CURSO INTENSIVO 2022

FÍSICA

ITA - 2022

Cinemática vetorial e composição de movimentos

Prof. Toni Burgatto

Sumário

Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo de cinemática vetorial e composição de movimento.

Estes assuntos são muito bem explorados no ITA, com questões bem elaboradas. Por isso, detalharemos ao máximo toda a teoria e faremos bastantes exercícios no nível ITA. É muito importante que você entenda cada conceito e resolva muitos exercícios para fixação, elas o ajudarão a resolver os exercícios do ITA.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Cinemática vetorial

Até aqui, vimos os conceitos de espaço, velocidade linear, aceleração linear, velocidade angular, aceleração angular e todo o tratamento foi feito em apenas uma dimensão, trabalhando com a velocidade praticamente como um escalar. Apenas estávamos preocupados com a magnitude da velocidade (o módulo do vetor).

A partir de agora, começaremos o tratamento vetorial da cinemática, trabalhando com movimento bi ou tridimensionais, nos quais são importantes também as direções e os sentidos dos movimentos.

Além disso, trabalharemos o movimento de um objeto em um lançamento não vertical. Geralmente, este assunto é trabalhado com outros assuntos nos nossos vestibulares desejados. Exercícios vinculados com elétrica, colisões e outras disciplinas da física.

1.1. Vetor deslocamento

1.1.1. Vetor posição

Se uma partícula descreve uma trajetória qualquer no espaço, sua localização é definida pelo **vetor posição**. Define-se vetor posição ($\vec{s}$) de um ponto P em relação a um referencial O, o vetor que liga a origem em O à extremidade em P. Para facilitar as contas e entendimento, escolhemos um sistema de coordenadas triortogonal $Oxyz$, onde o referencial está em O.

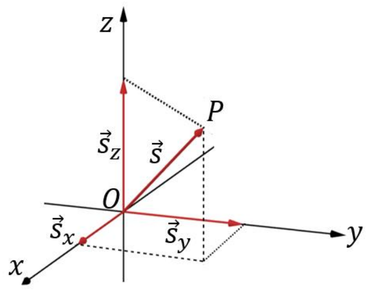


Figura 1: Vetor posição de uma partícula no R³.

Dessa forma, podemos escrever o vetor $\vec{s}$ das seguintes formas:

$\boxed{\vec{s} = s_x.\hat{\imath} + s_y\hat{\jmath} + s_z\hat{k} = (s_x, s_y, s_z)}$ Ou ainda: $\boxed{\vec{s} = \overrightarrow{s_x} + \overrightarrow{s_y} + \overrightarrow{s_z}}$

De acordo com a geometria dos vetores, vale a relação entre os módulos:

$$\boxed{s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2}$$

1.1.2. Vetor deslocamento

Uma partícula se desloca ao longo de uma trajetória curvilínea no espaço. Ela passa por A no instante t_1 e por B no instante t_2. O vetor posição do ponto A é $\overrightarrow{p_1}$ e do ponto B é $\overrightarrow{p_2}$. Assim, podemos representar o deslocamento de A a B e o vetor deslocamento da seguinte forma.

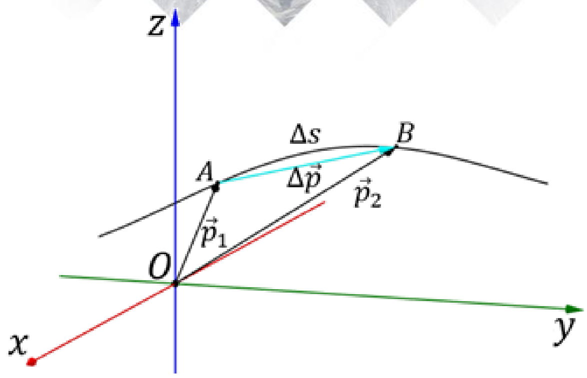


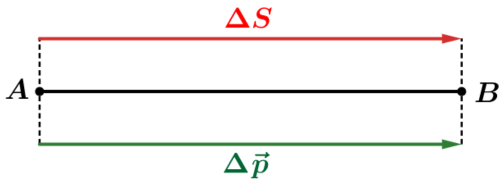
Figura 2: Vetor deslocamento de uma partícula indo de A para B.

Como já visto anteriormente, escrevermos o deslocamento do móvel da seguinte forma:

$$\Delta s = s_B - s_A$$

Na cinemática vetorial definimos a variação do vetor posição (ou vetor deslocamento) de forma análoga: $\boxed{\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1}$.

Da geometria, podemos notar que: $\boxed{|\Delta\vec{p}| \leq |\Delta s|}$. A igualdade ocorre quando a trajetória é retilínea:



Neste caso, temos que: $\boxed{|\Delta\vec{p}| = |\Delta s|}$.

1.2. Velocidade vetorial média

Após definirmos o vetor deslocamento, podemos definir a velocidade vetorial média, quando o vetor posição varia de A para B em um dado intervalo de tempo por:

$$\boxed{\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$$

Devido ao fato do Δt ser um número real e sempre positivo, podemos afirmar que $\vec{v}_m$ e $\Delta\vec{p}$ possuem o mesmo sinal. A partir disso, podemos encontrar quem possui maior módulo entre as velocidades:

$$|\Delta\vec{p}| \leq |\Delta s|$$

Dividindo a equação por Δt, lembrando que Δt é sempre positivo, vem:

$$\frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} \leq \frac{|\Delta s|}{\Delta t}$$

Portanto:

$$\boxed{|\vec{v}_m| \leq |v_m|}$$

Isto mostra que:

"O módulo da velocidade vetorial média é sempre menor ou igual ao módulo da velocidade escalar média."

Notamos que, quando a trajetória é retilínea, $|\Delta\vec{p}| = |\Delta s|$, dessa forma, o módulo da velocidade vetorial média ($\vec{v}_m$) é igual ao módulo da velocidade escalar média.

1)

Um corpo move-se com velocidade escalar constante descrevendo uma trajetória circular de raio 30 m, levando 18 segundos par completar uma volta. Em um intervalo de $\Delta t = 3{,}0\ s$, determine os módulos:

a) da variação do espaço do móvel;

b) do vetor deslocamento;

c) da velocidade escalar média; e

d) da velocidade vetorial média.

Comentários:

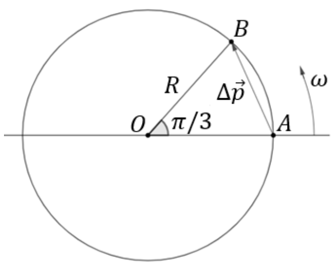
a) Para o intervalo de tempo dado, se o móvel gasta 18 segundos para dar uma volta completa, em 3 ele percorre:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi.\frac{3}{18} = \frac{\pi}{3}\ rad$$

b) Dessa forma, podemos determinar a variação da posição do corpo pela relação geometria:

$$L = \alpha.R \Rightarrow \Delta s = \varphi.R$$

$$|\Delta s| = \frac{\pi}{3}.30 \Rightarrow \boxed{|\Delta s| = 10\pi\ m}$$



Para determinar o $|\Delta\vec{p}|$, vamos utilizar a lei dos cossenos no triângulo OAB:

$$|\Delta\vec{p}|^2 = R^2 + R^2 - 2.R.R.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{p}| = 30\ m}$$

Ou simplesmente ver que o triângulo OAB é equilátero, portanto, $|\Delta\vec{p}| = R$. Utilizamos a lei dos cossenos apenas para mostrar como faz para o caso geral, ou seja, quando o triângulo não possui propriedades conhecidas.

c) O módulo da velocidade escalar é dado por:

$$|v_m| = \frac{|\Delta s|}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{|v_m| = \frac{10\pi}{3}\ m/s}$$

d) Para a velocidade vetorial média, temos que:

$$|\vec{v}_m| = \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} = \frac{30}{3} \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| = 10\ m/s}$$

Note que neste exercício, o módulo da velocidade vetorial média é menor que o módulo da velocidade escalar média:

$$3 < \pi \Rightarrow 30 < 10\pi \Rightarrow |\Delta\vec{p}| < |\Delta s| \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_m| < |v_m|}$$

1.3. Velocidade vetorial instantânea

Semelhante à velocidade escalar instantânea, definimos a velocidade vetorial instantânea ($\vec{v}$) como:

$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}}$$

Dessa forma, para calcular $\vec{v}$ quando esta passa por um ponto P, devemos tomar outro ponto Q da trajetória, fazer o deslocamento entre P e Q e fazer Q tender a P. Assim, percebemos que quando fazemos Q tender a P, a direção de $\Delta\vec{p}$ aproxima-se da direção da reta tangente à trajetória no ponto P.

Dessa forma, a direção da velocidade vetorial instantânea é a da reta tangente à trajetória no ponto em questão e o sentido será o mesmo do movimento do móvel.

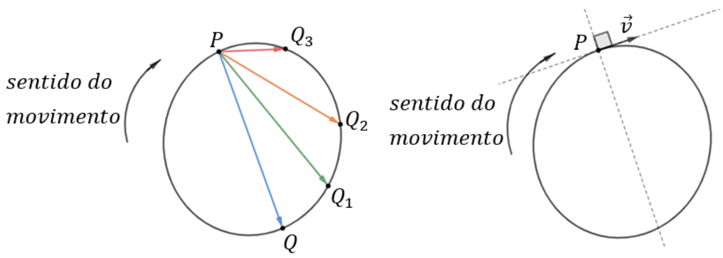


Figura 3: Significado geométrico do cálculo da velocidade vetorial instantânea.

É importante notarmos que quando $\Delta t \to 0$ (lê-se "intervalo de tempo tende à zero", isto é, estamos pegando intervalos de tempo cada vez menores), o módulo da variação do espaço tende a ao módulo do vetor deslocamento, ou seja, $|\Delta s| \to |\Delta\vec{p}|$. Portanto, no limite temos que:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta s|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{p}|}{\Delta t} \therefore \boxed{|v| = |\vec{v}|}$$

Este resultado mostra que:

"O módulo da velocidade vetorial instantânea é igual ao módulo da velocidade escalar instantânea."

Não podemos confundir a conclusão feita anteriormente o caso das velocidades médias ($|\vec{v}_m| \leq |v_m|$).

As características da velocidade vetorial instantânea são:

1) Direção: a mesma da reta tangente à trajetória no ponto considerado;

2) Sentido: o mesmo do movimento;

3) Igual ao módulo da velocidade escalar instantânea.

Observações:

1) Em muitos casos, menciona-se velocidade vetorial e não se especifica se é média ou instantânea. Nestes casos, admite-se ser a instantânea.

2) Quando apenas diz velocidade, sem mencionar qualquer outra informação, admite-se ser a vetorial.

1.4. A velocidade vetorial em movimentos particulares

1.4.1. Movimento retilíneo uniforme (MRU)

Devido ao fato de a trajetória ser retilínea, a direção da velocidade vetorial não se muda. Assim, $\vec{v}$ sempre terá o mesmo módulo e o mesmo sentido.

Figura 4: Vetores velocidades no MRU.

Assim, podemos escrever que: $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| \Rightarrow \boxed{\vec{v}_1 = \vec{v}_2}$. Então, dizemos que a velocidade vetorial é constante no MRU.

1.4.2. Movimento circular e uniforme (MCU)

É fácil notar que a velocidade vetorial neste tipo de movimento não é constante, uma vez que estamos mudando de direção a cada instante, entretanto, apenas o módulo da velocidade é constante. Dessa forma, embora o movimento seja uniforme, dizemos que a **velocidade vetorial** é **variável,** pois muda direção, embora o módulo permaneça constante.

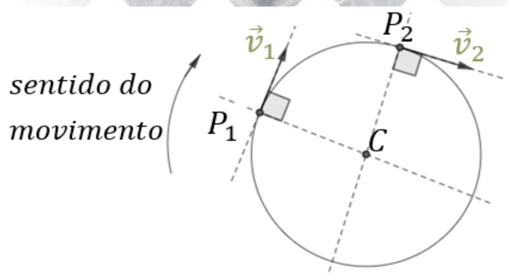


Figura 5: Vetores velocidades no eixo tangente no MCU.

$$\boxed{|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|, mas\ \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2}$$

1.4.3. Movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV)

Devido ao fato de a trajetória ser retilínea, sabemos que a direção do movimento não é alterada, entretanto, como existe aceleração, o módulo da velocidade vetorial se altera:

Figura 6: Vetores velocidades no MRUV.

$$\boxed{|\vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2| \Rightarrow \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2}$$

1.4.4. Movimento circular uniformemente variado

Neste tipo de movimento tanto o módulo quanto a direção da velocidade vetorial se alteram.

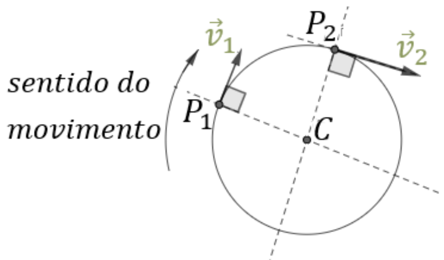


Figura 7: Vetores velocidades no MCUV.

$$\boxed{|\vec{v}_1| \neq |\vec{v}_2| \Rightarrow \vec{v}_1 \neq \vec{v}_2}$$

1.5. Aceleração vetorial média

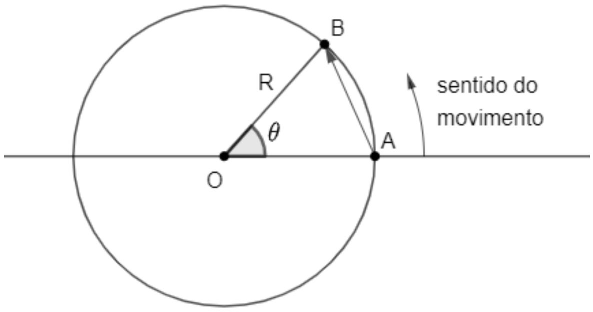
Se um partícula, realizando uma trajetória qualquer no espaço, ao passar por P_1 tem velocidade vetorial $\vec{v}_1$ e ao passar por P_2 tem velocidade vetorial $\vec{v}_2$, então, a aceleração vetorial média $\vec{a}_m$ entre estes dois instantes é definida por:

$$\boxed{\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}}$$

ESCLARECENDO!

2)

Uma partícula descreve um MCUV, tal que no primeiro instante sua velocidade é $\vec{v}_1$ e em um segundo instante sua velocidade é $\overrightarrow{v_2}$. Dado que $|\vec{v}_1| = 6{,}0\ m/s$ e $|\vec{v}_2| = 8\ m/s$, como na figura abaixo, determine o módulo da aceleração vetorial, se a partícula levou 4 segundos para ir de realizar este percurso. Adote: $cos\theta = 0{,}6$.

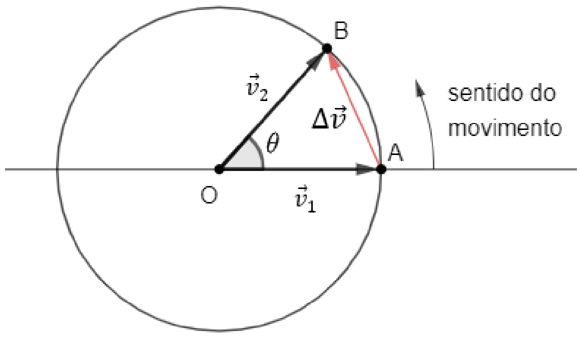


Comentários:

A partir da definição, devemos encontrar quem é o módulo da variação da velocidade vetorial:

$$|\Delta\vec{v}| = |\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$$

Geometricamente:



Pela lei dos cossenos, temos que:

$$|\Delta\vec{v}|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}_2| - 2.|\vec{v}_1|.|\vec{v}_2|.cos\,\theta$$

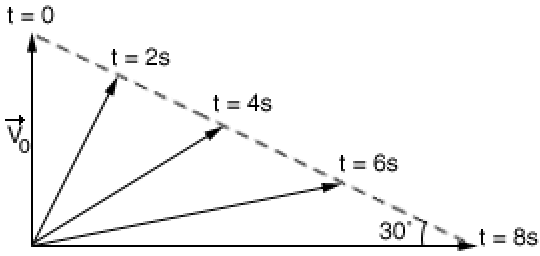
$$|\Delta\vec{v}|^2 = 6^2 + 8^2 - 2.6.8.(0{,}6) \Rightarrow |\Delta\vec{v}| \cong 6{,}51\ m/s$$

Então, a aceleração vetorial média é dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}} \Rightarrow |\vec{a}_m| = \frac{6{,}51}{4} \cong 1{,}62\ m/s^2$$

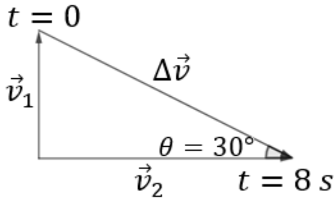
3)

A velocidade $\vec{v}$ de um móvel, em função do tempo, acha-se representada pelo diagrama vetorial da figura. A intensidade da velocidade inicial é $v_0 = 20\ m/s$. Determine o módulo da aceleração vetorial média entre os instantes $t = 0$ e $t = 8\ s$.



Comentários:

Novamente, temos que determinar o modulo determinar o módulo da variação da velocidade vetorial entre os instantes $t = 0$ e $t = 8\ s$:



Pela geometria do problema, escrevemos que:

$$sen\theta = \frac{|\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}|} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = \frac{|\vec{v}_1|}{sen\theta} \Rightarrow |\Delta\vec{v}| = \frac{20}{\frac{1}{2}} \Rightarrow \boxed{|\Delta\vec{v}| = 40\ m/s}$$

Logo, o módulo da aceleração vetorial média é de:

$$|\vec{a}_m| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{40}{8} \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_m| = 5{,}0\ m/s^2}$$

1.6. Aceleração vetorial instantânea

Relembrando da cinemática escalar definimos a aceleração escalar instantânea (a) como o limite da variação da velocidade escalar quando o tempo tende a zero, isto é:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Para a aceleração vetorial instantânea ($\vec{a}$) por:

$$\boxed{\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}}$$

Dessa forma, dizemos que um corpo está em repouso ou em movimento retilíneo uniforme se $\vec{a} = \vec{0}$, pois, neste caso teremos que $\vec{v}$ é constante. Este resultado é muito importante no estudo de Dinâmica, assunto das nossas próximas aulas.

1.6.1. Trajetória retilínea

Para o caso da trajetória retilínea, o vetor $\vec{a}$ tem a mesma direção da trajetória e o módulo igual ao módulo da aceleração escalar. Se o movimento for acelerado ($a.v > 0$), $\vec{a}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$. Por outro lado, se o movimento for retardado ($a.v < 0$), $\vec{a}$ tem sentido contrário ao de $\vec{v}$.

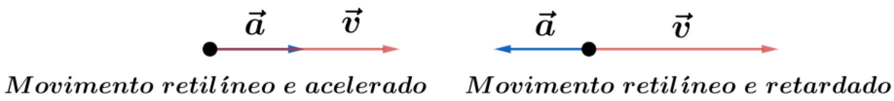


Figura 8: Representação dos vetores aceleração e velocidade para os dois tipos de movimento.

1.6.2. Trajetória curva

Para o caso da trajetória curva qualquer, verifica-se que aceleração do corpo $\vec{a}$ "aponta para dentro da curva", como na figura 8, pois, trata-se de uma composição de duas acelerações: a aceleração tangencial ($\vec{a}_t$) na qual sua direção é tangente a trajetória e a aceleração centrípeta ou aceleração normal ($\vec{a}_c$), na qual sua direção é normal a trajetória.

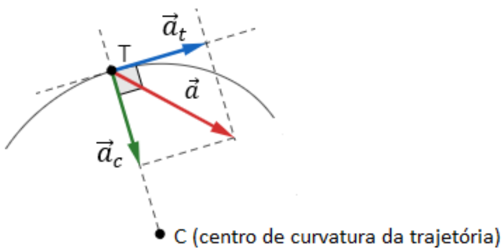


Figura 9: Representação das acelerações em uma trajetória curva.

Vetorialmente, temos que:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c}$$

A relação entre os módulos pode ser obtida pelo teorema de Pitágoras:

$$\boxed{|\vec{a}|^2 = |\vec{a}_t|^2 + |\vec{a}_c|^2}$$

Pode-se demonstrar que a aceleração tangencial tem módulo igual ao módulo da aceleração escalar, isto é:

$$\boxed{|\vec{a}_t| = |a_e|}$$

Dessa forma, se $a_e = 0$, em outras palavras um movimento uniforme, então $\vec{a}_t = \vec{0}$.

Portanto, a aceleração tangencial está vinculada a variação do módulo da velocidade linear $\vec{v}$ mas não muda a sua direção. O sentido de $\vec{a}_t$ é o mesmo da velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$, se o movimento for acelerado, e contrário ao de $\vec{v}$, se o movimento for retardado.

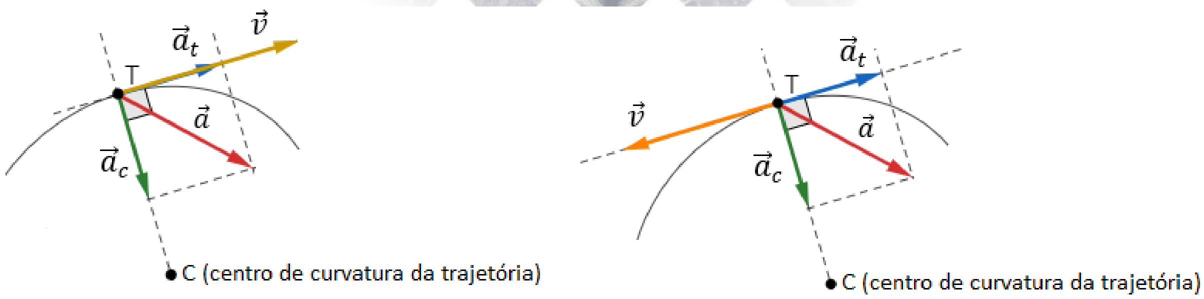


Figura 10: Representação dos vetores velocidade e aceleração para o movimento acelerado e retardado.

É possível demonstrar que a aceleração centrípeta ($\vec{a}_c$) é dada por:

$$\boxed{|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}}$$

Onde v é o módulo da velocidade e R é o raio de curvatura da trajetória.

Se a trajetória é circular, o raio de curvatura é o próprio raio da circunferência. Para o caso de a trajetória não ser uma circunferência, é possível obter uma circunferência tangente à trajetória, chamada de **circunferência osculadora**, de tal forma que o raio é o raio de curvatura a ser usado no cálculo do módulo de $\vec{a}_c$, que aponta para o centro da circunferência osculadora. Este é um método para calcular o raio de curvatura de uma trajetória, sem utilizar os recursos do Cálculo.

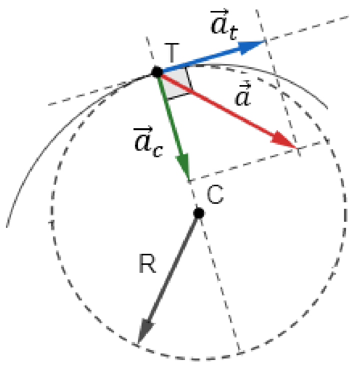


Figura 11: Representação da aceleração na circunferência osculadora.

Ainda neste capítulo, desenvolveremos a fórmula da aceleração centrípeta para o caso particular do MCU. Esta aceleração está ligada diretamente com a variação da direção da velocidade. Além disso, sua incidência nos nossos vestibulares é muito grande, portanto, vamos enfatizar alguns aspectos:

1º) Para o caso de o movimento ser retilíneo, sua circunferência osculadora teria raio infinito. Assim, $|\vec{a}_c| = 0$, ou seja, $\vec{a}_c = \vec{0}$. Assim, concluímos que a aceleração centrípeta é não-nula apenas em movimentos curvilíneos.

2º) Para o movimento uniforme, a aceleração tangencial é nula sempre ($\vec{a}_t = \vec{0}$).

3º) Se não for especificado qual a aceleração está sendo trabalhada, admite-se que se trata da aceleração vetorial instantânea.

1.6.3. Acelerações no MRU

Nesse movimento, temos as seguintes propriedades:

$$\vec{a}_t = \vec{0} \text{ e } \vec{a}_c = \vec{0}$$

Como $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$, portanto:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{0}}$$

1.6.4. Acelerações no MCU

Como visto anteriormente, a aceleração escalar nesse movimento é nula, então, a aceleração tangencial também é nula. Porém, a trajetória do movimento é uma curva, logo, sabemos que a aceleração centrípeta não é nula. Então:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c$$

Mas, $\vec{a}_t = \vec{0}$, portanto:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_c}$$

Se estamos no MCU, sabemos que **a velocidade não varia em módulo**, então, ao calcularmos a aceleração centrípeta, $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$, percebemos que o seu **módulo** não varia. Contudo, a direção está variando a cada instante.

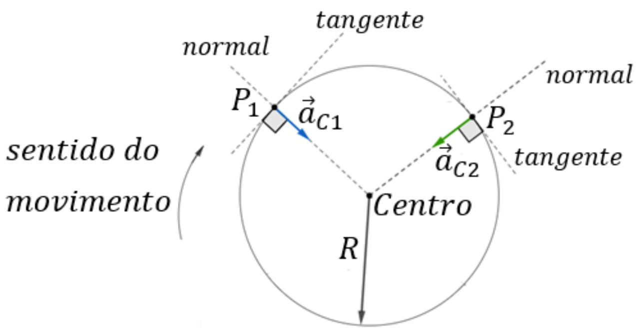


Figura 12: Representação da aceleração centrípeta no MCU.

Portanto, dizemos que:

$$\boxed{|\vec{a}_{c1}| = |\vec{a}_{c2}| = |\vec{a}_c| = |\vec{a}| = \frac{v^2}{R}}$$

Entretanto, devemos nos atentar que:

$$v_1 \neq v_2 \text{ e } \boxed{\vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2}}$$

1.6.5. Acelerações no MCUV

Por fim, temos o caso onde a aceleração escalar é não-nula e constante. Assim, sabemos que a aceleração tangencial também é constante e diferente de zero. Como a trajetória é curvilínea, sabemos que existe também a aceleração centrípeta cujo módulo é dado por $|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$. Portanto, podemos afirmar que a aceleração centrípeta irá variar, pois o módulo da velocidade é variável ($\vec{a}_t \neq \vec{0}$).

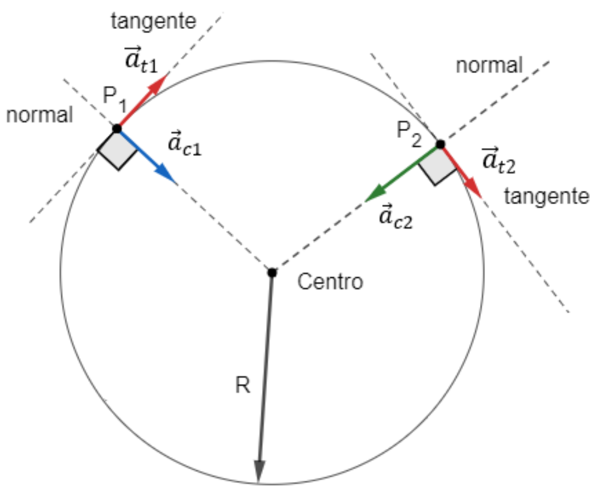


Figura 13: Representação da aceleração centrípeta no MCUV.

Então, temos que:

$$\boxed{|\vec{a}_{t1}| = |\vec{a}_{t2}|}$$

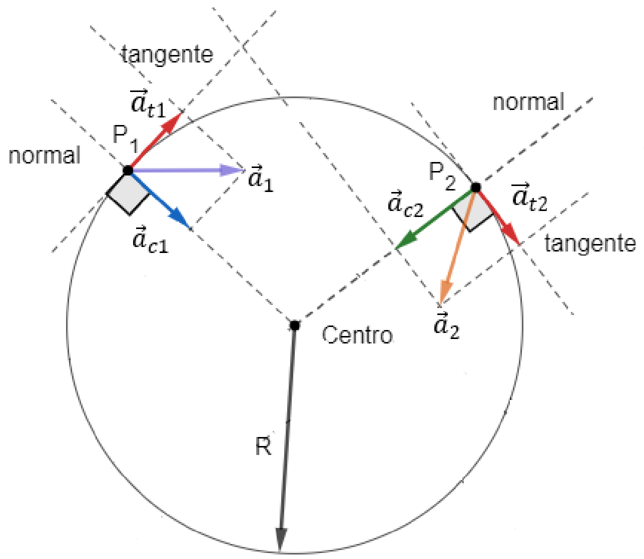


Figura 14: Representação das acelerações no MCUV em dois instantes diferentes.

Portanto:

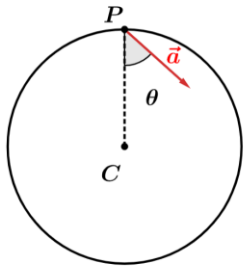
$$\boxed{\vec{a}_{t1} \neq \vec{a}_{t2}} \text{ mas } \boxed{|\vec{a}_{t1}| = |\vec{a}_{t2}|}$$

E:

$$\boxed{\vec{a}_{c1} \neq \vec{a}_{c2}} \text{ e } \boxed{\left|\vec{a}_{c_1}\right| \neq \left|\vec{a}_{c2}\right|}$$

4)

Um corpo descreve uma trajetória circular de centro C, com velocidade escalar inicial $v_0 = 4\,m/s$, em $t_0 = 0$. No instante $t = 1{,}0\ s$, a aceleração vetorial instantânea tem módulo $10\ m/s^2$, conforme a figura abaixo. Dado que $cos\theta = 0{,}8$, determine:



a) Módulo da aceleração escalar;

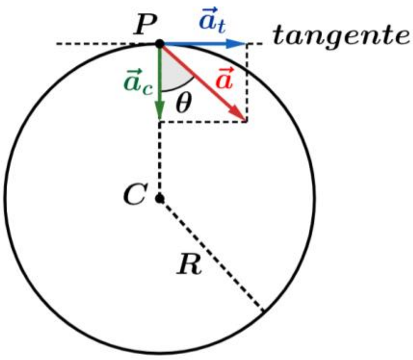
b) Módulo da aceleração centrípeta quando $t = 1{,}0\ s$;

c) Módulo da velocidade no instante $t = 1{,}0\ s$;

d) O raio da trajetória.

Comentários:

a) Da teoria, podemos construir os vetores das acelerações tangenciais e normais:



Assim, pela trigonometria podemos dizer que:

$$|\vec{a}_t| = |\vec{a}|.sen\theta \Rightarrow |\vec{a}_t| = 10.0{,}6 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_t| = 6\ m/s^2}$$

b) Para determinar o módulo da aceleração centrípeta, podemos utilizar a relação trigonométrica da figura em questão ou aplicar o teorema de Pitágoras. Como trata-se de um triângulo pitagórico múltiplo do triângulo 3, 4 e 5, podemos escrever diretamente que a aceleração centrípeta tem módulo igual a 8,0 m/s². Ou ainda:

$$|\vec{a}_c| = |\vec{a}|.cos\theta = 10.0{,}8 \Rightarrow \boxed{|\vec{a}_c| = 8\ m/s^2}$$

c) A velocidade no instante $t = 1{,}0\ s$, pode ser obtida pela equação horária da velocidade no MUV:

$$v = v_0 + a_e.t \Rightarrow v = 4 + 6.1 \Rightarrow \boxed{v = 10\ m/s}$$

d) Pela equação do módulo da aceleração centrípeta, podemos encontrar o raio da trajetória:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R} \Rightarrow 8 = \frac{10^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = 12{,}5\ m}$$

1.7. Cálculo da aceleração centrípeta para o movimento circular uniforme

No subcapítulo anterior, dizemos que o módulo da aceleração centrípeta era calculado por:

$$|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}$$

Em que R é o raio de curvatura da trajetória e v a velocidade linear do móvel no instante onde se deseja calcular $|\vec{a}_c|$. Vamos mostrar esse resultado para o caso particular do movimento circular uniforme, onde o raio de curvatura é igual ao raio da circunferência osculadora.

Para isso, vamos considerar uma pequena partícula em movimento uniforme sobre uma circunferência de raio R e centro O. No instante t_1, a partícula em P_1 tem velocidade $\vec{v}_1$ e no instante t_2 ($t_2 > t_1$), a partícula tem velocidade $\vec{v}_2$. Dado que o movimento é uniforme, temos que $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2|$. Neste intervalo de tempo, $\Delta t = t_2 - t_1$, podemos representar a variação da velocidade vetorial ($\Delta\vec{v}$) e relacionar com os lados dos triângulos:

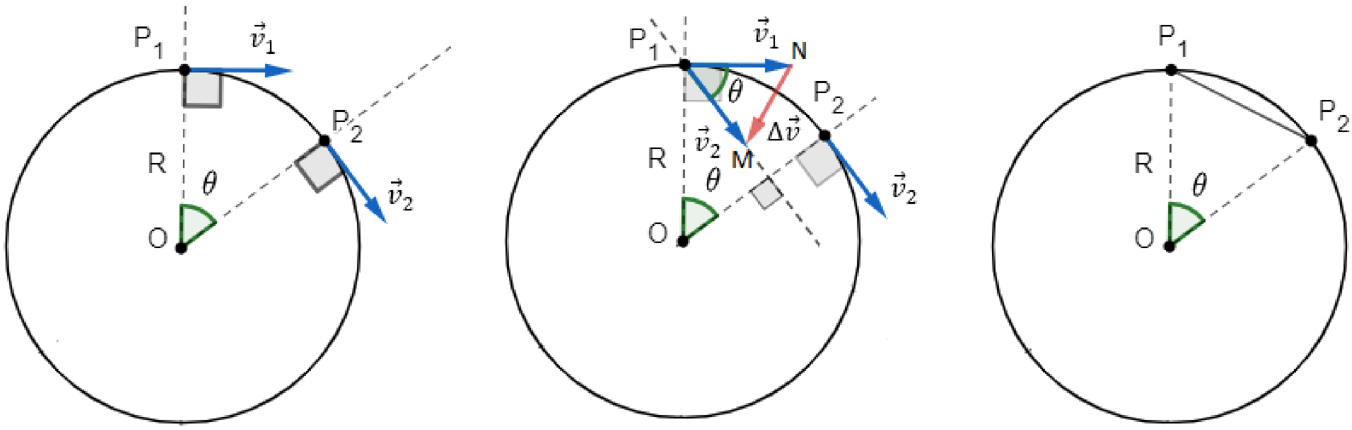


Figura 15: Cálculo do módulo da aceleração centrípeta no MCU.

Utilizando semelhança de triângulos, vemos que o triângulo OP_1P_2 é semelhante ao triângulo P_1MN. Logo, encontramos a seguinte relação:

$$\boxed{\frac{|\Delta\vec{v}|}{|P_1P_2|} = \frac{|\vec{v}|}{R}}\ (1)$$

A medida que pegamos intervalos de tempo muito pequenos (isto é fazer $\Delta t \to 0$), podemos considerar que P_2 está bem próximo de P_1 e que o segmento $\overline{P_1P_2}$ tem comprimento próximo ao do arco $\widehat{P_1P_2}$. Com isso, podemos escrever que:

$$|\overline{P_1P_2}| \cong |\widehat{P_1P_2}|\ (2)$$

Está aproximação do segmento $|\overline{P_1P_2}|$ se aproximar ao comprimento do arco $\widehat{P_1P_2}$, é algo comum na geometria, quando tomamos ângulos muito pequenos. Repare que quando aproximamos P_2 de P_1, o ângulo θ se torna muito pequeno. Como estamos calculando a aceleração centrípeta para o movimento circular uniforme, temos que:

$$\boxed{\left|\widehat{P_1P_2}\right| = |\vec{v}|.\Delta t} \quad (3)$$

Substituindo (3) em (2), concluímos que: $|\overline{P_1P_2}| \cong |\vec{v}|.\Delta t$. Substituindo está última em (1), temos:

$$\boxed{\frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}|.\Delta t} \cong \frac{|\vec{v}|}{R}} \Rightarrow \boxed{\frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} \cong \frac{|\vec{v}|^2}{R}} \quad (4)$$

Lembrando sempre que para considerar $|\overline{P_1P_2}| \cong \left|\widehat{P_1P_2}\right|$, fizemos que Δt seja muito pequeno. Dessa forma, podemos calcular o módulo da aceleração vetorial instantânea $\vec{a}$ pela definição:

$$\boxed{|\vec{a}| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}}$$

Para intervalos de tempo cada vez menores (fazer $\Delta t \to 0$), temos que $|\overline{P_1P_2}|$ se torna cada vez mais próximo de $\left|\widehat{P_1P_2}\right|$, então, a relação em (4) torna-se cada vez mais verdadeira, até que no limite de Δt tendendo a zero, temos que:

$$\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{v}|^2}{R} = \frac{v^2}{R} = |\vec{a}|}$$

Para o caso do movimento circular uniforme, a aceleração tangencial é nula ($\vec{a}_t = \vec{0}$), logo:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_c \therefore \boxed{\vec{a} = \vec{a}_c}$$

Assim, concluímos que o módulo da aceleração centrípeta é dado por:

$$\boxed{|\vec{a}_c| = \frac{v^2}{R}}$$

Então, podemos representar os vetores da seguinte forma:

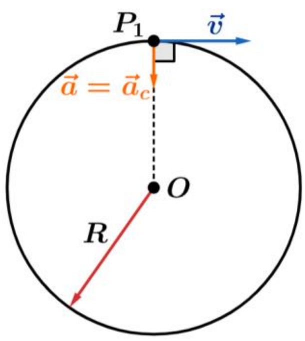


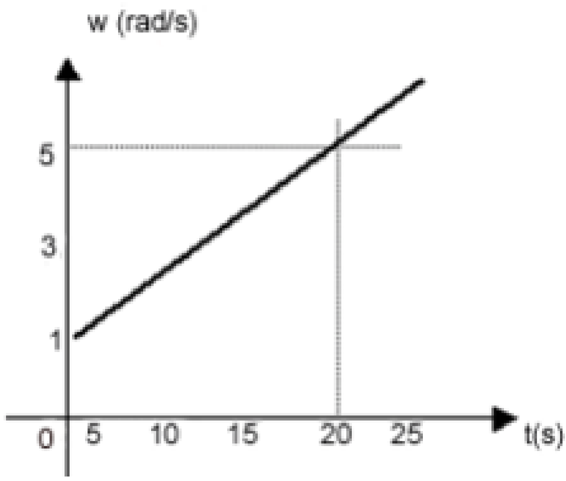
Figura 16: Representação da aceleração centrípeta no MCU.

HORA DE PRATICAR!

2. Lista de exercícios de cinemática vetorial

1. (ITA-1973)

Um flutuador em colchão de ar, desloca-se num círculo horizontal, sobre uma mesa e preso à extremidade de um fio inextensível, de comprimento $0{,}8m$, com velocidade angular mostrada no gráfico (a propulsão é dada pelos gases expelidos do aparelho). Suponha a massa do aparelho constante. Calcule as acelerações angular γ, tangencial (a_t) e centrípeta (a_c) e assinale a resposta correta abaixo.



	$\gamma(rad/s^2)$	$a_t(m/s^2)$	$a_c(m/s^2)$
a)	0,25	0,20	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.
b)	0,20	0,16	$0{,}8 + 0{,}4t + 0{,}05t^2$.
c)	0,25	0,20	$0{,}8 + 0{,}4t + 0{,}05t^2$.
d)	0,20	0,16	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.
e)	0,25	0,16	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.

2. (ITA-1974)

Uma partícula descreve um movimento circular de raio R, partindo do repouso e com uma aceleração tangencial a_T constante. A relação entre o módulo da aceleração centrípeta a_c e o módulo da aceleração tangencial é:

a) $\frac{a_T^2 t}{R}$. b) $\frac{R}{a_T t^2}$. c) $\frac{V^2}{R}$. d) $\frac{a_T t}{R}$. e) $\frac{a_T t^2}{R}$.

3. (ITA-1979)

Um ponto P de uma roda é obrigado a descrever uma trajetória circular de raio R , com aceleração $\vec{a}$ de módulo constante. Num dado instante, a direção e o sentido dos vetores aceleração e velocidade são indicados na Fig. 1.

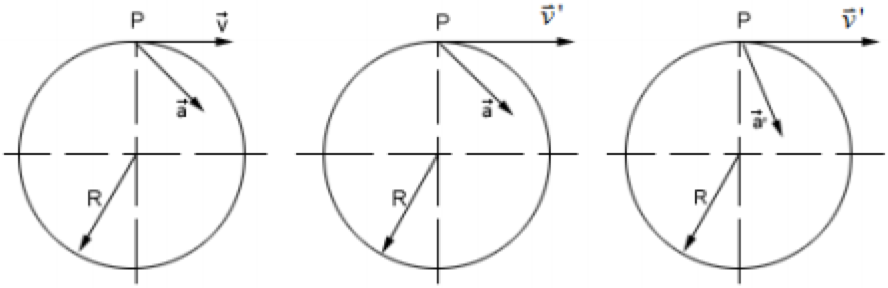


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Pode-se, então, afirmar que:

a) As componentes tangencial e centrípeta de $\vec{a}$, respectivamente $\overrightarrow{a_T}$ e $\overrightarrow{a_C}$ são constantes.

b) Sendo periódico o movimento, decorrido um período após o instante correspondente à situação da Fig. 1, a nova figuração dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$, com $v' > v$ é ilustrada na Fig. 2 acima.

c) O módulo da aceleração tangencial $\overrightarrow{a_T}$, em cada instante, é dado por $a_T = \frac{v^2}{R}$.
d) A aceleração $\vec{a}$ é constante.
e) Na primeira vez que a partícula torna a passar pela posição inicial, a configuração dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\overrightarrow{a'}$, com $v' > v$, é ilustrada na Fig. 3.

4. (ITA-1982)

Acima de um disco horizontal de centro O que gira em torno de seu eixo, no vácuo, dando 50,0 voltas por minuto, estão duas pequenas esferas M e N. A primeira está $2{,}00\ m$ acima do disco e a segunda a $4{,}50\ m$ acima do disco, ambas na mesma vertical. Elas são abandonadas simultaneamente e, ao chocar-se com o disco, deixam marcas N' e M' tais que o ângulo $M'ON'$ é igual a $95{,}5°$. Podemos concluir que a aceleração da gravidade local vale:

a) $10{,}1\ m/s^2$ b) $49{,}3\ m/s^2$ c) $9{,}86\ m/s^2$
d) $11{,}1\ m/s^2$ e) $3{,}14\ m/s^2$

5. (ITA-1985)

Uma roda de uma bicicleta tem raio de $25cm$. Em $5s$ o ciclista alcança a velocidade de $10m/s$. A aceleração angular da roda, suposta constante, é:

a) $20\frac{rad}{s^2}$. b) $0{,}08\frac{rad}{s^2}$. c) $2\frac{rad}{s^2}$.
d) $8\frac{rad}{s^2}$. e) $0{,}5\frac{rad}{s^2}$.

6. (ITA-1991)

Uma partícula move-se em órbita circular com aceleração tangencial de módulo constante. Considere que a velocidade angular era nula no instante $t = 0$. Em dado instante t', o ângulo entre o vetor aceleração $\vec{a}$ e a direção ao longo do raio é $\pi/4$. Indique qual das alternativas abaixo exige um valor de aceleração angular (γ) adequado à partícula no instante t'.

a) $\gamma = \frac{1}{t'}$. b) $\gamma = 2t'$. c) $\gamma = \frac{1}{(t')^2}$.
d) $\gamma = \frac{1}{2(t')^2}$. e) $\gamma = \frac{2}{t'}$.

7. (ITA-1995)

Um avião voa numa altitude e velocidade de módulo constante, numa trajetória circular de raio R, cujo centro coincide com o pico de uma montanha onde está instalado um canhão. A velocidade tangencial do avião é de $200m/s$ e a componente horizontal da velocidade da bala do canhão é de $800m/s$. Desprezando-se os efeitos de atrito e o movimento da Terra e admitindo que o canhão está direcionado de forma a compensar o efeito de atração gravitacional, para atingir o avião, no instante do disparo, o canhão deverá estar apontando para um ponto na frente do mesmo situado a:

a) 4,0 rad. b) 4,0π rad. c) 0,25R rad.
d) 0,25π rad. e) 0,25 rad.

8. (ITA-2007)

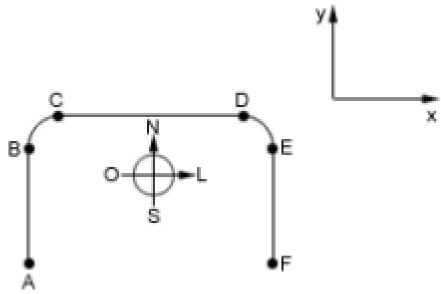
A figura mostra uma pista de corrida $A\ B\ C\ D\ E\ F$, com seus trechos retilíneos e circulares percorridos por um atleta desde o ponto A, de onde parte do repouso, até a chegada em F, onde para. Os trechos BC, CD e DE são percorridos com a mesma velocidade de módulo constante.

Considere as seguintes afirmações:

I – O movimento do atleta é acelerado nos trechos AB, BC, DE e EF.

II – O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é o mesmo nos trechos AB e EF.

III – O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é para sudeste no trecho BC, e, para sudoeste, no DE.



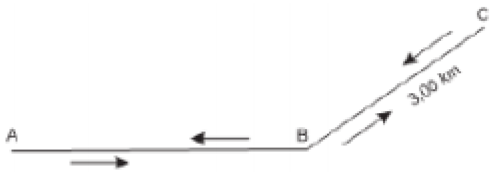
Está(ão) correta(s):

a) Apenas a I.
b) Apenas a I e II.
c) Apenas a I e III.
d) Apenas a II e III.
e) Todas.

9. (ITA-2009)

Na figura um ciclista percorre um trecho AB com velocidade escalar média de $22{,}5\ km/h$ e, em seguida, o trecho BC de $3{,}0\ km$ de extensão. No retorno, ao passar em B, verifica ser de $20{,}0\ km/h$ sua velocidade escalar média no percurso então percorrido, $ABCB$. Finalmente, ele chega em A perfazendo todo o percurso de ida e volta em $1{,}00\ h$, com velocidade escalar média de $24{,}0\ km/h$. Assinale o módulo v do vetor velocidade média referente ao percurso $ABCB$.

a) $v = 12{,}0\ km/h$.
b) $v = 12{,}00\ km/h$.
c) $v = 20{,}0\ km/h$.
d) $v = 20{,}00\ km/h$.
e) $v = 36{,}0\ km/h$.



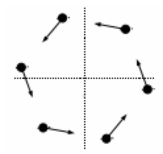
10. (ITA-2011)

Um problema clássico de cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando à posição instantânea do objeto vizinho em movimento. A figura mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular.

Considere que o hexágono tinha $10{,}0\ m$ de lado no instante inicial e que os objetos de movimentam com velocidade de módulo constante de $2{,}00\ m/s$.

Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?

a) $5{,}8s\ e\ 11{,}5m$.
b) $11{,}5s\ e\ 5{,}8m$.
c) $10{,}0s\ e\ 20{,}0m$.
d) $20{,}0s\ e\ 10{,}0m$.
e) $20{,}0s\ e\ 40{,}0m$.



GABARITO

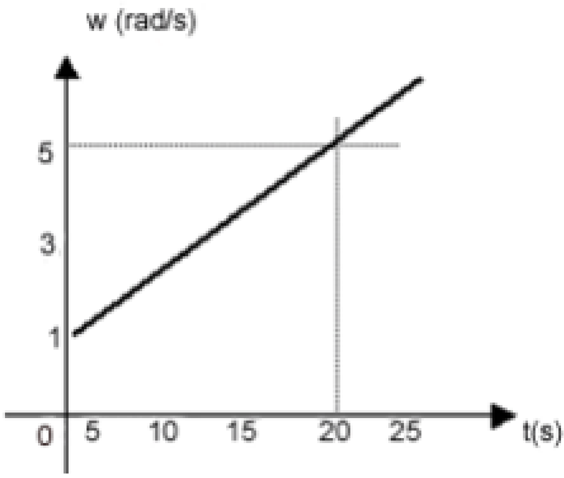
3. Gabarito de cinemática vetorial sem comentários

1) D
2) E
3) E
4) C
5) D
6) C
7) E
8) E
9) A
10) C

4. Lista comentada de cinemática vetorial

1. (ITA-1973)

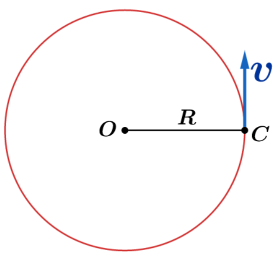
Um flutuador em colchão de ar, desloca-se num círculo horizontal, sobre uma mesa e preso à extremidade de um fio inextensível, de comprimento $0{,}8m$, com velocidade angular mostrada no gráfico (a propulsão é dada pelos gases expelidos do aparelho). Suponha a massa do aparelho constante. Calcule as acelerações angular γ, tangencial (a_t) e centrípeta (a_c) e assinale a resposta correta abaixo.



	$\gamma(rad/s^2)$	$a_t(m/s^2)$	$a_c(m/s^2)$
a)	0,25	0,20	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.
b)	0,20	0,16	$0{,}8 + 0{,}4t + 0{,}05t^2$.
c)	0,25	0,20	$0{,}8 + 0{,}4t + 0{,}05t^2$.
d)	0,20	0,16	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.
e)	0,25	0,16	$0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2$.

Comentários:

Considere a representação do movimento na figura abaixo, onde o flutuador é representado pelo ponto C.



Note pelo gráfico que a velocidade angular do flutuador varia linearmente com o tempo, de modo que podemos acertar que sua aceleração tangencial é constante. Para calculá-la, basta usarmos a definição de aceleração:

$$\gamma = \frac{\Delta w}{\Delta t}$$

Usando os pontos $(0,1)$ e $(20,5)$ do gráfico, obtemos:

$$\gamma = \frac{5-1}{20-0} = \frac{4}{20} = 0{,}20\, rad/s^2$$

Para obtermos a aceleração tangencial basta multiplicarmos pelo raio da trajetória:

$$a_t = \gamma R = 0{,}20 \,.\, 0{,}8 = 0{,}16\, m/s^2$$

Lembrando que a aceleração centrípeta de uma partícula em trajetória circular é dada por:

$$a_c = \frac{V_{tangencial}^2}{R} \qquad (eq.1)$$

Voltamos nossa atenção ao cálculo da velocidade tangencial do flutuador. Podemos relacionar a velocidade tangencial da partícula com sua velocidade angular através da expressão:

$$V_{tangencial} = \omega \cdot R \qquad (eq.2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos:

$$a_c = \omega^2 \cdot R$$

Pelo gráfico apresentado podemos deduzir a variação de w com o tempo:

$\omega = 1 + 0{,}20t$ (eq. da reta)

$$a_c = (1 + 0{,}40t + 0{,}04t^2)\,.\,0{,}8 \Rightarrow a_c = 0{,}8 + 0{,}32t + 0{,}032t^2 \;\; m/s^2$$

Gabarito: D

---

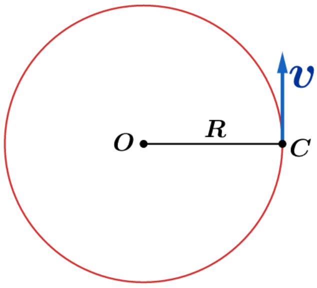
2. (ITA-1974)

Uma partícula descreve um movimento circular de raio R, partindo do repouso e com uma aceleração tangencial a_T constante. A relação entre o módulo da aceleração centrípeta a_c e o módulo da aceleração tangencial é:

a) $\frac{a_T^2 t}{R}$.
b) $\frac{R}{a_T t^2}$.
c) $\frac{V^2}{R}$.
d) $\frac{a_T t}{R}$.
e) $\frac{a_T t^2}{R}$.

Comentários:

Primeiramente, calcularemos a velocidade tangencial do movimento que é representada por V na figura:



Na direção tangencial o movimento tem aceleração constante logo:

$$\Delta V = a_T \Delta t \Rightarrow V = V_0 + a_T t \quad (eq.1)$$

Como a partícula parte do repouso temos: $V_0 = 0$. Lembrando que a aceleração centrípeta (aceleração direcionada ao centro, responsável por desviar a trajetória da linearidade) é dada por:

$$a_c = \frac{V^2}{R} \quad (eq.2)$$

Substituindo (1) em (2), temos:

$$a_c = \frac{a_T^2 t^2}{R} \therefore \boxed{\frac{a_c}{a_T} = \frac{a_T t^2}{R}}$$

Gabarito: E

---

3. (ITA-1979)

Um ponto P de uma roda é obrigado a descrever uma trajetória circular de raio R , com aceleração $\vec{a}$ de módulo constante. Num dado instante, a direção e o sentido dos vetores aceleração e velocidade são indicados na Fig. 1.

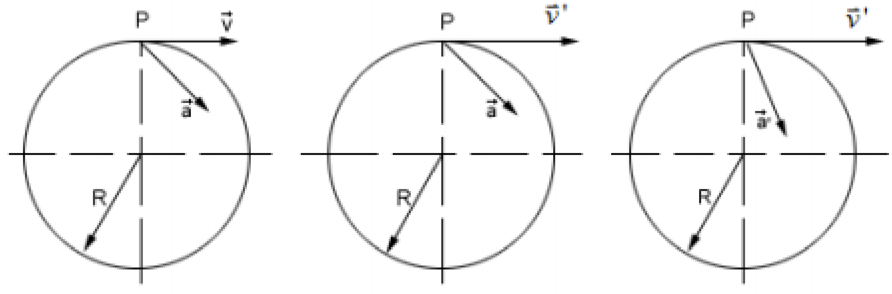


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

Pode-se, então, afirmar que:

a) As componentes tangencial e centrípeta de $\vec{a}$, respectivamente $\overrightarrow{a_T}$ e $\overrightarrow{a_C}$ são constantes.

b) Sendo periódico o movimento, decorrido um período após o instante correspondente à situação da Fig. 1, a nova figuração dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$, com $v' > v$ é ilustrada na Fig. 2 acima.

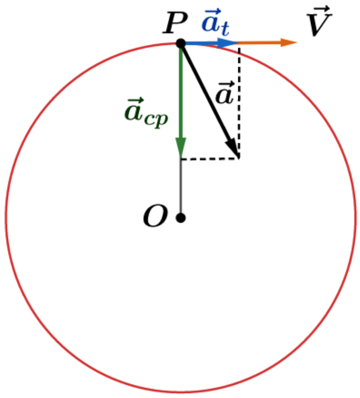
c) O módulo da aceleração tangencial $\overrightarrow{a_T}$, em cada instante, é dado por $a_T = \frac{v^2}{R}$.

d) A aceleração $\vec{a}$ é constante.

e) Na primeira vez que a partícula torna a passar pela posição inicial, a configuração dos vetores velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\overrightarrow{a'}$, com $v' > v$, é ilustrada na Fig. 3.

Comentários:

a) Incorreta. Considere a representação das duas acelerações na trajetória:



Suponha, por absurdo, que as componentes tangencial e centrípeta são constantes. Nesse caso poderíamos escrever a velocidade tangencial como:

$$V = a_T t \quad (eq.1)$$

E como a aceleração centrípeta é dada por:

$$a_C = \frac{V^2}{R} \quad (eq.2)$$

O módulo da aceleração da partícula é dado por:

$$a^2 = a_T^2 + a_C^2$$

$$a = \sqrt{a_T^2 + \frac{a_T^4 t^4}{R^2}} \therefore a = a_T \sqrt{1 + \frac{a_T^2 t^4}{R^2}}$$

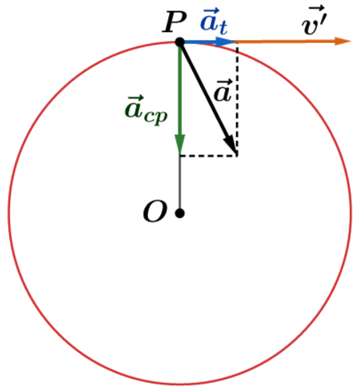
O que não é constante, portanto, contrariando a hipótese original.

b) Incorreto. Em um movimento periódico as grandezas físicas apresentam valores iguais aos iniciais após um período.

c) Incorreto. Essa expressão representa a aceleração centrípeta em cada instante.

d) Incorreto. Uma partícula sujeita a aceleração constante percorre uma parábola, lembre-se, por exemplo, de lançamentos oblíquos, onde a aceleração gravitacional é uma aceleração vetorial constante. Se o corpo estivesse em repouso ou com velocidade inicial na direção do vetor aceleração então a trajetória seria uma reta.

e) Correto. Como $v' > v$ podemos afirmar que a aceleração centrípeta aumentou nesse intervalo (veja a expressão para aceleração centrípeta acima) e como a aceleração resultante deve ser constante, podemos concluir que a aceleração tangencial diminuiu. Graficamente:



Por isso a aceleração é mostrada mais próxima ao raio.

Gabarito: E

---

4. (ITA-1982)

Acima de um disco horizontal de centro O que gira em torno de seu eixo, no vácuo, dando 50,0 voltas por minuto, estão duas pequenas esferas M e N. A primeira está $2{,}00\ m$ acima do disco e a segunda a $4{,}50\ m$ acima do disco, ambas na mesma vertical. Elas são abandonadas simultaneamente e, ao chocar-se com o disco, deixam marcas N' e M' tais que o ângulo $M'ON'$ é igual a $95{,}5°$. Podemos concluir que a aceleração da gravidade local vale:

a) $10{,}1\ m/s^2$
b) $49{,}3\ m/s^2$
c) $9{,}86\ m/s^2$
d) $11{,}1\ m/s^2$
e) $3{,}14\ m/s^2$

Comentários:

O tempo que o disco usou para rotacionar 95,5° é igual a diferença do tempo de queda das duas esferas. Calculando-se esse tempo:

$$t = t_N - t_M$$

$$t = \sqrt{\frac{2H_N}{g}} - \sqrt{\frac{2H_M}{g}} = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{H_N} - \sqrt{H_M}\right) \quad (eq.1)$$

Aqui foi usado a expressão $h = \frac{gt^2}{2}$ de queda livre. Podemos usar o movimento do disco para calcular o tempo acima:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\mathrm{t}} \Rightarrow 2\pi f = \frac{\Delta\theta}{t}$$

Aqui devemos transformar o ângulo fornecido para radianos e a frequência para hertz. Efetuando as transformações encontramos $5/6\ Hz$ e $\frac{95{,}5\pi}{180}\ rad$. Logo, o tempo decorrido entre as colisões foi:

$$t = \frac{\Delta\theta}{2\pi f} = 0{,}318\ s$$

Substituindo o valor encontrado em (1), obtemos:

$$0{,}3183 = \sqrt{\frac{2}{g}}\left(\sqrt{4{,}5} - \sqrt{2}\right)$$

$g = 2\frac{\left(\sqrt{4,5}-\sqrt{2}\right)^2}{0,3183^2} \therefore g = \frac{2(6,5-6)}{0,3183^2} \approx 9,87\ m/s^2$

O aluno deveria ser muito cuidadoso com essa questão, já que a resposta era instável nas outras variáveis, pequenas imprecisões nas contas levariam facilmente para outras respostas.

Gabarito: C

5. (ITA-1985)

Uma roda de uma bicicleta tem raio de $25\ cm$. Em $5\ s$ o ciclista alcança a velocidade de $10\ m/s$. A aceleração angular da roda, suposta constante, é:

a) $20\frac{rad}{s^2}$.
b) $0,08\frac{rad}{s^2}$.
c) $2\frac{rad}{s^2}$.
d) $8\frac{rad}{s^2}$.
e) $0,5\frac{rad}{s^2}$.

Comentários:

Assumindo que a roda não desliza em relação ao solo, devemos ter uma velocidade nula no ponto de contato do pneu da roda com o solo, como visto em teoria:

$$V_C = V_T - V_{rot} = 0$$

$$V_T = V_{rot} \Rightarrow \frac{\Delta V_T}{\Delta t} = \frac{\Delta V_{rot}}{\Delta \mathrm{t}} \Rightarrow a_{tan} = \alpha \cdot R$$

Onde a_{tan} é a aceleração tangencial, α a aceleração angular e R o raio do pneu da bicicleta. A velocidade de translação da bicicleta é a mesma das rodas, isto é, a velocidade de translação do ciclista, logo:

$$a_{tan} = \frac{10}{5} = 2\ m/s^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2}{0{,}25} = 8\ rad/s^2$$

Gabarito: D

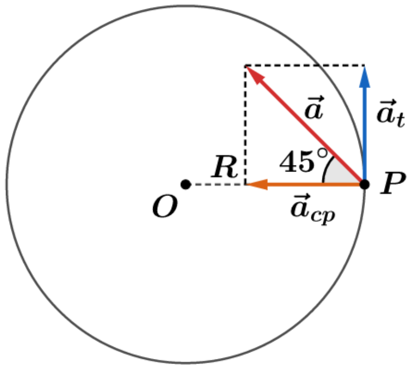
6. (ITA-1991)

Uma partícula move-se em órbita circular com aceleração tangencial de módulo constante. Considere que a velocidade angular era nula no instante $t = 0$. Em dado instante t', o ângulo entre o vetor aceleração $\vec{a}$ e a direção ao longo do raio é $\pi/4$. Indique qual das alternativas abaixo exige um valor de aceleração angular (γ) adequado à partícula no instante t'.

a) $\gamma = \frac{1}{t'}$.
b) $\gamma = 2t'$.
c) $\gamma = \frac{1}{(t')^2}$.
d) $\gamma = \frac{1}{2(t')^2}$.
e) $\gamma = \frac{2}{t'}$.

Comentários:

Considere o esquema representando o movimento:



A aceleração resultante pode ser separa em uma aceleração centrípeta e tangencial, como seu ângulo com o raio é $45°$, temos:

$$a_{cp} = a_t \quad (eq. 1)$$

Partindo do repouso a partícula percorre um movimento uniformemente variado na tangencial, logo sua velocidade após se passar um tempo t' é:

$$V_t = a_t \cdot t' \quad (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$\frac{V_T^2}{R} = a_t \Rightarrow \frac{a_t^2 (t')^2}{R} = a_t \therefore \gamma = \frac{a_t}{R} = \frac{1}{(t')^2}$$

Gabarito: C

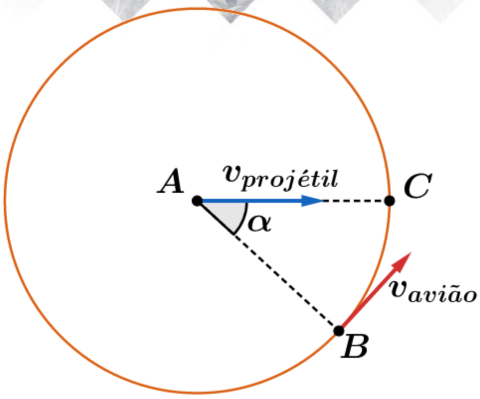
7. (ITA-1995)

Um avião voa numa altitude e velocidade de módulo constante, numa trajetória circular de raio R, cujo centro coincide com o pico de uma montanha onde está instalado um canhão. A velocidade tangencial do avião é de $200\ m/s$ e a componente horizontal da velocidade da bala do canhão é de $800\ m/s$. Desprezando-se os efeitos de atrito e o movimento da Terra e admitindo que o canhão está direcionado de forma a compensar o efeito de atração gravitacional, para atingir o avião, no instante do disparo, o canhão deverá estar apontando para um ponto na frente do mesmo situado a:

a) 4,0 rad.
b) 4,0π rad.
c) 0,25R rad.
d) 0,25π rad.
e) 0,25 rad.

Comentários:

A figura abaixo mostra o sistema no momento do disparo, visto por cima:



Em que A é o local onde se encontra o canhão, B é a posição do avião no momento do disparo e C é o ponto o projétil deve atingir o avião. Para que a colisão ocorra o projétil e o avião necessitam levar o mesmo tempo para alcançar C, a partir de suas posições mostradas na figura:

$$t = \frac{\alpha \cdot R}{V_{avião}} = \frac{R}{V_{projétil}} \Rightarrow \alpha = \frac{V_{avião}}{V_{projétil}} = \frac{1}{4} = 0{,}25\, rad$$

Gabarito: E

8. (ITA-2007)

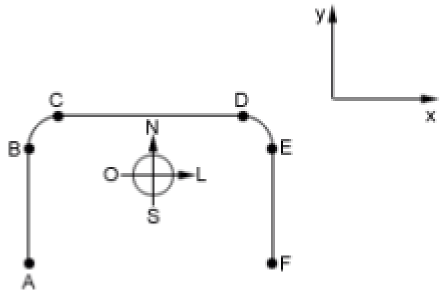
A figura mostra uma pista de corrida $A\ B\ C\ D\ E\ F$, com seus trechos retilíneos e circulares percorridos por um atleta desde o ponto A, de onde parte do repouso, até a chegada em F, onde para. Os trechos BC, CD e DE são percorridos com a mesma velocidade de módulo constante.

Considere as seguintes afirmações:

I – O movimento do atleta é acelerado nos trechos AB, BC, DE e EF.

II – O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é o mesmo nos trechos AB e EF.

III – O sentido da aceleração vetorial média do movimento do atleta é para sudeste no trecho BC, e, para sudoeste, no DE.



Está(ão) correta(s):

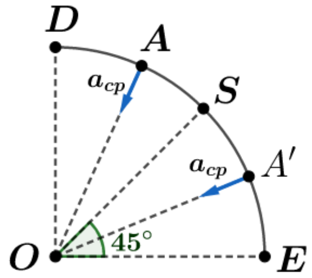
a) Apenas a I. b) Apenas a I e II. c) Apenas a I e III.
d) Apenas a II e III. e) Todas.

Comentários:

I. Correto. No trecho AB o atleta parte do repouso e atinge uma velocidade não nula, portanto sofre aceleração. No trecho EF o atleta apresenta velocidade no início, mas chega ao seu com velocidade nula, logo houve aceleração. Nos trechos BC e DE a velocidade do atleta é constante, mas a trajetória é curvilínea e, portanto, temos aceleração centrípeta.

II. Correto. No trecho AB a aceleração tem sentido de A para B, pois aumenta a velocidade do atleta, já em EF, ela deve ter sentido de F para E, uma vez que o atleta percorre o percurso de E para F e sua velocidade diminui.

III. Correto. Veja a figura abaixo:



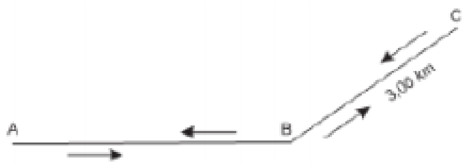
Qualquer ponto arbitrário A na trajetória apresenta seu simétrico A' em relação a S, de modo que ao tirarmos a média das acelerações só a componente naquela direção não se cancela. A demonstração para o trecho BC é análoga.

Gabarito: E

9. (ITA-2009)

Na figura um ciclista percorre um trecho AB com velocidade escalar média de $22{,}5\ km/h$ e, em seguida, o trecho BC de $3{,}0\ km$ de extensão. No retorno, ao passar em B, verifica ser de $20{,}0\ km/h$ sua velocidade escalar média no percurso então percorrido, $ABCB$. Finalmente, ele chega em A perfazendo todo o percurso de ida e volta em $1{,}00\ h$, com velocidade escalar média de $24{,}0\ km/h$. Assinale o módulo v do vetor velocidade média referente ao percurso $ABCB$.

a) $v = 12{,}0\ km/h$.
b) $v = 12{,}00\ km/h$.
c) $v = 20{,}0\ km/h$.
d) $v = 20{,}00\ km/h$.
e) $v = 36{,}0\ km/h$.



Comentários:

Da última informação dada pela questão podemos determinar o comprimento de AB:

$$V_{med,total} = \frac{d_{ABCBA}}{t_{ABCBA}} \Rightarrow d_{ABCBA} = 24{,}0\ km$$

Cuidado com os algarismos significativos!

$$2AB + 2BC = 24{,}0 \Rightarrow AB = 9{,}0\ km$$

Usando a velocidade média do percurso $ABCB$, temos:

$$V_{med,ABCB} = \frac{AB + 2BC}{t_{ABCB}}$$

Podemos encontrar o tempo que o ciclista gastou naquele percurso:

$$t_{ABCB} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}\ h$$

Por definição a velocidade média vetorial no percurso $ABCB$ é dada por:

$$\vec{V}_{med,ABCB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{t_{ABCB}}$$

Aplicando módulo dos dois lados da expressão:

$$\left|\vec{V}_{med,ABCB}\right| = \frac{AB}{t_{ABCB}} = \frac{9,0}{\frac{3}{4}} = 12,0\ m/s$$

Note que a questão também trabalha com algarismos significativos.

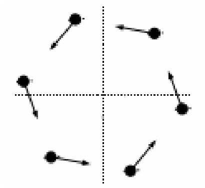
Gabarito: A

10. (ITA-2011)

Um problema clássico de cinemática considera objetos que, a partir de certo instante, se movem conjuntamente com velocidade de módulo constante a partir dos vértices de um polígono regular, cada qual apontando à posição instantânea do objeto vizinho em movimento. A figura mostra a configuração desse movimento múltiplo no caso de um hexágono regular.

Considere que o hexágono tinha $10,0\ m$ de lado no instante inicial e que os objetos de movimentam com velocidade de módulo constante de $2,00\ m/s$.

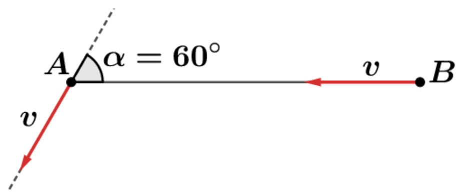
Após quanto tempo estes se encontrarão e qual deverá ser a distância percorrida por cada um dos seis objetos?



a) $5,8s\ e\ 11,5m$.
b) $11,5s\ e\ 5,8m$.
c) $10,0s\ e\ 20,0m$.
d) $20,0s\ e\ 10,0m$.
e) $20,0s\ e\ 40,0m$.

Comentários:

A figura abaixo mostra a configuração do movimento entre dois vértices do hexágono em um momento qualquer:



Perceba que a velocidade relativa entre dois vértices se mantém a mesma:

$$v_{rel} = v \cdot \cos 60° - v = -\frac{v}{2}$$

Os objetos se encontrarão quando a distância relativa entre eles for nula, ou seja:

$$v_{rel} = \frac{\Delta d_{rel}}{\Delta t} \Rightarrow -\frac{v}{2} = -\frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{2L}{v}$$

Usando os dados fornecidos no enunciado:

$$\Delta t = \frac{(2 \cdot 10)}{2} = 10\ s$$

Sabemos que as partículas possuíam velocidades de módulo constante, como se movimentaram durante $10\ s$, podemos afirmar:

$$d = v \cdot \Delta t$$

A trajetória das partículas é uma espiral, mas isso não é relevante, tudo que precisamos saber é que a velocidade tangencial da partícula é constante e, portanto, a expressão de movimento uniforme se aplica. Substituindo os valores do enunciado na expressão acima, obtemos:

$$d = 20\ m$$

Gabarito: C

5. Composição de movimentos

Dado dois vetores no espaço, podemos escrever cada vetor em relação a origem e podemos escrever um vetor em relação ao outro:

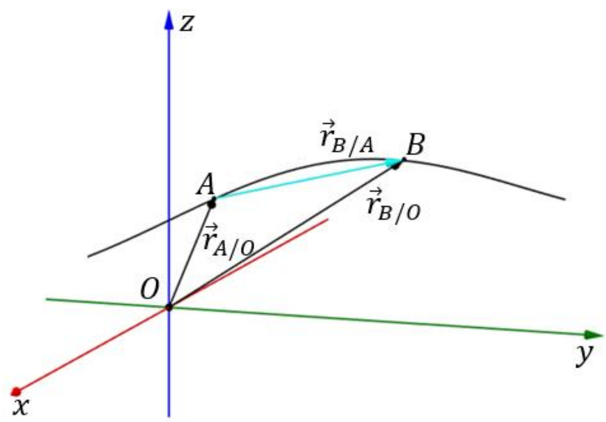


Figura 17: Vetor deslocamento no R³.

Quando escrevemos $\vec{r}_{A/O}$ estamos escrevendo o vetor de A em relação a origem O, $\vec{r}_{B/O}$ o vetor de B em relação a origem O e $\vec{r}_{B/A}$ o vetor de B em relação a A. Além disso, pela soma vetorial, temos que:

$$\boxed{\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}}$$

$$\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}$$

Dessa forma, podemos dizer que um vetor pode ser escrito como a soma de dois vetores, sendo que se pode escolher um ponto qualquer para escrever a soma vetorial (o ponto A poderia ser um ponto qualquer que valeria $\vec{r}_{B/O} = \vec{r}_{B/A} + \vec{r}_{A/O}$).

Está é a regra “das bolinhas”: Digamos que temos três vetores $\vec{r}_{B/E}$, $\vec{r}_{B/O}$ e $\vec{r}_{E/O}$. Coloca-se o vetor desejado, vamos supor $\vec{r}_{E/O}$. Então devemos escolher dois vetores de forma que o termo escreveremos o vetor E em relação ao ponto B e o ponto B em relação ao ponto O, isto é:

$$\vec{r}_{E/O} = \vec{r}_{E/B} + \vec{r}_{B/O}$$

Como escrever $\vec{r}_{E/B}$ e $\vec{r}_{B/E}$ só altera o sentido dos vetores, então temos que:

$$\vec{r}_{E/B} = -\vec{r}_{B/E}$$

Então:

$$\vec{r}_{E/O} = -\vec{r}_{B/E} + \vec{r}_{B/O}$$

De acordo com os vetores dados. Esta regra “das bolinhas” é muito utilizada nas questões de composição de movimento e soma vetorial. A partir da relação das posições, derivando em relação ao tempo, chegamos na relação entre as velocidades, e derivando novamente em relação ao tempo, encontramos a relação das acelerações.

5)

Um rio de margens paralelas corre com uma velocidade de 3,0 m/s em relação às margens. A distância entre as margens é de 12 metros. Um barco de pesca sai de uma das margens em direção à outra com velocidade de 4,0 m/s em relação à água, de tal forma que o seu eixo fique perpendicular à correnteza. Determine:

a) o módulo da velocidade do barco de pesca em relação às margens;

b) quanto tempo o barco leva para ir de uma margem a outra;

c) o deslocamento do rio abaixo;

d) o deslocamento m relação às margens.

Comentários:

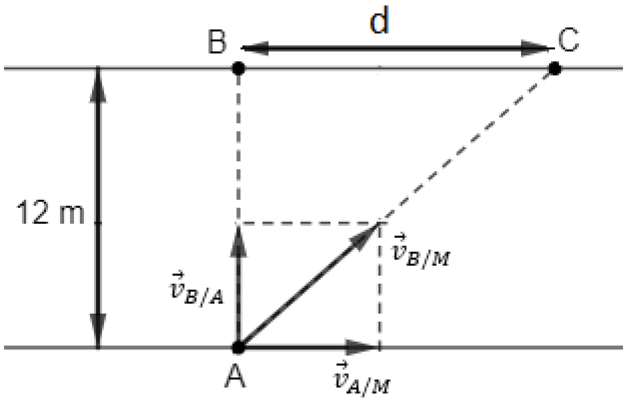
Novamente, vamos definir os vetores velocidades e a relação vetorial entre eles:

$$\begin{cases} \vec{v}_{B/M}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ às\ margens \\ \vec{v}_{B/A}: velocidade\ do\ barco\ em\ relação\ à\ água \\ \vec{v}_{A/M}: velocidade\ da\ água\ em\ relacao\ às\ margens \end{cases}$$

Pela regra das bolinhas, temos que:

$$\vec{v}_{B/M} = \vec{v}_{B/A} + \vec{v}_{A/M}$$

Além disso, representamos geometricamente o problema:



a) Para encontrarmos o módulo da velocidade do barco de pesca, precisamos utilizar a relação de Pitágoras para relacionar os módulos dos vetores velocidades:

$$|\vec{v}_{B/M}|^2 = |\vec{v}_{B/A}|^2 + |\vec{v}_{A/M}|^2$$

$$\left|\vec{v}_{\frac{B}{M}}\right|^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow \boxed{|\vec{v}_{B/M}| = 5{,}0\ m/s}$$

b) Para encontrar o tempo de travessia, podemos utilizar a velocidade do barco em relação à água e o seu deslocamento neste trajeto:

$$\Delta t = \frac{d}{|\vec{v}_{B/M}|} = \frac{12}{4{,}0} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 3{,}0\ s}$$

c) O deslocamento do rio abaixo pode ser obtido pela velocidade das águas em relação às margens, dado que o tempo gasto pelo barco foi de 3,0 s:

$$d = |\vec{v}_{A/M}| \cdot \Delta t = 3.3 \Rightarrow \boxed{\mathrm{d} = 9{,}0\ m}$$

d) Para um observador fixo na margem do rio, o seu movimento acontece na direção da velocidade do barco em relação à margem, isto é, de A para C. Logo, podemos calcular esse deslocamento da seguinte forma:

$$\boxed{\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} \Rightarrow \overline{AC}^2 = 12^2 + 9^2 \Rightarrow \boxed{\overline{AC} = 15\ m}$$

Pela cinemática, poderíamos calcular o deslocamento da seguinte forma:

$$d_{B/M} = |\vec{v}_{B/M}| \cdot \Delta t = 5 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{d_{B/M} = 15\ m}$$

Note que o tempo de travessia é exatamente o mesmo, para qualquer umas das velocidades escolhidas:

$$\boxed{\Delta t = \frac{\overline{AC}}{|\vec{v}_{B/M}|} = \frac{\overline{AB}}{|\vec{v}_{B/A}|} = \frac{\overline{BC}}{|\vec{v}_{A/M}|}}$$

Como mostra os cálculos:

$$3{,}0\ s = \frac{12\ m}{4{,}0\ m/s} = \frac{9\ m}{3{,}0\ m/s} = \frac{15\ m}{5{,}0\ m/s}$$

INDO MAIS FUNDO!

5.1. Composição de movimento aplicada à roda

Se um corpo rígido descreve um movimento composto de translação e rotação, sua velocidade pode ser definida pela soma vetorial da velocidade de translação mais a velocidade de rotação:

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_r \Rightarrow \boxed{\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Observação: a velocidade de rotação de um corpo pode ser determinada pelo produto vetorial do vetor da velocidade angular com o vetor que representa o raio de giração ($\vec{\omega} \times \vec{r}$).

Define-se **eixo instantâneo de rotação** o eixo onde todos os seus pontos têm velocidade nula em um determinado instante. Como $\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r}$ e pela definição de eixo instantâneo de rotação, temos que:

$$\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} = \vec{v}_t + \vec{\omega} \times \vec{r} \therefore \boxed{\vec{v}_t = -\vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Pelas propriedades de produto vetorial, concluímos que a velocidade de translação $\vec{v}_t$ e ortogonal a velocidade vetorial angular $\vec{\omega}$ e é ortogonal ao vetor $\vec{r}$.

Podemos determinar a velocidade de um ponto do corpo conhecida a posição do eixo instantâneo de rotação. Para isso, vamos considerar um corpo cujo eixo instantâneo de rotação é perpendicular ao plano da figura e que gira no sentido anti-horário, como visto na figura:

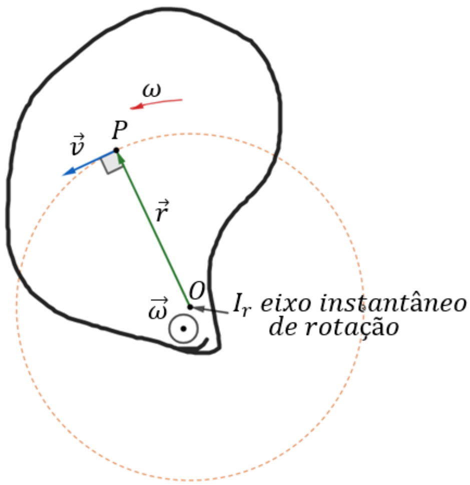


Figura 18: Um corpo qualquer rotacionando com uma velocidade angular $\boldsymbol{\omega}$.

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Observação: o vetor $\vec{\omega}$ tem orientação "saindo do papel", por isso representamos por um círculo com uma bolinha no meio, próximo ao ponto O. Mas como $\vec{\omega} \perp \vec{r}$, podemos dizer que o módulo de $\vec{v}$ é $\boxed{v = \omega \cdot r}$.

Para determinar a posição do eixo instantâneo de rotação, basta fazer a intersecção das retas que passam pelos pontos considerados e são perpendiculares às respectivas velocidades:

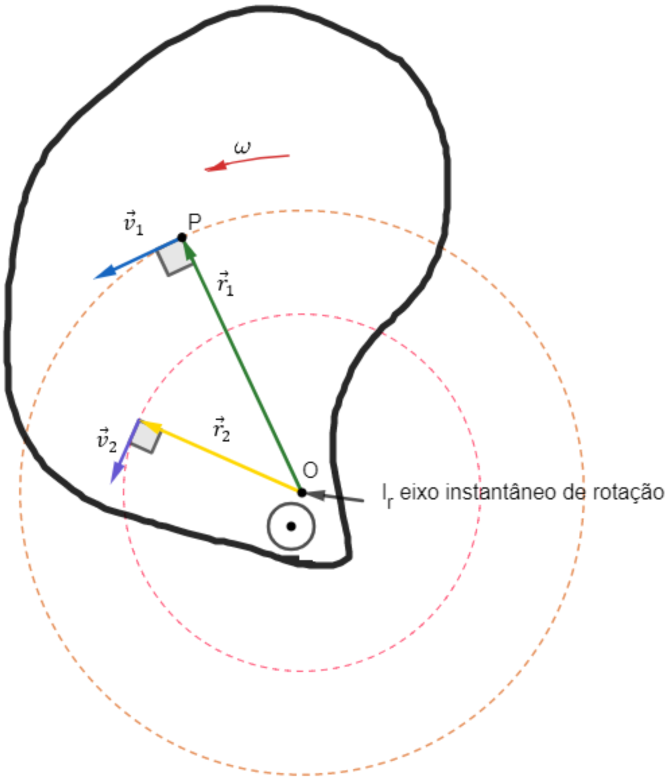


Figura 19: Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

Depois disso, podemos construir o diagrama das velocidades dos pontos de um corpo rígido. Devido ao fato de os módulos das velocidades serem proporcionais à distância ao eixo instantâneo de rotação, escrevemos o diagrama das velocidades:

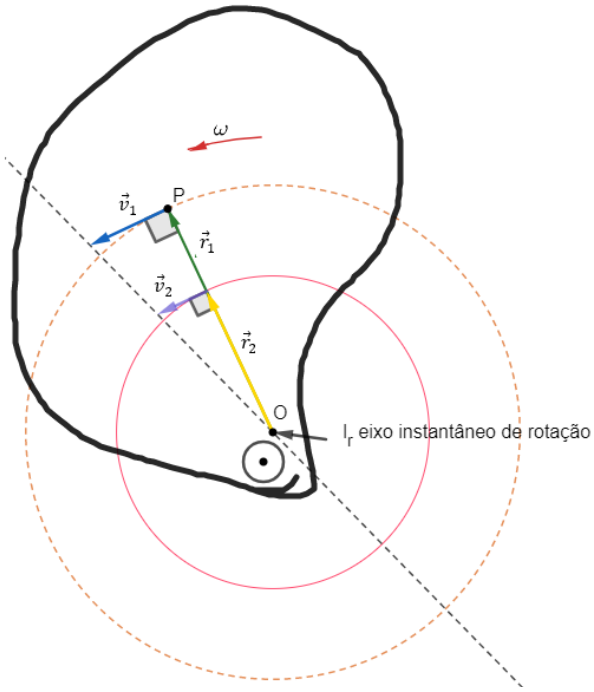


Figura 20: Determinação da relação entre os módulos das velocidades e os raios de giração.

Como o módulo da velocidade angular é constante, podemos dizer que:

$$\boxed{\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = constante}$$

5.1.1. Movimento da roda sem deslizamento

Se não existe deslizamento, a velocidade no ponto de contato é nula pois a velocidade de translação tem o mesmo módulo da velocidade de rotação, mas elas possuem sentidos opostos, conforme figura abaixo:

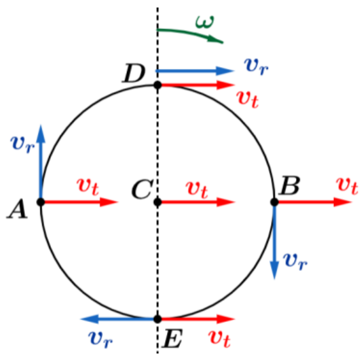


Figura 21: Velocidade de translação e rotação para a roda sem deslizamento.

$$\vec{v} = \vec{v}_t + \vec{v}_r, mas\ \vec{v}_t = -\vec{v_r} \therefore \boxed{\vec{v} = \vec{0}}$$

Portanto, o contato (ponto E) passa o eixo instantâneo de rotação, a direção do eixo é a reta que está furando a página no ponto E. Logo, temos as seguintes disposições da velocidade de translação:

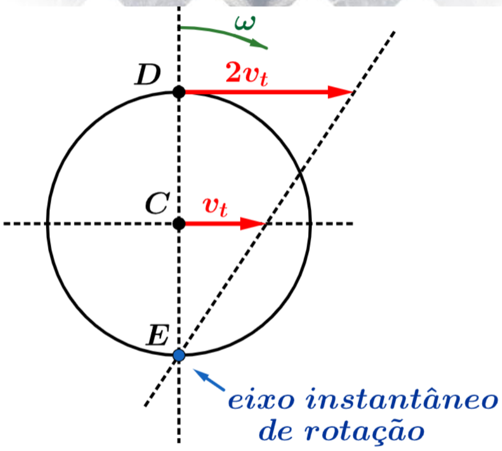


Figura 22: Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

5.1.2. Movimento da roda com deslizamento

Devido ao fato de ter deslizamento entre a roda e o solo, a velocidade no ponto de contato não é nula, isto é, existe uma velocidade resultante da rotação e da translação. Neste caso, vamos dividir o problema em quatro casos possíveis:

a) Rolamento no sentido do deslocamento deslizando, com velocidade do contato no sentido do deslocamento:

Para determinar a posição do eixo instantâneo de rotação é necessário conhecer a velocidade de contato e a velocidade de translação correspondendo à velocidade da posição do eixo da roda:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_t + \vec{v}_r$$

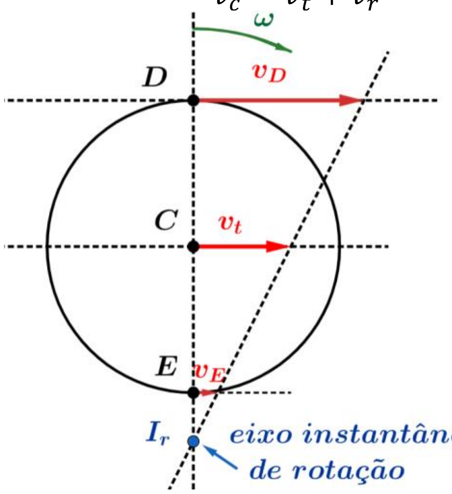


Figura 23: Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

Essa situação acontece quando é acionado os freios, mas as rodas do veículo e o atrito não são suficientes para reduzir a velocidade de translação até que essa possa impedir o deslizamento. Em outras palavras:

$$\boxed{|\vec{v}_t| > |\vec{v}_r|} \; e \; \boxed{|\vec{v}_c| = |\vec{v}_t| - |\vec{v}_r|}$$

b) Rolamento no sentido do deslocamento deslizando, com velocidade do contato no sentido contrário ao deslocamento:

Nesse caso, para determinar o eixo instantâneo de rotação, basta conhecer a velocidade de contato e a velocidade de translação, que corresponde à velocidade da posição do eixo da roda:

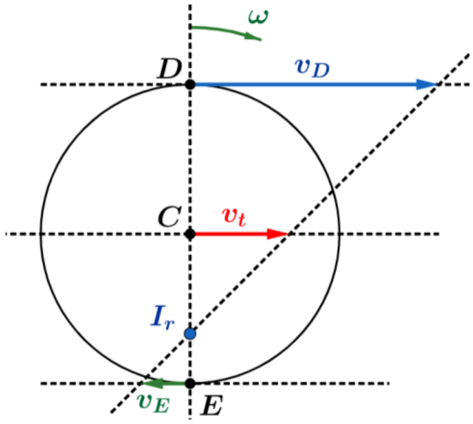


Figura 24: Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

Essa situação acontece quando o motor do móvel aumenta muito a velocidade de rotação das rodas e o atrito não é suficiente para aumentar a velocidade de translação para evitar o deslizamento, isto é:

$$\boxed{|\vec{v}_r| > |\vec{v}_t|} \text{ e } \boxed{|\vec{v}_c| = |\vec{v}_r| - |\vec{v}_t|}$$

c) Movimento da roda de um veículo sem rolamento.

Nessa situação, não há rolamento da roda durante o movimento, então existe apenas a translação da roda e todos os seus pontos terão velocidades iguais à de translação:

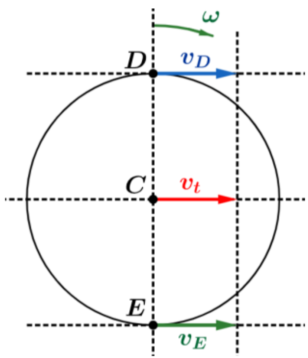


Figura 25:Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

Nesse caso, os freios travam as rodas e o atrito é tão pequeno que o veículo continua seu movimento de translação, imagine um carro em uma estrada coberta de gelo, por exemplo.

$$\vec{v}_c = \vec{v}_t$$

Para essa situação particular, dizemos que o eixo instantâneo de rotação está lá no infinito (apenas uma abstração da situação).

d) Roda em sentido contrário ao deslocamento.

Nessa situação, para determinar o eixo instantâneo de rotação basta conhecer a velocidade do contato e a velocidade de translação, que corresponde a velocidade do eixo da roda:

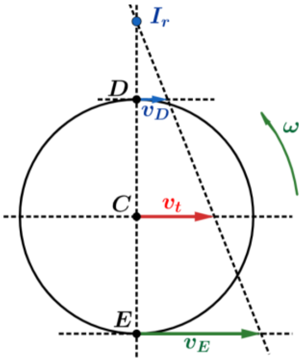


Figura 26: Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação.

Nesse caso, imagine que o motorista engate uma marcha a ré implicando movimento contrário as rodas, mas o atrito não é suficiente para fazer o móvel parar e inverter o seu sentido.

Observação: Não coloque uma marcha a ré no seu carro para fazer este teste, nossos carros são projetados para que a marcha a ré seja acionada com o carro parado. Essa manobra pode danificar sua caixa de engrenagens. Nesse caso temos que:

$$\vec{v}_c = \vec{v}_t + \vec{v}_r \text{ e } |\vec{v}_c| = |\vec{v}_t| + |\vec{v}_r|$$

Para determinar a velocidade de um ponto qualquer da roda, podemos partir do eixo instantâneo de rotação e da velocidade de translação. Para um ponto P da roda, vamos considerar sua velocidade de translação $\vec{v}_t$ e eu eixo instantâneo de rotação conforme a figura abaixo:

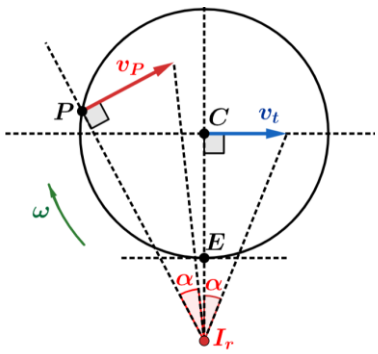


Figura 27:Determinação geométrica do eixo instantâneo de rotação e a relação entre os módulos das velocidades.

Pela definição de velocidade angular para a rotação de um corpo extenso, $\vec{v}_r = \vec{\omega} \times \vec{r}$, o módulo da velocidade angular ($\omega = \frac{v}{r}$) pode ser escrito por:

$$\omega = \frac{v_P}{\overline{PI_r}} = \frac{v_t}{\overline{CI_r}} \therefore \boxed{v_p = v_t . \frac{\overline{PI_r}}{\overline{CI_r}}}$$

5.2. A cicloide

Chama-se cicloide a curva definida por um ponto de uma circunferência que rola sem deslizar sobre uma reta. Graficamente, temos que:

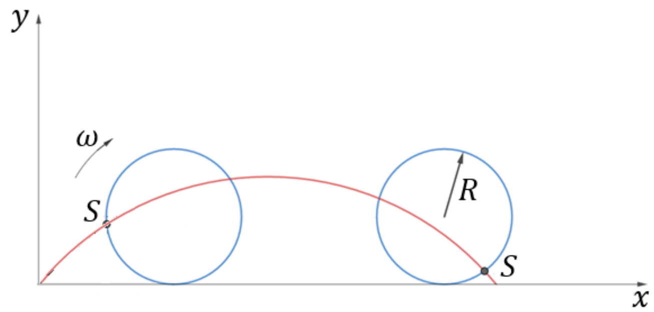
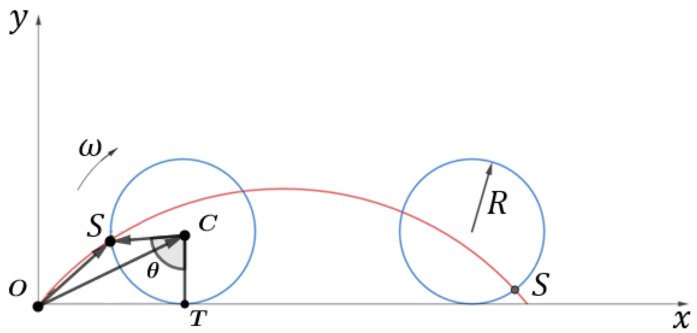


Figura 28: Representação de uma cicloide.

Podemos escrever a posição do ponto S como:



Vetorialmente, temos:

$$\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CS}$$

Podemos ver que quando a circunferência gira um certo ângulo θ, o comprimento OT é igual ao arco $\widehat{TS}$, nada mais é que $R \cdot \theta$. Portanto:

$$\overline{OT} = Arco\ \widehat{TS} = R \cdot \theta$$

Portanto, podemos escrever os vetores como sendo:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TC}$$

$$\overrightarrow{OC} = (R \cdot \theta, 0) + (0, R) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (R \cdot \theta, R)$$

E $\overrightarrow{CS}$:

$$\overrightarrow{CS} = (-R \cdot sen(\theta), -R \cdot \cos(\theta))$$

Portanto, $\overrightarrow{OS}$ é dado por:

$$\overrightarrow{OS} = (R \cdot \theta, R) + (-R \cdot sen(\theta), -R \cdot \cos(\theta))$$

$$\overrightarrow{OS} = (R \cdot \theta - R \cdot sen(\theta), R - R \cdot \cos(\theta))$$

Diante disso, as equações paramétricas da cicloide são:

$$x(\theta) = R \cdot \big(\theta - sen(\theta)\big)$$

$$y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$$

Em que $\theta = \omega \cdot t$. Logo:

$$x(t) = R \cdot \big(\omega \cdot t - sen(\omega \cdot t)\big)$$

$$y(t) = R(1 - \cos(\omega \cdot t))$$

Derivando $x(t)$ e $y(t)$ em relação ao tempo, temos que:

$$\begin{cases} \boxed{v_x = \omega \cdot R - R \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \omega} \\ \boxed{v_y = R \cdot sen(\omega \cdot t) \cdot \omega} \end{cases}$$

Novamente, derivando v_x e v_y em relação ao tempo, temos:

$$\begin{cases} a_x = R \cdot \omega^2 \cdot sen(\omega \cdot t) \\ a_y = R \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t) \end{cases}$$

Para calcular o raio da circunferência osculadora, temos que:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_{cp}}$$

Se pegarmos $\theta = \omega \cdot t = 180°$, temos que:

$$\begin{cases} v_x = 2 \cdot \omega \cdot R \\ v_y = 0 \end{cases} e \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -R \cdot \omega^2 \end{cases}$$

Logo, temos que o raio de curvatura é dado por:

$$\rho = \frac{v^2}{a_{cp}} = \frac{(2 \cdot \omega \cdot R)^2}{R \cdot \omega^2} \therefore \boxed{\rho = 4R}$$

Observação: No ITA já caiu uma questão de Movimento Harmônico Simples (MHS) que se tornaria bem mais simples a resolução se o candidato conhecesse essa relação ($\rho = 4R$). Entretanto, existem outros meios para fazer a questão. Trabalharemos este exercício na aula de MHS.

6. Lista de exercícios de composição de movimentos

1. (EN – 2017)

Dois navios da Marinha de Guerra, as Fragatas Independência e Rademaker, encontram-se próximos a um farol. A Fragata Independência segue em direção ao norte com velocidade de $15\sqrt{2}\,nós$ e a Fragata Rademaker, em direção ao nordeste com velocidade de $20\,nós$. Considere que ambas as velocidades foram medidas em relação ao farol. Se na região há uma corrente marítima de $2{,}0\,nós$ no sentido norte-sul, qual o módulo da velocidade relativa da Fragata Independência, em nós, em relação à Fragata Rademaker?

a) 10,0 b) 12,3 c) 13,7 d) 15,8 e) 16,7

2. (EN – 2008)

Em um certo cruzamento de uma rodovia, no instante $t_0 = 0$, um veículo A possui velocidade de $4{,}0\,\hat{\imath}$(m/s) e outro veículo B velocidade de $6{,}0\,\hat{\jmath}$ (m/s). A partir de então, o veículo A recebe, durante $2{,}8\,s$, uma aceleração de $3{,}0\,m/s^2$, no sentido positivo do eixo dos Y, e o veículo B recebe, durante $2{,}5\,s$, uma aceleração de $2{,}0\,m/s^2$, no sentido negativo do eixo dos X. O módulo da velocidade do veículo A em relação ao veículo B, em m/s, no instante $t = 1{,}0\,s$, é

a) $1{,}5\sqrt{3}$ b) $2{,}0\sqrt{5}$ c) $3{,}0\sqrt{3}$ d) $3{,}0\sqrt{5}$ e) $5{,}0\sqrt{5}$

3. (ITA-1982)

Um nadador, que pode desenvolver uma velocidade de $0{,}900 m/s$ na água parada, atravessa o rio de largura D metros, cuja correnteza tem velocidade de $1{,}08 km/h$. Nadando em linha reta ele quer alcançar um ponto da outra margem situada $\frac{\sqrt{3}}{3}D$ metros abaixo do ponto de partida. Para que isso ocorra, sua velocidade em relação ao rio deve formar com a correnteza o ângulo:

a) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{33}+1)$. b) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) zero grau.

d) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{12}$. e) O problema não tem solução.

4. (ITA-1987)

Um avião Xavantes está a $8km$ de altura e voa horizontalmente a $700km/h$, patrulhando as costas brasileiras. Em dado instante, ele observa um submarino inimigo parado na superfície. Desprezando as forças de resistência do ar e adotando $g = 10m/s^2$, pode-se afirmar que o tempo que dispõe o submarino para deslocar-se após o avião ter solto uma bomba é de:

a) 108s b) 20s c) 30s d) 40s

e) Não é possível determinar se não for conhecida a distância inicial entre o avião e o submarino.

5. (ITA-1994)

Um barco, com motor em regime constante, desce um trecho de um rio em 2,0 horas e sobe o mesmo em 4,0 horas. Quanto tempo levará o barco para percorrer o mesmo trecho, rio abaixo, com o motor desligado?

a) 3,5 horas. b) 6,0 horas. c) 8,0 horas.

d) 4,0 horas. e) 4,5 horas.

6. (ITA-2009)

Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

a) 14 horas e 30 minutos. b) 13 horas e 20 minutos.

c) 7 horas e 20 minutos. d) 10 horas.

e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

7. (IME-2016)

Dois observadores em movimento acompanham o deslocamento de uma partícula no plano. O observador 1, considerando estar no centro do seu sistema de coordenadas, verifica que a partícula descreve um movimento dado pelas equações $x_1(t) = 3\cos(t)$ e $y_1(t) = 4\text{sen}(t)$, sendo t a variável tempo. O observador 2, considerando estar no centro de seu sistema de coordenadas, equaciona o movimento da partícula como $x_2(t) = 5\cos(t)$ e $y_2(t) = 5\text{sen}(t)$. O observador 1 descreveria o movimento do observador 2 por meio da equação:

Observações:

- Os eixos x_1 e x_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido; e

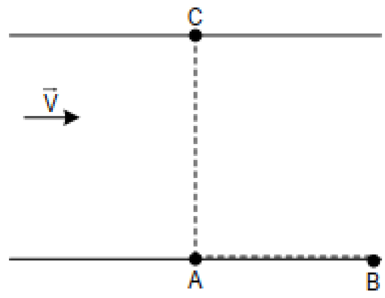
- Os eixos y_1 e y_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido.

a) $9x^2 + 16y^2 = 25.$ b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 25.$ c) $4x^2 + y^2 = 1.$

d) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$ e) $4x^2 + y^2 = 4.$

8. (ITA)

Dois barcos, 1 e 2, partem simultaneamente de um ponto A da margem de um rio, conforme a figura, com velocidades constantes em relação à água respectivamente iguais V_1 e V_2. O barco 1 vai diretamente até o ponto B da mesma margem, rio abaixo, e volta a A. O barco 2 vai diretamente até o ponto C da outra margem e volta a A. Os tempos de ida e volta para ambos os barcos são iguais. As distâncias AC e AB são iguais entre si e a velocidade da correnteza é constante e apresenta módulo V, em relação às margens do rio. Sabendo que a razão entre o tempo de descida de A para B e o tempo de subida de B para A é r, os módulos V_1 e V_2, valem respectivamente:



a) $V_1 = V(\frac{1+r}{1-r})$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}.$

b) $V_1 = V(\frac{1+r}{1-r})$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}.$

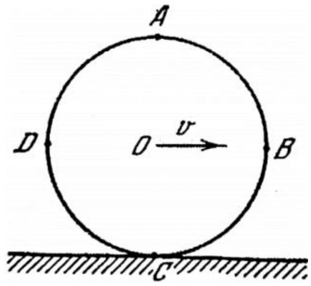
c) $V_1 = V(\frac{1+r}{1-r})$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}.$

d) $V_1 = 2V(\frac{1-r}{1+r})$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}.$

e) $V_1 = 2V(\frac{1+r}{1-r})$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}.$

9. (SARAEVA)

Um disco contínuo rola sem deslizamento em um caminho horizontal com velocidade constante v (ver figura):



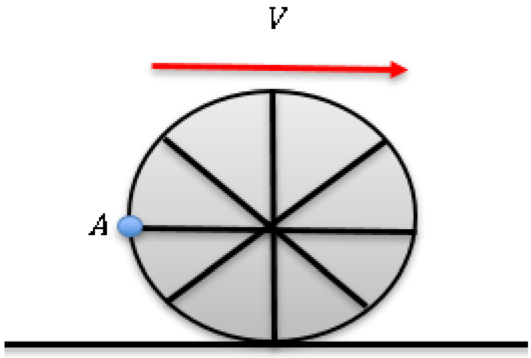
Demonstrar que a velocidade linear de rotação relativamente ao centro O de qualquer ponto do disco, que se encontra na sua borda, é igual à velocidade do movimento de translação do disco.

Determinar a grandeza e a direção das velocidades dos pontos A, B, C e D situados na borda do disco, relativamente a um observador fixo.

Quais pontos do disco têm, relativamente a um observador fixo, a mesma grandeza absoluta de velocidade que o centro do disco?

10. (Simulado ITA 1ª fase)

Uma roda translada sem deslizar sobre uma superfície horizontal. A velocidade de translação da roda é constante e vale V. Uma gota de água se desprende do ponto A e cai sobre este mesmo ponto A na roda após ela realizar N voltas. Qual é o valor do raio da roda?



a) $R = \frac{V^2}{2\pi g N}$

b) $R = \frac{2V^2}{\pi g N}$

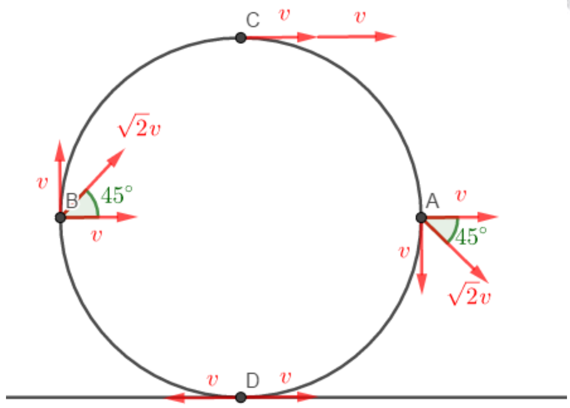
c) $R = \frac{V^2}{\pi g N}$

d) $R = \frac{V^2}{g N}$

e) $R = \frac{2V^2}{g N}$

7. Gabarito de composição de movimentos sem comentários

1) E
2) B
3) C
4) A
5) D
6) D
7) A
8) A
9) D
10) C
11) B
12) D
13) A
14) 60 cm/s para a esquerda
15) 2.



3. Circunferência de centro em D e raio igual ao do disco Circunferência de centro em D e raio igual ao do disco

16) C

ESCLARECENDO!

8. Lista comentada de composição de movimentos

1. (EN – 2017)

Dois navios da Marinha de Guerra, as Fragatas Independência e Rademaker, encontram-se próximos a um farol. A Fragata Independência segue em direção ao norte com velocidade de $15\sqrt{2}\ nós$ e a Fragata Rademaker, em direção ao nordeste com velocidade de $20\ nós$. Considere que ambas as velocidades foram medidas em relação ao farol. Se na região há uma corrente marítima de $2{,}0\ nós$ no sentido norte-sul, qual o módulo da velocidade relativa da Fragata Independência, em nós, em relação à Fragata Rademaker?

a) 10,0 b) 12,3 c) 13,7 d) 15,8 e) 16,7

Comentários:

Denotando por $\vec{v}_{FI}$ a velocidade da Fragata Independência e $\vec{v}_{FR}$ a velocidade da Fragata Rademaker, ambas em relação ao farol, podemos dizer que:

$$\vec{v}_{FI/águas} = \vec{v}_{FI/FR} + \vec{v}_{FR/águas}$$
$$\vec{v}_{FI/T} = \vec{v}_{FI/águas} + \vec{v}_{águas/T}$$
$$\vec{v}_{FR/T} = \vec{v}_{FR/águas} + \vec{v}_{águas/T}$$

Como a Fragata Rademaker se desloca na direção nordeste, sua velocidade é dada por:

$$\vec{v}_{FR/T} = 20 \cdot \cos 45°\ \hat{\imath} + 20 \cdot sen\ 45°\ \hat{\jmath} \Rightarrow \vec{v}_{FR/T} = 10\sqrt{2}\,\hat{\imath} + 10\sqrt{2}\,\hat{\jmath}$$

Além disso:

$$\vec{v}_{FI/T} = 15\sqrt{2}\hat{\jmath}$$
$$\vec{v}_{águas/T} = -2\hat{\jmath}$$

Todas as velocidades em nós. Para a Fragata Independência, temos:

$$\vec{v}_{FI/águas} = \vec{v}_{FI/T} - \vec{v}_{águas/T}$$
$$\vec{v}_{FI/águas} = 15\sqrt{2}\hat{\jmath} - (-2\hat{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}_{FI/águas} = (15\sqrt{2} + 2)\hat{\jmath}$$

Para a Fragata Rademaker, temos:

$$\vec{v}_{FR/águas} = \vec{v}_{FR/T} - \vec{v}_{águas/T}$$

$$\vec{v}_{FR/\acute{a}guas} = 10\sqrt{2}\,\hat{\imath} + 10\sqrt{2}\,\hat{\jmath} - (-2\hat{\jmath}) \Rightarrow \vec{v}_{FR/\acute{a}guas} = 10\sqrt{2}\,\hat{\imath} + \left(10\sqrt{2} + 2\right)\hat{\jmath}$$

Portanto:

$$\vec{v}_{FI/FR} = \vec{v}_{FI/\acute{a}guas} - \vec{v}_{FR/\acute{a}guas}$$
$$\vec{v}_{FI/FR} = \left(15\sqrt{2} + 2\right)\hat{\jmath} - \left[10\sqrt{2}\,\hat{\imath} + \left(10\sqrt{2} + 2\right)\hat{\jmath}\right]$$
$$\vec{v}_{FI/FR} = -10\sqrt{2}\hat{\imath} + 5\sqrt{2}\hat{\jmath}$$

O módulo de $\vec{v}_{FI/FR}$ é dado por:

$$\left|\vec{v}_{FI/FR}\right| = \sqrt{\left(-10\sqrt{2}\right)^2 + \left(5\sqrt{2}\right)^2} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{v}_{FI/FR}\right| = 15{,}8\,nós}$$

Gabarito: D

---

2. (EN – 2008)

Em um certo cruzamento de uma rodovia, no instante $t_0 = 0$, um veículo A possui velocidade de $4{,}0\,\hat{\imath}$(m/s) e outro veículo B velocidade de $6{,}0\,\hat{\jmath}$ (m/s). A partir de então, o veículo A recebe, durante $2{,}8\,s$, uma aceleração de $3{,}0\,m/s^2$, no sentido positivo do eixo dos Y, e o veículo B recebe, durante $2{,}5\,s$, uma aceleração de $2{,}0\,m/s^2$, no sentido negativo do eixo dos X. O módulo da velocidade do veículo A em relação ao veículo B, em m/s, no instante $t = 1{,}0\,s$, é

a) $1{,}5\sqrt{3}$ b) $2{,}0\sqrt{5}$ c) $3{,}0\sqrt{3}$ d) $3{,}0\sqrt{5}$ e) $5{,}0\sqrt{5}$

Comentários:

Tomando como origem o cruzamento, e escrevendo as leis das velocidades em cada direção, temos:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = 4{,}0\hat{\imath} + (0 + 3{,}0 \cdot t)\hat{\jmath} \\ \vec{v}_B = (0 - 2{,}0 \cdot t)\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath} \end{cases}$$

Em $t = 1{,}0\,s$, as velocidades são dadas por:

$$\begin{cases} \vec{v}_A = 4{,}0\hat{\imath} + (0 + 3{,}0 \cdot 1)\hat{\jmath} \\ \vec{v}_B = (0 - 2{,}0 \cdot 1)\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_A = 4{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath} \\ \vec{v}_B = -2{,}0\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath} \end{cases}$$

Pela composição de movimento, temos:

$$\vec{v}_{A/T} = \vec{v}_{A/B} + \vec{v}_{B/T} \Rightarrow \vec{v}_{A/B} = \vec{v}_{A/T} - \vec{v}_{B/T}$$
$$\vec{v}_{A/B} = 4{,}0\hat{\imath} + 3{,}0\hat{\jmath} - (-2{,}0\hat{\imath} + 6{,}0\hat{\jmath}) \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{A/B} = 6{,}0\hat{\imath} - 3{,}0\hat{\jmath}}$$
$$\left|\vec{v}_{A/B}\right| = \sqrt{6{,}0^2 + (-3{,}0)^2} \Rightarrow \boxed{\left|\vec{v}_{A/B}\right| = 3\sqrt{5}\,m/s}$$

Gabarito: D

---

3. (ITA-1982)

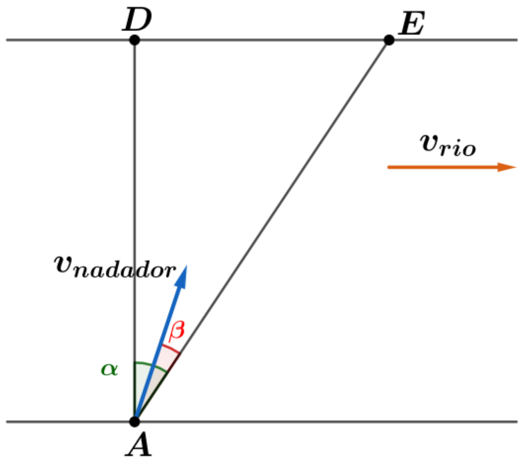
Um nadador, que pode desenvolver uma velocidade de $0{,}900 m/s$ na água parada, atravessa o rio de largura D metros, cuja correnteza tem velocidade de $1{,}08 km/h$. Nadando em linha reta ele quer alcançar um ponto da outra margem situada $\frac{\sqrt{3}}{3}D$ metros abaixo do ponto de partida. Para que isso ocorra, sua velocidade em relação ao rio deve formar com a correnteza o ângulo:

a) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{12}(\sqrt{33} + 1)$. b) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{2}$. c) zero grau.

d) $arcsen\frac{\sqrt{3}}{12}$. e) O problema não tem solução.

Comentários:

Considere a situação em que o nadador tem a velocidade inclinada no sentido da velocidade da correnteza (se for o contrário você encontrará isso no valor de β):



A é o ponto de partida do nadador, D é a sua reflexão na margem oposta e E é o ponto de chegada. Convertendo a velocidade da correnteza para m/s obtemos $0{,}3m/s$, assim temos a relação:

$$V_{nadador} = 3 \cdot V_{rio}$$

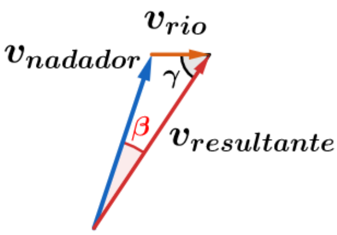
Pelas distâncias dadas no enunciado conseguimos determinar o ângulo α:

$$\tan\alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3}D}{D} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \alpha = 30°$$

A partir disso, podemos concluir que:

$$A\hat{E}D = 60°$$

Note que o nadador deve ter sua velocidade resultante na direção do segmento de reta AE:



Em que $\gamma = A\hat{E}D$. Usando a lei dos senos obtemos:

$$\frac{V_{nadador}}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{V_{rio}}{\operatorname{sen}\beta} \Rightarrow \operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}60° \frac{V_{rio}}{V_{nadador}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Perceba que a questão pede o ângulo entre a velocidade do nadador ($V_{nadador}$) e a margem do rio ($\beta + 60°$):

$$\operatorname{sen}(\beta + 60°) = \sin\beta\cos 60° + \sin 60°\cos\beta$$

$$\text{sen}(\beta + 60°) = \frac{\sqrt{3}}{6}\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{33}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{12}\,(1 + \sqrt{33})$$

Gabarito: A

---

4. (ITA-1987)

Um avião Xavantes está a $8km$ de altura e voa horizontalmente a $700km/h$, patrulhando as costas brasileiras. Em dado instante, ele observa um submarino inimigo parado na superfície. Desprezando as forças de resistência do ar e adotando $g\ = 10m/s^2$, pode-se afirmar que o tempo que dispõe o submarino para deslocar-se após o avião ter solto uma bomba é de:

a) 108s
b) 20s
c) 30s
d) 40s

e) Não é possível determinar se não for conhecida a distância inicial entre o avião e o submarino.

Comentários:

Neste problema não precisamos nos preocupar com o movimento horizontal da bomba, já que sabemos que ela não atingirá o submarino enquanto não percorrer os 8km verticais alcançando a superfície. Como sua velocidade vertical inicial é nula (lançamento horizontal, igual a velocidade do avião) temos:

$$h = \frac{gt^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \therefore t = \sqrt{\frac{2\,.\,8000}{10}} = 40\ s$$

Gabarito: D

---

5. (ITA-1994)

Um barco, com motor em regime constante, desce um trecho de um rio em 2,0 horas e sobe o mesmo em 4,0 horas. Quanto tempo levará o barco para percorrer o mesmo trecho, rio abaixo, com o motor desligado?

a) 3,5 horas.
b) 6,0 horas.
c) 8,0 horas.
d) 4,0 horas.
e) 4,5 horas.

Comentários:

Seja u a velocidade que o motor do barco é capaz de gerar e v a velocidade da correnteza. Então, na descida do rio com o motor ligado teremos (o sentido da velocidade da correnteza é sempre rio abaixo):

$$\boxed{\vec{v}_{Barco/terra} = \vec{v}_{Barco/Correnteza} + \vec{v}_{Correnteza/terra}}$$

$$u + v = \frac{\Delta S}{t_1} \quad (eq.1)$$

Na subida a velocidade da correnteza se opõe a velocidade gerada pelo barco:

$$u - v = \frac{\Delta S}{t_2} \quad (eq.2)$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\frac{u+v}{u-v}=\frac{t_2}{t_1}$$

Do enunciado temos que $t_1 = 2\ h$ e $t_2 = 4h$, assim:

$$u+v=2u-2v \Rightarrow u=3v$$

O motor do barco desenvolve uma velocidade igual a 3 vezes a da correnteza. Substituindo esse resultado em (1), obtemos:

$$4v=\frac{\Delta S}{t_1} \Rightarrow \Delta S = 4\cdot v\cdot t_1 \quad (eq.3)$$

Na situação em que o barco desce o rio com seu motor desligado sua velocidade é v, assim:

$$v=\frac{\Delta S}{t}$$

Substituindo (3) na equação acima:

$$t=\frac{4\cdot v\cdot t_1}{v}=4\cdot\ 2=8\ h$$

Gabarito: C

6. (ITA-2009)

Um barco leva 10 horas para subir e 4 horas para descer um mesmo trecho do rio Amazonas, mantendo constante o módulo de sua velocidade em relação à água. Quanto tempo o barco leva para descer esse trecho com os motores desligados?

a) 14 horas e 30 minutos. b) 13 horas e 20 minutos.

c) 7 horas e 20 minutos. d) 10 horas.

e) Não é possível resolver porque não foi dada a distância percorrida pelo barco.

Comentários:

Seja u a velocidade que o motor do barco é capaz de gerar e v a velocidade da correnteza. Então, na descida do rio com o motor ligado teremos (o sentido da velocidade da correnteza é sempre rio abaixo):

$$\boxed{\vec{v}_{Barco/terra}=\vec{v}_{Barco/Correnteza}+\vec{v}_{Correnteza/terra}}$$

$$u+v=\frac{\Delta S}{t_1} \quad (eq.1)$$

Na subida a velocidade da correnteza se opõe a velocidade gerada pelo barco:

$$u-v=\frac{\Delta S}{t_2} \quad (eq.2)$$

Dividindo (1) por (2), temos:

$$\frac{u+v}{u-v}=\frac{t_2}{t_1}$$

Do enunciado temos que $t_1 = 2\ h$ e $t_2 = 4h$, assim:

$$2u+2v=5u-5v \Rightarrow u=\frac{7}{3}v$$

O motor do barco desenvolve uma velocidade igual a sete terços a da correnteza. Substituindo esse resultado em (1), obtemos:

$$\frac{10}{3}v=\frac{\Delta S}{t_1} \Rightarrow \Delta S=\frac{10}{3}v\cdot t_1 \quad (eq.3)$$

Na situação em que o barco desce o rio com seu motor desligado sua velocidade é v, assim:

$$v=\frac{\Delta S}{t}$$

Substituindo (3) na equação acima:

$$t=\frac{10}{3}\cdot\frac{v\cdot t_1}{v}=\frac{10}{3}\cdot\ 4=\frac{40}{3}\ h \Rightarrow t=13+\frac{1}{3}\ h=13h\ 20min$$

Gabarito: B

---

7. (IME-2016)

Dois observadores em movimento acompanham o deslocamento de uma partícula no plano. O observador 1, considerando estar no centro do seu sistema de coordenadas, verifica que a partícula descreve um movimento dado pelas equações $x_1(t)=3\cos(t)$ e $y_1(t)=4\text{sen}(t)$, sendo t a variável tempo. O observador 2, considerando estar no centro de seu sistema de coordenadas, equaciona o movimento da partícula como $x_2(t)=5\cos(t)$ e $y_2(t)=5\text{sen}(t)$. O observador 1 descreveria o movimento do observador 2 por meio da equação:

Observações:

- Os eixos x_1 e x_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido; e

- Os eixos y_1 e y_2 são paralelos e possuem o mesmo sentido.

a) $9x^2+16y^2=25.$

b) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=25.$

c) $4x^2+y^2=1.$

d) $\frac{x^2}{4}+y^2=1.$

e) $4x^2+y^2=4.$

Comentários:

Considere o referencial da partícula. Nesse referencial o observador 1 tem coordenadas:

$$x_{p1}(t)=-3\cos(t);\ y_{p1}(t)=-4\,\text{sen}(t)$$

O observador 2 tem coordenadas:

$$x_{p2}(t) = -5\cos(t)\,;\ y_{p2}(t) = -5\,\mathrm{sen}(t)$$

Assim, podemos representar a posição do observador 2 em relação ao 1 pela equação:

$$x(t) = x_{p2}(t) - x_{p1}(t) = -2\cos(t)\,;\ y(t) = y_{p2}(t) - y_{p1}(t) = -\,\mathrm{sen}(t)$$

Isolando os valores de $\cos(t)$ e $\mathrm{sen}(t)$ nas equações acima e usando a identidade trigonométrica $\mathrm{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$, temos:

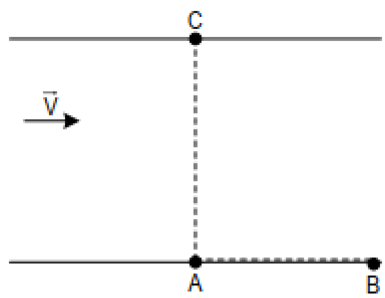
$$y^2 + \frac{x^2}{4} = 1$$

Gabarito: D

---

8. (ITA)

Dois barcos, 1 e 2, partem simultaneamente de um ponto A da margem de um rio, conforme a figura, com velocidades constantes em relação à água respectivamente iguais V_1 e V_2. O barco 1 vai diretamente até o ponto B da mesma margem, rio abaixo, e volta a A. O barco 2 vai diretamente até o ponto C da outra margem e volta a A. Os tempos de ida e volta para ambos os barcos são iguais. As distâncias AC e AB são iguais entre si e a velocidade da correnteza é constante e apresenta módulo V, em relação às margens do rio. Sabendo que a razão entre o tempo de descida de A para B e o tempo de subida de B para A é r, os módulos V_1 e V_2, valem respectivamente:



a) $V_1 = V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$.

b) $V_1 = V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$.

c) $V_1 = V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$.

d) $V_1 = 2V\left(\frac{1-r}{1+r}\right)$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$.

e) $V_1 = 2V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$ e $V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$.

Comentários:

Calculando o tempo de descida do primeiro barco, obtemos:

$$t_d = \frac{x}{V_1 + V} \quad (eq.1)$$

Onde $x = AC = AB$. O tempo de subida:

$$t_s = \frac{x}{V_1 - V} \quad (eq.2)$$

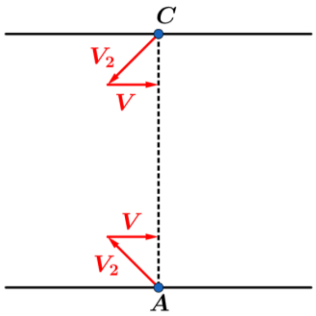
A razão entre esses tempos é dada pela questão:

$$r = \frac{t_d}{t_s}$$

Substituindo (1) e (2), temos:

$$r = \frac{V_1 - V}{V_1 + V} \Rightarrow V_1 = V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)$$

A velocidade do barco 2 em relação ao rio (desenvolvida pelo seu motor) deve ser inclinada, de modo que a resultante tem a direção AC:



O tempo total de viagem do barco 1 é:

$$t_1 = t_s + t_d \Rightarrow t_1 = \frac{2xV_1}{V_1^2 - V^2} \quad (eq. 3)$$

O tempo total de viagem do barco 2 é:

$$t_2 = 2\left(\frac{x}{\sqrt{V_2^2 - V^2}}\right) \quad (eq. 4)$$

O problema nos diz que: $t_1 = t_2$. Substituindo (3) e (4), obtemos:

$$\frac{2V_1}{V_1^2 - V^2} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{V_2^2 - V^2}}\right) \Rightarrow V_2^2 = V^2 + \frac{(V_1^2 - V^2)^2}{V_1^2} \Rightarrow V_2^2 = V_1^2 - V^2 + V^4/V_1^2$$

Substituindo V_1, temos:

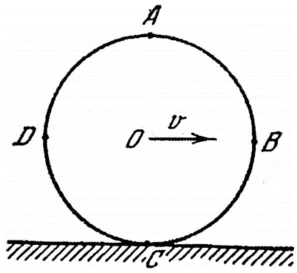
$$V_2^2 = V^2\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - V^2 + V^2\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2 \Rightarrow V_2 = V\sqrt{\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^2 - 1 + \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2}$$

Gabarito: A

---

9. (SARAEVA)

Um disco contínuo rola sem deslizamento em um caminho horizontal com velocidade constante v (ver figura):

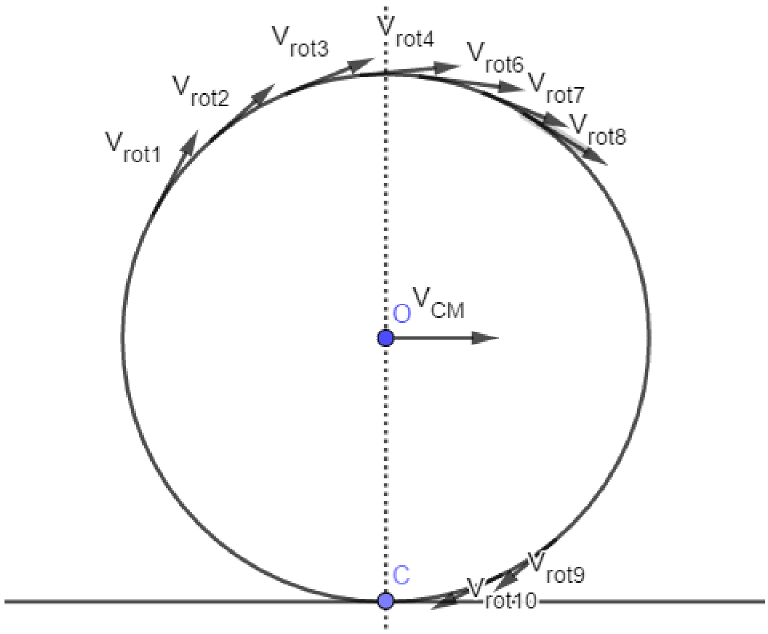


Demonstrar que a velocidade linear de rotação relativamente ao centro O de qualquer ponto do disco, que se encontra na sua borda, é igual à velocidade do movimento de translação do disco.

Determinar a grandeza e a direção das velocidades dos pontos A, B, C e D situados na borda do disco, relativamente a um observador fixo.

Quais pontos do disco têm, relativamente a um observador fixo, a mesma grandeza absoluta de velocidade que o centro do disco?

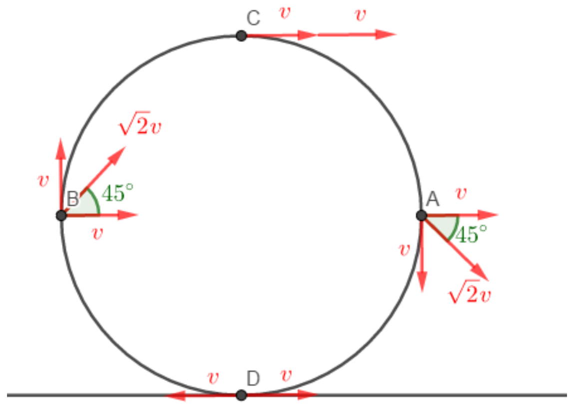
Comentários:



O movimento é a composição de uma rotação e translação. Cada ponto da superfície tem a mesma velocidade em relação ao centro de massa (centro O): $V_{rot} = V_{rot1} = \ldots = V_{rot10}$. Assumindo que a roda não desliza em relação ao solo, devemos tem uma velocidade nula no ponto C:

$$V_C = V_O - V_{rot} = 0 \Rightarrow V_O = V_{rot}$$

Veja a representação dessas velocidades na figura abaixo:

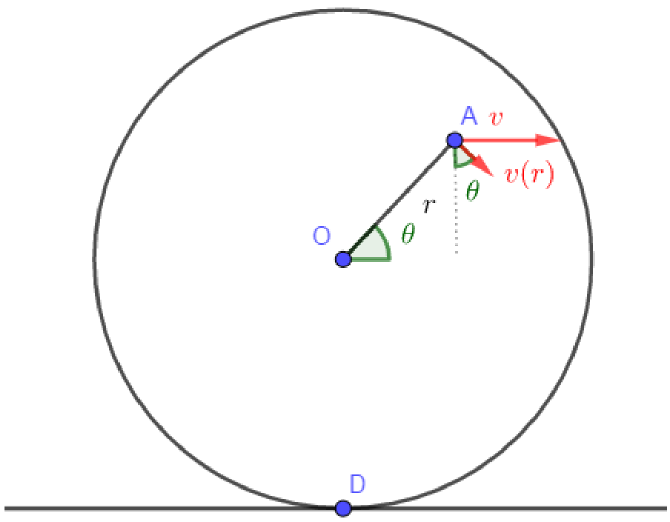


No item 1 foi determinado que a velocidade tangencial na superfície é igual a velocidade de translação (O), portanto as duas são representadas aqui por v. No ponto A e B as velocidades tangencial e translacional são perpendiculares entre, formando com o vetor velocidade resultante um triângulo retângulo. Usando o Teorema de Pitágoras:

$$v_A = v_B = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2}$$

A direção dessas velocidades é representada na figura. No ponto D a velocidade é nula, devido ao rolamento perfeito aquele ponto deve ter a mesma velocidade com o solo, que neste caso é nula. No ponto C ambas a velocidade de translação e rotação possuem mesma direção e sentido, formando um vetor de magnitude $2v$ e direção horizontal, como representado na figura.

A configuração de velocidades de um ponto qualquer A é representada abaixo:



Perceba que todos os pontos do disco rotacionam com a mesma velocidade angular em torno do seu CM, assim:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{v(r)}{r}$$

Em que R é o raio do disco. Assim, podemos escrever:

$$v(r) = v\frac{r}{R}$$

Fazendo a resultante dessas duas velocidades em A nos rende:

$$v_A^2(r,\theta) = \left(v\frac{r}{R}\cos\theta\right)^2 + \left(v\left(1+\frac{r}{R}\operatorname{sen}\theta\right)\right)^2$$

$$v_A(r,\theta) = v\sqrt{\frac{r^2}{R^2}\cos^2\theta + 1 + 2\frac{r}{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{r^2}{R^2}\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$v_A(r,\theta) = v\sqrt{\frac{r^2}{R^2} + 1 + 2\frac{r}{R}\operatorname{sen}\theta}$$

Queremos saber o lugar geométrico onde $v_A(r,\theta) = v$, para isso, devemos ter:

$$\frac{r^2}{R^2} + 1 + 2\frac{r}{R}\operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow r = -2R\operatorname{sen}\theta$$

Seja (x, y) as coordenas cartesianas de A, então:

$$r = -\frac{2Ry}{r} \Rightarrow r^2 = -2Ry \Rightarrow x^2 + y^2 + 2Ry + R^2 = R^2$$

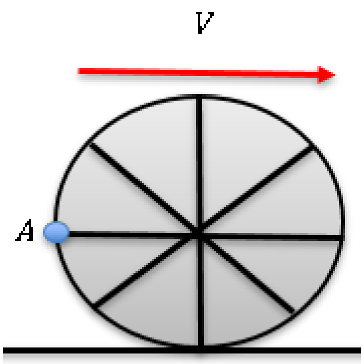
$$x^2 + (y+R)^2 = R^2$$

Essa equação representa uma circunferência centrada em D e de raio R, igual ao do disco. Assim vemos que todos os pontos do disco estão girando com a mesma velocidade angular em relação ao ponto de contato dele com o solo.

Gabarito: 1) e 2) Ver acima 3) Circunferência de centro em D e raio igual ao do disco

10. (Simulado ITA 1ª fase)

Uma roda translada sem deslizar sobre uma superfície horizontal. A velocidade de translação da roda é constante e vale V. Uma gota de água se desprende do ponto A e cai sobre este mesmo ponto A na roda após ela realizar N voltas. Qual é o valor do raio da roda?



a) $R = \frac{V^2}{2\pi gN}$ b) $R = \frac{2V^2}{\pi gN}$ c) $R = \frac{V^2}{\pi gN}$

d) $R = \frac{V^2}{gN}$ e) $R = \frac{2V^2}{gN}$

Comentários:

A velocidade da gota ao se desprender do ponto A é dada por:

$$v_x = V;\ v_y = V$$

O tempo que a gota permanece em movimento é exatamente o tempo em que a roda realiza N voltas.

$$T = N \cdot \frac{2\pi}{\frac{V}{R}} = \frac{2\pi NR}{V}$$

Esse tempo é o mesmo de voo da gota:

$$t_{voo} = \frac{2V}{g} = T \Rightarrow \frac{2V}{g} = \frac{2\pi NR}{V} \therefore \boxed{R = \frac{V^2}{\pi g N}}$$

Gabarito: C

9. Lançamento oblíquo

Antes de começar o estudo de um corpo lançado obliquamente, vamos recordar o princípio da independência ou princípios da simultaneidade proposto por Galileu, quando estudava os problemas envolvendo composição de movimentos.

Quando um corpo apresenta um movimento composto, isto é, seu movimento pode ser dividido numa soma de movimentos independentes, cada um dos movimentos componentes se realizam como se os demais não existissem e os movimentos acontecem no mesmo intervalo de tempo.

De acordo com esse princípio, se pegarmos um barco realizando um movimento de travessia, podemos decompor em dois movimentos: perpendicular as margens e paralelo as margens. Cada um dos movimentos não depende do outro, mas a soma deles resultam no movimento real do barco. Além disso, esses movimentos ocorrem de forma simultânea, isto é, o transcorrer do tempo é o mesmo para cada um dos movimentos, assim como para o movimento resultante.

Outra consideração que devemos fazer é quanto ao módulo da aceleração da gravidade. Quando falamos de corpo em queda livre, mencionamos o fato de a gravidade ser considerada constante para a resolução dos nossos problemas. Além disso, como o raio de curvatura é muito grande, consideramos a superfície da Terra onde estamos realizando o movimento como plano.

Normalmente, apenas na vertical temos a aceleração da gravidade atuando no corpo e nessa direção o móvel realiza um MUV. Entretanto, em algumas questões aparecem acelerações na horizontal e na vertical. Dessa forma, sempre que vamos resolver uma questão de lançamento oblíquo iremos analisar as forças atuando no objeto, para conhecer as possíveis acelerações e conhecer a natureza de cada movimento.

Estudar lançamento oblíquo é relembrar os conceitos dos movimentos já estudados e aplicar corretamente de acordo com as condições do problema, trabalhando cada direção de forma independente, como proposto pelo princípio da independência de Galileu.

Nada mais é que a soma de dois movimentos: na horizontal trata-se de um MU, pois a aceleração na horizontal geralmente é nula e na vertical trata-se de um MUV, pois temos a aceleração da gravidade voltada para baixo. Assim, o lançamento oblíquo é o movimento resultante da soma dos movimentos em cada componente.

Inicialmente, trabalharemos o lançamento oblíquo mais comum, onde apenas a gravidade atual na vertical e na horizontal não existem forças atuando. Além disso, vamos desprezar a resistência e os efeitos do ar. Assim, considere um objeto lançado do ponto O, com velocidade inicial $\vec{v}_0$ cuja direção forma um ângulo θ com a horizontal na hora do lançamento, como visto abaixo:

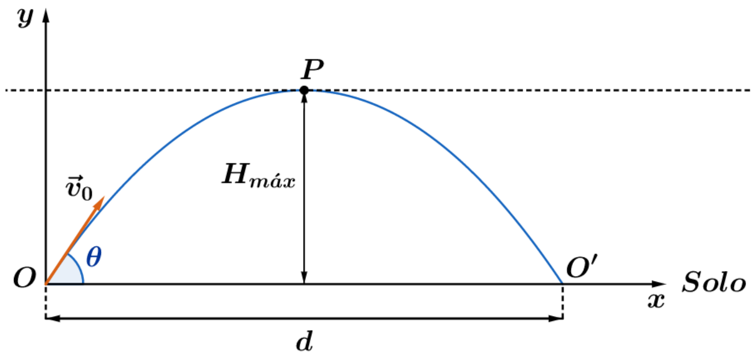


Figura 29: Lançamento oblíquo de um corpo a partir do solo.

Nesta situação, temos os seguintes elementos que compõem o lançamento:

1) Ângulo de lançamento (θ): ângulo formado pelo vetor $\vec{v}_0$ com a direção horizontal;

2) Vértice da trajetória (P): ponto mais alto da trajetória; e

3) Alcance máximo (d): distância entre o ponto de lançamento (O) e o ponto onde o corpo atinge o solo novamente (O').

Neste tipo de lançamento, sabemos que na horizontal não existem forças atuando, logo a aceleração na direção é nula, portanto, o movimento será uniforme, ou seja, ocorre com velocidade constante. Por isso, ao decompor a velocidade inicial na direção x está componente se manterá constante ao longo do lançamento:

$$\boxed{\vec{v}_{0x} \text{ é } constante}$$

Por outro lado, na direção vertical o corpo sofre ação da gravidade. Assim, podemos dividir esse movimento em duas fases: subida e descida. Na subida temos um movimento retardado, com o módulo da velocidade diminuindo a cada instante devido a ação da gravidade. Isto ocorre até o ponto, onde a velocidade na vertical se anula. Nesse instante, chegamos ao ponto mais alto da trajetória.

A partir desse momento o móvel inverte o sentido na vertical e começa a descer em movimento acelerado, repetindo os valores de velocidade na vertical, simetricamente, como visto no estudo do lançamento vertical. A figura abaixo esquematiza os vetores velocidades durante o lançamento.

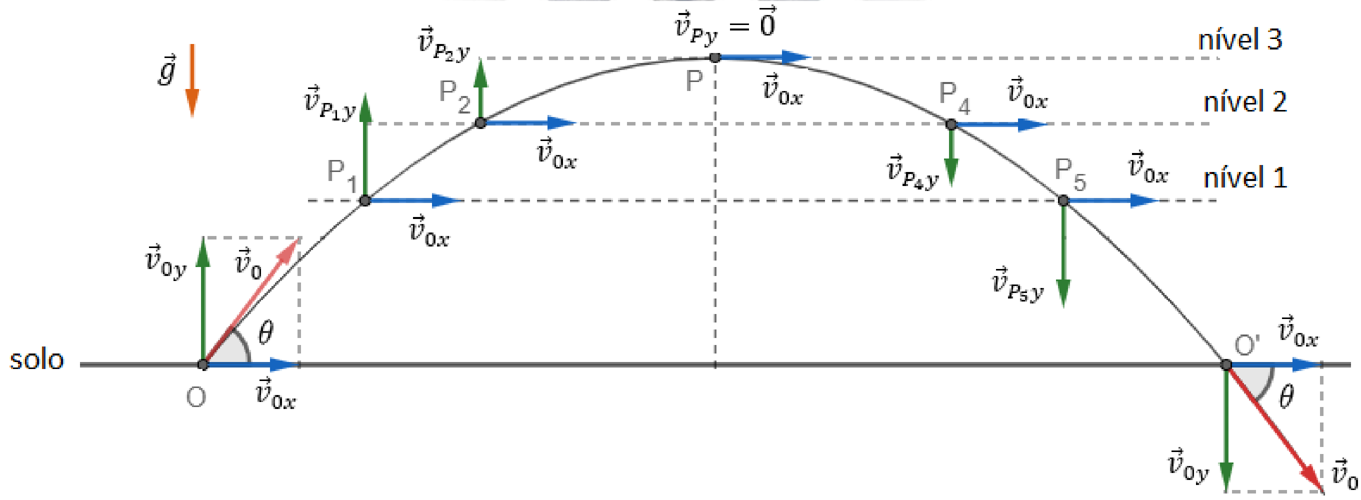


Figura 30: Representação dos vetores velocidades no lançamento oblíquo.

Na decomposição vertical, o móvel apenas sobe e desce. Assim, podemos certificar que as velocidades para um dado nível, possuem o mesmo módulo, mas direção oposta, como indicado na figura anterior. Portanto:

$$|\vec{v}_{P_1y}| = |\vec{v}_{P_5y}|;\ |\vec{v}_{P_2y}| = |\vec{v}_{P_4y}|;\ |\vec{v}_{Oy}| = |\vec{v}_{O'y}|;\ \vec{v}_{Py} = \vec{0}$$

9.1. Equações do lançamento oblíquo

Para deduzirmos as equações de espaço e de velocidade para cada direção e para o movimento resultante, vamos analisar cada componente individualmente, adotando um eixo de coordenadas Oxy na origem do lançamento, da seguinte forma:

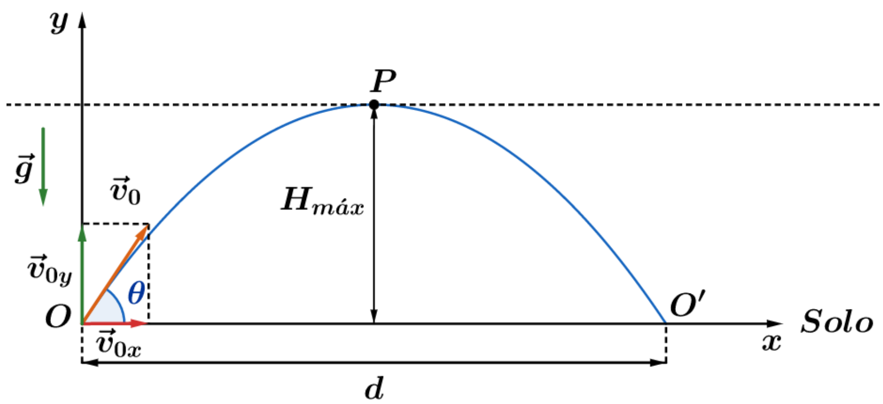


Figura 31: Definição dos eixos cartesianos no lançamento oblíquo.

Decompondo o movimento em cada direção, temos que:

Direção horizontal: o móvel não está sujeito a nenhuma força resultante, logo aceleração nesta direção é nula, então a velocidade ao longo do eixo x é constante. Nessa direção, o corpo realiza um MRU:

$$s = s_0 + v \cdot t$$

Aplicando as condições do problema, temos que:

$$x = 0 + v_{0x} \cdot t \Rightarrow x = v_{0x} \cdot t$$

Pela decomposição vetorial da velocidade inicial, podemos escrever o módulo da velocidade nessa direção e o vetor velocidade:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{0x} = v_0 \cdot cos\theta\ \hat{\imath}}$$

Assim, a função horária do espaço na horizontal é:

$$\boxed{x = (v_0 cos\theta) \cdot t}$$

Direção vertical: o móvel sofre apenas ação da força peso, isto é, existe a aceleração resultante não nula sobre o corpo, sendo ela a aceleração da gravidade no local apontando para baixo. Assim, na vertical teremos um MRUV, onde a equação horária de velocidade é dada por:

$$v_y = v_{0y} + a_y \cdot t$$

Como aceleração é contrária a orientação adotada na vertical, temos que:

$$\boxed{v_y = v_{0y} - g \cdot t}$$

Pela decomposição vetorial da velocidade na vertical, escrevemos:

$$v_{0y} = v_0 \cdot sen\theta \Rightarrow \boxed{\vec{v}_{0y} = v_0 \cdot sen\theta\ \hat{\jmath}}$$

Portanto:

$$\boxed{v_y = v_0 \cdot sen\theta - g \cdot t}$$

Podemos notar que a partir da decomposição de vetores, temos a seguinte relação entre os vetores velocidades:

$$\vec{v}_0 = \vec{v}_{0x} + \vec{v}_{0y} \Rightarrow \boxed{v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2}$$

Dessa forma, a equação horária do espaço é dada por:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$$

Aplicando na direção, temos:

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a_y \cdot t^2}{2} \Rightarrow \boxed{y = 0 + (v_0 \cdot sen\theta) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}}$$

Se olharmos apenas para o movimento na vertical, sabemos que existe uma simetria entre a subida e a descida. Pelo estudo de lançamento vertical, vimos que o tempo de subida é igual ao tempo de descida, isto é, o tempo que o móvel leva para chegar em P é o mesmo tempo para ele sair de P e chegar em O'. Portanto, o tempo de voo do corpo é o dobro do tempo de subida.

O tempo de subida pode ser calculado pela equação horária da velocidade na vertical, pois no ponto P, a velocidade na vertical é nula. Logo:

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t \Rightarrow v_{Py} = v_{0y} - g \cdot t_{subida}$$

$$v_{Py} = 0$$

$$0 = v_0 . sen\theta - g \cdot t_{subida} \therefore \boxed{t_{subida} = \frac{v_0 \cdot sen\theta}{g}}$$

Fique atento com essa afirmação! No ponto mais alto da trajetória (ponto P), a velocidade não é nula, pois existe a componente horizontal da velocidade, que é constante. Portanto, apenas a componente vertical é nula no ponto mais alto da trajetória.

Portanto, o **tempo de voo** é dado por:

$$t_{voo} = 2 \cdot t_{subida} \Rightarrow \boxed{t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta}{g}}$$

O **alcance** do corpo pode ser encontrado pela função horária do espaço na direção x:

$$x(t) = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot t \Rightarrow d = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot t_{voo}$$

$$d = (v_0 \cdot cos\theta) \cdot \left(\frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\theta}{g}\right) \Rightarrow d = \frac{v_0^2 (2 \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta)}{g}$$

Da trigonometria, temos a relação de seno do arco duplo dado por:

$$sen(2\theta) = 2 \cdot sen\,\theta \cdot \cos\theta$$

Finalmente, chegamos à equação do alcance:

$$\boxed{d = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\theta)}{g}}$$

Por último, podemos calcular a altura máxima que o corpo atingiu na vertical, quando lançado com um ângulo θ. Para isso, temos duas opções para chegar ao resultado: calculando a posição vertical no tempo de subida ou utilizando Torricelli na direção vertical entre os pontos O e P. Vamos utilizar Torricelli, então:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot \Delta y \Rightarrow 0 = (v_0 sen\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot H$$

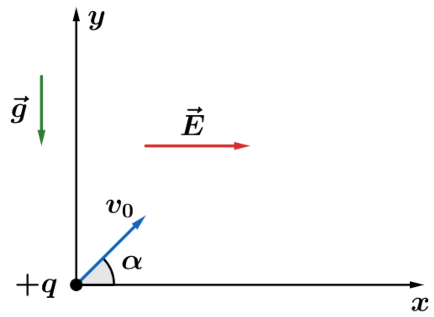
$$\boxed{H = \frac{v_0^2 \cdot sen^2\theta}{2g}}$$

Olhando rapidamente para altura máxima atingida quando lançado com um ângulo θ vemos como é semelhante ao alcance para o mesmo ângulo. Na prática, considero bem desnecessário decorar essas fórmulas pois você pode rapidamente desenvolvê-las.

ESCLARECENDO!

6)

Uma carga positiva de massa m e carga $+q$ é lançada com uma velocidade inicial de v_0, com um ângulo de α com a horizontal numa região onde existe um campo elétrico uniforme, como na figura abaixo:



Determine o ponto onde a carga toca novamente o eixo x.

Comentários:

Em x: temos a força elétrica atuando no corpo para a direita com módulo:

$$F_e = q \cdot E$$

Como apenas ela atua na carga na horizontal, então ela é a força resultante nesta direção, portanto:

$$\vec{F_r} = \vec{F_e} \Rightarrow F_r = F_e \Rightarrow m \cdot a_x = q \cdot E \Rightarrow \boxed{a_x = \frac{q \cdot E}{m}}$$

Temos um MUV na horizontal também, portanto temos a seguinte equação horária do espaço em x:

$$\boxed{x = (v_0 cos\alpha) \cdot t + \frac{\left(\frac{q \cdot E}{m}\right) \cdot t^2}{2}}$$

Em y: temos que a força peso é a única atuante no corpo nesta direção, dessa forma, temos um MUV, onde a aceleração da gravidade é a aceleração em y. Portanto:

$$v_y = v_0 sen\alpha - g \cdot t \Rightarrow y = (v_0 sen\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Pelo princípio da independência dos movimentos proposto por Galileu, podemos trabalhar os movimentos em cada componentes. Então, quando o corpo tocar o eixo x, sua coordenada y será zero, então:

$$y = 0$$

$$(v_0 sen\alpha) \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = 0 \Rightarrow t \cdot \left[(v_0 sen\alpha) - \frac{g \cdot t}{2}\right] = 0$$

$$\therefore t_1 = 0 \; ou \; \boxed{t_2 = \frac{2v_0 sen\alpha}{g}}$$

Como $t_1 = 0$ representa o momento do lançamento, estamos interessados no outro instante de tempo. Assim, o deslocamento em x é dado por:

$$x(t_2) = v_0 cos\alpha \left(\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right) + \frac{\left(\frac{q \cdot E}{m}\right)\left(\frac{2v_0 sen\alpha}{g}\right)^2}{2} \therefore \boxed{x(t_2) = \frac{v_0^2 sen2\alpha}{g} + \left(\frac{q}{m}\right)\left(\frac{E2v_0^2 sen^2\alpha}{g^2}\right)}$$

9.2. Alcance máximo

Como visto anteriormente, o alcance é calculado por:

$$d = \frac{v_0^2 . sen2\theta}{g}$$

Se **fixarmos a velocidade** de lançamento do objeto e **variar apenas o ângulo**, vemos que o alcance depende apenas do ângulo de inclinação com a horizontal. Então, para que o alcance seja máximo, $sen2\theta$ deve ser máximo.

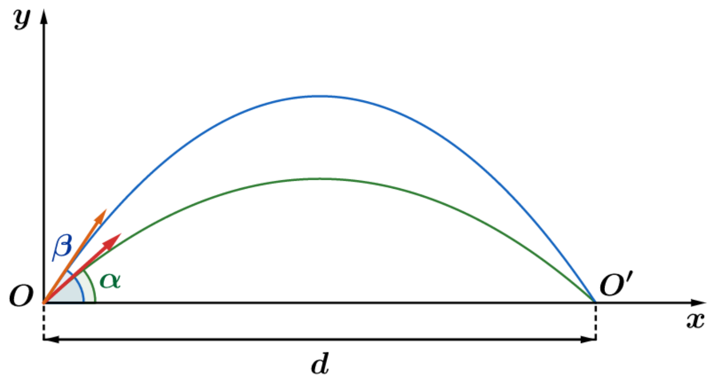
Nas definições de seno, conhecemos que seno de um ângulo é um valor entre -1 e 1. Então, $sen2\theta$ assumi seu valor máximo quando é igual a 1. Se $sen2\theta = 1$, o alcance máximo é dado por:

$$\boxed{d_{máx} = \frac{v_0^2}{g}}$$

Como $sen2\theta = 1$, então $2\theta = 90°$. Portanto, $\boxed{\theta = 45°}$.

Propriedade do alcance:

Se duas partículas são lançadas de um mesmo ponto, com velocidades de mesmo módulo e a soma dos ângulos de lançamento (α e β) serem 90°, então as duas partículas terão o mesmo alcance.



9.3. Equação da curva do lançamento oblíquo.

Até trabalhamos as equações de cada componente de forma isolada. Vamos agora cominar as funções horárias de espaço de cada direção e analisar o resultado obtido. Para um lançamento oblíquo como na figura abaixo, temos as funções horárias de espaço:

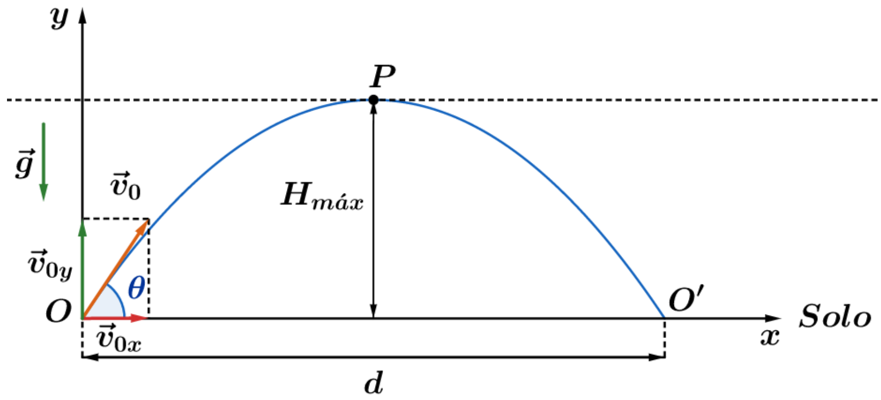


Figura 32: Definição da origem dos eixos cartesianos no lançamento oblíquo.

$$x = v_0 cos\theta \cdot t \ (1) \text{ e } y = v_0 sen\theta \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \ (2)$$

Isolando o tempo em (1) e substituindo em (2), temos que:

$$t = \frac{x}{v_0 \cdot cos\theta} \Rightarrow y = v_0 \cdot sen\theta \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\theta}\right) - \frac{g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot cos\theta}\right)^2}{2}$$

Como $\frac{sen\theta}{cos\theta} = tg\theta$, $sec\theta = \frac{1}{cos\theta}$ para $cos\theta \neq 0$ e $\sec^2\theta = 1 + tg^2\theta$, logo, temos que:

$$\boxed{y = x \cdot tg\theta - \frac{g(1 + tg^2\theta)}{2v_0^2} \cdot x^2}$$

Essa é a equação da trajetória do lançamento oblíquo. Ela mostra que a curva descrita por um corpo lançado (desprezando a resistência do ar) é uma parábola, pois trata-se de uma função do segundo grau ($f(x) = ax^2 + bx + c$), onde o coeficiente na frente do termo quadrático é negativo, mostrando que é uma parábola com concavidade para baixo, como observado fisicamente no movimento.

9.4. Tópico especial: parábola de segurança

Vamos fazer uma abordagem um pouco diferente do lançamento oblíquo. Este assunto ainda não foi cobrado fortemente no ITA, entretanto, é bem provável de cair, pois utiliza apenas abordagem da equação parabólica do lançamento.

Mas afinal, o que é a parábola de segurança? Imagine que você deseja lançar um objeto da origem de um sistema de coordenadas cartesianas Oxy, e seu braço se limita apenas a velocidade $\vec{v}_0$. Dessa forma, você decide variar o ângulo de lançamento para observar a região de espaço onde será possível seu objeto cair.

Sabemos que quando você lança o objeto, a trajetória dele será uma parábola dada por:

$$\boxed{y = x.tg\theta - \frac{g(1+tg^2\theta)}{2v_0^2}.x^2}$$

Assim, o conjunto de parábolas possíveis será:

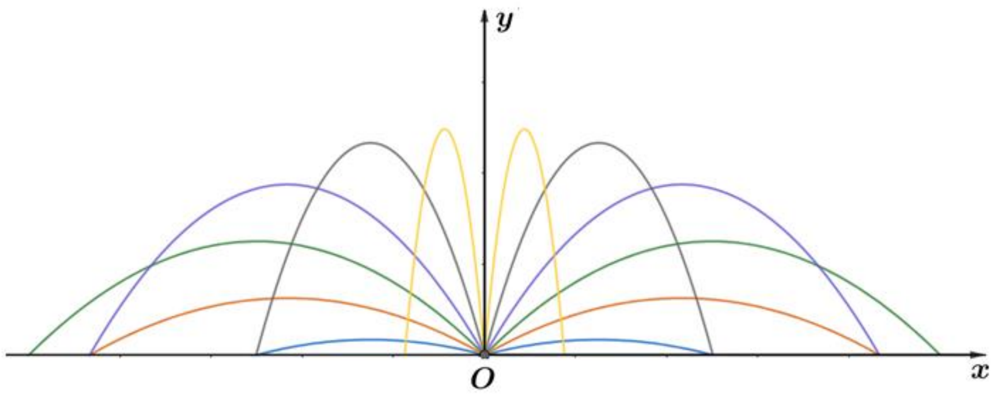


Figura 33: Família de parábola possíveis com uma determinada velocidade inicial constante.

Nessa figura, representamos as parábolas simétricas em relação ao eixo Oy da mesma cor e de acordo com a equação da trajetória, variamos o ângulo de lançamento a partir de 15° até 170°, em intervalos de 15° e encontramos está família de parábolas.

Ao analisar essas parábolas, vemos que existe uma região no espaço onde elas estão inseridas. Mas que região seria essa? Essa pergunta está atrelada a outra pergunta: que ponto do plano, um observador pode ficar parado no ponto P e não ser atingido pelo objeto?

Como o lançador está limitado a uma velocidade $\vec{v}_0$, isto é, essa é a maior velocidade que o seu braço pode lançar o corpo, podemos apenas variar o ângulo. Assim, devemos achar os possíveis valores de ângulo de lançamento para atingir nosso observador. Como sabemos que o observador está em um ponto conhecido $P(x_p, y_P)$, vamos aplicar a equação da parábola e isolar $tg\theta$:

$$y = x \cdot tg\theta - \frac{g(1+tg^2\theta)}{2v_0^2} \cdot x^2$$

$$\therefore \boxed{(tg\theta)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{g.x_P}\right)\cdot tg\theta + \left(1 + \frac{2\cdot v_0^2\cdot y_P}{g\cdot x_P^2}\right) = 0}\ \text{eq. (a)}$$

Assim, temos uma equação do segundo grau para as tangentes de θ e, por isso, existem algumas possíveis soluções para encontrarmos θ:

a) Caso $\boldsymbol{\Delta > 0}$: se o discriminante da eq. (a) for maior que zero, isso implica dois possíveis ângulos de lançamentos que irão atingir o observador.

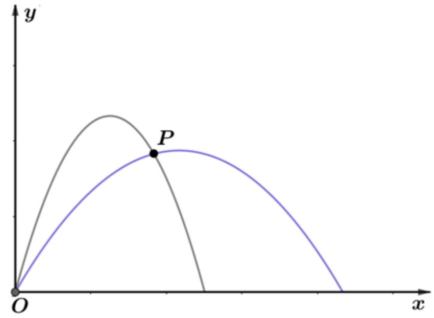


Figura 34: Caso em que existem dois possíveis lançamento para atingir o observador. O ponto está dentro da região de risco.

b) Caso $\boldsymbol{\Delta < 0}$: se o discriminante da eq. (a) for menor que zero, não existe solução real para a equação, isto é, não existem ângulos que satisfaçam nossa equação. Então, não importa a forma como atirar o objeto com a velocidade $\vec{v}_0$, não será possível atingir o observador. Dizemos que ele está em uma zona de segurança, pois nunca será atingido.

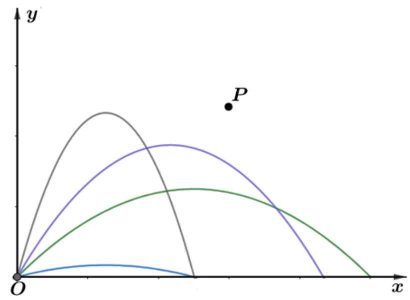


Figura 35: Ponto P na zona de segurança, isto é, não pode ser atingido pelo objeto.

c) Caso $\boldsymbol{\Delta = 0}$: se o discriminante é igual a zero, temos apenas um único ângulo de disparo que irá atingir o observador. Então podemos encontrar a equação do conjunto dos pontos que terão essa propriedade:

$$(tg\theta)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{g.x_P}\right)tg\theta + \left(1 + \frac{2\cdot v_0^2\cdot y_P}{g\cdot x_P^2}\right) = 0 \Rightarrow \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2v_0^2}{g.x_P}\right)^2 - 4\left(1 + \frac{2\cdot v_0^2\cdot y_P}{g\cdot x_P^2}\right) = 0 \therefore \boxed{y_p = \frac{v_0^2}{2\cdot g} - \frac{g}{2\cdot v_0^2}\cdot x_p^2}$$

Esse resultado mostra que existe um conjunto de pontos que definem outra parábola, onde só existe um ponto de alcance do objeto, trata-se da **Parábola de Segurança** (parábola vermelha do gráfico a seguir). Ela define o limite da zona atingida pelo objeto e a zona de segurança. Vemos também que ela é a envoltória para nossa família de parábolas, isto é, as parábolas podem tocar nela apenas uma vez, como mostra a figura abaixo:

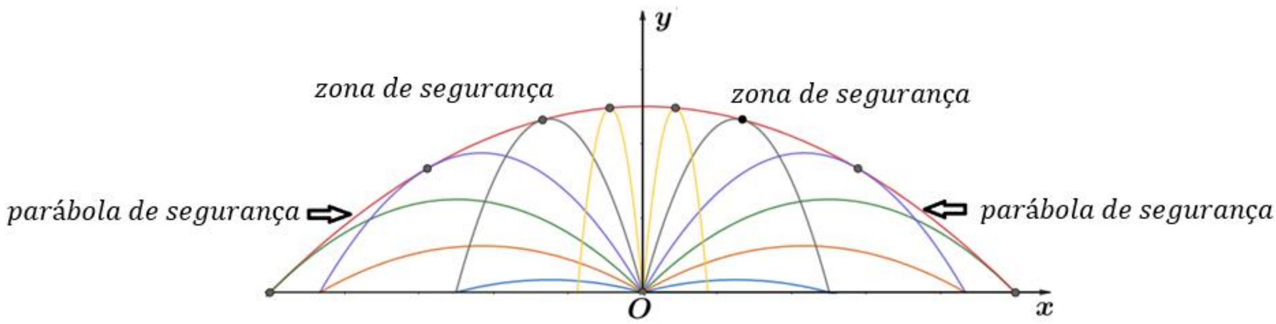


Figura 36: Representação da Parábola de Segurança, ponto que definem a fronteira da região de risco e zona de segurança. Mostra que as equações de trajetórias tocam a envoltória (parábola de segurança) uma única vez.

Parábola de Segurança não é a equação da trajetória do corpo. Ela é apenas uma envoltória de todas as possíveis trajetórias, delimitando a região do espaço de segurança e região atingida pelo corpo.

Se o observador está na parábola de segurança, a eq. (a) tem $\Delta = 0$ e apenas uma solução, dado por:

$$(tg\theta)^2 - \left(\frac{2v_0^2}{g.x_P}\right)\cdot tg\theta + \left(1 + \frac{2\cdot v_0^2 \cdot y_P}{g\cdot x_P^2}\right) = 0$$

$$tg\theta = -\frac{b}{2a} = -\frac{\left(-\frac{2v_0^2}{g\cdot x_P}\right)}{2\cdot 1} \therefore \boxed{tg\theta = \frac{v_0^2}{g\cdot x_P}}$$

Desta forma, podemos otimizar o ângulo de disparo para atingir o observador. Repare que depende apenas da posição x_P, uma vez que a velocidade está limitada ao lançador e a gravidade é suposta constante.

7)

Um jogador de basquete está parado a $4\sqrt{3}\,m$ da base da cesta e consegue lançar a bola com uma velocidade inicial de $10\ m/s$. Qual pode ser a altura mais alta atingida pela bola, quando ela passa pela vertical onde está o aro? Com qual ângulo deve ser arremessada a bola para que possa atingir essa altura máxima?

Comentários:

A máxima altura alcançada pela bola na reta vertical, que contém o aro da cesta, será a ordenada de um ponto que está na parábola de segurança, quando $x_P = 4\sqrt{3}$.

Pela equação da parábola de segurança, temos que:

$$y_p = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} - \frac{g}{2 \cdot v_0^2} \cdot x_p^2 \Rightarrow y_P = \frac{(10)^2}{2 \cdot 10} - \frac{10}{2 \cdot (10)^2} \cdot \left(4\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow \boxed{y_P = 2{,}6\ m}$$

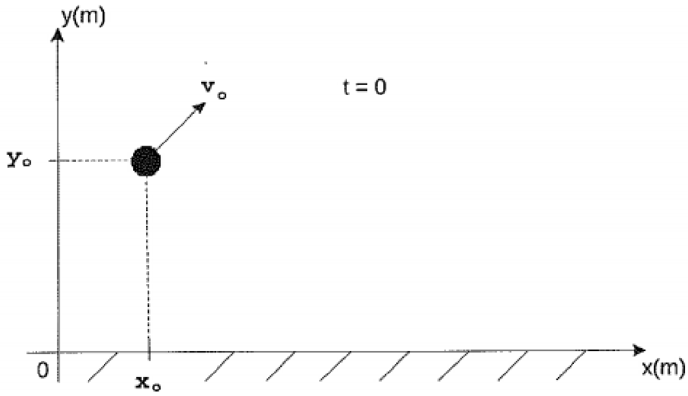
O ângulo de lançamento é dado por:

$$tg\theta = \frac{v_0^2}{g \cdot x_P} \Rightarrow tg\theta = \frac{10^2}{10 \cdot 4\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right) \therefore \boxed{\theta \cong 55{,}3°}$$

10. Lista de exercícios lançamento oblíquo

1. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.



Conforme indica a figura acima, no instante $t = 0$, uma partícula é lançada no ar, e sua posição em função do tempo é descrita pela equação $\vec{r}(t) = (6{,}0t + 2{,}5)\hat{\imath} + (-5{,}0t^2 + 2{,}0t + 8{,}4)\hat{\jmath}$, com r em metros e t em segundos. Após 1,0 segundos, as medidas de sua altura do solo, em metros, e do módulo da sua velocidade, em m/s, serão, respectivamente, iguais a

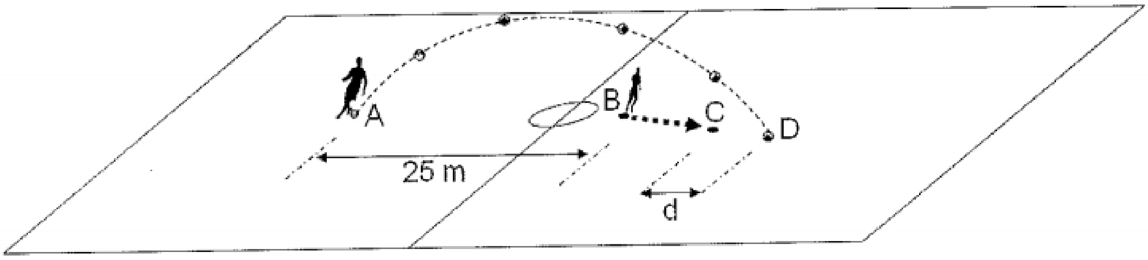
a) 3,4 e 10 b) 3,6 e 8,0 c) 3,6 e 10

d) 5,4 e 8,0 e) 5,4 e 10

2. (EN – 2013)

Conforme mostra figura abaixo, em um jogo de futebol, no instante em que o jogador situado no ponto A faz um lançamento, o jogador situado no ponto B, que inicialmente estava parado, começa a correr com aceleração constante igual a 3,00 m/s², deslocando-se até o ponto C. Esse jogador chega em C no instante em que a bola toca o chão no ponto D. Todo o movimento se processa em um plano vertical, e a distância inicial entre A e B vale 25,0 m. Sabendo-se que a velocidade inicial da bola tem módulo igual a 20,0 m/s, e faz um ângulo de 45° com a horizontal, o valor da distância, d, entre os pontos C e D, em metros, é

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$



a) 1,00 b) 3,00 c) 5,00 d) 12,0 e) 15,0

3. (AFA – 2010)

No instante $t = 0$, uma partícula A é lançada obliquamente, a partir do solo, com velocidade de $80\ m/s$ sob um ângulo de 30° com a horizontal. No instante $t = 2\ s$, outra partícula B é lançada verticalmente para cima, também a partir do solo, com velocidade de $40\ m/s$, de um ponto situado a $200\sqrt{3}\ m$ da posição de lançamento da primeira. Sabendo-se que essas duas partículas colidem no ar, pode-se afirmar que no momento do encontro

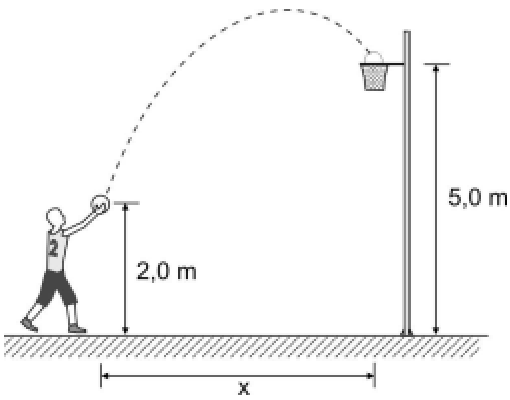
a) ambas estão subindo. b) A está subindo e B descendo.

c) B está subindo e A descendo. d) ambas estão descendo.

4. (AFA – 2009)

Uma bola de basquete descreve a trajetória mostrada na figura após ser arremessada por um jovem atleta que tenta bater um recorde de arremesso.

A bola é lançada com uma velocidade de $10\ m/s$ e, ao cair na cesta, sua componente horizontal vale $6{,}0\ m/s$. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que a distância horizontal (x) percorrida pela bola desde o lançamento até cair na cesta, em metros, vale



a) 3,0 b) 3,6 c) 4,8 d) 6,0

5. (ITA-1989)

Do alto de uma torre de $20\ m$ de altura, um artilheiro mira um balão que se encontra parado sobre um ponto, tal que a distância do pé da torre à vertical que passa pelo referido ponto é de $400\ m$. O ângulo de visada do artilheiro em relação à horizontal é de $15°$. No instante exato que o artilheiro dispara um projétil (P) os ocupantes do balão deixam cair um objeto (O) que é atingido pelo disparo. A velocidade do projétil ao deixar o cano da arma é $v_0 = 200\ m/s$. Despreze a resistência do ar. ($g = 9{,}8\ m/s^2$)

a) Faça um esquema indicando a configuração do problema.

b) Deduza as equações horárias: $x_P(t)$ e $y_P(t)$ para o projétil e $y_O(t)$ para o objeto (literalmente).

c) Calcule o instante do encontro projétil – objeto (numericamente).

d) Calcule a altura do encontro (numericamente).

6. (ITA-2004)

Durante as Olimpíadas de 1968, na cidade do México, Bob Beamow bateu o recorde de salto em distância, cobrindo $8{,}9\ m$ de extensão. Suponha que, durante o salto, o centro de gravidade do atleta teve sua altura variando de $1{,}0\ m$ no início, chegando ao máximo de $2{,}0\ m$ e terminado a $0{,}20\ m$ no fim do salto. Desprezando o atrito com o ar, pode-se afirmar que o componente horizontal da velocidade inicial do salto foi de: ($g = 10\ m/s^2$)

a) $8{,}5\ m/s$. b) $7{,}5\ m/s$. c) $6{,}5\ m/s$.
d) $5{,}2\ m/s$. e) $4{,}5\ m/s$.

7. (ITA-2009)

Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de $30m/s$, e a bola 2, com velocidade de $50m/s$ formando um ângulo de $30°$ com a horizontal. Considerando $g = 10m/s^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira alcança sua máxima altura.

a) $d = \sqrt{6250}\ m$. b) $d = \sqrt{7217}\ m$. c) $d = \sqrt{17100}\ m$.
d) $d = \sqrt{19375}\ m$. e) $d = \sqrt{26875}\ m$.

8. (ITA-2011)

Duas partículas idênticas, de mesma massa m, são projetadas de uma origem O comum, num plano vertical, com velocidade iniciais de mesmo módulo v_0 e ângulos de lançamento respectivamente α e β em relação a horizontal. Considere T_1 e T_2 os respectivos tempos de alcance do ponto mais alto de cada trajetória e t_1 e t_2 os respectivos tempos para as partículas alcançarem um ponto comum de ambas as trajetórias. Assinale a opção com o valor da $t_1T_1 + t_2T_2$.

a) $2v_0^2(tg\alpha + tg\beta)/g^2$. b) $2v_0^2/g^2$. c) $4v_0^2 sen\alpha/g^2$.
d) $4v_0^2 sen\beta/g^2$. e) $2v_0^2(sen\alpha + sen\beta)/g^2$.

9. (ITA-2018)

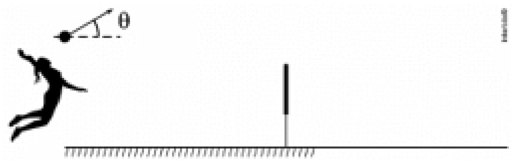
A partir de um mesmo ponto a uma certa altura do solo, uma partícula é lançada sequencialmente em três condições diferentes, mas sempre com a mesma velocidade inicial v_0. O primeiro lançamento é feito no vácuo e o segundo, na atmosfera com ar em repouso. O terceiro é feito na atmosfera com ar movimentado cuja velocidade em relação ao solo é igual ao módulo, direção e sentido à velocidade v_0. Para os três lançamentos, designando-se respectivamente de t_1, t_2 e t_3 os tempos de queda das partículas e de v_1, v_2 e v_3 os módulos de suas respectivas velocidades ao atingir o solo, assinale a alternativa correta.

a) $t_1 < t_3 < t_2; v_1 > v_3 > v_2$. b) $t_1 < t_3 = t_2; v_1 > v_3 > v_2$.
c) $t_1 = t_3 < t_2; v_1 = v_3 > v_2$. d) $t_1 < t_2 < t_3; v_1 = v_3 > v_2$.
e) $t_1 < t_3 = t_2; v_1 > v_3 = v_2$.

10. (ITA-2018)

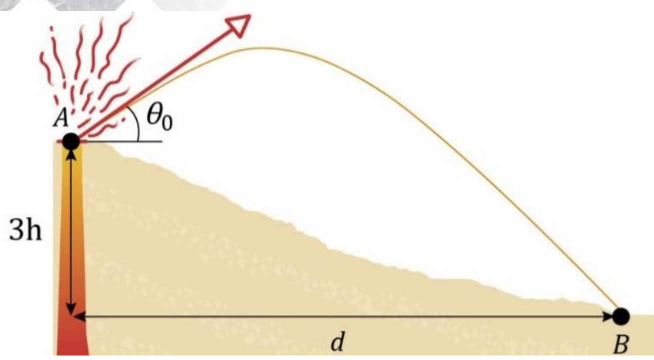
Numa quadra de vôlei de $18m$ de comprimento, com rede de $2{,}24m$ de altura, um atleta solitária faz um saque com a bola bem em cima da linha de fundo, a $3{,}0m$ de altura, num ângulo θ de $15°$ com a horizontal, conforme a figura, com trajetória num plano perpendicular à rede. Desprezando o atrito, pode-se dizer que, com $12m/s$ de velocidade inicial, a bola ($g = 10m/s^2$)

a) bate na rede.
b) passa tangenciando a rede.
c) passa a rede e cai antes da linha de fundo.
d) passa a rede e cai na linha de fundo.
e) passa a rede e cai fora da quadra.



11.

Uma partícula é lançada obliquamente, a partir de uma altura $3h$ (ver figura). Sabe-se que o ângulo de disparo vale θ. Nestas condições, se a maior altura atingida acima do ponto de projeção é h, então distância horizontal d percorrida pela partícula, imediatamente antes de atingir o solo (ponto B) é:

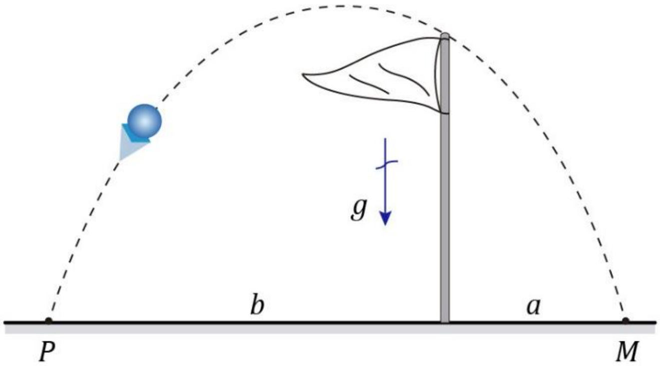


a) $2h \operatorname{sen} \theta$.
b) $4h \cos \theta$.
c) $6h \cot \theta$.
d) $8h \tan \theta$.
e) $8h \sec \theta$.

12. (ITA)

O esquema indica a trajetória de um objeto que foi lançado obliquamente do ponto (P), a partir do solo e passa rente à bandeira de altura h, e finalmente atingindo o ponto (M). Pode-se afirmar que a altura H máxima atingida pelo objeto, em função de a, b e h vale:

a) $H = \frac{h(b+2a)^2}{2ab}$.
b) $H = \frac{h(b+a)^2}{4ab}$.
c) $H = \frac{h(2b+a)^2}{4ab}$.
d) $H = \frac{h(b-a)^2}{2ab}$.
e) $H = \frac{h(2b-a)^2}{2ab}$.



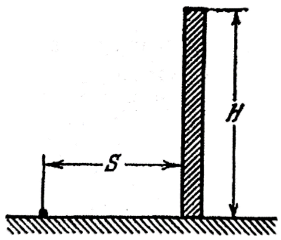
13.

Um corpo foi lançado com uma velocidade inicial v_0, formando um ângulo α com a horizontal. Qual é o tempo de duração do voo? Em qual distância do local de lançamento cairá o corpo? Para qual valor de ângulo α a longitude de voo será a maior?

Em qual altura estará o corpo após um intervalo de tempo τ desde o início do movimento? Quais serão a grandeza e direção da velocidade do corpo nesse instante? Considerar τ maior do que o tempo de ascensão do corpo até uma altura máxima. A resistência do ar é desprezada.

14.

É necessário lançar da terra uma bola por cima de uma parede vertical de altura H, que se encontra a uma distância S (ver figura). Para qual menor velocidade inicial é isso é possível? Com que ângulo α em relação à horizontal deverá, nesse caso, ser dirigida a velocidade?



15.

As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H. Os estilhaços da granada, que se produzem depois da explosão e cujas velocidades não passam de v_0, não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço?

16.

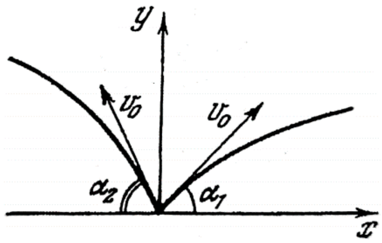
Um corpo foi lançado de um despenhadeiro abrupto de altura H dentro da água. A velocidade inicial do corpo, v_0, forma um ângulo α com a horizontal. A que distância da margem cairá o corpo? Depois de quantos segundos após o início do movimento o corpo estará a uma altura h sobre a água? Qual é a velocidade do corpo no momento de queda na água?

17.

Um bombardeiro de mergulho lança bombas desde uma altura H, estando a uma distância L do objetivo. A velocidade do bombardeiro é v. Sob qual ângulo em relação à horizontal o bombardeiro deve mergulhar?

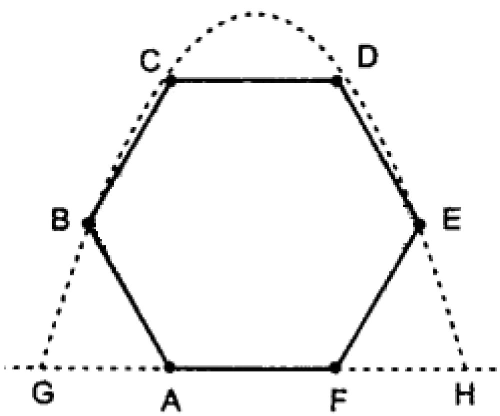
18.

Do ponto $x = y = 0$ (ver figura) são lançados simultaneamente dois corpos com a mesma velocidade inicial v_0 e formando diferentes ângulos α_1 e α_2 com a horizontal. Qual é a velocidade de movimento dos corpos um relativamente o outro? Qual é a distância entre os corpos após o intervalo de tempo τ? (Os corpos movem-se progressivamente).



19. (Simulado IME – 1ª fase)

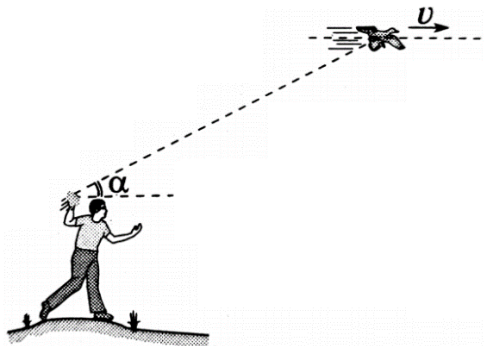
Uma partícula é lançada do ponto G. Sua trajetória toca os pontos B, C, D e E de um hexágono regular de lado a. Qual é o alcance horizontal GH?



a) $GH = \sqrt{6}a$ b) $GH = \sqrt{7}a$ c) $GH = \sqrt{5}a$ d) $GH = \sqrt{11}a$ e) $GH = \sqrt{13}a$

20. (Simulado ITA 1ª fase)

Um pato voa horizontalmente com velocidade constante e uma caçadora inexperiente lhe lança uma pedra. No instante do lançamento, a direção da pedra está orientada para o pato, como na figura abaixo. Após ser lançada a pedra, o tempo para a pedra atingir o pato é de:



A ( ) $t = \frac{v}{g} tg\ \alpha$

B ( ) $t = \frac{2v}{g} tg\ \alpha$

C ( ) $t = \frac{2v}{g} tg\ \alpha$

D ( ) $t = \frac{4v}{g} tg\ \alpha$

E ( ) $t = \frac{5v}{g} tg\ \alpha$

GABARITO

11. Gabarito lançamento oblíquo sem comentários

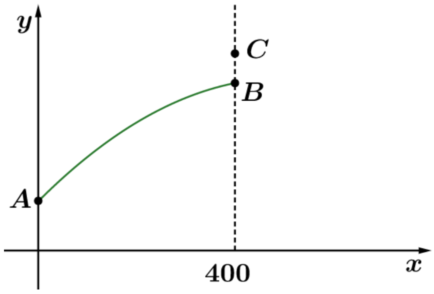
1) E

2) B

3) C

4) D

5) a)



b) $x_P(t) = v_0 \cos\theta\, t,\ y_P(t) = h + v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{gt^2}{2}$ e $y_O(t) = H - \frac{gt^2}{2}$ $c)\ 2\,s$ $d)\ 121\,m$

6) A

7) C

8) B

9) B

10) C

11) C

12) B

13) $t_{voo} = \frac{2v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}, \quad A = x(t_{voo}) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}, \quad \alpha_{crítico} = 45°, \quad h = v_0 \operatorname{sen}\alpha\, \tau - \frac{g\tau^2}{2}, v(\tau) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$
$\cos\theta = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2gh}{v_0^2}}}$

14) $v_{min} = \sqrt{g}\sqrt{H + \sqrt{H^2 + S^2}}$, $\operatorname{tg} \alpha_{crit} = \frac{v_0^2}{gS}$

15) $\frac{2v_0}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{v_0^2}{g} - 2H}$

16) $d_{margem} = \frac{v_0^2 \cos\alpha}{g}\left(\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2gH}{v_0^2}}\right)$, $\tau = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h)g}{v_0 \operatorname{sen}^2\alpha}}\right)$, $v_{queda} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}$

17) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{v^2}{g\sqrt{L^2-H^2}} + \sqrt{\frac{v^4}{g(L^2-H^2)} + \frac{2v^2H}{g(L^2-H^2)} - 1}\right)$

18) $v_{rel} = \sqrt{2}v_0\sqrt{1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}$, $d_{rel}(\tau) = \sqrt{2}v_0\sqrt{1 + \cos(\alpha_1 + \alpha_2)}\,\tau$

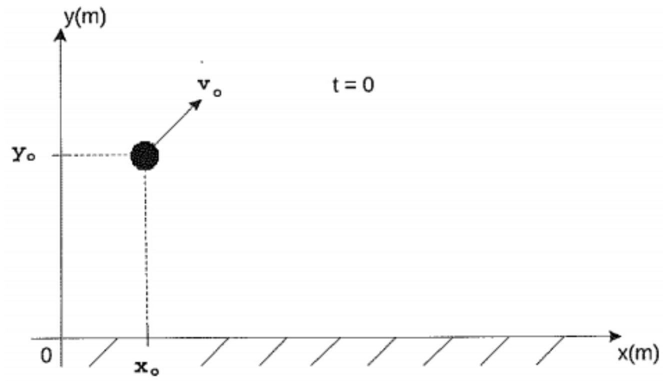
19) B

20) B

12. Lista comentada de lançamento oblíquo

1. (EN – 2015)

Analise a figura abaixo.



Conforme indica a figura acima, no instante $t = 0$, uma partícula é lançada no ar, e sua posição em função do tempo é descrita pela equação $\vec{r}(t) = (6{,}0t + 2{,}5)\hat{\imath} + (-5{,}0t^2 + 2{,}0t + 8{,}4)\hat{\jmath}$, com r em metros e t em segundos. Após 1,0 segundos, as medidas de sua altura do solo, em metros, e do módulo da sua velocidade, em m/s, serão, respectivamente, iguais a

a) 3,4 e 10 b) 3,6 e 8,0 c) 3,6 e 10

d) 5,4 e 8,0 e) 5,4 e 10

Comentários:

De acordo com a posição do vetor $\vec{r}(t)$, em x a partícula descreve um MRU e em y ela descreve um MRUV. Após $t = 1$, temos:

$$\vec{r}(1) = (6{,}0 \cdot 1 + 2{,}5)\hat{\imath} + (-5{,}0 \cdot 1^2 + 2{,}0 \cdot 1 + 8{,}4)\hat{\jmath}$$

$$\boxed{\vec{r}(1) = 8{,}5\hat{\imath} + 5{,}4\hat{\jmath}}$$

Portanto, a altura do solo em que se encontra a partícula é de 5,4 m. Para determinar a velocidade do corpo, basta derivar o vetor posição em relação ao tempo, isto é, derivar a função horária de cada componente em relação ao tempo:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath} = 6{,}0\hat{\imath} + (-10t + 2{,}0)\hat{\jmath}$$

Para $t = 1\ s$, temos a seguinte velocidade:

$$\vec{v}(1) = 6{,}0\hat{\imath} + (-10 \cdot 1 + 2{,}0)\hat{\jmath} \Rightarrow \vec{v}(1) = 6{,}0\hat{\imath} - 8\hat{\jmath}$$

Portanto:

$$|\vec{v}(1)| = \sqrt{6{,}0^2 + (-8{,}0)^2} \therefore \boxed{|\vec{v}(1)| = 10\ m/s}$$

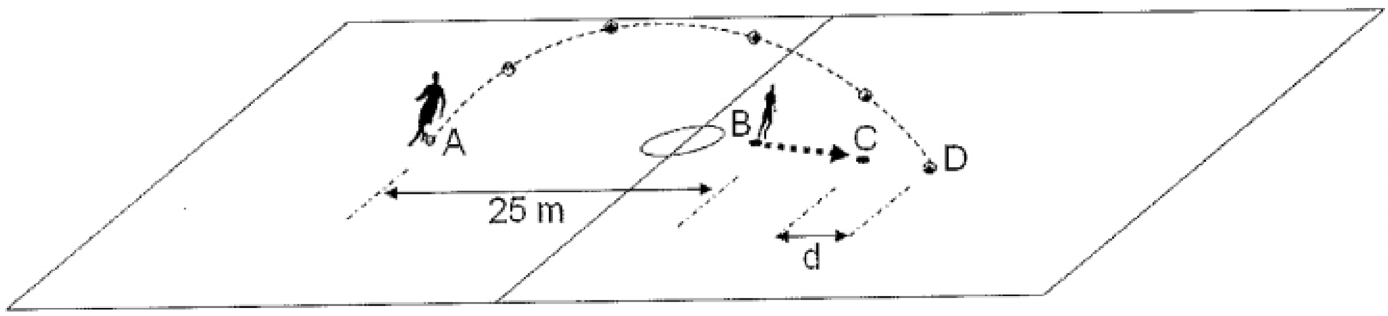
Gabarito: E

---

2. (EN – 2013)

Conforme mostra figura abaixo, em um jogo de futebol, no instante em que o jogador situado no ponto A faz um lançamento, o jogador situado no ponto B, que inicialmente estava parado, começa a correr com aceleração constante igual a 3,00 m/s², deslocando-se até o ponto C. Esse jogador chega em C no instante em que a bola toca o chão no ponto D. Todo o movimento se processa em um plano vertical, e a distância inicial entre A e B vale 25,0 m. Sabendo-se que a velocidade inicial da bola tem módulo igual a 20,0 m/s, e faz um ângulo de 45° com a horizontal, o valor da distância, d, entre os pontos C e D, em metros, é

Dado: $|\vec{g}| = 10\ m/s^2$



a) 1,00 b) 3,00 c) 5,00 d) 12,0 e) 15,0

Comentários:

Durante o tempo de voo da bola, o jogador se desloca de B para C dado por:

$$BC = \frac{at^2}{2}$$

O tempo de voo da bola é dado por:

$$t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen(\theta)}{g} \Rightarrow t_{voo} = \frac{2 \cdot 20 \cdot \overbrace{sen(45°)}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}}{10}$$

$$\boxed{t_{voo} = 2\sqrt{2}\ s}$$

Portanto:

$$BC=\frac{3\cdot\left(2\sqrt{2}\right)^2}{2}\Rightarrow\boxed{BC=12{,}0\ m}$$

Por outro lado, o alcance da bola é calculado por:

$$A=AD=\frac{v_0^2\cdot sen(2\theta)}{g}\Rightarrow AD=\frac{20^2\cdot sen(2\cdot 45°)}{10}\therefore\boxed{AD=40{,}0\ m}$$

Portanto:

$$AD=AB+BC+CD\Rightarrow 40=25+12+CD\therefore\boxed{CD=3{,}00\ m}$$

Gabarito: B

---

3. (AFA – 2010)

No instante $t=0$, uma partícula A é lançada obliquamente, a partir do solo, com velocidade de $80\ m/s$ sob um ângulo de 30° com a horizontal. No instante $t=2\ s$, outra partícula B é lançada verticalmente para cima, também a partir do solo, com velocidade de $40\ m/s$, de um ponto situado a $200\sqrt{3}\ m$ da posição de lançamento da primeira. Sabendo-se que essas duas partículas colidem no ar, pode-se afirmar que no momento do encontro

a) ambas estão subindo.

b) A está subindo e B descendo.

c) B está subindo e A descendo.

d) ambas estão descendo.

Comentários:

Como a partícula B é lançada verticalmente para cima, se houver alguma colisão, essa colisão deverá ocorrer ao longo da reta $x=200\sqrt{3}$. No momento em que as partículas colidem, ambas estão no mesmo ponto. Para chegar em $x=200\sqrt{3}$, a partícula A gasta:

$$t=\frac{200\sqrt{3}}{v_x}\Rightarrow t=\frac{200\sqrt{3}}{80\cdot\cos 30°}=\frac{200\sqrt{3}}{80\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}\therefore\boxed{t=5\ s}$$

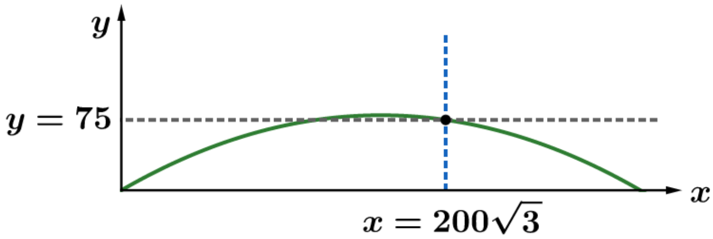
A altura alcançada pela partícula e a velocidade em $t=5\ s$ são:

$$\begin{cases}y_A=80\cdot sen\ 30°\cdot t-5\cdot t^2\\ v_A=80\cdot sen\ 30°-10\cdot t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_A=80\cdot sen\ 30°\cdot 5-5\cdot 5^2\\ v_A=80\cdot sen\ 30°-10\cdot 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_A=75\ m\\ v_A=-10\ m/s\end{cases}$$

Em $x=200\sqrt{3}$, a partícula A já está caindo. Por outro lado, temos as condições de B:

$$\begin{cases}y_B=40\cdot t-5\cdot t^2\\ v_B=40-5\cdot t\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_B=40\cdot 5-5\cdot 5^2\\ v_B=40-5\cdot 5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_B=75\ m\\ v_B=15\ m/s\end{cases}$$

Portanto, B ainda está subindo quando ocorre a colisão, graficamente, temos:



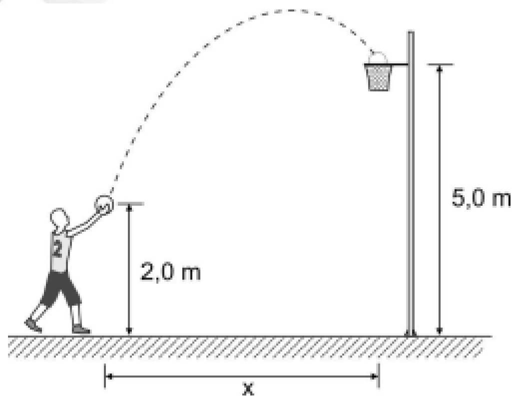
Gabarito: C

---

4. (AFA – 2009)

Uma bola de basquete descreve a trajetória mostrada na figura após ser arremessada por um jovem atleta que tenta bater um recorde de arremesso.

A bola é lançada com uma velocidade de $10\ m/s$ e, ao cair na cesta, sua componente horizontal vale $6{,}0\ m/s$. Despreze a resistência do ar e considere $g = 10\ m/s^2$. Pode-se afirmar que a distância horizontal (x) percorrida pela bola desde o lançamento até cair na cesta, em metros, vale



a) 3,0
b) 3,6
c) 4,8
d) 6,0

Comentários:

Se a bola é lançada com 10 m/s e sua componente horizontal vale 6,0 m/s, então a componente vertical vale 8,0 m/s, pelo teorema de Pitágoras:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 \Rightarrow 10^2 = 6^3 + v_y^2 \Rightarrow \boxed{v_y = 8{,}0\ m/s}$$

O tempo para a bola chegar à altura de 5 m é dado por:

$$y = y_0 + v_{0_y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} \Rightarrow 5 = 2{,}0 + 8{,}0 \cdot t - 5 \cdot t^2 \Rightarrow 5t^2 - 8t + 3 = 0$$

$$t = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3}}{2 \cdot 5} \Rightarrow t = \frac{(8 \pm \sqrt{4})}{10}$$

$$t_1 = \frac{8-2}{10} = 0{,}6\ s\ \ e\ \ t_2 = \frac{8+2}{10} = 1{,}0\ s$$

Note que $t = 0{,}6\ s$ corresponde ao tempo em que a bola possui a altura de 5 metros, mas ainda está subindo. Já $t = 1{,}0\ s$ corresponde ao tempo em que a bola possui altura igual a 5 metros, mas agora está descendo. Para a nossa situação em questão, a bola descenderá para o jogador fazer a cesta. Portanto, devemos utilizar este tempo para determinar a distância x percorrida pela bola na horizontal:

$$x = v_x \cdot t \Rightarrow x = 6{,}0 \cdot 1{,}0 \therefore \boxed{x = 6{,}0\ m}$$

Gabarito: D

---

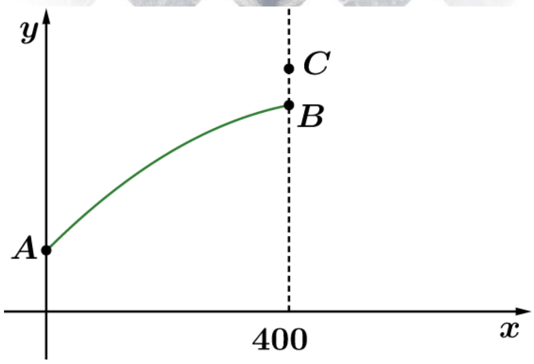
5. (ITA-1989)

Do alto de uma torre de $20\ m$ de altura, um artilheiro mira um balão que se encontra parado sobre um ponto, tal que a distância do pé da torre à vertical que passa pelo referido ponto é de $400\ m$. O ângulo de visada do artilheiro em relação à horizontal é de $15°$. No instante exato que o artilheiro dispara um projétil (P) os ocupantes do balão deixam cair um objeto (O) que é atingido pelo disparo. A velocidade do projétil ao deixar o cano da arma é $v_0 = 200\ m/s$. Despreze a resistência do ar. ($g = 9{,}8\ m/s^2$)

a) Faça um esquema indicando a configuração do problema.
b) Deduza as equações horárias: $x_P(t)$ e $y_P(t)$ para o projétil e $y_O(t)$ para o objeto (literalmente).
c) Calcule o instante do encontro projétil – objeto (numericamente).
d) Calcule a altura do encontro (numericamente).

Comentários:

a)



O artilheiro dispara do alto da torre em A, o encontro do projétil com o objeto ocorre em B e o ponto C é onde o balão está posicionado.

b) Aplicando a segunda Lei de Newton nas direções x e y:

X: $F_X = ma_X = 0 \rightarrow a_X = 0$

Y: $F_Y = ma_Y = P = mg \rightarrow a_Y = g$

Logo o movimento é uniforme na horizontal e uniformemente acelerado na vertical:

$$x_P(t) = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y_P(t) = h + v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{gt^2}{2}$$

O movimento do objeto obedece às mesmas equações dinâmicas, sendo seu movimento diferenciado pela velocidade e posição inicial. Como se trata de um movimento uniformemente acelerado de velocidade inicial nula, temos:

$$y_O(t) = H - \frac{gt^2}{2}$$

Em que θ é o ângulo do lançamento em relação à horizontal, h é a altura do artilheiro e H é a altura do balão.

c) Para calcularmos isso basta tornamos nossa atenção para o movimento horizontal. No momento da colisão o projétil deverá ter percorrido uma distância horizontal de $400\ m$:

$$t_e = \frac{x_P(t_e)}{v_0 \cos\theta} = \frac{400}{200\,.\cos 15°} \approx 2\ s$$

d) Agora que temos o tempo de encontro basta substituí-lo na equação que fornece a posição vertical do em função do tempo:

$$y_e = y_P(2)$$

$$y_e = 20 + 2v_0 \operatorname{sen} 15° - \frac{g\,.4}{16} \Rightarrow y_e \approx 121\ m$$

Gabarito: a) Veja a figura acima b) $\boldsymbol{x_P(t) = v_0 \cos\theta\, t}$, $\boldsymbol{y_P(t) = h + v_0 \operatorname{sen}\theta\, t - \frac{gt^2}{2}}$ e $\boldsymbol{y_O(t) = H - \frac{gt^2}{2}}$, c) $\boldsymbol{2\ s}$ e d) $\boldsymbol{121\ m}$

---

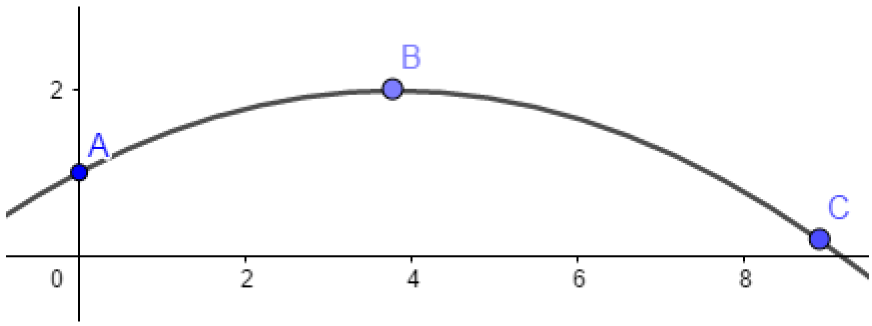
6. (ITA-2004)

Durante as Olimpíadas de 1968, na cidade do México, Bob Beamow bateu o recorde de salto em distância, cobrindo $8{,}9\ m$ de extensão. Suponha que, durante o salto, o centro de gravidade do atleta teve sua altura variando de $1{,}0\ m$ no início, chegando ao máximo de $2{,}0\ m$ e terminado a $0{,}20\ m$ no fim do salto. Desprezando o atrito com o ar, pode-se afirmar que o componente horizontal da velocidade inicial do salto foi de: $(g = 10\ m/s^2)$

a) $8{,}5\ m/s$.
b) $7{,}5\ m/s$.
c) $6{,}5\ m/s$.
d) $5{,}2\ m/s$.
e) $4{,}5\ m/s$.

Comentários:

A figura abaixo representa o movimento do centro de massa do atleta durante o salto:



O ponto A marca o início do salto, B é o ponto mais alto de sua trajetória e C é sua posição quando ele toca o solo. Por Torricelli, encontramos a velocidade inicial em y:

$$v_{0y}^2 = 2g(h_B - h_A)$$

Substituindo os valores fornecidos no enunciado:

$$v_{0y} = \sqrt{20}\ m/s$$

A equação horária da posição vertical do centro de massa do atleta é dada por:

$$y(t) = 1 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Como sabemos sua posição no fim do lançamento podemos calcular seu tempo de voo:

$$y(t_{voo}) = y_{final} = 0{,}2\ m \Rightarrow 1 + v_{0y}t_{voo} - \frac{gt_{voo}^2}{2} = 0{,}2 \Rightarrow 5t_{voo}^2 - \sqrt{20}t_{voo} - 0{,}8 = 0$$

Essa equação tem raízes:

$$t_{voo} = \frac{\sqrt{20} \pm 6}{10}$$

O sinal negativo não nos interessa pois rende um tempo negativo. Lembrando que o movimento na horizontal é uniforme, agora basta usarmos o tempo de voo para determinarmos a velocidade horizontal do atleta:

$$v_x = v_{0x} = \frac{x(t_{voo})}{t_{voo}} = \frac{x_{final}}{t_{voo}} \Rightarrow v_{0x} = \frac{\frac{8{,}9}{\sqrt{20}+6}}{10} = \frac{89}{\sqrt{20}+6} \approx 8{,}5\ m/s$$

Gabarito: A

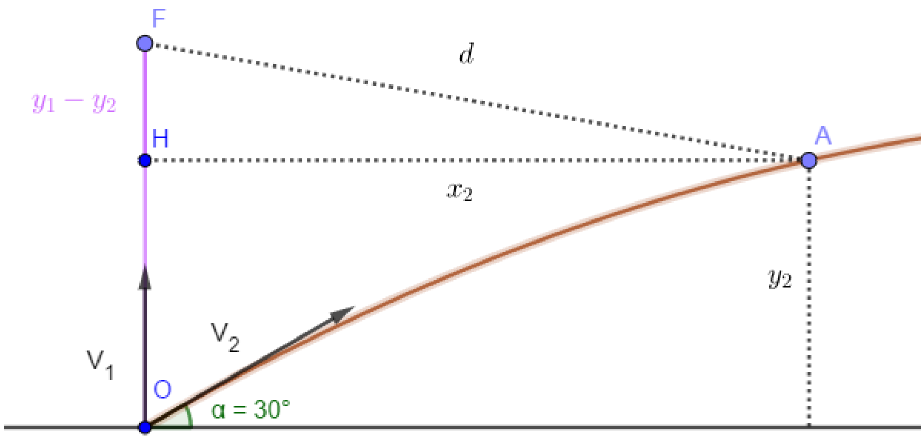
7. (ITA-2009)

Considere hipoteticamente duas bolas lançadas de um mesmo lugar ao mesmo tempo: a bola 1, com velocidade para cima de $30m/s$, e a bola 2, com velocidade de $50m/s$ formando um ângulo de $30°$ com a horizontal. Considerando $g = 10m/s^2$, assinale a distância entre as bolas no instante em que a primeira alcança sua máxima altura.

a) $d = \sqrt{6250}\ m$. b) $d = \sqrt{7217}\ m$. c) $d = \sqrt{17100}\ m$.
d) $d = \sqrt{19375}\ m$. e) $d = \sqrt{26875}\ m$.

Comentários:

Considere a esquematização na figura abaixo:



As linhas roxa e marrom representam o movimento das bolas 1 e 2, respectivamente. Sendo O o ponto de partida de ambas as bolas, F o ponto mais alto da trajetória da bola 1 e A o ponto a segunda bola estará quando a primeira alcançar F.

Primeiramente calcularemos o instante em que a primeira bola alcança sua máxima altura:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} \Rightarrow g = \frac{V_1}{t_{h,max}} \Rightarrow t_{h,max} = 3\ s$$

Naquele ponto (F), sua altura é:

$$y_1 = V_1 t_{h,max} - \frac{g t_{h,max}^2}{2} = 90 - 45 = 45\ m$$

Agora devemos calcular a posição da segunda bola nesse instante de tempo. Pela equação horário do movimento na direção x, temos:

$$x_2 = V_2 \cos 30° \, t_{h,max} = 75\sqrt{3} \, m$$

Pela equação horária do movimento na direção y, obtemos:

$$y_2 = V_2 \operatorname{sen} 30° \, t_{h,max} - \frac{g t_{h,max}^2}{2} \Rightarrow y_2 = 75 - 45 = 30 \, m$$

Observe na figura que a distância que queremos calcular é AF. Utilizando o Teorema de Pitágoras no triângulo FHA, temos:

$$d^2 = (y_1 - y_2)^2 + x_2^2 \Rightarrow d^2 = 225 + 16875 \Rightarrow d = \sqrt{17100} \, m$$

Gabarito: C

---

8. (ITA-2011)

Duas partículas idênticas, de mesma massa m, são projetadas de uma origem O comum, num plano vertical, com velocidade iniciais de mesmo módulo v_0 e ângulos de lançamento respectivamente α e β em relação a horizontal. Considere T_1 e T_2 os respectivos tempos de alcance do ponto mais alto de cada trajetória e t_1 e t_2 os respectivos tempos para as partículas alcançarem um ponto comum de ambas as trajetórias. Assinale a opção com o valor da $t_1T_1 + t_2T_2$.

a) $2v_0^2(tg\alpha + tg\beta)/g^2$.
b) $2v_0^2/g^2$.
c) $4v_0^2 sen\alpha/g^2$.
d) $4v_0^2 sen\beta/g^2$.
e) $2v_0^2(sen\alpha + sen\beta)/g^2$.

Comentários:

O movimento das partículas na vertical é uniformemente variado, além disso o tempo que elas levam para alcançar o ponto mais alto de suas trajetórias é o tempo que leva para suas velocidades verticais se anularem:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

Para a primeira partícula:

$$0 = v_0 \cos\alpha - gT_1 \Rightarrow T_1 = \frac{v_0 \cos\alpha}{g} \quad (eq.1)$$

Para a segunda:

$$0 = v_0 \cos\beta - gT_2 \Rightarrow T_2 = \frac{v_0 \cos\beta}{g} \quad (eq.2)$$

Seja x a abscissa do ponto de encontro das trajetórias e y a ordenada. O movimento das partículas na horizontal é uniforme. Assim, podemos escrever:

$$x = v_0 \cos\alpha \, t_1 = v_0 \cos\beta \, t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} t_1 \quad (eq\ .3)$$

Como o movimento das partículas na vertical tem velocidade constante, sua equação horária é escrita como:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Igualando a ordenada do ponto de encontro das trajetórias:

$$y_1(t_1) = y_2(t_2)$$

$$v_0 \operatorname{sen} \alpha \, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = v_0 \operatorname{sen} \beta \, t_2 - \frac{gt_2^2}{2} \quad (eq. 4)$$

Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$v_0 \operatorname{sen} \alpha \, t_1 - \frac{gt_1^2}{2} = \frac{v_0 \operatorname{sen} \beta \cos \alpha \, t_1}{\cos \beta} - \frac{gt_1^2 \cos^2 \alpha}{2 \cos^2 \beta} \Rightarrow t_1 = \frac{2 \cos \beta \, v_0 (\operatorname{sen} \beta \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \beta)}{g(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)}$$

$$t_1 = \frac{2 \cos \beta \, v_0 \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{g(\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)} \qquad (eq. 3)$$

Voltando a expressão que queremos calcular:

$$T_1 t_1 + T_2 t_2$$

Substituindo (1) e (2), obtemos:

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 = \frac{v_0}{g} (\operatorname{sen} \alpha \, t_1 + \operatorname{sen} \beta \, t_2)$$

Substituindo (3):

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 = \frac{v_0}{g} (\operatorname{sen} \alpha \, t_1 + \frac{\operatorname{sen} \beta \cos \alpha \, t_1}{\cos \beta}) \Rightarrow T_1 t_1 + T_2 t_2 = \frac{v_0 t_1}{g \cos \beta} (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \beta \cos \alpha)$$

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 = \frac{v_0 t_1 \operatorname{sen}(\beta + \alpha)}{g \cos \beta}$$

Por fim, substituindo (4), temos:

$$T_1 t_1 + T_2 t_2 = \frac{2v_0^2 \cos \beta \operatorname{sen}(\beta + \alpha) \operatorname{sen}(\beta - \alpha)}{g^2 (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)}$$

Nesse ponto é necessário o uso de identidades trigonométricas para que cheguemos à resposta. Primeiramente lembre-se que:

$$2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos(a - b) - \cos(a + b)$$

Utilizando essa identidade na multiplicação de senos que temos na equação, obtemos:

$$T_1t_1 + T_2t_2 = \frac{v_0^2 \cos\beta\,(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)}{g^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)}$$

A última identidade que precisaremos é:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

Voltando a expressão:

$$T_1t_1 + T_2t_2 = \frac{v_0^2 \cos\beta\,(2\cos^2\alpha - 1 - 2\cos^2\beta + 1)}{g^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta)} \therefore \boxed{T_1t_1 + T_2t_2 = \frac{2v_0^2}{g^2}}$$

Gabarito: B

9. (ITA-2018)

A partir de um mesmo ponto a uma certa altura do solo, uma partícula é lançada sequencialmente em três condições diferentes, mas sempre com a mesma velocidade inicial v_0. O primeiro lançamento é feito no vácuo e o segundo, na atmosfera com ar em repouso. O terceiro é feito na atmosfera com ar movimentado cuja velocidade em relação ao solo é igual ao módulo, direção e sentido à velocidade v_0. Para os três lançamentos, designando-se respectivamente de t_1, t_2 e t_3 os tempos de queda das partículas e de v_1, v_2 e v_3 os módulos de suas respectivas velocidades ao atingir o solo, assinale a alternativa correta.

a) $t_1 < t_3 < t_2; v_1 > v_3 > v_2$.
b) $t_1 < t_3 = t_2; v_1 > v_3 > v_2$.
c) $t_1 = t_3 < t_2; v_1 = v_3 > v_2$.
d) $t_1 < t_2 < t_3; v_1 = v_3 > v_2$.
e) $t_1 < t_3 = t_2; v_1 > v_3 = v_2$.

Comentários:

Quando há atmosfera a partícula sofre uma força resistiva, diminuindo sua velocidade, assim v_1 é a maior das velocidades. Essa força resistiva é proporcional a velocidade relativa entre a partícula e o ar, assim podemos deduzir que ela é menor no caso 3 em relação ao 2. Como a partícula sofreu uma desaceleração de menor intensidade em 3, temos que sua velocidade é maior nesse caso (em relação a 2). Assim podemos escrever:

$$v_1 > v_3 > v_2$$

O tempo que a partícula leva para chegar ao solo depende apenas de sua velocidade vertical. Note que a força de resistência do ar atrasa a partícula, mas, como foi discutido anteriormente, essa força depende da velocidade relativa entre a partícula e o ar, como o ar só se move na horizontal a componente vertical da velocidade relativa entre eles é a mesma no caso 2 e 3, logo:

$$t_1 < t_3 = t_2$$

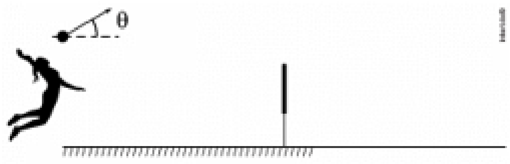
Gabarito: B

10. (ITA-2018)

Numa quadra de vôlei de $18m$ de comprimento, com rede de $2{,}24m$ de altura, um atleta solitária faz um saque com a bola bem em cima da linha de fundo, a $3{,}0m$ de altura, num ângulo θ de $15°$

com a horizontal, conforme a figura, com trajetória num plano perpendicular à rede. Desprezando o atrito, pode-se dizer que, com $12m/s$ de velocidade inicial, a bola $(g = 10m/s^2)$

a) bate na rede.
b) passa tangenciando a rede.
c) passa a rede e cai antes da linha de fundo.
d) passa a rede e cai na linha de fundo.
e) passa a rede e cai fora da quadra.



Comentários:

A equação da trajetória de um lançamento oblíquo é dada por:

$$y(x) = y_0 + x \tan\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2\theta}$$

Substituindo os dados do problema:

$$y(x) = 3 + 0{,}27x - 0{,}037x^2$$

Primeiramente veremos se a bola ultrapassa a rede. Note que a rede está no meio da quadra em $x = 9\ m$, queremos saber a altura da bola quando passa na mesma vertical da rede:

$$y(9) = 3 + 0{,}27 \,.\, 9 - 0{,}037 \,.\, 81 = 2{,}433\ m$$

$$y(9) > 2{,}24\ m$$

E, portanto, a bola ultrapassa a rede. Para determinamos onde ela aterrissa devemos ver em qual x sua altura é nula:

$$y(x_{fim}) = 0$$

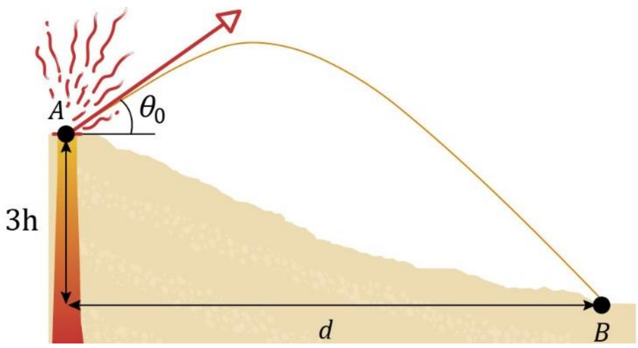
$$3 + 0{,}27x - 0{,}037x^2 = 0$$

Essa equação tem solução positiva (a única relevante): $x_{fim} \approx 13{,}36\ m$. Como $x_{fim} < 18\ m$, podemos afirmar que a bola aterrissa dentro da quadra.

Gabarito: C

11.

Uma partícula é lançada obliquamente, a partir de uma altura $3h$ (ver figura). Sabe-se que o ângulo de disparo vale θ. Nestas condições, se a maior altura atingida acima do ponto de projeção é h, então distância horizontal d percorrida pela partícula, imediatamente antes de atingir o solo (ponto B) é:



a) $2h \operatorname{sen}\theta$.
b) $4h\cos\theta$.
c) $6h\cot\theta$.
d) $8h\tan\theta$.
e) $8h\sec\theta$.

Comentários:

Por Torricelli na vertical entre o ponto inicial e o ponto mais alto, temos que:

$$v_y^2 = (v_0 \cdot sen\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow v_y = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{2gh}$$

Logo a equação da parábola dessa partícula é dada por:

$$y(x) = 3h + x\tan\theta - \frac{gx^2}{2\left(\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{2gh}\right)^2 \cos^2\theta}$$

Imediatamente antes de atingir o solo temos $y = 0$, logo:

$$y(d) = 0 \Rightarrow 3h + d\tan\theta - \frac{d^2\tan^2\theta}{4h} = 0$$

A equação acima tem as soluções $d = 6h\cot\theta$ e $d = -2h\cot\theta$. O valor negativo seria o que encontraríamos prolongando a parábola para a esquerda.

Gabarito: C

---

12. (ITA)

O esquema indica a trajetória de um objeto que foi lançado obliquamente do ponto (P), a partir do solo e passa rente à bandeira de altura h, e finalmente atingindo o ponto (M). Pode-se afirmar que a altura H máxima atingida pelo objeto, em função de a, b e h vale:

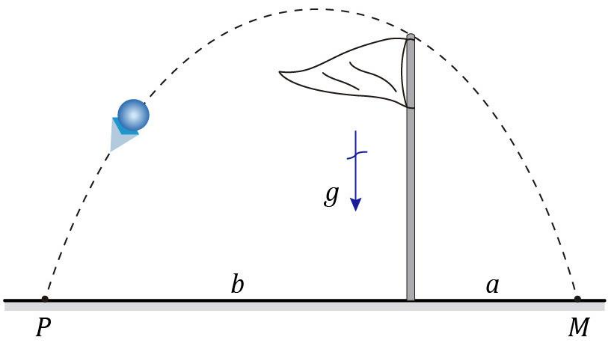
a) $H = \frac{h(b+2a)^2}{2ab}$.

b) $H = \frac{h(b+a)^2}{4ab}$.

c) $H = \frac{h(2b+a)^2}{4ab}$.

d) $H = \frac{h(b-a)^2}{2ab}$.

e) $H = \frac{h(2b-a)^2}{2ab}$.



Comentários:

Por Torricelli, temos que a altura máxima é dada por:

$$0^2 = (v_0 \cdot sen\theta)^2 - 2 \cdot g \cdot H_{max} \Rightarrow H_{max} = \frac{v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2g}$$

Devemos determinar a velocidade inicial e o ângulo de lançamento pelos dados do problema. Além disso o alcance do lançamento é dado por:

$$A = \frac{2v_0^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta}{g} = a + b \quad (eq.1)$$

Isolando a velocidade inicial:

$$v_0^2 = \frac{g(a+b)}{2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta} \quad (eq.2)$$

Escrevendo a equação da parábola:

$$y(x) = x\,\text{tg}\,\theta - \frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\theta)$$

O problema nos fornece que $y(b) = h$, assim:

$$h = b\,\text{tg}\,\theta - \frac{gb^2}{2v_0^2}(1 + tg^2\theta)$$

Substituindo (2) na equação acima nos rende:

$$h = b\,\text{tg}\,\theta - \frac{b^2}{a+b}(1 + tg^2\theta) \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{(a+b)h}{ab} \quad (eq.3)$$

Voltaremos à equação (1):

$$\frac{2v_0^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta}{g} = a + b$$

Para reescrevê-la:

$$\frac{2v_0^2\,\text{sen}^2\,\theta}{g\,\text{tg}\,\theta} = a + b \Rightarrow \frac{v_0^2\,\text{sen}^2\,\theta}{2g} = \frac{(a+b)\,\text{tg}\,\theta}{4}$$

Substituindo (3) na equação acima e notando que o lado esquerdo dela é H_{max}, representado no início, temos:

$$H_{max} = \frac{(a+b)^2 h}{4ab}$$

Gabarito: B

13.

Um corpo foi lançado com uma velocidade inicial v_0, formando um ângulo α com a horizontal. Qual é o tempo de duração do voo? Em qual distância do local de lançamento cairá o corpo? Para qual valor de ângulo α a longitude de voo será a maior?
Em qual altura estará o corpo após um intervalo de tempo τ desde o início do movimento? Quais serão a grandeza e direção da velocidade do corpo nesse instante? Considerar τ maior do que o tempo de ascensão do corpo até uma altura máxima. A resistência do ar é desprezada.

Comentários:

Na vertical temos um movimento com aceleração constante, logo:

$$v_y = v_{0y} - gt$$

No fim do movimento sua velocidade vertical deverá ser igual a inicial (pode-se deduzir isso por simetria do problema físico), mas com o sentido oposto, assim seu tempo de voo é dado por:

$$-v_{0y} = v_{0y} - gt_{voo} \Rightarrow t_{voo} = \frac{2v_{0y}}{g} \Rightarrow t_{voo} = \frac{2v_0 \operatorname{sen} \alpha}{g}$$

O movimento horizontal da partícula apresenta velocidade constante, assim:

$$x(t) = v_{0x}t$$

Como a longitude do voo é a distância horizontal percorrida até o fim da queda:

$$A = x(t_{voo}) = \frac{v_0^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Essa expressão tem seu valor máximo quando o seno é igual a 1, considerando que o ângulo de lançamento é um ângulo entre 0 e 90°, devemos ter:

$$2\alpha_{crítico} = 90° \Rightarrow \alpha_{crítico} = 45°$$

A equação horária da posição vertical da partícula é dada por:

$$y(t) = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$$

Após se passar um tempo τ, teremos:

$$h = v_0 \operatorname{sen} \alpha \, \tau - \frac{g\tau^2}{2} \qquad (eq. 1)$$

Por Torricelli e somando vetorialmente a velocidade em x, temos que:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gh \Rightarrow v(\tau)^2 = v_{0x}^2 + v_y^2 \Rightarrow v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2$$

$$v(\tau) = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$$

Lembre-se que a velocidade horizontal do corpo se mantém constante durante todo o trajeto, desse modo apresentando a seguinte configuração:

A direção da velocidade é determinada por θ:

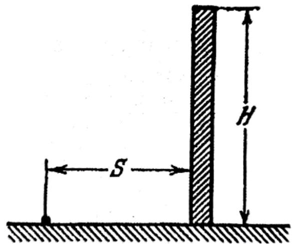
$$\cos\theta = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{v(\tau)} = \frac{v_0 \cdot \cos\alpha}{v_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}}} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{1 - \frac{2 \cdot g \cdot h}{v_0^2}}}$$

Em que h é dada por (1).

Gabarito: $t_{voo} = \frac{2 \cdot v_0 \cdot sen\, \alpha}{g}$, $A = x(t_{voo}) = \frac{v_0^2 \cdot sen(2\alpha)}{g}$, $\alpha_{crítico} = 45°$, $h = v_0 \cdot sen\, \alpha \cdot \tau - \frac{g \cdot \tau^2}{2}$, $v(\tau) = \sqrt{v_0^2 - 2 \cdot g \cdot h}$

14.

É necessário lançar da terra uma bola por cima de uma parede vertical de altura H, que se encontra a uma distância S (ver figura). Para qual menor velocidade inicial é isso é possível? Com que ângulo α em relação à horizontal deverá, nesse caso, ser dirigida a velocidade?



Comentários:

Para uma dada velocidade inicial v_0, para se existirem trajetórias que passam por um ponto específico esse ponto deve estar abaixo ou sobre a parábola de segurança. Como queremos que a nossa trajetória possua o ponto (S, H):

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}\ (P.S.) \Rightarrow H \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gS^2}{2v_0^2} \qquad (eq. 1)$$

O lado direito da inequação é uma função crescente de v_0, assim para encontrarmos o menor valor de v_0 devemos considerar também o menor valor dessa função, o qual, pela inequação, é H.

$$H = \frac{v_{min}^2}{2g} - \frac{gS^2}{2v_{min}^2} \Rightarrow v_{min}^4 - 2gHv_{min}^2 - g^2\, S^2 = 0$$

A equação acima tem solução:

$$v_{min}^2 = \frac{2gH \pm 2g\sqrt{H^2 + S^2}}{2}$$

O sinal negativo não nos interessa pois renderia um valor complexo para a velocidade, assim:

$$v_{min} = \sqrt{g}\sqrt{H + \sqrt{H^2 + S^2}}$$

Considere a equação parabólica da trajetória:

$$y(x) = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

Substituindo nela a identidade $\sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$, obtemos:

$$\tan^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gx} \operatorname{tg} \alpha + \left(1 + \frac{2v_0^2 y}{gx^2}\right) = 0$$

Essa equação é usada para a dedução de parábola de segurança e a igualdade encontrada em (1) para (S, H), resulta em um $\Delta = 0$ para essa equação, assim:

$$\operatorname{tg}\alpha_{crit} = \frac{\frac{2v_0^2}{gS} \pm 0}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha_{crit} = \frac{v_0^2}{gS}$$

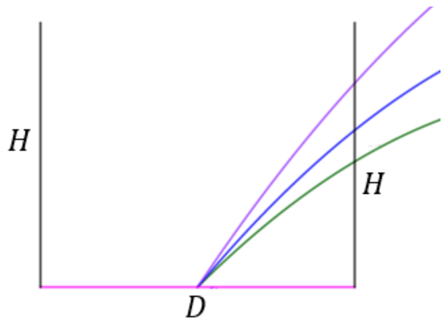
Gabarito: $\boldsymbol{v_{min} = \sqrt{g}\sqrt{H + \sqrt{H^2 + S^2}}}$, $\boldsymbol{\operatorname{tg}\alpha_{crit} = \frac{v_0^2}{gS}}$

15.

As provas do detonador de uma granada efetuam-se no centro do fundo de um poço cilíndrico de profundidade H. Os estilhaços da granada, que se produzem depois da explosão e cujas as velocidades não passam de v_0, não devem cair na superfície da terra. Qual deverá ser o diâmetro mínimo D do poço?

Comentários:

A figura abaixo mostra possíveis trajetórias. A vista é horizontal de um plano vertical que passa pelo centro do poço:



Para termos certeza que não haverá trajetórias para dada velocidade v_0 que alcancem a superfície, devemos ter o ponto $\left(\frac{D}{2}, H\right)$ fora da região delimitada pela parábola de segurança. Assim garantiremos que o estilhaço nunca atravessaria a parede do poço:

$$Y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \ (P.S.)$$

$$H > \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gD^2}{8v_0^2} \Rightarrow D > \frac{2v_0}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{v_0^2}{g} - 2H}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{2v_0}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{v_0^2}{g} - 2H}}$

16.

Um corpo foi lançado de um despenhadeiro abrupto de altura H dentro da água. A velocidade inicial do corpo, v_0, forma um ângulo α com a horizontal. A que distância da margem cairá o corpo? Depois de quantos segundos após o início do movimento o corpo estará a uma altura h sobre a água? Qual é a velocidade do corpo no momento de queda na água?

Comentários:

A equação da trajetória parabólica em um lançamento obliquo é dada por:

$$y(x) = H + x \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha}$$

Onde convencionamos $y = 0$ para a superfície da água. Quando o corpo chegar ao fim do seu movimento teremos:

$$y(d_{margem}) = 0$$

$$H + d_{margem} \cdot \operatorname{tg} \alpha - \frac{g \cdot d_{margem}^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} = 0$$

Essa equação do segundo grau tem as soluções:

$$d_{margem} = \frac{v_0^2 \cdot \cos \alpha}{g}\left(\operatorname{sen} \alpha \pm \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2 \cdot g \cdot H}{v_0^2}}\right)$$

Das quais, apenas a solução positiva nos interessa:

$$d_{margem} = \frac{v_0^2 \cdot \cos \alpha}{g}\left(\operatorname{sen} \alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2 \alpha + \frac{2 \cdot g \cdot H}{v_0^2}}\right)$$

O corpo sofre uma aceleração constante na vertical, assim podemos escrever a equação horária de sua posição vertical como:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow y(t) = H + v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Calculando o tempo que ele levará para alcançar a altura h:

$$y(\tau) = h$$

$$\frac{g \cdot \tau^2}{2} - v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \tau - (H - h) = 0$$

Essa equação do segundo grau tem as soluções:

$$\tau = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g}\left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2(H-h) \cdot g}{v_0 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}}\right)$$

Das quais, apenas a solução positiva nos interessa:

$$\tau = \frac{v_0 \cdot \operatorname{sen} \alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h) \cdot g}{v_0 \cdot \operatorname{sen}^2 \alpha}}\right)$$

Por Torricelli e somando vetorialmente a velocidade em x, temos a velocidade de queda:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2gh$$

$$v(\tau)^2 = v_{0x}^2 + v_y^2 \Rightarrow v_0^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 \Rightarrow v_{queda} = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot g \cdot H}$$

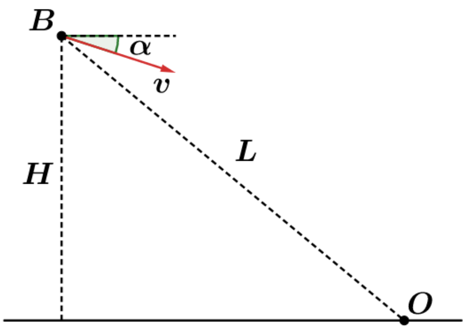
Gabarito: $\boldsymbol{d_{margem} = \frac{v_0^2 \cos\alpha}{g}\left(\operatorname{sen}\alpha + \sqrt{\operatorname{sen}^2\alpha + \frac{2gH}{v_0^2}}\right), \quad \tau = \frac{v_0 \operatorname{sen}\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2(H-h)g}{v_0 \operatorname{sen}^2\alpha}}\right), \quad v_{queda} = \sqrt{v_0^2 + 2gH}}$

17.

Um bombardeiro de mergulho lança bombas desde uma altura H, estando a uma distância L do objetivo. A velocidade do bombardeiro é v. Sob qual ângulo em relação à horizontal o bombardeiro deve mergulhar?

Comentários:

Considere a representação do movimento:



Onde B é o bombardeiro, O o objetivo e α o ângulo que queremos encontrar. A equação horária do movimento na vertical é:

$$y(t) = H - v \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

O tempo que a bomba levará para chegar ao objetivo pode ser calculado através do movimento horizontal, o qual apresenta velocidade constante:

$$t_O = \frac{\sqrt{L^2 - H^2}}{v \cdot \cos\alpha}$$

Nesse instante a bomba deverá estar no nível do solo, logo:

$$y(t_O) = 0$$

$$H - \operatorname{tg}\alpha \cdot \sqrt{L^2 - H^2} - \frac{g \cdot (L^2 - H^2)}{2 \cdot v^2 \cdot \cos^2\alpha} = 0$$

Usando a identidade trigonométrica $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$, temos:

$$\frac{g\cdot(L^2-H^2)\cdot \operatorname{tg}^2\alpha}{2\cdot v^2} + \operatorname{tg}\alpha\cdot\sqrt{L^2-H^2} + \left(\frac{g\cdot(L^2-H^2)}{2v^2} - H\right) = 0$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{2v^2}{g\cdot\sqrt{L^2-H^2}}\cdot\operatorname{tg}\alpha + \left(1 - \frac{2\cdot v^2\cdot H}{g\cdot(L^2-H^2)}\right) = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau acima, obtemos as seguintes raízes:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-\frac{2\cdot v^2}{g\cdot\sqrt{L^2-H^2}} \pm \sqrt{\frac{4\cdot v^4}{g^2\cdot(L^2-H^2)} + \frac{8\cdot v^2\cdot H}{g\cdot(L^2-H^2)} - 4}}{2}$$

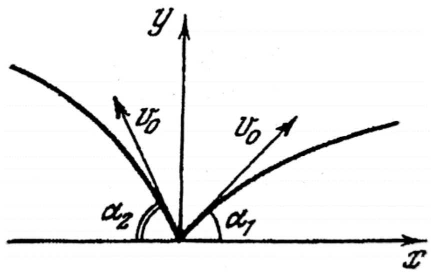
Das quais, apenas a positiva nos interessa:

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{v^2}{g\cdot\sqrt{L^2-H^2}} + \sqrt{\frac{v^4}{g\cdot(L^2-H^2)} + \frac{2\cdot v^2\cdot H}{g\cdot(L^2-H^2)} - 1}$$

Gabarito: $\mathbf{arctg}\left(-\frac{v^2}{g\sqrt{L^2-H^2}} + \sqrt{\frac{v^4}{g(L^2-H^2)} + \frac{2v^2H}{g(L^2-H^2)} - \mathbf{1}}\right)$

18.

Do ponto $x = y = 0$ (ver figura) são lançados simultaneamente dois corpos com a mesma velocidade inicial v_0 e formando diferentes ângulos α_1 e α_2 com a horizontal. Qual é a velocidade de movimento dos corpos um relativamente o outro? Qual é a distância entre os corpos após o intervalo de tempo τ? (Os corpos movem-se progressivamente).



Comentários:

A velocidade relativa horizontal dos corpos é dada por:

$$v_{x,rel} = v_{x,1} - v_{x,2} \Rightarrow v_{x,rel} = v_o\cdot\cos\alpha_1 - (-v_0\cdot\cos\alpha_2)$$

$$v_{x,rel} = v_0(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

Do mesmo modo a componente vertical da velocidade relativa pode ser expressado por:

$$v_{y,rel} = v_{y,1} - v_{y,2}$$

Lembrando-se que o movimento vertical é uniformemente acelerado, com aceleração g, temos:

$$v_{y,rel} = (v_o\cdot\operatorname{sen}\alpha_1 - g\cdot t) - (v_0\cdot\operatorname{sen}\alpha_2 - g\cdot t)$$

$$v_{y,rel} = v_0(\operatorname{sen}\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_2)$$

Por fim, podemos calcular o módulo da velocidade relativa a partir de suas componentes:

$$v_{rel} = \sqrt{v_{x,rel}^2 + v_{y,rel}^2}$$

$$v_{rel} = v_0\sqrt{(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)^2 + (\operatorname{sen}\alpha_1 - \operatorname{sen}\alpha_2)^2}$$

$$v_{rel} = v_0\sqrt{2 + 2\cdot\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2 - 2\cdot\operatorname{sen}\alpha_1\cdot\operatorname{sen}\alpha_2}$$

$$v_{rel} = \sqrt{2}v_0\cdot\sqrt{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}$$

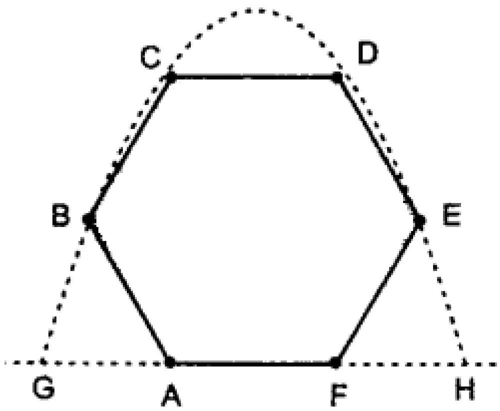
Perceba que a velocidade encontrada é constante, portanto, podemos calcular a distância relativa entre os corpos como calcularíamos a variação da posição em um movimento uniforme:

$$d_{rel}(\tau) = v_{rel}\cdot\tau \Rightarrow d_{rel}(\tau) = \sqrt{2}v_0\cdot\sqrt{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}\cdot\tau$$

Gabarito: $\boldsymbol{v_{rel} = \sqrt{2}v_0\sqrt{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}}$, $\boldsymbol{d_{rel}(\tau) = \sqrt{2}v_0\sqrt{1+\cos(\alpha_1+\alpha_2)}\,\tau}$

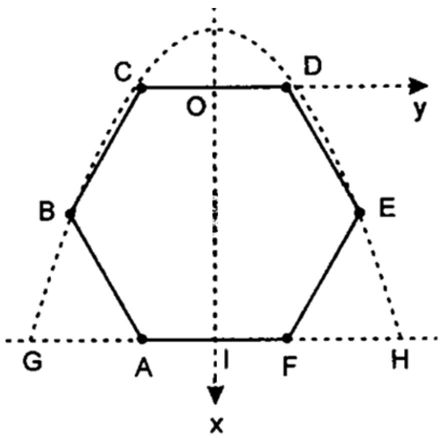
19. (Simulado IME – 1ª fase)

Uma partícula é lançada do ponto G. Sua trajetória toca os pontos B, C, D e E de um hexágono regular de lado a. Qual é o alcance horizontal GH?



a) $GH = \sqrt{6}a$ b) $GH = \sqrt{7}a$ c) $GH = \sqrt{5}a$ d) $GH = \sqrt{11}a$ e) $GH = \sqrt{13}a$

Comentários:



Considere a origem no ponto médio do segmento CD, como mostrado na figura. Considere uma parábola da forma:

$$y^2 = m(x+b),$$

Devemos encontrar m e b. Os pontos D e E, pertencem a parábola:

$$D = \left(0, \frac{a}{2}\right) \text{ e } E = \left(\frac{\sqrt{3}a}{2}, a\right)$$

Substituindo na equação da parábola, temos:

$$m = \frac{\sqrt{3}a}{2}, b = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Assim, a equação da parábola assume a forma:

$$y^2 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\left(x + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right)$$

Para o alcance GH, a coordenada $H = \left(OI, \frac{R}{2}\right) = \left(\sqrt{3}a, \frac{R}{2}\right)$. Substituindo na parábola:

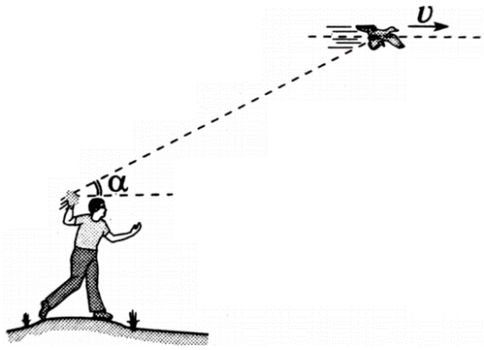
$$y^2 = \frac{\sqrt{3}a}{2}\left(\sqrt{3}a + \frac{a}{2\sqrt{3}}\right) \Rightarrow y^2 = \frac{3a^2}{2} + \frac{a^2}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{7a^2}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2}a$$

$$y = \frac{R}{2} \Rightarrow R = \sqrt{7}a \therefore \boxed{R = GH = \sqrt{7}a}$$

GABARITO: B

20. (Simulado ITA 1ª fase)

Um pato voa horizontalmente com velocidade constante e uma caçadora inexperiente lhe lança uma pedra. No instante do lançamento, a direção da pedra está orientada para o pato, como na figura abaixo. Após ser lançada a pedra, o tempo para a pedra atingir o pato é de:



A ( ) $t = \frac{v}{g} tg\ \alpha$

B ( ) $t = \frac{2v}{g} tg\ \alpha$

C ( ) $t = \frac{2v}{g} tg\ \alpha$

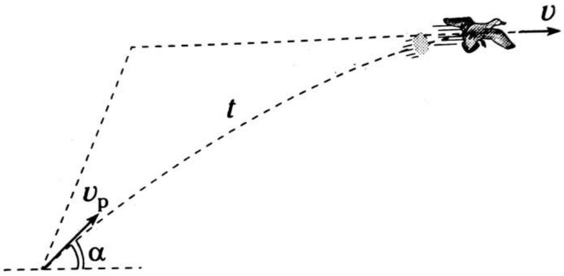
D ( ) $t = \frac{4v}{g} tg\ \alpha$

E ( ) $t = \frac{5v}{g} tg\ \alpha$

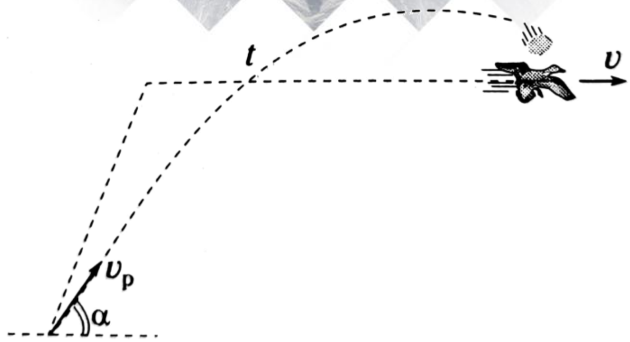
Comentários:

Ao lançar a pedra com uma inclinação α, a pedra irá descrever um arco de parábola e o pato irá continuar seu movimento retilíneo uniforme na horizontal. Note que o pato pode ser atingido pela pedra em duas situações:

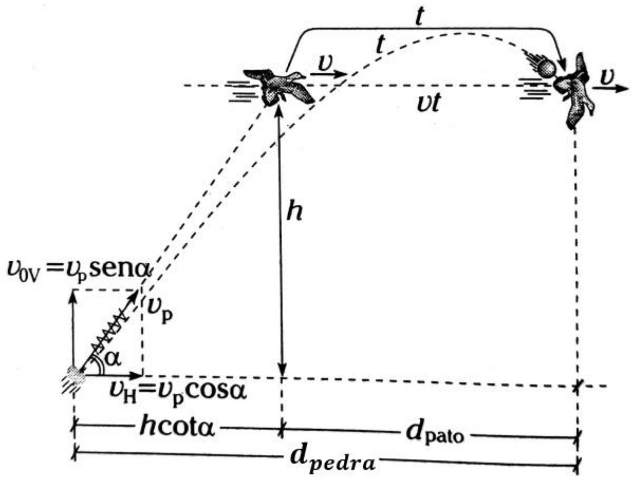
1) Pedra no movimento ascendente:



2) Pedra no movimento descendente:



Vale ressaltar que cada um dos casos dependerá das velocidades: v_p, v e α. Como nosso problema é calcular o tempo t, podemos considerar qualquer um dos casos. Vamos tomar o segundo caso.



De acordo com a figura logo acima, os deslocamentos horizontais são dados por:

$$d_{pedra} = d_{pato} + h \cdot cotg\ \alpha$$

O pato realiza um MRU na horizontal. Então:

$$v_H \cdot t = v \cdot t + h \cdot cotg\ \alpha$$

$$v_p \cdot \cos\alpha \cdot t = v \cdot t + h \cdot cotg\ \alpha\ (eq. 1)$$

Na vertical, temos que:

$$h = v_p \cdot sen\ \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}$$

Substituindo h na equação 1, temos:

$$v_p \cdot \cos\alpha \cdot t = v \cdot t + \left(v_p \cdot sen\ \alpha \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2}\right) \cdot cotg\ \alpha$$

$$v_p \cdot \cos\alpha = v + v_p \cdot sen\ \alpha \cdot \underbrace{cotg\ \alpha}_{\frac{\cos\alpha}{sen\ \alpha}} - \frac{g}{2} \cdot t \cdot cotg\ \alpha$$

$$v = \frac{g}{2} \cdot t \cdot cotg\ \alpha \Rightarrow \boxed{t = \frac{2v}{g} \cdot tg\ \alpha}$$

Gabarito: B

13. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Estudamos a última parte da Cinemática de uma partícula. Fomos mais afundo em composição de movimento e em lançamento oblíquo. No ITA ainda não caiu uma questão abordando parábola de segurança, mas nada impede de aparece no nosso vestibular. Estude bem essa aula pois o ITA gosta dessa abordagem da Cinemática e as questões costumam possuir um elevado grau de dificuldade.

No capítulo de Lançamento Oblíquo, abordamos o assunto parábola de segurança. Embora não tenha caído algo substancial na prova, este assunto possui grandes chances de aparecer. Por isso, pegamos vários exercícios do Problemas Selecionados de Física Elementar, mas apenas aqueles exercícios que têm chances de cair. Cuidado para não perder o foco!

Na nossa jornada até a aprovação vamos passar por diversos tópicos especiais, eles fazem parte da nossa trajetória, é inevitável. Muitas vezes é difícil a compreensão, são assuntos complexos, mas se esforce para entender o que for abordado no nosso material. Muito cuidado para não ficar preso em questões de outros livros desses assuntos, livros que estão fora do foco dos nossos vestibulares.

Conte comigo nessa caminhada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

14. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p.

15. Versão da aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	14/06/2021