Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá.

Nessa aula iniciaremos o estudo da álgebra. Estudaremos conceitos de números naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais. Também veremos desigualdades e princípio da indução.

Não teremos muitas questões do ITA nem do IME nesses assuntos, mas veremos mais adiante que eles servirão como base para conseguirmos aprofundar a matéria no nível que a prova cobra. É muito importante que você entenda cada conceito e resolva muitos exercícios para fixação, pois elas o ajudarão a resolver os exercícios mais avançados.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

Vamos estudar um breve histórico dos números naturais.

Os números naturais foram criados para ajudar o homem a contar. A contagem, antes dos primórdios da civilização, era baseada na contagem “um”, “dois” e “muitos”. Os primeiros seres humanos apenas conheciam o número 1 e o 2, acima disso eles classificavam os números como “muitos”. Com o desenvolvimento da civilização, a necessidade de se melhorar o processo de contagem levou ao surgimento dos números naturais $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Apesar disso, o conhecimento que se tinha dos números naturais era muito vago, não existia nada que descrevesse precisamente o conjunto. Em 1889, o matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) estabeleceu quatro axiomas conhecidos como axiomas de Peano. (Axiomas são verdades universalmente aceitas. Elas são inquestionáveis, funcionam como uma lei.) Vejamos os quatro axiomas:

a) Todo número natural tem um único sucessor.

b) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes.

c) Existe um único número natural, chamado “um” e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro.

d) Seja X um conjunto de números naturais, se $1 \in X$ e o sucessor de todo elemento de X pertence a X, então $X = \mathbb{N}$.

Todas as propriedades e teoremas relativos aos números naturais são deduzidos através desses axiomas.

Veja que a essência dos números naturais reside na palavra “sucessor”. Perceba também que na época o número 0 não foi incluído como um número natural. Há controvérsias a respeito de incluir o 0 ou não no conjunto dos números naturais, alguns autores consideram que $0 \in \mathbb{N}$ e outros não. Caso não seja fornecido a informação na prova, devemos usar o bom senso e fazer suposições. Normalmente, as bancas consideram o 0 um número natural.

1.1. Princípio da Indução Finita

O último axioma de Peano é conhecido como axioma da Indução. Um princípio que decorre dela é o **Princípio da Indução Finita (PIF)**, também conhecido como **Recorrência**. Ela serve para provar proposições através de uma demonstração por indução.

O PIF diz que:
Uma propriedade $P(n)$ relativa aos números naturais $n \geq n_0$ é válida se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:
I) $P(n_0)$ é válida. Para algum $n_0 \in \mathbb{N}$.
II) Para $K \in \mathbb{N}$, se $P(K)$ é válida, então $P(K+1)$ também é válida.

O PIF demonstra que se a propriedade é válida para algum $K \in \mathbb{N}$ e, também, é válida para o seu sucessor, então ela será válida para todo número natural, já que K é um termo generalizado do conjunto dos números naturais.

Vamos ver na prática como esse princípio pode ser aplicado.

1. Demonstre $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2, n \in \mathbb{N}$.
Resolução:

Como devemos ler essa questão:

A primeira parte $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1)$ é um somatório, onde cada termo do somatório é um número natural da forma $n(3n+1)$.

Ele diz que somando termos da forma $n(3n+1)$ com $n \in \mathbb{N}$, teremos como resultado $n(n+1)^2$. Então se $n = 4$, deveremos ter uma soma até $n(3n+1) = 4 \cdot (3 \cdot 4 + 1) = 4 \cdot 13$. A soma será $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 13$.

Outro exemplo, se $n = 1$ a soma será até $n(3n+1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 4$. Assim, a soma seria apenas o valor $1 \cdot 4$. Perceba que o somatório terá n termos, para $n = 1$ temos apenas 1 termo no somatório.

Vamos demonstrar usando PIF:

I) Precisamos verificar se a equação é válida, para isso vamos fazer $n = 1$ e encontrar o resultado de $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + n(3n+1) = n(n+1)^2$. Vamos calcular o membro à direita da igualdade:

$$n(n+1)^2 = 1 \cdot (1+1)^2 = 1 \cdot 2^2 = 1 \cdot 4 = 4$$

A segunda parte da igualdade nos mostra que substituindo $n = 1$ na expressão, obtemos como resultado o valor 4.

Vamos calcular agora o valor do somatório e verificar se é verdadeira a proposição.

O somatório terá apenas 1 termo para $n = 1$:

$$n(3n+1) = 1 \cdot (3 \cdot 1 + 1) = 1 \cdot 4 = 4$$

Assim, a propriedade é verdadeira para $n = 1$.

II) Vamos generalizar o resultado para $n = K, K \in \mathbb{N}$. Para isso, substituímos $n = K$ na equação.

Hipótese (H): Para algum $K \in \mathbb{N}$, temos válida a propriedade.

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K+1) = K(K+1)^2$$

Tese (T): Se a propriedade é válida para $K \in \mathbb{N}$, ela será válida para $K + 1$. Assim, substituindo $n = K + 1$ na equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)[3(K+1)+1] = (K+1)[(K+1)+1]^2$$

Desenvolvendo a equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)[3(K+1)+1] = (K+1)[(K+1)+1]^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)[3K+3+1] = (K+1)(K+2)^2$$

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)(3K+4) = (K+1)(K+2)^2$$

Repare nos termos coloridos, esses são os termos que foram desenvolvidos.

Não se assuste com essa equação gigantesca. Veremos mais adiante assuntos que facilitarão o seu entendimento e também resolveremos bastante exercícios para você consolidar o conhecimento.

Para demonstrar a propriedade usando PIF, devemos usar a nossa hipótese e tentar chegar à tese. Primeiro escrevemos a nossa hipótese:

$$(H) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K+1) = K(K+1)^2$$

Agora, devemos usar essa equação e tentar chegar à tese:

$$(T) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)(3K+4) = (K+1)(K+2)^2$$

Como vamos fazer isso?

Observe os somatórios de (H) e (T):

$$(H) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K+1)$$

$$(T) \quad 1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots K(3K+1) + (K+1)(3K+4)$$

A única diferença entre esses somatórios é a presença do termo $(K+1)(3K+4)$ em (T).

Então vamos somar $(K+1)(3K+4)$ nos dois lados da igualdade de (H).

Escrevendo a equação de (H):

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K+1) = K(K+1)^2$$

Somando $(K+1)(3K+4)$ nos dois lados da equação:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + K(3K+1) + (K+1)(3K+4) =$$
$$K(K+1)^2 + (K+1)(3K+4)$$

Vamos resolver o lado direito da equação:

$$K(K+1)^2 + (K+1)(3K+4)$$
$$K(K+1)(K+1) + (K+1)(3K+4)$$

Colocando $(K+1)$ em evidência:

$$K(K+1)(K+1) + (K+1)(3K+4)$$
$$(K+1)[K(K+1) + (3K+4)]$$
$$(K+1)[K^2 + K + 3K + 4]$$
$$(K+1)[K^2 + 4K + 4]$$

Fatorando o termo $K^2 + 4K + 4$:

$$(K+1)(K+2)^2$$

Assim, encontramos através da hipótese a seguinte igualdade:

$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \cdots + (K+1)(3K+4) = (K+1)(K+2)^2$$

Essa é a tese. Logo, acabamos de demonstrar por PIF que a propriedade é válida, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Calma, aluno(a). Coloquei esse exercício na teoria para você ver na prática como usamos o PIF. Ela será muito útil para provar propriedades de alguns assuntos que veremos durante o curso. Quando estudarmos técnicas de fatoração, você conseguirá facilmente usar o PIF.

1.2. Adição e Multiplicação

Os números naturais possuem duas operações fundamentais, a adição e a multiplicação. Através dos axiomas de Peano, podemos provar as propriedades abaixo. Considere $a, b, c \in \mathbb{N}$.

a) Associativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c)$$
$$(ab)c = a(bc)$$

b) Comutativa:

$$a+b = b+a$$
$$ab = ba$$

c) Distributiva

$$a(b+c) = ab + ac$$

Essa propriedade é conhecida como a “técnica do chuveirinho”. Veja:

$$a(b+c) = ab + ac$$

d) Elemento neutro da adição:

$$a + 0 = a$$

e) Elemento neutro da multiplicação:

$$a \cdot 1 = a$$

1.3. Desigualdades

Para finalizarmos o estudo do conjunto dos números naturais, vamos estudar as propriedades de desigualdades. Vamos usar os seguintes sinais:

$=$ para representar o sinal de igual
$>$ para representar o sinal de maior
$<$ para representar o sinal de menor
$\leq$ para representar o sinal de menor ou igual
$\geq$ para representar o sinal de maior ou igual
Um bizu para memorizar esses sinais: a flecha sempre aponta para o menor número.
Exemplos:
I) $1 < 3$
Lê-se 1 é menor que 3. Perceba a flecha " $<$ " apontando para o número 1.
II) $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9$
III) $9 > 8 > 7 > 6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$
Vamos definir os números $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Temos as seguintes propriedades de desigualdade:
a) Transitividade:

$$a < b \text{ e } b < c \rightarrow a < c$$

Se a é menor que b e b é menor que c, decorre que a é menor que c.

b) Tricotomia

$$a < b \text{ ou } a = b \text{ ou } a > b$$

Essa propriedade diz sobre as únicas três possibilidades da relação de desigualdade.

c) Monotonicidade: se $a < b$ e $c > 0$

$$a + c < b + c$$
$$ac < bc$$

Essa propriedade nos diz que é permitido somar ou multiplicar os dois lados da desigualdade por um número natural maior que zero sem alterá-lo.

Essas propriedades são válidas para os números naturais! Veremos mais adiante que no conjunto dos inteiros, podemos modificar algumas desigualdades.

2. Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

A diferença entre os números inteiros dos números naturais é a presença de números negativos. As propriedades estudadas no tópico dos números naturais podem ser provadas também para os inteiros.

2.1. Propriedades

2.1.1. Soma e Multiplicação

Seja $a, b, c \in \mathbb{Z}$:
a) Comutativa

$$a + b = b + a$$
$$ab = ba$$

b) Associativa

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a(bc) = (ab)c$$

c) Distributiva

$$a(b + c) = ab + ac$$

d) Elemento neutro da soma

$$a + 0 = a$$

e) Elemento neutro da multiplicação

$$a \cdot 1 = a$$

f) Elemento simétrico

$$x + a = 0 \Rightarrow x = -a$$

$-a$ é denominado simétrico do número a.

g) Se $c \neq 0$:

$$ac = bc \Rightarrow a = b$$

Essa propriedade é conhecida como lei do corte, veja:

$$ac = bc \Rightarrow a\cancel{c} = b\cancel{c} \Rightarrow a = b$$

h) $a \cdot 0 = 0$

i) $(-a)b = -ab$

j) $(-a)(-b) = ab$

k) $ab = 0 \to a = 0 \; ou \; b = 0$

2.1.2. Desigualdades

a) Tricotomia dos Inteiros

$$a \in \mathbb{Z} \to a > 0 \; ou \; a = 0 \; ou \; a < 0$$

b) Translação

$$\text{Se } a \geq b \text{ e } c \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + c \geq b + c$$

Essa propriedade é válida também para outros sinais de desigualdade.

c) Se $a > b \; e \; c > 0$

$$ac > bc$$

Essa propriedade é válida também para outros sinais de desigualdade com uma restrição. Devemos ter $c > 0$, isto é, c deve ser positivo.

d) Se $a > b \; e \; c < 0$

$$ac < bc$$

Atenção! Essa propriedade modifica os sinais de desigualdade! Quando multiplicamos ambos os lados por um termo c negativo, trocamos a desigualdade: o maior ($>$) troca para o menor ($<$) e o menor ($<$) troca para o maior ($>$).

e) Transitividade

$$\begin{cases} a \geq b \\ c \geq d \end{cases} \rightarrow a + c \geq b + d$$

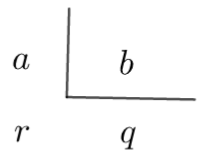
2.2. Divisibilidade

Na divisão de um inteiro a pelo inteiro b podemos escrever a seguinte equação, considerando $b > 0$:

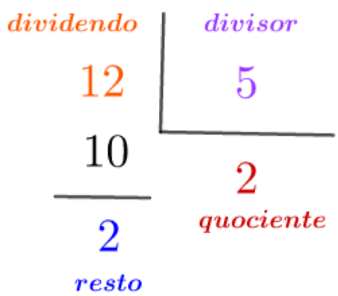
$$a = bq + r$$

q é chamado de quociente e r é chamado de resto.

Você provavelmente aprendeu no ensino fundamental da seguinte forma:



Vamos a um exemplo, dividiremos 12 por 5:



Essa operação também poderia ser representada da seguinte forma:

$$12 = 5 \cdot 2 + 2$$

Acostume-se a escrever as operações de divisão e multiplicação dessa forma.

Dizemos que um número inteiro a é divisível por b quando $r = 0$.

Assim, temos a seguinte propriedade para a divisível por b:

$$a = b \cdot q$$

Veja que se a é divisível por b, então b será um fator de a.

Também poderíamos escrever:

$$a ⋮ b$$

Lê-se: a é divisível por b.

"⋮" significa "é divisível por".

Ou:

$$b|a$$

Lê-se b divide a.

Divisibilidade por 2

Um número é divisível por 2 quando ele é par.

Exemplo:

4 é divisível por 2, pois 4 é par.

Divisibilidade por 3

Um número é divisível por 3 quando a soma dos seus algarismos é múltiplo de 3.

Exemplo:

312 é divisível por 3, pois $3+1+2=6$. 6 é divisível por 3.

Divisibilidade por 5

Um número é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.

Exemplo:

20 é divisível por 5, pois termina em 0.

2. (OBMEP) Qual dos números abaixo é divisível por 2 e 3?

a) 334
b) 335
c) 336
d) 337
e) 338

Resolução:

A questão pede os números divisíveis por 2 e 3. Então, devemos ter um número que seja múltiplo de 2 e 3 ao mesmo tempo, ou seja, supondo x o nosso número, ele terá a forma:

$$x=2\cdot 3\cdot y$$

y pode ser qualquer número que satisfaça a igualdade.

Primeiro, vamos encontrar os divisíveis por 2. Para ser divisível por 2, ele deve ser par.

Analisando as alternativas, apenas a (a), (c) e (e) satisfazem essa condição.

Agora vamos analisar os múltiplos de 3 dessas que são divisíveis por 2. Devemos somar os algarismos desses números e verificar qual é múltiplo de 3.

Vamos somar os algarismos dos números de (a), (c) e (e):

a) $334\Rightarrow 3+3+4=10$
c) $336\Rightarrow 3+3+6=12$
e) $338\Rightarrow 3+3+8=14$

Desses números, o único que é divisível por 3 é 336, pois a soma de seus algarismos resulta em 12 que é divisível por 3. Logo, o nosso gabarito é a letra (c).

Gabarito: "c".

3. Prove que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 6, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Resolução:

Escrevendo 6 em fatores primos obtemos:

$$6=2\cdot 3$$

Para provar que a expressão é divisível por 6, devemos provar que ela é divisível pelos seus fatores 2 e 3.

A divisibilidade por 2 pode ser feita alterando a forma de n como múltiplo de 2 e tentando isolar o 2 na expressão.

Para isso, vamos escrever n em função de 2 para incluir todos os números naturais nesse formato.

Lembre! Qualquer número pode ser escrito como:

$$a = bq + r$$

a é o dividendo, b o divisor, q o quociente e r o resto.

Então se fizermos $n = 2q + r$, podemos representar todos os naturais nesse formato alterando o valor de r. Note que nesse caso r só pode assumir os valores 0 ou 1. r sempre será menor que o divisor.

Perceba que $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$, n pode receber os valores $(0, 2, 4, 6, 8, 10, \dots)$ que são todos números pares dos naturais.

$n = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$, n pode receber os valores $(1, 3, 5, 7, 9, \dots)$. Esses são todos os números ímpares dos naturais.

Então se alterarmos a forma de n de forma a incluir todos os números naturais, podemos provar a sua divisibilidade por 2.

Assim, vamos substituir $n = 2k, k \in \mathbb{N}$, na expressão e ver se encontramos o fator 2:

$$n(n+1)(n+2)$$
$$n = 2k$$
$$2k(2k+1)(2k+2)$$

Perceba o fator 2 na expressão, logo para $n = 2k$ ela é divisível por 2.

Fazendo $n = 2k + 1$:

$$(2k+1)\big((2k+1)+1\big)\big((2k+1)+2\big)$$
$$(2k+1)(2k+2)(2k+3)$$
$$(2k+1)[2(k+1)](2k+3)$$
$$2(2k+1)(k+1)(2k+3)$$

Novamente conseguimos encontrar 2 na expressão, logo para $n = 2k + 1$ ela também é divisível por 2. Ela é divisível por 2 para $n = 2k$ ou $n = 2k + 1$ que podem representar todos os números naturais.

Portanto, conseguimos provar que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 2.

Agora vamos provar que $n(n+1)(n+2)$ é divisível por 3.

Usando a mesma ideia da divisibilidade por 2, podemos modelar n de forma que o fator 3 apareça na expressão.

Temos que provar três casos:

$$n = 3k, n = 3k + 1 \; e \; n = 3k + 2$$

Vamos substituir n e isolar o fator 3 na expressão para cada caso.

1) $n = 3k$

$$n(n+1)(n+2)$$
$$3k(3k+1)(3k+2)$$

2) $n = 3k + 1$

$$n(n+1)(n+2)$$
$$(3k+1)\big((3k+1)+1\big)\big((3k+1)+2\big)$$
$$(3k+1)(3k+2)(3k+3)$$
$$(3k+1)(3k+2)[3(k+1)]$$
$$3(3k+1)(3k+2)(k+1)$$

3) $n = 3k + 2$

$$n(n+1)(n+2)$$
$$(3k+2)\big((3k+2)+1\big)\big((3k+2)+2\big)$$
$$(3k+2)(3k+3)(3k+4)$$
$$(3k+2)[3(k+1)](3k+4)$$

$$3(3k+2)(k+1)(3k+4)$$

Conseguimos isolar o fator 3 para todos os casos descritos.

Logo, a expressão $n(n+1)(n+2)$ também é divisível por 3.

Essa expressão é divisível por 2 e 3, como eles são números primos, ela será divisível pelos dois ao mesmo tempo.

$$\therefore n(n+1)(n+2) \vdots 6$$

2.3. Números Primos

Um número $p \in \mathbb{N}$ é primo se, e somente se, satisfazer as seguintes condições:

1) $p \neq 0 \; e \; p \neq 1$

2) p somente pode ser divisível por 1 e por p

Desse modo, podemos ver que os números $2, 3, 5, 7, 11$ satisfazem essas condições.

2.4. Decomposição em fatores primos

Todo número natural maior que 1 pode ser decomposto em um ou mais fatores primos. Esse processo é chamado de fatoração.

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Para fatorar n, devemos seguir os seguintes passos:

1) Dividir n pelo menor divisor primo

2) Dividir o quociente resultante pelo menor divisor primo e repetir a operação até obter um quociente igual a 1.

Exemplo:

Vamos fatorar o número 40.

$$\begin{array}{r|c} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Veja que a fatoração de 40 é:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5$$

2.4.1. Quantidade de divisores de um número

Seja $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$. Se a fatoração de n é:

$$n = x^a \cdot y^b \cdot z^c \cdot \ldots$$

Onde x, y, z são os números primos divisores de n e a, b, c são os coeficientes desses divisores. A quantidade de divisores $\big(Q(n)\big)$ de n é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{Q(n) = (a+1) \cdot (b+1) \cdot (c+1) \cdot \ldots}}$$

O número de divisores de n é o total de combinações possíveis entre as potências dos seus fatores.

Exemplo:

Vamos calcular o número de divisores de 40.

Fatorando esse número:

$$40 = 2^3 \cdot 5^1$$

Usando a fórmula:

$$Q(40) = (3+1) \cdot (1+1) = 4 \cdot 2 = 8$$

Perceba que a quantidade de divisores de 40 são os seguintes números:

$$\left\{\underbrace{2^0, 2^1, 2^2, 2^3}_{4\ números}, \underbrace{5^0, 5^1}_{2\ números}\right\}$$

2.4.2. Produto dos divisores de um número

Se $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $Q(n)$ é a quantidade de divisores de n, o produto dos divisores de n é dado por:

$$\boxed{P(n) = \sqrt{n}^{Q(n)}}$$

Exemplo:

Vamos calcular o produto dos divisores de 40.

Resolveremos por dois métodos.

Método 1:

Descobrindo os divisores de 40:

$$40 = 2^3 \cdot 5$$

Os divisores de 40 são os números formados pelas combinações dos fatores de 40. Vamos ver quantos são esses números:

$$Q(40) = (3+1)(1+1) = 8$$

A quantidade de divisores de 40 é 8.

Encontrando esses números:

Usando os fatores de cada número, temos:

$$\{1, 2, 4, 8\}$$
$$\{1, 5\}$$

Perceba que faltam 3 divisores. Podemos obtê-los combinando os fatores de 5 com os fatores de 2:

$$\{1, 2, 4, 8, 5, 10, 20, 40\}$$

Esses são todos os divisores de 40, multiplicando-os:

$$P(40) = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 20 \cdot 40 = 2560000$$

Método 2:

Usando a fórmula do produto dos divisores diretamente:

$$P(40) = \sqrt{40}^{Q(40)} = \sqrt{40}^8 = 40^4 = 2560000$$

2.5. Máximo Divisor Comum

MDC é a sigla utilizada para Máximo Divisor Comum. Ele é usado para calcular o maior divisor em comum entre dois ou mais números.

Para calculá-lo, devemos decompor os números em fatores primos e verificar qual o maior valor que divide ambos os números ao mesmo tempo. Podemos escrever do seguinte modo:

Seja a decomposição de a e b em fatores primos dados por:

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$$
$$b = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot p_3^{\beta_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k}$$

Onde p_i é número primo e $\alpha_i, \beta_i \geq 0$ são os expoentes de p_i.

O MDC de a e b é dado por:

$$\boxed{mdc(a,b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot p_3^{\min\{\alpha_3,\beta_3\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\min\{\alpha_k,\beta_k\}}}$$

$\min\{\alpha_i, \beta_i\}$ é o menor valor entre α_i e β_i.

Exemplo:

Calcule o MDC de 24 e 36.

Decompondo os números, obtemos:

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$

O MDC é dado por:

$$p_1 = 2 \Rightarrow \min\{3, 2\} = 2$$
$$p_2 = 3 \Rightarrow \min\{1, 2\} = 1$$
$$mdc(24, 36) = 2^{\min\{3,2\}} \cdot 3^{\min\{1,2\}} = 2^2 \cdot 3^1 = 12$$

Quando encontramos dois números primos entre si, o MDC deles será 1.

$$\boxed{\boldsymbol{a, b \in \mathbb{Z} \text{ e } a, b \text{ são primos entre si} \rightarrow mdc(a, b) = 1}}$$

2.5.1. Propriedades

a) $mdc(n, n) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$
b) $mdc(m, n) = mdc(n, m), \forall m, n \in \mathbb{N}$ não ambos nulos
c) $mdc(n, 0) = n, \forall n \in \mathbb{N}^*$

2.5.2. Algoritmo de Euclides

O Algoritmo de Euclides pode ser usado para determinar o MDC entre dois números naturais. Ele se baseia no seguinte resultado:

Seja $a, b \in \mathbb{N}$ e $a > b > 0$.

Se $a = bq + r$ (q é quociente e r é resto), com $q, r \in \mathbb{N}$:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r)$$

Para usar o Algoritmo para determinação do MDC, devemos fazer divisões sucessivas até que r_i seja zero. Veja:

Calcular MDC de a, b. Dividindo a por b:

$$a = bq + r_1$$
$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1)$$

Se $r_1 = 0$, encontramos a solução:

$$mdc(a, b) = mdc(b, 0) = b$$

Se $r_1 \neq 0$, dividimos b por r_1:

$$b = r_1 q + r_2$$
$$mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2)$$

Se $r_2 = 0$, temos $mdc(b, r_1) = mdc(r_1, 0) = r_1$.

Se $r_2 \neq 0$, dividimos r_1 por r_2:

$$r_1 = r_2 q + r_3$$
$$mdc(r_1, r_2) = mdc(r_2, r_3)$$

Continuamos com as divisões sucessivas até encontrar $r_i = 0$.

Dessa forma, o Algoritmo de Euclides se resume a:

$$\boxed{\boldsymbol{mdc(a, b) = mdc(b, r_1) = mdc(r_1, r_2) = \cdots = mdc(r_{n-1}, r_n) = mdc(r_n, 0) = r_n}}$$

Podemos também representar as divisões sucessivas do Algoritmo através de um diagrama.

Veja:

$$mdc(a, b) = mdc(b, r_1)$$

1) Escrevemos a divisão de a por b:

a	b				

2) Encontramos o quociente dessa divisão:

q_1			

a	b				

3) Calculamos o resto dessa divisão:

	q_1				
a	b				
r_1					

4) Se $r_1 \neq 0$, colocamos r_1 na fila do meio e repetimos os passos até encontrar $r_i = 0$:

	q_1				
a	b	r_1			
r_1					

	q_1	q_2			
a	b	r_1			
r_1					

	q_1	q_2			
a	b	r_1			
r_1	r_2				

$$\vdots$$

$$mdc(a,b) = mdc(b,r_1) = mdc(r_1,r_2) = \cdots = mdc(r_{n-1},r_n) = mdc(r_n,0) = r_n$$

	q_1	q_2			q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	$\dots$	r_{n-2}	r_{n-1}	r_n
r_1	r_2			r_n	0	

O MDC será o número logo à esquerda do zero.

Perceba que a primeira linha do diagrama possui os quocientes das divisões. A segunda possui os divisores e dividendos. A terceira, o resto das divisões.

4. Calcule o MDC:

a) Entre 12 e 20

b) Entre 3 e 11

c) Entre 11352 e 40

Resolução:

a) Decomposição de 12 e 20 em fatores primos:

$$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$$
$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^2 \cdot 5$$

Veja que o maior número que está ao mesmo tempo nas duas decomposições é 2^2.

Assim, $mdc(12,20) = 2^2$.

b) 3 e 11 são primos entre si! Portanto:

$$mdc(3,11)=1$$

c) Usando o Algoritmo de Euclides:

$$mdc(11352,40)$$
$$11352=40\cdot 283+32$$
$$40=32\cdot 1+8$$
$$32=8\cdot 4+0$$

Assim, o MDC é dado pelo último resto diferente de zero:

$$mdc(11352,40)=mdc(40,32)=mdc(32,8)=mdc(8,0)=8$$

Poderíamos ter resolvido pelo diagrama:

	283	1	4
11352	40	32	8
32	8	0	

Gabarito: a) 2^2 b) 1 c) 8

2.6. Mínimo Múltiplo Comum

MMC significa Mínimo Múltiplo Comum. Ele é o menor valor positivo em comum que conseguimos obter de dois ou mais números. Ele é usado para calcular a soma ou a subtração de números fracionários. Para dois números inteiros, podemos calculá-lo usando a seguinte fórmula:

$$\boxed{\boldsymbol{mmc(a,b)=\frac{|ab|}{mdc(a,b)}}}$$

Também podemos calcular o MMC usando o seguinte método:

Seja a decomposição de a e b em fatores primos dados por:

$$a=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot p_3^{\alpha_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$$
$$b=p_1^{\beta_1}\cdot p_2^{\beta_2}\cdot p_3^{\beta_3}\cdot\ldots\cdot p_k^{\beta_k}$$

Onde p_i é número primo e $\alpha_i,\beta_i\geq 0$ são os expoentes de p_i.

O MMC de a e b é dado por:

$$\boxed{\boldsymbol{mmc(a,b)=p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}}\cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}}\cdot p_3^{\max\{\alpha_3,\beta_3\}}\cdot\ldots\cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}}}$$

$\max\{\alpha_i,\beta_i\}$ é o maior valor entre α_i e β_i.

Outro método mais conhecido é através da fatoração simultânea, nesse método, fatoramos dois ou mais números simultaneamente e ele será visto no exemplo abaixo.

Exemplo:

Calcule o MMC de 24 e 36.

Decompondo os números, obtemos:

$$24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=2^3\cdot 3$$
$$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=2^2\cdot 3^2$$

Podemos usar qualquer um dos métodos para calcular o MMC. Vamos mostrar pelos 2 métodos:

Método 1:

$$mmc(a,b)=\frac{|ab|}{mdc(a,b)}$$
$$24=2\cdot 2\cdot 2\cdot 3=2^3\cdot 3$$
$$36=2\cdot 2\cdot 3\cdot 3=2^2\cdot 3^2$$
$$mdc(24,36)=2^2\cdot 3$$
$$mmc(24,36)=\frac{|24\cdot 36|}{mdc(24,36)}=\frac{|2^3\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3^2|}{2^2\cdot 3}=\frac{2^3\cdot 3\cdot 2^2\cdot 3^2}{2^2\cdot 3}=2^3\cdot 3^2=72$$

Método 2:

$$mmc(a,b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} \cdot p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdot p_3^{\max\{\alpha_3,\beta_3\}} \cdot \ldots \cdot p_k^{\max\{\alpha_k,\beta_k\}}$$
$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^1$$
$$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^2$$
$$p_1 = 2 \Rightarrow \max\{3,2\} = 3$$
$$p_2 = 3 \Rightarrow \max\{1,2\} = 2$$
$$mmc(24,36) = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Método 3: Fatoração simultânea

Inicialmente, alinhamos os números 36 e 24 e dividimos pelo menor fator primo possível (não é necessário que esse fator esteja presente em ambos os números):

$$\begin{array}{r|l} 36, 24 & 2 \\ 18, 12 & \end{array}$$

Repetimos o procedimento com a próxima linha até que a linha obtida tenha apenas o número 1.

$$\begin{array}{r|l} 36, 24 & 2 \\ 18, 12 & 2 \\ 9, 6 & 2 \\ 9, 3 & 3 \\ 3, 1 & 3 \\ 1, 1 & \end{array}$$

O MMC será igual ao produto entre os números primos do lado direito:

$$mmc(36,24) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3^2 = 72$$

Perceba as duas barras "| |" no produto ab. $|ab|$ é o módulo do número ab. Quando usamos ela no número ab, estamos dizendo que queremos apenas o valor absoluto do inteiro, isto é, o valor positivo do número. Estudaremos melhor esse assunto na aula de Módulos.

Exemplo de módulos:

$$|-3| = 3$$
$$|5| = 5$$

2.7. Congruências Lineares

Não iremos nos aprofundar muito no tema para manter o foco no vestibular. Apenas veremos a sua aplicabilidade.

Vejamos a sua definição:

Seja $a, b \in \mathbb{Z}$. a é congruente a b módulo n quando a dividido por n deixa o mesmo resto da divisão de b por n. A sua notação usual é dada por:

$$a \equiv b \ (mod \ n)$$

Lê-se a é congruente a b módulo n.

Exemplos:

$$15 \equiv 1 \ (mod \ 7)$$

1 é o resto da divisão de 15 por 7: $15 = 7 \cdot 2 + 1$

$$31 \equiv 3 \ (mod \ 4)$$

3 é o resto da divisão de 31 por 4: $31 = 4 \cdot 7 + 3$

Perceba que na prática, podemos usar a congruência para representar o resto de uma divisão.

$$31 \equiv 11 \ (mod \ 4)$$

31 e 11 possuem o mesmo resto quando divididos por 4:

$$31 = 4 \cdot 7 + 3$$
$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$
$$31 \equiv -1 \ (mod \ 4)$$

Perceba que na teoria da congruência podemos trabalhar com restos negativos:

$$31 = 4 \cdot 8 - 1$$

2.7.1. Propriedades

Para $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$:

I) Adição:

$$\begin{cases} a \equiv b \ (mod \ n) \\ c \equiv d \ (mod \ n) \end{cases} \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm d \ (mod \ n)$$

II) Multiplicação:

$$\begin{cases} a \equiv b \ (mod \ n) \\ c \equiv d \ (mod \ n) \end{cases} \Rightarrow ac \equiv bd \ (mod \ n)$$

Para $k \in \mathbb{Z}$:

III) Adição de uma constante:

$$a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow a \pm k \equiv b \pm k \ (mod \ n)$$

IV) Multiplicação de uma constante:

$$a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow ak \equiv bk \ (mod \ n)$$

V) Potência:

Seja $m \in \mathbb{N}$:

$$a \equiv b \ (mod \ n) \Rightarrow a^m \equiv b^m \ (mod \ n)$$

2.7.2. Teorema de Fermat

Seja $a \in \mathbb{N}$ e p um número primo que não divide a:

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod \ p)$$

2.7.3. Corolário do Teorema de Fermat

Seja $a \in \mathbb{N}$ e p um número primo:

$$a^p \equiv a \ (mod \ p)$$

5. Complete as lacunas abaixo:

a) $21 \equiv (\quad) \ (mod\ 5)$
b) $34 \equiv (\quad) \ (mod\ 7)$
c) $-64 \equiv (\quad) \ (mod\ 3)$
Resolução:
a) $21 \equiv 1 \ (mod\ 5)$

$$21 = 5 \cdot 4 + 1$$

b) $34 \equiv 6 \ (mod\ 7)$

$$34 = 7 \cdot 4 + 6$$

Também poderia ser:

$$34 = 7 \cdot 5 - 1 \Rightarrow 34 \equiv -1 \ (mod\ 7)$$

c) $-64 \equiv -1 \ (mod\ 3)$

$$-64 = 3 \cdot (-21) - 1$$

6. Calcular o resto da divisão de $(1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005}$ por 5.
Resolução:
Podemos usar a propriedade (V):

$$a \equiv b \ (mod\ n) \Rightarrow a^n \equiv b^n \ (mod\ n)$$
$$(1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv ((1)^{1006} + (-1)^{1004})^{1005} \ (mod\ 5)$$
$$((1)^{1006} + (-1)^{1004})^{1005} = (1+1)^{1005} = 2^{1005}$$
$$\Rightarrow (1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv 2^{1005} \ (mod\ 5)$$

Vamos fatorar 2^{1005} de modo que apareça algum fator que facilite o nosso cálculo:

$$2^{1005} = 2 \cdot 2^{1004} = 2 \cdot 2^{4 \cdot 251} = 2 \cdot (2^4)^{251}$$

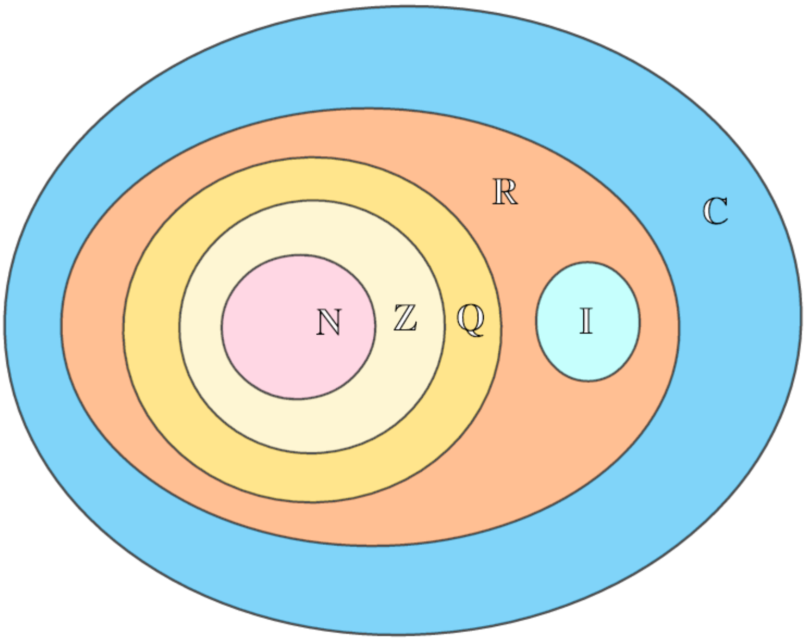
Perceba que $2^4 = 16 \equiv 1 \ (mod\ 5)$. Desse modo, temos:

$$2^{1005} = 2 \cdot (2^4)^{251}$$
$$2 \cdot (2^4)^{251} \equiv 2 \cdot (1)^{251} \ (mod\ 5)$$
$$2 \cdot (2^4)^{251} \equiv 2 \ (mod\ 5)$$
$$\therefore (1006^{1006} + 1004^{1004})^{1005} \equiv 2 \ (mod\ 5)$$

O resto da divisão é 2.

3. Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

O conjunto dos números reais é o conjunto mais usado nos vestibulares. Vamos relembrar quais números estão contidos nesse conjunto com o Diagrama de Venn-Euler:



Os números reais, representados por $\mathbb{R}$, formam o segundo maior conjunto dos conjuntos numéricos. Veja que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$.

O conjunto dos reais é formado pelo conjunto dos racionais e o conjunto dos irracionais. Vamos estudar mais a fundo cada um deles.

3.1. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

O conjunto dos racionais inclui todos os números inteiros e os números fracionários. Os números fracionários são números que não podem ser representados no conjunto dos inteiros. Eles são da forma:

$$a \in \mathbb{Z}\ e\ b \in \mathbb{Z}^*, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$$

a é chamado de numerador e b é o denominador.

$\frac{a}{b}$ é dito irredutível quando a, b forem primos.

Vamos ver as operações e as propriedades desse conjunto.

3.1.1. Operações dos racionais

Se $a, c \in \mathbb{Z}\ e\ b, d \in \mathbb{Z}^*$, temos:

a) Igualdade

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$$

b) Adição

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

c) Multiplicação

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

3.1.2. Propriedades

Se $a, c, e \in \mathbb{Z}\ e\ b, d, f\ \in \mathbb{Z}^*$:

a) Associativa

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$
$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

b) Comutativa

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$$

c) Elemento neutro da adição

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}$$

d) Elemento simétrico

$$\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=0$$

e) Elemento neutro da multiplicação

$$\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$$

f) Distributiva

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$$

3.1.3. Dízima periódica e Fração geratriz

Dizemos que um número é uma dízima periódica quando os seus algarismos após a vírgula se repetem. Essa repetição pode ser em grupo ou não. Exemplos:

a) $0{,}3333\ldots$
b) $0{,}121212\ldots$
c) $1{,}48278278\ldots$

Os **algarismos que se repetem** são chamados de **período**. No exemplo acima:

a) 3 é o período de $0{,}333\ldots$
b) 12 é o período de $0{,}1212\ldots$
c) 278 é o período de $1{,}48278278\ldots$

Repare que nem sempre o algarismo logo após a vírgula pertence ao período, nesses casos, temos uma dízima periódica composta. Caso o período se inicie logo após a vírgula, temos uma dízima periódica simples.

$$0{,}1212\ldots \rightarrow \textit{dízima periódica simples}$$
$$1{,}48278278\ldots \rightarrow \textit{dízima periódica composta}$$

A **parte decimal que não se repete** é chamada de **antiperíodo**, então, 48 é o antiperíodo do número $1{,}48278278\ldots$

Podemos usar as reticências para indicar a repetição dos números, mas também podemos escrevê-los usando uma barra acima do período. Veja:

$$0{,}121212\ldots = 0{,}\overline{12}$$
$$1{,}48278278\ldots = 1{,}48\overline{278}$$

Toda dízima periódica pode ser escrita na forma fracionária. Para encontrar a fração geratriz de uma dízima periódica, podemos proceder da seguinte forma, tomemos o exemplo:

$$x = 1{,}2636363\ldots$$

Inicialmente, devemos identificar o período e o antiperíodo da dízima. Nesse caso, temos 63 como período e 2 como antiperíodo. Agora, devemos multiplicar o número por 10^n, sendo n a quantidade de algarismos do antiperíodo, então, multiplicaremos por 10^1:

$$10x = 12{,}6363\ldots$$

O próximo passo é multiplicar o número obtido por 10^m, sendo m a quantidade de algarismos do período. Assim, temos $m = 2$, logo:

$$10^2 \cdot 10x = 10^2 \cdot 12{,}6363\ldots$$
$$1000x = 1263{,}6363\ldots$$

Agora, calculamos $1000x - 10x$:

$$1000x - 10x = 1263{,}6363\ldots - 12{,}6363\ldots$$
$$990x = 1251$$
$$\therefore x = \frac{1251}{990}$$

Há um método mais prático para encontrar esse número. Veja:

$$x = 1{,}2636363\ldots$$

Devemos identificar a parte inteira, o antiperíodo e o período da dízima:

$$parte\ inteira = 1$$
$$antiperíodo = 2$$
$$período = 63$$

Agora, devemos verificar o número de algarismos do antiperíodo e do período:

$$antiperíodo = 2 \to 1\ algarismo$$
$$período = 63 \to 2\ algarismos$$

O numerador da fração geratriz será composto pela parte inteira, o antiperíodo e o período subtraído da parte inteira com o antiperíodo. E para o denominador, devemos seguir a seguinte regra:

1) Para cada algarismo do período, inserimos um “9” no denominador.

2) Para cada algarismo do antiperíodo, inserimos um “0” no final do denominador.

Assim, temos:

$$1{,}26363\ldots = \frac{numerador}{denominador} = \frac{1263 - 12}{990} = \frac{1251}{990}$$

3.2. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

O conjunto dos números irracionais inclui os números que não podem ser representados pelos racionais. Eles podem ser algébricos ou transcendentes. Podemos classificá-los como algébricos quando forem raízes de equações algébricas de coeficientes inteiros, por exemplo, $x^2 - 2 = 0$. Caso contrário, serão números transcendentes, os exemplos mais famosos desses números são o número de Neper $(e = 2{,}718281828459\ldots)$ e o número pi $(\pi = 3{,}141592\ldots)$.

Definição:

> Se $\boldsymbol{x}$ é um número irracional, então ele não poderá ser escrito como uma fração de irredutível.

Perceba que por essa definição, não podemos escrever um número irracional x como

$$x = \frac{p}{q}$$

Em que $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$, com p e q primos entre si.

Podemos também encontrar números irracionais através dessa definição:

Se p é um número primo, inteiro e positivo, então $\sqrt{p}$ é irracional.

Por que essa relação é válida?

Se p é um número primo, então ele não pode ser escrito como fator de outros números além dele mesmo. Então, não podemos escrever $p = q^2$ $(q \in \mathbb{Q})$ para torná-lo um número racional $(\sqrt{p} = \sqrt{q^2} = q \in \mathbb{Q})$.

Exemplos de números irracionais algébricos:

$$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}7320508075\ldots$$
$$\sqrt{5} = 2{,}2360679774\ldots$$
$$\sqrt{7} = 2{,}6457513110\ldots$$

Em algumas questões será necessário calcular o valor numérico dos números irracionais para fazer comparações com os números reais, então vale a pena decorar o valor dos seguintes números:

$$\sqrt{2} \approx 1{,}4$$
$$\sqrt{3} \approx 1{,}7$$
$$\sqrt{5} \approx 2{,}2$$
$$\sqrt{7} \approx 2{,}6$$

3.2.1. Redução ao Absurdo

Antes de continuar, vamos aprender um método muito útil para provar proposições.

O método da Redução ao Absurdo é usado para provar a veracidade de uma proposição.

A Redução ao Absurdo fundamenta-se no princípio do terceiro excluído (uma proposição ou é verdadeira ou é falsa) e no princípio da não-contradição (uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo).

Se queremos provar que uma proposição p é verdadeira usando o método da redução ao absurdo, devemos supor que $\neg p$ é verdadeira e, utilizando as definições e teorias envolvidas, tentamos chegar a um absurdo (ou contradição). Desse modo, se a negação da proposição é falsa (sendo uma contradição), então a própria proposição é verdadeira.

Vamos ver na prática sua aplicação:

7. Se a^2 é par, então a é par.

Resolução:

Vamos supor que a não seja par, ou seja, a é ímpar.

Se a é ímpar, podemos escrever:

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$$

Elevando a ao quadrado, obtemos:

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

$2k^2 + 2k$ é um inteiro, então vamos definir:

$$2k^2 + 2k = \beta \in \mathbb{Z}$$

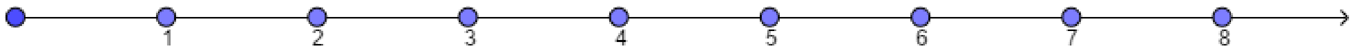
Substituindo em a^2:

$$a^2 = 2\beta + 1$$

Como $\beta \in \mathbb{Z}$, então a^2 é ímpar. Mas da hipótese inicial, a^2 é par. Logo, chegamos a um absurdo. Disso, concluímos que a é par.

3.3. Reta Real

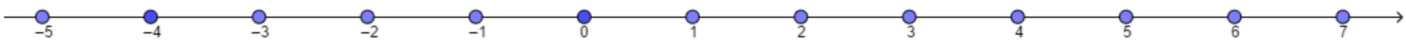
3.3.1. Reta dos Naturais



Os números naturais podem ser representados ao longo de uma reta. Sabemos que os números naturais são os números $0, 1, 2, 3, \ldots$ Então se escrevermos todos os números naturais ao longo da reta, teremos os pontos distribuídos conforme a figura acima. Apenas esses pontos serão elementos do conjunto dos naturais.

Perceba que os números estão organizados de forma crescente, quanto mais a direita maior o número natural.

3.3.2. Reta dos Inteiros



A reta dos números inteiros é semelhante à reta dos naturais e incluem também os números inteiros negativos. Ela está representada na figura acima. Esses números são também pontos ao longo da reta.

Note a ordenação dos números inteiros.

3.3.3. Reta dos Reais

O conjunto dos números reais inclui todos os números racionais e irracionais. Esses números, quando escritos ao longo de uma reta, preenchem a sua totalidade. Assim, qualquer ponto que nós escolhermos ao longo da reta estará presente no conjunto dos reais. Essa reta é chamada de reta real ou reta numérica.

Os números estão ordenados ao longo da reta.

Podemos escolher um intervalo ao longo da reta com essa notação:

$$[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} | 1 \leq x \leq 3\}$$

Graficamente:

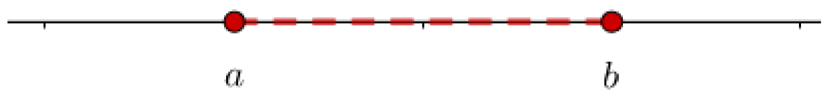
O pontilhado em vermelho representa o nosso intervalo.

Podemos ter quatro casos de intervalos diferentes:

1) Intervalo fechado nas extremidades

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$$

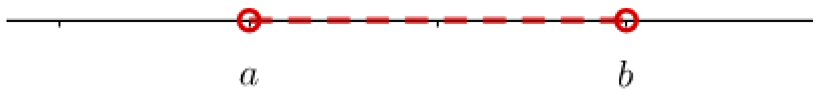
Chamamos de intervalo fechado quando os valores da extremidade pertencerem ao conjunto. Usualmente, representamos o intervalo fechado com um ponto fechado:



2) Intervalo aberto nas extremidades

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

No intervalo aberto nas extremidades, os elementos da extremidade não pertencem ao conjunto. Essas extremidades são representadas com um ponto aberto:



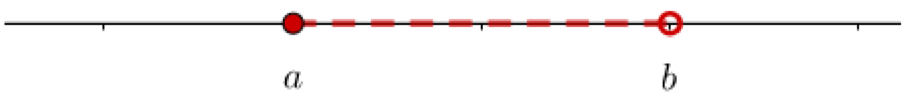
O intervalo aberto também pode ser representado pelos parênteses:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$$

3) Intervalo aberto à direita ou fechado à esquerda

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$$

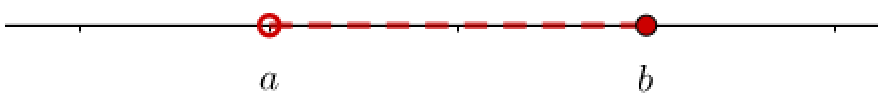
Nesse caso, o intervalo é aberto à direita $\rightarrow$ b não pertence ao conjunto e a pertence ao conjunto.



4) Intervalo aberto à esquerda ou fechado à direita

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$$

Situação análoga ao caso acima, a não pertence ao conjunto e b pertence.



3.4. Potenciação

Veremos esse assunto com mais detalhes na aula de Potenciação e Radiciação. Por hora, basta saber a sua definição:

$$a \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}^*, a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Exemplos:

1) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$
2) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
3) $2^2 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 4 \cdot 125 = 500$
4) $(abc)^3 = a^3 b^3 c^3$
5) $(ab)^2 = a^2 b^2$
6) $a^6 = (a^2)^3 = (a^3)^2$

a^2 é lido como a elevado ao quadrado.
a^3 é lido como a elevado ao cubo.

3.5. Radiciação

Também estudaremos esse assunto na aula de Potenciação e Radiciação. Vamos ver sua definição:

$$a \in \mathbb{R}\ e\ n \in \mathbb{N}^*, a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Para essa aula, vamos usar apenas $n = 2$.

$\sqrt{a}$ é dito raiz quadrada de a

3.5.1. Operações usuais

a) $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
b) $\sqrt{a}\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} = a$
c) $\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$
d) $\sqrt{a+b}^2 = a + b$
e) $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}$

3.6. Desigualdades para o Conjunto dos Reais

1) Tricotomia dos Reais

$$a \in \mathbb{R} \rightarrow (a < 0\ ou\ a = 0\ ou\ a > 0)$$

2) Translação

$$a \geq b\ e\ c \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a + c \geq b + c$$

3) Produto da desigualdade

$$a \geq b\ e\ c \geq 0 \rightarrow ac \geq bc$$
$$a \geq b\ e\ c \leq 0 \rightarrow ac \leq bc$$

4) Inversa

$$a \geq b \; e \; ab > 0 \rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$$

5) Transitividade

$$a \geq b \; e \; b \geq c \rightarrow a \geq c$$

6) Soma da desigualdade

$$a \geq b \; e \; c \geq d \rightarrow a + c \geq b + d$$

7) Potenciação

$$a \geq b \; e \; a, b > 0 \rightarrow a^2 \geq b^2$$

3.7. Sistemas de Numeração

O sistema de numeração que estamos acostumados é o sistema de numeração decimal ou de base 10. Com esse sistema, podemos escrever os números em função das potências de 10. Desse modo, cada algarismo de um número na base 10 deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$. Veja os exemplos:

$$357 = 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$
$$1048 = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

3.7.1. Sistema de numeração na base b

Podemos representar os números usando outros tipos de base.

Seja b a base de um sistema de numeração e $b \in \mathbb{N}$, com $b > 1$. Podemos representar os números usando a seguinte sequência de símbolos:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b$$

Onde a_i representa o algarismo do número. Esse algarismo deve pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, \dots, b-1\}$.

Um detalhe que devemos nos atentar é caso $b > 10$, os algarismos (a_i) acima ou igual a 10 devem ser substituídos por letras maiúsculas do alfabeto:

$$A = 10$$
$$B = 11$$
$$C = 12$$
$$\vdots$$

Como o sistema de numeração usual é o decimal, representamos os números nessa base sem os parênteses e o subíndice b. Veja:

$$\pm a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots \equiv \pm(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_{10}$$

Para representar os negativos, basta inserir o sinal negativo na frente do maior algarismo.

Vamos ver alguns sistemas de numeração.

3.7.2. Sistema binário

Esse é o sistema de numeração na base 2. O sistema binário é usado na computação para representar os bits. Os números na base 2 são conhecidos como números binários. Cada algarismo de um número binário pode assumir os valores 0 ou 1. Exemplo de números binários:

$$(10101{,}101)_2$$
$$(111{,}111)_2$$

3.7.3. Sistema octal

Sistema de numeração na base 8. Os algarismos devem pertencer ao conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Exemplo:

$$(7103{,}25)_8$$

3.7.4. Sistema hexadecimal

Sistema de numeração na base 16. Perceba que nesse caso, os algarismos podem ser maiores ou iguais a 10. Dessa forma, os algarismos devem pertencer ao conjunto:

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$$

Exemplos:

$$F5A4$$
$$100FFF$$
$$ABCDEF123$$

Lembrando que nesse caso: $A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14, F = 15$.

3.8. Mudança de Base

3.8.1. Mudança na base $\boldsymbol{b}$ para base decimal

Para converter um número na base b para a base decimal, basta expandir o número da seguinte forma:

$$(a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} \dots)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} + \cdots$$

Exemplos:

$$(13{,}2)_4 = 1 \cdot 4^1 + 3 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^{-1} = 7{,}5$$
$$(ACF)_{16} = 10 \cdot 16^2 + 12 \cdot 16^1 + 15 \cdot 16^0 = 2767$$

3.8.2. Mudança na base decimal para base $\boldsymbol{b}$

Agora queremos converter um número na base decimal para a base b, isto é, devemos encontrar o caminho inverso da conversão acima.

Seja $(X)_{10}$ a representação de um número na base decimal. Então:

$$(X)_{10} = (a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0 a_{-1} a_{-2} a_{-3} \dots)_b$$

Queremos encontrar os algarismos a_i. Vamos separar os dígitos de X em parte inteira e parte fracionária.

Definindo X_i como a parte inteira de X e X_f como a parte fracionária, temos:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$
$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Para encontrar X_i, usamos o método conhecido como divisões sucessivas e encontramos a parte inteira de X. Veja:

$$X_i = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Dividindo a equação por b, encontramos:

$$\frac{X_i}{b} = a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1 + \frac{a_0}{b}$$

a_0 é o resto da divisão de X_i por b e $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ é um número inteiro.

Se dividirmos o número $a_n b^{n-1} + a_{n-1} b^{n-2} + \cdots + a_1$ por b novamente, encontramos a_1. E assim repetimos essa operação até encontrarmos todos os dígitos.

Na prática, dividimos o número X_i por b sucessivamente até que o quociente das divisões sucessivas seja zero.

Para encontrar X_f, usamos o método multiplicações sucessivas. Veja:

$$X_f = \frac{a_{-1}}{b^1} + \frac{a_{-2}}{b^2} + \frac{a_{-3}}{b^3} + \cdots$$

Multiplicando a equação por b:

$$X_f b = a_{-1} + \frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$$

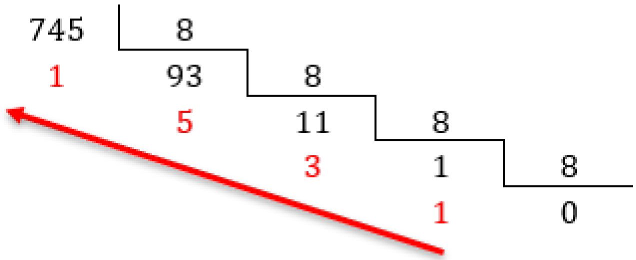
Dessa forma, a_{-1} torna-se a parte inteira da operação acima e $\frac{a_{-2}}{b^1} + \frac{a_{-3}}{b^2} + \cdots$ é a parte fracionária. Se multiplicarmos essa parte fracionária por b, encontramos a_{-2}. Repetimos essa operação até encontrar todos os dígitos fracionários.

Na prática, multiplicamos X_f por b até que não haja mais parte fracionária.

Exemplo:

Vamos transformar o número $745{,}5$ na base decimal para a base 8.

Inicialmente, separamos a parte inteira da parte fracionária e calculamos cada uma separadamente. Para a parte inteira, dividimos o número 745 por 8 e obtemos a parte inteira na base 8:



Devemos escrever a parte inteira de acordo com a ordem indicada pela seta:

$$(745)_{10} = (1351)_8$$

Para a parte fracionária, devemos multiplicar esse número por 8 sucessivamente. Os números inteiros obtidos serão os algarismos da parte fracionária:

$$0{,}5 \cdot 8 = 4 \Rightarrow a_{-1} = 4$$

Assim, o número 745,5 na base 8 é:

$$745{,}5 = (1351{,}4)_8$$

3.8.3. Mudança na base b_1 para a base b_2

Para converter um número na base b_1 para a base b_2, devemos primeiro converter o número para a base decimal e depois convertemos o decimal resultante para a base b_2.

Devemos seguir o seguinte esquema:

base b_1 → base decimal → base b_2

8. Obtenha a representação na base 4 do número $(10101{,}01)_2$

Resolução:

Convertendo para decimal:

$$(10101{,}01)_2 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} = 21{,}25$$

21,25 é fracionário, então devemos dividir em parte inteira e parte fracionária.

Convertendo 21,25 para a base 4:

21	4		
1	5	4	
	1	1	4
		1	0

Efetuamos a divisão sucessiva de 21 por 4. Os maiores algarismos são os restos mais a direita dessa divisão conforme a seta. Assim:

$$21 = 1 \cdot 4^2 + 1 \cdot 4^1 + 1 \cdot 4^0$$

Poderíamos ter escrito 21 diretamente em função das potências de 4 já que ele é um número pequeno.

Caso o número fosse maior, seria mais viável dividir desse modo para encontrar os algarismos da parte inteira.

Agora, encontrando os algarismos fracionários:

$$0{,}25 \cdot 4 = 1$$

Como não temos mais fração no resultado dessa multiplicação, podemos escrever:

$$0{,}25 = 1 \cdot 4^{-1}$$

Portanto:

$$(10101{,}01)_2 = (111{,}1)_4$$

4. Produto Notável e Fatoração

Uma expressão algébrica pode ser escrita de diversas maneiras. Vamos tomar $x^2 + 2x + 1$ como exemplo:

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x+1) = (x+1)^2$$

O processo de escrever $x^2 + 2x + 1$ como $(x+1)^2$ é chamado de fatoração e o processo inverso, isto é, escrever $(x+1)^2$ como $x^2 + 2x + 1$, é chamado de produto notável.

Produto notável

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

Fatoração

Apresentaremos os principais produtos notáveis e fatorações. É importante que você decore alguns deles, mas caso esqueça, você pode desenvolver as expressões aplicando a propriedade da distributiva e encontrar suas fórmulas.

a) $a(x+y) = ax + ay$

b) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
c) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
d) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
e) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
f) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
g) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
h) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
i) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$
j) $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + b^{n-2}a + b^{n-1})$
k) $a^{2m+1} + b^{2m+1} = (a+b)(a^{2m} - a^{2m-1}b + \cdots - b^{2m-1}a + b^{2m})$

4.1. Fatoração usando raízes

Se x_1 e x_2 são raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, então podemos escrever $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

4.2. Aplicação

Agora que conhecemos diversas fatorações e produtos notáveis, podemos ver na prática como usamos esses artifícios nos problemas matemáticos (isso será muito útil para acelerar os cálculos nas questões de matemática!). Vejamos alguns exemplos de aplicações.

5.2.a) Simplifique

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})$$

Resolução:

Veja que essa expressão lembra o produto notável:

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Assim, temos:

$$(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \sqrt{2}^2 - \sqrt{3}^2 = 2 - 3 = -1$$

5.2.b) Encontre o valor da expressão:

$$\sqrt{5999^2 + 5999 + 6000}$$

Resolução:

Note que temos um número elevado ao quadrado, logo podemos nos lembrar da fatoração:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

Manipulando a expressão dentro do radical, temos:

$$\sqrt{5999^2 + 5999 + 6000} = \sqrt{5999^2 + 5999 + 5999 + 1} = \sqrt{5999^2 + 2 \cdot 5999 \cdot 1 + 1}$$
$$= \sqrt{(5999+1)^2} = \sqrt{6000}^2 = 6000$$

5.2.c) Sabendo que $x + \frac{1}{x} = 10$, calcule o valor de $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

Resolução:

Veja que elevando $x + \frac{1}{x} = 10$ ao quadrado, obtemos:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 100$$
$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = 100 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 100 - 2 = 98$$
$$\therefore x^2 + \frac{1}{x^2} = 98$$

5.2.d) Sabendo que $a + b + c = 0$ e $abc = 1$, calcule

$$a^3 + b^3 + c^3$$

Resolução:

Podemos usar a seguinte fatoração

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$$

Isolando a soma pedida, temos:

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3abc$$

Substituindo os valores:

$$a^3 + b^3 + c^3 = 0 \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) + 3 \cdot 1$$

$$\therefore a^3 + b^3 + c^3 = 3$$

5. Desigualdade

Vamos iniciar o estudo das desigualdades. Esse assunto pode nos ajudar a resolver diversas questões que pedem para analisar máximos e mínimos. Vejamos os principais e suas respectivas demonstrações.

5.1. Desigualdade de Cauchy

Para $x, y \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{\frac{x + y}{2} \geq \sqrt{xy}}$$

5.2. Teorema de Cauchy

Para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq n}$$

5.3. Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Para $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)}$$

5.4. Desigualdade das Médias

Preste atenção nessa desigualdade, pois ela é a mais cobrada nos vestibulares militares!

Para $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\boxed{MQ \geq MA \geq MG \geq MH}$$

Onde:

$$MQ = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}} \ (Média\ Quadrática)$$

$$MA = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \ (Média\ Aritmética)$$

$$MG = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}\ (Média\ Geométrica)$$
$$MH = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}\ (Média\ Harmônica)$$

Atenção! A igualdade entre as médias ocorre se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots$, ou seja, os termos envolvidos são iguais!

Exemplo:

6.4.a) Sabendo que $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ e que $ab = 100$, calcule o mínimo valor de $a + b$ e os valores de cada uma dessas variáveis.

Resolução:

Como queremos saber o mínimo valor de $a + b$, podemos usar a expressão da média aritmética e já que temos o valor do produto ab, podemos comparar essa média com a média geométrica.

$$MA \geq MG$$
$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

O mínimo ocorre quando $a + b = 2\sqrt{ab}$, logo:

$$a + b = 2\sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20 \therefore \boxed{a + b = 20}$$

Sabemos que a igualdade das médias ocorre somente quando os termos envolvidos são iguais, assim, temos:

$$a = b \Rightarrow a + b = a + a = 2a = 20 \therefore \boxed{a = b = 10}$$

Demonstração:

Vamos provar por partes.

1) $M_Q \geq M_A$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2)$$

Fazendo $b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n = 1$, temos:

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)n$$

Dividindo ambos os lados por $n^2 > 0$:

$$\frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{n^2} \leq \frac{(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)}{n}$$
$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}$$
$$M_A \leq M_Q$$
$$\therefore M_Q \geq M_A$$

2) $M_A \geq M_G$

Pela definição de M_G:

$$M_G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \Rightarrow M_G^n = x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$$

Dividindo a igualdade por M_G^n:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1$$

Usando o teorema de Cauchy:

$$\frac{x_1}{M_G} \cdot \frac{x_2}{M_G} \cdot \ldots \cdot \frac{x_n}{M_G} = 1 \Rightarrow \frac{x_1}{M_G} + \frac{x_2}{M_G} + \cdots + \frac{x_n}{M_G} \geq n$$

Logo:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq M_G$$
$$\therefore M_A \geq M_G$$

3) $M_G \geq M_H$

Sabemos que $M_A \geq M_G$, então:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

Substituindo $x_i = \frac{1}{a_i}, 0 < i < n$, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}$$

$$\frac{\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)}{n} \geq \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}}$$

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$$

$$\therefore M_G \geq M_H$$

Assim, provamos que:

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$$

Exercícios de Fixação

9. Demonstre para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

Resolução:

Demonstração vista na aula teórica. Basta fazer $n = 2$ e provar:

$$M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H$$

Gabarito: Demonstração

10. Demonstre para $a, b \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Resolução:

Sabemos que qualquer diferença de números elevado ao quadrado é maior ou igual a zero, logo:

$$(a - b)^2 \geq 0$$

$$a^2 - 2ab + b^2 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 \geq 2ab$$

Dividindo ambos os lados por $ab > 0$:

$$\frac{a^2+b^2}{ab} \geq 2$$

$$\therefore \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

Gabarito: Demonstração

11. (ITA/2002) Mostre que $\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4}$, para quaisquer x e y reais positivos.

Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a p.

Resolução:

O valor numérico de $C_{8,4}$ (esse tema será visto na aula de análise combinatória) é:

$$C_{8,4} = \frac{8!}{4!\cdot 4!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4\cdot 3\cdot 2} = 70$$

Assim, temos que provar a seguinte desigualdade:

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 > 70$$

Como $MA \geq MG$, usando os termos $\frac{x}{y}$ e $\frac{y}{x}$, obtemos:

$$MA \geq MG \Rightarrow \frac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}{2} \geq \sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Somando-se 2 na desigualdade obtida e elevando à quarta potência, encontramos:

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq (2+2)^4$$

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq (4)^4$$

$$\left(\frac{x}{y} + 2 + \frac{y}{x}\right)^4 \geq 256 > 70$$

Gabarito: Demonstração

6. Lista de Questões

12. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.
b) 21.
c) 22.
d) 23.
e) 24.

13. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.
b) apenas II.
c) apenas I e II.
d) apenas I e III.
e) todas.

14. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

15. (ITA/2019)

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

16. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) verdadeira(s)

17. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. Se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

II. Se x é um número real e $x^3 + x + 1 = 0$, então $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

É (são) verdadeira(s)

18. (ITA/2017/Modificada)
Das afirmações:
I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos
II. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional
É (são) verdadeira(s)

19. (ITA/2014/Modificada)
Das afirmações:
I. Se $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$
É (são) verdadeira(s):

20. (ITA/2005)
Sobre o número $x = \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:
a) $x \in]0, 2[$
b) x é racional
c) $\sqrt{2x}$ é irracional
d) x^2 é irracional
e) $x \in]2, 3[$

21. (IME/2020)
Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:
a) 46 e 277
b) 45 e 275
c) 44 e 275
d) 45 e 277
e) 46 e 275
Observação:
cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

22. (IME/2020)
O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:
a) $[1, 16000]$
b) $[16001, 17000]$
c) $[17001, 18000]$
d) $[18001, 19000]$
e) $[19001, \infty)$

23. (IME/2020)

Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:
a) 22
b) 35
c) 40
d) 42
e) 50

24. (IME/2019)
Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?
a) 23
b) 26
c) 29
d) 32
e) 39

25. (IME/2018)
Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:
a) 2008010
b) 2012061
c) 2034145
d) 2044145
e) 2052061

26. (IME/2018)
Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

27. (IME/2018)
A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:
a) $(0, 25]$
b) $(25, 50]$
c) $(50, 75]$
d) $(75, 100]$
e) $(100, 125]$

28. (IME/2018)
Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x - 1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:
a) 10001111
b) 11011011
c) 11100111
d) 11011110
e) 11110001

29. (IME/2015)

Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?
a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

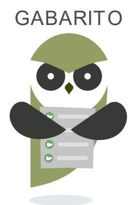
30. (IME/2002)

Sejam $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ números reais positivos. Prove que: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

31. (IME/2001)
Provar que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo das unidades.

32. (IME/2021)
Considere que $\boldsymbol{a} \neq \mathbf{0}$, $\boldsymbol{b} \neq \mathbf{0}$ e $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) \neq \mathbf{0}$. Sabendo-se que $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=3$, determine o valor de $\frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2}$.
a) 0,1
b) 0,3
c) 0,6
d) 0,8
e) 1,0

7. Gabarito



12. e
13. c
14. $S=\{2\}$.
15. $n=285714$
16. I e II.
17. I.
18. I. V II. F
19. I. F II. F
20. b
21. e
22. c
23. b
24. d
25. c
26. $(p,q,r)=(17,7,17)\ e\ (p,q,r)=(19,5,19)$

27. d
28. e
29. d
30. Demonstração
31. Demonstração
32. b

8. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

12. (ITA/2020)

A expansão decimal do número $100! = 100 \cdot 99 \cdots 2 \cdot 1$ possui muitos algarismos iguais a zero. Contando da direita para a esquerda, a partir do dígito das unidades, o número de zeros, que esse número possui antes de um dígito não nulo aparecer, é igual a

a) 20.

b) 21.

c) 22.

d) 23.

e) 24.

Comentários

Seja a fatoração em primos, única pelo teorema fundamental da álgebra, de $100!$:

$$100! = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot \ldots \cdot 97^z$$

Mas $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$.

Dado um número inteiro positivo N, a quantidade de zeros em seu final é igual ao número de vezes em que se pode dividir por 10 e continuar com um inteiro positivo. A cada divisão, diminui-se uma unidade dos expoentes de 2 e de 5. Logo, é possível dividir por 10 $\min\{a, c\}$ vezes.

Acontece que em m!, para todo inteiro positivo m, temos sempre que o expoente de 5 é menor ou igual ao expoente de 2, isto é, $c \leq a$. Logo, $\min\{a, c\} = c$. O problema agora é descobrir o expoente de 5 em 100!

Contemos as contribuições de cada $k \in \{1,2, \ldots, 99, 100\}$.

Cada múltiplo de 5 contribui com pelo menos um fator 5.

Cada múltiplo de $5^2 = 25$ contribui com um fator 5 extra.

Não existem múltiplos de 5^l com $l \geq 3$.

Temos $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{25} \right\rfloor = 20 + 4 = 24$ zeros no fim de $100!$.

Gabarito: “e”.

---

13. (ITA/2020)

Dado $a \in \mathbb{R}$, defina $p = a + a^2$ e $q = a + a^3$ e considere as seguintes afirmações:

I. se p ou q é irracional, então a é irracional.

II. se p e q são racionais, então a é racional.

III. se q é irracional, então p é irracional.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) todas.

Comentários

I. Temos da afirmação $(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I}) \rightarrow a \in \mathbb{I}$. Usando sua contrapositiva:

$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim[(p \in \mathbb{I}) \vee (q \in \mathbb{I})]$$
$$\sim(a \in \mathbb{I}) \rightarrow \sim(p \in \mathbb{I}) \wedge \sim(q \in \mathbb{I})$$
$$a \in \mathbb{Q} \rightarrow (p \in \mathbb{Q}) \wedge (q \in \mathbb{Q})$$

Assim, temos que verificar se $a \in \mathbb{Q}$ implica que $p \in \mathbb{Q}$ e $q \in \mathbb{Q}$. Como $a \in \mathbb{Q}$, temos $a^2 \in \mathbb{Q}$ e $a^3 \in \mathbb{Q}$, logo, $p = a + a^2 \in \mathbb{Q}$ e $q = a + a^3 \in \mathbb{Q}$. Portanto, afirmação verdadeira.

II. Multiplicando-se p por a, temos:

$$ap = a^2 + a^3$$

Podemos escrever a^2 e a^3 como:

$$p = a + a^2 \Rightarrow a^2 = p - a$$
$$q = a + a^3 \Rightarrow a^3 = q - a$$

Substituindo em ap:

$$ap = p - a + q - a \Rightarrow ap + 2a = p + q \Rightarrow (p+2)a = p + q$$

Para $p \neq -2$:

$$a = \frac{p+q}{p+2}$$

Se $p, q \in \mathbb{Q}$, temos que $\frac{p+q}{p+2} \in \mathbb{Q}$, logo, $a \in \mathbb{Q}$.

Para $p = -2$:

$$-2 = a + a^2 \Rightarrow a^2 + a + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7 < 0$$

Portanto, $a \notin \mathbb{R}$, logo, não é possível.

Concluímos que a afirmação é verdadeira.

III. Tomemos o seguinte contraexemplo:

$$a = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$$
$$q = a(1 + a^2) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$
$$q = \left(\frac{2\sqrt{3} - 1}{2}\right)\left(1 + 3 + \frac{1}{4} - \sqrt{3}\right) = \frac{(2\sqrt{3} - 1)(17 - 4\sqrt{3})}{8} = \frac{34\sqrt{3} - 17 - 24 + 4\sqrt{3}}{8}$$
$$q = \frac{38\sqrt{3} - 41}{8} \in \mathbb{I}$$
$$p = a(1 + a) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\right) = \left(\sqrt{3} - \frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4} \in \mathbb{Q}$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: "c".

14. (ITA/2020)

Dizemos que um número natural n é um cubo perfeito se existe um número natural a tal que $n = a^3$. Determine o subconjunto dos números primos que podem ser escritos como soma de dois cubos perfeitos.

Comentários

Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $a^3 + b^3 = p$, com p primo. Assim, temos:

$$p = \underbrace{a^3 + b^3}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{(a+b)}_{\in \mathbb{N}} \underbrace{(a^2 - ab + b^2)}_{\in \mathbb{N}}$$

Como p é primo, temos duas possibilidades para os fatores:

I) $a + b = 1$ e $a^2 - ab + b^2 = p$

Como $a, b \in \mathbb{N}$, temos de $a + b = 1$ que as soluções são:

$$a = 1 \text{ e } b = 0 \text{ ou } a = 0 \text{ e } b = 1$$

Substituindo $a = 1$ e $b = 0$ na equação $a^2 - ab + b^2 = p$:

$$1^2 = p \Rightarrow p = 1$$

Como 1 não é primo, temos que esses valores de a e b não convém, analogamente para $a = 0$ e $b = 1$. Assim, devemos analisar o segundo caso.

II) $a + b = p$ e $a^2 - ab + b^2 = 1$

Fazendo $a = p - b$, temos:

$$(p-b)^2 - (p-b)b + b^2 = 1$$
$$p^2 - 2pb + b^2 - pb + b^2 + b^2 = 1$$
$$p^2 - 3bp + 3b^2 - 1 = 0$$

Analisando o discriminante:

$$\Delta = (3b)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3b^2 - 1) = 4 - 3b^2$$

Como p é a soma de dois naturais, temos que p também é natural, logo devemos ter $\Delta \geq 0$:

$$4 - 3b^2 \geq 0 \Rightarrow b^2 \leq \frac{4}{3}$$

Como $b \in \mathbb{N}$, a única possibilidade é $b = 1$.

Encontrando as raízes para p:

$$p = \frac{3b \pm \sqrt{4 - 3b^2}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = 2 \; ou \; 1$$

Como 1 não é primo, temos $p = 2$.

Para esse valor de p:

$$a + b = p \Rightarrow a + 1 = 2 \therefore a = 1$$

Portanto, o subconjunto dos números primos que satisfazem ao problema é $S = \{2\}$.

Gabarito: $S = \{2\}$.

---

15. (ITA/2019)

Um número natural n, escrito na base 10, tem seis dígitos, sendo 2 o primeiro. Se movermos o dígito 2 da extrema esquerda para a extrema direita, sem alterar a ordem dos dígitos intermediários, o número resultante é três vezes o número original. Determine n.

Comentários

Se n está na base 10 e possui 6 dígitos, sendo 2 o primeiro, podemos escrever:

$$n = 2 \cdot 10^5 + \underbrace{a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0}_{x}$$

Chamando de x o número formado por $a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$, temos:

$$n = 2 \cdot 10^5 + x$$

Fazendo a mudança de ordem conforme o enunciado, obtemos um novo número natural m:

$$m = 10 \cdot x + 2$$

A questão diz que $m = 3n$, logo:

$$10x + 2 = 3(2 \cdot 10^5 + x) \Rightarrow 7x = 2(3 \cdot 10^5 - 1) \Rightarrow x = \frac{599998}{7} = 85714$$

Então, n é dado por:

$$n = 2 \cdot 10^5 + 85714$$
$$\boxed{n = 285714}$$

Gabarito: $n = 285714$

16. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

I. A soma dos cubos de três números inteiros consecutivos é divisível por 9.

II. $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

É(são) verdadeira(s)

Comentários

I. Verdadeira.

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Vamos tomar os inteiros consecutivos $(a-1, a, a+1)$, a soma dos seus cubos resulta:

$$(a-1)^3 + a^3 + (a+1)^3$$
$$a^3 - 3a^2 + 3a - 1 + a^3 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$
$$3a^3 + 6a$$
$$3a(a^2 + 2)$$

Devemos provar que para qualquer $a \in \mathbb{Z}$, o valor $3a(a^2+2)$ é divisível por 9.

$a)$ $a = 3k, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \dots, \pm 3k)$

$$3a(a^2 + 2)$$
$$3(3k)((3k)^2 + 2)$$
$$9k(9k^2 + 2) \text{ é divisível por 9}$$

$b)$ $a = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(1, 4, 7, 10, \dots, 3k+1)$ e $(-2, -5, -8, \dots, -3k+1)$

$$3a(a^2 + 2)$$
$$3(3k+1)((3k+1)^2 + 2)$$
$$3(3k+1)(9k^2 + 6k + 1 + 2)$$
$$9(3k+1)(3k^2 + 2k + 1) \text{ é divisível por 9}$$

$c)$ $a = 3k + 2, k \in \mathbb{Z}$. Valores $(2, 5, 8, \dots, 3k+1)$ e $(-1, -4, -7, \dots, -3k+1)$

$$3a(a^2 + 2)$$
$$3(3k+2)((3k+2)^2 + 2)$$
$$3(3k+2)(9k^2 + 12k + 4 + 2)$$
$$9(3k+2)(3k^2 + 4k + 2) \text{ é divisível por 9}$$

II. Verdadeira.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

Gabarito: "I e II".

17. (ITA/2019/Modificada)

Considere as seguintes afirmações:

III. Se n é um número natural, então $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2}$.

IV. Se x é um número real e $x^3 + x + 1 = 0$, então $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

É (são) verdadeira(s)

Comentários

I. Verdadeira.

Note que:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+3} > \cdots > \frac{1}{2n}$$

Então:

$$\frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+2} > \frac{1}{2n}$$
$$\frac{1}{n+3} > \frac{1}{2n}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

Somando todas essas relações, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\underbrace{\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ termos} \geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n}}_{n\ vezes}$$
$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

II. Errada.

Vamos manipular a equação $x^3 + x + 1 = 0$ e tentar chegar à $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$.

$$x^3 + x + 1 = 0$$
$$\frac{x^3}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 0$$
$$x^2 + 1 + \frac{1}{x} = 0$$
$$x^2 + \frac{1}{x} = -1$$
$$x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = -1 + \frac{1}{x^6}$$

O problema diz que $x^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^6} = 0$, então:

$$-1 + \frac{1}{x^6} = 0 \Rightarrow x^6 = 1, x = \pm 1 \text{ para } x \in \mathbb{R}$$

Mas para $x = \pm 1$, $x^3 + x + 1 \neq 0$

Logo, a assertiva está errada.

Gabarito: "I".

---

18. (ITA/2017/Modificada)

Das afirmações:

I. Todo número inteiro positivo pode ser escrito, de maneira única, na forma $2^{k-1}(2m-1)$, em que k e m são inteiros positivos

II. Existe um número inteiro primo p tal que $\sqrt{p}$ é um número racional

É (são) verdadeira(s)

Comentários

I. Suponha $n \in \mathbb{Z}_+$, $n = 2^{k-1}(2m-1)$ com $k, m \in \mathbb{Z}_+$.

Vamos analisar os fatores de n.

$$n = \underbrace{2^{k-1}}_{par}\left(\underbrace{2m-1}_{ímpar}\right)$$

Perceba que temos dois fatores em n, um par e um ímpar.

2^{k-1} pode assumir os valores: $(1, 2, 4, \dots)$, ele é a parte par.

$2m - 1$ pode assumir os valores: $(1, 3, 5, 7, \dots)$. Ele é a parte ímpar, pois $2m$ é um número par e subtraindo 1 deste número, temos um número ímpar.

Note que podemos representar todos os números inteiros positivos nesse formato de número.

Para representar números pares, fazemos $k \neq 1$ e obtemos múltiplos de 2: $n = 2^{k-1}(2m - 1)$.

Para os ímpares, fazemos $k = 1$ e obtemos números ímpares: $n = 2^0(2m - 1) = 2m - 1$.

∴Verdadeira.

II. Pela definição de número irracional, sabemos que se p é primo então $\sqrt{p}$ é irracional.

∴Falsa.

Gabarito: I. V II. F

19. (ITA/2014/Modificada)

Das afirmações:

I. Se $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, com $y \neq -x$, então $x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

II. Se $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então $xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

É (são) verdadeira(s):

Comentários

I. $x, y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \to x + y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

A afirmação diz que se x e y são irracionais, a $x + y$ também será.

Vamos supor $x = 1 + \sqrt{2}$ e $y = 1 - \sqrt{2}$, ambos são irracionais.

Somando os dois, temos:

$$x + y = \left(1 + \sqrt{2}\right) + \left(1 - \sqrt{2}\right) = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$x + y \text{ é racional}$$

∴Falsa.

II. $x \in \mathbb{Q}\ e\ y \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \to xy \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

Vamos tomar $x = 0 \in \mathbb{Q}$ e $y = \sqrt{2} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, então xy será:

$$xy = 0 \cdot \sqrt{2} = 0 \in \mathbb{Q}$$

$$xy \text{ é um número racional}$$

∴Falsa

Gabarito: I. F e II. F

20. (ITA/2005)

Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que:

a) $x \in]0, 2[$

b) x é racional

c) $\sqrt{2x}$ é irracional

d) x^2 é irracional

e) $x \in]2, 3[$

Comentários

Vamos fatorar o número x:

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{4 - 4\sqrt{3} + 3} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{2^2 - 2 \cdot 2\sqrt{3} + \sqrt{3}^2} + \sqrt{3}$$

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt{3}$$
$$\left(2-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}=2$$

$\therefore x$ é racional.

Gabarito: "b".

21. (IME/2020)

Seja U o conjunto dos 1000 primeiros números naturais maiores que zero. Considere que zeros à esquerda são omitidos. Seja $A \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 10 tem o algarismo mais significativo igual a 1; e $B \subseteq U$ o conjunto de números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2. As cardinalidades de $A - B$ e de $B - A$ são, respectivamente:

a) 46 e 277
b) 45 e 275
c) 44 e 275
d) 45 e 277
e) 46 e 275

Observação:
cardinalidade de um conjunto finito é o número de elementos distintos desse conjunto.

Comentários

Para resolver essa questão, devemos encontrar os elementos de cada conjunto. O enunciado diz que A e B são subconjuntos de $U = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$. Para A, temos que o algarismo mais significativo dos seus elementos na base decimal é 1, logo, os elementos de A são:

$$\begin{matrix} 1 \\ 10, \dots, 19 \\ 100, \dots, 199 \\ 1000 \end{matrix} \Rightarrow \boxed{A = \left\{1, \underbrace{10, \dots, 19}_{10\ elementos}, \underbrace{100, \dots, 199}_{100\ elementos}, 1000\right\}}$$

A cardinalidade do conjunto A é:

$$\boxed{n(A) = 1 + 10 + 100 + 1 = 112}$$

Vamos analisar o conjunto B. Ele é formado pelos números cuja representação na base 4 tem o algarismo mais significativo igual a 2, desse modo, temos que os elementos de B são (lembrando que um número na base 4 pode ter como algarismos $0, 1, 2, 3$):

$$B = \left\{\begin{matrix} (2)_4 \\ (20)_4, (21)_4, (22)_4, (23)_4 \\ (200)_4, \dots, (233)_4 \\ (2000)_4, \dots, (2333)_4 \\ (20000)_4, \dots, (23333)_4 \end{matrix}\right\}$$

Perceba que $(20000)_4 = 2 \cdot 4^4 = 512$ e $(200000)_4 = 2 \cdot 4^5 = 2048 > 1000$.

Para analisarmos a cardinalidade das diferenças de A e B, vamos converter os números de B e escrevê-los na base decimal:

$$(2)_4 \Rightarrow 2$$
$$\underbrace{(20)_4}_{2\cdot4=8}, (21)_4, (22)_4, \underbrace{(23)_4}_{(30)_4-1=3\cdot4-1=11} \Rightarrow 8, \dots, 11$$
$$\underbrace{(200)_4}_{2\cdot4^2=32}, \dots, \underbrace{(233)_4}_{(300)_4=3\cdot4^2-1=47} \Rightarrow 32, \dots, 47$$
$$\underbrace{(2000)_4}_{2\cdot4^3=128}, \dots, \underbrace{(2333)_4}_{(3000)_4-1=3\cdot4^3-1=191} \Rightarrow 128, \dots, 191$$
$$\underbrace{(20000)_4}_{2\cdot4^4=512}, \dots, \underbrace{(23333)_4}_{(30000)_4-1=3\cdot4^2-1=767} \Rightarrow 512, \dots, 767$$

Assim, o conjunto B é dado por:

$$\boxed{B = \left\{2, \underbrace{8, \dots, 11}_{4\ elementos}, \underbrace{32, \dots, 47}_{16\ elementos}, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}, \underbrace{512, \dots, 767}_{256\ elementos}\right\}}$$

$$\Rightarrow \boxed{n(B) = 1 + 4 + 16 + 64 + 256 = 341}$$

Resta analisar os elementos da intersecção dos conjuntos. Fazendo a intersecção de A com B:

$$A \cap B = \left\{10, 11, \underbrace{128, \dots, 191}_{64\ elementos}\right\}$$

$$\boxed{n(A \cap B) = 66}$$

Portanto, as cardinalidades das diferenças são dadas por:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B) = 112 - 66 = 46$$
$$n(B - A) = 341 - 66 = 275$$

Gabarito: "e".

---

22. (IME/2020)

O menor número natural ímpar que possui o mesmo número de divisores que 1800 está no intervalo:

a) $[1, 16000]$

b) $[16001, 17000]$

c) $[17001, 18000]$

d) $[18001, 19000]$

e) $[19001, \infty)$

Comentários

Inicialmente, vamos calcular o número de divisores de 1800. Para isso, vamos fatorá-lo:

$$\begin{array}{l|l} 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

O número de divisores de 1800 é dado pelo produto dos expoentes dos seus fatores somado a 1:

$$n_D = (3 + 1)(2 + 1)(2 + 1) = 36$$

Assim, temos 36 divisores para o número 1800. O menor número natural ímpar que possui 36 divisores é da forma (lembrando que 2 não pode ser um fator desse número para que ele seja ímpar):

$$I = 3^a \cdot 5^b \cdot 7^c \cdot 11^d \cdot \dots$$

Ela deve satisfazer:

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \dots = 36$$

Vamos fatorar o número 36 e ver as possibilidades:

$$36 = \begin{cases} 36 \cdot 1 \\ 18 \cdot 2 \\ 9 \cdot 4 \\ 3 \cdot 12 \\ 3 \cdot 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \\ 6 \cdot 6 \\ 2 \cdot 3 \cdot 6 \end{cases}$$

Analisaremos apenas as possibilidades em azul, pois as possibilidades em vermelho gerarão números muito grandes. Para que tenhamos o menor ímpar, os menores fatores devem receber os maiores expoentes, logo:

$$3 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 21$$
$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \Rightarrow 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^1 \cdot 11^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$$
$$2 \cdot 3 \cdot 6 \Rightarrow 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7^1 = 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 27$$

Note que o menor número é $3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 = 17325$.

Gabarito: "c".

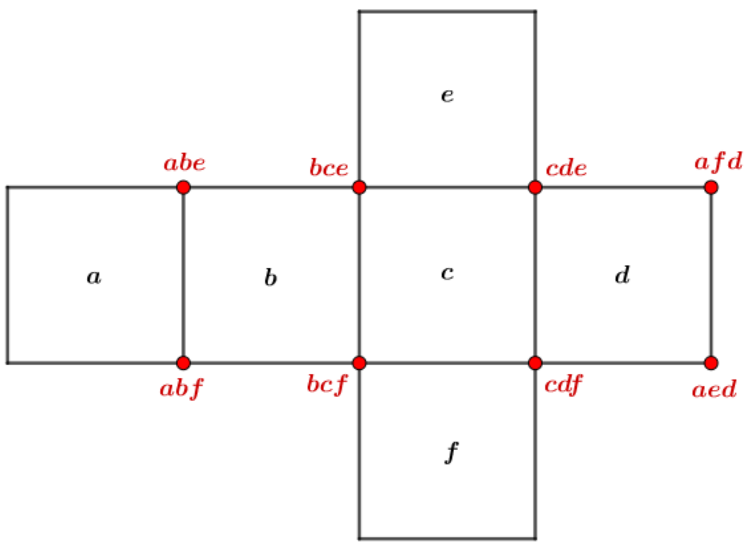
23. (IME/2020)

Um inteiro positivo é escrito em cada uma das seis faces de um cubo. Para cada vértice, é calculado o produto dos números escritos nas três faces adjacentes. Se a soma desses produtos é 1105, a soma dos seis números das faces é:

a) 22
b) 35
c) 40
d) 42
e) 50

Comentários

Vamos usar um cubo planificado para o problema dado. Para as condições do problema, temos:



O enunciado diz que:

$$abe + abf + bce + bcf + cde + cdf + afd + aed = 1105$$

Fatorando:

$$ab(e+f) + bc(e+f) + cd(e+f) + ad(e+f) = 1105$$
$$(e+f)(ab+bc+cd+ad) = 1105$$
$$(e+f)\big(b(a+c) + d(a+c)\big) = 1105$$
$$(e+f)(a+c)(b+d) = 1105$$

Temos um produto de três números inteiros positivos que resulta no número 1105. Note que:

$$1105 = 5 \cdot 13 \cdot 17$$

1105 é o produto de três números primos. Como $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_+$, temos que as somas $e + f, a + c, b + d$ não podem resultar em 1, logo, cada número deve assumir um dos números primos. Podemos ter:

$$e + f = 5$$

$$b + d = 13$$
$$a + c = 17$$

A questão pede:

$$a + b + c + d + e + f = 5 + 13 + 17 = 35$$

Gabarito: "b".

24. (IME/2019)

Aristeu e seu irmão nasceram nos séculos XX e XXI, respectivamente. Neste ano, 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos três últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento. Qual é a soma das idades dos dois irmãos?

a) 23
b) 26
c) 29
d) 32
e) 39

Comentários

Vamos analisar o enunciado. Aristeu nasceu no século XX, então, ele nasceu entre 1901 e 2000. Seu irmão nasceu no século XXI, logo, ele nasceu entre 2001 e 2100. Se no ano de 2018, os dois já fizeram aniversário e a idade de cada um deles é a soma dos últimos dígitos do ano de seu respectivo nascimento, podemos fazer as seguintes deduções:

1) A maior idade que Aristeu pode ter é 27 anos (nascimento em $\underbrace{1999}_{9+9+9=27}$)

Nesse caso, Aristeu teria 19 anos no ano de 2018. Desse modo, ele nasceu antes de 1999. Para descobrir essa idade, podemos dizer que ele nasceu no ano de $1999 - x$ e, assim, temos:

Soma dos três últimos algarismos para $x \in [0; 9]$ e $x \in \mathbb{N}$:

$$1999 - x \to 9 + 9 + 9 - x = 27 - x \text{ anos}$$

Idade desde o nascimento $1999 - x$ até 2018:

$$19 + x \text{ anos}$$

Igualando essas idades, descobrimos x:

$$27 - x = 19 + x$$
$$2x = 8$$
$$x = 4$$

Logo, ele nasceu no ano de 1995 (completa 23 anos até 2018 e a soma dos algarismos é $9 + 9 + 5 = 23$).

Usando o mesmo raciocínio, vamos calcular a idade do seu irmão. Já que ambos fizeram aniversário, vamos supor que seu irmão nasceu em 2017:

2) Seu irmão nasceu em 2017

Soma dos três últimos algarismos:

$$2017 \to 0 + 1 + 7 = 8 \text{ anos}$$

Mas, até 2018, ele terá apenas 1 ano. Logo, ele nasceu em $2017 - y$.

Para $y \in [0; 7]$ e $y \in \mathbb{N}$:

Soma dos três últimos algarismos:

$$2017 - y \to 0 + 1 + 7 - y = 8 - y \text{ anos}$$

Idade desde o nascimento $2017 - y$ até 2018:

$$1 + y \text{ anos}$$

Igualando as idades:

$$8 - y = 1 + y$$
$$2y = 7$$
$$y = 3{,}5$$

y deve ser um número inteiro, então, seu irmão nasceu antes de 2010. Vamos supor que ele tenha nascido em $2009 - y$:

Para $y \in [0; 9]$ e $y \in \mathbb{N}$:

Soma dos algarismos:

$$0 + 0 + 9 - y = 9 - y$$

Idade até 2018:

$$9 + y$$

Igualando as idades, vemos que $y = 0$ e, assim, seu irmão nasceu em 2009 e tem 9 anos.

Portanto, a soma da idade deles é:

$$\boxed{23 + 9 = 32}$$

*Observações: A resolução deste exercício está longa apenas para que você entenda o raciocínio. Na hora da prova, bastaria que você encontrasse um ano que satisfizesse as condições do problema (soma dos três últimos algarismos do ano de nascimento = idade até o ano de 2018).

Gabarito: "d".

25. (IME/2018)

Se X e Y são números naturais tais que $X^2 - Y^2 = 2017$, o valor de $X^2 + Y^2$ é:

a) 2008010

b) 2012061

c) 2034145

d) 2044145

e) 2052061

Comentários

Do enunciado, temos:

$$X^2 - Y^2 = 2017$$

Vamos fatorar a equação:

$$(X - Y)(X + Y) = 2017$$

Analisando o número 2017, podemos perceber que ele é um número primo. Então, ele é divisível por 1 e por ele mesmo. Vamos analisar o produto $(X - Y)(X + Y)$:

$$X, Y \in \mathbb{N} \Rightarrow X - Y < X + Y$$

A expressão $(X - Y)(X + Y)$ é um produto de fatores naturais e como 2017 é primo, podemos afirmar que esse produto possuirá a forma:

$$(X - Y)(X + Y) = 1 \cdot 2017$$

Então, podemos escrever:

$$X - Y = 1$$
$$X + Y = 2017$$

Somando as duas equações, encontramos X:

$$2X = 2018 \Rightarrow X = 1009$$

E Y:

$$X - Y = 1 \Rightarrow Y = X - 1 \Rightarrow Y = 1008$$

Com os valores de X e Y, vamos encontrar o valor da expressão pedida:

$$X^2 + Y^2 = 1009^2 + 1008^2 = 1018081 + 1016064 = 2034145$$
$$\therefore X^2 + Y^2 = 2034145$$

Gabarito: "c".

26. (IME/2018)

Determine todos os números primos p, q e r tais que $35p + 11pq + qr = pqr$.

Comentários

Considerando $p, q, r \in \mathbb{N}$.

A questão nos dá uma equação e pede para encontrar 3 variáveis. Vamos tentar encontrar alguma relação com a equação dada:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

Perceba a presença do número p na equação:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

Vamos dividir a equação por p:

$$\frac{35p + 11pq + qr}{p} = \frac{pqr}{p}$$

$$35 + 11q + \frac{qr}{p} = qr$$

$$\frac{qr}{p} = qr - 35 - 11q$$

O enunciado pede para encontrar p, q, r primos. Analisando a expressão $qr - 35 - 11q$, vemos que se trata de um número inteiro. Desse modo, podemos afirmar que $\frac{qr}{p}$ também deve ser inteiro. Assim:

$$p|qr$$

p deve dividir qr

Sendo todos primos, temos apenas duas possibilidades:

1) $p = q$

2) $p = r$

Vamos testar as possibilidades:

1) $p = q$:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$

$$35q + 11q^2 + qr = q^2r$$

$$q(35 + 11q + r) = q(qr)$$

$q \neq 0$, pois q é primo.

$$35 + 11q + r = qr$$

$$r + 35 = qr - 11q$$

$$r + 35 = q(r - 11)$$

Dessa equação, temos 2 possibilidades:

*Ainda não vimos como resolver equações racionais, veremos na aula de funções racionais. Por enquanto saiba que antes de isolar q, devemos considerar a possibilidade de $r - 11$ ser zero.

$$r - 11 = 0$$

Ou

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$

Se $r - 11 = 0$:

$$r = 11$$

Para a equação ser verdadeira, $q(r - 11) = r + 35 = 0$:

$$r = -35 \neq 11$$

Desse modo $r \neq 11$:

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$

$$q = \frac{r - 11 + 46}{r - 11} = 1 + \frac{46}{r - 11}$$

$q\ primo \Rightarrow r - 11$ divide 46

Como q é primo natural, $\frac{46}{r-11}$ deve ser positivo (caso contrário, $1 + \frac{46}{r-11}$ seria negativo).

Assim, $r - 11$ é positivo e deve pertencer ao conjunto de divisores de 46:

$$r - 11 \in \{1, 2, 23, 46\}$$

Possibilidades:

$$r - 11 = 1 \Leftrightarrow r = 12\ não\ é\ primo$$

$$r - 11 = 2 \Leftrightarrow r = 13 \text{ é } primo$$
$$r - 11 = 23 \Leftrightarrow r = 34 \text{ não é } primo$$
$$r - 11 = 46 \Leftrightarrow r = 57 \text{ não é } primo$$

Assim, a única possibilidade é $r = 13$. Substituindo na equação abaixo:

$$q = \frac{r + 35}{r - 11}$$
$$q = \frac{13 + 35}{13 - 11} = \frac{48}{2} = 24 \text{ não é } primo$$

Portanto, não temos solução para o caro $p = q$. Vamos tentar a outra possibilidade.

2) $p = r$:

$$35p + 11pq + qr = pqr$$
$$35r + 11qr + qr = qr^2$$
$$r(35 + 12q) = (qr)r$$

$r \neq 0$, pois r é primo.

$$qr = 35 + 12q$$
$$q = \frac{35}{r - 12}$$
$$r - 12 | 35$$
$$r - 12 \in \{1, 5, 7, 35\}$$
$$r - 12 = 1 \Leftrightarrow r = 13 \text{ é } primo$$
$$r - 12 = 5 \Leftrightarrow r = 17 \text{ é } primo$$
$$r - 12 = 7 \Leftrightarrow r = 19 \text{ é } primo$$
$$r - 12 = 35 \Leftrightarrow r = 47 \text{ é } primo$$

Testando os valores:

$$r = 13 \Rightarrow q = \frac{35}{1} = 35 \text{ não é } primo$$
$$r = 17 \Rightarrow q = \frac{35}{5} = 7 \text{ é } primo$$
$$r = 19 \Leftrightarrow q = \frac{35}{7} = 5 \text{ é } primo$$
$$r = 47 \Leftrightarrow q = \frac{35}{35} = 1 \text{ não é } primo$$

Portanto, encontramos 2 soluções:

$$(p, q, r) = (17, 7, 17)$$

e

$$(p, q, r) = (19, 5, 19)$$

Gabarito: $(p, q, r) = (17, 7, 17)$ e $(p, q, r) = (19, 5, 19)$

---

27. (IME/2018)

A soma dos algarismos de X com a soma dos quadrados dos algarismos de X é igual a X. Sabe-se que X é um número natural positivo. O menor X possível está no intervalo:

a) $(0, 25]$
b) $(25, 50]$
c) $(50, 75]$
d) $(75, 100]$
e) $(100, 125]$

Comentários

Sendo $X \in \mathbb{N}_+$, podemos escrever:

$$X = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$$
$$a_i \in [0, 9], i \in [0, n]$$

Do enunciado:

$$X = a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2$$

Escrevendo X em função das potências decimais:

$$X = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1} + a_n 10^n$$

Igualando as duas expressões de X:

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n + a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2 + a_n^2 =$$
$$a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_{n-1} 10^{n-1} + a_n 10^n$$

Vamos juntar e fatorar cada algarismo de X:

$$(a_0 + a_0^2 - a_0 10^0) + (a_1 + a_1^2 - a_1 10^1) + \cdots + (a_{n-1} + a_{n-1}^2 - a_{n-1} 10^{n-1}) + (a_n + a_n^2 - a_n 10^n)$$
$$= 0$$

$$a_0(1 + a_0 - 10^0) + a_1(1 + a_1 - 10^1) + \cdots + a_{n-1}(1 + a_{n-1} - 10^{n-1}) + a_n(1 + a_n - 10^n) = 0$$

Dessa forma, encontramos as seguintes possibilidades:

$$a_0 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_0 - 10^0 = 0 \Rightarrow a_0 = 0$$
$$a_1 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_1 - 10^1 = 0 \Rightarrow a_1 = 9$$
$$a_2 = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_2 - 10^2 = 0 \Rightarrow a_2 = 99 \text{ (não convém)}$$
$$\vdots$$
$$a_{n-1} = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_{n-1} - 10^{n-1} = 0 \Rightarrow a_{n-1} = 10^{n-1} - 1 \text{ (não convém)}$$
$$a_n = 0$$
$$ou$$
$$1 + a_n - 10^n = 0 \Rightarrow a_n = 10^n - 1 \text{ (não convém)}$$

Se $X \in \mathbb{N}_+, X \neq 0$, a solução de X é:

$$a_1 = 9$$
$$a_0, a_2, a_3, \ldots, a_n \in \{0\}$$
$$\Rightarrow X = a_1 10 = 90$$
$$X \in (75,100]$$

Gabarito: "d".

---

28. (IME/2018)

Seja x um número natural maior que 2. Se a representação de um numeral N na base x é 1041 e na base $x - 1$ é 1431, então a sua representação na base binária é:

a) 10001111
b) 11011011
c) 11100111
d) 11011110
e) 11110001

Comentários

Lembrando do capítulo de mudança de base:

Um número na base b pode ser escrito no sistema decimal da seguinte forma:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

Do enunciado:

$$N_x = 1041$$
$$N_{x-1} = 1431$$

Vamos representar N no sistema decimal.

De N_x:

$$N = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 4 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 = x^3 + 4x + 1$$

De N_{x-1}:

$$N = 1 \cdot (x-1)^3 + 4 \cdot (x-1)^2 + 3 \cdot (x-1)^1 + 1 \cdot (x-1)^0 =$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 4(x^2 - 2x + 1) + 3(x - 1) + 1 =$$
$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 4x^2 - 8x + 4 + 3x - 3 + 1 =$$
$$x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Igualando as duas expressões, obtemos:

$$x^3 + 4x + 1 = x^3 + x^2 - 2x + 1$$
$$\Rightarrow x^2 - 6x = 0$$
$$\Rightarrow x(x-6) = 0$$
$$x = 0 \; ou \; x = 6$$

Como $x \in \mathbb{N}$ e $x > 2$:

$$x = 6$$

Vamos encontrar o valor decimal de N:

$$N = x^3 + 4x + 1 = 6^3 + 4 \cdot 6 + 1 = 216 + 24 + 1 = 241$$

Para transformar N em binário, podemos dividi-lo por 2 sucessivamente ou escrevê-lo em função das potências de 2 (já que os algarismos só podem assumir os valores 1 ou 0).

Por divisão sucessiva:

241	2							
1	120	2						
	0	60	2					
		0	30	2				
			0	15	2			
				1	7	2		
					1	3	2	
						1	1	2
							1	0

$$N_2 = 11110001$$

Para escrever em função das potências de 2, podemos analisar da seguinte forma:

Vemos a maior potência que é menor ou igual ao número:

$$2^7 = 128 < 241$$

Subtraímos 1 do expoente da potência de 2 e somamos à potência acima:

$$2^6 = 64 \Rightarrow 2^7 + 2^6 = 128 + 64 = 192 < 241$$

Como o resultado continua menor que o número, seguimos somando as potências de 2 até formar o número dado:

$$2^7 + 2^6 + 2^5 = 192 + 32 = 224 < 241$$
$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 = 224 + 16 = 240 < 241$$
$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^3 = 240 + 8 = 248 > 241$$

Agora, a soma resultou em um número maior que 241. Devemos passar para a próxima potência e ir tentando até formar o número.

Perceba que falta apenas 1 no número, assim:

$$2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^0 = 241$$

Escrevendo 241 em função de todas as potências de 2, temos:

$$241 = 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$$
$$\Rightarrow 241 = (11110001)_2$$

Esse método se baseia na tentativa e erro. Funciona bem para os binários, já que os algarismos apenas assumem os valores 1 ou 0.

Gabarito: "e".

29. (IME/2015)

Quantos restos diferentes são possíveis da divisão de n^2 por 11, sendo n um número natural?

a) 3
b) 4
c) 5
d) 6
e) 7

Comentários

Vamos usar congruência.

$$n \equiv r \ (mod\ 11)$$

r é o resto da divisão de n por 11.

$$r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Usando a propriedade da potência, temos:

$$n^2 \equiv r^2 \ (mod\ 11)$$

Encontrando os restos:

$r = 0$:

$$n^2 \equiv 0^2 = 0 \ (mod\ 11)$$

$$r = 1:$$

$$n^2 \equiv 1^2 = 1 \ (mod\ 11)$$

$$r = 2:$$

$$n^2 \equiv 2^2 = 4 \ (mod\ 11)$$

$$r = 3:$$

$$n^2 \equiv 3^2 = 9 \ (mod\ 11)$$

$$r = 4:$$

$$n^2 \equiv 4^2 = 16 \ (mod\ 11)$$

$$16 \equiv 5 \ (mod\ 11)$$

$$r = 5:$$

$$n^2 \equiv 5^2 = 25 \ (mod\ 11)$$

$$25 \equiv 3 \ (mod\ 11)$$

$$r = 6:$$

$$n^2 \equiv 6^2 = 36 \ (mod\ 11)$$

$$36 \equiv 3 \ (mod\ 11)$$

$$r = 7:$$

$$n^2 \equiv 7^2 = 49 \ (mod\ 11)$$

$$49 \equiv 5 \ (mod\ 11)$$

$$r = 8:$$

$$n^2 \equiv 8^2 = 64 \ (mod\ 11)$$

$$64 \equiv 9 \ (mod\ 11)$$

$$r = 9:$$

$$n^2 \equiv 9^2 = 81 \ (mod\ 11)$$

$$81 \equiv 4 \ (mod\ 11)$$

$$r = 10:$$

$$n^2 \equiv 10^2 = 100 \ (mod\ 11)$$

$$100 \equiv 1 \ (mod\ 11)$$

Os diferentes valores de resto são: $0, 1, 4, 9, 5, 3$.

Gabarito: "d".

30. (IME/2002)

Sejam x, y e z números reais positivos. Prove que: $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$.

Comentários

Para analisar essa desigualdade, devemos considerar a seguinte fatoração:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

Note que podemos reescrever a expressão à direita desse modo:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot \frac{2}{2} \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c) \cdot \frac{1}{2} \cdot (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a + b + c)}{2}((a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2))$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{(a + b + c)}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2)$$

Nessa questão, temos $a = \sqrt[3]{x}$, $b = \sqrt[3]{y}$ e $c = \sqrt[3]{z}$. Substituindo na equação acima:

$$x + y + z - 3\sqrt[3]{xyz} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{2}\left(\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}\right)^2\right)$$

Então:

$$\boxed{\frac{x + y + z}{3} - \sqrt[3]{xyz} = \frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{6}\left(\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}\right)^2\right) \ (I)}$$

Podemos observar que:

$$\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{6} > 0$$

Pois x, y e z são números reais positivos, além disso:

$$\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}\right)^2 \geq 0$$

Pois o menor valor possível para uma soma de quadrados é 0 e, nesse caso, ela ocorre quando $x = y = z$. Portanto:

$$\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z}}{6}\left(\left(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{z} - \sqrt[3]{x}\right)^2\right) \geq 0$$

Assim, substituindo (I) na desigualdade acima:

$$\frac{x + y + z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \geq 0$$

$$\therefore \boxed{\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}}$$

Como queríamos demonstrar.

Gabarito: Demonstração

31. (IME/2001)

Provar que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo das unidades.

Comentários

Vamos provar primeiramente para os naturais.

Seja $x, a \in \mathbb{N}$ e $a \in [0, 9]$. $\forall x \in \mathbb{N}$, temos:

$$k = \pm(10x + a)$$

Perceba que $10x$ é a parte do número sem o algarismo das unidades e a é o algarismo das unidades.

$\forall k \in \mathbb{Z}$, temos:

$$k^5 = [\pm(10x + a)]^5 = \pm[(10x)^5 + 5(10x)^4 + 10(10x)^3a^2 + 10(10x)^2a^3 + 5(10x)a^4 + a^5]$$

*Essa expressão poderia ser encontrada desenvolvendo a potência e simplificando ou usando diretamente o Binômio de Newton (muito útil para calcular expressões da forma $(x+y)^n$). Estudaremos esse método na aula de Análise Combinatória.

$$k^5 = \pm[10(10^4x^5 + 5 \cdot 10^3x^4 + 10 \cdot 10^2x^3a^2 + 10 \cdot 10x^2a^3 + 5xa^4) + a^5]$$

Vamos escrever $y = (10^4x^5 + 5 \cdot 10^3x^4 + 10 \cdot 10^2x^3a^2 + 10 \cdot 10x^2a^3 + 5xa^4) \in \mathbb{N}$:

$$\Rightarrow k^5 = \pm(10y + a^5)$$

Dessa forma, precisamos analisar se a^5 possui o mesmo algarismo das unidades de a.

Devemos provar para cada caso de $a \in [0,9]$. Usando congruência:

$$a = 0 \Rightarrow a^5 = 0^5 = 0 \equiv 0(mod\ 10)$$
$$a = 1 \Rightarrow a^5 = 1^5 = 1 \equiv 1(mod\ 10)$$
$$a = 2 \Rightarrow a^5 = 2^5 = 32 \equiv 2(mod\ 10)$$
$$a = 3 \Rightarrow a^5 = 3^5 = 243 \equiv 3(mod\ 10)$$
$$a = 4 \Rightarrow a^5 = 4^5 = 1024 \equiv 4(mod\ 10)$$
$$a = 5 \Rightarrow a^5 = 5^5 = 3125 \equiv 5(mod\ 10)$$
$$a = 6 \Rightarrow a^5 = 6^5 = 7776 \equiv 6(mod\ 10)$$
$$a = 7 \Rightarrow a^5 = 7^5 = 16807 \equiv 7(mod\ 10)$$
$$a = 8 \Rightarrow a^5 = 8^5 = 32768 \equiv 8(mod\ 10)$$
$$a = 9 \Rightarrow a^5 = 9^5 = 59049 \equiv 9(mod\ 10)$$

Assim, $\forall k \in \mathbb{Z}$, k e k^5 possuem o mesmo algarismo das unidades.

Outra solução:

$\forall k \in \mathbb{Z}$, se k e k^5 tem o mesmo algarismo das unidades, podemos escrever:

$$k = 10x + a$$
$$k^5 = 10y + a$$
$$a \in [0,9]$$

A diferença entre eles é dada por:

$$k^5 - k = 10(y - x)$$

Então, se ambos tem o mesmo algarismo das unidades, devemos provar que a diferença $k^5 - k$ é um múltiplo de 10. Para isso, basta provar que essa diferença é um múltiplo de 2 e de 5, simultaneamente.

Vamos fatorar a diferença:

$$k^5 - k = k(k^4 - 1) = k(k^2 + 1)(k^2 - 1) = k(k^2 + 1)(k + 1)(k - 1)$$
$$\Rightarrow (k^2 + 1)(k - 1)k(k + 1)$$

Note a presença de números consecutivos:

$$(k^2 + 1)(k - 1)k(k + 1)$$

Sendo $k \in \mathbb{Z}$, entre esses números consecutivos, um deles será par. Logo, essa expressão é um múltiplo de 2.

Para provar a multiplicidade por 5, podemos usar o Corolário do Teorema de Fermat:

$$a^p \equiv a\ (mod\ p)$$

Perceba que 5 é um número primo. Podemos escrever:

$$k^5 \equiv k\ (mod\ 5)$$

Dessa forma:

$$k^5 - k \equiv 0\ (mod\ 5)$$
$$\Rightarrow k^5 - k \text{ é múltiplo de } 5$$
$$\therefore k^5 - k \text{ é par e múltiplo de } 5 \Rightarrow \text{ele é múltiplo de } 10$$

Gabarito: Demonstração.

32. (IME/2021)

Considere que $\boldsymbol{a \neq 0}$, $\boldsymbol{b \neq 0}$ e $\boldsymbol{(a+b) \neq 0}$. Sabendo-se que $\boldsymbol{\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 3}$, determine o valor de $\boldsymbol{\frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2}}$.

a) 0,1

b) 0,3

c) 0,6

d) 0,8

e) 1,0

Comentários

Da equação dada, temos:

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = 3 \Rightarrow a^2 + b^2 = 3ab \ (I)$$

Da expressão:

$$X = \frac{a^2+b^2}{2(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{2(a^2+b^2+2ab)}$$

Usando a relação I:

$$X = \frac{3ab}{2(3ab+2ab)} = \frac{3ab}{10ab}$$

Como $ab \neq 0$, temos:

$$X = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

Gabarito: B