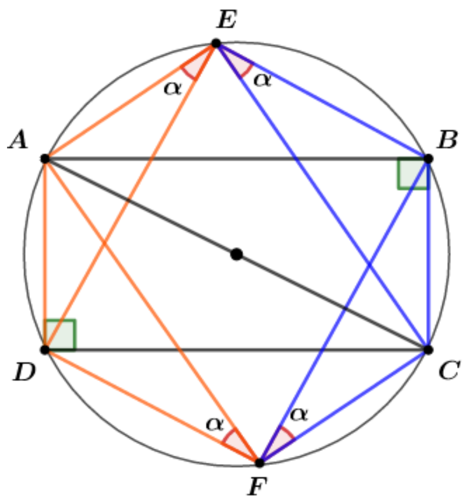
De acordo com o enunciado da questão, temos:



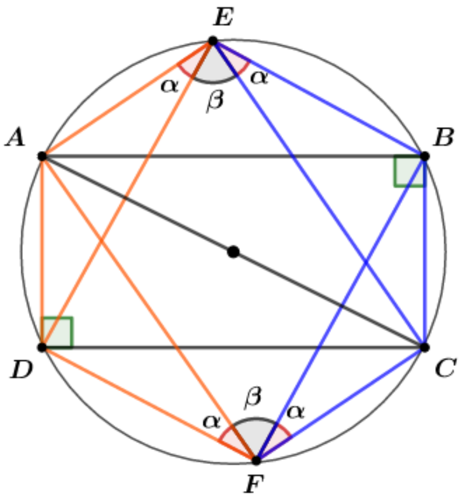

Queremos provar que $BEDF$ é retângulo, então, devemos mostrar que seus ângulos internos são todos retos. Note que os triângulos $AEC, ABC, ADC$ e $AFC$ são todos retângulos e possuem a mesma hipotenusa, logo, eles estão inscritos numa mesma circunferência:




Podemos usar as propriedades do arco capaz. Note que $B\hat{E}C \equiv B\hat{F}C$, pois enxergam o mesmo arco $BC$. Analogamente, $A\hat{E}D \equiv A\hat{F}D$. Como $AD = BC$, temos que $B\hat{E}C \equiv B\hat{F}C \equiv A\hat{E}D \equiv A\hat{F}D$.

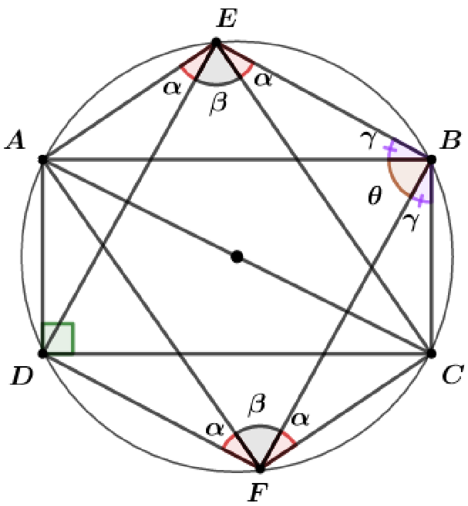



Da mesma forma, como $AB = CD$, temos $AFB \equiv CED$:




Como $A\hat{E}C$ é ângulo do retângulo $AECF$, temos $\alpha + \beta = 90°$. Logo, $B\hat{E}D$ e $B\hat{F}D$ são ângulos retos.

Sendo $AE = CF$, temos $E\hat{B}A \equiv C\hat{B}F$:

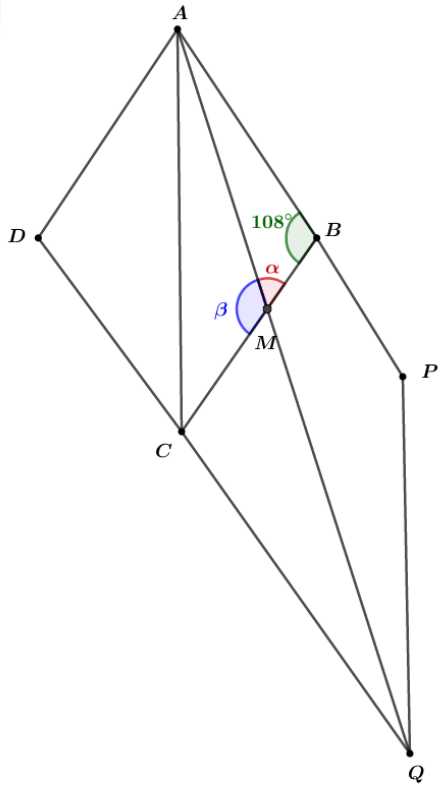



Do retângulo $ABCD$, temos $\theta + \gamma = 90°$, logo, $E\hat{B}F$ também é ângulo reto. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é igual a $360°$, temos que todos os ângulos internos do quadrilátero $BDEF$ são congruentes e iguais a $90°$. Portanto, esse quadrilátero é retângulo.

**Gabarito: Demonstração**

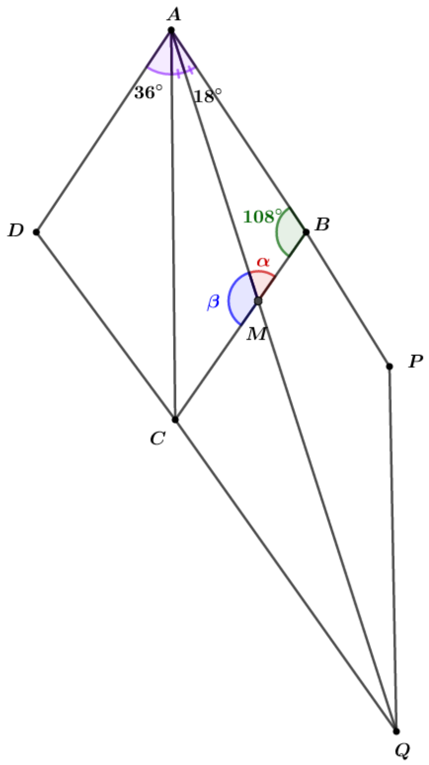
**3.** $ABCD$ é um losango no qual $\hat{B} = 108°$ e $CAPQ$ é um outro losango cujo vértice $P$ está no prolongamento de $\overline{AB}$. Achar os ângulos formados por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$.

**Resolução:**




Vamos usar as propriedades do losango. Inicialmente, vamos encontrar os ângulos dos losangos. Como $\hat{B} = 108°$, temos $\widehat{D} = 108°$. Sabendo que um losango também é um paralelogramo, temos que os ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são suplementares de $108°$, logo, $\hat{A} = \hat{C} = 72°$.

Sendo $CAPQ$ um losango, temos que $AQ$ é sua bissetriz. Como $B\hat{A}C = 36°$ (bissetriz de $ABCD$), temos $C\hat{A}Q = P\hat{A}Q = 18°$.




Como $\beta$ é ângulo externo do triângulo $ABM$, os ângulos formados por $\overline{AQ}$ e $\overline{BC}$ são dados por:

$$\beta = 18° + 108° \Rightarrow \beta = 126°$$

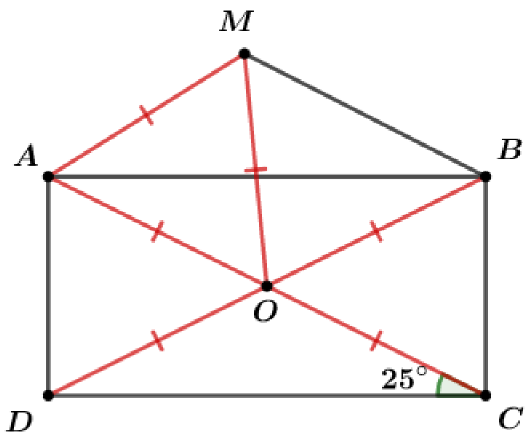
$$\alpha + \beta = 180° \Rightarrow \alpha = 54°$$

**Gabarito: $54°$ e $126°$**

**4.** $ABCD$ é um retângulo cujas diagonais se cortam em $O$ e $AOM$ é um triângulo equilátero construído no semi-plano dos determinados por $\overline{AC}$ que contém $B$. Sabendo que $A\hat{C}D = 25°$, calcular os ângulos do $\Delta ABM$.

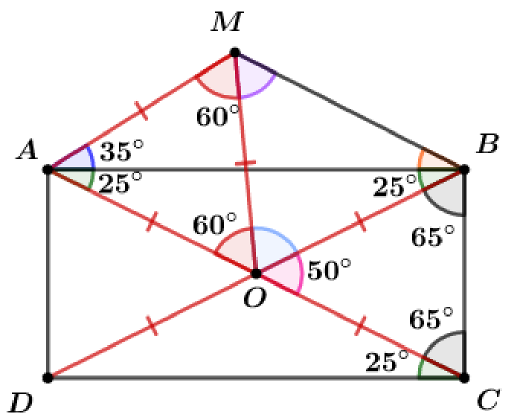
**Resolução:**

Vamos desenhar a figura do enunciado:

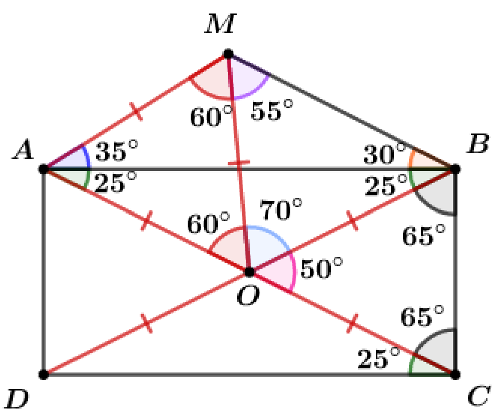



Como $A\hat{C}D = 25°$, temos $C\hat{A}B = A\hat{B}D = 25°$. Sendo $\Delta OCB$ isósceles, temos $O\hat{B}C = O\hat{C}B = 65°$ ($\hat{C}$ é ângulo reto do retângulo) e, assim, $B\hat{O}C = 50°$.

Vamos completar os ângulos da figura:




$\Delta OBM$ é isósceles e o ângulo $B\hat{O}M = 70°$ (ângulo raso), assim, $O\hat{B}M = O\widehat{M}B = 55°$. Logo, $M\hat{B}A = 30°$:



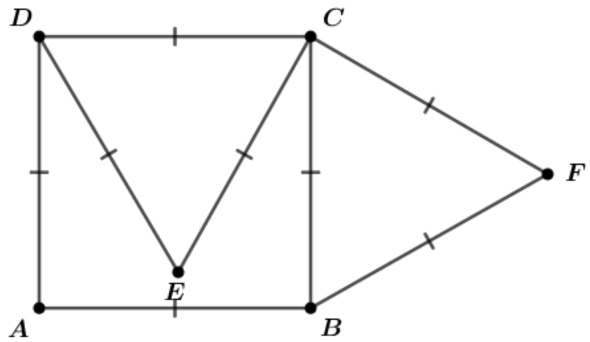

Os ângulos internos do $\Delta ABM$ são $30°, 35°$ e $115°$.

**Gabarito: $35°, 30°$ e $115°$**

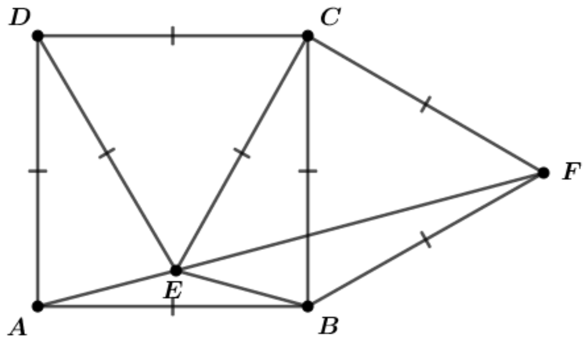
**5.** Sobre o lado $\overline{CD}$ de um quadrado $ABCD$, contrói-se internamente um triângulo equilátero $CED$ e sobre o lado $\overline{BC}$ constrói-se externamente um triângulo equilátero $BCF$. Mostrar que $A, E$ e $F$ estão alinhados.

**Resolução:**

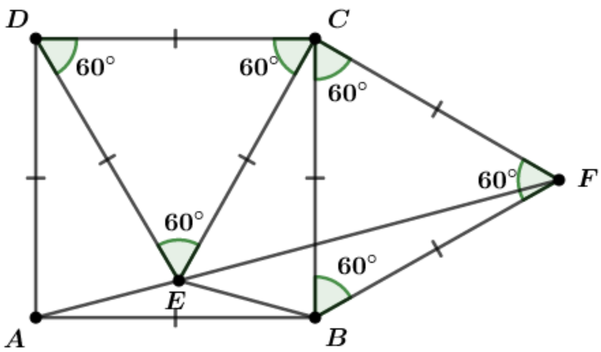
De acordo com os dados da questão:

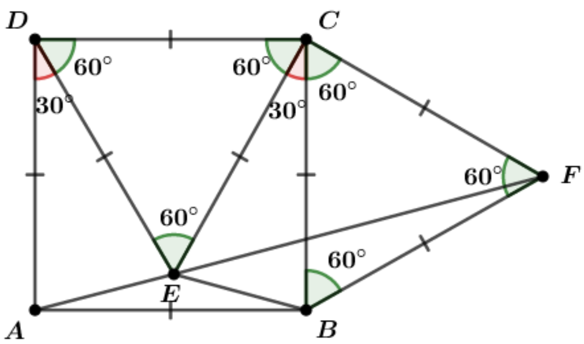



Vamos construir os triângulos $AED, EBC$ e $CEF$:

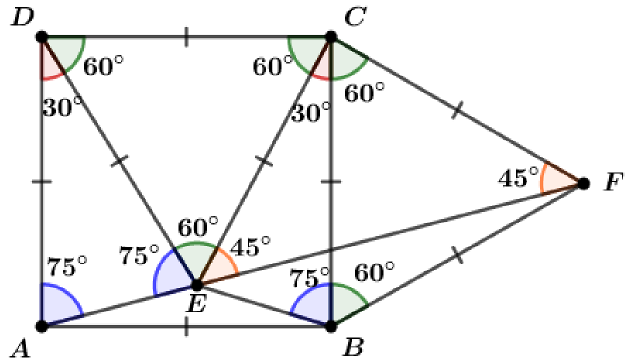



Note que esses triângulos são isósceles. Vamos completar os ângulos da figura:



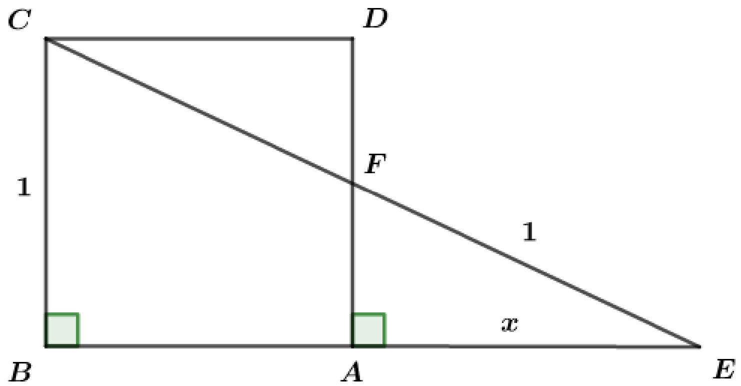

Como o vértice $C$ e $D$ dos triângulos isósceles $ECB$ e $ADE$ são iguais a 30°, os ângulos de suas bases são iguais a 75°. Sendo $E\hat{C}F = 90°$ e $\Delta ECF$ isósceles, temos $C\hat{E}F = C\hat{F}E = 45°$.




Analisando a figura, vemos que $A\hat{E}D + D\hat{E}C + C\hat{E}F = 75° + 60° + 45° = 180°$. Logo, $A\hat{E}F$ é um ângulo raso e, portanto, $A, E$ e $F$ estão alinhados.

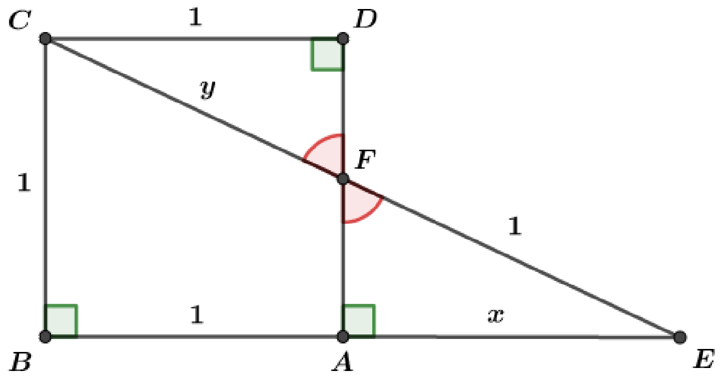
**Gabarito: Demonstração**

**6.** Na figura a seguir temos o quadrado $ABCD$ de lado 1. O segmento $\overline{EF}$ mede 1. Determine a equação cuja raiz seja a medida do segmento $\overline{EA}$.




**Resolução:**

Fazendo $CF = y$, temos:




Note que os triângulos retângulos $CFD$ e $EFA$ são semelhantes, logo:

$$\frac{y}{1} = \frac{1}{x} \Rightarrow y = \frac{1}{x}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta BCE$:

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 = (1 + x)^2 + 1^2$$

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2} = x^2 + 2x + 1 + 1$$

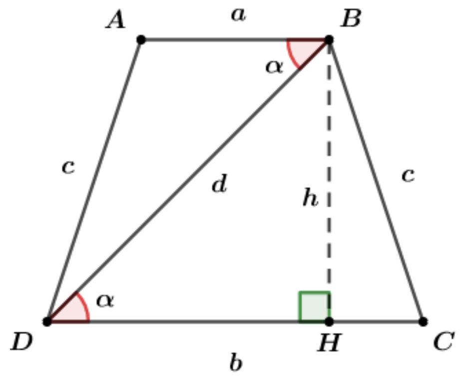
$$x^2 + 2x + 1 = x^4 + 2x^3 + 2x^2$$

$$x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$$

**Gabarito: $x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$**

**7.** Determinar o ângulo formado pela diagonal e pela base de um trapézio isósceles, sabendo que a altura é igual a base média.

**Resolução:**




Queremos calcular o valor do ângulo $\alpha$.

De acordo com o enunciado, temos que a altura possui mesma medida da base média do trapézio isósceles, logo:

$$h = \frac{a+b}{2}$$

Aplicando a lei dos cossenos nos triângulos $ABD$ e $BDC$:

$$\Delta ABD \Rightarrow c^2 = a^2 + d^2 - 2adcos\alpha \ \ (I)$$
$$\Delta BDC \Rightarrow c^2 = b^2 + d^2 - 2bdcos\alpha \ \ (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$0 = a^2 - b^2 - 2dcos\alpha(a-b)$$
$$cos\alpha = \frac{a^2-b^2}{2d(a-b)} \Rightarrow cos\alpha = \frac{a+b}{2d} \ \ (III)$$

No triângulo retângulo $BHD$:

$$sen\alpha = \frac{h}{d} \Rightarrow d = \frac{\frac{a+b}{2}}{sen\alpha} \Rightarrow d = \frac{a+b}{2sen\alpha}$$

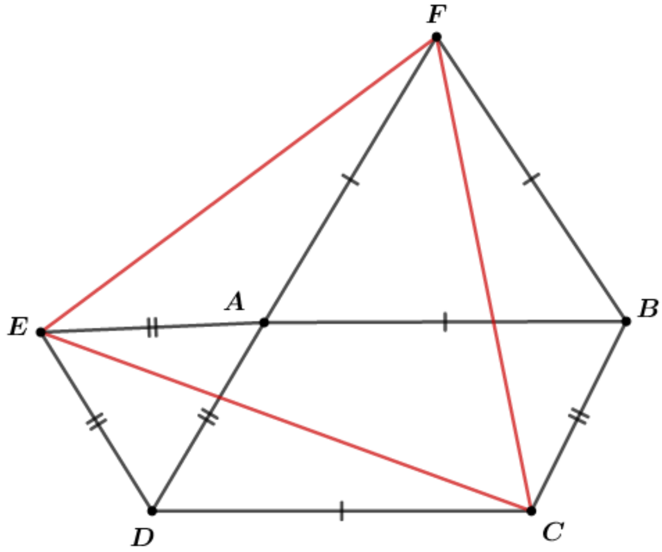
Substituindo em $(III)$:

$$cos\alpha = \frac{a+b}{\frac{2(a+b)}{2sen\alpha}} \Rightarrow cos\alpha = sen\alpha \Rightarrow \alpha = 45°$$

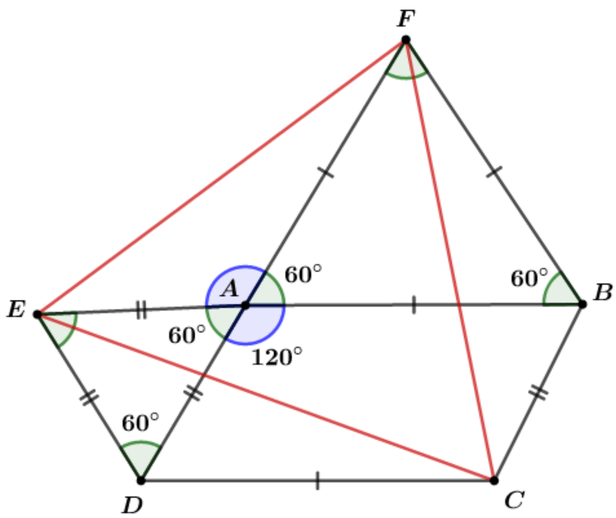
**Gabarito: $45°$**

**8.** $ABCD$ é um paralelogramo com triângulos equiláteros $ABF$ e $ADE$ desenhados externamente ao paralelogramo. Prove que o triângulo $FCE$ é equilátero.

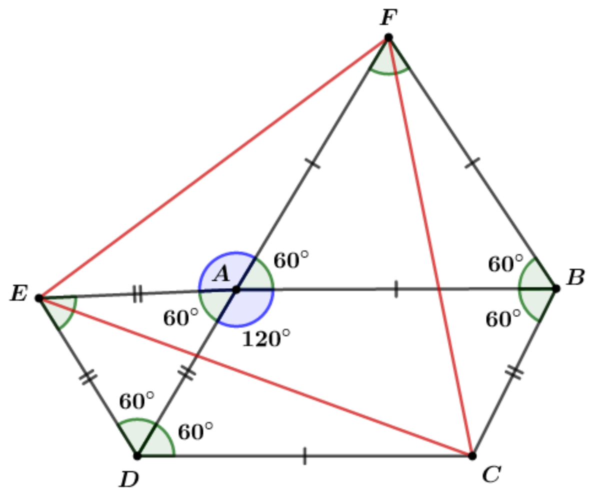
**Resolução:**



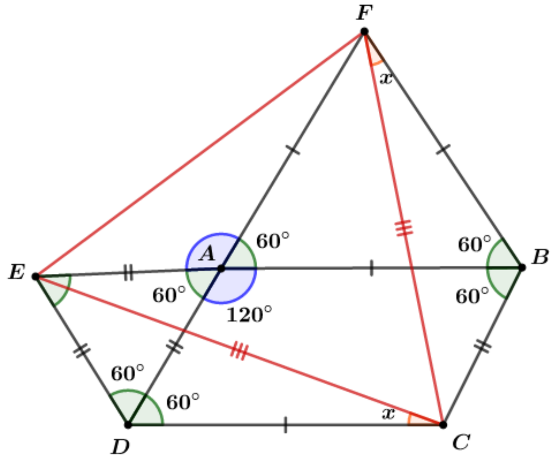

Os triângulos $ABF$ e $ADE$ são equiláteros, logo, $E\hat{A}D = F\hat{A}B = 60°$. Assim, como esses ângulos possuem a mesma medida, esses ângulos são opostos pelo vértice. Portanto, $F, A, D$ estão alinhados. Vamos completar os ângulos:



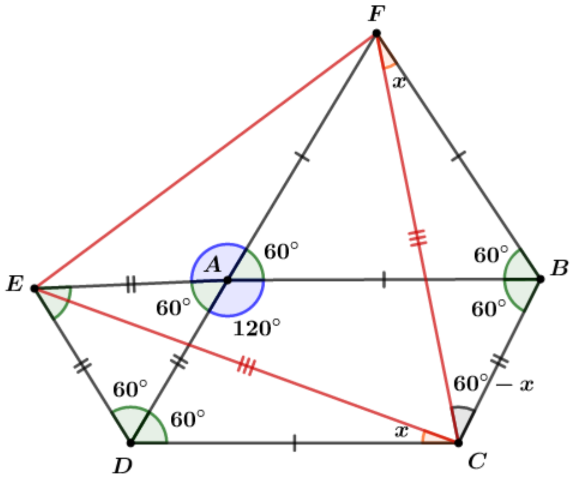

Usando as propriedades do paralelogramo, temos $ADC = ABC = 60°$.



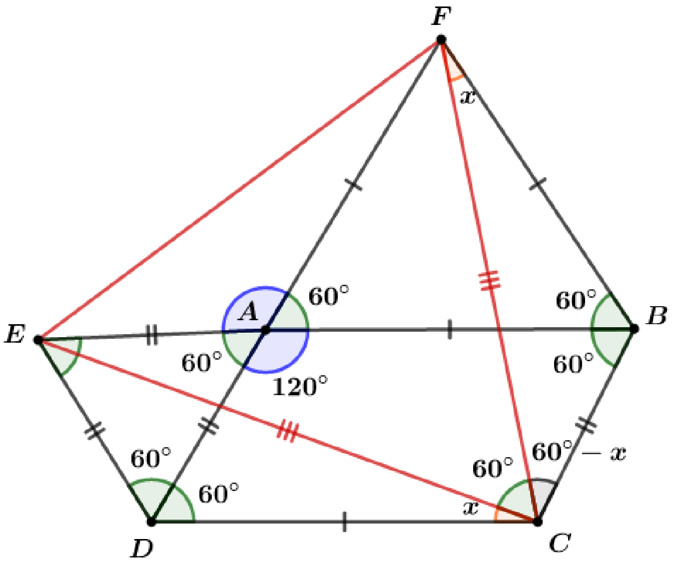

Pelo critério de congruência $LAL$, temos que os triângulos $ECD$ e $CBF$ são congruentes. Logo, $EC \equiv FC$. Fazendo $ECD = CFB = x$, temos:




Completando os ângulos do triângulo $BFC$:



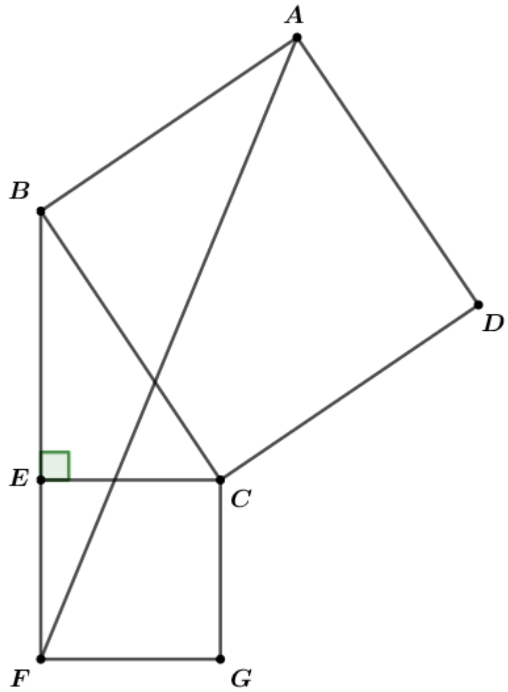

Sendo $B\hat{C}D$ oposto de $B\hat{A}D$ do paralelogramo, temos $B\hat{C}D = 120°$, então, $F\hat{C}E = 60°$:




Sendo $F\hat{C}E = 60°$ e $\Delta FCE$ isósceles, temos que os ângulos da base também são iguais a 60°. Portanto $\Delta FCE$ é equilátero.

**Gabarito: Demonstração**

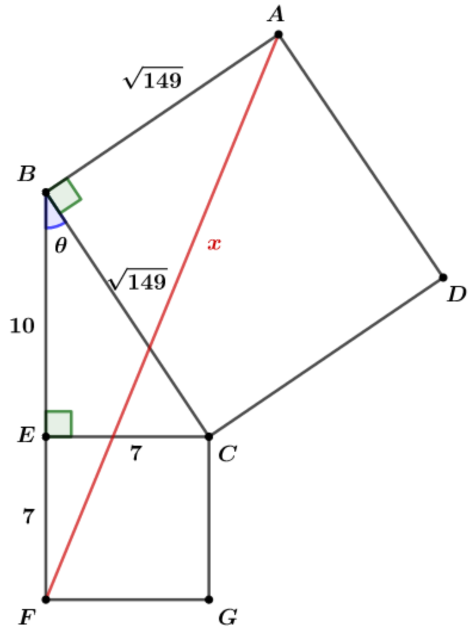
**9.** Na figura a seguir $ABCD$ e $CEFG$ são quadrados, os segmentos $\overline{BE}$ e $\overline{EC}$ são perpendiculares entre si, $\overline{BE} = 10$ e $\overline{EC} = 7$. Determine a medida do segmento $\overline{AF}$.




**Resolução:**

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $BEC$, temos:

$$BC^2 = 10^2 + 7^2 \Rightarrow BC = \sqrt{149}$$




Vamos aplicar a lei dos cossenos no triângulo $ABF$:

$$x^2 = \sqrt{149^2} + 17^2 - 2 \cdot 17 \cdot \sqrt{149} \cdot \cos(90° + \theta)$$

$$x = \sqrt{149 + 289 + 34\sqrt{149} sen(\theta)}$$

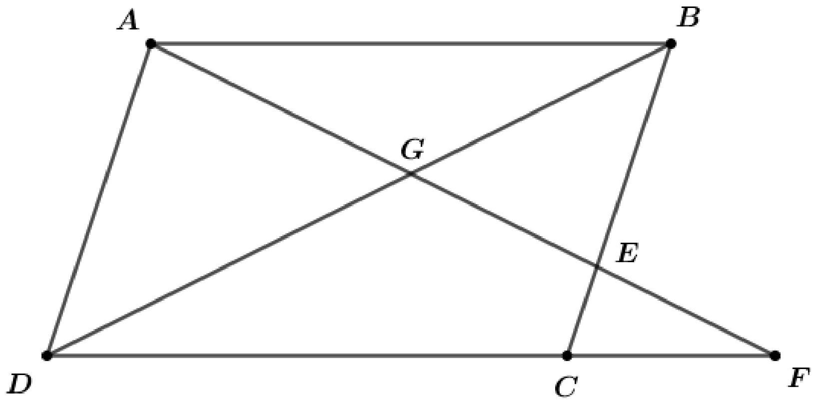
Do triângulo $BEC$:

$$sen\theta = \frac{7}{\sqrt{149}}$$

$$x = \sqrt{149 + 289 + 34\sqrt{149}\frac{7}{\sqrt{149}}} \Rightarrow x = \sqrt{676} \Rightarrow x = 26$$

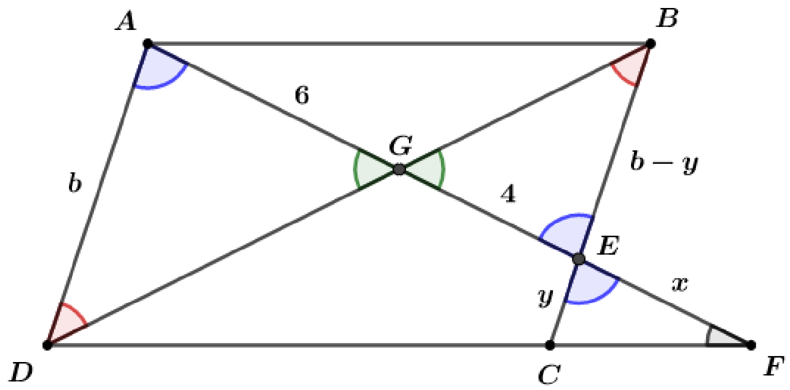
**Gabarito: $AF = 26$**

**10.** No paralelogramo $ABCD$, $E$ está em $\overline{BC}$. $AE$ corta a diagonal $\overline{BD}$ em $G$ e $\overline{DC}$ em $F$, como mostra a figura. Se $AG = 6$ e $GE = 4$, calcule $EF$.




**Resolução:**

Vamos inserir as variáveis na figura:




Usando semelhança de triângulos:

$$\Delta ECF \sim \Delta ADF \Rightarrow \frac{x}{10+x} = \frac{y}{b} \Rightarrow y = \frac{bx}{10+x}$$

$$\Delta BGE \sim \Delta DGA \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{b-y}{b} \Rightarrow 4b = 6b - 6y \Rightarrow y = \frac{b}{3}$$

Igualando as duas identidades:

$$\frac{b}{3} = \frac{bx}{10+x} \Rightarrow 10 + x = 3x \Rightarrow x = 5$$

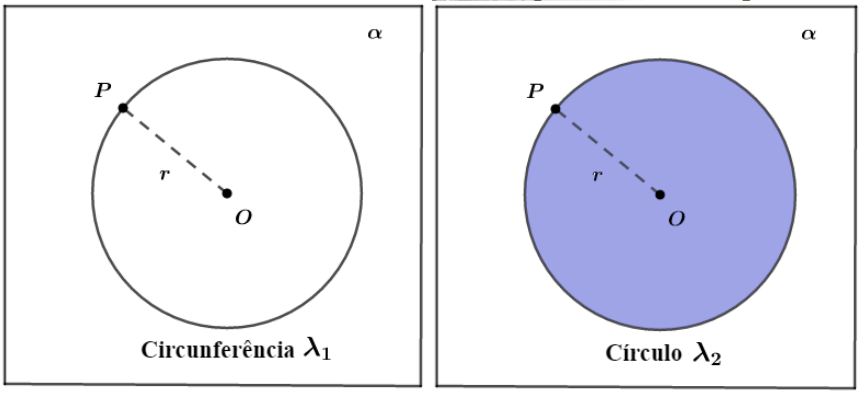
**Gabarito:** $\boldsymbol{EF = 5}$

# 2. Círculo e Circunferência

## 2.1. Conceitos Iniciais

### 2.1.1. Notação

É comum confundir os termos círculo e circunferência. A diferença entre eles é que o primeiro pode ser considerado um disco enquanto o segundo é apenas um anel.




## 2.1.2. Elementos

Os elementos presentes em uma circunferência são: centro, raio, diâmetro, arco, corda e flecha.

Vejamos a definição de cada um deles:

Centro: ponto interno que equidista de todos os pontos da circunferência.

Raio: é a distância do centro a qualquer ponto da circunferência.

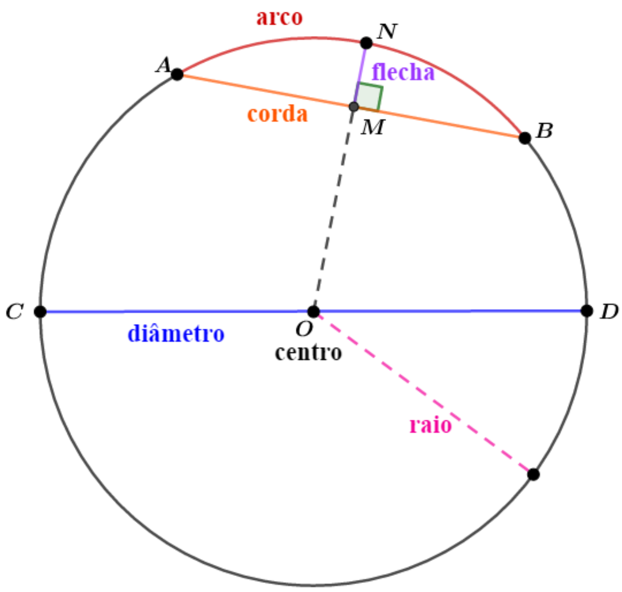
Diâmetro: é o comprimento do segmento de reta que passa pelo centro e toca dois pontos da circunferência. Também podemos dizer que ele é igual a 2 raios.

Arco: é o conjunto de pontos entre dois pontos distintos da circunferência. Esses dois pontos dividem a circunferência em arco maior e arco menor. Normalmente, usamos o arco menor.

Corda: é o segmento de reta que une as extremidades de um arco.

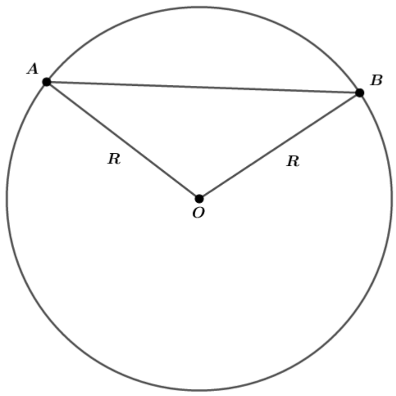
Flecha: é o segmento de reta compreendido entre a corda e o arco e pertence à mediatriz dessa corda.

Observe a figura abaixo os elementos da circunferência:




Flecha: $\overline{MN}$
Arco: $\widehat{AB}$
Diâmetro: $\overline{CD}$
Corda: $\overline{AB}$

Note que a maior corda é o diâmetro. Veja:




Se aplicarmos a desigualdade triangular no $\Delta AOB$, encontramos:

$$R - R < \overline{AB} < R + R \Rightarrow 0 < \overline{AB} < 2R$$
$$\therefore \overline{AB} < 2R$$

$2R$ é a medida da diagonal de uma circunferência, logo, a maior corda é o diâmetro.

## 2.2. Posição entre Retas e Circunferências

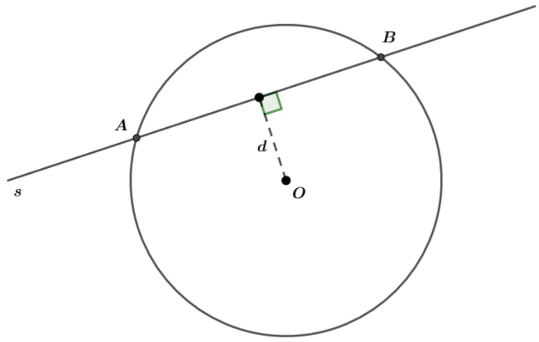
### 2.2.1. Classificação

Podemos classificar as retas de acordo com sua posição em relação à circunferência. Temos três classificações:

**1) Reta secante**

Uma reta é secante quando cruza a circunferência em dois pontos distintos, seja $s$ uma reta secante à circunferência $\lambda$ de raio $R$ e $d$ a distância da reta em relação ao centro $O$, então:

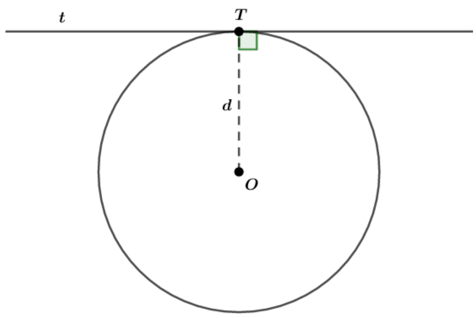
$$s \cap \lambda = \{A, B\}$$
$$d < R$$




**2) Reta tangente**

Uma reta é tangente quando intercepta a circunferência em um único ponto. Seja $t$ uma reta tangente à circunferência $\lambda$ de raio $R$ e $d$ a distância da reta em relação ao centro $O$:

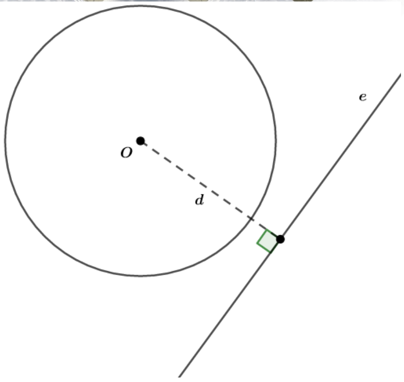
$$t \cap \lambda = \{T\}$$
$$d = R$$




**3) Reta exterior**

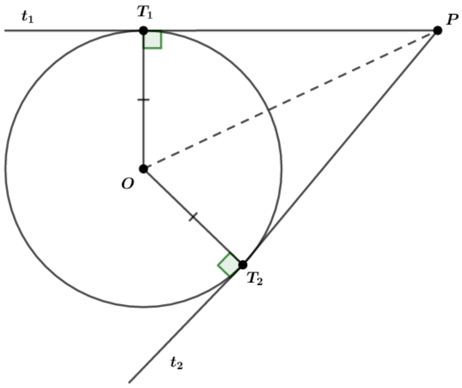
Uma reta é exterior à circunferência quando não intercepta a circunferência. Seja $e$ a reta exterior à circunferência $\lambda$ de raio $R$ e $d$ a distância da reta em relação ao centro $O$:

$$e \cap \lambda = \emptyset$$
$$d > R$$




### 2.2.2. Propriedade da tangente

Sejam $t_1$ e $t_2$ as retas tangentes à circunferência $\lambda$ e que passam pelo mesmo ponto $P$:



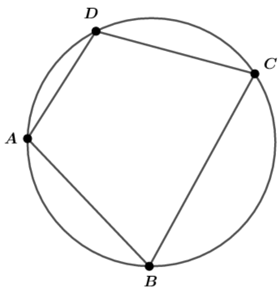

$$\Rightarrow PT_1 = PT_2$$

$$O\hat{P}T_1 \equiv O\hat{P}T_2 \Rightarrow \overline{OP} \text{ é bissetriz}$$

## 2.4. Quadrilátero e Circunferência

### 2.4.1. Quadrilátero Inscritível

Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus quatro vértices pertencem à circunferência.

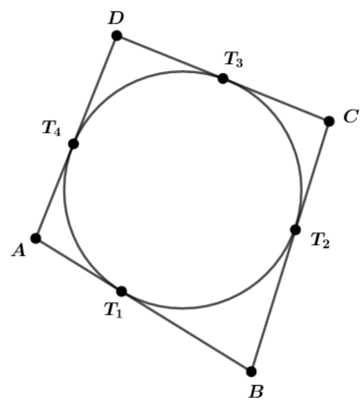



**Teorema:** Um quadrilátero convexo é inscritível se, e somente se, seus ângulos opostos são suplementares.

### 2.4.2. Quadrilátero Circunscritível

Um quadrilátero convexo é circunscritível se, e somente se, seus quatro lados são tangentes à circunferência.

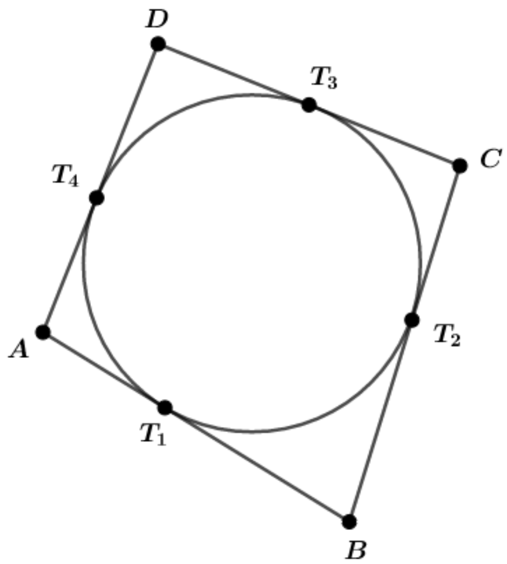
Exemplo:




Com base nesses conceitos, temos dois teoremas que são bastante úteis para resolver questões de geometria plana envolvendo quadriláteros. Vamos estudá-los.

### 2.4.3. Teorema de Pitot

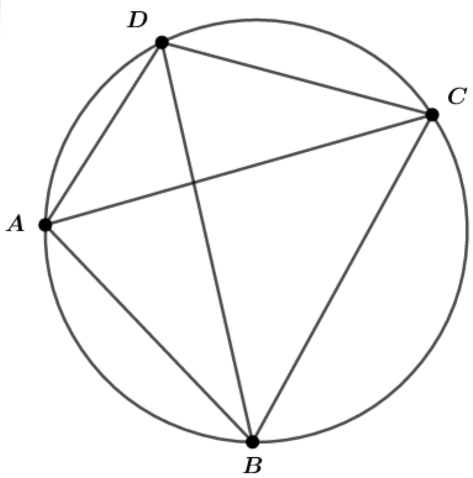
**Um quadrilátero é circunscritível se, e somente se, a soma dos lados opostos forem iguais.**




$$AB + CD = AD + BC$$

### 2.4.4. Teorema de Ptolomeu

**Se o quadrilátero convexo $ABCD$ é inscritível, então, o produto de suas diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.**



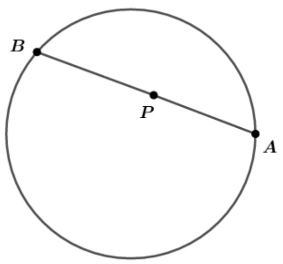

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

## 2.5. Potência de Ponto

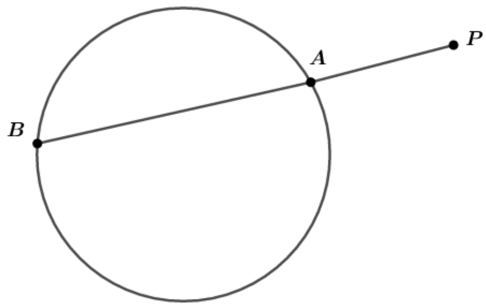
### 2.5.1. Definição

Para finalizar o capítulo de circunferência, vamos estudar o que é a potência de um ponto $P$ em relação a uma circunferência $\lambda$. Podemos ter dois casos possíveis:

1) $P$ está no interior da circunferência.




2) $P$ está no exterior da circunferência.

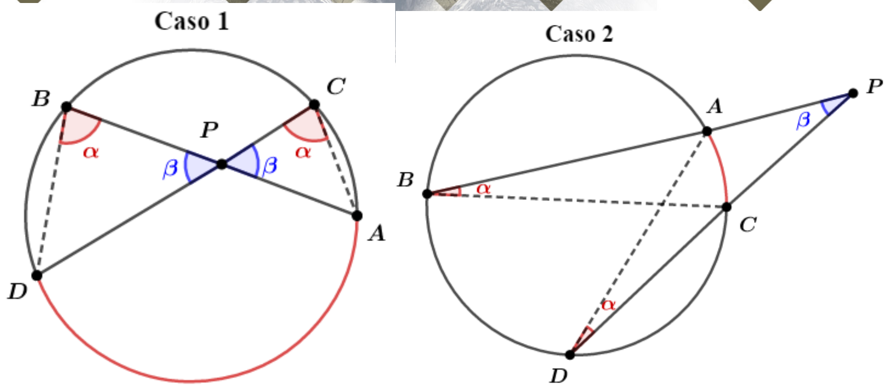



Para qualquer um desses casos, temos pela definição de potência de ponto:

$$Pot_{\lambda}^{P} = PA \cdot PB$$

Lê-se potência do ponto $P$ em relação à circunferência $\lambda$.

Vamos ver sua aplicação. Passando por $P$ duas retas concorrentes tal que essas retas interceptam a circunferência nos pontos $A, B, C, D$, temos:




Analisando as figuras, podemos ver que:

Caso 1)

$$\Delta PBD \sim \Delta PCA \Rightarrow \frac{PB}{PC} = \frac{PD}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Caso 2)

$$\Delta PBC \sim \Delta PDA \Rightarrow \frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Rightarrow PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\boxed{Pot_{\lambda}^{P} = PA \cdot PB = PC \cdot PD}$$

## 2.5.2. Eixo Radical

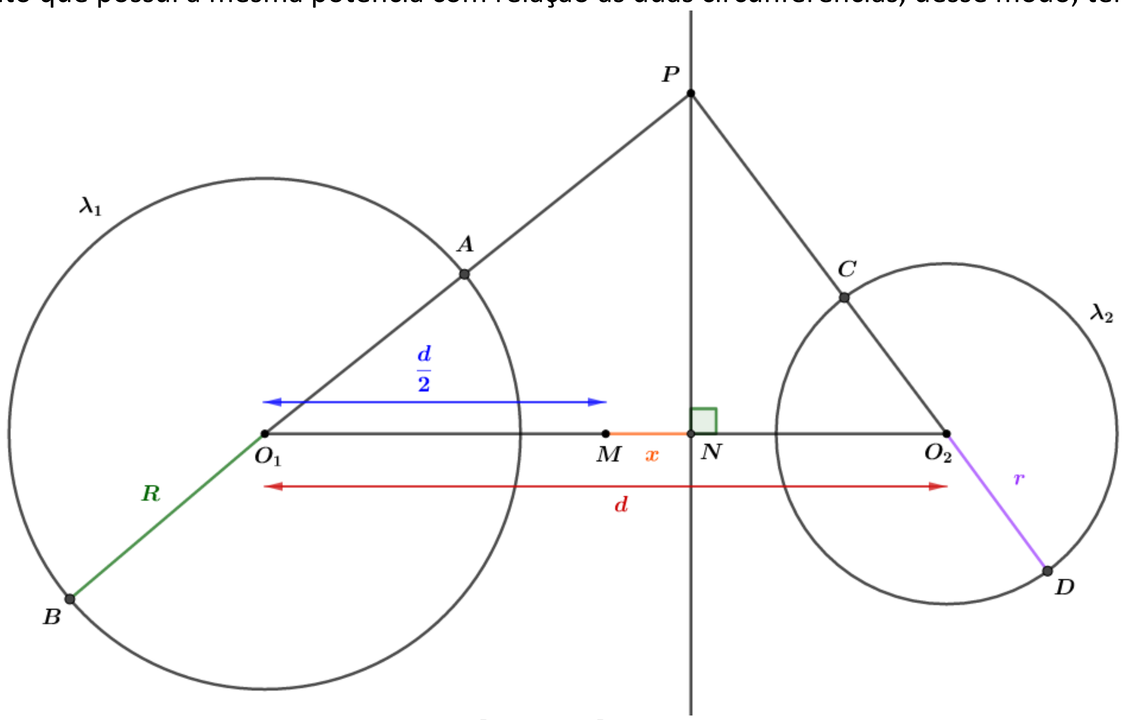
Eixo radical é o lugar geométrico dos pontos do plano que possuem a mesma potência em relação a duas circunferências dadas.

**Teorema**

Uma propriedade do eixo radical é que o conjunto dos pontos do eixo radical é uma reta perpendicular à reta que liga os centros das duas circunferências.

**Demonstração:**

Sejam $\lambda_1$ e $\lambda_2$ duas circunferências localizadas no mesmo plano de raios $R$ e $r$, respectivamente. Seja $P$ o ponto que possui a mesma potência com relação as duas circunferências, desse modo, temos:




$$Pot_{\lambda_1}^{P} = Pot_{\lambda_2}^{P}$$

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$
$$(PO_1 - R)(PO_1 + R) = (PO_2 - r)(PO_2 + r)$$
$$PO_1^2 - R^2 = PO_2^2 - r^2$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = R^2 - r^2 \ \ (I)$$

Se $PO_1 > PO_2$, temos $O_1N > O_2N$. Seja $M$ o ponto médio do segmento $O_1O_2$, assim, temos:

$$\Delta O_1PN \Rightarrow PO_1^2 = PN^2 + O_1N^2 \ \ (II)$$
$$\Delta O_2PN \Rightarrow PO_2^2 = PN^2 + O_2N^2 \ \ (III)$$

Fazendo $(II) - (III)$:

$$PO_1^2 - PO_2^2 = \underbrace{O_1N^2}_{\left(\frac{d}{2}+x\right)^2} - \underbrace{O_2N^2}_{\left(\frac{d}{2}-x\right)^2}$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = \frac{d^2}{4} + dx + x^2 - \frac{d^2}{4} + dx - x^2$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = 2dx \Rightarrow x = \frac{PO_1^2 - PO_2^2}{2d}$$

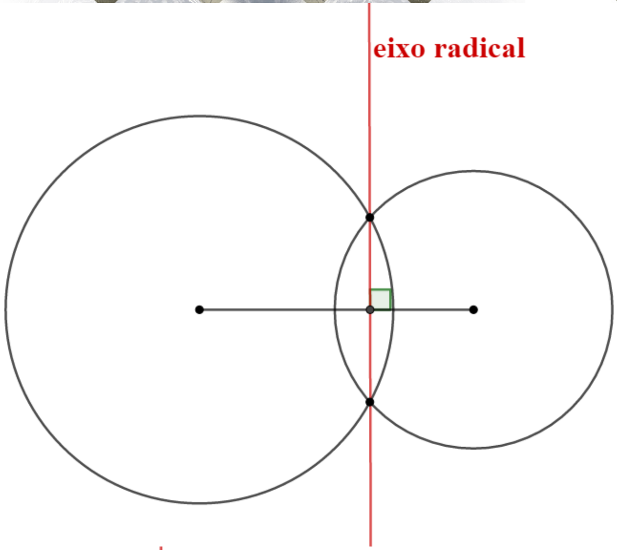
Substituindo $(I)$ na expressão de $x$:

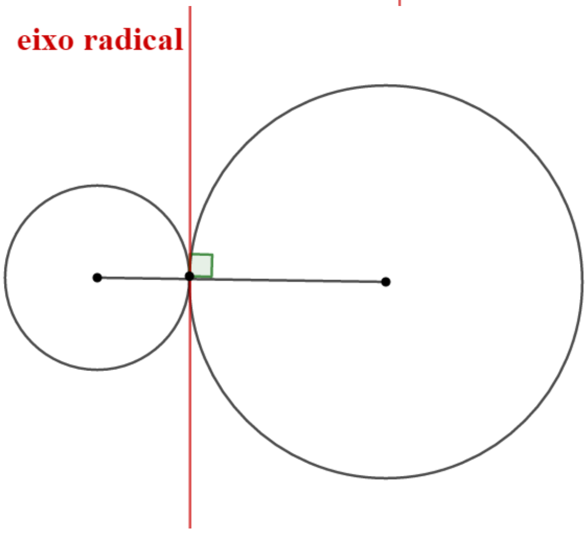
$$x = \frac{R^2 - r^2}{2d} = cte$$

Como $x$ é um valor constante, temos que $N$ é um ponto fixo sobre o segmentro $O_1O_2$. Logo, o lugar geométrico de $P$ é a reta perpendicular a $O_1O_2$ que passa pelo ponto $N$. Portanto, o eixo radical é perpendicular a $O_1O_2$.

Se as circunferências forem secantes, o eixo radical será a reta que passa pelos pontos de intersecção. Se as circunferências forem tangentes, o eixo radical conterá o ponto de tangência.

Exemplos:




HORA DE PRATICAR!

**11.** Demonstre que um quadrilátero é circunscritível se e somente se a soma dos lados opostos são iguais.

**Resolução:**

Esse é o teorema de Pitot, caso não se lembre, veja a demonstração na aula teórica.

**Gabarito: Demonstração**

**12.** Demonstre que num quadrilátero inscritível, o produto das diagonais é igual à soma dos produtos dos lados opostos.

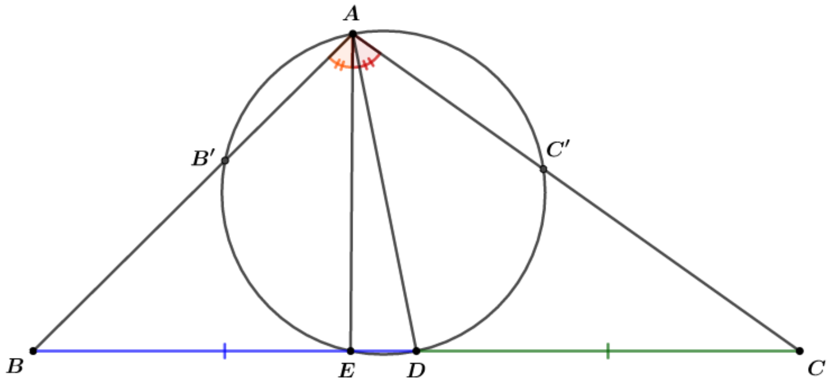
**Resolução:**

Esse é o teorema de Ptolomeu, caso não se lembre, veja a demonstração na aula teórica.

**Gabarito: Demonstração**

**13.** Num triângulo $ABC$, sejam $D$ e $E$ respectivamente os pés da mediana e da bissetriz baixadas de $A$. A circunferência circunscrita ao triângulo $ADE$ encontra $AB$ em $B'$ e $AC$ em $C'$. Demonstrar que $BB' = CC'$.

**Resolução:**




Usando o teorema da bissetriz interna, temos:

$$\frac{BA}{BE} = \frac{CA}{CE} \quad (I)$$

Como $D$ é mediana:

$$BD = CD \quad (II)$$

Pela potência do ponto $B$ e $C$:

$$BB' \cdot BA = BE \cdot BD \Rightarrow \frac{BA}{BE} = \frac{BD}{BB'} \quad (III)$$

$$CC' \cdot CA = CD \cdot CE \Rightarrow \frac{CA}{CE} = \frac{CD}{CC'} \quad (IV)$$

Usando a relação $(I)$, temos de $(III)$ e $(IV)$:

$$\frac{BD}{BB'} = \frac{CD}{CC'}$$

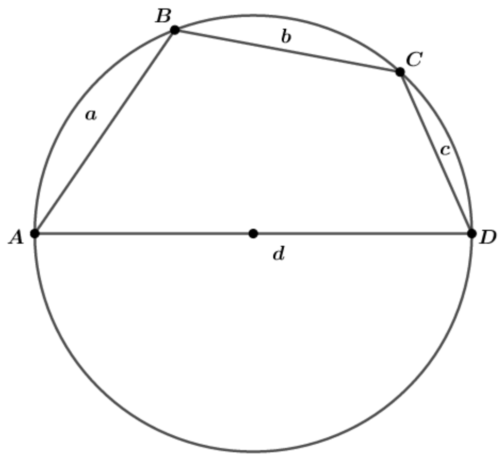
Da relação $(II)$, podemos concluir:

$$BB' = CC'$$

**Gabarito: Demonstração**

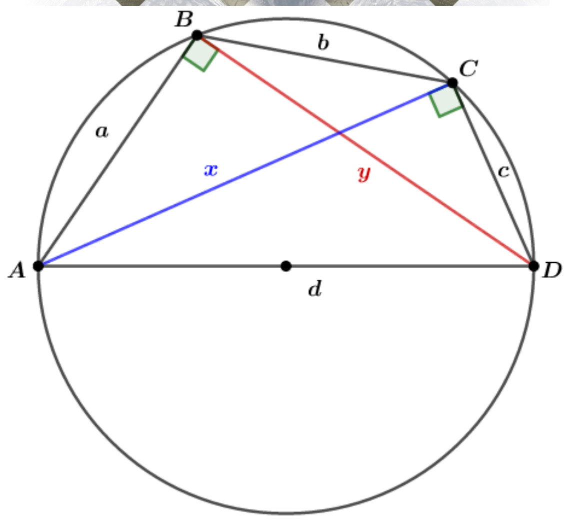
**14.** Num quadrilátero $ABCD$, inscrito em uma circunferência, o lado $AD$ é um diâmetro. Demonstrar que subsiste entre as medidas $a, b, c$ e $d$ dos lados desse quadrilátero a relação:

$$(d^2 - a^2 - b^2 - c^2) \cdot d = 2abc$$




**Resolução:**

Como $\overline{AD}$ é a diagonal da circunferência, se ligarmos os pontos $A$ com $C$ e $B$ com $D$, formamos os triângulos retângulos $ABD$ e $ACD$. $\overline{BD}$ e $\overline{AC}$ são diagonais do quadrilátero. Desse modo, temos:




Sendo o quadrilátero inscritível, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$xy = ac + bd \ \ (I)$$

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos:

$$d^2 = x^2 + c^2 \Rightarrow x = \sqrt{d^2 - c^2} \ \ (II)$$

$$d^2 = y^2 + a^2 \Rightarrow y = \sqrt{d^2 - a^2} \ \ (III)$$

Substituindo $(II)$ e $(III)$ em $(I)$:

$$\sqrt{(d^2 - c^2)(d^2 - a^2)} = ac + bd$$

Elevando a equação acima ao quadrado:

$$d^4 - a^2d^2 - c^2d^2 + \cancel{a^2c^2} = \cancel{a^2c^2} + b^2d^2 + 2abcd$$

$$\Rightarrow d^4 - a^2d^2 - b^2d^2 - c^2d^2 = 2abcd$$

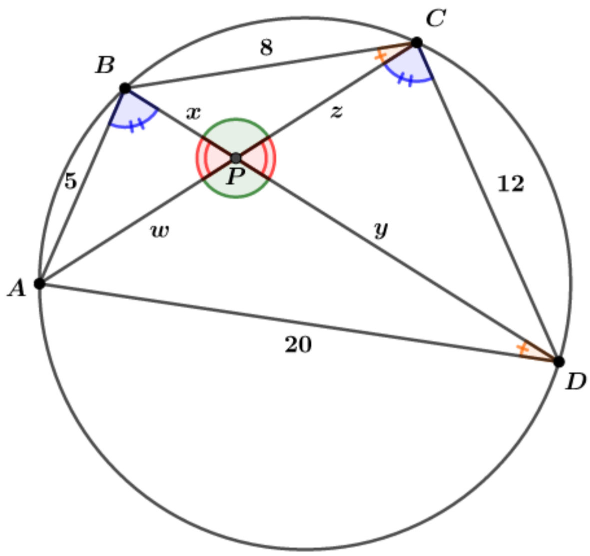
$$\Rightarrow d^3 - a^2d - b^2d - c^2d = 2abc$$

$$\therefore (d^2 - a^2 - b^2 - c^2)d = 2abc$$

**Gabarito: Demonstração**

**15.** Calcular as diagonais de um quadrilátero inscrito numa circunferência cujos lados são: $AB = 5; BC = 8; CD = 12$ e $DA = 20$.

**Resolução:**




Como o quadrilátero é inscritível, podemos aplicar o teorema de Ptolomeu:

$$(x + y)(z + w) = 8 \cdot 20 + 5 \cdot 12 = 220 \ \ (I)$$

Usando o critério de semelhança AA, temos:

$$\Delta ABP \sim \Delta DCP \Rightarrow \frac{x}{z} = \frac{w}{y} = \frac{5}{12} \quad (II)$$

$$\Delta BPC \sim \Delta APD \Rightarrow \frac{x}{w} = \frac{z}{y} = \frac{8}{20} \quad (III)$$

Vamos colocar as variáveis em função de $w$. De $(II)$:

$$y = \frac{12}{5}w$$

$$z = \frac{12}{5}x$$

De $(III)$:

$$x = \frac{8}{20}w \Rightarrow x = \frac{2}{5}w$$

$$z = \frac{12}{5} \cdot \frac{8}{20}w \Rightarrow z = \frac{24}{25}w$$

Substituindo as identidades em $(I)$:

$$\left(\frac{2}{5}w + \frac{12}{5}w\right)\left(\frac{24}{25}w + w\right) = 220 \Rightarrow \frac{14}{5} \cdot \frac{49}{25} \cdot w^2 = 220 \Rightarrow w = \frac{5}{7}\sqrt{\frac{550}{7}} \cong 6{,}33$$

Substituindo o valor de $w$ nas outras variáveis:

$$x \cong 2{,}53$$

$$y \cong 15{,}20$$

$$z \cong 6{,}08$$

Assim, as diagonais são dadas por:

$$x + y \cong 17{,}73$$

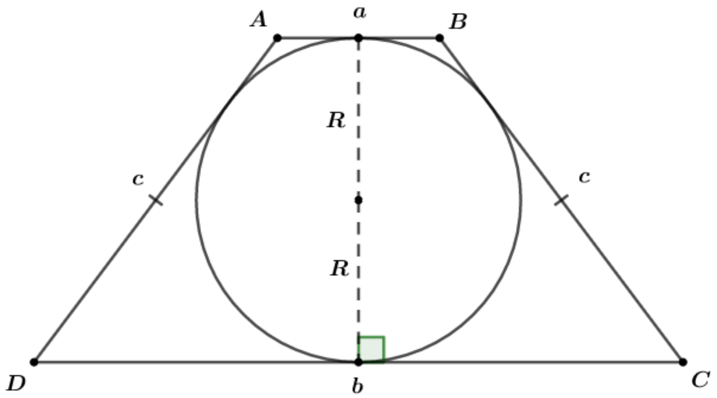
$$z + w \cong 12{,}41$$

**Gabarito: $\mathbf{12{,}41}$ e $\mathbf{17{,}73}$**

**16.** Prove que o produto das bases de um trapézio isósceles circunscrito a um círculo é igual ao quadrado do diâmetro do círculo.

**Resolução:**

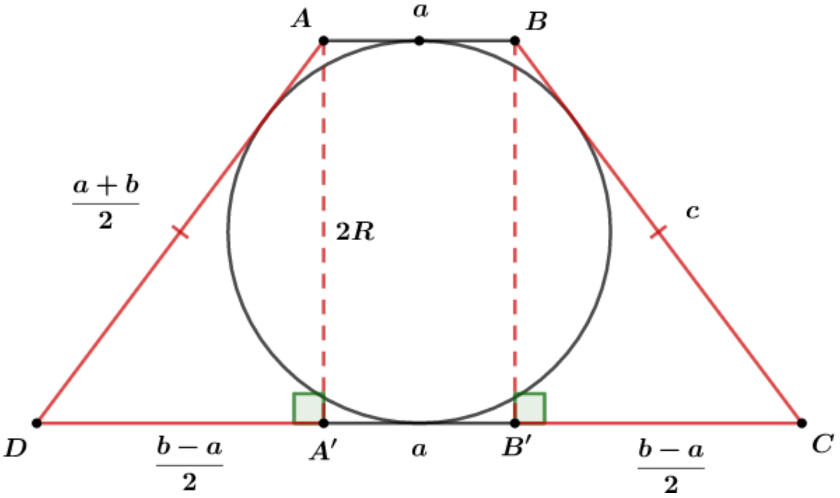
Vamos desenhar a figura da questão e inserir as variáveis:




Queremos provar que $ab = 4R^2$. Sendo o trapézio circunscritível, podemos aplicar o teorema de Pitot:

$$a + b = c + c \Rightarrow c = \frac{a+b}{2}$$

Como o trapézio é isósceles, temos dois triângulos retângulos congruentes dentro dele:




Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo $AA'D$, encontramos:

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + 4R^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = 4R^2$$

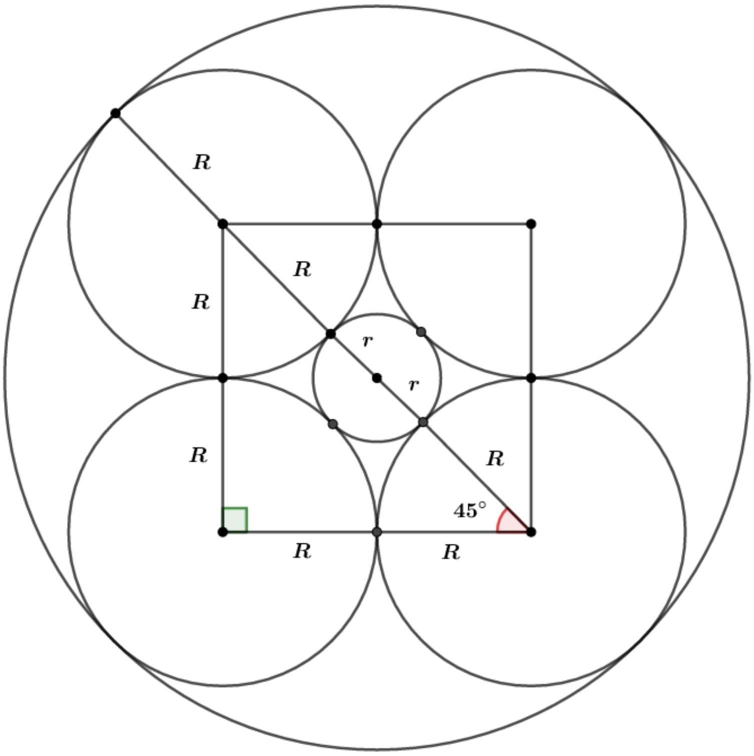
$$\Rightarrow \frac{1}{4}(a+b+b-a)(a+b-b+a) = 4R^2 \Rightarrow \frac{1}{4}(2b)(2a) = 4R^2$$

$$\therefore ab = 4R^2$$

**Gabarito: Demonstração**

**17.** Calcular o raio de 4 circunferências iguais, tangentes duas a duas, e tangentes internamente a uma circunferência de raio $5m$.

**Resolução:**




Os centros das circunferências maiores formam um quadrado de lado $2R$ e a diagonal desse quadrado contém o centro da circunferência menor. Podemos aplicar o seno no triângulo retângulo acima:

$$sen45° = \frac{2R}{2R+2r} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(R+r) = R \Rightarrow \frac{r\sqrt{2}}{2} = R\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow r = R(\sqrt{2}-1)$$

O enunciado afirma que as circunferências tangenciam internamente uma circunferência de raio $5m$, desse modo, temos:

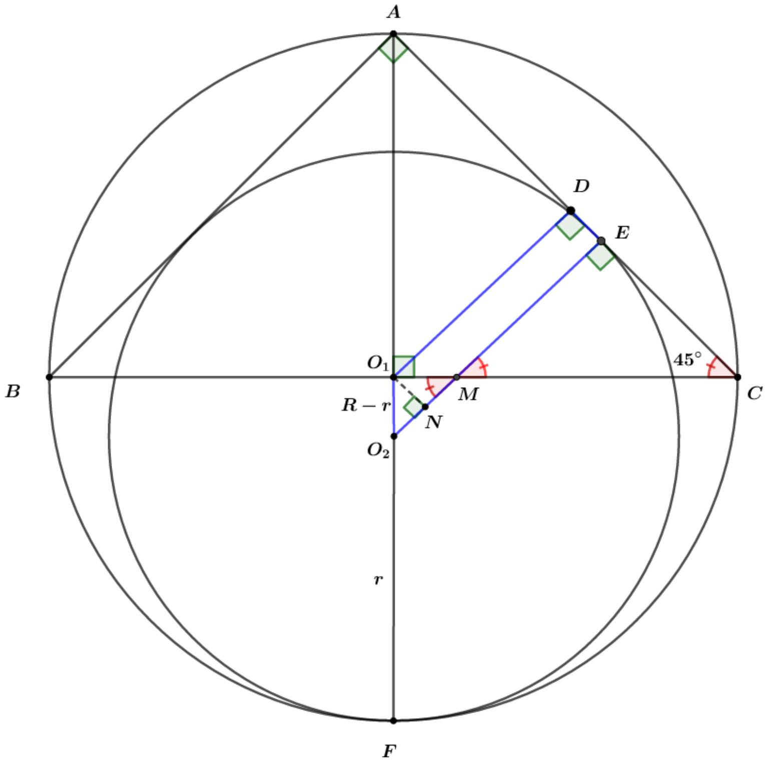
$$2R + r = 5 \Rightarrow 2R + R(\sqrt{2}-1) = 5 \Rightarrow R = \frac{5}{\sqrt{2}+1} \Rightarrow R = 5(\sqrt{2}-1)m$$

**Gabarito:** $\mathbf{5(\sqrt{2}-1)m}$

**18.** Um triângulo retângulo isósceles $ABC$ está inscrito numa circunferência de raio $R$. Determinar o raio da circunferência que é tangente à primeira e aos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ do triângulo $ABC$.

**Resolução:**

Temos a seguinte figura:




$O_1$ é o centro da circunferência maior e $O_2$ é o centro da circunferência menor. Assim, temos $O_1O_2 = R - r$.

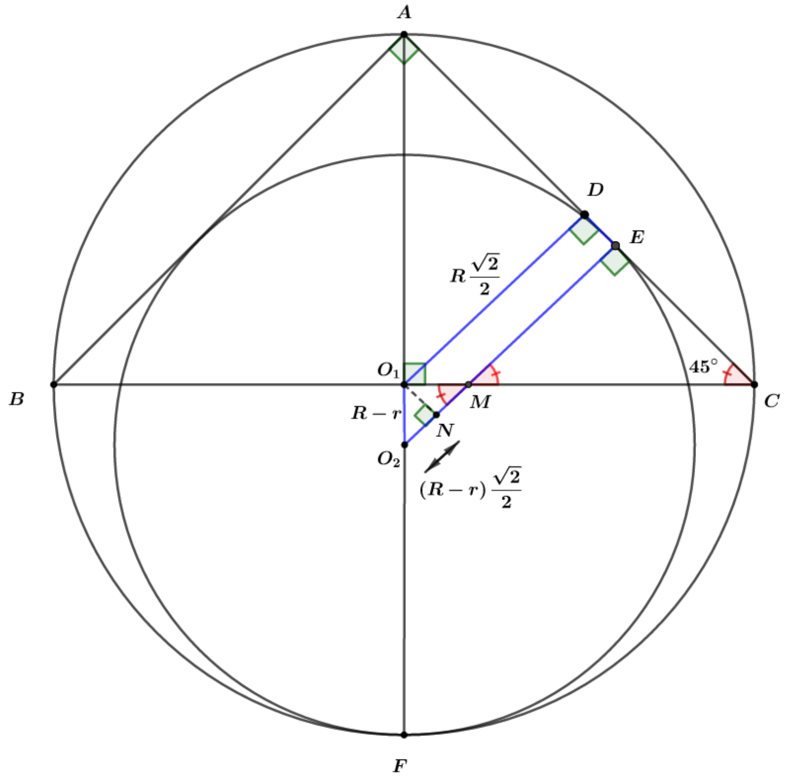
$O_1D$ é a altura do triângulo retângulo $ACO_1$, sendo $O_1C = R$, temos:

$$O_1C \cdot \cos(45°) = O_1D \Rightarrow O_1D = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$E$ é o ponto de tangência da circunferência menor, temos $O_2E = r$.

$O_2N$ é cateto do triângulo retângulo isósceles $O_1O_2N$, logo:

$$O_2N = (R-r)\cos 45° \Rightarrow O_2N = \frac{(R-r)\sqrt{2}}{2}$$




Note que $O_1D = NE$, desse modo, temos:

$$O_2E = O_2N + NE \Rightarrow r = \frac{(R-r)\sqrt{2}}{2} + \frac{R\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 2r = 2R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$$

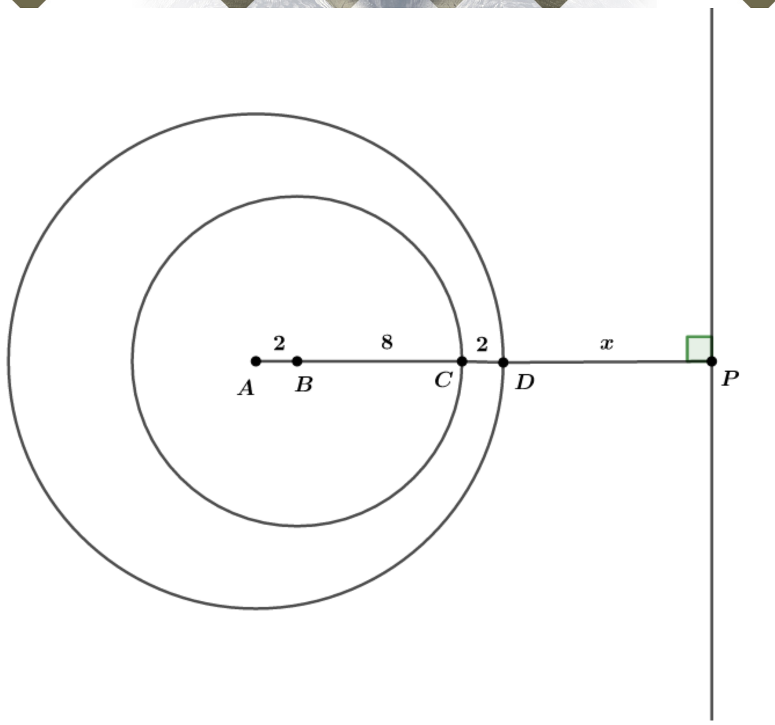
$$r = \frac{R(2\sqrt{2})}{2+\sqrt{2}} \Rightarrow r = 2R(\sqrt{2}-1)$$

**Gabarito:** $\mathbf{2R(\sqrt{2}-1)}$

**19.** Considere dois círculos de centros $A$ e $B$ e raios 12 e 8 tal que $AB = 2$.

**a)** Calcule a distância de $A$ ao eixo radical desses círculos;
**b)** O valor da menor potência que um ponto pode possuir em relação aos dois círculos.
**Resolução:**

De acordo com o enunciado:




a) Sabendo que o eixo radical é o lugar geométrico dos pontos de equipotência entre duas circunferências, temos:

$$(PA + R_A)(PA - R_A) = (PB - R_B)(PB + R_B)$$
$$PA^2 - R_A^2 = P_B^2 - R_B^2$$
$$(x + 12)^2 - 12^2 = (x + 10)^2 - 8^2$$
$$(x + 12)^2 - (x + 10)^2 = 12^2 - 8^2$$
$$(x + 12 + x + 10)(x + 12 - x - 10) = (12 + 8)(12 - 8)$$
$$(2x + 22)(2) = 80$$
$$x = 9$$
$$\therefore PA = x + 12 = 21$$

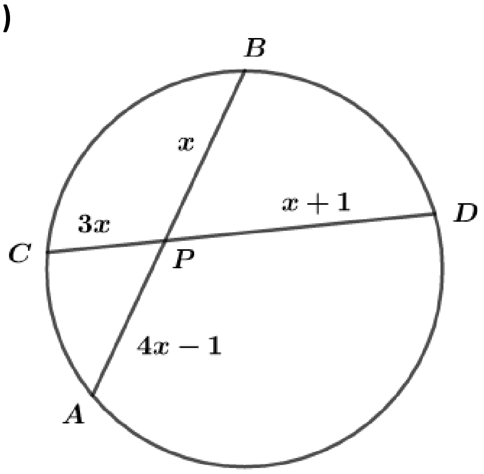
b) O valor da menor potência é dado pela menor distância entre o eixo radical e as circunferências. Isso ocorre quando $x = 9$, assim, temos:

$$Pot_A^P = x(x + 24) = 9(9 + 24) = 297$$

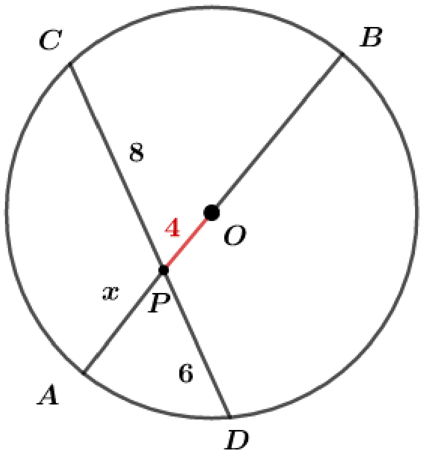
**Gabarito: a) 21  b) 297**

**20.** Determine $x$ nas figuras abaixo.

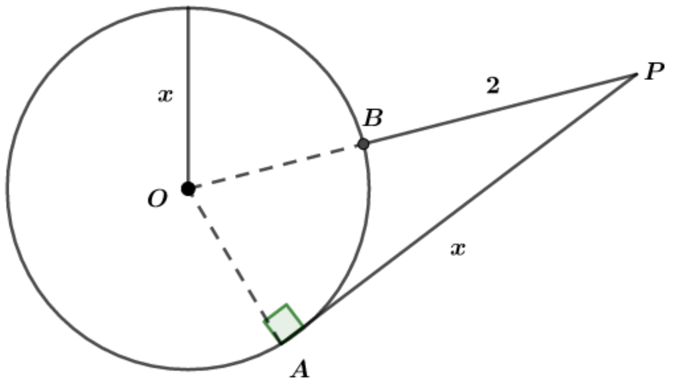
**a)**




**b)**




**c)**




**Resolução:**

**a)** De acordo com a figura, a potência do ponto $P$ é dada por:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow (4x-1)x = 3x(x+1) \Rightarrow 4x^2 - x = 3x^2 + 3x$$
$$x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 4$$

Como $x \neq 0$, a solução é $x = 4$.

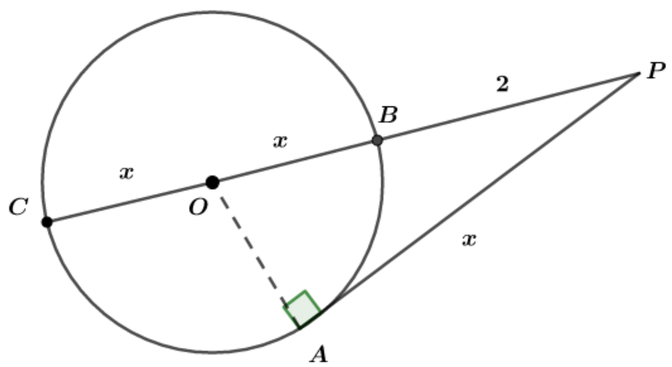
**b)** Nesse caso, note que $OA = OB = 4 + x$. Desse modo:

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD \Rightarrow x \cdot (4+4+x) = 8 \cdot 6 \Rightarrow x^2 + 8x - 48 = 0$$

Raízes:

$$x = -4 \pm \sqrt{64} \Rightarrow x = -12 \text{ ou } 4$$
$$\therefore x = 4$$

**c)** Redesenhando a figura:



$$PB \cdot PC = (PA)^2 \Rightarrow 2 \cdot (2 + 2x) = x^2 \Rightarrow 4 + 4x = x^2 \Rightarrow x^2 - 4x - 4 = 0$$

Raízes:

$$x = 2 \pm \sqrt{8} \Rightarrow x = 2 \pm 2\sqrt{2}$$
$$\therefore x = 2 + 2\sqrt{2}$$

**Gabarito: a) $x = 4$ b) $x = 4$ c) $x = 2 + 2\sqrt{2}$**

## 3. Lista de Questões

LISTA DE QUESTÕES

### ITA

**21. (ITA/2020)**

Seja $A$ um ponto externo a circunferência $\lambda$ de centro $O$ e raio $r$. Considere uma reta passando por $A$ e secante a $\lambda$ nos pontos $C$ e $D$ tal que o segmento $AC$ é externo a $\lambda$ e tem comprimento igual a $r$. Seja $B$ o ponto de $\lambda$ tal que $O$ pertence ao segmento $AB$. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

c) $35°$.

d) $40°$.

e) $45°$.

**22. (ITA/2018)**

Uma reta $r$ separa um plano $\pi$ em dois semiplanos $\pi_1$ e $\pi_2$. Considere pontos $A$ e $B$ tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3, d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em $\pi$ passa pelos pontos $A$ e $B$ e encontra $r$ nos pontos $M$ e $N$. Determine a menor distância possível entre os pontos $M$ e $N$.

**23. (ITA/2018)**

Os lados de um triângulo de vértices $A, B$ e $C$ medem $AB = 3\ cm, BC = 7cm$ e $CA = 8cm$. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto $N$ e o lado $\overline{CA}$ no ponto $K$. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em $cm$, é

a) $2$

b) $2\sqrt{2}$

c) $3$

d) $2\sqrt{3}$

e) $7/2$

**24. (ITA/2016)**

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}}cm^2$. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1-\frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

**25. (ITA/2016)**

Sejam $\lambda$ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em $\lambda$ de comprimento 4 cm. As tangentes a $\lambda$ em $P$ e em $Q$ interceptam-se no ponto $R$ exterior a $\lambda$. Então, a área do triângulo em $PQR$, em cm$^2$, é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**26. (ITA/2015)**

Num triângulo $PQR$, considere os pontos $M$ e $N$ pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo $PQR$. Sabendo-se que o perímetro do triângulo $PQR$ é $25$ e que a medida de $\overline{QR}$ é $10$, então o perímetro do triângulo $PMN$ é igual a

a) 5

b) 6

c) 8

d) 10

e) 15

**27. (ITA/2015)**

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto $E$ em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$

b) $\frac{27}{8}$

c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

**28. (ITA/2015)**

Num triângulo $PQR$, considere os pontos $M$ e $N$ pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo $PQR$. Sabendo-se que o perímetro do triângulo $PQR$ é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo $PMN$ é igual a

a) 5.

b) 6.

c) 8.

d) 10.

e) 15.

**29. (ITA/2014)**

Considere o trapézio $ABCD$ de bases $AB$ e $CD$. Sejam $M$ e $N$ os pontos médios das diagonais $AC$ e $BD$, respectivamente. Então, se $AB$ tem comprimento $x$ e $CD$ tem comprimento $y < x$, $MN$ é igual a

a) $x - y$

b) $\frac{1}{2}(x - y)$

c) $\frac{1}{3}(x - y)$

d) $\frac{1}{3}(x + y)$

e) $\frac{1}{4}(x + y)$

**30. (ITA/2012)**

Um triângulo $ABC$ tem lados com medidas $a = \sqrt{3}/2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$ e $c = 1/2\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado $a$ e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

**31. (ITA/2006)**

Seja $E$ um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos $B$ e $A$, e, $C$ e $D$, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto $G$.

Se $EB = 5, BA = 7, EC = 4, GD = 3$ e $AG = 6$, então $GF$ vale

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

**32. (ITA/2001)**

Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se $r$ é o raio da circunferência inscrita e $a$ é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12

b) 11

c) 10

d) 9

e) 8

**33. (ITA/2000)**

Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja $t$ a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de $t$ compreendido entre os lados do triângulo mede

a) 1 cm

b) 1,5 cm

c) 2 cm

d) 2,5 cm

e) 3 cm

**34. (ITA/1998)**

Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC$. Sobre o lado $AC$ deste triângulo considere um ponto $D$ tal que os segmentos $AD, BD$ e $BC$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$

b) $32°$

c) $36°$

d) $40°$

e) $45°$

IME

**35. (IME/2019)**

Em um setor circular de $45°$, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a $R$, inscreve-se um quadrado $MNPQ$, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto $Q$ sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

a) $4R$

b) $2R$

c) $2R\sqrt{2}$

d) $4R\sqrt{5}$

e) $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

**36. (IME/2019)**

Uma corda $CD$ corta o diâmetro $AB$ de um círculo de raio $R$ no ponto $E$. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

**37. (IME/2018)**

Considere um triângulo $ABC$ onde $BC = a$, $AB = c$, $AC = b, c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia $BC$, em $D$ e $DE$ é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e que passa por $E$ intercepta $AB$ em $P$ e $AC$ em $Q$. A reta $AE$ intercepta $BC$ no ponto $R$. Determine os segmentos de reta $EQ$ e $DR$ em função dos lados do triângulo: $a, b$ e $c$.

**38. (IME/2016)**

Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem $a$ e duas delas valem $b$. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é

a) $2$

b) $1 + \sqrt{3}$

c) $2 + \sqrt{3}$

d) $1 + 2\sqrt{2}$

e) $2+2\sqrt{3}$

**39. (IME/2016)**

Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro $O$ no ponto $C'$ segundo um ângulo de $45°$. Sejam $A$ e $B$ os pontos externos desta corda, e a distância $AC'$ igual a $\sqrt{3}+1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e $C$ é a extremidade do diâmetro mais distante de $C'$. O prolongamento do segmento $AO$ intercepta $BC$ em $A'$. Calcule a razão em que $A'$ divide $BC$.

## 4. Gabarito

GABARITO

### ITA

**21.** b
**22.** $d(M,N)=10\sqrt{2}$
**23.** a
**24.** b
**25.** e
**26.** $p_{PMN}=5$
**27.** e
**28.** a
**29.** b
**30.** a
**31.** d
**32.** c
**33.** b
**34.** c

### IME

**35.** e
**36.** $ED=\frac{R\sqrt{2}(\sqrt{5}-1)}{4}$
**37.** $EQ=\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$ e $DR=c-b$
**38.** c
**39.** $\frac{A'B}{A'C}=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$

## 5. Lista de Questões Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

### ITA

**21. (ITA/2020)**

Seja $A$ um ponto externo a circunferência $\lambda$ de centro $O$ e raio $r$. Considere uma reta passando por $A$ e secante a $\lambda$ nos pontos $C$ e $D$ tal que o segmento $AC$ é externo a $\lambda$ e tem comprimento igual a $r$. Seja $B$ o ponto de $\lambda$ tal que $O$ pertence ao segmento $AB$. Se o ângulo $B\hat{A}D$ mede $10°$, então a medida do ângulo $B\hat{O}D$ é igual a

a) $25°$.

b) $30°$.

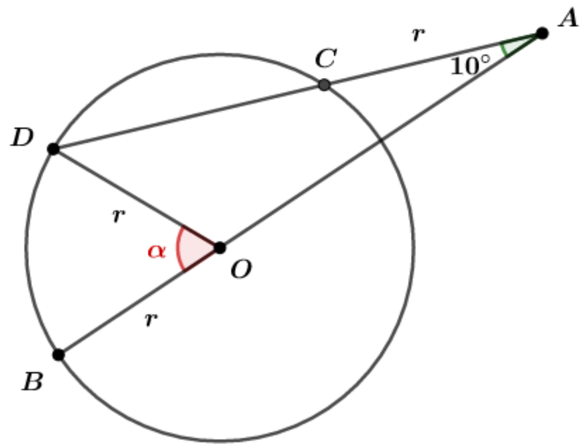
c) $35°$.

d) $40°$.

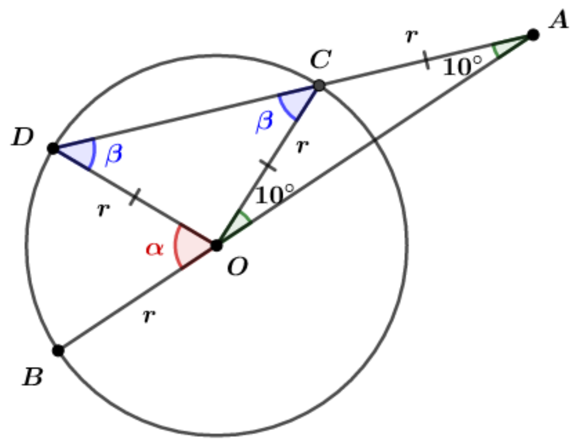
e) $45°$.

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

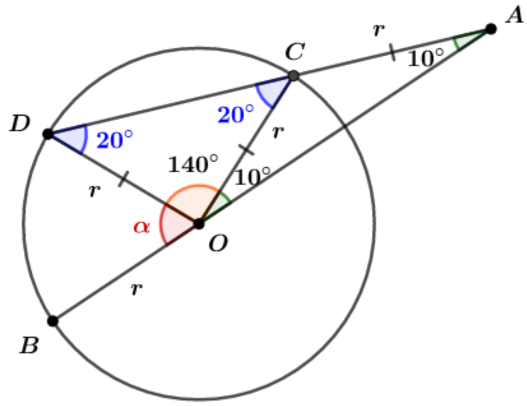



Queremos determinar $\alpha$. Perceba que $OCA$ é um triângulo isósceles, pois $CO = CA = r$. Logo:



Como $\beta$ é ângulo externo ao $\Delta OCA$, então $\beta = 10° + 10° = 20°$. Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo deve ser 180°, temos:

$$C\hat{O}D + \beta + \beta = 180° \Rightarrow C\hat{O}D = 180° - 40° = 140°$$




Assim, $\alpha$ é dada por:

$$\alpha + 140° + 10° = 180° \therefore \alpha = 30°$$

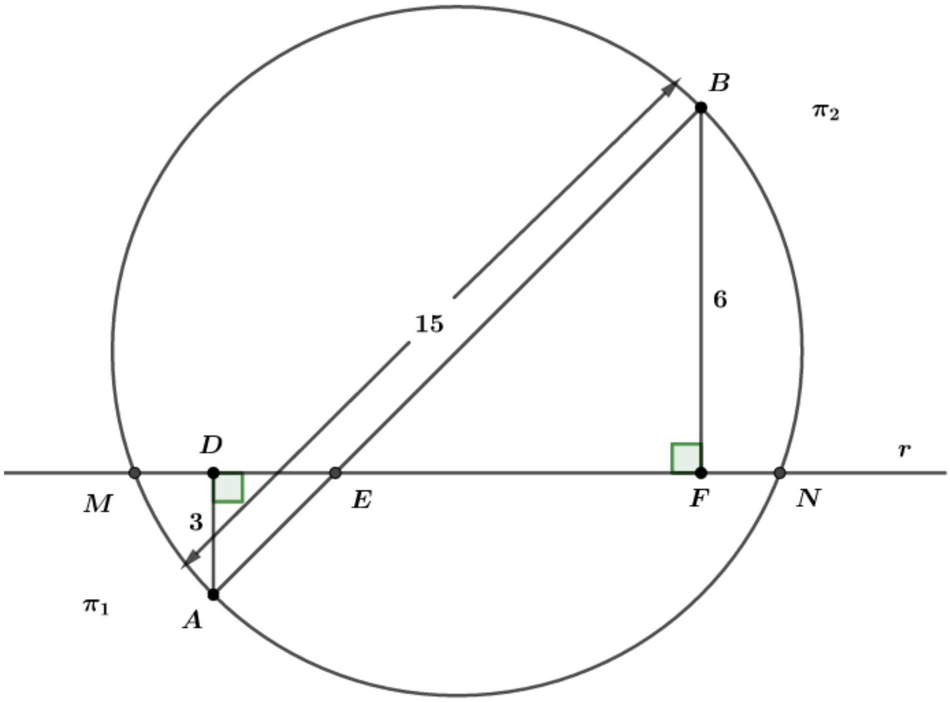
**Gabarito: "b".**

**22. (ITA/2018)**

Uma reta $r$ separa um plano $\pi$ em dois semiplanos $\pi_1$ e $\pi_2$. Considere pontos $A$ e $B$ tais que $A \in \pi_1$ e $B \in \pi_2$ de modo que $d(A, r) = 3, d(B, r) = 6$ e $d(A, B) = 15$. Uma circunferência contida em $\pi$ passa pelos pontos $A$ e $B$ e encontra $r$ nos pontos $M$ e $N$. Determine a menor distância possível entre os pontos $M$ e $N$.

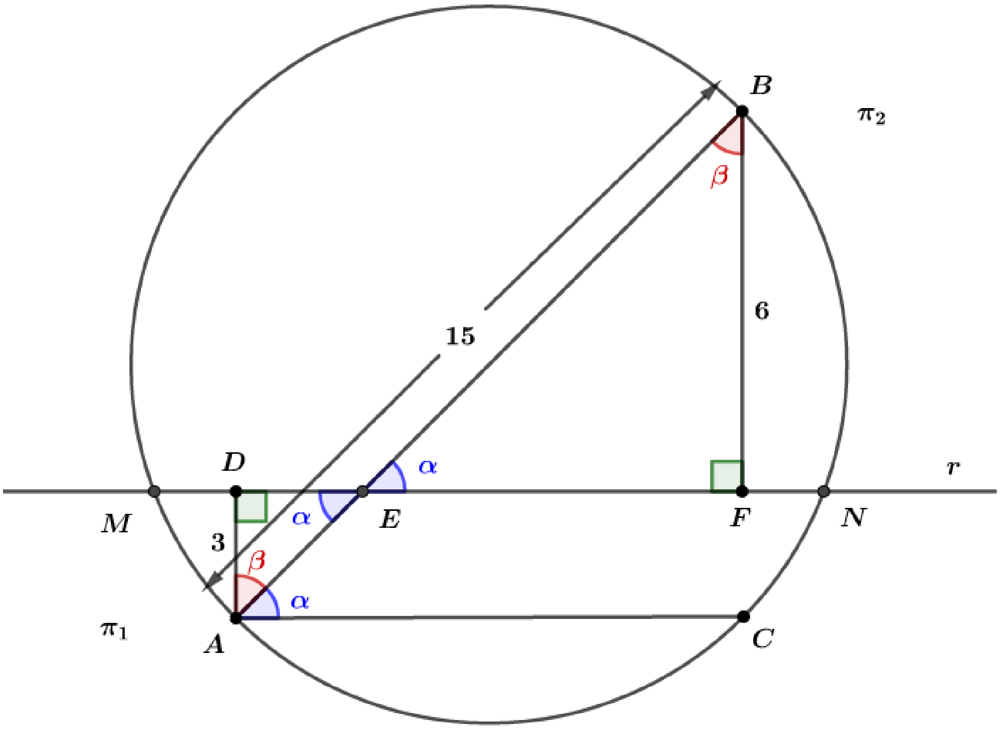
**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:

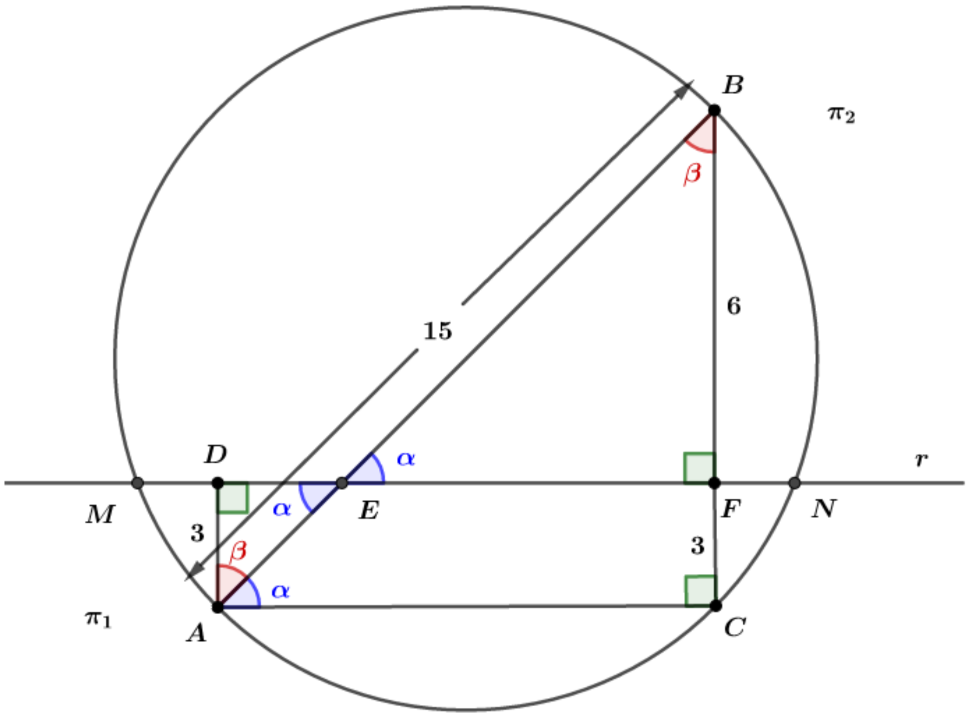



Como $A\hat{E}D$ e $B\hat{E}F$ são opostos pelo vértice, podemos definir $A\hat{E}D = B\hat{E}F = \alpha$. $\Delta AED$ e $\Delta BFE$ são retângulos, então, os triângulos $AED$ e $BFE$ são semelhantes com $E\hat{A}D = E\hat{F}B$.

Se passarmos uma reta paralela à reta $r$ e que passa pelo ponto $A$, obtemos pela propriedade dos ângulos de retas paralelas $A\hat{E}D = E\hat{A}C$:



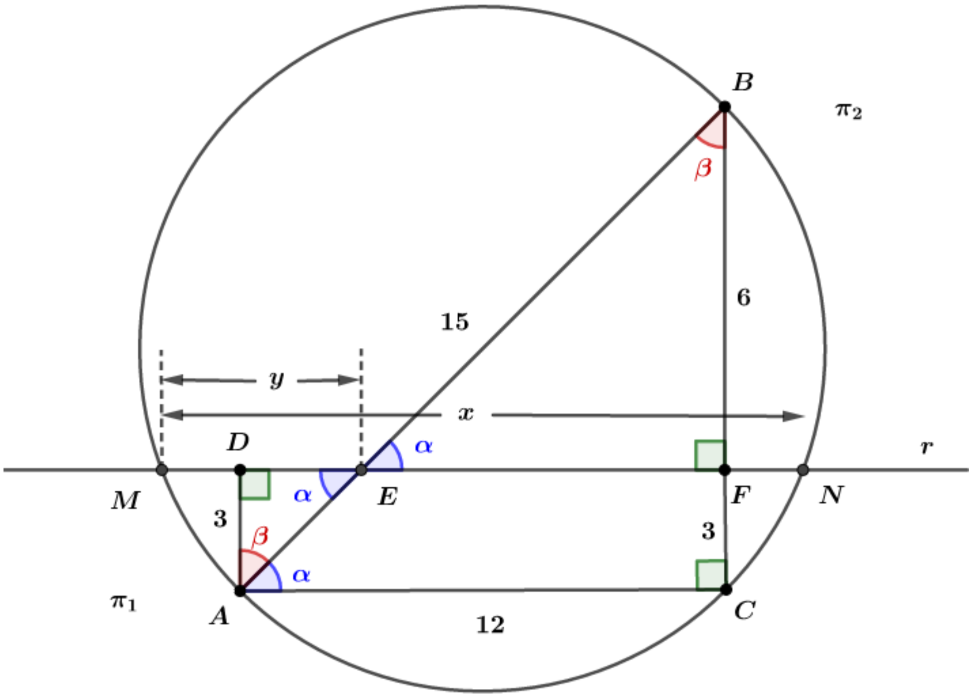

Podemos ver que $\alpha + \beta = 90°$. Então, se estendermos o segmento $BF$ de modo a interceptar o ponto $C$, obtemos o triângulo retângulo $ABC$ com $\hat{C} = 90°$. Logo, $\Delta ABC$ é inscritível com $AB$ sendo a diagonal da circunferência.




Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta ABC$:

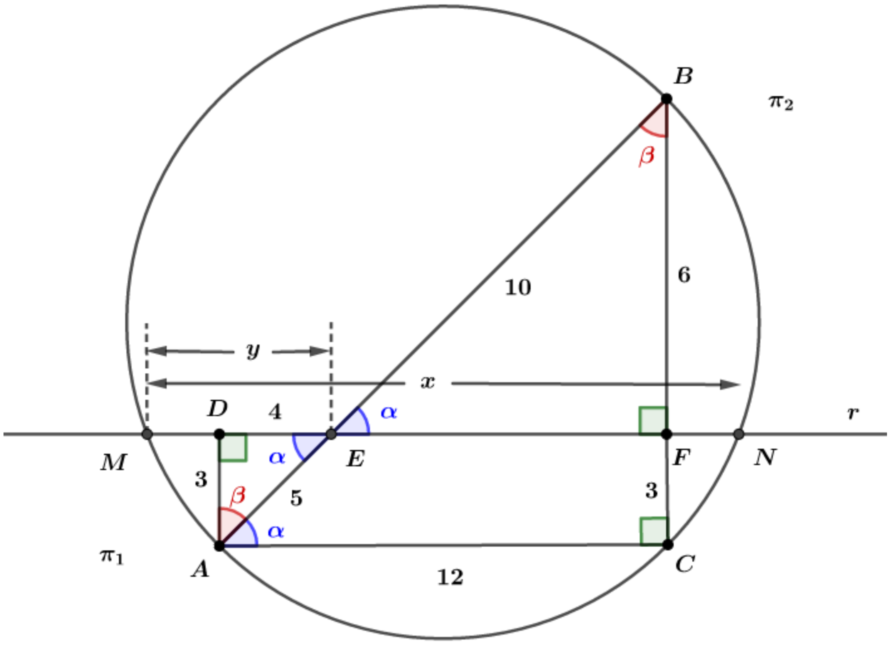
$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$
$$15^2 = 9^2 + AC^2$$
$$AC = \sqrt{225 - 81} = \sqrt{144}$$
$$AC = 12$$

Fazendo $MN = x$ e $ME = y$:




Podemos ver que os triângulos $ABC$ e $AED$ são semelhantes, então:

$$\Delta ABC \sim \Delta AED \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{AD} \Rightarrow AE = \frac{15}{9} \cdot 3 \Rightarrow AE = 5$$
$$\Delta AED \Rightarrow DE = 4$$




Usando o teorema das cordas, temos:

$$AE \cdot EB = ME \cdot EN$$
$$5 \cdot 10 = y \cdot (x - y)$$
$$x = \frac{50}{y} + y$$

Aplicando a desigualdade das médias, obtemos:

$$(desigualdade\ das\ médias)\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$$

$$x=\frac{50}{y}+y\Rightarrow\frac{\frac{50}{y}+y}{2}\geq\sqrt{\frac{50}{y}y}$$

$$x\geq 2\sqrt{50}$$
$$x\geq 10\sqrt{2}$$

Portanto, sendo $d(M,N)=x$, o menor valor de $d(M,N)$ é dado por:

$$x=10\sqrt{2}$$

**Gabarito: $d(M,N)=10\sqrt{2}$**

**23. (ITA/2018)**

Os lados de um triângulo de vértices $A, B$ e $C$ medem $AB=3\ cm, BC=7cm$ e $CA=8cm$. A circunferência inscrita no triângulo tangencia o lado $\overline{AB}$ no ponto $N$ e o lado $\overline{CA}$ no ponto $K$. Então, o comprimento do segmento $\overline{NK}$, em $cm$, é

a) 2

b) $2\sqrt{2}$

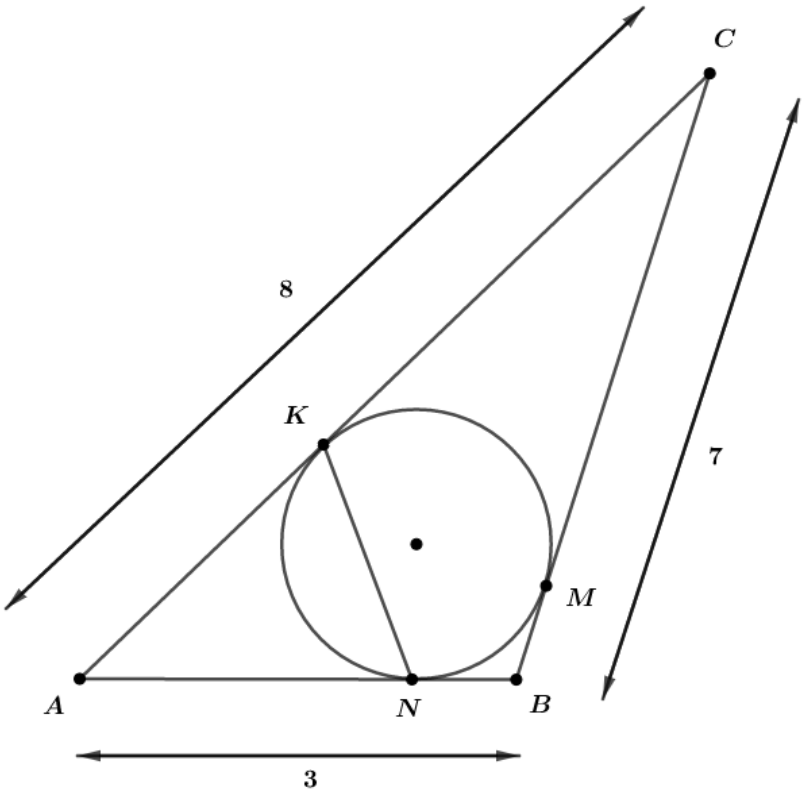
c) 3

d) $2\sqrt{3}$

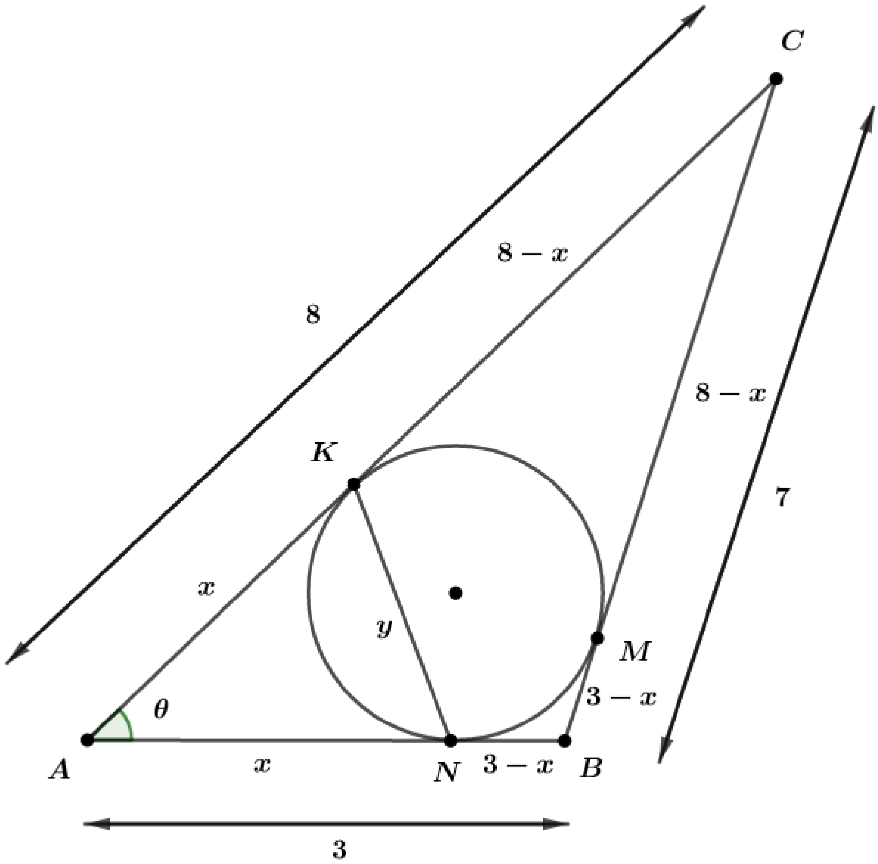
e) $7/2$

**Comentários**

Temos a seguinte figura:




Pela propriedade das tangentes, temos $AK=AN, BN=BM, CM=CK$. Fazendo $AN=AK=x$, encontramos $CM=CK=8-x$ e $BN=BM=3-x$:




Como $BC = 7$, temos:

$$BC = BM + CM \Rightarrow 7 = 3 - x + 8 - x \Rightarrow x = 2$$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo $ABC$ para encontrar o valor de $\theta$:

$$7^2 = 8^2 + 3^2 - 2 \cdot 8 \cdot 3 \cdot cos\theta$$

$$64 + 9 - 49 = 48cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{24}{48} = \frac{1}{2}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

Novamente, aplicando a lei dos cossenos no triângulo $ANK$ para encontrar o valor de $NK = y$:

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 cos\theta$$

$$y^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$y^2 = 4$$

$$y = 2$$

$$\therefore NK = 2\ cm$$

**Gabarito: "a".**

**24. (ITA/2016)**

Um triângulo está inscrito numa circunferência de raio 1 cm. O seu maior lado mede 2 cm e sua área é de $\frac{1}{\sqrt{2}} cm^2$. Então, o menor lado do triângulo, em cm, mede

a) $1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$

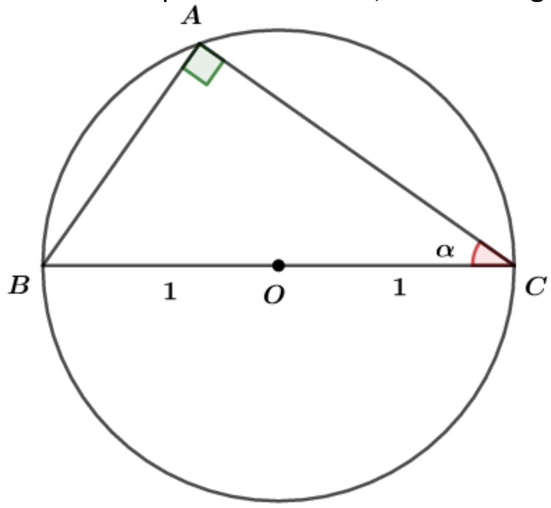
c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{6}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

**Comentários**

Como o triângulo está inscrito na circunferência de raio 1 cm e possui o maior lado igual a 2, temos que ele é retângulo e o maior lado é a hipotenusa. Assim, temos a seguinte figura:




O enunciado nos dá o valor da área do triângulo. Precisamos calcular o valor da base e da altura do triângulo. Vamos encontrar uma relação entre os catetos e o ângulo $\alpha$.

$$AB = 2sen\alpha$$
$$AC = 2cos\alpha$$
$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2sen\alpha \cdot 2cos\alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = sen(2\alpha)$$
$$\Rightarrow 2\alpha = 45° \Rightarrow \alpha = 22{,}5°$$

Como $\alpha = 22{,}5° < 45°$, temos que o cosseno de $\alpha$ é maior que o seno desse ângulo. Logo, o menor lado é dado por:

$$AB = 2\,\mathrm{sen}\,22{,}5°$$

Lembrando que $\mathrm{sen}(A) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(2A)}{2}}$, temos:

$$AB = 2 \cdot \sqrt{\frac{1-\cos(45°)}{2}} = 2\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$$

**Gabarito: "b".**

---

**25. (ITA/2016)**

Sejam $\lambda$ uma circunferência de raio 4 cm e $\overline{PQ}$ uma corda em $\lambda$ de comprimento 4 cm. As tangentes a $\lambda$ em $P$ e em $Q$ interceptam-se no ponto $R$ exterior a $\lambda$. Então, a área do triângulo em $PQR$, em cm$^2$, é igual a

a) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

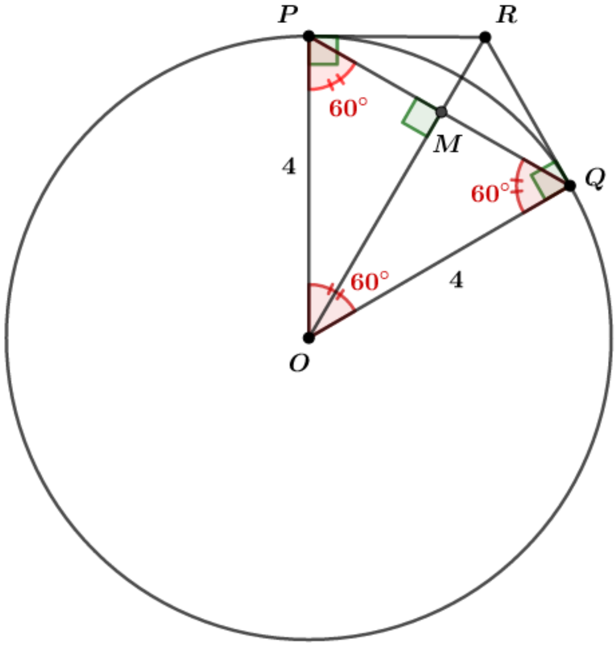
c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

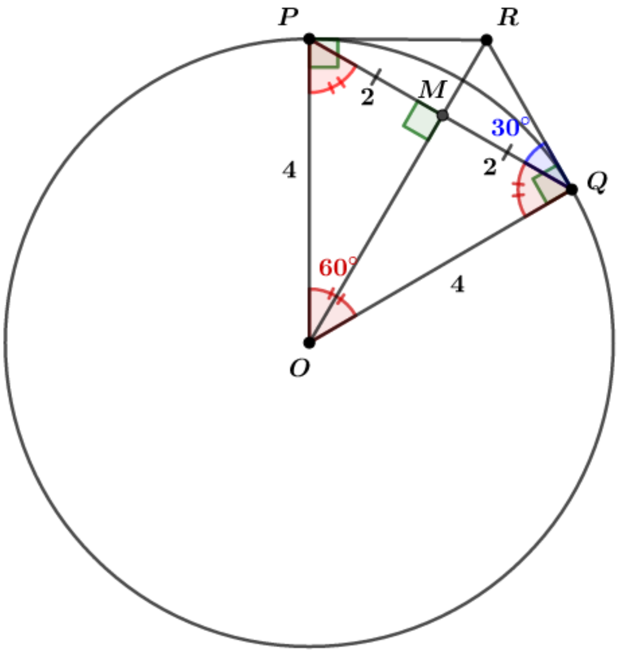
e) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

**Comentários**

Seja $O$ o centro da circunferência $\lambda$. Como o comprimento de $PQ$ é igual ao raio da circunferência, temos que $OPQ$ é um triângulo equilátero de medida 4 cm. Então, temos:




Sendo $P, Q$ tangentes à circunferência e $O\hat{P}M \equiv O\hat{Q}M \equiv 60°$, temos $M\hat{P}R \equiv M\hat{Q}R \equiv 30°$. Logo, $\Delta PQR$ é isósceles com $PR = QR$ e $M$ é a mediatriz do triângulo $PQR$:




A altura $RM$ é dada por:

$$tg30° = \frac{RM}{2} \Rightarrow RM = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Calculando a área do triângulo $PQR$:

$$A_{PQR}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A_{PQR}=\frac{4\sqrt{3}}{3}\ cm^2$$

**Gabarito: "e".**

**26. (ITA/2015)**

Num triângulo $PQR$, considere os pontos $M$ e $N$ pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo $PQR$. Sabendo-se que o perímetro do triângulo $PQR$ é $25$ e que a medida de $\overline{QR}$ é $10$, então o perímetro do triângulo $PMN$ é igual a

a) 5

b) 6

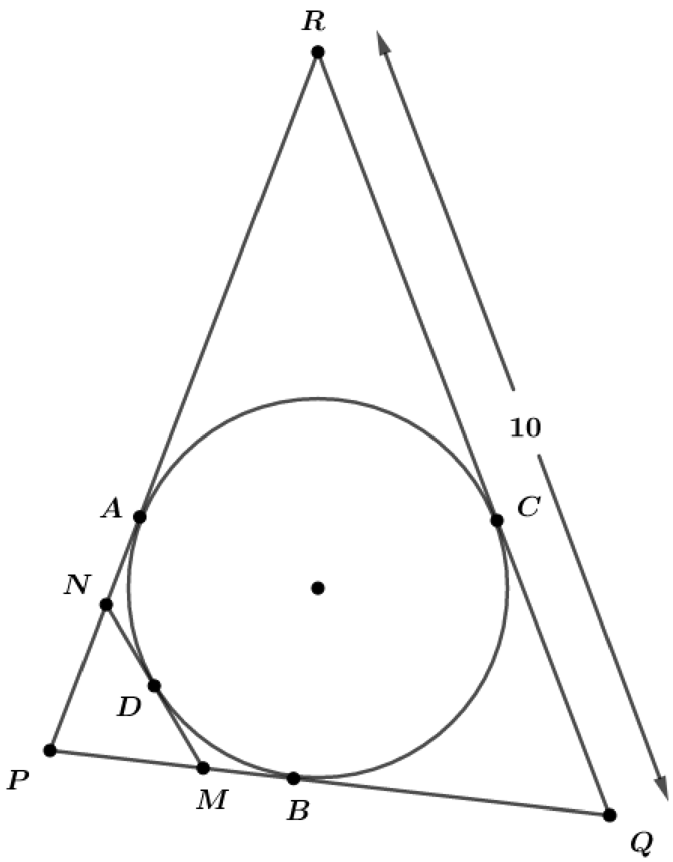
c) 8

d) 10

e) 15

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




O perímetro é 25, então:

$$PR+PQ+10=25\Rightarrow PR+PQ=15$$

$A,B,C,D$ são os pontos de tangência.

Queremos calcular o perímetro do $\Delta PMN$:

$$p_{PMN}=PM+PN+MN$$

Como $A,B,C$ são os pontos de tangência, temos:

$$NA = ND$$
$$MD = MB$$
$$PA = PB$$
$$QB = QC$$
$$RA = RC$$

Desse modo:

$$p_{PMN} = PB - MB + PA - NA + ND + MD$$
$$p_{PMN} = PB + PA$$

Escrevendo $PB$ e $PA$ em função de $PQ$ e $PR$:

$$p_{PMN} = PQ - QB + PR - RA$$

Como $PQ + PR = 15$, $QB = QC$, $RA = RC$ e $RC + QC = 10$, temos:

$$p_{PMN} = PQ + PR - (QC + RC)$$
$$p_{PMN} = 15 - 10 = 5$$

**Gabarito: $p_{PMN} = 5$**

---

**27. (ITA/2015)**

Seja $ABCD$ um trapézio isósceles com base maior $\overline{AB}$ medindo 15, o lado $\overline{AD}$ medindo 9 e o ângulo $A\hat{D}B$ reto. A distância entre o lado $\overline{AB}$ e o ponto $E$ em que as diagonais se cortam é

a) $\frac{21}{8}$

b) $\frac{27}{8}$

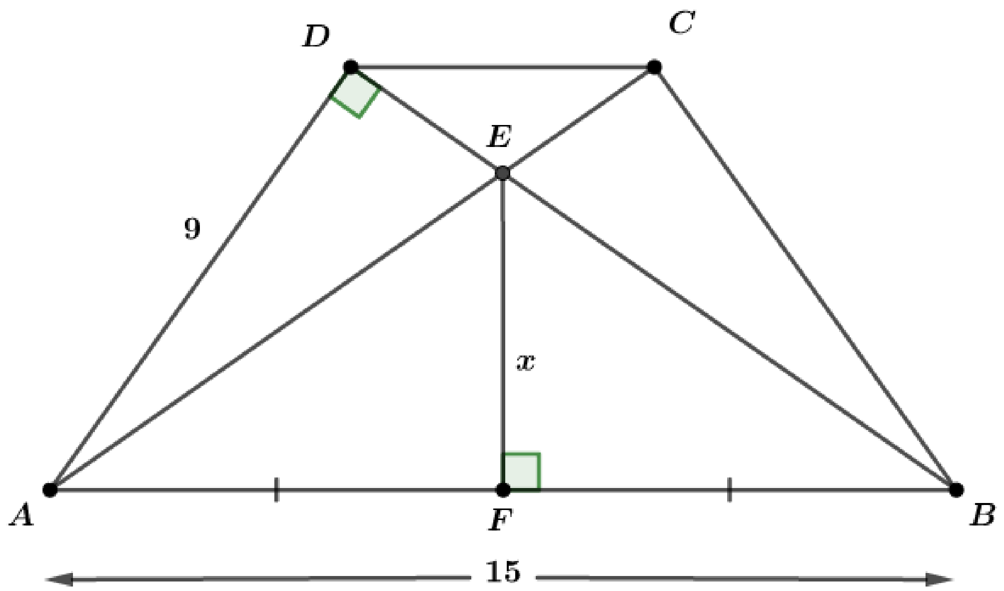
c) $\frac{35}{8}$

d) $\frac{37}{8}$

e) $\frac{45}{8}$

**Comentários**

Desenhando a figura do enunciado, obtemos:




Como o trapézio é isósceles, temos $F$ é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$. Então:

$$AF = BF = \frac{15}{2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta ADB$:

$$15^2 = 9^2 + BD^2 \Rightarrow BD = 12$$

Os triângulos $BFE$ e $BDA$ são congruentes, logo:

$$\frac{EF}{FB} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{x}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{12} \Rightarrow x = \frac{45}{8}$$

**Gabarito: "e".**

---

**28. (ITA/2015)**

Num triângulo $PQR$, considere os pontos $M$ e $N$ pertencentes aos lados $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$, respectivamente, tais que o segmento $\overline{MN}$ seja tangente à circunferência inscrita ao triângulo $PQR$. Sabendo-se que o perímetro do triângulo $PQR$ é 25 e que a medida de $\overline{QR}$ é 10, então o perímetro do triângulo $PMN$ é igual a

a) 5.

b) 6.

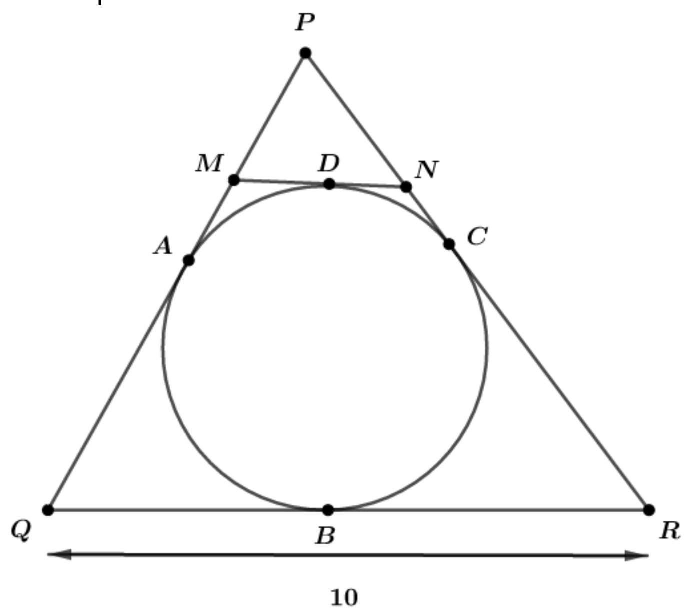
c) 8.

d) 10.

e) 15.

**Comentários**

Vamos desenhar a figura da questão:




O enunciado diz que o perímetro do triângulo $PQR$ vale 25. Seja $p_{PQR}$ o perímetro do triângulo:

$$p_{PQR} = PQ + PR + QR = 25 \Rightarrow PQ + PR = 15 \ \ (I)$$

Vamos analisar o quadrilátero $MNRQ$. Pelas propriedades de potência de ponto, temos:

$$MA = MD \text{ e } ND = NC \ \ (II)$$

O perímetro pedido é dado por:

$$p_{PMN} = PM + MN + PN \Rightarrow p_{PMN} = PM + MD + ND + PN$$

Usando a relação $(II)$:

$$\Rightarrow p_{PMN} = PM + MA + PN + NC \Rightarrow p_{PMN} = PA + PC$$

Pelas propriedades dos pontos de tangência, podemos afirmar:

$$QB = QA \text{ e } RB = RC \ \ (III)$$

Então, da relação $(I)$:

$$PQ + PR = 15 \Rightarrow PA + QA + RC + PC = 15$$

Usando a relação $(III)$:

$$PA + \underbrace{QB + RB}_{QR} + PC = 15 \Rightarrow \underbrace{PA + PC}_{p_{PMN}} = 15 - \underbrace{QR}_{10} \Rightarrow p_{PMN} = 5$$

**Gabarito: "a".**

**29. (ITA/2014)**

Considere o trapézio $ABCD$ de bases $AB$ e $CD$. Sejam $M$ e $N$ os pontos médios das diagonais $AC$ e $BD$, respectivamente. Então, se $AB$ tem comprimento $x$ e $CD$ tem comprimento $y < x$, $MN$ é igual a

a) $x - y$

b) $\frac{1}{2}(x - y)$

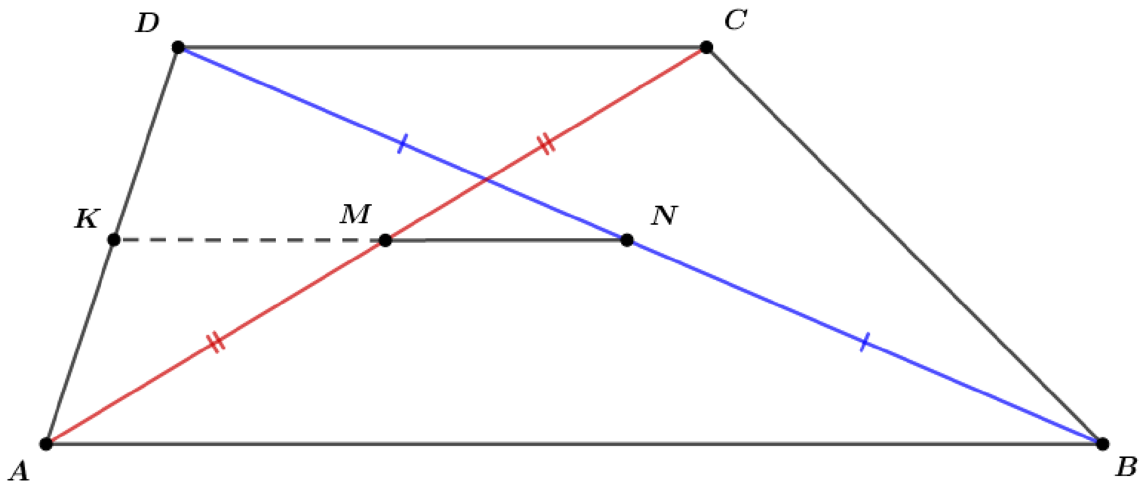
c) $\frac{1}{3}(x - y)$

d) $\frac{1}{3}(x + y)$

e) $\frac{1}{4}(x + y)$

**Comentários**

De acordo com o texto, temos o seguinte desenho:




$$AB = x \text{ e } CD = y$$

$MN$ é paralelo aos segmentos $AB$ e $CD$. Logo, $KM$ e $KN$ são as bases médias dos triângulos $ADC$ e $ADB$, respectivamente. Assim, temos:

$$KN = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$$
$$KM = \frac{CD}{2} = \frac{y}{2}$$

A medida de $MN$ é dada por:

$$MN = KN - KM = \frac{x}{2} - \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(x - y)$$

**Gabarito: "b".**

**30. (ITA/2012)**

Um triângulo $ABC$ tem lados com medidas $a = \sqrt{3}/2\text{cm}$, $b = 1\text{cm}$ e $c = 1/2\text{cm}$. Uma circunferência é tangente ao lado $a$ e também aos prolongamentos dos outros dois lados do triângulo, ou seja, a circunferência é ex-inscrita ao triângulo. Então, o raio da circunferência, em cm, é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

c) $\frac{\sqrt{3}+1}{3}$

d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

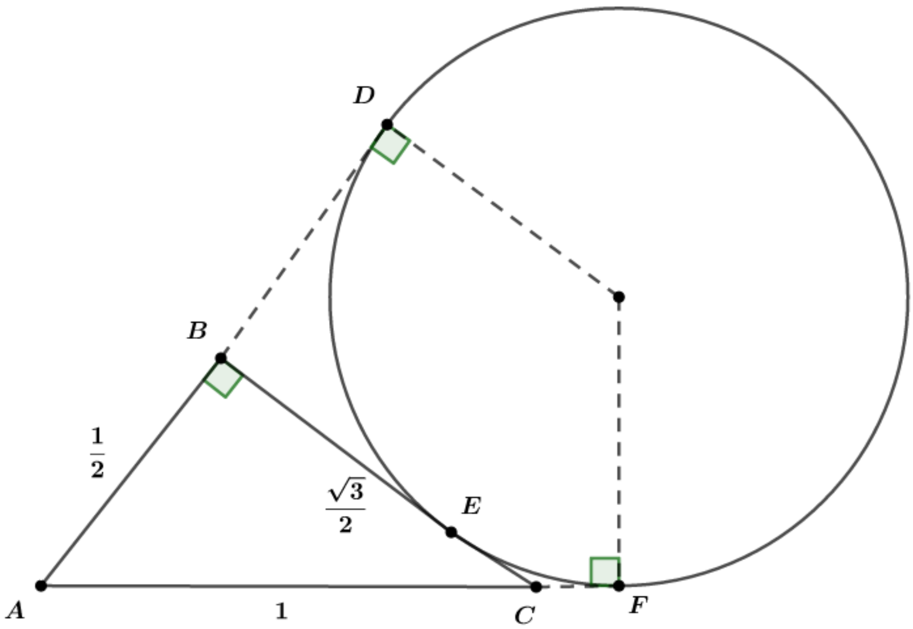
**Comentários**

Perceba o valor dos lados, podemos ver que eles satisfazem o teorema de Pitágoras:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$1^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

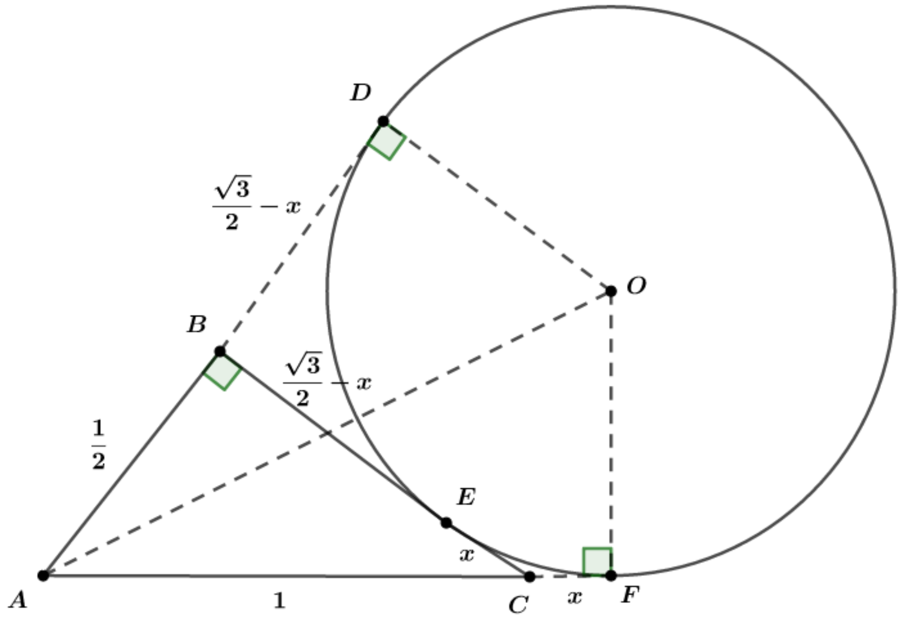
Portanto, o triângulo $ABC$ é retângulo em $B$. Desenhando a figura:




Fazendo $CF = x$, temos:

$$CF = CE = x$$

$$BE = BD = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$$



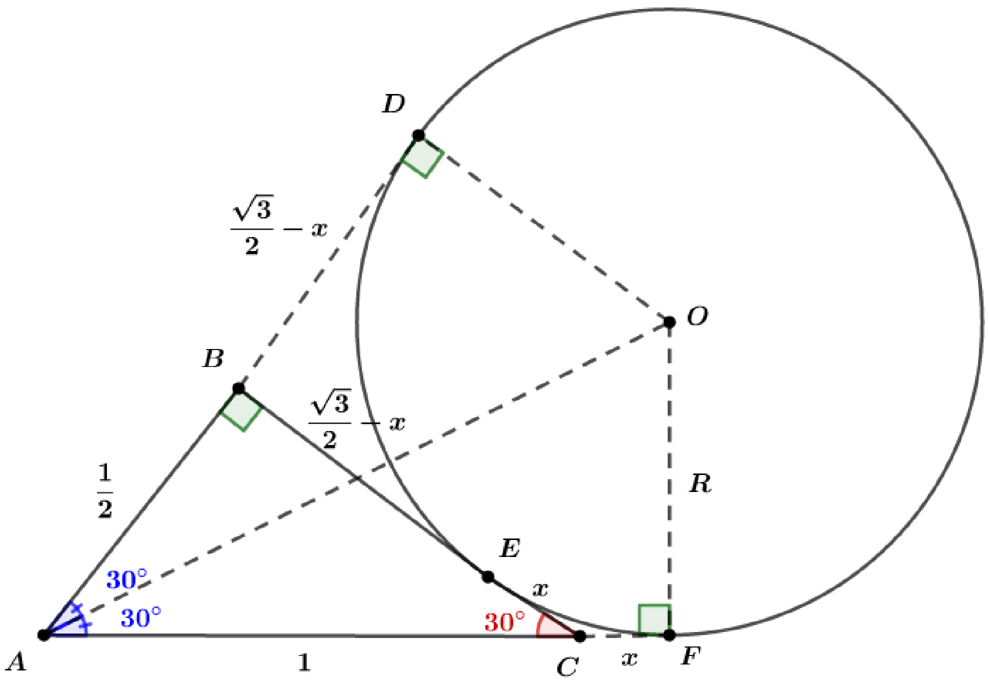

Como a circunferência é ex-inscrita ao triângulo, temos que seu centro é o ex-incentro do triângulo. Logo, $\overline{AO}$ é a bissetriz de $B\hat{A}C$. Portanto, $D\hat{A}O = F\hat{A}O$. Assim, os triângulos $ADO$ e $AFO$ são semelhantes com lados $AF = AD$:

$$AF = AD$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} - x = 1 + x$$

$$2x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$




Analisando o triângulo $AFO$:

$$tg30° = \frac{R}{1 + x}$$

$$R=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)\sqrt{3}}{3}$$
$$R=\frac{(3+\sqrt{3})\sqrt{3}}{12}$$
$$\therefore R=\frac{\sqrt{3}+1}{4}$$

**Gabarito: “a”.**

**31. (ITA/2006)**

Seja $E$ um ponto externo a uma circunferência. Os segmentos $\overline{EA}$ e $\overline{ED}$ interceptam essa circunferência nos pontos $B$ e $A$, e, $C$ e $D$, respectivamente. A corda $\overline{AF}$ da circunferência intercepta o segmento $\overline{ED}$ no ponto $G$.

Se $EB=5, BA=7, EC=4, GD=3$ e $AG=6$, então $GF$ vale

a) 1

b) 2

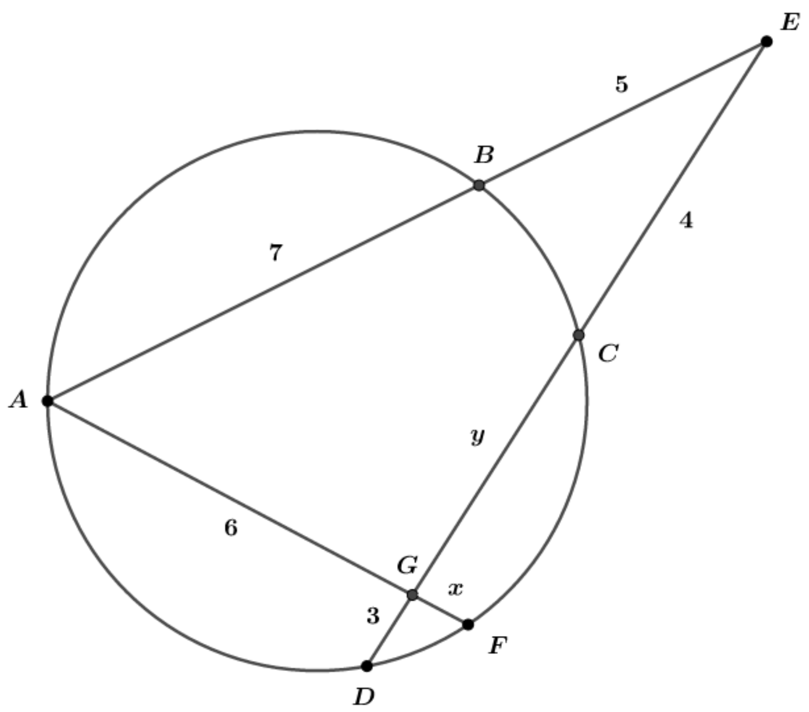
c) 3

d) 4

e) 5

**Comentários**

De acordo com o texto, temos o seguinte desenho:




Analisando a potência do ponto $E$, temos:

$$EB\cdot EA=EC\cdot ED$$
$$5\cdot(5+7)=4\cdot(4+y+3)$$
$$y=15-7$$
$$y=8$$

Analisando a potência do ponto $G$:

$$AG \cdot GF = CF \cdot GD$$
$$6x = 3 \cdot 8$$
$$x = 4$$
$$\therefore GF = 4$$

**Gabarito: "d".**

**32. (ITA/2001)**

Num trapézio retângulo circunscritível, a soma dos dois lados paralelos é igual a 18 cm e a diferença dos dois outros lados é igual a 2 cm. Se $r$ é o raio da circunferência inscrita e $a$ é o comprimento do menor lado do trapézio, então a soma $a + r$ (em cm) é igual a:

a) 12

b) 11

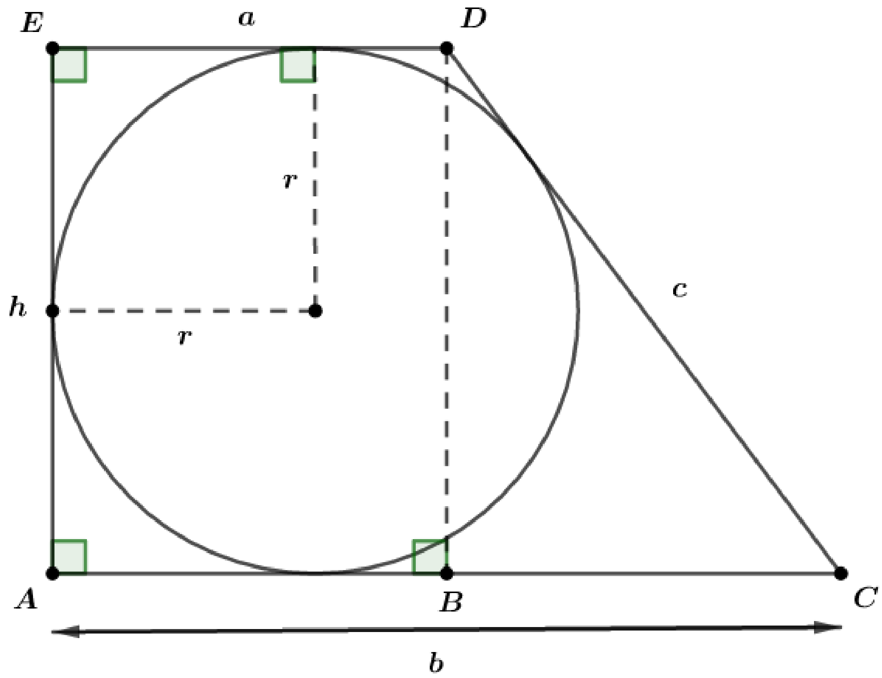
c) 10

d) 9

e) 8

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:




O texto diz que:

$$a + b = 18 \Rightarrow b = 18 - a$$
$$c - h = 2 \Rightarrow c = 2 + h$$

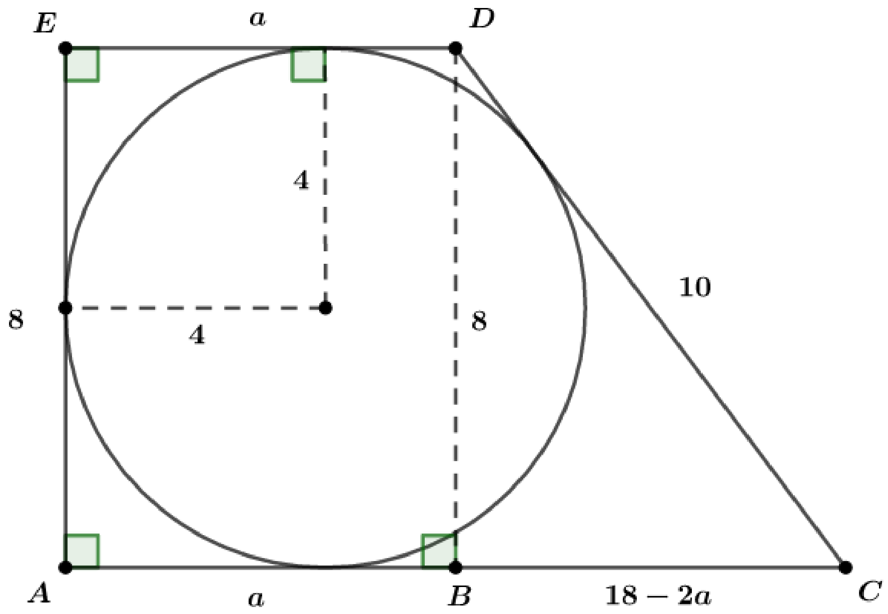
Analisando a figura, vemos que $h = 2r$.

Desse modo, $c = 2 + 2r$.

Como o trapézio é circunscritível, temos a seguinte relação:

$$AE + CD = ED + AC$$
$$2r + (2 + 2r) = a + b$$
$$2 + 4r = 18$$
$$4r = 16 \Rightarrow r = 4$$

Analisando o trapézio, vemos que temos um triângulo retângulo $BCD$ de altura $2r = 8$, base $b - a = 18 - 2a$ e hipotenusa $c = 2 + 2r = 10$.




Aplicando o teorema de Pitágoras:

$$10^2 = 8^2 + (18 - 2a)^2$$
$$(18 - 2a)^2 = 100 - 64$$
$$(18 - 2a)^2 = 36$$
$$|18 - 2a| = 6$$
$$|9 - a| = 3$$
$$(9 - a) = \pm 3$$
$$a = 9 \mp 3$$
$$a = 6 \; ou \; a = 12$$

Se $a = 12$, temos $b = 18 - a = 6$ e consequentemente $b < a$, o que não condiz que as condições do problema já que $a$ é a base menor.

Assim, temos $a = 6$.

Portanto:

$$a + r = 6 + 4 = 10$$

**Gabarito: "c".**

**33. (ITA/2000)**

Considere a circunferência inscrita num triângulo isósceles com base de 6 cm e altura de 4 cm. Seja $t$ a reta tangente a esta circunferência e paralela à base do triângulo. O segmento de $t$ compreendido entre os lados do triângulo mede

a) 1 cm

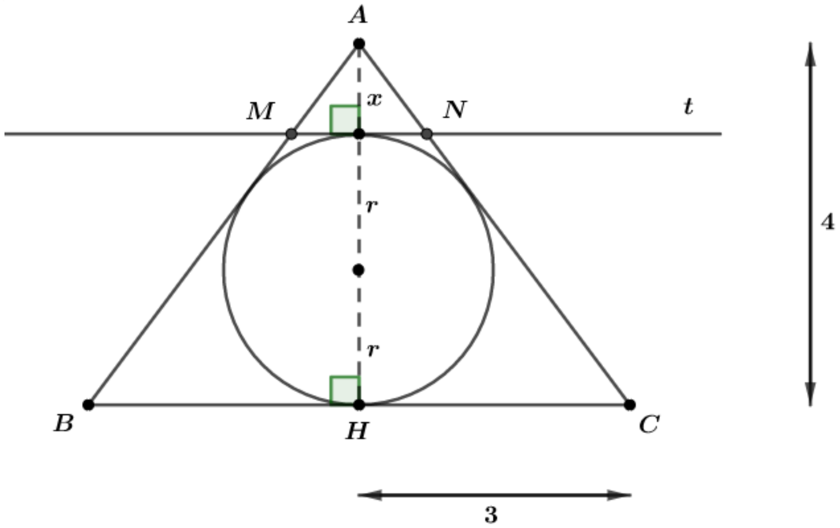
b) 1,5 cm

c) 2 cm

d) 2,5 cm

e) 3 cm

**Comentários**




Como $\Delta ABC$ é isósceles, temos que $\overleftrightarrow{AH}$ é a reta mediatriz da base $BC$. Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta AHC$, encontramos a hipotenusa:

$$AC = 5\ cm$$

A área de um triângulo pode ser escrita como:

$$A = \frac{bh}{2} = pr$$

Onde $p$ é o semiperímetro do triângulo e $r$ é o raio da circunferência inscrita a ele. Desse modo:

$$A = \frac{6 \cdot 4}{2} = \frac{5+5+6}{2} \cdot r \Rightarrow r = \frac{3}{2}\ cm$$

$$x = 4 - 2r = 1\ cm$$

$$\Delta AMN \sim \Delta ABC \Rightarrow \frac{x}{x+2r} = \frac{MN}{BC} \Rightarrow MN = 6 \cdot \left(\frac{1}{1+3}\right) \Rightarrow MN = \frac{3}{2} = 1{,}5\ cm$$

**Gabarito: “b”.**

**34. (ITA/1998)**

Seja $ABC$ um triângulo isósceles de base $BC$. Sobre o lado $AC$ deste triângulo considere um ponto $D$ tal que os segmentos $AD, BD$ e $BC$ são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) 23°

b) 32°

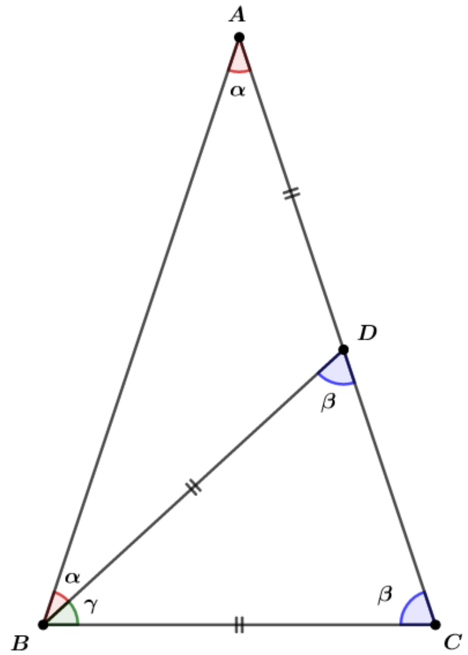
c) 36°

d) 40°

e) 45°

**Comentários**

Como $AD \equiv BD \equiv BC$, temos que $\Delta DAB$ e $\Delta BCD$ são isósceles. Assim, temos:




Como $\beta$ é ângulo externo ao triângulo $DAB$, temos $\beta = 2\alpha$. Sendo $\Delta ABC$ e $\Delta BCD$ isósceles com um dos ângulos da base em comum, temos $\Delta ABC \sim \Delta BCD$. Desse modo:

$$A\hat{B}C \equiv A\hat{C}B \equiv 2\alpha$$

Logo, $\gamma = \alpha$.

Somando os ângulos internos do triângulo $ABC$, encontramos:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$$

**Gabarito: "c".**

---

## IME

**35. (IME/2019)**

Em um setor circular de $45°$, limitado pelos raios $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ iguais a $R$, inscreve-se um quadrado $MNPQ$, onde $\overline{MN}$ está apoiado em $\overline{OA}$ e o ponto $Q$ sobre o raio $\overline{OB}$. Então, o perímetro do quadrado é:

a) $4R$

b) $2R$

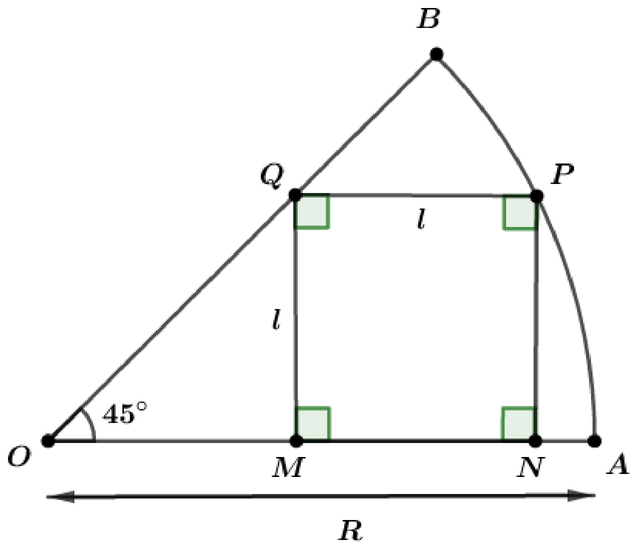
c) $2R\sqrt{2}$

d) $4R\sqrt{5}$

e) $4R\frac{\sqrt{5}}{5}$

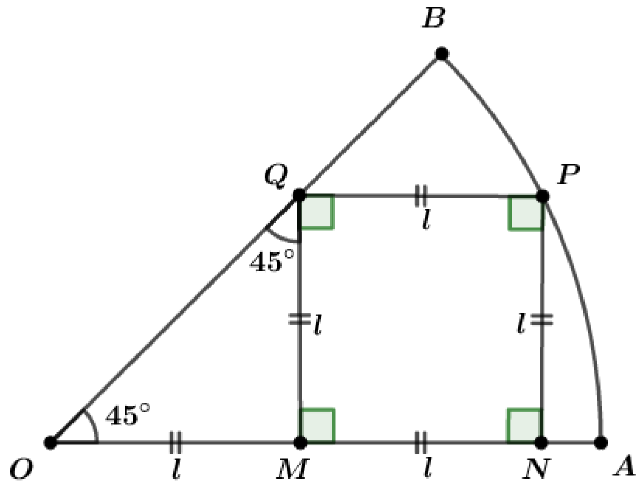
**Comentários**

Vamos desenhar a figura da questão:

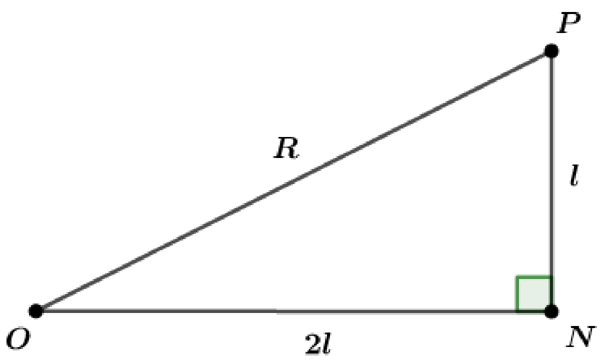



Precisamos calcular o valor do lado $l$ do quadrado em função de $R$.

Como $\Delta OMQ$ é retângulo e $Q\hat{O}M = 45°$, temos $O\hat{Q}M = 45°$. Portanto, $\Delta OMQ$ é isósceles com $OM = QM = l$.




Vamos analisar o triângulo retângulo $OPN$:




Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$R^2 = (2l)^2 + l^2 \Rightarrow \boxed{l = \frac{R\sqrt{5}}{5}}$$

O perímetro do quadrado é dado por:

$$\boxed{(2p)_{MNPQ} = 4l = \frac{4R\sqrt{5}}{5}}$$

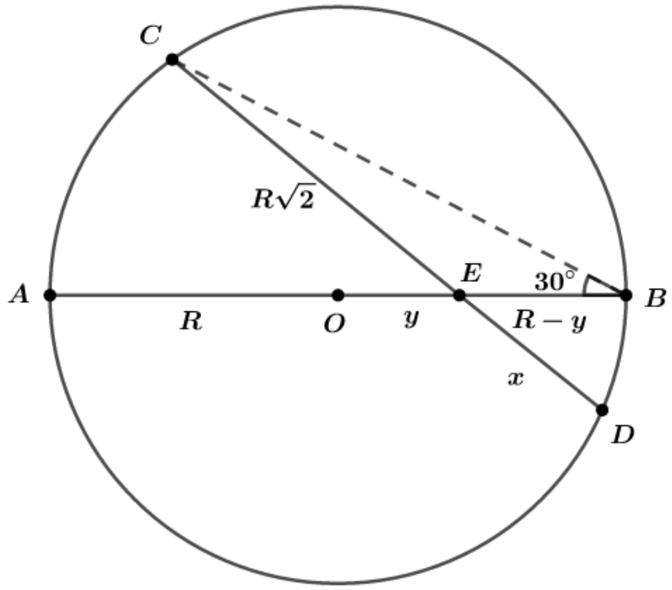
**Gabarito: "e".**

**36. (IME/2019)**

Uma corda $CD$ corta o diâmetro $AB$ de um círculo de raio $R$ no ponto $E$. Sabendo que o ângulo $A\hat{B}C = 30°$ e que $\overline{EC} = R\sqrt{2}$, calcule a medida do segmento $\overline{ED}$.

**Comentários**

De acordo com o enunciado, temos a seguinte situação:

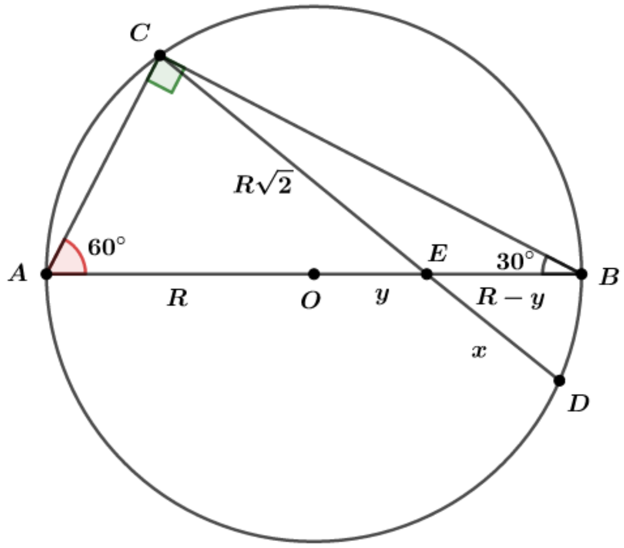



A questão pede para calcular o valor de $\overline{ED} = x$. Podemos usar a propriedade da potência do ponto $E$ e escrever:

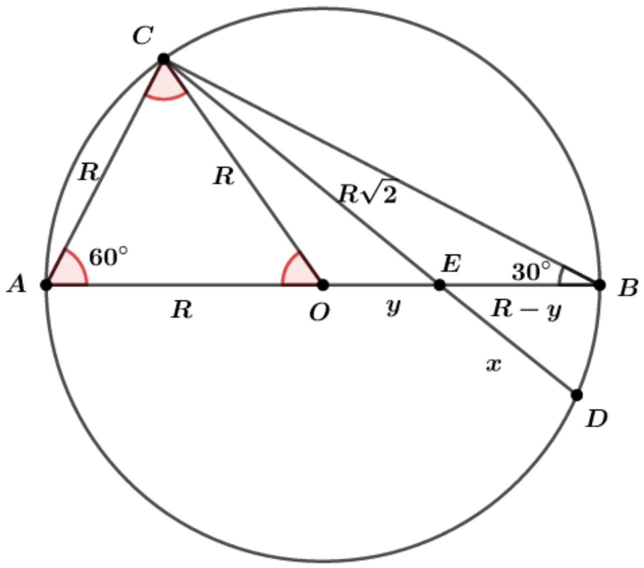
$$EC \cdot ED = EA \cdot EB$$
$$R\sqrt{2} \cdot x = (R+y) \cdot (R-y)$$
$$\boxed{R\sqrt{2} \cdot x = R^2 - y^2} \ (I)$$

Para calcular $x$, precisamos encontrar o valor de $y$.

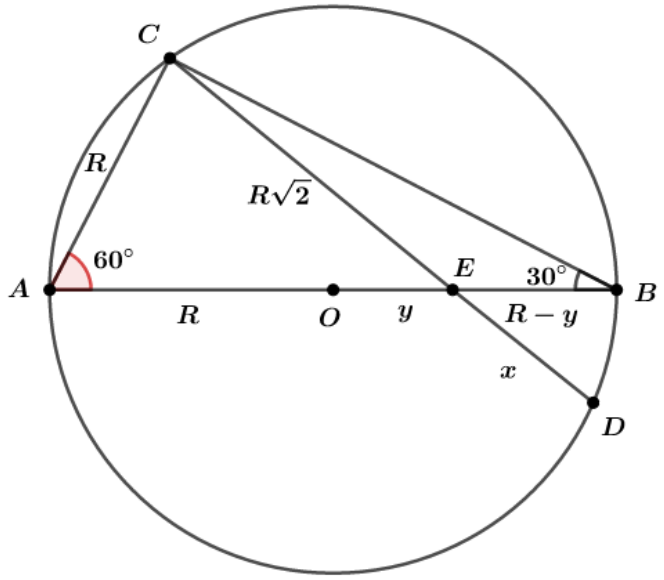
Como $AB$ é diâmetro da circunferência, temos que o $\Delta ABC$ é retângulo em $\hat{C}$. Assim, $C\hat{A}B = 60°$.




$O$ é o centro da circunferência, então, $OA = OC$. Assim, $\Delta AOC$ é isósceles com $C\hat{A}O = A\hat{C}O = 60°$. Consequentemente, $A\hat{O}C = 60°$ e, portanto, $\Delta AOC$ é equilátero de lado $R$.




Podemos usar a lei dos cossenos no $\Delta AEC$ e encontrar o valor de $y$:




$$\left(R\sqrt{2}\right)^2 = R^2 + (R+y)^2 - 2R(R+y)\underbrace{\cos 60°}_{\frac{1}{2}}$$

$$2R^2 = R^2 + R^2 + 2Ry + y^2 - R^2 - Ry$$

$$y^2 + Ry - R^2 = 0$$

Raízes:

$$y = \frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$$

Como $y > 0$, temos:

$$y = \frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

Substituindo $y$ na equação $(I)$, obtemos o valor de $\overline{ED}$:

$$R\sqrt{2} \cdot x = R^2 - y^2$$

$$\Rightarrow R\sqrt{2} \cdot x = R^2 - \left(\frac{R\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow x = R\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \left(\frac{6-2\sqrt{5}}{4}\right)\right)$$

$$\boxed{x = \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}}$$

**Gabarito:** $ED = \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}$

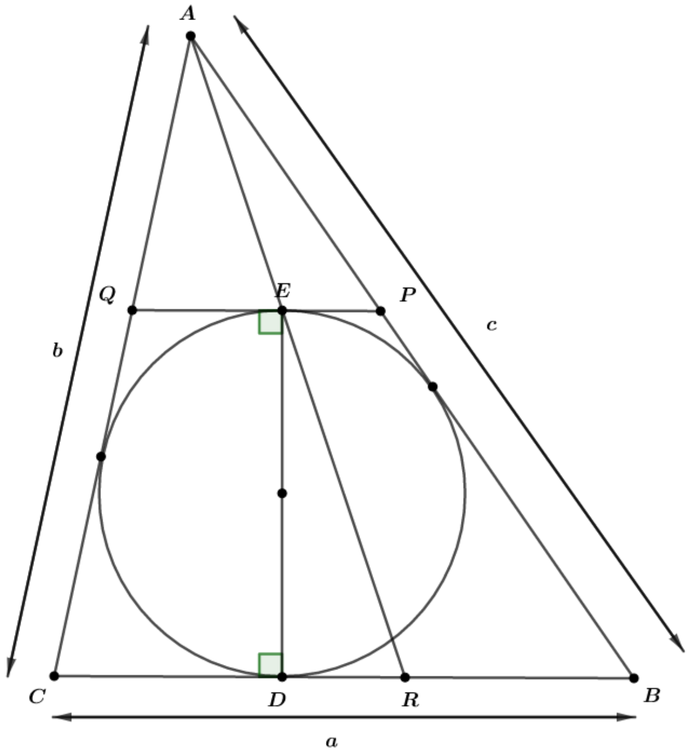
---

**37. (IME/2018)**

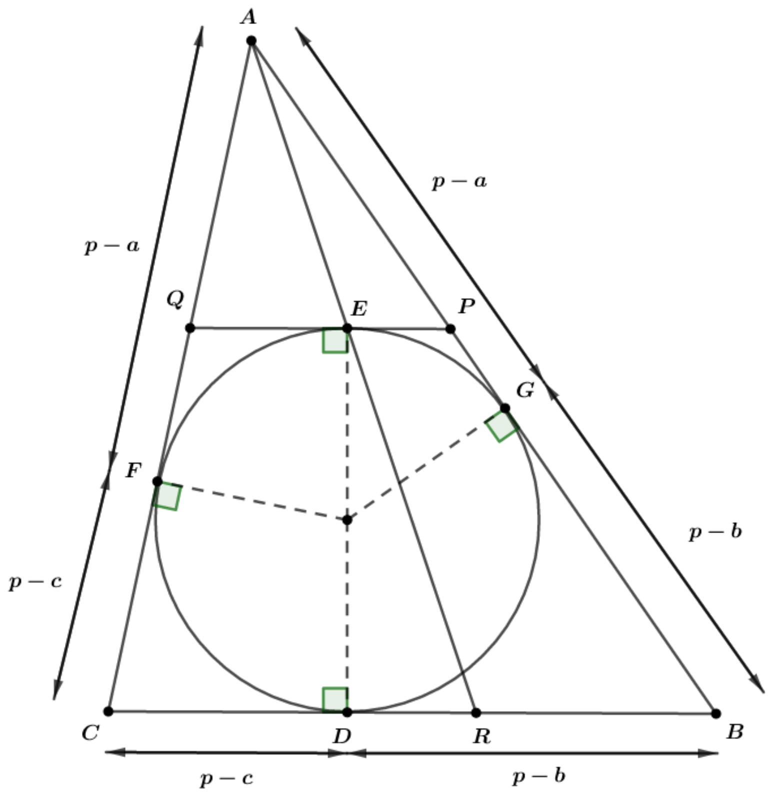
Considere um triângulo $ABC$ onde $BC = a$, $AB = c$, $AC = b, c > b$. O círculo inscrito a esse triângulo tangencia $BC$, em $D$ e $DE$ é um diâmetro desse círculo. A reta que tangencia o círculo e que passa por $E$ intercepta $AB$ em $P$ e $AC$ em $Q$. A reta $AE$ intercepta $BC$ no ponto $R$. Determine os segmentos de reta $EQ$ e $DR$ em função dos lados do triângulo: $a, b$ e $c$.

**Comentários**

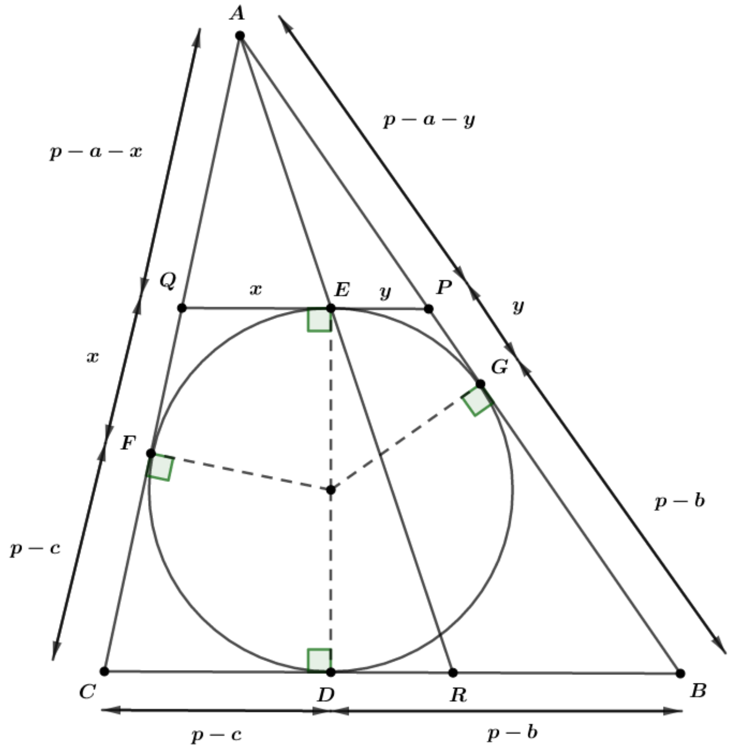
Dos dados do texto, temos a seguinte figura:




Usando as propriedades dos pontos de tangência e escrevendo os lados em função do semiperímetro $p$, temos:




Sendo $Q$ e $P$ externo à circunferência, podemos escrever a relação $QE = QF = x$ e $PE = PG = y$.




Perceba que os triângulos $AQP$ e $ACB$ são semelhantes, então, podemos escrever a razão de semelhança igual à razão entre seus perímetros:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{p_{AQP}}{p_{ACB}}=\frac{p-a-x+p-a-y+x+y}{2p}=\frac{p-a}{p}$$

$$\frac{p-a-x}{b}=\frac{p-a}{p}$$

$$p(p-a)-px=(p-a)b$$

$$x=\frac{(p-a)(p-b)}{p}$$

$$x=\frac{\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$x=\frac{\left(\frac{b+c-a}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\frac{a+b+c}{2}}$$

$$x=\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$$

$$\therefore EQ=\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}$$

$\Delta AQE$ e $\Delta ACR$ são semelhantes, então:

$$\frac{AQ}{AC}=\frac{EQ}{CR}$$

$$\frac{p-a}{p}=\frac{x}{CR}$$

$$\frac{1}{CR}=\frac{p-a}{p}\cdot\frac{1}{x}$$

Substituindo o valor de $x$ na equação:

$$\frac{1}{CR}=\frac{p-a}{p}\cdot\frac{p}{(p-a)(p-b)}$$
$$CR=p-b$$

Sabemos que $CR=CD+DR$, desse modo:

$$CD+DR=p-b$$
$$p-c+DR=p-b$$
$$\therefore DR=c-b$$

**Gabarito:** $\boldsymbol{EQ=\frac{(b+c-a)(a+c-b)}{2(a+b+c)}}$ **e** $\boldsymbol{DR=c-b}$

---

**38. (IME/2016)**

Considere quatro pontos distintos coplanares. Das distâncias entre esses pontos, quatro delas valem $a$ e duas delas valem $b$. O valor máximo da relação $\left(\frac{b}{a}\right)^2$ é

a) 2

b) $1+\sqrt{3}$

c) $2+\sqrt{3}$

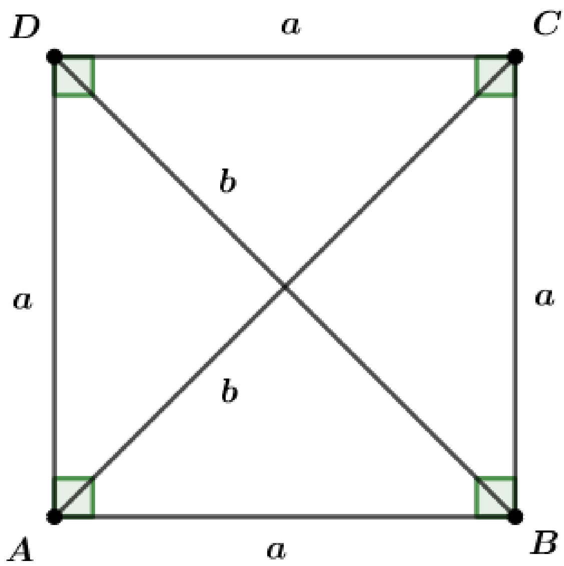
d) $1+2\sqrt{2}$

e) $2+2\sqrt{3}$

**Comentários**

Temos que pensar em todas as situações possíveis para essas condições.

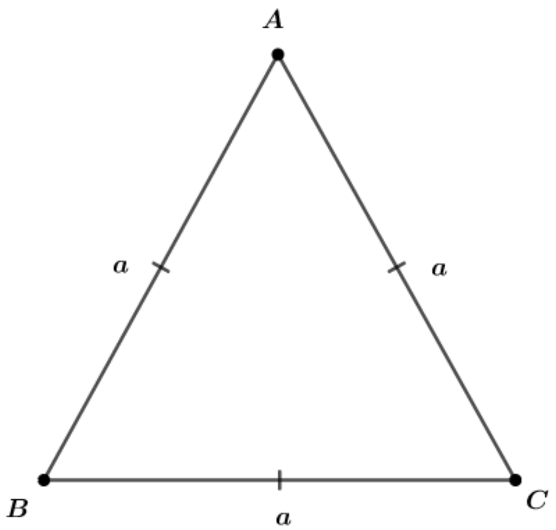
O primeiro caso, podemos pensar em um quadrado de lado $a$ e diagonal $b$. Assim, temos:



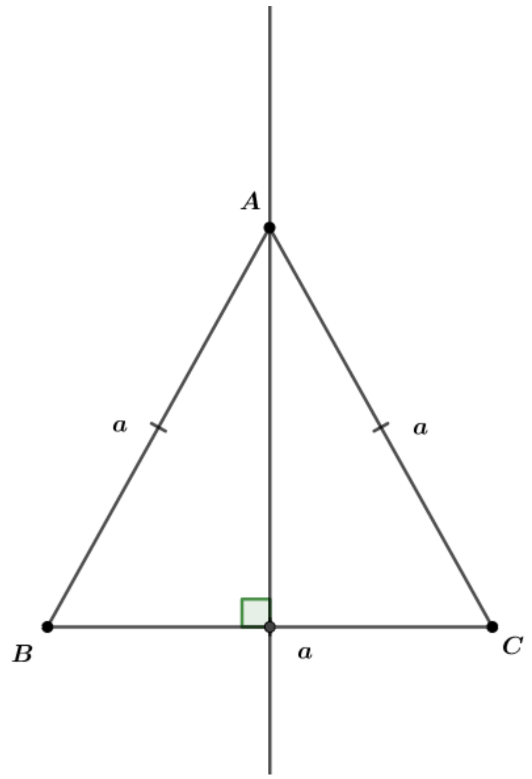

Podemos aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $ABD$:

$$b^2=a^2+a^2$$
$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2}=2$$

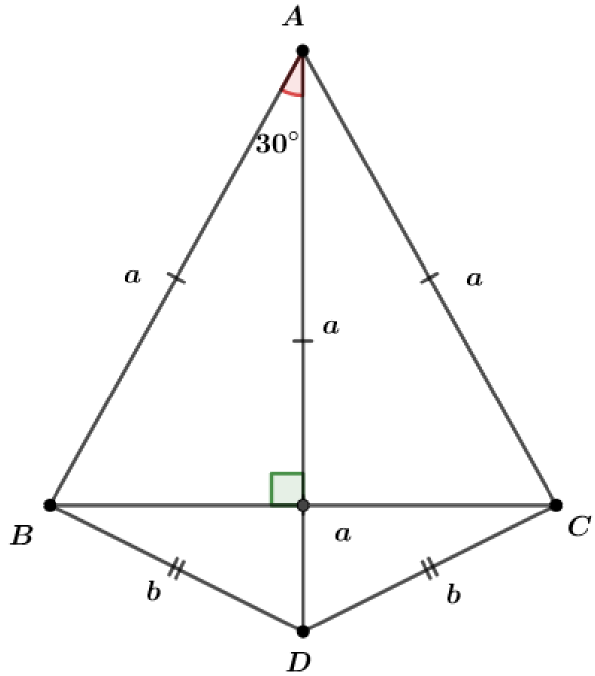
O segundo caso, podemos pensar em um triângulo equilátero de lados $a$.




Sabemos que a mediatriz de um segmento equidista das extremidades do segmento. Assim, o quarto ponto estará localizado na mediatriz do segmento. Tomando-se o segmento $BC$ como referência, temos:




O quarto ponto $D$ poderá estar abaixo ou acima do vértice $A$.
Se estiver abaixo de $A$, temos:



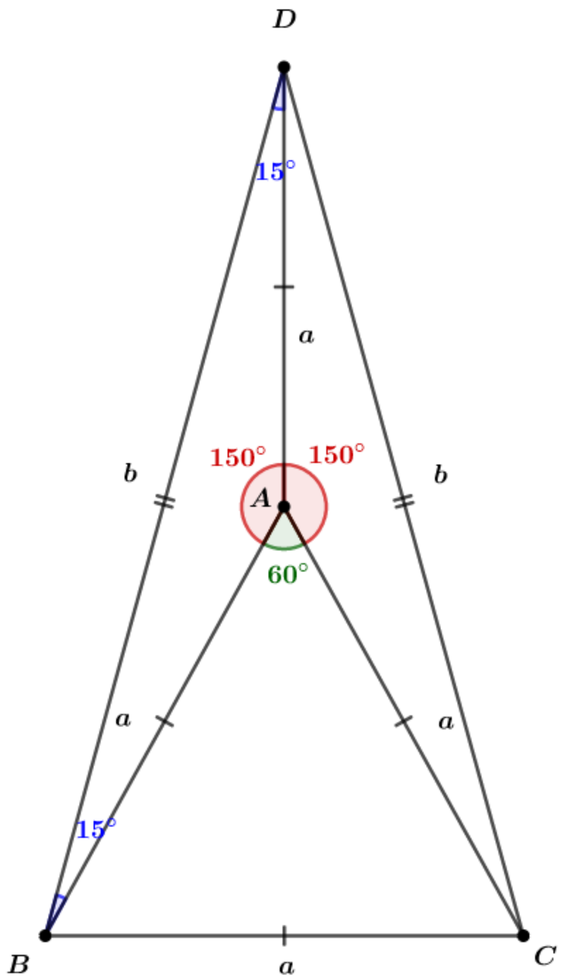

Usando o teorema dos cossenos no triângulo $ABD$:

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(30°)$$

$$b^2 = 2a^2 - a^2\frac{2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 - \sqrt{3}$$

Se $D$ estiver acima de $A$:




Podemos aplicar o teorema dos cossenos no $\Delta ABD$:

$$b^2 = a^2 + a^2 - 2a^2\cos(150°)$$

$$b^2 = 2a^2 + \frac{2a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$$

Como $2 + \sqrt{3} > 2 > 2 - \sqrt{3}$, temos que o maior valor de $b^2/a^2$ é dado por:

$$\frac{b^2}{a^2} = 2 + \sqrt{3}$$

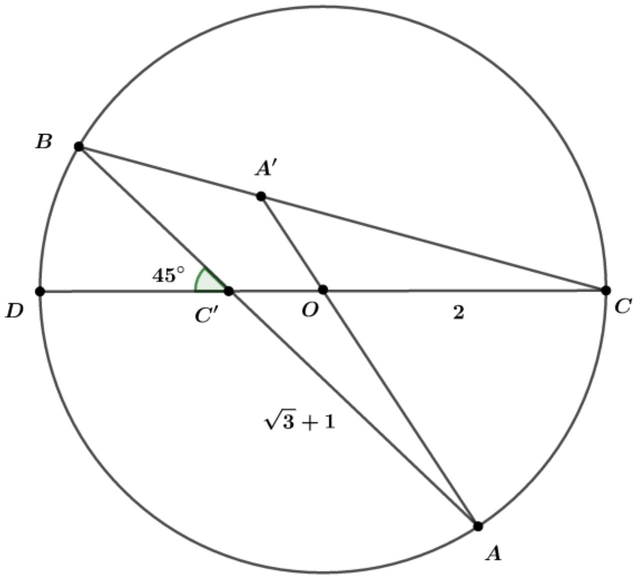
**Gabarito: "c".**

**39. (IME/2016)**

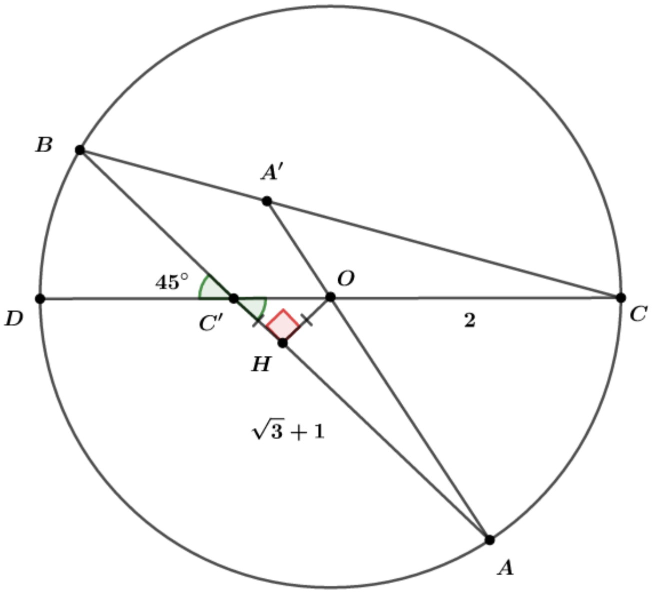
Uma corda intercepta o diâmetro de um círculo de centro $O$ no ponto $C'$ segundo um ângulo de $45°$. Sejam $A$ e $B$ os pontos externos desta corda, e a distância $AC'$ igual a $\sqrt{3} + 1$ cm. O raio do círculo mede 2 cm, e $C$ é a extremidade do diâmetro mais distante de $C'$. O prolongamento do segmento $AO$ intercepta $BC$ em $A'$. Calcule a razão em que $A'$ divide $BC$.

**Comentários**

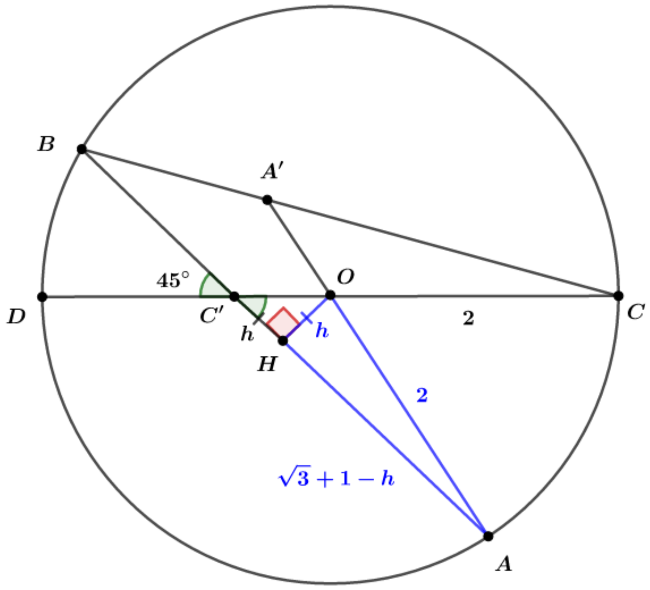
Desenhando a figura do texto, temos:




Vamos projetar a altura do vértice $O$ do triângulo $AOC'$:




Como $O\widehat{C'}H = 45°$, temos que o triângulo retângulo é isósceles com $C'H = OH$. Assim, temos:




Aplicando o teorema de Pitágoras no $\Delta AOH$:

$$2^2 = h^2 + \left(\sqrt{3} + 1 - h\right)^2$$
$$4 = h^2 + 4 + 2\sqrt{3} + h^2 - 2h\left(\sqrt{3} + 1\right)$$
$$2h^2 - 2\left(\sqrt{3} + 1\right)h + 2\sqrt{3} = 0$$
$$h^2 - \left(\sqrt{3} + 1\right)h + \sqrt{3} = 0$$

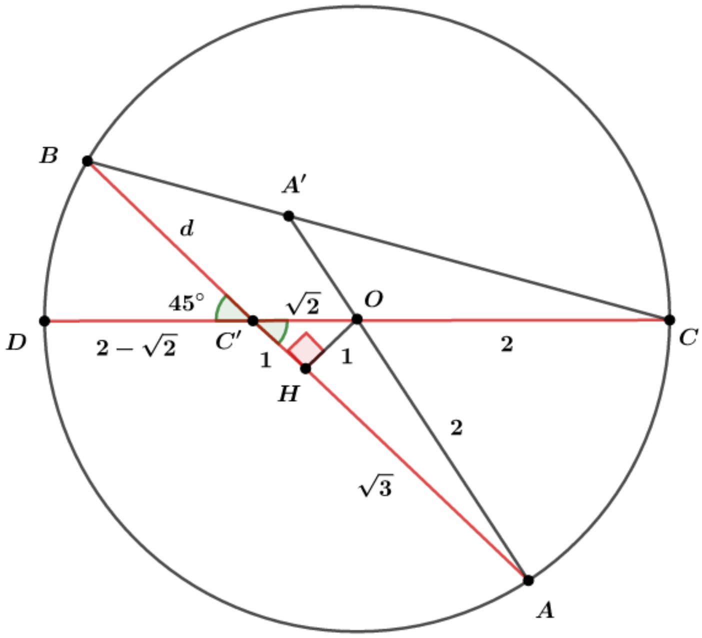
Encontrando as raízes:

$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} + 1\right)^2 - 4\sqrt{3}}}{2}$$
$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \sqrt{\left(\sqrt{3} - 1\right)^2}}{2}$$
$$h = \frac{\sqrt{3} + 1 \pm \left(\sqrt{3} - 1\right)}{2}$$
$$h = \sqrt{3} \text{ ou } h = 1$$

Se $h = \sqrt{3}$, temos pelo $\Delta OHC'$:

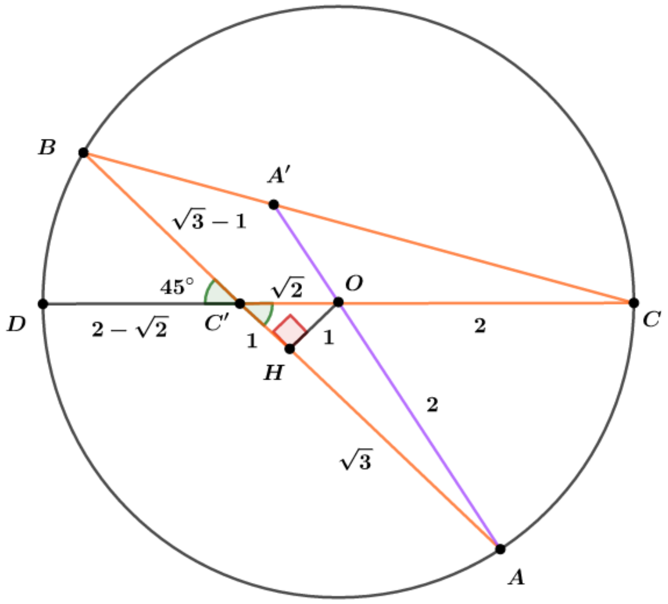
$$OC'^2 = 2h^2 = 6$$
$$OC' = \sqrt{6} > 2$$

Absurdo! Pois, $OC' < 2$.
Logo, $h = 1$ e $OC' = \sqrt{2}$:




Pela potência do ponto $C'$, temos a seguinte relação:

$$DC' \cdot C'C = BC' \cdot C'A$$
$$(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = d(1+\sqrt{3})$$
$$d = \frac{2}{1+\sqrt{3}}$$
$$d = \sqrt{3}-1$$




Aplicando o teorema de Menelaus no triângulo $BCC'$:

$$\frac{A'B}{A'C} \cdot \frac{OC}{OC'} \cdot \frac{AC'}{AB} = 1$$
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{AB}{AC'} \cdot \frac{OC'}{OC}$$
$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}$$

$$\therefore \frac{A'B}{A'C} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

**Gabarito:** $\frac{A'B}{A'C} = \frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$