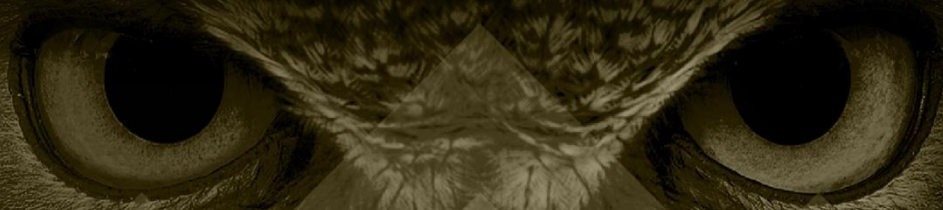


CURSO INTENSIVO 2022



Física

ITA - 2022

Refração da luz e óptica da visão

Prof. Toni Burgatto



Sumário

INTRODUÇÃO	4
1. REFRAÇÃO	4
1.1. Índice de refração	5
1.2. Leis da refração	6
1.2.1. Demonstração matemática da Lei de Snell	7
1.3. Dioptra plano e posição aparente	9
1.4. Dioptra esférico	10
1.4.1. Posição da imagem	11
1.4.2. Ampliação da imagem	12
1.5. Lâmina de faces paralelas	13
1.6. Reflexão total e ângulo limite	15
1.7. Fenômenos ópticos na natureza	18
1.7.1. Posição aparente de astros	18
1.7.2. Miragens e efeito de Fata Morgana	19
1.7.3. Arco-íris	19
1.8. Prisma óptico	20
1.8.1. Equações do prisma	21
1.8.2. Prismas de reflexão total	22
1.8.3. Desvio mínimo	23
1.8.4. Condição necessária para refração	25
2. LENTES DELGADAS	25
2.1. Nomenclatura e principais elementos geométricos das lentes delgadas	26
2.2. Comportamento óptico das lentes delgadas	26
2.3. Centro óptico	27
2.4. Distância focal e plano focal das lentes delgadas	28
2.5. Formação de imagens em lentes delgadas	28
2.6. Equação da lente delgada	30
2.6.1. Condição de distância mínima entre imagem e objeto	31
2.7. Aumento transversal	32
2.8. Vergência	32
2.9. Equação dos fabricantes de lentes	33

2.11. Método de Pierre Lucie	35
2.12. Associação de lentes delgadas	36
2.12.1. Associação não justaposta	36
2.12.2. Associação justaposta	36
3. INSTRUMENTOS ÓPTICOS	37
3.1. Ângulo visual e distância do ponto próximo	38
3.2. Classificação de instrumentos ópticos	38
3.3. Aumento angular	38
3.4. Lupa e Microscópio simples	39
3.5. Microscópio composto	40
3.6. Luneta astronômica	41
3.7. Luneta terrestre	43
3.8. Telescópio de Galileu	43
4. ÓPTICA DA VISÃO	43
4.1. O Globo Ocular	44
4.2. Acomodação visual	44
4.2.1. Amplitude de acomodação	45
4.3. Defeitos visuais e suas correções	45
4.3.1. Miopia	45
4.3.2. Hipermetropia	46
4.3.3. Presbiopia	47
4.3.4. Astigmatismo	47
4.3.5. Estrabismo	47
5. LISTA DE QUESTÕES	48
6. GABARITO SEM COMENTÁRIOS	57
7. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS	58
9. CONSIDERAÇÕES FINAIS	81
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	82
11. VERSÃO DE AULA	82

Introdução

Nesta aula continuaremos o estudo de Óptica geométrica. Começaremos com refração e suas leis, bem como o estudo de dióptro plano e esférico, além de prisma.

Além disso, estudaremos lentes delgadas, instrumentos ópticos e óptica da visão. Lentes delgadas é comum aparecer, assim como instrumentos ópticos. Óptica da visão não é muito comum, mas pode aparecer. Por isso, não vale a pena estender muito neste tema.

Fique atento a equação do dióptro plano e do esférico, pois podem aparecer na sua prova e saber bem como aplica garante agilidade na sua prova. A equação dos fabricantes também é muito importante para o ITA.

Anote as equações deduzidas e como usá-las, pois, você não terá tempo para deduzir na sua prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



@proftoniburgatto

1. Refração

Seja a velocidade da luz no vácuo c , quando esta se propagar em outro meio que não o vácuo, terá velocidade menor v . O fenômeno que causa esta mudança na velocidade da onda se chama refração. É usual pensar na refração como sendo a variação do ângulo da trajetória da luz, mas isto não abrangeria, por exemplo, o caso em que a incidência é perpendicular como veremos adiante. Portanto, de forma visual, o fenômeno da refração está representado abaixo,

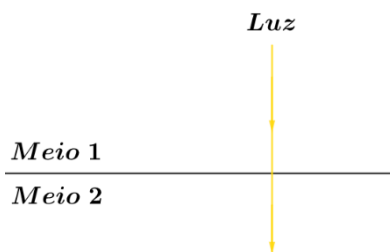


Figura 1: Incidência perpendicular da luz sobre interface entre dois meios.

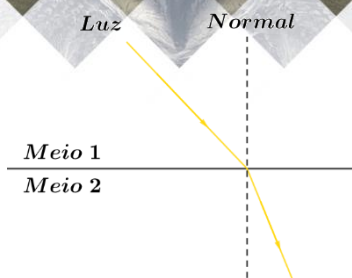


Figura 2: Incidência oblíqua da luz sobre interface entre dois meios.

Para representar a relação entre a velocidade da luz em um meio e a velocidade da luz no vácuo, definiu-se uma grandeza chamada **índice de refração** (n).

1.1. Índice de refração

Existem dois tipos de índices de refração. O primeiro, o **índice de refração absoluto**, definido como a razão entre a velocidade de propagação da luz no vácuo (c) e a velocidade de propagação da luz no meio (v). Assim:

$$n = \frac{c}{v}$$

Observações:

- O n é adimensional por ser a relação entre velocidades.
- Como c será sempre maior ou igual a v , n é sempre maior ou igual a 1.

O segundo tipo de índice de refração é o **índice de refração relativo**, definido como a relação entre dois índices de refração absolutos. Por exemplo, o índice de refração relativo do meio 1 em relação ao meio 2 é:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{v_2}{v_1}$$

É importante ressaltar que a luz não tem sua frequência alterada sendo transmitida em diferentes meios. Portanto, pode-se utilizar o índice de refração para encontrar a relação entre os comprimentos de ondas em cada meio.

$$v = \lambda \cdot f$$

$$n_{12} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\lambda_2 \cdot f}{\lambda_1 \cdot f} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

É importante lembrar que qualquer luz monocromática no vácuo possui velocidade c . No entanto, em outros meios, diferentes luzes monocromáticas possuem diferentes velocidades e, com isso, diferentes índices de refração. As velocidades decrescem no sentido da luz vermelha para a luz violeta. Portanto, o índice de refração depende da luz monocromática analisada. Como:

$$v_{\text{verm}} > v_{\text{violeta}} \Rightarrow \frac{1}{v_{\text{verm}}} < \frac{1}{v_{\text{violeta}}} \Rightarrow \frac{c}{v_{\text{verm}}} < \frac{c}{v_{\text{violeta}}}$$

$$n_{\text{verm}} < n_{\text{violeta}}$$

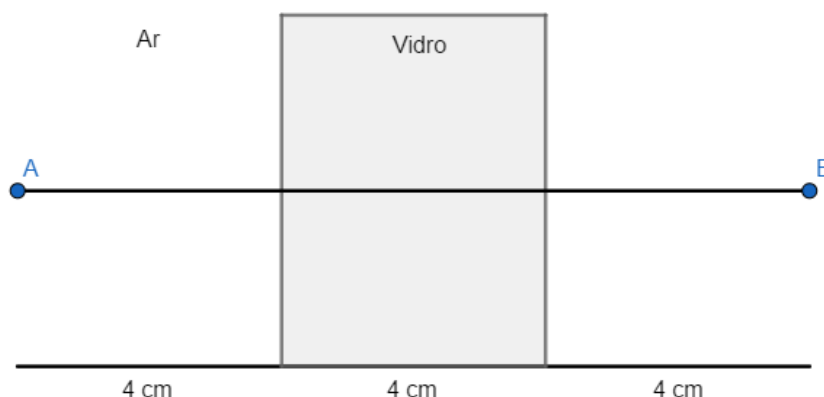
Finalmente, é importante ressaltar a importância que as condições do meio possuem sobre o índice de refração. Experimentalmente, nota-se que a variação da densidade do meio afeta o índice de refração. Relacionado à variação de densidade, têm-se a temperatura (no caso de líquidos e gases) e a pressão (para gases). A influência da pressão nos líquidos é desprezada pois estes são considerados incompressíveis (a densidade só varia com variações muito grandes de pressão), e a influência de ambas as condições é desprezada para os sólidos, sendo mais determinante o processo de produção do material que pode gerar um mesmo material com densidades diferentes.

ESCLARECENDO!



1)

Sabendo-se que o comprimento de onda da luz violeta é de $4 \cdot 10^{-7} \text{ m}$, quantos comprimentos de onda completo a onda realizou ao partir de A, no vácuo, atravessar a placa de vidro ($n = 1,5$) e atingir o ponto B?



Comentários:

Tem-se 8 cm sendo percorrido pela luz no ar ($n \cong 1$) e 4 cm sendo percorridos no vidro. Calculando-se o comprimento da onda da luz violeta no vidro:

$$n_{\text{vidro}} = \frac{\lambda_{\text{violeta, vácuo}}}{\lambda_{\text{violeta, vidro}}} \Rightarrow 1,5 = \frac{4 \cdot 10^{-7}}{\lambda_{\text{violeta, vidro}}} \Rightarrow \lambda_{\text{violeta, vidro}} = \frac{8}{3} \cdot 10^{-7}$$

Portanto, o número de comprimentos de onda é:

$$\frac{l_{\text{vácuo}}}{\lambda_{\text{vácuo}}} + \frac{l_{\text{vidro}}}{\lambda_{\text{vidro}}} = \frac{8 \cdot 10^{-2}}{4 \cdot 10^{-7}} + \frac{4 \cdot 10^{-2}}{\frac{8}{3} \cdot 10^{-7}} = (2 + 1,5) \cdot 10^5 = \boxed{3,5 \cdot 10^5 \text{ comprimentos de onda}}$$

1.2. Leis da refração

O fenômeno da refração é fundamentado em duas leis.

1ª Lei da Refração: O raio incidente, o raio refratado e a reta normal traçadas pelo ponto de incidência estão todos contidos no mesmo plano, conforme figura 1 e 2.

2ª Lei da Refração: Também conhecido como “Lei de Snell”, define a relação entre o seno do ângulo incidente e do ângulo refratado para um dióptro. A Lei de Snell é expressa por:

$$\frac{n_{\hat{i}}}{n_{\hat{r}}} = \frac{\text{sen } \theta_{\hat{r}}}{\text{sen } \theta_{\hat{i}}} \Rightarrow n_{\hat{i}} \cdot \text{sen } \theta_{\hat{i}} = n_{\hat{r}} \cdot \text{sen } \theta_{\hat{r}} \text{ (eq. 1.2.1)}$$

Em que os índices \hat{i} e \hat{r} referem-se, respectivamente, ao raio incidente e refratado e os meios onde cada um se localiza. Visualmente:

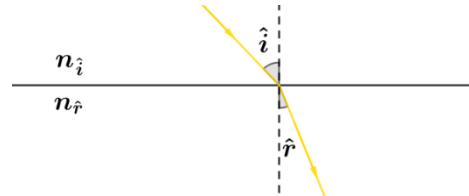


Figura 3: Raio refratado na passagem pela interface de dois meios.

1.2.1. Demonstração matemática da Lei de Snell

A demonstração matemática da Lei de Snell é baseado no princípio de Fermat em que a trajetória percorrida pela luz é aquela que busca minimizar o tempo. Vejamos abaixo:

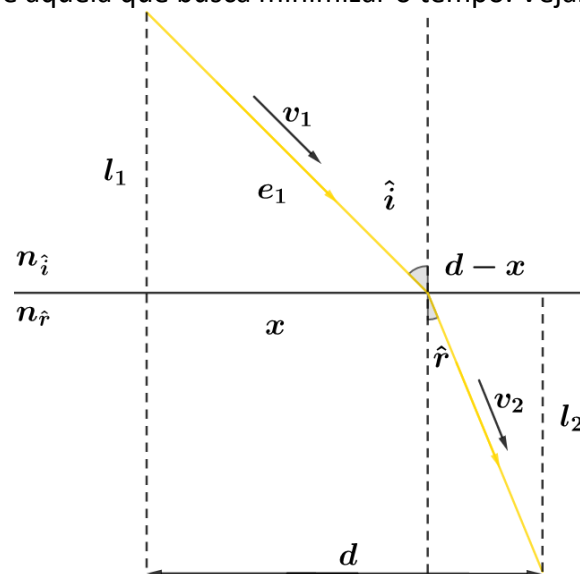


Figura 4: Refração de um raio de luz.

O tempo necessário para que a luz faça o percurso retratado na imagem é de:

$$t = t_{n_i} + t_{n_r} = \frac{e_1}{v_1} + \frac{e_2}{v_2} \text{ (eq. 1.2.2)}$$

Como:

$$\begin{cases} e_1 = \sqrt{x^2 + l_1^2} \\ e_2 = \sqrt{(d-x)^2 + l_2^2} \\ v_1 = \frac{c}{n_{\hat{i}}} \\ v_2 = \frac{c}{n_{\hat{r}}} \end{cases}$$

Substituindo na equação 1.2.2, tem-se que:

$$t = \frac{\sqrt{x^2 + l_1^2}}{c} \cdot n_1 + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}}{c} \cdot n_2 \text{ (eq. 1.2.3)}$$

O tempo de percurso é mínimo quando:

$$\frac{dt}{dx} = 0$$

Substituindo a equação 1.2.3:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \cdot \left(\frac{x \cdot n_i}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} - \frac{(d-x) \cdot n_{\hat{r}}}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} \right) = 0$$

Logo:

$$n_i \cdot \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = n_{\hat{r}} \cdot \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} \text{ (eq. 1.2.4)}$$

Mas:

$$\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} = \text{sen } \hat{i} \\ \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + l_2^2}} = \text{sen } \hat{r} \end{cases}$$

Substituindo na equação 1.2.4, chega-se à:

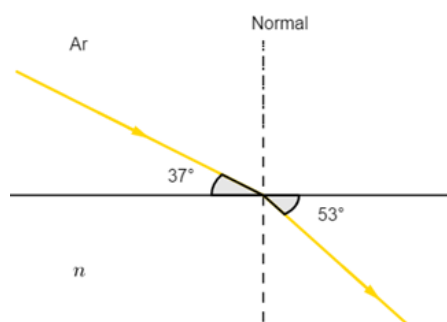
$$n_i \cdot \text{sen } \hat{i} = n_{\hat{r}} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

ESCLARECENDO!



2)

Sabendo que a luz se comporta como descrito na figura a seguir, calcule a velocidade de propagação da luz no segundo meio.



Comentários:

Deve-se notar que os ângulos fornecidos não são os ângulos adjacentes à normal. Portanto, ao utilizar-se a Lei de Snell, devem ser utilizados os ângulos complementares aos mostrados.

$$n_{ar} \cdot \sin 53^\circ = n \cdot \sin 37^\circ$$

Com $n_{ar} \cong 1$:

$$n = \frac{\sin 53^\circ}{\sin 37^\circ} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

E, a velocidade no meio é dada por:

$$v = \frac{c}{n} \Rightarrow v = \frac{3}{4} \cdot c$$

1.3. Dióptro plano e posição aparente

Um dióptro plano é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície plana. O efeito de mudança de trajetória da luz ao atravessar um dióptro plano causa uma aparente mudança de posição para um observador que se encontra em um meio diferente do objeto. Observe a figura abaixo:

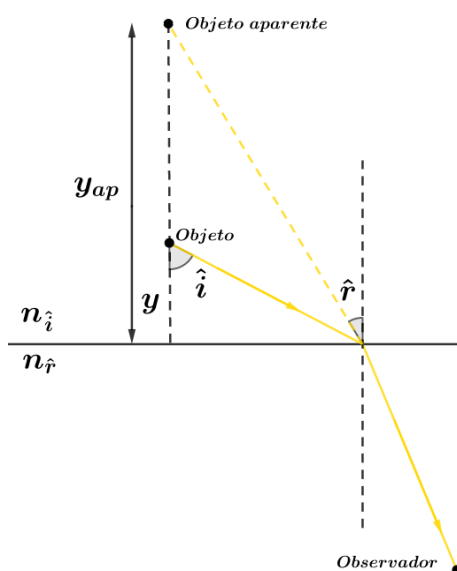


Figura 5: Representação de posição aparente por transmissão da luz em um dióptro plano.

Nota-se que o raio de luz produzido pelo objeto e que chega ao observador indica uma posição diferente da verdadeira do objeto. Pela Lei de Snell, podemos escrever que:

$$n_1 \cdot \sin \hat{i} = n_2 \cdot \sin \hat{r}$$

Fazendo as considerações para ângulos pequenos de pequenos, o que caracteriza um dióptro plano, isto é, o observador está vendo o objeto quase que verticalmente, chegamos na equação do dióptro plano.

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_2}{n_1} \text{ (eq. 1.3.1)}$$

Em que:

- n_1 é o índice de refração do meio no qual se encontra o objeto.
- n_2 é o índice de refração do meio no qual se encontra o observador.

Assim, reescrevendo:

$$y_{ap} = y \cdot \frac{n_{\text{observador}}}{n_{\text{objeto}}} \quad (\text{eq. 1.3.2})$$

Observações:

- A equação 1.3.1 pode ser usada independente de qual o sentido de propagação da luz, seja do mais refringente para o menos ou o contrário.
- É usual que as questões adotem uma resolução pela equação 1.3.1 mesmo que os ângulos não sejam pequenos.

ESCLARECENDO!



3)

Uma moeda se encontra no fundo de um recipiente 4 m abaixo da superfície da água. Se um observador diretamente sobre a moeda observá-la, determine a que profundidade este observador percebe a moeda.

Adotar $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$.

Comentários:

Como o observador está diretamente sobre a moeda, está se tratando de ângulos muito pequenos, portanto utiliza-se a equação 1.3.5.

$$y_{ap} = 4 \cdot \frac{1}{\frac{4}{3}} = 3 \text{ m}$$

1.4. Dioptro esférico

Um dioptro esférico é um sistema formado por dois meios homogêneos e transparentes separados por uma superfície esférica.

1.4.1. Posição da imagem

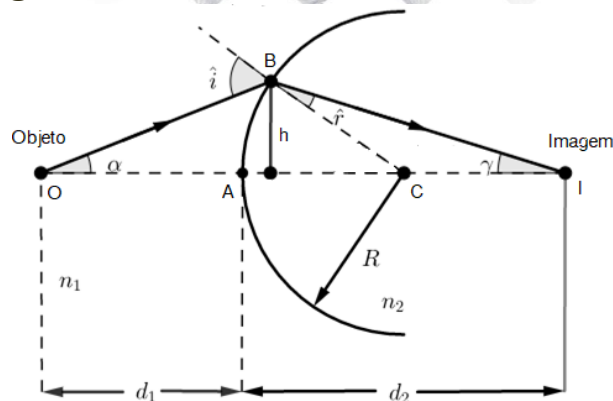


Figura 6: Trajetória da luz em um dióptro esférico.

Para encontrar a relação entre d_1 e d_2 , primeiro utiliza-se a Lei de Snell.

$$n_1 \cdot \sin \hat{i} = n_2 \cdot \sin \hat{r}$$

Aplicando as condições de ângulos pequenos para α e γ , temos a equação do dióptro esférico:

$$\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

É comum que esta fórmula apareça como:

$$\frac{n_{vem}}{p} + \frac{n_{vai}}{p'} = \frac{n_{vem} - n_{vai}}{R}$$

Em que “vem” e “vai” se referem à trajetória da luz. “Vem” estará sempre do lado da luz incidente e “vai” sempre do lado da luz refratada.

Observações:

- $p > 0$ sempre. O objeto define qual o lado que se adota a “luz incidente”;
- $p' > 0$ se a imagem se encontra do lado oposto do objeto, ou seja, do lado da “luz refratada”, caso contrário será negativa (imagem virtual);
- $R > 0$ para uma superfície convexa e $R < 0$ para superfície côncava. A definição de superfície côncava ou convexa é feita a partir do referencial a trajetória percorrida pela luz.

1.4.2. Ampliação da imagem

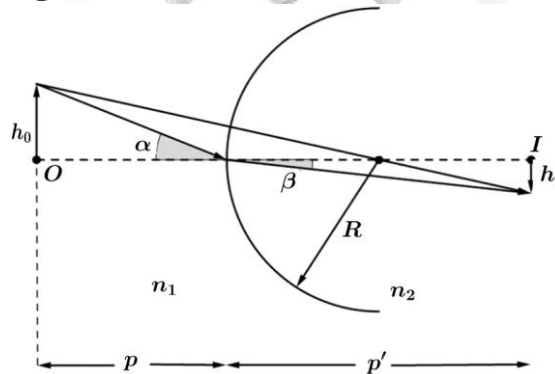


Figura 7: Formação da imagem para um corpo extenso em dióptro esférico.

Com a aproximação para-axial:

$$\text{sen } \alpha \cong \frac{h_o}{p} \text{ e } \text{sen } \beta \cong \frac{h_i}{p'}$$

Utilizando Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \frac{h_o}{p} = n_2 \cdot \frac{h_i}{p'} \Rightarrow \frac{h_i}{h_o} = \frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Como:

$$A = -\frac{h_i}{h_o}$$

Tem-se:

$$A = -\frac{n_1}{n_2} \cdot \frac{p'}{p}$$

Usualmente, encontra-se esta fórmula como:

$$A = -\frac{n_{\text{vem}}}{n_{\text{vai}}} \cdot \frac{p'}{p}$$

ESCLARECENDO!



4)

Um peixe, no centro de um aquário esférico de raio 30 cm e a 20 cm da parede do aquário, é observado por um gato que se encontra à 40 cm da parede do aquário. A que distância o gato, visualiza o peixe? Qual a ampliação da imagem do peixe? Adote $n_{\text{ar}} = 1$ e $n_{\text{água}} = \frac{4}{3}$.

Comentários:

Para o gato visualizando o peixe:

$$p = 20 \text{ cm}; n_{vem} = \frac{4}{3}; n_{vai} = 1; R = 30 \text{ cm}$$

Repare que n_{vem} foi adotado baseado no objeto, neste caso o peixe e R é positivo, pois, para o peixe como objeto, a superfície é côncava.

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{90} \Rightarrow p' = -\frac{90}{5} \cong -18 \text{ cm}$$

Como o gato está à 40 cm do aquário, ele enxerga o peixe à 58 cm.

$$A = -\frac{n_{vem}}{n_{vai}} \cdot \frac{p'}{p} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{-18}{20} = 1,2$$

1.5. Lâmina de faces paralelas

Uma lâmina de faces paralelas é a associação de dois dioptros planos com superfícies paralelas. A luz ao passar por uma lâmina de face paralelas sofre dois desvios, como mostra a figura abaixo.

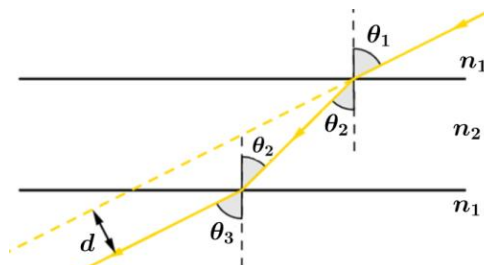


Figura 8: Trajetória da luz ao atravessar uma lâmina de faces paralelas.

Aplicando Lei de Snell duas vezes:

$$n_1 \cdot \sin \theta_1 = n_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$n_2 \cdot \sin \theta_2 = n_1 \cdot \sin \theta_3$$

Logo:

$$\theta_1 = \theta_3$$

Na representação feita, adotou-se que a lâmina possui meios de mesmo índice de refração de cada lado. Nessa situação, o raio emergente e o raio incidente são paralelos. Embora seja possível que os índices de refração dos meios adjacentes à placa sejam diferentes, não é usual.

Para calcular o deslocamento, vamos utilizar a figura a seguir.

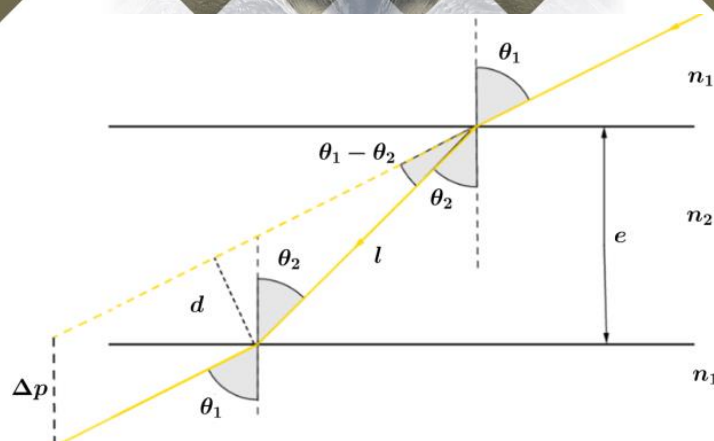


Figura 9: Ampliação da figura 8.

Da figura:

$$d = l \cdot \text{sen}(\theta_1 - \theta_2)$$

$$\cos \theta_2 = \frac{e}{l} \Rightarrow l = \frac{e}{\cos \theta_2}$$

Substituindo o segundo resultado na primeira relação:

$$d = e \cdot \frac{\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)}{\cos \theta_2} \quad (\text{eq. 1.4.1})$$

Por relações trigonométricas:

$$\Delta p = \frac{d}{\text{sen} \theta_1} \quad (\text{eq. 1.4.2})$$

Para o caso de ângulos pequenos estes resultados podem ser aproximados para:

$$d = e \cdot (\theta_1 - \theta_2) = e \cdot \theta_1 \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

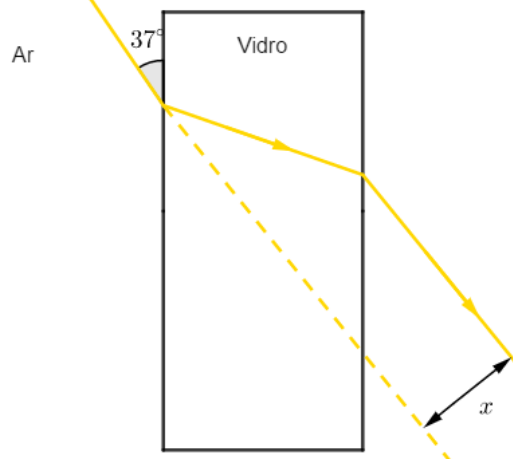
$$\Delta p = e \cdot \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)$$

ESCLARECENDO!



5)

Determine o desvio x se o raio de luz monocromático atravessa uma lâmina de faces paralelas de 20 cm de espessura. Adote $n_{\text{vidro}} = 1,6$.



Comentários:

Para a resolução da questão é necessário encontrar θ_1 e θ_2 . Da figura, tem-se que $\theta_1 = 53^\circ$. Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \sin \theta_1 = n_{vidro} \cdot \sin \theta_2$$

$$1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5} \cdot \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

Agora, calculando $\sin (\theta_1 - \theta_2)$:

$$\sin (53^\circ - 30^\circ) = \sin 53^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 53^\circ = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} \cong 0,393$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cong 0,866$$

Assim:

$$x = 0,2 \cdot \frac{0,393}{0,866} = 0,091 \Rightarrow \boxed{x \cong 9,1 \text{ cm}}$$

1.6. Reflexão total e ângulo limite

Como visto, a luz ao passar de um meio mais refringente para um meio menos refringente afasta-se da normal. Existe um **ângulo limite** de incidência para o qual a luz refratada irá se afastar suficientemente da normal de modo que não possa mais ser detectada. Isto ocorre quando o ângulo refratado tiver um ângulo em relação à normal que se aproxima de 90° . Observe a figura abaixo:

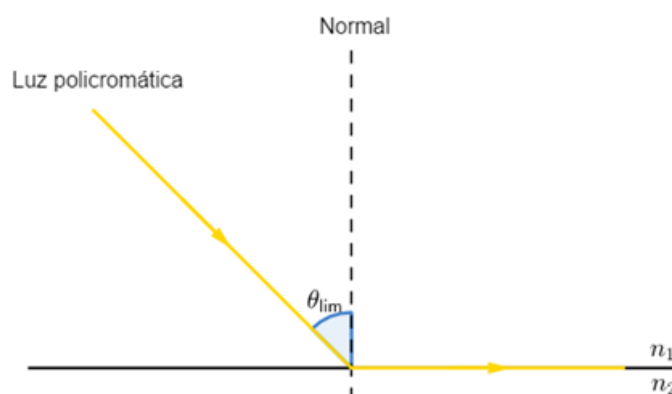


Figura 10: Situação de ângulo incidente igual ao ângulo limite.

O ângulo limite pode ser calculado por Lei de Snell como:

$$n_1 \cdot \sin \theta_{lim} = n_2 \cdot \sin 90^\circ$$

$$\theta_{lim} = \arcsen \left(\frac{n_2}{n_1} \right) \Leftrightarrow n_1 > n_2$$

O fenômeno caracterizado por um ângulo de incidência maior ou igual ao ângulo limite direcionado da superfície mais refringente para a menos refringente é conhecido como **reflexão total**.

Observações:

- A **reflexão total ocorre somente na passagem de luz do meio mais refringente para o menos refringente**. Isso observa-se tanto fisicamente, pelo fato de que o raio se afasta da normal ao realizar a trajetória nesse sentido, quanto matematicamente, visto que a fórmula encontrada para o ângulo limite não permite que $\frac{n_2}{n_1}$ seja maior do que 1.

- Diz-se que o ângulo limite é o ângulo para o qual o raio refratado tende a se propagar rente à superfície, pois é impossível que ele realmente o faça. O feixe de luz apresenta uma espessura que, mesmo que muito pequena, é diferente de zero. Caso a mudança do meio de propagação forçasse a luz a se propagar rente à superfície, sua espessura iria reduzir-se a zero e haveria uma degeneração do feixe.

ESCLARECENDO!



6) (ITA-1995)

Uma gaivota pousada na superfície da água, cujo índice de refração em relação ao ar é $n = 1,3$, observa um peixe que está exatamente abaixo dela, a uma profundidade de 1 m. Que distância, em linha reta, deverá nadar o peixinho para sair do campo visual da gaivota?

- a) 0,84 m b) 1,2 m c) 1,6 m
d) 1,4 m e) o peixinho não conseguirá fugir do campo visual da gaivota.

Comentários:

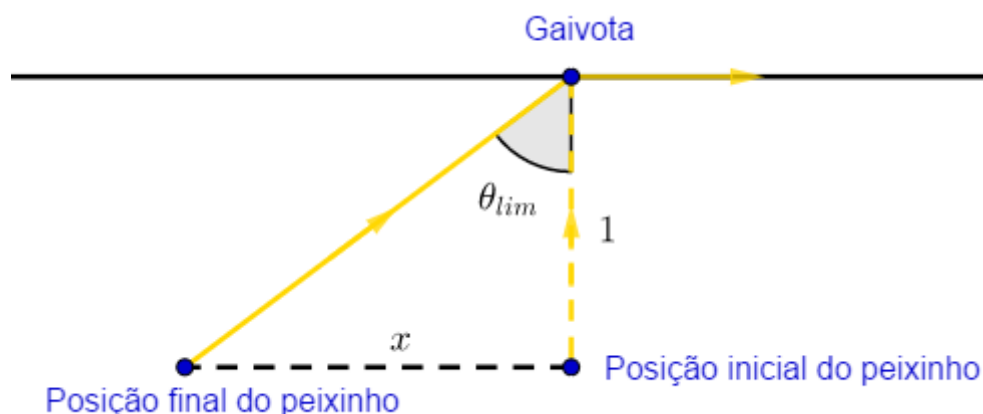
Primeiramente deve-se analisar se será possível que o peixe fuja do campo visual. Para que isso ocorra, não deve chegar luz do objeto (o peixinho) até o observador (gaivota), ou seja, é necessário que ocorra reflexão total da luz que sai da água e passa para o ar. Isso é possível pois se propagará do meio mais refringente para o meio menos refringente.

O ângulo limite nessa propagação é dado por:

$$\sin \theta_{lim} = \frac{1}{1,3}$$

$$\cos \theta_{lim} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{1,3} \right)^2} = \sqrt{\frac{0,69}{1,69}}$$

Portanto, $\tan \theta_{lim} = \frac{1}{\sqrt{0,69}}$. A situação está representada na figura a seguir.



Portanto:

$$\frac{x}{1} = \operatorname{tg} \theta_{lim} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{0,69}} \cong 1,2 \text{ m}$$

7) (ITA-1980)

Um raio luminoso incide sobre um cubo de vidro, como indica a figura. Qual deve ser o valor do índice de refração do vidro, para que ocorra a reflexão total na face vertical?

a) $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $n < \frac{\sqrt{3}}{2}$

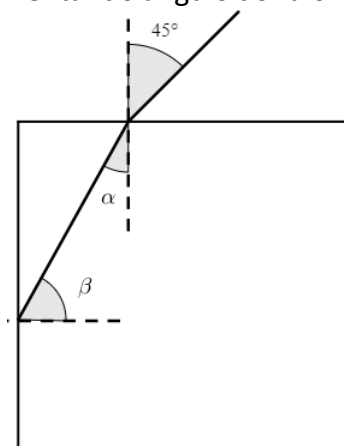
c) $n > \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $n < \frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $n > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Comentários:

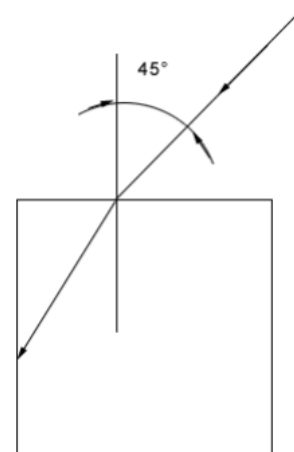
Para que ocorra reflexão total, o ângulo incidente sobre a face esquerda deve ser maior ou igual ao ângulo limite. Este ângulo é complementar do ângulo do raio refratado com a normal na face superior.



Portanto:

$$\operatorname{sen} \beta > \operatorname{sen} \theta_{lim} = \frac{1}{n}$$

Mas:



$$\sin \beta = \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

E:

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} \cdot \sin 45^\circ$$

Unindo tudo:

$$\sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot n^2}} > \frac{1}{n} \Rightarrow 1 - \frac{1}{2 \cdot n^2} > \frac{1}{n^2} \Rightarrow 1 > \frac{3}{2 \cdot n^2} \Rightarrow n^2 > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{n > \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Portanto, letra A.

1.7. Fenômenos ópticos na natureza

Existem fenômenos na natureza que são explicados com base no que foi visto até agora nesta aula. São exemplos disso as miragens, efeito de Fata Morgana, arco-íris e a posição aparente de astros.

1.7.1. Posição aparente de astros

A atmosfera terrestre apresenta um gradiente de temperatura e pressão que gera uma variação de densidade do ar ao longo de sua extensão. Essa variação de densidade impede que a atmosfera seja considerada um meio homogêneo, pois, haverá uma variação do índice de refração entre posições de diferentes altitudes na atmosfera.

Como regra geral, a densidade aumenta quanto mais próximo da superfície, assim, a refração também. Como ocorre um aumento de refração, por Lei de Snell, verifica-se que o raio irá se aproximar gradualmente da normal. Visualmente, a situação está representada a seguir.

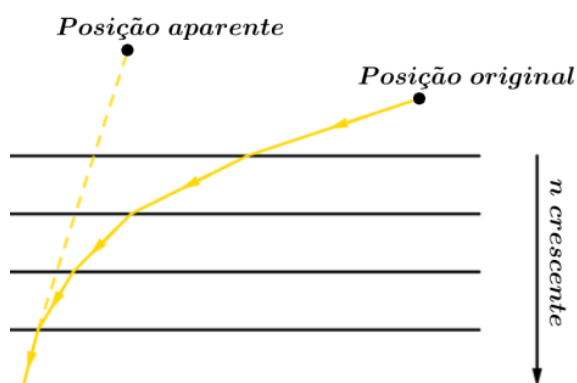


Figura 11: Estratificação feita da atmosfera e trajetória de um raio de luz.

Como pode-se observar pela imagem, no sentido crescente de refração, ocorre uma aproximação do raio de luz à reta normal. Esta variação é gradual e bem lenta ao longo da extensão da atmosfera, mas faz com que não se observe a posição real dos astros.

Esta estratificação em conjunto com a diferença de índices de refração para cada comprimento de onda é utilizada para a explicação do nascer e do pôr do Sol serem avermelhados. O índice de refração para o vermelho é menor, seu ângulo refratado é maior. Portanto, o vermelho chega a distâncias que o azul e o violeta não são capazes, no momento do nascer e do pôr do Sol, de chegar até o observador. Visualmente:

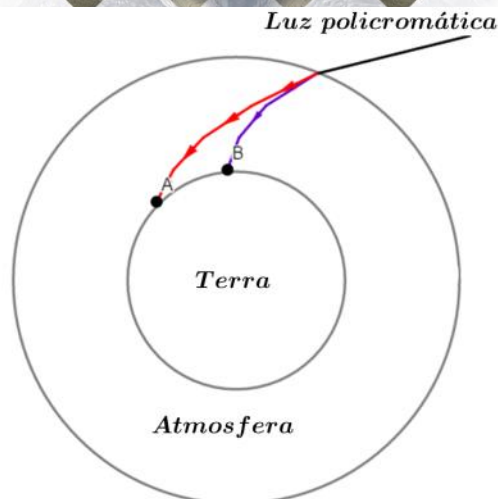


Figura 12: Exemplificando efeito da atmosfera sobre diferentes frequências de luz emitidas pelo Sol.

No ponto A, estaria ocorrendo o pôr do Sol, enquanto em B ainda seria de dia.

1.7.2. Miragens e efeito de Fata Morgana

As miragens e o efeito de Fata Morgana são fenômenos causados também pela não homogeneidade da atmosfera terrestre. Entretanto, ao invés do objeto se encontrar fora da atmosfera e o observador dentro, como é o caso do subtópico anterior, neste caso o objeto e observador encontram-se dentro da atmosfera.

A miragem ocorre sobretudo em locais em que, próximo do solo, a temperatura eleva-se drasticamente. Esse aumento da temperatura faz com que as camadas de ar mais próximas do solo tenham menor densidade, e, por conseguinte, menor índice de refração. A luz ao propagar-se do meio mais refringente para o menos refringente afasta-se da linha normal até o caso limite em que ocorre reflexão total. Este é o fenômeno da miragem, a luz emitida para baixo pelo objeto é sucessivamente refratada, sofre uma eventual reflexão total e após mais refrações chega ao observador, de modo que o observador pode ver até mesmo duas imagens.

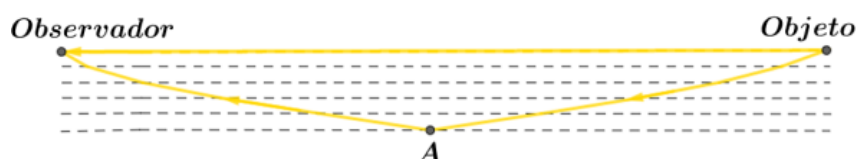


Figura 13: Representação gráfica do fenômeno da miragem. Reflexão total ocorre em A.

O efeito de Fata Morgana é semelhante, mas ocorre em regiões com temperaturas muito frias próximo à superfície da Terra, onde a refração aumenta conforme aproxima-se do solo. As duas imagens formadas são a obtida por um raio de luz que vai diretamente ao observador e outro que irá por cima, sofrendo refrações e uma reflexão total, chegando até o observador. Portanto, o raio de luz representado na figura 13 estaria percorrendo um caminho por cima no caso do Fata Morgana.

1.7.3. Arco-íris

O fenômeno do arco-íris acontece em ambientes de alta umidade, pois, é produzido a partir da refração e posterior reflexão total dióptro esférico formado por uma gotícula de água no ar, como representado na figura abaixo.

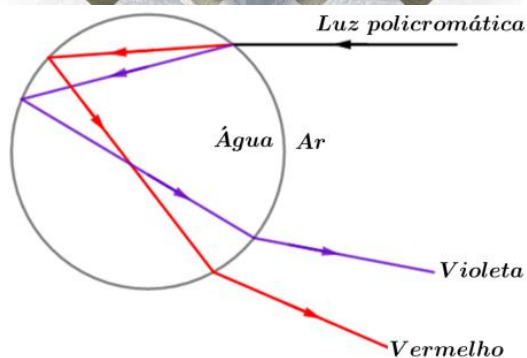


Figura 14: Refração e reflexão total da luz no interior de uma gota de água produzindo um arco-íris.

Na figura 14, representou-se somente os raios de luz vermelha e violeta, mas entre esses há a ocorrência de todas as cores do espectro do visível, produzindo o arco-íris na ordem conhecida.

ESCLARECENDO!



8) (ITA-1996)

Com respeito ao fenômeno do arco íris, pode-se afirmar que:

- I. Se uma pessoa observa um arco íris a sua frente, então o Sol está necessariamente à oeste.
II. O Sol sempre está à direita ou à esquerda do observador.
III. O arco-íris se forma devido ao fenômeno de dispersão da luz nas gotas de água.
- a) Todas são corretas. b) Somente I é falsa.
c) Somente III é falsa. d) Somente II e III são falsas.
e) Somente I e II são falsas.

Comentários:

O arco-íris ocorre devido à dispersão da luz e reflexão total no interior das gotas de água. Portanto, é necessário que o indivíduo esteja entre o sol e as gotas para que após os raios sofrerem reflexão total cheguem até ele.

- I. Falsa.
II. Falsa.
III. Verdadeiro.
Alternativa E.

1.8. Prisma óptico

Um prisma óptico é composto por dois dióptros planos não paralelos, como mostrado na figura 15.

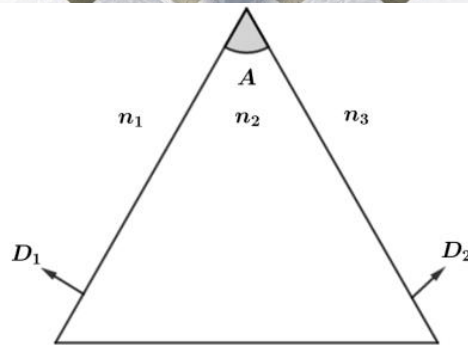


Figura 15: Seção principal de um prisma óptico.

A visão bidimensional de um prisma é chamada de seção principal. O ângulo A é chamado de **ângulo de abertura**. Os dioptrios 1 e 2 são chamados de faces do prisma e o cruzamento entre eles é chamado de aresta do prisma. Na figura 16, uma representação tridimensional de um prisma óptico.

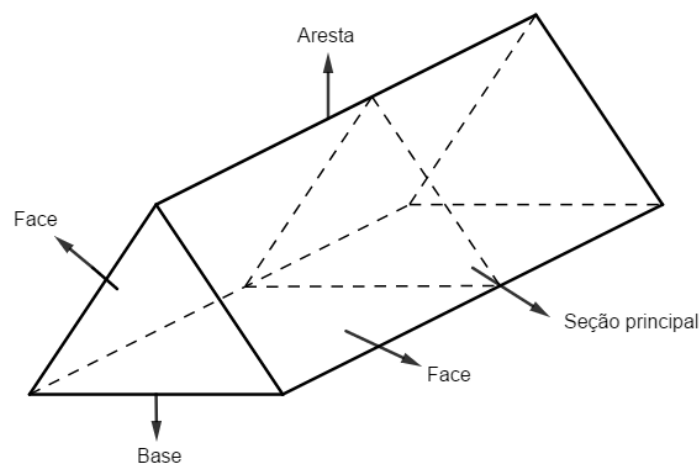


Figura 16: Visão em perspectiva de um prisma.

1.8.1. Equações do prisma

Para analisar o efeito do prisma sobre a luz, vamos utilizar como base a figura 15 abaixo.

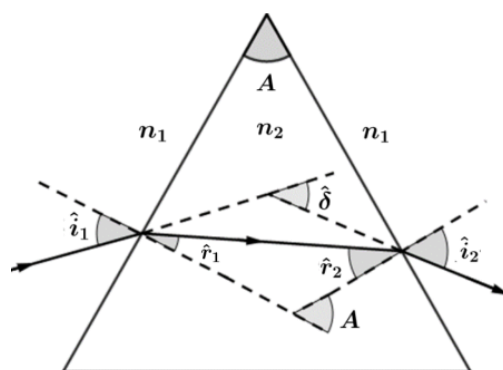


Figura 17: Trajetória da luz atravessando um prisma óptico

Primeiramente deve-se notar que, por construção, surge o ângulo A no cruzamento entre as retas normais. A continuação da trajetória do raio incidente e do raio emergente é chamado de **desvio** (δ). Adota-se a nomenclatura \hat{r} para ambos os ângulos internos ao prisma e \hat{i} para os ângulos externos devido ao fato de que se o sentido da luz for invertido, a trajetória será a mesma!

Da figura, juntamente a Lei de Snell, tiram-se as quatro relações:

$$\begin{cases} A = \hat{r}_1 + \hat{r}_2 \\ \hat{\delta} = (\hat{i}_1 - \hat{r}_1) + (\hat{i}_2 - \hat{r}_2) \\ n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_1 = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}_1 \\ n_1 \cdot \text{sen } \hat{i}_2 = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}_2 \end{cases}$$

Entretanto, quando trabalhamos com ângulos pequenos ($< 10^\circ$), é possível aproximar as duas últimas relações para:

$$\begin{cases} n_1 \cdot \hat{i}_1 = n_2 \cdot \hat{r}_1 \\ n_1 \cdot \hat{i}_2 = n_2 \cdot \hat{r}_2 \end{cases}$$

Finalmente, com as duas primeiras equações, tira-se:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A} \text{ (eq. 1.8.1)}$$

Observações:

- Como comentado anteriormente, a reversibilidade dos raios de luz condiz com a relação obtida, visto que ao se trocar \hat{i}_1 e \hat{i}_2 de posição, o desvio permanece o mesmo.

- Nem sempre existirá desvio, pois pode não haver raio emergente caso ocorra reflexão total na saída do raio.

1.8.2. Prismas de reflexão total

Como o próprio nome diz, trata-se de prismas onde ocorre reflexão total. A principal utilização deste tipo de prisma é a substituição de espelhos planos, quando possível, pois, diferentemente do espelho plano, não possui um *espelho de prata* que se danifica facilmente. Abaixo, mostram-se os dois principais tipos de prismas de reflexão total.

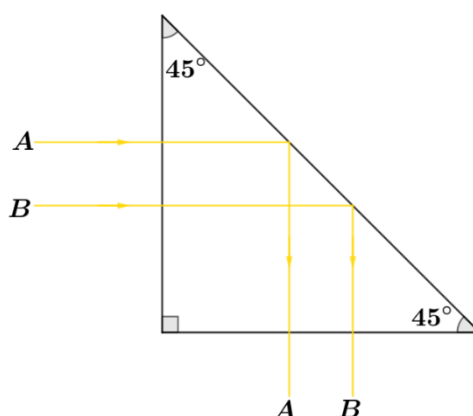


Figura 18: Prisma de reflexão total com desvio de 90°

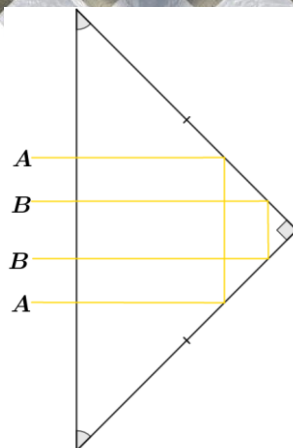


Figura 19: Prisma de reflexão total com desvio de 180°

Deve-se notar a ordem entre os raios que entram e os raios que saem do prisma. Se realizar-se uma combinação de dois prismas da figura 18, ou somente um prisma da figura 19, ocorre uma inversão da imagem. Quanto ao índice de refração mínimo para que tais prismas, inseridos no ar, funcionem de acordo com as imagens, calcula-se através da aplicação da Lei de Snell considerando a incidência de 45°, obtido por construção, como sendo o ângulo limite. Dessa forma:

$$\text{sen } \theta_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{prisma}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n_{\text{prisma}} \geq \sqrt{2}$$

Este resultado é válido para ambos os prismas, mas está restrito ao caso em que estes se encontram imersos no ar.

1.8.3. Desvio mínimo

Como visto no final do item **Equações do prisma**, o desvio depende dos ângulos incidente, emergente e de abertura. Entretanto, o ângulo emergente é função do ângulo incidente e do índice de refração relativo. Portanto, os três fatores que influenciam o desvio são: o ângulo incidente, o ângulo de abertura e o índice de refração.

Portanto, trabalhando-se a equação 1.8.1, tem-se:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}$$

O desvio mínimo ocorre quando $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$. Isto é demonstrado a partir da equação 1.8.1.

$$\hat{\delta} = \left(\sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) + 2\sqrt{\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2} - \hat{A}$$

Este valor é mínimo quando $\left(\sqrt{\hat{i}_1^2} - \sqrt{\hat{i}_2^2} \right) = 0$, ou seja, $\hat{i}_1 = \hat{i}_2$. Substituindo na equação 1.8.1:

$$\hat{i} = \frac{\hat{\delta}_{\text{min}} + \hat{A}}{2}$$

Com isto, tem-se também que $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$. Mas, $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$, logo:

$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$$

Portanto, substituindo-se isto na Lei de Snell (sem aproximações para-axiais) e adotando $\hat{i}_1 = \hat{i}_2 = \hat{i}$:

$$n_1 \cdot \text{sen } \hat{i} = n_2 \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\text{sen} \left(\frac{\hat{\delta}_{\min} + \hat{A}}{2} \right)}{\text{sen} \frac{\hat{A}}{2}} \quad (\text{eq. 1.8.2})$$

A equação 1.8.2 é conhecida como fórmula de Newton e permite obter experimentalmente o índice de refração do prisma. Entretanto, para o escopo do vestibular, considerando a aproximação para-axial, utilizamos a expressão simplificada:

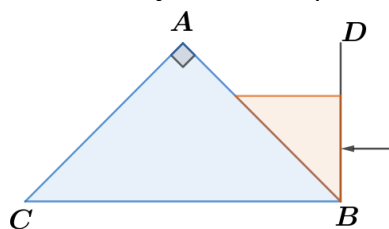
$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\hat{\delta}_{\min}}{\hat{A}} + 1 \Rightarrow \hat{\delta}_{\min} = \left(\frac{n_2}{n_1} - 1 \right) \cdot \hat{A}$$

ESCLARECENDO!



9) (ITA-SP)

Um prisma de vidro, de índice de refração $n = \sqrt{2}$, tem por secção normal um triângulo retângulo isósceles ABC no plano vertical. O volume de secção transversal ABD é mantido cheio de um líquido de índice de refração $n' = \sqrt{3}$. Um raio incide normalmente à face transparente da parede vertical BD e atravessa o líquido. Determine o ângulo de refração do raio que emerge pela face AC.



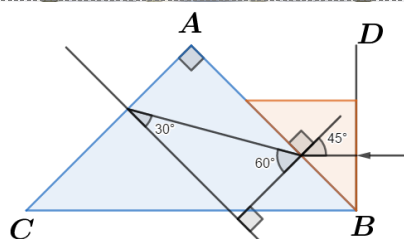
Comentários:

Primeiramente, o ângulo de incidência sobre a face AB é de 45° . Aplicando a Lei de Snell:

$$n_{\text{liq}} \cdot \text{sen } 45^\circ = n_{\text{vidro}} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

$$\text{sen } \hat{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{r} = 60^\circ$$

Assim, tem-se:



Assim, para encontrar o ângulo do raio emergente:

$$n_{\text{vidro}} \cdot \sin 30^\circ = n_{\text{ar}} \cdot \sin \hat{r}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \boxed{\hat{r} = 45^\circ}$$

Ou seja, o raio sai paralelo à BC.

1.8.4. Condição necessária para refração

É condição necessária, mas não suficiente, que $\hat{A} \geq 2 \cdot \hat{L}$, onde \hat{L} é o ângulo limite. A demonstração está abaixo:

$$\hat{r}_2 \leq \hat{L}$$

Mas, como $\hat{A} = \hat{r}_1 + \hat{r}_2$:

$$\hat{A} - \hat{r}_1 \leq \hat{L}$$

$$\hat{r}_1 \geq \hat{A} - \hat{L} \Rightarrow \sin \hat{r}_1 \geq \sin (\hat{A} - \hat{L})$$

E, como $\sin \hat{r}_1 \leq 1$:

$$\frac{n_1}{n_2} \geq \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \hat{r}_1 \geq \sin (\hat{A} - \hat{L})$$

Só que $\frac{n_1}{n_2} = \sin \hat{L}$, portanto:

$$\sin \hat{L} \geq \sin (\hat{A} - \hat{L})$$

$$\hat{L} \geq \hat{A} - \hat{L} \Rightarrow \hat{A} \leq 2 \cdot \hat{L}$$

2. Lentes Delgadas

Uma lente é um dos instrumentos ópticos mais comuns no dia-a-dia. As lentes estão presentes desde óculos até instrumentos de observação sofisticados. A última etapa do curso de lentes delgadas consiste no estudo de instrumentos ópticos formados pela associação de lentes.

Uma lente consiste na associação de dois dióptros, sendo pelo menos um deles esférico. O tipo de lente mais comum são as chamadas **lentes delgadas**, que consistem na associação de dois dióptros com distância muito pequena entre eles, de modo que a espessura da lente pode ser desprezada.

2.1. Nomenclatura e principais elementos geométricos das lentes delgadas

As lentes são divididas em dois tipos de acordo com os tipos de dioptros presentes. São elas:

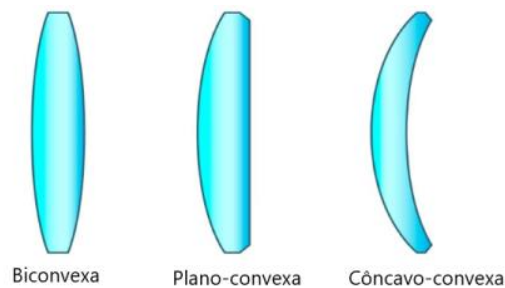


Figura 20: Lentes de bordas finas

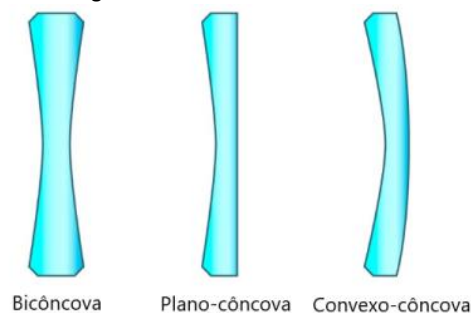


Figura 21: Lentes de bordas grossas

A separação em lentes de bordas finas e grossas é intuitiva. Quanto à nomenclatura, é uma combinação do tipo de cada dioptro, sendo o primeiro nome aquele do dioptro cujo raio é maior, considera-se que o dioptro plano tem raio tendendo à infinito. O tipo do dioptro é sempre definido com base em um observador externo ao sistema. Na figura abaixo, estão representados os principais elementos geométricos de uma lente delgada:

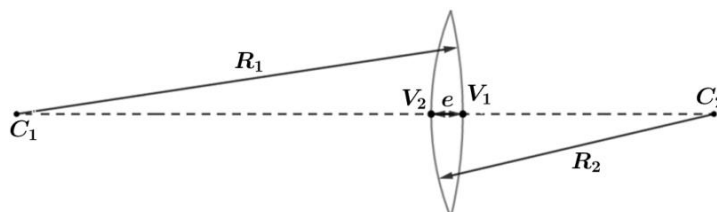


Figura 22: Principais elementos geométricos de uma lente delgada

V_1 e V_2 são os vértices de cada lente, R_1 e R_2 os raios, C_1 e C_2 os centros ópticos e e a espessura da lente.

2.2. Comportamento óptico das lentes delgadas

As lentes delgadas são classificadas também com base no seu comportamento óptico, podendo ser: *lentes convergentes* ou *lentes divergentes*. Para diferenciá-las basta observar o efeito delas sobre um feixe de raios paralelos. As lentes convergentes fazem os raios refratados convergirem em um só ponto. As lentes divergentes fazem os raios refratados divergirem, como se partissem de um só ponto. Esses dois pontos são conhecidos como **focos principais** das lentes. Ambos os comportamentos e seus focos principais são expostos na figura 23, abaixo.

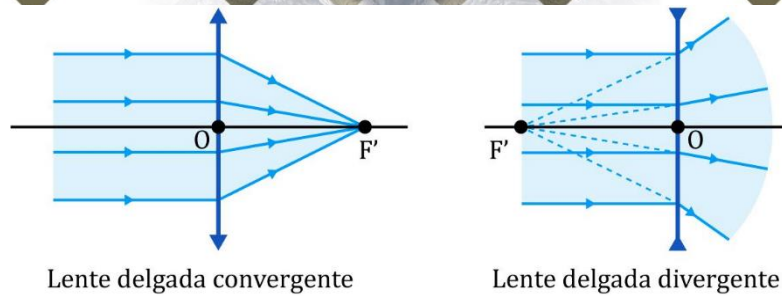


Figura 23: Trajetória do feixe de luz passando por uma lente.

É usual a representação de lentes como um segmento de reta com duas setas baseadas no comportamento da lente. O efeito óptico que a lente produz depende não só de características da lente, mas também do meio no qual essa está inserida.

	$n_{lente} > n_{meio}$	$n_{lente} < n_{meio}$
Bordas finas	Convergente	Divergente
Bordas grossas	Divergente	Convergente

Mais adiante, ao estudar a **equação dos fabricantes de lentes** esta tabela será retomada com mais detalhes.

2.3. Centro óptico

O centro óptico é o ponto pertencente ao eixo principal pelo qual um raio de luz passa sem sofrer desvio angular. O método para encontrar este ponto foge ao escopo do curso, pois aqui trabalha-se somente com lentes delgadas.

Para as lentes delgadas, adotou-se espessura desprezível, ou seja, os vértices das lentes são tomados como coincidentes, logo, a interseção da lente com o eixo principal será um único ponto. Neste ponto coincidem os dois vértices e o centro óptico, visto que o centro óptico deve pertencer ao “interior” da lente e do eixo principal.

Na figura abaixo, mostra-se o que ocorre com um raio de luz que atravessa o centro óptico.

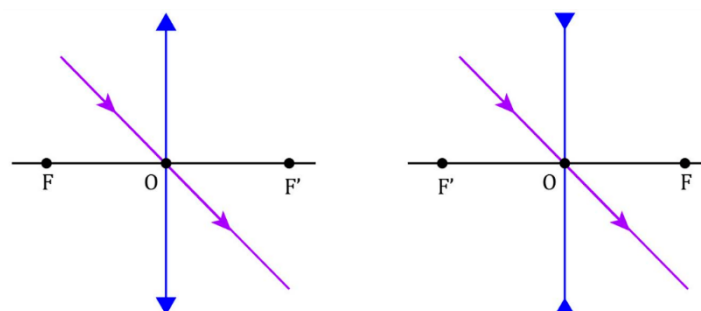


Figura 24: Trajetória de raio de luz passando pelo centro óptico.

É importante perceber que independe da lente ser divergente ou convergente.

2.4. Distância focal e plano focal das lentes delgadas

O conceito de ponto focal já foi introduzido, resta apenas definir a *distância focal*, esta é a distância dos focos até o centro óptico da lente. Mas, nem sempre os raios serão paralelos ao eixo óptico da lente.

Considerando um feixe de raios paralelos entre si, mas oblíquos ao eixo principal. Estes raios ao passarem por uma lente ainda convergem para um ponto, se ela for convergente, ou divergem de um ponto, se ela for divergente. Este novo ponto é chamado de **foco secundário**. Todos os focos secundários pertencem a um plano que contém o foco principal e é perpendicular ao eixo principal. Visualmente:

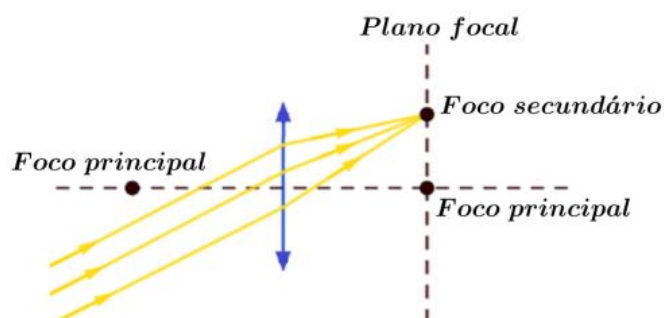


Figura 25: Plano focal e um foco secundário de lente convergente

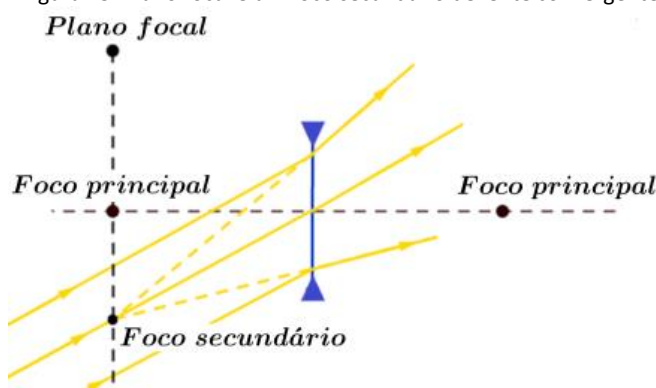


Figura 26: Plano focal e um foco secundário para uma lente divergente.

2.5. Formação de imagens em lentes delgadas

A formação de imagens para uma lente delgada será demonstrada a seguir. A base de tudo são os raios que passam pelos pontos mais importantes da lente, e as posições em que o objeto pode se localizar.

Os raios que serão utilizados são aqueles paralelos ao eixo principal, ou seja, que passam pelo foco e os que passam pelo centro óptico, ou seja, não sofre desvio angular. Quanto às posições, ele pode localizar-se atrás do *ponto antiprincipal* (2 distâncias focais da lente), entre o ponto antiprincipal e o foco, entre o foco e o centro ótico.

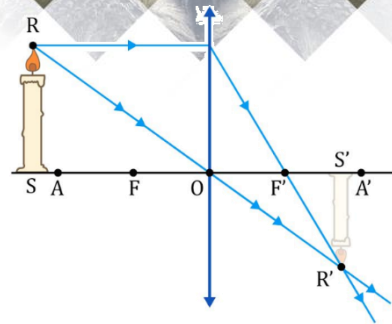


Figura 27: Formação de imagem para lente convergente.

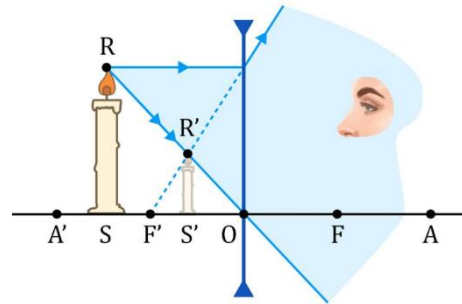


Figura 28: Formação de imagem para uma lente divergente.

A partir de agora, A e A' referem-se respectivamente ao ponto antiprincipal objeto e imagem, F e F' ao foco objeto e foco imagem O ao centro óptico. Pode-se resumir os resultados na seguinte tabela:

Característica óptica da lente	Posição do objeto	Imagem real ou virtual	Imagem direita ou invertida	Imagem maior, menor ou igual ao objeto?
Convergente	Além de A	Real	Invertida	Menor
Convergente	Sobre A	Real	Invertida	Igual
Convergente	Entre A e F	Real	Invertida	Maior
Convergente	Sobre F	-	-	-
Convergente	Entre F e O	Virtual	Direita	Maior
Divergente	Qualquer uma	Virtual	Direita	Menor

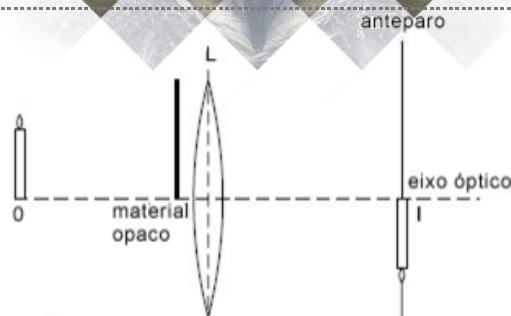
É importante observar que, desta tabela, conclui-se que sempre que uma imagem for maior, necessariamente a lente é convergente.

ESCLARECENDO!



10) (ITA-1985)

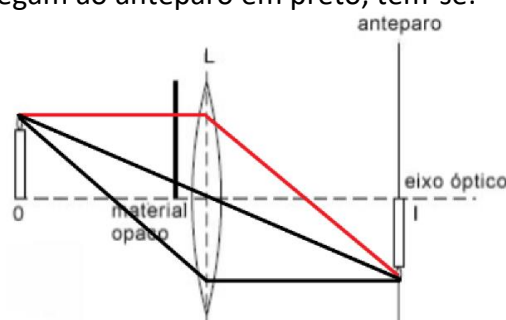
A figura abaixo representa uma lente delgada L a qual forma sobre um anteparo, uma imagem real I de um objeto real O. A lente é circular esférica e o eixo óptico tem a posição indicada. Suponhamos agora que com um material opaco disposto entre o objeto e a lente bloqueamos toda a parte que corresponde ao semicírculo superior da lente. Nessas condições:



- a) a imagem desaparece do anteparo
- b) a imagem fica fora de foco
- c) a imagem não desaparece, mas fica mais tênue
- d) a imagem se torna virtual
- e) nada se pode afirmar se não conhecermos a posição, exata do material opaco.

Comentários:

Esboçando a situação, com os raios de luz que chegavam ao anteparo e não chegam mais em vermelho e com os que ainda chegam ao anteparo em preto, tem-se:



Ainda se tem raios de luz chegando à mesma posição, portanto, não se perdeu nitidez, entretanto, a quantidade de luz que chega diminuiu, portanto, perdeu-se intensidade luminosa da imagem. Portanto, a alternativa correta é **letra C**.

2.6. Equação da lente delgada

Três das principais grandezas associadas a uma lente delgada, são: a distância do objeto à lente (p), a distância da imagem à lente (p') e a distância focal da lente (f). Para relacionar estas medidas, adotar-se-á o chamado **Referencial Gaussiano**. Neste referencial, divide-se o espaço com o plano da lente, o lado da luz incidente e o lado da luz refratada. Com base no lado que se encontram o objeto e a imagem, p e p' assumem sinais diferentes.

	Lado da luz incidente	Lado da luz refratada
p	Positivo (objeto real)	Negativo (objeto virtual)
p'	Negativo (imagem virtual)	Positivo (imagem real)

No referencial de Gauss, também se adotam convenções de sinais para h e h' , as alturas das imagens. Para uma imagem direita, o objeto e a imagem têm ordenada de mesmo sinal, enquanto para uma imagem invertida, o objeto e a imagem têm ordenadas de sinais opostos.

E, por último, o referencial gaussiano define que:

Lente divergente	Lente convergente
Distância focal negativa	Distância focal positiva

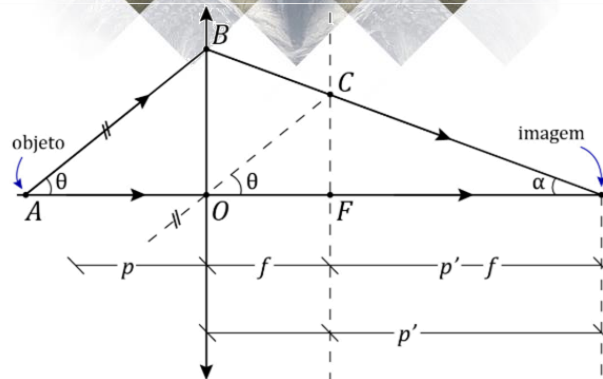


Figura 29: Formação de imagem em lente delgada.

Da figura, tem-se que $\triangle ABO \sim \triangle OCF$:

$$\frac{BO}{p} = \frac{CF}{f} \Rightarrow \frac{BO}{CF} = \frac{p}{f}$$

E, $\triangle EIO \sim \triangle PFI$:

$$\frac{BO}{CF} = \frac{p'}{p' - f}$$

Destas expressões, obtém-se que:

$$\frac{p}{f} = \frac{p'}{p' - f} \Rightarrow p \cdot p' - p \cdot f = p' \cdot f \Rightarrow f \cdot (p + p') = p \cdot p'$$

Dividindo toda a expressão por $f \cdot p \cdot p'$:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

2.6.1. Condição de distância mínima entre imagem e objeto

Considere que se tem um objeto à uma distância d de um anteparo. Ao colocar-se uma lente entre o objeto e o anteparo projeta-se uma imagem real sobre o anteparo. Portanto:

$$p + p' = d$$

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{d - p} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{d}{p \cdot (d - p)}$$

$$d \cdot f = d \cdot p - p^2$$

Para que exista um p que gere projeção:

$$\Delta = d^2 - 4 \cdot d \cdot f \geq 0 \therefore d \geq 4 \cdot f$$

2.7. Aumento transversal

Analisando a figura abaixo da formação de uma imagem por uma lente:

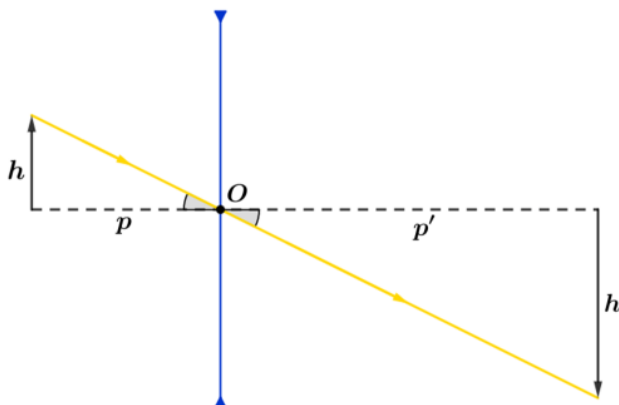


Figura 30: Lente qualquer para obtenção do aumento linear.

Por semelhança de triângulos:

$$\left| \frac{h'}{h} \right| = \left| \frac{p'}{p} \right|$$

Mas, pelo referencial gaussiano $h' < 0$, $h > 0$, $p > 0$ e $p' > 0$. Portanto:

$$\frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

Logo:

$$A = \frac{h'}{h} = -\frac{p'}{p}$$

Observações:

Com respeito ao significado físico de A :

- Se A é positivo, a imagem é direita, se for negativo, a imagem é invertida.
- Se $|A| > 1$, a imagem é maior, caso contrário, ela será menor.

2.8. Vergência

Para comparar diferentes lentes em termos de “mais forte” e “mais fraca”, em relação à sua capacidade de alterar a trajetória da luz, utiliza-se a grandeza física **Vergência (V)**. A vergência é definida como:

$$V = \frac{1}{f}$$

A unidade utilizada para a vergência no SI é:

$$\text{Unidade } (V) = m^{-1} = \text{dioptria (di)}$$

Baseado nos sinais adotados anteriormente para f , tem-se que:

$$\begin{cases} V > 0 \Leftrightarrow f > 0 \Leftrightarrow \text{lente convergente} \\ V < 0 \Leftrightarrow f < 0 \Leftrightarrow \text{lente divergente} \end{cases}$$

Quanto maior a vergência, menor a distância focal e maior sua capacidade de alterar a trajetória da luz. Observe a figura abaixo:

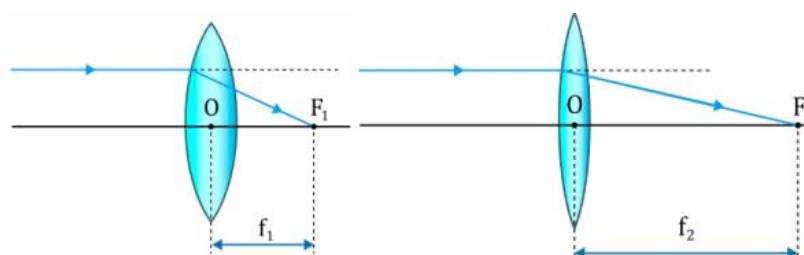


Figura 31: Comparação da trajetória da luz entre lentes de diferentes vergências.

Como pode-se notar, a trajetória na lente de distância focal f_1 foi mais alterada. Portanto, quanto menor o foco, maior a vergência e maior a capacidade de alterar a trajetória da luz incidente.

2.9. Equação dos fabricantes de lentes

A equação dos fabricantes de lente como é conhecida relaciona as propriedades geométricas da lente (R_1 e R_2), as propriedades do material da lente e do meio (n_{lente} e n_{meio}) e as propriedades ópticas da lente (f). A dedução da equação foge do escopo do curso, sendo prioridade a compreensão da contribuição de cada parcela na equação.

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left(\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right) \quad (\text{eq. 2.8.1})$$

Em que:

$$R \begin{cases} > 0 \rightarrow \text{face convexa} \\ < 0 \rightarrow \text{face côncava} \\ \infty \rightarrow \text{face plana} \end{cases}$$

Agora, vamos analisar o comportamento óptico das lentes em meios com índice de refração menor que a lente. Assim:

$$\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 > 0$$

Portanto, se:

$$\begin{cases} \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} > 0 \rightarrow \text{convergente} \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} < 0 \rightarrow \text{divergente} \end{cases}$$

É importante lembrar que o nome que vem primeiro (por exemplo cônica na lente côncavo-convexa) significa que o raio da face côncava é maior em módulo que o seguinte.

Lente	R_1	R_2	$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$	Comportamento óptico
Biconvexa	+	+	+	Convergente
Plano-convexa	∞	+	+	Convergente
Côncavo-convexa	-	+	+	Convergente
Bicôncava	-	-	-	Divergente
Plano-côncava	∞	-	-	Divergente
Convexa-côncava	+	-	-	Divergente

ESCLARECENDO!



11) (ITA-2004)

Uma lente convergente tem distância focal de 20 cm quando está mergulhada em ar. A lente é feita de vidro, cujo índice de refração é $n_v = 1,6$. Se a lente é mergulhada em um meio, menos refringente do que o material da lente, cujo índice de refração é n , considere as seguintes afirmações:

- I. A distância focal não varia se o índice de refração do meio for igual ao do material da lente.
- II. A distância focal torna-se maior se o índice de refração n for maior que o do ar.
- III. Neste exemplo, uma maior diferença entre os índices de refração do material da lente e do meio implica numa menor distância focal.

Então, pode-se afirmar que:

- a) Apenas a II é correta.
- b) Apenas a III é correta.
- c) Apenas II e III são corretas.
- d) Todas são corretas.
- e) Todas são incorretas.

Comentários:

Analisemos a equação dos fabricantes de lente:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{\text{lente}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

I. Falso. Quando $n_{\text{lente}} = n_{\text{meio}}$, a lente não causa nenhum distúrbio na trajetória da luz, portanto seria como se ela existisse.

II. Verdadeiro. Ao aumentar-se o n_{meio} diminui-se o termo $\left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1\right)$, portanto diminui-se $\frac{1}{f}$. Mas se $\frac{1}{f}$ diminui, isso implica que f aumenta.

III. Verdadeiro. Análogo ao II.

Letra C.

12) (ITA)

As duas faces de uma lente delgada biconvexa têm um raio de curvatura igual a $1,00\text{ m}$. O índice de refração da lente para a luz vermelha é de $1,60$ e, para a luz violeta, $1,64$. Sabendo-se que a lente está imersa no ar, cujo índice de refração é $1,00$, calcule a distância entre os focos de luz vermelha e de luz violeta, em centímetros.

Comentários:

Aplicando-se a equação dos fabricantes de lentes para a luz vermelha:

$$\frac{1}{f_{\text{verm}}} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \cdot (1,6 - 1) = 1,2 \Rightarrow f_{\text{verm}} = \frac{5}{6} \text{ m}$$

Para a luz violeta:

$$\frac{1}{f_{\text{viol}}} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right) \cdot (1,64 - 1) = 1,28 \Rightarrow f_{\text{viol}} = \frac{100}{128} = \frac{25}{32} \text{ m}$$

Portanto:

$$f_{\text{verm}} - f_{\text{viol}} = \frac{5}{6} - \frac{25}{32} \cong 5,2 \text{ cm}$$

2.11. Método de Pierre Lucie

Também conhecido como método gráfico das coordenadas. É um método alternativo à equação das lentes delgadas para resolução de problemas. O método consiste em 3 passos. São eles:

1) Montar o plano $p'p$ (abscissa p' e ordenada p).

2) Localizar o ponto $F = (f, f)$. É importante ressaltar que o sinal de f será positivo para lentes convergentes e negativo para lentes divergentes.

3) Apoia-se uma reta suporte sobre o ponto F . A intersecção desta reta com o eixo das abscissas é numericamente igual a p' , enquanto a intersecção da reta com o eixo das ordenadas é numericamente igual a p .

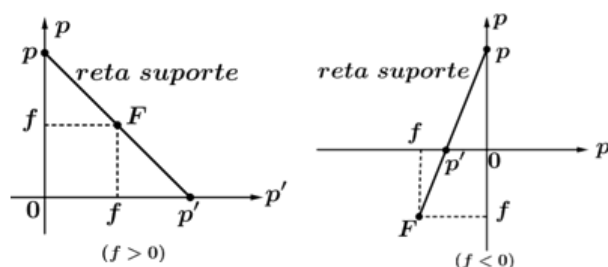


Figura 32: Método de Pierre Lucie para lentes.

2.12. Associação de lentes delgadas

Serão estudados aqui somente as associações de lentes coaxiais, isto é, com eixos ópticos principais coincidentes. Divide-se a associação de lentes em dois tipos: a associação justaposta e a não justaposta. A associação justaposta é quando as lentes estão suficientemente próximas de tal forma que se desconsidera a distância entre os centros óptico, enquanto a não justaposta irá ter que considerar esta distância.

2.12.1. Associação não justaposta

Na associação não justaposta, o que ocorre são dois ou mais desvios da trajetória da luz em que a luz vinda do objeto passará pela primeira lente e formará a primeira imagem. A seguir, essa imagem servirá de objeto para a segunda lente, e, quando a luz passar por esta, formará uma segunda imagem. Portanto, a associação de lentes forma uma única imagem através de dois ou mais desvios da luz, a depender da quantidade de lentes associadas.

Visualmente:

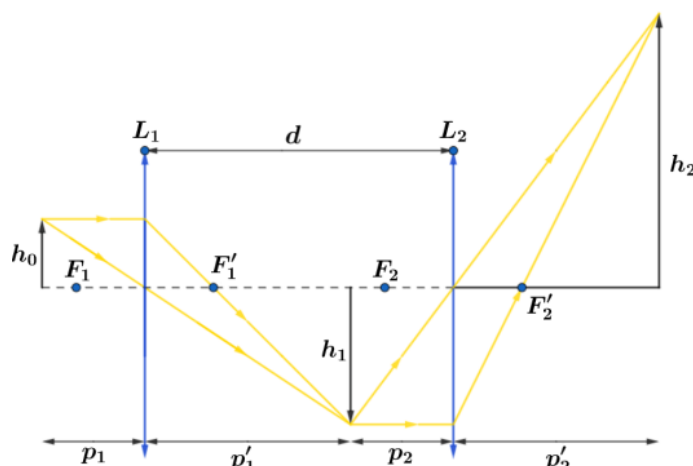


Figura 33: Exemplo de possível associação de lentes.

A resolução deste tipo de problema é um processo de duas etapas em que cada etapa consiste no que foi feito até agora. Deve-se atentar somente a:

$$p_2 = d - p'_1$$

$$A = A_1 \cdot A_2 = \frac{h_1}{h_0} \cdot \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2}{h_0}$$

2.12.2. Associação justaposta

Para a associação justaposta, $d = 0$. Ou seja:

$$p_2 = -p'_1$$

Baseando-se na figura 33, adotando a condição exposta acima, tem-se:

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_1} \Rightarrow \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{p_1}$$

Mas:

$$\frac{1}{p_2} = -\frac{1}{p'_1}$$

Logo, para a lente 2:

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{p'_1} + \frac{1}{p'_2} = -\frac{1}{f_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}$$

$$\frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p'_2}$$

Repare que p_1 é a posição do objeto até as lentes (considera-se que as lentes estão na mesma posição) e p'_2 é a posição da imagem final até as lentes. Portanto, esta expressão prova que duas lentes delgadas justapostas equivalem à uma lente única de vergência:

$$V = V_1 + V_2$$

A posição é onde estão as duas lentes originais.

ESCLARECENDO!



13) (ITA-1983)

Uma lente A, convergente ($f_A = 10\text{cm}$), é justaposta a outra lente convergente B ($f_B = 5\text{cm}$). A lente equivalente é:

- a) divergente e $f = 3,33\text{ cm}$
- b) divergente e $f = 5,2\text{ cm}$
- c) convergente e $f = 5,2\text{ cm}$
- d) convergente e $f = 15\text{ cm}$
- e) convergente e $f = 3,33\text{ cm}$

Comentários:

Sendo uma justaposição de lentes:

$$V_{eq} = V_1 + V_2$$

$$V_{eq} = \frac{1}{0,1} + \frac{1}{0,05} = 30 \Rightarrow \frac{1}{f} = 30 \therefore f = \frac{1}{30}\text{ m} \cong 3,33\text{ cm}$$

Assim, a alternativa correta é **letra E**.

3. Instrumentos ópticos

Neste tópico serão abordados os instrumentos ópticos, isto é, ferramentas que auxiliam a visualização de um objeto. Serão apresentados os principais instrumentos presentes no cotidiano, seus princípios de funcionamento e alguns equacionamentos que quantifiquem os efeitos do instrumento.

3.1. Ângulo visual e distância do ponto próximo

A visualização de objetos pelo ser humano para um olho perfeito depende não só do tamanho do objeto, mas, também, da distância do objeto ao observador. A relação entre essas duas grandezas é dada pelo **ângulo visual**. Observe a figura abaixo:

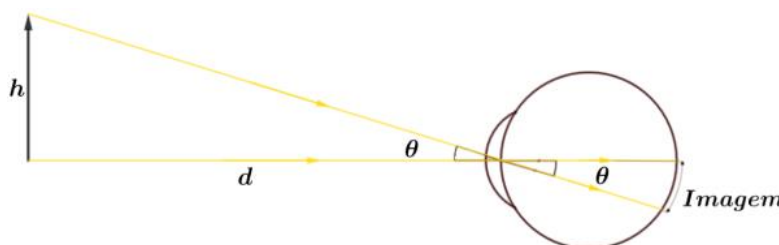


Figura 34: Representação de formação de imagem no olho e ângulo visual

O ângulo visual, representado por θ na figura 34, está, conforme explicado anteriormente, relacionado à dimensão do objeto e à distância do observador ao objeto. Para que um objeto seja visível é necessário que seu ângulo visual seja suficientemente grande, de modo que a imagem, produzida na retina seja compreensível.

Essa condição do ângulo visual é necessária, mas não suficiente. O olho humano funciona como uma lente com capacidade de alterar sua distância focal, como será visto mais adiante, entretanto, há um limite para esta variação, portanto, para formação de uma imagem nítida o objeto não pode estar em qualquer posição. Uma das restrições da posição do objeto é a chamada **distância do ponto próximo** (d_p), comumente adotada como 25 cm.

Portanto, para determinados objetos observados, o ângulo visual é muito pequeno. A fim de solucionar este problema, utilizam-se os instrumentos ópticos que têm a capacidade de aumentar o ângulo visual do observador.

3.2. Classificação de instrumentos ópticos

Os instrumentos ópticos são classificados de acordo com o tipo imagem formada. Caso a imagem seja real, tem-se um **instrumento de projeção**. Como exemplo dessa classe, tem-se as câmeras fotográficas e filmadoras, que projetam a imagem sobre um anteparo fotossensível.

Caso a imagem seja virtual, tem-se um **instrumento de observação**, cujo objetivo é o aumento do ângulo visual ou o reposicionamento do objeto para respeitar a distância do ponto próximo. Exemplos de instrumentos deste tipo são os telescópios, as lupas e os binóculos.

Neste tópico, serão estudados mais a fundo somente os instrumentos de observação, visto que os instrumentos de projeção podem ser equacionados baseado no que foi visto no capítulo de lentes.

3.3. Aumento angular

Também chamado de **aumento visual**, refere-se ao aumento do ângulo visual produzido pelos instrumentos de observação. É definido como:

$$A_{\theta} = \frac{\text{Ângulo visual com o instrumento}}{\text{Ângulo visual sem instrumentos}} = \frac{\alpha_0}{\alpha}$$

É comum, para ângulos pequenos a utilização da aproximação paraxial ($\text{tg } \alpha \cong \alpha$), calculando-se, assim, o aumento angular com as tangentes. Logo:

$$A_{\theta} \cong \frac{\text{tg } \alpha_0}{\text{tg } \alpha}$$

O ângulo visual sem instrumentos para lupas e microscópios simples é medido quando o objeto se encontra no ponto próximo, enquanto para lunetas e telescópios

3.4. Lupa e Microscópio simples

Na lupa ou microscópio simples, deseja-se observar um objeto móvel, isto é, fica a critério do observador a posição do objeto. Entretanto, devido às condições de nitidez, a máxima proximidade do objeto é de 25 cm. Sendo assim, ao ampliar a imagem, a distância do objeto ao observador pode ser menor que a d_p , contanto que a imagem esteja mais distante. Visualmente:

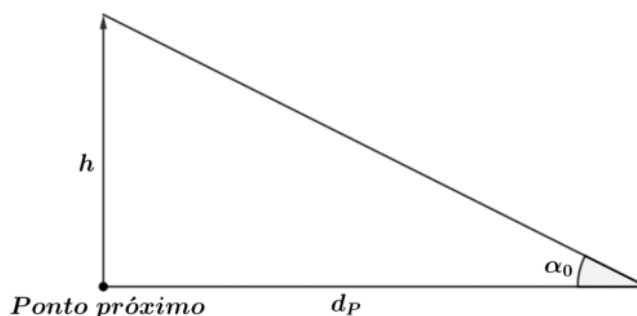


Figura 35: Ângulo visual sem instrumento

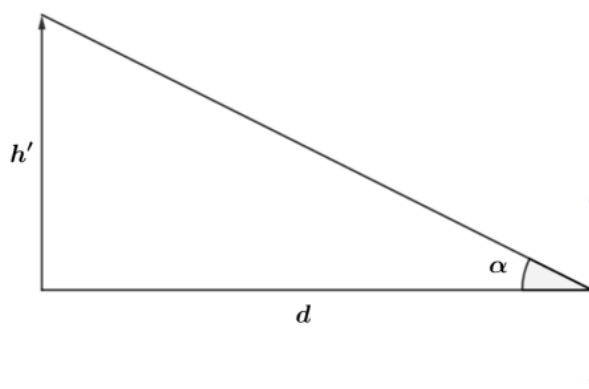


Figura 36: Ângulo visual com instrumento

É importante notar que se faz a consideração para cálculo de que a distância entre o observador e a lente é nula, como exposto na figura 35. Equacionando:

$$A_{\theta} = \frac{\text{tg } \alpha}{\text{tg } \alpha_0} = \frac{h'}{d} \cdot \frac{d_p}{h} = A \cdot \frac{d_p}{d} \quad (\text{eq. 3.4.1})$$

Mas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p'} = \frac{p' - f}{f \cdot p'}$$

E:

$$A = -\frac{p'}{p} = \frac{f - p'}{f} \text{ (eq. 3.4.2)}$$

Para a imagem formada na figura 36:

$$p' = -d$$

Logo, a equação 3.4.2 fica:

$$A = \frac{f + d}{f}$$

Substituindo na equação 3.4.1:

$$A_{\theta} = \frac{f + d}{f} \cdot \frac{d_p}{d} = \frac{d_p}{f} \cdot \left(\frac{f}{d} + 1 \right)$$

Observações:

- A ampliação angular depende da distância que se decide projetar a imagem. Quanto menor for d , maior a ampliação. O valor mínimo para d é d_p . Entretanto, a visualização de uma imagem no ponto próximo causa desconforto para quem visualiza, portanto, usualmente se adota $d \rightarrow \infty$, pois apesar de menor ampliação, não há desconforto para o usuário.
- Quando $d \rightarrow \infty$, o valor da ampliação é chamado de **ampliação nominal** ou **ampliação comercial**. $A_{\theta, \text{comercial}} = \frac{d_p}{f}$
- A imagem formada é virtual ($p' < 0$) e direita.

3.5. Microscópio composto

O microscópio composto é uma associação de lentes convergentes não justapostas. Dá-se o nome a elas de *lente objetiva* e *lente ocular*, respectivamente, a mais próxima do objeto e a mais próxima do observador. A lente objetiva possui abertura menor e distância focal menores que a ocular. A distância entre as duas lentes é o comprimento do microscópio (L).

O objeto é colocado a uma distância maior que a distância focal da lente objetiva, produzindo-se uma imagem real e invertida. Projeta-se o microscópio para que esta imagem seja posicionada entre o foco da lente ocular e a lente ocular em si. Assim, a lente ocular atuará como uma lupa, produzindo uma imagem virtual e direita da imagem da lente objetiva. Portanto, o resultado é a produção de uma imagem invertida e virtual.

Observe a figura 37 abaixo:

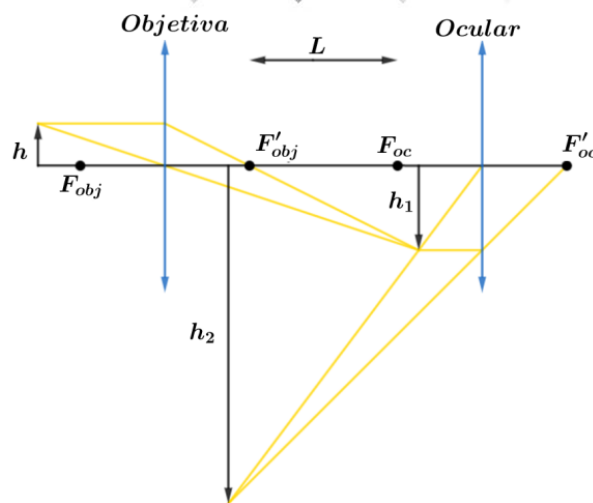


Figura 37: Formação de imagem em microscópio composto.

Para o aumento transversal da lente objetiva:

$$A_{obj} = \frac{h'}{h} = \frac{f - p'}{f}$$

Aproxima-se p' para $f_{obj} + L$, ou seja, despreza-se a distância entre a primeira imagem formada e o foco da ocular:

$$A_{obj} = \frac{f_{obj} - (f_{obj} + L)}{f_{obj}} = -\frac{L}{f_{obj}}$$

A ampliação do ângulo visual da lente ocular é dada por:

$$A_{\theta oc} = \frac{d_p}{f_{oc}} \cdot \left(\frac{f_{oc}}{d} + 1 \right)$$

Assim, a ampliação do microscópio composto:

$$A_{\theta} = \frac{-L \cdot d_p}{f_{oc} \cdot f_{obj}} \cdot \left(\frac{f_{oc}}{d} + 1 \right)$$

Portanto, a ampliação nominal fica:

$$A_{\theta nominal} = \frac{-L \cdot d_p}{f_{oc} \cdot f_{obj}}$$

3.6. Luneta astronômica

Na luneta astronômica, utilizam-se novamente duas lentes convergentes, a objetiva, mais próxima do astro e a ocular, mais próxima do observador. A principal diferença da luneta astronômica é o fato de o astro localizar-se à uma distância adotada como $p \rightarrow \infty$. A formação da primeira imagem,

dá-se, portanto, no plano focal da lente objetiva. A lente ocular novamente atua como uma lupa. Visualmente:

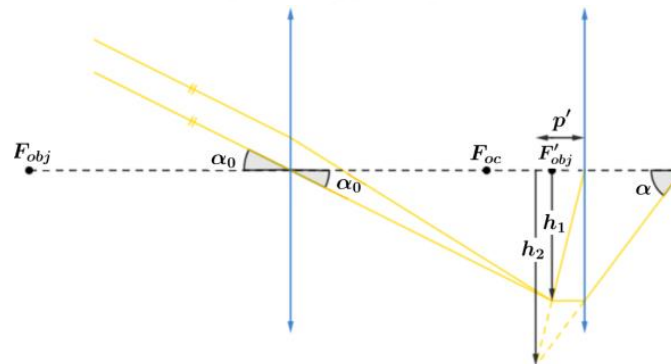


Figura 38: Formação de imagem em luneta astronômica.

A ampliação visual fica:

$$A_{\theta} = \frac{tg \alpha}{tg \alpha_0} = \frac{h_2}{p'} \cdot \frac{f_{obj}}{h_1} \Rightarrow A_{\theta} = \frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{f_{obj}}{p'} \quad (eq. 3.6.1)$$

Pela equação das lentes, para a ocular:

$$\frac{1}{f_{oc}} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{f_{oc} - L}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{f_{oc} - L - f_{oc}}{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)} \Rightarrow p' = \frac{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)}{-L}$$

E, para o aumento transversal da ocular:

$$A = \frac{h_2}{h_1} = \frac{f_{oc} - p'}{f_{oc}}$$

$$A = 1 - \frac{p'}{f_{oc}} = 1 + \frac{f_{oc} - L}{L} = \frac{f_{oc}}{L}$$

Portanto, substituindo A e p' na equação 3.6.1:

$$A_{\theta} = \frac{f_{oc}}{L} \cdot \frac{f_{obj} \cdot (-L)}{f_{oc} \cdot (f_{oc} - L)} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc} - L}$$

Observações:

- O sinal negativo deve-se à inversão da imagem final.
- É comum adotar-se $L = 0$, isto é, os focos das lentes coincidentes. Portanto:

$$A_{\theta} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

3.7. Luneta terrestre

Pelo fato de a luneta astronômica produzir uma imagem invertida, ela torna-se complexa para uso terrestre. Para facilitar isso, coloca-se uma lente convergente de distância focal f , à uma distância $2f$ do foco da lente objetiva. Desta forma, a lente intermediária não irá gerar nenhuma ampliação da imagem, apenas serve para invertê-la. A fórmula, portanto, fica igual ao caso da luneta astronômica, apenas com uma inversão de sinal. Isto é:

$$A_{\theta} = \frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

3.8. Telescópio de Galileu

Diferentemente das lunetas vistas até agora, o telescópio projetado por Galileu utilizava uma lente divergente como ocular ao invés de uma lente convergente. A posição da lente divergente para fornecer ampliação, no entanto, deve ficar entre a imagem formada pela objetiva e a lente objetiva. Visualmente:

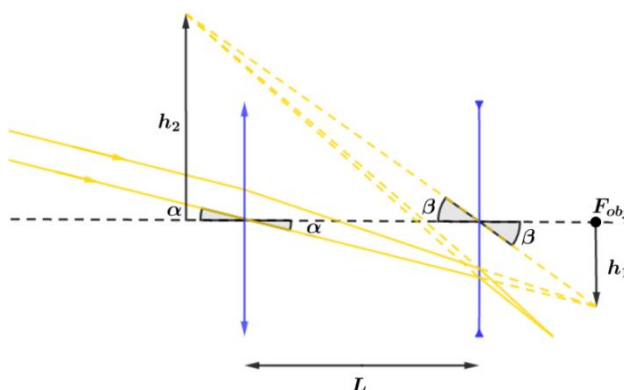


Figura 39: Trajetória da luz no telescópio de Galileu.

A ampliação é dada por:

$$A_{\theta} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{f_{obj}}{f_{oc} - L}$$

Considera-se que o astro inicialmente está a uma distância infinita e sua imagem, portanto, será sobre o plano focal. Adota-se uma aproximação tal que $f_{oc} \cong -(f_{obj} - L)$. Essa aproximação serve para maior conforto visual do observador. Dessa forma:

$$A_{\theta} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}}$$

4. Óptica da visão

Aqui serão apresentados de forma superficial as partes que compõe o olho e suas funções, condições para nitidez da imagem observada e defeitos que podem ocorrer na visão.

4.1. O Globo Ocular

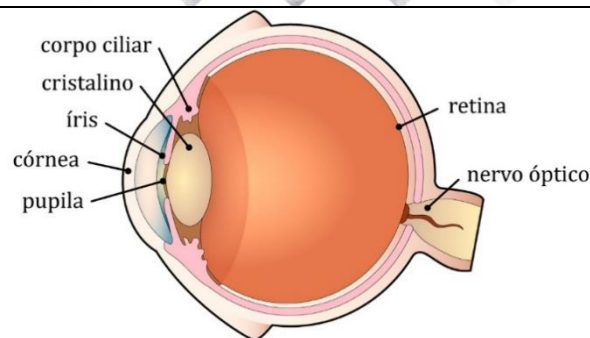


Figura 40: Globo ocular humano e suas principais partes.

Na figura 40, observam-se as principais partes do globo ocular. Abaixo, serão apresentadas as funções daquelas que interessam ao curso de óptica da visão:

- **Córnea:** juntamente ao cristalino tem a função de focar a luz através da pupila.
- **Cristalino:** atua como uma lente convergente que forma uma imagem real e invertida sobre a retina.
- **Retina:** Camada mais interna do revestimento que recobre o olho. Possui as células sensoriais que se comunicam com o cérebro pelo nervo óptico.
- **Íris:** Conjunto de músculos responsáveis pela deformação da pupila.
- **Pupila:** regula a entrada de luz no olho (*adaptação visual*).
- **Corpo ciliar ou músculos ciliares:** responsável pela deformação do cristalino.

4.2. Acomodação visual

A acomodação visual é o ato do cristalino se deformar para a formação de uma imagem nítida. Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

A distância p' é fixada visto que a retina não se desloca. Portanto, conforme varia-se a distância do objeto ao observador, p , é necessário variar a distância focal f de acordo. Na figura abaixo observam-se situações diferentes do cristalino.

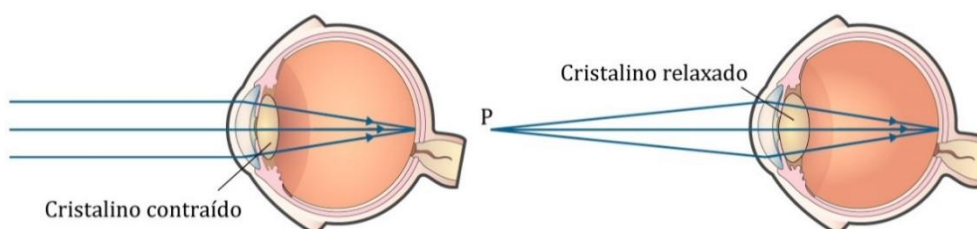


Figura 41: Comparação entre cristalino contraído e relaxado.

Pode-se notar na figura 41 que no cristalino contraído os raios de curvaturas do cristalino (considerada biconvexa) aumentam. Pela análise da equação do fabricante de lentes:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_{lente}}{n_{meio}} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Se R_1 e R_2 aumentam, a distância focal deve aumentar.

4.2.1. Amplitude de acomodação

A acomodação visual apresenta limites. São os pontos chamados: **ponto próximo (d_p)**, já apresentado no capítulo anterior; e **ponto remoto (d_R)**, ao contrário do ponto próximo, o ponto mais distante no qual um objeto pode-se situar e ainda produzir uma imagem nítida. Portanto, a **amplitude de acomodação (a)** é a variação da vergência do cristalino entre estes pontos extremos. Assim:

$$a = \frac{1}{d_p} - \frac{1}{d_R}$$

Para um olho sem defeitos, a distância do ponto próximo é de 25 cm e a do ponto remoto tende a ∞ . Assim:

$$a = \frac{1}{0,25} = 4 \text{ di}$$

Portanto, um globo ocular sem defeitos pode variar sua vergência em até quatro dioptrias no ato de acomodação visual.

Observações:

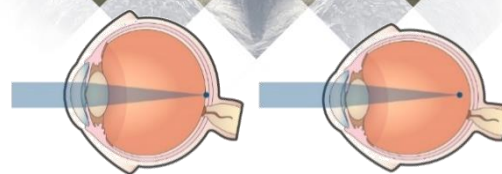
- Este valor é na realidade uma convenção adotada. Usualmente as pessoas apresentam amplitude de acomodação maiores que 4.
- A amplitude de acomodação tende a diminuir com a idade. Ao ficar abaixo de 4 caracteriza-se um defeito chamado *presbiopia* que será apresentado mais à frente.

4.3. Defeitos visuais e suas correções

Os defeitos visuais que causam variação do intervalo de acomodação visual, isto é, a distância entre o ponto próximo e o ponto remoto são chamadas de ametropias. As principais ametropias que serão abordadas neste curso são a hipermetropia, miopia, presbiopia e astigmatismo.

4.3.1. Miopia

A miopia é uma ametropia causada por um defeito na formação do globo ocular. O globo ocular é alongado na direção do eixo óptico do olho. Dessa forma, mesmo com os músculos ciliares relaxados, um objeto no infinito não consegue produzir uma imagem sobre a retina, ficando, portanto, sem nitidez para o observador.



Visão normal Miopia
Figura 42: Comparação de globo ocular normal e míope.

Para resolver este problema é necessário aumentar a distância focal do sistema óptico. Entretanto, estando os músculos ciliares relaxados, os raios de curvatura, e, por conseguinte, a distância focal, já são máximos. Assim, é impossível que o afetado seja capaz de obter nitidez na visão sem auxílio de lentes corretoras.

A correção da miopia se dá, portanto, por um acoplamento que reduz a vergência (aumentando a distância focal). Portanto, a correção é por utilização de lente divergente (vergência negativa). Pela equação das lentes delgadas:

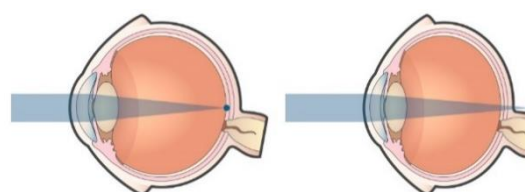
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

Deseja-se que a pessoa enxergue com nitidez mesmo com $p \rightarrow \infty$. Como a pessoa enxerga com nitidez somente até d_R , a imagem virtual de um objeto no infinito deve localizar-se à distância do ponto remoto do míope:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{d_R} \Rightarrow |V| = \frac{1}{d_R}$$

4.3.2. Hipermetropia

Semelhante à miopia, consiste em um defeito na formação do globo ocular no sentido do eixo óptico. Diferentemente da miopia, o que houve foi um encurtamento na direção do eixo óptico. Neste caso, ao observar um objeto no infinito, a imagem não se forma com nitidez estando os músculos ciliares relaxados, ela se formaria além da retina como mostrado na figura abaixo.



Visão normal Hipermetropia
Figura 43: Comparação de olho normal e hipermetrope.

Entretanto, para esta situação, como é necessário reduzir-se a distância focal, o indivíduo ao contrair os músculos ciliares será capaz de obter nitidez. O problema para o hipermetrope portanto, não é o ponto remoto. Pela análise da equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

A imagem formada na retina é real ($p' > 0$), no entanto, para o hipermetrope, a distância da imagem (p') diminui. Portanto, considerando-se que o indivíduo consiga produzir no seu cristalino mesma distância focal que uma pessoa saudável, o ponto remoto estará mais distante, pois:

$$\frac{1}{p_{\text{saudável}}} + \frac{1}{p'_{\text{saudável}}} = \frac{1}{p_{\text{hiper}}} + \frac{1}{p'_{\text{hiper}}}$$

$$\frac{p'_{\text{hiper}} - p'_{\text{saudável}}}{p'_{\text{hiper}} \cdot p'_{\text{saudável}}} = \frac{p_{\text{saudável}} - p_{\text{hiper}}}{p_{\text{saudável}} \cdot p_{\text{hiper}}}$$

O lado esquerdo da equação é negativo, portanto, o lado direito também deve ser. Assim:

$$p_{\text{hiper}} > p_{\text{saudável}}$$

Logo, a correção deve ser feita aumentando-se a vergência (diminuição da distância focal), ou seja, utilizam-se lentes convergentes.

Para o hipermetrope, deseja-se produzir uma imagem virtual de um objeto sobre o ponto próximo “verdadeiro” ($p = 25 \text{ cm}$) para o ponto próximo do hipermetrope. Portanto:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_{p_{\text{saudável}}}} - \frac{1}{d_{p_{\text{hiper}}}}$$

4.3.3. Presbiopia

Também conhecido como “vista cansada”, a presbiopia, conforme descrito anteriormente, é um problema na amplitude de acomodação visual. Ocorre geralmente em pessoas de idade mais avançada devido à perda de elasticidade do cristalino. Essa perda de amplitude dificulta a visualização tanto para objetos próximos quanto para objetos distantes. Utiliza-se, portanto, uma lente bifocal, isto é, que corrige o ponto próximo e o ponto distante. A lente bifocal é dividida em duas regiões, uma voltada para a correção de cada ponto.

4.3.4. Astigmatismo

Consiste em um defeito visual em que por conta de assimetrias do globo ocular em torno do seu eixo óptico o que faz com que o olho ao se acomodar para um objeto em uma posição, pode não estar acomodado para outro objeto à mesma distância, mas em posição diferente.

A correção é feita pelo uso de lentes cilíndricas que compensam a assimetria do sistema óptico.

4.3.5. Estrabismo

Caracteriza-se por um problema, geralmente na musculatura que controla o movimento do globo ocular, que impede o afetado de dirigir simultaneamente os eixos ópticos para o ponto visado. A correção é feita por lentes prismáticas, exercícios ou atividades para fortalecimento da musculatura responsável pelo movimento.

ESCLARECENDO!



14) (UNIFOR-2013)

Um oftalmologista explica que pais e professores devem estar atentos aos comportamentos das crianças. Uma dificuldade de aprendizado pode ser explicada por defeitos na visão. Alguns defeitos na visão como a miopia (distância do ponto próximo muito grande) e a hipermetropia (ponto distante de 250,00 mm) são causados pela falta de esfericidade do olho. Para corrigir essas deficiências, usamos as lentes esféricas. Uma pessoa que é míope, para corrigir essa dificuldade que ela tem de enxergar de longe, precisa usar uma lente esférica divergente. Já uma pessoa que é hipermetrope deve usar para correção uma lente esférica convergente. Com base no texto acima, a vergência de uma lente corretiva para um olho hipermetrope, cujo ponto próximo está a 80,00 cm, e um olho míope, cujo ponto distante está a 80,00 cm é, respectivamente:

- a) 2,75 di e - 1,25 di b) 5,25 di e - 1,25 di
c) 4,25 di e - 8,75 di d) 1,25 di e - 2,75 di
e) 1,75 di e - 2,25 di

Comentários:

Para a correção do míope:

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{d_{R\text{Míope}}}$$

$$\frac{1}{f} = -\frac{1}{0,8} = -1,25 \text{ di}$$

Para a correção do hipermetrope:

$$V = \frac{1}{d_{P\text{ Saudavel}}} - \frac{1}{d_{P\text{ Hiper}}} = \frac{1}{0,25} - \frac{1}{0,8} = 4 - 1,25 = 2,75$$

Portanto, a resposta correta é **letra A**.



5. Lista de questões

1. (ITA-1969)

Uma fonte luminosa puntiforme está a uma profundidade h abaixo da superfície de um lago suficientemente grande em extensão e profundidade. Seja n o índice de refração da água. Da energia total emitida, f é a fração que escapa diretamente da superfície líquida, desprezando a absorção da luz na água e a reflexão que não for total. Nessas condições podemos afirmar que:

- a) f aumenta se h aumentar
b) f diminui se h aumentar

c) $f = \frac{1}{n}$

d) $f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$

e) nenhuma das afirmações acima.

2. (ITA-1971)

No desenho qual deve ser o índice de refração do prisma para que o raio mostrado sofra reflexão total na face S? (Considere o índice de refração do ar igual a 1,00).

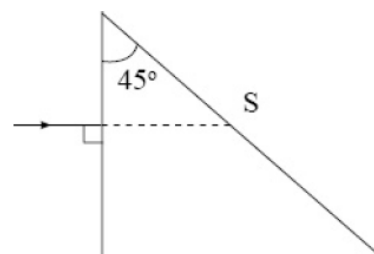
a) $n > \sqrt{2}$

b) $n < 1,5$

c) $n > 1,16$

d) $n < \sqrt{2}$

e) nenhuma das respostas é correta.



3. (ITA-1973)

A vista de uma pessoa normal é capaz de focalizar um objeto que esteja no mínimo a uma distância de 24 cm. Coloca-se junto do olho de uma pessoa normal uma lente delgada convergente de distância focal igual a 5,0 cm. Neste caso, para que um objeto seja visto claramente pela pessoa, é suficiente que ele esteja a uma distância d do olho tal que:

a) $3 \text{ cm} < d < 10 \text{ cm}$

b) $d < 4 \text{ cm}$

c) $4 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$

d) $2 \text{ cm} < d < 24 \text{ cm}$

e) $d > 4,5 \text{ cm}$

4. (ITA-1976)

No sistema óptico esquematizado, O representa um objeto real e as lentes delgadas convergentes, L_1 e L_2 , tem distância focais iguais a 2 cm e 4 cm, respectivamente. A imagem I deve estar a:

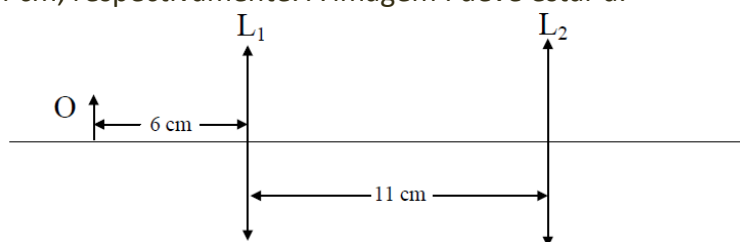
a) 8 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$

b) 8 cm à esquerda de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$

c) 8 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = 2$

d) 8 cm à esquerda de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$

e) 12 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = 2$



5. (ITA-1978)

Uma lente duplamente convexa tem raios de curvatura de 25 cm e índice de refração 1,50. Calcular a posição da imagem (I) de um objeto colocado sobre o eixo, a 60 cm da lente, 1º) quando a lente se acha no ar e 2º) quando imersa na água. São dados os índices de refração: $n_{ar} = 1,00$; $n_{água} = 1,33$.

Ar

Água

a) $q = 25,00 \text{ cm}$

$q = 73,52 \text{ cm}$

b) $q = -42,86 \text{ cm}$

$q = -155,25 \text{ cm}$

c) $q = 42,86 \text{ cm}$

$q = -155,25 \text{ cm}$

d) $q = 12,25 \text{ cm}$

$q = 0,01 \text{ cm}$

e) nenhuma das afirmações está correta.

6. (ITA-1979)

Um feixe de luz monocromática incide paralelamente ao eixo principal de uma lente convergente de distância focal A, num meio de índice de refração absoluto igual a 1 (um). O feixe é cilíndrico e tem diâmetro 2 A. Dispõe-se de uma lâmina de faces paralelas, espessura $E = \frac{A}{4}$ e índice de refração absoluto igual a 1,4 (um inteiro e quatro décimos). Nestas condições, pode-se afirmar que:

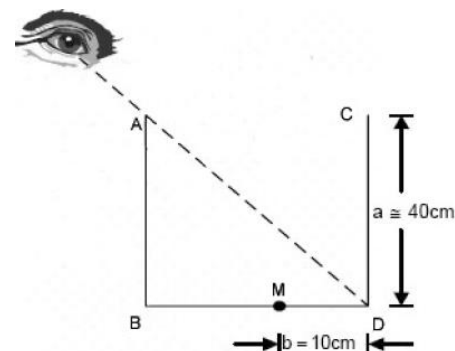
a) se a lâmina for intercalada entre a fonte de luz e a lente ter-se-á que a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = A - \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$

- b) se a lâmina for intercalada entre a lente e seu foco, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = A + \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$
- c) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = 1,2 A$
- d) se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então a nova distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = 4 A$
- e) qualquer que seja a posição da lâmina intercalada entre a fonte de luz e a lente, ela não alterará a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente.

7. (ITA-1986)

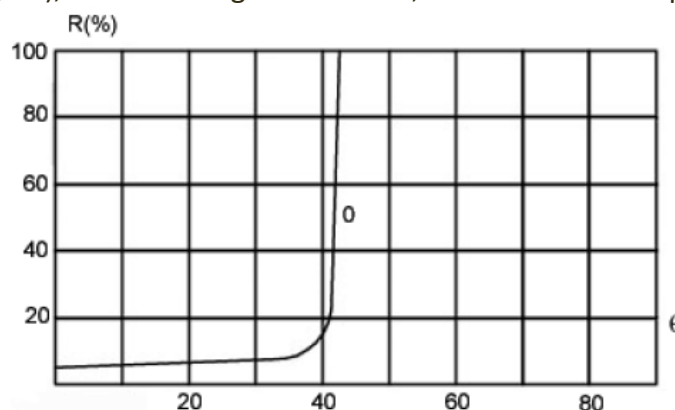
Um reservatório cúbico de paredes opacas e arestas $a = 40 \text{ cm}$, achase disposto de tal maneira que o observador não vê o seu fundo (ver figura). A que nível mínimo devemos preencher este cubo com água, para que o observador possa ver uma mancha negra, pontual M, que se encontra no fundo do recipiente, a uma distância $b = 10 \text{ cm}$ do ponto D? Obs: índice de refração para a água, na região do visível, $n = 1,33$.

- a) 21 cm b) 27 cm
c) 32 cm d) 18 cm
e) nenhum dos valores acima.



8. (ITA-1987)

Numa experiência em que se mediu a razão R entre a energia luminosa refletida e a energia luminosa incidente na interface entre dois meios de índices de refração n_1 e n_2 em função do ângulo de incidência (vide figura), obteve-se o gráfico abaixo, onde R é dada em porcentagem.



Das afirmativas:

- I – $n_2 < n_1$
II – $\frac{n_1}{n_2} > 1,4$

III – a razão entre a energia refletida e a refratada a 30° é maior que 0,2.

IV – para $\theta > 42^\circ$ a Luz é completamente refratada.

V – o raio refratado está mais afastado da normal do que o raio incidente.

Podemos dizer que:

- a) Apenas I e II estão corretas b) I, III e V estão corretas.
c) Apenas III e V estão corretas. d) I, II e V estão corretas.
e) II, IV e V estão corretas.

9. (ITA-1992)

Uma vela se encontra a uma distância de 30 cm de uma lente plano convexo que projeta uma imagem nítida de sua chama em uma parede a 1,2 m de distância da lente. Qual é o raio de curvatura da parte convexa da lente se o índice de refração da mesma é 1,5?

- a) 60 cm. b) 30 cm. c) 24 cm.
d) 12 cm. e) Outro valor diferente dos anteriores.

10. (ITA-1993)

Um objeto em forma de um segmento de reta de comprimento l está situado ao longo do eixo óptico de uma lente convergente de distância focal f . O centro do segmento se encontra a uma distância a da lente e, esta, produz uma imagem real convergente de todos os pontos do objeto. Quanto vale o aumento linear β do objeto?

- a) $\beta = \frac{f^2}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ b) $\beta = \frac{f^2}{f^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ c) $\beta = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$
d) $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$ e) $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

11. (ITA-1994)

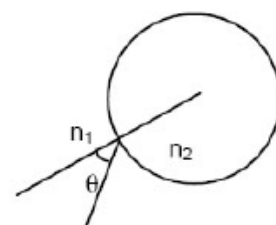
Um dos telescópios utilizados por Galileu era composto de duas lentes: a objetiva de 16 mm de diâmetro e distância focal de 960 mm e a ocular formada por uma lente divergente. O aumento era de 20 vezes. Podemos afirmar que a distância focal e a imagem eram respectivamente:

- a) 192 mm, direita. b) 8 mm, direita. c) 48 mm, invertida.
d) 960 mm, direita. e) 48 mm, direita.

12. (ITA-1994)

A figura mostra a secção transversal de um cilindro feito de um material cujo índice de refração é n_2 imerso num meio de índice n_1 . Os valores dos índices são $\sqrt{2}$ e 1,0 não necessariamente nessa ordem. Para que um feixe de luz contido no plano seccionador e proveniente do meio de índice n_1 penetre no cilindro, mas não consiga escapar, devemos satisfazer às seguintes condições:

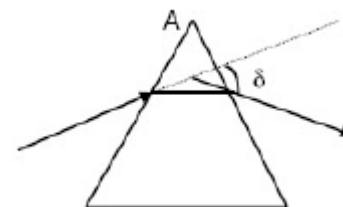
- a) Impossível com os dados fornecidos.
b) $n_1 = \sqrt{2}; n_2 = 1,0; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
c) $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
d) Nunca será possível.
e) $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}$



13. (ITA-1996)

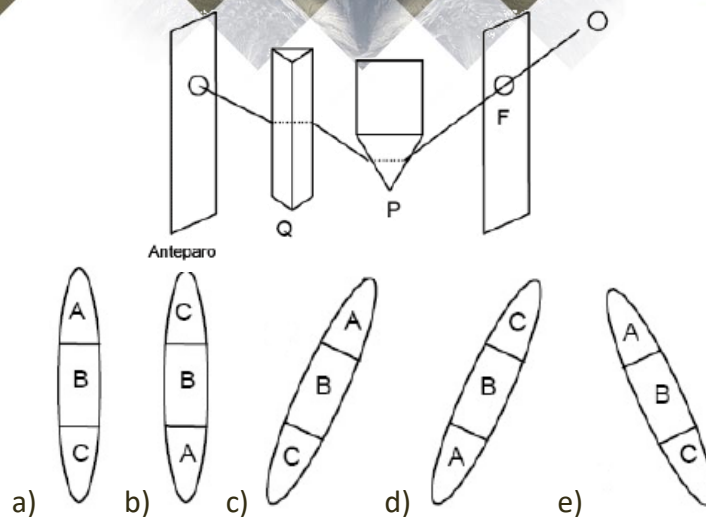
O Método do Desvio Mínimo, para a medida do índice de refração, n , de um material transparente, em relação ao ar, consiste em se medir o desvio mínimo de um feixe estreito de luz que atravessa um prisma feito desse material. Para que esse método possa ser aplicado (isto é, para que se tenha um feixe emergente), o ângulo A do prisma deve ser menor que:

- a) $\arcsen(n)$
b) $2 \arcsen(1/n)$
c) $0,5 \arcsen(1/n)$
d) $\arcsen(1/n)$
e) Outra expressão.



14. (ITA-1999)

Isaac Newton, no início de 1666, realizou a seguinte experiência: Seja S o Sol e F um orifício feito na janela de um quarto escuro. Considere P e Q dois prismas de vidro colocados em posição cruzada um em relação ao outro, ou seja, com suas arestas perpendiculares entre si, conforme mostra a figura abaixo. Represente por A a cor violeta, por B a amarela e C a vermelha. Após a passagem dos raios luminosos pelo orifício e pelos dois prismas, a forma da imagem e a disposição das cores formadas no anteparo são melhor representadas por:



15. (ITA-2002)

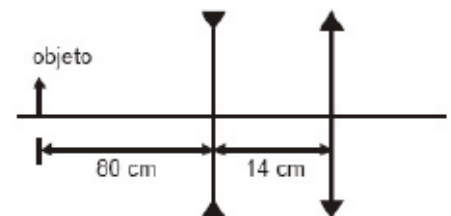
Uma pequena pedra repousa no fundo de um tanque de x m de profundidade. Determine o menor raio de uma cobertura circular, plana, paralela à superfície da água que flutuando sobre a superfície da água diretamente acima da pedra, impeça completamente a visão desta por um observador ao lado do tanque, cuja vista se encontra no nível da água. Justifique.

Dado: índice de refração da água $n = \frac{4}{3}$

16. (ITA-2003)

A figura mostra um sistema óptico constituído de uma lente divergente, com distância focal $f_1 = -20\text{cm}$, distante 14 cm de uma lente convergente com distância focal $f_2 = 20\text{cm}$. Se um objeto linear é posicionado a 80cm à esquerda da lente divergente, pode-se afirmar que a imagem definitiva formada pelo sistema:

- a) é real e o fator de ampliação linear do sistema é $-0,4$.
- b) é virtual, menor e direita em relação ao objeto.
- c) é real, maior e invertida em relação ao objeto.
- d) é real e o fator de ampliação linear do sistema é $-0,2$.
- e) é virtual, maior e invertida em relação ao objeto.



17. (ITA-2003)

Num oftalmologista, constata-se que um certo paciente tem uma distância máxima e uma distância mínima de visão distinta de 5,0m e 8,0cm, respectivamente. Sua visão deve ser corrigida pelo uso de uma lente que lhe permita ver com clareza objetos no "infinito". Qual das afirmações é verdadeira?

- a) O paciente é míope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- b) O paciente é míope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- c) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- d) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é $-0,2$ dioptrias.
- e) A lente corretora de defeito visual desloca a distância mínima de visão distinta para 8,1cm.

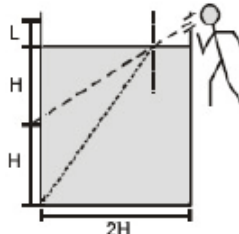
18. (ITA-2005)

Situa-se um objeto a uma distância p' diante de uma lente convergente de distância focal f , de modo a obter uma imagem real a uma distância p da lente. Considerando a condição de mínima distância entre imagem e objeto, então é correto afirmar que:

- a) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 5 \cdot f^3$
- b) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 10 \cdot f^3$
- c) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$
- d) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 25 \cdot f^3$
- e) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 30 \cdot f^3$

19. (ITA-2005)

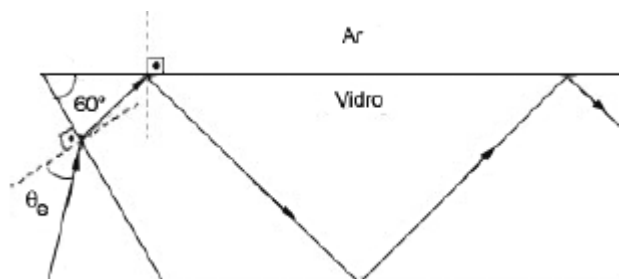
Através de um tubo fino, um observador enxerga o topo de uma barra vertical de altura H apoiada no fundo de um cilindro vazio de diâmetro $2H$. O tubo encontra-se a uma altura $2H + L$ e, para efeito de cálculo, é de comprimento desprezível. Quando o cilindro é preenchido com um líquido até uma altura $2H$ (veja figura), mantido o tubo na mesma posição, o observador passa a ver a extremidade inferior da barra. Determine literalmente o índice de refração desse líquido.



20. (ITA-2006)

A figura mostra uma placa de vidro com índice de refração $n_v = \sqrt{2}$ mergulhada no ar, cujo índice de refração é igual a 1,0. Para que um feixe de luz monocromática se propague pelo interior do vidro através de sucessivas reflexões totais, o seno do ângulo de entrada, $\sin \theta_e$, deverá ser menor ou igual a:

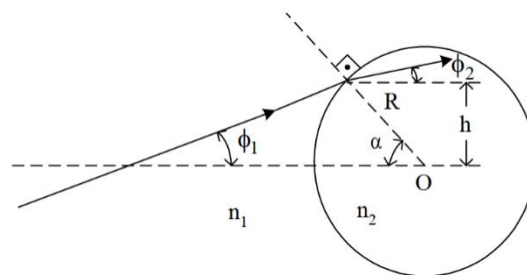
- a) 0,18
- b) 0,37
- c) 0,50
- d) 0,71
- e) 0,87



21. (ITA-2007)

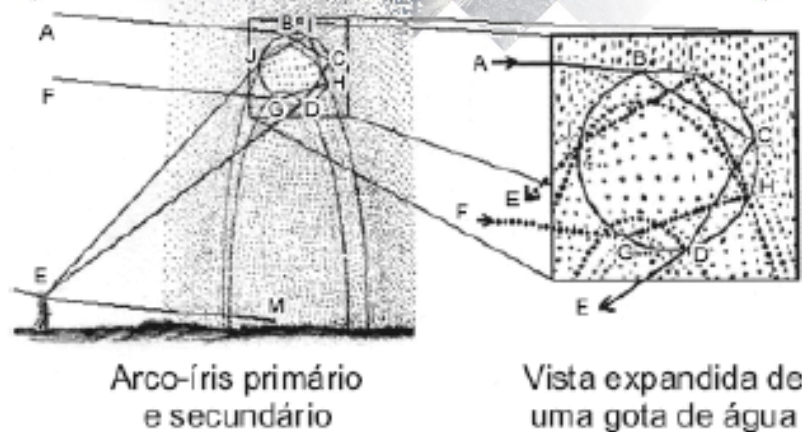
A figura mostra um raio de luz propagando-se num meio de índice de refração n_1 e transmitido para uma esfera transparente de raio R e índice de refração n_2 . Considere os valores dos ângulos α , ϕ_1 e ϕ_2 muito pequenos, tal que cada ângulo seja respectivamente igual à sua tangente e ao seu seno. O valor aproximado de ϕ_2 é de:

- a) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 - \alpha)$
- b) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha)$
- c) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \alpha$
- d) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1$
- e) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha$



22. (ITA-2008)

Foi René Descartes em 1637 o primeiro a discutir claramente a formação do arco-íris. Ele escreveu: “Considerando que esse arco-íris aparece não apenas no céu, mas também no ar perto de nós, sempre que haja gotas de água iluminadas pelo sol, como podemos ver em certas fontes, eu imediatamente entendi que isso acontece devido apenas ao caminho que os raios de luz traçam nessas gotas e atingem nossos olhos. Ainda mais, sabendo que as gotas são redondas, como fora anteriormente provado e, mesmo que sejam grandes ou pequenas, a aparência do arco-íris não muda de forma nenhuma, tive a idéia de considerar uma bem grande, para que pudesse examinar melhor...” Ele então apresentou a figura onde estão representadas as trajetórias para os arco-íris primário e secundário. Determinar o ângulo entre o raio incidente na gota, AB, e o incidente no olho do observador, DE, no caso do arco-íris primário, em termos do ângulo de incidência, e do índice de refração da água na. Considere o índice de refração do ar $n = 1$.



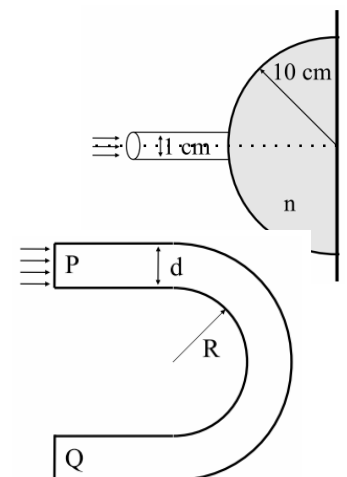
23. (ITA-2011)

Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração $n = \frac{3}{2}$ tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura. Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequeno, $\sin \theta \cong \theta$ e $\tan \theta \cong \theta$, o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de:

- a) 1 cm.
- b) $\frac{2}{3}$ cm
- c) $\frac{1}{2}$ cm
- d) $\frac{1}{3}$ cm
- e) $\frac{1}{10}$ cm

24. (ITA-2011)

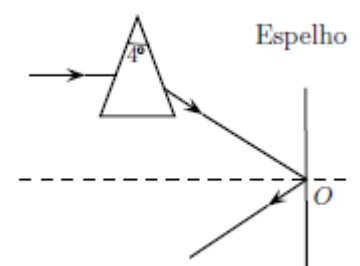
Um tarugo de vidro de índice de refração $n = \frac{3}{2}$ e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana P. Determine o valor mínimo da razão $\frac{R}{d}$ para o qual toda a luz que penetra pela superfície P emerge do vidro pela superfície Q.



25. (ITA-2013)

Um raio horizontal de luz monocromática atinge um espelho plano vertical após incidir num prisma com abertura de 4° e índice de refração $n = 1,5$. Considere o sistema imerso no ar e que tanto o raio emergente do prisma como o refletido pelo espelho estejam no plano do papel, perpendicular ao plano do espelho, como mostrado na figura. Assinale a alternativa que indica respectivamente o ângulo e o sentido em que deve ser girado o espelho em torno do eixo perpendicular ao plano do papel que passa pelo ponto O, de modo que o raio refletido retorne paralelamente ao raio incidente no prisma.

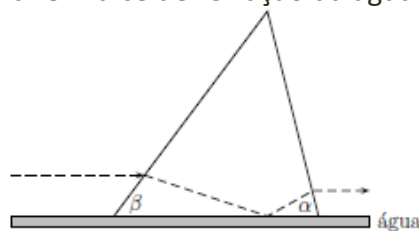
- a) 4° , sentido horário
- b) 2° , sentido horário
- c) 2° , sentido anti-horário
- d) 1° , sentido horário
- e) 1° , sentido anti-horário



26. (ITA-2015)

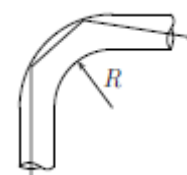
A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos, α e β . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e

perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo β , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água. Determine o ângulo α tal que o raio emergja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é $4/3$ e, o do vidro, $\sqrt{19}/3$.



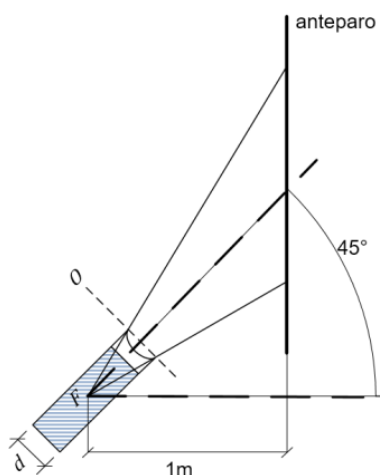
27. (ITA-2016)

Um tubo de fibra óptica é basicamente um cilindro longo e transparente, de diâmetro d e índice de refração n . Se o tubo é curvado, parte dos raios de luz pode escapar e não se refletir na superfície interna do tubo. Para que haja reflexão total de um feixe de luz inicialmente paralelo ao eixo do tubo, o menor raio de curvatura interno R (ver figura) deve ser igual a:



- a) $n \cdot d$ b) $\frac{d}{n}$ c) $\frac{d}{n-1}$ d) $\frac{n \cdot d}{n-1}$ e) $\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{n}-1}$

28. (IME – 2019)



Uma lanterna cilíndrica muito potente possui uma lente divergente em sua extremidade. Ela projeta uma luz sobre um anteparo vertical. O eixo central da lanterna e o eixo principal da lente estão alinhados e formam um ângulo de 45° com a horizontal. A lâmpada da lanterna gera raios de luz paralelos, que encontram a lente divergente, formando um feixe cônico de luz na sua saída. O centro óptico da lente O está, aproximadamente, alinhado com as bordas frontais da lanterna. A distância horizontal entre o foco F da lente e o anteparo é de 1 m . Sabendo disto, pode-se observar que o contorno da luz projetada pela lanterna no anteparo forma uma seção plana cônica. Diante do exposto, o comprimento do semieixo maior do contorno dessa seção, em metros, é:

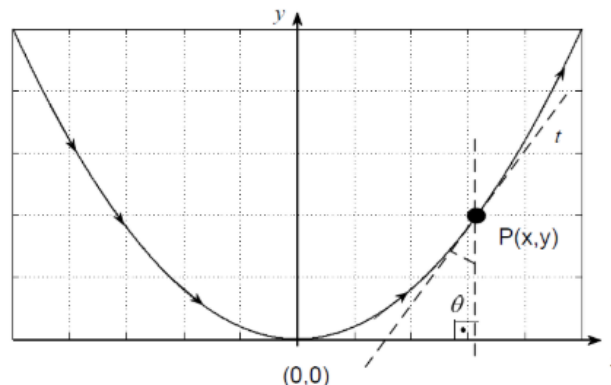
Dados:

- a lente é do tipo plano-côncava;
- a face côncava está na parte mais externa da lanterna;
- diâmetro da lanterna: $d = 10\text{ cm}$;
- índice de refração do meio externo (ar): 1;
- índice de refração da lente: 1,5;

- raio de curvatura da face côncava: $2,5 \sqrt{3} \text{ cm}$.

a) $3\sqrt{2}$ b) $(\sqrt{3} - 1)$ c) $(\sqrt{3} + 1)$ d) $\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

29. (IME-2012)



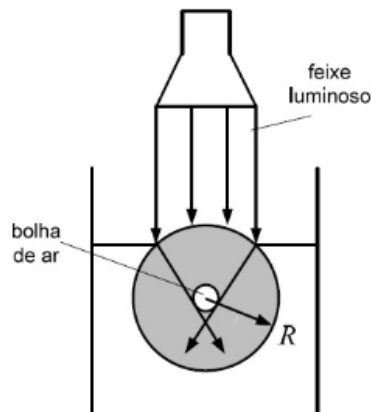
A figura acima mostra a trajetória parabólica de um raio luminoso em um meio não homogêneo. Determine o índice de refração n desse meio, que é uma função de y , sabendo que a trajetória do raio é descrita pela equação $y = a \cdot x^2$, onde $a > 0$.

Dados: $\cot \theta = 2 \cdot a \cdot x$ e $n(0) = n_0$.

Observação:

$P(x, y)$ é o ponto de tangência entre a reta t e a parábola.

30. (IME-2013)



Uma esfera de gelo de raio R flutua parcialmente imersa em um copo com água, como mostra a figura acima. Com a finalidade de iluminar uma bolha de ar, também esférica, localizada no centro da esfera de gelo, utilizou-se um feixe luminoso de seção reta circular de área $\frac{\pi \cdot R^2}{100} \text{ m}^2$ que incide verticalmente na esfera. Considerando que os raios mais externos do feixe refratado tangenciam a bolha, conforme a figura, determine a massa específica do gelo.

Dados:

- índice de refração do ar: 1,0
- índice de refração da água: 1,3
- Massa específica do ar: $1,0 \text{ kg/m}^3$
- Massa específica da água: 10^3 kg/m^3
- Volume da calota esférica: $v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3$

GABARITO



6. Gabarito sem comentários

1. E
2. A
3. C
4. A
5. E
6. E
7. B
8. D
9. D
10. C
11. E
12. D
13. B
14. C
15. $\frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$
16. A
17. E
18. C
19. $\frac{2 \cdot \sqrt{(H+L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H+L)^2 + 4 \cdot H^2}}$
20. B
21. E
22. $4 \cdot \arcsen\left(\frac{\text{sen } \hat{i}}{n_a}\right) - 2 \cdot \hat{i}$
23. B
24. 2
25. D
26. 30°
27. C
28. D
29. $n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$
30. 985 kg/m^3

ESCLARECENDO!



7. Lista de questões comentadas

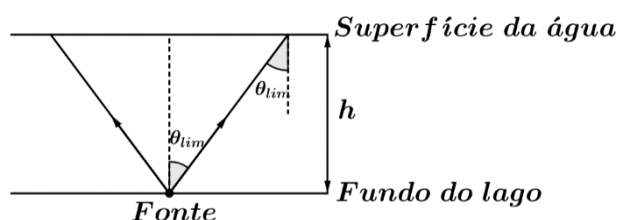
1. (ITA-1969)

Uma fonte luminosa puntiforme está a uma profundidade h abaixo da superfície de um lago suficientemente grande em extensão e profundidade. Seja n o índice de refração da água. Da energia total emitida, f é a fração que escapa diretamente da superfície líquida, desprezando a absorção da luz na água e a reflexão que não for total. Nessas condições podemos afirmar que:

- a) f aumenta se h aumentar
- b) f diminui se h aumentar
- c) $f = \frac{1}{n}$
- d) $f = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot n \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$
- e) nenhuma das afirmações acima.

Comentários:

Pelas instruções do enunciado, considera-se energia que escapa da água como sendo a quantidade de luz refratada. Portanto, analisando a figura abaixo:



Considere que os raios representados são os raios no ângulo limite, ou seja, para ângulos maiores que esse a luz emitida não irá refratar e emergir da água. No entanto, a fonte é pontual, ou seja, a propagação da luz é uma esfera. Utilizar-se-á o conceito de ângulo sólido, onde:

$$\Omega = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \theta) \Rightarrow \Omega_{\text{emerge}} = 2 \cdot \pi \cdot (1 - \cos \theta_{\text{lim}})$$

$$\text{sen } \theta_{\text{lim}} = \frac{n_{\text{ar}}}{n_{\text{água}}} = \frac{1}{n}$$

Logo:

$$\cos \theta_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

Portanto, o ângulo sólido que corresponde à luz que escapa é:

$$\Omega_{emerge} = 2 \cdot \pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}\right)$$

Assim, a fração de luz que escapa é:

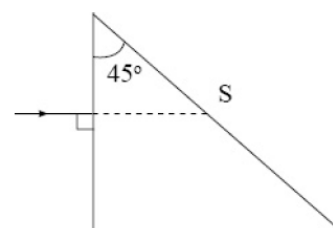
$$f = \frac{\Omega_{emerge}}{\Omega_{total}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{(n - \sqrt{n^2 - 1})}{n}}{4 \cdot \pi} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}$$

Gabarito: E

2. (ITA-1971)

No desenho qual deve ser o índice de refração do prisma para que o raio mostrado sofra reflexão total na face S? (Considere o índice de refração do ar igual a 1,00).

- a) $n > \sqrt{2}$
- b) $n < 1,5$
- c) $n > 1,16$
- d) $n < \sqrt{2}$
- e) nenhuma das respostas é correta.



Comentários:

O ângulo de incidência deve ser maior ou igual ao ângulo limite para que ocorra reflexão total. Como o ângulo de incidência é menor ou igual a 90° , pode-se concluir que:

$$\sin \theta_{lim} < \sin \hat{i}$$

Mas:

$$\hat{i} = 45^\circ$$

E:

$$\sin \theta_{lim} = \frac{1}{n}$$

Logo:

$$\frac{1}{n} < \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow n > \sqrt{2}$$

Gabarito: A

3. (ITA-1973)

A vista de uma pessoa normal é capaz de focalizar um objeto que esteja no mínimo a uma distância de 24 cm. Coloca-se junto do olho de uma pessoa normal uma lente delgada convergente de distância focal igual a 5,0 cm. Neste caso, para que um objeto seja visto claramente pela pessoa, é suficiente que ele esteja a uma distância d do olho tal que:

- a) $3 \text{ cm} < d < 10 \text{ cm}$
- b) $d < 4 \text{ cm}$
- c) $4 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$
- d) $2 \text{ cm} < d < 24 \text{ cm}$
- e) $d > 4,5 \text{ cm}$

Comentários:

Ao colocar-se a lente junto ao olho, o que é observado pela pessoa passa a ser a imagem do objeto original. Para que esta imagem seja vista claramente, ela deve estar a uma distância mínima de 24 cm. Portanto, pela equação das lentes delgadas:

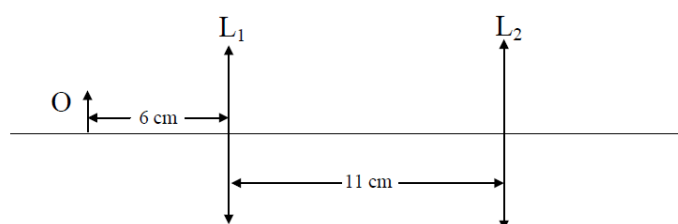
$$\frac{1}{0,05} = \frac{1}{d} + \frac{1}{-0,24} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{0,29}{0,012} \Rightarrow d \cong 0,041 \text{ m} \Rightarrow 4 \text{ cm} < d < 5 \text{ cm}$$

Gabarito: C

4. (ITA-1976)

No sistema óptico esquematizado, O representa um objeto real e as lentes delgadas convergentes, L_1 e L_2 , tem distância focais iguais a 2 cm e 4 cm, respectivamente. A imagem I deve estar a:

- a) 8 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- b) 8 cm à esquerda de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- c) 8 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = 2$
- d) 8 cm à esquerda de L_2 e $\frac{I}{O} = \frac{1}{2}$
- e) 12 cm à direita de L_2 e $\frac{I}{O} = 2$



Comentários:

Pela equação das lentes delgadas para a lente 1:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 3 \text{ cm}$$

E o aumento causado pela lente 1:

$$A_1 = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}$$

Esta imagem serve de objeto para a segunda lente. Aplicando-se a equação das lentes delgadas para a segunda lente:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = 8 \text{ cm}$$

O aumento causado pela lente 2 é:

$$A_2 = -\frac{8}{8} = -1$$

Logo a posição final é 8 cm à direita da lente 2 e o aumento final é $A = A_1 \cdot A_2 = \frac{1}{2}$.

Gabarito: A

5. (ITA-1978)

Uma lente duplamente convexa tem raios de curvatura de 25 cm e índice de refração 1,50. Calcular a posição da imagem (I) de um objeto colocado sobre o eixo, a 60 cm da lente, 1ª) quando a lente

se acha no ar e 2º) quando imersa na água. São dados os índices de refração: $n_{ar} = 1,00$; $n_{água} = 1,33$.

- | | Ar | Água |
|----|--------------------------------------|--------------------------|
| a) | $q = 25,00 \text{ cm}$ | $q = 73,52 \text{ cm}$ |
| b) | $q = -42,86 \text{ cm}$ | $q = -155,25 \text{ cm}$ |
| c) | $q = 42,86 \text{ cm}$ | $q = -155,25 \text{ cm}$ |
| d) | $q = 12,25 \text{ cm}$ | $q = 0,01 \text{ cm}$ |
| e) | nenhuma das afirmações está correta. | |

Comentários:

Pela equação dos fabricantes de lente para a lente no ar:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot (n_{lente} - 1) = 8 \cdot \frac{1}{2} = 4 \Rightarrow f = 0,25 \text{ m}$$

Para a lente na água:

$$\frac{1}{f} = 8 \cdot \left(\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} - 1 \right) = 8 \cdot \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow f = 1 \text{ m}$$

Agora basta aplicar a equação das lentes delgadas para cada caso.

$$p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

$$p'_1 = \frac{0,6 \cdot 0,25}{0,35} = \frac{0,15}{0,35} = 0,4286 \text{ m} \Rightarrow p'_2 = \frac{0,6}{-0,4} = -\frac{3}{2} = -1,5 \text{ m}$$

Portanto, nenhuma das afirmativas está correta.

Gabarito: E

6. (ITA-1979)

Um feixe de luz monocromática incide paralelamente ao eixo principal de uma lente convergente de distância focal A , num meio de índice de refração absoluto igual a 1 (um). O feixe é cilíndrico e tem diâmetro $2A$. Dispõe-se de uma lâmina de faces paralelas, espessura $E = \frac{A}{4}$ e índice de refração absoluto igual a 1,4 (um inteiro e quatro décimos). Nestas condições, pode-se afirmar que:

- se a lâmina for intercalada entre a fonte de luz e a lente ter-se-á que a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = A - \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$
- se a lâmina for intercalada entre a lente e seu foco, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = A + \frac{E \cdot \sin 15^\circ}{0,5}$
- se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então, a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = 1,2 A$
- se a lâmina for intercalada entre o foco e a lente, então a nova distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente, será: $f = 4 A$

e) qualquer que seja a posição da lâmina intercalada entre a fonte de luz e a lente, ela não alterará a distância focal do sistema, medida a partir do centro da lente.

Comentários:

Uma lâmina de faces paralelas é capaz de desviar a luz no caso de incidência oblíqua à sua superfície e capaz de gerar uma posição aparente independente do ângulo de incidência. De qualquer forma, a lâmina de faces paralelas não é capaz de deformar a imagem em relação ao objeto, visto que:

$$\Delta p = e \cdot \frac{\sin(\hat{i} - \hat{r})}{\sin \hat{i} \cdot \cos \hat{r}}$$

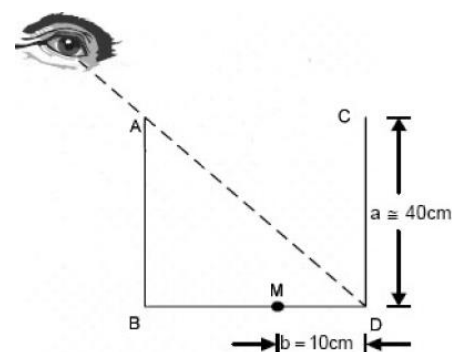
A posição aparente e o deslocamento serão o mesmo para todo o feixe contanto que a espessura e o ângulo de incidência sejam constantes em toda a extensão da trajetória do feixe, ou seja, incide um cilindro de diâmetro $2A$, emerge um cilindro de diâmetro $2A$ com mesma direção.

Gabarito: E

7. (ITA-1986)

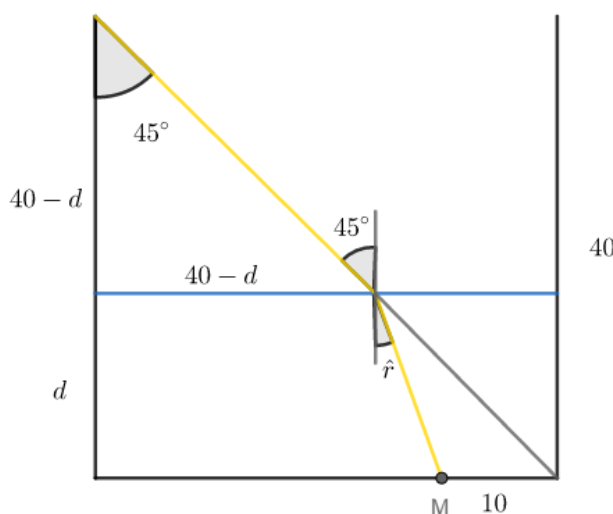
Um reservatório cúbico de paredes opacas e arestas $a = 40 \text{ cm}$, achase disposto de tal maneira que o observador não vê o seu fundo (ver figura). A que nível mínimo devemos preencher este cubo com água, para que o observador possa ver uma mancha negra, pontual M , que se encontra no fundo do recipiente, a uma distância $b = 10 \text{ cm}$ do ponto D ? Obs: índice de refração para a água, na região do visível, $n = 1,33$.

- a) 21 cm
- b) 27 cm
- c) 32 cm
- d) 18 cm
- e) nenhum dos valores acima.



Comentários:

A situação quando ele consegue visualizar o ponto M está representada a seguir:



Por Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \sin 45^\circ = n_{\text{água}} \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \sin \hat{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Pela figura:

$$\sin \hat{r} = \frac{d - 10}{\sqrt{(d - 10)^2 + d^2}}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{8} = \frac{d - 10}{\sqrt{2 \cdot d^2 - 20 \cdot d + 100}}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado:

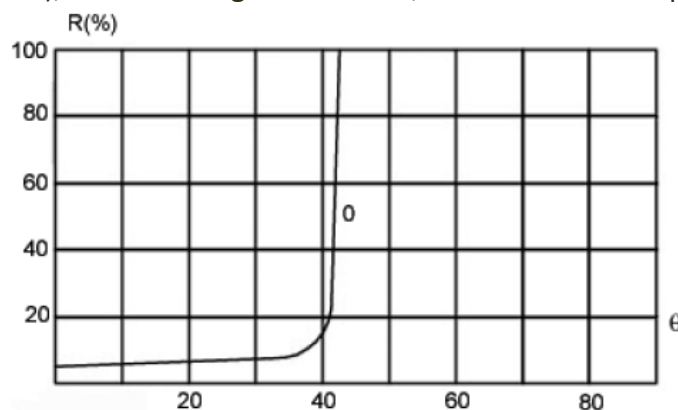
$$18 \cdot d^2 - 180 \cdot d + 900 = 32 \cdot d^2 - 640 \cdot d + 3200$$

$$14 \cdot d^2 - 460 \cdot d + 2300 = 0 \therefore d \cong 27 \text{ cm}$$

Gabarito: B

8. (ITA-1987)

Numa experiência em que se mediu a razão R entre a energia luminosa refletida e a energia luminosa incidente na interface entre dois meios de índices de refração n_1 e n_2 em função do ângulo de incidência (vide figura), obteve-se o gráfico abaixo, onde R é dada em porcentagem.



Das afirmativas:

I – $n_2 < n_1$

II – $\frac{n_1}{n_2} > 1,4$

III – a razão entre a energia refletida e a refratada a 30° é maior que 0,2.

IV – para $\theta > 42^\circ$ a Luz é completamente refratada.

V – o raio refratado está mais afastado da normal do que o raio incidente.

Podemos dizer que:

a) Apenas I e II estão corretas

b) I, III e V estão corretas.

c) Apenas III e V estão corretas.

d) I, II e V estão corretas.

e) II, IV e V estão corretas.

Comentários:

Pela análise do gráfico, nota-se que a partir de $\theta \cong 42^\circ$, a energia refletida é igual à incidente, ou seja, ocorre reflexão total. Sabendo que ocorre reflexão total, sabe-se também que o meio 1 deve ser mais refringente que o meio 2.

I. Verdadeiro.

II. Verdadeiro. Pela Lei de Snell no ângulo limite:

$$n_1 \cdot \sin \theta_{lim} = n_2 \Rightarrow \frac{n_1}{n_2} \cdot \sin \theta_{lim} = 1$$

Sabe-se que $\theta_{lim} \cong 42^\circ < 45^\circ$, portanto, $\sin \theta_{lim} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Assim, $\frac{n_1}{n_2} > \sqrt{2}$.

III. Falso A razão R representa a razão entre energia refletida e incidente. Portanto, o restante da energia é dos raios refratados. Sendo assim, para $\theta = 30^\circ$:

$$R \cong 10\% \rightarrow \begin{cases} 10\% \text{ da energia incidente é refletida} \\ 90\% \text{ da energia incidente é refratada} \end{cases}$$

Logo, a relação entre a energia refletida e refratada é $\cong \frac{1}{9}$.

IV. Falso.

V. Verdadeiro. Sabe-se que o meio 2 é menos refringente, portanto, o raio afasta-se da normal.

Gabarito: D

9. (ITA-1992)

Uma vela se encontra a uma distância de 30 cm de uma lente plano convexo que projeta uma imagem nítida de sua chama em uma parede a 1,2 m de distância da lente. Qual é o raio de curvatura da parte convexa da lente se o índice de refração da mesma é 1,5?

- a) 60 cm. b) 30 cm. c) 24 cm.
d) 12 cm. e) Outro valor diferente dos anteriores.

Comentários:

Pela equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0,3} + \frac{1}{1,2} \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1,5}{0,36} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \cdot \left(\frac{n_L}{n_m} - 1 \right)$$

Lembrando que:

$$R_2 \rightarrow \infty$$

Logo:

$$\frac{1,5}{0,36} = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow R_1 = \frac{6}{50} = 12 \text{ cm}$$

Gabarito: D

10. (ITA-1993)

Um objeto em forma de um segmento de reta de comprimento l está situado ao longo do eixo óptico de uma lente convergente de distância focal f . O centro do segmento se encontra a uma distância a da lente e, esta, produz uma imagem real convergente de todos os pontos do objeto. Quanto vale o aumento linear β do objeto?

a) $\beta = \frac{f^2}{a^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

b) $\beta = \frac{f^2}{f^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

c) $\beta = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

d) $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

e) $\beta = \frac{f^2}{(a+f)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2}$

Comentários:

Aplicar-se-á a equação das lentes delgadas para os pontos extremos do objeto. Se o centro dista a da lente, os extremos distam, respectivamente, $a + l/2$ e $a - l/2$. Portanto, para cada caso:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \Rightarrow p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Assim:

$$p'_1 = \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right) \cdot f}{a + \frac{l}{2} - f} \Rightarrow p'_2 = \frac{\left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot f}{a - \frac{l}{2} - f}$$

A distância entre as imagens fornece o comprimento da imagem do objeto:

$$|p'_1 - p'_2| = \left| \frac{\left(a + \frac{l}{2}\right) \cdot f \cdot \left[(a-f) - \frac{l}{2}\right] - \left(a - \frac{l}{2}\right) \cdot f \cdot \left[(a-f) + \frac{l}{2}\right]}{\left[(a-f) + \frac{l}{2}\right] \cdot \left[(a-f) - \frac{l}{2}\right]} \right|$$

$$|p'_1 - p'_2| = \left| \frac{f \cdot \left(a^2 - \frac{l^2}{4} - a \cdot f - \frac{l}{2} \cdot f\right) - f \cdot \left(a^2 - \frac{l^2}{4} - a \cdot f + \frac{l}{2} \cdot f\right)}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2} \right| = \frac{f^2 \cdot l}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

A ampliação é dada pelo comprimento final dividido pelo inicial:

$$A = \frac{|p'_1 - p'_2|}{l} = \frac{f^2}{(a-f)^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

Gabarito: C

11. (ITA-1994)

Um dos telescópios utilizados por Galileu era composto de duas lentes: a objetiva de 16 mm de diâmetro e distância focal de 960 mm e a ocular formada por uma lente divergente. O aumento era de 20 vezes. Podemos afirmar que a distância focal e a imagem eram respectivamente:

a) 192 mm, direita.

b) 8 mm, direita.

c) 48 mm, invertida.

d) 960 mm, direita.

e) 48 mm, direita.

Comentários:

O aumento é dado por:

$$A_{\theta} = -\frac{f_{obj}}{f_{oc}} = -\frac{960}{f_{oc}} = 20 \Rightarrow f_{oc} = -48 \text{ mm}$$

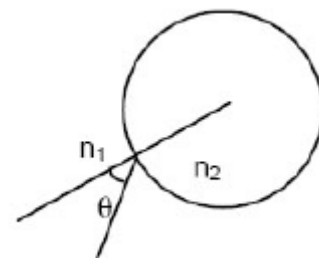
Portanto é uma lente divergente de distância focal igual a 48 mm. Por ser um telescópio de Galileu, a imagem é direita.

Gabarito: E

12. (ITA-1994)

A figura mostra a seção transversal de um cilindro feito de um material cujo índice de refração é n_2 imerso num meio de índice n_1 . Os valores dos índices são $\sqrt{2}$ e 1,0 não necessariamente nessa ordem. Para que um feixe de luz contido no plano seccionador e proveniente do meio de índice n_1 penetre no cilindro, mas não consiga escapar, devemos satisfazer às seguintes condições:

- a) Impossível com os dados fornecidos.
- b) $n_1 = \sqrt{2}; n_2 = 1,0; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- c) $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}; 45^\circ < \theta < 90^\circ$
- d) Nunca será possível.
- e) $n_1 = 1,0; n_2 = \sqrt{2}$

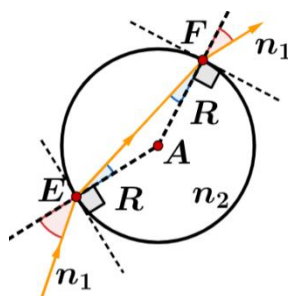


Comentários:

Caso o meio 1 seja mais refringente, há o risco de reflexão total ao entrar no meio 2. Se não ocorrer, o raio que entra com certeza irá emergir, pois, a seguinte transição de meios seria do menos refringente para o mais refringente. Para que não ocorra essa reflexão total:

$$\text{Se } n_1 > n_2 \Rightarrow \text{sen } \theta < \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vê-se que esta possibilidade não foi contemplada em nenhuma alternativa. Portanto, adotar-se-á que o meio 1 é o menos refringente. Portanto:



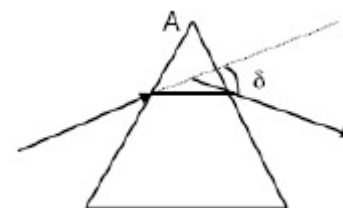
Como a entrada independe de θ , o que interessa será na saída do meio 2. Entretanto, nota-se que o triângulo AEF é isósceles. Portanto, o ângulo $E\hat{A}F$ é igual ao ângulo $E\hat{F}A$, como as refrefrências dos meios são iguais, conclui-se que a saída do raio será sempre possível contanto que ocorra a entrada.

Gabarito: D

13. (ITA-1996)

O Método do Desvio Mínimo, para a medida do índice de refração, n , de um material transparente, em relação ao ar, consiste em se medir o desvio mínimo de um feixe estreito de luz que atravessa um prisma feito desse material. Para que esse método possa ser aplicado (isto é, para que se tenha um feixe emergente), o ângulo A do prisma deve ser menor que:

- a) $\arcsen(n)$
- b) $2 \arcsen(1/n)$
- c) $0,5 \arcsen(1/n)$
- d) $\arcsen(1/n)$
- e) Outra expressão.



Comentários:

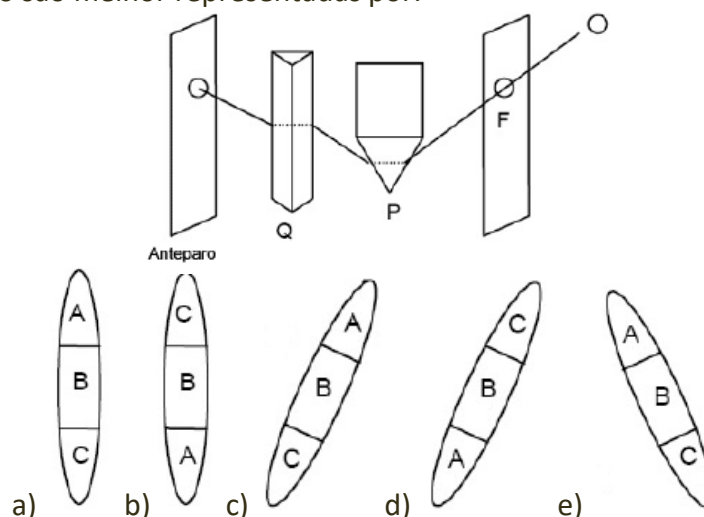
Pela condição necessária de refração:

$$A \leq 2 \cdot \hat{L} \Rightarrow A \leq 2 \cdot \arcsen\left(\frac{1}{n}\right)$$

Gabarito: B

14. (ITA-1999)

Isaac Newton, no início de 1666, realizou a seguinte experiência: Seja S o Sol e F um orifício feito na janela de um quarto escuro. Considere P e Q dois prismas de vidro colocados em posição cruzada um em relação ao outro, ou seja, com suas arestas perpendiculares entre si, conforme mostra a figura abaixo. Represente por A a cor violeta, por B a amarela e C a vermelha. Após a passagem dos raios luminosos pelo orifício e pelos dois prismas, a forma da imagem e a disposição das cores formadas no anteparo são melhor representadas por:



Comentários:

É importante lembrar que o desvio é aproximado por:

$$\delta = \hat{A} \cdot \left(\frac{n_{\text{prisma}}}{n_{\text{meio}}} - 1 \right)$$

Ao passar pelo primeiro prisma, as diferentes cores irão se espalhar. As que sofrem o maior desvio são aquelas que tem maior índice de refração, no caso $n_{\text{violeta}} > n_{\text{amarela}} > n_{\text{vermelha}}$. Ao passar por P,

as cores estão organizadas de acordo com a alternativa a). Entretanto, elas irão passar por mais um prisma.

Novamente, ao passar pelo segundo prisma, as cores com maior índice de refração irão sofrer maior desvio. Portanto, o violeta deve deslocar-se mais que o amarelo que, por sua vez, irá deslocar-se mais que o vermelho. Obtém-se assim a imagem representada na alternativa c).

Gabarito: C

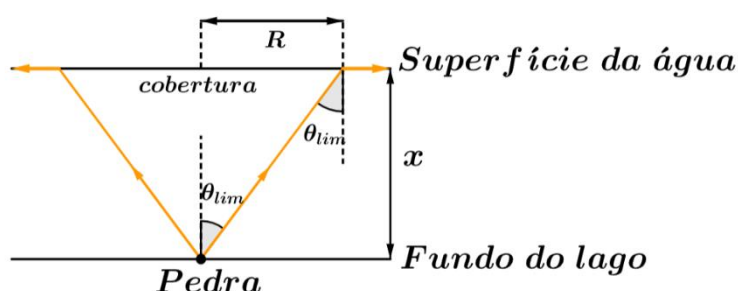
15. (ITA-2002)

Uma pequena pedra repousa no fundo de um tanque de x m de profundidade. Determine o menor raio de uma cobertura circular, plana, paralela à superfície da água que flutuando sobre a superfície da água diretamente acima da pedra, impeça completamente a visão desta por um observador ao lado do tanque, cuja vista se encontra no nível da água. Justifique.

Dado: índice de refração da água $n = \frac{4}{3}$

Comentários:

A situação para que a pedra fique completamente “escondida” está representada a seguir.



Portanto:

$$\sin \theta_{lim} = \frac{1}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \frac{R}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{3}{4} \Rightarrow 16 \cdot R^2 = 9 \cdot R^2 + 9 \cdot x^2$$

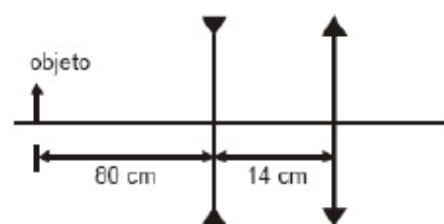
$$7 \cdot R^2 = 9 \cdot x^2 \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$$

Gabarito: $R = \frac{3\sqrt{7} \cdot x}{7}$

16. (ITA-2003)

A figura mostra um sistema óptico constituído de uma lente divergente, com distância focal $f_1 = -20\text{cm}$, distante 14cm de uma lente convergente com distância focal $f_2 = 20\text{cm}$. Se um objeto linear é posicionado a 80cm à esquerda da lente divergente, pode-se afirmar que a imagem definitiva formada pelo sistema:

- é real e o fator de ampliação linear do sistema é $-0,4$.
- é virtual, menor e direita em relação ao objeto.
- é real, maior e invertida em relação ao objeto.
- é real e o fator de ampliação linear do sistema é $-0,2$.
- é virtual, maior e invertida em relação ao objeto.



Comentários:

$$p' = \frac{p \cdot f}{p - f}$$

Para a lente divergente:

$$p' = \frac{80 \cdot (-20)}{100} = -16 \text{ cm}$$

Ou seja, a primeira imagem forma-se 16 cm a esquerda a lente divergente e é virtual. Ela serve de objeto para a segunda lente. $p = 30 \text{ cm}$.

$$p' = \frac{30 \cdot 20}{10} = 60$$

A imagem é real. A ampliação total do sistema é o produto da ampliação de cada lente. Assim:

$$A = A_1 \cdot A_2 = \left(-\frac{(-16)}{80}\right) \cdot \left(-\frac{60}{30}\right)$$

$$A = \frac{1}{5} \cdot (-2) = -\frac{2}{5} = -0,4$$

A imagem é, portanto, invertida e menor.

Gabarito: A

17. (ITA-2003)

Num oftalmologista, constata-se que um certo paciente tem uma distância máxima e uma distância mínima de visão distinta de 5,0m e 8,0cm, respectivamente. Sua visão deve ser corrigida pelo uso de uma lente que lhe permita ver com clareza objetos no “infinito”. Qual das afirmações é verdadeira?

- a) O paciente é míope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- b) O paciente é míope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- c) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes convergentes cuja vergência é 0,2 dioptrias.
- d) O paciente é hipermetrope e deve usar lentes divergentes cuja vergência é -0,2 dioptrias.
- e) A lente corretora de defeito visual desloca a distância mínima de visão distinta para 8,1cm.

Comentários:

Visto que o problema do paciente é a visualização de objetos à distância, ele é míope. A correção deve ser feita por uso de lentes divergentes de dioptria igual a:

$$V = -\frac{1}{d_{\text{remoto míope}}} = -\frac{1}{5} = -0,2$$

Aqui já se percebe que não foi atendido nenhuma das quatro primeiras alternativas e a correta seria a letra E por eliminação. Entretanto, é interessante a verificação. O ponto próximo do paciente será deslocado pela lente de acordo com a equação das lentes delgadas:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p_{\text{próximo}_{\text{novo}}}} - \frac{1}{p_{\text{próximo}_{\text{antigo}}}} \Rightarrow -\frac{1}{5} = \frac{1}{p_{\text{próximo}_{\text{novo}}}} - \frac{1}{0,08}$$

$$12,5 - 0,2 = \frac{1}{p_{\text{próximo}_{\text{novo}}}} \Rightarrow p_{\text{próximo}_{\text{novo}}} = \frac{1}{12,3} = 8,13 \text{ cm}$$

Gabarito: E

18. (ITA-2005)

Situa-se um objeto a uma distância p' diante de uma lente convergente de distância focal f , de modo a obter uma imagem real a uma distância p da lente. Considerando a condição de mínima distância entre imagem e objeto, então é correto afirmar que:

- a) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 5 \cdot f^3$ b) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 10 \cdot f^3$
c) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$ d) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 25 \cdot f^3$
e) $p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 30 \cdot f^3$

Comentários:

A condição de mínima distância entre imagem e objeto é $p + p' = 4 \cdot f$ e $p = p'$, portanto $f = \frac{p}{2}$. Para o lado esquerdo das expressões:

$$p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 2 \cdot p^3 + \frac{p^3}{2} = 5 \cdot \frac{p^3}{2}$$

E:

$$f^3 = \frac{p^3}{8}$$

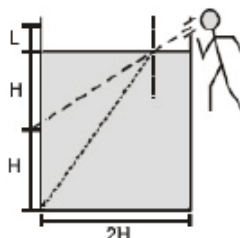
Portanto:

$$p^3 + f \cdot p \cdot p' + p'^3 = 20 \cdot f^3$$

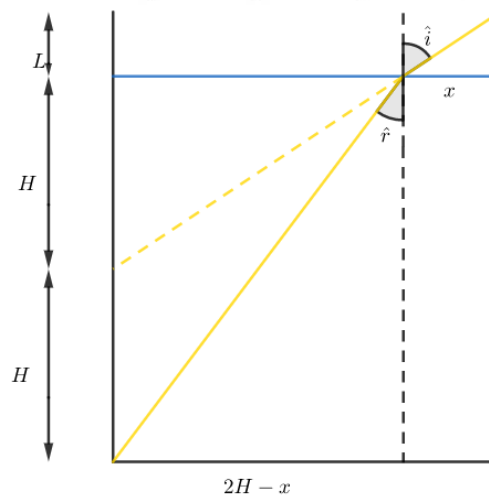
Gabarito: C

19. (ITA-2005)

Através de um tubo fino, um observador enxerga o topo de uma barra vertical de altura H apoiada no fundo de um cilindro vazio de diâmetro $2H$. O tubo encontra-se a uma altura $2H + L$ e, para efeito de cálculo, é de comprimento desprezível. Quando o cilindro é preenchido com um líquido até uma altura $2H$ (veja figura), mantido o tubo na mesma posição, o observador passa a ver a extremidade inferior da barra. Determine literalmente o índice de refração desse líquido.



Comentários:



Sabe-se que:

$$\frac{L}{x} = \frac{H + L}{2 \cdot H} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot H \cdot L}{H + L}$$

Portanto:

$$\sin i = \frac{x}{\sqrt{x^2 + L^2}} = \frac{2 \cdot H \cdot L}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}}$$

E:

$$\sin r = \frac{2 \cdot H - x}{\sqrt{(2 \cdot H - x)^2 + 4 \cdot H^2}} = \frac{2 \cdot H^2}{(H + L) \cdot \sqrt{\left(2 \cdot \frac{H^2}{H + L}\right)^2 + 4 \cdot H^2}}$$

$$\sin r = \frac{2 \cdot H^2}{\sqrt{4 \cdot H^4 + 4 \cdot H^2 \cdot (H^2 + 2 \cdot H \cdot L + L^2)}} = \frac{2 \cdot H^2}{\sqrt{8 \cdot H^4 + 8 \cdot H^3 \cdot L + 4 \cdot H^2 \cdot L^2}}$$

$$\sin r = \frac{2 \cdot H}{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}$$

Aplicando Lei de Snell:

$$\sin i = n \cdot \sin r$$

$$\frac{2 \cdot H \cdot L}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}} = n \cdot \frac{2 \cdot H}{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}$$

$$n = \frac{L \cdot \sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}{\sqrt{5 \cdot H^2 \cdot L^2 + 2 \cdot H \cdot L^3 + L^4}} = \frac{\sqrt{8 \cdot H^2 + 8 \cdot H \cdot L + 4 \cdot L^2}}{\sqrt{5 \cdot H^2 + 2 \cdot H \cdot L + L^2}}$$

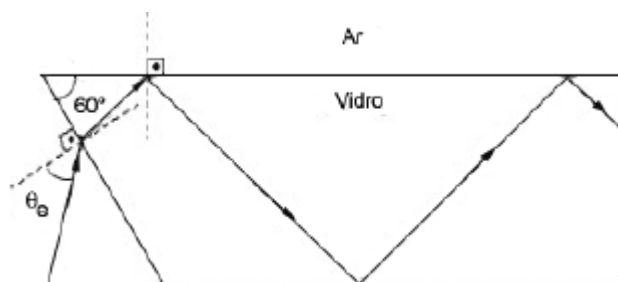
$$n = \frac{2 \cdot \sqrt{(H+L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H+L)^2 + 4 \cdot H^2}}$$

Gabarito: $n = \frac{2 \cdot \sqrt{(H+L)^2 + H^2}}{\sqrt{(H+L)^2 + 4 \cdot H^2}}$

20. (ITA-2006)

A figura mostra uma placa de vidro com índice de refração $n_v = \sqrt{2}$ mergulhada no ar, cujo índice de refração é igual a 1,0. Para que um feixe de luz monocromática se propague pelo interior do vidro através de sucessivas reflexões totais, o seno do ângulo de entrada, $\text{sen } \theta_e$, deverá ser menor ou igual a:

- a) 0,18
- b) 0,37
- c) 0,50
- d) 0,71
- e) 0,87



Comentários:

Sabendo que houve reflexão total na interface “vidro-ar”, o ângulo de incidência ali (\hat{i}) deve ser maior que o ângulo limite. Portanto:

$$\hat{i} \geq 45^\circ$$

Mas, se $\hat{i} \geq 45^\circ$, o ângulo refratado na interface ar-vidro (\hat{r}) deve ser menor que 15° .

$$\hat{r} \leq 15^\circ$$

Assim:

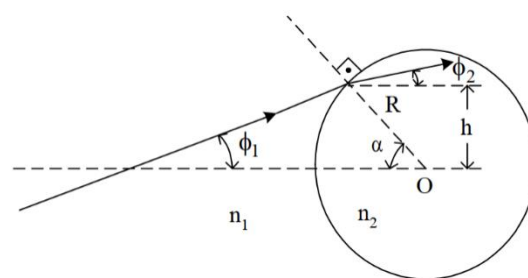
$$1 \cdot \text{sen } (\theta_e) \leq \sqrt{2} \cdot \text{sen } (15^\circ) \cong 0,37$$

Gabarito: B

21. (ITA-2007)

A figura mostra um raio de luz propagando-se num meio de índice de refração n_1 e transmitido para uma esfera transparente de raio R e índice de refração n_2 . Considere os valores dos ângulos α , ϕ_1 e ϕ_2 muito pequenos, tal que cada ângulo seja respectivamente igual à sua tangente e ao seu seno. O valor aproximado de ϕ_2 é de:

- a) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 - \alpha)$
- b) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha)$
- c) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) \cdot \alpha$
- d) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1$
- e) $\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha$



Comentários:

Por Lei de Snell:

$$n_1 \cdot \sin(\phi_1 + \alpha) = n_2 \cdot \sin(\phi_2 + \alpha)$$

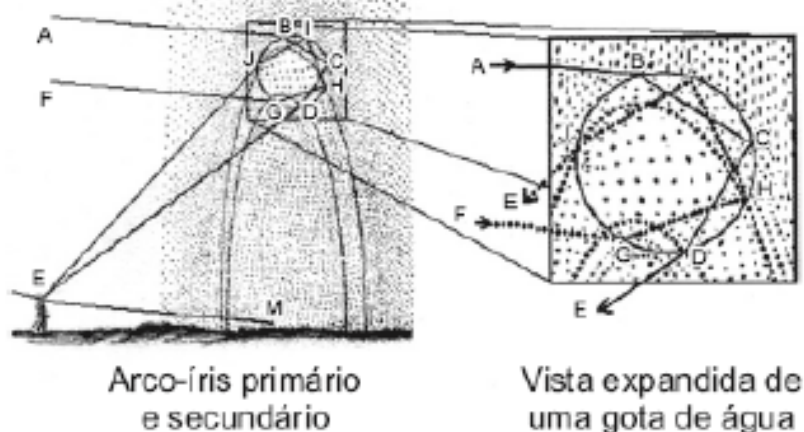
Pela aproximação de ângulos pequenos, tem-se:

$$\frac{n_1}{n_2} \cdot (\phi_1 + \alpha) - \alpha = \phi_2 \Rightarrow \boxed{\phi_2 = \frac{n_1}{n_2} \cdot \phi_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) \cdot \alpha}$$

Gabarito: E

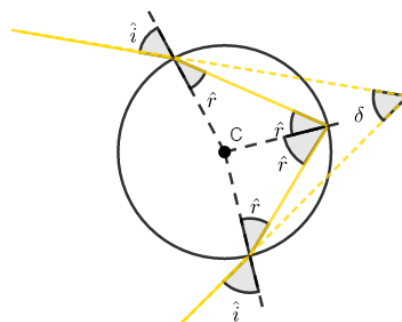
22. (ITA-2008)

Foi René Descartes em 1637 o primeiro a discutir claramente a formação do arco-íris. Ele escreveu: *“Considerando que esse arco-íris aparece não apenas no céu, mas também no ar perto de nós, sempre que haja gotas de água iluminadas pelo sol, como podemos ver em certas fontes, eu imediatamente entendi que isso acontece devido apenas ao caminho que os raios de luz traçam nessas gotas e atingem nossos olhos. Ainda mais, sabendo que as gotas são redondas, como fora anteriormente provado e, mesmo que sejam grandes ou pequenas, a aparência do arco-íris não muda de forma nenhuma, tive a idéia de considerar uma bem grande, para que pudesse examinar melhor...”* Ele então apresentou a figura onde estão representadas as trajetórias para os arco-íris primário e secundário. Determinar o ângulo entre o raio incidente na gota, AB, e o incidente no olho do observador, DE, no caso do arco-íris primário, em termos do ângulo de incidência, e do índice de refração da água na. Considere o índice de refração do ar $n = 1$.



Comentários:

A situação está representada na figura a seguir.



Onde, \hat{i} é o ângulo incidente, \hat{r} é o ângulo refratado e δ é o desvio da trajetória. Observa-se que há uma asa-delta na figura (entre as linhas amarelas tracejadas), portanto:

$$2 \cdot \hat{r} = \delta + 2 \cdot (\hat{i} - \hat{r})$$

$$\delta = 4 \cdot \hat{r} - 2 \cdot \hat{i}$$

Mas, pela Lei de Snell:

$$n_{ar} \cdot \sen \hat{i} = n_a \cdot \sen \hat{r} \Rightarrow \hat{r} = \arcsen \left(\frac{\sen \hat{i}}{n_a} \right)$$

Portanto:

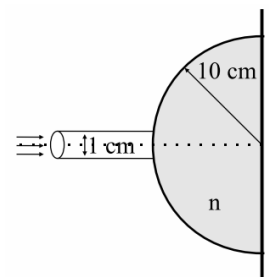
$$\delta = 4 \cdot \arcsen \left(\frac{\sen \hat{i}}{n_a} \right) - 2 \cdot \hat{i}$$

Gabarito: $\delta = 4 \cdot \arcsen \left(\frac{\sen \hat{i}}{n_a} \right) - 2 \cdot \hat{i}$

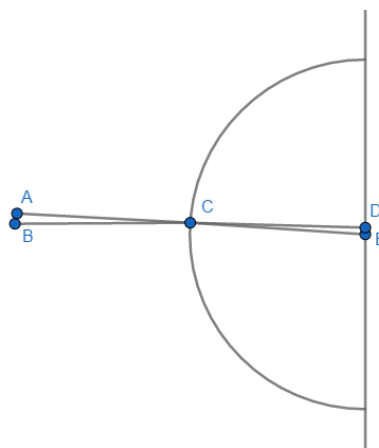
23. (ITA-2011)

Um hemisfério de vidro maciço de raio de 10 cm e índice de refração $n = \frac{3}{2}$ tem sua face plana apoiada sobre uma parede, como ilustra a figura. Um feixe colimado de luz de 1 cm de diâmetro incide sobre a face esférica, centrado na direção do eixo de simetria do hemisfério. Valendo-se das aproximações de ângulos pequeno, $\sen \theta \cong \theta$ e $\tg \theta \cong \theta$, o diâmetro do círculo de luz que se forma sobre a superfície da parede é de:

- a) 1 cm.
- b) 2/3 cm
- c) 1/2 cm
- d) 1/3 cm
- e) 1/10 cm



Comentários:



O ângulo \widehat{ACB} é incidente e o ângulo \widehat{DCE} é o refratado. Aproximando \widehat{ACB} a sua tangente:

$$\widehat{ACB} \cong \frac{0,5}{10} = 0,05$$

Pela Lei de Snell:

$$1 \cdot 0,05 = 1,5 \cdot D\hat{C}E \Rightarrow D\hat{C}E = \frac{1}{30}$$

O desvio sofrido pelo raio, portanto, foi de:

$$A\hat{C}B - D\hat{C}E = \frac{1}{20} - \frac{1}{30}$$

Multiplicando o desvio pela distância percorrida pelo raio dentro da semiesfera ($\cong 10 \text{ cm}$), tem-se quanto diminuiu o diâmetro. Assim:

$$\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right) \cdot 10 = \Delta \Rightarrow \Delta = 0,166 \text{ cm}$$

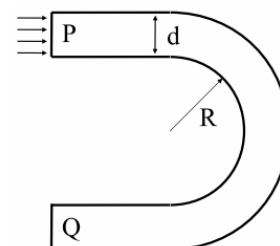
O diâmetro, portanto, é:

$$D = 2 \cdot (0,5 - 0,166) \cong 0,666 \cong \frac{2}{3}$$

Gabarito: B

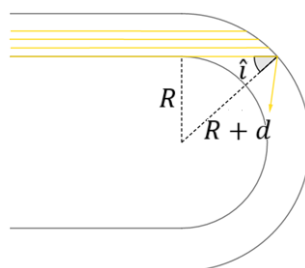
24. (ITA-2011)

Um tarugo de vidro de índice de refração $n = \frac{3}{2}$ e seção transversal retangular é moldado na forma de uma ferradura, como ilustra a figura. Um feixe de luz incide perpendicularmente sobre a superfície plana P. Determine o valor mínimo da razão $\frac{R}{d}$ para o qual toda a luz que penetra pela superfície P emerge do vidro pela superfície Q.



Comentários:

Dentre os raios incidentes, o que apresenta maior ângulo de incidência é o mais próximo do centro de curvatura. Observe:



No caso limite, \hat{i} é o ângulo limite:

$$\text{sen } \hat{i} = \frac{n_{ar}}{n_{vidro}}$$

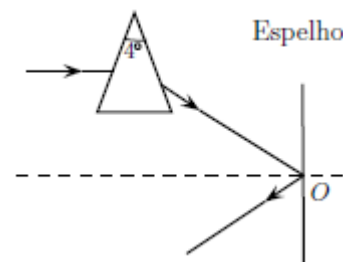
$$\frac{R}{R+d} = \frac{2}{3} \Rightarrow 1 + \frac{d}{R} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{d}{R} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{R}{d} = 2}$$

Gabarito: 2

25. (ITA-2013)

Um raio horizontal de luz monocromática atinge um espelho plano vertical após incidir num prisma com abertura de 4° e índice de refração $n = 1,5$. Considere o sistema imerso no ar e que tanto o raio emergente do prisma como o refletido pelo espelho estejam no plano do papel, perpendicular ao plano do espelho, como mostrado na figura. Assinale a alternativa que indica respectivamente o ângulo e o sentido em que deve ser girado o espelho em torno do eixo perpendicular ao plano do papel que passa pelo ponto O, de modo que o raio refletido retorne paralelamente ao raio incidente no prisma.

- a) 4° , sentido horário
- b) 2° , sentido horário
- c) 2° , sentido anti-horário
- d) 1° , sentido horário
- e) 1° , sentido anti-horário



Comentários:

Considerando-se que se trata somente de ângulos pequenos, pode-se aproximar o desvio causado pelo prisma por:

$$\hat{\delta} = \hat{i}_1 + \hat{i}_2 - \hat{A}$$

Considerando que o sentido horário é positivo, tem-se que:

$$\hat{i}_1 = 2^\circ + x \text{ e } \hat{i}_2 = 2^\circ + x$$

Portanto, o desvio causado por deslocar-se em x o prisma no sentido horário é de $2x$. Agora, resta calcular o ângulo formado com a horizontal na posição inicial do prisma. Por Lei de Snell:

$$1 \cdot 2^\circ = 1,5 \cdot \hat{r}_1 \Rightarrow \hat{r}_1 = \frac{4^\circ}{3}$$

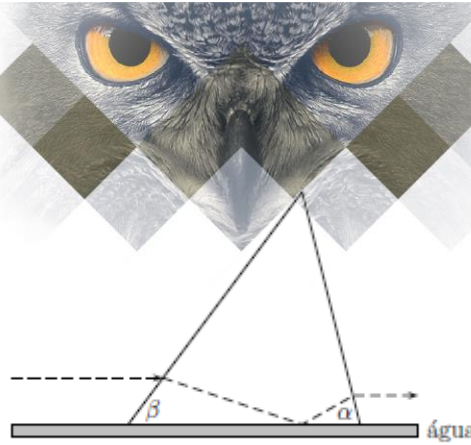
$$\hat{r}_2 = \hat{A} - \hat{r}_1 = \frac{8^\circ}{3} \Rightarrow 1,5 \cdot \frac{8^\circ}{3} = 1 \cdot \hat{i}_2 \Rightarrow \hat{i}_2 = 4^\circ$$

Mas, \hat{i}_2 é medido em relação à normal. A normal encontra-se inclinada em relação à horizontal de 2° . Portanto, a trajetória tem como ângulo de saída do prisma, inicialmente, 2° negativos ($2^\circ - 4^\circ$). Assim, de modo a ter um raio ejetado paralelo à horizontal, deve-se rotacionar em $x = 1^\circ$ no sentido horário.

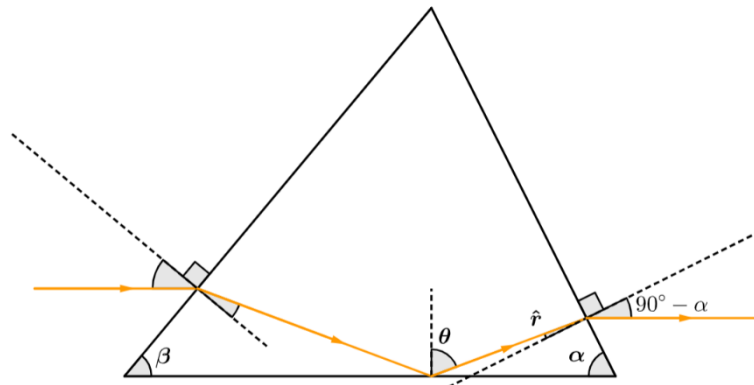
Gabarito: D

26. (ITA-2015)

A base horizontal de um prisma de vidro encontra-se em contato com a superfície da água de um recipiente. A figura mostra a seção reta triangular deste prisma, com dois de seus ângulos, α e β . Um raio de luz propaga-se no ar paralelamente à superfície da água e perpendicular ao eixo do prisma, nele incidindo do lado do ângulo β , cujo valor é tal que o raio sofre reflexão total na interface da superfície vidro-água. Determine o ângulo α tal que o raio emergja horizontalmente do prisma. O índice de refração da água é $4/3$ e, o do vidro, $\sqrt{19}/3$.



Comentários:



Utilizando Lei de Snell na refração do lado direito:

$$\text{sen } (90^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{19}}{3} \cdot \text{sen } \hat{r}$$

Na reflexão total da interface vidro-água:

$$\text{sen } \theta = \frac{4}{\sqrt{19}} \Rightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{3}{19}}$$

E:



$$\hat{r} + \alpha = \theta \Rightarrow \hat{r} = \theta - \alpha \Rightarrow \text{sen } \hat{r} = \text{sen } (\theta - \alpha)$$

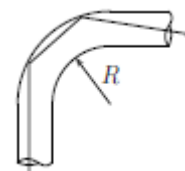
$$\frac{3}{\sqrt{19}} \cdot \cos \alpha = \frac{4}{\sqrt{19}} \cdot \cos \alpha - \text{sen } \alpha \cdot \sqrt{\frac{3}{19}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Gabarito: 30°

27. (ITA-2016)

Um tubo de fibra óptica é basicamente um cilindro longo e transparente, de diâmetro d e índice de refração n . Se o tubo é curvado, parte dos raios de luz pode escapar e não se refletir na superfície interna do tubo. Para que haja reflexão total de um feixe de luz inicialmente paralelo ao eixo do tubo, o menor raio de curvatura interno R (ver figura) deve ser igual a:



- a) $n \cdot d$ b) $\frac{d}{n}$ c) $\frac{d}{n-1}$ d) $\frac{n \cdot d}{n-1}$ e) $\frac{\sqrt{n} \cdot d}{\sqrt{n}-1}$

Comentários:

O raio com maior ângulo de incidência é o mais próximo do centro do arco de circunferência. Pelo mesmo raciocínio que o exercício 40:

$$\frac{R}{R+d} = \frac{1}{n} \Rightarrow R+d = R \cdot n \Rightarrow R(1-n) = -d \Rightarrow R = \frac{d}{n-1}$$

Gabarito: C

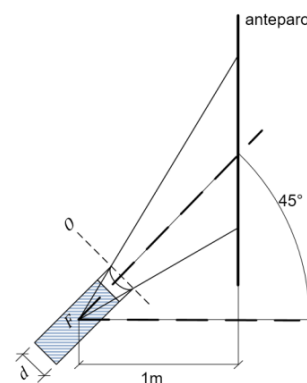
28. (IME – 2019)

Uma lanterna cilíndrica muito potente possui uma lente divergente em sua extremidade. Ela projeta uma luz sobre um anteparo vertical. O eixo central da lanterna e o eixo principal da lente estão alinhados e formam um ângulo de 45° com a horizontal. A lâmpada da lanterna gera raios de luz paralelos, que encontram a lente divergente, formando um feixe cônico de luz na sua saída. O centro óptico da lente O está, aproximadamente, alinhado com as bordas frontais da lanterna. A distância horizontal entre o foco F da lente e o anteparo é de 1 m . Sabendo disto, pode-se observar que o contorno da luz projetada pela lanterna no anteparo forma uma seção plana cônica. Diante do exposto, o comprimento do semieixo maior do contorno dessa seção, em metros, é:

Dados:

- a lente é do tipo plano-côncava;
- a face côncava está na parte mais externa da lanterna;
- diâmetro da lanterna: $d = 10\text{ cm}$;
- índice de refração do meio externo (ar): 1;
- índice de refração da lente: 1,5;
- raio de curvatura da face côncava: $2,5\sqrt{3}\text{ cm}$.

- a) $3\sqrt{2}$ b) $(\sqrt{3} - 1)$ c) $(\sqrt{3} + 1)$ d) $\sqrt{3}$
e) $2\sqrt{3}$

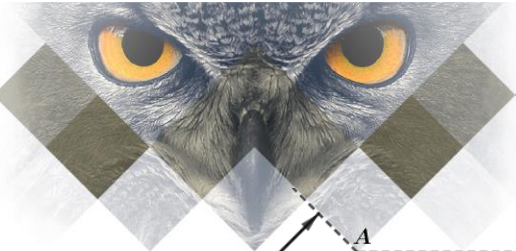


Comentários:

Inicialmente, precisamos determinar a distância focal da lente, utilizando a equação dos fabricantes de lente:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n_L}{n_M} - 1 \right) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow \frac{1}{f} = \left(\frac{1,5}{1} - 1 \right) \cdot \left(0 - \frac{1}{2,5\sqrt{3}} \right) \Rightarrow \boxed{f = -5\sqrt{3}\text{ cm}}$$

Da geometria do problema, temos a seguinte figura:

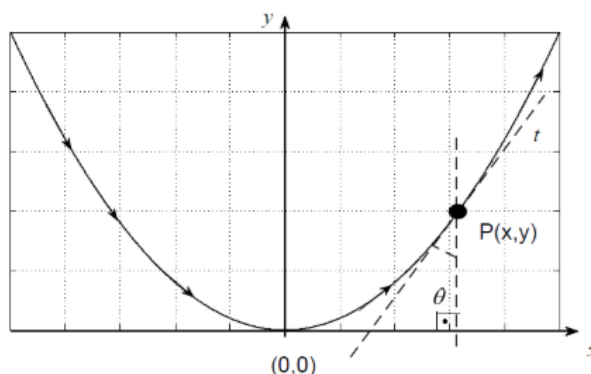


O semieixo maior da elipse é de:

$$\Delta FMP \sim \Delta FEA: \frac{5\sqrt{3}}{5} = \frac{100\sqrt{2}+y}{y} \Rightarrow y = 50(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \text{ cm}$$

$$a = \frac{x\sqrt{2} + y\sqrt{2}}{2} = \frac{50(2 \cdot \sqrt{6}) \cdot \sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 100\sqrt{3} \text{ cm} \therefore \boxed{a = \sqrt{3} \text{ m}}$$

29. (IME-2012)



Dados: $\cot g \theta = 2 \cdot a \cdot x$ e $n(0) = n_0$.

Observação:

$P(x, y)$ é o ponto de tangência entre a reta t e a parábola.

Comentários:

O problema apresentado é uma estratificação. Portanto, pode-se assumir que:

$$n_0 \cdot \sin \theta_0 = n_1 \cdot \sin \theta_1 = \dots = n_i \cdot \sin \theta_i$$

Portanto, entre o ponto $(0,0)$ e o ponto $P(x, y)$, tem-se:

$$n_0 \cdot \sin 90^\circ = n(y) \cdot \sin \theta$$

Mas:

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \theta = \csc^2 \theta$$

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} = 1 + \operatorname{ctg}^2 \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta}}$$

Portanto:

$$\frac{n_0}{\sin \theta} = n(y) \Rightarrow n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \theta}$$

$$n(y) = n_0 \cdot \sqrt{(1 + 4 \cdot a^2 \cdot x^2)} \therefore n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$$

Gabarito: $n(y) = n_0 \cdot \sqrt{1 + 4 \cdot a \cdot y}$

30. (IME-2013)

Uma esfera de gelo de raio R flutua parcialmente imersa em um copo com água, como mostra a figura acima. Com a finalidade de iluminar uma bolha de ar, também esférica, localizada no centro da esfera de gelo, utilizou-se um feixe luminoso de seção reta circular de área $\frac{\pi \cdot R^2}{100} \text{ m}^2$ que incide verticalmente na esfera. Considerando que os raios mais externos do feixe refratado tangenciam a bolha, conforme a figura, determine a massa específica do gelo.

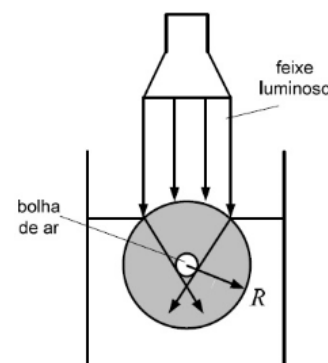
Dados:

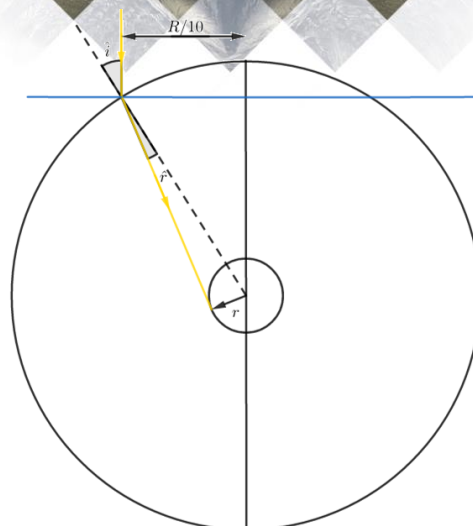
- índice de refração do ar: 1,0
- índice de refração da água: 1,3
- Massa específica do ar: $1,0 \text{ kg/m}^3$
- Massa específica da água: 10^3 kg/m^3
- Volume da calota esférica: $v = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3$

Comentários:

Sabendo-se a seção transversal do feixe, sabe-se qual o raio dele.

$$\pi \cdot r_{\text{feixe}}^2 = \pi \cdot \frac{R^2}{100} \Rightarrow r_{\text{feixe}} = \frac{R}{10}$$





Assim:

$$n_{ar} \cdot \sin \hat{i} = n_{gelo} \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \frac{1}{10} = 1,3 \cdot \sin \hat{r} \Rightarrow \sin \hat{r} = \frac{1}{13}$$

Mas:

$$\sin \hat{r} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = \frac{R}{13}$$

Pelo equilíbrio:

$$E = P$$

(Desconsidera-se a contribuição do ar para o peso).

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \cdot d_{gelo} \cdot g = \left(\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 - 2 \cdot 10^{-2} \cdot \pi \cdot R^3 \right) \cdot d_{\text{água}} \cdot g$$

$$d_{gelo} = \left(1 - \frac{2 \cdot 10^{-2}}{4} \cdot 3 \right) \cdot d_{\text{água}} \therefore d_{gelo} = 985 \text{ kg/m}^3$$

Gabarito: $d_{gelo} = 985 \text{ kg/m}^3$

9. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Revise todos os conceitos apresentados nessa aula, faça pequenos resumos sobre cada tópico estudado.

Essa aula é cheia de definições e considerações iniciais no estudo de Óptica Geométrica. Anote essas informações no seu resumo de estudo, principalmente as leis da refração, dioptra plano e esférico, e equação dos fabricantes de lentes.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



10. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.
- [6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.

11. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	21/07/2021