Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá,

Nesta aula, estudaremos matrizes e determinantes. Veremos os conceitos básicos de matrizes e, principalmente, os teoremas e propriedades para calcularmos o valor dos seus determinantes.

As matrizes são muito úteis na resolução de sistemas lineares e este será o conteúdo da nossa próxima aula. Se você já tem familiaridade com matrizes, faça uma leitura rápida da teoria e vá para a lista de exercícios. O importante é ganhar velocidade e estar com os conceitos bem fixados.

Se você ainda não se sente confortável com esse assunto, leia a teoria com calma e tente entender os conceitos básicos para saber resolver os exercícios do seu vestibular.

Qualquer dúvida, não hesite em nos procurar. Estamos aqui para auxiliá-lo.

Bons estudos.

/victorso   /profvictorso   /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Matrizes

1.1. Noção Básica

Uma matriz é um agrupamento de informação no formato de tabela com linhas e colunas.

Veja alguns exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 18 & \pi \\ 3 & 200 & 1{,}72 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

Repare que podemos representar uma matriz usando os parênteses “( )“ ou os colchetes “[ ]“.

Como podemos ver, uma matriz é formada por elementos dispostos em linhas e colunas. Cada elemento possui um “endereço” que é composto de duas informações: a qual linha e a qual coluna ele pertence, nessa ordem.

As linhas são contadas de cima para baixo e as colunas, da esquerda para a direita. Vamos tomar a seguinte matriz A como exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 18 & \pi \\ 3 & 200 & 1{,}72 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Nessa matriz, temos 2 linhas e 4 colunas:

$$\begin{array}{cl} A = \begin{pmatrix} 10 & 8 & 18 & \pi \\ 3 & 200 & 1{,}72 & \sqrt{2} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow \text{1ª linha} \\ \leftarrow \text{2ª linha} \end{array} \\ \text{1ª col} \quad \text{2ª col} \quad \text{3ª col} \quad \text{4ª col} & \end{array}$$

No exemplo, o elemento da primeira linha e da terceira coluna é indicado por a_{13} e seu valor é 18, ou ainda, $a_{13} = 18$.

Podemos dizer que a matriz A tem dimensão $2x4$ e ela pode ser representada pelas seguintes notações:

$$A_{2x4}$$

Ou

$$A = (a_{ij}), i \in \{1,2\}\ e\ j \in \{1,2,3,4\} \text{ ou simplesmente } A = (a_{ij})_{2x4}$$

a_{ij} é o elemento da matriz da linha i e coluna j. Usamos a letra minúscula para representar os elementos da matriz.

1.2. Lei de Formação

Aprendemos em aulas passadas que podemos calcular os termos de uma progressão com base em uma fórmula chamada lei de formação. De modo análogo, podemos calcular cada termo de uma matriz através de uma lei de formação. Vejamos como isso acontece:

$$A = (a_{ij})_{2x2} \text{ tal que } a_{ij} = i + j$$

Essa fórmula nos diz que a matriz A é do tipo $2x2$, então, ela possui duas linhas e duas colunas:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Com base na lei de formação, vamos calcular o valor de cada termo:

$$a_{ij} = i + j$$
$$a_{11} = 1 + 1 = 2$$
$$a_{12} = 1 + 2 = 3$$
$$a_{21} = 2 + 1 = 3$$
$$a_{22} = 2 + 2 = 4$$

Assim, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1.3. Tipos de matrizes

Quando dizemos que uma matriz é do tipo A_{mxn} ou que $A = (a_{ij})_{mxn}$ significa que a matriz A tem m linhas e n colunas. Podemos dizer também que a matriz A tem dimensão $m\ x\ n$.
Vejamos, agora, alguns tipos muito frequentes nas provas.

1.3.1. Matriz linha

Matriz com apenas uma linha, do tipo $A = (a_{ij})_{1xn}$, com $i = 1$ e $j \in \{1,2, \dots, n\}$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & \alpha & \sqrt{5} & \frac{1}{3} & -10 \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{A = (a_{ij})_{1x6}}$$

1.3.2. Matriz coluna

Matriz com apenas uma coluna, do tipo $A = (a_{ij})_{mx1}$, com $i \in \{1,2, \dots, m\}$ e $j = 1$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \\ \log(7) \\ e \\ 0 \\ 1 + x \end{bmatrix}$$
$$A = (a_{ij})_{7x1}$$

1.3.3. Matriz quadrada

Matriz com o mesmo número de linhas e de colunas, do tipo $A = (a_{ij})_{mxm}$, ou ainda, de ordem m.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & c & \Delta \\ \varepsilon & \varphi & \gamma & \eta \\ \iota & j & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \Omega & \pi \end{bmatrix} = (a_{ij})_{4x4}$$

Embora alguns autores usem como sinônimos as palavras tipo, dimensão e ordem de uma matriz, é mais indicado a distinção tipo e dimensão para matrizes retangulares e ordem para matrizes quadradas.

Diagonais da matriz quadrada

As matrizes quadradas têm duas diagonais: a principal e a secundária.

A diagonal principal é o conjunto de todos os elementos de uma matriz quadrada em que $i = j$, ou seja, em que o número da linha do elemento é igual ao número da coluna.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & c & \Delta \\ \varepsilon & \varphi & \gamma & \eta \\ \iota & j & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \Omega & \pi \end{bmatrix}$$

Elementos da diagonal principal : $(\alpha, \varphi, \kappa, \pi)$

A diagonal secundária é o conjunto de todos os elementos em que $i + j = n + 1$, ou seja, em que o número da linha do elemento somado ao da coluna seja igual à ordem da matriz mais um.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & c & \Delta \\ \varepsilon & \varphi & \gamma & \eta \\ \iota & j & \kappa & \lambda \\ \mu & \nu & \Omega & \pi \end{bmatrix}$$

Elementos da diagonal secundária : (Δ, γ, j, μ)

1.3.4. Matriz retangular

Uma matriz é dita retangular quando o número de linhas é diferente do número de colunas, ou seja, uma matriz do tipo $A = (a_{ij})_{mxn}$ em que $m \neq n$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{3x2}$$

1.3.5. Matriz nula

A matriz nula possui todos seus elementos iguais a zero.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{3x4}$$

1.3.6. Matriz diagonal

Uma matriz é considerada diagonal se, além de ser quadrada, todos os elementos em que $i \neq j$ são iguais a zero, ou seja, somente os elementos da diagonal principal, $i = j$ são não nulos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{4x4}$$

1.3.7. Matriz identidade (matriz unidade)

Essa matriz é importantíssima em nosso estudo e o motivo disso nós veremos ainda nesta aula.

A matriz identidade tem as seguintes características, obrigatoriamente:

- ✓ é quadrada;
- ✓ é diagonal;
- ✓ tem todos os elementos da diagonal principal iguais a 1.

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que o símbolo da matriz identidade, ou matriz unidade, é I e o índice que o acompanha é a ordem da matriz. No caso do exemplo, I_3 significa matriz identidade de ordem 3.

1.3.8. Matriz triangular

Uma matriz A é considerada triangular se todos os elementos acima ou abaixo de sua diagonal principal são nulos.

Se os elementos não nulos estiverem acima da diagonal principal, a matriz A é dita matriz triangular superior.

Se os elementos não nulos estiverem abaixo da diagonal principal, a matriz A é dita matriz triangular inferior.

$$Matriz\ triangular\ superior \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

$$Matriz\ triangular\ inferior \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 9 & 8 & -4 \end{bmatrix}$$

1.3.9. Matriz oposta

A oposta da matriz A é a matriz $-A$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Oposta\ de\ A = -A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

1.4. Igualdade entre Matrizes

Duas matrizes são consideradas iguais se têm o mesmo tipo; além disso, seus elementos são idênticos e estão nas mesmas posições.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 7 & 5 & 1 \\ 4 & 9 & -8 \end{bmatrix}$$

Mesma ordem, mesmos elementos e mesmas posições de elementos. Matrizes iguais.

$$\begin{bmatrix} a & x \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & x \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Mesma ordem, mesmos elementos, mas em posições diferentes. Matrizes diferentes.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ordens diferentes. Mesmo duas matrizes identidade, são matrizes diferentes. $I_3 \neq I_2$.

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 4 & 3 \end{bmatrix} ? \begin{bmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Mesma ordem, mesmas posições. Caso $x = 9$, as matrizes serão iguais. Caso $x \neq 9$, as matrizes serão diferentes.

1.5. Operações com Matrizes

É comum, ao iniciarmos o estudo de um conjunto diferente, entendermos como funcionam as operações fundamentais dentro desse universo.

Veremos, nos próximos passos, como aplicar as operações básicas das matrizes.

1.5.1. Adição

Antes de sabermos como, precisamos saber quando.

Só podemos somar duas matrizes se elas tiverem a mesma dimensão. Atenção, não é necessário que elas sejam quadradas, só de mesma dimensão.

Assim, seria impossível somarmos uma matriz A_{2x3} com uma matriz B_{3x5}.

Quando duas matrizes A e B são de mesma dimensão, podemos efetuar a soma, que é definida somando os elementos de A e de B de mesma posição. Acompanhe.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 8 & 6 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}$$

Como as matrizes A e B são de mesma dimensão, $3x2$, podemos efetuar a soma.

$$A+B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 8 & 6\\ 7 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1+1 & 4+2\\ 8+(-3) & 6+6\\ 7+5 & 5+(-9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 6\\ 5 & 12\\ 12 & -4\end{bmatrix}$$

1.5.2. Subtração

A subtração é feita de maneira similar à soma. As matrizes devem ser de mesma dimensão e a subtração é feita elemento a elemento das matrizes. Veja.

Dadas as mesmas matrizes que utilizamos no exemplo da soma.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 8 & 6\\ 7 & 5\end{bmatrix}$$

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}$$

Façamos a matriz $A-B$.

$$A-B=\begin{bmatrix}-1 & 4\\ 8 & 6\\ 7 & 5\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 6\\ 5 & -9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-1 & 4-2\\ 8-(-3) & 6-6\\ 7-5 & 5-(-9)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1-1 & 4-2\\ 8+3 & 6-6\\ 7-5 & 5+9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 11 & 0\\ 2 & 14\end{bmatrix}$$

1.5.3. Multiplicação

A multiplicação entre matrizes é um ponto chave nesta aula. Muito do que veremos adiante depende do produto matricial.

Podemos multiplicar uma matriz por um escalar (um número real) ou por outra matriz.

Multiplicação de um escalar por uma matriz ou vice-versa

A multiplicação de uma matriz por um escalar é relativamente simples, basta multiplicarmos todos os elementos da matriz pelo escalar.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 23 & 4\\ -1 & 0 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

$$3\cdot A=3\cdot\begin{bmatrix}1 & 5 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 23 & 4\\ -1 & 0 & 9 & 8\end{bmatrix}$$

Desse modo, fazemos a distributiva do número escalar 3 para todos os elementos da matriz A.

$$3\cdot A=\begin{bmatrix}3\cdot 1 & 3\cdot 5 & 3\cdot 8 & 3\cdot 3\\ 3\cdot(-4) & 3\cdot 6 & 3\cdot 23 & 3\cdot 4\\ 3\cdot(-1) & 3\cdot 0 & 3\cdot 9 & 3\cdot 8\end{bmatrix}$$

$$3\cdot A=\begin{bmatrix}3 & 15 & 24 & 9\\ -12 & 18 & 69 & 12\\ -3 & 0 & 27 & 24\end{bmatrix}$$

Multiplicação entre duas matrizes

Para multiplicar matrizes, temos que associar a linha da primeira matriz com coluna da segunda.

Daremos início ao produto $A\cdot B$ com a primeira linha da matriz A e a primeira coluna da matriz B. Esse resultado será colocado na primeira linha e primeira coluna da matriz $A\cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \cdot 100 + 6 \cdot 300 + 3 \cdot 50 & & & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Prosseguindo, faremos a primeira linha de A com a segunda coluna de B. O resultado vai para a primeira linha e segunda coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 1 \cdot 150 + 6 \cdot 350 + 3 \cdot 70 & & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Primeira linha de A com terceira coluna de B. O resultado vai para a primeira linha e terceira coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 1 \cdot 180 + 6 \cdot 500 + 3 \cdot 80 & \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & \\ & & & \end{bmatrix}$$

Primeira linha de A com quarta coluna de B. O resultado vai para a primeira linha e quarta coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 1 \cdot 250 + 6 \cdot 500 + 3 \cdot 60 \\ & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ & & & \end{bmatrix}$$

Terminamos aqui a primeira linha da matriz A. Passemos, então para a segunda.

Segunda linha de A com primeira coluna de B. O resultado vai para a segunda linha e primeira coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 1 \cdot 100 + 0 \cdot 300 + 1 \cdot 50 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & & & \end{bmatrix}$$

Segunda linha de A com segunda coluna de B. O resultado vai para a segunda linha e segunda coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 1 \cdot 150 + 0 \cdot 350 + 1 \cdot 70 & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & & \end{bmatrix}$$

Segunda linha de A com terceira coluna de B. O resultado vai para a segunda linha e terceira coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & 1 \cdot 180 + 0 \cdot 500 + 1 \cdot 80 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & 260 & \end{bmatrix}$$

Quase acabando, chegamos ao nosso último passo.

Segunda linha de A com quarta coluna de B. O resultado vai para a segunda linha e quarta coluna de $A \cdot B$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 100 & 150 & 180 & 250 \\ 300 & 350 & 500 & 500 \\ 50 & 70 & 80 & 60 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & 260 & 1 \cdot 250 + 0 \cdot 500 + 1 \cdot 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & 260 & 310 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, o produto das matrizes é

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2.050 & 2.460 & 3.420 & 3.430 \\ 150 & 220 & 260 & 310 \end{bmatrix}$$

Consequências da multiplicação entre duas matrizes

Ao multiplicarmos duas matrizes, utilizamos cada linha da primeira matriz com cada coluna da segunda.

Isso só pode ser feito se o número de elementos de cada linha da primeira matriz for igual ao número de elementos de cada coluna da segunda matriz.

Muito bem.

E quantos elementos tem cada linha da primeira matriz? Exatamente o número de colunas da mesma matriz. O número de colunas de uma matriz indica, também, quantos elementos cada linha contém.

Quantos elementos cada coluna da segunda matriz possui? Exatamente o número de linhas que a mesma matriz possui. O número de linhas de uma matriz indica, também, quantos elementos cada coluna contém.

Desse modo, só podemos efetuar o produto entre matrizes se houver essa compatibilidade, caso contrário o produto é impossível.

Uma regra prática que pode ajudar bastante nessa análise é a seguinte.

Se queremos multiplicar a matriz A pela matriz B, devemos analisar as dimensões de ambas.

$$A_{mxn} \cdot B_{pxq}$$

Se n e p forem iguais, o produto é possível; se forem diferentes, não existe o produto $A \cdot B$.

Outra coisa interessante é que o tamanho da matriz resultante é determinado pelas dimensões de A e B.

Lembra-se de que, ao relacionarmos a segunda linha da primeira matriz com a quarta coluna da segunda matriz o resultado deveria ser colocado na segunda linha com a quarta coluna da matriz resultante do produto?

Pois bem, essa relação é o que determina o tamanho da matriz resultante e a regra prática também explicita essa informação.

Uma vez sendo possível o produto $A \cdot B$ com $n = p$, as dimensões da matriz-produto são dadas por

$$A_{mxn} \cdot B_{nxq}$$

Podemos dizer então que

$$A_{mxn} \cdot B_{nxq} = A \cdot B_{mxq}$$

Vejamos alguns exemplos.

$$A_{2x3} \cdot B_{3x4} \rightarrow \text{é } possível \rightarrow A \cdot B_{2x4}$$

$$A_{3x1} \cdot B_{2x5} \rightarrow \text{não é } possível$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \pi \\ 2 \end{bmatrix}$$

Como $A = \left(a_{ij}\right)_{3x3}$ e $B = \left(b_{ij}\right)_{2x1}$, o produto $A \cdot B$ não é possível.

Essa característica gera outra consequência, acompanhe.

Existe o produto matricial entre a matriz A_{2x3} e a matriz B_{2x2}?

Provavelmente você respondeu que não, pois o número de colunas de A não é compatível com o número de linhas de B.

$$A_{2x3} \cdot B_{2x2} \rightarrow \text{não é } possível$$

Outra pergunta. Existiria o produto $B \cdot A$?

Vejamos.

$$B_{2x2} \cdot A_{2x3} \rightarrow \text{é } possível \rightarrow B \cdot A_{2x3}$$

Temos uma conclusão importante para tirar daqui: os produtos $A \cdot B$ e $B \cdot A$ são diferentes!

Não existe a propriedade comutativa para o produto entre matrizes, tome muito cuidado com isso.

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Multiplicação da matriz A pela matriz identidade e vice-versa

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

Por essa característica de não mudar a matriz A nos produtos, a matriz I, além de matriz identidade e matriz unidade, é chamada de elemento neutro da multiplicação do conjunto das matrizes.

1.6. Propriedades Operatórias

1.6.1. Adição

Para A, B e C matrizes $m\ x\ n$, temos as seguintes propriedades:

P1) $\boldsymbol{A + B = B + A}$

P2) $\boldsymbol{(A + B) + C = A + (B + C)}$

P3) $\boldsymbol{A + 0 = A}$

P4) $\boldsymbol{A + (-A) = 0}$

1.6.2. Multiplicação de matrizes por escalar

As seguintes propriedades são válidas para a multiplicação de matrizes por um número real escalar. Sejam A e B matrizes quaisquer do tipo $m\ x\ n$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

P5) $\boldsymbol{(\alpha \cdot \beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A)}$

P6) $\boldsymbol{\alpha(A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B}$

P7) $\boldsymbol{(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A}$

1.6.3. Multiplicação de matrizes

Para a multiplicação de matrizes, temos as seguintes propriedades:

P8) $\boldsymbol{(AB)C = A(BC)}$**, para** $\boldsymbol{A_{mxn}, B_{nxp}}$ **e** $\boldsymbol{C_{pxq}}$

P9) $\boldsymbol{A(B + C) = AB + AC}$**, para** $\boldsymbol{A_{mxn}, B_{nxp}}$ **e** $\boldsymbol{C_{nxp}}$

P10) $\boldsymbol{(A + B)C = AC + BC}$**, para** $\boldsymbol{A_{mxn}, B_{mxn}}$ **e** $\boldsymbol{C_{nxp}}$

P11) $\boldsymbol{\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)}$**, para** $\boldsymbol{A_{mxn}, B_{nxp}}$ **e** $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}$

1.7. Matriz Transposta

1.7.1. Definição

A transposta de uma matriz A, simbolizada por A^t ou A^T, é a matriz cujas linhas de A foram transformadas em colunas de A^t.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

Formalmente:

Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{mxn}$, a sua transposta é dada por $A^t = (a'_{ji})_{nxm}$ tal que $a'_{ji} = a_{ij}$ para todo i e j.

1.7.2. Matriz Simétrica

A matriz A é considerada simétrica se

$$A^t = A$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 3 & 4 \\ 3 & b & 5 \\ 4 & 5 & c \end{bmatrix} = A^t$$

1.7.3. Matriz Antissimétrica

A matriz A é considerada antissimétrica se

$$A^t = -A$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

Note que a matriz antissimétrica deve possuir a diagonal principal nula.

1.7.4. Propriedades da matriz transposta

P12) $\boldsymbol{(A^t)^t = A}$

P13) $\boldsymbol{(A + B)^t = A^t + B^t}$

P14) $\boldsymbol{(\alpha A)^t = \alpha A^t}$

P15) $\boldsymbol{(AB)^t = B^t A^t}$

Aplicação:

Vamos ver com um exemplo a veracidade das propriedades acima:

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, então:

P12) $A^t = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \Rightarrow (A^t)^t = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

P13) $A + B = \begin{bmatrix} a + x & b + y \\ c + z & d + w \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (A + B)^t = \begin{bmatrix} a + x & c + z \\ b + y & d + w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} = A^t + B^t$$

P14) Para $k \in \mathbb{R}$:

$$k \cdot A = \begin{bmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{bmatrix} \Rightarrow (k \cdot A)^t = \begin{bmatrix} ka & kc \\ kb & kd \end{bmatrix} = k \cdot \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = k \cdot A^t$$

P15) $AB = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow (AB)^t = \begin{bmatrix} ax + bz & cx + dz \\ ay + bw & cy + dw \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & z \\ y & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = B^t A^t$$

1.8. Traço de uma Matriz

1.8.1. Definição

O traço de uma matriz é a soma dos elementos da sua diagonal principal.

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

o traço da matriz A, $tr\ A$, é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$
$$tr\ A = 1 + 1 + 13$$
$$tr\ A = 15$$

Usando termos genéricos, para uma matriz A de ordem n:

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

1.8.2. Propriedades

P16) $\boldsymbol{trA^t = trA}$
P17) $\boldsymbol{tr(\alpha A) = \alpha \cdot trA}$
P18) $\boldsymbol{tr(A + B) = trA + trB}$
P19) $\boldsymbol{tr(AB) = tr(BA)}$

1.9. Matrizes Especiais

Neste tópico, veremos algumas definições importantes para a resolução das questões dos vestibulares. Preste atenção nas definições de matriz inversa, matriz ortogonal e matriz de rotação, elas já foram cobradas em provas anteriores!

Considere A uma matriz quadrada de ordem n.

1.9.1. Matriz inversa

A inversa da matriz A é denotada por A^{-1}. A matriz A é inversível se, e somente se, ela satisfazer a seguinte relação:

$$\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I_n}$$

Se ela não for inversível, ela é classificada como matriz singular.

*Atenção! Alguns exercícios usam o termo invertível no lugar de inversível.

1.9.2. Matriz ortogonal

Uma matriz quadrada A de ordem n é ortogonal se, e somente se:

i. A é inversível.
ii. A inversa de A coincide com sua transposta.

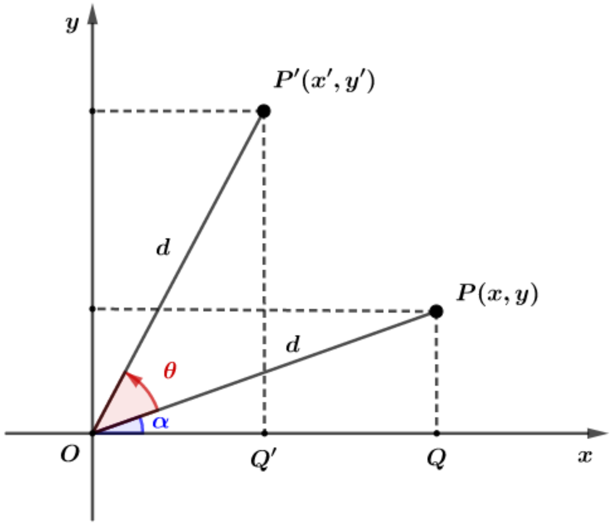
$$\boxed{A^{-1} = A^t}$$

Também é válida a seguinte relação:

$$\boxed{AA^T = A^TA = I_n}$$

1.9.3. Matriz de rotação

Dado um ponto $P(x, y)$ no plano $\mathbb{R}^2$, podemos rotacionar este ponto em torno da origem $(0, 0)$ sob um ângulo $\theta > 0$ no sentido anti-horário usando uma matriz de rotação. Vamos encontrar essa matriz.



Vamos escrever o ponto $P(x, y)$ na forma matricial:

$$P = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Seja $P'(x', y')$ o ponto obtido pela rotação de $P(x, y)$:

$$P' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Observando o triângulo $P'OQ'$ da figura e usando as relações trigonométricas, podemos escrever:

$$x' = d \cdot \cos(\alpha + \theta) \ \ (I)$$
$$y' = d \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \theta) \ \ (II)$$

Do ΔPOQ:

$$x = d \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{d} \ \ (III)$$
$$y = d \cdot \operatorname{sen} \alpha \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha = \frac{y}{d} \ \ (IV)$$

Aplicando a fórmula de adição de arcos nas equações (I) e (II):

$$x' = d \cdot (\cos \alpha \cos \theta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \theta)$$
$$y' = d \cdot (\operatorname{sen} \alpha \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \alpha)$$

Substituindo as identidades (III) e (IV) nas equações acima:

$$x' = d \cdot \left(\frac{x}{d} \cos \theta - \frac{y}{d} \operatorname{sen} \theta\right)$$
$$\Rightarrow x' = x \cos \theta - y \operatorname{sen} \theta$$
$$y' = d \cdot \left(\frac{y}{d} \cos \theta + \operatorname{sen} \theta \frac{x}{d}\right)$$
$$\Rightarrow y' = x \operatorname{sen} \theta + y \cos \theta$$

Desse modo, podemos escrever as relações acima na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A matriz de rotação no sentido anti-horário é dada por M:

$$\boxed{M_{anti-horário} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}}$$

Se quisermos rotacionar no sentido horário basta inserir $-\theta$ no lugar de θ:

$$M_{horário} = \begin{bmatrix} \cos -\theta & -\operatorname{sen} -\theta \\ \operatorname{sen} -\theta & \cos -\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

1.9.4. Matriz nilpotente

A é uma matriz nilpotente se existir um número $p \in \mathbb{Z}_+$ tal que:

$$\boxed{A^p = 0}$$

Se p_0 é o menor inteiro positivo que satisfaz essa relação, dizemos que A é uma matriz nilpotente de índice p_0.

1.9.5. Matriz idempotente

A é uma matriz idempotente se satisfazer a seguinte relação:

$$\boxed{A^2 = A}$$

Consequentemente:

$$\boxed{A^3 = A^4 = \cdots = A^n = A}$$

2. Determinante de uma Matriz

2.1. Definição

A primeira coisa que temos que distinguir é que o determinante de uma matriz A, simbolizado por $\det(A)$, é um número, não uma matriz. Além disso, só podemos calcular o determinante de matrizes quadradas.

Mas que número é esse?

Aqui nós inverteremos um pouco a didática.

Primeiro, vamos aprender a calcular o determinante de matrizes de várias ordens. Só na próxima aula, quando estivermos estudando os sistemas, teremos condições de entender de onde esses números saíram. Por isso, tenha paciência que chegaremos lá, ok?

2.1.1. Determinante de matriz de ordem **1**

Existe matriz de ordem 1?

Pois é, existe sim. É uma matriz que só tem uma linha e uma coluna.

E o determinante desse tipo de matriz é imediato, veja.

$$A_{1x1} = [a] \rightarrow \det(A) = a$$

Ou seja, o determinante de uma matriz de ordem 1 é o próprio elemento da matriz. Veja o exemplo.

$$A_{1x1} = [3] \rightarrow \det(A) = 3$$

Essa foi fácil, não? Vamos à próxima.

2.1.2. Determinante de matriz de ordem **2**

Para o determinante de uma matriz de ordem 2 já temos que fazer alguns cálculos.

Dada a matriz A tal que

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

O determinante de A, $\det(A)$, é dado por uma subtração entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária.

Como é que é?

Calma, vamos esquematizar essa definição no corpo da matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária Diagonal principal

Desse modo, o determinante da matriz A, $\det(A)$, que também pode ser representado pela matriz encerrada por duas barras paralelas, é dado por

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Vejamos um exemplo.

Dada a matriz A, calcule seu determinante.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Explicitando os elementos das diagonais, temos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2)$$
$$\det(A) = 1 + 6$$
$$\det(A) = 7$$

Uma matriz é escrita entre colchetes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Um determinante pode ser escrito pela sua expressão ou pela matriz encerrada por duas barras paralelas:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

Matrizes e determinantes não são sinônimos.

Faça a distinção na hora da escrita, principalmente em questões abertas.

2.1.3. Determinante de matriz de ordem **3**

Para calcular o determinante de uma matriz de ordem 3, utilizaremos a regra de Sarrus, como detalhada a seguir.

Peguemos, por exemplo, a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

O primeiro passo para calcularmos o determinante dessa matriz é duplicarmos a primeira e a segunda colunas de A.

$$\det(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{matrix}$$

O próximo passo é fazer os produtos dos elementos nas direções tanto da diagonal principal quanto da diagonal secundária.

Embora possamos fazer ambos os produtos simultaneamente, separaremos em duas partes para maior clareza.

Façamos primeiro a parte positiva na direção da diagonal principal.

Multiplicaremos os elementos de cada diagonal e somaremos esses produtos. Todo esse resultado será a parte positiva de nosso determinante.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{matrix}$$

$$\left[1 \cdot (-2) \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot (-1) \cdot 4\right]$$
$$[-6 + 0 - 4]$$
$$[-10]$$
$$-10$$

E, agora, a parte negativa, na direção da diagonal secundária.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ \frac{1}{5} & 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{matrix}$$

$$-\left[1 \cdot (-2) \cdot \frac{1}{5} + 1 \cdot 0 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) \cdot 3\right]$$
$$-\left[-\frac{2}{5} + 0 + 0\right]$$
$$-\left[-\frac{2}{5}\right]$$
$$+\frac{2}{5}$$

O determinante, então, será a soma desses resultados parciais.

$$\det(A) = -10 + \frac{2}{5}$$
$$\det(A) = \frac{-50 + 2}{5}$$
$$\det(A) = -\frac{48}{5}$$

Uma outra forma de memorizar a regra de Sarrus é através da seguinte figura:

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-$$

Ao invés de duplicar a primeira e a segunda coluna de A, podemos multiplicar os elementos de acordo com a trajetória das linhas indicadas:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{32} \cdot a_{21} \cdot a_{13}$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

Usamos as setas apenas para nos guiarmos. Quando resolvermos os exercícios de determinantes, faremos o cálculo com apenas uma tabela do seguinte modo:

$$+ \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad -$$

Um pouco confuso, não? Com o tempo, nos acostumaremos a resolver desse modo.

2.2. Teorema de Laplace

Este teorema é muito útil para resolver as questões de determinantes das provas e ela costuma ser cobrada com bastante frequência. Vejamos os conceitos iniciais.

2.2.1. Conceitos iniciais

Até aqui vimos como calcular o determinante de matrizes de ordem 1, 2 e 3. Existem diversos métodos para se calcular o determinante de uma matriz, mas, antes de aprendê-los, veremos a definição de menor complementar e cofator de um elemento matricial.

Menor complementar de um elemento

O menor complementar de um elemento matricial a_{ij}, representado por D_{ij}, é o determinante de uma submatriz que conseguimos eliminando a linha e a coluna do elemento a_{ij}.

Vejamos como obter o menor complementar de um elemento na matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

Digamos que precisemos do menor complementar do elemento a_{21}, ou seja, precisamos calcular D_{21}

Precisamos eliminar, então, a linha e a coluna de a_{21} e calcular o determinante da matriz que sobra.

Podemos ver que o elemento $a_{21} = 3$ está, como indicado, na segunda linha e na terceira coluna.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

Dessa forma,

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 13 \end{vmatrix}$$

$$D_{21} = 2 \cdot 13 - 5 \cdot 4$$

$$D_{21} = 26 - 20$$

$$D_{21} = 6$$

TOME NOTA!

Todo elemento de uma matriz quadrada tem menor complementar.

Cofator (ou complemento algébrico) de um elemento

O cofator de um elemento a_{ij}, representado por A_{ij}, é dado pela seguinte fórmula.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

Considerando a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 7 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

do item anterior e já tendo calculado o menor complementar D_{21}, vamos aproveitá-lo e calcular o cofator A_{21}.

$$D_{21} = 6$$
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$
$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21}$$
$$A_{21} = (-1)^{3} \cdot 6$$
$$A_{21} = (-1) \cdot 6$$
$$A_{21} = -6$$

Assim, o menor complementar de a_{21} é $A_{21} = -6$.

2.2.2. Matriz dos cofatores

Na seção anterior vimos como calcular o cofator de um número, dado pela fórmula

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}.$$

Pois bem, a matriz dos cofatores, simbolizada por A', é uma matriz formada pelos cofatores de todos os elementos de A.

Vejamos, então, como é a matriz de cofatores A'. Seja A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot D_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot D_{12} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 3 = -3$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot D_{21} = (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) = 1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot D_{22} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 = 1$$

Dessa forma, a matriz de cofatores de A, ou A', é

$$A' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Também podemos representar a matriz dos cofatores de A por $cof(A)$.

2.2.3. Teorema fundamental de Laplace

Este teorema nos permite calcular o determinante de uma matriz A de ordem maior ou igual a 2. Ela afirma que o valor do determinante de uma matriz A é igual a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

Seja A uma matriz quadrada de ordem n, pelo teorema de Laplace:

I) Escolhendo-se a linha i (fixamos i e variamos j):

$$\boxed{\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}}$$

II) Escolhendo-se a coluna j (fixamos j e variamos i):

$$\boxed{\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}}$$

Exemplo de aplicação:

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 17 & 39 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -9 & 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) Escolhendo a linha 1 da matriz A, o seu determinante é dado por:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 17 & 39 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -9 & 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

$$\det A = 10 \cdot A_{11} + 15 \cdot A_{12} + 17 \cdot A_{13} + 39 \cdot A_{14}$$

b) Escolhendo a coluna 2 da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 17 & 39 \\ 5 & 0 & 3 & 2 \\ -9 & 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{42} \cdot A_{42}$$

$$\det A = 15 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{42}$$

$$\Rightarrow \det A = 15 \cdot A_{12}$$

Podemos escolher qualquer fila para calcular o determinante, pois o resultado é o mesmo. Note que no caso (b), precisamos calcular apenas o cofator A_{12}. Desse modo, para facilitar os cálculos, devemos escolher a fila com a maior quantidade de zeros possível.

2.3. Propriedades dos Determinantes

Estudamos, até agora, o que são as matrizes, as principais operações com matrizes e o determinante de uma matriz.

Estudaremos, agora, algumas propriedades que podem ser úteis na resolução dos exercícios.

Essas propriedades até podem ser deduzidas na hora, mas há um ganho considerável de tempo de resolução quando se tem contato com elas previamente.

2.3.1. Fator comum em uma fila da matriz

Entenderemos aqui por fila uma linha ou uma coluna de uma matriz.

Ao multiplicarmos uma fila de uma matriz por uma constante k, o determinante dessa matriz também fica multiplicado pela mesma constante k.

Façamos a demonstração para uma matriz genérica $2x2$, embora a propriedade seja válida para todas as matrizes quadradas (só têm determinantes as matrizes quadradas, lembra?).

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Vimos, há algumas páginas, que

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c.$$

Multiplicando uma de suas filas, digamos a segunda coluna, por uma constante k, teremos, como resultado, a matriz A'.

$$A' = \begin{bmatrix} a & k \cdot b \\ c & k \cdot d \end{bmatrix}$$

Note que multiplicamos apenas uma fila, não a matriz inteira.

Vejamos o que acontece com o determinante de A'.

$$\det(A') = \begin{vmatrix} a & k \cdot b \\ c & k \cdot d \end{vmatrix} = a \cdot k \cdot d - k \cdot b \cdot c$$

Podemos colocar a constante C em evidência.

$$\det(A') = a \cdot k \cdot d - k \cdot b \cdot c = k \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$$
$$\det(A') = k \cdot (a \cdot d - b \cdot c)$$
$$\det(A') = k \cdot \det(A)$$

Exemplo:

Vamos calcular o valor do determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 & 27 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Note que a primeira linha da matriz desse determinante possui o fator comum 9, podemos colocá-lo em evidência e, assim, facilitamos o seu cálculo:

$$\begin{vmatrix} 9 & 27 & 27 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot (5 + 12 + 27 - 30 - 6 - 9) = 9 \cdot (-1) = -9$$

2.3.2. Fator comum na matriz

Ao multiplicarmos uma matriz de ordem n por uma constante $k \in \mathbb{R}$, o seu determinante fica multiplicado por k^n. Essa situação é parecida com a propriedade anterior, porém, todas as filas ficam multiplicadas pela constante k e, por isso, uma matriz multiplicada por k resulta em um determinante multiplicado por $\underbrace{k \cdot k \cdot \ldots \cdot k}_{n\ vezes}$:

$$\boxed{\det(k \cdot A) = k^n \det A}$$

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 8 & 2 & 10 \\ 8 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot (2 + 40 + 8 - 8 - 5 - 16) = 8 \cdot 21 = 168$$

2.3.3. Teorema de Bézout

Quando trocamos duas filas de lugar, o determinante é afetado de tal modo que o determinante da nova matriz A' é o oposto do determinante de A, veja.

$$\det(A') = -\det(A)$$

Essa propriedade é conhecida como teorema de Bézout.

ESCLARECENDO!

Ao trocar duas filas de uma matriz de lugar, o determinante muda de sinal.

Trocou de novo? Muda de sinal de novo.

2.3.4. Filas paralelas iguais ou proporcionais

Quando duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) são iguais ou proporcionais, o determinante da matriz é zero.

2.3.5. Combinação linear de filas

Dizemos que uma fila $F1$ é uma combinação linear de outras $(F2, F3, F4 \ldots)$ quando

$$F1 = a \cdot F2 + b \cdot F3 + c \cdot F4 + \cdots$$

2.3.6. Matriz triangular

O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto de todos os elementos da sua diagonal principal. Seja A uma matriz triangular de ordem n:

$$\boxed{\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}}$$

2.3.7. Matriz transposta

O determinante de uma matriz quadrada de ordem n é igual ao determinante da sua transposta:

$$\boxed{\det A = \det A^t}$$

2.3.8. Decomposição em soma

Se uma matriz for da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & b_{1j} + c_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} + c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & b_{3j} + c_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} + c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Podemos decompor o cálculo do seu determinante em duas outras:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & b_{1j}+c_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j}+c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & b_{3j}+c_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj}+c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & b_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & b_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & c_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & c_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*Essa propriedade também é válida se tivermos uma linha que possa ser decomposta em soma.

2.3.9. Teorema de Cauchy

O teorema de Cauchy afirma que a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz A pelos respectivos cofatores de uma fila paralela é igual a 0.

Vejamos sua aplicação. Seja a matriz A de ordem n representado abaixo:

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Escolhendo-se os elementos da primeira linha e multiplicando-os pelos cofatores dos elementos da última linha, ordenadamente, temos:

$$a_{11} \cdot A_{n1} + a_{12} \cdot A_{n2} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{nn} = 0$$

A soma algébrica acima é equivalente a calcular o determinante da seguinte matriz:

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & & a_{3j} & & a_{3n} \\ & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$$

Aplicando-se o teorema de Laplace na última linha, encontramos:

$$\det A' = a_{11} \cdot A_{n1} + a_{12} \cdot A_{n2} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{nn}$$

Como temos duas filas paralelas iguais, o determinante de A' é igual a zero:

$$\det A' = a_{11} \cdot A_{n1} + a_{12} \cdot A_{n2} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{nn} = 0$$

E, assim, verificamos o teorema de Cauchy.

2.3.10. Teorema de Jacobi

Atenção neste teorema! Ele é muito usado para resolver as questões envolvendo determinantes!

O teorema de Jacobi afirma que multiplicando-se uma fila de uma matriz por um número qualquer e adicionando o resultado obtido a uma fila paralela qualquer, o valor do seu determinante não se altera.

Exemplo:

Vamos calcular o valor do seguinte determinante:

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, podemos multiplicar a primeira linha por (-2) e somá-la à segunda linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 10 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} \quad x(-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 - 1 \cdot 2 & 4 - 2 \cdot 2 & 6 - 3 \cdot 2 & 10 - 4 \cdot 2 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix}$$

Agora, vamos multiplicar a primeira linha por (-3) e somá-la à terceira linha:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 8 & 12 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} \quad x(-3)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix}$$

Usando o teorema de Laplace na terceira linha, encontramos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 10 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix}$$

$$\det M = (-1) \cdot A_{33}$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 10 & 12 & 14 \end{vmatrix} = 40 - 24 = 16$$

$$\Rightarrow \det M = -16$$

O teorema de Jacobi é muito útil para manipular as matrizes dos determinantes. Ele nos permite simplificar o cálculo dos determinantes e também ajustar as matrizes de um modo que possibilite aplicar outras propriedades dos determinantes.

2.3.11. Teorema de Binet

O teorema de Binet diz que, para duas matrizes A e B, quadradas e de mesma ordem, vale

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B).$$

Consequência do teorema de Binet

Nós já vimos que

$$A \cdot A^{-1} = I$$

Então,

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Pelo teorema de Binet, podemos dizer, também, que

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(I) = 1$$

Considerando apenas a parte destacada da equação.

$$\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = 1$$

Dividindo ambos os termos da equação por $\det(A)$, temos.

$$\frac{\det(A) \cdot \det(A^{-1})}{\det(A)} = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\frac{\cancel{\det(A)} \cdot \det(A^{-1})}{\cancel{\det(A)}} = \frac{1}{\det(A)}$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

Que é uma relação importante no desenvolvimento de alguns exercícios.

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

2.3.12. Matriz de Vandermonde

A matriz de Vandermonde é toda matriz de ordem $n \geq 2$ do tipo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Note que os elementos de cada coluna dessa matriz formam uma PG cujo primeiro termo é 1. Indicamos pela letra V o determinante da matriz de Vandermonde. Esse valor é dado por:

$$\boxed{V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \prod_{i>j} (a_i - a_j)}$$

O determinante V é igual ao produto de todas as diferenças possíveis entre os elementos característicos com a condição de que o índice i seja maior que o índice j.

1. (ITA/2003) Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Comentários

Note que se multiplicarmos a primeira, segunda, terceira e quarta linha por a, b, c e d, respectivamente, obtemos o fator comum $abcd$ na primeira coluna:

$$\frac{abcd}{abcd}\cdot\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{abcd}\cdot\begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \frac{abcd}{abcd}\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Lembrando que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Assim, obtemos o determinante de uma matriz de Vandermonde, esse valor é dado por:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

2.3.13. Matrizes semelhantes

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n. Dizemos que a matriz A é semelhante à matriz B se, e somente se, existe uma matriz inversível P tal que satisfaça a seguinte relação:

$$\boxed{A = P^{-1}BP}$$

Se essa relação estiver escrita na prova, podemos afirmar que A e B são matrizes semelhantes.

Vejamos o que acontece quando aplicamos o determinante nessa igualdade:

$$\det A = \det(P^{-1}BP) \xRightarrow[Teorema\ de\ Binet]{} \det A = \det P^{-1} \cdot \det B \cdot \det P$$

Sabemos que $\det P^{-1} = \frac{1}{\det P}$, substituindo essa identidade na igualdade acima, obtemos:

$$\det A = \frac{1}{\cancel{\det P}} \cdot \det B \cdot \cancel{\det P}$$

$$\boxed{\det A = \det B}$$

Portanto, se A e B são matrizes semelhantes, os determinantes delas são iguais.

Outra informação interessante que podemos extrair é a seguinte:

Seja λ um número real e I a matriz identidade de ordem n, usando as propriedades matriciais e a definição de matriz inversa, podemos escrever:

$$\lambda I = \lambda \underbrace{(P^{-1}P)}_{I} = P^{-1}\lambda P \quad (I)$$

Vamos somar (I) nos dois lados da seguinte igualdade:

$$A = P^{-1}BP \xRightarrow{+P^{-1}\lambda P} A + \underbrace{P^{-1}\lambda P}_{\lambda I} = P^{-1}BP + P^{-1}\lambda P \Rightarrow A + \lambda I = P^{-1}(BP + \lambda P)$$

Lembrando que λ é um número real, para fatorar a expressão à direita, devemos escrever λI:

$$\Rightarrow A + \lambda I = P^{-1}(B + \lambda I)P$$

Agora, aplicando o determinante:

$$\det(A + \lambda I) = \det[P^{-1}(B + \lambda I)P]$$

$$\boxed{\det(A + \lambda I) = \det(B + \lambda I)}$$

2.4. Regra de Chió

A regra de Chió é uma consequência do teorema de Jacobi. Ela permite reduzir a ordem de um determinante de ordem $n \geq 2$ em uma unidade. Para usar a regra de Chió, a matriz deve possuir $a_{11} = 1$. Vejamos sua definição.

Seja uma matriz M de ordem $n \geq 2$ representada abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o determinante de M. Aplicando o teorema de Laplace, temos:

$x(-a_{1n})$

$\vdots$

$x(-a_{13})$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Laplace na primeira linha, temos:

$$\det M' = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n} - a_{31}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}$$

$\det M'$ é um determinante de ordem $n - 1$. Essa é a regra de Chió.

Vamos ver na prática como aplicamos a regra de Chió. Seja M a matriz abaixo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 15 & 11 \end{bmatrix}$$

Como $a_{11} = 1$, podemos aplicar a regra de Chió para calcular $\det M$.

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 8 & 10 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 15 & 11 \end{vmatrix}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 5 - 3 \cdot 2 & 8 - 3 \cdot 3 & 10 - 3 \cdot 4 \\ -1 - 2 \cdot 2 & 2 - 2 \cdot 3 & 5 - 2 \cdot 4 \\ 2 - 4 \cdot 2 & 15 - 4 \cdot 3 & 11 - 4 \cdot 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -5 & -4 & -3 \\ -6 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\det M = (-1)(-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \\ -6 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

Aplicando novamente a regra de Chió:

$$\det M = \begin{vmatrix} 4 - 5 \cdot 1 & 3 - 5 \cdot 2 \\ 3 - (-6) \cdot 1 & -5 - (-6) \cdot 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -7 \\ 9 & 7 \end{vmatrix} = -7 - (-63) = 56$$

2.5. Cálculo da Matriz Inversa pelo Determinante

Veremos aqui um método para calcular a inversa de uma matriz usando o seu determinante. Preliminarmente, precisamos ver a definição de matriz adjunta e o lema de Cramer.

2.5.1. Matriz adjunta

A matriz adjunta de A, representada por $\bar{A}$ ou $adj(A)$, é a transposta da matriz de cofatores, ou seja,

$$\bar{A} = (A')^t$$

Sendo a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

temos

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dessa forma,

$$\bar{A} = (A')^t$$
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t$$
$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

que é a matriz adjunta de A.

2.5.2. Lema de Cramer

Se A é uma matriz quadrada de ordem n e I_n é a matriz identidade de ordem n, então:

$$\boxed{A \cdot \bar{A} = \bar{A} \cdot A = \det A \cdot I_n}$$

2.5.3. Inversa de uma matriz

Se A é uma matriz quadrada de ordem n e $\det A \neq 0$, então, A é inversível e sua fórmula é dada por:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}}$$

Portanto, para que exista a matriz inversa, precisamos ter, obrigatoriamente, $\det A \neq 0$, caso contrário, não poderíamos fazer a divisão e, consequentemente, não existiria A^{-1}.

Só é inversível a matriz em que $\det A \neq 0$.

Vejamos um exemplo:

Vamos calcular a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

O seu determinante é dado por:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$
$$\det(A) = 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3$$
$$\det(A) = 0 + 3$$

$$\det(A) = 3$$

Devemos encontrar a matriz adjunta de A, calculando a matriz dos cofatores, encontramos:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma:

$$\bar{A} = (A')^t$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^t$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular a inversa de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} . \bar{A}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} . 0 & \frac{1}{3} . 1 \\ \frac{1}{3} . (-3) & \frac{1}{3} . 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

2.6. Cálculo do Determinante de Matrizes Infinitas

Esse tópico é para os alunos que vão prestar o vestibular do IME. Essa banca adora cobrar o cálculo do determinante de matrizes infinitas. Para resolvê-las precisamos encontrar um padrão no determinante. Vamos ver uma questão do IME e aprender com o passo-a-passo da sua resolução.

(IME/2005) Calcule o determinante da matriz $n \ x \ n$ em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\underbrace{\left.\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}\right\} n \ linhas}_{n \ colunas}$$

Resolução:

Vamos definir como Δ_n o determinante de ordem n representado acima. Para resolver essa questão, podemos usar o teorema de Laplace na primeira linha e obter:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = (b^2+1)\cdot D_{11} + b\cdot D_{12}$$

D_{11} e D_{12} são os menores complementares dos elementos $a_{11} = b^2+1$ e $a_{12} = b$, respectivamente.

Pela definição de menor complementar, temos:

a) Encontrando o menor complementar para $a_{11} = b^2+1$:

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{ordem\ n}$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}}$$

Note que o determinante acima é igual ao determinante Δ_n reduzido de uma ordem. Então:

$$\Rightarrow D_{11} = \Delta_{n-1}$$

b) Encontrando o menor complementar para $a_{12} = b$:

$$\Delta_n = \underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{ordem\ n}$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2}\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{ordem\ n-1}$$

Podemos aplicar o teorema de Laplace na primeira coluna do determinante acima:

$$D_{12} = -b\cdot \underbrace{\begin{vmatrix} b^2+1 & b & \cdots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & \cdots & b & b^2+1 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-2}}$$

$$\Rightarrow D_{12} = -b\cdot\Delta_{n-2}$$

Substituindo D_{11} e D_{12} na equação de Δ_n, obtemos:

$$\Delta_n = (b^2+1)\cdot\Delta_{n-1} - b^2\cdot\Delta_{n-2}$$

Assim, encontramos a seguinte relação de recorrência:

$$\Delta_n - (b^2+1)\cdot\Delta_{n-1} + b^2\cdot\Delta_{n-2} = 0$$

Agora, temos diversos modos de resolvê-la. Veja:

Método 1) Vamos encontrar um padrão no determinante do problema.

Para $n = 1$, temos:

$$\Delta_1 = |b^2+1|$$
$$\Delta_1 = b^2+1$$

Para $n = 2$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b^2+1 & b \\ b & b^2+1 \end{vmatrix}$$
$$\Delta_2 = b^4 + b^2 + 1$$

Para $n = 3$:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 \\ b & b^2+1 & b \\ 0 & b & b^2+1 \end{vmatrix}$$
$$\Delta_3 = b^6 + b^4 + b^2 + 1$$

Note que Δ_1, Δ_2 e Δ_3 podem ser vistos como a soma de uma PG de razão b^2 cujo primeiro termo é $a_1 = 1$. Aplicando-se a fórmula da soma da PG nesses determinantes, obtemos:

$$\Delta_1 = b^2 + 1 = \frac{b^4-1}{b^2-1}$$
$$\Delta_2 = b^4 + b^2 + 1 = \frac{b^6-1}{b^2-1}$$
$$\Delta_3 = b^6 + b^4 + b^2 + 1 = \frac{b^8-1}{b^2-1}$$

Perceba o padrão do valor dos determinantes. Vamos fazer a seguinte suposição e provar que ela é válida por PIF:

$$\Delta_n = \frac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}$$

1º) Para $k = 1$, sabemos que ela é válida.

2º) Supondo que seja válida para

$$\Delta_k = \frac{b^{2k+2}-1}{b^2-1} \text{ e } \Delta_{k-1} = \frac{b^{2k}-1}{b^2-1}$$

Precisamos provar que

$$\Delta_{k+1} = \frac{b^{2k+4}-1}{b^2-1}$$

Usando a equação de recorrência, temos:

$$\Delta_{k+1} = (b^2+1)\cdot\Delta_k - b^2\cdot\Delta_{k-1}$$

Substituindo os valores de Δ_k e Δ_{k-1} na equação:

$$\Delta_{k+1} = (b^2+1)\cdot\left(\frac{b^{2k+2}-1}{b^2-1}\right) - b^2\cdot\left(\frac{b^{2k}-1}{b^2-1}\right)$$
$$\Delta_{k+1} = \frac{(b^{2k+4} - b^2 + b^{2k+2} - 1 - b^{2k+2} + b^2)}{b^2-1}$$
$$\Delta_{k+1} = \frac{b^{2k+4}-1}{b^2-1}$$

Portanto, essa fórmula é válida. Logo, a solução do determinante é dada por:

$$\Delta_n = \frac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}$$

Método 2) Partindo da fórmula de recorrência:

$$\Delta_n = (b^2 + 1) \cdot \Delta_{n-1} - b^2 \cdot \Delta_{n-2}$$

Vamos fatorar os termos:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = b^2 \cdot (\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2})$$

Podemos alterar o valor de n da relação acima e encontrar:

$$\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} = b^2 \cdot (\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3})$$
$$\Delta_{n-2} - \Delta_{n-3} = b^2 \cdot (\Delta_{n-3} - \Delta_{n-4})$$
$$\vdots$$
$$\Delta_4 - \Delta_3 = b^2 \cdot (\Delta_3 - \Delta_2)$$
$$\Delta_3 - \Delta_2 = b^2 \cdot (\Delta_2 - \Delta_1)$$

Sabemos que $\Delta_1 = b^2 + 1$ e $\Delta_2 = b^4 + b^2 + 1$. Então:

$$\Delta_2 - \Delta_1 = b^4$$
$$\Delta_3 - \Delta_2 = b^2 \cdot (\Delta_2 - \Delta_1) = b^6$$
$$\Delta_4 - \Delta_3 = b^2 \cdot (\Delta_3 - \Delta_2) = b^8$$
$$\vdots$$

Note que as diferenças entre os determinantes consecutivos formam uma PG de razão b^2 cujo primeiro termo é b^4:

$$\underbrace{(\Delta_2 - \Delta_1, \Delta_3 - \Delta_2, \dots, \Delta_n - \Delta_{n-1})}_{n-1\ termos} \quad PG\ de\ razão\ b^2$$

Aplicando-se a soma da PG, obtemos:

$$\Delta_n - \Delta_{n-1} + \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} + \dots + \Delta_2 - \Delta_1 = \frac{b^4((b^2)^{n-1} - 1)}{b^2 - 1}$$
$$\Delta_n - \underbrace{\Delta_1}_{b^2+1} = \frac{b^{2n+2} - b^4}{b^2 - 1}$$
$$\Delta_n = \frac{b^{2n+2} - b^4}{b^2 - 1} + b^2 + 1 = \frac{b^{2n+2} - b^4 + b^4 - 1}{b^2 - 1}$$
$$\therefore \Delta_n = \frac{b^{2n+2} - 1}{b^2 - 1}$$

Método 3) Esse método envolve assuntos que você irá aprender quando iniciar seus estudos na graduação e, por isso, pode ser que você não entenda. Mas, não se preocupe! Apenas tente decorar as etapas envolvidas. Ele pode ser útil na sua prova e é sempre bom ter uma ferramenta a mais para resolver as questões.

Vamos encontrar a solução da recorrência:

$$\Delta_n - (b^2 + 1) \cdot \Delta_{n-1} + b^2 \cdot \Delta_{n-2} = 0$$

Devemos encontrar a sua equação característica, para isso, faça:

$$\underbrace{\Delta_n}_{x^2} - (b^2 + 1) \cdot \underbrace{\Delta_{n-1}}_{x^1} + b^2 \cdot \underbrace{\Delta_{n-2}}_{x^0} = 0$$

Equação característica:

$$x^2 - (b^2 + 1)x + b^2 = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau. Vamos calcular o valor do discriminante:

$$\Delta = (b^2 + 1)^2 - 4b^2 = b^4 - 2b^2 + 1 = (b^2 - 1)^2$$

Como o enunciado afirma que $b^2 \neq 1$, temos $\Delta = (b^2 - 1)^2 > 0$. Logo, a equação característica possui 2 raízes distintas. Então, a solução da recorrência é dada pela seguinte equação:

$$\Delta_n = c_1 \cdot x_1^n + c_2 \cdot x_2^n$$

Onde x_1, x_2 são as raízes da equação característica e c_1, c_2 são constantes.
Vamos calcular as raízes:

$$x_{1,2} = \frac{(b^2+1) \pm \sqrt{(b^2-1)^2}}{2} = \frac{b^2+1 \pm (b^2-1)}{2}$$

$$x_1 = b^2 \text{ e } x_2 = 1$$

Substituindo na fórmula de Δ_n:

$$\Delta_n = c_1 \cdot b^{2n} + c_2$$

Agora, precisamos encontrar o valor das constantes c_1 e c_2.
Para $n = 1$, temos:

$$\underbrace{\Delta_1}_{b^2+1} = c_1 \cdot b^2 + c_2$$

$$c_1 \cdot b^2 + c_2 = b^2 + 1$$

Para $n = 2$:

$$\underbrace{\Delta_2}_{b^4+b^2+1} = c_1 \cdot b^4 + c_2$$

$$c_1 \cdot b^4 + c_2 = b^4 + b^2 + 1$$

Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1 \cdot b^2 + c_2 = b^2 + 1 \ (I) \\ c_1 \cdot b^4 + c_2 = b^4 + b^2 + 1 \ (II) \end{cases}$$

Fazendo $(II) - (I)$:

$$c_1(b^4 - b^2) = b^4 \Rightarrow c_1 = \frac{b^2}{b^2-1}$$

Substituindo o valor de c_1 em (I):

$$\frac{b^2}{b^2-1} \cdot b^2 + c_2 = b^2 + 1 \Rightarrow c_2 = b^2 + 1 - \frac{b^4}{b^2-1} = -\frac{1}{b^2-1}$$

Desse modo, obtemos:

$$\Delta_n = \left(\frac{b^2}{b^2-1}\right) \cdot b^{2n} + \left(-\frac{1}{b^2-1}\right)$$

$$\Delta_n = \frac{b^{2n+2}-1}{b^2-1}$$

5. Questões de Provas Anteriores

ITA

2. (ITA/2020)

Considere o conjunto $M(n, k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aleatoriamente matrizes $L \in M(3, 1)$ e $R \in M(4, 2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

c) $\frac{4}{15}$.

d) $\frac{13}{30}$.

e) $\frac{29}{30}$.

3. (ITA/2019)

Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n\ x\ n$ inversiveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|det(A)| = 1$.

II. $A^T = A^{-1}$.

III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

4. (ITA/2018)

Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) -96.

b) -85.

c) 63.

d) 99.

e) 115.

5. (ITA/2018)

Sejam A e B matrizes quadradas $n\ x\ n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n\ x\ n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;

II. $I_n - A$ é inversível;

III. $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

a) Somente I.

b) Somente II.

c) Somente III.

d) Somente I e II.

e) Todas.

6. (ITA/2017)

Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $det(A^2 + A)$ é

a) 144.

b) 180.

c) 240.

d) 324.

e) 360.

7. (ITA/2016)

Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

8. (ITA/2016)

Seja A a matriz de ordem $3x2$, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

9. (ITA/2015)

Seja $A = \left(a_{ij}\right)_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1), 1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. trA é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas I e III.

e) I, ll e III.

10. (ITA/2014)

Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversivel, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $1/3$

b) $1/2$

c) $2/3$

d) $4/5$

e) $5/4$

11. (ITA/2014)

Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas I e II.

c) Apenas I e III.

d) Apenas II e III.

e) Todas.

12. (ITA/2014)

Considere a equação $A(t) \cdot X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$.

b) $-2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$.

c) $0, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

d) $0,2\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

e) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$.

13. (ITA/2013)

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $1/6$

b) $\sqrt{6}/6$

c) $\sqrt[3]{36}/6$

d) 1

e) $\sqrt{216}$

14. (ITA/2012)

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1 + x_1, 1 + x_2, \dots, 1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $1/2$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

15. (ITA/2011)

Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

16. (ITA/2010)

Sobre os elementos da matriz

$$A=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente, então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12

b) $-\frac{1}{72}$ e -12

c) $-\frac{1}{72}$ e 12

d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

17. (ITA/2008)

Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes $2x2$ que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

18. (ITA/2008)

Sejam A e C matrizes $n\;x\;n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n

b) $2 \cdot \left(\frac{3^n}{5^2}\right)$

c) $1/5$

d) $\frac{3^{n-1}}{5}$

e) $5 \cdot 3^{n-1}$

19. (ITA/2006)

Sejam as matrizes

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A+B)^{-1}$.

20. (ITA/2006)

Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a

a) 0

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

21. (ITA/2005)

Sejam A e B matrizes $2x2$ tais que $AB = BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1} = B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

22. (ITA/2004)

Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $nxn, n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se, e somente se, A possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2}+1$ e a segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

23. (ITA/2004)

Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$$

Assinale a opção correta.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.

b) Apenas para $x > 0$, A possui inversa.

c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.

d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

24. (ITA/2004)

Se A é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^t$.

II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \dots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

25. (ITA/2003)

Sejam A e P matrizes $n\ x\ n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$.

Das afirmações:

I. B^t é inversível e $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

II. Se A é simétrica, então B também o é.

III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

é(são) verdadeira(s):

a) todas.

b) apenas I.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) apenas II e III.

26. (ITA/2003)

Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

27. (ITA/2002)

Seja A uma matriz real $2x2$. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais $2x1$ não-nulas, tais que $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula $2x1$, então $a + b$ vale

a) 0.

b) 1.

c) -1.

d) $1/2$.

e) $-1/2$.

28. (ITA/2002)

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$.

Então, $[(A+B)^t]^2$ é igual a

a) $(A+B)^2$.

b) $2(A^t \cdot B^t)$.

c) $2(A^t + B^t)$.

d) $A^t + B^t$.

e) $A^t B^t$.

29. (ITA/2002)

Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} cos25° & sen65° \\ sen120° & cos390° \end{bmatrix}$$

O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) 1

e) 0

30. (ITA/2001)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

31. (ITA/2001)

Sejam A e B matrizes $n\,x\,n$, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

(I) $AB + BA^t$ é simétrica.

(II) $(A + A^t + B)$ é simétrica.

(III) ABA^t é simétrica.

temos que:

a) apenas (I) é verdadeira.

b) apenas (II) é verdadeira.

c) apenas (III) é verdadeira.

d) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

e) todas as afirmações são verdadeiras.

32. (ITA/2000)

Considere as matrizes mostradas na figura adiante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se X é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a

a) 35.

b) 17.

c) 38.

d) 14.

e) 29.

33. (ITA/2000)

Sendo x um número real positivo, considere as matrizes mostradas na figura a seguir

$$A = \begin{pmatrix} \log_{\frac{1}{3}} x & \log_{\frac{1}{3}} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{\frac{1}{3}} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{\frac{1}{3}} x & -4 \end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB) = (AB)^t$ é igual a

a) $\frac{25}{3}$

b) $\frac{28}{3}$

c) $\frac{32}{3}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{25}{2}$

34. (ITA/2000)

Considere as matrizes reais mostradas na figura adiante

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

a) $21/8$

b) $91/9$

c) $36/9$

d) $21/16$

e) $91/36$

IME

35. (IME/2020)

Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = P\,B\,P^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.

b) Dadas $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

36. (IME/2019)

Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

37. (IME/2018)

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1 = x$ e razão r, com $x, r \in \mathbb{R}$. O determinante de

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

é

a) 0

b) $x^4 \cdot r$

c) $x^4 \cdot r^3$

d) $x \cdot r^4$

e) $x \cdot r^3$

38. (IME/2017)

Seja M uma matriz real $2x2$. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.

Encontre todas as matrizes simétricas $2x2$ reais na qual $M^2 = f(M)$.

39. (IME/2017)

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

Obs.: $\det(X)$ denota o determinante da matriz X

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

40. (IME/2016)

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

Observação: I é a matriz identidade $2x2$.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$

41. (IME/2015)

Sejam $S = a + b + c$ e $P = a \cdot b \cdot c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2+(b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2+b^2 & (a+b)^2+c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

42. (IME/2015)

Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

43. (IME/2014)

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$, em que a, b e c são números reais positivos satisfazendo $abc = 1$. Sabe-se que $A^T A = I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3ª ordem. O produto dos possiveis valores de $a^3 + b^3 + c^3$ é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

44. (IME/2013)

Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

45. (IME/2012)

São dadas as matrizes quadradas inversiveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível.

Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Obs.: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) -1 e 3

b) 1 e -3

c) 2 e 3

d) 1 e 3

e) -2 e -3

46. (IME/2012)

Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

47. (IME/2010)

Demonstre que a matriz $\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$, onde $x, y, z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs.: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

48. (IME/2010)

Considere o determinante de uma matriz de ordem n, definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é

a) 59049

b) 48725

c) 29524

d) 9841

e) 364

49. (IME/2009)

Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

a) -81

b) -27

c) -3

d) 27

e) 81

50. (IME/2008)

Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

a) $1{,}0$

b) π

c) $10{,}0$

d) $11{,}0$

e) $11{,}1$

51. (IME/2007)

Seja a matriz D dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ sen(\hat{P}) & sen(\hat{Q}) & sen(\hat{R}) \end{bmatrix}$$

na qual p, q e r são lados de um triângulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$. O valor do determinante de D é

a) -1

b) 0

c) 1

d) π

e) $p + q + r$

52. (IME/2007)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

53. (IME/2006)

Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Determine D_n em função de n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

54. (IME/2004)

Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

55. (IME/2002)

Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R]=\begin{bmatrix}\cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0\\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

56. (IME/2000)

Calcule o determinante:

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1&1&1&1\\1&3&1&1&1&1&1\\1&1&5&1&1&1&1\\1&1&1&7&1&1&1\\1&1&1&1&9&1&1\\1&1&1&1&1&11&1\\1&1&1&1&1&1&13\end{vmatrix}$$

6. Gabarito

ITA

2. b
3. a
4. a
5. e
6. a
7. c
8. $\mathbf{a)}\ B=\begin{bmatrix}a & a-1 & 1-a\\ d & 1+d & -d\end{bmatrix}$ $\mathbf{b)}$ **Sim. Exemplo:** $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$
9. e
10. a
11. c
12. b
13. c
14. Ordem 5
15. $M=\begin{pmatrix}x&0\\0&x\end{pmatrix}$, com $x\in\mathbb{R}$
16. c
17. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sqrt{1-b^2}&b\\b&-\sqrt{1-b^2}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\sqrt{1-b^2}&b\\b&\sqrt{1-b^2}\end{pmatrix}, b\in[-1;1]$
18. d
19. $c_{34}=-\frac{2}{11}$
20. d
21. Demonstração

22. d
23. a
24.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

25. d
26. $(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$
27. a
28. c
29. e
30. a
31. e
32. a
33. b
34. a

IME

35. a) Demonstração b) C e D são inversíveis.
36. e
37. e
38. $M=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ **ou** $M=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$
39. d
40. e
41. $2S^3P$
42. a
43. Questão anulada
44. c
45. d
46. $x=-(a+b+c)$ ou $x=a+b-c$ ou $x=a-b+c$ ou $x=-a+b+c$
47. Demonstração
48. c
49. e
50. e
51. b
52. $\det A^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$
53. $D_n=n+1$
54. $n=3$
55. Prova
56. $D=46080$

7. Questões de Provas Anteriores Comentadas

ITA

2. (ITA/2020)

Considere o conjunto $M(n, k)$ de todas as matrizes quadradas de ordem $n \times n$, com exatamente k elementos iguais a 1, e os demais iguais a 0 (zero). Escolhendo aleatoriamente matrizes $L \in M(3,1)$ e $R \in M(4,2)$, a probabilidade de que $L^2 = 0$ e $R^2 = 0$ é igual a

a) $\frac{1}{3}$.

b) $\frac{1}{5}$.

c) $\frac{4}{15}$.

d) $\frac{13}{30}$.

e) $\frac{29}{30}$.

Comentários

I) Analisemos as matrizes $L \in M(3,1)$. Como $n = 3$ e $k = 1$, temos uma matriz de ordem $3x3$ e um único elemento igual a 1. Temos, por exemplo:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que nesse caso, se o elemento 1 estiver na diagonal principal, $L^2 \neq 0$. Portanto, das 9 posições possíveis, podemos escolher apenas 6 (excluindo-se a diagonal principal) para inserir o elemento 1. Assim, temos:

$$P(L^2 = 0) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

II) $R \in M(4,2)$, temos matrizes de ordem $4x4$ e 2 elementos 1. Como analisamos no item I, se tivermos um elemento na diagonal principal, a matriz $R^2 \neq 0$. Então, para o primeiro elemento 1, temos que ele pode escolher 12 das 16 posições possíveis (excluindo-se a diagonal principal), logo, essa probabilidade é

$$\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

Para o segundo elemento 1, devemos analisar do seguinte modo. Seja R definido por (r_{ij}), assim, temos que os elementos de R^2 serão:

$$(R^2)_{ij} = \sum_{k=1}^{4} \underbrace{r_{ik}}_{varia\ coluna} \cdot \underbrace{r_{kj}}_{varia\ linha}$$

Então, para obtermos uma matriz nula desse produto, temos que o segundo 1 não pode ocupar a diagonal principal (4 casos) e também não pode ocupar as posições que fazem com que $r_{ik} \cdot r_{kj} = 1$, isso ocorre quando a linha do segundo elemento 1 é a coluna do primeiro (3 casos excluindo-se a diagonal principal) e quando a coluna do segundo elemento 1 é a linha do primeiro elemento (2 casos), logo, das 15 posições possíveis para o segundo elemento, temos:

$$P(R^2 = 0) = \frac{3}{4} \cdot \frac{15 - 4 - 3 - 2}{15} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{15} = \frac{3}{10}$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P(L^2 = 0) \cdot P(R^2 = 0) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{5}$$

Gabarito: "b".

---

3. (ITA/2019)

Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem $n\ x\ n$ inversiveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|det(A)| = 1$.

II. $A^T = A^{-1}$.

III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

Comentários

I. Verdadeira.

Como os elementos da matriz A e os de sua inversão são todos inteiros, temos que $\det A$ e $\det A^{-1}$ são ambos inteiros. Sabendo que:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Temos, necessariamente, $\det A = \pm 1$ e isso implica $|\det A| = 1$.

II. Falsa.

Temos uma afirmação muito genérica. Normalmente, afirmações desse tipo são falsas, vamos encontrar um contra-exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$, temos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$ e $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Note que $|\det A| = 1$.

III. Falsa.

Novamente, vamos encontrar um contra-exemplo:

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, temos $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Logo, $A + A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e essa não é uma matriz diagonal.

Gabarito: "a".

---

4. (ITA/2018)

Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

a) -96.

b) -85.

c) 63.

d) 99.

e) 115.

Comentários

O enunciado nos dá a soma dos n termos da progressão, podemos encontrar os termos da PA e sua razão:

$$S_n = 2n^2 + 5n$$
$$n = 1 \Rightarrow S_1 = a_1 = 2 \cdot (1)^2 + 5 \cdot 1 = 7$$
$$n = 2 \Rightarrow S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot (2)^2 + 5 \cdot 2 = 18 \Rightarrow a_2 = 18 - 7 = 11$$
$$r = a_2 - a_1 = 11 - 7 = 4$$

Vamos substituir os termos da PA e calcular o determinante da matriz:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix}$$

Para facilitar os cálculos, vamos simplificar o determinante. Lembrando que aplicando-se o Teorema de Jacobi, o determinante não se altera, então, temos:

Multiplicando a segunda coluna por (-1) e somando à terceira:

$$\begin{vmatrix} 7 & 11 & 15 \\ 19 & 23 & 27 \\ 33 & 35 & 39 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 11 & 4 \\ 19 & 23 & 4 \\ 33 & 35 & 4 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & 1 \\ 19 & 23 & 1 \\ 33 & 35 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira coluna por (-1) e somando à segunda:

$$4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 11 & 1 \\ 19 & 23 & 1 \\ 33 & 35 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 19 & 4 & 1 \\ 33 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 19 & 2 & 1 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por (-1) e somando à segunda e à terceira, encontramos:

$$8 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 19 & 2 & 1 \\ 33 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & 0 \\ 26 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot (-12) = -96$$

Gabarito: "a".

---

5. (ITA/2018)

Sejam A e B matrizes quadradas $n \ x \ n$ tais que $A + B = A \cdot B$ e I_n a matriz identidade $n \ x \ n$. Das afirmações:

I. $I_n - B$ é inversível;

II. $I_n - A$ é inversível;

III. $A \cdot B = B \cdot A$.

é (são) verdadeira(s)

a) Somente I.

b) Somente II.

c) Somente III.

d) Somente I e II.

e) Todas.

Comentários

Sabemos que uma matriz é inversível se, e somente se, o seu determinante é diferente de zero. Então, analisando a afirmação I e II, se $\det(I_n - B) \neq 0$ e $\det(I_n - A) \neq 0$, temos que $I_n - B$ e $I_n - A$ são inversíveis.

O enunciado diz que:

$$A + B = AB$$

Vamos manipular a equação de modo a encontrar $I - A$ e $I - B$:

$$A + B = AB \Rightarrow A - AB + B = 0$$

Subtraindo I, a matriz identidade $n\ x\ n$, nos dois lados da equação:

$$A - AB + B - I = -I \Rightarrow A(I - B) - (I - B) = -I \Rightarrow (A - I)(I - B) = -I$$
$$\Rightarrow (I - A)(I - B) = I$$

Aplicando o determinante, encontramos:

$$\det[(I - A)(I - B)] = 1 \Rightarrow \det(I - A)\det(I - B) = 1$$

Logo, analisando a equação acima, temos $\det(I - A) \neq 0$ e $\det(I - B) \neq 0$. Portanto, ambas as matrizes são inversíveis e uma é a inversa da outra (devido ao produto $(I - A)(I - B) = I$).

A afirmação III afirma que $AB = BA$. Sabemos que as matrizes $(I - A)$ e $(I - B)$ são inversas uma da outra, então:

$$I = (I - B)(I - A) = I - A - B + BA = I - \underbrace{(A + B)}_{AB} + BA = I - AB + BA$$
$$\Rightarrow I = I - AB + BA \Rightarrow AB = BA$$

Portanto, todas as afirmações são verdadeiras.

Gabarito: “e”.

---

6. (ITA/2017)

Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $det(A^2 + A)$ é

a) 144.

b) 180.

c) 240.

d) 324.

e) 360.

Comentários

Usando o Teorema de Binet, temos:

$$\det(A^2 + A) = \det[A(A + I)] = \det A \cdot \det(A + I)$$

O enunciado da questão afirma que:

$$A = P^{-1}DP$$

Aplicando o determinante:

$$\det A = \det(P^{-1}DP) = \det P^{-1} \cdot \det D \cdot \det P = \det D$$

Para calcular o determinante de $A + I$, vamos somar I na identidade dada:

$$A + I = P^{-1}DP + \underbrace{I}_{P^{-1}P} \Rightarrow A + I = P^{-1}DP + P^{-1}P$$

$$A + I = P^{-1}(DP + P) = P^{-1}(D + I)P \Rightarrow \det(A + I) = \det(D + I)$$

Dessa forma, precisamos calcular o valor da seguinte expressão:

$$\det(A^2 + A) = \det A \cdot \det(A + I) = \det D \cdot \det(D + I)$$

Vamos calcular $\det D$:

$$\det D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\det(D + I) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 24$$

Substituindo esses resultados na equação, obtemos:

$$\det(A^2 + A) = \det D \cdot \det(D + I) = 6 \cdot 24 = 144$$

Gabarito: "a".

---

7. (ITA/2016)

Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

Comentários

Vamos calcular a inversa de M, seja $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$:

$$MM^{-1} = I \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a - c = 1 \\ b - d = 0 \\ 2a = 0 \\ 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow c = -1 \\ b = \frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Calculando o valor da expressão:

$$MN^T - M^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Gabarito: "c".

8. (ITA/2016)

Seja A a matriz de ordem $3x2$, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.

b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

Comentários

a) Seja $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, então, temos:

$$BA = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 0 \\ d + f = 0 \\ e + f = 1 \end{cases}$$

Vamos colocar todas as variáveis em função de a e d:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ b + c = 0 \\ d + f = 0 \\ e + f = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 1 - a \\ b = -c = a - 1 \\ f = -d \\ e = 1 - f = 1 + d \end{cases}$$

$$\therefore\ B = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ d & 1+d & -d \end{bmatrix}$$

b) Vamos verificar se existe a matriz:

$$BB^T = I_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ d & 1+d & -d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & d \\ a-1 & 1+d \\ 1-a & -d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + (a-1)^2 + (1-a)^2 = 1 \\ ad + (a-1)(1+d) - (1-a)d = 0 \\ d^2 + (1+d)^2 + d^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3a^2 - 4a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1\ ou\ a = \frac{1}{3} \\ 3ad + a - 1 - 2d = 0 \Rightarrow a = \frac{2d+1}{3d+1} \\ d(3d+2) = 0 \Rightarrow d = 0\ ou\ d = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

Analisando o sistema acima, podemos verificar que as soluções são dadas por:

$$(a; d) \in \left\{(1; 0); \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right)\right\}$$

Para $a = 1$ e $d = 0$, temos a seguinte matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Gabarito: a) $B = \begin{bmatrix} a & a-1 & 1-a \\ d & 1+d & -d \end{bmatrix}$ b) Sim. Exemplo: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

9. (ITA/2015)

Seja $A = (a_{ij})_{5x5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1), 1 \leq i,j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:

I. Os elementos de cada linha i formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j formam uma progressão geométrica de razão 2.

III. trA é um número primo.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) apenas I e III.

e) I, ll e III.

Comentários

I. Vamos analisar os elementos da linha i.
Se $a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$, então:

$$a_{i,j+1} = 2^{i-1}(2(j+1)-1) = 2^{i-1}\big((2j-1)+2\big) = \underbrace{2^{i-1}(2j-1)}_{a_{ij}} + 2^i$$

$$\Rightarrow a_{i,j+1} - a_{ij} = 2^i$$

Os elementos de cada linha dessa matriz formam uma PA de razão 2^i.

$$\therefore Verdadeira$$

II. Vamos analisar os elementos de cada coluna:

$$a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$$
$$a_{i+1,j} = 2^i(2j-1) = 2 \cdot \underbrace{2^{i-1}(2j-1)}_{a_{ij}} = 2 \cdot a_{ij}$$
$$\Rightarrow a_{i+1,j} = 2 \cdot a_{ij}$$

Pela equação acima, podemos ver que ela é uma PG de razão $q = 2$.

$$\therefore Verdadeira$$

III. Sendo A uma matriz $5x5$, então, pela definição de trA, temos:

$$trA = \sum_{k=1}^{5} a_{k,k}$$

Usando os dados do enunciado:

$$a_{ij} = 2^{i-1}(2j-1)$$
$$a_{1,1} = 2^{1-1}(2 \cdot 1 - 1) = 1$$
$$a_{2,2} = 2^{2-1}(2 \cdot 2 - 1) = 6$$
$$a_{3,3} = 2^{3-1}(2 \cdot 3 - 1) = 20$$
$$a_{4,4} = 2^{4-1}(2 \cdot 4 - 1) = 56$$
$$a_{5,5} = 2^{5-1}(2 \cdot 5 - 1) = 144$$
$$\Rightarrow trA = 1 + 6 + 20 + 56 + 144 = 227$$

227 é um número primo, logo, afirmação verdadeira.

$$\therefore Todas\ afirmações\ são\ verdadeiras$$

Gabarito: "e".

10. (ITA/2014)

Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M).$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

a) $1/3$

b) $1/2$

c) $2/3$

d) $4/5$

e) $5/4$

Comentários

Usando as propriedades dos determinantes e sabendo que a matriz é de ordem 3, temos:

$$\det(2M^2) - \det(\sqrt[3]{2}M^3) = \frac{2}{9}\det(3M)$$

$$2^3(\det M)^2 - \sqrt[3]{2}^3(\det M)^3 = \frac{2}{9} \cdot 3^3 \det M$$

$$8(\det M)^2 - 2(\det M)^3 = 6\det M$$

Fazendo $\det M = x$:

$$2x^3 - 8x^2 + 6x = 0$$

$$x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x(x-3)(x-1) = 0$$

Assim, encontramos os possíveis valores para o determinante de M:

$$\det M = 0 \ ou \det M = 1 \ ou \det M = 3$$

Lembrando que $\det M^{-1} = \frac{1}{\det M}$ e que para M ter inversa, devemos ter $\det M \neq 0$, temos:

$$\det M^{-1} = 1 \ ou \ \det M^{-1} = \frac{1}{3}$$

Portanto, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

---

11. (ITA/2014)

Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par;

II. Se o produto AB não for inversível, então n é ímpar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas I e II.

c) Apenas I e III.

d) Apenas II e III.

e) Todas.

Comentários

I. Vamos verificar se AB é inversível:

Se A é uma matriz inversível, temos $\det A \neq 0$.
Como B é antissimétrica, temos:

$$B^t = -B \Rightarrow \det B^t = \det(-B) \Rightarrow \det B = (-1)^n \det B \Rightarrow \det B\,(1-(-1)^n) = 0$$

Se n for par:

$$\det B\,(1-(-1)^n) = 0 \Rightarrow \det B\,(1-1) = 0$$

Nesse caso, $\det B$ não é necessariamente igual a zero.
Se n for ímpar:

$$\det B\,(1-(-1)^n) = 0 \Rightarrow \det B\,(2) = 0 \Rightarrow \det B = 0$$

Então, se AB é inversível, temos $\det(AB) \neq 0$ e, assim, $\underbrace{\det A}_{\neq 0} \cdot \underbrace{\det B}_{\neq 0} \neq 0$. Desse modo, devemos ter n para para $\det B \neq 0$.

$$\therefore Verdadeira$$

II. Se AB não for inversível, devemos ter $\det B = 0$. Sabemos que n ímpar implica $\det B = 0$, mas, n par também pode ocasionar $\det B = 0$. Logo, afirmação falsa.

$$\therefore Falsa$$

III. Como analisamos na afirmação I, devemos ter n par para B ser inversível.

$$\therefore Verdadeira$$

Gabarito: "c".

---

12. (ITA/2014)

Considere a equação $A(t)\cdot X = B(t)$, $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são, respectivamente,

a) $2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$.

b) $-2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$.

c) $0, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$.

d) $0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

e) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$.

Comentários

Inicialmente, devemos calcular o valor de t. Se $\det A(t) = 1$, temos:

$$\det A(t) = \begin{vmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$4e^{-2t} + 3e^{2t} + 1 - 3 - 2e^{-2t} - 2e^{2t} = 1$$

$$2e^{-2t} + e^{2t} - 3 = 0$$

$$e^{4t} - 3e^{2t} + 2 = 0 \Rightarrow (e^{2t}-2)(e^{2t}-1) = 0$$

Raízes:

$$e^{2t} = 1 \Rightarrow t = 0, \text{ não convém, pois } t \neq 0$$

$$e^{2t} = 2 \Rightarrow e^t = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow e^{2t} = 2$$

$$\Rightarrow e^{-2t} = \frac{1}{2}$$

Vamos usar a equação para calcular os valores pedidos:

$$A(t) \cdot X = B(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 2y - z = \sqrt{2} \quad (I) \\ -x + y + z = -\sqrt{2} \ (II) \\ -3x + y + 2z = 0 \ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(I) + (II)$, encontramos $y = 0$.

De (III), para $y = 0$ temos $z = 3x/2$. Substituindo em (I):

$$x - \frac{3x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow -\frac{x}{2} = \sqrt{2} \Rightarrow x = -2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow z = -3\sqrt{2}$$

Portanto:

$$(x, y, z) = \left(-2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}\right)$$

Gabarito: “b”.

13. (ITA/2013)

Considere $A \in M_{5x5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Se $\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

a) $1/6$

b) $\sqrt{6}/6$

c) $\sqrt[3]{36}/6$

d) 1

e) $\sqrt{216}$

Comentários

Usando as propriedades dos determinantes e o Teorema de Binet, temos:

$$\det(\alpha A^t A A^t) = \sqrt{6}\alpha^2 \Rightarrow \alpha^5 \det A^t \det A \det A^t = \sqrt{6}\alpha^2$$

$$\alpha^2\left(\alpha^3 (\det A)^3 - \sqrt{6}\right) = 0$$

Como $\alpha \neq 0$ e $\det A = \sqrt{6}$, temos:

$$\alpha^3 \left(\underbrace{\det A}_{\sqrt{6}}\right)^3 - \sqrt{6} = 0$$

$$\alpha = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6^3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{6}} = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}$$

Gabarito: “c”.

14. (ITA/2012)

Considere a matriz quadrada A em que os termos da diagonal principal são $1, 1+x_1, 1+x_2, \dots, 1+x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $1/2$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz A para que o seu determinante seja igual a 256.

Comentários

De acordo com o enunciado:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 1 & 1+x_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+x_2 & & 1 \\ & \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+x_n \end{vmatrix}$$

Já que $a_{11} = 1$, podemos aplicar a regra de Chió:

$$\det A = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Como $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ é uma PG, podemos usar a propriedade dos termos equidistantes da PG:

$$\det A = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_n = \Big(x_1 \cdot \underbrace{x_n}_{x_1 \cdot q^{n-1}}\Big)^{\frac{n}{2}} = (x_1^2 \cdot q^{n-1})^{\frac{n}{2}}$$

Substituindo os valores:

$$\det A = \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 4^{n-1}\right)^{\frac{n}{2}} = (2^{2n-4})^{\frac{n}{2}} = 2^{(n-2)n}$$

$$\det A = 256 \Rightarrow 2^{(n-2)n} = 2^8 \Rightarrow n^2 - 2n - 8 = 0$$

$$(n-4)(n+2) = 0 \Rightarrow n = 4 \; ou \; n = -2$$

n é a ordem da matriz, então, deve ser um número positivo. Logo, $n = 4$. Como aplicamos a regra de Chió uma vez, a ordem da matriz A é igual a $n + 1 = 5$.

Gabarito: ordem 5

---

15. (ITA/2011)

Determine todas as matrizes $M \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2x2}(\mathbb{R})$.

Comentários

Sejam $\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$ e $\boldsymbol{N} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$. De acordo com o enunciado, temos:

$$\boldsymbol{MN = NM, \forall N \in \mathbb{M}_{2x2}}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} & \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{z} & \boldsymbol{w} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax + cy} & \boldsymbol{bx + dy} \\ \boldsymbol{az + cw} & \boldsymbol{bz + dw} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{ax + bz} & \boldsymbol{ay + bw} \\ \boldsymbol{cx + dz} & \boldsymbol{cy + dw} \end{pmatrix}$$

Assim, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} ax + cy = ax + bz \\ bx + dy = ay + bw \\ az + cw = cx + dz \\ bz + dw = cy + dw \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} cy = bz \;\; (I) \\ bx + dy = ay + bw \;\; (II) \\ az + cw = cx + dz \;\; (III) \\ bz = cy \;\; (IV) \end{cases}$$

Queremos todas as matrizes M quadradas de ordem 2 que satisfaçam a equação $MN = NM$ para qualquer matriz N quadrada e real. Como b e c são elementos da matriz N, para qualquer valor dessas variáveis serem válidas, devemos ter pelas equações (I) e (IV): $y = z = 0$. Substituindo esses valores nas equações (II) e (III), obtemos:

$$bx + dy = ay + bw \ \ (II) \Rightarrow bx = bw$$
$$az + cw = cx + dz \ \ (III) \Rightarrow cw = cx$$

Analisando as equações acima, vemos que elas são verdadeiras para qualquer $b, c \in \mathbb{R}$ se $w = x$. Desse modo, as matrizes M que satisfazem as condições do problema são do tipo:

$$M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = x \cdot I_2, \text{com } x \in \mathbb{R}$$

Gabarito: $\boldsymbol{M = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}, \text{com } x \in \mathbb{R}}$

---

16. (ITA/2010)

Sobre os elementos da matriz

$$A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4x4}(\mathbb{R})$$

sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 e de soma 80 e 255, respectivamente, então, $\det(A^{-1})$ e o elemento $(A^{-1})_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12

b) $-\frac{1}{72}$ e -12

c) $-\frac{1}{72}$ e 12

d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

Comentários

Podemos calcular o valor dos termos usando os dados do enunciado.

Para (x_1, x_2, x_3, x_4):

$$x_1 + 3x_1 + 3^2x_1 + 3^3x_1 = 80 \Rightarrow x_1 = \frac{80}{1 + 3 + 9 + 27} = 2$$

Para (y_1, y_2, y_3, y_4):

$$y_1 + 4y_1 + 4^2y_1 + 4^3y_1 = 255 \Rightarrow y_1 = \frac{255}{1 + 4 + 16 + 64} = 3$$

Então, a matriz A é dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vamos calcular o valor do seu determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 18 & 54 \\ 3 & 12 & 48 & 192 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió:

$$\det A = 6 \cdot \begin{vmatrix} 4-3 & 16-9 & 64-27 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0-3 & 0-9 & 0-27 \end{vmatrix} = 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 & 37 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -9 & -27 \end{vmatrix} = 6 \cdot (-21+9) = -72$$

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = -\frac{1}{72}$$

Para encontrar o elemento $(A^{-1})_{23}$, não precisamos calcular toda a matriz A^{-1}, basta usar o método do determinante:

$$(A^{-1})_{23} = \frac{1}{\det A} \cdot cof_{23}A^t = \frac{1}{\det A} \cdot cof_{32}A$$

$$(A^{-1})_{23} = -\frac{1}{72} \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 18 & 54 \\ 3 & 48 & 192 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{72} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 9 & 27 \\ 1 & 16 & 64 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{12} \cdot (9 \cdot 64 - 16 \cdot 27)$$

$$(A^{-1})_{23} = 12$$

Gabarito: "c".

17. (ITA/2008)

Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes $2x2$ que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

Comentários

A questão pede todas as matrizes $2x2$ simétricas e ortogonais. Se A é simétrica, podemos escrever:

$$A = A^t \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

A é ortogonal se A é inversível e vale a igualdade $A^{-1} = A^t$, então:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow \underbrace{AA^{-1}}_{I} = AA^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ab + bc = 0 \Rightarrow b(a+c) = 0 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

I) Se $b = 0$, temos:

$$b(a+c) = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ e } c = \pm 1$$

Possíveis matrizes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

II) Se $b \neq 0$, temos

$$b(a+c) = 0 \Rightarrow c = -a$$

$$a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow a = \pm\sqrt{1-b^2} \Rightarrow c = \mp\sqrt{1-b^2}$$

Para esse caso, como a matriz deve ser real devemos ter $1 - b^2 \geq 0$:

$$-1 \leq b \leq 1$$

Possíveis matrizes:

$$\begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \mp\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}, b \in [-1; 1]$$

Portanto, as possíveis matrizes são dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}, b \in [-1; 1]$$

As matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ já estão inclusas nas matrizes do caso II, com $b = 0$.

Gabarito: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{1-b^2} & b \\ b & -\sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{1-b^2} & b \\ b & \sqrt{1-b^2} \end{pmatrix}, b \in [-1; 1]$

18. (ITA/2008)

Sejam A e C matrizes $n\ x\ n$ inversíveis tais que $\det(I + C^{-1}A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n

b) $2 \cdot \left(\frac{3^n}{5^2}\right)$

c) $1/5$

d) $\frac{3^{n-1}}{5}$

e) $5 \cdot 3^{n-1}$

Comentários

Vamos aplicar o determinante em B:

$$B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t \Rightarrow \det B = \det[3(A^{-1} + C^{-1})^t]$$

Agora, devemos manipular a equação de forma a obter as variáveis fornecidas na questão:

$$\det B = 3^n \cdot \det\left(\underbrace{A^{-1} + C^{-1}}_{A^{-1} + C^{-1}I}\right) = 3^n \cdot \det(A^{-1} + C^{-1}AA^{-1}) = 3^n \cdot \det\big((I + C^{-1}A)A^{-1}\big)$$

$$\Rightarrow \det B = 3^n \cdot \det(I + C^{-1}A) \cdot \det A^{-1} = 3^n \cdot \frac{\det(I + C^{-1}A)}{\det A}$$

Substituindo o valor das variáveis, encontramos:

$$\det B = 3^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{5} = \frac{3^{n-1}}{5}$$

Gabarito: "d".

19. (ITA/2006)

Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}$$

Determine o elemento c_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

Comentários

Questão que pede o elemento de uma matriz inversa $4x4$. Para encontrá-lo, basta usar o método do determinante:

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C = (A + B)^{-1} = \frac{1}{\det(A + B)} \cdot \overline{(A + B)} = \frac{1}{\det(A + B)} \cdot [(A + B)']^t$$

$$c_{34} = \frac{1}{\det(A + B)} \cdot cof_{43}(A + B)$$

Calculando o determinante:

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix}2&3&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3&2\\0&0&2&5\end{vmatrix}$$

Somando a segunda linha com a primeira, temos:

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix}1&6&0&0\\-1&3&0&0\\0&0&3&2\\0&0&2&5\end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Chió:

$$\det(A+B)=\begin{vmatrix}9&0&0\\0&3&2\\0&2&5\end{vmatrix}=135-36=99$$

$$cof_{43}(A+B)=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&6&0\\-1&3&0\\0&0&2\end{vmatrix}=(-1)(6+12)=-18$$

Portanto, o elemento c_{34} é dado por:

$$c_{34}=-\frac{18}{99}=-\frac{2}{11}$$

Gabarito: $c_{34}=-\frac{2}{11}$

---

20. (ITA/2006)

Se $\det\begin{bmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{bmatrix}=-1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix}-2a&-2b&-2c\\2p+x&2q+y&2r+z\\3x&3y&3z\end{bmatrix}$ é igual a

a) 0

b) 4

c) 8

d) 12

e) 16

Comentários

Usando as propriedades dos determinantes, temos:

$$\det\begin{bmatrix}-2a&-2b&-2c\\2p+x&2q+y&2r+z\\3x&3y&3z\end{bmatrix}=-2\cdot3\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\2p+x&2q+y&2r+z\\x&y&z\end{vmatrix}$$

Multiplicando a terceira linha por (-1) e somando à segunda linha:

$$\Rightarrow -6\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\2p&2q&2r\\x&y&z\end{vmatrix}=-12\cdot\begin{vmatrix}a&b&c\\p&q&r\\x&y&z\end{vmatrix}=-12\cdot(-1)=12$$

Gabarito: "d".

---

21. (ITA/2005)

Sejam A e B matrizes $2x2$ tais que $AB=BA$ e que satisfazem à equação matricial $A^2+2AB-B=0$. Se B é inversível, mostre que (a) $AB^{-1}=B^{-1}A$ e que (b) A é inversível.

Comentários

a) Para mostrar essa igualdade, devemos usar $AB = BA$. Multiplicando-se essa equação à direita por B^{-1}:

$$ABB^{-1} = BAB^{-1} \Rightarrow A = BAB^{-1}$$

Agora, multiplicando-se à esquerda por B^{-1}:

$$B^{-1}A = B^{-1}BAB^{-1}$$
$$\therefore B^{-1}A = AB^{-1}$$

b) Devemos mostrar que $\det A \neq 0$, usando a equação dada, temos:

$$A^2 + 2AB - B = 0 \Rightarrow AA + 2AB = B$$

Multiplicando-se a equação acima à direita por B^{-1}:

$$AAB^{-1} + 2ABB^{-1} = BB^{-1} \Rightarrow AAB^{-1} + 2A = I \Rightarrow A(AB^{-1} + 2I) = I$$

Aplicando-se o determinante:

$$\det[A(AB^{-1} + 2I)] = \det I$$
$$\det A \cdot \det(AB^{-1} + 2I) = 1$$

Como o produto desses determinantes resulta no número 1, devemos ter $\det A \neq 0$ e $\det(AB^{-1} + 2I) \neq 0$. Portanto, A é inversível.

Gabarito: Demonstração

---

22. (ITA/2004)

Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada $n\ x\ n, n \geq 2$:

I. O determinante de A é nulo se, e somente se, A possui uma linha ou uma coluna nula.

II. Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, \dots, n$, então $\det A = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

III. Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2} + 1$ e a segunda por $\sqrt{2} - 1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então $\det B = \det A$.

Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas III.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

Comentários

I. Veja que essa afirmação é falsa, pois, temos matrizes que não satisfazem essa condição e resultam em um determinante diferente de zero. Contraexemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = 0$$
$$\therefore Falsa$$

II. Temos a seguinte matriz triangular:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & & a_{3n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Vimos na aula teórica que o determinante de matrizes triangulares é igual ao produto da sua diagonal principal, então, temos:

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$
$$\therefore Verdadeira$$

III. Nesse caso, os elementos da primeira e segunda colunas terão os fatores comuns $\sqrt{2}+1$ e $\sqrt{2}-1$, respectivamente. Desse modo, o determinante de B é dado por:

$$\det B = \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\det A = \det A$$

$$\therefore Verdadeira$$

Gabarito: "d".

---

23. (ITA/2004)

Seja $x \in \mathbb{R}$ e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{bmatrix}$$

Assinale a opção correta.

a) $\forall x \in \mathbb{R}$, A possui inversa.

b) Apenas para $x > 0$, A possui inversa.

c) São apenas dois os valores de x para os quais A possui inversa.

d) Não existe valor de x para o qual A possui inversa.

e) Para $x = \log_2 5$, A não possui inversa.

Comentários

Nessa questão, devemos analisar a inversa de A. Para isso, vamos calcular o seu determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2^x & (x^2+1)^{-1} \\ 2^x & \log_2 5 \end{vmatrix} = 2^x\left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1}\right)$$

Se $\det A = 0$, temos que A não possui inversa. Então:

$$2^x\left(\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1}\right) = 0$$

Temos duas possibilidades:

$$2^x = 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \text{ que satisfaz essa condição}$$

$$\log_2 5 - \frac{1}{x^2+1} = 0 \Rightarrow \log_2 5 = \frac{1}{x^2+1} \Rightarrow x^2+1 = \frac{1}{\log_2 5}$$

$$x^2 = \log_5 2 - 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{\log_5 2 - 1}$$

Note que $\log_5 2 < 1$, então, $\log_5 2 - 1 < 0$. Logo, $x \notin \mathbb{R}$.
Assim, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\det A \neq 0$ e, portanto, A é inversível.

Gabarito: "a".

---

24. (ITA/2004)

Se A é uma matriz real, considere as definições:

I. Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^t$.

II. Uma matriz quadrada A é diagonal se e só se $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots, n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

Comentários

A questão pede todas as matrizes $3x3$ que são diagonais e ortogonais.
Se A é diagonal, então, ela é da forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Como A também deve ser ortogonal, temos que A é inversível, então, $\det A = abc \neq 0$ e vale a identidade:

$$A^{-1} = A^t \Rightarrow AA^{-1} = AA^t \Rightarrow AA^t = I \Rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}}_{A^t} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \pm 1; b = \pm 1 \text{ e } c = \pm 1$$

Portanto, todas as matrizes de ordem 3 são dadas por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Gabarito: $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

---

25. (ITA/2003)

Sejam A e P matrizes $n \, x \, n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$.

Das afirmações:

I. B^t é inversível e $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

II. Se A é simétrica, então B também o é.

III. $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

é(são) verdadeira(s):

a) todas.

b) apenas I.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) apenas II e III.

Comentários

I. Aplicando o determinante em $B = P^{-1}AP$:

$$\det B = \det P^{-1}AP = \det P^{-1} \det A \det P = \det A$$

Como A é inversível, temos $\det A \neq 0$. Sabendo que $\det B^t = \det B = \det A \neq 0$, então, B^t é inversível e vale a propriedade $(B^t)^{-1} = (B^{-1})^t$.

$$\therefore Verdadeira$$

II. A afirmação diz que $A = A^t \Rightarrow B = B^t$. Vamos verificar:

$$B = P^{-1}AP$$

$$B^t = (P^{-1}AP)^t = P^t A^t (P^{-1})^t = P^t A (P^{-1})^t \neq B$$

$$\therefore Falsa$$

III. Sendo λ uma constante, temos:

$$\lambda I = \lambda \underbrace{P^{-1}P}_{I} = P^{-1}\lambda P$$

Subtraindo $P^{-1}\lambda P$ em ambos os lados da equação $B = P^{-1}AP$:

$$B - P^{-1}\lambda P = P^{-1}AP - P^{-1}\lambda P \Rightarrow B - \lambda I = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Aplicando o determinante na equação acima:

$$\det(B - \lambda I) = \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] = \det P^{-1} \det(A - \lambda I) \det P = \det(A - \lambda I)$$

$$\therefore Verdadeira$$

Gabarito: "d".

---

26. (ITA/2003)

Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$

na forma de um produto de números reais.

Comentários

Note que se multiplicarmos a primeira, segunda, terceira e quarta linha por a, b, c e d, respectivamente, obtemos o fator comum $abcd$ na primeira coluna:

$$\frac{abcd}{abcd} \cdot \begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{abcd} \cdot \begin{vmatrix} abcd & a & a^2 & a^3 \\ abcd & b & b^2 & b^3 \\ abcd & c & c^2 & c^3 \\ abcd & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \frac{abcd}{abcd} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

Lembrando que o determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua transposta, podemos escrever:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Assim, obtemos o determinante de uma matriz de Vandermonde, esse valor é dado por:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

Gabarito: $(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$

---

27. (ITA/2002)

Seja A uma matriz real $2x2$. Suponha que α e β sejam dois números distintos, e V e W duas matrizes reais $2x1$ não-nulas, tais que $AV = \alpha V$ e $AW = \beta W$.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $aV + bW$ é igual à matriz nula $2x1$, então $a + b$ vale

a) 0.

b) 1.

c) -1.

d) $1/2$.

e) $-1/2$.

Comentários

De acordo com o enunciado, temos $aV + bW = 0_{2x1}$:

$$aV = -bW$$

Se $AW = \beta W$ e b é uma constante, então, multiplicando essa equação pela constante $(-b)$:

$$(-b)AW = (-b)\beta W \Rightarrow A\underbrace{(-bW)}_{aV} = \beta\underbrace{(-bW)}_{aV} \Rightarrow AaV = \beta aV \Rightarrow a\underbrace{(AV)}_{\alpha V} = \beta aV$$

$$a\alpha V - \beta aV = 0 \Rightarrow [a(\alpha - \beta)]V = 0_{2x1}$$

Como V é uma matriz $2x1$ não nula e $\alpha \neq \beta$, devemos ter $a = 0$.

Sendo $aV = -bW$ e $W \neq 0_{2x1}$, então:

$$aV = 0 = -bW \Rightarrow b = 0$$

Portanto, $a + b = 0$

Gabarito: "a".

---

28. (ITA/2002)

Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que $AB = A$ e $BA = B$.

Então, $[(A+B)^t]^2$ é igual a

a) $(A+B)^2$.

b) $2(A^t \cdot B^t)$.

c) $2(A^t + B^t)$.

d) $A^t + B^t$.

e) A^tB^t.

Comentários

Vamos analisar a expressão $[(A+B)^t]^2$:

$$[(A+B)^t]^2 = (A^t + B^t)^2 = (A^t)^2 + A^tB^t + B^tA^t + (B^t)^2$$

$$\Rightarrow [(A+B)^t]^2 = (A^2)^t + (BA)^t + (AB)^t + (B^2)^t$$

Usando as equações $AB = A$ e $BA = B$, temos:

Multiplicando $AB = A$ à direita por A:

$$ABA = A^2 \Rightarrow A\underbrace{(BA)}_{B} = A^2 \Rightarrow \underbrace{AB}_{A} = A^2 \Rightarrow A = A^2$$

Multiplicando $BA = B$ à direita por B:

$$BAB = B^2 \Rightarrow B\underbrace{(AB)}_{A} = B^2 \Rightarrow \underbrace{BA}_{B} = B^2 \Rightarrow B = B^2$$

Substituindo essas igualdades na equação, obtemos:

$$[(A+B)^t]^2 = A^t + B^t + A^t + B^t = 2(A^t + B^t)$$

Gabarito: "c".

---

29. (ITA/2002)

Seja a matriz

$$\begin{bmatrix} cos25° & sen65° \\ sen120° & cos390° \end{bmatrix}$$

O valor de seu determinante é

a) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) 1

e) 0

Comentários

Sabendo que $sen65° = cos25°$ e $\cos 390° = \cos 30°$, temos:

$$\begin{vmatrix} cos25° & sen65° \\ sen120° & cos390° \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} cos25° & cos25° \\ sen120° & cos30° \end{vmatrix} = \cos 25° \cos 30° - \cos 25° \operatorname{sen} 120°$$

$$\Rightarrow \cos 25° \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

Gabarito: "e".

---

30. (ITA/2001)

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

A soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

O bizu nessa questão é notar os elementos 1 na primeira linha de A.

Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix}$ e usando a definição de inversa:

$$AA^{-1} = I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Queremos calcular o valor de $a + e + i + m$. Pelo produto das matrizes acima, temos:

$$a + e + i + m = 1$$

Portanto, a soma dos elementos da primeira coluna da inversa de A é 1.

Gabarito: "a".

31. (ITA/2001)

Sejam A e B matrizes $n\,x\,n$, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:

(I) $AB + BA^t$ é simétrica.

(II) $(A + A^t + B)$ é simétrica.

(III) ABA^t é simétrica.

temos que:

a) apenas (I) é verdadeira.

b) apenas (II) é verdadeira.

c) apenas (III) é verdadeira.

d) apenas (I) e (III) são verdadeiras.

e) todas as afirmações são verdadeiras.

Comentários

I. Se B é simétrica, temos $B = B^t$. Então:

$$(AB + BA^t)^t = (AB)^t + (BA^t)^t = B^t A^t + (A^t)^t B^t = BA^t + AB = AB + BA^t$$

Assim, $AB + BA^t$ é simétrica.

$$\therefore Verdadeira$$

II. $(A + A^t + B)^t = A^t + (A^t)^t + B^t = A^t + A + B = A + A^t + B$

Logo, $(A + A^t + B)$ é simétrica.

$$\therefore Verdadeira$$

III. $(ABA^t)^t = (A^t)^t B^t A^t = ABA^t$

Logo, ABA^t é simétrica.

$$\therefore Verdadeira$$

Gabarito: "e".

32. (ITA/2000)

Considere as matrizes mostradas na figura adiante

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se X é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a

a) 35.

b) 17.

c) 38.

d) 14.

e) 29.

Comentários

Multiplicando a equação $M^{-1}NX = P$ por M à esquerda, temos:

$$MM^{-1}NX = MP \Rightarrow NX = MP$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 2 & 0\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\0 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x+2z=-1 \ \ (I)\\3x+2y=1 \ \ (II)\\x+y+z=3 \ \ (III)\end{cases}$$

De (I), temos:

$$z=\frac{-1-x}{2}$$

De (II):

$$y=\frac{1-3x}{2}$$

Substituindo essas variáveis em (III):

$$x+\frac{1-3x}{2}+\left(\frac{-1-x}{2}\right)=3\Rightarrow 2x+1-3x-1-x=6\Rightarrow -2x=6\Rightarrow x=-3$$

$$\Rightarrow z=\frac{-1-(-3)}{2}=1$$

$$\Rightarrow y=\frac{1-3(-3)}{2}=5$$

Portanto, o valor da expressão pedida é dado por:

$$x^2+y^2+z^2=(-3)^2+5^2+1^1=35$$

Gabarito: "a".

---

33. (ITA/2000)

Sendo x um número real positivo, considere as matrizes mostradas na figura a seguir

$$A=\begin{pmatrix}\log_{\frac{1}{3}} x & \log_{\frac{1}{3}} x^2 & 1\\ 0 & -\log_3 x & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0 & \log_{\frac{1}{3}} x^2\\ 1 & 0\\ -3\log_{\frac{1}{3}} x & -4\end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB)=(AB)^t$ é igual a

a) $\frac{25}{3}$

b) $\frac{28}{3}$

c) $\frac{32}{3}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{25}{2}$

Comentários

Vamos calcular AB:

$$AB=\begin{pmatrix}\log_{\frac{1}{3}} x & \log_{\frac{1}{3}} x^2 & 1\\ 0 & -\log_3 x & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & \log_{\frac{1}{3}} x^2\\ 1 & 0\\ -3\log_{\frac{1}{3}} x & -4\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3\log_{\frac{1}{3}} x & \log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4 \\ -\log_3 x - 3\log_{\frac{1}{3}} x & -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 3\log_{\frac{1}{3}} x & -\log_3 x - 3\log_{\frac{1}{3}} x \\ \log_{\frac{1}{3}} x \cdot \log_{\frac{1}{3}} x^2 - 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Para $AB = (AB)^t$, devemos ter:

$$\underbrace{\log_{\frac{1}{3}} x}_{-\log_3 x} \cdot \underbrace{\log_{\frac{1}{3}} x^2}_{-2\log_3 x} - 4 = -\log_3 x - 3\underbrace{\log_{\frac{1}{3}} x}_{-\log_3 x}$$

$$2(\log_3 x)^2 - 4 = -\log_3 x + 3\log_3 x \Rightarrow 2(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\log_3 x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\log_3 x = 2 \; ou \; \log_3 x = -1$$

$$\Rightarrow x_1 = 9 \; ou \; x_2 = \frac{1}{3}$$

Portanto, a soma de todos os valores de x é:

$$x_1 + x_2 = 9 + \frac{1}{3} = \frac{28}{3}$$

Gabarito: “b”

---

34. (ITA/2000)

Considere as matrizes reais mostradas na figura adiante

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ e } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a

a) $21/8$

b) $91/9$

c) $36/9$

d) $21/16$

e) $91/36$

Comentários

Vamos calcular as raízes da equação:

$$\det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & b - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(b - \lambda)(c - \lambda) = 0$$

As raízes são:

$$\lambda_1 = a; \lambda_2 = b \text{ e } \lambda_3 = c$$

Como (a, b, c) é uma PG de razão q, temos:

$$(a, b, c) = (a, aq, aq^2)$$

Usando os dados do enunciado:

$$a + aq + aq^2 = 7a \Rightarrow a(q^2 + q - 6) = 0$$

Como $a \neq 0$:

$$q^2 + q - 6 = 0 \Rightarrow q = -3 \; ou \; q = 2$$

Sabendo que $q > 0$, devemos ter $q = 2$.

Usando a outra informação:

$$a \cdot aq \cdot aq^2 = a \Rightarrow a^3 q^3 = a$$

Como $a \neq 0$ e $q = 2$:

$$a^2 2^3 = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8}$$

$$b = aq \Rightarrow b^2 = a^2 q^2 = \frac{1}{8} \cdot 4 = \frac{1}{2}$$

$$c = aq^2 \Rightarrow c^2 = a^2 q^4 = \frac{1}{8} \cdot 16 = 2$$

Portanto:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} + 2 = \frac{21}{8}$$

Gabarito: "a".

IME

35. (IME/2020)

Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = P\,B\,P^{-1}$.

a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.

b) Dadas $C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

Comentários

a) Pelo Teorema de Binet, temos que:

$$\det(A) = \det(P).\det(B).\det(P^{-1})$$

Como a matriz **P** é inversível, podemos usar que o determinante da matriz inversa é o inverso do determinante.

$$\det(A) = \det(P).\det(B).\frac{1}{\det(P)}$$

$$\therefore \det(A) = \det(B)$$

b) Podemos utilizar o teorema de que A e B são semelhantes se, e somente se:

- $\det(A) = \det(B)$
- A e B possuem o mesmo polinômio característico;
- A e B possuem o mesmo traço;

Vamos à primeira condição:

$$\det C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = 4.5 - 3.2 = 20 - 6 = 14$$

$$\det D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 8.1 - 3.(-20) = 8 + 6 = 14$$

Logo, a primeira condição está atendida. Vamos checar os polinômios característicos;

$$\det(C - \lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda)(5 - \lambda) - 3.2 = 20 - 4\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 6$$

$$\det(C - \lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

$$\det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(1-\lambda) - 3.(-2) = 8 - 8\lambda - \lambda + \lambda^2 + 6$$

$$\det(D - \lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda + 14$$

Logo, a segunda condição está atendida.

Se os polinômios característicos são iguais, então os autovetores são iguais e possuem a mesma multiplicidade.

Os traços de C e D são:

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \therefore \mathrm{tr}\,(\mathrm{C}) = 4 + 5 = 9$$

$$D = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \therefore \mathrm{tr}\,(\mathrm{D}) = 8 + 1 = 9$$

Portanto, as matrizes C e D são semelhantes.

Outra forma de resolver é utilizar a definição do enunciado:

$$C = PDP^{-1}$$

Multiplicando por P à direita:

$$\therefore CP = PB$$

Consideremos uma matriz P genérica:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Fazendo as multiplicações:

$$\begin{bmatrix} 4\mathrm{a} + 2\mathrm{c} & 4\mathrm{b} + 2\mathrm{d} \\ 3\mathrm{a} + 5\mathrm{c} & 3\mathrm{b} + 5\mathrm{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8\mathrm{a} + 3\mathrm{b} & -2\mathrm{a} + \mathrm{b} \\ 8\mathrm{c} + 3\mathrm{d} & -2\mathrm{c} + \mathrm{d} \end{bmatrix}$$

Agora, devemos aplicar a identidade matricial:

$$4a + 2c = 8a + 3b \therefore 4a + 3b - 2c = 0\ (I)$$

$$4b + 2d = -2a + b \therefore -2a - 3b - 2d = 0\ (II)$$

$$3a + 5c = 8c + 3d \therefore a = c + d\ (III)$$

$$3b + 5d = -2c + d \therefore 3b + 2c + 4d = 0\ (IV)$$

Precisamos encontrar uma solução para o sistema, de modo que a matriz P seja invertível.

Substituindo (III) em (II), temos:

$$2a = 3b - 2d$$

$$2(c + d) = 3b - 2d$$

$$2c + 2d = 3b - 2d$$

$$3b - 4d + 2c = 0\ (V)$$

Comparando (V) e (IV), temos que:

$$3b + 2c + 4d = 0\ (IV)$$

$$3b - 4d + 2c = 0 (V)$$

Logo temos que:

$$d = 0$$

De (II), temos que:

$$-2a - 3b - 2d = 0$$

$$-2a - 3b = 0$$

$$\therefore a = -\frac{3b}{2}\ (VI)$$

De (I), temos que:

$$4a + 3b - 2c = 0$$

$$-6b + 3b - 2c = 0$$

$$-3b - 2c = 0$$

$$\therefore c = -\frac{3b}{2}\ (VII)$$

De (IV), temos:

$$3b + 2c + 4d = 0$$
$$3b + 2c = 0$$
$$\therefore c = -\frac{3b}{2}$$

Portanto, o sistema é indeterminado. Basta fazer b = 2 para encontrarmos um dos possíveis valores para a matriz P:

$$P = \begin{bmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz P encontrada é inversível, pois:

$$\det(P) = (-3).0 - (-3).2 = -6 \neq 0$$

Logo, encontramos uma matriz P tal que $C = PDP^{-1}$, portanto, C e D são inversíveis.

Gabarito: a) Demonstração b) C e D são inversíveis.

---

36. (IME/2019)

Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1

b) 2

c) 4

d) 8

e) 16

Comentários

Nessa questão, devemos notar que todos os logaritmandos são múltiplos de 3. Vamos simplificar o determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 3^4 & \log(3^2 \cdot 10^2) & \log(3 \cdot 10^2) \\ (\log 3^2)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4\log 3 & 2\log 3 + 2 & \log 3 + 2 \\ 4(\log 3)^2 & 2(\log 3 + 1)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 3 + 1 & \log 3 + 2 \\ (\log 3)^2 & (\log 3 + 1)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

Agora, perceba que o determinante resultante é de uma matriz de Vandermonde. Então, temos:

$$= 4 \cdot 2 \cdot \big(\log 3 + 2 - (\log 3 + 1)\big)(\log 3 + 2 - \log 3)(\log 3 + 1 - \log 3)$$
$$= 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 16$$

Gabarito: "e".

---

37. (IME/2018)

Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1 = x$ e razão r, com $x, r \in \mathbb{R}$. O determinante de

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix}$$

é

a) 0

b) $x^4 \cdot r$

c) $x^4 \cdot r^3$

d) $x \cdot r^4$

e) $x \cdot r^3$

Comentários

Vamos reescrever o determinante. Sabendo que (x_1, x_2, x_3, x_4) são os termos de uma PA com $x_1 = x$ e razão r, temos:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & x+r & x+r & x+r \\ x & x+r & x+2r & x+2r \\ x & x+r & x+2r & x+3r \end{vmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha por (-1) e somando às outras linhas:

$$\begin{vmatrix} x & x & x & x \\ 0 & r & r & r \\ 0 & r & 2r & 2r \\ 0 & r & 2r & 3r \end{vmatrix} = x \cdot r \cdot r \cdot r \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Podemos aplicar a regra de Chió:

$$= x \cdot r^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = x \cdot r^3 \cdot (6 + 2 + 2 - 2 - 4 - 3) = x \cdot r^3$$

Gabarito: "e".

38. (IME/2017)

Seja M uma matriz real $2x2$. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$.

Encontre todas as matrizes simétricas $2x2$ reais na qual $M^2 = f(M)$.

Comentários

Vamos encontrar todas as matrizes simétricas M_{2x2} tal que $M^2 = f(M)$.

Se M é simétrica, então, ele é da forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

$$M^2 = f(M) \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ c & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2=b\ (I) \\ ab+bc=a\ (II) \\ ab+bc=c\ (III) \\ b^2+c^2=b\ (IV) \end{cases}$$

Das igualdades (II) e (III), temos:

$$a=c$$

Substituindo essa identidade no sistema, encontramos:

$$\begin{cases} a^2+b^2=b\ (I) \\ 2ab=a\ (II) \\ 2ab=a\ (III) \\ b^2+a^2=b\ (IV) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=b\ (I) \\ 2ab=a\ (II) \end{cases}$$

De (II), temos:

$$a(2b-1)=0$$
$$a=0\ ou\ b=\frac{1}{2}$$

Se $a=0$, temos de (I):

$$b^2=b\Rightarrow b(b-1)=0\Rightarrow b=0\ ou\ b=1$$

Se $b=1/2$, temos de (I):

$$a^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\Rightarrow a^2=\frac{1}{4}\Rightarrow a=\pm\frac{1}{2}$$

Portanto, as matrizes que satisfazem ao problema são:

$$M=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \text{ou}\ M=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Gabarito: $\boldsymbol{M=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, M=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\ \text{ou}\ M=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

---

39. (IME/2017)

Seja $A=\begin{bmatrix}1&a&-2\\a-2&1&1\\2&-3&1\end{bmatrix}$ com $a\in\mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2-2A+I)=16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

Obs.: $\det(X)$ denota o determinante da matriz X

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Note que $A^2-2A+I=(A-I)^2$. Então, temos:

$$\det(A^2-2A+I)=\det(A-I)^2=\det(A-I)\cdot\det(A-I)=[\det(A-I)]^2$$

Aplicando o Teorema de Binet:

$$\Rightarrow[\det(A-I)]^2=16\Rightarrow\det(A-I)=\pm4$$

$$\det(A - I) = \begin{vmatrix} 0 & a & -2 \\ a-2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 2a + 6(a-2) = 8a - 12$$

Assim, temos as seguintes possibilidades:

$$8a - 12 = 4 \Rightarrow a = 2$$

Ou

$$8a - 12 = -4 \Rightarrow a = 1$$

Portanto, a soma dos valores de a que satisfazem essa condição é $a_1 + a_2 = 3$.

Gabarito: "d".

40. (IME/2016)

Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

Observação: I é a matriz identidade $2x2$.

a) $\frac{1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$

e) $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$

Comentários

Se $A^{24} = I$, aplicando o determinante, encontramos:

$$\det A^{24} = \det I \xRightarrow{Binet} [\det A]^{24} = 1 \Rightarrow (a^2 + b^2)^{24} = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$$

Para $\theta \in [0, 2\pi]$, temos que $a = \cos\theta$ e $b = -\operatorname{sen}\theta$ satisfazem a equação. Logo, A é a matriz de rotação:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Para a matriz de rotação, temos:

$$A^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\operatorname{sen} n\theta \\ \operatorname{sen} n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$$

Desse modo:

$$\boldsymbol{A^{24}} = \begin{bmatrix} \cos(24\theta) & -\operatorname{sen}(24\theta) \\ \operatorname{sen}(24\theta) & \cos(24\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \cos(24\theta) = 1 \text{ e } \operatorname{sen}(24\theta) = 0$$

$$24\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{k\pi}{12}$$

$$\Rightarrow a = \cos\left(\frac{k\pi}{12}\right)$$

Queremos o maior valor de a, como $a \neq 1$, encontramos o maior valor quando $k = 1$. Então:

$$a = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Esse é o cosseno de $15°$:

$$\cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30° = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

Gabarito: “e”.

41. (IME/2015)

Sejam $S = a + b + c$ e $P = a \cdot b \cdot c$. Calcule o determinante abaixo unicamente em função de S e P.

$$\begin{vmatrix} a^2 + (b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2 + b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

Comentários

Questão de manipulação algébrica.

Vamos aplicar o teorema de Jacobi no determinante da matriz:

$$D = \begin{vmatrix} a^2 + (b+c)^2 & 2b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ 2a^2 & (a+c)^2 + b^2 & (a+b)^2 + c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \quad x(-1)$$

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix} \quad x(-1)$$

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 - (b+c)^2 & (a+c)^2 - b^2 & 0 \\ a^2 - (b+c)^2 & 0 & (a+b)^2 - c^2 \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ (a-b-c)(a+b+c) & (a-b+c)(a+b+c) & 0 \\ (a-b-c)(a+b+c) & 0 & (a+b-c)(a+b+c) \end{vmatrix}$$

$$D = (a+b+c)^2 \cdot \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ (a-b-c) & (a-b+c) & 0 \\ (a-b-c) & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

$$x(-1)$$

$$D = (a+b+c)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2bc & b^2 & c^2 \\ -2c & (a-b+c) & 0 \\ -2b & 0 & (a+b-c) \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante:

$$D = \underbrace{(a+b+c)^2}_{S^2} \cdot \left[2bc\,\underbrace{(a-b+c)}_{S-2b}\,\underbrace{(a+b-c)}_{S-2c} + 2bc^2\,\underbrace{(a-b+c)}_{S-2b} + 2b^2c\,\underbrace{(a+b-c)}_{S-2c}\right]$$

$$D = S^2 \cdot 2bc \cdot [(S-2b)(S-2c) + c(S-2b) + b(S-2c)]$$

$$D = S^2 \cdot 2bc \cdot [S^2 - 2bS - 2cS + 4bc + cS - 2bc + bS - 2bc]$$

$$D = S^2 \cdot 2bc \cdot S \cdot \left[S - \underbrace{(b+c)}_{S-a}\right]$$

$$D = 2S^3abc = 2S^3P$$

Gabarito: $2S^3P$

42. (IME/2015)

Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2x & 0 & 0\\ x^2 & 1 & x-1 & 2\\ 1 & x+4 & 0 & 0\\ x & -1 & 1 & x-2\end{bmatrix}$$

a) 7

b) 8

c) 9

d) 10

e) 11

Comentários

Queremos $\det A=0$, precisamos encontrar a equação do determinante. Vamos aplicar a regra de Chió:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2x & 0 & 0\\ x^2 & 1 & x-1 & 2\\ 1 & x+4 & 0 & 0\\ x & -1 & 1 & x-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-2x^3 & x-1 & 2\\ -x+4 & 0 & 0\\ -1-2x^2 & 1 & x-2\end{vmatrix}$$

$$\det A=2(-x+4)-(-x+4)(x-1)(x-2)=(-x+4)(2-x^2+3x-2)$$

$$=(-x+4)(-x^2+3x)=x(x-4)(x-3)$$

Se $\det A=0$, então:

$$x(x-4)(x-3)=0\Rightarrow x_1=0\ ou\ x_2=3\ ou\ x_3=4$$

A soma do módulo desses valores é:

$$|x_1|+|x_2|+|x_3|=0+3+4=7$$

Gabarito: "a".

---

43. (IME/2014)

Seja a matriz $A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{bmatrix}$, em que a, b e c são números reais positivos satisfazendo $abc=1$. Sabe-se que $A^TA=I$, em que A^T é a matriz transposta de A e I é a matriz identidade de 3ª ordem. O produto dos possiveis valores de $a^3+b^3+c^3$ é

a) 2

b) 4

c) 6

d) 8

e) 10

Comentários

Essa questão foi anulada, veja o motivo:

Note que $A^T=A$, então:

$$A^2=I\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Dessa identidade, encontramos as seguintes equações:

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ ab+bc+ac=0 \end{cases}$$

Podemos usar essas equações para encontrar o valor de $a+b+c$:

$$(a+b+c)^2 = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{1} + 2(\underbrace{ab+bc+ac}_{0})$$

$$(a+b+c)^2 = 1 \Rightarrow a+b+c = \pm 1$$

O problema afirma que a, b, c são números reais positivos, então, devemos ter:

$$a+b+c=1$$

Sabendo que $abc = 1$, podemos usar a desigualdade das médias:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

$$a+b+c \geq 3$$

Nesse caso, encontramos um sistema sem solução, pois $a+b+c=1$ e pela desigualdade, vemos que o menor valor que $a+b+c$ assume é 3.

Por esse motivo, a questão foi anulada.

Se não houvesse a restrição de a, b, c ser positiva, poderíamos resolver o problema aplicando o determinante na identidade $A^2 = I$:

$$\det(A^2) = \det I \overset{Binet}{\Longrightarrow} (\det A)^2 = 1 \Rightarrow \det A = \pm 1$$

$$\det A = 3\underbrace{abc}_{1} - (a^3+b^3+c^3) = \pm 1$$

$$a^3+b^3+c^3 = 3 \mp 1$$

$$a^3+b^3+c^3 = 2 \; ou \; a^3+b^3+c^3 = 4$$

Portanto, o produto dos possíveis valores dessa expressão é $2 \cdot 4 = 8$.

Gabarito: Questão anulada

44. (IME/2013)

Seja Δ o determinante da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{bmatrix}$. O número de possíveis valores de x reais que anulam Δ é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos calcular o valor de x que torna o determinante nulo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x^2 & x^3 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & x & x^2 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Pelo teorema de Jacobi, vamos multiplicar a terceira linha por (-1) e somar à segunda linha:

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1-x & 0 & x^2-1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -(x-1) & 0 & (x-1)(x+1) \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & x+1 \\ x & x & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando a regra de Chió:

$$x \cdot (x-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & x+4 \\ -x & 1-3x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x \cdot (x-1) \cdot \big(2(1-3x) + x(x+4)\big) = 0$$
$$x(x-1)(2-6x+x^2+4x) = 0$$
$$x(x-1)(x^2-2x+2) = 0$$

Note que o discriminante da equação quadrática acima é menor que zero, logo, as raízes dessa equação não são reais:

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}$$

Portanto, as únicas raízes são:

$$x = 0 \; ou \; x = 1$$

Temos 2 raízes reais.

Gabarito: "c".

45. (IME/2012)

São dadas as matrizes quadradas inversiveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4-x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-\frac{1}{3}$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível.

Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

Obs.: $(M)^t$ é a matriz transposta de M.

a) -1 e 3

b) 1 e -3

c) 2 e 3

d) 1 e 3

e) -2 e -3

Comentários

Pela igualdade fornecida no enunciado:

$$(CA^t)^t = P^{-1}BP \Rightarrow AC^t = P^{-1}BP$$

Aplicando o determinante na equação acima:

$$\det(AC^t) = \det(P^{-1}BP) \overset{Binet}{\Longrightarrow} \det A \cdot \det C^t = \det P^{-1} \cdot \det B \cdot \det P \Rightarrow \det A \cdot \det C^t = \det B$$

Sabendo que $\det C^t = \det C$, do enunciado, temos:

$$\det C^t = \det C = 4 - x$$
$$\det B^{-1} = \frac{1}{\det B} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \det B = -3$$
$$\det A = -x$$

Substituindo os valores na equação dos determinantes:

$$-x(4-x) = -3$$
$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 3 \; ou \; x = 1$$

Gabarito: "d".

46. (IME/2012)

Calcule as raízes de $f(x)$ em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in \mathbb{R}$ (real) e

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}.$$

Comentários

Vamos usar o teorema de Jacobi e somar a segunda, terceira e quarta linha na primeira:

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c & x+a+b+c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$$

Agora, podemos usar a regra de Chió:

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-a & b-a \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Pelo teorema de Jacobi, vamos somar a segunda linha na primeira:

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a-b+c & x-a-b+c & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ c-b & x-b & a-b \\ b-c & a-c & x-c \end{vmatrix}$$

Aplicando Chió:

$$f(x) = (x+a+b+c)(x-a-b+c)\begin{vmatrix} x-c & a-b \\ a-b & x-c \end{vmatrix}$$

$$f(x) = (x+a+b+c)(x-a-b+c)((x-c)^2-(a-b)^2)$$

$$f(x) = (x+a+b+c)(x-a-b+c)(x-a+b-c)(x+a-b-c)$$

Portanto, as raízes de f são dadas por:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = -(a+b+c)\ ou\ x = a+b-c\ ou\ x = a-b+c\ ou\ x = -a+b+c$$

Gabarito: $x = -(a+b+c)$ ou $x = a+b-c$ ou $x = a-b+c$ ou $x = -a+b+c$

47. (IME/2010)

Demonstre que a matriz $\begin{pmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{pmatrix}$, onde $x, y, z \in \mathbb{N}$, pode ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.

Obs.: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

Comentários

Seja M uma matriz simétrica $3x3$ da forma:

$$M = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$$

O enunciado afirma que o traço de M deve ser igual a zero e todos os seus elementos perntecem ao conjunto dos números naturais, então, temos:

$$trM = a+b+c = 0$$

Como $a, b, c \in \mathbb{N}$, devemos ter $a = b = c = 0$:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix}$$

Queremos uma matriz M que satisfaça a seguinte relação:

$$M^2 = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d & e \\ d & 0 & f \\ e & f & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d^2 + e^2 & ef & df \\ ef & d^2 + f^2 & de \\ df & de & e^2 + f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Se tomarmos $d = z, e = y$ e $f = x$, temos que a igualdade é satisfeita.

Assim, $M = \begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$ é a matriz simétrica de traço igual a zero e cujos elementos são naturais que satisfaz a relação:

$$M^2 = \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & xy & xz \\ xy & x^2 + z^2 & yz \\ xz & yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Gabarito: Demonstração

48. (IME/2010)

Considere o determinante de uma matriz de ordem n, definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é

a) 59049

b) 48725

c) 29524

d) 9841

e) 364

Comentários

Vamos aplicar o teorema de Laplace na primeira coluna, então, para $n \geq 2$:

$$\Delta_n = 1 \cdot \mathrm{A}_{11} + (-1) \cdot A_{21}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{matriz\ triangular\ de\ ordem\ n-1}$$

O determinante acima é de uma matriz triangular de ordem $n-1$, então, o seu valor é igual ao produto da diagonal principal:

$$A_{11} = 3^{n-1}$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}}_{\Delta_{n-1}}$$

Nesse caso, o determinante possui a mesma forma de Δ_n com a diferença de uma ordem a menos:

$$A_{21} = -\Delta_{n-1}$$

Então, Δ_n é dado por:

$$\Delta_n = 3^{n-1} - (-\Delta_{n-1})$$
$$\Delta_n - \Delta_{n-1} = 3^{n-1}$$

Assim, encontramos uma fórmula de recorrência para o determinante. Para calcular Δ_{10}, podemos proceder da seguinte forma:

$$\cancel{\Delta_2} - \Delta_1 = 3^1$$
$$\cancel{\Delta_3} - \cancel{\Delta_2} = 3^2$$
$$\cancel{\Delta_4} - \cancel{\Delta_3} = 3^3$$
$$\vdots$$
$$\underline{\Delta_{10} - \cancel{\Delta_9} = 3^9}$$
$$\Delta_{10} - \underbrace{\Delta_1}_{1} = 3^1 + 3^2 + \dots + 3^9$$
$$\Rightarrow \Delta_{10} = \underbrace{1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^9}_{10\ termos}$$

Essa expressão é a soma de uma PG de razão $q = 3$ cujo primeiro termo é 1, desse modo:

$$\Delta_{10} = 1 \cdot \frac{(3^{10} - 1)}{3 - 1} = \frac{3^{10} - 1}{2} = 29524$$

Gabarito: "c".

49. (IME/2009)

Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

a) -81

b) -27

c) -3

d) 27

e) 81

Comentários

Do enunciado:

$$A^4 + 3A^3 = O$$
$$A^4 = -3A^3$$

Aplicando det dos dois lados:

$$\det A^4 = \det\left(-3A^3\right)$$

Mas, a matriz A é $4x4$, logo:

$$(\det A)^4 = (-3)^4 \cdot \det A^3$$
$$(\det A)^4 = (-3)^4 \cdot (\det A)^3$$
$$(\det A)^4 - [3^4 \cdot (\det A)^3] = 0$$
$$(\det A)^3(\det A - 3^4) = 0$$

Então, $\det A = 0$ ou $\det A = 3^4 = 81$. Contudo, o enunciado diz que A é inversível, então, $\det A \neq 0$. Portanto:

$$\boxed{\det A = 81}$$

Gabarito: "e"

---

50. (IME/2008)

Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

a) 1,0

b) π

c) 10,0

d) 11,0

e) 11,1

Comentários

$$\begin{vmatrix} \log \mathrm{x} & \log \mathrm{x} & \log \mathrm{x} \\ \log 6\mathrm{x} & \log 3\mathrm{x} & \cos \mathrm{x} \\ 1 & 1 & \log^2 \mathrm{x} \end{vmatrix} = 0$$

Colocando $\log x$ em evidência:

$$\log x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 6\mathrm{x} & \log 3\mathrm{x} & \cos \mathrm{x} \\ 1 & 1 & \log^2 \mathrm{x} \end{vmatrix} = 0$$

Pelo teorema de Jacobi, subtraindo a primeira linha da terceira linha, temos:

$$\log x \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 - \log^2 x \\ \log 6\mathrm{x} & \log 3\mathrm{x} & \cos \mathrm{x} \\ 1 & 1 & \log^2 \mathrm{x} \end{vmatrix} = 0$$

Aplicando teorema de Laplace na primeira linha:

$$\log x \cdot \left[(-1)^{1+3} \cdot (1 - \log^2 x) \cdot \begin{vmatrix} \log 6x & \log 3x \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right] = 0$$
$$\log x \cdot (1 - \log^2 x) \cdot (\log 6x - \log 3x) = 0$$

Portanto, devemos analisar três possibilidades:

1) se $\log x = 0$, então:

$$x = 1$$

2) se $(1 - \log^2 x) = 0$, então:

$$\log^2 x = 1$$
$$\log x = \pm 1$$
$$x = 10 \text{ ou } x = 10^{-1}$$

3) se $(\log 6x - \log 3x) = 0$, então:

$$\log 6x - \log 3x = 0$$
$$\log 6x = \log 3x$$
$$6x = 3x$$
$$x = 0$$

Mas isso não é uma raiz, pois $\log 0$ não está definido, ou seja, $x = 0$ não pertence ao domínio da função logarítmica.

Desse modo, as raízes são $x = 1$, $x = 10$ e $x = 10^{-1} = 0{,}1$. Assim:

$$S = 1 + 10 + 0{,}1 = 11{,}1$$

Gabarito: "e"

---

51. (IME/2007)

Seja a matriz D dada por:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ sen(\hat{P}) & sen(\hat{Q}) & sen(\hat{R}) \end{bmatrix}$$

na qual p, q e r são lados de um triângulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$. O valor do determinante de D é

a) -1

b) 0

c) 1

d) π

e) $p + q + r$

Comentários

Aplicando a lei dos senos no triângulo citado, temos:

$$\frac{p}{sen(\hat{P})} = \frac{q}{sen(\hat{Q})} = \frac{r}{sen(\hat{R})} \quad (I)$$

Além disso, calculando o determinante D, temos:

$$D = q \cdot sen(\hat{R}) + p \cdot sen(\hat{Q}) + r \cdot sen(\hat{P}) - q \cdot sen(\hat{P}) - r \cdot sen(\hat{Q}) - p \cdot sen(\hat{R})$$

Reorganizando:

$$D = \left(q \cdot sen(\hat{R}) - r \cdot sen(\hat{Q})\right) + \left(p \cdot sen(\hat{Q}) - q \cdot sen(\hat{P})\right) + \left(r \cdot sen(\hat{P}) - p \cdot sen(\hat{R})\right)$$

De (I), temos que:

$$q \cdot sen(\hat{R}) = r \cdot sen(\hat{Q})$$
$$p \cdot sen(\hat{Q}) = q \cdot sen(\hat{P})$$
$$r \cdot sen(\hat{P}) = p \cdot sen(\hat{R})$$

Logo,

$$D = 0 + 0 + 0 = 0$$

Gabarito: "b"

---

52. (IME/2007)

Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo n um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

Comentários

Temos que:

$$\det B = \det(P^{-1}AP)$$
$$\det B = \det P^{-1} \cdot \det A \cdot \det P$$

Mas P é inversível, logo:

$$\det P^{-1} = \frac{1}{\det P} \Rightarrow \det P^{-1} \cdot \det P = 1$$

Portanto:

$$\det B = (\det P^{-1} \cdot \det P) \cdot \det A \Rightarrow \det B = \det A$$

Do enunciado, temos:

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

Ou seja:

$$\det A = \frac{1}{2}$$

Para calcular o valor do determinante de A, basta usar o teorema de Binet:

$$\det A^n = (\det A)^n$$
$$\therefore \boxed{\det A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

Gabarito: $\det A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

---

53. (IME/2006)

Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{nxn}$$

Determine D_n em função de n $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$.

Comentários

Aplicando o teorema de Laplace em D_n na primeira linha:

$$D_n = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_{n-1}}{}_{(n-1)x(n-1)} +$$

$$(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)}$$

O segundo determinante pode ser calculado utilizando Laplace novamente:

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)} =$$

$$(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}}_{D_{n-2}}{}_{(n-2)x(n-2)} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\underbrace{\begin{vmatrix}0 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}}_{0}{}_{(n-2)x(n-2)}$$

Note que a primeira coluna do segundo determinante da soma acima é nula, logo, esse determinante é nulo.

Portanto, para o segundo determinante, temos:

$$\begin{vmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}_{(n-1)x(n-1)} = -D_{n-2}$$

Assim, o determinante D_n é dado pela seguinte fórmula de recorrência:

$$D_n = 2\cdot D_{(n-1)} - D_{(n-2)}$$

Usando essa fórmula, podemos escrever:

$$\begin{array}{c} D_n = \cancel{2}\cdot D_{(n-1)} - \cancel{D_{n-2}}\\ \cancel{D_{n-1}} = \cancel{2\cdot D_{n-2}} - \cancel{D_{n-3}}\\ \cancel{D_{n-2}} = \cancel{2\cdot D_{n-3}} - \cancel{D_{n-4}}\\ \vdots\\ \cancel{D_4} = \cancel{2\cdot D_3} - \cancel{D_2}\\ \cancel{D_3} = \cancel{2}\cdot D_2 - D_1\\ \hline D_n = D_{n-1} + D_2 - D_1 \end{array} (+)$$

Desse modo:

$$\begin{array}{c} D_n = D_{n-1} + D_2 - D_1 \\ D_{n-1} = D_{n-2} + D_2 - D_1 \\ \vdots \\ \underline{D_2 = D_1 + D_2 - D_1} \\ D_n = D_1 + (n-1)(D_2 - D_1) \end{array} (+)$$

$$\therefore \boxed{D_n = (n-1)(D_2 - D_1) + D_1}\ (I)$$

Podemos calcular D_2 e D_1:

$$D_1 = |2| = 2$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Substituindo esses valores em (I):

$$D_n = (n-1) \cdot (3-2) + 2$$

$$D_n = n - 1 + 2$$

$$\therefore \boxed{D_n = n + 1}$$

Gabarito: $D_n = n + 1$

---

54. (IME/2004)

Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Comentários

Seja Δ o determinante apresentado no enunciado. Pelo teorema de Jacobi, somando a primeira coluna com a segunda, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) + \log_2(n-1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2((n+1)(n-1)) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na primeira linha:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2((n+1)(n-1)) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2((n+1)(n-1)) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Para o novo determinante Δ_{3x3}, devemos somar a primeira coluna com a segunda coluna novamente:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ \log_2((n+1)(n-1)) & \log_2((n+1)(n-1)^2) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

Aplicando Laplace na primeira linha:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \log_2((n+1)(n-1)^2) & \log_2(n-1) \end{vmatrix} = \log_2(n-1) + \log_2\left((n+1)(n-1)^2\right)$$

$$\Delta = \log_2((n+1)(n-1)^3)$$

Como queremos $\Delta = 5$, temos:

$$\log_2\left((n+1)(n-1)^3\right) = 5$$
$$(n+1)(n-1)^3 = 2^5 = 4 \cdot 2^3$$

Portanto $n+1=4$ e $n-1=2$, ou seja, $\boxed{n=3}$ é solução.

Gabarito: $n = 3$

55. (IME/2002)

Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz $[R]$, abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comentários

Vamos calcular a inversa de $[R]$:

$$[R]^{-1} = \frac{1}{\det[R]} \cdot \overline{[R]}$$

1) $\det[R]$:

$$\det[R] = \cos^2(n\alpha) + sen^2(n\alpha) = 1$$

2) $\overline{[R]}$:

$$\overline{[R]} = \left([R]_{cof}\right)^T$$

$$\overline{[R]} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} sen(n\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & 0 \\ -\begin{vmatrix} -sen(n\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & \begin{vmatrix} \cos(n\alpha) & -sen(n\alpha) \\ sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T$$

$$\overline{[R]} = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -sen(n\alpha) & 0 \\ sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\overline{[R]} = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & sen(n\alpha) & 0 \\ -sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) $[R]^{-1}$:

$$[R]^{-1} = \frac{1}{\det[R]}\overline{[R]} = 1 \cdot \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & sen(n\alpha) & 0 \\ -sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & sen(n\alpha) & 0 \\ -sen(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [R]^T$$

Logo:

$$[R]^T = [R]^{-1}$$

Portanto, $[R]$ é ortogonal.

Gabarito: Prova

56. (IME/2000)

Calcule o determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

Comentários

Pelo teorema de Jacobi, vamos multiplicar a primeira coluna por (-1) e somar às outras.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

Aplicando o teorema de Laplace na primeira linha:

$$\mathrm{D} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

Aplicando teorema de Laplace na primeira linha, novamente:

$$\mathrm{D} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$$

Desse modo, podemos observar que realizando esse processo sucessivas vezes, obtemos:

$$D = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12$$
$$D = 46080$$

Gabarito: $D = 46080$