Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Nesta aula, estudaremos Probabilidades. Para nos aprofundarmos nele, é essencial que você tenha aprendido bem a aula de Análise Combinatória, pois esta será utilizada para calcular a probabilidade pedida nas questões. Tente entender o raciocínio utilizado durante a resolução das questões. Desse modo, você ganhará autonomia para resolver questões inéditas. Se você for um aluno que já possui experiência nesse tema, apenas dê uma rápida olhada na teoria e vá para a lista de exercícios. Lembre-se, o melhor jeito de estudar Matemática é praticando!

E sempre que tiver dúvidas, não hesite em nos procurar no fórum de dúvidas, estamos aqui para auxiliá-lo.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Experiência

Chamemos de experiência, ou experimento, uma ocorrência que produza um resultado observável.

Algumas experiências produzem, sob as mesmas condições, sempre os mesmos resultados, por exemplo, abandonar uma bola de bilhar sob a ação da gravidade gera uma colisão previsível contra o solo algum tempo depois. Soltar a bola de bilhar várias e várias vezes produz colisões de características muito semelhantes, quando não, idênticas. Esse tipo de experiência recebe o nome de experiência determinística.

Já outras experiências produzem, mesmo que sob as mesmas condições, resultados imprevisíveis. A essas, chamamos experiências aleatórias.

São exemplos de experiências aleatórias: jogar uma moeda, um dado, escolher aleatoriamente uma carta em um baralho, um sorteio de loteria, a segregação independente de cromossomos homólogos e até o movimento de partículas suspensas em um fluido (movimento browniano).

Experiência

Determinística | Aleatória

Quando estamos em uma experiência aleatória, a diferença de resultados se dá por motivos que não podemos controlar, seja por falta de conhecimento das condições iniciais, seja pela própria natureza do acontecimento. Esses motivos são denominados de acaso.

2. Espaço Amostral

Ainda que não consigamos determinar qual será o resultado de uma experiência aleatória, em geral conseguimos determinar, pelo menos, a coleção de todos os resultados possíveis para a experiência.

Essa coleção forma um conjunto chamado Espaço Amostral, simbolizado pela letra grega ômega (Ω).

Vejamos alguns exemplos.

Ao lançar um dado de seis faces numeradas, temos como espaço amostral o conjunto

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Ao lançar uma moeda e observar a face voltada para cima,

$$\Omega = \{Cara\ (K), Coroa\ (C)\}.$$

Lançar uma moeda duas vezes consecutivas e observar a face voltada para cima em cada lançamento,

$$\Omega = \{(K,K);(K,C);(C,K);(C,C)\}.$$

Escolher uma das letras da palavra $ADREDE$.

$$\Omega = \{A, D, R, E\}.$$

Lançar um dado de seis faces numeradas até que apareça o número 6 e anotar o número do lançamento.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\ldots\}.$$

Cada um desses espaços amostrais Ω possui um número de elementos, simbolizado por $n(\Omega)$ ou, em alguns livros, por $\#\Omega$. Daremos preferência, neste curso, à primeira notação.

Assim,

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \rightarrow n(\Omega) = 6$$
$$\Omega = \{Cara\ (K), Coroa\ (C)\} \rightarrow n(\Omega) = 2$$
$$\Omega = \{(K,K);(K,C);(C,K);(C,C)\} \rightarrow n(\Omega) = 4$$
$$\Omega = \{A, D, R, E\} \rightarrow n(\Omega) = 4$$
$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\ldots\} \rightarrow n(\Omega) = \infty$$

Você deve ter percebido que podemos ter tanto espaços amostrais finitos, com um número finito de elementos; quanto espaços amostrais infinitos, com um número infinito de elementos.

3. Evento

Chamamos de evento todo subconjunto de um espaço amostral.

Vejamos na prática.

A experiência de lançar um dado de 4 faces produz o seguinte espaço amostral:

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$

O número de elementos desse espaço amostral é

$$n(\Omega) = 4$$

E quantos subconjuntos podemos produzir com esses 4 elementos?

Um conjunto com n elementos produz 2^n subconjuntos, ou seja, nosso conjunto tem $2^4 = 16$ subconjuntos.

Vamos explicitá-los.

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$
$$n(\Omega) = 4$$
$$Número\ de\ eventos = 2^4 = 16$$
$$Eventos = \{\emptyset; (1); (2); (3); (4); (1,2); (1,3); (1,4); (2,3); (2,4);$$
$$(3,4); (1,2,3); (1,2,4); (1,3,4); (2,3,4); (1,2,3,4)\}$$

$\emptyset \rightarrow$ faz referência a um evento impossível de ocorrer dentro desse espaço amostral, como retirar o número 7.

$(1,2,3,4) \rightarrow$ é o próprio espaço amostral, chamado também de evento certo.

$$\left.\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\\(4)\end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Eventos com apenas um elemento, chamados de eventos elementares.}$$

3.1. União de eventos

A União de eventos $A \cup B$ é a consideração de dois ou mais eventos como se fossem um só. O evento $A \cup B$ será considerado como ocorrido se ocorrer A, se ocorrer B ou se ocorrer ambos, ou seja, se ocorrer pelo menos um deles.

Vejamos um exemplo prático.
Voltando ao dado de 4 faces, temos o seguinte espaço amostral.

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$

E consideremos os seguintes eventos:

$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3\}$$
$$B \rightarrow sair\ um\ número\ par \rightarrow \{2,4\}$$
$$A \cup B \rightarrow sair\ um\ número\ par\ OU\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,4\}$$

Ao jogar o dado, temos as seguintes possibilidades:

Número no dado	Evento A	Evento B	Evento $A \cup B$
1	não ocorrido	não ocorrido	não ocorrido
2	ocorrido	ocorrido	ocorrido
3	ocorrido	não ocorrido	ocorrido
4	não ocorrido	ocorrido	ocorrido

3.2. Intersecção de eventos

A intersecção de eventos, $A \cap B$, é considerada quando ocorrem A e B de forma simultânea. Para que ocorra $A \cap B$, é necessário que ocorra A E que ocorra B.

Comparemos a intersecção de eventos com a união, vista no tópico anterior.

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$
$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3\}$$
$$B \rightarrow sair\ um\ número\ par \rightarrow \{2,4\}$$
$$A \cup B \rightarrow sair\ um\ número\ par\ OU\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,4\}$$
$$A \cap B \rightarrow sair\ um\ número\ par\ E\ um\ número\ primo \rightarrow \{2\}$$

Ao jogar o dado, temos as seguintes possibilidades:

Número no dado	Evento A	Evento B	Evento $A \cup B$	Evento $A \cap B$
1	não ocorrido	não ocorrido	não ocorrido	não ocorrido
2	ocorrido	ocorrido	ocorrido	ocorrido
3	ocorrido	não ocorrido	ocorrido	não ocorrido
4	não ocorrido	ocorrido	ocorrido	não ocorrido

3.3. Eventos Complementares

Dado o evento A, existe o evento oposto de A, que ocorre somente se o evento A não ocorre.
Simbolizamos esse evento, oposto de A, $-A$, A^c, ou ainda, $\bar{A}$.
No espaço amostral

$$\Omega = \{1,2,3,4\},$$

Consideremos os conjuntos

$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3\}$$

$$B \rightarrow sair\ um\ número\ par \rightarrow \{2,4\}$$
$$A \cup B \rightarrow sair\ um\ número\ par\ OU\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,4\}$$
$$A \cap B \rightarrow sair\ um\ número\ par\ E\ um\ número\ primo \rightarrow \{2\}$$

Dessa forma, podemos definir os seguintes conjuntos complementares:

Conjunto	Elementos	Complementar
A	$\{2,3\}$	$A^c \rightarrow \{1,4\}$
B	$\{2,4\}$	$B^c \rightarrow \{1,3\}$
$A \cup B$	$\{2,3,4\}$	$(A \cup B)^c \rightarrow \{1\}$
$A \cap B$	$\{2\}$	$(A \cap B)^c \rightarrow \{1,3,4\}$

4. Frequências absoluta e relativa

Vamos realizar uma experiência aleatória algumas vezes e analisar os resultados.

Como exemplo, jogaremos um dado de 6 faces, digamos, 60 vezes.

Sim, eu realmente estou fazendo a experiência para expor os resultados aqui para você.

Nos 50 lançamentos, os resultados que obtive, na ordem de lançamento, foram:

$$\{5\ 1\ 2\ 3\ 6\ 4\ 3\ 5\ 3\ 6\ 5\ 1\ 1\ 6\ 3\ 3\ 4\ 4\ 5\ 6\ 4\ 6\ 3\ 1\ 4\ 2\ 2\ 4\ 1\ 1\ 6\ 6\ 2\ 2\ 2\ 2\ 6\ 5\ 6\ 5\}$$

Coloquemos as ocorrências observadas.

$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 1: 6$$
$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 2: 7$$
$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 3: 6$$
$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 4: 6$$
$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 5: 6$$
$$Número\ de\ ocorrências\ para\ o\ número\ 6: 9$$

Como o dado, em tese, não é viciado, é de se esperar uma distribuição aproximadamente uniforme, ou seja, aproximadamente o mesmo número de ocorrências para cada face.

Mesmo sabendo o que esperar, trata-se de um evento aleatório, então não podemos prever realmente quantos resultados teremos para cada número. Poderíamos, inclusive, ter as 40 ocorrências para o número 2 e nenhuma para os restantes, embora isso fosse extremamente inesperado.

Atenção, seria inesperado, mas não impossível.

Os números de ocorrências que escrevemos são as frequências absolutas de cada número, ou seja, o número de ocorrências observado.

A frequência relativa é a porcentagem, a razão entre a frequência absoluta e o número de lançamentos totais.

Assim, podemos dizer que as frequências relativas dos números nos lançamentos são:

$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 1: \frac{6}{40} \cong 0{,}15$$
$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 2: \frac{7}{40} \cong 0{,}175$$
$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 3: \frac{6}{40} \cong 0{,}15$$
$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 4: \frac{6}{40} \cong 0{,}15$$

$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 5: \frac{6}{40} \cong 0{,}15$$

$$Frequência\ relativa\ para\ o\ número\ 6: \frac{9}{40} \cong 0{,}225$$

Note que as frequências relativas, com alguma discrepância, são todas próximas entre si, e próximas a

$$\frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} = 16,\overline{6}\,\%.$$

Experimentalmente, podemos perceber que quanto maior o número de lançamentos, mais essas frequências relativas tendem a se estabilizar em torno de $16,\overline{6}\,\%$.

5. Probabilidades

A probabilidade de um evento ocorrer é uma tentativa de definir previamente um número que represente a tendência geral da frequência relativa de um evento, quando o repetimos um número suficientemente grande de vezes.

No caso do tópico anterior, como temos 6 números e nenhum motivo para que um ou outro se sobressaia nos lançamentos, dizemos que a probabilidade de cada um desses números é dada pela definição:

$$Probabilidade = \frac{Número\ de\ casos\ a\ que\ queremos\ atribuir\ a\ probabilidade}{Número\ de\ casos\ totais}$$

O que pode ser interpretado, também, como

$$Probabilidade = \frac{Número\ de\ elementos\ do\ evento}{Número\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral}$$

Ao analisar, por exemplo, a probabilidade de, em um lançamento desse dado, sair o número 3, ou seja, 1 número específico dentre os 6 possíveis, sua probabilidade é:

$$P(3) = \frac{1\ (o\ número\ em\ questão, 3)}{6\ (todos\ os\ casos\ possíveis)} = \frac{1}{6} = 0{,}1\overline{6} = 16,\overline{6}\,\%$$

Perceba que, com esse procedimento, podemos chegar aos $16,\overline{6}\,\%$ sem que façamos o experimento em si, e é exatamente isso que buscaremos em nosso estudo das probabilidades.

Note, também, que a soma das probabilidades de todos os elementos é igual a 1, ou seja, 100%.

Se a probabilidade de cada número de um dado é de $\frac{1}{6}$, a probabilidade de todos os 6 números, somadas, são:

$$P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \cancel{6} \cdot \frac{1}{\cancel{6}} = 1 = 100\%$$

Extrapolando o conceito para aplicarmos a qualquer conjunto, temos.

$$\Omega = \{a, b, c, d, e, \dots\}$$

$$P(\Omega) = P(a) + P(b) + P(c) + P(d) + P(e) + \cdots = 1 = 100\%$$

A probabilidade de um evento ocorrer é atribuída a cada evento de tal forma que, na experiência, tenha as mesmas características que a frequência relativa.

Essa atribuição é fruto de uma capacidade de análise, fundamentada na experiência e no "bom senso" de quem atribui, ou seja, você e eu.

O guia para atribuirmos a probabilidade de um evento é a definição que vimos:

$$Probabilidade = \frac{Número\ de\ elementos\ do\ evento}{Número\ de\ elementos\ do\ espaço\ amostral}$$

Uma redação alternativa, mas muito útil nos exercícios, é:

$$\boxed{Probabilidade = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis}}$$

Ao longo dos exemplos e exercícios, vamos refinando nossa capacidade e "bom senso" para que nossas previsões sejam cada vez mais próximas das frequências relativas reais.

Quando não temos dados suficientes para atribuir os valores desse modo, recorremos à experimentação propriamente dita para analisar a frequência relativa diretamente. Isso é muito comum em laboratórios.

5.1. Espaço amostral Equiprovável

Chamamos de espaço amostral equiprovável o espaço amostral em que todos os seus elementos apresentam a mesma probabilidade de ocorrência.

Como exemplos, podemos citar o lançamento de uma moeda, de um dado, retirar uma carta de um baralho, escolher um elemento de um conjunto de forma aleatória, entre tantos outros. Uma observação é para que não haja vícios nos elementos de forma que altere suas probabilidades.

5.2. Espaço amostral Não Equiprovável

Havendo vício de alguma forma, deformamos o espaço amostral de forma que cada elemento pode apresentar uma probabilidade distinta.

Como exemplo, podemos ter o mesmo lançamento de uma moeda ou de um dado, mas em que haja um acerto de forma que um resultado seja mais provável que outro.

Além desses, imagine que você está viajando no centro de Tóquio. Você escolhe uma pessoa de forma aleatória e a aborda. Qual a probabilidade de que ela seja de nacionalidade japonesa? E de nacionalidade brasileira? Holandesa?

Mesmo não sabendo os números populacionais daquela região, é de se supor que os conjuntos (japoneses, brasileiros e holandeses) não sejam do mesmo tamanho, portanto, a probabilidade de encontrarmos cada uma dessas ocorrências não é a mesma. É muito mais provável que abordemos um japonês, não é mesmo?

5.3. Evento certo

O evento certo acontece quando o evento é o próprio espaço amostral, o que implica probabilidade igual a 1, ou seja, 100%.

Por exemplo podemos pensar em jogar um dado de 6 faces, numerados de 1 a 6 e esperarmos um resultado menor que 20. Como temos todos 6 resultados que nos servem em 6 possíveis, podemos calcular

$$P(x < 20) = \frac{6}{6} = 1 = 100\% \rightarrow evento\ certo$$

5.4. Evento impossível

Já o evento impossível é um evento cujo elemento não está presente no espaço amostral, implicando probabilidade zero.

Utilizando um exemplo semelhante ao anterior, podemos dizer que a probabilidade de conseguirmos um número maior que 20, no lançamento do dado de 6 faces, é nula, pois não há elementos do conjunto que satisfaçam a condição solicitada.

$$P(x > 20) = \frac{0}{6} = 0 = 0\% \rightarrow evento\ impossível$$

6. Associação de probabilidades

6.1. Probabilidade da intersecção

Já estudamos o que é o conjunto intersecção. Estudemos, agora, a probabilidade de ocorrência de $A \cap B$ dentro do espaço amostral.

Voltemos ao lançamento de um dado de 6 faces, produzindo o espaço amostral

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Nesse espaço amostral, definamos os seguintes eventos:

$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,5\}$$
$$B \rightarrow sair\ um\ número\ menor\ ou\ igual\ a\ 2 \rightarrow \{1,2\}$$
$$A \cap B \rightarrow sair\ um\ número\ primo\ E\ um\ número\ menor\ ou\ igual\ a\ 2 \rightarrow \{2\}$$

Desse modo, podemos aplicar diretamente nossa definição de probabilidade ao conjunto $A \cap B$, ou seja:

$$Probabilidade = \frac{Número\ de\ casos\ favoráveis}{Número\ de\ casos\ possíveis}$$

$$P(A \cap B) = \frac{nº\ de\ elementos\ de\ A \cap B}{nº\ de\ elementos\ de\ \Omega} = \frac{1}{6} = 0{,}1\bar{6} = 16,\bar{6}\ \%$$

Assim, para calcularmos a probabilidade da intersecção entre dois conjuntos, aplicamos, diretamente, nossa definição de probabilidade.

6.2. Probabilidade da União

Já para a união, precisamos tomar um cuidado a mais. Acompanhe o caso.

Admitamos a mesma experiência, lançar um dado de 6 faces e os eventos A e B definidos no tópico anterior.

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,5\}$$
$$B \rightarrow sair\ um\ número\ menor\ ou\ igual\ a\ 2 \rightarrow \{1,2\}$$

E suas respectivas probabilidades:

$$P(A) = \frac{nº\ de\ elementos\ de\ A}{nº\ de\ elementos\ de\ \Omega} = \frac{3}{6} = \frac{\cancel{3}}{{}^{2}\cancel{6}} = \frac{1}{2}$$
$$P(B) = \frac{nº\ de\ elementos\ de\ B}{nº\ de\ elementos\ de\ \Omega} = \frac{2}{6} = \frac{\cancel{2}}{{}^{3}\cancel{6}} = \frac{1}{3}$$

Assim, o conjunto união de A e B é definido por

$$A \cup B \rightarrow sair\ um\ número\ primo\ OU\ um\ número\ menor\ ou\ igual\ a\ 2 \rightarrow \{1,2,3,4\}$$

E qual seria a probabilidade de ocorrer $A \cup B$? Será que podemos aplicar a nossa definição de probabilidade diretamente?

Sim, podemos. Veja como fica.

$$P(A \cup B) = \frac{nº\ de\ elementos\ de\ A \cup B}{nº\ de\ elementos\ de\ \Omega} = \frac{4}{6} = \frac{{}^{2}\cancel{4}}{{}^{3}\cancel{6}} = \frac{2}{3}$$

Às vezes, é muito trabalhoso encontrar todos os elementos do conjunto intersecção. Por isso, uma alternativa interessante também é trabalhar com a associação das probabilidades $P(A)$ e $P(B)$ para calcularmos o valor de $P(A \cup B)$.

Uma ideia inicial seria simplesmente somar as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$, no entanto, isso não resultaria na probabilidade correta, veja:

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \neq P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

E qual o motivo de haver essa diferença?

Simples, um erro nosso.

Ao somar as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$, acabamos por contabilizar duas vezes o elemento 2, que é exatamente o elemento do conjunto $A \cap B$.

Para não incorrer nesse erro, podemos somar as probabilidades $P(A)$ e $P(B)$, mas precisamos retirar da soma o que contabilizamos em dobro, ou seja, $P(A \cap B)$.

Dessa forma, podemos dizer que

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$
$$P(A \cup B) = \frac{2}{3}$$

Produzindo um resultado ao encontro do que obtivemos quando calculamos por meio da definição.

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

6.3. Probabilidade do Complementar

Tomemos os conjuntos:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$A \rightarrow sair\ um\ número\ maior\ ou\ igual\ a\ 5 \rightarrow \{5,6\}$$
$$A^c \rightarrow \{1,2,3,4\}$$

Dessa forma, temos que

$$A \cup A^c = \Omega$$

Então apliquemos a probabilidade a ambos os membros da equação. Lembra-se dos fundamentos? Toda operação que for aplicada a um membro da equação, deverá ser aplicada ao outro membro a fim de manter a igualdade.

$$A \cup A^c = \Omega$$

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega)$$

A probabilidade da união entre dois conjuntos é dada por

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Aplicando essa propriedade a $P(A \cup A^c)$, temos.

$$P(A \cup A^c) = P(\Omega)$$
$$P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) = P(\Omega)$$

Além disso, sabemos que $P(\Omega) = 1$, então

$$P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) = P(\Omega)$$
$$P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) = 1$$

Oras, por definição, o que é elemento de A não é elemento de A^c e vice-versa, já que são conjuntos complementares. Assim,

$$A \cap A^c = \emptyset$$
$$P(A \cap A^c) = P(\emptyset)$$
$$P(A \cap A^c) = 0$$

Voltemos à nossa equação.

$$P(A) + P(A^c) - P(A \cap A^c) = 1$$
$$P(A) + P(A^c) - 0 = 1$$
$$P(A) + P(A^c) = 1$$

É muito comum utilizarmos uma forma equivalente dessa equação, isolando uma das parcelas do primeiro membro.

$$P(A) + P(A^c) = 1$$
$$P(A) + P(A^c) - P(A^c) = 1 - P(A^c)$$
$$P(A) + \cancel{P(A^c)} - \cancel{P(A^c)} = 1 - P(A^c)$$
$$P(A) = 1 - P(A^c)$$

As duas formas são, naturalmente, equivalentes, e cabe a você decidir qual memorizar. Nos exercícios, pela celeridade, daremos preferência à segunda forma.

6.4. Probabilidade Condicional

Consideremos a experiência de lançar um dado de 12 faces (dodecaedro), numeradas de 1 a 12.

Nosso espaço amostral é

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$
$$n(\Omega) = 12$$

Consideremos os eventos

$$A \rightarrow sair\ um\ número\ primo \rightarrow \{2,3,5,7,11\} \rightarrow n(A) = 5$$
$$B \rightarrow sair\ um\ número\ par \rightarrow \{2,4,6,8,10,12\} \rightarrow n(B) = 6$$
$$A \cap B = \{2\} \rightarrow n(A \cap B) = 1$$

E, com eles, calculemos suas probabilidades de ocorrência dentro do espaço amostral.

$$P(A) = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ elementos\ de\ A}{n^{\underline{o}}\ de\ elementos\ de\ \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{5}{12}$$

$$P(B) = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } B}{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } \Omega} = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{6}{12}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{Número de elementos de } A \cap B}{\text{Número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{1}{12}$$

Até aqui, nada de novo.

Agora, imagine que lancemos o dado e eu não diga a você o resultado, mas diga que o resultado é um número par, ou seja, que o resultado pertence, com certeza, ao conjunto B.

Com essa nova informação, eu, então, peço a você que calcule a probabilidade de que o número da face do dado pertença a A.

Ao receber a informação de que o resultado pertence a B, a percepção sobre a experiência muda e não mais podemos considerar o espaço amostral como Ω, pois já temos certeza de que os resultados possíveis são, tão somente, os elementos que pertencem ao evento B.

Essa informação nova, dada após o evento, é o que chamamos de condição. Calcular, então, alguma probabilidade sob essa condição, torna-se uma probabilidade condicional.

A simbologia para a probabilidade condicional é

$$P(A|B) \rightarrow \text{Probabilidade de } A \text{ se } B \text{ já ocorreu}$$

Perceba que não são mais todos os elementos de A que podem ocorrer, pois, se já temos a certeza de que o resultado pertence a B, os únicos elementos de A que podem ocorrer são os que estão, simultaneamente, em A e em B, ou seja, em $A \cap B$.

Vamos, então, redefinir nossos dados.

O que era, no início, o conjunto B, passa a ser, depois de termos certeza de sua ocorrência, nosso espaço amostral Ω_2.

$$B = \Omega_2 = \{2,4,6,8,10,12\}$$

Queremos calcular a probabilidade condicional $P(A|B)$ e, nela, só os elementos que estão simultaneamente em A e em B podem ser candidatos à probabilidade, visto que os elementos que estão fora do espaço amostral são impossíveis.

Olhando para os conjuntos A e B, percebemos que somente o elemento 2 pertence a ambos, portanto, $A \cap B$ conta com somente 1 *elemento*.

Desse modo, utilizando nossa definição de probabilidade, temos.

$$P(A|B) = \frac{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } A \cap B}{n^{\underline{o}} \text{ de elementos de } B = \Omega_2}$$

$$P(A|B) = \frac{1}{6}$$

Apesar de já estarmos de posse de nossa resposta, vamos realizar mais algumas operações para evidenciar uma propriedade importante.

Dividindo o numerador e o denominador da fração do segundo membro da equação pelo número de elementos do espaço amostral inicial $n(\Omega) = 12$.

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{6}{12}}$$

Comparando com as probabilidades que já calculamos anteriormente, podemos dizer que

$$P(A|B) = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{\frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\frac{n(B)}{n(\Omega)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Desse modo, podemos calcular nossa probabilidade condicional de duas formas distintas.

1) Calcular a razão entre o número de elementos $n(A \cap B)$ e $n(B)$, considerando B como um novo espaço amostral Ω_2.

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

2) Pela fórmula

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

6.5. Teorema da multiplicação

O teorema da multiplicação, presente em alguns livros didáticos, nada mais é que a fórmula da probabilidade condicional escrita de outra forma, veja.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Multiplicando ambos os membros da equação por $P(B)$, temos.

$$P(A|B) \cdot P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \cdot P(B)$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = \frac{P(A \cap B)}{\cancel{P(B)}} \cdot \cancel{P(B)}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B)$$

Reescrevendo de modo equivalente.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

O teorema da multiplicação é muito útil, especialmente quando utilizado em conjunto com o diagrama de árvore.

Acompanhe o exemplo.

Uma fábrica de lâmpadas entregou um lote de 100 unidades. Nesse lote, sabemos que há, por um erro de processo, 3 lâmpadas defeituosas.

Ao final da linha de montagem há um fiscal que retira, sem reposição, duas lâmpadas para testes de cada lote. O lote é rejeitado se ambas as lâmpadas apresentarem defeito.

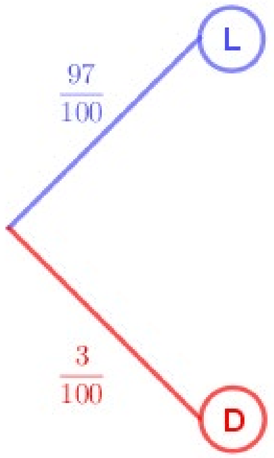
Nessas condições, qual a probabilidade de o lote em questão ser rejeitado?

Muito bem, o lote será rejeitado se ambas as lâmpadas apresentarem defeito. Como sabemos que há 3 lâmpadas defeituosas, podemos construir o diagrama de árvore para a primeira escolha. Consideremos L para a lâmpada sem defeito e D para a lâmpada defeituosa.

Colocando os dados em linguagem apropriada aos nossos cálculos.

$$L = Lâmpadas\ sem\ defeito \rightarrow n(L) = 97$$
$$D = Lâmpadas\ defeituosas \rightarrow n(D) = 3$$
$$\Omega = Total\ de\ lâmpadas \rightarrow n(\Omega) = 100$$
$$P(L) = \frac{n(L)}{n(\Omega)} = \frac{97}{100}$$
$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{3}{100}$$

Relacionando os dados ao diagrama de árvore.



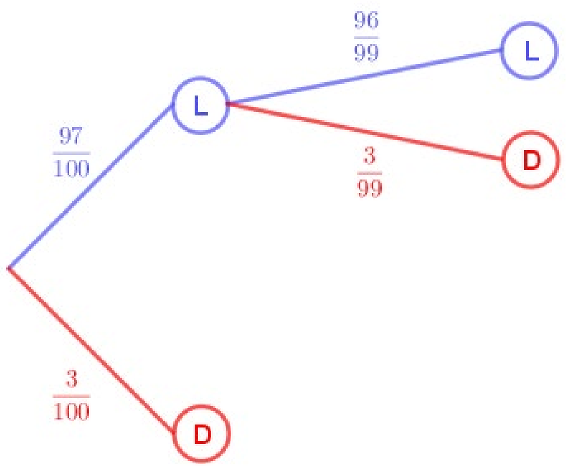
Desse ponto em diante, precisamos separar os cálculos pelos ramos seguidos.

Primeiro ramo

Para o ramo em azul, de onde retiramos uma lâmpada sem defeito na primeira retirada, teremos uma lâmpada sem defeito a menos no lote, então os novos dados passam a ser.

$$L = Lâmpadas\ sem\ defeito \rightarrow n(L) - 1 = 97 - 1 = 96$$
$$D = Lâmpadas\ defeituosas \rightarrow n(D) = 3$$
$$\Omega = Total\ de\ lâmpadas \rightarrow n(\Omega) - 1 = 100 - 1 = 99$$
$$P(L) = \frac{n(L)}{n(\Omega)} = \frac{96}{99}$$
$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{3}{99}$$

E, assim, conseguimos prosseguir com o primeiro ramo.



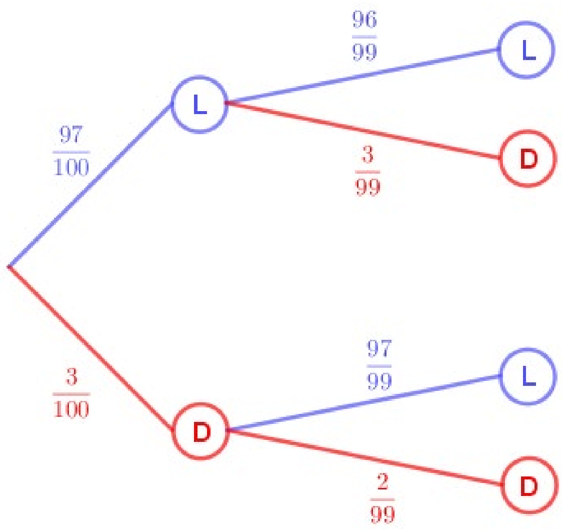
Segundo ramo

Para o ramo em vermelho, de onde retiramos uma lâmpada com defeito na primeira retirada, teremos uma lâmpada com defeito a menos no lote, então os novos dados passam a ser.

$$L = Lâmpadas\ sem\ defeito \rightarrow n(L) = 97$$
$$D = Lâmpadas\ defeituosas \rightarrow n(D) - 1 = 3 - 1 = 2$$
$$\Omega = Total\ de\ lâmpadas \rightarrow n(\Omega) - 1 = 100 - 1 = 99$$
$$P(L) = \frac{n(L)}{n(\Omega)} = \frac{97}{99}$$

$$P(D) = \frac{n(D)}{n(\Omega)} = \frac{2}{99}$$

E, assim, conseguimos prosseguir com o segundo ramo.

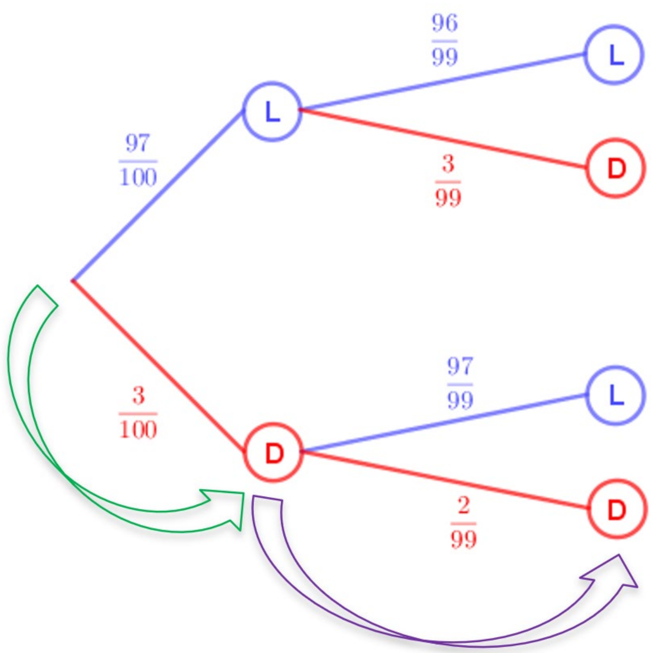


Com o diagrama feito, veja o que diz o teorema da multiplicação.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

Se considerarmos o evento B como "retirar uma lâmpada defeituosa na primeira retirada" e A como "retirar uma lâmpada defeituosa na segunda retirada", a probabilidade que estamos procurando, que acarretaria a rejeição do lote, é justamente $P(A \cap B)$.

Assim, podemos calcular a probabilidade de retirarmos duas lâmpadas defeituosas em sequência seguindo o ramo da árvore correspondente a essa escolha e multiplicando suas probabilidades, de acordo com o teorema da multiplicação.



$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{100} \cdot \frac{2}{99}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\cancel{3}}{_{50}\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{2}}{_{33}\cancel{99}}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{33}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{1.650}$$

$$P(A \cap B) = 0{,}00\overline{06}$$
$$P(A \cap B) = 0,\overline{06}\,\%$$

Assim, a probabilidade de o lote ser rejeitado por terem sido retiradas duas lâmpadas defeituosas consecutivamente é de $0,\overline{06}\,\%$.

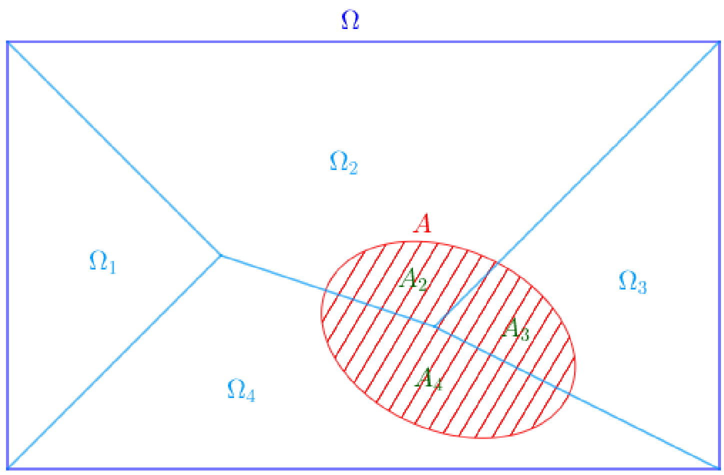
6.6. Teorema da probabilidade total

Imagine que tenhamos que calcular a probabilidade de um evento A ocorrer dentro de um espaço amostral Ω.

Esse espaço amostral Ω está dividido em conjuntos menores $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \ldots)$, e alguns desses conjuntos apresentam regiões em comum com o evento A, $(A_1, A_2, A_3, \ldots)$.

Se não for possível, ou for muito trabalhoso, calcular diretamente a probabilidade de ocorrência do evento A, podemos calcular, então, a probabilidade das partes de A ocorrerem e, ao final, somar essas probabilidades.

Pensemos no espaço amostral Ω e no evento A bem como seus subconjuntos como no diagrama a seguir.



Onde

$$A_1 = A \cap \Omega_1 = \emptyset$$
$$A_2 = A \cap \Omega_2$$
$$A_3 = A \cap \Omega_3$$
$$A_4 = A \cap \Omega_4$$

Assim, podemos pensar na probabilidade do evento A ocorrer como a soma dos subeventos A_1, A_2, A_3 e A_4 ocorrerem.

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4)$$
$$P(A) = P(A \cap \Omega_1) + P(A \cap \Omega_2) + P(A \cap \Omega_3) + P(A \cap \Omega_4)$$

Aplicando o teorema da multiplicação.

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B)$$
$$P(A) = P(\Omega_1) \cdot P(A|\Omega_1) + P(\Omega_2) \cdot P(A|\Omega_2) + P(\Omega_3) \cdot P(A|\Omega_3) + P(\Omega_4) \cdot P(A|\Omega_4)$$

Neste exemplo, temos

$$A_1 = A \cap \Omega_1 = \emptyset,$$

Então,

$$P(A) = P(\Omega_1) \cdot P(A|\Omega_1) + P(\Omega_2) \cdot P(A|\Omega_2) + P(\Omega_3) \cdot P(A|\Omega_3) + P(\Omega_4) \cdot P(A|\Omega_4)$$

$$P(A) = \emptyset + P(\Omega_2) \cdot P(A|\Omega_2) + P(\Omega_3) \cdot P(A|\Omega_3) + P(\Omega_4) \cdot P(A|\Omega_4)$$

$$P(A) = P(\Omega_2) \cdot P(A|\Omega_2) + P(\Omega_3) \cdot P(A|\Omega_3) + P(\Omega_4) \cdot P(A|\Omega_4)$$

Mas professor, assim ficou muito mais difícil!

Então, escrito assim até assusta, mas a utilização da fórmula é mais tranquila.

Vejamos um exemplo de utilização.

Um paciente se apresenta ao médico com queixas. Ao examiná-lo, o médico reduz as possibilidades de causa a somente duas doenças, A e B.

A doença A é mais endêmica e apresenta uma probabilidade de 80% de ser a causa dos sintomas do paciente.

Já a doença B apresenta uma possibilidade de apenas 20% de ser a causa dos sintomas.

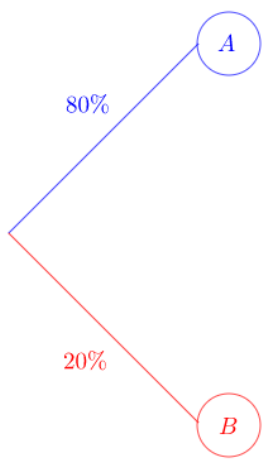
Além disso, o medicamento para o tratamento da doença A apresenta eficácia específica de 70%, enquanto o para a doença B, de 95%.

Os dois medicamentos não podem ser administrados simultaneamente, por apresentarem interação medicamentosa prejudicial ao paciente.

Nessas condições, sem saber qual a doença e qual medicamento serão escolhidos pelo médico, quais as chances de cura?

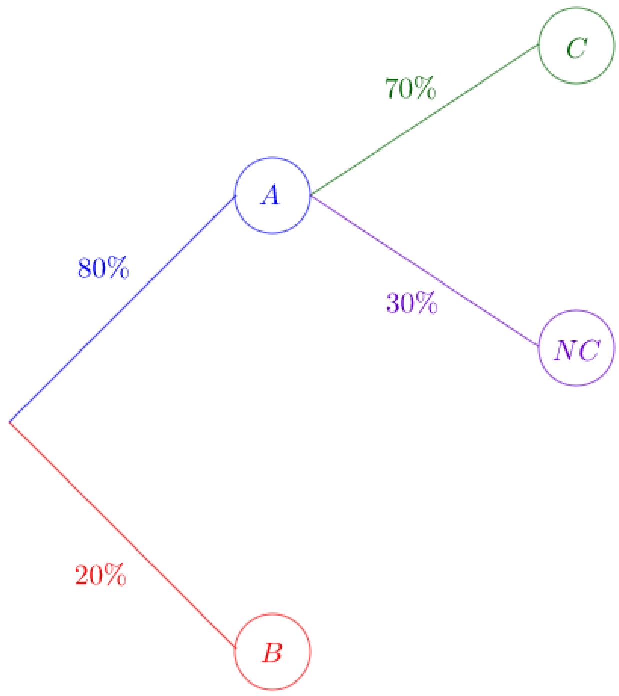
Vamos construir um diagrama de árvore para representar a situação.

Com as probabilidades de que cada doença seja a causa única dos sintomas do paciente, temos a escolha inicial.

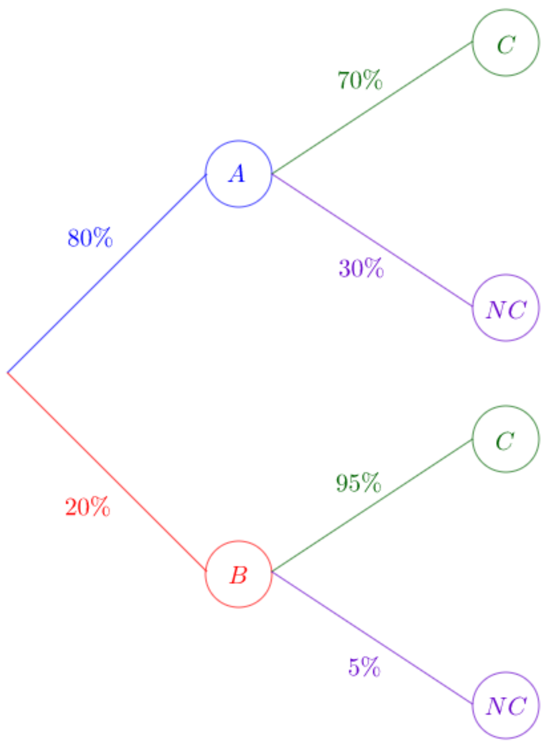


Com relação à doença A, temos que o medicamento específico apresenta 70% de eficácia específica, ou seja, há 70% de chances de cura e o complementar, ou seja, 30% de chances de não cura. Lembre-se que as porcentagens complementares devem sempre somar 100%.

Utilizemos as siglas C para curado e NC para não curado.



Com raciocínio equivalente, para a doença B, temos 95% de eficácia específica, ou seja, há 95% de chances de cura e o complementar, ou seja, 5% de chances de não cura.



Aqui vamos aplicar os dois teoremas: teorema da multiplicação e teorema da probabilidade total.

Como estamos procurando a probabilidade de cura total, vamos aplicar o teorema da multiplicação aos ramos associados à cura.

O teorema da multiplicação diz que

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B).$$

No contexto do nosso problema, podemos pensar na seguinte interpretação.

Cura da doença A

$$\boxed{P(C \cap A)} = \boxed{P(A)} \cdot \boxed{P(C|A)}$$

Cura da doença se ocorreu a doença A

Probabilidade de ocorrer a doença A

De modo semelhante, podemos pensar na probabilidade de cura da doença B, como sendo

Cura da doença B

$$\boxed{P(C \cap B)} = \boxed{P(B)} \cdot \boxed{P(C|B)}$$

Cura da doença se ocorreu a doença B

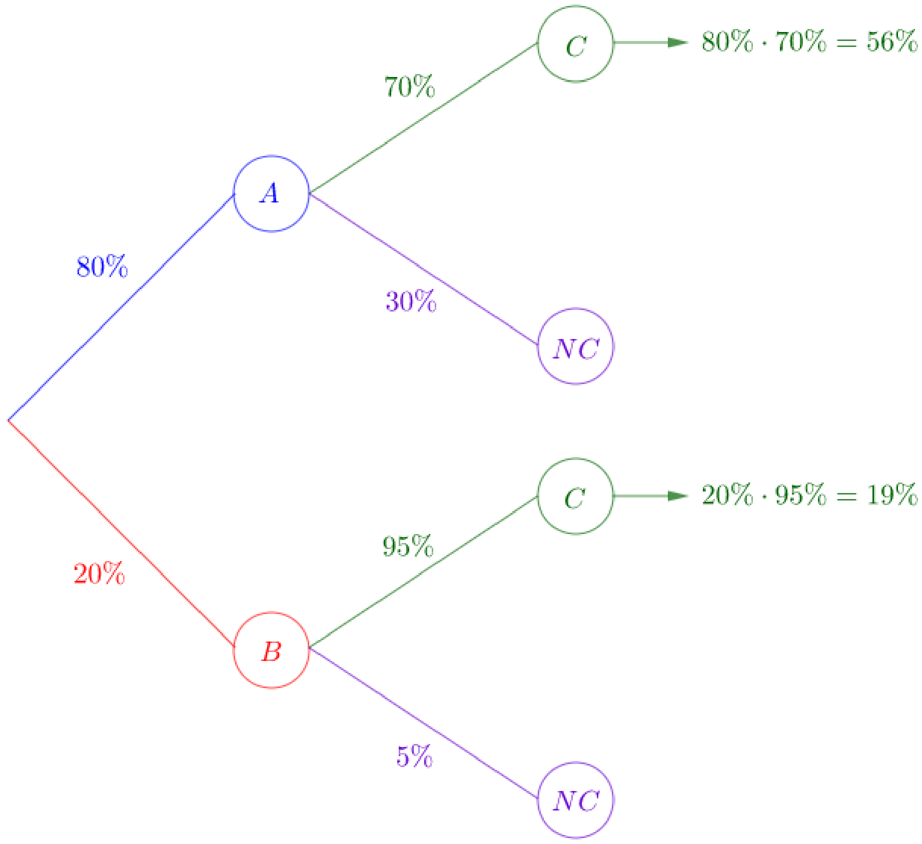
Probabilidade de ocorrer a doença B

Assim, temos as probabilidades de cura das doenças A e B dadas por:

$$P(C \cap A) = P(A) \cdot P(C|A)$$
$$P(C \cap A) = 80\% \cdot 70\%$$
$$P(C \cap A) = \frac{80}{100} \cdot \frac{70}{100}$$
$$P(C \cap A) = \frac{8\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot \frac{7\cancel{0}}{100}$$
$$P(C \cap A) = \frac{8 \cdot 7}{100}$$
$$P(C \cap A) = \frac{56}{100}$$
$$P(C \cap A) = 56\%$$

$$P(C \cap B) = P(B) \cdot P(C|B)$$
$$P(C \cap B) = 80\% \cdot 70\%$$
$$P(C \cap B) = \frac{80}{100} \cdot \frac{70}{100}$$
$$P(C \cap B) = \frac{8\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \cdot \frac{7\cancel{0}}{100}$$
$$P(C \cap B) = \frac{8 \cdot 7}{100}$$
$$P(C \cap B) = \frac{56}{100}$$
$$P(C \cap B) = 56\%$$

Vamos colocar essas probabilidades no diagrama de árvore.



Agora, apliquemos o teorema da probabilidade total para as probabilidades encontradas.

Como temos apenas dois ramos, escrevamos o teorema da probabilidade total para dois ramos.

$$P(A) = P(\Omega_1) \cdot P(A|\Omega_1) + P(\Omega_2) \cdot P(A|\Omega_2)$$

No contexto do problema, temos.

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)$$

Traduzindo.

Probabilidade de Cura Total

Probabilidade de ocorrer a doença A

$$\boxed{P(C)} = \boxed{P(A)} \cdot \boxed{P(C|A)} + \boxed{P(B)} \cdot \boxed{P(C|B)}$$

Probabilidade de Cura se ocorrer a doença B

Probabilid

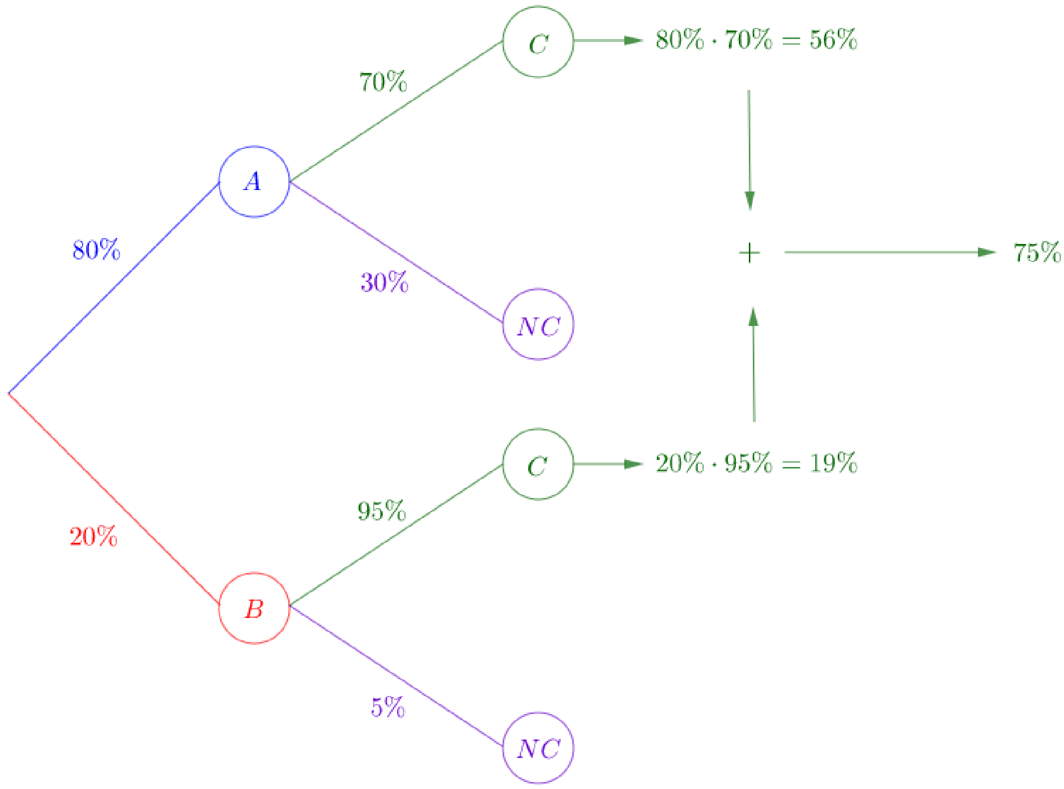
Probabilidade de ocorrer a doença B

Olhando assim, até faz algum sentido, não?

Os produtos já foram feitos pelo teorema da multiplicação, agora só precisamos aplicar o teorema da probabilidade total e somar as partes.

$$P(C) = P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)$$
$$P(C) = P(C \cap A) + P(C \cap B)$$
$$P(C) = 56\% + 19\%$$
$$P(C) = 75\%$$

De forma equivalente, no diagrama de árvore.



Assim há, em tese, 75% de chances de cura nas condições dadas.

Vamos generalizar o teorema da probabilidade total. Se B é um evento contido numa união de eventos disjuntos $A_1, A_2, \dots, A_n$ e $P(A_1) > 0, P(A_2) > 0, \dots, P(A_n) > 0$, então

$$\boxed{P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \cdots + P(A_n)P(B|A_n)}$$

RESUMINDO

O teorema da multiplicação nos leva à probabilidade individual de cada ramo da árvore, enquanto o teorema da probabilidade total nos permite somar as probabilidades de determinados ramos para chegarmos a conclusões específicas.

6.7. Teorema de Bayes

O teorema de Bayes é um corolário do teorema da probabilidade total. Esse teorema afirma que se $A_1, A_2, \dots, A_n$ formam uma partição do espaço amostral e B é um evento desse espaço, então:

$$\boxed{P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n}$$

Exemplo:

Vamos usar o mesmo problema do tópico anterior.

Um paciente se apresenta ao médico com queixas. Ao examiná-lo, o médico reduz as possibilidades de causa a somente duas doenças, A e B.

A doença A é mais endêmica e apresenta uma probabilidade de 80% de ser a causa dos sintomas do paciente.

Já a doença B apresenta uma possibilidade de apenas 20% de ser a causa dos sintomas.

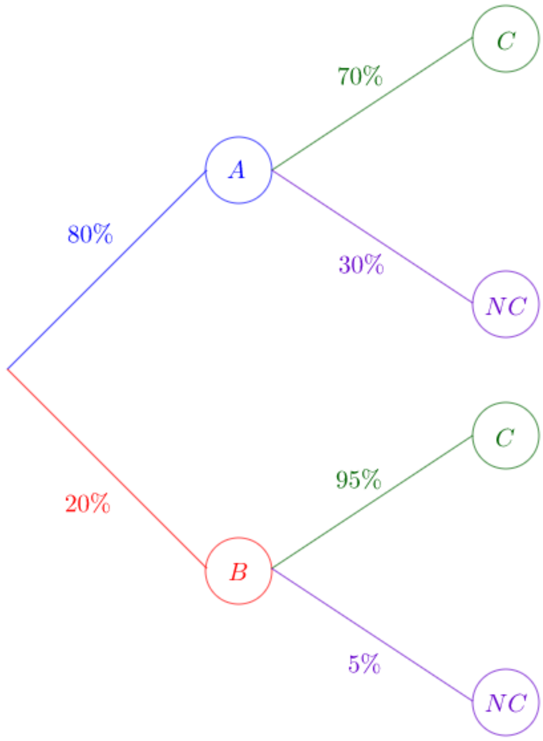
Além disso, o medicamento para o tratamento da doença A apresenta eficácia específica de 70%, enquanto o para a doença B, de 95%.

Os dois medicamentos não podem ser administrados simultaneamente, por apresentarem interação medicamentosa prejudicial ao paciente.

Nessas condições, determine a probabilidade do paciente ter contraído a doença A, sabendo que ele foi curado.

Solução:

Sabemos que o diagrama de árvore que representa a situação é dado por:



Podemos aplicar o teorema de Bayes para calcular o que se pede:

$$P(A|C) = \frac{P(A) \cdot P(C|A)}{P(A) \cdot P(C|A) + P(B) \cdot P(C|B)}$$

$$P(A|C) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}7}{0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}2 + 0{,}95} = \frac{0{,}56}{0{,}75} = \frac{56}{75}$$

6.8. Eventos independentes

Dois eventos, A e B, são ditos independentes se a probabilidade de ocorrer A se B já ocorreu, $P(A|B)$, é a própria probabilidade de ocorrência de A, $P(A)$, independente de B.

$$P(A|B) = P(A)$$

O mesmo vale para B.

$$P(B|A) = P(B)$$

Uma consequência dessa independência aparece quando vamos calcular a probabilidade da intersecção. Acompanhe.

Sabemos, pelo teorema da multiplicação, que

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Se A e B são independentes, temos.

$$\boxed{P(B|A) = P(B)}$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot \boxed{P(B|A)}$$

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot\boxed{P(B)}$$

Assim, quando estivermos falando em eventos independentes, temos

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

7. Questões de Provas Anteriores

ITA

1. (ITA/2020)

Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

2. (ITA/2019)

As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. As dez moedas são lançadas aleatoriamente e os números exibidos são somados. Então, a probabilidade de que essa soma seja igual a 60 é:

a) $\frac{63}{128}$

b) $\frac{63}{256}$

c) $\frac{63}{512}$

d) $\frac{189}{512}$

e) $\frac{189}{1024}$

3. (ITA/2019)

Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto $\{1,2,3,\dots,29,30\}$. Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.

4. (ITA/2018)

De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0\le k-r\le 6$ e $0\le k\le 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma

$$\sum_{r=0}^{6}\binom{10}{r}\binom{6}{6-r}$$

5. (ITA/2018)

São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{6}{15}$

d) 1

e) $\frac{17}{15}$

6. (ITA/2017)

Com os elementos $1, 2, \dots, 10$ são formadas todas as sequências $(a_1, a_2, \dots, a_7)$. Escolhendo - se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

a) $\frac{7!}{10^7 \cdot 3!}$

b) $\frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$

c) $\frac{3!}{10^7 \cdot 7!}$

d) $\frac{10!}{10^3 \cdot 7!}$

e) $\frac{10!}{10^7}$

7. (ITA/2017)

Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de $2/3$, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é:

a) $\frac{120}{160}$

b) $\frac{119}{154}$

c) $\frac{110}{144}$

d) $\frac{105}{135}$

e) $\frac{119}{144}$

8. (ITA/2016)

Escolhendo-se, aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo $[1,20]$, a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a:

a) $\frac{2}{285}$

b) $\frac{2}{217}$

c) $\frac{1}{190}$

d) $\frac{4}{225}$

e) $\frac{1}{380}$

9. (ITA/2016)

Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste. Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

10. (ITA/2015)

Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal $+$ ou o sinal $-$, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de $1/3$ a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e de $2/3$ as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal repetido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal $+$ sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

11. (ITA/2014)

Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(\mathrm{A})$ e $n(B)$;

c) $P(\mathrm{A})$ e $P(B)$.

12. (ITA/2013)

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \backslash B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

a) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

e) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

13. (ITA/2013)

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

a) dos três resultados, I é o mais provável.

b) dos três resultados, II é o mais provável.

c) dos três resultados, III é o mais provável.

d) os resultados I e II são igualmente prováveis.

e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

14. (ITA/2012)

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

a) $\frac{2}{9}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{4}{9}$.

d) $\frac{5}{9}$.

e) $\frac{2}{3}$.

15. (ITA/2012)

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

16. (ITA/2011)

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

17. (ITA/2011)

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

a) $\frac{7}{8}$.

b) $\frac{5}{7}$.

c) $\frac{5}{8}$.

d) $\frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{7}$.

18. (ITA/2010)

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

a) $\frac{16}{27}$.

b) $\frac{49}{81}$.

c) $\frac{151}{243}$.

d) $\frac{479}{729}$.

e) $\frac{2^4}{3^4}+\frac{2^5}{3^5}$.

19. (ITA/2010)

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

20. (ITA/2009)

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

IME

21. (IME/2020)

Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Seja F o conjunto de funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Escolhendo-se ao acaso uma função f de F, a probabilidade de f ser estritamente crescente ou ser injetora é:

a) 0,00252

b) 0,00462

c) 0,25200

d) 0,30240

e) 0,55440

22. (IME/2020)

Em um jogo, João e Maria possuem cada um três dados não viciados com seis faces numeradas de 1 a 6. Cada um lançará os seus dados, sendo João o primeiro a lançar. O vencedor será aquele que obtiver o maior número de dados com resultados iguais. Em caso de empate, vencerá aquele que tiver o maior número nos dados de igual resultado. Se ainda houver empate, não haverá vencedor. Suponha que João obteve apenas dois dados com mesmo resultado. Qual é a probabilidade de Maria vencer o jogo?

23. (IME/2019)

Em um jogo de RPG "*Role-Playing Game*" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?

a) $1/2$

b) $3/76$

c) $9/400$

d) $1/80$

e) $3/80$

24. (IME/2019)

Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio R. São sorteados 3 vértices distintos do hexágono, a saber: A, B e C. Seja r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC. Qual a probabilidade de que $r = \frac{R}{2}$?

a) 0

b) $1/10$

c) $3/5$

d) $1/20$

e) $1/6$

25. (IME/2019)

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.

O jogo se desenrola da seguinte forma:

1- Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.

2- No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças, de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.

3- As ações ocorrem por turno no sentido anti-horário.

4- O jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:

   a. Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.

   b. Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.

5- Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

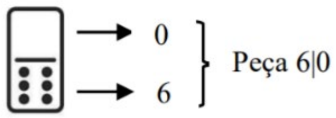


Figura 1

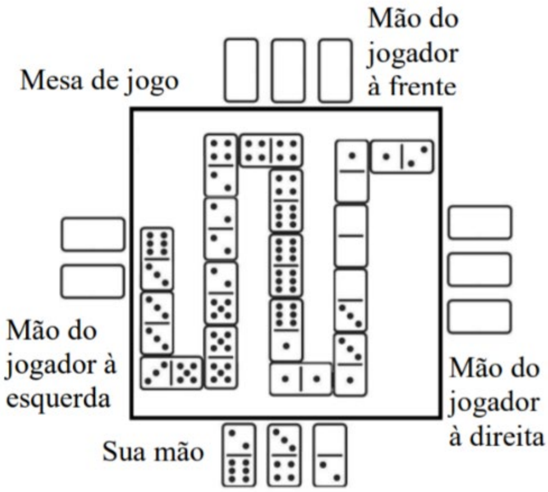


Figura 2

No jogo da Figura 2, é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?

b) Esta quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

Observação:

- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

26. (IME/2018)

Um ônibus escolar transporta n crianças. Sejam A o evento em que dentro do ônibus tenham crianças de ambos os sexos e B o evento em que há no máximo uma menina dentro do ônibus. Determine o valor de n para que os eventos A e B sejam independentes.

27. (IME/2018)

João e Maria nasceram no século XX, em anos distintos. A probabilidade da soma dos anos em que nasceram ser 3875 é:

a) $2/99$

b) $19/2475$

c) $37/4950$

d) $19/825$

e) $19/485$

28. (IME/2017)

Seja $A = \{1,2,3,4\}$.

- Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?
- Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

29. (IME/2016)

Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

30. (IME/2016)

Os inteiros n e m são sorteados do conjunto $\{1,2,3,\dots,2016\}$, podendo haver repetição. Qual a probabilidade do produto $n \times m$ ser múltiplo de 12?

a) $\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{18}$

c) $\frac{5}{24}$

d) $\frac{5}{36}$

e) $\frac{5}{144}$

31. (IME/2015)

O time de futebol “X” irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, “X” é o favorito. A probabilidade de “X” ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é $0,9$. Quando “X” não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é $0,02$. Em um determinado jogo de “X” contra “Y”, o time “X” foi o vencedor. Qual a probabilidade de “X” ter sido o favorito nesse jogo?

a) $0,80$

b) $0,98$

c) $180/181$

d) $179/181$

e) $170/181$

32. (IME/2013)

Um menino, na cidade do Rio de Janeiro, lança uma moeda. Ele andará 1 m para leste se o resultado for cara ou 1 m para oeste de o resultado for coroa. A probabilidade deste menino estar a 5 m de distância de sua posição inicial, após 9 lançamentos da moeda, é:

a) $\frac{9}{2^6}$

b) $\frac{35}{2^6}$

c) $\frac{2}{9!}$

d) $\frac{35}{2^9}$

e) $\frac{9!}{2^9}$

33. (IME/2012)

Em um aeroporto existem 12 vagas numeradas de 1 a 12, conforme a figura. Um piloto estacionou sua aeronave em uma vaga que não se encontrava nas extremidades, isto é, distintas das vagas 1 e da vaga 12. Após estacionar, o piloto observou que exatamente 8 das 12 vagas estavam ocupadas, incluindo a vaga na qual sua aeronave estacionou. Determine a probabilidade de que ambas as vagas vizinhas a sua aeronave estejam vazias.

1	2	3	...	10	11	12

a) $1/55$
b) $2/55$
c) $3/55$
d) $4/55$
e) $6/55$

34. (IME/2011)

O pipoqueiro cobra o valor de $\text{R\$ }1{,}00$ por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de $\text{R\$ }1{,}00$ e quatro uma nota de $\text{R\$ }2{,}00$. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de $\text{R\$ }2{,}00$ é:

a) $1/8$
b) $1/5$
c) $1/4$
d) $1/3$
e) $1/2$

8. Gabarito

1. $\mathbf{7/25}$
2. **b**
3. $\boldsymbol{p = 68/203}$
4. **a)** $\frac{\binom{10}{r}\binom{6}{k-r}}{\binom{16}{k}}$ **b)** 8008
5. **e**
6. **b**
7. **e**
8. $\frac{11}{1140}$ **(Não há alternativa)**
9. $\frac{25}{256}$
10. $\frac{5}{13}$
11. **a)** $n(\Omega) = 216$ **b)** $n(A) = 25$ **e** $n(B) = 27$ **c)** $P(A) = \frac{25}{216}$ **e** $P(B) = \frac{27}{216}$
12. **e**
13. **d**
14. **d**
15. $\frac{4}{9}$
16. $\frac{1}{1155}$
17. **b**
18. **a**
19. **a)** $\frac{1}{3}$ **b)** $\frac{5}{6}$

20. $\frac{53}{3125}$
21. d
22. 29/144
23. e
24. b
25. a) 9 configurações b) 90%
26. 3
27. c
28. $\frac{275}{2048}$
29. $\frac{32}{79}$
30. b
31. c
32. a
33. e
34. b

9. Questões de Provas Anteriores Comentadas

ITA

1. **(ITA/2020)**

Lançando três dados de 6 faces, numeradas de 1 a 6, sem ver o resultado, você é informado de que a soma dos números observados na face superior de cada dado é igual a 9. Determine a probabilidade de o número observado em cada uma dessas faces ser um número ímpar.

Comentários

Sejam $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ os números rolados nos três dados. Queremos a probabilidade condicional de a, b, c serem ímpares, sabendo que $a + b + c = 9$.

Em geral,

$$\Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

Logo,

$$\Pr\,(a, b, c\ ímpares\ |\ a + b + c = 9) = \frac{\Pr(a, b, c \text{ ímpares} \wedge\ a + b + c = 9)}{\Pr(a + b + c = 9)}$$

Como o conjunto universo é o mesmo, podemos trocar $\Pr(X)$ por $n(X)$.

I) $n(a + b + c = 9) = ?$

Vamos listar as possibilidades para a soma dar 9, que são poucas:

$$\underbrace{\begin{cases} 1+2+6 \\ 1+3+5 \\ \vdots \\ 1+6+2 \end{cases}}_{5\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 2+1+6 \\ 2+2+5 \\ \vdots \\ 2+6+1 \end{cases}}_{6\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 3+1+5 \\ 3+2+4 \\ \vdots \\ 3+5+1 \end{cases}}_{5\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 4+1+4 \\ 4+2+3 \\ \vdots \\ 4+4+1 \end{cases}}_{4\ maneiras}$$

$$\underbrace{\begin{cases} 5+1+3 \\ 5+2+2 \\ 5+3+1 \end{cases}}_{3\ maneiras} \quad \underbrace{\begin{cases} 6+1+2 \\ 6+2+1 \end{cases}}_{2\ maneiras}$$

Total $= 5 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 25$ maneiras de somar 9

II) $n(a, b, c \text{ ímpares e } a + b + c = 9) = ?$

Quantas das somas acima contém apenas números ímpares?

$1 + 3 + 5$
$1 + 5 + 3$
$3 + 1 + 5$
$3 + 3 + 3$
$3 + 5 + 1$
$5 + 1 + 3$
$5 + 3 + 1$

Há 7 triplas ordenadas de soma 9 com números contidos em $\{1,3,5\}$.

Logo,

$$\frac{\Pr(a, b, c \text{ ímpares e } a + b + c = 9)}{\Pr(a + b + c = 9)} = \frac{\mathrm{n}(a, b, c \text{ ímpares e } a + b + c = 9)}{\mathrm{n}(a + b + c = 9)} = \frac{7}{25}$$

Gabarito: $7/25$

---

2. (ITA/2019)

As faces de dez moedas são numeradas de modo que: a primeira moeda tem faces 1 e 2; a segunda, 2 e 3; a terceira, 3 e 4, e assim sucessivamente até a décima moeda, com faces 10 e 11. As dez moedas são lançadas aleatoriamente e os números exibidos são somados. Então, a probabilidade de que essa soma seja igual a 60 é:

a) $\frac{63}{128}$

b) $\frac{63}{256}$

c) $\frac{63}{512}$

d) $\frac{189}{512}$

e) $\frac{189}{1024}$

Comentários

Podemos observar a soma dos maiores números de cada moeda é:

$$2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 11 = 65$$

Então, dentre todas as moedas acima, 5 delas tem de ser subtraídas em 1 para que o valor da soma acima seja igual a 60. Então, dentre as 10 moedas, devemos escolher 5 que terão de assumir seu valor mínimo:

$$casos\ cuja\ soma \text{ é } 60 = \binom{10}{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = 252$$

Então, para encontrar a probabilidade de a soma ser 60, temos que dividir o número de casos acima pelos $2^{10} = 1024$ casos possíveis, pois para cada moeda existem 2 possibilidades, e 10 moedas são lançadas. Logo:

$$probabilidade = \frac{252}{1024} = \frac{63}{256}$$

Gabarito: "b"

---

3. (ITA/2019)

Escolhem-se aleatoriamente três números distintos no conjunto $\{1, 2, 3, \dots, 29, 30\}$. Determine a probabilidade da soma desses três números ser divisível por 3.

Comentários

O total de possibilidades de se escolher aleatoriamente 3 números distintos é dado por:

$$C_{30,3} = \frac{30!}{27! \cdot 3!} = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4060$$

Devemos descobrir quantos trios podemos formar do conjunto tal que a soma desse trio resulte em um número múltiplo de 3. Vamos escrever os elementos com o fator 3. Os números naturais podem ser escritos como $3k, 3k+1, 3k+2$, com $k \in \mathbb{N}$.

Dividindo os números do conjunto em cada formato, obtemos:

$$3k+1: \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$$
$$3k+2: \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$$
$$3k: \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$$

Note que, somando-se 3 números com o mesmo formato, encontramos um número múltiplo de 3:

$$(3k_1+1) + (3k_2+1) + (3k_3+1) = 3(k_1+k_2+k_3+1)$$
$$(3k_1+2) + (3k_2+2) + (3k_3+2) = 3(k_1+k_2+k_3+2)$$
$$(3k_1) + (3k_2) + (3k_3) = 3(k_1+k_2+k_3)$$

Além disso, podemos escolher 1 elemento de cada formato para obter um múltiplo de 3:

$$(3k_1) + (3k_2+1) + (3k_3+2) = 3(k_1+k_2+k_3+1)$$

Essas são as únicas possibilidades. Vamos calcular o número de casos favoráveis:

1) Três elementos com o mesmo formato:

$$\underbrace{3}_{3\ conjuntos} \cdot C_{10,3} = 3 \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 360$$

2) Três elementos com formatos distintos:

$$C_{10,1} \cdot C_{10,1} \cdot C_{10,1} = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$$

Portanto, a probabilidade pedida é dada por:

$$\boxed{p = \frac{n_{favoravel}}{n_{total}} = \frac{1000+360}{4060} = \frac{68}{203}}$$

Gabarito: $p = 68/203$

4. (ITA/2018)

De uma caixa que contém 10 bolas brancas e 6 bolas pretas, são selecionadas ao acaso k bolas.

a) Qual a probabilidade de que exatamente r bolas sejam brancas, nas condições $0 \leq k - r \leq 6$ e $0 \leq k \leq 10$.

b) Use o item (a) para calcular a soma

$$\sum_{r=0}^{6} \binom{10}{r} \binom{6}{6-r}$$

Comentários

a) A probabilidade que uma bola branca seja selecionada é de $\frac{10}{16}$, então, retirando-se k bolas, temos que o número total de possibilidades é de $N_{TOTAL} = \binom{16}{k}$.

Além disso, seja sendo r o número de bolas brancas, temos que selecionar r bolas entre as 10 existentes, além disso, como ao todo retiramos k bolas, restam $k - r$ bolas pretas para serem selecionadas dentre as 6 existentes, assim, temos que a probabilidade de tirar r bolas brancas e $k - r$ bolas pretas é:

$$N=\binom{10}{r}\binom{6}{k-r}$$

Portanto, a probabilidade de selecionar r bolas brancas é:

$$P_{k,r}=\frac{N}{N_{TOTAL}}=\frac{\binom{10}{r}\binom{6}{k-r}}{\binom{16}{k}}$$

b) Ademais, temos que a soma das probabilidades é 1, ou seja, se tomarmos $k=6$ bolas, então, a probabilidade total é a soma das probabilidades de tirarmos nenhuma bola, 1 bola, 2 bolas, ..., 5 bolas ou 6 bolas. Desse modo, temos que, com $k=6$:

$$1=\sum_{r=0}^{6}P_{6,r}=\sum_{r=0}^{6}\frac{\binom{10}{r}\binom{6}{6-r}}{\binom{16}{6}}$$

Desse modo, podemos reescrever:

$$\sum_{r=0}^{6}\binom{10}{r}\binom{6}{6-r}=\binom{16}{6}=8008$$

Gabarito: a) $\frac{\binom{10}{r}\binom{6}{k-r}}{\binom{16}{k}}$ b) 8008

---

5. (ITA/2018)

São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então P_1+P_2 vale

a) $\frac{8}{15}$

b) $\frac{7}{15}$

c) $\frac{6}{15}$

d) 1

e) $\frac{17}{15}$

Comentários

Para que pelo menos uma bola de cada caixa seja preta, as duas bolas não podem ser brancas simultaneamente, então temos que a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta é o complementar da probabilidade das duas bolas serem brancas. Então se as duas bolas forem brancas, temos:

$$P_{brancas}=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$$

Assim, sabendo que a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta é o complementar da probabilidade das duas bolas serem brancas, temos:

$$P_1=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$$

Além disso, se as duas bolas forem da mesma cor, temos que as duas bolas serão brancas ou pretas, assim, a probabilidade será a soma dessas duas possibilidades:

$$P_{pretas}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{15}$$

$$P_2=P_{brancas}+P_{pretas}=\frac{2}{5}+\frac{2}{15}=\frac{8}{15}$$

Portanto, temos:

$$P_1 + P_2 = \frac{3}{5} + \frac{8}{15} = \frac{17}{15}$$

Gabarito: "e"

6. (ITA/2017)

Com os elementos $1, 2, \dots, 10$ são formadas todas as sequências $(a_1, a_2, \dots, a_7)$. Escolhendo - se aleatoriamente uma dessas sequências, a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

a) $\frac{7!}{10^7 \cdot 3!}$

b) $\frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$

c) $\frac{3!}{10^7 \cdot 7!}$

d) $\frac{10!}{10^3 \cdot 7!}$

e) $\frac{10!}{10^7}$

Comentários

Para formar uma sequência de 7 elementos, devemos escolher 7 entre os 10 números fornecidos, então temos $\binom{10}{7}$ possibilidades.

Contudo, uma vez que uma sequência foi escolhida, pode-se permutar seus elementos, sendo que o primeiro elemento pode ocupar 7 posições, o segundo pode ocupar as 6 restantes, e assim sucessivamente, então temos $7!$ possibilidades de permutação.

Então, ao todo, podemos ter $\binom{10}{7} \cdot 7!$ sequências que não contém elementos repetidos. Além disso, podemos ter 10^7 sequências ao todo, uma vez que cada elemento da sequência (que possui sete elementos) pode ser escolhido de 10 formas diferentes.

Por fim, temos que a probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é:

$$P = \frac{\binom{10}{7} \cdot 7!}{10^7} = \frac{\frac{10!}{7! \cdot 3!} \cdot 7!}{10^7}$$

$$P = \frac{10!}{10^7 \cdot 3!}$$

Gabarito: "b"

7. (ITA/2017)

Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. Sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de $2/3$, então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é:

a) $\frac{120}{160}$

b) $\frac{119}{154}$

c) $\frac{110}{144}$

d) $\frac{105}{135}$

e) $\frac{119}{144}$

Comentários

Do enunciado, temos que a probabilidade de o atirador acertar um dos alvos é inversamente proporcional à distância ao alvo:

$$P_A = \frac{x}{30^2} \ \ ; \ \ P_B = \frac{x}{40^2} \ \ ; \ \ P_C = \frac{x}{60^2}$$

Não somente, temos que a probabilidade do atirador acertar o primeiro alvo é de $\frac{2}{3}$:

$$P_C = \frac{2}{3} = \frac{x}{30^2}$$
$$x = 600$$

Logo, podemos calcular os valores de P_B e P_C:

$$P_B = \frac{600}{40^2} = \frac{3}{8}$$
$$P_C = \frac{600}{60^2} = \frac{1}{6}$$

Então como esses eventos são independentes, a probabilidade de o atirador acertar pelo menos um dos alvos é a dada por:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$
$$P(A \cup B \cup C) = \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$$

Calculando o denominador comum e simplificando a expressão:

$$P(A \cup B \cup C) = \frac{119}{144}$$

Gabarito: "e"

---

8. **(ITA/2016)**

Escolhendo-se, aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo $[1, 20]$, a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a:

a) $\frac{2}{285}$

b) $\frac{2}{217}$

c) $\frac{1}{190}$

d) $\frac{4}{225}$

e) $\frac{1}{380}$

Comentários

As progressões de razão inteira são:

$$\{1,2,4\} ; \{1,3,9\} ; \{1,4,16\} ; \{2,4,8\} ; \{2,6,18\} ; \{3,6,12\} ; \{4,8,16\} ; \{5,10,20\}$$

As progressões de razão não inteira são:

$$\{4,6,9\} ; \{8,12,18\} ; \{9,12,16\}$$

Então, ao todo, temos 11 possibilidades. Além disso, podemos ter $\binom{20}{3} = 1140$ formas de escolher três números distintos, assim, temos que a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{11}{1140}$$

Gabarito: $\frac{11}{1140}$ **(Não há alternativa)**

9. **(ITA/2016)**

Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste. Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

Comentários

Quando se retira uma bola da caixa, tem-se 4 possibilidades de novas direções. Portanto, ao todo, são $N = 4^6$ possibilidades de caminhos a serem percorridos.

Para retornar ao início, é necessário que o menino vá e volte com a mesma quantidade na direção norte e sul e na direção leste e oeste. Então suponha que o menino ande x passos na direção norte:

$$x\ passos\ na\ direção\ norte \rightarrow\ x\ passos\ na\ direção\ sul$$
$$3 - x\ passos\ na\ direção\ leste \rightarrow 3 - x\ passos\ na\ direção\ oeste$$

Observe que o menino anda $3 - x$ passos na direção leste e oeste, pois ao todo o menino dá 6 passos, então, temos que ter $x + x + (3 - x) + (3 - x) = 6$, o que é verdade.

Desse modo, dos 6 movimentos do menino, x são na direção norte: $\binom{6}{x}$ possibilidades.

Dos $6 - x$ movimentos restantes, x são na direção sul: $\binom{6-x}{x}$ possibilidades.

Dos $6 - 2x$ movimentos restantes, $3 - x$ são na direção leste: $\binom{6-2x}{3-x}$ possibilidades.

Dos $3 - x$ movimentos restantes, $3 - x$ são na direção oeste: $\binom{3-x}{3-x}$ possibilidades.

Então, dado o número de passos x, o número de formas do menino retornar à posição inicial:

$$N(x) = \binom{6}{x} \cdot \binom{6-x}{x} \cdot \binom{6-2x}{3-x} \cdot \binom{3-x}{3-x}$$
$$N(x) = \frac{6!}{(6-x)!\,x!} \cdot \frac{(6-x)!}{(6-2x)!\,x!} \cdot \frac{(6-2x)!}{(3-x)!\,(3-x)!} \cdot 1$$
$$N(x) = \frac{6!}{(x!)^2 \cdot \left((3-x)!\right)^2} = \frac{20 \cdot (3!)^2}{(x!)^2 \cdot \left((3-x)!\right)^2} = 20 \cdot \left(\frac{3!}{x! \cdot (3-x)!}\right)^2$$

Portanto, temos que a probabilidade do menino voltar à posição inicial no sexto passo é a soma das probabilidades para cada quantidade de passos x, considerando que os passos variam de 0 a 3.

$$N_{TOTAL} = 20 \cdot \left[\left(\frac{3!}{0! \cdot (3-0)!}\right)^2 + \left(\frac{3!}{1! \cdot (3-1)!}\right)^2 + \left(\frac{3!}{2! \cdot (3-2)!}\right)^2 + \left(\frac{3!}{3! \cdot (3-3)!}\right)^2\right]$$
$$N_{TOTAL} = 400$$

Por fim, temos que a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{N_{TOTAL}}{N} = \frac{400}{4^6} = \frac{25}{256}$$

Gabarito: $\frac{25}{256}$

10. **(ITA/2015)**

Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal $+$ ou o sinal $-$, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo de $1/3$ a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e de $2/3$ as respectivas probabilidades de B e C trocarem o sinal repetido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal $+$ sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

Comentários

Temos as seguintes possibilidades:

$$\begin{array}{cccccc}
A & B & C & & & \\
+ & + & + & \rightarrow & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{27} \\
+ & + & - & & \\
+ & - & + & \rightarrow & \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27} \\
+ & - & - & & \\
- & - & - & & \\
- & - & + & \rightarrow & \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{27} \\
- & + & + & \rightarrow & \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{27} \\
- & + & - & &
\end{array}$$

Então, uma vez que cada linha é independente uma das outras, a probabilidade de terminar com o sinal $+$ no fim do experimento é:

$$P_{fim}=\frac{1}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}+\frac{4}{27}=\frac{13}{27}$$

Além disso, a probabilidade de A escrever o sinal $+$ e sinal $+$ ser o mesmo do final do experimento:

$$P_{inicio}=\frac{1}{27}+\frac{4}{27}=\frac{5}{27}$$

Portanto, a probabilidade de A ter escrito o sinal $+$ sabendo que esse foi o sinal do final do experimento é:

$$P=\frac{P_{inicio}}{P_{final}}=\frac{5}{13}$$

Gabarito: $\frac{5}{13}$

---

11. (ITA/2014)

Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três dados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três dados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:

a) $n(\Omega)$;

b) $n(\mathrm{A})$ e $n(B)$;

c) $P(\mathrm{A})$ e $P(B)$.

Comentários

a) Sabendo que cada lançamento produz 6 possíveis resultados e são 3 lançamentos:

$$n(\Omega)=6\cdot 6\cdot 6=216$$

b) Seja o evento A, e sejam x_1, x_2 e x_3 os resultados dos dados, desse modo, temos que A é formado pelos casos em que:

$$x_1+x_2+x_3=9$$

Não somente, como $6 \geq x_1, x_2, x_3 \geq 1$, então, seja $x'=x-1$, substituindo, temos:

$$x_1'+1+x_2'+1+x_3'+1=9$$
$$x_1'+x_2'+x_3'=6$$

Então temos que distribuir 6 unidades nas variáveis x_1', x_2' e x_3', podemos pensar que estamos organizando 6 bolinhas e 2 barrinhas, ou seja:

$$1 + 3 + 2 \rightarrow o|ooo|oo$$

Temos que todas as possibilidades de permutação de barrinhas são o número de soluções da equação, então temos:

$$\binom{bolinhas + barrinhas}{barrinhas} = \binom{8}{2} = 28\ soluções$$

Além disso, essas soluções consideram casos do tipo: $(x_1', x_2', x_3') = (6,0,0)$, o que é um problema, pois assim $x_1 = x_1' + 1 = 6 + 1$, mas $x_1 \leq 6$, então, devemos excluir os casos em que $x_1 \geq 6$, que são:

$$(6,0,0)\ ou\ (0,6,0)\ ou\ (0,0,6)$$

Logo, temos que:

$$n(A) = 28 - 3 = 25$$

Aplicando o mesmo conceito no evento B, então, que:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

Daí:

$$x_1' + x_2' + x_3' = 7$$

Então, seguindo a mesma ideia de permutar barrinhas e bolinhas:

$$\binom{bolinhas + barrinhas}{barrinhas} = \binom{9}{2} = 36\ soluções$$

Além disso, devemos eliminar os casos em que $x_1', x_2', x_3' \geq 6$, que são:

$$(7,0,0)\ ou\ (0,7,0)\ ou\ (0,0,7)\ ou\ (6,1,0)\ ou\ (6,0,1)\ ou\ (1,6,0)\ ou\ (0,6,1)\ ou\ (1,0,6)\ ou\ (0,1,6)$$

Então, temos 9 soluções que devemos eliminar, portanto:

$$n(B) = 36 - 9 = 27$$

c) Por fim, temos que a probabilidade $P(A)$ e $P(B)$ é:

$$P = \frac{casos\ favoráveis}{casos\ possíveis}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{25}{216}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{27}{216}$$

Gabarito: a) $n(\Omega) = 216$ b) $n(A) = 25$ e $n(B) = 27$ c) $P(A) = \frac{25}{216}$ e $P(B) = \frac{27}{216}$

---

12. (ITA/2013)

Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \backslash B$, $A \cup B$ e $A^C \cup B^C$ são, respectivamente,

a) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

b) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

d) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

e) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$.

Comentários

i) $P(A\backslash B)$:

$$P(A\backslash B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

ii) $P(A \cup B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

iii) $P(A^C \cup B^C)$:

$$P(A^C \cup B^C) = P((A \cap B)^C) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: "e"

13. (ITA/2013)

Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:

I. Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.

II. Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.

III. Ocorrência de cinco caras e três coroas em oito lançamentos.

Pode-se afirmar que

a) dos três resultados, I é o mais provável.

b) dos três resultados, II é o mais provável.

c) dos três resultados, III é o mais provável.

d) os resultados I e II são igualmente prováveis.

e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

Comentários

I) A probabilidade de ocorrer duas caras em dois lançamentos é de:

$$P_I = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

II) A probabilidade de três caras e uma coroa em quatro lançamentos é:

$$P_{II} = \frac{\binom{4}{1}}{2^4}$$

Uma vez que existem $\binom{4}{1}$ formas de se escolher dentre os quatro lançamentos qual lançamento será coroa. Além disso, existem 2^4 possibilidades, pois podemos ter cara ou coroa em cada lançamento.

III) A probabilidade de cinco caras e três coroas em oito lançamentos é:

$$P_{III} = \frac{\binom{8}{3}}{2^8}$$

Analogamente, existem $\binom{8}{3}$ formas de ocorrerem as três coroas nos oito lançamentos. Além disso, existem 2^8 possibilidades totais, pois podemos obter cara ou coroa em cada lançamento.

Portanto, $P_I = P_{II}$ e $P_{III} < \frac{1}{4}$, então, temos que os resultados I e II são igualmente prováveis.

Gabarito: "d"

14. (ITA/2012)

Dois atiradores acertam o alvo uma vez a cada três disparos. Se os dois atiradores disparam simultaneamente, então a probabilidade do alvo ser atingido pelo menos uma vez é igual a

a) $\frac{2}{9}$.

b) $\frac{1}{3}$.

c) $\frac{4}{9}$.

d) $\frac{5}{9}$.

e) $\frac{2}{3}$.

Comentários

Sejam A e B os atiradores, então, como cada um deles acerta o alvo uma vez a cada três disparos:

$$P_a = \frac{1}{3} \text{ e } P_b = \frac{1}{3}$$

Então, para que quando os dois atiradores atirarem simultaneamente pelo menos um dos atiradores acerte o alvo, devemos ter que A ou B acerte o alvo. Essa probabilidade é o complementar de caso os dois atiradores errem, então, a probabilidade de que os dois atiradores errem é:

$$P_{acertarem} = (1 - P_a) \cdot (1 - P_b)$$

Pois P_a e P_b são as probabilidades de cada atirador acertar. Além disso, a probabilidade procurada é o complementar da probabilidade de que os dois atiradores errem, portanto:

$$P = 1 - P_{acertarem}$$

$$P = 1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

$$P = 1 - \frac{4}{9}$$

$$P = \frac{5}{9}$$

Gabarito: "d"

---

15. (ITA/2012)

Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

Comentários

O número de conjuntos em que o 9 e o 10 aparecem juntos (n_1) é calculado variando-se os outros três números pertencentes ao seu conjunto, ou seja, dos oito números restantes de 1 a 10, devemos escolher 3:

$$n_1 = \binom{8}{3}$$

Além disso, quando dividimos os dez cartões em dois grupos, temos um grupo que obrigatoriamente possui o número 9, então basta escolher os outros 4 números e assim temos o número (n_2) de todas as possíveis configurações:

$$n_2 = \binom{9}{4}$$

Por fim, a probabilidade requisitada no enunciado é:

$$P = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{9}{4}} = \frac{56}{126} = \frac{4}{9}$$

Gabarito: $\frac{4}{9}$

---

16. (ITA/2011)

Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

Comentários

Temos, ao todo, $5 + 4 + 2 = 11$ livros distintos, então, ao todo, existem $11!$ Possíveis configurações dos livros. Além disso, se os livros do mesmo assunto estão juntos, temos as matérias podem ser permutadas de $3!$ maneiras. Não somente, em história podemos permutar os livros de $5!$ maneiras, em biologia podemos permutar de $4!$ maneiras e em espanhol podemos permutar de $2!$ maneiras.

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P = \frac{3! \cdot 5! \cdot 4! \cdot 2!}{11!} = \frac{1}{1155}$$

Gabarito: $\frac{1}{1155}$

---

17. (ITA/2011)

Numa caixa com 40 moedas, 5 apresentam duas caras, 10 são normais (cara e coroa) e as demais apresentam duas coroas. Uma moeda é retirada ao acaso e a face observada mostra uma coroa. A probabilidade de a outra face desta moeda também apresentar uma coroa é

a) $\frac{7}{8}$.

b) $\frac{5}{7}$.

c) $\frac{5}{8}$.

d) $\frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{7}$.

Comentários

Se uma moeda é retirada ao acaso e possui uma face sendo coroa, o espaço amostral agora se resume às moedas que possuem pelo menos uma face coroa. Não somente, a probabilidade procurada será, dentro desse novo espaço amostral, qual moeda terá as duas faces sendo coroa, ou seja, a moeda apresentará a "outra face" como coroa:

$$\Omega = 40 - 5 = 35$$

Pois temos 40 moedas ao todo e somente 5 possuem as duas faces sendo cara. No entanto, agora temos que procurar as moedas que apresentam as duas caras, ao todo temos:
$caras = 40 - 5 - 10 = 25$.

Então, a probabilidade da outra face ser cara é a mesma de nesse novo espaço amostral as duas faces serem cara:

$$\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$$

Gabarito: "b"

---

18. (ITA/2010)

Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente de modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a

a) $\frac{16}{27}$.

b) $\frac{49}{81}$.

c) $\frac{151}{243}$.

d) $\frac{479}{729}$.

e) $\frac{2^4}{3^4}+\frac{2^5}{3^5}$.

Comentários

A probabilidade de que quatro refletores sejam acesos é calculada escolhendo-se 4 dos 6 refletores, além disso, desses 6 refletores, 4 deles terão probabilidade $\frac{2}{3}$, ou seja, deverão estar acesos e dois delas probabilidade $\frac{1}{3}$, ou seja, deverão estar apagados. Então temos:

$$P_4=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{80}{3^5}$$

Analogamente, para que 5 refletores estejam acesos:

$$P_5=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{64}{3^5}$$

Por fim, para que existam 4 **ou** 5 refletores acesos, como os eventos são independentes, temos que a probabilidade pedida P é:

$$P=P_4+P_5=\frac{144}{3^5}=\frac{16}{27}$$

Gabarito: “a”

---

19. (ITA/2010)

Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.

a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.

b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

Comentários

a) Para a bola retirada ser múltipla de 5 ou 6, devemos contar o número de múltiplas de 5, o número de múltiplas de 6 e retirar os casos contados duas vezes, ou seja, retirar o número de múltiplas de 30, assim, temos:

$$M_5=\frac{90}{5}=18 \text{ múltiplos de } 5$$
$$M_6=\frac{90}{6}=15 \text{ múltiplos de } 6$$
$$M_{30}=\frac{90}{30}=3 \text{ múltiplos de } 30$$

Então existem $18+15-3=30$ casos prováveis de se retirar um múltiplo de 5 ou 6. Não somente, ao todo existem 90 casos possíveis, uma vez que podemos retirar qualquer uma das 90 bolas. Assim, a probabilidade é:

$$P=\frac{30}{90}=\frac{1}{3}$$

b) Conforme calculamos, existem 15 múltiplos de 6, então, devemos considerar duas possibilidades:

i) Se a primeira bola retirada for múltipla de 6:

$$p_1=\frac{múltiplos\ de\ 6}{casos\ possíveis}\cdot\frac{não\ múltiplos\ de\ 6}{casos\ possíveis-1}=\frac{15}{90}\cdot\frac{75}{89}$$

ii) Se a primeira bola retirada não for múltipla de 6:

$$p_2=\frac{não\ múltiplos\ de\ 6}{casos\ possíveis}\cdot\frac{não\ múltiplos\ de\ 6-1}{casos\ possíveis-1}=\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}$$

Portanto, temos que a probabilidade pedida o item $b)$ é:

$$p=p_1+p_2=\frac{15}{90}\cdot\frac{75}{89}+\frac{75}{90}\cdot\frac{74}{89}=\frac{5}{6}$$

Gabarito: a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{5}{6}$

---

20. (ITA/2009)

Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido na primeira etapa nota superior ou igual à nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Comentários

A probabilidade de ser aprovado é $P_A=\frac{1}{5}$, consequentemente, a probabilidade de ser reprovado é de $P_R=\frac{4}{5}$.

Além disso, dentre 6 candidatos escolhidos, para que no mínimo 4 candidatos sejam aprovados, temos que considerar os seguintes casos:

I) Somente 4 aprovados:

Então temos que 4 deles, os aprovados, devem possuir probabilidade P_A e dois deles, os reprovados, devem possuir probabilidade P_R. Além disso, podemos permutar essas probabilidades entre os 6 candidatos de $\binom{6}{4}$ maneiras, então temos:

$$P_4=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^4\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^2=\frac{240}{5^6}$$

II) Somente 5 aprovados:

Analogamente, 5 deles têm probabilidade P_A e 1 deles tem probabilidade P_R, além disso, pode-se permutar de $\binom{6}{5}$ maneiras as probabilidades entre os 6 candidatos:

$$P_5=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^1=\frac{24}{5^6}$$

III) Somente 6 aprovados:

Analogamente, 6 deles têm probabilidade P_A e 0 deles tem probabilidade P_R, além disso, podemos permutar de $\binom{6}{6}$ maneiras as probabilidades entre os 6 candidatos:

$$P_5=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^6\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^0=\frac{1}{5^6}$$

Portanto, a probabilidade pedida é:

$$P=P_4+P_5+P_6=\frac{240+24+1}{5^6}=\frac{53}{3125}$$

Gabarito: $\frac{53}{3125}$

IME

21. (IME/2020)

Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Seja F o conjunto de funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Escolhendo-se ao acaso uma função f de F, a probabilidade de f ser estritamente crescente ou ser injetora é:

a) 0,00252

b) 0,00462

c) 0,25200

d) 0,30240

e) 0,55440

Comentários

O detalhe nessa questão é perceber que as funções estritamente crescentes também são funções injetoras, ou seja, a probabilidade pedida é igual ao número de funções injetoras de $F: A \to B$ sobre o número total de possibilidades. Desse modo:

$$p = \frac{número\ de\ casos\ favoráveis}{número\ de\ casos\ possíveis}$$

Para uma função ser injetora, temos que cada elemento do domínio A deve indicar um elemento distinto no contradomínio B. Assim, dos 10 elementos de B, escolhemos 5 para compor os pares com os elementos de A, logo, temos $\binom{10}{5}$ possibilidades. Além disso, podemos permutar essas possibilidades, logo:

$$n_{favoráveis} = \binom{10}{5} \cdot 5!$$

O número de casos possíveis é dado por 10^5. Com isso, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{\binom{10}{5} \cdot 5!}{10^5} = \frac{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5!} \cdot 5!}{10^5} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{10^4} = 0{,}3024$$

Gabarito: “d”.

22. (IME/2020)

Em um jogo, João e Maria possuem cada um três dados não viciados com seis faces numeradas de 1 a 6. Cada um lançará os seus dados, sendo João o primeiro a lançar. O vencedor será aquele que obtiver o maior número de dados com resultados iguais. Em caso de empate, vencerá aquele que tiver o maior número nos dados de igual resultado. Se ainda houver empate, não haverá vencedor. Suponha que João obteve apenas dois dados com mesmo resultado. Qual é a probabilidade de Maria vencer o jogo?

Comentários

Maria vence em dois casos:

- **A:** quando ela tira três números iguais nos dados;
- **B:** quando ela tira dois números iguais, sendo que os dois números são maiores que os que foram tirados por João.

A primeira probabilidade é fácil de ser calculada. O primeiro dado pode ser qualquer um. Porém, os dois seguintes devem ser iguais ao primeiro.

$\frac{6}{6}$	$.\frac{1}{6}$	$.\frac{1}{6}$	$P(A) = \frac{1}{36}$
1º dado	**2º dado**	**3º dado**	

A segunda probabilidade deve ser calculada considerando que:

- Maria deve tirar exatamente dois números iguais;
- Esses números não podem ser iguais aos que foram tirados por João;
- Sabendo que Maria e João não tiraram dois números iguais, a probabilidade condicional de vitória de Maria é ½. Em metade dos casos, Maria ganha. Na outra metade, João ganha.

$(6-1)$	$\frac{1}{2}$	$C_{3,2}$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$
Números que não resultam em empate	**Probilidade de Maria vencer, sabendo que não houve empate**	**Permutações entre os dados**	**1 Número Diferente**	**2 Números Iguais**

Logo, temos:

$$P(B) = (6-1).\frac{1}{2}.C_{3,2}.\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{1}{6}\right)^2$$

$$P(B) = 5.\frac{1}{2}.3.\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

Portanto, a probabilidade de Maria vencer é:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{25}{144} = \frac{29}{144}$$

Outra forma de calcular a probabilidade **P(B)** é considerar que:

- Se João tirar um par de “1”, Maria pode tirar “2,3,4,5 ou 6”, portanto, tem 5 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “2”, Maria pode tirar “3,4,5 ou 6”, portanto, tem 4 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “3”, Maria pode tirar “4,5 ou 6”, portanto, tem 3 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “4”, Maria pode tirar “5 ou 6”, portanto, tem 2 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “5”, Maria pode tirar “6”, portanto, tem 1 possibilidades de vitória;
- Se João tirar um par de “6”, Maria não tem possibilidade de vitória.

Considerando que a probabilidade de João ter tirado qualquer número é igual a 1/6, o valor esperado da quantidade de números vencedores para Maria é:

$$E = \frac{1}{6}.5 + \frac{1}{6}.4 + \frac{1}{6}.3 + \frac{1}{6}.2 + \frac{1}{6}.1 + \frac{1}{6}.0 = \frac{1}{6}(5+4+3+2+1) = \frac{5.6}{2.6} = \frac{5}{2}$$

Agora, façamos:

$\frac{5}{2}$	$C_{3,2}$	$\left(\frac{5}{6}\right)$	$\left(\frac{1}{6}\right)^2$
Valor Esperado de Números Vencedores	**Permutações entre os dados**	**1 Número Diferente**	**2 Números Iguais ao Vencedor**

O resultado é exatamente o mesmo:

$$P(B) = \frac{5}{2}.3.\left(\frac{5}{6}\right).\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{144}$$

Portanto, também chegaríamos ao mesmo resultado encontrado anterior:

$$P = P(A) + P(B) = \frac{1}{36} + \frac{25}{144} = \frac{29}{144}$$

Gabarito: 29/144

23. (IME/2019)

Em um jogo de RPG "*Role-Playing Game*" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?

a) $1/2$

b) $3/76$

c) $9/400$

d) $1/80$

e) $3/80$

Comentários

A probabilidade P de eu vencer o duelo pode ser dado pela fórmula:

$$P = \frac{nº\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}$$

O total de casos possíveis que pode ocorrer é igual a $20 \cdot 20 = 400$, pois para cada dado lançado temos 20 possibilidades de resultado (pode sair qualquer número entre 1 e 20).

Vamos ver todos os casos favoráveis, ou seja, todos os casos em que a soma dos dois dados seja maior que 35:

- $(16, 20) \rightarrow 16 + 20 = 36 > 35$
- $(17, 19) \rightarrow 17 + 19 = 36 > 35$
- $(18, 18) \rightarrow 18 + 18 = 36 > 35$
- $(19, 17) \rightarrow 19 + 17 = 36 > 35$
- $(20, 16) \rightarrow 20 + 16 = 36 > 35$
- $(17, 20) \rightarrow 17 + 20 = 37 > 35$
- $(18, 19) \rightarrow 18 + 19 = 37 > 35$
- $(19, 18) \rightarrow 19 + 18 = 37 > 35$
- $(20, 17) \rightarrow 20 + 17 = 37 > 35$
- $(18, 20) \rightarrow 18 + 20 = 38 > 35$
- $(19, 19) \rightarrow 19 + 19 = 38 > 35$
- $(20, 18) \rightarrow 20 + 18 = 38 > 35$
- $(19, 20) \rightarrow 19 + 20 = 39 > 35$
- $(20, 19) \rightarrow 20 + 19 = 39 > 35$
- $(20, 20) \rightarrow 20 + 20 = 40 > 35$

Somando os casos, temos que a quantidade de casos favoráveis é 15. Portanto, a probabilidade de vencer o duelo é:

$$P = \frac{15}{400} = \frac{3}{80}$$

$$\boxed{P = \frac{3}{80}}$$

Gabarito: "e"

24. (IME/2019)

Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio R. São sorteados 3 vértices distintos do hexágono, a saber: A, B e C. Seja r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC. Qual a probabilidade de que $r = \frac{R}{2}$?

a) 0

b) $1/10$

c) $3/5$

d) $1/20$

e) $1/6$

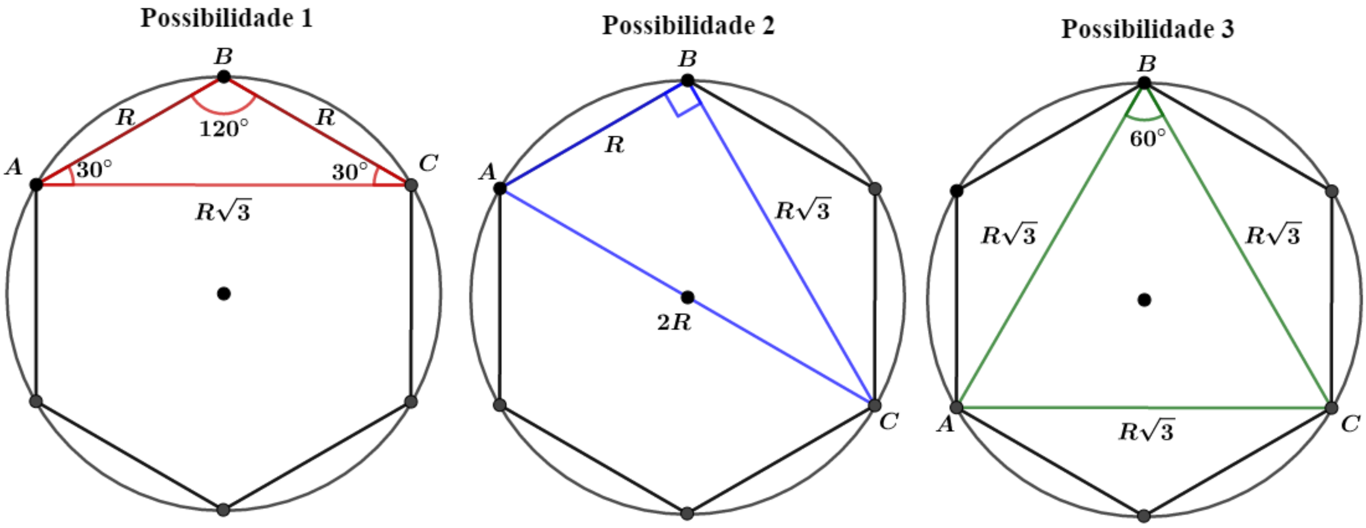
Comentários

Vamos calcular o número total de triângulos que se podem formar em um hexágono regular:

$$n_T = C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

Para calcular o número de casos favoráveis, devemos saber quantos triângulos satisfazem a condição do problema.

No hexágono regular, temos 3 possibilidades de se formar os triângulos. Veja a figura:



O raio inscrito ao triângulo ABC deve ser igual a $R/2$. Podemos relacionar R com r através da fórmula da área:

$$S_{\Delta ABC} = pr$$

Sendo p o semiperímetro do triângulo ABC.

Desse modo, para a possibilidade 1:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{R \cdot sen(30°) \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{R + R + R\sqrt{3}}{2} \cdot r$$

$$\frac{R\sqrt{3}}{2} = \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot r \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}\left(2 - \sqrt{3}\right)}{2} \neq \frac{R}{2}$$

Possibilidade 2:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{R \cdot R\sqrt{3}}{2} = \frac{2R + R + R\sqrt{3}}{2} \cdot r$$

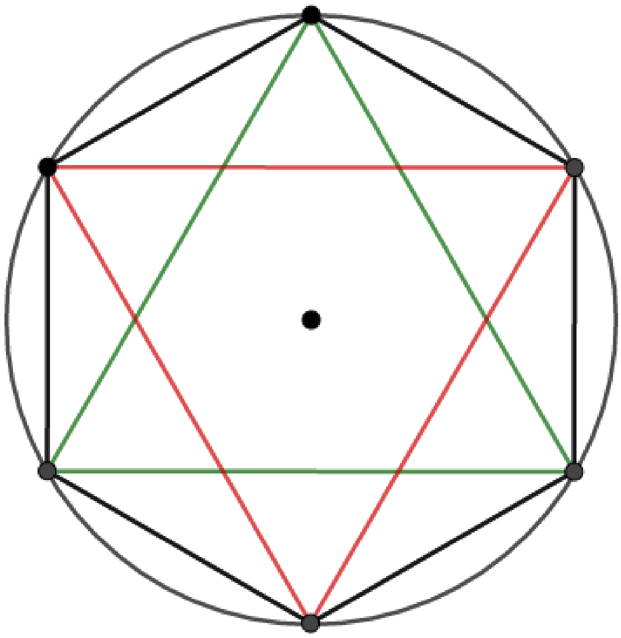
$$R\sqrt{3} = \left(3 + \sqrt{3}\right) \cdot r \Rightarrow r = \frac{R\sqrt{3}\left(3 - \sqrt{3}\right)}{6} \neq \frac{R}{2}$$

Possibilidade 3:

Nesse caso, temos um triângulo equilátero. Pelas propriedades desse triângulo, podemos escrever:

$$r = \frac{h}{3} = \frac{R\sqrt{3} \cdot sen(60°)}{3} = \frac{R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} = \frac{R}{2}$$

Assim, devemos ter um triângulo equilátero. Do total de triângulos que podemos formar, apenas 2 são equiláteros:



Portanto, a probabilidade desejada é:

$$\boxed{p = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}}$$

Gabarito: "b"

25. (IME/2019)

Um jogo de dominó possui 28 peças com duas pontas numeradas de zero a seis, independentemente, de modo que cada peça seja única, conforme ilustra a Figura 1.

O jogo se desenrola da seguinte forma:

1- Quatro jogadores se posicionam nos lados de uma mesa quadrada.

2- No início do jogo, cada jogador recebe um conjunto de 7 peças, de forma aleatória, de modo que somente o detentor das peças possa ver seu conteúdo.

3- As ações ocorrem por turno no sentido anti-horário.

4- O jogador, na sua vez, executa uma de duas ações possíveis:

   c. Adiciona uma de suas peças de forma adjacente a uma das duas extremidades livres do jogo na mesa, de modo que as peças sejam encaixadas com pontas de mesmo valor.

   d. Passa a vez, caso não possua nenhuma peça com ponta igual a uma das extremidades livres da mesa.

5- Vence o jogo o primeiro jogador que ficar sem peças na mão.

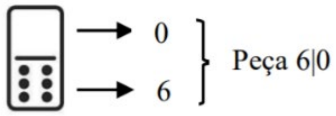


Figura 1

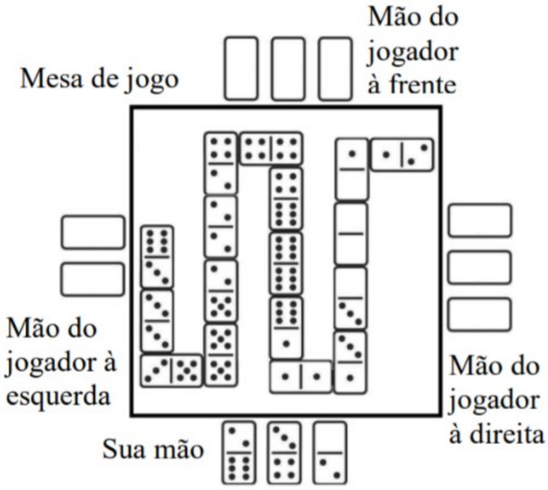


Figura 2

No jogo da Figura 2, é a sua vez de jogar e você constatou que o jogador à sua direita não possui peças com ponta 5 e o jogador à sua frente não possui peças com ponta 0. Você analisou todas as possíveis configurações de peças que os jogadores podem ter em suas mãos e decidiu jogar de modo a garantir que uma das pontas livres da mesa só possa ser usada por uma peça de sua posse, e que esta será a sua última peça em mão. Ao utilizar essa estratégia:

a) Quantas configurações de peças nas mãos dos jogadores garantem a vitória do jogo a você?

b) Esta quantidade corresponde a qual percentual do total de configurações possíveis?

Observação:

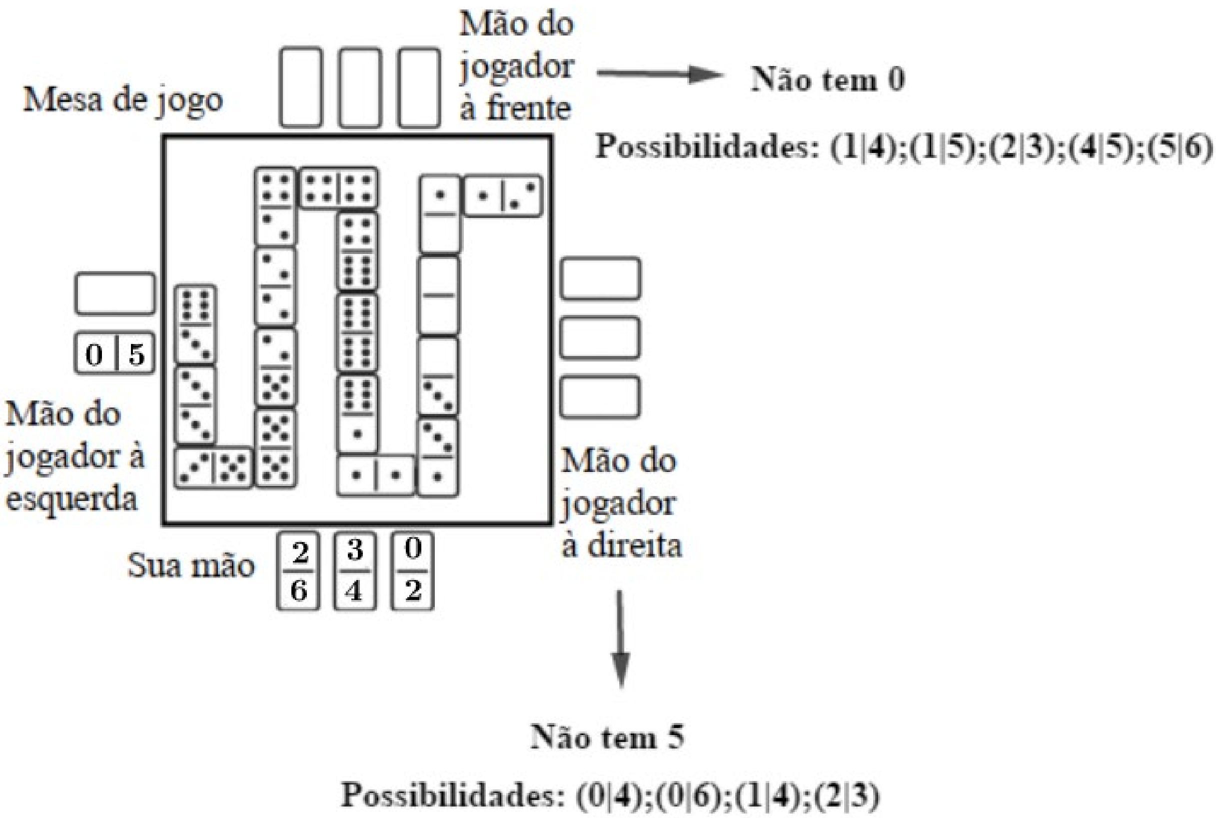
- A ordem das peças na mão de um jogador não importa.

Comentários

Dada a situação representada na figura 2, podemos notar que as peças que faltam são:

$$(0|4);\ (0|5);\ (0|6);\ (1|4);\ (1|5);\ (2|3);\ (4|5);\ (5|6)$$

De acordo com o enunciado, o jogador à direita não possui peças com 5 e o jogador à frente não possui peças com zero. Logo, a peça $(0|5)$ deve estar com o jogador à esquerda.



Perceba que a chave do problema é a peça $(2|3)$, e que apenas a minha mão está com as outras peças com o número 2. Para que eu ganhe o jogo, devo jogar a peça $(2|6)$ na ponta de número 6 e, assim, o jogador com a peça $(2|3)$ será forçado a jogar, deixando o jogo com as pontas 3 e 2. Na próxima rodada, nenhum jogador terá peças com o número 3 e, desse modo, jogo a peça $(3|4)$. Na última rodada, jogo a última peça de número 2 e ganho o jogo. A única possibilidade de perder seria se o jogador à esquerda ganhasse antes e isso ocorre se ele tiver com a peça 2|3. Vamos analisar as possibilidades:

1) Jogador à direita com $(\mathbf{2}|\mathbf{3})$ e:

- $(0|4); (0|6)$

Nesse caso, o jogador à frente pode ter as seguintes peças: $(1|4); (1|5); (4|5); (5|6)$
Quantidade de possibilidades: $C_{4,3} = 4$.

- $(0|4); (1|4)$

Peças possíveis do jogador à frente: $(1|5); (4|5); (5|6)$
Quantidade de possibilidades: $C_{3,3} = 1$.

- $(0|6); (1|4)$

Peças possíveis do jogador à frente: $(1|5); (4|5); (5|6)$
Quantidade de possibilidades: $C_{3,3} = 1$.
O total de possibilidades para o caso 1 é: $C_{4,3} + C_{3,3} + C_{3,3} = 4 + 1 + 1 = 6$.

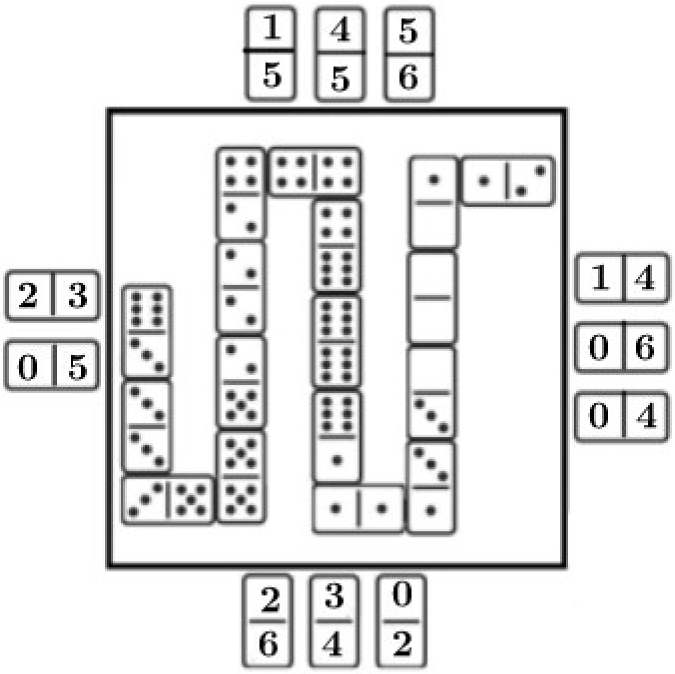
2) Jogador à frente com $(\mathbf{2}|\mathbf{3})$

Aqui, o jogador à esquerda terá as peças $(0|4); (0|6); (1|4)$, e o jogador à frente poderá ter duas das seguintes peças: $(1|5); (4|5); (5|6)$.

O total de possibilidades para o caso 2 é $C_{3,2} = 3$.

3) Jogador à esquerda com $(2|3)$

Esse é o único caso em que perco. O jogador à esquerda terá as peças $(2|3)$ e $(0|5)$. Conhecendo as possibilidades de peças dos outros jogadores, temos apenas uma configuração possível:



O total de possibilidades para o caso 3 é 1.

a) O total de configurações de peças nas mãos dos jogadores que garantem minha vitória é igual à soma do total das possibilidades do caso 1 com o total do caso 2. Portanto, temos $6 + 3 = 9$ possibilidades.

b) O total de configurações possíveis no jogo é dado pela soma de todos os casos: $6 + 3 + 1 = 10$. Logo, o percentual desse total em que venço é:

$$\frac{9}{10} = 90\%$$

Gabarito: a) 9 configurações b) 90%

---

26. (IME/2018)

Um ônibus escolar transporta n crianças. Sejam A o evento em que dentro do ônibus tenham crianças de ambos os sexos e B o evento em que há no máximo uma menina dentro do ônibus. Determine o valor de n para que os eventos A e B sejam independentes.

Comentários

Se os eventos são independentes, temos que:

$$P(A\backslash B) = P(A)$$

Contudo, temos:

$$P(A\backslash B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A)$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Então precisamos calcular $P(A)$, $P(B)$ e $P(A \cap B)$ e verificar a igualdade acima:

i) A probabilidade de que no ônibus tenham crianças de ambos os sexos é igual ao complementar da junção dos casos: só meninos e só meninas. Então a probabilidade de ter só meninos é $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e a probabilidade de ter só meninas é $\left(\frac{1}{2}\right)^n$, então:

$$P(A) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ii) A probabilidade de que haja no máximo uma menina é igual à soma das probabilidades de n meninos que é $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ e $(n-1)$ meninos e 1 menina que é $\binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$:

$$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

iii) A probabilidade da interseção $(A \cap B)$, então, significa que há $(n-1)$ meninos e 1 menina:

$$P(A \cap B) = \binom{n}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Então substituindo na equação de probabilidade condicional $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \cdot (n+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$n = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \cdot (n+1)$$

$$\frac{n}{n+1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{n+1}$$

Portanto, $n = 3$ é a solução da equação acima.

Gabarito: 3

---

27. (IME/2018)

João e Maria nasceram no século XX, em anos distintos. A probabilidade da soma dos anos em que nasceram ser 3875 é:

a) 2/99

b) 19/2475

c) 37/4950

d) 19/825

e) 19/485

Comentários

A probabilidade P da soma dos anos em que João e Maria nasceram ser 3875 pode ser dada pela fórmula:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}$$

O total de casos possíveis é igual a $100 \cdot 99 = 9900$, pois existem 100 maneiras de escolher o ano de nascimento de João (século XX começa no ano de 1901 e termina no ano de 2000) e 99 maneiras de escolher o ano de nascimento de Maria (pois é um ano distinto do ano de João).

Veja que são 74 casos favoráveis:

- $(1901{,}1974), (1902{,}1973), (1903{,}1972), \ldots, (1973, 1902), (1974, 1901)$

Assim, a probabilidade da soma dos anos em que João e Maria nasceram ser 3875 é:

$$P = \frac{74}{100 \cdot 99} = \frac{37}{4950}$$

$$\boxed{P = 37/4950}$$

Gabarito: "c"

28. (IME/2017)

Seja $A = \{1,2,3,4\}$.

- Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?
- Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetição. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

Comentários

1) O número de funções de A para A que têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem:

Inicialmente, podemos escolher os elementos do conjunto imagem de $\binom{4}{2}$ formas, desse modo, cada elemento do conjunto domínio pode apontar para os 2 elementos do conjunto imagem escolhidos, então, como existem 4 elementos no domínio, temos 2^4 possibilidades, contudo, estamos considerado os casos em que todos os elementos do domínio apontam para o mesmo elemento, o que pode ocorrer de duas formas diferentes, então, ficamos com $2^4 - 2$ possibilidades. Logo, o total de funções é:

$$\binom{4}{2} \cdot (2^4 - 2) = 6 \cdot 14 = 84\ funções$$

2) Se $f \circ g$ é constante, então, $f\big(g(x)\big) = k$, então, podemos analisar a imagem de g:

i) Se a imagem de g assumir 4 valores diferentes, então, temos: 4 formas de escolher k, $4!$ formas de escolher g e 1 forma de escolher f, pois ela acaba sendo determinada, então temos:

$$4 \cdot 4! = 96 \text{ possibilidades}$$

ii) Se a imagem de g assumir 3 valores diferentes, então:

Podemos escolher a imagem de g, escolhendo 3 valores dentre os 4 possíveis, então temos $\binom{4}{3}$ possibilidades.

Além disso, dois elementos de domínio de g devem apontar para o mesmo elemento, nesse caso, existem $\mathbf{3}$ possibilidades. As outras setas que saem do domínio de g podem ser escolhidas de $\binom{4}{2} \cdot 2!$ maneiras.

Também devemos perceber que o valor de k pode assumir $\mathbf{4}$ valores diferentes, e como g assume 3 valores diferentes, podemos ter $\mathbf{4}$ formas de escolher f. Assim, ao todo, temos:

$$\binom{4}{3} \cdot 3 \cdot \binom{4}{2} \cdot 2! \cdot 4 \cdot 4 = 2304$$

iii) Se g tem dois elementos em seu conjunto imagem:

Analogamente ao item A, temos que o número de funções de A em A que mapeiam 2 elementos no conjunto imagem é $\mathbf{84}$. Além disso, dado que possuímos uma função g cujo conjunto imagem possui 2 elementos, então os outros elementos podem mandar flechas aleatórias, temos $\mathbf{4^2}$ formas de escolher a função f, por fim, podemos escolher a constante k de $\mathbf{4}$ formas distintas. Assim, ao todo temos:

$$84 \cdot 4^2 \cdot 4 = 5376$$

iv) Se a imagem de g tem um elemento em seu conjunto imagem:

Podemos escolher g de $\mathbf{4}$ maneiras. Além disso, se a imagem de g possui 1 elemento podemos escolher f de $\mathbf{4^3}$ maneiras e o valor da constante k pode ser escolhido de $\mathbf{4}$ formas. Então temos:

$$4 \cdot 4^3 \cdot 4 = 1024$$

Por fim, ao todo, temos:

$$96 + 2304 + 5376 + 1024 = \boxed{8800} \text{ casos favoráveis}$$

Ademais, ao todo, temos $256 \cdot 256 = \boxed{2^{16}}$ casos possíveis, pois temos 256 funções possíveis e queremos escolher g e f.

Por fim, a probabilidade requisitada é dada por:

$$\frac{8800}{2^{16}} = \frac{275}{2048}$$

Gabarito: $\frac{275}{2048}$

---

29. (IME/2016)

Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

Comentários

A probabilidade de o jogo não acabar até a enésima vez é de nenhum jogador tirar um 6 em cada rodada, então a probabilidade é: $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Desse modo, podemos observar que, se n tende ao infinito, essa probabilidade tende a zero, ou seja, a probabilidade de o jogo não acabar em um número n muito grande é nula, então se o jogo seguir indefinidamente, alguém deve ganhar. Sendo, então, a probabilidade p_i de A ganhar dado que o jogo iniciou com i, temos que:

Se A começa o jogo, caso ele tire 6, ele pode ganhar com $\frac{1}{6}$ de probabilidade, caso ele tire 1, ele tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por C, pois agora será a vez de C, caso ele não tire 6 ou 1, ele tem $\frac{4}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por B, pois agora será a vez de B. Então a probabilidade de A vencer sabendo que A começou o jogo é:

$$p_a = \frac{1}{6} + \frac{4}{6} \cdot p_b + \frac{1}{6} \cdot p_c \ (I)$$

Se B começa o jogo, caso ele tire 1, A tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por A, pois agora será a vez de A, caso ele não tire 6 ou 1, A tem $\frac{4}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por C, pois agora será a vez de C.

$$p_b = \frac{4}{6} \cdot p_c + \frac{1}{6} \cdot p_a \ (II)$$

Se C começa o jogo, caso ele tire 1, A tem $\frac{1}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por B, pois agora será a vez de B, caso ele não tire 6 ou 1, A tem $\frac{4}{6}$ de probabilidade de ganhar se o jogo começar por A, pois agora será a vez de A.

$$p_c = \frac{4}{6} \cdot p_a + \frac{1}{6} \cdot p_b \ (III)$$

Portanto, de $(I), (II)$ e (III), temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 6p_a - 4p_b - p_c = 1 \\ p_a - 6p_b + 4p_c = 0 \\ 4p_a + p_b - 6p_c = 0 \end{cases}$$

Usando a regra de Cramer:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 \\ 4 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 79$$

$$D_{p_a} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & -1 \\ 0 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 32$$

Desse modo, temos que:

$$p_a = \frac{32}{79}$$

Gabarito: $\frac{32}{79}$

30. (IME/2016)

Os inteiros n e m são sorteados do conjunto $\{1,2,3,\ldots,2016\}$, podendo haver repetição. Qual a probabilidade do produto $n \times m$ ser múltiplo de 12?

a) $\frac{5}{12}$

b) $\frac{5}{18}$

c) $\frac{5}{24}$

d) $\frac{5}{36}$

e) $\frac{5}{144}$

Comentários

Podemos trabalhar com os restos na divisão por 12 dos números do conjunto, assim:

- de 1 a 12, temos todos os restos possíveis de 12 (0 a 11);
- de 13 a 24, temos todos os restos possíveis de 12 (0 a 11);
- de 25 a 36, temos todos os restos possíveis de 12 (0 a 11);
- ...
- de 1993 a 2004, temos todos os restos possíveis de 12 (0 a 11);
- de 2005 a 2016, temos todos os restos possíveis de 12 (0 a 11).

São ao todo 168 grupos de 12 números com um resto possível na divisão por 12. As combinações possíveis de dois números n e m que multiplicados dão um múltiplo de 12 são:

Resto de n	Resto de m	Número de casos
1	12	1
2	$6; 12$	2
3	$4; 8; 12$	3
4	$3; 6; 9; 12$	4
5	12	1
6	$2; 4; 6; 8; 10; 12$	6
7	12	1
8	$3; 6; 9; 12$	4
9	$4; 8; 12$	3
10	$6; 12$	2
11	12	1
12	$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12$	12

São, ao todo, 40 combinações possíveis para escolher dois números n e m tais que o produto seja múltiplo de 12. Para cada combinação os números podem ser escolhidos de qualquer grupo listados primeiramente. Assim como são 168 grupos, então a probabilidade é:

$$40 \cdot \frac{168 \cdot 168}{2016 \cdot 2016} = 40 \cdot \frac{1 \cdot 1}{12 \cdot 12} = \boxed{\frac{5}{18}}$$

Gabarito: "b"

31. (IME/2015)

O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é $0,9$. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é $0,02$. Em um determinado jogo de "X" contra "Y", o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

a) $0,80$

b) $0,98$

c) $180/181$

d) $179/181$

e) $170/181$

Comentários

A probabilidade P de "X" ter sido o favorito neste jogo pode ser dado pela fórmula:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}$$

O total de casos possíveis pode ser dado por $0,8 \cdot 0,9 + (1 - 0,8) \cdot 0,02 = 0,724$, que representa as possibilidades de "X" ser vencedor.

Já o número de casos favoráveis é dado pela possibilidade de ele ter sido vencedor e favorito, ou seja, $0,8 \cdot 0,9 = 0,72$.

Assim, a probabilidade P de "X" ter sido o favorito nesse jogo é:

$$P = \frac{0,72}{0,724} = \frac{720}{724} = \frac{180}{181}$$
$$\boxed{P = 180/181}$$

Gabarito: "c"

32. (IME/2013)

Um menino, na cidade do Rio de Janeiro, lança uma moeda. Ele andará 1 m para leste se o resultado for cara ou 1 m para oeste de o resultado for coroa. A probabilidade deste menino estar a 5 m de distância de sua posição inicial, após 9 lançamentos da moeda, é:

a) $\frac{9}{2^6}$

b) $\frac{35}{2^6}$

c) $\frac{2}{9!}$

d) $\frac{35}{2^9}$

e) $\frac{9!}{2^9}$

Comentários

Para que o menino esteja 5 metros para uma direção (leste ou oeste), ele precisa de 5 lançamentos iguais (cara ou coroa, respectivamente). Dos 9 lançamentos, os 4 restantes deverão ser tais que ele não mude de posição no final. Isso ocorre se, dos 4 lançamentos, 2 forem caras e 2 forem coroas, assim, um lançamento cara cancela a ação de um lançamento coroa. Desse modo, temos dois casos para analisar:

I) 7 lançamentos caras e 2 lançamentos coroas (menino está a 5 m a leste).

Seja $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8P_9$ as posições da ordem dos 9 lançamentos, temos então

$$C_9^2 = \frac{9!}{(9-2)!\cdot 2!} = \frac{9\cdot 8}{2} = 36$$

possibilidades para escolher as 7 posições para terem resultados cara. As posições restantes terão resultados coroa. O total de possibilidades de 9 lançamentos é dado por 2^9 (para cada posição temos duas opções, ou cara ou coroa). Assim, a probabilidade de o menino estar a 5 metros de distância de sua posição inicial neste caso é:

$$\frac{36}{2^9} = \frac{9}{2^7}$$

II) 2 lançamentos caras e 7 lançamentos coroas (menino está a 5 m a oeste).

O cálculo desse caso é análogo ao caso anterior. Portanto, a probabilidade nesse caso é:

$$\frac{36}{2^9} = \frac{9}{2^7}$$

Desse modo, a probabilidade final do menino estar a 5 metros de distância de sua posição inicial, nesse caso, é:

$$\frac{9}{2^7} + \frac{9}{2^7} = \boxed{\frac{9}{2^6}}$$

Gabarito: "a"

---

33. (IME/2012)

Em um aeroporto existem 12 vagas numeradas de 1 a 12, conforme a figura. Um piloto estacionou sua aeronave em uma vaga que não se encontrava nas extremidades, isto é, distintas das vagas 1 e da vaga 12. Após estacionar, o piloto observou que exatamente 8 das 12 vagas estavam ocupadas, incluindo a vaga na qual sua aeronave estacionou. Determine a probabilidade de que ambas as vagas vizinhas a sua aeronave estejam vazias.

1	2	3	...	10	11	12

a) 1/55

b) 2/55

c) 3/55

d) 4/55

e) 6/55

Comentários

A probabilidade P de ambas as vagas vizinhas à aeronave estejam vazias pode ser dada pela fórmula:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}$$

O total de casos possíveis pode ser dado por:

$$10 \cdot \binom{11}{7}$$

pois são 10 opções para a aeronave (qualquer vaga escolhida entre 2 a 11) e das 11 vagas restantes, temos que escolher 7 para serem ocupadas.

Considerando agora **vaga livre/aeronave/vaga livre** como um só elemento, então temos 10 vagas e 8 ocupadas inclusive o elemento trio. Temos então 10 maneiras de escolher uma posição para o elemento trio. Das 9 vagas restantes, temos que escolher 7 para serem consideradas ocupadas também. Portanto, o número de casos favoráveis é:

$$10 \cdot \binom{9}{7}$$

Assim, a probabilidade P de ambas as vagas vizinhas à aeronave estarem vazias é:

$$P = \frac{10 \cdot \binom{9}{7}}{10 \cdot \binom{11}{7}} = \frac{9!}{(9-7)! \cdot 7!} \cdot \frac{(11-7)! \cdot 7!}{11!} = \frac{9!}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{11 \cdot 10 \cdot 9!} = \frac{6}{55}$$

$$\boxed{P = 6/55}$$

Gabarito: "e"

---

34. (IME/2011)

O pipoqueiro cobra o valor de $\text{R\$ } 1{,}00$ por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de $\text{R\$ } 1{,}00$ e quatro uma nota de $\text{R\$ } 2{,}00$. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de $\text{R\$ } 2{,}00$ é:

a) $1/8$

b) $1/5$

c) $1/4$

d) $1/3$

e) $1/2$

Comentários

A probabilidade P de o pipoqueiro ter troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de dois reais pode ser dado pela fórmula:

$$P = \frac{n^{\underline{o}}\ de\ casos\ favoráveis}{total\ de\ casos\ possíveis}$$

O total de casos possíveis é $8!$, pois devemos enfileirar oito pessoas.

Para facilitar, vamos chamar as pessoas com moeda de um real de U e pessoas com nota de dois reais de D. Veja que, para cada D, deve existir à sua frente no mínimo um U. Já podemos concluir que a primeira pessoa da fila não pode ser D. Seja então $U\_U\_U\_U\_$ a ordem da fila onde _ pode ser preenchida com $D's$. Temos, então, as seguintes possibilidades de preencher:

- $UUUUDDDD$;
- $UUUDUDDD$;
- $UUUDDUDD$;
- $UUUDDDUD$;

- $UUDUUDDD$;
- $UUDUDUDD$;
- $UUDUDDUD$;
- $UUDDUUDD$;
- $UUDDUDUD$;
- $UDUUUDDD$;
- $UDUUDUDD$;
- $UDUUDDUD$;
- $UDUDUUDD$;
- $UDUDUDUD$.

São 14 possibilidades. Mas devemos levar em consideração que são pessoas diferentes e, portanto, devemos permutar as pessoas U entre elas e as pessoas D entre elas para cada possibilidade listada acima. Assim, o número de casos favoráveis é dado por:

$$14 \cdot 4! \cdot 4!$$

Assim, a probabilidade de o pipoqueiro ter troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de dois reais é:

$$\frac{14 \cdot 4! \cdot 4!}{8!} = \frac{14 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

Gabarito: “b”