

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So





Sumário

APRESENTAÇÃO	4
1. EQUAÇÕES ALGÉBRICAS	4
1.1. Teorema Fundamental da Álgebra	5
1.1.1. Teorema da decomposição	5
1.1.2. Corolário	5
1.2. Teorema da raiz complexa conjugada	6
1.3. Teorema das raízes irracionais da forma $a + bc$	7
1.4. Teorema das raízes racionais	7
1.5. Teorema de Bolzano	8
2. RAZ MÚLTIPLA E A DERIVADA POLINOMIAL	9
3. MÁXIMO DIVISOR COMUM	10
3.1. Raízes comuns	11
4. RELAÇÕES DE GIRARD	12
5. TRANSFORMAÇÕES	14
5.1. Transformada aditiva	14
5.1.1. Algoritmo de Horner-Ruffini	15
5.2. Transformada multiplicativa	15
5.3. Transformada inversa ou recíproca	16
6. EQUAÇÕES RECÍPROCAS	16
6.1. Teorema Fundamental	17
6.2. Resolução de uma equação recíproca	18
6.2.1. 1ª espécie e grau par	18
6.2.2. 1ª espécie e grau ímpar	18
6.2.3. 2ª espécie e grau par	19
6.2.4. 2ª espécie e grau ímpar	19
7. LISTA DE QUESTÕES	19
Questões ITA	19
Questões IME	25
8. GABARITO	29

Gabarito das Questões ITA**29****Gabarito das Questões IME****29****9. LISTA DE QUESTÕES RESOLVIDAS E COMENTADAS****30****Questões ITA Comentadas****30****Questões IME Comentadas****50**

Apresentação

Olá,

Chegamos à última aula de álgebra do curso. Nesta aula, veremos os teoremas envolvendo raízes de equações algébricas polinomiais. São diversos teoremas e, para conseguir internalizar todos, o recomendado é resolver muitos exercícios!

Se você for um aluno que já possui alguma base, você pode passar rapidamente pela teoria ou, se preferir, ir direto para a lista de questões. Tente resolver todas e, sempre que tiver dúvidas, não hesite em nos procurar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.



/victorso



/profvictorso



/profvictorso

ESCLARECENDO!



Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Equações Algébricas

Estudamos na aula passada que, se um número $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz do polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, então $P(\alpha) = 0$. Vimos pelo Teorema de D'Alembert que isso é equivalente a dizer que $P(x)$ é divisível pelo fator $x - \alpha$, isto é,

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow P(x) \div (x - \alpha)$$

No estudo das equações algébricas, queremos encontrar todos os números $\alpha \in \mathbb{C}$ que resultam $P(\alpha) = 0$, ou seja, todas as raízes da equação polinomial $P(x) = 0$. Podemos encontrar essas raízes através da tentativa e erro e usando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para reduzir o grau do

polinômio, mas isso pode ser muito trabalhoso quando o polinômio possui grau elevado, como $\partial P = 10$. Felizmente, temos diversos teoremas que podem auxiliar-nos a encontrar as raízes de um polinômio. Vamos estudar um dos mais importantes, o Teorema Fundamental da Álgebra.

1.1. Teorema Fundamental da Álgebra

Todo polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficiente reais ou complexos, admite pelo menos uma raiz complexa.

1.1.1. Teorema da decomposição

Todo polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficiente reais ou complexos, pode ser decomposto em um produto de n fatores do 1º grau.

Esse teorema diz que dado um polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, ele também pode ser escrito da seguinte forma:

$$P(x) = a_n (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

Em que $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são as raízes do polinômio P .

1.1.2. Corolário

Todo polinômio de grau $n \geq 1$, com coeficientes reais ou complexos, possui n , e somente n , raízes complexas, podendo ser todas distintas ou não.

Esse é o resultado mais importante dos teoremas vistos. Dado um polinômio de grau n , podemos afirmar que ele possui exatamente n raízes complexas, sendo que elas não precisam ser distintas entre si. Na ocorrência de haver raízes repetidas, temos que se α_i é uma raiz repetida m_i vezes, dizemos que a raiz α_i possui multiplicidade m_i , ou seja, dado um polinômio P de grau n e de raízes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ com multiplicidade m_1, m_2, \dots, m_k , temos:

$$P(x) \equiv a_n (x - \alpha_1)^{m_1} (x - \alpha_2)^{m_2} \dots (x - \alpha_k)^{m_k}$$

Em que $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$.

Assim, podemos afirmar:

Se α é uma raiz de multiplicidade m de um polinômio P de grau n , então:

$$P(x) \equiv (x - \alpha)^m Q(x) \text{ e } Q(\alpha) \neq 0$$

Exemplos:

1.1.2.a) $P(x) = 4x^{10} + 5x^6 - 78x^2 + 100$

Pelo corolário, temos que P admite 10 raízes.

1.1.2.b) $P(x) = 10(x - 2)^3(x - 4)^7$

Nesse caso, temos que o polinômio P possui $3 + 7 = 10$ raízes, sendo a raiz 2 de multiplicidade 3 e a raiz 4 de multiplicidade 7.

1.1.2.c) Sabendo que 3 é uma raiz de multiplicidade dupla, resolva a equação:

$$x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 24x - 36 = 0$$

Sabemos que 3 é uma raiz dupla, logo, podemos aplicar Briot-Ruffini duas vezes e fatorar a expressão do quarto grau:

3	1	-6	5	24	-36
3	1	-3	-4	12	0
	1	0	-4	0	

Assim, a equação pode ser escrita como:

$$(x - 3)^2(x^2 - 4) = 0$$

Basta resolver a equação quadrática para encontrar as outras raízes:

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Portanto, a solução é $S = \{3; \pm 2\}$.

1.2. Teorema da raiz complexa conjugada

Se uma equação polinomial de **coeficientes reais** admite $a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}^*$) como raiz, então $a - bi$ também será raiz da equação.

Atenção nesse teorema! Se uma equação polinomial possui **todos os coeficientes reais** e uma de suas raízes é complexa, então, o conjugado dessa raiz também é raiz! Por exemplo, se a questão afirma que i é raiz do polinômio P de coeficiente reais, então, podemos afirmar que $-i$ também é raiz, ou seja, $P(i) = P(-i) = 0$.

Outro teorema que temos é o seguinte:

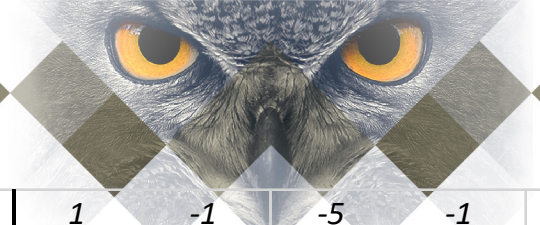
Se uma equação polinomial de **coeficientes reais** admite $a + bi$ ($a \in \mathbb{R}$ e $\beta \in \mathbb{R}^*$) como raiz de multiplicidade m , então $a - bi$ também será raiz da equação com a mesma multiplicidade.



- 1.** Seja $P(z) = z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6$. Sabe-se que i é uma das raízes de P , calcule as outras raízes.

Resolução:

Como os coeficientes de P são todos reais, temos pelo teorema das raízes complexas que $-i$ também é raiz. Logo, aplicando o dispositivo prático de Briot-Ruffini para fatorar o polinômio:



i	1	-1	-5	-1	-6
$-i$	1	$-1+i$	$-i-6$	$-6i$	0
	1	-1	-6	0	

Assim, temos:

$$p(z) = (z - i)(z + i)(z^2 - z - 6) = 0$$

$$z^2 - z - 6 = 0 \Rightarrow z_1 = 3 \text{ e } z_2 = -2$$

As raízes são: $\pm i, 3$ e -2 .

Gabarito: $\pm i, 3$ e -2 .

2. Calcule as raízes do polinômio $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$.

Resolução:

O polinômio é a soma de uma PG de razão z , usando a fórmula da soma de uma PG temos:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$P(z) = \frac{z^5 - 1}{z - 1}, z \neq 1$$

Logo:

$$z^5 - 1 = 0 \Rightarrow z^5 = 1 = \text{cis}(2k\pi), k = 0, 1, 2, \dots$$

Aplicando a fórmula de Moivre:

$$z = \text{cis}\left(\frac{2k\pi}{5}\right)$$

Como $z \neq 1$, temos como raízes:

$$z_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right), z_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right), z_3 = \text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right) \text{ e } z_4 = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$$

Gabarito: $z_1 = \text{cis}\left(\frac{2\pi}{5}\right), z_2 = \text{cis}\left(\frac{4\pi}{5}\right), z_3 = \text{cis}\left(\frac{6\pi}{5}\right) \text{ e } z_4 = \text{cis}\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

1.3. Teorema das raízes irracionais da forma $a + b\sqrt{c}$

Se uma equação polinomial de **coeficientes racionais** admite $a + b\sqrt{c}$ como raiz, com $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}^*$ e $c \in \mathbb{Q}_+^*$, então $a - b\sqrt{c}$ também será raiz da equação.

Esse teorema é parecido com o teorema da raiz complexa conjugada.

Desse teorema, podemos enunciar:

Se uma equação polinomial de **coeficientes racionais** admite $a + b\sqrt{c}$ como raiz de multiplicidade m , com $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}^*$ e $c \in \mathbb{Q}_+^*$, então $a - b\sqrt{c}$ também será raiz da equação de mesma multiplicidade.

1.4. Teorema das raízes racionais

Se a equação polinomial de **coeficientes inteiros** $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ admite p/q ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*$ e p e q primos entre si) como raiz, então p é divisor de a_0 e q é divisor de a_n .

Esse teorema nos permite encontrar as raízes de um polinômio de coeficientes inteiros através de um método mais refinado da tentativa e erro. Ele é baseado nos coeficientes do polinômio.

Vejamos na prática como usamos esse teorema.

1.4.a) Encontre todas as raízes do polinômio $p(x) = 3x^3 - 5x^2 - 4x + 4$.

Como o polinômio possui apenas coeficientes inteiros, podemos aplicar o teorema das raízes racionais. Então, se p/q for raiz do polinômio, temos que p divide $a_0 = 4$ e q divide $a_3 = 3$. Assim, analisemos os divisores de $a_0 = 4$ e $a_3 = 3$.

Divisores de $a_0 = 4$:

$$4 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow \text{divisores}(4) \in \underbrace{\{1, 2, 4\}}_{\text{possíveis valores para } p}$$

Divisores de $a_3 = 3$:

$$3 = 1 \cdot 3 \Rightarrow \text{divisores}(3) \in \underbrace{\{1, 3\}}_{\text{possíveis valores para } q}$$

Dos possíveis valores de p e q , devemos considerar a possibilidade de p/q ser um número negativo. Desse modo, temos:

$$\frac{p}{q} \in \pm \left\{ 1; 2; 4; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right\}$$

Esses são os candidatos às raízes, para saber quem é raiz, precisamos testar cada uma delas. Temos 6 possibilidades para os positivos e 6 possibilidades para os negativos, totalizando 12 possibilidades. Fazendo os testes:

$$\begin{aligned} p(1) &= 3(1)^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 4 = -2 \\ p(-1) &= 3(-1)^3 - 5(-1)^2 - 4(-1) + 4 = 0 \Rightarrow -1 \text{ é raiz} \\ p(2) &= 3(2)^3 - 5(2)^2 - 4(2) + 4 = 0 \Rightarrow 2 \text{ é raiz} \\ p(-2) &= 3(-2)^3 - 5(-2)^2 - 4(-2) + 4 = -32 \\ p(4) &= 3(4)^3 - 5(4)^2 - 4(4) + 4 = 100 \\ p(-4) &= 3(-4)^3 - 5(-4)^2 - 4(-4) + 4 = -252 \\ p\left(\frac{1}{3}\right) &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{20}{9} \\ p\left(-\frac{1}{3}\right) &= 3\left(-\frac{1}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{1}{3}\right) + 4 = \frac{14}{3} \\ p\left(\frac{2}{3}\right) &= 3\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = 0 \Rightarrow \frac{2}{3} \text{ é raiz} \\ p\left(-\frac{2}{3}\right) &= 3\left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) + 4 = \frac{32}{9} \\ p\left(\frac{4}{3}\right) &= 3\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4}{3}\right) + 4 = -\frac{28}{9} \\ p\left(-\frac{4}{3}\right) &= 3\left(-\frac{4}{3}\right)^3 - 5\left(-\frac{4}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = -\frac{20}{3} \end{aligned}$$

Portanto, as raízes de p são os números $-1, 2$ e $2/3$.

1.5. Teorema de Bolzano

O Teorema de Bolzano nos permite determinar o número de raízes reais em um determinado intervalo real.

Enunciemos.

Se $P(x) = 0$ é uma equação polinomial com **coeficientes reais** e $]a, b[$ é um intervalo real aberto, então:

$P(a) \cdot P(b) > 0$ implica que o polinômio P possui um **número par de raízes ou nenhuma raiz** no intervalo $]a, b[$.

$P(a) \cdot P(b) < 0$ implica que o polinômio P possui um **número ímpar de raízes** no intervalo $]a, b[$.

Vejamos um exemplo de aplicação para o teorema.

1.5.a) Determine os possíveis valores de $a \in \mathbb{R}$, de modo que a equação $ax^4 + 3x^2 - 2 = 0$ tenha um número par de raízes no intervalo $]0; 3[$.

Vamos aplicar o Teorema de Bolzano e calcular os valores de $P(x) = ax^4 + 3x^2 - 2$ para os extremos do intervalo $]0; 3[$:

$$P(0) = -2$$

$$P(3) = a \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^2 - 2 = 81a + 25$$

Queremos um número par de raízes no intervalo, logo, devemos ter $P(0) \cdot P(3) > 0$:

$$-2 \cdot (81a + 25) > 0$$

$$81a + 25 < 0$$

$$\therefore a < -\frac{25}{81}$$

2. Raiz Múltipla e a Derivada Polinomial

Vimos que um polinômio P possui raiz α de multiplicidade m se, e somente se, puder ser escrito da seguinte forma:

$$P(x) = (x - \alpha)^m \cdot Q(x); \quad Q(\alpha) \neq 0$$

Há uma ferramenta muito poderosa que nos permite analisar a multiplicidade da raiz de um polinômio. Ela envolve a derivada da função polinomial. Enunciemos o teorema.

O polinômio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ é divisível por $(x - \alpha)^m$ tal que $m \leq n$ se, e somente se, $P(\alpha) = P'(\alpha) = P''(\alpha) = \dots = P^{m-1}(\alpha) = 0$.

Esse teorema afirma que se um polinômio admite uma raiz com multiplicidade m , então, as derivadas de ordem k desse polinômio, com $k \in \{1, 2, 3, \dots, m-1\}$, também possuem a mesma raiz.

Exemplo

2.a) Sabendo que a equação $x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8 = 0$ possui uma raiz de multiplicidade 3, determine as raízes da equação.

Seja a , a raiz de multiplicidade 3. Então, para $P(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 + 4x - 8$, devemos ter:

$$P(a) = P'(a) = P''(a) = 0$$

Calculando as derivadas:

$$P'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x + 4$$

$$P''(x) = 12x^2 - 30x + 12$$

Como a é raiz de multiplicidade 3, temos:

$$P''(a) = 0 \Rightarrow 12a^2 - 30a + 12 = 0$$

$$a = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 144}}{12} = \frac{15 \pm 9}{12} = 2 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

Encontramos duas possíveis raízes, uma delas é a raiz da equação polinomial $P(x) = 0$. Vamos testar os valores em $P'(x) = 0$:

$$P'\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 15\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{27}{4}$$

$$P'(2) = 4(2)^3 - 15(2)^2 + 12(2) + 4 = 0$$

Assim, verificamos que 2 é a raiz de multiplicidade 3 da equação, pois $P''(2) = P'(2) = 0$. Podemos testar a raiz no polinômio P :

$$P(2) = (2)^4 - 5(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) - 8 = 0$$

Para determinar a última raiz, podemos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini:

2	1	-5	6	4	-8
2	1	-3	0	4	0
2	1	-1	-2	0	
	1	1	0		

Pelo diagrama acima, temos:

$$P(x) \equiv (x - 2)^3(x + 1)$$

Portanto, a última raiz é $x = -1$.

3. Máximo Divisor Comum

O máximo divisor comum (MDC) entre os polinômios $F(x)$ e $G(x)$ é um polinômio $H(x)$ tal que H é o divisor de maior grau de F e G .

Exemplo

3.a) Se $F(x) = (x + 2)^3(x - 3)^2(x - 5)^5$ e $G(x) = (x + 2)(x - 3)^3(x + 10)$, então $MDC(F, G) = (x + 2)(x - 3)^2$.

3.b) Se $F(x) = (x + 2)^2(x - 1)$ e $G(x) = (x + 5)x$, então $MDC(F, G) = 1$, ou seja, F e G são primos entre si.

Para determinar o MDC, podemos usar a divisão euclidiana entre polinômios.

Antes de proceder, devemos saber que se $F(x) \equiv G(x)Q(x) + R(x)$, então:

$$MDC(F, G) = MDC(G, R)$$

Vejamos, na prática, a aplicação da divisão euclidiana pelas divisões sucessivas, usando a propriedade $MDC(F, G) = MDC(G, R)$.

3.c) Determine o máximo divisor comum entre $F(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ e $G(x) = x^3 - 7x - 6$.

Vamos usar o método das chaves e dividir o polinômio de maior grau F por G :

$$\begin{array}{r} x^4 \qquad -5x^2 \qquad +4 \\ -x^4 \qquad +7x^2 \qquad +6x \\ \hline 2x^2 \qquad +6x \qquad +4 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^3 - 7x - 6 \\ \hline x \end{array}$$

Agora, dividimos o divisor $x^3 - 7x - 6$ pelo resto $2x^2 + 6x + 4$. Devemos repetir esse processo até encontrar um resto nulo, ou seja, tomamos o divisor e dividimos pelo resto não nulo e, assim, sucessivamente. Nessa divisão, podemos evidenciar o 2 do divisor $2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2)$ e dividir $x^3 - 7x - 6$ por $x^2 + 3x + 2$ para simplificar as contas.

$$\begin{array}{r}
 x^3 \qquad -7x \quad -6 \\
 \hline
 -x^3 \quad -3x^2 \quad -2x \\
 \hline
 -3x^2 \quad -9x \quad -6 \\
 +3x^2 \quad +9x \quad +6 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 x^2 + 3x + 2 \\
 \hline
 x - 3
 \end{array}$$

Encontramos um resto nulo, logo, o máximo divisor comum entre F e G é o divisor da divisão que resultou em resto nulo. Portanto:

$$MDC(x^4 - 5x^2 + 4; x^3 - 7x - 6) = x^2 + 3x + 2$$

No caso em que o resto da divisão euclidiana de F por G for uma constante diferente de zero, podemos afirmar que $MDC(F, G) = 1$, isto é, F e G são primos entre si.

3.1. Raízes comuns

Note que quando F e G não são primos, temos que o $MDC(F, G)$ terá fatores comuns dos polinômios F e G . Assim, podemos afirmar que as raízes desses fatores são as raízes comuns de F e G , ou seja, as raízes comuns de F e G são também raízes do $MDC(F, G)$.

α é uma raiz comum dos polinômios F e G se e somente se α é raiz do $MDC(F, G)$.

Vamos tomar os polinômios do exemplo anterior e encontrar as raízes comuns entre eles.

3.1.a) Encontre as raízes comuns entre $F(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ e $G(x) = x^3 - 7x - 6$.

Como vimos, o máximo divisor comum entre F e G é

$$MDC(F, G) = MDC(x^4 - 5x^2 + 4; x^3 - 7x - 6) = x^2 + 3x + 2$$

Se α é uma raiz de F e G , então ele deve ser raiz do $MDC(F, G)$. Assim, basta encontrar as raízes da equação $x^2 + 3x + 2 = 0$:

$$\begin{aligned}
 x^2 + 3x + 2 &= 0 \\
 x &= \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = -1
 \end{aligned}$$

Assim, as raízes comuns entre F e G são os números -2 e -1 .

Há outro modo de encontrar as raízes comuns entre dois polinômios. Vejamos outro exemplo.

3.1.b) Encontre as raízes comuns entre $x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$ e $x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12 = 0$.

Suponha $\alpha \in \mathbb{C}$ uma raiz comum das equações. Substituindo esse número nas equações e subtraindo:

$$\begin{array}{r}
 \alpha^4 - 2\alpha^3 - 7\alpha^2 + 8\alpha + 12 = 0 \\
 -\alpha^4 + 4\alpha^3 + 13\alpha^2 - 4\alpha - 12 = 0 \\
 \hline
 2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha = 0
 \end{array}$$

As candidatas às raízes comuns são também raízes de $2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha = 0$.

$$2\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha = 0$$

$$2\alpha(\alpha^2 + 3\alpha + 2) = 0$$

$$2\alpha(\alpha + 2)(\alpha + 1) = 0$$

raízes: 0; -1; -2

Para saber quais são as raízes comuns, podemos substituir esses valores em cada equação e verificar qual satisfaz a igualdade ou aplicar Briot-Ruffini e verificar qual resulta em resto nulo. Vamos usar o segundo método. Perceba que 0 não é raiz de ambas equações, pois o coeficiente independente deles é 12. Logo, basta testar -1 e -2. Fazendo a divisão das expressões de cada equação por Briot-Ruffini:

$$x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12 = 0$$

-1	1	-2	-7	8	12
-2	1	-3	-4	12	0
	1	-5	6	0	

$$\Rightarrow (x + 1)(x + 2)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

$$x^4 - 4x^3 - 13x^2 + 4x + 12 = 0$$

-1	1	-4	-13	4	12
-2	1	-5	-8	12	0
	1	-7	6	0	

$$\Rightarrow (x + 1)(x + 2)(x^2 - 7x + 6) = 0$$

Portanto, como as divisões são exatas, temos que -1 e -2 são as raízes comuns das equações.

4. Relações de Girard



As relações de Girard nos permitem relacionar as raízes de uma equação polinomial com seus coeficientes. Elas nos ajudam bastante na resolução de questões envolvendo polinômios. Vejamos do que se trata.

Considere o polinômio $P(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tal que suas raízes sejam α_1 e α_2 . Então, podemos escrever a seguinte identidade:

$$ax^2 + bx + c \equiv a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$$

$$ax^2 + bx + c \equiv a[x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2]$$

$$ax^2 + bx + c \equiv ax^2 - a(\alpha_1 + \alpha_2)x + a\alpha_1\alpha_2$$

Para que a identidade seja satisfeita, devemos ter:

$$\begin{cases} b = -a(\alpha_1 + \alpha_2) \\ c = a\alpha_1\alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Essas são as relações de Girard para uma equação algébrica do segundo grau.

Note que a soma das raízes é igual à razão b/a e o produto delas é igual à c/a .

Vejamos o caso de um polinômio do terceiro grau.

Considere o polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, com $a \neq 0$, tal que suas raízes sejam α_1, α_2 e α_3 . Então, escrevendo P como produto de fatores, temos:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3)$$

Desenvolvendo o membro à direita:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &\equiv a(x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_3) \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &\equiv a[x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2)x^2 + \alpha_1\alpha_2x - \alpha_3x^2 + \alpha_3(\alpha_1 + \alpha_2)x - \alpha_3\alpha_1\alpha_2] \\ ax^3 + bx^2 + cx + d &\equiv a[x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_3\alpha_1\alpha_2] \end{aligned}$$

Assim, pela identidade polinomial, temos:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -\frac{b}{a} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \frac{c}{a} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

Essas são as relações de Girard para uma equação do terceiro grau. É possível generalizar o resultado para uma equação algébrica de grau n .

Seja $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x + a_0$ cujas raízes são $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, as relações de Girard são dadas por:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ (soma das raízes)} \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n} \text{ (soma do produto das raízes dois a dois)} \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k + \dots = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \text{ (soma do produto das raízes } k \text{ a } k) \\ \vdots \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n} \text{ (produto das } n \text{ raízes)} \end{cases}$$

A demonstração dessas relações pode ser feita por indução finita.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

4.a) Sabendo que as raízes da equação $x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0$ estão em progressão geométrica, determine-as.

Resolução:

Sejam x_1, x_2, x_3 as raízes da equação dada. Como estão em PG, temos:

$$(x_1, x_2, x_3) = (a, aq, aq^2)$$

Pelas relações de Girard:

$$x^3 - 21x^2 + 126x - 216 = 0$$

$$a + aq + aq^2 = -\frac{-21}{1} \Rightarrow a(1 + q + q^2) = 21 \quad (I)$$

$$a \cdot aq \cdot aq^2 = -\frac{-216}{1} = 216 \Rightarrow a^3q^3 = 216 \Rightarrow aq = 6 \quad (II)$$

Fazendo a divisão de (I) por (II):

$$\frac{a(1 + q + q^2)}{aq} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} \Rightarrow 2(1 + q + q^2) = 7q \Rightarrow 2q^2 - 5q + 2 = 0$$

Raízes:

$$q = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{4} = 2 \text{ ou } \frac{1}{2}$$

Podemos escolher qualquer uma das raízes, pois o resultado das raízes será o mesmo. Logo, para $q = 2$, temos:

$$a \cdot 2 = 6 \Rightarrow a = 3$$

Portanto, as raízes são:

$$a = 3; aq = 6; aq^2 = 12$$

4.b) Determine a soma do cubo raízes da equação $x^3 + x - 1 = 0$.

Resolução:

Sejam α, β, γ as raízes da equação. Como elas são raízes, temos:

$$\begin{cases} \alpha^3 + \alpha - 1 = 0 \\ \beta^3 + \beta - 1 = 0 \\ \gamma^3 + \gamma - 1 = 0 \end{cases}$$

Somando as três equações:

$$\begin{aligned} \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \alpha + \beta + \gamma - 3 &= 0 \\ \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 &= 3 - (\alpha + \beta + \gamma) \end{aligned}$$

Pelas relações de Girard, podemos obter a soma das raízes:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0$$

Logo:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 = 3$$

5. Transformações

Ao longo do curso, resolvemos muitas equações algébricas e, em algumas delas, aplicamos a transformação algébrica para simplificar a resolução. Um exemplo é a equação $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Nós sabemos como encontrar as raízes de uma equação quadrática e, observando a equação, vemos que ela lembra muito uma equação desse tipo. Se fizermos $y = x^2$, obtemos:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0$$

E resolvendo a equação em y , encontramos as raízes $y_1 = 3$ ou $y_2 = 2$.

Para encontrar as soluções em x , usamos a relação que estabelecemos $y = x^2$:

$$y_1 = x_1^2 \Rightarrow x_1^2 = 3 \Rightarrow x_1 = \pm\sqrt{3}$$

$$y_2 = x_2^2 \Rightarrow x_2^2 = 2 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{2}$$

O que fizemos foi mudar a aparência da equação inicial para recair em um problema conhecido. Então, transformar uma equação algébrica $P_1(x) = 0$ em uma outra $P_2(y) = 0$ significa obter uma lei de transformação $y = f(x)$ tal que as raízes das equações estejam relacionadas.

Definimos a equação original $P_1(x) = 0$ como **equação primitiva** e a equação resultante $P_2(y) = 0$ como **equação transformada**. Vamos estudar os principais tipos de transformações e algumas propriedades relacionadas a elas.

5.1. Transformada aditiva

A transformação aditiva é uma relação de transformação do tipo:

$$y = x + a$$

Em que $a \in \mathbb{C}$ é uma constante.

Nessa transformação, a equação transformada $P_2(y) = 0$ terá as raízes de $P_1(x) = 0$ acrescidas de uma constante a .

Exemplo:

6.1.a) $P_1(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 4 = 0$

Façamos a transformação $y = x + 1$.

Dessa relação, temos:

$$x = y - 1$$

Substituindo em P_1 :

$$P_1(x) = P_1(y - 1) = (y - 1)^3 + 2(y - 1)^2 - 3(y - 1) - 4 = 0$$

Assim, obtemos a equação transformada na variável y :

$$P_2(y) = y^3 - y^2 - 4y = 0$$

Que pode ser escrita na variável x :

$$P_2(x + 1) = (x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 4(x + 1) = 0$$

É possível obter esta transformação diretamente pelo algoritmo de Horner-Ruffini, este é parecido com o algoritmo de Briot-Ruffini. Vejamos.

5.1.1. Algoritmo de Horner-Ruffini

Antes de aprendermos o algoritmo, relembremos o conceito de divisões sucessivas.

Dado um polinômio $P_1(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, vamos analisar as divisões sucessivas deste polinômio pelo divisor $x + a$. Pela definição de divisão:

$$P_1(x) = (x + a)Q_1(x) + R_1$$

O quociente da divisão é de grau $n - 1$ e o resto é uma constante.

Procedendo com a divisão e dividindo Q_1 por $x + a$, obtemos Q_2 tal que $\partial Q_2 = n - 2$:

$$Q_1(x) = (x + a)Q_2(x) + R_2$$

Substituindo essa identidade em P_1 :

$$P_1(x) = (x + a)[(x + a)Q_2(x) + R_2] + R_1$$

$$P_1(x) = Q_2(x)(x + a)^2 + R_2(x + a) + R_1$$

Continuando com a divisão sucessiva, obtemos da divisão de Q_2 por $x + a$:

$$Q_2(x) = (x + a)Q_3(x) + R_3$$

Substituindo em P_1 :

$$P_1(x) = [(x + a)Q_3(x) + R_3](x + a)^2 + R_2(x + a) + R_1$$

$$P_1(x) = Q_3(x)(x + a)^3 + R_3(x + a)^2 + R_2(x + a) + R_1$$

Assim, fazendo as divisões sucessivas e as respectivas substituições, obtemos:

$$P_1(x) = Q_n(x + a)^n + R_n(x + a)^{n-1} + \dots + R_2(x + a) + R_1$$

Com base nisso, temos o dispositivo prático de Horner-Ruffini:

$-a$	P_1		
$-a$	Q_1		R_1
$-a$	Q_2	R_2	
	\dots		
	Q_n	R_n	

Perceba que esse algoritmo é baseado nas divisões sucessivas. Para cada linha, obteremos um resto R_i e estes serão os coeficientes dos termos $(x + a)^{i-1}$. O coeficiente do termo $(x + a)^n$ será o quociente da última divisão. Note que serão n restos resultantes de n divisões sucessivas.

Vejamos um exemplo.

6.1.1.a) Façamos a transformação do polinômio do exemplo anterior $x^3 + 2x^2 - 3x - 4$ em potências crescentes de $x + 1$.

Como o polinômio possui grau 3, devemos fazer 3 divisões sucessivas. Pelo algoritmo de Horner-Ruffini:

-1	1	2	-3	-4
-1	1	1	-4	$0 = R_1$
-1	1	0	$-4 = R_2$	
	$1 = Q_3$	$-1 = R_3$		

$$P_1(x) = Q_3(x + 1)^3 + R_3(x + 1)^2 + R_2(x + 1) + R_1$$

$$P_1(x) = (x + 1)^3 - (x + 1)^2 - 4(x + 1)$$

5.2. Transformada multiplicativa

A transformação multiplicativa é uma relação de transformação do tipo:

$$y = kx; k \neq 0$$

Em que $k \in \mathbb{C}$ é uma constante.

Nessa transformação, a equação transformada $P_2(y) = 0$ terá as raízes de $P_1(x) = 0$ multiplicadas por uma constante k .

Exemplo.

6.2.a) Obtenha a equação cujas raízes são os triplos das raízes de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Queremos uma transformação do tipo $y = 3x$. Fazendo a substituição $x = y/3$:

$$\left(\frac{y}{3}\right)^3 - 6\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 11\left(\frac{y}{3}\right) - 6 = 0$$

$$\frac{y^3}{27} - \frac{2y^2}{3} + \frac{11y}{3} - 6 = 0$$

Eliminando os denominadores, obtemos a equação pedida:

$$y^3 - 18y^2 + 99y - 162 = 0$$

5.3. Transformada inversa ou recíproca

A transformação recíproca é uma relação de transformação do tipo:

$$y = \frac{1}{x}; x \neq 0$$

Nessa transformação, as raízes da equação resultante serão os inversos das raízes da equação original.

Exemplo:

6.3.a) Obtenha uma equação cujas raízes são inversas das raízes de $x^3 - 2x^2 + x - 5 = 0$. Queremos uma transformação do tipo $y = 1/x$, fazendo a substituição:

$$\left(\frac{1}{y}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \left(\frac{1}{y}\right) - 5 = 0$$

$$\frac{1}{y^3} - \frac{2}{y^2} + \frac{1}{y} - 5 = 0$$

$$\Rightarrow -5y^3 + y^2 - 2y + 1 = 0$$

Perceba que em uma transformação recíproca, mudamos a ordem dos coeficientes e substituímos x por y .

6. Equações recíprocas

Dizemos que uma equação polinomial $P(x) = 0$ é recíproca se e somente se a sua transformada recíproca $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ for equivalente à equação original.

Exemplo:

6.a) $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 1 = 0$$

Multiplicando a equação por x^4 :

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$$

$P(x) = 0$ e $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ são equações equivalentes, logo $P(x) = 0$ é uma equação recíproca.

6.1. Teorema Fundamental

Se a equação recíproca admite $\alpha \in \mathbb{C}^*$ como raiz de multiplicidade m , então $1/\alpha$ também será raiz com a mesma multiplicidade.

Exemplo:

6.1.a) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 2$ é uma equação que admite 2 como raiz. Como ela é recíproca, a outra raiz da equação é $1/2$.

6.1.b) $P(x) = (x - 3)\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 1)$ é uma equação recíproca que admite 3 e $1/3$ como raízes.

Agora que sabemos o que é uma equação recíproca, vamos aprender a reconhecer quando uma equação é recíproca.

Seja a equação polinomial dada por

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

A sua transformada recíproca é

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = a_n + a_{n-1}x + \dots + a_2 x^{n-2} + a_1 x^{n-1} + a_0 x^n$$

Se $P(x) = 0$ é uma equação recíproca, então $P(x) = 0$ e $P\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ são equações equivalentes, logo, os coeficientes dessas equações são proporcionais. Sendo k a constante de proporcionalidade, então, igualando-se os coeficientes das respectivas equações:

$$\begin{cases} a_n = k a_0 \\ a_{n-1} = k a_1 \\ a_{n-2} = k a_2 \\ \vdots \\ a_{n-m} = k a_m \\ \vdots \\ a_m = k a_{n-m} \\ \vdots \\ a_0 = k a_n \end{cases}$$

Tomando-se, sem perda de generalidade, $a_m = k a_{n-m}$ e $a_{n-m} = k a_m$, com $0 \leq m \leq n$, temos:

$$a_m = k(k a_m) \Rightarrow a_m = k^2 a_m \Rightarrow k^2 = 1$$

Assim, obtemos $k = 1$ ou $k = -1$.

Essas são as únicas possibilidades de constantes para as equações recíprocas.

Para $k = 1$, temos que os **coeficientes dos termos equidistantes dos extremos** da equação recíproca $P(x) = 0$ **são iguais**:

$$3x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x + 3 = 0$$



Coeficientes equidistantes dos extremos são iguais

Essa equação é chamada de **equação recíproca de primeira espécie**.

Para $k = -1$, temos que os **coeficientes dos termos equidistantes dos extremos** da equação recíproca $P(x) = 0$ **são opostos ou simétricos (mesmo módulo mas com sinais trocados)**:



$$3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = 0$$

Coeficientes equidistantes dos extremos são simétricos

Essa equação é chamada de **equação recíproca de segunda espécie**.

6.2. Resolução de uma equação recíproca

Até agora vimos a definição de equação recíproca e como classificá-la. Vamos aprender a resolver cada tipo de equação recíproca que pode ser cobrada no vestibular. Sem perda de generalidade, veremos como resolver as equações para graus menores, a resolução para graus maiores usará a mesma ideia.

6.2.1. 1ª espécie e grau par

Seja a equação $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Para resolver essa equação, dividimos a equação por x^2 :

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

Associamos o coeficiente dos termos equidistantes:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Fazemos a transformação:

$$x + \frac{1}{x} = y \xrightarrow{\text{elevando ao quadrado}} x^2 + \frac{2x}{x} + \frac{1}{x^2} = y^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$$

E obtemos uma equação do segundo grau em y :

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0$$

$$ay^2 + by + c - 2a = 0$$

Essa equação resultará em duas raízes y_1 e y_2 . Para cada uma dessas raízes, encontramos uma equação em x :

$$y_1 = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - y_1x + 1 = 0$$

$$y_2 = x + \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 - y_2x + 1 = 0$$

Resolvendo essas equações, encontramos a solução da equação.

6.2.2. 1ª espécie e grau ímpar

Seja a equação $ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$. Note que -1 é raiz dessa equação:

$$\begin{aligned} a(-1)^5 + b(-1)^4 + c(-1)^3 + c(-1)^2 + b(-1) + a \\ = -a + b - c + c - b + a = 0 \end{aligned}$$

Assim, podemos aplicar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para simplificar a equação:

-1	a	b	c	c	b	a
	a	b - a	a - b + c	b - a	a	0

Obtemos a seguinte equação:

$$(x + 1) \underbrace{[ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a]}_{1^\text{a espécie de grau par}} = 0$$

$ax^4 + (b - a)x^3 + (a - b + c)x^2 + (b - a)x + a = 0$ é uma equação recíproca de 1ª espécie de grau par e já aprendemos como resolver esse tipo de equação.

Portanto, quando encontrarmos uma equação recíproca de 1ª espécie de grau ímpar, temos que -1 será raiz da equação e, assim, podemos fatorá-lo usando o algoritmo de Briot-Ruffini. A equação resultante terá como fator uma equação recíproca de grau par, cuja solução é conhecida.

6.2.3. 2ª espécie e grau par

Seja a equação $ax^6 + bx^5 + cx^4 - cx^2 - bx - a = 0$. Essa é uma equação recíproca de 2ª espécie de grau par. Note que ela possui o termo central nulo (coeficiente de x^3 é zero). Nesse caso, 1 e -1 são raízes. Assim, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para fatorá-lo.

-1	a	b	c	0	-c	-b	-a
1	a	b - a	a - b + c	-a + b - c	a - b	-a	0
	a	b	a + c	b	a	0	

Obtemos a seguinte equação:

$$(x + 1)(x - 1) \underbrace{[ax^4 + bx^3 + (a + c)x^2 + bx + a]}_{1^\text{a espécie de grau par}} = 0$$

Assim, basta resolver a equação recíproca 1ª espécie de grau par para encontrar as outras raízes.

6.2.4. 2ª espécie e grau ímpar

Seja a equação $ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0$. Perceba que 1 é raiz da equação, pois a soma dos coeficientes é zero:

$$a + b + c - c - b - a = 0$$

Assim, podemos aplicar Briot-Ruffini:

1	a	b	c	-c	-b	-a
	a	a + b	a + b + c	a + b	a	0

Obtemos a seguinte equação:

$$(x - 1) \underbrace{[ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (a + b)x + a]}_{1^\text{a espécie de grau par}} = 0$$

Para encontrar as outras raízes, basta resolver a equação de 1ª espécie de grau par.

7. Lista de Questões



Questões ITA

3. (ITA/2019)

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ um polinômio cujas raízes são não negativas e estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma de seus coeficientes é igual a 10, podemos afirmar que a soma das raízes de $p(x)$ é igual a

- a) 9
- b) 8
- c) 3



- d) $\frac{9}{2}$
e) 10

4. (ITA/2019)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3, y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) VERDADEIRA(S)

- a) Apenas I.
b) Apenas II.
c) Apenas III.
d) Apenas II e III.
e) Todas.

5. (ITA/2019)

Determine os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

6. (ITA/2018)

Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$, então o produto das raízes de $p(x)$ é

- a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $\frac{1}{5}$
d) $\frac{1}{7}$
e) $\frac{1}{11}$

7. (ITA/2018)

Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.



8. (ITA/2016)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, em que os expoentes $8, m, n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

- I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p .
- II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p .
- III. p tem quatro raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é (são) verdadeira(s)

- a) Apenas I.
- b) Apenas I e II.
- c) Apenas I e III.
- d) Apenas II e III.
- e) I, II e III.

9. (ITA/2016)

Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i).$$

Podemos afirmar que

- a) Nenhuma das raízes de p é real.
- b) Não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.
- c) A soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.
- d) O produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.
- e) O módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

10. (ITA/2014)

Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

- a) $(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4})$.
- b) $(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4})$.
- c) $(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4})$.
- d) $(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4})$.
- e) $(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4})$.

**11. (ITA/2013)**

Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x , $x^3 + mx^2 + (m + 4)x + 5$, estejam no intervalo $] -2, 2[$.

12. (ITA/2012)

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

- a) $2(1 - \sqrt{2})$.
- b) $\sqrt{2} - 4$.
- c) $2(2 + \sqrt{2})$.
- d) $4 + \sqrt{2}$.
- e) $4(\sqrt{2} - 1)$.

13. (ITA/2010)

Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p :

- I. Quatro das raízes são imaginárias puras.
- II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.
- III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) I e III.
- e) II e III.

14. (ITA/2010)

Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais tem multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a



- a) -4 .
- b) -2 .
- c) 2 .
- d) 4 .
- e) 6 .

15. (ITA/2010)

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p , $-r$ também é raiz de p . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

- I. Se r_1 e r_2 , $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p , então r_3 é imaginário puro.
- II. Se r é raiz dupla de p , então r é real ou imaginário puro.
- III. $a_0 < 0$.

16. (ITA/2009)

Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

- a) 1.
- b) 2.
- c) 3.
- d) 4.
- e) 5.

17. (ITA/2009)

O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

Com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

- a) $3 + \sqrt{3}$.
- b) $2 + 3\sqrt{3}$.
- c) $2 + \sqrt{2}$.
- d) $1 + 2\sqrt{2}$.
- e) $2 + 2\sqrt{2}$.

18. (ITA/2006)

Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que



- a) $x = 2$ não é raiz de p .
- b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
- c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
- d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
- e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

19. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

“Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais.”

20. (ITA/2008)

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

21. (ITA/2006)

Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 - i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e -40 . Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

- a) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{193}{6}}, 3, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{193}{6}}$.
- b) $2 - 4\sqrt{13}, 2, 2 + 4\sqrt{13}$.
- c) $-4, 2, 8$.
- d) $-2, 3, 8$.
- e) $-1, 2, 5$.

22. (ITA/2005)

O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

- a) 4.
- b) -4 .
- c) 6.
- d) 5.
- e) -5 .

**23. (ITA/2004)**

Para algum número real r , o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de r ?

- a) 1,62.
- b) 1,52.
- c) 1,42.
- d) 1,32.
- e) 1,22.

24. (ITA/2001)

O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $1/2$ é:

- a) 36.
- b) 41.
- c) 26.
- d) -27.
- e) -20.

25. (ITA/2001)

O polinômio com coeficientes reais $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i . Então a soma dos coeficientes é igual a:

- a) -4.
- b) -6.
- c) -1.
- d) 1.
- e) 4.

Questões IME**26. (IME/2020)**

Sejam a e b raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, c e d raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que a , b , c , e d formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de $M + N$.

27. (IME/2019)

Seja a inequação:


$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

- a) 2
- b) $13/6$
- c) $1/3$
- d) $5/2$
- e) $8/3$

28. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

- a) $32 - a$
- b) $48 - 2a$
- c) 48
- d) $48 + 2a$
- e) $32 + a$

29. (IME/2017)

O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2 . Qual é o valor de b ?

- a) 11
- b) 13
- c) 17
- d) 23
- e) 29

30. (IME/2016)

O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais $\alpha, -\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 2

**31. (IME/2016)**

Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor de a e b

- a) $P(-1)P(1) < 0$
- b) $P(-1)P(1) = 0$
- c) $P(-1) + P(1) = 2$
- d) $P(0)P(1) = 0$
- e) $P(0) + P(1) = 0$

32. (IME/2014)

O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

33. (IME/2013)

Os polinômios $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ e $Q(x) = x^3 + bx + 12$ possuem duas raízes comuns. Sabendo que a e b são números reais, pode-se afirmar que satisfazem a equação

- a) $a = b$
- b) $2a = b$
- c) $a = 2b$
- d) $2a = 3b$
- e) $3a = 2b$

34. (IME/2010)

Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde a e b são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de $p(x)$ depende

- a) Apenas de a e é positiva.
- b) De a e b e é negativa.
- c) Apenas de b e é positiva.
- d) Apenas de b e é negativa.
- e) De a e b e é positiva.

Obs.: e representa a base do logaritmo neperiano e \ln a função logaritmo neperiano.

35. (IME/2008)

Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4 , onde $Q(x)$ é um polinômio do 6º grau.



36. (IME/2007)

Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ um polinômio do terceiro grau cujas raízes são termos de uma progressão aritmética de razão 2. Sabendo que $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$, os valores de α e γ são, respectivamente:

- a) 2 e -1
- b) 3 e -2
- c) -1 e 2
- d) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$
- e) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

37. (IME/2007)

Seja $p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de $p(x)$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

38. (IME/2006)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30.$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

39. (IME/2005)

Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

- a. Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t .
- b. Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k .

40. (IME/2004)

Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

41. (IME/2002)

- Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio $P(x)$ de quarto grau para que $P(x) = P(1 - x)$.
- Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

8. Gabarito

GABARITO



Gabarito das Questões ITA

- a
- e
- $a = 1; b = 2; \text{raízes: } \{1 - i\sqrt{5}; 1 + i\sqrt{5}\}$
- d
- 4
- c
- e
- c
- $m = 6$.
- e
- c
- a
- V, V, F.
- c
- e
- e
- Verdadeira.
- $\alpha = 0; \beta = 1 - k; \gamma = k, \text{ com } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq -1$
- e
- e
- b
- b
- a

Gabarito das Questões IME

- $M + N = 246$
- b
- c
- e



30. a

31. d

32. $3, \pm\sqrt{-5 + 2\sqrt{14}i}, \pm\sqrt{-5 - 2\sqrt{14}i}$.

33. b

34. d

35. $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

36. d

37. e

38. $2 + i, 2 - i, 1 + i, 1 - i, -3$.

39. Item a) t ; Item b) Demonstração.

40. Demonstração.

41. a) $a_1 + a_2 = a_4$ e $a_3 = -2a_4$, para $a_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $a_0 \in \mathbb{R}$;

b) $\left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\right\}$.

9. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas



Questões ITA Comentadas

3. (ITA/2019)

Seja $p(x) = x^3 + ax^2 + bx$ um polinômio cujas raízes são não negativas e estão em progressão aritmética. Sabendo que a soma de seus coeficientes é igual a 10, podemos afirmar que a soma das raízes de $p(x)$ é igual a

a) 9

b) 8

c) 3

d) $\frac{9}{2}$

e) 10

Comentários

Analisando o polinômio, podemos descobrir uma das raízes. Vamos colocar x em evidência:

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx = x(x^2 + ax + b) = 0$$

Logo, $x = 0$ é raiz.

Como as raízes são não negativas e elas estão em progressão aritmética, a PA deve ser do tipo:

$$(0, r, 2r), \text{ com } r \geq 0$$

Então, temos que encontrar o valor de r .

Ainda, do enunciado, temos que a soma dos coeficientes é igual a 10:

$$1 + a + b = 10 \Rightarrow a + b = 9 \quad (I)$$

Vamos usar as relações de Girard na seguinte equação:

$$x^2 + ax + b = 0 \quad (II)$$

Desse modo:

$$x_1 + x_2 = r + 2r = -a \Rightarrow a = -3r$$

De (I), podemos encontrar o valor de b :

$$a + b = 9 \Rightarrow b = 9 + 3r$$

Substituindo os valores encontrados em (II) e fazendo $x = r$:

$$r^2 + (-3r)r + 9 + 3r = 0$$

$$-2r^2 + 3r + 9 = 0 \Rightarrow r_1 = 3 \text{ ou } r_2 = -\frac{3}{2}$$

Sendo as raízes não negativas, devemos ter $r = 3$.

Portanto, a soma das raízes é dada por:

$$0 + r + 2r = 3r = 9$$

Gabarito: "a".

4. (ITA/2019)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se x_1, x_2 e x_3 são as raízes da equação $x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0$, então $y_1 = x_2x_3, y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$ são as raízes da equação $y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0$.

II. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

III. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) VERDADEIRA(S)

- a) Apenas I.
- b) Apenas II.
- c) Apenas III.
- d) Apenas II e III.
- e) Todas.

Comentários

I. Verdadeira.

Utilizando as relações de Girard nas equações, temos:

$$x^3 - 2x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 1 \\ x_1x_2x_3 = -2 \end{cases}$$

$$y^3 - y^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3 = -4 \\ y_1y_2y_3 = 4 \end{cases}$$

Vamos verificar se as relações em y são válidas, usando as relações em x . Para $y_1 = x_2x_3, y_2 = x_1x_3$ e $y_3 = x_1x_2$:

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + y_3 &= x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = 1 \\ y_1y_2 + y_2y_3 + y_1y_3 &= x_2x_3x_1x_3 + x_1x_3x_1x_2 + x_2x_3x_1x_2 \\ &= x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = (-2) \cdot 2 = -4 \\ y_1y_2y_3 &= (x_2x_3)(x_1x_3)(x_1x_2) = (x_1x_2x_3)^2 = (-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

Portanto, todas as relações são válidas, logo, elas são raízes da equação.

II. Verdadeira.

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Vamos tomar os inteiros consecutivos $(a-1, a, a+1)$, a soma dos seus cubos resulta:

$$(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$$

$$\begin{aligned}
 &= a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \\
 &= 3a^3 + 6a \\
 &= 3a(a^2 + 2)
 \end{aligned}$$

Devemos provar que, para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, a expressão $3a(a^2 + 2)$ é divisível por 9. Vamos dividir o problema em todos os casos possíveis:

a) $a = 3k, k \in \mathbb{Z}$ valores $(0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots, \pm 3k)$

$$3a(a^2 + 2) = 3(3k)((3k)^2 + 2) = 9k(9k^2 + 2)$$

b) $a = 3k + 1$ valores $(1, 4, 7, 10, \dots, 3k + 1)$ e $(-2, -5, -8, \dots, -3k + 1)$

$$\begin{aligned}
 3a(a^2 + 2) &= 3(3k + 1)((3k + 1)^2 + 2) = 3(3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) \\
 &= 9(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)
 \end{aligned}$$

c) $a = 3k + 2$ valores $(2, 5, 8, \dots, 3k + 1)$ e $(-1, -4, -7, \dots, -3k + 1)$

$$\begin{aligned}
 3a(a^2 + 2) &= 3(3k + 2)((3k + 2)^2 + 2) = 3(3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) \\
 &= 9(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)
 \end{aligned}$$

Todos esses casos possuem o fator 9 na expressão, logo, para $a \in \mathbb{Z}$, $3a(a^2 + 2)$ é divisível por 9.

III. Verdadeira.

$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1 + 5 + 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{6 + 2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}$$

Gabarito: "e".

5. (ITA/2019)

Determine os valores reais de a e b para os quais as equações $x^3 + ax^2 + 18 = 0$ e $x^3 + bx + 12 = 0$ possuam duas raízes em comum e, a seguir, determine essas raízes.

Comentários

A questão afirma que as equações possuem duas raízes em comum. Devemos pensar em como relacionar essas raízes. As relações de Girard nos permitem criar um sistema entre as raízes e os coeficientes dessas equações, vamos usá-las.

Sejam α e β as raízes comuns, então, aplicando as relações de Girard:

Raízes de $x^3 + ax^2 + 18 = 0$: α, β, γ

$$\begin{cases}
 \alpha + \beta + \gamma = -a & (I) \\
 \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = 0 & (II) \\
 \alpha\beta\gamma = -18 & (III)
 \end{cases}$$

Raízes de $x^3 + bx + 12 = 0$: α, β, λ

$$\begin{cases}
 \alpha + \beta + \lambda = 0 & (IV) \\
 \alpha\beta + \alpha\lambda + \beta\lambda = b & (V) \\
 \alpha\beta\lambda = -12 & (VI)
 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

(IV) - (I):

$$\lambda - \gamma = a \quad (VII)$$

(V) - (II):

$$(\alpha + \beta)(\lambda - \gamma) = b \quad (VIII)$$

(III) \div (VI):

$$\frac{\gamma}{\lambda} = \frac{18}{12} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{2} \lambda \quad (IX)$$

Substituindo (IX) em (VII):

$$\lambda - \gamma = a \xRightarrow{\gamma = \frac{3}{2}\lambda} \lambda - \frac{3}{2}\lambda = a \Rightarrow \lambda = -2a \text{ (X)}$$

De (IV), temos $\alpha + \beta = -\lambda = 2a$. Usando a relação (VIII):

$$\underbrace{(\alpha + \beta)}_{2a} \underbrace{(\lambda - \gamma)}_a = b \Rightarrow 2a^2 = b \text{ (XI)}$$

Agora, temos uma relação para λ e b .

Lembrando que λ é uma raiz de $x^3 + bx + 12 = 0$, temos:

$$\begin{aligned} x^3 + bx + 12 = 0 &\xRightarrow{x=\lambda} \lambda^3 + b\lambda + 12 = 0 \xRightarrow{\lambda=-2a} (-2a)^3 + 2a^2 \cdot (-2a) + 12 = 0 \\ &\Rightarrow -8a^3 - 4a^3 + 12 = 0 \Rightarrow -12a^3 = -12 \Rightarrow a^3 = 1 \Rightarrow \boxed{a=1} \end{aligned}$$

De (XI):

$$b = 2a^2 \xRightarrow{a=1} \boxed{b=2}$$

Para $a = 1$ e $b = 2$, obtemos das relações anteriores:

$$\lambda = -2a = -2$$

$$\gamma = \frac{3}{2}\lambda = -3$$

Desse modo, as equações iniciais são dadas por:

$$x^3 + ax^2 + 18 = 0 \Rightarrow x^3 + x^2 + 18 = 0 \text{ (XII)}$$

$$x^3 + bx + 12 = 0 \Rightarrow x^3 + 2x + 12 = 0 \text{ (XIII)}$$

Subtraindo essas equações, obtemos a seguinte equação do segundo grau:

$$(XII) - (XIII): x^2 - 2x + 6 = 0$$

As raízes dessa equação serão as raízes comuns α e β . Vamos encontrar as raízes:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{-20}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{5}}{2}$$

Portanto, α e β são dadas por:

$$\boxed{\alpha = 1 - i\sqrt{5}}$$

$$\boxed{\beta = 1 + i\sqrt{5}}$$

Gabarito: $a = 1$; $b = 2$; raízes: $\{1 - i\sqrt{5}; 1 + i\sqrt{5}\}$

6. (ITA/2018)

Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$. Se o polinômio $p(x)$ é dado por $p(x) = \det A$,

então o produto das raízes de $p(x)$ é

- a) $\frac{1}{2}$
- b) $\frac{1}{3}$
- c) $\frac{1}{5}$
- d) $\frac{1}{7}$
- e) $\frac{1}{11}$

Comentários

O polinômio $p(x)$ é dado por:

$$p(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Vamos escrever $p(x)$ da seguinte forma:

$$p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Aplicando Laplace à primeira linha do determinante, temos:

$$a_0 = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$a_1 = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 0 = 0$$

$$a_2 = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -9$$

$$a_3 = (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-7) = 6$$

Ou seja, $p(x)$ é dado por:

$$p(x) = 7x^3 - 9x^2 - 1$$

Das relações de Girard, sabemos que o produto das raízes de um polinômio do 3º grau é dado por:

$$-\frac{a_0}{a_3} = -\left(-\frac{1}{7}\right) = \frac{1}{7}$$

Gabarito: "d".

7. (ITA/2018)

Seja $p(x)$ um polinômio não nulo. Se $x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ e $x^3 - 5x^2 + 8x - 4$ são divisores de $p(x)$, determine o menor grau possível de $p(x)$.

Comentário

Se os polinômios dados dividem $p(x)$, podemos escrever:

$$p(x) = q_1(x)(x^3 - 4x^2 + 5x - 2)$$

$$p(x) = q_2(x)(x^3 - 5x^2 + 8x - 4)$$

Ou seja, as raízes dos polinômios dados são raízes de $p(x)$. Então, vamos descobrir as raízes dos polinômios dados. Para facilitar, vamos dar nomes aos polinômios:

$$g_1(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$$

$$g_2(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

Em polinômios de grau maior que 2 é sempre útil chutar que 1 é uma de suas raízes. Então, vamos verificar:

$$g_1(1) = 1 - 4 + 5 - 2 = 0$$

$$g_2(1) = 1 - 5 + 8 - 4 = 0$$

Ou seja, 1 é raiz de $g_1(x)$ e de $g_2(x)$. Vamos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para reduzir o grau desses polinômios.

Para $g_1(x)$, temos:

1	1	-4	5	-2
	1	-3	2	0

Ou seja:

$$g_1(x) = (x - 1)(x^2 - 3x + 2)$$

Logo, as outras raízes de $g_1(x)$ são as raízes de $(x^2 - 3x + 2)$, que são 1 e 2.

De outra forma:

$$g_1(x) = (x - 1)^2(x - 2)$$

Para $g_2(x)$, temos:

1	1	-5	8	-4
	1	-4	4	0

Ou seja:

$$g_2(x) = (x - 1)(x^2 - 4x + 4)$$

Logo, as outras raízes de $g_2(x)$ são as raízes de $(x^2 - 4x + 4) = (x - 2)^2$, ou seja, 2 com multiplicidade 2.

De outra forma:

$$g_2(x) = (x - 1)(x - 2)^2$$

Conclusão:

O polinômio $p(x)$ deve possuir 1 como raiz com multiplicidade 2, de $g_1(x)$, e deve possuir 2 com multiplicidade 2, de $g_2(x)$. Ou seja, para atender ao enunciado, o polinômio $p(x)$ deve ser da forma:

$$p(x) = g(x)(x - 1)^2(x - 2)^2$$

Logo, o menor grau possível para $p(x)$ é 4, que é quando $g(x) = c, c \in \mathbb{R}$.

Gabarito: 4.

8. (ITA/2016)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = x^8 + x^m - 2x^n$, em que os expoentes $8, m, n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica cuja soma dos termos é igual a 14. Considere as seguintes afirmações:

- I. $x = 0$ é uma raiz dupla de p .
- II. $x = 1$ é uma raiz dupla de p .
- III. p tem quatro raízes com parte imaginária não nula.

Destas, é (são) verdadeira(s)

- a) Apenas I.
- b) Apenas I e II.
- c) Apenas I e III.
- d) Apenas II e III.
- e) I, II e III.

Comentários

O primeiro passo nessa questão é encontrar os valores de m e n usando o fato de que eles pertencem a uma P.G. de primeiro termo 8. Seja q a razão dessa progressão, podemos representar essa progressão pela terna ordenada:

$$(8, 8q, 8q^2)$$

Sua soma é 14, do que temos:

$$8 + 8q + 8q^2 = 14 \Rightarrow 4q^2 + 4q - 3 = 0$$

Resolvendo para q , temos:

$$q = -\frac{3}{2} \text{ ou } q = \frac{1}{2}$$

Como se trata de um polinômio, o expoente de x deve ser, necessariamente, um número inteiro não negativo.

Suponha que $q = -\frac{3}{2}$. Disso, teríamos que:

$$m = 8 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -12$$

Ou seja, m seria negativo, o que não convém.

A conclusão é que $q = \frac{1}{2}$ e a terna ordenada fica:

$$(8, 4, 2)$$

Do que segue que:

$$p(x) = x^8 + x^4 - 2x^2$$

De posse do polinômio, podemos julgar as afirmações.

I. **Verdadeira:** Veja que $p(x) = x^8 + x^4 - 2x^2 = x^2(x^6 + x^2 - 2)$, ou seja, $p(x)$ apresenta o fator $(x - 0)$ duas vezes, de onde temos que 0 é uma raiz dupla.

II. **Falsa:** Observe que

$$x^6 + x^2 - 2 = x^6 - 1 + x^2 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + (x^2 - 1)$$

Ou ainda

$$p(x) = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 2)$$

Disso, temos que 1 é raiz com multiplicidade 1, pois $p(x)$ somente apresenta uma vez o fator $(x - 1)$.

III. **Verdadeira:** Vamos mostrar que as raízes de $(x^4 + x^2 + 2)$ são complexas não reais. Para isso, veja que $x^4 + x^2 + 2 = (x^2)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4} + \frac{7}{4} = \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$. Mas isso obedece $\left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$ para todo x real. Logo, essa equação não apresenta raízes reais.

Gabarito: "c".

9. (ITA/2016)

Considere o polinômio p com coeficientes complexos definido por

$$p(z) = z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i).$$

Podemos afirmar que

- a) Nenhuma das raízes de p é real.
- b) Não existem raízes de p que sejam complexas conjugadas.
- c) A soma dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2 + \sqrt{2}$.
- d) O produto dos módulos de todas as raízes de p é igual a $2\sqrt{2}$.
- e) O módulo de uma das raízes de p é igual a $\sqrt{2}$.

Comentários

O polinômio fornecido assusta à primeira vista. Mas se você observar com calma, vai perceber que:

$$\begin{aligned} p(z) &= z^4 + (2 + i)z^3 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i) = \\ &= z^4 - 1 + 1 + (2 + i)z^2 + (2 + i)z + (1 + i) = \\ &= z^4 - 1 + (2 + i)(z^3 + z^2 + z + 1) \end{aligned}$$

Isso é muito bom, pois $p(1) \neq 0$, ou seja, para $p(z) = 0$, podemos escrever:

$$p(z) = z^4 - 1 + \frac{(2 + i)(z^4 - 1)}{z - 1} = (z^4 - 1) \left(1 + \frac{2 + i}{z - 1}\right) = 0$$

Já que $z \neq 1$. Disso, temos que:

$$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

Resolvendo para z , vem:

$$z = \pm 1 \text{ ou } z = \pm i$$

Mas $z \neq 1$, do que segue que 1 não convém.

Ainda temos que:

$$1 + \frac{2+i}{z-1} = 0 \Rightarrow \frac{z+1+i}{z-1} = 0 \Rightarrow z = -1-i$$

Note que o módulo dessa última raiz de $p(z)$ é $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, do que segue que a alternativa “e” é a correta.

Gabarito: “e”.

10. (ITA/2014)

Considere os polinômios em $x \in \mathbb{R}$ da forma $p(x) = x^5 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x$. As raízes de $p(x) = 0$ constituem uma progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$ quando (a_1, a_2, a_3) é igual a

- a) $(\frac{1}{4}, 0, \frac{5}{4})$.
- b) $(\frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4})$.
- c) $(\frac{1}{4}, 0, -\frac{5}{4})$.
- d) $(\frac{5}{4}, 0, \frac{1}{4})$.
- e) $(\frac{1}{4}, -1, -\frac{1}{4})$.

Comentários

Note que o polinômio dado possui zero como uma de suas raízes, pois:

$$p(0) = 0^5 + a_30^3 + a_20^2 + a_10 = 0$$

Seja r a “raiz central”, ou seja, tal que:

$$\left(r-1, r-\frac{1}{2}, r, r+\frac{1}{2}, r+1\right)$$

Sejam as soluções de $p(x) = 0$. Das relações de Girard, podemos escrever que:

$$r-1 + r - \frac{1}{2} + r + r + \frac{1}{2} + r + 1 = -\frac{a_4}{a_5} = -\frac{0}{1} = 0$$

$$5r = 0 \Rightarrow r = 0$$

Logo, as raízes de $p(x)$ são:

$$\left(-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right)$$

Ainda das relações de Girard, podemos escrever:

$$\frac{a_3}{a_5} = a_3 = (-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + (-1) \cdot 0 + (-1) \cdot \frac{1}{2} + (-1) \cdot 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1$$

Ou seja:

$$a_3 = -\frac{5}{4}$$

Além disso:

$$p(-1) = -1 + \frac{5}{4} + a_2 - a_1 = 0 \Rightarrow a_2 - a_1 = -\frac{1}{4}$$

$$p(1) = 1 - \frac{5}{4} + a_2 + a_1 = 0 \Rightarrow a_2 + a_1 = \frac{1}{4}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$a_2 = 0 \text{ e } a_1 = \frac{1}{4}$$

Gabarito: "c".

11. (ITA/2013)

Considere o polinômio $P(m) = am^2 - 3m - 18$, em que $a \in \mathbb{R}$ é tal que a soma das raízes de P é igual a 3. Determine a raiz m de P tal que duas, e apenas duas, soluções da equação em x , $x^3 + mx^2 + (m+4)x + 5$, estejam no intervalo $] -2, 2[$.

Comentários

O primeiro passo é encontrar o valor de a . Para isso, vamos usar as relações de Girard.

Nos foi dado que a soma das raízes é 3, logo:

$$-\left(\frac{-3}{a}\right) = 3 \Rightarrow a = 1$$

Assim, o polinômio fica:

$$P(m) = m^2 - 3m - 18$$

Resolvendo, temos que suas raízes são $m = -3$ ou $m = 6$.

O segundo passo é perceber que -1 é raiz da equação dada, observe:

$$(-1)^3 + m(-1)^2 + (m+4)(-1) + 5 = -1 + m - m - 4 + 5 = 0$$

Usando Briot-Ruffini:

-1	1	m	$m+4$	5
	1	$m-1$	5	0

Ou seja:

$$(x+1)(x^2 + (m-1)x + 5) = 0$$

Para $m = -3$:

$$x^2 - 4x + 5 = 0$$

Observe que ela não possui raízes reais.

Para $m = 6$:

$$x^2 + 5x + 5 = 0$$

Suas raízes são $x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Vamos verificar se elas estão no intervalo definido:

$$-2 \leq \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \leq 2$$

O lado direito é verdadeiro, pois a raiz é negativa. O lado esquerdo:

$$-2 \leq \frac{-5 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow -4 \leq -5 - \sqrt{5} \Rightarrow 1 \leq -\sqrt{5}$$

Que é absurdo.

Para a outra:

$$\begin{aligned} -2 &\leq \frac{-5 + \sqrt{5}}{2} \leq 2 \\ -4 &\leq -5 + \sqrt{5} \leq 4 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{5} \leq 9 \end{aligned}$$

Ou seja, a segunda raiz está no intervalo. Assim, 1 e $\frac{-5+\sqrt{5}}{2}$ estão no intervalo dado mas $\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$ não está. Portanto, exatamente duas raízes estão no intervalo.

Gabarito: $m = 6$.

12. (ITA/2012)

As raízes x_1, x_2 e x_3 do polinômio $p(x) = 16 + ax - (4 + \sqrt{2})x^2 + x^3$ estão relacionadas pelas equações:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \text{ e } x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0$$

Então, o coeficiente a é igual a

- a) $2(1 - \sqrt{2})$.
- b) $\sqrt{2} - 4$.
- c) $2(2 + \sqrt{2})$.
- d) $4 + \sqrt{2}$.
- e) $4(\sqrt{2} - 1)$.

Comentários

Observe que temos três incógnitas, mas o enunciado só nos fornece duas equações.

Podemos obter mais uma equação usando as relações de Girard, pois a soma das raízes é dada por:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2}$$

Assim, temos o sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} = 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \\ x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3 = 0 \end{cases}$$

Somando a primeira e a terceira equação, obtemos:

$$x_1 + 2x_2 + \frac{x_3}{2} + (x_1 - 2x_2 - \sqrt{2}x_3) = 2 + 0$$

$$2x_1 + \left(\frac{1}{2} - \sqrt{2}\right)x_3 = 2 \Rightarrow x_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)x_3 + 1$$

Substituindo na segunda equação, vem:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)x_3 + 1 + x_2 + x_3 = 4 + \sqrt{2} \Rightarrow x_2 = 3 + \sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\right)x_3$$

Por fim, substituindo x_2 e x_1 na terceira equação:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4}\right)x_3 + 1 - 2\left[3 + \sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{4}\right)x_3\right] - \sqrt{2}x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 4$$

Assim, como 4 é raiz do polinômio, podemos escrever:

$$16 + 4a - 16(4 + \sqrt{2}) + 64 = 0 \Rightarrow a = 4(\sqrt{2} - 1)$$

Gabarito: "e".

13. (ITA/2010)

Sabe-se que o polinômio $p(x) = x^5 - ax^3 + ax^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}$, admite a raiz $-i$. Considere as seguintes afirmações sobre as raízes de p :

- I. Quatro das raízes são imaginárias puras.
- II. Uma das raízes tem multiplicidade dois.
- III. Apenas uma das raízes é real.

Destas, é (são) verdadeira(s) apenas

- a) I.
- b) II.
- c) III.
- d) I e III.
- e) II e III.

Comentários

Observe que $p(x)$ possui todos os seus coeficientes reais. Assim, se $-i$ é raiz de $p(x)$, i também é.

Vamos encontrar o valor de a usando que $p(i) = 0$:

$$i^5 - a(i)^3 + a(i)^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

Então, o polinômio fica:

$$p(x) = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

Note que $p(1) = 0$:

$$p(1) = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

Vamos dividir $p(x)$, sucessivamente por $(x - 1)$, $(x - i)$ e $(x + i)$ usando Briot-Ruffini:

1	1	0	1	-1	0	-1
i	1	1	2	1	1	0
$-i$	1	$1 + i$	$1 + i$	i	0	
	1	1	1	0		

Ou seja:

$$p(x) = (x - 1)(x - i)(x + i)(x^2 + x + 1)$$

As raízes de $x^2 + x + 1$ são $x = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, pertencentes aos complexos.

Vamos julgar item por item:

Item I:

Falsa, pois apenas duas de suas raízes são imaginárias puras.

Item II:

Falsa, pois nenhuma de suas raízes possui multiplicidade 2.

Item III:

Verdadeira, pois apenas $1 \in \mathbb{R}$.

Gabarito: "c".

14. (ITA/2010)

Um polinômio real $p(x) = \sum_{n=0}^5 a_n x^n$, com $a_5 = 4$, tem três raízes reais distintas, a, b e c , que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a + 2b + 5c = 0 \\ a + 4b + 2c = 6 \\ 2a + 2b + 2c = 5 \end{cases}$$

Sabendo que a maior das raízes é simples e as demais tem multiplicidade dois, pode-se afirmar que $p(1)$ é igual a

- a) -4 .
- b) -2 .
- c) 2 .
- d) 4 .

e) 6.

Comentários

O primeiro passo nessa questão é encontrar as raízes resolvendo o sistema linear fornecido.

Subtraindo a primeira equação da segunda equação:

$$a + 4b + 2c - (a + 2b + 5c) = 6 - 0 \Rightarrow 2b = 3c + 6$$

Substituindo $2b$ na primeira equação:

$$a + 3c + 6 + 5c = 0 \Rightarrow a = -8c - 6$$

Substituindo a e $2b$ na terceira equação, vem:

$$-16c - 12 + 3c + 6 + 2c = 5 \Rightarrow c = -1$$

Assim, temos que:

$$2b = -3 + 6 = 3 \Rightarrow b = \frac{3}{2} \text{ e } a = 8 - 6 = 2$$

A maior das raízes encontradas é 2, do que segue que -1 e $\frac{3}{2}$ possuem multiplicidade 2. Como $a_5 = 4$, podemos escrever:

$$p(x) = 4(x - 2)(x + 1)^2 \left(x - \frac{3}{2}\right)^2$$

Do que segue que $p(1)$ é dado por:

$$p(1) = 4(1 - 2)(1 + 1)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 = -4$$

Gabarito: "a".

15. (ITA/2010)

Considere o polinômio $p(x) = \sum_{n=0}^6 a_n x^n$, com coeficientes reais, sendo $a_0 \neq 0$ e $a_6 = 1$. Sabe-se que se r é raiz de p , $-r$ também é raiz de p . Analise a veracidade ou falsidade das afirmações:

- I. Se r_1 e r_2 , $|r_1| \neq |r_2|$, são raízes reais e r_3 é raiz não real de p , então r_3 é imaginário puro.
- II. Se r é raiz dupla de p , então r é real ou imaginário puro.
- III. $a_0 < 0$.

Comentários

Vamos analisar item por item.

Item I:

Do enunciado temos que se r_1 e r_2 são raízes de $p(x)$ então $-r_1$ e $-r_2$ também são raízes de $p(x)$. Note ainda que se $|r_1| \neq |r_2|$, podemos afirmar que $r_1 \neq \pm r_2$, ou seja, temos quatro raízes distintas do polinômio.

Mas o grau de $p(x)$ é 6, do que segue que ainda restam duas de suas raízes a determinar. Seja então $r_3 \notin \mathbb{R}$. Podemos dizer que:

$$r_3 = a + bi$$

Do enunciado, podemos afirmar que $-r_3$ também é raiz de $p(x)$. Além disso, perceba que $p(x)$ possui coeficientes reais, então \bar{r}_3 também é raiz.

Como somente restam duas raízes a determinar, então uma das três possibilidades abaixo deve ser verdadeira:

$$1- r_3 = -r_3$$

Mas isso implicaria que $2r_3 = 0 \Rightarrow r_3 = 0$. Isso não pode ocorrer, pois se zero é raiz do polinômio,

$a_0 = 0$, o que não é verdade.

- 2- $r_3 = \bar{r}_3$
Isso significa:

$$a + bi = a - bi \Rightarrow 2bi = 0 \Rightarrow b = 0$$

Ou seja, $z_3 = a \in \mathbb{R}$, o que contraria a afirmação.

- 3- $-r_3 = \bar{r}_3$
Isso significa:

$$-a - bi = a - bi \Rightarrow 2a = 0$$

Ou seja, r_3 é imaginário puro.

Do exposto acima, a única possibilidade que não contraria o enunciado é o caso em que r_3 é imaginário puro.

Portanto, a afirmação é verdadeira.

Item II:

Suponha que $r = a + bi$ é uma raiz dupla de $P(x)$. Disso, temos que $-r, \bar{r}$ e $-\bar{r}$ são todas duplas. Mas isso não pode ocorrer, pois nesse caso o polinômio teria 8 raízes!

Assim, para resolvermos esse problema, o conjunto:

$$\{r, -r, \bar{r}, -\bar{r}\}$$

Deve possuir elementos repetidos. Veja que $r \neq -r$, pois $a_0 \neq 0$. Disso, só nos resta:

$$r = \bar{r} \text{ ou } r = -\bar{r}$$

Do que temos que $a = 0$ ou $b = 0$, ou seja, r é real ou imaginário puro.

Portanto, o item é verdadeiro.

Item III:

Sejam $x_1, -x_1, x_2, -x_2, x_3$ e $-x_3$ as raízes da equação. Por Girard:

$$\frac{a_0}{1} = (-1)^3 (x_1 x_2 x_3)^2 \Rightarrow a_0 = -(x_1 x_2 x_3)^2$$

Suponha que $x_1 = a + bi$ seja uma raiz complexa e x_2 e x_3 são raízes reais. Disso, temos que:

$$-a - bi = a - bi \Rightarrow a = 0$$

Pois sendo x_2 e x_3 reais, $-x_1$ não pode ser tal que $x_1 = -x_1$, do que teríamos $x_1 = 0$ e x_1 real.

Logo:

$$x_1 = bi$$

Veja então:

$$a_0 = -(x_1 x_2)^2 \cdot (bi)^2 = (x_1 x_2 b)^2 > 0$$

Logo, o item é falso.

Gabarito: V, V, F.

16. (ITA/2009)

Considere as funções $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e $g(x) = x^2 - 2x + 1$. A multiplicidade das raízes não reais da função composta $f \circ g$ é igual a

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

Comentários

Antes de escrevermos a função composta, vamos fazer algumas simplificações:

$$g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Vamos fatorar $f(x)$. Note primeiramente que 1 é raiz:

$$f(1) = 1 + 2 - 2 - 1 = 0$$

Vamos usar Briot-Ruffini para fatorar $f(x)$:

1	1	2	0	-2	-1
	1	3	3	1	0

Ou seja:

$$f(x) = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + 3x + 1)$$

Observe que o segundo fator de $f(x)$ é uma expressão conhecida, se trata do cubo de $(x + 1)$:

$$(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

Assim:

$$f(x) = (x - 1)(x + 1)^3$$

Agora vamos escrever $f(g(x))$:

$$f(g(x)) = [(x - 1)^2 - 1][(x - 1)^2 + 1]^3$$

Queremos os valores de x para $f(g(x)) = 0$, ou seja:

$$[(x - 1)^2 - 1][(x - 1)^2 + 1]^3 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 - 1 = 0 \text{ ou } [(x - 1)^2 + 1]^3 = 0$$

Do que segue que:

$$(x - 1)^2 - 1 = 0 \Rightarrow x - 1 = \pm 1 \Rightarrow x = 2 \text{ ou } x = 0$$

E ainda:

$$(x - 1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow x - 1 = \pm i \Rightarrow x = 1 \pm i$$

Perceba que o fator $(x - 1)^2 + 1$ se repete três vezes no polinômio $f(g(x))$, ou seja, suas raízes têm multiplicidade 3 no polinômio composto.

Gabarito: "c".

17. (ITA/2009)

O polinômio de grau 4

$$(a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c),$$

Com $a, b, c \in \mathbb{R}$, é uma função par. Então, a soma dos módulos de suas raízes é igual a

- a) $3 + \sqrt{3}$.
- b) $2 + 3\sqrt{3}$.
- c) $2 + \sqrt{2}$.
- d) $1 + 2\sqrt{2}$.
- e) $2 + 2\sqrt{2}$.

Comentários

Seja $p(x)$ o polinômio dado. Se ele é uma função par, então temos que:

$$p(x) = p(-x)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} (a + 2b + c)x^4 + (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 + (2a - b + c)x + 2(a + c) \\ = (a + 2b + c)x^4 - (a + b + c)x^3 - (a - b)x^2 - (2a - b + c)x + 2(a + c) \end{aligned}$$

Que implica:

$$2(a + b + c)x^3 + 2(2a - b + c)x = 0x^3 + 0x = 0$$

Como vale para todo x , a igualdade polinomial nos permite escrever que:

$$(a + b + c) = 0 \text{ e } (2a - b + c) = 0$$

Isolando a e c em função de b , temos:

$$a = 2b \text{ e } c = -3b$$

Assim, o polinômio fica:

$$p(x) = bx^4 - bx^2 - 2b = b(x^4 - x^2 - 2)$$

Queremos as soluções de $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Faça $x^2 = y$. Do que temos:

$$y^2 - y - 2 = 0$$

Resolvendo para y , obtemos $y = 2$ ou $y = -1$. Ou seja:

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

$$x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm i$$

Seu conjunto solução é, portanto:

$$S = \{\pm\sqrt{2}, \pm i\}$$

A soma do módulo de suas raízes é:

$$|\sqrt{2}| + |-\sqrt{2}| + |i| + |-i| = 2\sqrt{2} + 2 = 2(\sqrt{2} + 1)$$

Gabarito: "e".

18. (ITA/2006)

Sobre o polinômio $p(x) = x^5 - 5x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ podemos afirmar que

- a) $x = 2$ não é raiz de p .
- b) p só admite raízes reais, sendo uma delas inteira, duas racionais e duas irracionais.
- c) p admite uma única raiz real, sendo ela uma raiz inteira.
- d) p só admite raízes reais, sendo duas delas inteiras.
- e) p admite somente 3 raízes reais, sendo uma delas inteira e duas irracionais.

Comentários

Vamos verificar cada alternativa.

Alternativa A:

Vamos calcular $p(2)$:

$$p(2) = 2^5 - 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 - 2 = 32 - 40 + 16 - 6 - 2 = 48 - 48 = 0$$

$$\therefore p(2) = 0$$

Logo, a alternativa é falsa, pois 2 é raiz do polinômio.

Antes de continuar, vamos fatorar o polinômio usando Briot-Ruffini:

2	1	0	-5	4	-3	-2
	1	2	-1	2	1	0

Do que temos:

$$p(x) = (x - 2)(x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1)$$

Para investigar $p(x) = 0$, devemos estudar $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$.

Essa equação é do tipo:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a$$

Existe um truque conhecido para resolvê-la. Divida a equação por x^2 , ou seja, o termo "central":

$$ax^2 + bx + c + b\left(\frac{1}{x}\right) + a\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

Agrupando os termos:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0$$

Agora, faça a seguinte substituição de variável:

$$y = x + \frac{1}{x}$$

Perceba que:

$$y^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow y^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Substituindo na equação, vem:

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ ou } ay^2 + by + c - 2a = 0$$

No nosso caso, $a = 1$, $b = 2$ e $c = -1$.

Ou seja:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

Resolvendo para y , temos $y = 1$ ou $y = -3$.

Assim:

$$x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

Que resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

E também temos que:

$$x + \frac{1}{x} = -3 \Rightarrow x^2 + 3x + 1 = 0$$

Que resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma, observe que $p(x)$ admite três raízes reais, sendo uma delas o 2, inteira, e as outras duas, $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$, irracionais.

Gabarito: “e”.

19. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$, com raízes reais. O coeficiente a é racional e a diferença entre duas de suas raízes também é racional. Nestas condições, analise se a seguinte afirmação é verdadeira:

“Se uma das raízes de $p(x)$ é racional, então todas as suas raízes são racionais.”

Comentários

Sejam r_1, r_2 e r_3 suas raízes. Sem perda de generalidade, vamos supor que $r_1 \in \mathbb{Q}$. Das relações Girard, temos que:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -a$$

Ou ainda:

$$r_2 + r_3 = -(a + r_1) \text{ eq. 01}$$

Como a e r_1 são racionais, sua soma também é e, consequentemente, $r_2 + r_3 \in \mathbb{Q}$.

Além disso, sabemos que a diferença entre duas de suas raízes é racional. Observe, antes de tudo, que não supomos nada de especial sobre r_2 ou r_3 , ou seja, nesse ponto da resolução, eles são intercambiáveis. Isso nos fornece duas possibilidades:

Primeira possibilidade:

$$r_1 - r_2 = q \in \mathbb{Q}$$

Isso implica:

$$r_2 = r_1 - q$$

Note que isso resulta na racionalidade de r_2 , pois r_1 e q são ambos racionais.

Substituindo na equação 01:

$$r_1 - q + r_3 = -a - r_1 \Rightarrow r_3 = -a + q - 2r_1$$

Como a, q e $2r_1$ são racionais, segue que r_3 também é racional. Ou seja, temos r_2 e r_3 racionais.

Segunda possibilidade:

$$r_2 - r_3 = q \in \mathbb{Q}$$

Isso implica:

$$r_2 = r_3 + q \text{ eq. 02}$$

Substituindo na equação 01:

$$r_3 + q + r_3 = -a - r_1 \Rightarrow r_3 = \frac{-a - r_1 - q}{2}$$

Note que a, r_1 e q são racionais, do que segue que r_3 é racional. Dessa forma, olhando para a equação 02, temos que r_2 também é racional, uma vez que r_3 e q são racionais.

Gabarito: Verdadeira.

20. (ITA/2008)

Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Considere o polinômio $p(x)$ dado por

$$x^5 - 9x^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)x + (2\alpha + \beta + \gamma - 1).$$

Encontre todos os valores de α, β e γ de modo que $x = 0$ seja uma raiz com multiplicidade 3 de $p(x)$.

Comentários

Se 0 é raiz de $p(x)$, podemos escrever:

$$0^5 - 9 \cdot 0^4 + (\alpha - \beta - 2\gamma) \cdot 0^3 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2) \cdot 0^2 + (\alpha - \beta - \gamma + 1) \cdot 0 + (2\alpha + \beta + \gamma - 1) = 0$$

Ou seja:

$$2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0$$

Disso, temos que:

$$p(x) = x[x^4 - 9x^3 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x^2 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)x^1 + (\alpha - \beta - \gamma + 1)]$$

Como zero possui multiplicidade 3, temos:

$$0^4 - 9 \cdot 0^3 + (\alpha - \beta - 2\gamma) \cdot 0^2 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2) \cdot 0 + (\alpha - \beta - \gamma + 1) = 0$$

Ou seja:

$$(\alpha - \beta - \gamma + 1) = 0$$

Dessa forma, podemos escrever:

$$p(x) = x^2[x^3 - 9x^2 + (\alpha - \beta - 2\gamma)x + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2)]$$

Usando a multiplicidade do 0 pela última vez, vem:

$$0^3 - 9 \cdot 0^2 + (\alpha - \beta - 2\gamma) \cdot 0 + (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2) = 0$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} (\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2) &= 0 \\ \Rightarrow p(x) &= x^3[x^2 - 9x + \alpha - \beta - 2\gamma] \end{aligned}$$

Além disso, $\alpha - \beta - 2\gamma \neq 0$, pois 0 não pode ter multiplicidade 4.

Para encontrar os valores de α, β e γ pedidos, devemos resolver o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ \alpha + 2\beta + 2\gamma - 2 = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \end{cases}$$

Perceba que a terceira equação é a combinação linear da primeira com a segunda, logo, podemos simplificar o sistema:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma - 1 = 0 \\ \alpha - \beta - \gamma + 1 = 0 \\ \alpha - \beta - 2\gamma \neq 0 \end{cases}$$

Somando a primeira e a segunda equação, temos:

$$2\alpha + \beta + \gamma - 1 + (\alpha - \beta - \gamma + 1) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Substituindo α no sistema:

$$\begin{cases} \beta + \gamma = 1 \\ \beta \neq -2\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 - \gamma \\ \gamma \neq -1 \end{cases}$$

Portanto, para $\gamma = k \neq -1$, temos:

$$\alpha = 0; \beta = 1 - k; \gamma = k, \text{ com } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq -1$$

Gabarito: $\alpha = 0; \beta = 1 - k; \gamma = k$, com $k \in \mathbb{R}$ e $k \neq -1$

21. (ITA/2006)

Seja p um polinômio com coeficientes reais, de grau 7, que admite $1 - i$ como raiz de multiplicidade 2. Sabe-se que a soma e o produto de todas as raízes de p são, respectivamente, 10 e -40 . Sendo afirmado que três raízes de p são reais e distintas e formam uma progressão aritmética, então, tais raízes são

- a) $\frac{3}{2}\sqrt{\frac{193}{6}}, 3, \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{193}{6}}$.
- b) $2 - 4\sqrt{13}, 2, 2 + 4\sqrt{13}$.
- c) $-4, 2, 8$.
- d) $-2, 3, 8$.
- e) $-1, 2, 5$.

Comentários

Primeiramente, perceba que $p(x)$ possui coeficientes reais. Isso implica que, se $1 - i$ é uma de suas raízes, então seu conjugado, $1 + i$, também é.

Além disso, $1 - i$ possui multiplicidade 2, do que segue que $1 + i$ também possui multiplicidade 2.

Dessa forma, já temos 4 raízes do polinômio.

Sejam r_1, r_2 e r_3 as outras raízes de $p(x)$, já que seu grau é 7. O enunciado nos diz que elas estão em P.A. e são reais, do que podemos representá-las pela terna ordenada:

$$(r_2 - r, r_2, r_2 + r)$$

Temos mais duas informações úteis para usar:

Informação 1: A soma de todas as raízes de p é 10.

Ou seja:

$$(1 - i) + (1 - i) + (1 + i) + (1 + i) + r_2 - r + r_2 + r_2 + r = 10$$

Que implica:

$$4 + 3r_2 = 10 \Rightarrow r_2 = 2$$

Informação 2: O produto de todas as raízes de p é -40 .

Ou seja:

$$(1 - i)^2(1 + i)^2(2 - r)2(2 + r) = -40$$

Antes de continuar, veja que:

$$(1 - i)^2(1 + i)^2 = [(1 - i)(1 + i)]^2 = [1 + i - i + 1]^2 = 4$$

Assim:

$$4(2 - r)2(2 + r) = -40 \Rightarrow (4 - r^2) = -5 \Rightarrow r = \pm 3$$

Tomando $r = 3$, temos:

$$(-1, 2, 5)$$

Tomando $r = -3$, temos:

$$(5, 2, -1)$$

Gabarito: "e".

22. (ITA/2005)

O número complexo $2 + i$ é raiz do polinômio $f(x) = x^4 + x^3 + px^2 + x + q$, com $p, q \in \mathbb{R}$. Então, a alternativa que mais se aproxima da soma das raízes reais de f é

- a) 4.
- b) -4 .
- c) 6.
- d) 5.
- e) -5 .

Comentários

Se p e q são reais, então $f(x)$ é um polinômio com coeficientes reais.

Disso, temos que se $2 + i$ é uma raiz de $f(x)$, então $2 - i$ também é raiz.

Observe que $f(x)$ possui grau 4, isto é, restam duas raízes r_1 e r_2 a determinar. Se uma delas for complexa, a outra também deve ser, pois seu conjugado também deverá ser raiz. Dessa forma, se $f(x)$ admite uma raiz real, nesse caso ele deverá admitir duas.

Das relações de Girard:

$$2 + i + 2 - i + r_1 + r_2 = -1 \Rightarrow r_1 + r_2 = -5$$

Gabarito: "e".

23. (ITA/2004)

Para algum número real r , o polinômio $8x^3 - 4x^2 - 42x + 45$ é divisível por $(x - r)^2$. Qual dos números abaixo está mais próximo de r ?

- a) 1,62.
- b) 1,52.
- c) 1,42.
- d) 1,32.
- e) 1,22.

Comentários

Primeiramente, observe que $p(x)$ pode ser escrito como:

$$p(x) = (2x)^3 - (2x)^2 - 21(2x) + 45$$

Isso sugere a seguinte substituição de variável:

$$y = 2x$$

Ou seja:

$$p(y) = y^3 - y^2 - 21y + 45$$

Uma ferramenta muito importante em questões onde não sabemos por onde começar a resolução do polinômio é testar se ele possui raízes racionais.

Lembre-se que se $p(y)$ possui raízes $y = \frac{p}{q}$, racionais, devemos ter:

$$p|45 \text{ e } q|1$$

Fatorando 45, vem:

$$45 = 1 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Ou seja:

$$p \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 5, \pm 15, \pm 45\}$$
$$q \in \{\pm 1\}$$

Do que temos que:

$$\frac{p}{q} \in \{\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 5, \pm 15, \pm 45\}$$

Vamos testar da menor positiva para a maior positiva:

$$\frac{p}{q} = 1 \Rightarrow p(1) = 1 - 1 - 21 + 45 = 24 \neq 0$$

$$\frac{p}{q} = 3 \Rightarrow p(3) = 3^3 - 3^2 - 21 \cdot 3 + 45 = 0$$

Temos então que $y = 3$ é raiz de $p(y)$. Vamos usar Briot-Ruffini para reduzir o grau do polinômio:

3	1	-1	-21	45
	1	2	-15	0

Dessa forma, podemos escrever:

$$p(y) = (y - 3)(y^2 + 2y - 15)$$

Resolvendo a equação do segundo grau, temos que $y = 3$ ou $y = -5$. Voltando ao polinômio inicial, temos:

$$p(x) = 8x^3 - 4x^2 - 42x + 45 = (2x - 3)^2(2x + 5) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2(2x + 5)$$

Ou seja, $r = \frac{3}{2}$.

Gabarito: "b".

24. (ITA/2001)

O valor da soma $a + b$ para que as raízes do polinômio $4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$ estejam em progressão aritmética de razão $1/2$ é:

- a) 36.
- b) 41.
- c) 26.
- d) -27.
- e) -20.

Comentários

Esse polinômio possui grau 4, logo, possui 4 raízes. Como elas estão em progressão aritmética de razão $\frac{1}{2}$, podemos escrever suas raízes como sendo a 4-tupla ordenada:

$$\left(r, r + \frac{1}{2}, r + 1, r + \frac{3}{2}\right)$$

Das relações de Girard, temos que:

$$r + r + \frac{1}{2} + r + 1 + r + \frac{3}{2} = -\frac{-20}{4} = 5 \Rightarrow 4r + 3 = 5 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$$

Ou seja, suas raízes são:

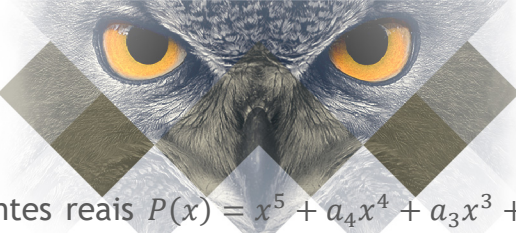
$$\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right)$$

Seja $p(x) = 4x^4 - 20x^3 + ax^2 - 25x + b$. Temos que:

$$p(1) = 0 \Rightarrow 4 - 20 + a - 25 + b = 0 \Rightarrow a + b = 41$$

Gabarito: "b".

25. (ITA/2001)



O polinômio com coeficientes reais $P(x) = x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2, e duas de suas raízes são 2 e i . Então a soma dos coeficientes é igual a:

- a) -4 .
- b) -6 .
- c) -1 .
- d) 1 .
- e) 4 .

Comentários

Se $P(x)$ possui coeficientes reais, temos que $-i$ também é raiz de $P(x)$.

Como o polinômio possui grau 5, temos ainda que restam 3 raízes a determinar.

Sejam então $r_1, r_2, r_3, i, -i$ as raízes de $P(x)$. Seja, sem perda de generalidade, $r_1 = 2$.

Suponha que 2 seja uma raiz com multiplicidade 2. Disso, teríamos que, por exemplo, $r_1 = r_2 = 2$, e restaria r_3 a determinar. Lembre-se que ainda temos que obedecer a condição que “tem duas raízes distintas, cada uma delas com multiplicidade 2”. Mas observe que, se $r_3 \neq 2$, então deveríamos ter mais duas raízes, já que r_3 teria multiplicidade 2, o que é absurdo, dado que o grau de $P(x)$ é 5.

Suponha então que i possua multiplicidade 2. Faça, para isso, $r_2 = i$. Como as raízes complexas vem aos pares, teríamos que ter $r_3 = -i$. Observe que, nesse caso, temos duas raízes distintas, i e $-i$ com multiplicidade 2, o que atende à condição do enunciado.

Como o coeficiente de x^5 do polinômio é 1, podemos escrevê-lo como:

$$P(x) = (x - 2)(x - i)^2(x + i)^2 = (x - 2)(x^2 + 1)^2$$

A soma dos coeficientes de um polinômio pode ser obtida calculando-se seu valor para $x = 1$, logo:

$$P(1) = (1 - 2)(1 + 1)^2 = -4$$

Gabarito: “a”.

Questões IME Comentadas

26. (IME/2020)

Sejam a e b raízes da equação $x^2 - 4x + M = 0$, c e d raízes da equação $x^2 - 36x + N = 0$. Sabendo-se que a, b, c, d formam uma progressão geométrica crescente, determine o valor de $M + N$.

Comentários

Do enunciado, temos:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + M = 0 \\ a + b = 4 \\ a \cdot b = M \end{cases}$$

E:

$$\begin{cases} x^2 - 36x + N = 0 \\ c + d = 36 \\ c \cdot d = N \end{cases}$$

Queremos saber $M + N$. Segundo o enunciado (a, b, c, d) forma uma P.G. Então, podemos escrever os números da seguinte forma:

$$(a, a \cdot q, a \cdot q^2, a \cdot q^3)$$

Então:

$$\begin{cases} a + a \cdot q = 4 \\ a \cdot a \cdot q = M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(1 + q) = 4 \text{ (eq. 1)} \\ a^2 \cdot q = M \text{ (eq. 2)} \end{cases}$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} a \cdot q^2 + a \cdot q^3 = 36 \\ a \cdot q^2 \cdot a \cdot q^3 = N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot q^2 \cdot (1 + q) = 36 \text{ (eq. 3)} \\ a^2 \cdot q^5 = N \text{ (eq. 4)} \end{cases}$$

Dividindo (3) por (1), temos:

$$\frac{a \cdot q^2 \cdot (1 + q)}{a(1 + q)} = \frac{36}{4} \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow \boxed{q = 3} \quad (q > 1)$$

Portanto, $a = 1$.

Diante disso:

$$\begin{aligned} M &= a^2 \cdot q = 1^2 \cdot 3 = 3 \\ N &= a^2 \cdot q^5 = 1^2 \cdot 3^5 = 243 \end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} M + N &= 3 + 243 \\ \boxed{M + N} &= \boxed{246} \end{aligned}$$

Gabarito: $M + N = 246$

27. (IME/2019)

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

- a) 2
- b) $13/6$
- c) $1/3$
- d) $5/2$
- e) $8/3$

Comentários

Inicialmente, devemos fatorar a expressão do polinômio:

$$p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x = x(6x^3 - 5x^2 - 29x + 10)$$

Para simplificar a expressão do terceiro grau podemos aplicar o teorema das raízes racionais. Os números divisores do coeficiente $a_0 = 10$ são $\{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$, vamos verificar se há alguma raiz inteira:

Para $x = 1$:

$$6(1)^3 - 5(1)^2 - 29(1) + 10 = 6 - 5 - 29 + 10 = -18$$

Para $x = -1$:

$$6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 29(-1) + 10 = -6 - 5 + 29 + 10 = 28$$

Para $x = 2$:

$$6(2)^3 - 5(2)^2 - 29(2) + 10 = 48 - 20 - 58 + 10 = -20$$

Para $x = -2$:

$$6(-2)^3 - 5(-2)^2 - 29(-2) + 10 = -48 - 20 + 58 + 10 = 0$$

Portanto, $x = -2$ é raiz. Podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini:

-2	6	-5	-29	10
	6	-17	5	0

Assim, encontramos:

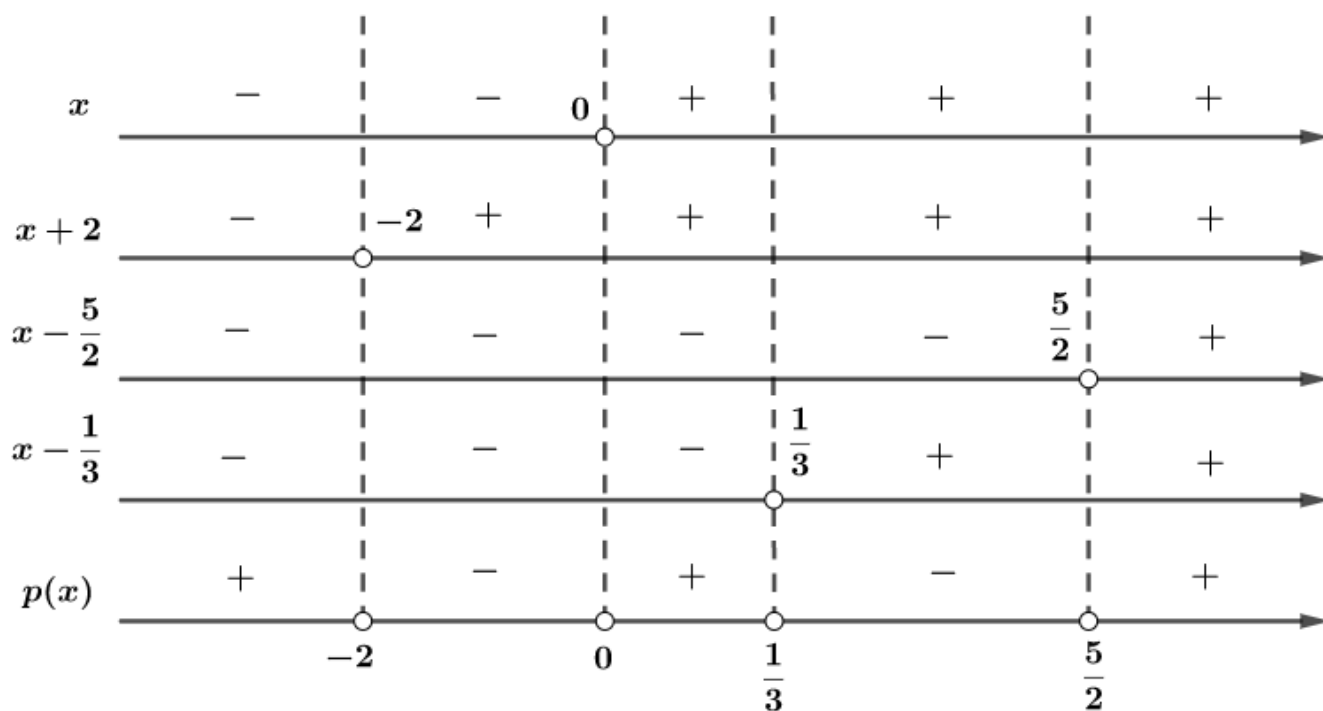
$$p(x) = x(x+2)(6x^2 - 17x + 5)$$

Para simplificar a expressão do segundo grau, basta encontrar suas raízes:

$$6x^2 - 17x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12} = \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{1}{3}$$

$$p(x) = x(x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

Vamos fazer o estudo do sinal:



Desse modo, para $p(x) < 0$, devemos ter:

$$x \in (-2, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$$

Como (a, b) está contido no conjunto solução e queremos que $b - a$ seja máximo, então:

Se $(a, b) = (-2, 0)$:

$$b - a = 0 - (-2) = 2$$

Se $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$:

$$b - a = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6} > 2$$

Portanto:

$$b - a = \frac{13}{6}$$

Gabarito: "b".

28. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

- c) 48
d) $48 + 2a$
e) $32 + a$

Comentários

A questão pede para calcular o valor da expressão $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, sendo x_1, x_2, x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Notando a presença do termo cúbico na equação, podemos substituir as raízes nessa equação e encontrar:

$$\begin{aligned}x_1^3 - ax_1 - 16 &= 0 \\x_2^3 - ax_2 - 16 &= 0 \\x_3^3 - ax_3 - 16 &= 0\end{aligned}$$

Somando as equações:

$$\begin{aligned}(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 48 &= 0 \\x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= a(x_1 + x_2 + x_3) + 48\end{aligned}$$

Pelas relações de Girard, obtemos:

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 &= a \underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_0 + 48\end{aligned}$$

Portanto:

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48$$

Gabarito: "c".

29. (IME/2017)

O polinômio $P(x) = x^3 - bx^2 + 80x - c$ possui três raízes inteiras positivas distintas. Sabe-se que duas das raízes do polinômio são divisoras de 80 e que o produto dos divisores positivos de c menores do que c é c^2 . Qual é o valor de b ?

- a) 11
b) 13
c) 17
d) 23
e) 29

Comentários

O primeiro fato que você deve recordar sobre divisores de um número inteiro é que se p_1 é um primo divisor de c , $\frac{c}{p_1}$ também é divisor de c , pois $p_1 \cdot \frac{c}{p_1} = c$.

Suponha que c possua apenas 1 divisor primo positivo. Disso, deveríamos ter que $c = p_1$. Os seus divisores seriam:

$$1, p_1$$

Mas isso não condiz com o fato de o produto dos divisores de c menores que ele ser c^2 . Suponha que $c = p_1^2$. Então os divisores de c são:

$$1, p_1, p_1^2$$

Novamente, veja que é impossível obedecer a condição dada.

Suponha então que c possua dois divisores primos distintos, p_1 e p_2 . Teríamos então que:

$$\frac{c}{p_1} \text{ e } \frac{c}{p_2}$$

Também seriam seus divisores e, assim, teríamos:

$$1, p_1, p_2, \frac{c}{p_1}, \frac{c}{p_2} \text{ e } c$$

Como divisores positivos de c .

Veja que:

$$1 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \frac{c}{p_1} \cdot \frac{c}{p_2} = c^2$$

O que satisfaz o enunciado.

Como o produto das raízes de $P(x)$ é dado por $c = x_1 x_2 x_3$, temos que elas são divisoras de c .

Se nós dividirmos as raízes em dois conjuntos:

$$\left\{p_1, \frac{c}{p_1}\right\} \text{ e } \left\{p_2, \frac{c}{p_2}\right\}$$

Se nenhuma raiz for igual a 1, temos que duas das raízes pertencem ao mesmo conjunto e a outra ao outro conjunto. Mas isso não verificaria o produto igual a c .

Logo, uma das raízes deve ser 1 e a outra deve pertencer a um mesmo conjunto, conforme dividimos acima.

Sem perda de generalidade faça $x_1 = 1$. Disso, temos que, por Girard:

$$1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = 80 \Rightarrow (x_1 + 1)(x_2 + 1) = 81 = 3 \cdot 27$$

As raízes são positivas e distintas. Disso, devemos ter:

$$\begin{aligned} x_1 + 1 &= 3 \Rightarrow x_1 = 2 \\ x_2 + 1 &= 27 \Rightarrow x_2 = 26 \end{aligned}$$

Por fim, utilizando Girard para a soma das raízes:

$$b = 1 + 2 + 26 = 29$$

Gabarito: "e".

30. (IME/2016)

O polinômio $x^3 + ax^2 + bx + c$ tem raízes reais $\alpha, -\alpha$ e $\frac{1}{\alpha}$. Portanto o valor da soma $b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2}$ é:

- a) -2
- b) -1
- c) 0
- d) 1
- e) 2

Comentários

Das relações de Girard, podemos escrever:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{1} &= \alpha(-\alpha) \left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha \Rightarrow c = \alpha \\ \frac{b}{1} &= \alpha(-\alpha) + \alpha \left(\frac{1}{\alpha}\right) + (-\alpha) \left(\frac{1}{\alpha}\right) = -\alpha^2 + 1 - 1 = -\alpha^2 \Rightarrow b = -\alpha^2 \\ -\frac{a}{1} &= \alpha - \alpha + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow a = -\frac{1}{\alpha} \end{aligned}$$

Por fim, temos que:

$$b + c^2 + ac + \frac{b}{c^2} = -\alpha^2 + \alpha^2 + \left(-\frac{1}{\alpha}\right)\alpha + \frac{-\alpha^2}{\alpha^2} = -1 - 1 = -2$$

Gabarito: "a".

31. (IME/2016)



Seja $P(x) = x^2 + ax + b$. Sabe-se que $P(x)$ e $P(P(P(x)))$ têm uma raiz em comum. Pode-se afirmar que para todo valor de a e b

- a) $P(-1)P(1) < 0$
- b) $P(-1)P(1) = 0$
- c) $P(-1) + P(1) = 2$
- d) $P(0)P(1) = 0$
- e) $P(0) + P(1) = 0$

Comentários

Suponha que α seja uma raiz de $P(x)$ em comum com $P(P(P(x)))$, isto é:

$$P(\alpha) = 0 \text{ e } P(P(P(\alpha))) = 0$$

Combinando essas duas informações, temos que:

$$P(P(P(\alpha))) = P(P(0)) = 0$$

Mas $P(x)$ é do tipo $x^2 + ax + b$, ou seja:

$$P(P(0)) = P^2(0) + aP(0) + b = 0$$

Mas quem é $P(0)$?

$$P(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b$$

Ou seja:

$$P^2(0) + aP(0) + b = b^2 + ab + b = 0 \Rightarrow b(1 + a + b) = 0$$

Olhe para o fator $(1 + a + b)$, o que ele nos lembra? Simples, a soma dos coeficientes de $P(x)$, ou ainda:

$$P(1) = 1^2 + 1 \cdot a + b = 1 + a + b$$

Do que segue que:

$$b(1 + a + b) = P(0)P(1) = 0$$

Gabarito: "d".

32. (IME/2014)

O polinômio $P(x) = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243$ possui raízes complexas simétricas e uma raiz com valor igual ao módulo das raízes complexas. Determine todas as raízes do polinômio.

Comentários

Primeiramente, perceba o seguinte:

$$\begin{aligned} P(x) &= x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 243 = x^5 - 3x^4 + 10x^3 - 30x^2 + 81x - 3^5 \\ &= x^5 - 3^5 - 3x(x^3 - 3^3) + 10x^2(x - 3) \end{aligned}$$

Ou seja:

$$P(3) = 3^5 - 3^5 - 3 \cdot 3 \cdot (3^3 - 3^3) + 10 \cdot 3^2 \cdot (3 - 3) = 0$$

Já temos, então, uma de suas raízes: $x = 3$.

Outra forma de perceber que 3 é sua raiz, é usar as informações que ele forneceu. Seja r a sua raiz real, então, as suas raízes complexas são da forma:

$$rcis(\theta), -rcis(\theta), rcis(-\theta) \text{ e } -rcis(-\theta)$$

Onde $cis(\theta) = \cos(\theta) + isen(\theta)$.

Das relações de Girard, temos que:

$$rcis(\theta) \cdot (-rcis(\theta)) \cdot rcis(-\theta) \cdot (-rcis(-\theta)) \cdot r = r^5 cis(\theta + \theta - \theta - \theta) = r^5 cis 0 = r^5 = 243$$

Como $r \in \mathbb{R}$, temos que $r^5 = 243 = 3^5 \Rightarrow r = 3$.

Vamos usar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir $P(x)$ por $(x - 3)$:

3	1	-3	10	-30	81	-243
---	---	----	----	-----	----	------

1 0 10 0 81 0

Dessa forma, temos:

$$P(x) = (x - 3)(x^4 + 10x^2 + 81)$$

Queremos encontrar as raízes de $P(x) = 0$, ou seja, falta encontrar as raízes de $x^4 + 10x^2 + 81 = 0$.

Para isso, faça $y = x^2$.

$$y^2 + 10y + 81 = 0$$

Que resolvendo para y , resulta em $y = -5 \pm 2i\sqrt{14}$.

Disso, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $x^2 = -5 + 2\sqrt{14}i$

$$x^2 = -5 + 2\sqrt{14}i \Rightarrow x = \pm \sqrt{-5 + 2\sqrt{14}i}$$

2ª possibilidade: $x^2 = -5 - 2\sqrt{14}i$

$$x^2 = -5 - 2\sqrt{14}i \Rightarrow x = \pm \sqrt{-5 - 2\sqrt{14}i}$$

Portanto, suas raízes são:

$$3, \pm \sqrt{-5 + 2\sqrt{14}i}, \pm \sqrt{-5 - 2\sqrt{14}i}$$

Gabarito: $3, \pm \sqrt{-5 + 2\sqrt{14}i}, \pm \sqrt{-5 - 2\sqrt{14}i}$.

33. (IME/2013)

Os polinômios $P(x) = x^3 + ax^2 + 18$ e $Q(x) = x^3 + bx + 12$ possuem duas raízes comuns. Sabendo que a e b são números reais, pode-se afirmar que satisfazem a equação

- a) $a = b$
- b) $2a = b$
- c) $a = 2b$
- d) $2a = 3b$
- e) $3a = 2b$

Comentários

Sejam r_1 e r_2 as raízes comuns aos dois e seja r_3 uma raiz somente de $P(x)$ e seja r_4 uma raiz somente de $Q(x)$.

Das relações de Girard, podemos escrever:

$$r_1 r_2 r_3 = -18 \text{ e } r_1 r_2 r_4 = -12$$

Dividindo as equações acima membro a membro, obtemos:

$$\frac{r_3}{r_4} = -\frac{18}{-12} = \frac{3}{2} \Rightarrow r_3 = \frac{3}{2}r_4$$

Aplicando Girard em $Q(x)$ temos que:

$$r_1 + r_2 + r_4 = 0 \Rightarrow r_1 + r_2 = -r_4$$

Aplicando Girard em $P(x)$, temos que:

$$r_1 r_2 + (r_1 + r_2)r_3 = 0 \Rightarrow -\frac{12}{r_4} + (-r_4)\frac{3}{2}r_4 = 0 \Rightarrow r_4^3 = -8$$

Antes de continuar, note que os polinômios possuem coeficientes reais e grau 3, ou seja, eles têm pelo menos uma raiz real.

Suponha então que eles compartilhem uma raiz real. Do enunciado, temos que eles devem compartilhar outra raiz.

Se essa outra raiz for real, então todas as raízes do polinômio são reais.

Se ela for complexa, então ambos deverão ter o conjugado dessa raiz como raiz, ou seja, os polinômios deveriam ter as três raízes iguais, o que é absurdo, visto que possuem coeficientes distintos.

Suponha agora que eles compartilhem uma raiz complexa. Logo, a outra raiz compartilhada deve ser seu conjugado. Disso resulta que a raiz restante (r_3 ou r_4) deve ser real.

Essa discussão nos permite afirmar que, em todo caso, r_3 e r_4 devem ser reais. Assim, podemos resolver a equação abaixo como sendo:

$$r_4^3 = -8 \Rightarrow r_4 = -2$$

Além disso:

$$r_3 = \frac{3}{2} \cdot (-2) = -3$$

Das relações de Girard, temos que:

$$-a = r_1 + r_2 + r_3$$

Mas tínhamos que:

$$r_1 + r_2 = -r_4 = -(-2) = 2$$

Do que resulta:

$$-a = 2 - 3 = -1 \Rightarrow a = 1$$

Por outro lado, também das relações de Girard, temos que:

$$r_1 r_2 + (r_1 + r_2) r_4 = b$$

Mas tínhamos que:

$$r_1 r_2 = -\frac{12}{r_4} = -\frac{12}{-2} = 6$$

Ou seja:

$$6 + 2 \cdot (-2) = b \Rightarrow b = 2$$

Por fim: $b = 2a$.

Gabarito: "b".

34. (IME/2010)

Seja o polinômio $p(x) = x^3 + (\ln a)x + e^b$, onde a e b são números reais positivos diferentes de zero. A soma dos cubos das raízes de $p(x)$ depende

- Apenas de a e é positiva.
- De a e b e é negativa.
- Apenas de b e é positiva.
- Apenas de b e é negativa.
- De a e b e é positiva.

Obs.: e representa a base do logaritmo neperiano e \ln a função logaritmo neperiano.

Comentários

Sejam α, β e θ as raízes de $p(x)$. Temos que:

$$p(\alpha) = \alpha^3 + (\ln a)\alpha + e^b = 0$$

$$p(\beta) = \beta^3 + (\ln a)\beta + e^b = 0$$

$$p(\theta) = \theta^3 + (\ln a)\theta + e^b = 0$$

Somando as três equações, obtemos:

$$\alpha^3 + (\ln a)\alpha + e^b + \beta^3 + (\ln a)\beta + e^b + \theta^3 + (\ln a)\theta + e^b = 0$$

Ou seja:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \theta^3 + (\ln a)(\alpha + \beta + \theta) + 3e^b = 0$$

Das relações de Girard, temos que:

$$\alpha + \beta + \theta = \frac{0}{1} = 0$$

Ou seja:

$$\alpha^3 + \beta^3 + \theta^3 + (\ln a) \cdot (0) + 3e^b = 0 \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 + \theta^3 = -3e^b$$

Note que $e^b > 0 \Rightarrow -e^b < 0$.

Gabarito: "d".

35. (IME/2008)

Encontre o polinômio $P(x)$ tal que $Q(x) + 1 = (x - 1)^3 P(x)$ e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4 , onde $Q(x)$ é um polinômio do 6º grau.

Comentários

Vamos interpretar as informações fornecidas no enunciado. Se $Q(x)$ é de grau 6 e $Q(x) + 2$ é divisível por x^4 , devemos ter:

$$Q(x) + 2 = x^4(ax^2 + bx + c) = ax^6 + bx^5 + cx^4$$

Além disso, $Q(x) + 1$ é divisível por $(x - 1)^3$, com quociente $P(x)$, que é o que queremos.

Já temos que:

$$Q(x) + 1 = ax^6 + bx^5 + cx^4 - 1$$

Nesse momento, é conveniente recordar o seguinte fato:

Se α é raiz com multiplicidade r de um dado polinômio, então α é raiz das derivadas $1, 2, \dots, r - 1$ desse polinômio.

Lembre-se de que a derivada de um monômio é dada por:

$$\frac{d(a_n x^n)}{dx} = na_n x^{n-1}$$

Ou seja, multiplica o coeficiente pelo expoente e subtrai 1 do expoente.

Como 1 é raiz com multiplicidade 3 de $Q(x) + 1$, temos que:

$$\begin{cases} Q(1) + 1 = 0 \\ Q'(1) = 0 \\ Q''(1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b + c - 1 = 0 \\ 6a + 5b + 4c = 0 \\ 30a + 20b + 12c = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima:

$$a = 10, b = -24 \text{ e } c = 15$$

Disso, temos que:

$$Q(x) + 1 = 10x^6 - 24x^5 + 15x^4 - 1$$

Esse polinômio é divisível por $(x - 1)^3$ e quociente $P(x)$. Vamos então dividir $Q(x) + 1$ três vezes por $x - 1$.

1	10	-24	15	0	0	0	-1
1	10	-14	1	1	1	1	0
1	10	-4	-3	-2	-1	0	
	10	6	3	1	0		

Por fim, temos que:

$$Q(x) + 1 = (x - 1)^3(10x^3 + 6x^2 + 3x + 1)$$

Do que concluímos que: $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

Gabarito: $P(x) = 10x^3 + 6x^2 + 3x + 1$.

36. (IME/2007)

Seja $p(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ um polinômio do terceiro grau cujas raízes são termos de uma progressão aritmética de razão 2. Sabendo que $p(-1) = -1$, $p(0) = 0$ e $p(1) = 1$, os valores de α e γ são, respectivamente:



- a) 2 e -1
- b) 3 e -2
- c) -1 e 2
- d) $-\frac{1}{3}$ e $\frac{4}{3}$
- e) $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$

Comentários

Seja a uma raiz do polinômio, tal que suas raízes são dadas:

$$(a - 2, a, a + 2)$$

Pois suas três raízes são termos de uma P.A. de razão 2.

Além disso, temos que:

$$p(0) = 0 \Rightarrow \delta = 0$$

$$p(1) = 1 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ eq. 01}$$

$$p(-1) = -1 \Rightarrow -\alpha + \beta - \gamma = -1 \text{ eq. 02}$$

Somando a eq. 01 e a eq. 02:

$$\beta = 0 \Rightarrow a - 2 + a + a + 2 = -\frac{\beta}{\alpha} = 0 \Rightarrow a = 0$$

Ou seja, as raízes de $p(x)$ são:

$$(-2, 0, 2)$$

Do que temos que, das relações de Girard para o produto 2 a 2 das raízes:

$$(-2)(2) = \frac{\gamma}{\alpha} \Rightarrow \gamma = -4\alpha$$

Substituindo na eq. 01, vem:

$$\alpha + 0 - 4\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Do que segue que:

$$\gamma = -4\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Gabarito: "d".

37. (IME/2007)

Seja $p(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ um polinômio com coeficientes inteiros. Sabe-se que as cinco raízes de $p(x)$ são números inteiros positivos, sendo quatro deles pares e um ímpar. O número de coeficientes pares de $p(x)$ é:

- a) 0
- b) 1
- c) 2
- d) 3
- e) 4

Comentários

Sejam as raízes de $p(x)$:

$$2n_1, 2n_2, 2n_3, 2n_4, 2n_5 + 1$$

Já que 4 são pares e uma ímpar.

Por Girard, temos:

$$2n_1 + 2n_2 + 2n_3 + 2n_4 + 2n_5 + 1 = -b \Rightarrow b = -2(n_1 + \dots + n_5) - 1$$

Logo, b é ímpar.

Agora, a fim de que não se faça contas desnecessárias, veja que os coeficientes, de c a f , são formados por somas de produtos das raízes de $p(x)$. Como somente temos uma raiz ímpar, qualquer composição, seja ela 4 a 4, 3 a 3 ou 2 a 2 das raízes terá sempre uma raiz par como fator.

Vamos formar um termo, por exemplo:

$$r_1 r_2$$

Se escolhermos $r_1 = 2n_5 + 1$, obrigatoriamente r_2 será par e o termo $r_1 r_2$ será par. Disso, segue que c , formado pela soma dos produtos 2 a 2 é par.

Como isso ocorre de c a f e b é ímpar, $p(x)$ possui 4 coeficientes pares.

Gabarito: "e".

38. (IME/2006)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 3x^3 + 27x^2 - 44x + 30.$$

Sabendo que o produto de duas de suas raízes complexas é igual a $3 - i$ e que as partes reais e imaginárias de todas as suas raízes complexas são inteiras e não-nulas, calcule todas as raízes do polinômio.

Comentários

Esse polinômio é de grau 5, ou seja, seu grau é ímpar. Como seus coeficientes são reais, ele possui, no máximo, 4 raízes complexas. Sejam z_1 e z_2 duas de suas raízes complexas tais que:

$$z_1 z_2 = 3 - i$$

Veja que, como os coeficientes de $p(x)$ são reais, \bar{z}_1 e \bar{z}_2 são raízes de $p(x)$. Além disso, veja que $z_2 \neq \bar{z}_1$, pois $z_1 \bar{z}_1 = |z_1|^2 \in \mathbb{R}$.

Do estudo dos números complexos, sabemos que:

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2 = 3 + i$$

Além disso, seja r a raiz real de $p(x)$. Das relações de Girard, temos que:

$$z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 r = -30 \Rightarrow (3 - i)(3 + i)r = -30 \Rightarrow 10r = -30 \Rightarrow r = -3$$

Ou seja, $r = -3$ é a raiz real de $p(x)$.

Por outro lado, seja $z_1 = a_1 + b_1 i$ e $z_2 = a_2 + b_2 i$.

Por Girard, para a soma das raízes, sabemos que:

$$a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i + a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i - 3 = 3 \Rightarrow a_1 + a_2 = 3$$

Usando novamente a relação fornecida no enunciado:

$$z_1 z_2 \bar{z}_1 \bar{z}_2 = (3 - i)(3 + i) \Rightarrow |z_1|^2 |z_2|^2 = 10$$

Ou ainda:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 1 \cdot 2 \cdot 5$$

Como a_1, a_2, b_1 e $b_2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$, temos que $a_1^2 + b_1^2, a_2^2 + b_2^2 \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Disso, podemos escrever que:

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 &= 2^a 5^b \\ a_2^2 + b_2^2 &= 2^c 2^d \end{aligned}$$

Ou seja:

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = 2^{a+c} 5^{b+d} = 2^1 5^1$$

Do que temos:

$$\begin{aligned} a + c &= 1 \\ b + d &= 1 \end{aligned}$$

Tome $a = b = 0$, por exemplo. Disso:

$$a_1^2 + b_1^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0 \text{ ou } b_1 = 0$$

Seria absurdo, pois $a_1, b_1 \neq 0$.

Sem perda de generalidade, tome $a = 0$, o que implica $b = 1$ e $c = 1$, que implica $d = 0$. Ou seja:

$$a_1^2 + b_1^2 = 5 \Rightarrow \{a_1, b_1\} = \{1, 2\}$$

$$a_2^2 + b_2^2 = 2 \Rightarrow \{a_2, b_2\} = \{1, 1\}$$

Como temos que $a_1 + a_2 = 3$, devemos ter obrigatoriamente, $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$. Disso, temos que $b_1 = b_2 = 1$.

Por fim, as raízes são:

$$z_1 = 2 + i \text{ e } z_2 = 1 + i$$

Todas as raízes são:

$$2 + i, 2 - i, 1 + i, 1 - i, -3$$

Gabarito: $2 + i, 2 - i, 1 + i, 1 - i, -3$.

39. (IME/2005)

Sejam a, b e c as raízes do polinômio $p(x) = x^3 + rx - t$, onde r e t são números reais não nulos.

a. Determine o valor da expressão $a^3 + b^3 + c^3$ em função de r e t .

b. Demonstre que $S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$ para todo número natural $n \geq 2$, onde $S^k = a^k + b^k + c^k$ para qualquer número natural k .

Comentários

Item a:

Como a, b e c são raízes de $p(x)$, temos que:

$$p(a) = a^3 + ra - t = 0 \text{ eq. 01}$$

$$p(b) = b^3 + rb - t = 0 \text{ eq. 02}$$

$$p(c) = c^3 + rc - t = 0 \text{ eq. 03}$$

Somando as três equações, temos:

$$a^3 + b^3 + c^3 + (a + b + c)r - t = 0$$

Por Girard, temos:

$$a + b + c = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow a + b + c = 0$$

Logo:

$$a^3 + b^3 + c^3 = t$$

Item b:

Multiplique a eq. 01 por a^{n-2} :

$$a^{n+1} + ra^{n-1} - ta^{n-2} = 0$$

Analogamente para b e c :

$$b^{n+1} + rb^{n-1} - tb^{n-2} = 0$$

$$c^{n+1} + rc^{n-1} - tc^{n-2} = 0$$

Somando as três equações:

$$a^{n+1} + b^{n+1} + c^{n+1} + r(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1}) - t(a^{n-2} + b^{n-2} + c^{n-2}) = 0$$

Mas $S^k = a^k + b^k + c^k$, logo:

$$S^{n+1} + rS^{n-1} - tS^{n-2} = 0$$

Gabarito: Item a) t ; Item b) Demonstração.

40. (IME/2004)

Considere o polinômio $P(x) = x^3 + ax + b$ de coeficientes reais, com $b \neq 0$. Sabendo que suas raízes são reais, demonstre que $a < 0$.

Comentários

Sejam as raízes α, β e γ as raízes reais de $P(x)$.

Das relações de Girard para a soma das raízes, temos:

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{0}{1} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ eq. 01}$$

Ainda das relações de Girard, temos que:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = a$$

Elevando ambos os membros da eq. 01 ao quadrado:

$$(\alpha + \beta + \gamma)^2 = 0^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2a = 0$$

Logo:

$$a = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2}$$

Como α, β e γ são reais, temos que:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \geq 0 \Rightarrow -\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{2} \leq 0$$

Por fim:

$$a \leq 0$$

Mas $b \neq 0$, logo $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0$, uma vez que $\alpha\beta\gamma = -b \Rightarrow \alpha, \beta, \gamma \neq 0$.

Ou seja:

$$a < 0$$

Gabarito: Demonstração.

41. (IME/2002)

- a) Encontre as condições a que devem satisfazer os coeficientes de um polinômio $P(x)$ de quarto grau para que $P(x) = P(1-x)$.
- b) Considere o polinômio $P(x) = 16x^4 - 32x^3 - 56x^2 + 72x + 77$. Determine todas as suas raízes sabendo-se que o mesmo satisfaz à condição do item acima.

Comentários

Item a:

Nesse item, vamos fazer o “feijão com arroz”. Seja $P(x)$:

$$P(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Temos que:

$$P(1-x) = a_4(1-x)^4 + a_3(1-x)^3 + a_2(1-x)^2 + a_1(1-x) + a_0$$

Queremos que:

$$P(x) - P(1-x) = 0$$

Ou seja:

$$a_4[x^4 - (1-x)^4] + a_3[x^3 - (1-x)^3] + a_2[x^2 - (1-x)^2] + a_1[x - (1-x)] = 0$$

Vamos lançar mão das técnicas de fatoração. Veja que:

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a^2 + b^2)(a+b)(a-b)$$

Aplicando à equação acima para o termo de coeficiente a_4 , vem:

$$x^4 - (1-x)^4 = (x^2 + (1-x)^2)(x+1-x)(x-1+x)$$

Do que resulta:

$$4x^3 - 6x^2 + 4x - 1$$

Para o termo de coeficiente a_3 , temos:

$$x^3 - (1-x)^3 = (x-1+x)(x^2 + x(1-x) + (1-x)^2) = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Para o termo de coeficiente a_2 :

$$x^2 - (1-x)^2 = 2x - 1$$

Para o termo de coeficiente a_1 :

$$x - (1-x) = 2x - 1$$

Logo, devemos ter o seguinte, para todo x :

$$a_4(4x^3 - 6x^2 + 4x - 1) + a_3(2x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + a_2(2x - 1) + a_1(2x - 1) = 0$$

Ou ainda:

$$(2a_3 + 4a_4)x^3 - (3a_3 + 6a_4)x^2 + (2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4)x - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = 0$$

Como isso deve valer para todo x , vem:

$$2a_3 + 4a_4 = 0 \text{ eq. 01}$$

$$3a_3 + 6a_4 = 0 \text{ eq. 02}$$

$$2a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 = 0 \text{ eq. 03}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0 \text{ eq. 04}$$

Note que as equações 01 e 02 são iguais.

Da equação 01, temos:

$$a_3 = -2a_4$$

Substituindo isso na equação 03:

$$2a_1 + 2a_2 + 3(-2a_4) + 4a_4 = 0 \Rightarrow a_1 + a_2 = a_4$$

Substituindo isso na equação 04:

$$a_4 + a_3 + a_4 = 0 \Rightarrow a_3 = -2a_4$$

Ou seja, não obtemos nenhuma nova informação.

Assim, para que $P(x) = P(1 - x)$ para todo x é suficiente que:

$$a_1 + a_2 = a_4 \text{ e } a_3 = -2a_4$$

Para um $a_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $a_0 \in \mathbb{R}$.

Ou ainda:

$$P(x) = a_4x^4 - 2a_4x^3 + (a_4 - a_1)x^2 + a_1x + a_0$$

Item b:

Primeiramente, observe que, se o polinômio obedece às condições acima, podemos fatorá-lo da seguinte forma:

$$a_4x^4 - 2a_4x^3 + (a_4 - a_1)x^2 + a_1x + a_0 = a_4(x^4 - 2x^3 + x^2) - a_1(x^2 - x) + a_0$$

Por que fizemos isso? Lembre-se: é sempre bizu colocar termos semelhantes juntos. Nesse caso, reunimos os termos com coeficientes iguais.

Continuando:

$$a_4(x^4 - 2x^3 + x^2) - a_1(x^2 - x) + a_0 = a_4x^2(x - 1)^2 - a_1x(x - 1) + a_0$$

Perceba que o termo $x(x - 1)$ se repete. Então, faça $x(x - 1) = y$. Logo:

$$P(y) = a_4y^2 - a_1y + a_0$$

Nosso polinômio admite os seguintes valores:

$$a_4 = 16, a_1 = 72 \text{ e } a_0 = 77$$

Do que temos que:

$$P(y) = 16y^2 - 72y + 77$$

Resolvendo para y usando Bháskara, vem:

$$y = \frac{7}{4} \text{ ou } y = \frac{11}{4}$$

Disso, temos as seguintes possibilidades:

$$1^{\text{a}} \text{ possibilidade: } x(x - 1) = \frac{7}{4}$$

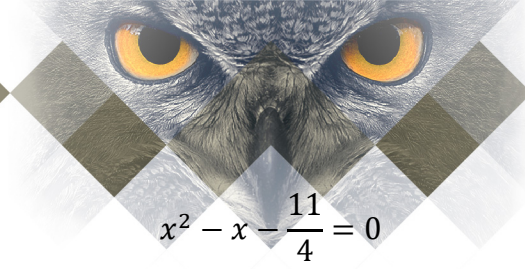
Desenvolvendo, temos a seguinte equação quadrática:

$$x^2 - x - \frac{7}{4} = 0$$

Resolvendo para x , temos $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}$.

$$2^{\text{a}} \text{ possibilidade: } x(x - 1) = \frac{11}{4}$$

Desenvolvendo, temos a seguinte equação quadrática:


$$x^2 - x - \frac{11}{4} = 0$$

Resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{3}$$

Gabarito: a) $a_1 + a_2 = a_4$ e $a_3 = -2a_4$, para $a_4 \in \mathbb{R} - \{0\}$ e $a_0 \in \mathbb{R}$; b) $\left\{\frac{1}{2} \pm \sqrt{3}, \frac{1}{2} \pm \sqrt{2}\right\}$.
