Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

Sumário

Apresentação

Nesta aula, iniciaremos o estudo da Análise Combinatória e do Binômio de Newton. Esse é um assunto que costuma ser cobrado nas provas. Estude com calma e tente entender o raciocínio usado na resolução das questões. Não se assuste com a quantidade de páginas dessa aula, pois a maioria delas são de questões resolvidas. Se você for um aluno que já possui experiência nesse tema, apenas dê uma rápida olhada na teoria e vá para a lista de exercícios. Lembre-se, o melhor jeito de estudar Matemática é praticando!

E sempre que tiver dúvidas, não hesite em nos procurar no fórum de dúvidas, estamos aqui para auxiliá-lo.

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Princípio Fundamental da Contagem

A Análise Combinatória é um estudo de contagem. Aqui, vamos estudar técnicas para encontrar o número de elementos de um conjunto que apresenta certa característica.

Por vezes, é fácil enxergarmos todas as variações de um conjunto, como os elementos possíveis de termos quando jogamos um dado de 6 faces: $(1,2,3,4,5,6)$.

Já há outras situações em que não é tão fácil assim, como as combinações possíveis de termos um prêmio de loteria na Mega-Sena:

$[(1,2,3,4,5,6), (1,2,3,4,5,7), (1,2,3,4,5,8), \dots, (10,12,18,45,56,59), \dots, (55,56,57,58,59,60)]$.

Esse conjunto tem mais de 50 milhões de elementos. Se você colocar uma impressora que imprima uma combinação dessas por segundo, a impressão de todo o conjunto demorará, trabalhando ininterruptamente, mais de um ano e meio!

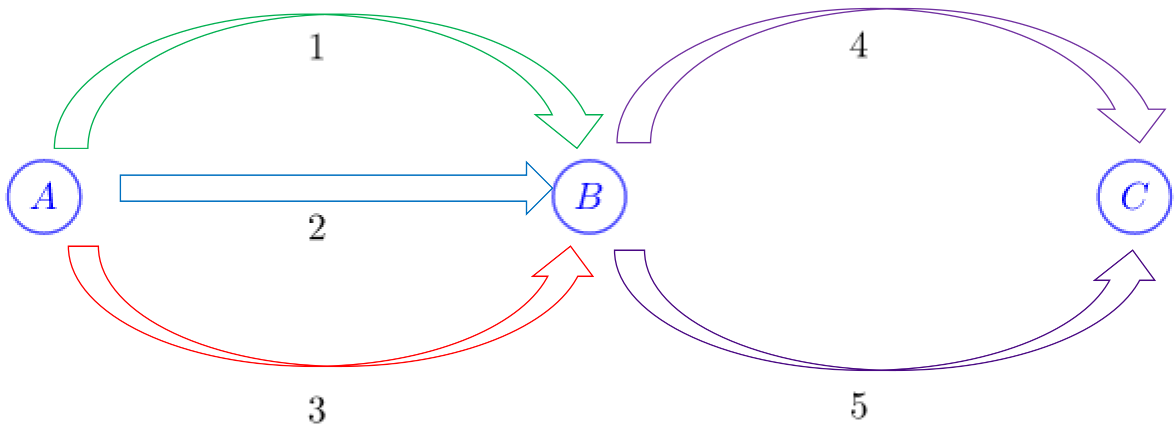
Uma coisa precisa ficar clara desde o início: na maioria dos exercícios, nós não vamos calcular quais são os elementos do conjunto e, sim, quantos elementos há nele. É comum vermos essa pergunta nos enunciados na forma de comandos como "quantos jeitos", "quantas formas", "quantos modos", "quantas formas distintas" etc.

Vejamos um exemplo.

Ao viajar da cidade A para a cidade C, a passagem pela cidade B é obrigatória. Sabendo que temos 3 caminhos diferentes para irmos da cidade A para a cidade B e dois da cidade B para a cidade C, quantos caminhos distintos há entre as cidades A e C?

Um recurso muito útil na matemática é o desenho e, nesta aula, desenhar ou esquematizar a situação problema é um passo importante para resolvermos as situações propostas.

Façamos, então, um diagrama para representar o problema.



Oras, professor, essa é fácil, são 5 caminhos.

Calma, não é tão trivial assim. Podemos até dizer que são 5 "estradas" diferentes, mas para ir de A para C, temos opções de vários caminhos utilizando as 5 estradas disponíveis.

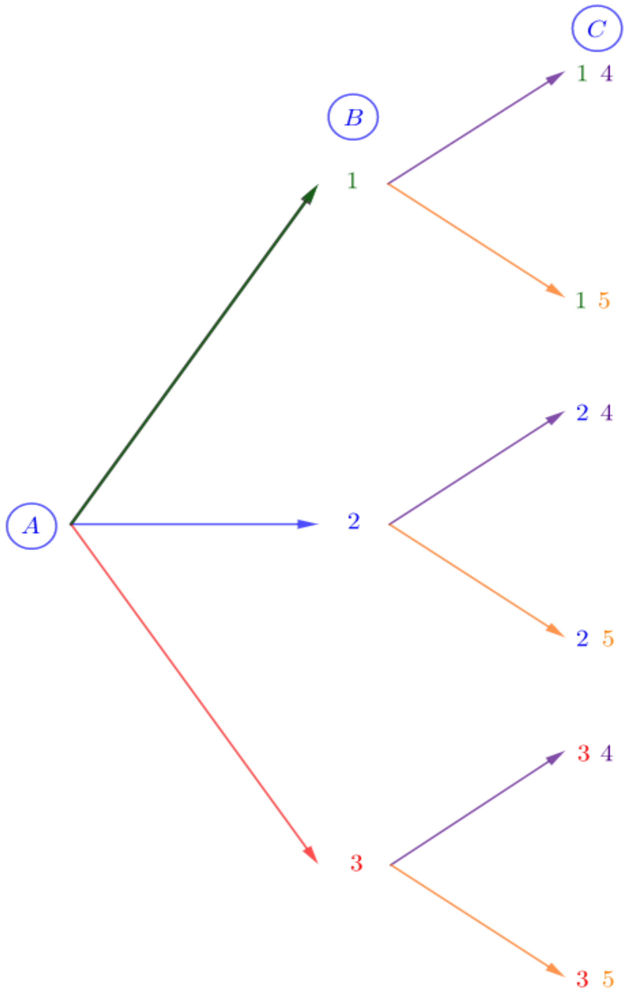
Como são poucas possibilidades, vamos escrevê-las todas.

Estrada de A para B	Estrada de B para C
1	4
1	5
2	4
2	5
3	4
3	5

Como pudemos ver, temos 6 caminhos diferentes entre as cidades A e C, passando obrigatoriamente por B e utilizando as 5 estradas disponíveis.

Uma alternativa para simbolizar essa mesma situação é o diagrama de árvore, ou diagrama sequencial.

Ao partirmos de A para B, temos 3 possibilidades e, para cada uma dessas possibilidades, duas opções de B para C. Veja.



É importante notar que a tomada de decisão sobre o primeiro caminho, de A para B, não influencia de modo algum a escolha do caminho de B para C. Dizemos, então, que esses eventos são independentes.

Quando temos duas decisões a serem tomadas em sequência, podemos multiplicar o número de opções que temos em uma decisão pelo número de opções que temos em outra.

Para esse caso, temos:

De A para B: 3 opções.

De B para C: 2 opções.

Assim, o número n de opções de A para C é dado por:

$$n = 3 \cdot 2 = 6.$$

Repetindo, esse cálculo nos dá quantas são nossas opções, não quais são elas.

Esse princípio da multiplicação em eventos sequenciais é tão importante em nossos estudos que recebe o nome de Princípio Fundamental da Contagem (PFC).

Vejamos mais um exemplo clássico, as placas de automóveis.

No Brasil, utilizaremos, em breve, as novas placas de automóveis no modelo Mercosul. Teremos placas do tipo $LLL\ NLNN$ para automóveis, no qual L simboliza posição ocupada por uma das 26 letras do alfabeto e N, por um dos 10 algarismos numéricos.

Supondo não haver placas repetidas nem sequências proibidas, quantos emplacamentos de automóveis diferentes serão possíveis com o novo sistema de placas?

Vejamos.

Temos 10 algarismos numéricos diferentes e 26 letras.

Ao escolher um elemento, nada nos impede de utilizarmos o mesmo elemento novamente, em outra posição. Chamamos isso de escolha com reposição.

Além disso, ao escolhermos um elemento, nada influencia na escolha do outro, ou seja, temos escolhas independentes.

Por se tratar de eventos sequenciais (escolhemos um dígito por vez, da esquerda para a direita) podemos utilizar o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) para calcularmos quantos são os casos de emplacamento possíveis.

As placas são do tipo $LLL\ NLNN$.

Para a primeira letra, temos 26 possibilidades de escolha (de A a Z). Para a segunda letra, também 26. Idem para a terceira. Para o primeiro número, 10 possibilidades (de 0 a 9) e assim por diante.

Assim, o número n de placas distintas é dado por:

$$n = L \cdot L \cdot L \cdot N \cdot L \cdot N \cdot N$$
$$n = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10$$
$$n = 26^4 \cdot 10^3$$
$$n = 456.976.000\ placas$$

1.1. Fatorial de um número

No exercício que acabamos de fazer, sobre a fila indiana, calculamos um produto interessante:

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Esse produto, de um número natural por todos os seus antecessores naturais estritamente positivos, recebe o nome de fatorial, e é representado pelo sinal de exclamação (!).

Nesse caso, podemos escrever:

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$n = 5!$$

Como vamos trabalhar com esse produto com muita frequência e com números extensos, a notação de fatorial vem muito a calhar.

ESCLARECENDO!

Note que o fatorial de um número pode ser escrito de várias formas, não é necessário que escrevamos todos os seus antecessores, podemos continuar utilizando a notação de fatorial.

Essa técnica é muito útil quando estamos trabalhando com simplificações.

Todos os produtos a seguir são equivalentes:

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2! = 720$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3! = 720$$
$$6 \cdot 5 \cdot 4! = 720$$
$$6 \cdot 5! = 720$$
$$6! = 720$$

RESUMINDO

$$n! = n \cdot (1 - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

2. Permutações

Você sabe o que é permutar?

Permutar significa trocar. Antigamente, usava-se o termo “Permuta-se” até em anúncios comerciais nos jornais como sinônimo de troca comercial: “Permuta-se uma geladeira por uma bicicleta”.

O significado popular pode ser aplicado aqui.

Quando falamos em Permutação na Análise Combinatória, estamos nos referindo a situações específicas, em que todos os elementos de um conjunto são colocados em ordens diferentes, mas utilizando todos os elementos a cada ordem diferente, a cada troca, a cada permuta.

Um exemplo é quando vamos viajar em um grupo de 5 pessoas no carro de 5 lugares. Claro, consideramos aqui que todos os viajantes possam ocupar o acento do condutor.

Assim, acontecerá o que aconteceu em nosso exemplo da fila indiana. Temos 5 opções para escolher a pessoa para o primeiro acento, 4 opções para escolher quem ocupará o segundo acento, 3 para o terceiro, 2 para o penúltimo e apenas 1 opção para o último acento a ser ocupado.

Desse modo, temos n configurações diferentes para a viagem, a saber:

$$n = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$
$$n = 5!$$

Quando vamos indicar uma permutação de n elementos, utilizamos a simbologia P_n.

Para o exemplo anterior, podemos dizer que:

$$n = P_5 = 5!$$

Se expandirmos o raciocínio, podemos dizer que, para qualquer conjunto em que tenhamos a mesma característica de que falamos, o número de permutações possíveis é dado por:

$$P_n = n!$$

Quando formos considerar a reordenação dos elementos de um conjunto, a ferramenta que deve vir em primeiro lugar na sua mente é a Permutação.

2.1. Permutações com elementos repetidos

Pensemos, agora, no caso dos anagramas da palavra $ASTERISCO$, na qual temos repetição de letras.

Alguns anagramas possíveis para a palavra $ASTERISCO$ são

$AEIOSTRSC - OCSIREAST - SSRTCAEIO - ASTEIRSCO - AOSCTSEIRI$ ...

Olhemos mais de perto um desses anagramas: $SSRTCAEIO$.

Você saberia dizer, nesse anagrama, qual S veio da sílaba AS? Qual veio da sílaba RIS?

Provavelmente não, pois as letras repetidas, no anagrama, quando mudadas de posição, acabam formando anagramas idênticos.

As duas letras S podem ser mudadas de lugar em todos os anagramas, e não perceberíamos a mudança.

Então pergunto: com referência às duas letras S repetidas, de quantos modos podemos mudá-las de posição dentro de um anagrama qualquer?

Bom, dentro de um anagrama, como são duas letras ocupando duas posições, há $P_2 = 2!$ maneiras de trocá-las de lugar.

Como a cada palavra do anagrama isso acontece, calcularemos os anagramas como se não houvesse letras repetidas e, em seguida, dividimos esse resultado pelo número de maneiras de permutar as letras repetidas dentro do anagrama.

Nesse caso, ASTERISCO tem 9 letras, sendo 2 repetidas. Assim, o número de anagramas é dado por:

$$P_9^2 = \frac{9!}{2!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}} = 181.440$$

Simbolizamos o número de letras repetidas na parte superior e o número de letras totais na parte inferior da permutação. Mas cuidado, ao colocarmos na fração, essa ordem é invertida!

Podemos, inclusive, ter mais de uma letra repetida, como no caso da palavra $ASSASSINAR$.

Temos, nesse caso, 10 letras, 3 letras A e 4 letras S.

Assim, o número de anagramas da palavra $ASSASSINAR$ é dado por:

$$P_{10}^{3,4} = \frac{10!}{3! \cdot 4!}$$

$$P_{10}^{3,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}$$

$$P_{10}^{3,4} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{3 \cdot 2} \cdot 1 \cdot \cancel{4!}}$$

$$P_{10}^{3,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$P_{10}^{3,4} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$P_{10}^{3,4} = 25.200$$

Assim, podemos generalizar o resultado para permutações com n elementos, sendo r elementos repetidos:

$$P_n^r = \frac{n!}{r!}$$

2.2. Permutação circular

Cinco amigos vão ao cinema e compram seus ingressos em uma fila com 5 cadeiras lado a lado. De quantos modos diferentes eles poderiam se sentar?

Já estudamos esse caso, trata-se de uma permutação simples com cinco elementos, ou seja: $P_5 = 5!$.

Os mesmos 5 amigos vão a um restaurante e se sentam ao redor de uma mesa de 5 lugares diferentes. De quantos modos eles podem se sentar?

Aí depende.

Como assim, depende, professor? Não é exatamente a mesma situação do cinema? Muda por ser uma mesa?

Pode mudar, mas a mudança não é obrigatória. Acompanhe.

Caso cada lugar da mesa seja considerado particular, digamos, um em frente à TV, outro ao lado de um corredor de grande fluxo, um bem espremidinho ao canto, entre outras particularidades, podemos considerar como o caso do cinema, da fila indiana, do anagrama. Cada modificação é uma configuração diferente.

Mas caso consideremos uma mesa redonda em que o ambiente não importe, apenas a configuração de um elemento em relação ao outro, mesmo sentados em bancos distintos, a configuração se repete.

Para ficar mais claro, vamos particularizar os 5 amigos como Amanda, Beto, Carol, Diogo e Eduardo, A, B, C, D, E para simplificar.

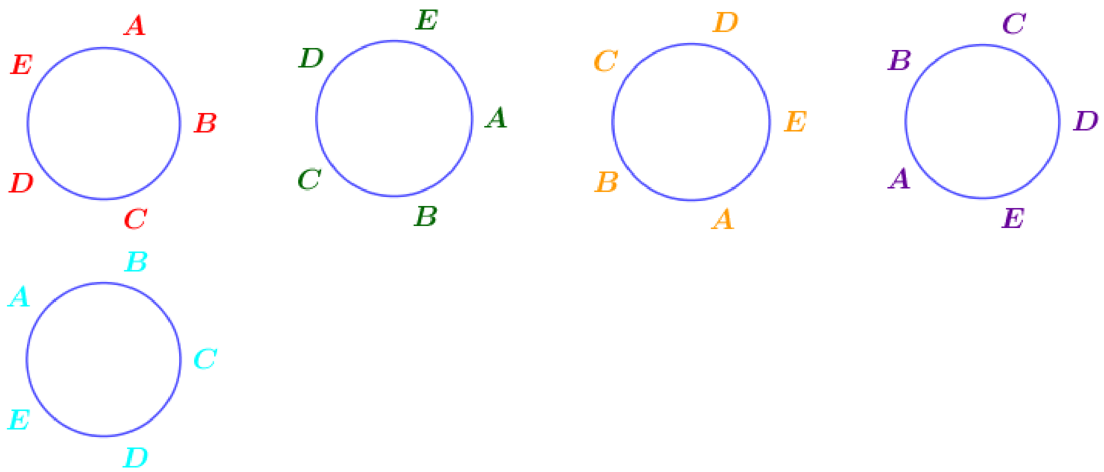
Caso esses cinco amigos se sentem em fila, temos $P_5 = 5! = 120$ maneiras de dispô-los.

Consideremos, como exemplo, as cinco maneiras distintas a seguir.

$$A, B, C, D, E \neq B, C, D, E, A \neq C, D, E, A, B \neq D, E, A, B, C \neq E, A, B, C, D$$

Considerando a disposição em fila, cada configuração acima é considerada uma forma diferente.

Veja o que acontece quando consideramos uma mesa circular e colocamos exatamente essas configurações.



Se desconsiderarmos o universo externo à mesa, como no caso de um jogo de tabuleiros, o que importa na configuração é exatamente a posição de um elemento em relação ao outro, não ao ambiente externo.

Nesse sentido, todas as configurações acima são idênticas. Há apenas rotação (no sentido horário) de uma mesma configuração, A, B, C, D, E.

Quando isso acontece, chamamos de Permutação Circular: todos os elementos são mudados de posição, mas em posições equivalentes, devido à natureza circular, ou cíclica, do problema.

Desse modo, calculamos o número de permutações simples, mas cada conjunto de permutação equivalente deve ser descontado, pois foram contados mais de uma vez.

Em nosso exemplo, tivemos 5 amigos em permutação circular e o número de permutações equivalentes é justamente 5.

Esse fenômeno acontece sempre e temos que o número de permutações circulares é dado por:

$$PC_n = \frac{n!}{n}$$

Se quiser, você pode memorizar a fórmula acima, ou o raciocínio que nos levou a ela, que não é tão diferente do de permutações com repetições.

No entanto, alguns livros desenvolvem um pouquinho essa fórmula e a apresentam com outra roupagem, acompanhe:

$$PC_n = \frac{n!}{n}$$

Aplicando a definição de fatorial de um número:

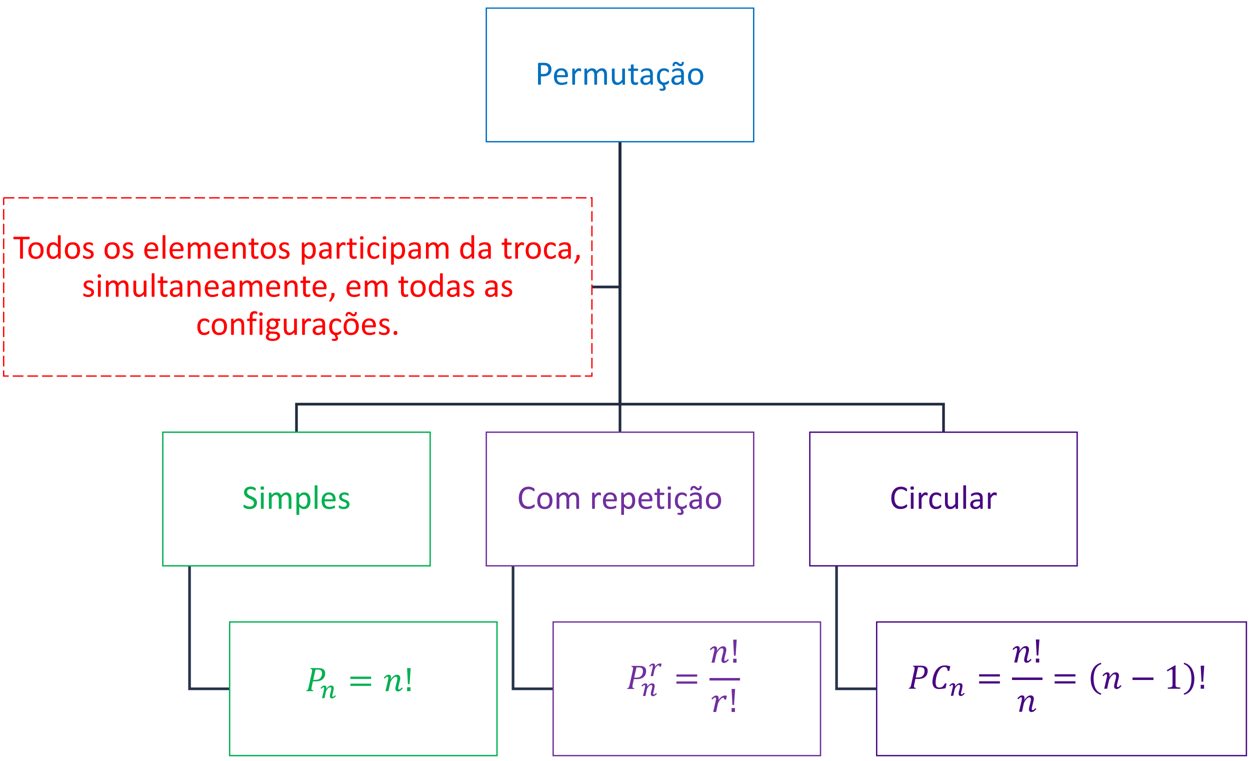
$$PC_n = \frac{n \cdot (n-1)!}{n}$$

$$PC_n = \frac{\cancel{n} \cdot (n-1)!}{\cancel{n}}$$

$$PC_n = (n-1)!$$

As fórmulas são idênticas no quesito efetividade. Então caso decida pela memorização, a escolha é questão de gosto pessoal mesmo.

ESQUEMATIZANDO



3. Arranjos

Um arranjo é um tipo de permutação em que não há lugar para todo mundo.

Como assim, professor?

Na permutação, nós só trocamos os elementos de um conjunto de ordem, e cada ordem é um elemento da permutação, uma possibilidade, um jeito de ordenar.

No arranjo é o mesmo princípio, porém, não trabalharemos com todos os elementos do conjunto de modo simultâneo, trabalharemos com um número menor de "vagas".

Lembra-se do caso em que 5 pessoas iam viajar em um carro de 5 lugares?

Tínhamos $P_5 = 5!$ maneiras diferentes de colocá-los no carro, e isso faz referência à permutação, 5 pessoas e 5 lugares no carro.

Aqui, nos arranjos, seria algo como ter 5 pessoas que querem viajar para a praia, mas só temos uma moto. Dessa vez, dessas 5 pessoas, somente 2 podem ir à praia.

Perceba que o começo do raciocínio é semelhante para permutações e arranjos. Para escolher a primeira pessoa, temos 5 possibilidades. Para a segunda, 4 possibilidades.

E para por aí, essa é a diferença.

Se temos somente duas vagas, teremos somente dois fatores na multiplicação.

A simbologia para arranjarmos 5 pessoas, duas a duas, é $A_{5,2}$, e é dada pelo produto do número de pessoas pelos seus antecessores, mas não até o 1 e, sim, em um número de fatores igual ao número de vagas.

Assim,

$$A_{5,2} = 5 \cdot 4 \rightarrow Somente\ 2\ fatores, pois\ temos\ somente\ 2\ vagas$$

Se esses 5 amigos pudessem ir de triciclo, seriam 3 vagas, e o número de combiná-los seria dado por

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \rightarrow Somente\ 3\ fatores, pois\ temos\ somente\ 3\ vagas$$

Nos livros didáticos, os arranjos são apresentados com uma fórmula para representar exatamente o nosso raciocínio.

Perceba que temos, quando arranjamos 5 elementos, 2 a 2, precisamos de apenas dois fatores no produto, mas como escrever isso matematicamente?

Simples, escreveremos todos eles e dividiremos pelos que não precisamos, veja:

$$A_{5,2} = 5 \cdot 4 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{3!} = \frac{5!}{(5-2)!}$$

O artifício de completar o que faltava no fatorial do numerador e dividir pelo mesmo incremento no denominador nos permite escrever a fórmula do arranjo de maneira genérica, veja:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Podemos tanto pensar no número de fatores do produto de uma "permutação" incompleta quanto utilizar a fórmula, pois são pensamentos equivalentes.

Na prática, é mais cômodo utilizar o pensamento do número de fatores do produto para calcularmos arranjos nos quais conhecemos numericamente n e p, e deixar a fórmula para exercícios literais e equações nas quais n ou p sejam incógnitas.

4. Combinações

As combinações são outro tipo de agrupamento, com semelhanças e diferenças com relação às permutações e aos arranjos.

Nas combinações, podemos ter tanto um número de "vagas" igual ao número de elementos, como na permutação, quanto um número de "vagas" menor que o número de elementos, como no arranjo.

O que difere uma combinação dos outros tipos é o fato de esta não considerar a ordem como fator diferenciador de uma sequência.

Enquanto na permutação e no arranjo as sequências 123 e 321 são consideradas diferentes, na combinação, elas são consideradas iguais.

Como isso, professor? É claro que elas são diferentes!

Calma, tudo depende do contexto.

A sequência 123 é diferente da sequência 321 se estivermos falando de números, por exemplo, pois cento e vinte e três é, claramente, diferente de trezentos e vinte e um.

No entanto, se estivermos falando em um grupo de amigos que vão ao cinema juntos, o grupo $Pessoa\ 1$, $Pessoa\ 2$, $Pessoa\ 3$, portanto, 123, é idêntico ao grupo $Pessoa\ 3$, $Pessoa\ 2$, $Pessoa\ 1$, 321.

Nas combinações, a ordem não difere um conjunto do outro. Mais exemplos?

Formação de casais $(AB = BA)$;

Duplas para boxe, pingue-pongue, truco;

Grupos de trabalho ou estudo com funções idênticas para cada integrante;

Escolha de objetos de uma coleção.

Vamos analisar o caso da loteria como exemplo.

Para ganhar o prêmio máximo da Mega-Sena, o jogador deve acertar as 6 dezenas sorteadas dentre as 60 possíveis. Vamos imaginar que as dezenas sorteadas, nessa ordem, foram:

$$41 - 05 - 04 - 52 - 30 - 33$$

Mas você, ao jogar, jogou a seguinte combinação:

$$04 - 05 - 30 - 33 - 41 - 52$$

Você, por acaso, espera receber o prêmio?

Provavelmente, sim, pois o jogo não restringe à ordem, apenas pede para que se acerte os números sorteados para ser o ganhador. Dessa forma, todas as sequências abaixo são igualmente válidas:

$$41 - 05 - 04 - 52 - 30 - 33$$
$$04 - 05 - 30 - 33 - 41 - 52$$
$$30 - 05 - 52 - 33 - 41 - 04$$
$$52 - 41 - 33 - 30 - 04 - 05$$
$$52 - 04 - 30 - 33 - 41 - 05$$
$$\vdots$$

Então pergunto: com esses 6 elementos, quantas sequências equivalentes podemos formar?

Essa você consegue fazer com o que estudamos até aqui, trata-se de uma permutação de 6 elementos, portanto, $P_6 = 6!$.

Agora, voltemos ao problema principal, a loteria.

Na Mega-Sena, temos 60 números para fazer sequências de 6 números cada.

Se a ordem importasse, se cada sequência fosse única, poderíamos pensar no arranjo de 60 elementos, tomados 6 a 6.

No entanto, vimos que há sequências equivalentes e que cada sequência produz 6! sequências equivalentes, que foram contadas em multiplicidade no arranjo.

Como resolver essa questão?

Do mesmo modo que resolvemos as permutações com repetição e as permutações circulares, dividindo pelo excedente.

Assim, podemos dizer que uma combinação de 60 elementos, tomados 6 a 6, é dada por:

$$C_{60,6} = \frac{A_{60,6}}{6!}$$

Multiplicidade de cada sequência

E quanto dá isso? Também não sei, calculemos:

$$C_{60,6} = \frac{60 \cdot 59 \cdot 58 \cdot 57 \cdot 56 \cdot 55}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

Lembre-se
6 posições, 6 fatores

$$C_{60,6} = \frac{36.045.979.200}{720}$$

$$C_{60,6} = 50.063.860$$

Ou seja, mesmo considerando só as sequências com números distintos, ainda são mais de 50 milhões de combinações.

Vamos generalizar esse método?

A combinação é um tipo de arranjo, mas em que não são consideradas sequências distintas as sequências de mesmos elementos. Por isso, dividimos o número de arranjos pelo número de elementos que foram contados em duplicidade.

Sintetizando uma combinação de n elementos, tomados p a p, temos:

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

Nós já temos uma fórmula para o arranjo, lembra? Podemos, se quisermos, substituí-la na equação acima:

$$\begin{cases} C_{n,p} = \dfrac{A_{n,p}}{p!} \\ \\ A_{n,p} = \dfrac{n!}{(n-p)!} \end{cases}$$

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!}$$

Divisão entre frações: conserva-se a de cima e inverte-se a de baixo:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \cdot \frac{1}{p!}$$

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!}$$

Essa fórmula é muito solicitada nos exercícios de vestibular, então vale a memorização.

Ela é a definição de um número especial, chamado número binomial, e é simbolizada por:

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} = \binom{n}{p} \Longrightarrow \text{Número Binomial}$$

4.1. Combinações completas

De quantos modos podemos comprar 3 bebidas em uma loja que oferece 4 tipos de bebidas?

Esse é um problema de combinação completa, e não podemos simplesmente aplicar a fórmula de combinação e escolher 3 sabores entre os 4 disponíveis, isto é, $C_{4,3} = 4$, pois nesse caso, estamos considerando que cada bebida é diferente. Devemos considerar que cada bebida pode ser igual, assim, combinações completas são combinações em que os elementos podem ser repetidos.

Considerando que as bebidas disponíveis são A, B, C e D, as combinações completas desses itens tomados 3 a 3 são:

$$AAA - BBB - CCC - DDD$$
$$AAB - AAC - AAD$$
$$BBA - BBC - BBD$$
$$CCA - CCB - CCD$$
$$DDA - DDB - DDC$$
$$ABC - ABD - ACD - BCD$$

Dessa forma, fazendo a contagem, encontramos $CR_{4,3} = 20$.

$CR_{4,3}$ é o número de modos de se escolher 3 objetos entre 4 objetos distintos, podendo repetir o mesmo elemento mais de uma vez.

Façamos uma outra interpretação do problema. Sejam as bebidas definidas pelas seguintes variáveis:

$$x - quantidade\ de\ bebidas\ A$$
$$y - quantidade\ de\ bebidas\ B$$
$$z - quantidade\ de\ bebidas\ C$$
$$w - quantidade\ de\ bebidas\ D$$

Desse modo, podemos escrever a seguinte equação:

$$x + y + z + w = 3$$

Repare que x, y, z, w devem ser números inteiros não negativos. Agora, o problema se transformou em achar o número de soluções inteiras não negativas dessa equação. Para resolvê-lo, podemos raciocinar da seguinte maneira: a soma das variáveis deve resultar 3, então vamos tomar três bolinhas e dividi-las nas variáveis. Assim, representemos as unidades por $\circ$ e usemos as barras | para separar as bolinhas, veja o exemplo:

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & + & w \\ 1 & + & 1 & + & 1 & + & 0 \\ \circ & | & \circ & | & \circ & | & \\ 2 & + & 1 & + & 0 & + & 0 \\ \circ\circ & | & \circ & | & & | & \end{array}$$

Para formar essas representações, devemos arrumar 3 bolinhas (o total de unidades de cada solução é 3 já que $x + y + z + w = 3$) e 3 barras em fila (para separar as 4 variáveis). O número de modos de fazer isso é:

$$P_6^{3,3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = C_{6,3}$$

Vamos generalizar o resultado e encontrar o número de soluções da equação:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$$

Precisaremos de p bolinhas e devemos dividir essas bolinhas em n partes (já que temos n variáveis). Vamos precisar de $n - 1$ barras para fazê-lo. Assim, temos que organizar $n - 1 + p$ elementos em fila com repetição de p elementos e $n - 1$ elementos, logo:

$$\boxed{CR_{n,p} = P_{n+p-1}^{p,n-1} = \frac{(n+p-1)!}{p! \cdot (n-1)!} = C_{n+p-1,p}}$$

4.1.1. Soluções inteiras não negativas com inequações

Quantas são as soluções inteiras não negativas da inequação abaixo?

$$x + y + z \leq 4$$

Para resolver esse problema, devemos dividi-lo em todos os casos possíveis. Como queremos apenas soluções inteiras não negativas, devemos somar as soluções das seguintes equações:

$$x + y + z = 4$$
$$x + y + z = 3$$
$$x + y + z = 2$$
$$x + y + z = 1$$
$$x + y + z = 0$$

Lembrando que $C_{n+p-1,p}$ é o número de soluções para $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = p$, temos:

$$C_{3+4-1,4} + C_{3+3-1,3} + C_{3+2-1,2} + C_{3+1-1,1} + C_{3+0-1,0}$$
$$= C_{6,4} + C_{5,3} + C_{4,2} + C_{3,1} + C_{2,0}$$
$$= 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 35$$

4.1.2. Mudança de variáveis

Determine o número de soluções inteiras da equação $x+y+z=10$, com $x\geq 1, y\geq 2$ e $z\geq 3$.

Nesse caso, podemos fazer uma mudança de variáveis para recair no problema das soluções inteiras não negativas. Façamos $x=1+a, y=2+b$ e $z=3+c$:

$$(1+a)+(2+b)+(3+c)=10$$
$$a+b+c=4$$

As restrições tornam-se:

$$x\geq 1, y\geq 2 \text{ e } z\geq 3 \Rightarrow a\geq 0, b\geq 0 \text{ e } c\geq 0$$

Assim, basta encontrar o número de soluções inteiras não negativas da equação $a+b+c=4$:

$$C_{3+4-1,4}=C_{6,4}=15$$

5. Princípio da Inclusão-Exclusão

Relembremos o princípio da inclusão-exclusão da aula de conjuntos.

Sejam A, B, C conjuntos, então:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

Seja o conjunto A e os subconjuntos $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ de A, a fórmula generalizada do número de elementos de A é dada por:

$$n(A_1\cup A_2\cup \ldots \cup A_n)=S_1-S_2+S_3-S_4+\cdots+(-1)^{n-1}S_n$$

Onde $S_i, i=1,2,\ldots,n$ é dado por:

$$S_1=\sum_{i=1}^{n} n(A_i)$$
$$S_2=\sum_{1\leq i<j\leq n}^{n} n(A_i\cap A_j)$$
$$S_3=\sum_{1\leq i<j<k\leq n}^{n} n(A_i\cap A_j\cap A_k)$$
$$\vdots$$

Propriedades

I) O número de elementos de A que pertencem a exatamente p $(p\leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é dado por:

$$a_p=\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\cdot\binom{p+k}{p}\cdot S_{p+k}$$

II) O número de elementos de A que pertencem a pelo menos p $(p\leq n)$ dos conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ é dado por:

$$b_p=\sum_{k=0}^{n-p}(-1)^k\cdot\binom{p+k-1}{p}\cdot S_{p+k}$$

Exemplo de aplicação

Quantos são os inteiros entre 1 e 2000 que são divisíveis por exatamente três dos números $2, 3, 5$ e 11?

Resolução

Podemos fazer as seguintes definições:

$$A=\{1,2,3,\ldots,1000\}$$
$$A_1=\{x\in A | x \text{ } divide \text{ } 2\}$$

$$A_2 = \{x \in A | x \text{ divide } 3\}$$
$$A_3 = \{x \in A | x \text{ divide } 5\}$$
$$A_4 = \{x \in A | x \text{ divide } 11\}$$

Como temos quatro subconjuntos, calculemos S_1, S_2, S_3 e S_4:

$$S_1 = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) = \left\lfloor \frac{2000}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{11} \right\rfloor$$
$$= 1000 + 666 + 400 + 181 = 2247$$
$$S_2 = n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_4) + n(A_3 \cap A_4)$$
$$= \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{5 \cdot 11} \right\rfloor$$
$$= 333 + 200 + 90 + 133 + 60 + 36 = 852$$
$$S_3 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$
$$= \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 3 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2000}{3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor$$
$$= 66 + 30 + 18 + 12 = 126$$
$$S_4 = n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \left\lfloor \frac{2000}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11} \right\rfloor = 6$$

Para calcular o número de inteiros que são divisíveis por exatamente 3 dos números, podemos usar a seguinte fórmula:

$$a_3 = \sum_{k=0}^{4-3} (-1)^k \cdot \binom{3+k}{3} \cdot S_{3+k} = \sum_{k=0}^{1} (-1)^k \cdot \binom{3+k}{3} \cdot S_{3+k}$$
$$a_3 = \binom{3}{3} \cdot S_3 - \binom{4}{3} \cdot S_4 = 126 - 4 \cdot 6 = 102$$

6. Permutações Caóticas

Uma permutação do conjunto ordenado $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ é dita caótica quando nenhum dos elementos $a_i, i \in \mathbb{N}^*$, se encontra em sua posição original. Assim, tomando a sequência de números naturais $\{1, 2, 3, 4\}$, a permutação 3142 é caótica, pois nenhum número está na sua posição primitiva. Por outro lado, a permutação 3241 não é caótica, pois o número 2 está em sua posição original. Uma **permutação caótica** também pode ser chamada de **desarranjo**.

Seja D_n o número de desarranjos que podemos formar do conjunto ordenado $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, vamos analisar os casos iniciais. Se $n = 1$, temos apenas 1 elemento no conjunto e, consequentemente, nenhum modo de desarranjar o conjunto, logo $D_1 = 0$. Se $n = 2$, temos a_1a_2 e a_2a_1, apenas a segunda é caótica, logo $D_2 = 1$. Se $n = 3$, temos as permutações $a_1a_2a_3, a_1a_3a_2, a_2a_1a_3, a_2a_3a_1, a_3a_1a_2, a_3a_2a_1$ e apenas as permutações $a_2a_3a_1$ *e* $a_3a_1a_2$ são caóticas, logo $D_3 = 2$. Continuando o raciocínio, podemos encontrar D_n, mas para n grande, isso torna-se muito trabalhoso, vamos tentar deduzir uma fórmula para D_n.

Tomemos o conjunto ordenado $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Fazendo os rearranjos de modo que nenhuma fique na sua posição inicial, para a primeira posição, temos $n - 1$ possibilidades (já que a_1 não pode ser escolhido). Supondo que a_2 ocupe a primeira posição, temos pelo princípio multiplicativo que D_n será igual ao produto das demais variações por $n - 1$. Assim, temos duas possibilidades:

- a_1 ocupa a segunda posição: nesse caso, temos que rearranjar $n - 2$ elementos de modo que nenhum ocupe sua posição original, esse número é D_{n-2}.
- a_1 não ocupa a segunda posição: agora temos que rearranjar $n - 1$ elementos, a quantidade de maneiras de fazer isso é D_{n-1}.

Como temos $n-1$ modos de escolher o primeiro elemento, pelo princípio multiplicativo, podemos escrever:

$$D_n = (n-1)\cdot(D_{n-1} + D_{n-2})$$

Essa é a lei de formação da permutação caótica D_n. Vamos analisá-la:

$$D_n = n\cdot D_{n-1} - D_{n-1} + (n-1)\cdot D_{n-2}$$
$$\Rightarrow \boxed{D_n - n\cdot D_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2})}$$

Para $n \geq 3$, temos:

$$D_3 - 3\cdot D_2 = -(D_2 - 2\cdot D_1)$$
$$D_4 - 4\cdot D_3 = -(D_3 - 3\cdot D_2)$$
$$\vdots$$
$$D_n - n\cdot D_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2})$$

Multiplicando-se as equações, obtemos:

$$\cancel{(D_3 - 3\cdot D_2)}\cancel{(D_4 - 4\cdot D_3)}\ldots(D_n - n\cdot D_{n-1})$$
$$= (-1)^{n-2}\cdot(D_2 - 2\cdot D_1)\cancel{(D_3 - 3\cdot D_2)}\ldots\cancel{(D_{n-1} - (n-1)\cdot D_{n-2})}$$
$$\Rightarrow D_n - n\cdot D_{n-1} = (-1)^{n-2}\cdot(D_2 - 2\cdot D_1)$$

Sabendo que $(-1)^{n-2} = (-1)^n$ e usando $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$, encontramos:

$$D_n - n\cdot D_{n-1} = (-1)^n$$
$$\Rightarrow \boxed{D_n = n\cdot D_{n-1} + (-1)^n}$$

Analisemos alguns casos particulares:

$$D_3 = 3D_2 - 1$$
$$D_4 = 4D_3 + 1 = 4(3D_2 - 1) + 1 = 4\cdot 3 - 4 + 1$$
$$D_5 = 5D_4 - 1 = 5(4\cdot 3\cdot D_2 - 4 + 1) - 1 = 5\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 4 + 5 - 1$$
$$D_6 = 6D_5 + 1 = 6(5\cdot 4\cdot 3 - 5\cdot 4 + 5 - 1) + 1 = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 - 6\cdot 5\cdot 4 + 6\cdot 5 - 6 + 1$$

Perceba que:

$$6\cdot 5\cdot 4\cdot 3 - 6\cdot 5\cdot 4 + 6\cdot 5 - 6 + 1 = 6!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$$

Vamos supor que:

$$D_n = n!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 2$$

E provar por PIF.

Para $n = 2$, temos:

$$D_2 = 2!\cdot\frac{1}{2!} = 1$$

E sabemos que isso é verdade.

Supondo que ela seja válida para $k \in \mathbb{N}$ e $k \geq 2$, vamos provar o resultado para $k+1$.

Temos:

$$D_k = k!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\right)$$

Multiplicando ambos os membros por $k+1$, obtemos:

os

$$D_k\cdot(k+1) = (k+1)\cdot k!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\right)$$
$$D_k\cdot(k+1) = (k+1)!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\right)$$

Da recorrência, temos:

$$D_k = k\cdot D_{k-1} + (-1)^k \Rightarrow D_{k+1} = (k+1)\cdot D_k + (-1)^{k+1} \Rightarrow (k+1)\cdot D_k = D_{k+1} - (-1)^{k+1}$$

Assim, fazendo a substituição, encontramos:

$$D_{k+1} - (-1)^{k+1} = (k+1)!\cdot\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k\frac{1}{k!}\right)$$

$$D_{k+1} = (k+1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) + (-1)^{k+1}$$
$$D_{k+1} = (k+1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!}\right) + (-1)^{k+1} \frac{(k+1)!}{(k+1)!}$$
$$D_{k+1} = (k+1)! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^k \frac{1}{k!} + (-1)^{k+1} \frac{1}{(k+1)!}\right)$$

Logo, ela é válida para $k+1$ e, portanto, a fórmula para D_n é verdadeira $\forall n \geq 2$.

$$\boxed{D_n = n! \cdot \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 2}$$

7. Lemas de Kaplansky

De quantos modos é possível obter um subconjunto de 4 elementos do conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ sem a presença de elementos consecutivos?

Os subconjuntos $\{1, 3, 5, 7\}, \{2, 4, 6, 9\}$ e $\{3, 5, 7, 9\}$ satisfazem a condição do problema. Como o número de elementos não é muito grande, podemos tentar enumerar todos os subconjuntos que satisfazem à condição, porém, podemos resolver essa questão pelo primeiro lema de Kaplansky.

7.1. Primeiro Lema de kaplansky

Para formar os subconjuntos com 4 elementos, podemos marcar os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ com sinais " $+$ " e sinais " $-$ ", o sinal positivo indicará a presença do elemento no subconjunto e o sinal negativo indicará a sua ausência. Desse modo, podemos fazer as seguintes representações:

$$\{1, 3, 5, 7\} \to + - + - + - + - - -$$
$$\{2, 4, 6, 9\} \to - + - + - + - - + -$$
$$\{3, 5, 7, 9\} \to - - + - + - + - + -$$

Assim, podemos ver que para formar os subconjuntos com 4 elementos, devemos colocar 6 sinais " $-$ " e 4 sinais " $+$ " em fila, com a condição de que não haja dois sinais positivos consecutivos. Isso pode ser feito fixando-se os 6 sinais " $-$ " e inserindo os 4 sinais " $+$ " entre os 7 espaços disponíveis, conforme a representação abaixo:

$$\_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_ - \_\_$$

Isso pode ser feito de $1 \cdot C_{7,4}$ maneiras.

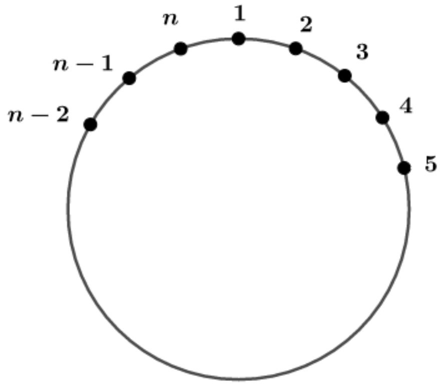
No caso geral, temos p sinais $+$, $n-p$ sinais – e, para obter os subconjuntos com p elementos, temos 1 modo de organizar os sinais $-$ e $C_{n-p+1,p}$ maneiras de inserir os sinais $+$, pelo princípio multiplicativo, o número de subconjuntos que satisfazem à condição é $1 \cdot C_{n-p+1,p}$. Esse é o primeiro lema de Kaplansky:

O número de subconjuntos com p elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ sem números consecutivos é:

$$\boxed{f(n,p) = C_{n-p+1,p}}$$

7.2. Segundo Lema de Kaplansky

O segundo lema de Kaplansky trata do mesmo assunto, porém, os elementos 1 e n são consecutivos, isto é, os elementos de $\{1, 2, \dots, n\}$ estão arrumados em círculo:



A pergunta é: de quantos modos é possível formar um subconjunto de p elementos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$, considerando 1 e n consecutivos, no qual não há elementos consecutivos?

Temos duas possibilidades:

a) Subconjuntos com o elemento 1. Nesse caso, não podemos ter os elementos 2 e n. Logo, para formar os subconjuntos com o elemento 1, devemos escolher $p-1$ dentre os $n-2$ disponíveis $\{3, 4, 5, \dots, n-1\}$. O número de maneiras que isso pode ser feito é

$$f(n-3, p-1) = C_{n-3-(p-1)+1, p-1} = C_{n-p-1, p-1}$$

b) Subconjuntos sem o elemento 1. Agora, podemos escolher p elementos dentre os $n-1$ disponíveis $\{2, 3, \dots, n\}$. Isso pode ser feito de $f(n-1, p) = C_{n-1-p+1, p} = C_{n-p, p}$ maneiras.

Portanto, a resposta para essa pergunta é dada pela soma:

$$f(n-3, p-1) + f(n-1, p) = C_{n-p-1, p-1} + C_{n-p, p}$$
$$= \frac{(n-p-1)!}{(p-1)!\,(n-2p)!} + \frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{(n-p-1)!\,p + (n-p)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!}(p+n-p)$$
$$= n\frac{(n-p-1)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{n}{n-p}\,\frac{(n-p)!}{p!\,(n-2p)!} = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p}$$

Esse é o segundo lema de Kaplansky. Enunciemos:

O número de subconjuntos de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ nos quais não há números consecutivos é, considerando 1 e n consecutivos, igual a:

$$\boxed{g(n, p) = \frac{n}{n-p} \cdot C_{n-p, p}}$$

8. Binômio de Newton

Previamente ao estudo do binômio de Newton, precisamos nos acostumar a usar o número binomial. Vimos, no tópico de combinações, que esse número é a combinação de n elementos tomados p a p:

$$C_{n,p} = \binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)! \cdot p!}, se\ 0 \le p \le n \\ 0, se\ p > n\ ou\ p < 0 \end{cases}$$

Na qual n e p são números naturais.

Já estudamos, no início desse curso, alguns produtos notáveis envolvendo binômios, relembremos:

$$(x+y)^0 = 1$$
$$(x+y)^1 = x + y$$
$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Para calcular as potências de expoentes naturais $n > 3$ do binômio, podemos pegar os produtos notáveis conhecidos e fazer a multiplicação. Por exemplo, para calcular $(x+y)^4$, fazemos:

$$(x+y)^4 = (x+y)^3 \cdot (x+y)$$

E usamos o produto notável da potência cúbica para obter o produto notável da quarta potência do binômio:

$$(x+y)^4 = (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \cdot (x+y)$$

Fazendo as contas, encontramos:

$$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

Esse método de cálculo é muito trabalhoso quando tomamos um n grande. É aí que entra o Binômio de Newton, ele permite calcular a n-ésima potência do binômio através da seguinte fórmula:

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

$\binom{n}{k}$ é chamado número binomial ou coeficiente binomial e ela é equivalente a:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = C_{n,k}$$

Perceba que, no desenvolvimento, temos $n+1$ termos, que vem do somatório de 0 a n.

A demonstração dessa fórmula será feita após aprendermos a relação de Stifel.

Vejamos um exemplo de como aplicar essa fórmula. Vamos encontrar o produto notável de $(x+y)^5$ usando a fórmula do binômio de Newton:

$$(x+y)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} x^{5-k} y^k$$

$$(x+y)^5 = \binom{5}{0} x^{5-0}y^0 + \binom{5}{1} x^{5-1}y^1 + \binom{5}{2} x^{5-2}y^2 + \binom{5}{3} x^{5-3}y^3 + \binom{5}{4} x^{5-4}y^4 + \binom{5}{5} x^{5-5}y^5$$

$$(x+y)^5 = \left(\frac{5!}{5! \cdot 0!}\right) x^5 + \left(\frac{5!}{4! \cdot 1!}\right) x^4y + \left(\frac{5!}{3! \cdot 2!}\right) x^3y^2 + \left(\frac{5!}{2! \cdot 3!}\right) x^2y^3 + \left(\frac{5!}{1! \cdot 4!}\right) xy^4 + \left(\frac{5!}{0! \cdot 5!}\right) y^5$$

$$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 20x^3y^2 + 20x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

8.1. Termo Geral

Do binômio de Newton, podemos ver que a seguinte fórmula:

$$\boxed{T_{k+1} = \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}$$

Permite calcular os termos do desenvolvimento de $(x+y)^n$. Essa fórmula é chamada de termo geral.

Vejamos alguns exemplos de aplicação.

1) Determine o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $\left(x^4 + \frac{1}{x}\right)^{10}$.

Apliquemos a fórmula do termo geral do desenvolvimento:

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} (x^4)^{10-k} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \binom{10}{k} \frac{x^{40-4k}}{x^k} = \binom{10}{k} x^{40-5k}$$

Como queremos calcular o coeficiente de x^5, façamos:

$$x^5 = x^{40-5k} \Rightarrow 5 = 40 - 5k \Rightarrow 5k = 35 \Rightarrow k = 7$$

Assim, o termo em x^5 é

$$T_{k+1} = \binom{10}{k} x^{40-5k}$$

$$T_8 = \binom{10}{7} x^{40-35} = 120x^5$$
$$\therefore 120$$

2) Determine o termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right)^{20}$.

Calculemos o termo geral do desenvolvimento:

$$T_{k+1} = \binom{20}{k}(x^3)^{20-k}\left(\frac{1}{x^2}\right)^k = \binom{20}{k}\left(\frac{x^{60-3k}}{x^{2k}}\right) = \binom{20}{k}x^{60-5k}$$

O termo independente de x ocorre quando:

$$60 - 5k = 0 \Rightarrow 5k = 60 \Rightarrow k = 12$$

Para esse valor de k, temos:

$$T_{13} = \binom{20}{12} = \frac{20!}{12! \cdot 8!} = 125.970$$

3) Calcule o termo máximo do desenvolvimento de $\left(1 + \frac{1}{3}\right)^{62}$.

Façamos a suposição de que T_{M+1} é o termo máximo do desenvolvimento do binômio, assim, temos:

$$T_{M+1} = \binom{62}{M} 1^{62-M}\left(\frac{1}{3}\right)^M = \binom{62}{M} \cdot \frac{1}{3^M}$$

Como T_{M+1} é o termo máximo, temos $T_{M+1} > T_M$ e $T_{M+1} > T_{M+2}$, logo:

$$T_{M+1} > T_M \Rightarrow \binom{62}{M} \cdot \frac{1}{3^M} > \binom{62}{M-1} \cdot \frac{1}{3^{M-1}} \Rightarrow \frac{62!}{M! \cdot (62-M)!} > \frac{3 \cdot 62!}{(M-1)! \cdot (63-M)!}$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{62!}}{M \cdot \cancel{(M-1)!} \cdot \cancel{(62-M)!}} > \frac{3 \cdot \cancel{62!}}{\cancel{(M-1)!} \cdot (63-M) \cdot \cancel{(62-M)!}}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{M} > \frac{3}{(63-M)} \Rightarrow 63 - M > 3M \Rightarrow 63 > 4M \Rightarrow M < \frac{63}{4} = 15{,}75$$

$$T_{M+1} > T_{M+2} \Rightarrow \binom{62}{M} \cdot \frac{1}{3^M} > \binom{62}{M+1} \cdot \frac{1}{3^{M+1}} \Rightarrow \frac{62! \cdot 3}{M! \cdot (62-M)!} > \frac{62!}{(M+1)! \cdot (61-M)!}$$
$$\Rightarrow \frac{\cancel{62!} \cdot 3}{\cancel{M!} \cdot (62-M) \cdot \cancel{(61-M)!}} > \frac{\cancel{62!}}{(M+1) \cdot \cancel{M!} \cdot \cancel{(61-M)!}}$$
$$\Rightarrow \frac{3}{62-M} > \frac{1}{M+1} \Rightarrow 3M + 3 > 62 - M \Rightarrow 4M > 59 \Rightarrow M > \frac{59}{4} = 14{,}75$$

Assim, como M é um número natural e $14{,}75 < M < 15{,}75$, temos $M = 15$. Portanto, o termo máximo é:

$$T_{16} = \binom{62}{15} \cdot \frac{1}{3^{15}}$$

8.2. Triângulo de Pascal

O Triângulo de Pascal, também conhecido como Triângulo de Tartaglia, é um algoritmo que permite encontrar os valores dos coeficientes binomiais do desenvolvimento de $(x+y)^n, n \in \mathbb{N}$. O nome triângulo não é por acaso, o algoritmo é formado por infinitos números binomiais distribuídos em linhas e colunas, esse número pode ser representado por $\binom{n}{k}$, no qual n representa a linha e k a coluna.

Vejamos a representação do Triângulo de Pascal:

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
\Rightarrow
\begin{array}{ccccccc}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Note que iniciamos as linhas e colunas em zero.

Perceba também que os elementos da linha n do Triângulo de Pascal são os coeficientes do desenvolvimento de $(x+y)^n$. Do binômio de Newton, temos

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Para $n = 0$:

$$(x+y)^0 = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$$

Para $n = 1$:

$$(x+y)^1 = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y$$

Para $n = 2$:

$$(x+y)^2 = \binom{2}{0} x^2 y^0 + \binom{2}{1} x^1 y^1 + \binom{2}{2} x^0 y^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Para $n = 3$:

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0} x^3 y^0 + \binom{3}{1} x^2 y^1 + \binom{3}{2} x^1 y^2 + \binom{3}{3} x^0 y^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

O Triângulo de Pascal possui diversas propriedades. Uma delas permite encontrar facilmente os coeficientes binomiais, essa propriedade é chamada de Relação de Stifel.

8.2.1. Relação de Stifel

Somando-se dois elementos consecutivos de uma mesma linha, obtemos o elemento logo abaixo da última parcela.

$$\boxed{\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

8.2.2. Binomial complementar

Em uma mesma linha do Triângulo de Pascal, os elementos equidistantes dos extremos são iguais:

$$\boxed{\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}}$$

8.2.3. Teorema das linhas

A soma dos elementos da linha n é igual a 2^n:

$$\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n}$$

8.2.4. Teorema das colunas

A soma dos elementos de uma coluna p, iniciando-se pela linha p até a linha n, é igual ao elemento que está na linha $n+1$ e coluna $p+1$.

$$\boxed{\binom{p}{p} + \binom{p+1}{p} + \binom{p+2}{p} + \cdots + \binom{n}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

O teorema das colunas é muito útil para resolver somatórios. Veja o exemplo.

1) Calcule o valor da soma:

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1)$$

Resolução

A soma pode ser escrita usando o somatório:

$$S = \sum_{k=1}^{n} k \cdot (k+1)$$

Perceba que $\binom{k+1}{2} = \frac{(k+1)!}{2! \cdot (k-1)!} = \frac{(k+1) \cdot k}{2}$, assim,

$$k\cdot(k+1)=2\cdot\binom{k+1}{2}$$

Substituindo essa relação no somatório:

$$S=\sum_{k=1}^{n}2\cdot\binom{k+1}{2}=2\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{k+1}{2}$$

$$S=2\cdot\left(\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\cdots+\binom{n+1}{2}\right)$$

Agora podemos aplicar o teorema das colunas na soma e encontrar:

$$S=2\cdot\binom{n+2}{3}=2\cdot\left(\frac{(n+2)!}{3!\cdot(n-1)!}\right)=2\cdot\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{6}$$

$$\therefore S=\frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3}$$

8.2.5. Teorema das diagonais

A soma dos elementos de uma diagonal do triângulo de Pascal, iniciando-se pelo primeiro elemento da diagonal, é igual ao elemento que está logo abaixo da última parcela da soma.

$$\boxed{\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\cdots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

9. Polinômio de Leibniz

Estudamos o binômio de Newton, essa fórmula do binômio pode ser generalizada para multinômios, a qual chamamos de polinômio de Leibniz ou fórmula do multinômio de Newton. Vejamos o teorema.

$$\left(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_p\right)^n=\sum\frac{n!}{\alpha_1!\cdot\alpha_2!\cdots\alpha_p!}x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdots x_p^{\alpha_p}$$

1. Determine o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(x^2+2x+5)^5$.

Resolução

$$(x^2 + 2x + 5)^5 = \sum \frac{5!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} (x^2)^{\alpha_1} (2x)^{\alpha_2} (5)^{\alpha_3}$$

$$= \sum \frac{5!}{\alpha_1! \cdot \alpha_2! \cdot \alpha_3!} 2^{\alpha_2} 5^{\alpha_3} x^{2\alpha_1 + \alpha_2}$$

Inicialmente, devemos ter:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5$$

Para encontrar o coeficiente de x^5, façamos:

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = 5$$

Obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 5 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 5 \end{cases}$$

Agora, criamos a seguinte tabela para encontrar as soluções:

α_1	α_2	α_3
0	5	0
1	3	1
2	1	2

Para cada tripla ordenada, temos:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0, 5, 0) \to \frac{5!}{0! \cdot 5! \cdot 0!} 2^5 5^0 x^5 = 32x^5$$

$$(1, 3, 1) \to \frac{5!}{1! \cdot 3! \cdot 1!} 2^3 5^1 x^5 = 400x^5$$

$$(2, 1, 2) \to \frac{5!}{2! \cdot 1! \cdot 2!} 2^1 5^2 x^5 = 1500x^5$$

Portanto, o coeficiente de x^5 é dado pela soma:

$$32 + 400 + 1500 = 1932$$

Gabarito: 1932

10. Questões de Provas Anteriores

Análise Combinatória

ITA

2. (ITA/2018)

Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é $15/11$. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

a) 2 e 11

b) 3 e 10

c) 4 e 9

d) 5 e 8

e) 6 e 7

3. (ITA/2017)

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?

4. (ITA/2016)

Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguidos dos demais, o maior valor possível de N é igual a:

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

5. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

6. (ITA/2014)

Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

7. (ITA/2013)

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

8. (ITA/2012)

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de $1{,}5$ e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

9. (ITA/2011)

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

10. (ITA/2007)

Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204

b) 206

c) 208

d) 210

e) 212

11. (ITA/2007)

Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

12. (ITA/2006)

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4 \cdot 30$

b) $4^3 \cdot 60$

c) $5^3 \cdot 60$

d) $\binom{7}{3} \cdot 4^3$

e) $\binom{10}{7}$

13. (ITA/2004)

Considere 12 pontos distintos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210

b) 315

c) 410

d) 415

e) 521

14. (ITA/2003)

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 72

15. (ITA/2002)

Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A) \cup P(\emptyset)$ é igual a

a) $8.$

b) $16.$

c) $20.$

d) $17.$

e) $9.$

16. (ITA/2002)

Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

a) 1692

b) 1572

c) 1520

d) 1512

e) 1392

IME

17. (IME/2020)

Diversos modelos de placas de identificação de veículos já foram adotados no Brasil. Considere os seguintes modelos de placas e a descrição de sua composição alfanumérica:

Modelo 1: AB123 (duas letras seguidas de três números)

Modelo 2: AB1234 (duas letras seguidas de quatro números)

Modelo 3: ABC1234 (três letras seguidas de quatro números)

Modelo 4: ABC1D23 (três letras seguidas de um número, uma letra e dois números)

Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as quantidades das combinações alfanuméricas possíveis para os modelos 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Os números c_1, c_2, c_3 e c_4 são termos de uma progressão aritmética com infinitos termos com a maior razão possível. A soma dos algarismos da razão dessa progressão é:

a) 11

b) 12

c) 14

d) 16

e) 19

Observação:

• considere o alfabeto com 26 letras.

18. (IME/2020)

Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres “20” aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência “A12” aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12. Considere a placa do modelo antigo IME2019.

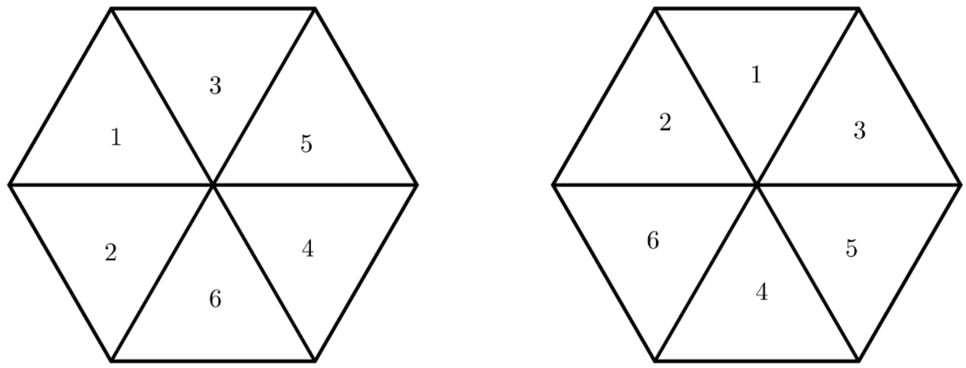
Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P.

Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.

Obs: considere o alfabeto com 26 letras

19. (IME/2017)

Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.



a) 12

b) 24

c) 36

d) 48

e) 96

20. (IME/2015)

Os coeficientes $a_0, \ldots, a_{2014}$ do polinômio $P(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \cdots + a_1x + a_0$ são tais que $a_i \in \{0,1\}$, para $0 \leq i \leq 2014$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras de $P(x)$?

b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

21. (IME/2015)

De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem.

22. (IME/2014)

Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode ser organizada para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas).

23. (IME/2014)

Em uma festa de aniversário estão presentes n famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá 2 pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de n deverá ser

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20

e) 21

24. (IME/2013)

Considere a seguinte definição:

"dois pontos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$, de coordenadas $(\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{y_p})$ e $(\boldsymbol{x_q}, \boldsymbol{y_q})$, respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $\boldsymbol{x_p} = \boldsymbol{x_q}$ ou $\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{y_q}$"

Dado o conjunto $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$. Determine quantas funções bijetoras $f: S \to S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum.

25. (IME/2011)

Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

a) 1.287

b) 14.112

c) 44.200

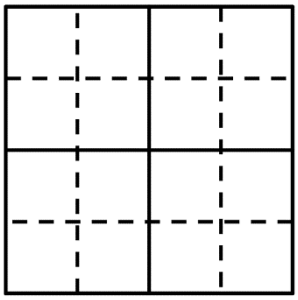
d) 58.212

e) 62.822

26. (IME/2009)

A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números $1, 2, 3$ e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



27. (IME/2008)

Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

28. (IME/2008)

De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

a) $\binom{n+2}{2}$

b) $\binom{n}{3}$

c) $\frac{n!}{3!}$

d) $(n-3)!$

e) 3^n

29. (IME/2007)

Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de sequências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m+n$ bolas.

Obs: Uma sequência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

30. (IME/2007)

Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo-se que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

a) 288

b) 455

c) 480

d) 910

e) 960

Binômio de Newton

ITA

31. (ITA/2018)

Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7.920, então $a + b$ é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

32. (ITA/2014)

Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

é igual a

a) $2^n + 1$.

b) $2^{n+1} + 1$.

c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.

d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

e) $\frac{2^n-1}{n}$.

33. (ITA/2013)

O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1 + x + y)^{10}$ é0

a) 3150

b) 6300

c) 75600

d) 81900

e) 151200

34. (ITA/2010)

A expressão $\left(2\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^5-\left(2\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$

b) $2690\sqrt{5}$

c) $2712\sqrt{5}$

d) $1584\sqrt{15}$

e) $1604\sqrt{15}$

35. (ITA/2006)

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$.

36. (ITA/2004)

O termo independente de x no desenvolvimento do binômio

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$$

é

a) $729\sqrt[3]{45}$

b) $972\sqrt[3]{15}$

c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$

e) $165\sqrt[3]{75}$

37. (ITA/2003)

Considere o conjunto $S=\{(a,b)\in\mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}: a+b=18\}$. A soma de todos os números da forma, $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall(a,b)\in S$, é:

a) 8^6

b) $9!$

c) 9^6

d) 12^6

e) $12!$

38. (ITA/2002)

Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

39. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80

b) 90

c) 70

d) 100

e) 60

40. (ITA/2001)

A respeito das combinações mostradas na figura adiante, temos que, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

$$a_n = \binom{2n}{n} \text{ e } b_n = \binom{2n}{n-1}$$

a) $\frac{n!}{n+1}a_n$

b) $\frac{2n}{n+1}a_n$

c) $\frac{n}{n+1}a_n$

d) $\frac{2}{n+1}a_n$

e) $\frac{1}{n+1}a_n$

IME

41. (IME/2017)

No desenvolvimento de $\left(x \cdot sen\, 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a $\frac{63}{256}$. Considerando que β é um número real, com $0 < \beta < \frac{\pi}{8}$ e $x \neq 0$, o valor de β é:

a) $\frac{\pi}{9}$

b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{16}$

d) $\frac{\pi}{18}$

e) $\frac{\pi}{24}$

42. (IME/2016)

O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}+\binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$

b) $\binom{2020}{7}$

c) $\binom{2021}{5}$

d) $\binom{2021}{6}$

e) $\binom{2022}{5}$

11. Gabarito

2. e
3. 150
4. e
5. a) $n(S) = 10$ b) $\{x^4+2x^3+x^2+2x+2, x^4+2x^3+2x^2+2x+1, 2x^4+2x^3+x^2+2x+1\}$
6. 220 maneiras
7. 2 formas
8. d
9. 11155
10. e
11. 125 comissões
12. a
13. a
14. c
15. b
16. d
17. e
18. 266.725
19. d
20. a) $\{-1, 0\}$ b) 20141006.
21. 429
22. 2620
23. a
24. 72

25. d
26. 288
27. 2.088.960
28. sem alternativa
29. $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}+\frac{\left(\frac{m+(n-1)}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{(n-1)}{2}!}+\frac{\left(\frac{(m-1)+n}{2}\right)!}{\frac{m-1}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}$
30. d
31. b
32. d
33. a
34. b
35. 414
36. e
37. a
38. Demonstração.
39. b
40. e
41. e
42. d

12. Questões de Provas Anteriores Resolvidas e Comentadas

Análise Combinatória

ITA

2. (ITA/2018)

Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo $m > n$. Com os pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é $15/11$. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

a) 2 e 11

b) 3 e 10

c) 4 e 9

d) 5 e 8

e) 6 e 7

Comentários

Para formar quadriláteros, temos que escolher dois pontos em r e dois pontos em s, então, temos:

$$N_Q = \binom{m}{2}\cdot\binom{n}{2}$$

Para formar triângulos, podemos escolher dois pontos na reta r e um ponto na reta s, mas também podemos escolher dois pontos em s e um ponto na reta r:

$$N_T = \binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m$$

Portanto, podemos calcular a razão $\frac{N_Q}{N_T}$, a qual é $\frac{15}{11}$, de acordo com o enunciado. Logo:

$$\frac{N_Q}{N_T} = \frac{\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}}{\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m} = \frac{15}{11}$$

Então, calculando as combinações acima, temos:

$$\frac{N_Q}{N_T} = \frac{\binom{m}{2} \cdot \binom{n}{2}}{\binom{m}{2} \cdot n + \binom{n}{2} \cdot m} = \frac{\frac{m!}{2!\,(m-2)!} \cdot \frac{n!}{2!\,(n-2)!}}{\frac{m!}{2!\,(m-2)!} \cdot n + \frac{n!}{2!\,(n-2)!} \cdot m} = \frac{\frac{m(m-1)}{2!} \cdot \frac{n(n-1)}{2!}}{\frac{m(m-1)}{2!} \cdot n + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot m}$$

$$\frac{N_Q}{N_T} = \frac{\frac{mn(m-1)(n-1)}{2}}{mn(m-1+n-1)} = \frac{(m-1)(n-1)}{2(m+n-2)} = \frac{15}{11}$$

$$11 \cdot (m-1) \cdot (n-1) = 30 \cdot (m+n-2)$$

Pelo enunciado, temos 13 pontos, ou seja, $m + n = 13$:

$$11 \cdot (m-1) \cdot (n-1) = 30 \cdot (13-2)$$

$$(m-1) \cdot (n-1) = 30$$

Mas temos que $30 = 30 \cdot 1 = 15 \cdot 2 = 6 \cdot 5 = (m-1) \cdot (n-1)$, assim, as possíveis soluções são, sabendo que $m > n$ e $m < 13$:

De $(m-1) \cdot (n-1) = 30 \cdot 1$, temos: $m = 31$ e $n = 2$, a solução **não serve**, pois $m > 13$.

De $(m-1) \cdot (n-1) = 15 \cdot 2$, temos: $m = 16$ e $n = 3$, a solução **não serve**, pois $m > 13$.

De $(m-1) \cdot (n-1) = 6 \cdot 5$, temos: $m = 7$ e $n = 6$, a solução **serve**, pois $m < 13$.

Gabarito: "e"

---

3. **(ITA/2017)**

Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas $f : B \to A$ existem?

Comentários

Para que uma função seja sobrejetiva de $B \to A$, não deve sobrar nenhum elemento em A, ou seja, não deve existir nenhum elemento de A que não seja mapeado pela função f.

Além disso, todos os valores de B devem levar a um valor em A, portanto, podemos visualizar isso como $n(B)$ setas saindo de B e chegando em A, na qual cada uma dessas setas representa a forma como a função f mapeia os valores de B em A.

Então, seja $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$ e $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, podemos mapear o conjunto B em A seguindo o seguinte princípio: existem 5 flechas saindo de B, e devemos dividi-las em 3 grupos não vazios. Então, temos as seguintes possibilidades de grupos:

$$g_1 = \{3\ flechas \to a_i, 1\ flecha \to a_j, 1\ flecha \to a_k\}$$

$$g_2 = \{2\ flechas \to a_i, 2\ flechas \to a_j, 1\ flecha \to a_k\}$$

onde $i \neq j$, $j \neq k$ e $i \neq k$.

Em g_1, devemos escolher 3 dos 5 elementos de B, temos $\binom{5}{3}$ possibilidades, para atingir um dos 3 elementos de A, temos 3 possibilidades. Daí, restam duas flechas que apontam para os outros dois elementos e podem ser permutadas de 2! formas. Então, temos:

$$N(g_1) = \binom{5}{3} \cdot 3 \cdot 2! = 60$$

Em g_2, devemos escolher 2 dos 5 elementos de B, contudo, devemos dividir por 2! para desconsiderar as permutações, uma vez que devemos escolher duas vezes dessa maneira, então, temos $\binom{5}{2} \cdot \frac{1}{2!}$ possibilidades para atingir um dos 3 elementos de A, então, temos **3** possibilidades. Além disso, restam 3 elementos no conjunto B para serem escolhidos, então temos **3** possibilidades de escolher uma flecha saindo de B, que vai atingir um dos **2** elementos restantes de A. Por fim, temos **1** possibilidade de escolher 2 elementos entre os 2 restantes que atingirão **1** elemento restante em A. Portanto, ao todo, temos:

$$N(g_2)=\left(\binom{5}{2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot 3\right)\cdot(3\cdot 2)\cdot(1\cdot 1)=90$$

Portanto, ao todo temos:

$$N(g_1)+N(g_2)=60+90=150$$

Gabarito: 150

---

4. (ITA/2016)

Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguidos dos demais, o maior valor possível de N é igual a:

a) 10

b) 15

c) 20

d) 25

e) 30

Comentários

Chamemos as cores diferentes de A, B, C, D, E e F, então fixando o cubo, pintemos a sua face da frente de 1 forma. Então, podemos pintar a face oposta de 5 formas. Não somente, podemos fazer uma permutação circular das cores em suas faces laterais, então, como temos 4 lados, temos $(4-1)!$ possibilidades, logo:

$$N=5\cdot(4-1)!=30$$

Gabarito: "e"

---

5. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Comentários

a) Podemos escrever um polinômio de quarto grau:

$$p(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$$

Então, sabemos que os elementos de S possuem três coeficientes iguais a 2, isso é feito de $\binom{5}{3}=10$ formas, os outros dois coeficientes são iguais a 1, sendo automaticamente determinados quando escolhemos três coeficientes iguais a 2. Desse modo:

$$n(S)=10$$

b) Se -1 é raiz, temos:

$$p(-1)=a_4-a_3+a_2-a_1+a_0=0$$

Além disso, para $x=1$, podemos escrever:

$$p(1)=a_4+a_3+a_2+a_1+a_0$$

Contudo, sabemos que três desses coeficientes são iguais a 2 e dois deles são iguais a 1, ou seja:

$$p(1) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 8$$

Então, temos:

$$\begin{cases} a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 8 \\ a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação da segunda:

$$2 \cdot a_3 + 2 \cdot a_1 = 8$$

Então, como $a_i \in \{1,2\}$, a igualdade só ocorre se e somente se:

$$a_3 = a_1 = 2$$

Desse modo, temos as seguintes possibilidades:

$$(a_4, a_3, a_2, a_1, a_0) \in \{(1,2,1,2,2), (1,2,2,2,1), (2,2,1,2,1)\}$$

Ou seja, o subconjunto (A) dos polinômios que têm -1 como uma das raízes:

$$A = \{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}$$

Gabarito: a) $n(S) = 10$ b) $\{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}$

---

6. **(ITA/2014)**

Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

Comentários

Nesse caso, podemos dividir os possíveis paralelepípedos formados em três grupos:

a) Se todas as medidas forem diferentes:

Então, dentre os 10 números possíveis, devemos escolher 3, assim, temos $\binom{10}{3} = 120$ possibilidades.

b) Se uma medida for distinta:

Então, podemos escolher de 10 formas as medidas iguais e de uma forma a medida distinta, então temos $10 \cdot 9 = 90$ possibilidades.

c) Se todas as medidas forem iguais:

Então, podemos escolher de 10 formas diferentes o valor dessas medidas, ou seja, temos 10 possibilidades.

Por fim, ao todo, temos:

$$10 + 90 + 120 = 220\ possibilidades$$

Gabarito: 220 maneiras

---

7. **(ITA/2013)**

Quantos tetraedros regulares de mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

Comentários

Fixando um tetraedro e pintando sua face interior com uma das quatro cores, restam 3 cores, e podemos realizar uma permutação circular em suas outras três faces restantes, consequentemente, temos:

$$1 \cdot (3 - 1)! = 2\ formas$$

Gabarito: 2 formas

---

8. **(ITA/2012)**

Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de $1,5$ e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

Comentários

Para isso, a soma da quantidade de cada moeda deve ser 25 centavos, então, devemos ter a seguinte equação:

$$1 \cdot a + 5 \cdot b + 10 \cdot c = 25$$

1) $c = 2$:

$$a + 5b + 20 = 25$$
$$a + 5b = 5$$

Então, temos as possibilidades:

$$(a, b) = (0,1) \text{ e } (a, b) = (5,0)$$

Assim, existem 2 possibilidades.

2) $c = 1$:

$$a + 5b = 15$$

Então, temos as possiblidades:

$$(a, b) = (0,3) \text{ ou } (5,2) \text{ ou } (10,1) \text{ ou } (15,0)$$

Assim, existem 4 possibilidades:

3) $c = 0$:

$$a + 5b = 25$$

Então, temos as possibilidades:

$$(a, b) = (0,5) \text{ ou } (5,4) \text{ ou } (10,3) \text{ ou } (15,2) \text{ ou } (20,1) \text{ ou } (25,0)$$

Assim, existem 6 possibilidades.

Portanto, ao todo existem $2 + 4 + 6 = 12$ possibilidades.

Gabarito: “d”

---

9. (ITA/2011)

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Comentários

Temos, ao todo $5 + 4 + 2 = 11$ livros distintos, então, ao todo, existem $11!$ Possíveis configurações dos livros. Além disso, se os livros do mesmo assunto estão juntos, as matérias podem ser permutadas de $3!$ maneiras. Não somente, em história podemos permutar os livros de $5!$ maneiras, em biologia podemos permutar de $4!$ maneiras e em espanhol podemos permutar de $2!$ maneiras.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 2!}{11!} = \frac{1}{1155}$$

Gabarito: $\frac{1}{1155}$

---

10. (ITA/2007)

Determine quantos números de 3 algarismos podem ser formados com $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, satisfazendo à seguinte regra: O número não pode ter algarismos repetidos, exceto quando iniciar com 1 ou 2, caso em que o 7 (e apenas o 7) pode aparecer mais de uma vez. Assinale o resultado obtido.

a) 204

b) 206

c) 208

d) 210

e) 212

Comentários

Para formar um número com 3 algarismos distintos, devemos escolher 3 números dentre $1, 2, 3, 4, 5, 6$ e 7, então, temos $\binom{7}{3}$ possibilidades. Além disso, podemos permutar os três algarismos de 3! formas diferentes, assim, temos que o número de algarismos distintos é:

$$\binom{7}{3} \cdot 3! = 210$$

Além disso, temos que considerar dois casos em que se tem algarismos repetidos, que é quando o número começa com 1 ou 2 e possui dois algarismos 7: 177 e 277, assim, existem 2 possibilidades.

Portanto, ao todo temos:

$$210 + 2 = 212\ possibilidades$$

Gabarito: "e"

---

11. (ITA/2007)

Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Comentários

Das comissões de pelo menos 1 moça e 1 rapaz, tem-se as seguintes possibilidades:

i) 1 rapaz e 4 moças:

Devemos escolher 1 rapaz entre os 5 existentes e 4 moças entre as 4 existentes, então, temos:

$$p_1 = \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{4} = 5$$

ii) 2 rapazes e 3 moças:

Devemos escolher 2 rapazes entre os 5 existentes e 3 moças entre as 4 existentes, então, temos:

$$p_2 = \binom{5}{2} \cdot \binom{4}{3} = 40$$

iii) 3 rapazes e 2 moças:

Devemos escolher 3 rapazes entre os 5 existentes e 2 moças entre as 4 existentes, então, temos:

$$p_3 = \binom{5}{3} \cdot \binom{4}{2} = 60$$

iv) 4 rapazes e 1 moça:

Devemos escolher 4 rapazes entre os 5 existentes e 1 moça entre as 4 existentes, então, temos:

$$p_4 = \binom{5}{4} \cdot \binom{4}{1} = 20$$

Por fim, temos que o total de comissões é:

$$total = 5 + 40 + 60 + 20 = 125$$

Gabarito: 125 comissões

---

12. (ITA/2006)

Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4 \cdot 30$

b) $4^3 \cdot 60$

c) $5^3 \cdot 60$

d) $\binom{7}{3} \cdot 4^3$

e) $\binom{10}{7}$

Comentários

O candidato deve errar 3 questões. Podemos escolher as questões que ele erra de $\binom{10}{3}$ maneiras. Além disso, para cada questão errada há 4 possibilidades de alternativas que o candidato pode ter marcado, já que somente uma é o gabarito. Dessa maneira, temos que o número de formas é dado por:

$$\binom{10}{3} \cdot 4^3 = 4^4 \cdot 30$$

Gabarito: "a"

---

13. (ITA/2004)

Considere 12 pontos distintos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?

a) 210

b) 315

c) 410

d) 415

e) 521

Comentários

Quaisquer três pontos não colineares formam um triângulo, desse modo, para saber o número de triângulos, devemos calcular o número total de triângulos formados com quaisquer três pontos e excluir do número de combinações que ocorreram com pontos colineares, ou seja, com os pontos que estão sobre a reta citada no enunciado:

$$N_{triangulos} = \binom{12}{3} - \binom{5}{3} = 210$$

Gabarito: "a"

---

14. (ITA/2003)

O número de divisores de 17640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:

a) 24

b) 36

c) 48

d) 54

e) 72

Comentários

Considerando os divisores nos naturais, temos que:

$$17640 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

Em que o número de divisores é o produto do valor de cada expoente somado de 1:

$$n_1 = (3+1)\cdot(2+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 72$$

Além disso, dos divisores de 17640, os que não são divisíveis por 3 são os mesmos divisores de:

$$2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2$$

Uma vez que basta zerar o expoente de 3, assim, eliminam-se os divisores que não múltiplos de 3. Desse modo, os divisores não divisíveis por 3 são:

$$n_2 = (3+1)\cdot(0+1)\cdot(1+1)\cdot(2+1) = 24$$

Portanto, o número de divisores que são divisíveis por 3 são:

$$n = 72 - 24 = 48$$

Gabarito: "c"

15. (ITA/2002)

Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B\backslash A) \cup P(\emptyset)$ é igual a

a) $8.$

b) $16.$

c) $20.$

d) $17.$

e) $9.$

Comentários

Sabendo que o vazio é subconjunto de qualquer conjunto, temos que:

$$n\big(P(B\backslash A) \cup P(\emptyset)\big) = n\big(P(B\backslash A)\big)\ (I)$$

Não somente, temos que:

$$n(B\backslash A) = n\big((B \cup A) - A\big)$$

Contudo, A é subconjunto de $B \cup A$, então, temos:

$$n\big((B \cup A) - A\big) = n(B \cup A) - n(A)$$

Portanto:

$$n(B\backslash A) = 12 - 8 = 4$$

Por fim, temos que o número de elementos do conjunto das partes de um conjunto é:

$$n\big(P(X)\big) = 2^{n(X)}$$

Então:

$$n\big(P(B\backslash A)\big) = 2^{n(B\backslash A)} = 2^4 = 16$$

Enfim, de (I):

$$n\big(P(B\backslash A) \cup P(\emptyset)\big) = 16$$

Gabarito: "b"

16. (ITA/2002)

Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

a) 1692

b) 1572

c) 1520

d) 1512

e) 1392

Comentários

Como queremos formar um anagrama no qual duas das quatro letras devem estar em a, b e c, temos que escolher duas entre essas três letras:

$$n_1 = \binom{3}{2} = 3$$

Além disso, temos as 7 letras restantes dentre as 10 primeiras do alfabeto, então, podemos escolher 2 entre essas 7 letras restantes:

$$n_2 = \binom{7}{2} = 21$$

Não somente, dado que escolhemos essas quatro letras e todas são distintas, podemos permutar tais letras e formar novos anagramas de $4!$ formas. Por fim, o número total de maneiras de escrever os anagramas pedidos no enunciado é:

$$n_1 \cdot n_2 \cdot 4! = 3 \cdot 21 \cdot 24 = 1512$$

Gabarito: "d"

IME

17. (IME/2020)

Diversos modelos de placas de identificação de veículos já foram adotados no Brasil. Considere os seguintes modelos de placas e a descrição de sua composição alfanumérica:

Modelo 1: AB123 (duas letras seguidas de três números)

Modelo 2: AB1234 (duas letras seguidas de quatro números)

Modelo 3: ABC1234 (três letras seguidas de quatro números)

Modelo 4: ABC1D23 (três letras seguidas de um número, uma letra e dois números)

Sejam c_1, c_2, c_3 e c_4 as quantidades das combinações alfanuméricas possíveis para os modelos 1, 2, 3 e 4, respectivamente. Os números c_1, c_2, c_3 e c_4 são termos de uma progressão aritmética com infinitos termos com a maior razão possível. A soma dos algarismos da razão dessa progressão é:

a) 11

b) 12

c) 14

d) 16

e) 19

Observação:

• considere o alfabeto com 26 letras.

Comentários

Inicialmente, devemos encontrar os valores de c_1, c_2, c_3 e c_4. Eles são as combinações alfanuméricas dos modelos de placas dados, logo:

Modelo 1: AB123 $\Rightarrow c_1 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^3$

Modelo 2: AB1234 $\Rightarrow c_2 = 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^2 \cdot 10^4$

Modelo 3: ABC1234 $\Rightarrow c_3 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26^3 \cdot 10^4$

Modelo 4: ABC1D23 $\Rightarrow c_4 = 26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 = 26^4 \cdot 10^3$

Note que $c_4 > c_3 > c_2 > c_1$. O enunciado diz que esses números são termos de uma PA:

$$\left(\dots, c_1, \underbrace{\dots}_{nr}, c_2, \underbrace{\dots}_{mr}, c_3, \underbrace{\dots}_{pr}, c_4, \dots \right)$$

Sabemos que numa PA, a distância entre um termo e outro é um número inteiro vezes a razão da PA. Vamos calcular a distância entre os termos:

$$c_2 - c_1 = 26^2 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10^3 = 26^2 \cdot 10^3 \cdot 9 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2$$
$$c_3 - c_2 = 26^3 \cdot 10^4 - 26^2 \cdot 10^4 = 26^2 \cdot 10^4 \cdot 25 = 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^2$$
$$c_4 - c_3 = 26^4 \cdot 10^3 - 26^3 \cdot 10^4 = 26^3 \cdot 10^3 \cdot 16 = 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 13^3$$

Para que a PA tenha a maior razão possível, ela deve ser o máximo divisor comum (MDC) das diferenças calculadas, logo:

$$r = MDC\{2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^3 \cdot 13^2; 2^6 \cdot 5^6 \cdot 13^2; 2^{10} \cdot 5^3 \cdot 13^3\} = 2^5 \cdot 5^3 \cdot 13^2 = 676000$$

Portanto, a soma dos algarismos dessa razão é:

$$6 + 7 + 6 = 19$$

Gabarito: "e".

18. (IME/2020)

Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres "20" aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência "A12" aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12. Considere a placa do modelo antigo IME2019.

Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P.

Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.

Obs: considere o alfabeto com 26 letras

Comentários

O modelo novo de placa tem 7 letras. Vejamos:

Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**

Como queremos que o modelo tenha 3 letras consecutivas iguais às letras presentes em IME2019, vamos avaliar as possibilidades de isso acontecer.

Vamos começar pelas três primeiras casas (que devem ser letra-letra-letra). Observe que, na palavra IME2019, só existe uma sequência de três letras que é **IME.**

Vejamos as casas de 2 a 4 (letra-letra-número). A única sequência letra-letra-número em IME2019 é **ME2**. E, assim, por diante.

A	**I**	**M**	**E**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**
B	**Letra**	**M**	**E**	**2**	**Letra**	**Número**	**Número**
Impossível	Não existe uma sequência letra-número-letra em IME2019						
Impossível	Não existe uma sequência número-letra-número em IME2019						
C	**Letra**	**Letra**	**Letra**	**Número**	**E**	**2**	**0**

Há, portanto, três possibilidades de sequências de três números. Vejamos:

	Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**	**Total**
A	**I**	**M**	**E**	10	26	10	10	**= 26000**
B	26	**M**	**E**	**2**	26	10	10	**= 67600**
C	26	26	26	10	**E**	**2**	**0**	**= 175760**

Devemos considerar ainda as intersecções.

	Letra	**Letra**	**Letra**	**Número**	**Letra**	**Número**	**Número**	**Total**
$\boldsymbol{A \cap B}$	**I**	**M**	**E**	**2**	26	10	10	**= 2600**
$\boldsymbol{A \cap C}$	**I**	**M**	**E**	10	**E**	**2**	**0**	**= 10**
$\boldsymbol{B \cap C}$	26	**M**	**E**	**2**	**E**	**2**	**0**	**= 26**
$\boldsymbol{A \cap B \cap C}$	**I**	**M**	**E**	**2**	**E**	**2**	**0**	**= 1**

Agora, basta aplicar a união de três conjuntos:

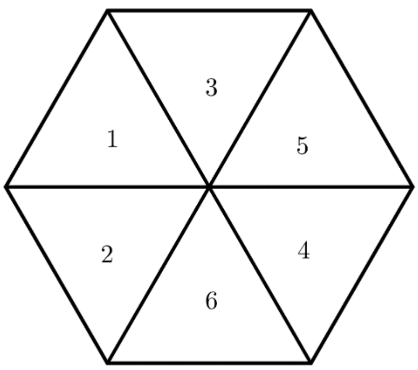
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$n(A \cup B \cup C) = 26000 + 67600 + 175760 - 2600 - 10 - 26 + 1 = 266725$$

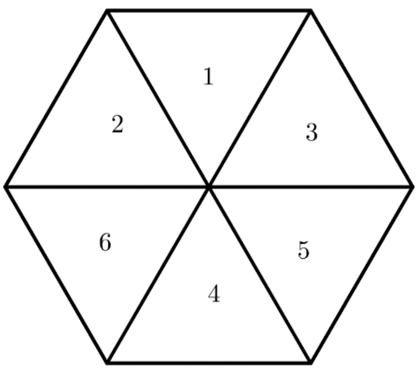
Gabarito: 266.725

---

19. **(IME/2017)**

Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são **diferentes**, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.





a) 12

b) 24

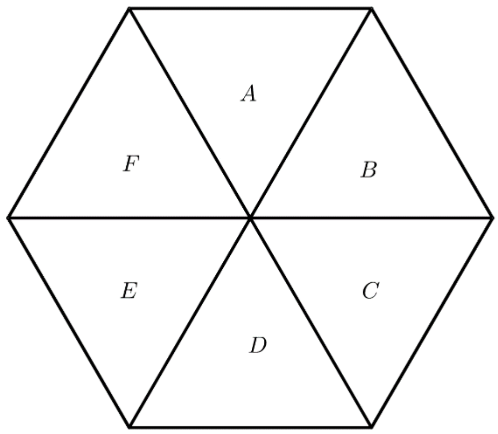
c) 36

d) 48

e) 96

Comentários

Vamos nomear os 6 triângulos, dessa forma, a contagem incluirá soluções obtidas por reflexão ou rotação. Veja a figura abaixo:



Sabendo que:

- 1 e 4 possuem resto igual a 1 na divisão por 3;
- 2 e 5 possuem resto igual a 2 na divisão por 3;
- 3 e 6 possuem resto igual a 0 na divisão por 3;

Para que a soma de 3 números seja múltipla de 3, então necessariamente estes números serão: um múltiplo de 3, um com resto igual a 1 na divisão por 3 e um com resto igual a 2 na divisão por 3. Veja que nenhuma outra combinação resulta em um múltiplo de 3. Assim, pelo princípio multiplicativo, temos que:

- O triângulo A possui 6 opções de escolha de um número (qualquer um de 1 a 6);
- O triângulo B possui 4 opções (não pode ser nenhum do grupo de resto do triângulo A);
- O triângulo C possui 2 opções (não pode ser nenhum dos grupos de restos dos triângulos A e B);
- O triângulo D possui somente 1 opção (conhecendo os valores de B e C, sabemos os restos deles e então sobra um resto possível para o D);
- O triângulo E igualmente possui 1 opção;
- O triângulo F fica com o número que sobrar, portanto, 1 opção também.

Assim, o número de possibilidades de colocar os números nos triângulos é:

$$\boxed{6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 48}$$

Gabarito: “d”

20. (IME/2015)

Os coeficientes $a_0, \ldots, a_{2014}$ do polinômio $P(x) = x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \cdots + a_1 x + a_0$ são tais que $a_i \in \{0,1\}$, para $0 \leq i \leq 2014$.

a) Quais são as possíveis raízes inteiras de $P(x)$?

b) Quantos polinômios da forma acima têm duas raízes inteiras distintas?

Comentários

Item a:

Os coeficientes de $P(x)$ são todos inteiros. Além disso, pelo teorema das raízes racionais, temos que, se $\frac{a}{b}$ é raiz racional de $P(x)$, então ela deve obedecer:

$$a|a_0 \ e \ b|1$$

Como a_0 somente assume dois valores, $0 \ ou \ 1$, as únicas raízes racionais possíveis são:

$$\{-1,0,1\}$$

Note que os coeficientes são todos positivos, do que segue que, para $x \geq 0$, $P(x)$ será sempre positivo, pois:

$$x^{2015} + a_{2014}x^{2014} + \cdots + a_0 \geq x^{2015} \geq 0$$

Disso, as únicas raízes inteiras possíveis são:

$$\{-1, 0\}$$

Item b:

Vimos, no item acima, que as únicas raízes inteiras possíveis são $-1 \ e \ 0$. Logo, para que o polinômio tenha duas raízes inteiras distintas, ambas devem ser suas raízes.

Assim, segue naturalmente que:

$$P(0) = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$

Então, o valor de a_0 já está fixado.

Além disso, temos que:

$$P(-1) = 0 \Rightarrow -1 + a_{2014} - a_{2013} + \cdots - a_1 = 0$$

Ou seja:

$$a_{2014} + a_{2012} + \cdots + a_2 = 1 + a_1 + \cdots + a_{2013} = k$$

Disso, vem:

$$k = a_{2014} + a_{2012} + \cdots + a_2$$
$$k - 1 = a_1 + \cdots + a_{2013}$$

Para satisfazer as equações acima, basta fixar um k e escolher k termos dentre os 1007 possíveis coeficientes disponíveis. Da mesma forma, para satisfazer a segunda equação, devemos escolher $k - 1$ coeficientes dentre os 1007 coeficientes.

São duas decisões independentes, por isso vamos usar o princípio multiplicativo:

$$\binom{1007}{k}\binom{1007}{k-1}$$

Podemos variar o k de 1 a 1007, pois se $k = 0$ teríamos $k - 1 = -1$, que não é possível de satisfazer dada a segunda equação.

Pelo princípio aditivo, temos que o total de polinômios é dado por:

$$\binom{1007}{1}\binom{1007}{0} + \cdots \binom{1007}{1007}\binom{1007}{1006} = \sum_{k=1}^{1007}\binom{1007}{k}\binom{1007}{k-1}$$

Para calcular esse somatório, veja que:

$$\sum_{k=1}^{1007}\binom{1007}{k}\binom{1007}{k-1} = \sum_{k=0}^{1006}\binom{1007}{k+1}\binom{1007}{k} = \sum_{k=0}^{1006}\binom{1007}{1006-k}\binom{1007}{k}$$

Imagine agora o seguinte problema:

Você possui duas caixas, uma com 1007 bolas brancas e outra com 1007 bolas pretas. De quantas maneiras podemos escolher 1006 bolas desse conjunto?

Simples:

$$\binom{2014}{1006}$$

A grande sacada vem agora: podemos contar isso de outra forma? Sim! Basta tomar duas decisões independentes:

1ª decisão: escolher k bolas brancas.
Podemos fazer isso de $\binom{1007}{k}$ maneiras.
2ª decisão: escolher $1006 - k$ bolas pretas.
Podemos fazer isso de $\binom{1007}{1006-k}$ maneiras.
Logo, pelo princípio multiplicativo:

$$\binom{1007}{k}\binom{1007}{1006-k}$$

Podemos variar k de 0 a 1006, logo, pelo princípio aditivo:

$$\sum_{k=0}^{1006}\binom{1007}{1006-k}\binom{1007}{k}$$

Ou seja:

$$\sum_{k=0}^{1006}\binom{1007}{1006-k}\binom{1007}{k}=\binom{2014}{1006}$$

Gabarito: a) $\{-1, 0\}$ b) $\binom{2014}{1006}$.

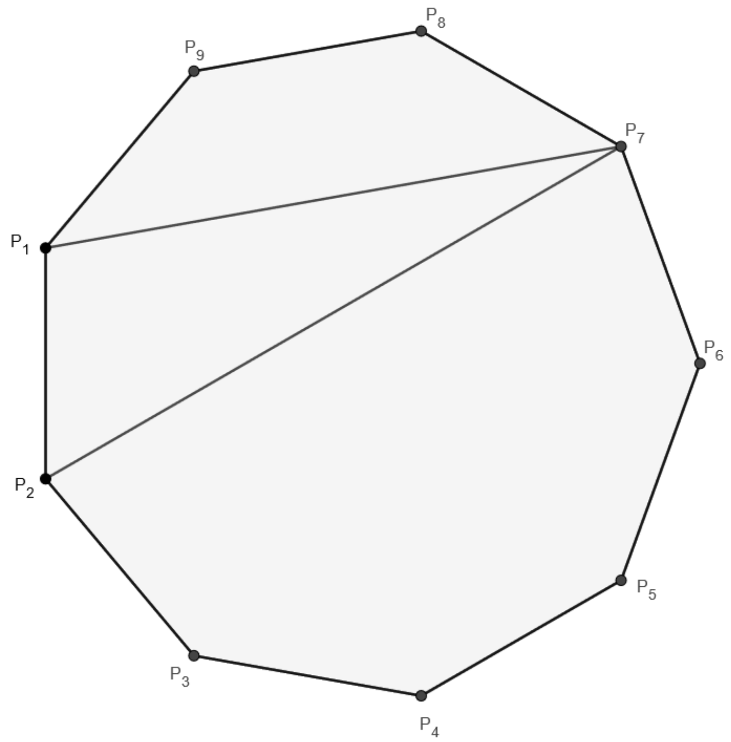
---

21. (IME/2015)

De quantas maneiras podemos decompor um eneágono convexo em triângulos traçando suas diagonais, de forma que essas diagonais não se cortem.

Comentários

Seja um eneágono de vértices $P_1, P_2, \dots, P_9$. Então, seja o lado P_1P_2 de um eneágono, assim, podemos formar triângulos com os vértices $P_3, P_4, \dots, P_9$, sendo que cada um desses triângulos divide o eneágono em dois. Conforme se observa na figura a seguir:



Além disso, suponha que o número de maneiras de dividir o eneágono como pedido no enunciado é dado por M_9. Contudo, quando dividimos o eneágono por meio de um triângulo podemos dividir a região à direita e à esquerda de M_i e M_j maneiras.

Então, conectando três vértices, temos:

1) Lado P_1P_2 conectado com P_3: $M_2 \cdot M_8$ possibilidades;
2) Lado P_1P_2 conectado com P_4: $M_3 \cdot M_7$ possibilidades;
3) Lado P_1P_2 conectado com P_5: $M_4 \cdot M_6$ possibilidades;

.....

6) Lado P_1P_2 conectado com P_8: $M_7 \cdot M_3$ possibilidades;
7) Lado P_1P_2 conectado com P_9: $M_8 \cdot M_2$ possibilidades;

Logo, temos:

$$M_9 = M_2 \cdot M_8 + M_3 \cdot M_7 + M_4 \cdot M_6 + \cdots + M_7 \cdot M_3 + M_8 \cdot M_2$$

Contudo, podemos ver que $M_2 = 1$ e $M_3 = 1$, e, analogamente, podemos escrever:

$$M_4 = M_2 \cdot M_3 + M_3 \cdot M_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 2$$
$$M_5 = M_2 \cdot M_4 + M_3 \cdot M_3 + M_4 \cdot M_2 = 2 + 1 + 2 = 5$$
$$M_6 = M_2 \cdot M_5 + M_3 \cdot M_4 + M_4 \cdot M_3 + M_5 \cdot M_2 = 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$
$$M_7 = M_2 \cdot M_6 + M_3 \cdot M_5 + M_4 \cdot M_4 + M_5 \cdot M_3 + M_6 \cdot M_2 = 14 + 5 + 4 + 5 + 14 = 42$$
$$M_8 = 42 + 14 + 10 + 10 + 14 + 42 = 132$$
$$M_9 = 132 + 42 + 28 + 25 + 28 + 42 + 132 = 429$$

Logo, temos $M_9 = 429$ maneiras de dividir o eneágono.

Gabarito: 429

---

22. (IME/2014)

Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode ser organizada para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode se organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas).

Comentários

Considere as seguintes configurações:

1) Nenhuma dupla:

$$p_1 = C_{9,0} = \binom{9}{0} = 1$$

2) Uma dupla somente:

$$p_2 = C_{9,2} = \binom{9}{2} = 36$$

3) Duas duplas somente:

Escolhemos a primeira dupla de $C_{9,2}$ formas e a segunda dupla de $C_{7,2}$ formas, por fim, para excluir os casos resultantes de permutação, devemos dividir por $2!$, pois são duas duplas:

$$p_3 = \frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2}}{2!} = \frac{\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{2}}{2} = 378$$

4) Três duplas somente:

Com o raciocínio análogo ao anterior, escolhemos cada dupla sucessivamente e, depois, dividimos pelo fatorial do número de duplas:

$$p_4 = \frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,2}}{3!} = \frac{\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}}{6} = 1260$$

5) Quatro duplas somente:

$$p_5 = \frac{C_{9,2} \cdot C_{7,2} \cdot C_{5,2} \cdot C_{3,2}}{4!} = \frac{\binom{9}{2}\binom{7}{2}\binom{5}{2}\binom{3}{2}}{24} = 945$$

Então, ao todo, temos:

$$1 + 36 + 378 + 1260 + 945 = \boxed{2620}\ possibilidades$$

Gabarito: 2620

---

23. (IME/2014)

Em uma festa de aniversário estão presentes n famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá 2 pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de n deverá ser

a) 17

b) 18

c) 19

d) 20

e) 21

Comentários

Vamos analisar duas situações:

I) Para escolher um pai para compor a equipe **azul**, temos $(n+2)$ maneira, podendo ser qualquer pai de qualquer uma das $(n+2)$ famílias. Para a equipe **amarela**, temos:

- $\binom{3}{2}$ maneiras de escolher dois membros se for do primeiro tipo de família (escolher duas pessoas dentre mãe e dois filhos);
- $\binom{2}{2}$ maneiras de escolher dois membros se for do segundo tipo de família;

Logo, para compor a equipe **amarela**, temos $\binom{3}{2}\cdot n+\binom{2}{2}\cdot 2=(3n+2)$ maneiras.

Desse modo, para esse primeiro caso, temos $(n+2)\cdot(3n+2)$ possibilidades para a brincadeira.

II) Nesse caso, temos a mesma situação, só que com os times de cores trocadas. Assim, para escolher um pai para a compor a equipe **amarela**, temos $(n+2)$ maneiras e, para a equipe **azul**, temos:

- $\binom{3}{2}$ maneiras de escolher dois membros se for do primeiro tipo de família;
- $\binom{2}{2}$ maneiras de escolher dois membros se for do segundo tipo de família;

Assim, para compor a equipe **azul**, temos $\binom{3}{2}\cdot n+\binom{2}{2}\cdot 2=(3n+2)$ maneiras.

Dessa forma, para o segundo caso, temos, novamente, $(n+2)\cdot(3n+2)$ possibilidades para a brincadeira.

O total de possibilidades para a brincadeira é então:

$$(n+2)\cdot(3n+2)+(n+2)\cdot(3n+2)=6n^2+16n+8$$

Para que essa quantidade seja igual a 2014, devemos ter então que:

$$6n^2+16n+8=2014$$
$$3n^2+8n+4=1007$$

Resolvendo a equação teremos que:

$$\boxed{n=17}$$

Gabarito: "a"

---

24. (IME/2013)

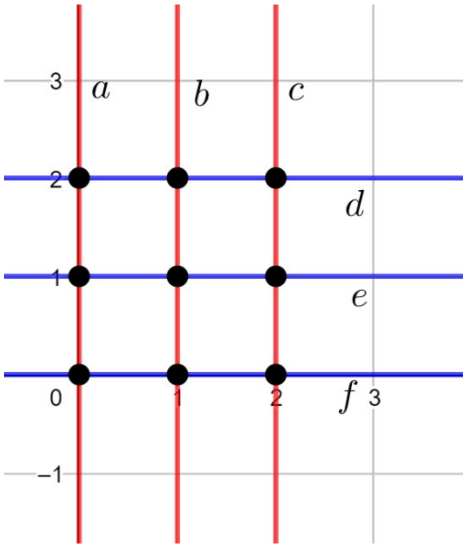
Considere a seguinte definição:

"dois pontos $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{Q}$, de coordenadas $(\boldsymbol{x_p}, \boldsymbol{y_p})$ e $(\boldsymbol{x_q}, \boldsymbol{y_q})$, respectivamente, possuem coordenadas em comum se e somente se $\boldsymbol{x_p} = \boldsymbol{x_q}$ ou $\boldsymbol{y_p} = \boldsymbol{y_q}$"

Dado o conjunto $S = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2), (2,0), (2,1), (2,2)\}$. Determine quantas funções bijetoras $f: S \to S$ existem, tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuem coordenadas em comum.

Comentários

Sejam as coordenadas desenhadas como na figura abaixo:



Veja que cada reta leva a outra reta na função, pois $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum, se e somente se, P e Q tiverem coordenadas em comum também. E quando dois pontos possuem coordenadas em comum, isso quer dizer que eles pertencem à mesma reta.

Outro fato é que a função associa retas paralelas a retas paralelas, ou seja, a função relaciona ou retas vermelhas a retas azuis ou vermelhas e vice-versa. Isso acontece porque, caso a função associasse retas não paralelas, então um ponto da imagem seria interseção das duas retas, ou seja, ela estaria associada a duas retas, e isso não pode acontecer, pois f é função bijetora.

Assim, temos dois casos:

I) A função f é tal que:

$$\begin{cases} \{a,b,c\} \to \{a,b,c\} \to 3!\, maneiras\ possíveis \\ \{d,e,f\} \to \{d,e,f\} \to 3!\, maneiras\ possíveis \end{cases}$$

Assim, para esse caso, temos $3! \cdot 3! = 36$ funções diferentes.

II) A função f é tal que:

$$\begin{cases} \{a,b,c\} \to \{d,e,f\} \to 3!\, maneiras\ possíveis \\ \{d,e,f\} \to \{a,b,c\} \to 3!\, maneiras\ possíveis \end{cases}$$

Para esse caso temos, novamente, $3! \cdot 3! = 36$ funções diferentes.

Portanto, o total de funções bijetoras $f: S \to S$ tais que para todos os pontos P e Q pertencentes ao conjunto S, $f(P)$ e $f(Q)$ possuem coordenadas em comum se e somente se P e Q possuírem coordenadas em comum seja igual a $36 + 36 = \boxed{72}$.

Gabarito: 72

25. (IME/2011)

Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

a) 1.287

b) 14.112

c) 44.200

d) 58.212

e) 62.822

Comentários

Seja H_1, H_2, H_3, H_4, H_5 e H_6 a quantidade de homens que desceram nas estações $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, respectivamente. E seja M_1, M, M_3, M_4, M_5 e M_6 a quantidade de mulheres que desceram nas estações $1, 2, 3, 4, 5$ e 6, respectivamente.

Temos então que $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 = 4$. Considerando que cada | representa uma pessoa, então temos que permutar 9 obejtos (5 sinais de $+$ e 4 | que representam os homens). Assim por exemplo $| + | + || + + +$ significa que desceu um homem na parada 1, um homem na parada 2, dois homens na terceira parada e nenhum homem nas paradas $4, 5$ e 6. Temos então uma permutação de 9 objetos com repetições, portanto:

$$\frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Analogamente, podemos encontrar o número de possibilidades no caso das mulheres. São 11 objetos (5 sinais de $+$ e 6 | que representam as mulheres). Temos, então, uma permutação de 11 objetos com repetições, portanto:

$$\frac{11!}{6! \cdot 5!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 462$$

Logo, o total de possibilidades distintas de desembarque dos passageiros é:

$$126 \cdot 462 = \boxed{58.212}$$

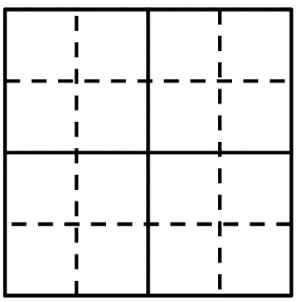
Gabarito: “d”

---

26. (IME/2009)

A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números $1, 2, 3$ e 4, de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:

- uma mesma linha.
- uma mesma coluna.
- cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas.



Comentários

Preenchendo os quatro quadrados do primeiro quadrante e os quatro quadrados do terceiro quadrante, temos todas as combinações possíveis, uma vez que o preenchimento desses dois grupos de quadrados determina todas as outras posições da figura. Seja a região do primeiro quadrante a Região 1 e a região do terceiro quadrante de Região 2.

Então, podemos preencher os quatro quadrados da Região 1:

$$4! = 24\ maneiras$$

Além disso, podemos posicionar um número aleatório em qualquer posição dos quatro quadrados da Região 2 de $\mathbf{4}$ formas, assim, determinamos a posição desse número em outras duas regiões, restam, então, $\mathbf{3}$ formas de preencher outra posição da Região 2, preenchendo essa região, determina-se a posição desse elemento em todas as outras regiões. Consequentemente, só restará uma forma de preencher cada região, assim, todos os 16 quadrados são determinados. Portanto, existem $4 \cdot 3 = 12\ maneiras$ de se preencher a Região 2.

Portanto, ao todo, existem $24 \cdot 12 = 288$ maneiras de preencher os 16 quadrados.

Gabarito: 288

---

27. (IME/2008)

Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

Comentários

O total de formações possíveis é dado por $10!$. Mas devemos retirar todas as formações que possuem, no mínimo, dois veículos de uma mesma equipe lado a lado. Para isso, devemos escolher uma equipe dentre as 5, escolher uma fila dentre as 5, permutar os carros da mesma equipe entre si e permutar os outros 8 carros. Assim, temos:

$$5 \cdot 5 \cdot 2! \cdot 8!$$

Porém, desses, algumas combinações foram consideradas duas vezes e, desse modo, devemos desconsiderá-los. Assim, vamos calcular a quantidade de combinações com, no mínimo, duas duplas de veículos. Para isso, devemos escolher duas equipes dentre as 5, duas filas dentre as 5, permutar os carros da mesma equipe e permutar outros carros. Assim, temos:

$$C_{5,2} \cdot A_{5,2} \cdot (2!)^2 \cdot 6!$$

Entretanto, novamente, alguns casos foram descartados ao serem considerados inicialmente e, depois, desconsiderados. Seguindo, então, essa ideia chegamos, por fim:

$$\sum_{n=0}^{5} (-1)^n \cdot C_{n,2} \cdot A_{n,2} \cdot (2!)^n \cdot (10-2n)! = \boxed{2.088.960}$$

Gabarito: 2.088.960

---

28. (IME/2008)

De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

a) $\binom{n+2}{2}$

b) $\binom{n}{3}$

c) $\frac{n!}{3!}$

d) $(n-3)!$

e) 3^n

Comentários

Se a cesta verde não tiver bolas, então as outras duas cestas (amarelo e azul, respectivamente) podem ter $(0, n), (1, n-1), \dots, (n, 0)$ bolas, ou seja, $n+1$ possibilidades.

Se a cesta verde tiver 1 bola, então as outras duas cestas (amarelo e azul, respectivamente) podem ter $(0, n-1), (1, n-2), \dots, (n-1, 0)$ bolas, ou seja, n possibilidades.

Se a cesta verde tiver 2 bolas, então as outras duas cestas (amarelo e azul, respectivamente) podem ter $(0, n-2), (1, n-3), \dots, (n-2, 0)$ bolas, ou seja, $n-1$ possibilidades.

E assim sucessivamente, até chegarmos no caso de se a cesta verde tiver n bolas, então as outras duas cestas (amarelo e azul, respectivamente) podem ter somente $(0,0)$ bolas, ou seja, 1 possibilidade.

Portanto, o número de possibilidades de distribuir n bolas nas três cestas é igual a:

$$(n+1) + n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \boxed{\binom{n+2}{2}}$$

Gabarito: sem alternativa

29. (IME/2007)

Considere o conjunto formado por m bolas pretas e n bolas brancas. Determine o número de sequências simétricas que podem ser formadas utilizando-se todas as $m+n$ bolas.

Obs: Uma sequência é dita *simétrica* quando ela possui a mesma ordem de cores ao ser percorrida da direita para a esquerda e da esquerda para a direita.

Comentários

Vamos dividir em casos e analisar cada um.

$I)$ m e n são pares.

Se pegarmos um conjunto de $\frac{m}{2}$ bolas pretas e $\frac{n}{2}$ bolas brancas, então qualquer que seja sua sequência s poderemos formar uma sequência simétrica S de $m+n$ bolas, basta colocar as outras $\frac{m}{2}$ bolas pretas e $\frac{n}{2}$ bolas brancas em seguida de s e de trás pra frente em relação à sequência montada s, formando, assim, a sequência S. Dito isso, basta encontrarmos o total de sequências possíveis com $\frac{m}{2}$ bolas pretas e $\frac{n}{2}$ bolas brancas. Veja que é uma permutação de $\frac{m+n}{2}$ elementos com repetição. Com isso, temos, para esse caso:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\frac{m}{2}! \cdot \frac{n}{2}!}}$$

$II)$ m e n são ímpares.

Não existe nenhuma sequência simétrica, pois a soma total das bolas é par, e não é possível dividir uma quantidade par ao meio.

$III)$ m é par e n é ímpar.

Temos, nesse caso, uma quantidade ímpar de bolas no total, logo, para se ter uma simetria, é necessário que a bola central seja branca. Dessa forma, sobram m bolas pretas e $n-1$ bolas brancas, valores pares e, portanto, podemos resolver com a mesma ideia usada no caso I). Logo, temos, para esse caso:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{m+(n-1)}{2}\right)!}{\frac{m}{2}! \cdot \frac{(n-1)}{2}!}}$$

$IV)$ m é ímpar e n é par.

Temos, nesse caso, uma quantidade ímpar de bolas no total, assim, para se ter uma simetria, é necessário que a bola central seja preta. Desse modo, sobram $m-1$ bolas pretas e n bolas brancas, valores pares e, portanto, podemos resolver com a mesma ideia usada no caso I). Por fim, temos, para esse caso:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{(m-1)+n}{2}\right)!}{\frac{m-1}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}}$$

Portanto, o número de sequências simétricas é dado por:

$$\boxed{\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}+\frac{\left(\frac{m+(n-1)}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{(n-1)}{2}!}+\frac{\left(\frac{(m-1)+n}{2}\right)!}{\frac{m-1}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}}$$

Gabarito: $\frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}+\frac{\left(\frac{m+(n-1)}{2}\right)!}{\frac{m}{2}!\cdot\frac{(n-1)}{2}!}+\frac{\left(\frac{(m-1)+n}{2}\right)!}{\frac{m-1}{2}!\cdot\frac{n}{2}!}$

30. (IME/2007)

Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo-se que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

a) 288

b) 455

c) 480

d) 910

e) 960

Comentários

Se definirmos as equipes de dois e de três integrantes, a outra, automaticamente, estará montada. Vamos analisar em casos. Vamos nomear as equipes: seja D a equipe de dois integrantes, T a equipe de três integrantes e Q a equipe de quatro integrantes.

I) Um dos irmãos está na D e o outro está na T.

Devemos, então, distribuir o restante das pessoas. Sem contar os irmãos, sobram 7 pessoas. Devemos escolher 1 pessoa dentre as 7 para compor a equipe D. São $\binom{7}{1}=7$ maneiras de fazer isto. Em seguida, das 6 pessoas restantes, devemos escolher 2 pessoas para compor a equipe T. Temos $\binom{6}{2}=\frac{6\cdot 5}{2}=15$ maneiras de fazer esta escolha. O restante das 4 pessoas formam a equipe Q. Considerando que cada um dos irmãos pode ficar em D, então, para esse caso, temos:

$$2\cdot 7\cdot 15=\boxed{210}$$

II) Um dos irmãos está na D e o outro está na Q.

Analogamente, devemos escolher 1 pessoa dentre as 7 para compor a equipe D. São $\binom{7}{1}=7$ maneiras de fazer isto. Em seguida, das 6 pessoas restantes, devemos escolher 3 pessoas para compor a equipe T. Temos $\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2}=20$ maneiras de fazer essa escolha. O restante das 3 pessoas formam a equipe Q, juntamente com o outro irmão. Considerando que cada um dos irmãos pode ficar em D, então, para esse caso, temos:

$$2\cdot 7\cdot 20=\boxed{280}$$

III) Um dos irmãos está na T e o outro está na Q.

Devemos escolher 2 pessoas, dentre as 7, para compor a equipe D. São $\binom{7}{2} = 21$ maneiras de fazer isso. Em seguida, das 5 pessoas restantes, devemos escolher 2 pessoas para compor a equipe T. Temos $\binom{5}{2} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ maneiras de fazer essa escolha. O restante das 3 pessoas formam a equipe Q juntamente com outro irmão. Considerando que cada um dos irmãos pode ficar em T, então, para esse caso, temos:

$$2 \cdot 21 \cdot 10 = \boxed{420}$$

Portanto, o total de possibilidades distintas de organizar as equipes é:

$$210 + 280 + 420 = \boxed{910}$$

Gabarito: "d"

Binômio de Newton

ITA

31. (ITA/2018)

Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$ e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7.920, então $a + b$ é

a) 2.

b) 3.

c) 4.

d) 5.

e) 6.

Comentários

Como a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma P.G. de razão 1/2,

$$b = \frac{a}{2} \Leftrightarrow a = 2b$$

Seja $p(x) = \left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$. Então:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (2bx)^{12-k} \left(-\frac{b}{\sqrt{x}}\right)^k = \sum_{k=0}^{12} \binom{12}{k} (-1)^k \cdot 2^{12-k} \cdot b^{12} \cdot x^{12-\frac{3k}{2}}$$

Para zerar o expoente de x e obter o termo independente, temos que:

$$12 - \frac{3k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 8$$

$$[x^0]p(x) = 7920 \Leftrightarrow \binom{12}{8} \cdot (-1)^8 \cdot 2^4 \cdot b^{12} = 2^3 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 10 \Leftrightarrow$$

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2^4 \cdot b^{12} = 2^3 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 10 \Leftrightarrow b^{12} = 1 \Leftrightarrow b = 1 \Leftrightarrow a = 2$$

pois b é um inteiro positivo.

Assim, $a + b = 3$.

Gabarito: "b"

32. (ITA/2014)

Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que $\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$. Então, o valor de

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

é igual a

a) $2^n + 1$.

b) $2^{n+1} + 1$.

c) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$.

d) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

e) $\frac{2^n-1}{n}$.

Comentários

Seja S a soma pedida, então:

$$(n+1) \cdot S = \frac{n+1}{0+1}\binom{n}{0} + \frac{n+1}{1+1}\binom{n}{1} + \frac{n+1}{2+1}\binom{n}{2} + \cdots + \frac{n+1}{n+1}\binom{n}{n}$$

$$(n+1) \cdot S = -\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \cdots + \binom{n+1}{n+1}$$

Como a soma da j-ésima linha do triângulo de Pascal vale 2^j, temos:

$$(n+1) \cdot S = -1 + 2^{n+1} \Rightarrow S = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$$

Gabarito: "d"

33. (ITA/2013)

O coeficiente de x^4y^4 no desenvolvimento de $(1+x+y)^{10}$ é0

a) 3150

b) 6300

c) 75600

d) 81900

e) 151200

Comentários

Procuramos pelo número de maneiras de escolher, dentre os fatores do produtório, 4 vezes o fator x, 4 vezes o fator y (e 2 vezes o fator 1). Tal número é:

$$N = \binom{10}{4}\binom{6}{4}\binom{2}{2} = \frac{10.9.8.7}{4.3.2.1} \cdot \frac{6.5.4.3}{4.3.2.1} \cdot 1 = 3150$$

Visto que, ao escolher os 4 fatores x, sobram 6 fatores (e depois, ao escolher os 4 fatores y, sobram 2 fatores).

Gabarito: "a"

34. (ITA/2010)

A expressão $(2\sqrt{3} + \sqrt{5})^5 - (2\sqrt{3} - \sqrt{5})^5$ é igual a

a) $2630\sqrt{5}$

b) $2690\sqrt{5}$

c) $2712\sqrt{5}$

d) $1584\sqrt{15}$

e) $1604\sqrt{15}$

Comentários

Para facilitar os cálculos, seja $a = 2\sqrt{3}$ e $b = \sqrt{5}$. Assim, a expressão E fica:

$$E = (a+b)^5 - (a-b)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k - \sum_{k=0}^{5} (-1)^k \binom{5}{k} a^{5-k} b^k$$

$$E = 2 \sum_{k\ \text{ímpar},\ k=0}^{5} \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = 2b\left[\binom{5}{1} a^4 + \binom{5}{3} a^2 b^2 + \binom{5}{5} b^4\right]$$

$$E = 2\sqrt{5}\,(5 \cdot 144 + 10 \cdot 12 \cdot 5 + 1 \cdot 25) = 2690\sqrt{5}$$

Gabarito: "b"

35. (ITA/2006)

Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1+x+x^2)^9$.

Comentários

Podemos construir um fator x^4 das seguintes maneiras:

1. Utilizando dois fatores x^2 e sete fatores 1:

$$\binom{9}{2} = 36 \text{ possibilidades}$$

2. Utilizando um fator x^2, dois fatores x e seis fatores 1:

$$\binom{9}{1}\binom{8}{2} = 9 \cdot 28 = 252 \text{ possibilidades}$$

3. Utilizando quatro fatores x e cinco fatores 1:

$$\binom{9}{4} = 126 \text{ possibilidades}$$

Assim, pelo princípio aditivo, temos que $[x^4](1+x+x^2)^9 = 36 + 252 + 126 = 414$

Gabarito: 414

36. (ITA/2004)

O termo independente de x no desenvolvimento do binômio

$$\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$$

é

a) $729\sqrt[3]{45}$

b) $972\sqrt[3]{15}$

c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$

e) $165\sqrt[3]{75}$

Comentários

Seja $A = \sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} = \sqrt{\frac{3}{5}}x^{-\frac{1}{3}} = ax^{-\frac{1}{3}}$ e $B = \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}} = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}x^{\frac{1}{6}} = bx^{\frac{1}{6}}$.

Da expansão binomial:

$$(A-B)^{12} = \left(ax^{-\frac{1}{3}} - bx^{\frac{1}{6}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}\left(ax^{-\frac{1}{3}}\right)^{12-k}\left(-bx^{\frac{1}{6}}\right)^{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}(-1)^k a^{12-k}b^k x^{\frac{k}{2}-4}$$

Para o termo independente, $k/2 - 4 = 0 \iff k = 8$. Assim, o termo independente T é:

$$T = \binom{12}{8}a^4 b^{6+2} = 495\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2\sqrt[3]{\frac{25}{9}} = 165\sqrt[3]{75}$$

Gabarito: “e”

37. (ITA/2003)

Considere o conjunto $S = \{(a,b) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}: a + b = 18\}$. A soma de todos os números da forma, $\frac{18!}{a!b!}$, $\forall(a,b) \in S$, é:

a) 8^6

b) $9!$

c) 9^6

d) 12^6

e) $12!$

Comentários

Considera-se $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\dots\}$, conforme a capa da prova de 2003.

Pode-se parametrizar os elementos de S por $s_k = (18-k,k)$, para $k \in \{0,1,\dots,18\}$.

Se $f(a,b) = \frac{(18!)}{a!b!}$, temos:

$$\sum_{k=0}^{18} f(s_k) = \sum_{k=0}^{18}\frac{18!}{(18-k)!\,k!} = \sum_{k=0}^{18}\binom{18}{k} = 2^{18} = (2^3)^6 = 8^6$$

Gabarito: “a”

38. (ITA/2002)

Mostre que

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

Comentários

Pela desigualdade das médias, $MA \geq MG$, temos que $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$. Assim, $\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq (2+2)^4 = 4^4 = 256 > 70 = C_{8,4}$.

Gabarito: Demonstração.

39. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de m elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80

b) 90

c) 70

d) 100

e) 60

Comentários

A soma dos coeficientes em um polinômio pode ser obtida aplicando-se o polinômio em 1. No caso de duas variáveis, cada variável é aplicada em 1. Assim, $1024 = (1+1)^{\mathrm{m}} \Rightarrow \mathrm{m} = 10$. Logo, $A_{m,2} = 10 \cdot 9 = 90$.

Gabarito: "b"

40. (ITA/2001)

A respeito das combinações mostradas na figura adiante, temos que, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

$$a_n = \binom{2n}{n} \text{ e } b_n = \binom{2n}{n-1}$$

a) $\frac{n!}{n+1} a_n$

b) $\frac{2n}{n+1} a_n$

c) $\frac{n}{n+1} a_n$

d) $\frac{2}{n+1} a_n$

e) $\frac{1}{n+1} a_n$

Comentários

$$a_n - b_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \frac{(2n)!}{(n-1)!\,n!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{n \cdot (n-1)! \cdot (n+1) \cdot n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} a_n$$

Gabarito: "e"

IME

41. (IME/2017)

No desenvolvimento de $\left(x \cdot sen\ 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a $\frac{63}{256}$. Considerando que β é um número real, com $0 < \beta < \frac{\pi}{8}$ e $x \neq 0$, o valor de β é:

a) $\frac{\pi}{9}$

b) $\frac{\pi}{12}$

c) $\frac{\pi}{16}$

d) $\frac{\pi}{18}$

e) $\frac{\pi}{24}$

Comentários

O (k+1)-ésimo termo do desenvolvimento é:

$$T_{k+1} = \binom{10}{k}(x \cdot sen\ 2\beta)^{10-k}\left(\frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^k = \binom{10}{k}(sen\ 2\beta)^{10-k}(\cos 2\beta)^k \cdot x^{10-2k}$$

O termo independente T tem expoente zero em x: $10 - 2k = 0 \iff k = 5$

$$T = T_6 = \binom{10}{5}(sen\ 2\beta)^5(\cos 2\beta)^5 = \frac{252}{2^5}(2 \cdot sen\ 2\beta \cdot \cos 2\beta)^5 = \frac{63}{8}sen^5 4\beta$$

Segundo o enunciado, T = 63/256. Assim,

$$sen^5(4\beta) = \frac{1}{32} = \frac{1}{2^5} \Rightarrow sen\ (4\beta) = \frac{1}{2} \Rightarrow 4\beta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{24}$$

Sendo as últimas implicações, dadas que $0 < \beta < \frac{\pi}{8} \iff 0 < 4\beta < \frac{\pi}{2}$.

Gabarito: "e"

---

42. (IME/2016)

O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$

b) $\binom{2020}{7}$

c) $\binom{2021}{5}$

d) $\binom{2021}{6}$

e) $\binom{2022}{5}$

Comentários

Uso extensivo da relação de Stifeel, $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

$$\binom{2016}{5} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} + \binom{2016}{6} =$$

$$\binom{2017}{6} + \binom{2017}{5} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$

$$\binom{2018}{6} + \binom{2018}{5} + \binom{2019}{5} + \binom{2020}{5} =$$

$$\binom{2019}{6}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}=$$

$$\binom{2020}{6}+\binom{2020}{5}=\binom{2021}{6}$$

Gabarito: “d”