CURSO INTENSIVO 2022

Física

ITA - 2022

Movimento harmônico simples (MHS)

Prof. Toni Burgatto

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Nesta aula vamos fazer um estudo completo de movimento harmônico simples. Este tema costuma ser cobrado junto com energia mecânica e o vestibular do ITA adora mesclar os assuntos em uma mesma questão.

Em MHS é muito útil saber derivar funções trigonométricas e saber algumas regras de derivação. Nos nossos vestibulares é como aparecer uma questão que se torna bem mais prática se você souber essas regrinhas.

Ao longo do material, foram utilizadas diversas vezes derivadas para demonstrar os resultados. Fique atento as regras e anote em seus resumos. Em pouco tempo você estará familiarizado com esse artifício matemático.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Introdução a MHS

1.1. Caracterização do Movimento

O movimento harmônico simples é um movimento oscilatório que respeita certas condições de movimento:

- Há a presença de uma força restauradora atuando continuamente sobre o sistema oscilante.
- A aceleração do sistema é diretamente proporcional ao deslocamento efetivo.
- A constante de proporcionalidade entre a aceleração e o deslocamento é um número real positivo.

1.1.1. Formulação física

Considere um sistema que oscila entre as posições A e B. Considere o segmento de reta ($\overline{AB}$) que liga os pontos A e B e a mediatriz desse segmento, passando pelo ponto O.

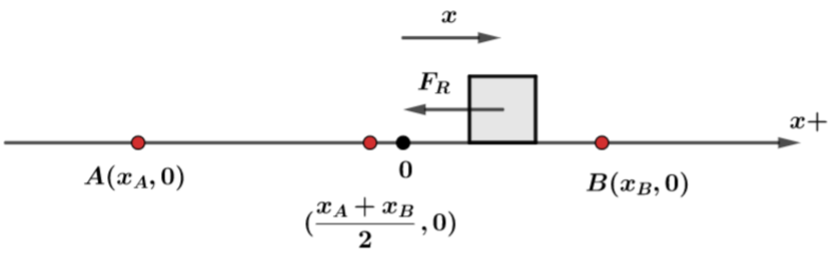


Figura 1: Esquema representativo de um movimento oscilatório em torno de um ponto O.

Para uma partícula puntiforme de massa $\boldsymbol{m}$, oscilando entre os pontos A e B, o ponto de equilíbrio é dado pelo ponto O. Para um ponto genérico P, entre os pontos A e B, a aceleração do corpo sempre se dirige para o ponto de equilíbrio. Isto é, sempre há atuação de uma força restauradora.

1.1.2. Alguns termos do movimento

(**A**) Amplitude (A):

É o máximo deslocamento, em relação ao ponto de equilíbrio O, que a partícula possui no movimento harmônico. Seu valor é dado por:

$$A = \left|\frac{x_A + x_B}{2}\right|$$

(**B**) Período de Oscilação (T)

É o tempo gasto pela partícula até que ela volte a repetir seu movimento.

(**C**) Frequência angular (ω)

É o número de revolução (em radianos) por unidade de tempo. Se a frequência do movimento é f e o período é T:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

2. Equação do MHS

Dizemos que um corpo possui um movimento hormônico simples quando:

> Um corpo executa um movimento harmônico simples se, e somente se, sua aceleração resultante for diretamente proporcional ao negativo do deslocamento.

Esta condição se traduz matematicamente para equação diferencial:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} \cdot x$$

$$\boxed{a = -\frac{K}{m} \cdot x}$$

Em que:

- $a = \frac{d^2x}{dt^2} - aceleração\ resultante\ do\ corpo.$
- $x - deslocamento\ instantâneo\ do\ corpo.$
- $K - constante\ de\ movimento.$
- $m - massa\ do\ corpo.$

No estudo de MHS, na maioria das vezes não estamos preocupados em resolver a equação diferencial, mas apenas chegar na equação que mostra a aceleração sendo diretamente proporcional a perturbação x.

2.1. Dedução matemática para a equação do movimento harmônico simples

2.1.1. Relação entre velocidade e deslocamento

Considere a equação diferencial para o movimento harmônico simples:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{K}{m} \cdot x$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $\frac{dx}{dt}$:

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)\right] \cdot \frac{dx}{dt} = -\frac{K}{m} \cdot x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\int v \cdot \frac{dv}{dt} = \int -\frac{K}{m} \cdot \frac{x \cdot dx}{dt}$$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{K}{m} \cdot \frac{x^2}{2} + c$$

Sendo c uma constante de integração. Para $x = A$ (amplitude de movimento), ou seja, o corpo atingiu o ponto mais longe da sua posição de equilíbrio e para retornar ao ponto inicial, a velocidade precisa mudar de sentido. Da cinemática, sabemos que nesse ponto a velocidade do corpo é nula:

$$0 = -\frac{K}{m} \cdot \frac{A^2}{2} + c \Longrightarrow c = \frac{K}{m} \cdot \frac{A^2}{2}$$

Assim, temos para a equação:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{K\cdot x^2}{2m}(A-x^2) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{A-x^2}$$

Definiremos a frequência angular do movimento como ω, assumindo o valor de:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{K}{m}}$$

Portanto, para um movimento harmônico simples:

$$\boxed{v = \omega\cdot\sqrt{A^2-x^2}}$$

2.1.2. Relação entre a aceleração e deslocamento

Após adotar o valor de ω, sabendo que $a = dv/dt$, chegamos que:

$$\boxed{a = -\omega^2\cdot x}$$

E essa equação da aceleração do MHS é muito importante, pois ela revela os pontos onde a aceleração terá módulo máximo e mínimo.

2.1.3. Equação do movimento em função do tempo

Se analisarmos e manipularmos a relação $(F{:}\ 2.1.2)$ temos:

$$\frac{dx}{\sqrt{A-x^2}} = \sqrt{\frac{K}{m}}\cdot dt$$

Integrando ambos os lados da equação:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{A-x^2}} = \int\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot dt \Rightarrow arc\ sen\left(\frac{x}{A}\right) = \omega\cdot t + c$$

$$\boxed{x(t) = A\cdot sen(\omega\cdot t + c)}$$

Esta relação mostra como a equação horária do corpo em função da amplitude do movimento e a frequência angular do MHS.

2.1.4. Período (T) de um movimento harmônico simples

A função seno é uma função periódica e, portanto, temos a seguinte relação:

$$sen(t) = sen(t+T), \qquad sendo\ T\ o\ período\ da\ função$$

Aplicando a propriedade na função horária da posição do corpo no MHS, temos:

$$A\cdot sen(\omega\cdot t + c) = A\cdot sen(\omega\cdot(t+T)+c)$$

$$sen(\omega \cdot t + c) = sen(\omega \cdot (t + T) + c)$$

Sem perda de generalidades, podemos adotar que a fase inicial do MHS é nula, isto é, $c = 0$. Então:

$$\omega \cdot t \ + \ + 2k\pi = \ \omega \cdot (t + T), \ \ com \ \ k \ \epsilon \, \mathbb{Z}$$

Para $k = 1$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Pela definição de frequência angular do MHS, podemos encontrar o período do movimento:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

2.1.5. Analogia gráfica

Considere uma caneta presa em um bloco preso em uma mola vertical. Um papel se move com velocidade constante na direção horizontal. O bloco oscila e a caneta risca o papel, como mostrado abaixo.

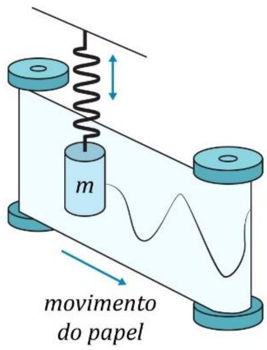


Figura 2: Representação esquemática de um MHS. A medida que o corpo de massa m oscila na vertical, o papel se movimenta na horizontal descrevendo como varia a posição do corpo em função do tempo.

A figura formada no papel é justamente uma função senoidal, conforme vimos nas demonstrações da função horária do MHS:

$$x(t) = A \cdot sen(\omega \cdot t + c)$$

2.1.6. Características do movimento

Considere uma mola presa em uma parede. A mola tem constante elástica K e um corpo de massa m está preso à mola. Inicialmente o bloco está em repouso e a mola não está distendida.

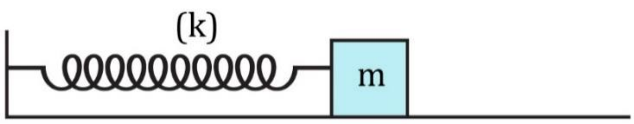


Figura 3: Representação de um sistema massa mola em MHS.

A mola é distendida A metros para a direita, em reação a sua posição de equilíbrio. Adota se um eixo horizontal positivo para a direita.

Vale ressaltar que a orientação do eixo adotado é sempre coincidente com o sentido positivo do deslocamento.

- Se o deslocamento ocorre para a direita, o sentido positivo do eixo estará para a direita.
- Se o deslocamento ocorre para a esquerda, o sentido positivo do eixo estará para a esquerda.

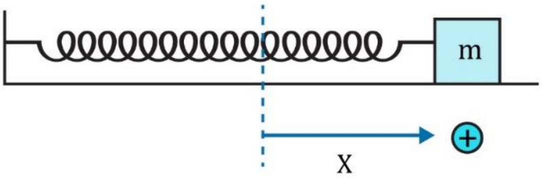


Figura 4: Massa após sofrer uma elongação.

Analisando o digrama de corpo livro para o corpo temos:

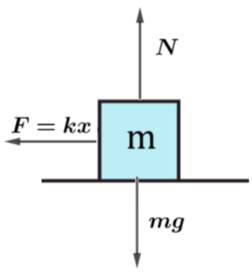


Figura 5: Diagrama de corpo livre no bloco.

Para a direção horizontal a força resultante é a força provocada pela mola. Na direção vertical a resultante é nula, pois o bloco não se move nessa direção.

A força elástica, resultante da direção horizontal, tem sentido oposto ao eixo adotado e, dado que a elongação da mola é A, temos:

$$F_R = -K \cdot A$$

Da segunda lei de Newton:

$$F_R = -K \cdot A = m \cdot a \Rightarrow a = -\frac{K}{m} \cdot A$$

A relação encontrada acima é justamente a expressão necessária e suficiente para a realização de um movimento harmônico simples. Deste modo, o corpo executa um MHS.

Analisaremos algumas posições do corpo, na execução do movimento harmônico simples. Considere a figura abaixo:

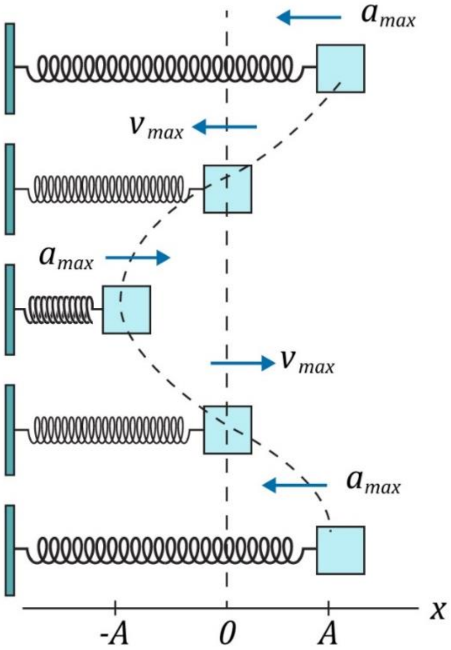


Figura 6: Características das velocidades e das acelerações no MHS.

Faremos uma tabela para analisar as velocidades, acelerações e equilíbrios nas posições mostradas acima. Para isso, basta analisar os pontos de máxima e de mínima amplitude, assim como o ponto onde a amplitude é nula nas expressões da velocidade e da aceleração do MHS.

Posição	Estado de Movimento	Aceleração	Velocidade	Deslocamento
A	O corpo possui aceleração máxima e velocidade nula. Está em um ponto de máximo deslocamento (amplitude A).	Para $x = A$: $\boxed{a_{máx} = -\omega^2 \cdot A}$	Para $x = A$: $\boxed{V = 0}$	É a própria amplitude A.
B	O corpo possui aceleração nula e velocidade máxima. Está momentaneamente em equilíbrio.	Para $x = 0$: $\boxed{a = 0}$	$\boxed{v_{máx} = -\omega \cdot A}$	O deslocamento é nulo.
C	O corpo possui aceleração máxima e velocidade nula. Está em um ponto de máximo deslocamento (amplitude A).	Para $x = -A$: $\boxed{a_{máx} = \omega^2 \cdot A}$	Para $x = -A$: $\boxed{V = 0}$	É a própria amplitude A.
D	O corpo possui aceleração nula e velocidade máxima.	Para $x = 0$:	$\boxed{v_{máx} = \omega \cdot A}$	O deslocamento é nulo.

	Está momentaneamente em equilíbrio.	$\boxed{a = 0}$		

2.2. Movimento circular

Considere um objeto em trajetória circular de raio A. O movimento é uniforme com velocidade linear V. O corpo parte de $x = A\ metros, y = 0\ metros$ no tempo $t = 0\ segundos$.

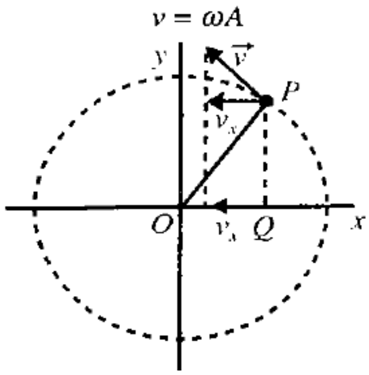


Figura 7: Objeto deslocando com velocidade angular constante em um movimento circular.

Para o movimento circular uniforme, temos:

$$\phi = \omega \cdot t$$

2.2.1. Posição

A projeção horizontal (eixo x) do movimento circular é dado por:

$$x = A \cdot cos\phi$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t) \qquad (I)$$

Podemos pensar, em primeira análise, que a expressão (I) é diferente da função horária do MHS encontrada anteriormente e, portanto, não seria um movimento harmônico simples. Entretanto, podemos fazer a seguinte operação:

$$cos\alpha = sen(90° - \alpha)$$

$$x(t) = A \cdot \cos(\ \omega \cdot t) = A \cdot sen\left(\frac{\pi}{2} - \omega \cdot t\right)$$

$$x(t) = -A \cdot sen\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (II)$$

Faremos nos tópicos seguintes a confirmação que o movimento apresentado pela equação (II) é um movimento harmônico simples.

2.2.2. Velocidade

A velocidade horizontal, decomposta em x, é dada por:

$$V_X(t) = -V \cdot sen\ \phi$$

$$V_X(t) = -V \cdot sen\ (\omega \cdot t) \qquad (III)$$

O sinal negativo indica que a velocidade está no sentido oposto ao sentido positivo do eixo x.

2.2.3. Aceleração

O movimento circular uniforme só apresenta aceleração centrípeta. Assim, faremos a decomposição da aceleração centrípeta na direção horizontal.

$$a_X(t) = -\frac{V^2}{R} \cdot cos\ \phi$$

$$a_X(t) = -\frac{V^2}{A} \cdot \cos(\ \omega \cdot t) \qquad (IV)$$

2.2.4. Verificação do movimento

Para ser um MHS, devemos verificar o cumprimento da seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 \cdot x = 0$$

Substituindo (I):

$$E = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(A \cdot \cos(\ \omega \cdot t))\right) + \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\ \omega \cdot t)$$

$$E = -\omega^2 \cdot A \cdot \cos(\ \omega \cdot t) + \omega^2 \cdot A \cdot \cos(\ \omega \cdot t)$$

$$E = 0$$

Portanto, a projeção horizontal de um movimento circular uniforme é um movimento harmônico simples.

Outra forma de verificar que é um MHS, seria manipular a expressão da aceleração $a_X(t)$ com a expressão de $x(t)$, da seguinte forma:

$$a_X(t) = -\frac{V^2}{A} \cdot \cos(\ \omega \cdot t) = -\frac{V^2}{A^2} \cdot A \cdot \cos(\ \omega \cdot t) = -\frac{V^2}{A^2} \cdot x(t)$$

Portanto:

$$a_X(t) = -\frac{V^2}{A^2} \cdot x(t)$$

Este resultado mostra que a aceleração é diretamente proporcional ao deslocamento x e, portanto, é um MHS.

2.2.5. Fórmulas para a prova do ITA e do IME

Listaremos a seguir as principais fórmulas para a aplicação direta de um movimento harmônico simples.

Vai cair na prova

Equações do movimento:

- Posição

$$\boxed{x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi_0)}$$

- Velocidade

$$\boxed{v(t) = -\omega \cdot A \cdot sen(\omega t + \varphi_0)}$$

- Aceleração

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot cos(\omega t + \varphi_0)}$$

$$\varphi_0 - Fase\ inicial\ do\ movimento$$

$$A - Amplitude$$

$$\omega - frequência\ angular$$

Relações entre as grandezas

$$\boxed{v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}}$$

$$\boxed{a = -\omega^2 \cdot x}$$

$$\boxed{v = \omega \cdot \sqrt{A^2 + \frac{a}{\omega^2}}}$$

1.

Uma partícula executa um MHS com $\omega = 4\pi \frac{rad}{s}$ com amplitude $A\ metros$. No instante inicial a partícula tem aceleração máxima possível para o movimento. A partícula é liberada do repouso em $t = 0\ s$, iniciando seu movimento. Se no instante t a partícula já percorreu $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot A\ metros$, determine t.

Comentário:

A equação do movimento é do tipo:

$$x(t) = A \cdot cos(\omega t + \varphi_0) \Rightarrow x(t) = A \cdot cos(4\pi t + \varphi_0)$$

Na posição de aceleração máxima: $x = A, \varphi_0 = 0$

$$x(t) = A \cdot cos(4\pi t)$$

Se a partícula percorreu $\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot A, x = \frac{A\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{A\sqrt{3}}{2} = A \cdot cos(4\pi t) \Rightarrow cos\left(\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = cos(4\pi t)$$

$$\pm \frac{\pi}{6} + 2k\pi = 4\pi t \Rightarrow \boxed{t = \left(\pm \frac{1}{24} + \frac{k}{2}\right) segundos,\ k \epsilon \mathbb{Z}}$$

2.

Uma partícula executa um MHS, oscilando entre dois pontos fixos separados de 20 cm. Se a velocidade máxima é de 30 cm/s. Encontre a velocidade quando o deslocamento é $x = 5\ cm$.

Comentário:

Dividindo as duas equações abaixo:

$$v = \omega \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$v_{máx} = \omega \cdot A$$

Temos:

$$\frac{v}{v_{máx}} = \frac{\sqrt{A^2-x^2}}{A} \Rightarrow \frac{v}{30} = \frac{\sqrt{10^2-5^2}}{10} \therefore \boxed{v = 20 \cdot \sqrt{3}\ cm/s}$$

3. Energia no MHS

A energia total (E) no movimento harmônico simples é a contribuição da energia potencial (U) e da energia cinética (K).

$$E_{TOTAL} = E_{CINÉTICA} + E_{POTENCIAL}$$

$$E = K + U$$

O movimento harmônico simples é definido pela equação:

$$F = -K \cdot x$$

O trabalho realizado pela força F é a energia potencial armazenada do sistema quando está deslocado x de sua posição de equilíbrio.

$$U=\int_0^X (K\cdot x)\cdot dx \Rightarrow \boxed{U(x)=\ K\cdot\frac{x^2}{2}}$$

Mas pela definição do ω, podemos reescrever a energia potencial da seguinte forma:

$$U(x)=\frac{m\omega^2x^2}{2}$$

Em função do tempo, faremos a substituição da equação $\mathrm{x(t)}=\mathrm{A}\cdot\cos(\omega t+\varphi_0)$:

$$U(t)=\ m\cdot\omega^2\cdot\frac{\mathrm{A}^2\cdot\cos^{2(\omega t+\varphi_0)}}{2}\therefore\boxed{U(t)=\frac{m\cdot\omega^2\cdot\mathrm{A}^2\cdot\cos^2(\omega t+\varphi_0)}{2}}$$

A energia cinética é dada por:

$$K=m\cdot\frac{V^2}{2}$$

Em função do tempo, faremos a substituição da equação $\mathrm{v(t)}=-\omega\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{se\,n}(\omega t+\varphi_0)$:

$$K=m\cdot\frac{(-\omega\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{se\,n}(\omega t+\varphi_0))^2}{2}\therefore\boxed{K(t)=\frac{m\cdot\omega^2\cdot\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{se\,n}^{\,2}(\omega t+\varphi_0)}{2}}$$

Deste modo, a energia total é dada por:

$$E=K+U$$

$$E=\frac{m\cdot\omega^2\cdot\mathrm{A}^2\cdot\mathrm{se\,n}^{\,2}(\omega t+\varphi_0)}{2}+\frac{m\cdot\omega^2\cdot\mathrm{A}^2\cdot\cos^2(\omega t+\varphi_0)}{2}$$

$$\boxed{E=\frac{m\cdot\omega^2\cdot\mathrm{A}^2}{2}=\frac{K\cdot A^2}{2}}$$

No fim das contas, temos a seguinte expressão:

$$E_{TOTAL}=E_{CINÉTICA}+E_{POTENCIAL}$$

$$\boxed{\frac{K\cdot A^2}{2}=m\cdot\frac{V^2}{2}+K\cdot\frac{x^2}{2}}$$

A figura abaixo relaciona graficamente as energias cinética e potencial no MHS.

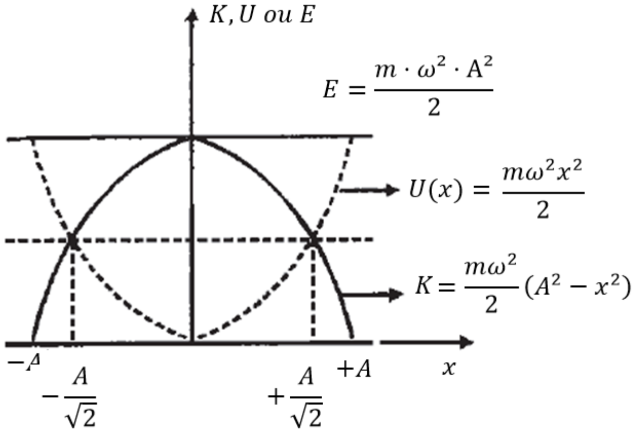


Figura 8: Gráfico da energia mecânica no MHS.

Alguns pontos interessantes para se notar:

- Quando a energia cinética é máxima a energia potencial é nula e vice-versa.
- Quando $x = 0$ a energia cinética é máxima e igual a energia total.
- Quando $x = \pm A$ a energia potencial é máxima e igual a energia total.
- As energias cinética e potencial são iguais no ponto $x = \pm A\sqrt{2}$.

Além disso, percebemos que a energia mecânica sempre se conversa no sistema. De um modo geral, podemos dizer que:

$$m \cdot \frac{V^2}{2} + K \cdot \frac{x^2}{2} = constante$$

4. Sistemas massa - mola

4.1. Método das forças

O método das forças consiste na análise da força resultante sobre um sistema quando afastamos ele da posição de equilíbrio.

Considere um bloco de massa m preso por uma mola de constante elástica k, presa à uma parede vertical, que inicialmente não está deformada. Afastamos o bloco por uma distância x da posição de equilíbrio. Não há atrito entre o corpo e o solo.

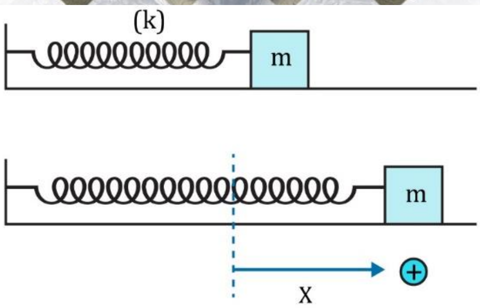


Figura 9: Sistema massa-mola.

Para análise da situação, seguiremos os seguintes passos:

- Adotaremos um eixo positivo no sentido de deslocamento do sistema. Se o sistema é deslocado para a direita, o eixo positivo estará apontado para a direita e vice-versa.
- Determinaremos as forças que atuam sobre o bloco. O sinal das forças em relação ao eixo adotado é de extrema importância.
- Aplica-se a segunda lei de Newton.

Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$Fr = m \cdot a \Rightarrow -K \cdot x = m \cdot a \therefore \boxed{a = -\frac{K}{m} \cdot x}$$

Pela definição da frequência angular no MHS, temos:

$$\omega^2 = \frac{m}{K}$$

Portanto, o período é dado por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Note que o período de oscilação é função da massa e da mola, não depende da deformação que a mola sofreu, desde que ela esteja trabalhando na sua região elástica.

4.2. Método das energias

Devido ao fato do sistema não possuir forças dissipativas (como por exemplo o atrito), a energia mecânica sistema sempre se conversa. Então:

$$m \cdot \frac{V^2}{2} + K \cdot \frac{x^2}{2} = constante$$

Fazendo a diferencial no tempo da expressão acima, o lado direito da igualdade torna-se nulo, pois é uma constante real. Assim:

$$\frac{d}{dt}\left(m\cdot\frac{V^2}{2}+K\cdot\frac{x^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(K\cdot\frac{x^2}{2}\right)+\frac{d}{dt}\left(m\cdot\frac{V^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{K\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2}+\frac{m\cdot 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}}{2}=0$$

$$\frac{K\cdot 2x\cdot\frac{dx}{dt}}{2}+\frac{m\cdot 2\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dv}{dt}}{2}=0\therefore K\cdot x+m\cdot\frac{dv}{dt}=0$$

$$K\cdot x+m\cdot a=0\Rightarrow a=-\frac{K}{m}\cdot x$$

Note que encontramos a mesma expressão para o sistema. É a clássica expressão que rege o movimento harmônico simples. Novamente, temos:

$$\omega^2=\frac{m}{K}\therefore\boxed{T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}}$$

Em ambos os casos não fizemos nenhuma consideração sobre a superfície de contato e as vizinhas do sistema massa-mola. Isso nos mostra, que o período só depende da constante elástica e da massa do bloco. Para todos os sistemas abaixo, de mesma massa do bloco e mesma constante da mola, os períodos são idênticos.

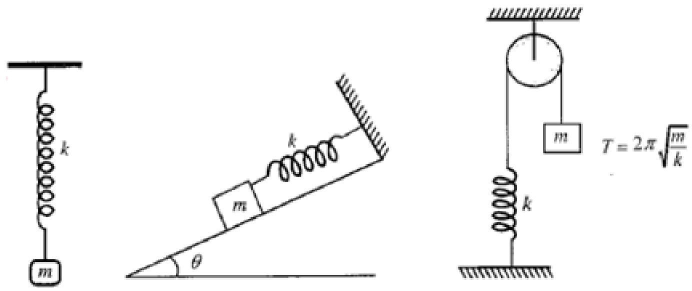


Figura 10: Representação de três sistema massa-molas diferentes, mas com o mesmo período, já que eles possuem a mesma relação m/k.

De um modo geral, para a análise energética do problema, soma-se todas as energias potenciais e cinéticas envolvidas no sistema e depois deriva-se no tempo igualando a zero.

$$U(x)+K(x)=constante$$

$$\boxed{\frac{dU(x)}{dt}+\frac{dK(x)}{dt}=0}$$

4.3. Combinação de molas

4.3.1. Cortes em molas

A constante elástica de uma mola é inversamente proporcional ao seu comprimento.

$$K \cdot L = constante$$

Isto é, se dividirmos uma mola de comprimento L, com constante elástica K, em n partes temos:

$$K \cdot L = k_1 \cdot L_1 = k_2 \cdot L_2 = \cdots = k_n \cdot L_n$$

$$K \cdot L = k_1 \cdot \frac{L}{n} = k_2 \cdot \frac{L}{n} = \cdots = k_n \cdot \frac{L}{n}$$

$$\boxed{K.n = k_1 = k_2 = \cdots = k_n}$$

4.3.2. Combinação em série

Quando um conjunto de n molas de constantes $k1, k2, \dots, kn$ são colocadas em série, podemos trocar todo o conjunto por uma mola equivalente de constante (K), tal que:

$$\boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \cdots + \frac{1}{k_2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k_i}}$$

Para a associação de duas molas:

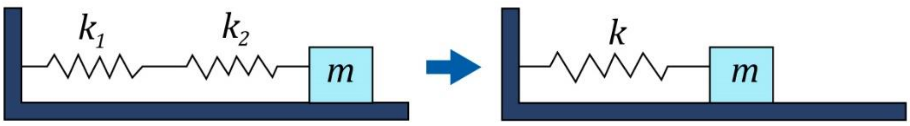


Figura 11: Associação de duas molas em série.

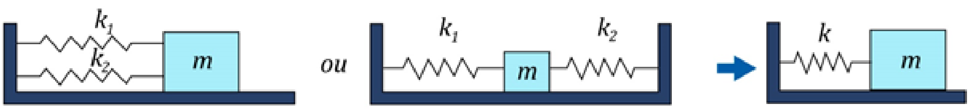
$$\boxed{\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

4.3.2. Combinação em paralelo

Quando um conjunto de n molas de constantes $k_1, k_2, \dots, k_n$ são colocadas em paralelo, podemos trocar todo o conjunto por uma mola equivalente de constante (K), tal que:

$$\boxed{K = k_1 + k_2 + \cdots + k_n = \sum_{i=1}^{n} k_i}$$

Para a associação de duas molas:

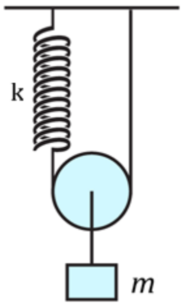


$$\boxed{K = k_1 + k_2}$$

As demonstrações de associações de mola já foram feitas na aula de força elástica. Caso tenha alguma dúvida, retorne à aula 04.

3.

Se o bloco é levemente deslocado da posição de equilíbrio, determine o período de pequenas oscilações do sistema.

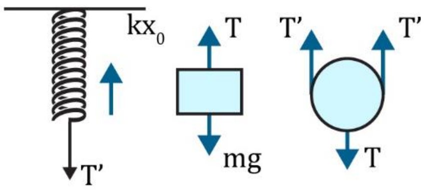


Comentário:

Considere a força de tração que atuam sobre o bloco e a mola. Se no bloco atua uma força de tração de módulo T, na mola atua uma força de tração de módulo $T/2$. Considerando os deslocamentos da mola (x') e do bloco (x), temos:

$$x' = 2x$$

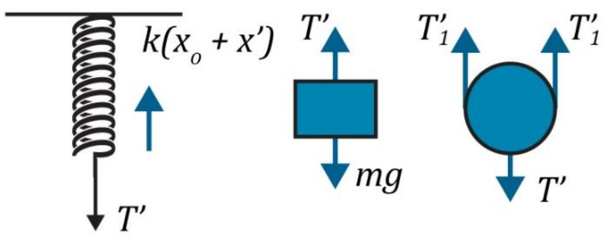
(I) Método das forças:



No equilíbrio:

$$\begin{cases} T = m \cdot g \\ 2T' = T \\ K \cdot x_0 = m \cdot g \end{cases}$$

Ao deslocar o bloco de uma distância x, verticalmente para baixo, temos:



$$\begin{cases} T_1 - m \cdot g = m \cdot a \\ 2T_1' - m \cdot g = m \cdot a \\ 2K \cdot (x' + x_0) - m \cdot g = m \cdot a \end{cases}$$

Das equações acima temos:

$$2K \cdot x' = m \cdot a;\ x' = 2x; a = -\frac{4K}{m}x \therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}}$$

(II) Método da energia:

$$m \cdot \frac{V^2}{2} + K \cdot \frac{(x'+x_0)^2}{2} - m \cdot g \cdot x = constante$$

Derivando no tempo:

$$m \cdot \frac{2 \cdot V \cdot \frac{dV}{dx}}{2} + K \cdot \frac{2(x'+x_0) \cdot \frac{dx\prime}{dt}}{2} - m \cdot g \cdot \frac{dx}{dt} = 0$$

Como $x' = 2x$

$$\frac{dx'}{dt} = 2\frac{dx}{dt}$$

$$m \cdot a + 2K(x' + x_0) - mg = 0$$

Na situação inicial:

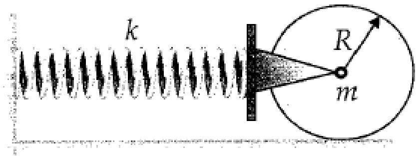
$$K(x_0) = mg$$

Assim:

$$a = -\frac{4K}{m}x \therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{4k}}}$$

4.

Um cilindro sólido é preso por uma mola de massa desprezível e pode rolar sem deslizar sobre uma superfície horizontal. Calcule o período de oscilações do cilindro. O cilindro tem massa m e a mola tem constante elástica K.



Comentário:

A melhor análise para esse exemplo é a análise energética:

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \frac{V^2}{2} + I_{CM} \cdot \frac{\omega^2}{2} + K \cdot \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

Em relação ao centro de massa temos:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

$$I = m \cdot R^2/2$$

$$\frac{d}{dt}\left(m \cdot \frac{V^2}{2} + m \cdot \frac{V^2}{4} + K \cdot \frac{x^2}{2}\right) = 0 \therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{2k}}}$$

5. Pêndulo

Estudaremos o caso de um ponto mássico preso por um fio, inextensível e perfeitamente flexível, preso em um suporte rígido. Esse ponto de massa oscilando com pequenas amplitudes é um movimento harmônico simples.

5.1. Pêndulo simples

5.1.1. Método dos torques

O comprimento do pêndulo simples é a distância entre o ponto de suspenso do fio e o centro de massa do corpo suspendido. Considere o instante de tempo em que o fio está defletido um pequeno ângulo θ em relação a horizontal.

O torque em relação ao ponto O é dado por:

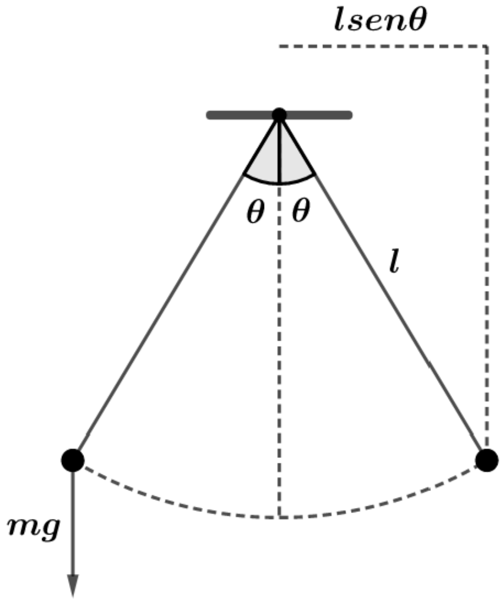


Figura 12: Esquema de um pêndulo simples.

$$\tau = \tau_{Peso} + \tau_{Tração}$$

$$\tau = mgl \cdot sen\theta + 0$$

Para ângulos pequenos: $sen\theta \approx \theta$

$$\tau = mgl \cdot \theta$$

A segunda lei de Newton para deslocamentos angulares é dada por:

$$\tau_R = I \cdot \alpha$$

O momento de inércia para o pêndulo é:

$$I = m \cdot l^2$$

E, portanto:

$$\tau = mgl \cdot \theta = -m \cdot l^2 \cdot \alpha$$

$$mgl \cdot \theta = -m \cdot l^2 \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \cdot \theta$$

Podemos associar novamente a ω^2. Então:

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

5.2. Pendulo simples em referencias acelerados

Veremos nesse tópico como determinar o período de oscilação de um pêndulo que tem seu ponto de suspensão acelerado.

5.2.1. Acelerações verticais

Considere o seguinte diagrama de corpo livre para um pêndulo que tem seu ponto de suspensão acelerado para cima a m/s².

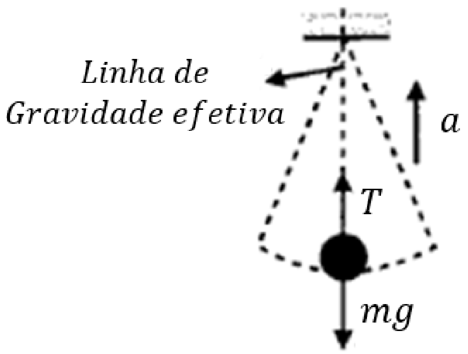


Figura 13: Diagrama de corpo livre em um pêndulo simples.

$$T - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow T = m \cdot (g + a)$$

Podemos encontrar a constante equivalente:

$$K_{eq} = \frac{T}{l} = \frac{m \cdot (g + a)}{l} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a}}$$

De forma geral, para acelerações verticais temos:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \pm a}}}$$

- É positivo quando a aceleração tem sentido oposto ao da gravidade g.
- É negativo quando a aceleração tem mesmo sentido da gravidade g.

5.2.2. Acelerações horizontais

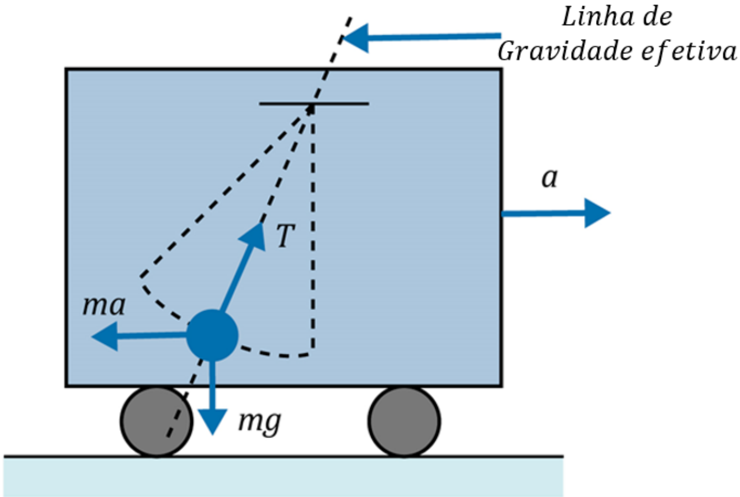


Figura 14: Vagão se movendo com a aceleração a para a direita.

$$K_{eq} = \frac{T}{l} = \frac{m \cdot \sqrt{a^2 + g^2}}{l} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}}$$

5.2.3. Planos inclinados

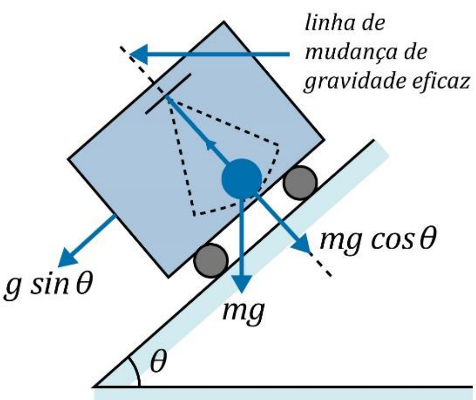


Figura 15: Vagão descendo um plano inclinado.

Faremos uma lei dos cossenos para encontrar a resultante da gravidade. A gravidade resultante é a aceleração efetiva "sentida" pela esfera que realiza as oscilações.

$$g_R = \sqrt{g^2 + (gsen\theta)^2 + 2g(gsen\theta)cos(90+\theta)}$$

$$g_R = g \cdot cos\theta$$

Depois de encontrar a gravidade resultante, podemos determinar a tração no corpo:

$$T = m \cdot g_R \Rightarrow T = m \cdot g \cdot cos\theta$$

Portanto, a constante equivalente é dada por:

$$K_{eq} = \frac{T}{l} = \frac{m \cdot g \cdot cos\theta}{l}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \therefore \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g \cdot cos\theta}}}$$

5.3. Pêndulo com comprimento de fio muito grande

Considere um pêndulo de comprimento l, que não é desprezível se comparado ao raio R da terra. Considere que o pêndulo executa um movimento harmônico simples com amplitude muito pequena.

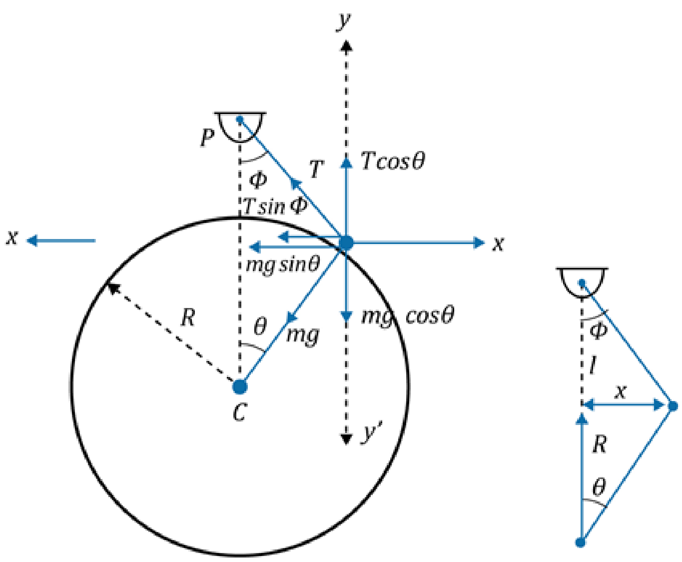


Figura 16: Diagrama de forças para um pêndulo com comprimento muito longo.

Em uma posição angular Φ, determinaremos a força resultante horizontal sobre esse pêndulo.

$$F_X = T \cdot sen\Phi + mg \cdot sen\theta$$

Como os ângulos são pequenos:

$$senx \approx x \Rightarrow F_X = T \cdot \Phi + mg \cdot \theta \quad (I)$$

A força resultante vertical é praticamente nula, pois as oscilações são de amplitude muito pequena.

$$F_y = T \cdot cos\Phi - mg \cdot cos\theta \approx 0 \Rightarrow T = mg \qquad (II)$$

Substituindo a equação (II) na equação (I):

$$F_X = mg \cdot (\Phi + \theta) \Rightarrow sen\theta \approx \theta = \frac{x}{R} \Rightarrow sen\Phi \approx \Phi = \frac{x}{l}$$

Portanto, temos:

$$F_X = mg \cdot \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l}\right) \cdot x \Rightarrow K_{eq} = \frac{F_X}{x}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{l}\right)}}}$$

(I) Para $\boldsymbol{l = R}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\right)}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{2g}}$$

(II) Para $\boldsymbol{l} \rightarrow \infty$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

5.4. Pêndulo simples em um líquido

Em um pêndulo simples de comprimento l está imerso em um líquido de densidade ρ. A esfera oscilante tem densidade σ.

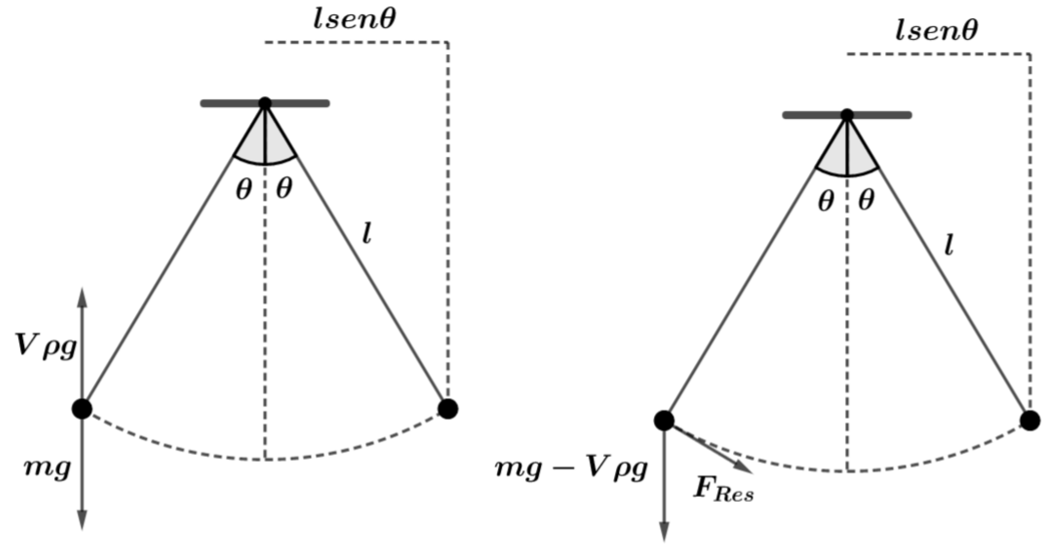


Figura 17: Pêndulo simples no interior de um líquido.

Para uma pequena perturbação horizontal, a força resultante horizontal é dada por:

$$F_X = (mg - V\rho g)sen\theta$$

$$F_X = -\left(g - \frac{V\rho g}{m}\right) \cdot \frac{x}{l}$$

Para a densidade do corpo, temos:

$$\sigma = \frac{m}{V}$$

$$F_X = -g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) \cdot \frac{x}{l}$$

A constante equivalente é dada por:

$$K_{eq} = \frac{T}{x} = \frac{g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right) \cdot \frac{x}{l}}{x}$$

Portanto, para o período é expresso por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\sigma}\right)}}}$$

5.5. Túnel em gravitação

Em um planeta de massa M e raio R é feito um túnel que atravessa o planeta, como na figura abaixo:

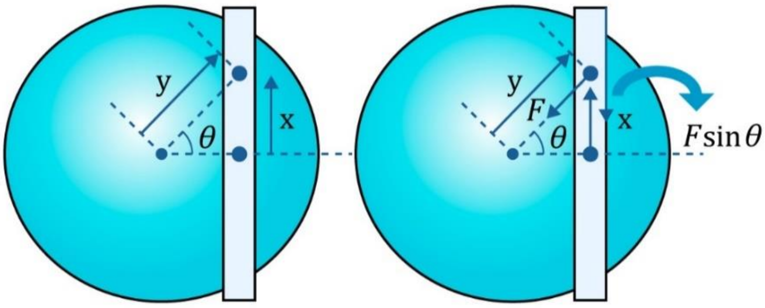


Figura 18: Esquema de um túnel em um planeta.

Considere um túnel que atravessa o planeta em uma posição genérica, como mostra a figura acima. Se uma massa m está a uma distância x do centro do túnel, a aceleração da partícula a uma distância y do centro do planeta é dada por:

$$-\frac{Fg}{m_{int}} = a \Rightarrow -\frac{\frac{G \cdot m \cdot m_{int}}{y^2}}{m} = a$$

$$-\frac{\frac{G \cdot m \cdot \frac{My^3}{R^3}}{y^2}}{m} = a \Rightarrow a = -\frac{GM}{R^3} \cdot y$$

A gravidade na superfície do planeta é dada por:

$$g = \frac{gM}{R^2} \Rightarrow a = -\frac{g}{R} \cdot y$$

Decompondo a aceleração na direção do movimento:

$$a_y = asen\theta = -\frac{g}{R} \cdot y \cdot sen\theta = -\frac{g}{R} \cdot y \cdot \frac{x}{y}$$

$$a_y = -\frac{g}{R} \cdot x$$

Comparando com as equações do movimento harmônico simples:

$$\omega^2 = \frac{g}{R} \Rightarrow \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}}$$

6. Oscilações e hidrostática

6.1. Corpos flutuantes

Um corpo flutuante é sempre um sistema de equilíbrio estável. Quando um deslocamento é realizado, surge uma força restauradora para voltar o sistema ao ponto de equilíbrio.

Considere um cilindro sólido de densidade σ, área de base A e altura h. O corpo flutua em equilíbrio estável em um líquido de densidade ρ. Considere que o comprimento submerso seja x.

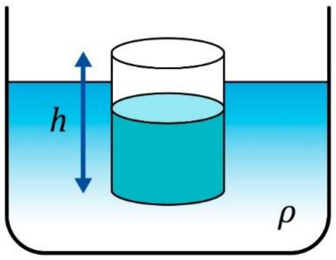


Figura 19: Corpo parcialmente submerso.

$$m \cdot g = \rho \cdot (A \cdot x) \cdot g \quad (I)$$

Um pequeno deslocamento vertical, para baixo, y é realizado no cilindro. A força resultante vertical sobre o cilindro é dada por:

$$Fr = m \cdot g - \rho \cdot (A \cdot (x + y)) \cdot g$$

$$Fr = m \cdot g - \rho \cdot (A \cdot x) \cdot g - \rho \cdot A \cdot g \cdot y \quad (II)$$

Substituindo a equação (I), vem:

$$Fr = -\rho \cdot A \cdot g \cdot y$$

A constante equivalente é dada por:

$$K_{eq} = \frac{Fr}{y}$$

Portanto, o período para este MHS é expresso por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{eq}}} = 2\pi \sqrt{\frac{A \cdot h \cdot \sigma}{K_{eq}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{h \cdot \sigma}{\rho \cdot g}}}$$

6.2. Tubos em U

Considere um tubo de seção uniforme posicionado em um plano vertical. Um líquido é colocado no tubo e espera-se o equilíbrio ser atingido. No equilíbrio a altura do líquido nos dois ramos são iguais.

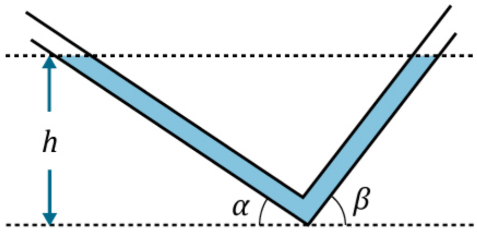


Figura 20: Tubo em U.

O sistema é levemente perturbado. No ramo esquerdo do tubo o líquido desce uma distância x. No ramo direito, em relação ao nível original do líquido, o líquido sobe $x + x'$.

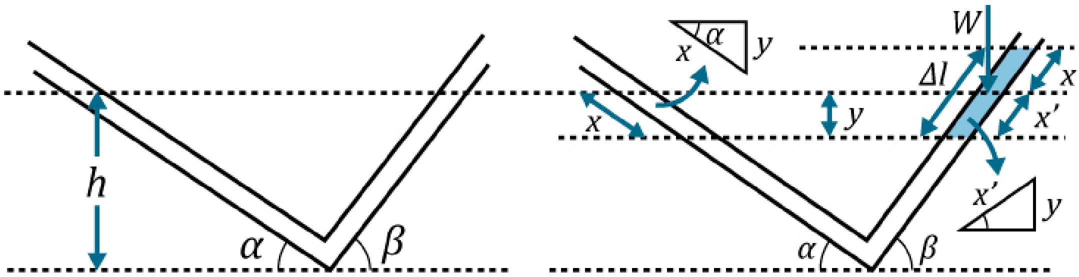


Figura 21: Diagrama de corpo livre no líquido.

O excesso de líquido no ramo da direita é dado por:

$$\Delta l = x + x'$$

Da geometria da figura:

$$x \cdot sen\alpha = x' \cdot sen\beta \Rightarrow x' = x \cdot \frac{sen\alpha}{sen\beta}$$

Assim:

$$\Delta l = x + x' = x + x \cdot \frac{sen\alpha}{sen\beta} \Rightarrow \Delta l = x \cdot \frac{sen\beta + sen\alpha}{sen\beta}$$

O excesso de líquido no ramo direito provoca uma força restauradora no sistema. O empuxo excedente de líquido é dado por:

$$W = \rho \cdot A \cdot \Delta l \cdot g$$

$$W = \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot \frac{sen\beta + sen\alpha}{sen\beta}$$

Em que A é a área de seção do tubo e ρ a densidade do líquido. A componente na direção do tubo do empuxo excedente é dada por:

$$F = W \cdot sen\beta$$

$$F = \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot (sen\beta + sen\alpha)$$

$$m \cdot a = \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot (sen\beta + sen\alpha)$$

$$a = \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot \frac{sen\beta + sen\alpha}{m}$$

Sendo a a aceleração. A massa total (m) de líquido no tubo é:

$$m = \rho \cdot V_{total}$$

$$V_{total} = \frac{h \cdot A}{sen\alpha} + \frac{h \cdot A}{sen\beta}$$

$$m = \rho \cdot h \cdot A \cdot \left(\frac{1}{sen\alpha} + \frac{1}{sen\beta}\right)$$

$$m = \rho \cdot h \cdot A \cdot \left(\frac{sen\beta + sen\alpha}{sen\alpha \cdot sen\beta}\right)$$

Substituindo na expressão da aceleração:

$$a = \rho \cdot A \cdot g \cdot x \cdot \frac{sen\beta + sen\alpha}{\rho \cdot h \cdot A \cdot \left(\frac{sen\beta + sen\alpha}{sen\alpha \cdot sen\beta}\right)}$$

$$a = g \cdot x \cdot \frac{sen\alpha \cdot sen\beta}{h}$$

Comparando com as equações do movimento harmônico simples, vem:

$$\omega^2 = g \cdot \frac{sen\alpha \cdot sen\beta}{h}$$

Logo, o período para esse MHS é dado por:

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g \cdot sen\alpha \cdot sen\beta}}}$$

7. Lista de exercícios

1. (ITA - 1970)

Dispõe-se de uma mola de massa desprezível e de 1,00 m de comprimento, e de um corpo cuja massa é igual a 2,00 kg. A mola está apoiada horizontalmente, sobre uma mesa, tendo um extremo fixo e o outro preso à massa, podendo esta deslizar, sem atrito, sobre a mesa. Puxa-se a massa de modo que a mola tenha 1,20 m de comprimento e verifica-se que, para mantê-la em equilíbrio nessa situação, é preciso aplicar uma força de 1,60 N. Algum tempo depois, solta-se a massa, que passa a executar um movimento oscilatório. Com estes dados pode-se afirmar que:

a) a energia potencial máxima da mola é 0,32 J;

b) a energia cinética máxima do sistema é 2,16 J;

c) não é possível calcular a energia armazenada na mola, pois, não se sabe quanto tempo ela ficou distendida;

d) a massa executa, depois que passa a oscilar, um movimento harmônico simples de período 3,1 segundos.

e) a energia cinética da massa é 0,16 J quando, em oscilação, a massa estiver a uma distância de 0,80 m do extremo fico.

2. (ITA - 1970)

Dois pêndulos simples são abandonados a partir de uma posição P em que eles se tocam, como ilustra a figura. Sabendo-se que os comprimentos dos pêndulos estão na razão $L_2/L_1 = 4/9$, e que os períodos são T_1 e T_2 depois de quanto tempo t eles se tocarão novamente?

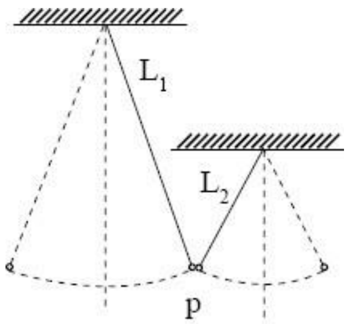
a) $t = 3\ T_1$

b) $t = 2\ T_1$

c) $t = 4\ T_2$

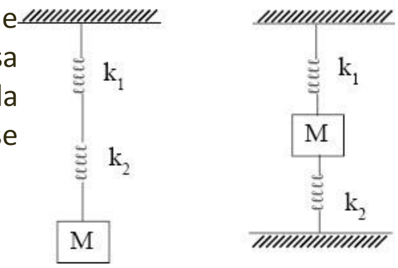
d) $t = 9\ T_1$

e) eles nunca se tocarão outra vez.



3. (ITA - 1970)

Com duas molas de massa desprezível e constantes k_1 e k_2, e um corpo de massa M, monta-se o sistema indicado pela figura a e verifica-se que a massa M, oscila com um período T_1. Em seguida, monta-se o sistema indicado pela figura b e verifica-se que a massa M oscila com um período T_2. Pode-se afirmar que:



a) T_1 e T_2, quaisquer que sejam os valores de k_1 e k_2

b) $T_1 = T_2$, se $k_1 = k_2$

c) $T_1 < T_2$

d) $T_1 > T_2$

e) $T_1 = 2\ T_2$ se $k_1 = 2\ k_2$

4. (ITA – 1974)

Na figura, que representa a combinação de dois movimentos harmônicos simples em eixos perpendiculares $x = A\, sen\, \omega t$ e $y = B\, sen\, (\omega t + a)$ sendo a um número positivo, qual das expressões abaixo não poderá representá-lo?

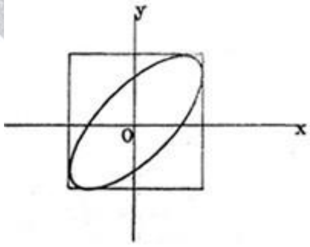
a) $a = 0$

b) $0 < a < \pi/2$

c) $\pi < a < 3\pi/2$

d) $0 < a < 3\pi/2$

e) $0 < a < \pi/4$



5. (ITA – 1975)

Dois movimentos harmônicos simples estão caracterizados no gráfico abaixo. Podemos afirmar

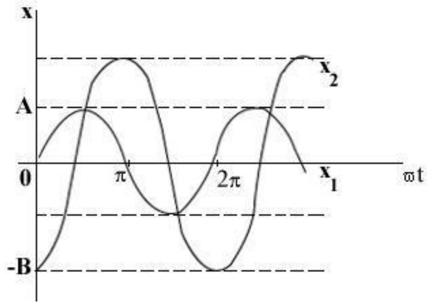
a) $x_1 = A\,sen\,(\omega t + \frac{\pi}{2}),\, x_2 = B\,sen\,(\omega t - \frac{\pi}{2})$

b) $x_1 = A\,cos(\omega t - \frac{\pi}{2}),\, x_2 = B\,cos\,(\omega t + \pi)$

c) $x_1 = A\,cos\,(\omega t - \frac{\pi}{2}),\, x_2 = -B\,cos\,(\omega t + \pi)$

d) $x_1 = A\,sen\,(\omega t + \frac{\pi}{2}),\, x_2 = -B\,sen\,(\omega t - \frac{\pi}{2})$

e) N.D.A



6. (ITA -1976)

Uma partícula desloca-se no plano (x, y) de acordo com as equações: $X = a \cdot cos\omega t$ e $y = b \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, em que a, b, ω e α são constantes positivas.

a) a partícula realiza um movimento harmônico simples para qualquer valor de α.

b) a partícula realiza um movimento harmônico simples somente se α for nulo.

b) a partícula realiza um movimento circular uniforme se a = b e $\alpha = 45°$

d) a partícula descreverá uma elipse se a = b e $\alpha = 270°$

e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

7. (ITA – 1978)

Dois corpos de massa "M" e "m" acham-se suspensos, verticalmente, por intermédio de uma mola ideal de constante "K", conforme mostra a figura. O fio que prende o corpo de massa "m", rompe-se em R, deixando cair o corpo de massa "m", provocando uma oscilação no corpo de massa "M". Pode-se afirmar que a amplitude e o período "T" deste movimento serão dados, respectivamente, por:

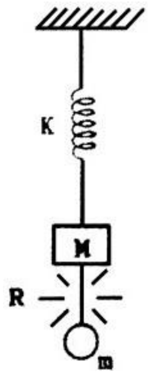
a) mg/K e $T = 2\pi\sqrt{m/K}$

b) mg/K e $T = 2\pi\sqrt{M/K}$

c) Mg/K e $T = 2\pi\sqrt{m/K}$

d) Mg/K e $T = 2\pi\sqrt{M/K}$

e) (M + m) g/K e $T = 2\pi\sqrt{(M+m)/K}$



8. (ITA – 1980)

Uma partícula de massa m realiza um movimento harmônico simples de amplitude A, em torno da posição de equilíbrio, O. Considerando nula a energia potencial para a partícula em O, calcular a elongação para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial.

9. (ITA - 1982)

Uma bolinha de massa m está oscilando livremente com movimento harmônico simples vertical, sob a ação de uma mola de constante elástica k. Sua amplitude de oscilação é A. Num dado instante, traz-se um recipiente contendo um líquido viscoso e obriga-se a partícula a oscilar dentro desse líquido. Depois de um certo tempo, retira-se novamente o recipiente com o líquido e constata-se que a partícula tem velocidade dada pela expressão: $v = v_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Desprezando as perdas de calor para o meio circundante e sabendo que o líquido tem capacidade calorífica C, podemos afirmar que a variação de sua temperatura foi de:

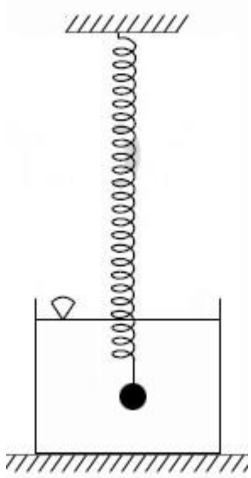


Fig. 2

a) zero

b) é impossível calculá-la sem conhecer amplitude do movimento final.

c) $(KA^2 - mv^2_0) / 2C$

d) KA^2/C

e) $(KA^2 - mv^2_0) / C$

10. (ITA – 1987)

Dois pêndulos simples, respectivamente de massas m_1 e m_2 e comprimento l_1 e l_2 são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constata-se que a cada quatro ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida identicamente. Nessas condições pode-se afirmar que necessariamente:

a) O pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.

b) O pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.

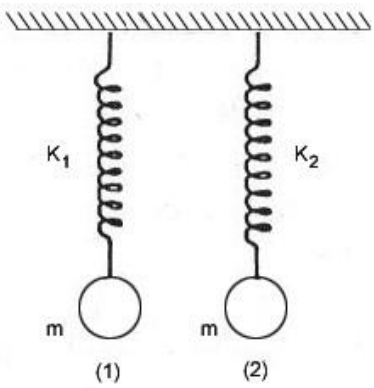
c) $8\sqrt{l_1/l_2}$ é um número inteiro.

d) $6\sqrt{l_1/l_2}$ é um número inteiro.

e) $m1 \cdot l_1 = 2m2 \cdot l_2$

11. (ITA - 1988)

Duas molas ideais, sem massa e de constantes de elasticidade k_1 e k_2, sendo $k_1 < k_2$, acham-se dependuradas no teto de uma sala. Em suas extremidades livres penduram-se massas idênticas. Observa-se que, quando os sistemas oscilam verticalmente, as massas atingem a mesma velocidade máxima. Indicando por A_1 e A_2 as amplitudes dos movimentos e por E_1 e E_2 as energias mecânicas dos sistemas (1) e (2), respectivamente, podemos dizer que:



a) $A_1 > A_2$ e $E_1 = E_2$

b) $A_1 < A_2$ e $E_1 = E_2$

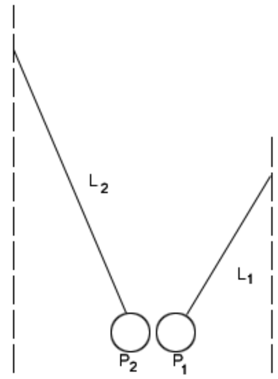
c) $A_1 > A_2$ e $E_1 > E_2$

d) $A_1 < A_2$ e $E_1 < E_2$

e) $A_1 < A_2$ e $E_1 > E_2$

12. (ITA - 1989)

Dois pêndulos simples, P_1 e P_2, de comprimento L_1 e L_2, estão indicados na figura. Determine L_2 em função de L_1 para que a situação indicada na figura se repita a cada 5 oscilações completas de P_1 e 3 oscilações completas de P_2.



a) $L_2 = 1{,}66L_1$.

b) $L_2 = 2{,}77\ L_1$.

c) $L_2 = 0{,}60\ L_1$.

d) $L_2 = 0{,}36L1$.

e) $L_2 = 15\ L_1$.

13. (ITA - 1990)

Uma experiência foi realizada para se determinar a diferença no valor da aceleração da gravidade, g(A) e g(B), respectivamente, em dois pontos A e B de uma certa área. Para isso construiu-se um pêndulo simples de comprimento l e mediu-se no ponto A o tempo necessário para 100 oscilações obtendo-se 98 s. No ponto B, para as mesmas 100 oscilações, obteve-se 100 s. Neste caso pode-se afirmar que:

a) g(A) < g(B) e a diferença é aproximadamente de 5%

b) g(A) < g(B) e a diferença é aproximadamente de 4%

c) g(A) > g(B) e a diferença é aproximadamente de 2%

d) somente se pode fazer qualquer afirmativa a respeito dos valores de g(A) e g(B) e se conhecemos o valor de l.

e) nenhuma das anteriores acima é satisfatória.

14. (ITA - 1991)

A equação $x = 1 \cdot sen(2t)$ expressa a posição de uma partícula em unidades do sistema internacional. Qual seria a forma do gráfico $v\ (velocidade) \times x\ (posição)$ desta partícula?

a) Uma reta paralela ao eixo de posição.

b) Uma reta inclinada passando pela origem.

c) Uma parábola.

d) Uma circunferência.

e) Uma elipse.

15. (ITA - 1993)

Um pêndulo simples oscila com um período de 2,0 s. Se cravarmos um pino a uma distância $3l/4$ do ponto de suspensão e na vertical que passa por aquele ponto, como mostrado na figura, qual será o novo período do pêndulo? Desprezar os atritos. Considere ângulos pequenos tanto antes quanto depois de atingir o pino.

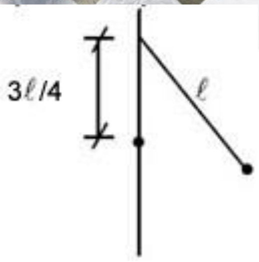
a) 1,5 s

b) 2,7 s

c) 3,0 s

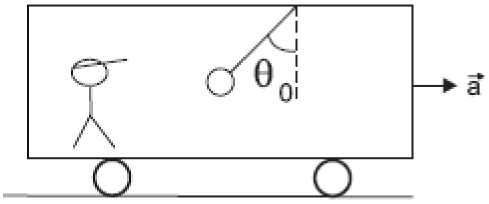
d) 4,0 s

e) o período de oscilação não se altera



16. (ITA - 1998)

No início do século, Albert Einstein propôs que forças inerciais, como aquelas que aparecem em referenciais acelerados, sejam equivalentes às forças gravitacionais. Considere um pêndulo de comprimento L suspenso no teto de um vagão de trem em movimento retilíneo com aceleração constante de módulo a, como mostra a figura. Em relação a um observador no trem, o período de pequenas oscilações do pêndulo ao redor da sua posição de equilíbrio θ_0 é:



a) $2\pi\sqrt{L/g}$

b) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{g^2-a^2}}$

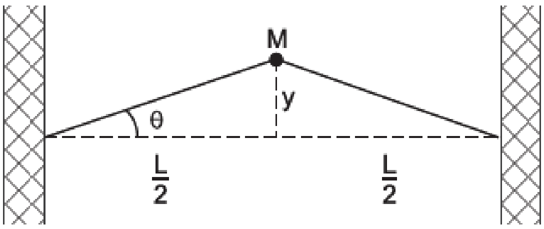
c) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{ag}}$

d) $2\pi\sqrt{L/(g+a)}$

e) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{g^2+a^2}}$

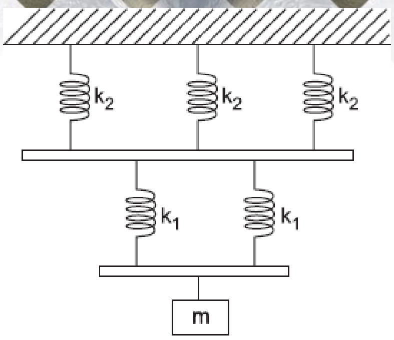
17. (ITA – 2007 Adaptada)

Uma bolinha de massa M é colada na extremidade de dois elásticos iguais de borracha, cada qual de comprimento $L/2$, quando na posição horizontal. Desprezando o peso da bolinha, esta permanece apenas sob a ação da tensão T de cada um dos elásticos e executa no plano vertical um movimento harmônico simples, tal que $senx \approx tgx \approx x$. Considerando que a tensão não se altera durante o movimento, o período deste vale:



18. (ITA – 2007)

Um sistema massa-molas é constituído por molas de constantes k_1 e k_2, respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa m, como mostrado na figura. Determine a frequência desse sistema.



19. (ITA – 2008)

Uma partícula P_1 de dimensões desprezíveis oscila em movimento harmônico simples ao longo de uma reta com período de 8/3 s e amplitude a. Uma segunda partícula, P_2, semelhante a P_1, oscila de modo idêntico numa reta muito próxima e paralela à primeira, porém com atraso de $\pi/12$ rad em relação a P_1. Qual a distância que separa P_1 de P_2, 8/9 s depois de P_2 passar por um ponto de máximo deslocamento?

a) 1,00a b) 0,29a c) 1,21a d) 0,21a e) 1,71a

20. (ITA – 2015)

Na figura, as linhas cheias, tracejada e pontilhada representam a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula em um movimento harmônico simples. Com base nessas curvas assinale a opção correta dentre as seguintes proposições:

I. As linhas cheia e tracejada representam, respectivamente, a posição e a aceleração da partícula.

II. As linhas cheia e pontilhada representam, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula.

III. A linha cheia necessariamente representa a velocidade da partícula.

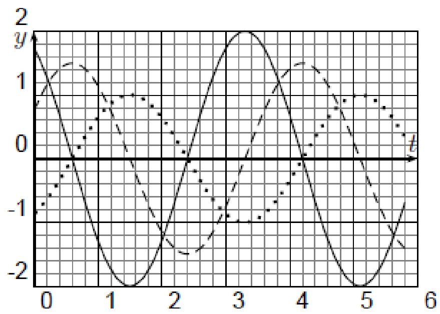
a) apenas I é correta.

b) apenas II é correta.

c) apenas III é correta.

d) todas são incorretas.

e) Não há informações suficientes para análise.



21. (ITA – 2016)

Um pêndulo simples é composto por uma massa presa a um fio metálico de peso desprezível. A figura registra medidas do tempo T em segundos, para 10 oscilações seguidas do pêndulo ocorridas ao longo das horas do dia, t. Considerando que neste dia houve uma variação térmica total de 20°C, assinale o valor do coeficiente de dilatação térmica do fio deste pêndulo.

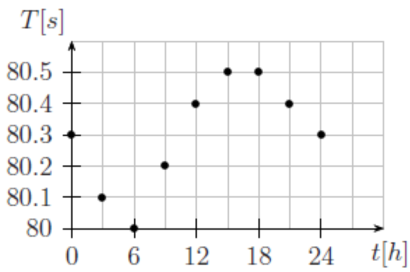
a) $2 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

b) $4 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

c) $6 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

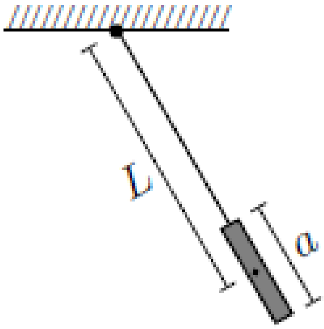
d) $8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

e) $10 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$



22. (ITA – 2017)

Na figura, um tubo fino e muito leve, de área de seção reta S e comprimento a, encontra-se inicialmente cheio de água de massa M e massa específica ρ. Graças a uma haste fina e de peso desprezível, o conjunto forma um pêndulo simples de comprimento L medido entre o ponto de suspensão da haste e o centro de massa inicial da água. Posto a oscilar, no instante inicial começa a pingar água pela base do tubo a uma taxa constante $r = -\Delta M/\Delta t$. Assinale a expressão da variação temporal do período do pêndulo.



a) $2\pi\sqrt{L/g}$

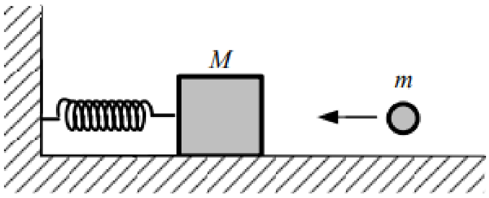
b) $\frac{2\pi\sqrt{\rho LS - rt}}{\sqrt{\rho \cdot S \cdot g}}$

c) $\frac{2\pi\sqrt{\rho LS + rt}}{\sqrt{\rho S g}}$

d) $\frac{2\pi\sqrt{2\rho LS - rt}}{\sqrt{2\rho S g}}$

e) $\frac{2\pi\sqrt{2\rho LS + rt}}{\sqrt{2\rho S g}}$

23. (IME – 2020)



Um sistema mecânico, composto por um corpo de massa M conectado a uma mola, está inicialmente em equilíbrio mecânico e em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, conforme mostra a figura. Um projétil esférico de massa m é disparado na direção horizontal contra a massa M, provocando um choque perfeitamente inelástico que inicia uma oscilação no sistema.

Dados:

• $M = 10\ kg$;

• $m = 2\ kg$;

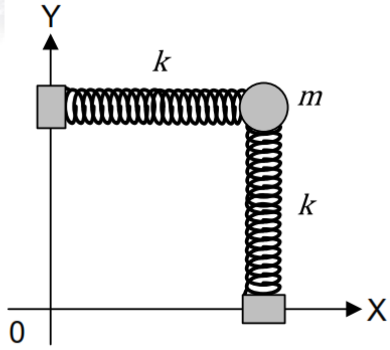
• amplitude de oscilação do sistema $=\ 0{,}4\ m$; e

• frequência angular $= 2\ rad/s$

A velocidade do projétil antes do choque entre as massas M e m, em m/s, é:

(A) 0,8 (B) 1,6 (C) 2,4 (D) 4,8 (E) 9,6

24. (IME – 2020)



Uma partícula, inicialmente em repouso sobre o plano horizontal XY, está presa a duas molas idênticas, cada uma solidária em sua outra extremidade a um cursor que pode movimentar-se sobre seu respectivo eixo, como mostrado na figura. As molas são rígidas o suficiente para se deflexionarem apenas nas direções ortogonais de seus respectivos eixos aos quais estão presas. No instante $t = 0$, a partícula é puxada para o ponto de coordenadas $\left(\frac{11}{10}L, \frac{12}{10}L\right)$ e é lançada com velocidade inicial $\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\omega L, 0\right)$.

Determine:

a) as equações das componentes de posição, velocidade e aceleração da partícula nos eixos X e Y, em função do tempo;

b) a área no interior da trajetória percorrida pela partícula durante o movimento.

Dados:

- massa da partícula: m;
- constante elástica das molas: k;
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
- comprimento das molas não flexionadas: L.

Observações:

- o plano XY é totalmente liso;
- não há influência da gravidade no movimento da partícula;
- os cursores deslizam sem atrito pelos eixos;
- as coordenadas X e Y da partícula são sempre positivas.

25.

Assinale o item que contém a afirmativa falsa.

a) O período de um pêndulo simples aumenta com o aumento do ângulo máximo de desvio em relação à posição de equilíbrio.

b) O período de um pêndulo simples depende do ângulo máximo de abertura mesmo quando estes são pequenos.

c) Uma força constante atuando sobre uma partícula que executa MHS não altera a velocidade máxima e nem o período do movimento, considerando a mesma amplitude.

d) Se passar a atuar uma força da forma $F = -\,bv$ em uma partícula que executava um MHS presa a uma mola ideal, a amplitude do movimento diminui com o tempo.

e) Para que haja um MHS, a partícula deve estar nas proximidades de um equilíbrio estável.

26.

Um bloco unido a uma mola vertical é puxado para baixo $4\ cm$ em relação à posição de equilíbrio e depois solto. A aceleração inicial do bloco é $0{,}16\ m/s^2$ para cima. Determine a equação do movimento.

a) $0{,}4sen\left(2t+\frac{3\pi}{2}\right)\ m$

b) $4sen\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\ cm$

c) $4sen\left(2t+\frac{5\pi}{2}\right)\ cm$

d) $0{,}04sen\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)\ m$

e) $4sen\left(2t+\frac{3\pi}{2}\right)\ cm$

27.

A figura mostra um sistema oscilador em repouso, onde a mola está deformada 6 cm. Repentinamente, o bloco é impulsionado para a base do plano notando-se uma aceleração máxima de 4 m/s². Quanto percorre o bloco durante os primeiros $3\pi/20$ segundos?

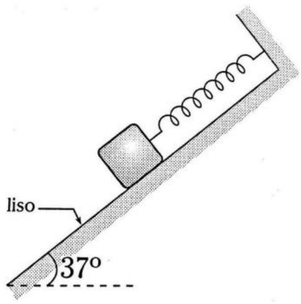
a) 11 cm

b) 12 cm

c) 13 cm

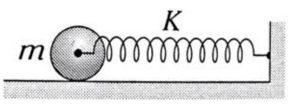
d) 14 cm

e) 15 cm



28.

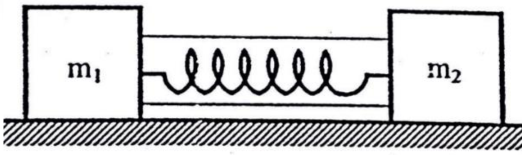
Uma mola ideal está unida a um cilindro homogêneo como mostra a figura. Se soltarmos o cilindro na posição em que a mola está estirada, observamos que esse cilindro roda sem deslizar e o centro de massa deste realiza um MHS. Determine o período de oscilações.



a) $2\pi\sqrt{\frac{3M}{2K}}$ b) $\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$ c) $\pi\sqrt{\frac{3M}{K}}$ d) $\pi\sqrt{\frac{M}{3K}}$ e) $2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

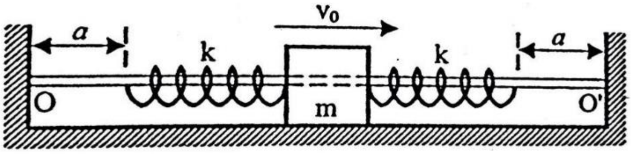
29.

Dois blocos, de massa m_1 e m_2, são ligados por uma mola de rigidez k. A mola está comprimida com a ajuda de fios. Os fios são cortados. Determinar o período das oscilações dos blocos.



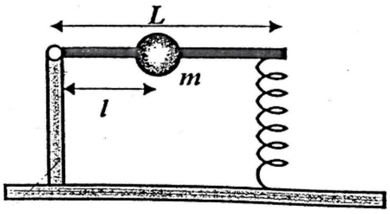
30.

Um corpo de massa m pode deslizar ao longo de um eixo horizontal OO' entre duas paredes verticais. A ambos lados do corpo estão sujeitas molas sem peso de igual rigidez k. Quando o corpo estiver situado simetricamente entre as paredes, as distâncias dos extremos livres das molas até as paredes serão iguais a a. Se ao corpo comunica-se a velocidade V_0, este passa a oscilar entre as paredes. Qual o período dessas oscilações.



31.

Uma vara rígida de comprimento L está sujeita por um extremo a um eixo horizontal (por onde pode girar livremente sem atrito) e pelo outro extremo está ligada uma mola de constante elástica k. Determine o período das pequenas oscilações da vara em função das posições l e da massa m.



32. (IPHO)

Uma pequena massa é presa na extremidade de uma mola ideal e posta a oscilar na vertical em sua frequência natural f. Se a mola é cortada ao meio e a mesma massa é presa em uma das extremidades, qual é a nova frequência natural f' de oscilação.

33.

Dois pêndulos simples de comprimento l cada um estão ligados por uma mola de peso desprezível, como mostra a figura 1. O coeficiente de elasticidade da mola é igual a k. Em equilíbrio, os pêndulos estão na posição vertical e a mola não se deforma. Determinar a frequência das pequenas oscilações dos dois pêndulos unidos no caso em que foram inclinados, em ângulo iguais, para lados diferentes.

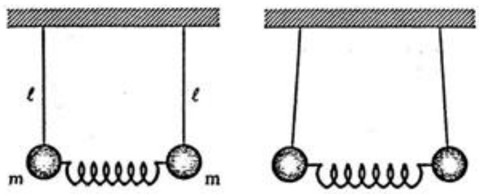


figura 1 figura 2

8. Gabarito sem comentários

1. D
2. A
3. D
4. A
5. B
6. E
7. B
8. $x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}}$
9. C
10. C
11. C
12. B
13. E
14. E
15. A
16. E
17. $2\pi\sqrt{\frac{ML}{4T}}$
18. $f = \frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\sqrt{\frac{6\cdot k_1\cdot k_2}{m\cdot(2\cdot k_1+3\cdot k_2)}}$
19. D
20. D
21. C
22. E
23. D
24. Ver comentários
25. B
26. E
27. B
28. A
29. $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m_1\cdot m_2}{k\cdot(m_1+m_2)}}$
30. $T = \frac{4a}{v_0} + 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m}{k}}$
31. $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{m\cdot l}{k\cdot L}}$
32. $f' = f\sqrt{2}$
33. $T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{\frac{2\cdot k\cdot l}{m}+g}}$

9. Lista de exercícios comentada

1. (ITA - 1970)

Dispõe-se de uma mola de massa desprezível e de 1,00 m de comprimento, e de um corpo cuja massa é igual a 2,00 kg. A mola está apoiada horizontalmente, sobre uma mesa, tendo um extremo fixo e o outro preso à massa, podendo esta deslizar, sem atrito, sobre a mesa. Puxa-se a massa de modo que a mola tenha 1,20 m de comprimento e verifica-se que, para mantê-la em equilíbrio nessa situação, é preciso aplicar uma força de 1,60 N. Algum tempo depois, solta-se a massa, que passa a executar um movimento oscilatório. Com estes dados pode-se afirmar que:

a) a energia potencial máxima da mola é 0,32 J;

b) a energia cinética máxima do sistema é 2,16 J;

c) não é possível calcular a energia armazenada na mola, pois, não se sabe quanto tempo ela ficou distendida;

d) a massa executa, depois que passa a oscilar, um movimento harmônico simples de período 3,1 segundos.

e) a energia cinética da massa é 0,16 J quando, em oscilação, a massa estiver a uma distância de 0,80 m do extremo fico.

Comentários:

O aluno pode adotar dois métodos de solução. O primeiro sendo por eliminação das alternativas:

1) O sistema em MHS possui energia mecânica total fixa (visto que a mesa não tem atrito). A energia mecânica total é dada pela soma da energia cinética e potencial elástica. Nos extremos do MHS, a energia cinética é nula e tem-se somente energia potencial. Portanto, a energia potencial nos extremos é:

$$E_P = k \cdot \frac{x^2}{2} = (k \cdot x) \cdot \frac{x}{2} = 1{,}6 \cdot \frac{0{,}2}{2} = 0{,}16\, J$$

Como esta é a energia potencial nas extremidades do movimento:

$$E_M = 0{,}16\, J$$

Portanto, a energia mecânica total é de $0{,}16\, J$. (A, B e C já foram eliminadas). Pelo equilíbrio citado na questão:

$$1{,}6 = k \cdot 0{,}2 \Rightarrow k = 8\, \frac{N}{m}$$

Assim, a energia mecânica na situação fornecida pela alternativa E é:

$$E_M = E_P + E_C$$

$$0{,}16 = 8 \cdot \frac{0{,}2^2}{2} + E_C \Rightarrow E_C = 0{,}16 - 0{,}16 \Rightarrow E_C = 0\, J$$

Portanto, a única alternativa viável é letra D.

2) O segundo método é pelo cálculo direto do período.

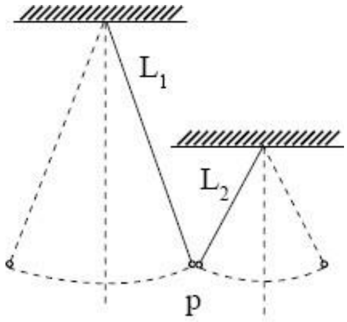
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{2}{8}} \cong 3{,}1\, s$$

Gabarito: D

---

2. (ITA - 1970)

Dois pêndulos simples são abandonados a partir de uma posição P em que eles se tocam, como ilustra a figura. Sabendo-se que os comprimentos dos pêndulos estão na razão $L_2/L_1 = 4/9$, e que os períodos são T_1 e T_2 depois de quanto tempo t eles se tocarão novamente?



a) $t = 3\,T_1$

b) $t = 2\,T_1$

c) $t = 4\,T_2$

d) $t = 9\,T_1$

e) eles nunca se tocarão outra vez.

Comentários:

O período de um pêndulo simples é dado por:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\sqrt{\frac{L_1}{g}}}{\sqrt{\frac{L_2}{g}}} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = \frac{3}{2} \Rightarrow T_1 = \frac{3}{2} \cdot T_2$$

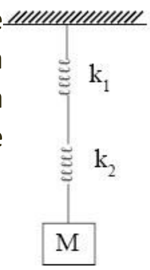
Portanto, quando o pêndulo 2 realizar 2 períodos completos, o pêndulo 1 realizará 3 períodos completos. Portanto, se encontrarão novamente após $2 \cdot T_2$ ou $3 \cdot T_1$. Assim, a resposta é letra A.

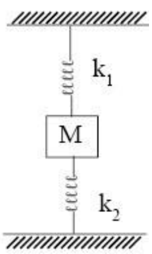
Gabarito: A

---

3. (ITA - 1970)

Com duas molas de massa desprezível e constantes k_1 e k_2, e um corpo de massa M, monta-se o sistema indicado pela figura a e verifica-se que a massa M, oscila com um período T_1. Em seguida, monta-se o sistema indicado pela figura b e verifica-se que a massa M oscila com um período T_2. Pode-se afirmar que:





a) T_1 e T_2, quaisquer que sejam os valores de k_1 e k_2

b) $T_1 = T_2$, se $k_1 = k_2$

c) $T_1 < T_2$

d) $T_1 > T_2$

e) $T_1 = 2\,T_2$ se $k_1 = 2\,k_2$

Comentários:

Para a situação inicial, as molas estão em série. Portanto:

$$\frac{1}{k_{eq,1}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{eq,1} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

Para a situação final, as molas estão em paralelo, portanto:

$$k_{eq,2} = k_1 + k_2$$

Assim, o período T_1 é dado por:

$$T_1 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k_{eq,1}}} \text{ e } T_2 = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{m}{k_{eq,2}}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_{eq,2}}{k_{eq,1}}} = \sqrt{\frac{(k_1 + k_2)^2}{k_1 \cdot k_2}} \therefore \frac{T_1}{T_2} = \sqrt{\frac{k_1^2 + k_2^2}{k_1 \cdot k_2} + 2} > 1$$

Restam somente duas possibilidades, D e E. Substituindo os valores de E, vê-se que a afirmativa é falsa. Portanto, a resposta correta é D.

Gabarito: D

---

4. (ITA – 1974)

Na figura, que representa a combinação de dois movimentos harmônicos simples em eixos perpendiculares $x = A\,sen\,\omega t$ e $y = B\,sen\,(\omega t + a)$ sendo a um número positivo, qual das expressões abaixo não poderá representá-lo?

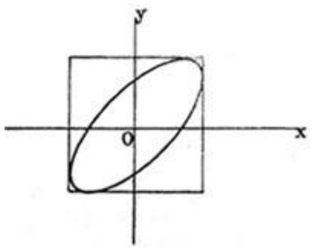
a) $a = 0$

b) $0 < a < \pi/2$

c) $\pi < a < 3\pi/2$

d) $0 < a < 3\pi/2$

e) $0 < a < \pi/4$



Comentários:

O "a" representa um atraso entre os movimentos harmônicos. Como pode-se notar pela imagem, existe algum atraso, portanto $a = 0$ não faz sentido. Outra forma de se pensar é que se $a = 0$, a figura seria de uma elipse horizontal ou vertical, jamais diagonal.

Gabarito: A

---

5. (ITA – 1975)

Dois movimentos harmônicos simples estão caracterizados no gráfico abaixo. Podemos afirmar

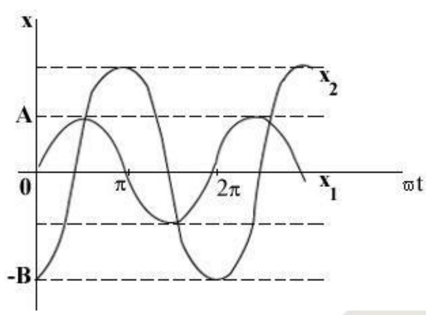
a) $x_1 = A\,sen\,(\omega t + \frac{\pi}{2}), x_2 = B\,sen\,(\omega t - \frac{\pi}{2})$

b) $x_1 = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), x_2 = B\cos(\omega t + \pi)$

c) $x_1 = A\cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), x_2 = -B\cos(\omega t + \pi)$

d) $x_1 = A\,sen\,(\omega t + \frac{\pi}{2}), x_2 = -B\,sen\,(\omega t - \frac{\pi}{2})$

e) N.D.A



Comentários:

Pontos a notar: $x_1(0) = 0$ e $x_2(0) = -B$. Com isso, começa-se a analisar as alternativas:

- A letra A é invalida para $x_1(0)$;

- A letra B é válida tanto para $x_1(0)$ quanto para $x_2(0)$;

- A letra C é válida para $x_1(0)$ mas não para $x_2(0)$;

- A letra D é inválida tanto para $x_1(0)$ quanto para $x_2(0)$.

Gabarito: B

---

6. (ITA -1976)

Uma partícula desloca-se no plano (x, y) de acordo com as equações: $X = a \cdot cos\omega t$ e $y = b \cdot \cos(\omega t + \alpha)$, em que a, b, ω e α são constantes positivas.

a) a partícula realiza um movimento harmônico simples para qualquer valor de α.

b) a partícula realiza um movimento harmônico simples somente se α for nulo.

b) a partícula realiza um movimento circular uniforme se a = b e $\alpha = 45°$

d) a partícula descreverá uma elipse se a = b e $\alpha = 270°$

e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

Comentários:

Tendo a posição em função do tempo, pode-se encontrar a aceleração em função do tempo através de duas derivações.

$$a_x = a \cdot \omega^2 \cdot (-\cos\omega \cdot t) = -\omega^2 \cdot X$$

$$a_y = b \cdot \omega^2 \cdot (-\cos(\omega \cdot t + \alpha)\,) = -\omega^2 \cdot Y$$

Portanto, está definido um MHS em cada eixo separadamente. Entretanto, para o movimento como um todo não se caracteriza um MHS, visto que para que se tenha um MHS no plano:

$$a = -\omega^2 \cdot R$$

Em que a é a aceleração ao longo do MHS e R é a distância até o ponto de equilíbrio (no nosso caso a origem). Neste problema:

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \Rightarrow |a| = \omega^2 \cdot \sqrt{X^2 + Y^2} = \omega^2 \cdot R$$

Gabarito: E

---

7. (ITA – 1978)

Dois corpos de massa “M” e “m” acham-se suspensos, verticalmente, por intermédio de uma mola ideal de constante “K”, conforme mostra a figura. O fio que prende o corpo de massa “m”, rompe-se em R, deixando cair o corpo de massa “m”, provocando uma oscilação no corpo de massa “M”. Pode-se afirmar que a amplitude e o período “T” deste movimento serão dados, respectivamente, por:

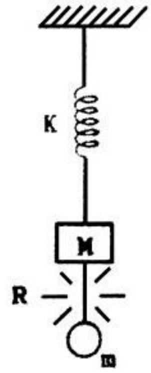
a) mg/K e $T = 2\pi\sqrt{m/K}$

b) mg/K e $T = 2\pi\sqrt{M/K}$

c) Mg/K e $T = 2\pi\sqrt{m/K}$

d) Mg/K e $T = 2\pi\sqrt{M/K}$

e) (M + m) g/K e $T = 2\pi\sqrt{(M+m)/K}$



Comentários:

Primeiro deve-se calcular a posição de equilíbrio do sistema (sem o corpo “m”) e em seguida calcular-se a posição a partir do qual se inicia o MHS. A diferença entre estas duas posições será a amplitude. A posição de equilíbrio é:

$$K \cdot x = M \cdot g \Rightarrow x = M \cdot \frac{g}{K}$$

A posição inicial é dada por:

$$K \cdot x' = (M + m) \cdot g \Rightarrow x' = (M + m) \cdot \frac{g}{K}$$

$$x' - x = \frac{g}{K} \cdot m = Amplitude$$

O período é dado por (sistema massa mola comum):

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}}$$

Gabarito: B

---

8. (ITA – 1980)

Uma partícula de massa m realiza um movimento harmônico simples de amplitude A, em torno da posição de equilíbrio, O. Considerando nula a energia potencial para a partícula em O, calcular a elongação para a qual a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial.

Comentários:

Considerando a posição de afastamento máximo do equilíbrio ($O \pm A$), temos que a energia mecânica do sistema é:

$$E_M = k \cdot \frac{A^2}{2}$$

Portanto, como há conservação de energia mecânica, e pede-se a posição em que a energia cinética é igual ao dobro da energia potencial:

$$E_M = E_P + E_C$$

$$E_M = E_P + 2 \cdot E_P = 3E_P \Rightarrow E_P = \frac{E_M}{3}$$

$$k \cdot \frac{x^2}{2} = k \cdot \frac{A^2}{6} \Rightarrow x^2 = \frac{A^2}{3} \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}}$$

Gabarito: $x = \pm\frac{A}{\sqrt{3}}$

---

9. (ITA - 1982)

Uma bolinha de massa m está oscilando livremente com movimento harmônico simples vertical, sob a ação de uma mola de constante elástica k. Sua amplitude de oscilação é A. Num dado instante, traz-se um recipiente contendo um líquido viscoso e obriga-se a partícula a oscilar dentro desse líquido. Depois de um certo tempo, retira-se novamente o recipiente com o líquido e constata-se que a partícula tem velocidade dada pela expressão: $v = v_0 \cdot \cos(\omega t + \varphi)$. Desprezando as perdas de calor para o meio circundante e sabendo que o líquido tem capacidade calorífica C, podemos afirmar que a variação de sua temperatura foi de:

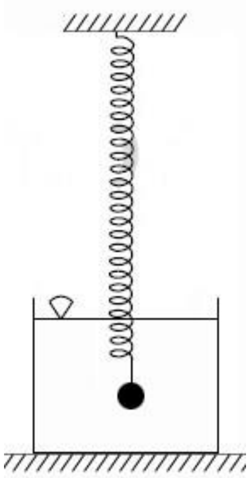


Fig. 2

a) zero

b) é impossível calculá-la sem conhecer amplitude do movimento final.

c) $(KA^2 – mv^2{}_0) / 2\ C$

d) KA^2/C

e) $(KA^2 – mv^2{}_0) / C$

Comentários:

Basta calcular-se a variação da energia mecânica. Inicialmente a energia mecânica podia ser calculada tomando-se a energia potencial nos limites do MHS:

$$E_{M_1} = K \cdot \frac{A^2}{2}$$

Ao fim da imersão, como tem-se a função que define a velocidade da partícula, ao calcular-se a energia cinética quando a velocidade é máxima, tem-se também a energia mecânica do sistema:

$$E_{M_2} = \frac{mv_0^2}{2}$$

$$\Delta E_M = \frac{K \cdot A^2 - mv_0^2}{2}$$

$$\Delta E_M = C \cdot \Delta T \therefore \Delta T = \frac{K \cdot A^2 - mv_0^2}{2 \cdot C}$$

Gabarito: C

10. (ITA – 1987)

Dois pêndulos simples, respectivamente de massas m_1 e m_2 e comprimento l_1 el_2 são simultaneamente abandonados para pôr-se em oscilação. Constata-se que a cada quatro ciclos do primeiro a situação inicial é restabelecida identicamente. Nessas condições pode-se afirmar que necessariamente:

a) O pêndulo 2 deve oscilar mais rapidamente que o pêndulo 1.

b) O pêndulo 2 deve oscilar mais lentamente que o pêndulo 1.

c) $8\sqrt{{}^{l_1}/_{l_2}}$ é um número inteiro.

d) $6\sqrt{{}^{l_1}/_{l_2}}$ é um número inteiro.

e) $m1 \cdot l_1 = 2m2 \cdot l_2$

Comentários:

Sabe-se pelo enunciado que a cada 4 períodos do primeiro pêndulo, o segundo deve realizar um número inteiro (e primo de 4) de períodos de forma que ambos estejam na mesma posição. Portanto:

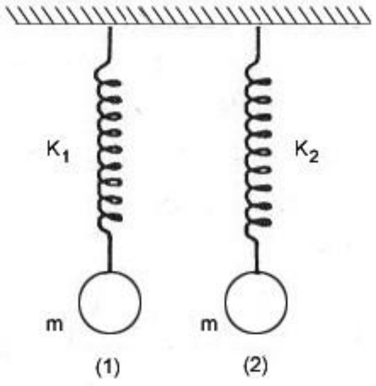
$$4 \cdot T_1 = n \cdot T_2$$

$$8 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_1}{g}} = n \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l_2}{g}} \therefore 8 \cdot \sqrt{\frac{l_1}{l_2}} = n$$

Gabarito: C

11. (ITA - 1988)

Duas molas ideais, sem massa e de constantes de elasticidade k_1 e k_2, sendo $k_1 < k_2$, acham-se dependuradas no teto de uma sala. Em suas extremidades livres penduram-se massas idênticas. Observa-se que, quando os sistemas oscilam verticalmente, as massas atingem a mesma velocidade máxima. Indicando por A_1 e A_2 as amplitudes dos movimentos e por E_1 e E_2 as energias mecânicas dos sistemas (1) e (2), respectivamente, podemos dizer que:



a) $A_1 > A_2$ e $E_1 = E_2$

b) $A_1 < A_2$ e $E_1 = E_2$

c) $A_1 > A_2$ e $E_1 > E_2$

d) $A_1 < A_2$ e $E_1 < E_2$

e) $A_1 < A_2$ e $E_1 > E_2$

Comentários:

Generalizando as equações dos movimentos como:

$$X_1(t) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \alpha)$$

$$X_2(t) = A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \beta)$$

Em que:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \quad e \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m}}$$

Logo:

$$v_1 = -\omega_1 \cdot A_1 \cdot sen\,(\omega_1 \cdot t + \alpha)$$

$$v_2 = -\omega_2 \cdot A_2 \cdot sen\,(\omega_2 \cdot t + \beta)$$

Portanto, as velocidades máximas são respectivamente:

$$V_1 = \omega_1 \cdot A_1 \text{ e } V_2 = \omega_2 \cdot A_2$$

Sabe-se que elas são iguais e sabe-se que $\omega_1 < \omega_2$, portanto:

$$V_1 = V_2$$

$$\omega_1 \cdot A_1 = \omega_2 \cdot A_2 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} > 1 \therefore A_1 > A_2$$

A energia do movimento pode ser calculada no ponto de equilíbrio em torno do qual o sistema oscila (velocidade é máxima):

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{k_1 x_1^2}{2} \text{ e } E_2 = \frac{mv^2}{2} + \frac{k_2 x_2^2}{2}$$

Repare que se adotou que ambas as velocidades são iguais. Portanto:

$$E_1 - E_2 = \frac{1}{2} \cdot (k_1 x_1^2 - k_2 x_2^2)$$

Pelo equilíbrio:

$$mg = k_1 \cdot x_1 \rightarrow x_1 = \frac{mg}{k_1}$$

Analogamente:

$$x_2 = \frac{mg}{k_2}$$

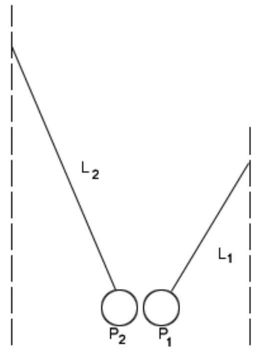
Logo:

$$E_1 - E_2 = \frac{m^2 \cdot g^2}{2} \cdot \left(\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}\right) > 0 \therefore E_1 > E_2$$

Gabarito: C

12. (ITA - 1989)

Dois pêndulos simples, P_1 e P_2, de comprimento L_1 e L_2, estão indicados na figura. Determine L_2 em função de L_1 para que a situação indicada na figura se repita a cada 5 oscilações completas de P_1 e 3 oscilações completas de P_2.



a) $L_2 = 1{,}66L_1$.

b) $L_2 = 2{,}77\ L_1$.

c) $L_2 = 0{,}60\ L_1$.

d) $L_2 = 0{,}36L1$.

e) $L_2 = 15\ L_1$.

Comentários:

Para que se repita nessas condições:

$$5 \cdot P_1 = 3 \cdot P_2$$

$$5 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_1}{g}} = 3 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L_2}{g}}$$

$$\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{5}{3} \Rightarrow L_2 = \frac{25}{9} L_1 \cong 2{,}77 L_1$$

Gabarito: B

---

13. (ITA - 1990)

Uma experiência foi realizada para se determinar a diferença no valor da aceleração da gravidade, g(A) e g(B), respectivamente, em dois pontos A e B de uma certa área. Para isso construiu-se um pêndulo simples de comprimento l e mediu-se no ponto A o tempo necessário para 100 oscilações obtendo-se 98 s. No ponto B, para as mesmas 100 oscilações, obteve-se 100 s. Neste caso pode-se afirmar que:

a) g(A) < g(B) e a diferença é aproximadamente de 5%

b) g(A) < g(B) e a diferença é aproximadamente de 4%

c) g(A) > g(B) e a diferença é aproximadamente de 2%

d) somente se pode fazer qualquer afirmativa a respeito dos valores de g(A) e g(B) e se conhecemos o valor de l.

e) nenhuma das anteriores acima é satisfatória.

Comentários:

Fazendo a relação entre os períodos, temos:

$$\frac{T_A}{T_B}=\frac{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_A}}}{2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g_B}}}=\sqrt{\frac{g_A}{g_B}}=0{,}98$$

$$\frac{g_B}{g_A}=(1-0{,}02)^2\cong(1-2\cdot0{,}02)=0{,}96$$

Gabarito: E

14. (ITA - 1991)

A equação $x=1\cdot sen(2t)$ expressa a posição de uma partícula em unidades do sistema internacional. Qual seria a forma do gráfico $v\ (velocidade)\times x\ (posição)$ desta partícula?

a) Uma reta paralela ao eixo de posição.

b) Uma reta inclinada passando pela origem.

c) Uma parábola.

d) Uma circunferência.

e) Uma elipse.

Comentários:

Derivando a posição, encontramos a velocidades:

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d(sen\ 2t)}{dt}=2\cdot\cos 2t$$

Note que:

$$\frac{v}{2}=\cos 2t\Rightarrow\frac{x}{1}=sen\ 2t\Rightarrow\frac{v^2}{4}+\frac{x^2}{1}=1$$

Gabarito: E

15. (ITA - 1993)

Um pêndulo simples oscila com um período de 2,0 s. Se cravarmos um pino a uma distância $3l/4$ do ponto de suspensão e na vertical que passa por aquele ponto, como mostrado na figura, qual será o novo período do pêndulo? Desprezar os atritos. Considere ângulos pequenos tanto antes quanto depois de atingir o pino.

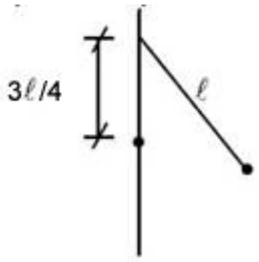
a) 1,5 s

b) 2,7 s

c) 3,0 s

d) 4,0 s

e) o período de oscilação não se altera



Comentários:

O comprimento final é de:

$$l' = \frac{l}{4}$$

$$T' = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l'}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{T}{2} = 1s$$

No entanto, o que ocorre é um acoplamento dos dois movimentos. O pêndulo segue em seu MHS original até atingir o prego, quando atinge ele entra no novo MHS, onde permanece meio período até novamente perder contato com o prego. Sendo assim, o período final é de:

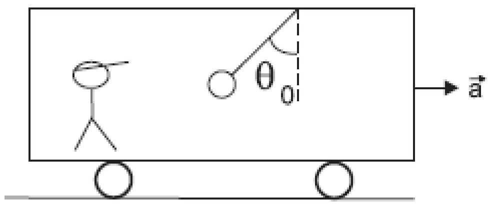
$$T_{final} = \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 1{,}5\ s$$

Gabarito: A

---

16. (ITA - 1998)

No início do século, Albert Einstein propôs que forças inerciais, como aquelas que aparecem em referenciais acelerados, sejam equivalentes às forças gravitacionais. Considere um pêndulo de comprimento L suspenso no teto de um vagão de trem em movimento retilíneo com aceleração constante de módulo a, como mostra a figura. Em relação a um observador no trem, o período de pequenas oscilações do pêndulo ao redor da sua posição de equilíbrio θ_0 é:



a) $2\pi\sqrt{L/g}$

b) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{g^2 - a^2}}$

c) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{ag}}$

d) $2\pi\sqrt{L/(g + a)}$

e) $2\pi\sqrt{L/\sqrt{g^2 + a^2}}$

Comentários:

O módulo da gravidade aparente é dado por:

$$g_{ap} = \sqrt{g^2 + a^2}$$

Portanto, o período fica:

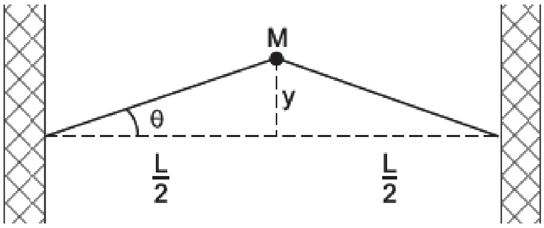
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g_{ap}}} \therefore T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$

Gabarito: E

---

17. (ITA – 2007 Adaptada)

Uma bolinha de massa M é colada na extremidade de dois elásticos iguais de borracha, cada qual de comprimento $L/2$, quando na posição horizontal. Desprezando o peso da bolinha, esta permanece apenas sob a ação da tensão T de cada um dos elásticos e executa no plano vertical um movimento harmônico simples, tal que $senx \approx tgx \approx x$. Considerando que a tensão não se altera durante o movimento, o período deste vale:



Comentários:

Considerando a força de cada elástico como T, a força restauradora fica:

$$2 \cdot T \cdot sen\,\theta = k \cdot y$$

Mas, pelas relações trigonométricas dos triângulos retângulos:

$$y = \frac{L}{2} \cdot tg\,\theta$$

Substituindo:

$$2 \cdot T \cdot sen\,\theta = k \cdot \frac{L}{2} \cdot tg\,\theta$$

Como θ é pequeno, $sen \cong tg\,\theta$:

$$2 \cdot T \cdot \frac{2}{L} = k \Rightarrow k = \frac{4T}{L}$$

Então o período é de:

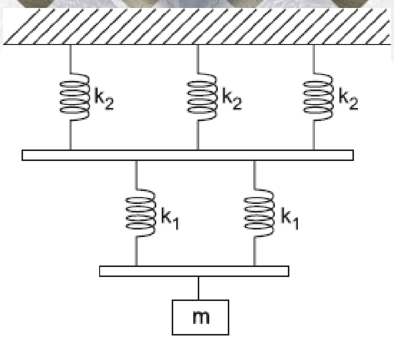
$$P = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{ML}{4T}}$$

Gabarito: $2\pi\sqrt{\frac{ML}{4T}}$

---

18. (ITA – 2007)

Um sistema massa-molas é constituído por molas de constantes k_1 e k_2, respectivamente, barras de massas desprezíveis e um corpo de massa m, como mostrado na figura. Determine a frequência desse sistema.



Comentários:

A associação de molas mostrada consiste em 3 molas em paralelo de coeficiente k_2 em série com 2 molas de coeficiente k_1 em paralelo entre si. Portanto:

$$k_{eq_1} = 3 \cdot k_2$$

$$k_{eq_2} = 2 \cdot k_1$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_{eq_1}} + \frac{1}{k_{eq_2}}$$

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{3 \cdot k_2} + \frac{1}{2 \cdot k_1} \Rightarrow k_{eq} = \frac{6 \cdot k_1 \cdot k_2}{2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2}$$

O período é dado por:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{m \cdot \frac{2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2}{6 \cdot k_1 \cdot k_2}}$$

Como $f = \frac{1}{T}$:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot k_1 \cdot k_2}{m \cdot (2 \cdot k_1 + 3 \cdot k_2)}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot k_1 \cdot k_2}{m(2k_1 + 3k_2)}}}$

---

19. (ITA – 2008)

Uma partícula P_1 de dimensões desprezíveis oscila em movimento harmônico simples ao longo de uma reta com período de 8/3 s e amplitude a. Uma segunda partícula, P_2, semelhante a P_1, oscila de modo idêntico numa reta muito próxima e paralela à primeira, porém com atraso de $\pi/12$ rad em relação a P_1. Qual a distância que separa P_1 de P_2, 8/9 s depois de P_2 passar por um ponto de máximo deslocamento?

a) 1,00a b) 0,29a c) 1,21a d) 0,21a e) 1,71a

Comentários:

Analisando P_1:

$$T = \frac{8}{3}s \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\frac{8}{3}} = \frac{3\pi}{4}$$

Logo, a equação horária de P_1 é:

$$x_1 = a \cdot \cos(\omega \cdot t_1)$$

Analisando P_2:

$$x_2 = a \cdot \cos(\omega \cdot t_2)$$

Pela informação do atraso:

$$\omega \cdot t_1 = \omega \cdot t_2 + \frac{\pi}{12}$$

O instante que P_2 passa por um momento de máximo deslocamento será adotado como $t = 0$. Portanto:

$$t_2 = \frac{8}{9}s$$

No momento pedido. A distância após $\frac{8}{9}s$ é dado por:

$$|x_1 - x_2| = a \cdot \left|\cos\left(\omega \cdot \frac{8}{9} + \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\omega \cdot \frac{8}{9}\right)\right|$$

$$|x_1 - x_2| = a \cdot \left|\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right|$$

$$|x_1 - x_2| = a \cdot \left|\cos\frac{3\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3}\right|$$

$$|x_1 - x_2| = a \cdot \left|-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right|$$

$$|x_1 - x_2| = a \cdot 0{,}21$$

Gabarito: D

20. (ITA – 2015)

Na figura, as linhas cheias, tracejada e pontilhada representam a posição, a velocidade e a aceleração de uma partícula em um movimento harmônico simples. Com base nessas curvas assinale a opção correta dentre as seguintes proposições:

I. As linhas cheia e tracejada representam, respectivamente, a posição e a aceleração da partícula.

II. As linhas cheia e pontilhada representam, respectivamente, a posição e a velocidade da partícula.

III. A linha cheia necessariamente representa a velocidade da partícula.

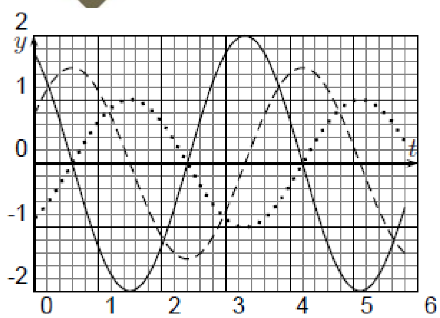
a) apenas I é correta.

b) apenas II é correta.

c) apenas III é correta.

d) todas são incorretas.

e) Não há informações suficientes para análise.



Comentários:

Para um MHS genérico, o período da função posição, velocidade e aceleração são todos iguais. Neste caso:

$$T = 1{,}8\ s = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{10\pi}{9}\ rad/s$$

Portanto, é evidente que $\omega > 1$. Portanto, ao se derivar a função posição em função do tempo para obter velocidade, surge o fator multiplicativo ω. Mas, $\omega > 1$, portanto a amplitude deve aumentar. Isso se repete ao derivar a velocidade para obter a aceleração.

Assim sendo, a função periódica de maior amplitude será a aceleração, seguida pela de segunda maior amplitude que é a velocidade, e por último a função de menor amplitude que é a posição.

Gabarito: D

21. (ITA – 2016)

Um pêndulo simples é composto por uma massa presa a um fio metálico de peso desprezível. A figura registra medidas do tempo T em segundos, para 10 oscilações seguidas do pêndulo ocorridas ao longo das horas do dia, t. Considerando que neste dia houve uma variação térmica total de 20°C, assinale o valor do coeficiente de dilatação térmica do fio deste pêndulo.

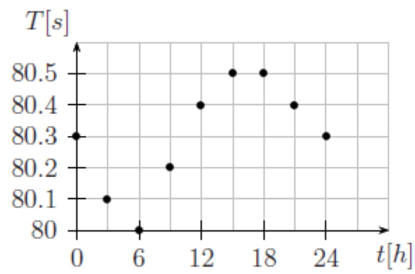
a) $2 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

b) $4 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

c) $6 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

d) $8 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$

e) $10 \cdot 10^{-4}\ °C^{-1}$



Comentários:

A variação térmica de $20°C$ ocorreu entre as 6h da manhã e as 18h à noite. Sabendo que:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

E, chamando o comprimento do fio às 6h de l e o comprimento às 18h de l':

$$l' = l \cdot (1 + \alpha \cdot 20)$$

Comparando os períodos:

$$\frac{T_6}{T_{18}} = \frac{8}{8{,}05} = \sqrt{\frac{l}{l'}} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{161}\right)^2 = \frac{l}{l'}$$

Como $\frac{1}{161} \ll 1$:

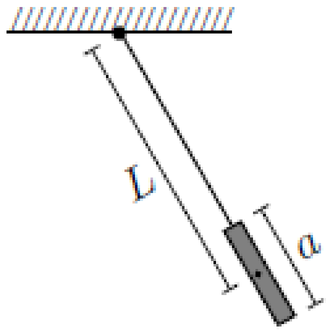
$$l' \cong l \cdot \left(1 - \frac{1}{161}\right)^{-2} \cong l \cdot \left(1 + \frac{2}{161}\right)$$

$$\alpha \cdot 20 = \frac{2}{161} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{1610} \cong 6 \cdot 10^{-4}\,°C^{-1}$$

Gabarito: C

22. (ITA – 2017)

Na figura, um tubo fino e muito leve, de área de seção reta S e comprimento a, encontra-se inicialmente cheio de água de massa M e massa específica ρ. Graças a uma haste fina e de peso desprezível, o conjunto forma um pêndulo simples de comprimento L medido entre o ponto de suspensão da haste e o centro de massa inicial da água. Posto a oscilar, no instante inicial começa a pingar água pela base do tubo a uma taxa constante $r = -\Delta M/\Delta t$. Assinale a expressão da variação temporal do período do pêndulo.



a) $2\pi\sqrt{L/g}$

b) $\frac{2\pi\sqrt{\rho LS - rt}}{\sqrt{\rho \cdot S \cdot g}}$

c) $\frac{2\pi\sqrt{\rho LS + rt}}{\sqrt{\rho S g}}$

d) $\frac{2\pi\sqrt{2\rho LS - rt}}{\sqrt{2\rho S g}}$

e) $\frac{2\pi\sqrt{2\rho LS + rt}}{\sqrt{2\rho S g}}$

Comentários:

O período depende da distância entre o centro de massa do tubo e o ponto de fixação. O centro de massa irá deslocar-se conforme a água vaza. A altura da água inicial é de a. A cada intervalo Δt ele perde uma altura Δh.

$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \frac{\Delta h \cdot S \cdot \rho}{\Delta t} = -r \Rightarrow \frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{r}{S \cdot \rho}$$

Portanto, a cada Δt, o centro de massa desloca-se uma distância $\frac{\Delta h}{2}$ em relação ao ponto de fixação. Logo, o comprimento após um tempo t é dado por:

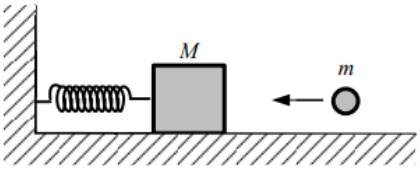
$$L + \frac{\left|\frac{\Delta h}{\Delta t}\right|}{2} \cdot t = L + \frac{r \cdot t}{2 \cdot S \cdot \rho}$$

E o período fica:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L + \frac{r \cdot t}{2 \cdot \rho \cdot S}}{g}} \therefore T = 2 \cdot \pi \cdot \frac{\sqrt{2 \cdot \rho \cdot S \cdot L + rt}}{\sqrt{2 \cdot \rho \cdot S \cdot g}}$$

Gabarito: E

23. (IME – 2020)



Um sistema mecânico, composto por um corpo de massa M conectado a uma mola, está inicialmente em equilíbrio mecânico e em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito, conforme mostra a figura. Um projétil esférico de massa m é disparado na direção horizontal contra a massa M, provocando um choque perfeitamente inelástico que inicia uma oscilação no sistema.

Dados:

• $M = 10\ kg$;

• $m = 2\ kg$;

• amplitude de oscilação do sistema $=\ 0{,}4\ m$; e

• frequência angular $= 2\ rad/s$

A velocidade do projétil antes do choque entre as massas M e m, em m/s, é:

(A) 0,8 (B) 1,6 (C) 2,4 (D) 4,8 (E) 9,6

Comentários:

Se a velocidade do projétil antes do choque é v, temos:

$$m \cdot v = (m + M) \cdot v' \Rightarrow v' = \frac{m}{m + M} \cdot v$$

Pela conservação da energia após o choque, dado que não existe atrito durante a oscilação, temos:

$$E_{mec} = \frac{k \cdot A^2}{2} = \frac{(m + M) \cdot v'^2}{2}$$

Onde o k é dado por:

$$\omega^2 = \frac{k}{m + M} \Rightarrow 2^2 = \frac{k}{12} \Rightarrow k = 48\ N/m$$

Substituindo na equação de energia, temos:

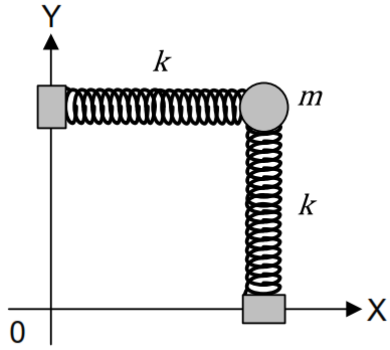
$$48 \cdot 0{,}4^2 = 12 \cdot v'^2 \Rightarrow v' = 0{,}8\ m/s$$

Portanto:

$$0{,}8 = \frac{2}{10+2} \cdot v \Rightarrow \boxed{v = 4{,}8\, m/s}$$

Gabarito: D

24. (IME – 2020)



Uma partícula, inicialmente em repouso sobre o plano horizontal XY, está presa a duas molas idênticas, cada uma solidária em sua outra extremidade a um cursor que pode movimentar-se sobre seu respectivo eixo, como mostrado na figura. As molas são rígidas o suficiente para se flexionarem apenas nas direções ortogonais de seus respectivos eixos aos quais estão presas. No instante $t = 0$, a partícula é puxada para o ponto de coordenadas $\left(\frac{11}{10}L, \frac{12}{10}L\right)$ e é lançada com velocidade inicial $\left(\frac{\sqrt{3}}{10}\omega L, 0\right)$.

Determine:

a) as equações das componentes de posição, velocidade e aceleração da partícula nos eixos X e Y, em função do tempo;

b) a área no interior da trajetória percorrida pela partícula durante o movimento.

Dados:

- massa da partícula: m;
- constante elástica das molas: k;
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$;
- comprimento das molas não flexionadas: L.

Observações:

- o plano XY é totalmente liso;
- não há influência da gravidade no movimento da partícula;
- os cursores deslizam sem atrito pelos eixos;
- as coordenadas X e Y da partícula são sempre positivas.

Comentários

Conforme afirmado no enunciado, as molas tem resistência apenas na direção de seu comprimento. Portanto, consideram-se os MHS como independentes, isto é, tem-se um MHS massa-mola na direção x e outro MHS massa-mola na direção y. Por simplicidade, adota-se um referencial auxiliar com centro no ponto de equilíbrio do sistema. Como cada sistema massa-mola tem equilíbrio onde a mola tiver deformação nula, chega-se que o ponto de equilíbrio do conjunto será (L, L). Adotando este ponto como origem do sistema de coordenadas auxiliar:

$$x_{auxiliar} = A_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1)$$

$$y_{auxiliar} = A_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_2)$$

Notar que como as constantes k das molas são iguais, as velocidades angulares (ω) também serão. Agora, calcula-se A_1 e A_2 pela conservação da energia mecânica entre a situação inicial e as extremidades do movimento, isto é, onde a velocidade for nula e a deformação da mola for a amplitude.

Para a direção x:

$$\frac{k \cdot A_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_{0_x}^2}{2} + \frac{k \cdot x_0^2}{2} = \frac{m \cdot 3 \cdot \omega^2 \cdot L^2}{2 \cdot 100} + \frac{k \cdot L^2}{2 \cdot 100}$$

Mas:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Substituindo:

$$A_1^2 = \frac{4 \cdot L^2}{100} \to A_1 = \frac{L}{5}$$

Para a direção y:

$$\frac{k \cdot A_2^2}{2} = \frac{k \cdot y_0^2}{2} \to A_2 = y_0 \to A_2 = \frac{L}{5}$$

Logo:

$$\begin{cases} x_{auxiliar} = \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_1) \\ y_{auxiliar} = \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_2) \end{cases}$$

Para determinar ϕ_1 e ϕ_2, basta utilizarmos as condições iniciais. Isto é:

$$Para\ t = 0 \to \begin{cases} x = \frac{L}{10}\ e\ v_x = \omega \cdot L \cdot \frac{\sqrt{3}}{10} \\ y = \frac{L}{5} \end{cases}$$

Substituindo $t = 0$:

$$\begin{cases} x = \frac{L}{5} \cdot \cos(\phi_1) = \frac{L}{10} \\ y = \frac{L}{5} \cdot \cos(\phi_2) = \frac{L}{5} \end{cases}$$

De onde, tira-se que:

$$\cos \phi_1 = \frac{1}{2} \rightarrow \phi_1 = \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\cos \phi_2 = 1 \rightarrow \phi_2 = 0$$

Para determinar o sinal de ϕ_1, pode-se deduzir sem a análise da derivada (função velocidade). Para isso, usa-se a informação do enunciado, que para o instante $t = 0$, a velocidade é positiva. Se a velocidade é positiva, no instante seguinte, a posição x deve aumentar. Como $\omega \cdot t$ é crescente, o valor inicial deve ser negativo. Caso prefira-se analisar a função velocidade:

$$x' = -\omega \cdot \frac{L}{5} \cdot sen\ (\omega \cdot t + \phi_1)$$

Para $t = 0$:

$$x' = -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot sen(\phi_1) = \frac{\omega \cdot L \cdot \sqrt{3}}{10}$$

$$sen\ (\phi_1) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\phi_1 = -\frac{\pi}{3}$$

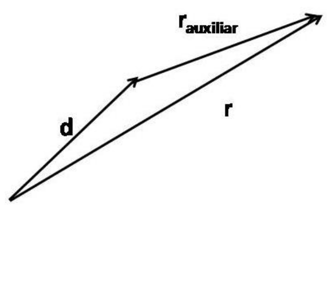
Portanto, as equações horárias ficam definidas para o nosso sistema de referencial centrado no ponto de equilíbrio. Como já se sabe a posição do ponto de equilíbrio, volta-se para o sistema xOy somando L em cada equação horária já obtida.

Isto é:

$$x = x_{auxiliar} + L$$

$$y = y_{auxiliar} + L$$

Ou, visualmente:



Assim:

$$x = L + \frac{L}{5} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y = L + \frac{L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

Derivando-se em relação ao tempo obtém-se as funções horárias das velocidades:

$$v_x = -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot sen\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$v_y = -\frac{\omega \cdot L}{5} \cdot sen\,(\omega \cdot t)$$

E, derivando-se novamente em relação ao tempo:

$$a_x = -\frac{\omega^2 \cdot L}{5} \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a_y = -\frac{\omega^2 \cdot L}{5} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

a) Das equações horárias do movimento, obtidas anteriormente:

$$\frac{5 \cdot (x - L)}{L} = \cos(\omega \cdot t) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + sen(\omega \cdot t) \cdot sen\,\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\frac{5 \cdot (x - L)}{L} = \frac{\cos(\omega \cdot t)}{2} + \frac{sen\,(\omega \cdot t) \cdot \sqrt{3}}{2}$$

E:

$$\frac{5 \cdot (y - L)}{L} = \cos(\omega \cdot t)$$

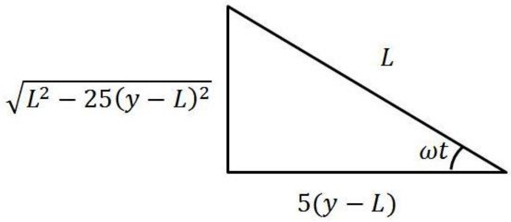
$$\frac{x - L}{y - L} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot tg\,(\omega \cdot t)$$

$$\sqrt{3} \cdot tg\,(\omega \cdot t) = 2 \cdot \frac{(x - L)}{(y - L)} - 1$$

Da equação horária de y, também pode-se tirar que:

$$L \cdot \cos(\omega \cdot t) = 5 \cdot (y - L)$$

Ou seja, tem-se o seguinte triângulo retângulo:



Logo:

$$tg\ (\omega \cdot t) = \frac{\sqrt{L^2 - 25 \cdot (y-L)^2}}{5 \cdot (y-L)}$$

Com ambas as expressões para $tg\ (\omega \cdot t)$:

$$\frac{\sqrt{3}}{5} \cdot \frac{\sqrt{L^2 - 25 \cdot (y-L)^2}}{y-L} = \frac{2 \cdot (x-L) - (y-L)}{(y-L)}$$

Organizando:

$$x^2 - x \cdot y + y^2 - x \cdot L - y \cdot L + \frac{97 \cdot L^2}{100} = 0$$

Centralizando a cônica em (L, L):

$$F' = L^2 - L^2 + L^2 - L^2 - L^2 + \frac{97 \cdot L^2}{100} = -\frac{3 \cdot L^2}{100}$$

Rotacionando para eliminar os termos lineares:

$$\begin{cases} A' + C' = 2 \\ A' - C' = \dfrac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{2 \cdot L^2}{100}} + \frac{y^2}{\frac{6 \cdot L^2}{100}} = 1$$

Logo, comparando com a fórmula de uma elipse centralizada e paralela aos eixos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Tem-se que:

$$a = \frac{\sqrt{6} \cdot L}{10} \text{ e } b = \frac{\sqrt{2} \cdot L}{10}$$

Sabendo que a área de uma elipse é dada por $\pi \cdot a \cdot b$:

$$A = \frac{\sqrt{3} \cdot \pi \cdot L^2}{50}$$

Gabarito: Vide comentários.

25.

Assinale o item que contém a afirmativa falsa.

a) O período de um pêndulo simples aumenta com o aumento do ângulo máximo de desvio em relação à posição de equilíbrio.

b) O período de um pêndulo simples depende do ângulo máximo de abertura mesmo quando estes são pequenos.

c) Uma força constante atuando sobre uma partícula que executa MHS não altera a velocidade máxima e nem o período do movimento, considerando a mesma amplitude.

d) Se passar a atuar uma força da forma $F = -bv$ em uma partícula que executava um MHS presa a uma mola ideal, a amplitude do movimento diminui com o tempo.

e) Para que haja um MHS, a partícula deve estar nas proximidades de um equilíbrio estável.

Comentários:

- a) é verdade contanto que se mantenha, mesmo com o aumento, um ângulo pequeno, pois, nesse caso, o período ($2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$) independe de θ.

- b) contrário à letra a.

- c) apenas desloca a posição de equilíbrio.

- d) essa equação é característica de amortecedor.

- e) verdade, pois deve haver uma força restauradora que busca retornar a partícula ao equilíbrio.

Gabarito: B

26.

Um bloco unido a uma mola vertical é puxado para baixo $4\ cm$ em relação à posição de equilíbrio e depois solto. A aceleração inicial do bloco é $0{,}16\ m/s^2$ para cima. Determine a equação do movimento.

a) $0{,}4sen\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right)\ m$

b) $4sen\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ cm$

c) $4sen\left(2t + \frac{5\pi}{2}\right)\ cm$

d) $0{,}04sen\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)\ m$

e) $4sen\left(2t + \frac{3\pi}{2}\right)\ cm$

Comentários:

A amplitude é 4cm devido ao deslocamento em relação à posição de equilíbrio. A aceleração, por sua vez é dado por:

$$a = -A \cdot \omega^2$$

Sendo o sinal negativo relacionado ao sentido oposto do deslocamento. Portanto:

$$0{,}16 = 0{,}04 \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = 2$$

O período inicial do movimento é de $\frac{\pi}{2}$, pois a posição inicial é de -0,04 m. Portanto:

$$\vec{x} = 0{,}04 \cdot sen\left(2 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right) m = 4 \cdot sen\left(2 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

Gabarito: E

27.

A figura mostra um sistema oscilador em repouso, onde a mola está deformada 6 cm. Repentinamente, o bloco é impulsionado para a base do plano notando-se uma aceleração máxima de 4 m/s². Quanto percorre o bloco durante os primeiros $3\pi/20$ segundos?

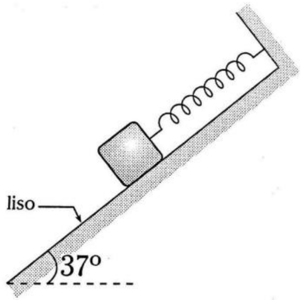
a) 11 cm

b) 12 cm

c) 13 cm

d) 14 cm

e) 15 cm



Comentários:

Pelo equilíbrio antes de impulsionar o bloco:

$$k \cdot x = m \cdot g \cdot sen\, 37°$$

$$\frac{m}{k} = \frac{x}{g \cdot sen\, 37°} = \frac{0{,}06}{10 \cdot 0{,}6} = \frac{1}{100}$$

Assim:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{10} = \frac{2 \cdot \pi}{10}$$

Adotando de forma genérica:

$$x = A \cdot sen\,(\omega \cdot t + \delta)$$

A aceleração máxima é dada por:

$$a_{máx} = A \cdot \omega^2$$

Em que:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \Rightarrow a_{máx} = 100 \cdot A = 4 \Rightarrow A = 4\, cm$$

Deve-se notar que:

$$\frac{3\pi}{20} = 0{,}75 \cdot T$$

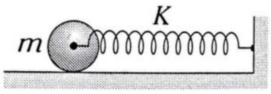
A cada T, o bloco percorre $2A$. Assim:

$$0{,}75 \cdot 2A = 12\ cm$$

Gabarito: B

28.

Uma mola ideal está unida a um cilindro homogêneo como mostra a figura. Se soltarmos o cilindro na posição em que a mola está estirada, observamos que esse cilindro roda sem deslizar e o centro de massa deste realiza um MHS. Determine o período de oscilações.



a) $2\pi\sqrt{\frac{3M}{2K}}$ b) $\pi\sqrt{\frac{M}{2K}}$ c) $\pi\sqrt{\frac{3M}{K}}$ d) $\pi\sqrt{\frac{M}{3K}}$ e) $2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}$

Comentários:

Pela conservação da energia mecânica:

$$E_{C_{máx}} = E_{P_{máx}}$$

A energia cinética máxima é composta pela energia cinética de translação e de rotação.

$$E_{C_{máx}} = E_{C_T} + E_{C_R} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{I \cdot \omega^2}{2}$$

Mas:

$$\omega = \frac{v}{R}$$

E, para um cilindro:

$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

Assim, pela conservação da energia mecânica:

$$\frac{m \cdot v_{máx}^2}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \frac{v_{máx}^2}{R^2} = k \cdot \frac{A^2}{2}$$

$$\frac{m \cdot v_{máx}^2}{2} \cdot \frac{3}{2} = k \cdot \frac{A^2}{2}$$

$$v_{máx} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot A^2}{3 \cdot m}}$$

Mas, em um MHS:

$$v_{máx} = A \cdot \omega$$

Igualando as expressões:

$$A \cdot \omega = A \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot m}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot k}{3 \cdot m}}$$

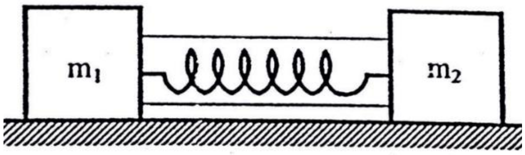
Portanto, o período fica:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot m}{2 \cdot k}}$$

Gabarito: A

29.

Dois blocos, de massa m_1 e m_2, são ligados por uma mola de rigidez k. A mola está comprimida com a ajuda de fios. Os fios são cortados. Determinar o período das oscilações dos blocos.



Comentários:

Pela conservação da energia mecânica (chamando de x a deformação inicial da mola) (notar que $x = A$):

$$\frac{k \cdot x^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$

$$k \cdot A^2 = m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2$$

E, pela conservação da quantidade de movimento:

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2 \Rightarrow v_1 = \frac{m_2 \cdot v_2}{m_1}$$

Substituindo:

$$k \cdot A^2 = \frac{m_2^2 \cdot v_2^2}{m_1} + m_2 \cdot v_2^2$$

$$m_2 \cdot v_2^2 \cdot \left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right) = k \cdot A^2 \Rightarrow v_2^2 = k \cdot A^2 \cdot \frac{m_1}{m_2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

Analisando somente o MHS do corpo 2, sua amplitude será tal que o centro de massa não se desloque e o deslocamento do corpo 2 somado ao do corpo 1 seja A. Equacionando:

$$\begin{cases} m_2 \cdot A_2 = m_1 \cdot A_1 \\ A_1 + A_2 = A \end{cases}$$

$$m_2 \cdot A_2 = m_1 \cdot (A - A_2) \Rightarrow A = \frac{A_2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1}$$

Substituindo na equação de v_2:

$$v_2^2 = k \cdot \frac{A_2^2 \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}$$

Para o MHS do corpo 2:

$$v_2 = A_2 \cdot \omega$$

Logo:

$$\omega^2 = k \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k \cdot (m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$$

Portanto:

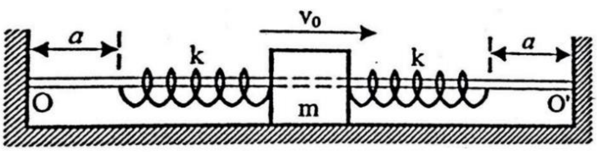
$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 \cdot m_2}{k \cdot (m_1 + m_2)}}$$

Obs.: $\frac{\boldsymbol{m_1 \cdot m_2}}{\boldsymbol{m_1 + m_2}}$ é usualmente chamado de massa reduzida. O período de um MHS de corpos coplados pode ser calculado diretamente utilizando-se esta massa reduzida.

Gabarito: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{m1.m2}{k(m1+m2)}}}$

30.

Um corpo de massa m pode deslizar ao longo de um eixo horizontal OO' entre duas paredes verticais. A ambos os lados do corpo estão sujeitas molas sem peso de igual rigidez k. Quando o corpo estiver situado simetricamente entre as paredes, as distâncias dos extremos livres das molas até as paredes serão iguais a a. Se ao corpo comunica-se a velocidade V_0, esta passa a oscilar entre as paredes. Qual o período dessas oscilações.



Comentários:

A questão não informa, no entanto devemos considerar que a energia cinética da mola é insuficiente para que ele chegue a colidir com a parede. Se fosse o caso de o bloco colidir com a parede, ocorreria um “pulo” no período semelhante aos exercícios anteriores.

Feita essa consideração, deve-se notar que a partir do momento que a mola entra em contato com uma parede até o momento que perde o contato, ocorre meio período de um MHS de sistema massa mola. Sendo assim:

$$T_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T_1 = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Em que T_1 é o tempo que as molas estão em contato com as paredes. Além disso, enquanto as molas não estão em contato com as paredes, o bloco deve deslocar-se $4a$ com velocidade v_0. Desloca a, entra em contato com a parede, desloca mais $2a$, entra em contato com outra parede, desloca mais a e está de volta à posição inicial.

$$T_2 = \frac{4a}{v_0}$$

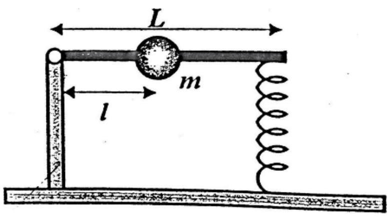
$$T = T_1 + T_2$$

$$T = \frac{4a}{v_0} + 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{T = \frac{4a}{vo} + 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

31.

Uma vara rígida de comprimento L está sujeita por um extremo a um eixo horizontal (por onde pode girar livremente sem atrito) e pelo outro extremo está ligada uma mola de constante elástica k. Determine o período das pequenas oscilações da vara em função das posições l e da massa m.



Comentários:

Considerando um pequeno deslocamento θ da vara, a mola comprime-se em:

$$x = \theta \cdot L$$

Portanto, o torque restaurador fica:

$$\tau_{res} = k \cdot x$$

$$\tau_{res} = k \cdot \theta \cdot L = I \cdot \alpha = I \cdot A \cdot \omega^2$$

Mas:

$$A = \theta \Rightarrow k \cdot \theta \cdot L = m \cdot l \cdot \theta \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m} \cdot \frac{L}{l}}$$

Portanto:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l}{k \cdot L}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l}{k \cdot L}}}$

32. (IPHO)

Uma pequena massa é presa na extremidade de uma mola ideal e posta a oscilar na vertical em sua frequência natural f. Se a mola é cortada ao meio e a mesma massa é presa em uma das extremidades, qual é a nova frequência natural f' de oscilação.

Comentários:

Ao cortar-se uma mola na metade, dobra-se sua constante elástica. Uma forma de verificar isso seria imaginar que uma mola inteira é feita por duas molas de metade de seu tamanho em série. Assumindo que a mola tem k de constante elástica e as menores têm k':

$$\frac{1}{k} = \frac{2}{k'} \Rightarrow k' = 2 \cdot k$$

Portanto:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

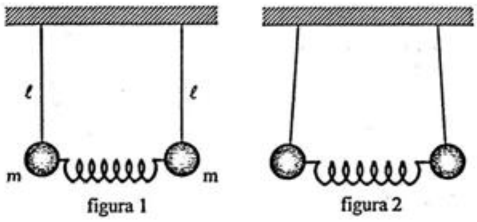
E:

$$f' = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot k}{m}} = f \cdot \sqrt{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{f' = f\sqrt{2}}$

33.

Dois pêndulos simples de comprimento l cada um estão ligados por uma mola de peso desprezível, como mostra a figura 1. O coeficiente de elasticidade da mola é igual a k. Em equilíbrio, os pêndulos estão na posição vertical e a mola não se deforma. Determinar a frequência das pequenas oscilações dos dois pêndulos unidos no caso em que foram inclinados, em ângulo iguais, para lados diferentes.



Comentários:

Considerando-se que ambos os pêndulos foram tirados θ de sua posição de equilíbrio, a força elástica que surge é igual à:

$$F_{el} = k \cdot x = k \cdot 2 \cdot l \cdot sen\,\theta \cong k \cdot l \cdot \theta$$

A força restauradora é a composição da força elástica junto à componente horizontal da força peso:

$$F_{G_x} = m \cdot g \cdot sen\,\theta \cong m \cdot g \cdot \theta$$

Portanto, a força restauradora fica:

$$F_{res} = (2 \cdot k \cdot l + m \cdot g) \cdot \theta = (2 \cdot k \cdot l + m \cdot g) \cdot \frac{x}{l}$$

Portanto, o k' do MHS fica:

$$k' = \frac{2 \cdot k \cdot l + m \cdot g}{l}$$

E o período fica:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k'}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot l}{2 \cdot k \cdot l + m \cdot g}} \therefore T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\frac{2 \cdot k \cdot l}{m} + g}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + \frac{2kl}{m}}}}$

---

10. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Revise todos os conceitos apresentados nessa aula, faça pequenos resumos sobre cada tópico estudado.

Essa aula foi bem densa, com muitos conceitos de difícil entendimento e que exigem muita abstração. Foi necessária a utilização de derivação nas deduções de muitas equações.

As últimas questões da lista são bem difíceis e irão fazer você quebrar a cabeça. Mas, cuidado. Deixe elas por últimos, pois os vestibulares estão chegando e o seu tempo é precioso.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

11. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 4. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 523p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 2. 16ª ed. Saraiva, 1993. 512p.

[4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física volume 2. 9ª ed. Moderna. 532p.

[5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 2. 10ª ed. LTC. 297p.

[6] V. Zubov, V. Shalnov. Problem in Physics. 2ª ed MIR, 1985. 301p.

[7] Associación Fondo de Investigadosres y Editores. Física – una visión analítica del movimiento volumen 3. Lumbreras editores.

12. Versão de aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	**08/08/2021**