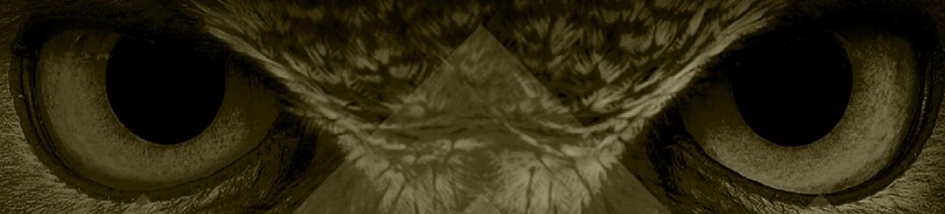


***CURSO INTENSIVO 2022***



**Física**

**ITA - 2022**

**Força elástica, força de atrito e  
dinâmica do movimento curvilíneo**

Professor Toni Burgatto



# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>3</b>
<b>1. FORÇA ELÁSTICA</b>	<b>4</b>
1.1. Lei de Hooke	4
1.2. Mola ideal	6
1.3. Dinamômetro	8
1.4. Associação de molas em série	8
1.5. Associação de molas em paralelo	10
<b>2. FORÇA DE ATRITO</b>	<b>13</b>
2.1. Atrito seco entre sólidos	13
2.2. Qual a origem das forças de atrito?	17
2.3. Atrito estático	17
2.4. Atrito dinâmico	20
2.5. Resistência dos fluidos	22
<b>3. DINÂMICA DO MOVIMENTO CURVILÍNEO</b>	<b>28</b>
3.1. As resultantes tangencial e centrípeta	28
3.2. A componente tangencial	29
3.3. A componente centrípeta	31
3.4. As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos	31
3.5. A força centrífuga	33
<b>4. LISTA DE EXERCÍCIOS</b>	<b>43</b>
<b>5. GABARITO SEM COMENTÁRIOS</b>	<b>57</b>
<b>6. LISTA DE EXERCÍCIOS COMENTADA</b>	<b>58</b>
<b>7. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA</b>	<b>90</b>
<b>8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>90</b>
<b>9. VERSÃO DE AULA</b>	<b>90</b>

## Introdução

Nessa aula, continuaremos com o estudo de dinâmica, abordando os seguintes temas: força elástica, força de atrito e forças no movimento curvilíneo.

Este assunto é muito abordado no ITA não apenas em questões propriamente ditas, mas de forma interdisciplinar.

É muito importante que você tenha todos os conceitos bem enraizados e treine com muitas questões, sem sair do foco dos nossos vestibulares. Nós preparamos muitas questões para você.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



# 1. Força elástica

## 1.1. Lei de Hooke

Em 1676, o físico inglês Robert Hooke estudando a deformação em molas notou que a deformação obedece a uma lei muito simples, quando a mola é deformada ainda na região elástica.

Segundo Hooke:

*“As forças deformantes são proporcionais às deformações elásticas produzidas”.*

Considere uma mola de comprimento natural  $L_0$ , isto é, nesse comprimento a mola está completamente relaxada, sem sofrer nenhuma deformação. Se for aplicada uma força  $\vec{F}$ , temos a seguinte configuração de forças:

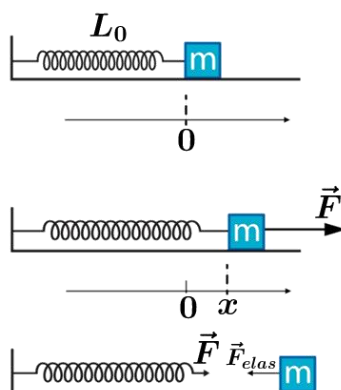


Figura 1: Mola distendida por uma força e o diagrama de forças no bloco.

Pela construção do sistema, definimos que a diferença de comprimentos é dada por:

$$x = L - L_0$$

Essa diferença é chamada de deformação da mola. Se  $x$  não for muito grande, isto é,  $L$  não muito maior que  $L_0$ , dizemos que a mola está na sua região perfeitamente elástica (cada mola tem sua região elástica, pois essa é uma propriedade do material e da geometria da mola). Se a mola está nessas condições, pode-se aplicar a lei de Hooke da seguinte forma:

$$F = k \cdot x$$

Onde  $k$  é uma constante que depende da mola. Comumente, chama-se  $k$  de constante elástica da mola e sua unidade no SI é:

$$u(k) = \frac{u(F)}{u(x)} = N/m$$

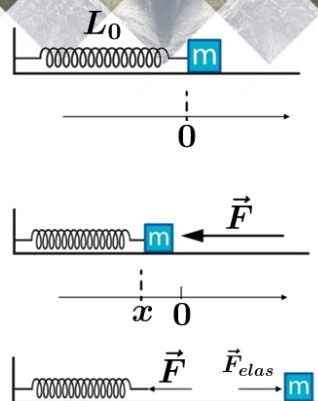


Figura 2: Mola comprimida devido à ação de uma força e o diagrama de forças no bloco.

De acordo com essa lei, ao fazermos o gráfico da força em função da deformação plotaremos uma reta partindo da origem, cujo coeficiente angular é numericamente igual a constante elástica da mola.

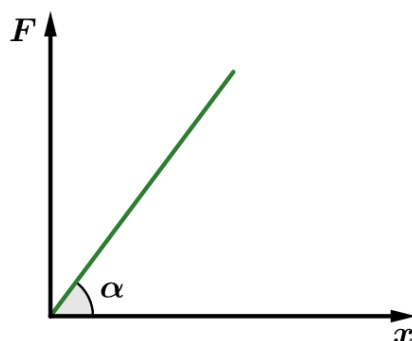


Figura 3: Gráfico da força elástica em função da deformação na mola.

Portanto:

$$\operatorname{tg} \alpha \stackrel{N}{=} k = \frac{F}{x}$$

Experimentalmente, verificamos que quando retiramos a força que aplicamos na mola, a tendência natural é a mola voltar ao seu comprimento inicial. Para casos que a mola não volta completamente ao seu estado inicial, dizemos que ela saiu da sua região perfeitamente elástica. Nesta deformação, não se aplica a lei de Hooke. Esse tipo de deformação não será trabalhado aqui.

Toda vez que obedecida segue a lei de Hooke, chamamos de **deformação elástica**.

Outro fator importante no estudo de molas é o par ação e reação. Se uma força  $\vec{F}$  é aplicada na mola, a mola reage com uma força  $\vec{F}_{elastica}$  (força elástica) aplicada no “agente” que aplica  $\vec{F}$ . Pela 3ª lei de Newton,  $\vec{F}$  e  $\vec{F}_{elastica}$  têm o mesmo módulo, a mesma direção, mas sentidos opostos.

Note que a força elástica sempre tende a trazer o bloco para a posição inicial. Por isso, chamamos  $\vec{F}_{elastica}$  de força de restauração ou força restauradora, já que ela busca restaurar a posição inicial.

Quando atribuímos o sinal da força elástica, devemos convencionar o sinal positivo para deslocamento no sentido do eixo e negativo para o sentido oposto. Assim, podemos escrever que:

$$F_{elastica} = -k \cdot x$$

Dessa forma, o gráfico da força elástica é:

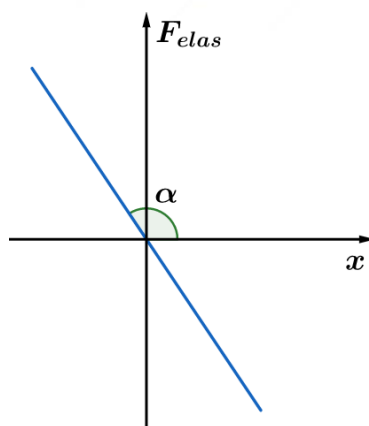


Figura 4: Gráfico da força elástica em função da deformação.

## 1.2. Mola ideal

Chamamos de mola ideal aquela cuja massa é desprezível e obedeça à lei de Hooke.

Vamos considerar o seguinte sistema constituído de uma mola com uma extremidade livre, onde aplicamos uma força  $\vec{F}$ . Podemos escrever o seguinte diagrama de forças:

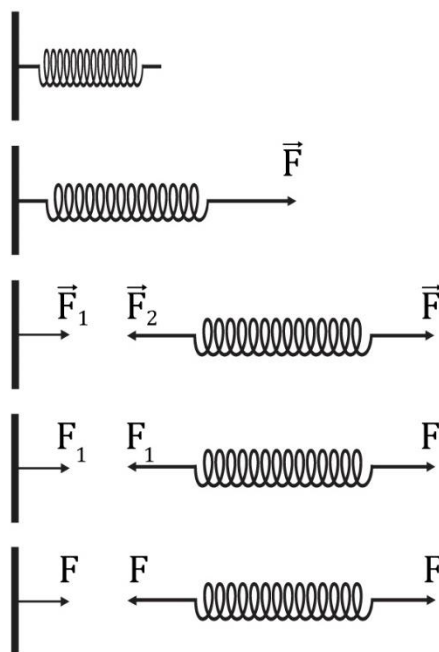


Figura 5: Diagrama de forças na mola ideal.

Note que  $\vec{F}_1$  e  $\vec{F}_2$  constituem um par ação e reação. Logo, temos que:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Se a mola está em equilíbrio e sua massa é desprezível, teremos que:

$$\vec{F} + \vec{F}_2 = \vec{0}$$



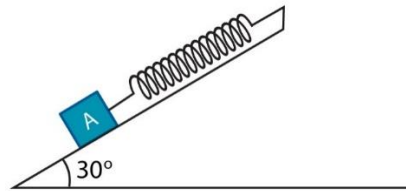
Ou seja, o módulo da força aplicada se “distribui” ao longo da mola ideal, semelhante ao fio ideal. Então:

$$|\vec{F}| = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F = k \cdot x$$

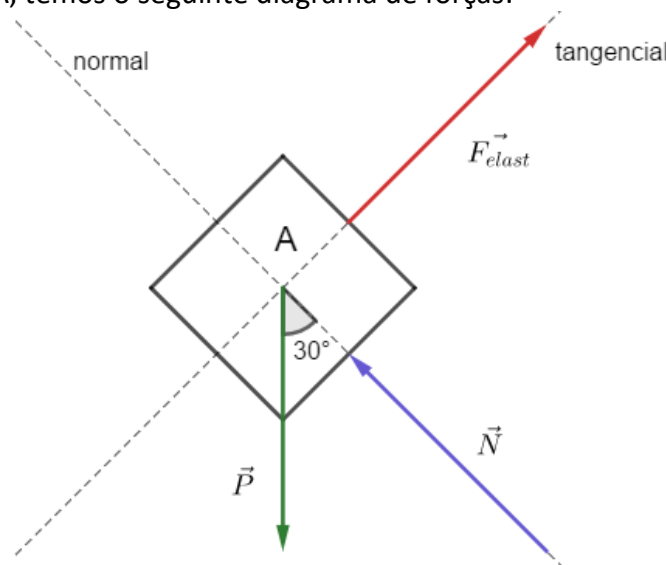
ESCLARECENDO!

**Exemplo:**

No esquema abaixo, determine a deformação da mola para o sistema em equilíbrio, dado que:  $m = 5,0 \text{ kg}$ ,  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ ,  $k = 50 \text{ N/m}$ , não há atrito e mola ideal.



Isolando o corpo A, temos o seguinte diagrama de forças:



Decompondo as forças na direção normal e tangencial, temos que:

$$\begin{cases} N = P \cdot \cos(30^\circ) \\ P \cdot \sin(30^\circ) = F_{\text{elast}} \end{cases}$$

Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} m_A \cdot g \cdot \sin(30^\circ) &= k \cdot x \\ x &= \frac{m_A \cdot g \cdot \sin(30^\circ)}{k} \\ x &= \frac{5 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}}{50} = 0,5 \text{ m} \Rightarrow \boxed{x = 50 \text{ cm}} \end{aligned}$$

### 1.3. Dinamômetro

Trata-se de instrumento utilizado para medir forças. A ideia do aparelho é bem simples e usa diretamente a lei de Hooke.

Considere uma mola ideal com uma das extremidades fixa. Adapta-se uma escala graduada em Newton, já que pela lei de Hooke  $F = k \cdot x$ , basta conhecermos bem a constante elástica da mola e facilmente construímos essa escala. O zero da escala é definido quando a mola está no seu comprimento natural.

Dessa forma, ao aplicarmos uma força desconhecida na extremidade até estabelecer o equilíbrio. Esta força produz uma deformação na mola de  $x = \frac{F}{k}$ . Então, ao multiplicarmos a deformação pela constante da mola encontramos a força desconhecida.

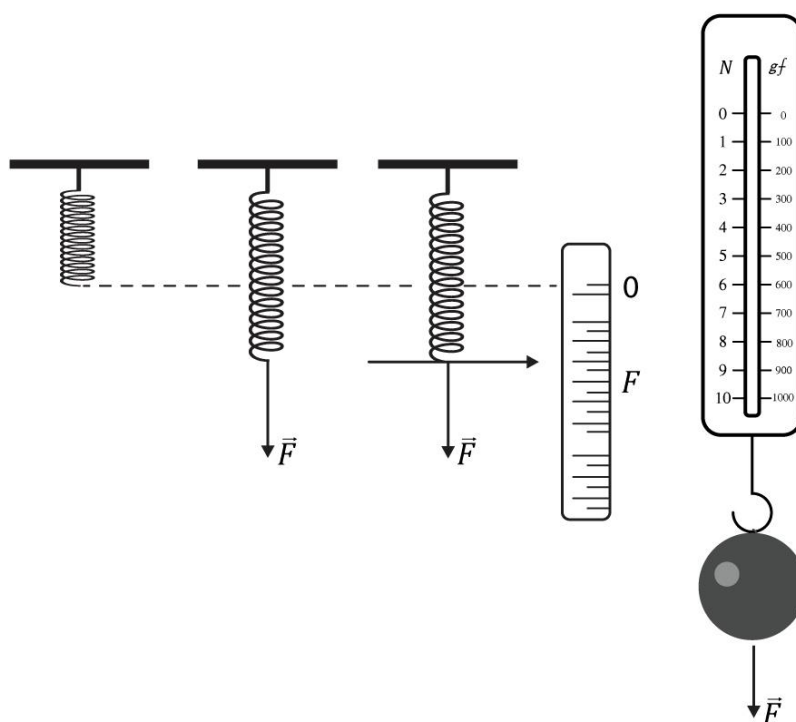


Figura 6: Aplicação de força elástica para medir forças desconhecidas.

No geral, os exercícios supõem dinamômetro ideal, isto é, a massa do dinamômetro é desprezível. Como no caso da mola, a força em cada extremidade é a mesma.

### 1.4. Associação de molas em série

Vamos construir um sistema com duas molas ideais, com constantes  $k_1$  e  $k_2$ , em série, como na figura abaixo. Aplica-se uma força  $\vec{F}$  na extremidade livre do conjunto. Denotamos por mola equivalente, que possui constante elástica  $k$ , aquela que possui a mesma deformação quando submetida a mesma força  $\vec{F}$ .



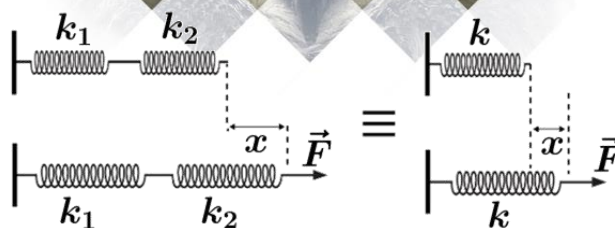


Figura 7: Molas em série e mola equivalente.

Diante disso, podemos determinar o valor de  $k$  a partir de  $k_1$  e  $k_2$ . Notamos que a deformação total do conjunto é soma das deformações de cada mola, isto é:

$$x = x_1 + x_2 \quad (eq. 1)$$

Como visto anteriormente, para molas ideais, a força se “distribui” ao longo das molas. Então, o módulo da força na mola 1 é igual módulo da força na mola 2 que é igual a  $F$ . Aplicando a lei de Hooke em cada mola, temos que:

$$\begin{cases} F_1 = F = k_1 \cdot x_1 \\ F_2 = F = k_2 \cdot x_2 \\ F = k \cdot x \end{cases} \quad (sist. 1)$$

Isolando a deformação em cada equação em (sist. 1) e substituindo em (eq. 1), temos que:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}}$$

O conceito acima é aplicado para  $n$  molas:

$$\boxed{\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}}$$

Para o caso de molas em paralelo, a constante da mola equivalente é menor que a menor das constantes.

Matematicamente, temos que:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, k_1 > 0 \text{ e } k_2 > 0$$

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \Rightarrow k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Sem perda de generalidade, vamos considerar que  $k_1 < k_2$ , então:

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = k_1 \left( 1 - \frac{k_1}{k_1 + k_2} \right) = k_1 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}} \right)$$

$$k = k_1 \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}} \right)$$

Notamos nesta última equação que  $\frac{1}{1 + \frac{k_2}{k_1}}$  é positivo e menor que 1, pois:

$$k_1 < k_2 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} > 1 \Rightarrow \frac{k_2}{k_1} + 1 > 2 > 1 \therefore 1 < \frac{1}{\frac{k_2}{k_1} + 1}$$

Portanto:

$$k < k_1$$

O mesmo resultado se aplica para  $n$  molas em série: a constante elástica equivalente é menor que a menor das constantes. Para generalizar, basta usar o resultado anterior e aplicar de 2 em 2 termos e o resultado será imediato.

Exemplo: uma mola de constante elástica  $k$  é repartida ao meio. Determine a constante elástica das partes.

Podemos imaginar que a mola de constante  $k$  é composição de duas molas em séries. Assim, se cada mola idêntica tem constante  $k_1$ , a associação delas dará a mola de constante elástica  $k$ . Então:

$$k = \frac{k_1 \cdot k_1}{k_1 + k_1} \therefore \boxed{k_1 = 2k}$$

Este resultado mostra que ao cortar uma mola ao meio, sua constante elástica dobra. Ou ainda, quando reduzimos o tamanho de uma mola aumentamos sua rigidez elástica.

## 1.5. Associação de molas em paralelo

Para o caso de molas em paralelo só existe interesse prático quando as molas são idênticas. Considere o sistema como na figura abaixo:

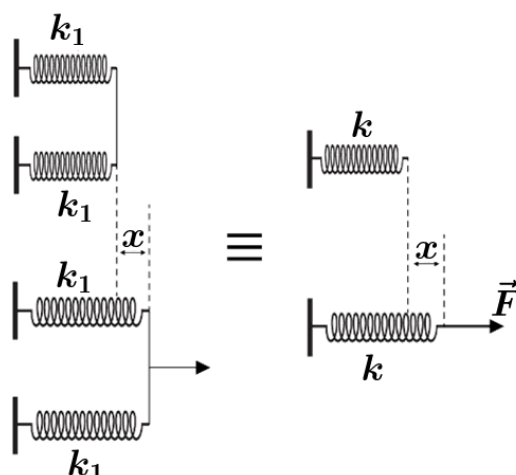


Figura 8: Molas em série e mola equivalente.

Nesse sistema, a força  $\vec{F}$  é aplicada no centro de uma haste de massa desprezível que liga cada extremidade das molas. Denotamos por  $k$  a constante elástica da mola equivalente, isto é, sob a ação da mesma força  $\vec{F}$ , a mola equivalente deverá sofrer a mesma deformação.

Devido ao fato de as molas serem idênticas e devida a simetria do problema, temos que a força em cada mola será a metade da força aplicada no centro da haste. Além disso, cada mola sofrerá a mesma deformação.

Aplicando a lei de Hooke para cada mola e para a mola equivalente, temos que:

$$\frac{F}{2} = k_1 \cdot x \text{ (eq. 2)}$$

$$F = k \cdot x \text{ (eq. 3)}$$

Fazendo  $\frac{\text{eq. 3}}{\text{eq. 2}}$ , temos que:

$$\frac{F}{\frac{F}{2}} = \frac{k \cdot x}{k_1 \cdot x} \Rightarrow \boxed{k = 2 \cdot k_1}$$

Podemos generalizar o resultado para o caso de  $n$  molas associadas em paralelo:

$$\boxed{k = n \cdot k_1}$$

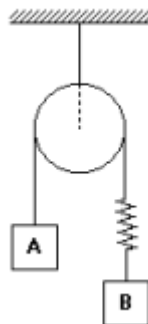
Em muitos projetos, os cálculos levam a molas cuja constante elástica não é comercializada. Assim, fazer associação de molas torna-se uma saída para encontrar a constante de mola desejada.

ESCLARECENDO!



1)

O corpo A, de massa  $m_A = 1\text{ kg}$ , sobe com aceleração constante de  $3\text{ m/s}^2$ . Sabendo-se que o comprimento inicial da mola é  $L_0 = 1\text{ m}$  e a constante elástica da mola é  $k = 26\text{ N/m}$ .

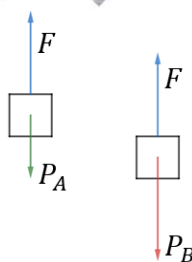


A massa do corpo B vale aproximadamente:

- a) 1,0 kg      b) 1,45 kg      c) 1,58 kg      d) 1,67 kg      e) 1,86 kg

**Comentários:**

Fazendo o diagrama de forças dos blocos, podemos escrever a 2ª lei para cada corpo:



$$\begin{cases} F - P_A = m_A \cdot a_A \\ P_B - F = m_B \cdot a_B \end{cases}$$

Se considerarmos que o sistema já entrou em equilíbrio, isto é, a deformação da mola já está definida, temos que a aceleração de A é igual a de B. Então, podemos somar as equações e encontrar que:

$$\begin{aligned} m_B \cdot g - m_A \cdot g &= m_A \cdot a_A + m_B \cdot a_A \\ m_B &= \frac{m_A(a_A + g)}{g - a_A} \Rightarrow m_B = \frac{1(3 + 10)}{10 - 3} \cong 1,86 \text{ kg} \end{aligned}$$

Note que não precisamos encontrar a força elástica.

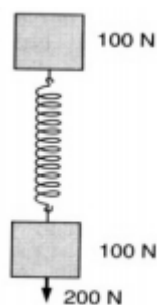
**Gabarito: E**

2)

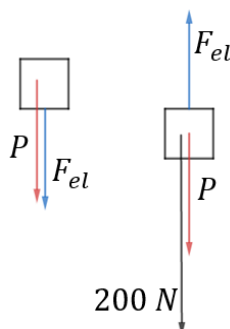
O conjunto dos blocos representados na figura está sujeito a uma força vertical para baixo, constante, de 200 N. A constante elástica da mola (de massa desprezível) que une os blocos vale 1000 N/m e o movimento do sistema se dá na mesma linha vertical.

Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .

Qual é, em cm, a deformação da mola?



**Comentários:**



Escrevendo o diagrama de forças, temos que:

$$\begin{cases} 200 + P - F_{el} = m \cdot a \\ P + F_{el} = m \cdot a \end{cases}$$

Subtraindo a segunda da primeira equação, temos que:

$$200 - F_{el} - F_{el} = 0$$

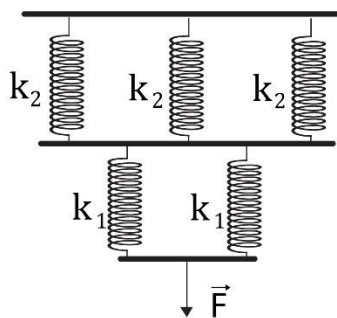
$$2 \cdot 1000 \cdot x = 200 \Rightarrow x = \frac{200}{2000}$$

$$x = 0,10 \text{ m} = 10 \text{ cm}$$

**Gabarito: 10 cm.**

3)

Determine a mola equivalente da seguinte associação:



Onde  $k_2 = 2k_1$ .

**Comentários:**

Inicialmente, determinamos as molas equivalentes para cada parte em paralelo:

$$k'_2 = 3k_2 = 6k_1 \Rightarrow k'_1 = 2k_1$$

Notamos que  $k'_2$  e  $k'_1$  estão em série, logo:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k'_1} + \frac{1}{k'_2} \Rightarrow k = \frac{k'_1 \cdot k'_2}{k'_1 + k'_2}$$

$$k = \frac{(2k_1)(6k_1)}{2k_1 + 6k_1} \Rightarrow k = 1,5 k_1$$

PRESTE MAIS  
ATENÇÃO!



## 2. Força de atrito

### 2.1. Atrito seco entre sólidos

Forças de atrito de estão presentes na vida diária. Quando vencemos as forças de atrito somos capazes de locomover e de girar.

**Força elástica, atrito e movimento curvilíneo**

Ela surge da interação entre a superfície dos corpos. Quando um corpo desliza sobre a superfície de outro corpo, logo, há movimento relativo entre as superfícies, os corpos exercem entre eles uma força tangente à superfície de contato, se opondo ao deslizamento.

Até agora estudamos casos onde essa interação era desprezível. Entretanto, na prática as forças de atrito sempre existem e são essenciais, por exemplo, quando você segura um lápis para escrever, enquanto você caminha, pregos e parafusos segurando algo e etc.

É possível reduzir bem o atrito entre superfícies sólidas utilizando lubrificantes ou fazendo um ótimo polimento das superfícies.

Vamos estudar alguns exemplos da utilização da força atrito na nossa vida.

### Exemplo 1: força de atrito freando objetos.

Um bloco lançado com velocidade inicial  $\vec{v}_0$  em uma mesa horizontal.

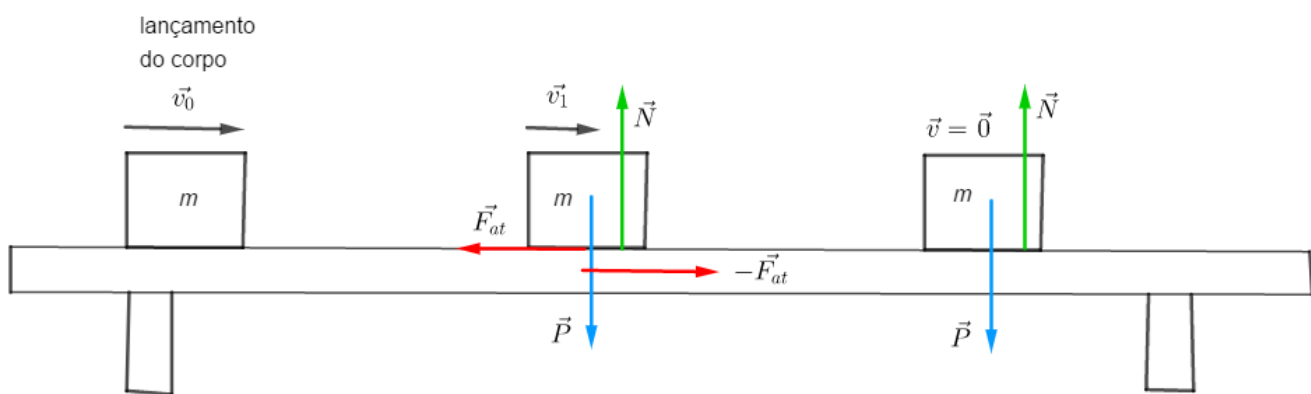
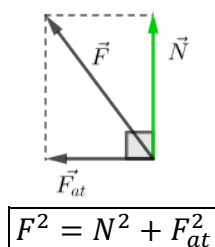


Figura 9: Corpo sendo lançado sobre uma mesa evidenciando a força de atrito.

Após lançar o corpo com velocidade inicial  $\vec{v}_0$ , devido a interação entre as superfícies surge uma força de atrito  $\vec{F}_{at}$  no bloco contrária ao seu movimento. Pelo Princípio da Ação e Reação, o bloco deve ter exercido uma força de mesma intensidade e sentido contrário na mesa ( $-\vec{F}_{at}$ ).

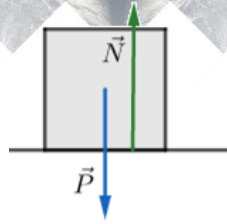
Quando o bloco para a força de atrito se anula. Note que a força resultante que a superfície da mesa faz sobre o bloco é a composição da força normal e da força de atrito.



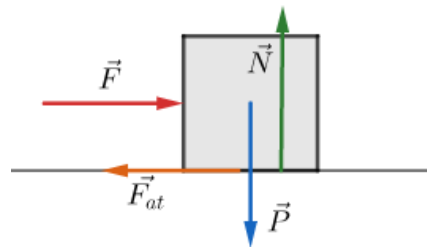
### Exemplo 2: força de atrito oposta a tendência do movimento.

Um saco de cimento repousa sobre uma superfície plana e horizontal, onde atuam apenas as forças peso ( $\vec{P}$ ) e normal ( $\vec{N}$ ).





Se um operador faz uma força horizontal  $\vec{F}$  mas está ainda não suficiente para tirar o saco de cimento da sua posição inicial, dizemos que a força exercida pela pessoa é igual a força de atrito estático entre o solo e o objeto. Neste caso, a força de atrito deve ter sentido contrário à **tendência do movimento**.



Neste caso, temos que:

$$\vec{F} + \vec{F}_{at} = \vec{0} \Rightarrow |\vec{F}| = |\vec{F}_{at}|$$

Se olharmos apenas para estes dois exemplos, somos levados a concluir que a força de atrito sempre tem sentido contrário a tendência do movimento ou contrário ao movimento. Entretanto, há casos onde a força de atrito tem o **mesmo sentido** que o movimento do corpo.

### Exemplo 3: força de atrito na direção do movimento.

Vamos colocar um objeto A em cima de um objeto maior B, de tal forma que aplicamos uma força horizontal em B. Inicialmente o sistema está em repouso. Se considerarmos o atrito entre B e o solo desprezível, temos os seguintes diagramas de força.

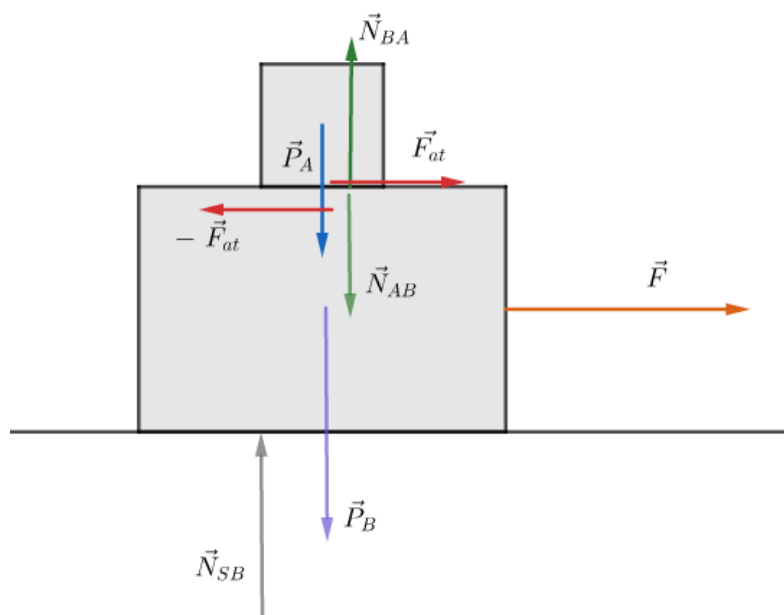


Figura 10: Caso em que a força de atrito está na direção do movimento.

Quando aplicamos a força na horizontal ao bloco B, dependendo da intensidade de  $\vec{F}$  pode acontecer dos dois blocos se deslocarem juntos, ou seja, o bloco A não escorrega sobre B. Isso acontece pois existe uma força de atrito no bloco A no mesmo sentido de  $\vec{F}$ .

Outra maneira de enxergar isso é pelo princípio da Inércia. Se não houvesse atrito, o bloco A deveria ficar parado em relação ao solo, pois não existem força resultante atuando nele, quando desconsideramos o atrito.

Se colocássemos o referencial no bloco B, o corpo A deveria ir para a esquerda, sentido oposto a tendência do movimento de A em relação a B. Observe que por Ação e Reação a força de atrito no bloco B está orientada para a esquerda, sentido contrário ao movimento dos blocos.

#### Exemplo 4: força de atrito na caminhada de uma pessoa.

Quando uma pessoa caminha para a direita em relação ao solo, o pé do indivíduo aplica ao chão uma força  $-\vec{F}$  para a esquerda. De acordo com a 3ª lei, o chão aplica sobre o pé da pessoa uma força  $\vec{F}$  para a direita.

Note que as forças  $-\vec{F}$  e  $\vec{F}$  são forças de atrito. Caso não existisse atrito entre a sola do sapato e o chão, a pessoa escorregaria, isto é, ela faria uma força horizontal para trás e não teria nenhum efeito do solo para “lançar” ela para frente.



Figura 11: Força de atrito responsável pelo movimento de uma pessoa para frente.

Observe que a tendência do movimento do indivíduo é para a esquerda. Novamente, a força de atrito atua o sentido contrário a tendência do movimento da pessoa.

Se existe movimento relativo entre as superfícies em contato, chamamos de **força de atrito dinâmico**. Quando não há movimento relativos entre as superfícies de contato, denominamos por **força de atrito estático**.

#### Exemplo 5: força de atrito na tração de um automóvel.

Quando dizemos que um carro tem tração traseira, dizemos apenas que as rodas traseiras são tracionadas pelo motor. Considere um móvel com tração traseira. Se as rodas de trás são tracionadas pelo motor, elas “empurram” o chão para trás com uma força  $-\vec{F}$ . Pela 3ª lei, o chão exerce uma força nas rodas  $\vec{F}$  que impulsiona o carro para frente. Se a roda não derrapar,  $-\vec{F}$  e  $\vec{F}$  são as forças de atrito estático.

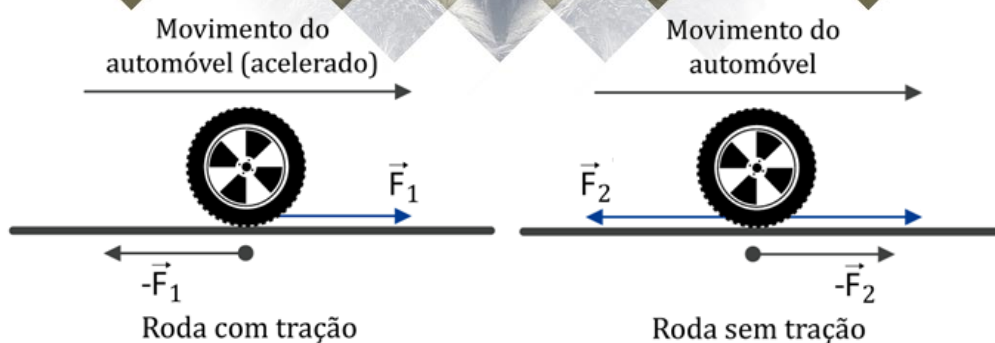


Figura 12: Roda tracionada (à esquerda) onde a ação da força de atrito é responsável pelo descolamento para a direita e roda sem tração (à direita) onde a reação do atrito impulsiona o carro para a direita.

Por outro lado, as rodas da frente não são tracionadas (apenas se o automóvel for 4x4 terá tração nas 4 rodas) e essas rodas “empurram” o chão para frente como uma força  $\vec{F}'$ . Pelo Princípio da Ação e Reação, o chão empurra a roda com mesma força, mas sentido contrário  $-\vec{F}'$ . Se a roda **não derrapar**, as forças  $\vec{F}'$  e  $-\vec{F}'$  são forças de **atrito estático**.

## 2.2. Qual a origem das forças de atrito?

Independente de quão lisa seja a superfície, utilizando um microscópio podemos ver as irregularidades que ela apresenta. Considere um livro sobre uma mesa.

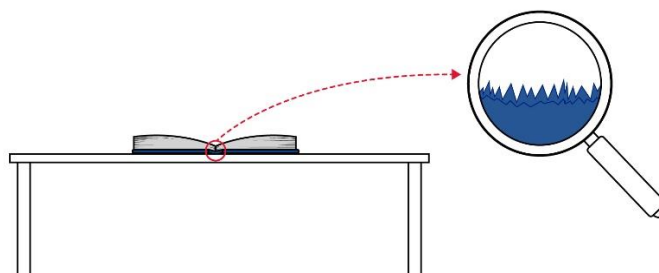


Figura 13: Ampliação de uma superfície rugosa, mostrando as imperfeições das áreas de contato.

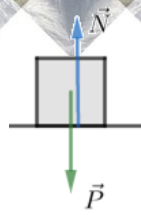
Notamos que na verdade a área real de contato é menor que a área da base do livro. Apenas os pontos mais salientes se tocam. Assim, os “picos” e as “depressões” se interpenetram dificultando o movimento de uma superfície em relação à outra.

Essa não é a única causa do atrito, ainda existe a força de coesão ou de adesão entre as moléculas dos dois corpos em contato. Chamamos de força de coesão quando os materiais são iguais e força de adesão quando os materiais são diferentes.

Se colocarmos duas superfícies metálicas bem polidas e limpas em contato em alto vácuo, é quase impossível fazer uma deslizar em relação à outra. Devido ao fato de serem muito lisas, a interação entre os átomos é muito forte e as superfícies se soldam a frio formando uma única peça metálica.

## 2.3. Atrito estático

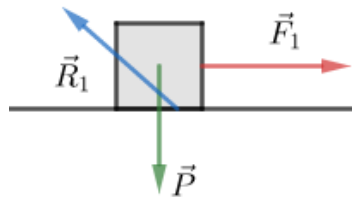
Para estudar o atrito estático, vamos utilizar um bloco em repouso em cima de uma mesa horizontal e fazer o diagrama de forças que nele atuam.



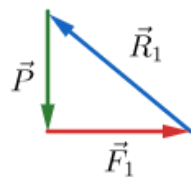
Note que essas são as forças que atuam no corpo e pela condição de equilíbrio temos que:

$$\vec{N} + \vec{P} = \vec{0}$$

Se uma pessoa faz uma força  $\vec{F}_1$  na horizontal, mas este não se move, então, a força de contato da mesa, a força exercida pelo indivíduo e o peso do bloco devem ter resultante nula, ou seja:



Pela condição de equilíbrio, temos que:

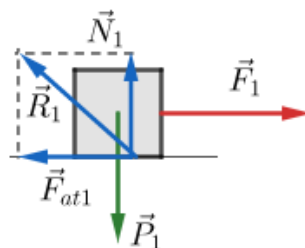


$$\vec{R}_1 + \vec{P} + \vec{F}_1 = \vec{0}$$

Repare que a força de contato  $\vec{R}_1$  pode ser decomposta em duas componentes:

- 1) Componente perpendicular à superfície de contato, a qual chamamos de **força normal**; e
- 2) Componente tangencial à superfície de contato, a qual chamamos de **força de atrito**.

Diagrama de forças com  $\vec{R}_1$  decomposta:



Podemos separar a condição de equilíbrio para cada direção:

- Na horizontal:

$$F_{at1} = F_1$$

- Na vertical:

$$N_1 = P_1$$

Se aumentarmos a força  $\vec{F}_1$  aplicada pelo indivíduo, a força de atrito entre o corpo e a superfície também aumentaria e a normal continuaria a mesma, já que o peso do objeto não se alterou.

Poderíamos repetir esse processo até o momento que a força aplicada pela pessoa seja quase suficiente para mover o bloco. Dizemos que o bloco está na iminência de mover-se. Nessa situação, temos que o atrito estático é máximo ( $\vec{F}_{at,e1}^{máx}$ ).

Se repetirmos a experiência, mas com uma massa maior em cima do bloco, verificaremos que a força de atrito máxima aumentou ( $\vec{F}_{at,e2}^{máx}$ ), já que a normal aumentou também ( $N_2$ ). Entretanto, quando fazemos  $\frac{\vec{F}_{at,e}^{máx}}{N}$ , temos que:

$$\frac{F_{at,e1}^{máx}}{N_1} = \frac{F_{at,e2}^{máx}}{N_2} = \dots \frac{F_{at,e}^{máx}}{N}$$

Chamamos de coeficiente de atrito estático  $\mu_e$  este quociente entre a força de atrito máxima e sua respectiva normal:

$$\frac{F_{at,e1}^{máx}}{N_1} = \frac{F_{at,e2}^{máx}}{N_2} = \dots \frac{F_{at,e}^{máx}}{N} = \mu_e$$

Portanto:

$$F_{at,e}^{máx} = \mu \cdot N$$

Note que  $\mu_e$  é definido como quociente de duas grandezas de mesma dimensão, assim, o coeficiente de atrito será adimensional, isto é, não possui unidade.

Observe que a força de atrito e a normal são apenas composição da força de contato entre as superfícies.

Como vimos através do experimento, a força de atrito estático varia de 0 até seu valor máximo:

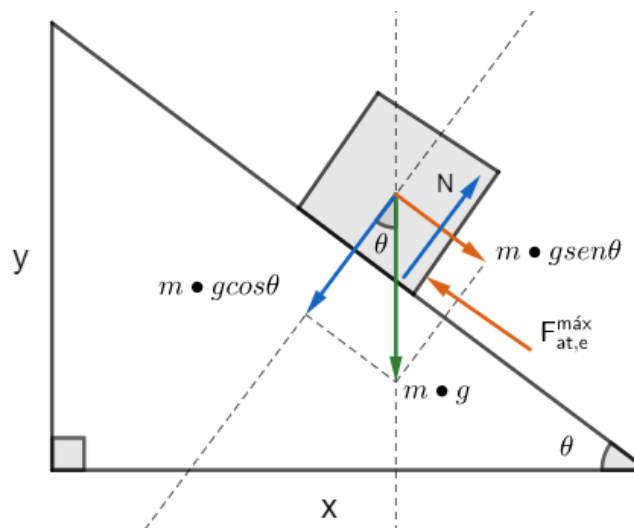
$$0 \leq F_{at,e} \leq F_{at,e,máx} = \mu_e \cdot N$$

Os coeficientes de atrito são determinados experimentalmente. Os valores de  $\mu_e$  dependem das propriedades dos corpos e das superfícies de contato. Assim, sempre que mencionamos coeficiente de atrito colocamos a preposição **entre**, por exemplo, atrito *entre* o ovo e uma frigideira de Teflon é próximo de 0,04 e o atrito *entre* o sapato de um alpinista e a rocha pode chegar a 1,2 (Halliday, Resnick 2009).

ESCLARECENDO!



Vamos calcular o coeficiente de atrito entre um bloco que está na iminência de deslizar e um plano inclinado, dado as dimensões do plano:



Fazendo a condição de equilíbrio na direção normal ao plano, temos que:

$$N = m \cdot g \cdot \cos\theta \text{ (eq. 1)}$$

Fazendo a condição de equilíbrio na direção tangencial ao plano, temos que:

$$m \cdot g \cdot \sin\theta = F_{at,e}^{m\acute{a}x} = \mu_e \cdot N \text{ (eq. 2)}$$

Substituindo a normal na eq. 2, temos que:

$$m \cdot g \cdot \sin\theta = \mu_e \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta$$

$$\therefore \mu_e = \tan\theta = \frac{y}{x}$$

PRESTE MAIS  
ATENÇÃO!



## 2.4. Atrito dinâmico

Enquanto a força aplicada horizontalmente sobre um corpo não for maior que a força de atrito estático máxima, este corpo permanecerá em repouso. Somente quando  $F > \mu_e \cdot N$  teremos movimento relativo entre as superfícies. Quando isso ocorrer, o atrito deixará de ser estático e passará a ser dinâmico.

Diferentemente da  $F_{at,e}$ , a força de atrito dinâmico  $F_{at,d}$  não varia e seu módulo é sempre dado por:

$$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$$



Em que  $\mu_d$  é o coeficiente de atrito dinâmico (ou cinético).

Novamente,  $\mu_d$  depende do material de que é feito cada corpo, assim como do estado de polimento e lubrificação das superfícies em contato, entretanto, independem da área das superfícies em contato.

Geralmente, tem-se  $\mu_d < 1$ , mas existem casos onde  $\mu_d \geq 1$ . Além disso, semelhante ao  $\mu_e$ , o coeficiente de atrito dinâmico também é adimensional.

Experimentalmente, verifica-se que à medida que a velocidade se torna muito grande, o coeficiente de atrito cinético diminui, mas essa variação é tão pequena que em geral é desprezada.

Além disso, a experiência mostra que o coeficiente de atrito estático é maior que o cinético:

$$\mu_e \geq \mu_d$$

Entretanto, há casos em que a diferença entre os coeficientes é tão pequena que pode ser desprezada. Então:

$$\mu_e = \mu_d = \mu$$

Quando iniciado o movimento, reduz o acoplamento entre as saliências das superfícies e alteram-se as forças de interação entre as moléculas das superfícies. Vemos isso no nosso dia a dia. É sempre mais tranquilo manter um objeto em movimento que retirá-lo do repouso.



Podemos relacionar a força de atrito com a força que um operador aplica horizontalmente:

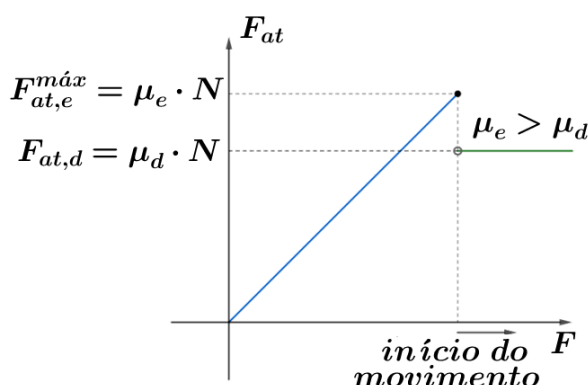
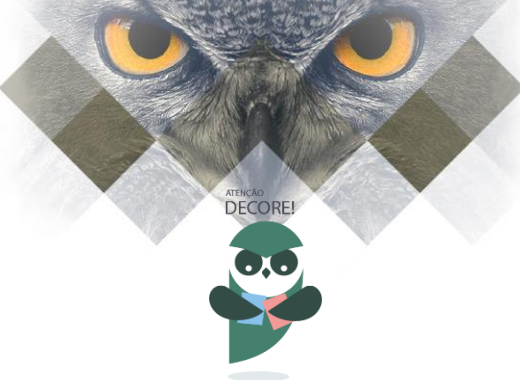


Figura 14: Gráfico da força de atrito em função da força aplicada para mover o corpo.



Podemos sintetizar as características da força de atrito da seguinte forma:

Tipo de Atrito	Direção da $F_{at}$	Sentido da $F_{at}$	Intensidade da $F_{at}$
Estático	Paralela à superfície de contato	Contrário à tendência do movimento	$0 \leq F_{at,e} \leq \mu_e \cdot N$
Dinâmico ou Cinético		Contrário ao movimento	$F_{at,d} = \mu_d \cdot N$

INDO MAIS  
FUNDO!



## 2.5. Resistência dos fluidos

Fluidos são substâncias capazes de escoar. Constituem fluidos os líquidos, os gases, os plasmas.

Se um corpo se move no interior de um fluido, ele sofre a ação de uma força de resistência  $\vec{F}_r$  de sentido contrário ao movimento do corpo em relação ao fluido e a denotamos por força de atrito fluido, força de atrito viscoso ou força de resistência do fluido.

Estudar as forças e os movimentos dos corpos em fluidos é extremamente difícil e requer uma matemática muito pesada. A maioria das leis propostas são obtidas experimentalmente, como o caso da força de oposição ao movimento, dada por:

$$F_r = K \cdot v^n$$

Em que:

- $v$  é o módulo da velocidade do corpo em relação ao fluido;
- $n$  é uma constante a ser determinada. Ela depende da ordem de grandeza da velocidade e do tamanho do corpo, para muitos casos temos  $n = 1$  ou  $n = 2$ ;
- $k$  constante que depende da natureza do fluido, da geometria do corpo, da área da maior seção reta do corpo, na direção perpendicular ao movimento. Se a área aumenta, o valor de  $k$  também aumenta.

Para o caso de um objeto movimentando no ar, essa força recebe o nome de arrasto (em inglês drag) e sua equação é dada por:


$$D = \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Com:

- $C$  é uma constante determinada experimentalmente, chamada de coeficiente de arrasto;
- $\rho$  é a massa específica do ar;
- $A$  é área de seção reta efetiva (área de uma seção reta perpendicular à velocidade  $\vec{v}$ );

O coeficiente de arrasto depende da velocidade do corpo. Para nossos estudos, consideraremos  $C$  constante.

Se uma pessoa está em queda livre, temos a força peso para baixo e a força de arrasto para cima, de tal forma que a resultante é dada por:

$$m \cdot g - D = m \cdot a$$

Notamos que a força de arrasto depende da velocidade e medida que esta aumenta, a força de arrasto também aumenta. Se considerarmos um tempo suficientemente grande, a força de arrasto se iguala a força peso e, assim, a aceleração se anula. A partir desse momento, o corpo começa a cair com velocidade constante, dizemos que ele chegou na velocidade terminal ( $v_t$ ).

Assim, podemos escrever que:

$$m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot C \cdot \rho \cdot A \cdot v_t^2 = 0 \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g}{C \cdot \rho \cdot A}}$$

Se a força de resistência é escrita como  $F_r = k \cdot v^2$ , podemos escrever a segunda lei de Newton a cada instante da queda e teríamos que:

$$m \cdot g - k \cdot v^2 = m \cdot a \Rightarrow a = g - \frac{k \cdot v^2}{m}$$

Note que não temos mais o caso de uma aceleração constante, como foi no estudo de um MUV no vácuo.

Se plotarmos a aceleração do corpo em relação ao tempo, teremos a seguinte curva:

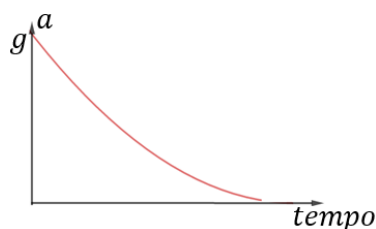


Figura 15: Gráfico da aceleração de um corpo caindo e sofrendo ação da resistência do fluido.

Se o corpo é abandonado de uma dada altura, sua velocidade inicial é nula, logo,  $a = g$ .

Quando olhamos a força de resistência na forma  $F_r = k \cdot v^2$ , podemos escrever a velocidade terminal ou velocidade limite da seguinte forma:

$$F_r = P$$

$$k \cdot v_t^2 = m \cdot g \Rightarrow v_t = \sqrt{\frac{m \cdot g}{k}}$$

Se quando o corpo atinge a velocidade limite ele passa a desenvolver um movimento uniforme, então o gráfico da velocidade em função do tempo é:

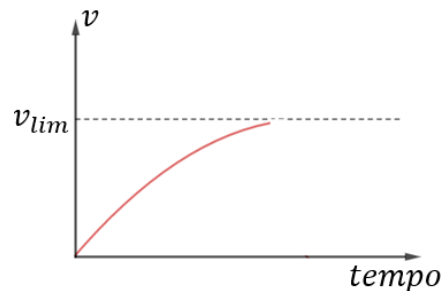


Figura 16: Gráfico da velocidade de um corpo que sofre a ação de resistência do fluido.

Notamos que a unidade de  $k$  é dada por:

$$u(k) = \frac{u(F_r)}{u(v^2)} = \frac{kg \cdot \frac{m}{s^2}}{\frac{m^2}{s^2}} = \frac{kg}{m}$$

ESCLARECENDO!

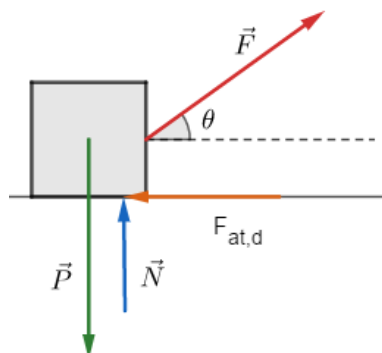


4)

Uma caixa de  $m$  repousa sobre um plano horizontal, onde o atrito cinético é  $\mu_d$ . A caixa é puxada por um operador por uma força de módulo  $F$  que faz um ângulo  $\theta$ . Se a aceleração do corpo é  $a$ , calcule o módulo  $F$ .

**Comentários:**

Fazendo o diagrama de forças, temos:



Aplicando a segunda lei de Newton na direção normal, temos:

$$F_{\text{sen}\theta} + N = P$$

$$N = F_{\text{sen}\theta} - m \cdot g$$

Fazendo novamente a 2ª lei, mas na direção tangencial a superfície, temos que:

$$F \cos\theta - F_{\text{at},d} = m \cdot a$$

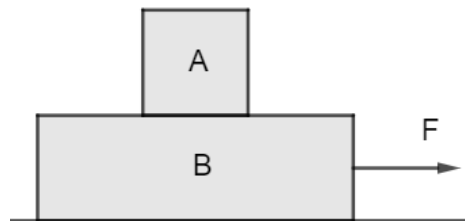
Porém,  $F_{\text{at},d} = \mu \cdot N$ , então:

$$F \cos\theta - \mu_d \cdot (F_{\text{sen}\theta} - m \cdot g) = m \cdot a$$

$$F = \frac{m(a - g \cdot \mu_d)}{\cos\theta - \mu_d \cdot \text{sen}\theta}$$

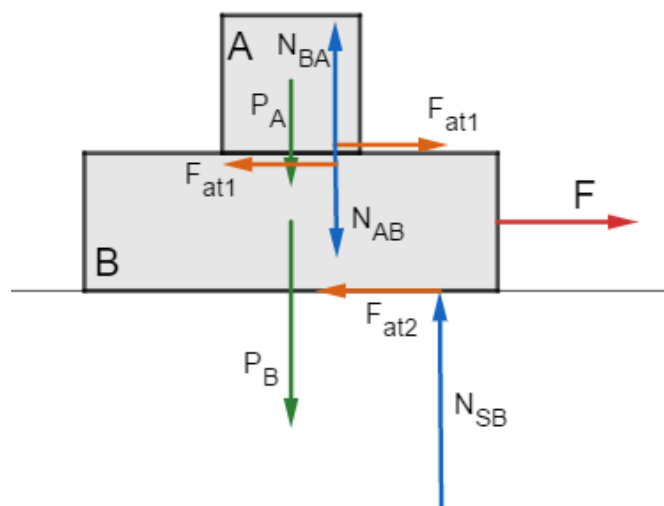
5)

Considere um sistema constituído de dois blocos, onde o coeficiente de atrito estático entre A e B vale  $\mu_1$  e o coeficiente de atrito dinâmico entre B e o solo vale  $\mu_2$ . Determine a máxima força aplicada em B para que o bloco A não escorregue em relação a B. Qual a aceleração de cada bloco se a força aplicada em B for  $2F_{\text{máx}}$ ? Dado que o coeficiente de atrito dinâmico entre A e B vale  $\mu_{1d}$ .



**Comentários:**

Vamos fazer o diagrama de forças para os dois objetos:



O sentido da força de atrito no bloco A pode ser determinado pelo Princípio da Inércia, conforme no exemplo dado na teoria.

1) Para o caso da força aplicada F ser máxima sem movimento relativo dos blocos, devemos ter que:

$$a_A = a_B = a$$

Dessa forma, podemos escrever a segunda lei para cada um dos corpos em cada direção:

Bloco A:

$$\begin{cases} \text{horizontal: } F_{at1} = m_A \cdot a_A \\ \text{vertical: } N_{BA} = P_A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \cdot m_A \cdot g = m_A \cdot a \\ N_{BA} = m_A \cdot g \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \mu_1 \cdot g}$$

Bloco B:

$$\begin{cases} \text{horizontal: } F_{m\acute{a}x} - F_{at1} - F_{at2} = m_B \cdot a_B \\ \text{vertical: } N_{SB} = N_{AB} + P_B \\ N_{AB} = N_{BA} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_{m\acute{a}x} = \mu_1 \cdot m_A \cdot g + \mu_2 \cdot N_{SB} + m_B \cdot \mu_1 \cdot g \\ N_{SB} = (m_A + m_B)g \\ N_{AB} = N_{BA} = m_A \cdot g \end{cases}$$

$$\therefore \boxed{F_{m\acute{a}x} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot (m_A + m_B) \cdot g}$$

2) Para o caso em que  $F = 2F_{m\acute{a}x}$  teremos que se a força  $F$  supera a máxima força para o qual não existe movimento relativo entre os blocos. Portanto, os blocos terão acelerações diferentes. Vamos rescrever a 2ª Lei para cada bloco na direção horizontal:

$$\begin{cases} F_{at1d} = m_A \cdot a_A \\ 2F_{m\acute{a}x} - F_{at1d} - F_{at2} = m_B \cdot a_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu_{1d} \cdot m_A \cdot g = m_A \cdot a_A \\ 2F_{m\acute{a}x} - \mu_{1d} \cdot m_A \cdot g - \mu_2 \cdot m_B \cdot g = m_B \cdot a_B \end{cases}$$

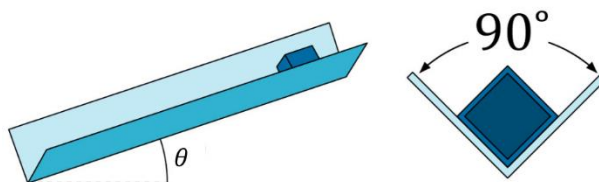
$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a_A = \mu_{1d} \cdot g} \\ \boxed{a_B = \frac{2F_{m\acute{a}x} - (\mu_{1d} \cdot m_A + \mu_2 \cdot m_B) \cdot g}{m_B}}$$

Em que  $F_{m\acute{a}x} = (\mu_1 + \mu_2) \cdot (m_A + m_B) \cdot g$ .



6) (Halliday, Rensick e Walker – 4ª edição)

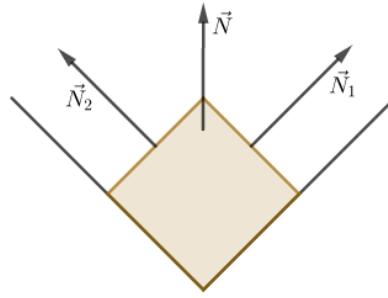
Uma caixa desliza para baixo através de uma calha de perfil de 90°, que está inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, conforme mostra a figura. O coeficiente de atrito cinético entre elas é  $\mu_k$ . Qual a aceleração da caixa em função de  $\mu_k$ ,  $\theta$  e  $g$ ?



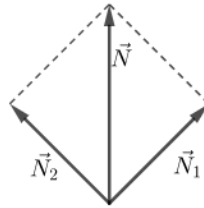
**Comentários:**

Inicialmente, representaremos as normais que a calha exerce sobre a caixa:





Pela simetria do problema, temos que  $N_1 = N_2$ . Pela soma vetorial das normais, temos que:



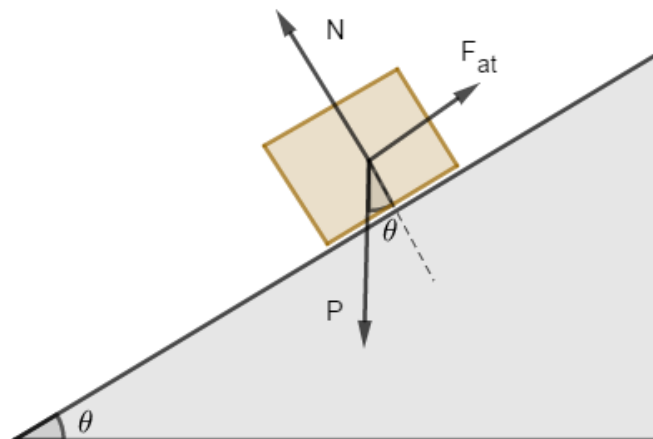
$$N = \sqrt{2} \cdot N_1$$

A força de atrito total na caixa, é a soma das forças de atrito em cada lado da caixa:

$$F_{at} = F_{at1} + F_{at2} = 2 \cdot \mu_k \cdot N_1 = 2 \cdot \mu_k \cdot \frac{N}{\sqrt{2}}$$

$$F_{at} = \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot N$$

A partir disso, podemos fazer a vista lateral da caixa, para conhecer a aceleração na direção da calha:



Assim, temos as seguintes equações nas duas direções:

$$\begin{cases} \text{normal: } N = m \cdot g \cdot \cos\theta \\ m \cdot g \cdot \sin\theta - \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot N = m \cdot a \end{cases} \Rightarrow m \cdot g \cdot \sin\theta - \mu_k \cdot \sqrt{2} \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot a$$

$$a = g \cdot (\sin\theta - \sqrt{2} \cdot \mu_k \cdot \cos\theta)$$

Se o bloco estivesse na iminência de deslizar na calha, toda análise de forças seria semelhante, mas com aceleração nula e trabalharemos com o coeficiente de atrito estático  $\mu_s$ . Dessa forma, a relação entre o ângulo e o  $\mu_s$  é dado por:

$$a = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2} \cdot \mu_s \cdot \cos \theta$$

$$\mu_s = \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{2}}$$

Note que esse resultado é diferente daquele na teoria quando fomos calcular o  $\mu$  para um objeto descendo um plano inclinado, onde apenas existe uma superfície de contato.

### 3. Dinâmica do movimento curvilíneo

#### 3.1. As resultantes tangencial e centrípeta

Para estudar a dinâmica do movimento curvilíneo, vamos considerar uma partícula descrevendo uma trajetória curva em relação a um referencial inercial, em um dado plano  $\alpha$ .

Se em um dado instante existem as forças  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  e  $\vec{F}_3$  agem sobre a partícula, podemos decompor essas forças em duas direções: normal e tangencial.

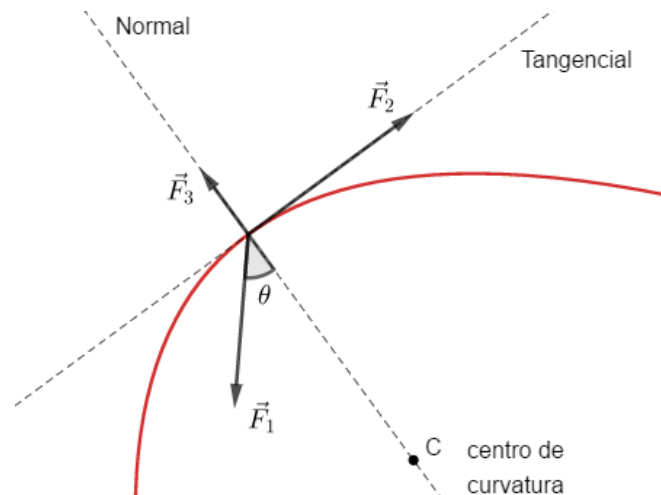


Figura 17: Forças atuando em uma partícula em movimento curvilíneo.

Decompondo as forças nas direções normal e tangencial, encontramos a componente em cada direção:

$$F_t = F_2 - F_1 \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$F_c = F_1 \cdot \cos \theta - F_3$$

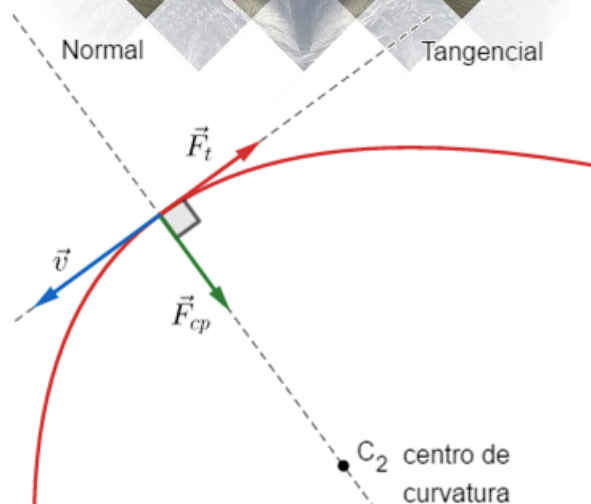


Figura 18: Vetores decompostos nas direções normal e tangencial em movimento curvilíneo.

Dessa forma, a força resultante na partícula pode ser encontrada pela soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta (força na direção normal, orientada para o centro de curvatura da trajetória). O módulo pode ser dado pelo Teorema de Pitágoras:

$$F_R^2 = F_t^2 + F_{cp}^2$$

### 3.2. A componente tangencial

A resultante tangencial é responsável por variar o módulo da velocidade vetorial  $\vec{v}$  da partícula. Ela pode ser escrita pela 2ª Lei de Newton como:

$$\vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t$$

A direção de  $\vec{F}_t$  é sempre a da tangente à trajetória em cada instante. Portanto, ela possui a mesma direção da velocidade vetorial da partícula. Entretanto, o sentido de  $\vec{F}_t$  depende da natureza do movimento: acelerado ou retardado.

- Acelerado: Nesse caso,  $\vec{F}_t$  tem o mesmo sentido da velocidade vetorial  $\vec{v}$ .

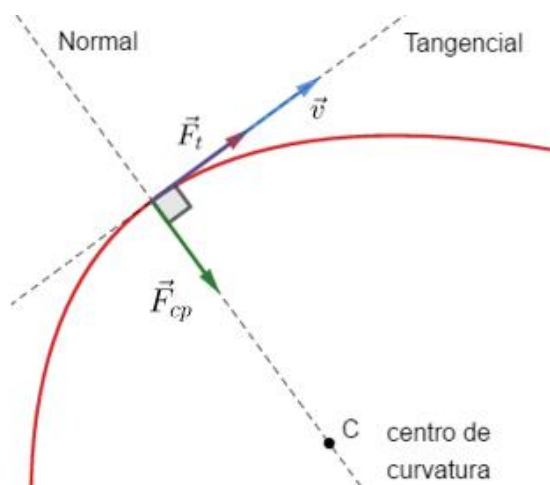


Figura 19: Velocidade e aceleração tangencial no mesmo sentido.

- Retardado: Nesse caso,  $\vec{F}_t$  tem sentido contrário ao da velocidade vetorial  $\vec{v}$ .

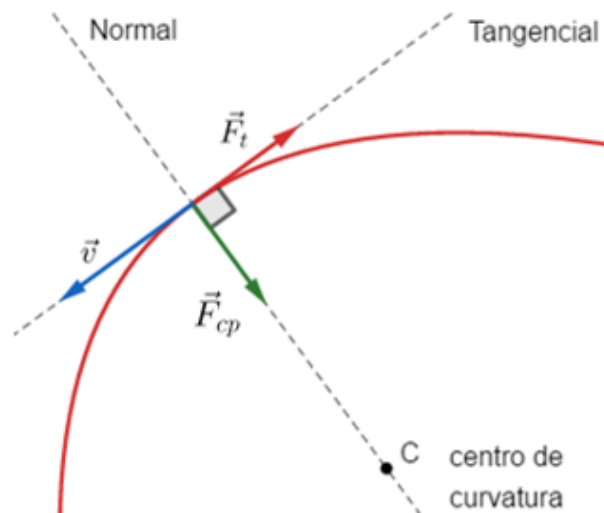


Figura 20: Velocidade e aceleração tangencial em sentidos opostos.

Vamos analisar um pêndulo simples, onde o fio de massa desprezível está fixado em C. Se soltarmos a massa do pêndulo é abandonado em A, o pêndulo passa por B onde tem velocidade máxima e para simetricamente em C. Desprezamos a resistência do ar.

Note que de A para B, o pêndulo descreve um movimento acelerado e de B para C, o pêndulo descreve um movimento retardado:

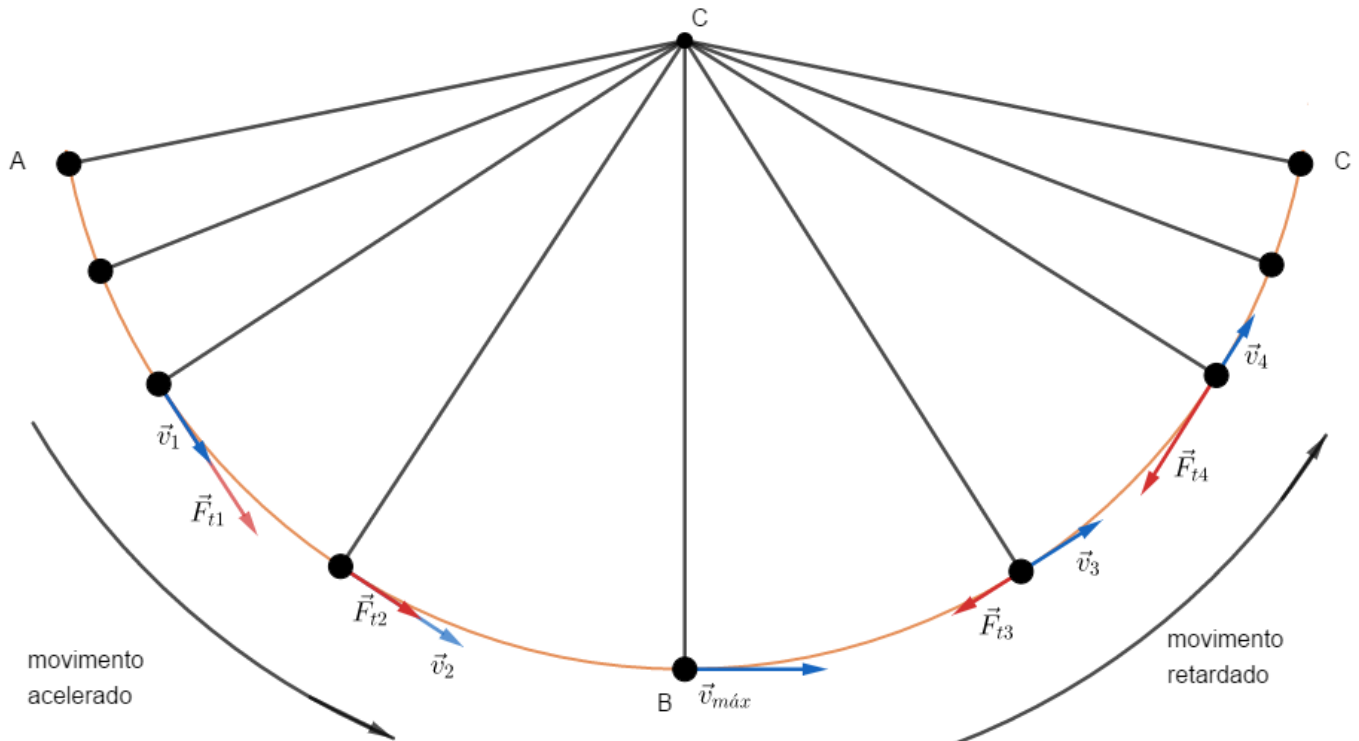


Figura 21: Representação dos vetores velocidade e força tangencial no movimento de um pêndulo.

Novamente, vamos reforçar a ideia de que a força tangencial é responsável por alterar o módulo da velocidade vetorial  $\vec{v}$ . Isso se explica pelo fato de  $\vec{F}_t$  e  $\vec{v}$  terem a mesma direção.

Para movimentos variados (acelerados ou retardados),  $\vec{v}$  varia em módulo e quem causa essa mudança é a  $\vec{F}_t$ , pois nestes casos ela é não-nula. Por outro lado, nos movimentos uniformes o módulo de  $\vec{v}$  não varia, pois nessas situações a  $\vec{F}_t$  é nula.

### 3.3. A componente centrípeta

A componente centrípeta pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp}$$

Conforme visto no capítulo de cinemática vetorial, o módulo da aceleração centrípeta pode ser dado por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Em que  $R$  é o raio de curvatura da trajetória.

A componente centrípeta  $\vec{F}_{cp}$  tem como função variar a direção da velocidade vetorial  $\vec{v}$ . É por isso que  $\vec{F}_{cp}$  é perpendicular à  $\vec{v}$ . Nos movimentos retilíneos,  $\vec{v}$  não varia de direção, mostrando que  $\vec{F}_{cp} = \vec{0}$ . Podemos imaginar que nos movimentos retilíneos teríamos raios de curvaturas tendendo ao infinito.

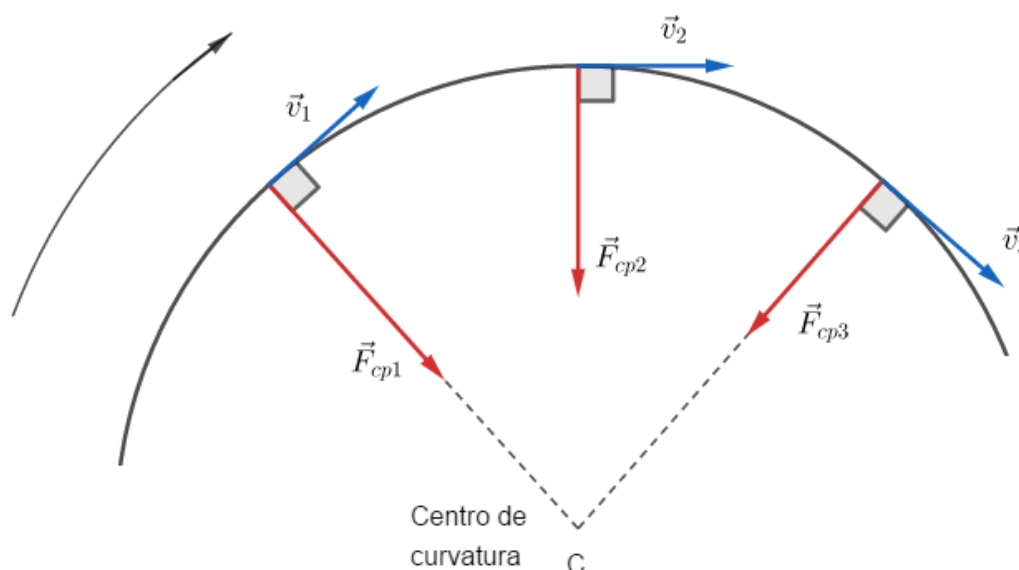


Figura 22: Representação dos vetores velocidade e força centrípeta.

### 3.4. As componentes tangencial e centrípeta nos principais movimentos

#### 3.4.1. Movimento retilíneo e uniforme

Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

Dado que o movimento é uniforme, temos que:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$

Portanto, a resultante será nula:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{0} + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = \vec{0}}$$

### 3.4.2. Movimento retilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser retilíneo, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção constante} \Rightarrow \vec{F}_{cp} = \vec{0}$$

Dado que o movimento é variado, temos que:

$$|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$$

Portanto, a resultante será a componente tangencial:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{F}_t + \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_t}$$

### 3.4.3. Movimento circular e uniforme

Pelo fato de o movimento ser circular, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$$

Dado que o movimento é uniforme, temos que:

$$|\vec{v}| = \text{constante} \neq 0 \Rightarrow \vec{F}_t = \vec{0}$$

Portanto, a resultante será a componente centrípeta:

$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp} = \vec{0} + \vec{F}_{cp} \Rightarrow \boxed{\vec{F}_R = \vec{F}_{cp}}$$

### 3.4.4. Movimento curvilíneo e variado

Pelo fato de o movimento ser curvilíneo, temos que:

$$\vec{v} \text{ tem direção variável} \Rightarrow \vec{F}_{cp} \neq \vec{0}$$

Dado que o movimento é variado, temos que:

$$|\vec{v}| \text{ é variável} \Rightarrow \vec{F}_t \neq \vec{0}$$

Portanto, a resultante será a soma vetorial das componentes tangencial e centrípeta:



$$\vec{F}_R = \vec{F}_t + \vec{F}_{cp}$$



### 3.5. A força centrífuga

Para estudarmos o que é a força centrípeta, vamos utilizar o exemplo de um motociclista realizando uma trajetória curva circular em movimento uniforme. Para um referencial inercial, isto é, um referencial ligado ao solo, a resultante das forças no piloto é radial e orientada para o centro da curva. Sabemos que essa força é a resultante centrípeta  $\vec{F}_{cp}$ .

Além disso, se o conjunto tem massa  $m$ , a velocidade é  $v$  e o raio de curvatura da trajetória é  $R$ , então:

$$|\vec{F}_{cp}| = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Entretanto, e tomarmos um referencial ligado à moto, ou seja, referencial acelerado, o piloto está em repouso e, assim, a resultante das forças no piloto deve ser nula. Portanto, deve ser considerada uma força fictícia que possa equilibrar a força centrípeta.

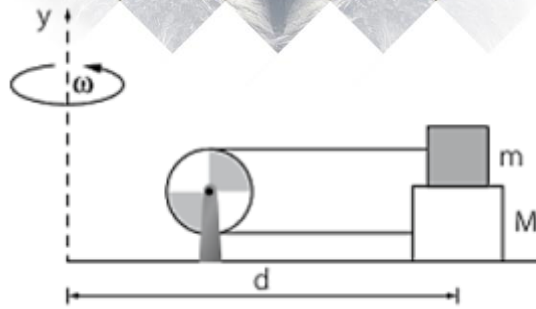
Dessa forma, tal força deve ser **radial** também, de **mesmo módulo** que  $\vec{F}_{cp}$  e orientada **para fora** da trajetória. Chamamos essa força de **centrífuga** ( $\vec{F}_{cf}$ ).

$$|\vec{F}_{cf}| = |\vec{F}_{cp}| \Rightarrow |\vec{F}_{cf}| = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Assim, fica claro que a força centrífuga é uma força de inércia que está presente apenas em referenciais não inerciais onde exista aceleração centrípeta, ou seja, referenciais em rotação.

#### Exemplo: (IME 1996)

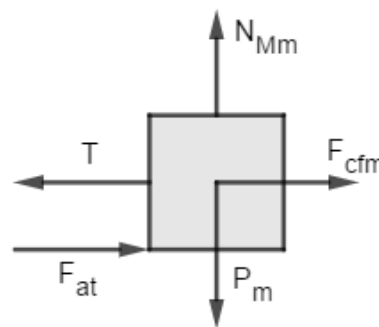
Uma mesa giratória tem velocidade angular constante  $\omega$ , em torno do eixo  $y$ . Sobre esta mesa encontram-se dois blocos, de massa  $m$  e  $M$ , ligados por uma corda inelástica que passa por uma roldana fixa à mesa, conforme a figura a seguir. Considerando que não existe atrito entre a mesa e o bloco  $M$ , determine o coeficiente de atrito mínimo entre os dois blocos para que não haja movimento relativo entre eles. Considere  $d$  a distância dos blocos ao eixo de rotação e despreze as massas da roldana e da corda. Dado:  $M > m$ .



**Comentários:**

Se tomarmos o referencial da mesa girante, os blocos estão em equilíbrio estático relativo. Utilizando o conceito de força centrífuga, dizemos que existe uma força  $F_{cfM} = M \cdot \omega^2 \cdot d$  na massa maior e uma força  $F_{cfm} = m \cdot \omega^2 \cdot d$  na massa menor na direção radial para fora.

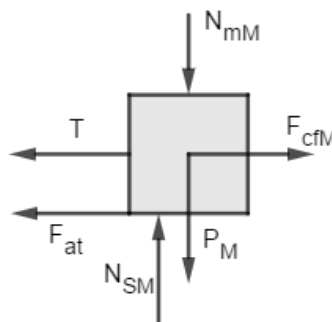
Como  $M > m$ , então  $M \cdot \omega^2 \cdot d > m \cdot \omega^2 \cdot d$ , ou seja,  $F_{cfM} > F_{cfm}$ . Logo, o bloco de massa maior tende a puxar o bloco de massa menor para próximo da polia. Assim, temos o seguinte diagrama de forças para o bloco menor:



Logo, pela 2ª Lei podemos escrever que:

$$\begin{cases} m \cdot g = N_{Mm} \\ F_{cfm} + F_{at} = T \end{cases} \Rightarrow m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot m \cdot g = T \text{ (eq. 1)}$$

Para o bloco de massa maior, temos o seguinte diagrama de forças:



Logo, pela 2ª Lei podemos escrever que:

$$\begin{cases} N_{SM} = P_M + N_{mM} \\ F_{cfM} = F_{at} + T \end{cases} \Rightarrow M \cdot \omega^2 \cdot d = \mu \cdot m \cdot g + T \text{ (eq. 2)}$$

Substituindo a tração  $T$  de eq. 1 em eq. 2, temos que:

$$M \cdot \omega^2 \cdot d = \mu \cdot m \cdot g + m \cdot \omega^2 \cdot d + \mu \cdot m \cdot g$$

$$\mu = \frac{(M - m) \cdot \omega^2 \cdot d}{2 \cdot m \cdot g}$$

Essa questão aparecerá novamente na sua lista, tente resolvê-la dos dois modos: referencial inercial e referencial não-inercial.

ESCLARECENDO!

**7) Partícula em movimento circular uniformemente variado**

Uma partícula de massa  $m = 1,0 \text{ kg}$ , realiza um MCUV de raio  $R = 1,0 \text{ m}$ , segundo a equação horária do espaço  $s = 1,0 - 4,0 \cdot t + 1,5 \cdot t^2$  (SI). No instante  $t = 2 \text{ s}$ , determine os módulos das componentes tangencial e centrípeta, bem como da resultante na partícula.

**Comentários:**

De acordo com a equação horária do espaço, podemos escrever a equação horária da velocidade e aceleração da partícula da seguinte forma:

$$s = 1,0 - 4,0 \cdot t + 1,5 \cdot t^2 \text{ (SI)}$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -4,0 + 3 \cdot t \text{ (SI)}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3,0 \text{ m/s}^2$$

Logo, a força tangencial é dada por:

$$F_t = m \cdot a_t$$

$$F_t = 1 \cdot 3 \Rightarrow \boxed{F_t = 3,0 \text{ N}}$$

Para acharmos a componente centrípeta, é necessário conhecer o módulo da velocidade da partícula. Por isso, vamos calcular a intensidade de  $\vec{v}$  para  $t = 2 \text{ s}$ :

$$v(2) = -4 + 3 \cdot (2)$$

$$v(2) = 2,0 \text{ m/s}$$

Assim, substituindo na fórmula da força centrípeta, temos que:

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{R} \Rightarrow F_{cp} = \frac{1 \cdot 2^2}{1}$$

$$F_{cp} = 4,0 \text{ N}$$

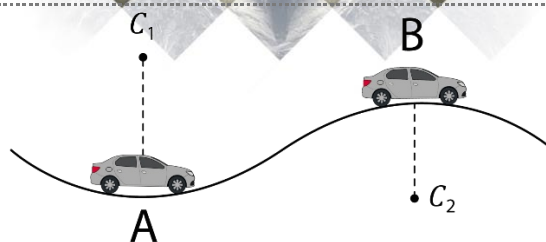
A resultante das forças que agem na partícula pode ser dada por:

$$F_R^2 = F_t^2 + F_{cp}^2$$

$$F_R^2 = (3,0)^2 + (4,0)^2 \Rightarrow \boxed{F_R = 5,0 \text{ N}}$$

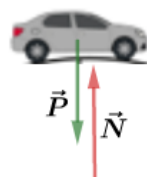
**8) Estrada com lombada e com depressão**

Um móvel de  $300 \text{ kg}$  viaja em uma estrada que apresenta uma região de depressão e uma região de lombada cujos raios de curvaturas são iguais a  $100 \text{ m}$ . Determine as forças normais que a pista exerce sobre o automóvel nos pontos A e B se o móvel viaja com velocidade de módulo constante igual a  $10 \text{ m/s}$ . Adote  $g = 10 \text{ m/s}^2$



**Comentários:**

Temos o seguinte diagrama de forças para o carro:



Note que a resultante centrípeta tem sentido de  $\vec{N}_A$ , devido a curvatura da estrada. Pela 2ª Lei na posição na posição A:

$$\boxed{N_A - P = F_{cp}}$$

$$N_A - P = m \cdot a_{cpA}$$

$$N_A = 300 \cdot 10 + 300 \cdot \frac{10^2}{100}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_A = 3300 \text{ N}}$$

Note que agora a resultante centrípeta tem sentido de  $\vec{P}$ , devido a curvatura da estrada. Para a posição B, temos que:

$$\boxed{P - N_B = F_{cpB}}$$

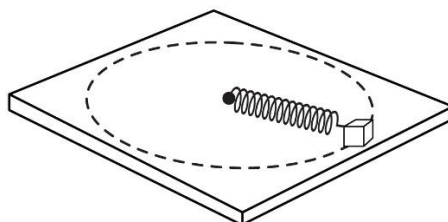
$$P - N_B = m \cdot a_{cpB}$$

$$N_B = 300 \cdot 10 - 300 \cdot \frac{10^2}{100}$$

$$\Rightarrow \boxed{N_B = 2700 \text{ N}}$$

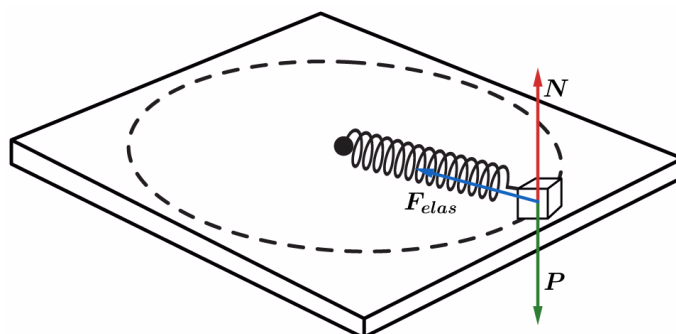
9)

Uma caixa de massa 1,0 kg descreve um movimento circular em uma mesa horizontal perfeitamente lisa, está presa a uma mola de constante elástica  $k = 1,0 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ . Sabe-se que o comprimento natural da mola é de 0,75 m. Determine a deformação da mola, se a o bloco gira com velocidade de módulo 5,0 m/s.



**Comentários:**

Para essa situação, temos o seguinte diagrama de forças:



Note que a força peso e a normal da superfície na caixa se equilibram. Dessa forma, a resultante das forças é a força elástica e ela é a centrípeta:

$$F_{el} = F_{cp}$$

Lembrando que a força elástica é dada pela Lei de Hooke  $F_{el} = k \cdot x$ , onde  $x$  é a deformação da mola. Então, teremos que o raio de curvatura será o comprimento natural mais a deformação que a mola sofre:

$$F_{el} = k \cdot x$$

$$F_{cp} = \frac{m \cdot v^2}{l_0 + x}$$

$$F_{el} = F_{cp} \Rightarrow k \cdot x = \frac{m \cdot v^2}{l_0 + x}$$

Substituindo valores, temos que:

$$100x = \frac{1 \cdot 5^2}{0,75 + x} \Rightarrow 100x^2 + 75x = 25 \Rightarrow 4x^2 + 3x - 1 = 0$$

As raízes dessa equação são  $x_1 = 0,25 \text{ m}$  e  $x_2 = -1,0 \text{ m}$ . Para a situação que estamos estudando, não convém deformação igual a  $-1,0 \text{ m}$ . Portanto, a deformação da mola será de  $0,25 \text{ m}$ .

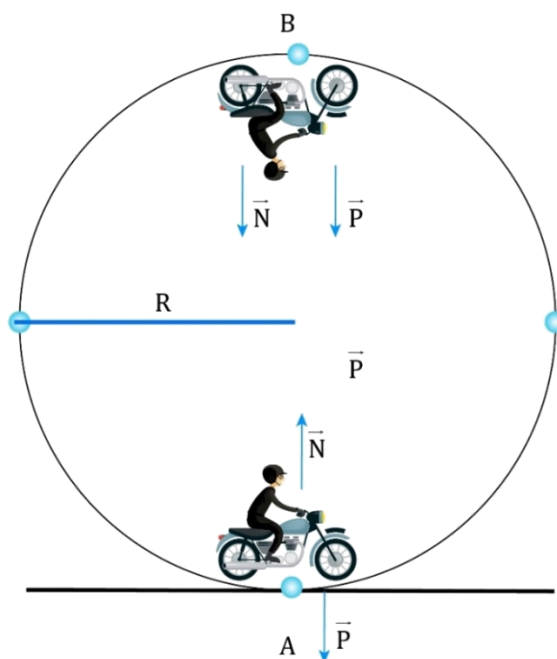
**10) Globo da morte**

Considere um motociclista realizando um movimento circular, num plano vertical, dentro de um “globo da morte” de raio  $R$ . A massa do conjunto homem mais moto é  $M$ . Calcule a intensidade da força normal que o globo aplica na moto na posição mais elevada do globo, se a velocidade do móvel é  $v$ . Adote

gravidade igual a  $g$ . Qual é a mínima velocidade no ponto mais alto para o motociclista conseguir efetuar a curva completa?

### Comentários:

No ponto mais alto da trajetória, a moto está de ponta cabeça, de tal forma que a força peso e força normal tem a mesma orientação. Portanto, a soma da força peso e da força normal é a resultante das forças e está é a centrípeta.



Vetorialmente, temos:

$$\vec{F}_{cp} = \vec{N} + \vec{P}$$

Em módulo, podemos escrever que:

$$F_{cp} = N + P$$

$$N = F_{cp} - P$$

$$N = \frac{m \cdot v^2}{R} - mg$$

Para o caso da velocidade mínima no ponto mais alto, devemos ter que a normal seja praticamente nula. O motociclista está quase perdendo contato com o globo. Dessa forma, temos que:

$$N \cong 0 \Rightarrow F_{cp} = P \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g$$
$$\Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g}$$

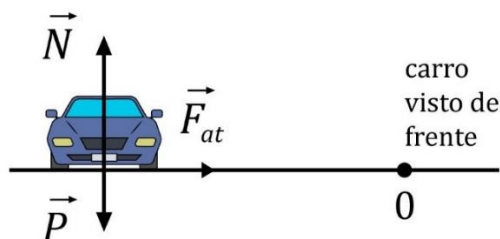
### 11) Carro executando uma curva num plano horizontal

Um automóvel entra em uma curva circular de raio  $R$ , em movimento uniforme, num plano horizontal. O coeficiente de atrito estático vale  $\mu_s$ . Sendo  $g$  a gravidade local, determine a máxima velocidade do carro para fazer a curva sem derrapar.



**Comentários:**

Notamos que a força peso e força normal se equilibram e que a força de atrito é a resultante centrípeta. A tendência do movimento é o móvel derrapar para fora da curva no caso da velocidade máxima. Assim, a força de atrito é direcionada para dentro da curva:



$$F_{cp} = F_{at}$$

$$\frac{m \cdot v^2}{R} = F_{at}$$

Para não derrapar para fora da curva, devemos ter que:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$

Portanto:

$$\frac{m \cdot v^2}{R} \leq \mu_s \cdot m \cdot g$$

Então:

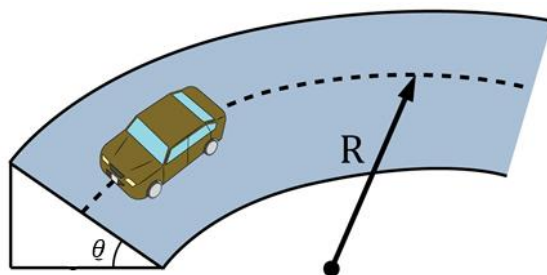
$$v \leq \sqrt{\mu_s \cdot R \cdot g}$$

Logo, a velocidade máxima terá módulo igual a:

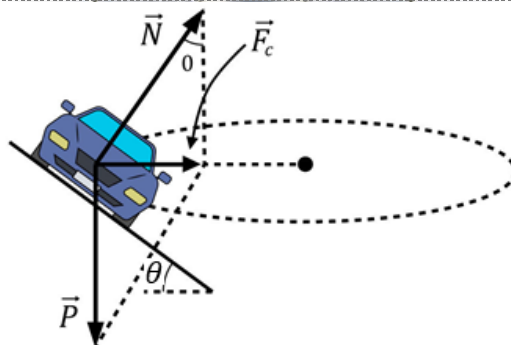
$$v = \sqrt{\mu_s \cdot R \cdot g}$$

**12) Carro executando curva numa pista sobrelevada**

Um carro de massa  $m$  percorre uma pista circular de raio  $R$ , contida num plano horizontal. O módulo da velocidade do móvel é constante e igual a  $v$ . A parte exterior da pista é mais elevada que a parte inferior. Qual deve ser o ângulo  $\theta$  para que o móvel consiga efetuar a curva **independente** da força de atrito.

**Comentários:**

Fazendo o diagrama de forças no automóvel, temos que:



Dado que o móvel realiza um MCU, a resultante das forças é a centrípeta. Assim, temos que:

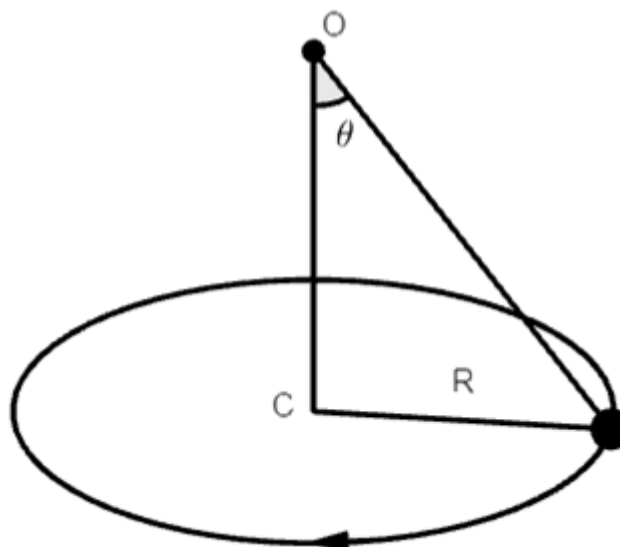
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{F_{cp}}{P}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\frac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g} \Rightarrow \operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{R \cdot g}$$

$$\therefore \theta = \arctg \left( \frac{v^2}{R \cdot g} \right)$$

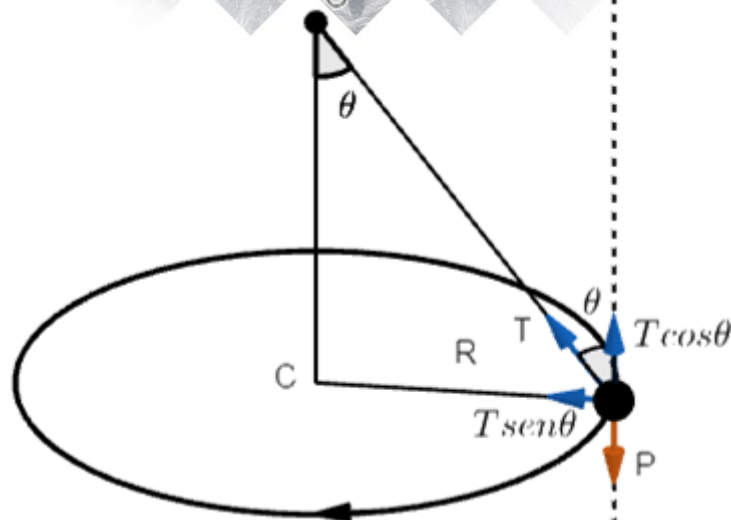
### 13) Pêndulo cônico

Uma esfera de massa  $m$  está presa em um fio de massa desprezível conforme a figura abaixo. A partícula descreve um MCU em torno de C, em um plano horizontal, constituindo o pêndulo cônico. Determine a tração no fio e a velocidade escalar da esfera.



#### Comentários:

Fazendo inicialmente o diagrama de forças, temos:



Note que o peso se equilibra com a componente da tração  $T \cdot \cos\theta$ , então:

$$m \cdot g = T \cdot \cos\theta$$

$$T = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}$$

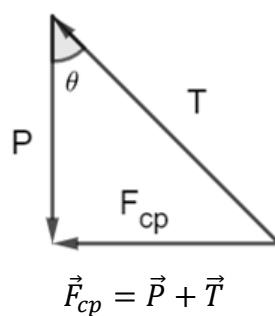
Por outro lado, a componente da tração  $T \cdot \sin\theta$  é a resultante centrípeta do MCU. Logo:

$$T \cdot \sin\theta = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Substituindo a tração, temos que:

$$\frac{m \cdot g}{\cos\theta} \cdot \sin\theta = \frac{m \cdot v^2}{R} \therefore v = \sqrt{R \cdot g \cdot \tan\theta}$$

Outra forma de chegar nesse resultado é ver que a partícula realiza um MCU, então a força tangencial é nula. Logo, a resultante do movimento é a centrípeta. Então, construí o seguinte triângulo de forças:



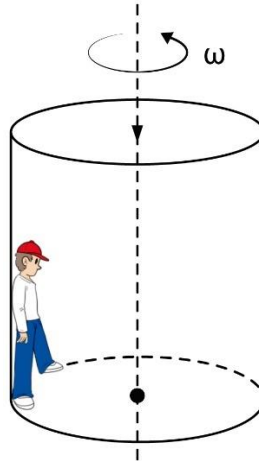
Então, podemos relacionar a força peso com a tração e com a resultante centrípeta:

$$\cos\theta = \frac{P}{T} \Rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{F_{cp}}{P} \Rightarrow \tan\theta = \frac{\frac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g} \Rightarrow v = \sqrt{R \cdot g \cdot \tan\theta}$$

#### 14) Rotor

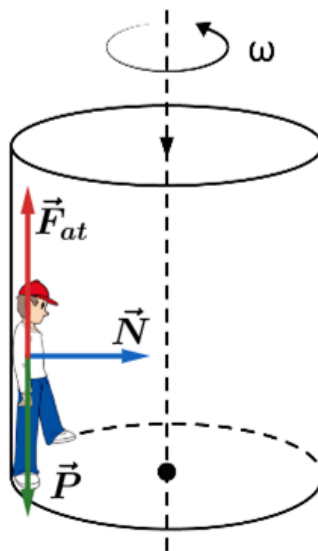
Este brinquedo existe em parques de diversões e funciona basicamente assim: a pessoa entra dentro do cilindro e fica em pé encostada na parede interna. O cilindro começa a girar em torno do seu eixo vertical e a partir de uma velocidade angular mínima, o assoalho do cilindro é retirado e a pessoa fica presa à parede do brinquedo. Se o raio do cilindro é  $R$ , a gravidade é  $g$  e o coeficiente de atrito estático entre a pessoa e a parede é  $\mu_s$ , qual deve ser a mínima velocidade angular que o cilindro deve ter para que a pessoa não escorregue?



#### Comentários:

Fazendo o diagrama de forças na pessoa, temos a força peso na vertical e para baixo, a força normal perpendicular à parede do cilindro e orientando para o eixo vertical e a força de atrito contrária a tendência do movimento.

No nosso caso, queremos saber a mínima velocidade, então a tendência da pessoa é descer na vertical, logo, a força de atrito está na vertical para cima, como mostra a figura:



De acordo com esse diagrama de forças, notamos que a normal é a nossa resultante centrípeta:

$$N = F_{cp} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

Para não haver escorregamento na vertical, devemos ter que:

$$F_{at} = P = m \cdot g$$

E a força de atrito não deve passar a força de atrito estático máxima. Isto é:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$

Logo, temos que:

$$F_{at} \leq \mu_s \cdot N$$

$$m \cdot g \leq \mu_s \cdot m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g}{\omega \cdot R}}$$

Logo a velocidade angular mínima é de:

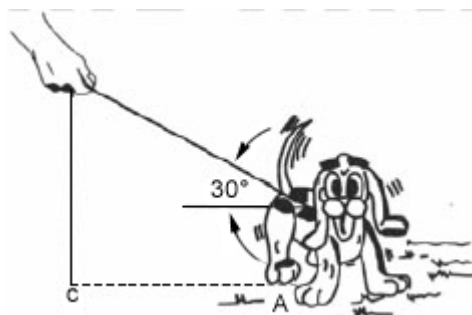
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\omega \cdot R}}$$



## 4. Lista de exercícios

### 1. (ITA - 1985)

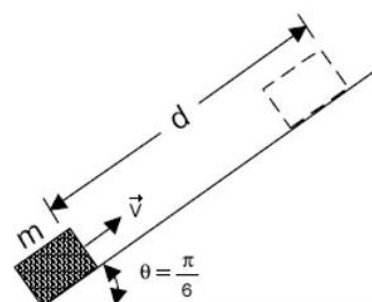
O cachorrinho da figura tem massa  $10 \text{ kg}$  e move-se num terreno horizontal numa trajetória de raio de curvatura  $1,0 \text{ m}$ . Num dado instante, sua velocidade é de  $0,36 \text{ km/h}$  e ele exerce contra o solo forças de  $0,10 \text{ N}$  (dirigida de  $A$  para o centro de curvatura  $C$ ) e de  $0,050 \text{ N}$  (tangencial). Sabendo que a mão do dono está na vertical erguida do centro de curvatura, podemos afirmar que a tensão na guia e aceleração tangencial do cachorrinho valem respectivamente:



- |  |   |
|--|---|
| a) zero e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$            | b) $0,23 \text{ N}$ e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ |
| c) $196 \text{ N}$ e $5,0 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ | d) $0,11 \text{ N}$ e $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$              |
| e) $0,23 \text{ N}$ e $0,01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$             |   |

### 2. (ITA - 1986)

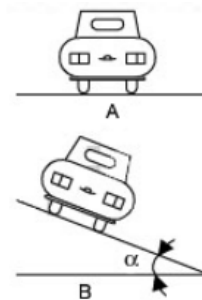
Da posição mais baixa de um plano inclinado, lança-se um bloco de massa  $m \cong 5,0 \text{ kg}$  com uma velocidade de  $4,0 \text{ m/s}$  no sentido ascendente. O bloco retorna a este ponto com uma velocidade de  $3,0 \text{ m/s}$ . O ângulo do plano inclinado mede  $\theta = \pi/6$ . Calcular a distância  $d$  percorrida pelo bloco em sua ascensão. Obs.: adotar para  $g = 10 \text{ m/s}^2$ .



- |                     |                              |                     |
|---------------------|------------------------------|---------------------|
| a) $0,75 \text{ m}$ | b) $1,0 \text{ m}$           | c) $1,75 \text{ m}$ |
| d) $2,0 \text{ m}$  | e) nenhum dos valores acima. |                     |

### 3. (ITA - 1987)

Para que um automóvel percorra uma curva horizontal de raio dado, numa estrada horizontal, com uma certa velocidade, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista deve ter no mínimo um certo valor  $\mu$  (fig. A). Para que o automóvel percorra uma curva horizontal, com o mesmo raio e com a mesma velocidade acima, numa estrada com sobre-elevação (Fig. B), sem ter tendência a derrapar, o ângulo de sobre-elevação deve ter o valor  $\alpha$ . Podemos afirmar que:



- a)  $\alpha = \arctg(\mu)$       b)  $\alpha = 45^\circ$       c)  $\alpha = \arcsen(\mu)$   
d)  $\alpha = 0$       e)  $\alpha = \mu$  (em radianos)

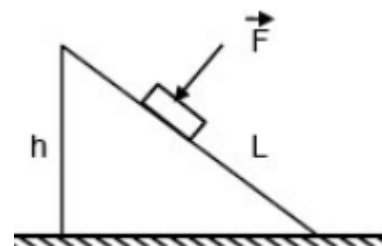
#### 4. (ITA - 1993)

Um corpo de peso  $P$  desliza sobre uma superfície de comprimento  $l$ , inclinada com relação a horizontal de um ângulo  $\alpha$ . O coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície é  $\mu$  e a velocidade inicial do corpo é igual a zero. Quanto tempo demora o corpo para alcançar o final da superfície inclinada? Dado:  $g$  (aceleração da gravidade).

- a)  $\sqrt{2l/g}$       b)  $\sqrt{3l/[g(\text{sen}\alpha + \mu\text{cos}\alpha)]}$       c)  $\sqrt{2l/[g(\mu\text{sen}\alpha - \text{cos}\alpha)]}$   
d)  $\sqrt{3l/[g(\text{sen}\alpha - \mu\text{cos}\alpha)]}$       e)  $\sqrt{2l/[g(\text{sen}\alpha - \mu\text{cos}\alpha)]}$

#### 5. (ITA - 1993)

Um pequeno bloco de madeira de massa  $m = 2,0 \text{ kg}$  se encontra sobre um plano inclinado que está fixo no chão, como mostra a figura. Qual é a força  $F$  com que devemos pressionar o bloco sobre o plano para que o mesmo permaneça em equilíbrio? O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície do plano inclinado é  $\mu = 0,40$ .



Dados: comprimento do plano inclinado,  $l = 1,0 \text{ m}$ ; altura,  $h = 0,6 \text{ m}$ ; aceleração da gravidade,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

- a)  $F = 13,7 \text{ N}$       b)  $F = 15,0 \text{ N}$       c)  $F = 17,5 \text{ N}$   
d)  $F = 11,2 \text{ N}$       e)  $F = 10,7 \text{ N}$

#### 6. (ITA - 1994)

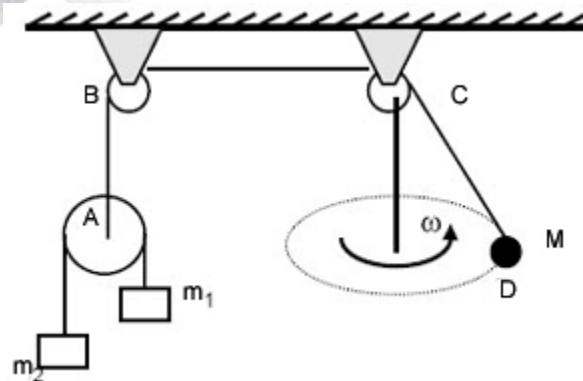
Um motociclista trafega em uma estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de  $4,00 \text{ m}$  de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando a velocidade constante de  $72 \text{ km/h}$  quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motociclista for  $0,50 \text{ s}$ , a que distância mínima ele deverá estar trafegando para evitar o choque apenas com mudança de trajetória? Considere os coeficientes de atrito entre o pneumático e o solo  $\mu = 0,80$ , aceleração gravitacional  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$  e que a trajetória original o levaria a colidir-se no meio da carroceria.

- a)  $19,6 \text{ m}$       b)  $79,3 \text{ m}$       c)  $69,3 \text{ m}$   
d)  $24,0 \text{ m}$       e)  $14,0 \text{ m}$

#### 7. (ITA - 1994)



Um fio tem presa uma massa  $M$  em uma das extremidades e na outra, uma polia que suporta duas massas;  $m_1 = 3,00 \text{ kg}$  e em  $m_2 = 1,00 \text{ kg}$  unidas por um outro fio como mostra a figura. Os fios têm massas desprezíveis e as polias são ideais. Se  $\overline{CD} = 0,80 \text{ m}$  e a massa  $M$  gira com velocidade angular constante  $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$  numa trajetória circular em torno do eixo vertical passando por  $C$ , observa-se que o trecho  $ABC$  do fio permanece imóvel. Considerando a aceleração gravitacional  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , a massa  $M$  deverá ser:



- a) 3,00 kg      b) 4,00 kg      c) 0,75 kg      d) 1,50 kg      e) 2,50 kg

### 8. (ITA - 1994)

Duas massas,  $m$  e  $M$  estão unidas uma à outra por meio de uma mola de constante  $k$ . Dependendo de modo que  $M$  fique no extremo inferior o comprimento da mola é  $l_1$ . Invertendo as posições das massas o comprimento da mola passa a ser  $l_2$ . O comprimento  $l_0$  da mola quando não submetido a força é:

- a)  $l_0 = (m \cdot l_1 - M \cdot l_2)/(m - M)$       b)  $l_0 = (M \cdot l_1 - m \cdot l_2)/(m - M)$   
c)  $l_0 = (M \cdot l_1 + m \cdot l_2)/(m + M)$       d)  $l_0 = (m \cdot l_1 + M \cdot l_2)/(m + M)$   
e)  $l_0 = (M \cdot l_1 + m \cdot l_2)/(m - M)$

### 9. (ITA - 1995)

Dois blocos de massas  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 5,0 \text{ kg}$  deslizam sobre um plano, inclinado de  $60^\circ$  com relação à horizontal, encostados um no outro com o bloco 1 acima do bloco 2. Os coeficientes de atrito cinético entre o plano inclinado e os blocos são  $\mu_{1c} = 0,40$  e  $\mu_{2c} = 0,6$  respectivamente, para os blocos 1 e 2. Considerando a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a aceleração  $a_1$  do bloco 1 e a força  $F_{12}$  que o bloco 1 exerce sobre o bloco 2 são respectivamente:

- a)  $6,0 \text{ m/s}^2$ ;  $2,0 \text{ N}$       b)  $0,46 \text{ m/s}^2$ ;  $3,2 \text{ N}$       c)  $1,1 \text{ m/s}^2$ ;  $17 \text{ N}$   
d)  $8,5 \text{ m/s}^2$ ;  $26 \text{ N}$       e)  $8,5 \text{ m/s}^2$ ;  $42 \text{ N}$

### 10. (ITA - 1996)

No campeonato mundial de arco e flecha dois concorrentes discutem sobre Física que está contida na arte do arqueiro. Surge então a seguinte dúvida quando o arco está esticado, no momento do lançamento da flecha, a força exercida sobre a corda pela mão do arqueiro é igual a:

- I- Força exercida pela outra mão sobre a madeira do arco;  
II- Tensão da corda;  
III- Força exercida sobre a flecha pela corda no momento em que o arqueiro larga a corda;

Neste caso:

- a) Todas as afirmativas são verdadeiras.      b) Todas as afirmativas são falsas.  
c) Somente I e III são verdadeiras.      d) Somente I e II são verdadeiras.  
e) Somente II é verdadeira.

### 11. (ITA - 1996)

Um avião, ao executar uma curva nivelada (sem subir ou descer) e equilibrada, o piloto deve incliná-lo com respeito à horizontal (à maneira de um ciclista em uma curva), de um ângulo  $\theta$ . Se  $\theta = 60^\circ$ , a velocidade da aeronave é  $100 \text{ m/s}$  e a aceleração local da gravidade é  $9,5 \text{ m/s}^2$ , qual é aproximadamente o raio de curvatura?

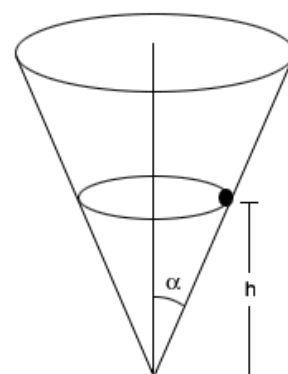
- a) 600 m      b) 750 m      c) 200 m      d) 350 m      e) 1000 m

### 12. (ITA - 1997)

Uma massa pontual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular em um círculo a uma altura  $h$  na superfície interna de um cone que forma um ângulo  $\alpha$  com seu eixo central, como mostrado na figura. A altura  $h$  da massa em relação ao vértice do cone é:

- a)  $\frac{g}{\omega^2}$       b)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$       c)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha}$       d)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \cot^2 \alpha$

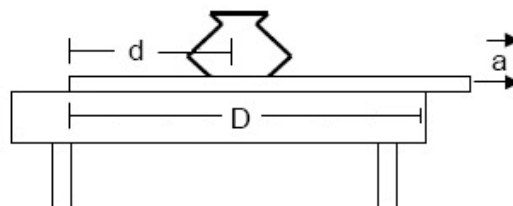
e) Inexistente, pois a única posição de equilíbrio é  $h = 0$ .



### 13. (ITA - 1997)

Um antigo vaso chinês está a uma distância  $d$  da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, se encontra a uma distância  $D$  de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma aceleração constante  $a$  (veja figura) de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor  $\mu$  que o vaso pare no momento que toca na mesa. Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:

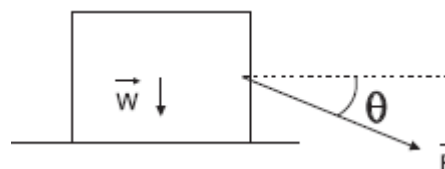
- a)  $a < \frac{d}{D} \mu g$       b)  $a > \frac{d}{D} \mu g$       c)  $a > \mu g$   
d)  $a > \frac{D}{d} \mu g$       e)  $a > \frac{D}{D-d} \mu g$



### 14. (ITA - 1998)

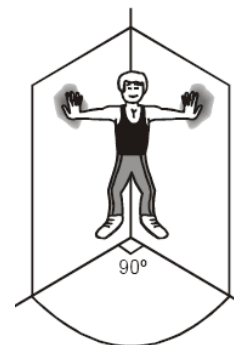
Um caixote de peso  $W$  é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude  $F$  que forma um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é  $\mu$ , o valor mínimo de  $F$ , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:

- a)  $\frac{2W}{1-\mu}$       b)  $\frac{W \sin \theta}{1-\mu \tan \theta}$       c)  $\frac{W \sin \theta}{\mu - \tan \theta}$   
d)  $\frac{\mu W \sec \theta}{1-\mu \tan \theta}$       e)  $(1 - \mu \tan \theta) W$



### 15. (ITA - 2004)

Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo  $m$  a massa do corpo do atleta e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.



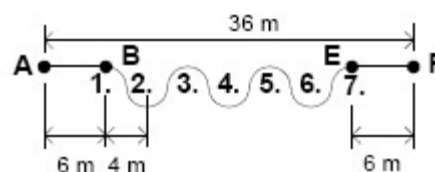
- a)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^{1/2}$       b)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)^{1/2}$       c)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)$   
d)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)$       e) n.d.a.

### 16. (ITA - 2004)

A figura representa o percurso de um ciclista, num plano horizontal, composto de dois trechos retilíneos (AB e EF), cada um com 6,0 m de comprimento, e de um trecho sinuoso intermediário formado por arcos de circunferências de mesmo diâmetro, igual a 4,0 m cujos centros se encontram numerados de 1 a 7. Considere pontual o sistema ciclista-bicicleta e que o percurso é completado no menor tempo, com velocidade escalar constante.

Se o coeficiente de atrito estático com o solo é  $\mu = 0,80$ , assinale a opção correta que indica, respectivamente, a velocidade do ciclista, o tempo despendido no percurso e frequência de ziguezague no trecho BE.

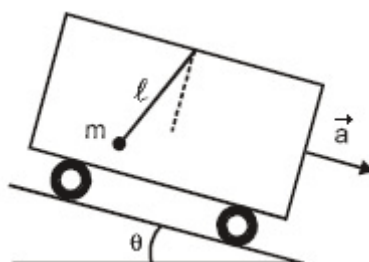
- a) 6,0 m/s 6,0 s 0,17 s<sup>-1</sup>  
b) 4,0 m/s 12 s 0,32 s<sup>-1</sup>  
c) 9,4 m/s 3,0 s 0,22 s<sup>-1</sup>  
d) 6,0 m/s 3,1 s 0,17 s<sup>-1</sup>  
e) 4,0 m/s 12 s 6,0 s<sup>-1</sup>



### 17. (ITA - 2005)

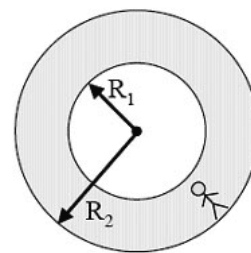
Considere uma rampa de ângulo  $\theta$  com a horizontal sobre a qual desce um vagão, com aceleração  $\vec{a}$ , em cujo teto está dependurada uma mola de comprimento  $l$ , de massa desprezível e constante de mola  $k$ , tendo uma massa  $m$  fixada na sua extremidade. Considerando que  $l_0$  é o comprimento natural da mola e que o sistema está em repouso com relação ao vagão, pode-se dizer que a mola sofreu uma variação de comprimento  $\Delta l = l - l_0$  dada por:

- a)  $\Delta l = mg \sin \theta / k$       b)  $\Delta l = mg \cos \theta / k$       c)  $\Delta l = mg / k$   
d)  $\Delta l = \frac{m}{k} \cdot \sqrt{a^2 - 2ag \cos \theta + g^2}$       e)  $\Delta l = \frac{m}{k} \cdot \sqrt{a^2 - 2ag \sin \theta + g^2}$



### 18. (ITA – 2006)

Uma estação espacial em forma de um toróide, de raio interno  $R_1$ , e externo  $R_2$ , gira, com período  $P$ , em torno do seu eixo central, numa região de gravidade nula. O astronauta sente que seu “peso” aumenta de 20%, quando corre com velocidade constante  $\vec{v}$  no interior desta estação, ao longo de sua maior circunferência, conforme mostra a figura. Assinale a expressão que indica o módulo dessa velocidade.

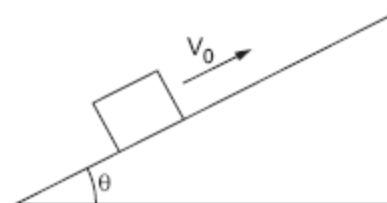


- a)  $v = \left( \sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) \frac{2\pi R_2}{P}$       b)  $v = \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$       c)  $v =$   
 $\left( 1 + \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$   
d)  $v = \left( 1 + \frac{5}{6} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$       e)  $v = \left( \frac{6}{5} - 1 \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

### 19. (ITA – 2008)

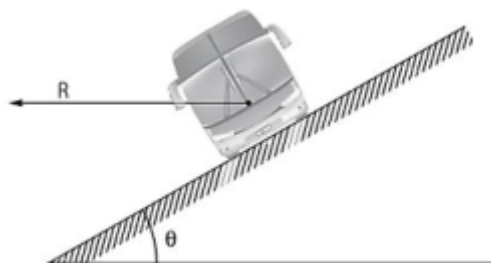
Na figura, um bloco sobe um plano inclinado, com velocidade inicial  $v_0$ . Considere  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície. Indique a sua velocidade na descida ao passar pela posição inicial.

- a)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}{\cos\theta - \mu \cos\theta}}$       b)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}{\text{sen}\theta + \mu \cos\theta}}$   
c)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta + \mu \cos\theta}{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}}$       d)  $v_0 \sqrt{\frac{\mu \text{sen}\theta + \cos\theta}{\mu \text{sen}\theta - \cos\theta}}$   
e)  $v_0 \sqrt{\frac{\mu \text{sen}\theta - \cos\theta}{\mu \text{sen}\theta + \cos\theta}}$

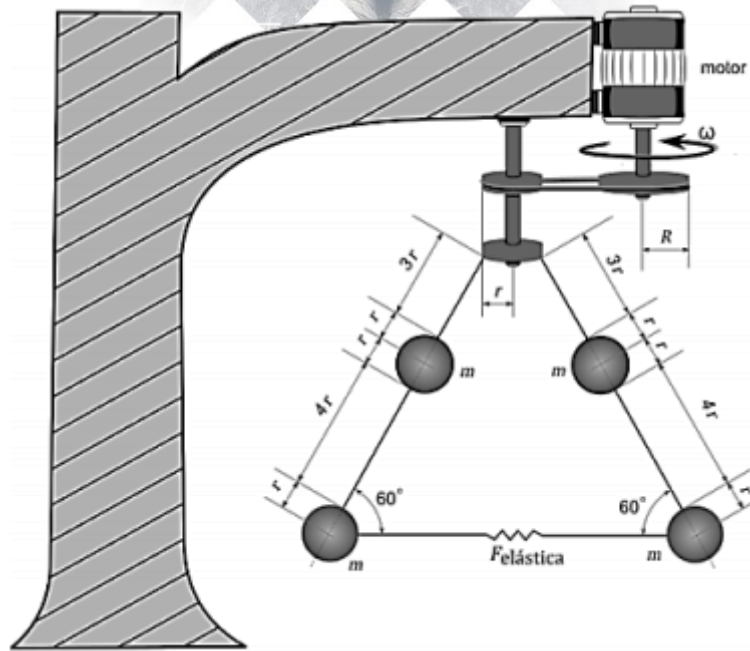


### 20. (IME 1993)

Considere o veículo de massa  $M$  percorrendo uma curva inclinada, de ângulo  $\theta$ , com raio  $R$  constante, a uma velocidade  $v$ . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja  $\mu$ , calcule as velocidades mínima e máxima com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.



### 21. (IME-2018)



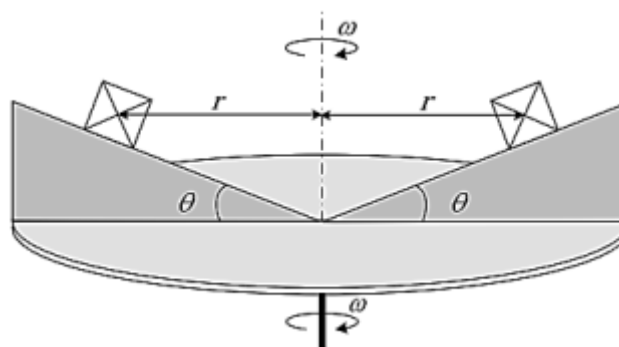
A figura acima mostra um dispositivo composto por um motor elétrico, cujo eixo se encontra ligado a uma polia ideal de raio  $R$ , solidária a uma segunda polia de raio  $r$ , sem deslizamento. Solidário ao segundo eixo há um disco rígido metálico de raio  $r$ . Em duas extremidades opostas deste disco, foram fixados dois pêndulos compostos idênticos, com fios ideais e esferas homogêneas, de massa  $m$ . Existe um fio extensível ligando as esferas inferiores, provendo uma força elástica  $F_{elástica}$  que as mantém na configuração mostrada na figura. Determine, em função de  $g, m, r$  e  $R$ :

- a velocidade angular  $\omega$  do motor elétrico;
- a força elástica  $F_{elástica}$  do fio extensível.

Dado: aceleração da gravidade:  $g$ .

## 22. (IME 2018)

O sistema mostrado na figura gira em torno de um eixo central em velocidade angular constante  $\omega$ . Dois cubos idênticos, de massa uniformemente distribuída, estão dispostos simetricamente a uma distância  $r$  do centro ao eixo, apoiados em superfícies inclinadas de ângulo  $\theta$ . Admitindo que não existe movimento relativo dos cubos em relação às superfícies, a menor velocidade angular  $\omega$  para que o sistema se mantenha nessas condições é:



Dados:

- Aceleração da gravidade:  $g$ ;
- Massa de cada cubo:  $m$ ;

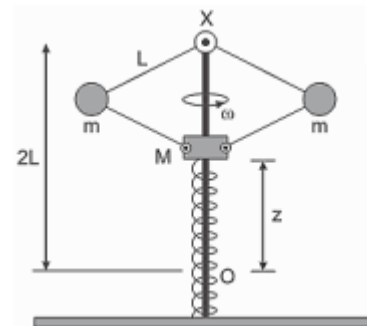


- Aresta de cada cubo:  $a$ ; e
- Coeficiente de atrito entre os cubos e as superfícies inclinadas:  $\mu$

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{b)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{c)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{d)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{e)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

### 23. (ITA 2015)

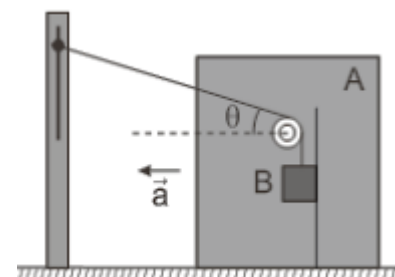
Na figura, o eixo vertical giratório imprime uma velocidade angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento  $L = 1 \text{ m}$  e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa  $X$ . Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa  $M$  de  $2 \text{ kg}$  que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$  a partir da posição  $O$  da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de  $X$ . O sistema completa-se com duas massas iguais de  $m = 1 \text{ kg}$  cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura  $z$  acima de  $O$  dada por:



- a) 0,2m      b) 0,5m      c) 0,6m      d) 0,7m      e) 0,9m

### 24. (ITA 2012)

A figura mostra um sistema formado por dois blocos,  $A$  e  $B$ , cada um com massa  $m$ . O bloco  $A$  pode deslocar-se sobre a superfície plana e horizontal onde se encontra. O bloco  $B$  está conectado a um fio inextensível fixado à parede, e que passa por uma polia ideal com eixo preso ao bloco  $A$ . Um suporte vertical sem atrito mantém o bloco  $B$  descendo sempre paralelo a ele, conforme mostra a figura. Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre o bloco  $A$  e a superfície,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\theta = 30^\circ$  mantido constante, determine a tração no fio após o sistema ser abandonado do repouso.



### 25. (ITA 2012)

Considere uma rampa plana, inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, no início da qual encontra-se um carrinho. Ele então recebe uma pancada que o faz subir até uma certa distância, durante o tempo  $t_s$ , descendo em seguida até sua posição inicial. A “viagem” completa dura um tempo total  $t$ . Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a rampa, a relação  $t/t_s$  é igual a:

- a) 2      b)  $1 + \sqrt{tg\theta + \mu/|tg\theta - \mu|}$       c)  $1 + \sqrt{\cos\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$   
d)  $1 + \sqrt{\sin\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$       e)  $1 - \sqrt{tg\theta + \mu/|tg\theta - \mu|}$

### 26. (IME-2012)





Figura 1

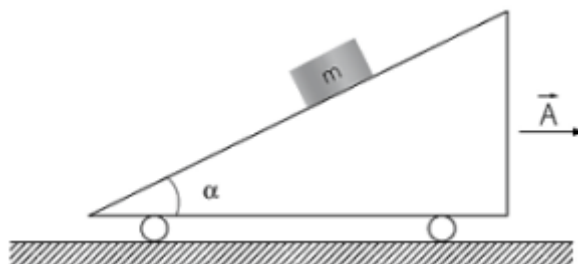
Figura 2

A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a  $m$  presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo  $\theta$  com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa  $2m$ . Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é  $\mu$  e o coeficiente de atrito cinético é  $\mu/2$  para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a)  $(2g\sin\theta)/3$                       b)  $(3g\sin\theta)/2$                       c)  $(g\sin\theta)/2$   
d)  $g(2\sin\theta - \cos\theta)$                       e)  $g(2\sin\theta + \cos\theta)$

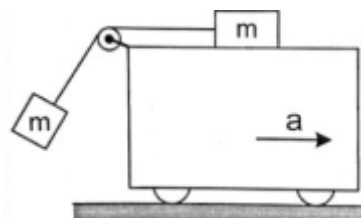
### 27. (ITA 2003)

Na figura, o carrinho com rampa movimentar-se com aceleração constante  $\vec{A}$ . Sobre a rampa, repousa um bloco de massa  $m$ . Se  $\mu$  é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a rampa, determine o intervalo para o módulo de  $\vec{A}$  no qual o bloco permanecerá em repouso sobre a rampa.



### 28.

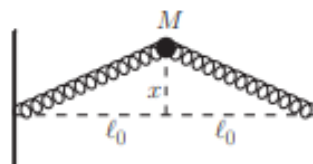
Na figura a seguir, dois blocos idênticos de massa  $m$  são conectados entre si por meio de um fio ideal que passa por uma polia também ideal fixa ao carrinho. O carrinho acelera para a direita com aceleração de intensidade  $a$ . Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre o bloco e o carrinho vale  $\mu > 1$ , determine o maior valor de  $a$  para que o bloco não escorregue sobre o carrinho.



### 29. (ITA-2011)

Sobre uma mesa sem atrito, uma bola de massa  $M$  é presa por duas molas alinhadas, de constante de mola  $k$  e comprimento natural  $l_0$ , fixadas nas extremidades da mesa. Então, a bola é deslocada a uma distância  $x$  na direção perpendicular à linha inicial das molas, como mostra a figura, sendo solta a seguir. Obtenha a aceleração da bola, usando a aproximação  $(1 + a)^\alpha = 1 + \alpha a$ .

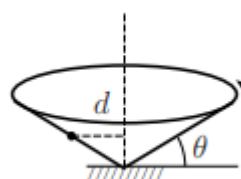
- a)  $a = -kx/M$
- b)  $a = -kx^2/2Ml_0$
- c)  $a = -kx^2/Ml_0$
- d)  $a = -kx^3/2Ml_0^2$
- e)  $a = -kx^3/Ml_0^2$



### 30. (ITA-2012)

Um funil que gira com velocidade angular uniforme em torno do seu eixo vertical de simetria apresenta uma superfície cônica que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme a figura. Sobre esta superfície, uma pequena esfera gira com a mesma velocidade angular mantendo-se a uma distância  $d$  do eixo de rotação. Nestas condições, o período de rotação do funil é dado por:

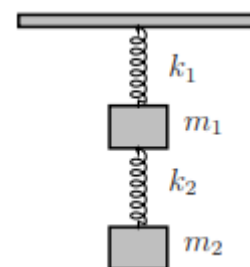
- a)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \sin\theta}$
- b)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \cos\theta}$
- c)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \tan\theta}$
- d)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \sin 2\theta}$
- e)  $2\pi\sqrt{d \cos\theta / g \tan\theta}$



### 31. (ITA-2012)

Um elevador sobe verticalmente com aceleração constante e igual a  $a$ . No seu teto está preso um conjunto de dois sistemas massa-mola acoplados em série, conforme a figura. O primeiro tem massa  $m_1$  e constante de mola  $k_1$ , e o segundo, massa  $m_2$  e constante de mola  $k_2$ . Ambas as molas têm o mesmo comprimento natural (sem deformação)  $\ell$ . Na condição de equilíbrio estático relativo ao elevador, a deformação da mola de constante  $k_1$  é  $y$ , e a da outra,  $x$ . Pode-se então afirmar que  $(y - x)$  é:

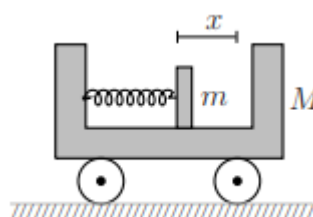
- a)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g - a)/k_1k_2$ .
- b)  $[(k_2 + k_1)m_2 + k_2m_1](g - a)/k_1k_2$ .
- c)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2$ .
- d)  $[(k_2 + k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2 - 2\ell$ .
- e)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2 - 2\ell$ .



### 32. (ITA-2012)

No interior de um carrinho de massa  $M$  mantido em repouso, uma mola de constante elástica  $k$  encontra-se comprimida de uma distância  $x$ , tendo uma extremidade presa e a outra conectada a um bloco de massa  $m$ , conforme a figura. Sendo o sistema então abandonado e considerando que não há atrito, pode-se afirmar que o valor inicial da aceleração do bloco relativa ao carrinho é:

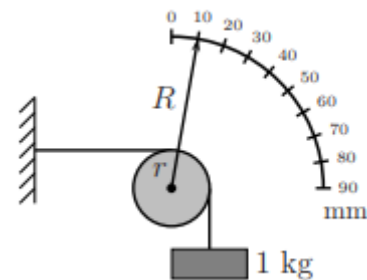
- a)  $kx/m$
- b)  $kx/M$
- c)  $kx/(m + M)$
- d)  $kx(M - m)/mM$
- e)  $kx(M + m)/mM$



### 33. (ITA - 2015)

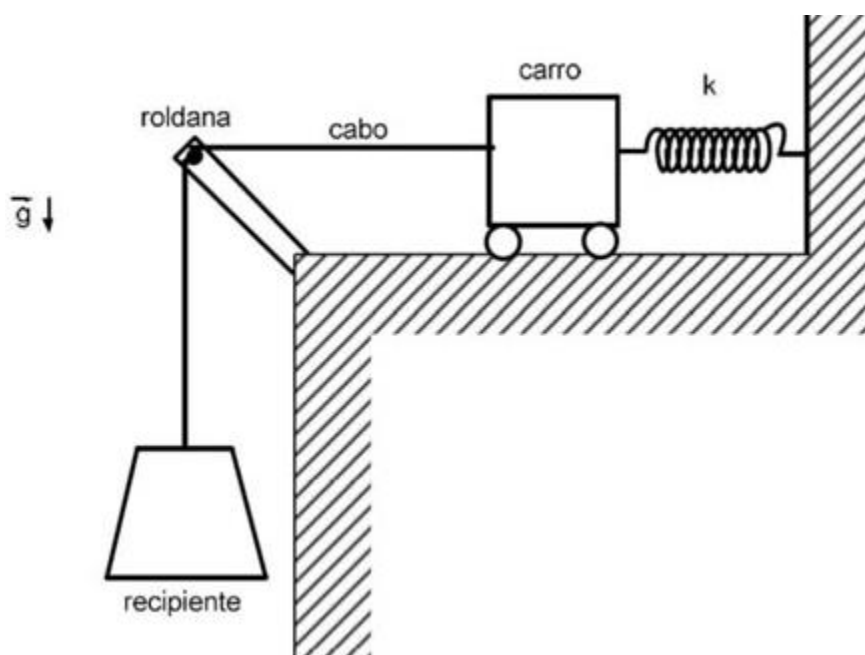
A figura mostra um dispositivo para medir o módulo de elasticidade (módulo de Young) de um fio metálico. Ele é definido como a razão entre a força por unidade de área da seção transversal do fio necessária para esticá-lo e o resultante alongamento deste por unidade de seu comprimento. Neste particular experimento, um fio homogêneo de 1,0 m de comprimento e 0,2 mm de diâmetro, fixado numa extremidade, é disposto horizontalmente e preso pela outra ponta ao topo de uma polia de raio  $r$ . Um outro fio preso neste mesmo ponto, envolvendo parte da polia, sustenta uma massa de 1 kg. Solidário ao eixo da polia, um ponteiro de raio  $R = 10r$  acusa uma leitura de 10 mm na escala semicircular iniciada em zero. Nestas condições, o módulo de elasticidade do fio é de:

- a)  $\frac{10^{12}}{\pi} \text{ N/m}^2$
- b)  $\frac{10^{12}}{2\pi} \text{ N/m}^2$
- c)  $\frac{10^{12}}{3\pi} \text{ N/m}^2$
- d)  $\frac{10^{12}}{4\pi} \text{ N/m}^2$
- e)  $\frac{10^{12}}{8\pi} \text{ N/m}^2$



### 34. (IME-2015)

A figura acima mostra um conjunto massa-mola conectado a uma roldana por meio de um cabo. Na extremidade do cabo há um recipiente na forma de um tronco de cone de 10 cm x 20 cm x 30 cm de dimensões (diâmetro da base superior x diâmetro da base inferior x altura) e com peso desprezível. O cabo é inextensível e também tem peso desprezível. Não há atrito entre o cabo e a roldana. No estado inicial, o carro encontra-se em uma posição tal que o alongamento na mola é nulo e o cabo não se encontra tracionado. A partir de um instante, o recipiente começa a ser completado lentamente com um fluido com massa específica de  $3000 \text{ kg/m}^3$ . Sabendo que o coeficiente de rigidez da mola é  $3300 \text{ N/m}$  e a aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$ , o alongamento da mola no instante em que o recipiente se encontrar totalmente cheio, em cm, é igual a



- a) 0,5
- b) 1,5
- c) 5,0
- d) 10,0
- e) 15,0

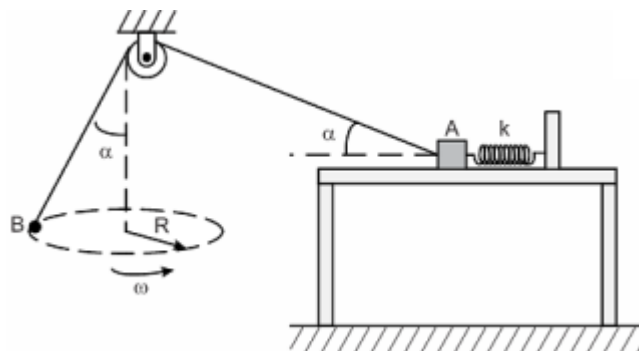
### 35. (IME 2016)

Uma mola presa ao corpo A está distendida. Um fio passa por uma roldana e tem suas extremidades presas ao corpo A e ao corpo B, que realiza um movimento circular uniforme horizontal com raio  $R$  e velocidade angular  $\omega$ . O corpo A encontra-se sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático  $\mu$  e na iminência do movimento no sentido de reduzir a deformação da mola. Determine o valor da deformação da mola.

Dados:

- Massa do corpo A:  $m_A$ ; A
- Massa do corpo B:  $m_B$ ; B
- Constante elástica da mola:  $k$ ;
- Aceleração da gravidade:  $g$

Consideração: A massa  $m_A$  é suficiente para garantir que o corpo A permaneça no plano horizontal da mesa.



### 36. (ITA – 2017)

Um sistema é constituído por uma sequência vertical de  $N$  molas ideais interligadas, de mesmo comprimento natural  $\ell$  e constante elástica  $k$ , cada qual acoplada a uma partícula de massa  $m$ . Sendo o sistema suspenso a partir da mola 1 e estando em equilíbrio estático, pode-se afirmar que o comprimento da

- |  |   |
|--|---|
| a) mola 1 é igual a $\ell + (N - 1)mg/k$ . | b) mola 2 é igual a $\ell + Nmg/k$ .      |
| c) mola 3 é igual a $\ell + (N - 2)mg/k$ . | d) mola $N - 1$ é igual a $\ell + mg/k$ . |
| e) mola $N$ é igual a $\ell$ .             |   |

### 37. (ITA – 2017)

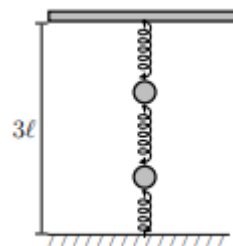
Considere um automóvel com tração dianteira movendo-se aceleradamente para a frente. As rodas dianteiras e traseiras sofrem forças de atrito respectivamente para:

- |                     |                                |                   |
|---------------------|--------------------------------|-------------------|
| a) frente e frente. | b) frente e trás.              | c) trás e frente. |
| d) trás e trás.     | e) frente e não sofrem atrito. |                   |

### 38. (ITA – 2018)

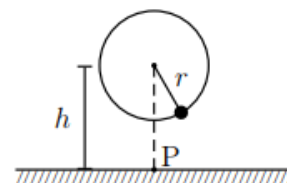
Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais  $\ell$ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a  $3\ell$  de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância  $d_1$  para baixo, e da inferior, de uma distância  $d_2$  também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão  $d_2/d_1$ .

- a) 2
- b) 3/2
- c) 5/3
- d) 4/3
- e) 5/4



### 39. (ITA – 2018)

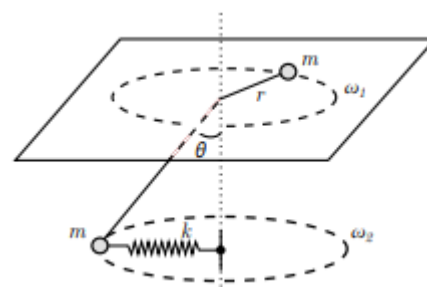
Na figura, presa a um fio de comprimento de 1,0 m, uma massa de 1,0 kg gira com uma certa velocidade angular num plano vertical sob a ação da gravidade, com eixo de rotação a  $h = 6,0$  m do piso. Determine a velocidade angular mínima dessa massa para a ruptura do fio que suporta no máximo a tração de 46 N, bem como a distância ao ponto P do ponto em que, nesse caso, a massa tocará o solo.



### 40. (ITA – 2019)

Considere duas partículas de massa  $m$ , cada qual presa numa das pontas de uma corda, de comprimento  $l$  e massa desprezível, que atravessa um orifício de uma mesa horizontal lisa. Conforme mostra a figura, a partícula sobre a mesa descreve um movimento circular uniforme de raio  $r$  e velocidade angular  $\omega_1$ . A partícula suspensa também descreve esse mesmo tipo de movimento, mas com velocidade angular  $\omega_2$ , estando presa a uma mola de constante elástica  $k$  e comprimento natural desprezível, mantida na horizontal. Sendo  $g$  o módulo da aceleração da gravidade e  $\theta$  o ângulo do trecho suspenso da corda com a vertical, a razão  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$  é dada por:

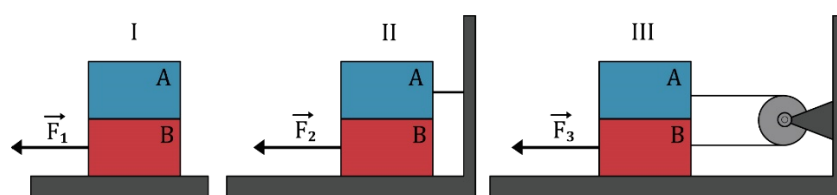
- a)  $\frac{r(mg+k(l-r)\cos\theta)}{mg(l-r)}$
- b)  $\frac{(l-r)(mg+krcos\theta)}{mgr\sin\theta}$
- c)  $\frac{(l-r)(mg+krtg\theta)}{mgr^2}$
- d)  $\frac{k(l-r)\cos\theta}{mg+kr}$
- e)  $\frac{(l-r)(k\cos\theta)}{mg+k(l-r)\cos\theta}$



### 41. (ITA-SP)

Os blocos A e B da figura tem massa  $m$ . O coeficiente de atrito entre todas as superfícies é  $\mu$ . A força imprime ao bloco B da figura (I) velocidade uniforme.

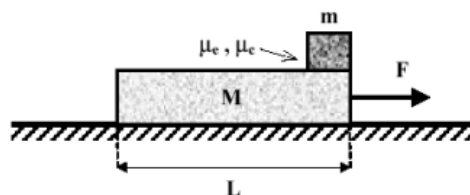
Calcule as relações  $F_2/F_1$  e  $F_3/F_1$ , nas quais  $F_2$  é a força indicada na figura (II) e  $F_3$  é indicada na figura (III). Para que o bloco B nessas figuras tenha velocidade constante.





#### 42. (OBF 2001)

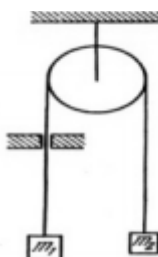
Na figura a seguir, um bloco de massa  $M$  e comprimento  $L$  encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre tal bloco, é colocado um outro de massa  $m$ , cujo comprimento é muito menor que  $L$ , de modo que este possa ser considerado uma partícula material. Sabe-se que existe atrito entre os blocos, com coeficientes estático e cinético respectivamente denotados por  $\mu_e$  e  $\mu_c$ . Considere que sobre o bloco de massa  $M$  atua uma força constante e horizontal de módulo  $F$ . A força horizontal máxima que pode ser aplicada sobre o bloco de massa  $M$  de modo que os blocos não deslizem um sobre o outro é denotada por  $F_{m\acute{a}x}$ .



- Calcule o módulo da força máxima  $F_{m\acute{a}x}$  em função de  $\mu_e$ ,  $M$ ,  $m$  e  $g$ .
- Suponha que  $F > F_{m\acute{a}x}$ . Para tal situação, calcule o tempo que o bloco de massa  $m$  leva para perder contato com o bloco de massa  $M$ . Expresse o seu resultado em função de  $L$ ,  $M$ ,  $\mu_e$ ,  $\mu_c$ ,  $F$  e  $F_{m\acute{a}x}$ .

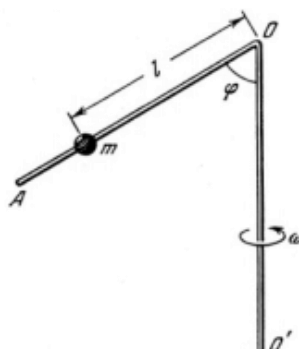
#### 43.

Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante  $F$ . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são  $m_1$  e  $m_2$ . Determinar a aceleração dos pesos.



#### 44. (Saraeva)

Uma barra de peso desprezível  $AOO'$ , dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular  $\omega$  relativamente ao eixo  $OO'$ . Na barra foi colocada uma conta de massa  $m$ . Determinar a que distância  $A$  do ponto  $O$ , a conta ficará em equilíbrio, se o coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a  $k$ .





GABARITO



## 5. Gabarito sem comentários

1. B
2. E
3. A
4. E
5. A
6. D
7. D
8. A
9. A
10. B
11. A
12. D
13. E
14. D
15. B
16. B
17. E
18. A
19. B

$$20. v_{max} = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}} \quad \text{e} \quad v_{min} = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$$

$$21. a) \omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{rg}{3\sqrt{3}}} \quad b) F_{elástica} = \frac{\sqrt{3}mg}{3}$$

22. D
23. B

$$24. T = \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot mg$$

25. B

26. A

$$27. 0 \leq A \leq \frac{g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}, \mu > \tan\alpha$$

$$28. a = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \cdot g$$

29. E

30. C

31. C

32. E

33. A

34. C

$$35. x = \frac{\mu(m_A g - m_B \omega^2 R) + m_B \cdot g}{k}$$

36. C

37. B

38. A

$$39. \omega = 6 \text{ rad/s e } A = 6 \text{ m}$$

40. A

$$41. \frac{F_2}{F_1} = 1,5 \text{ e } \frac{F_3}{F_1} = 2$$

$$42. a) F_{max} = (m + M) \cdot \mu_e \cdot g \quad b) t =$$

$$\left( \frac{2LM}{F - \left( \frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \cdot F_{max}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$43. a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}$$

$$44. l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \sin\varphi - \cos\varphi)}{\omega^2 \cdot \sin\varphi (\sin\varphi + k \cdot \cos\varphi)}$$

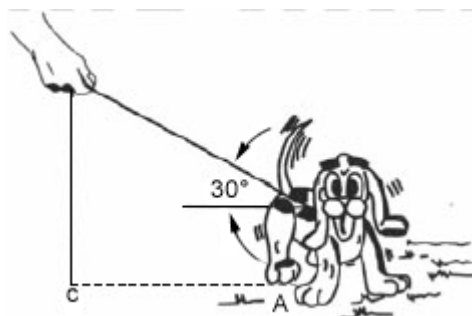
ESCLARECENDO!



## 6. Lista de exercícios comentada

### 1. (ITA - 1985)

O cachorrinho da figura tem massa  $10\text{ kg}$  e move-se num terreno horizontal numa trajetória de raio de curvatura  $1,0\text{ m}$ . Num dado instante, sua velocidade é de  $0,36\text{ km/h}$  e ele exerce contra o solo forças de  $0,10\text{ N}$  (dirigida de  $A$  para o centro de curvatura  $C$ ) e de  $0,050\text{ N}$  (tangencial). Sabendo que a mão do dono está na vertical erguida do centro de curvatura, podemos afirmar que a tensão na guia e aceleração tangencial do cachorrinho valem respectivamente:



- a) zero e  $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$       b)  $0,23\text{ N}$  e  $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   
c)  $196\text{ N}$  e  $5,0 \cdot 10^{-3}\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$       d)  $0,11\text{ N}$  e  $0,01\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$   
e)  $0,23\text{ N}$  e  $0,01\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

#### Comentários:

A força imprimida pela guia é perpendicular à trajetória do cachorro, logo a única força nessa direção é a força que ele sente do solo:

$$a_{tan} = \frac{F_{tan}}{m} = \frac{0,050}{10} = 5 \times 10^{-3}\text{ m/s}^{-2}$$

Pela sua resultante centrípeta, temos:

$$R_{cent} = T \cos 30^\circ - F_{rad}$$

A força radial que o cachorro exerce no solo é direcionada para dentro e, portanto, ele sofre uma força de reação direcionada para fora.

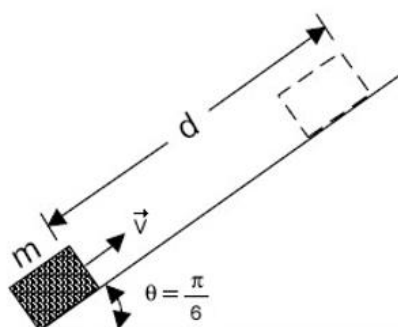
$$\frac{mv^2}{R} = \frac{T\sqrt{3}}{2} - F_{rad} \Rightarrow 10 \cdot \frac{(0,1)^2}{1} = \frac{T\sqrt{3}}{2} - 0,1$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{3}} 0,2 = \frac{0,4}{\sqrt{3}} \approx 0,23\text{ N}$$

#### Gabarito: B

### 2. (ITA - 1986)

Da posição mais baixa de um plano inclinado, lança-se um bloco de massa  $m \cong 5,0\text{ kg}$  com uma velocidade de  $4,0\text{ m/s}$  no sentido ascendente. O bloco retorna a este ponto com uma  $3,0\text{ m/s}$ . O ângulo do plano inclinado é  $\theta = \pi/6$ . Calcular a distância  $d$  percorrida pelo bloco em sua ascensão. Obs.: adotar para  $g = 10\text{ m/s}^2$ .



- a)  $0,75\text{ m}$   
b)  $1,0\text{ m}$   
c)  $1,75\text{ m}$

- d) 2,0 m  
e) nenhum dos valores acima.

**Comentários:**

Como temos uma velocidade final diferente da inicial houve dissipação de energia e assim podemos deduzir a presença de atrito. Seja  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o bloco e o plano. Aplicando a equação de Torricelli na subida do plano:

$$0 - v_0^2 = -2 \left( g \sin \frac{\pi}{6} + \mu g \cos \frac{\pi}{6} \right) d \quad (eq. 1)$$

Aplicando a equação de Torricelli na descida, temos:

$$v_f^2 - 0 = 2 \left( g \sin \frac{\pi}{6} - \mu g \cos \frac{\pi}{6} \right) d \quad (eq. 2)$$

Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$v_f^2 + v_0^2 = 4g \sin \frac{\pi}{6} d \Rightarrow 9 + 16 = 4 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \cdot d$$

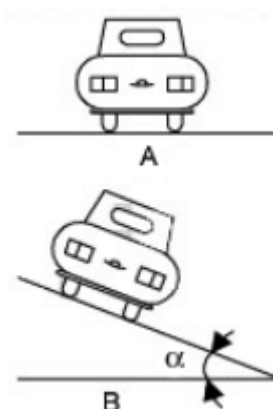
$$\boxed{d = 1,25 \text{ m}}$$

**Gabarito: E**

**3. (ITA – 1987)**

Para que um automóvel percorra uma curva horizontal de raio dado, numa estrada horizontal, com uma certa velocidade, o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista deve ter no mínimo um certo valor  $\mu$  (fig. A). Para que o automóvel percorra uma curva horizontal, com o mesmo raio e com a mesma velocidade acima, numa estrada com sobre-elevação (Fig. B), sem ter tendência a derrapar, o ângulo de sobre-elevação deve ter o valor  $\alpha$ . Podemos afirmar que:

- a)  $\alpha = \arctg(\mu)$       b)  $\alpha = 45^\circ$       c)  $\alpha = \arcsen(\mu)$   
d)  $\alpha = 0$       e)  $\alpha = \mu$  (em radianos)



**Comentários:**

Na primeira situação nós temos:

$$R_{cent} = f_{at} = \mu \cdot m \cdot g$$

Com a inclinação do plano, agora a normal possui um componente horizontal. Aplicando a Segunda Lei na vertical no carro temos:

$$m \cdot g = N \cdot \cos \alpha \Rightarrow N = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei na horizontal:

$$R_{cent} = N \cdot \sin \alpha$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$R_{cent} = m \cdot g \cdot \tan \alpha$$

As resultantes centrípetas são as mesmas já que em ambas as situações os carros apresentam a mesma velocidade e curvas de mesmo raio:

$$\mu \cdot m \cdot g = m \cdot g \cdot \tan \alpha \Rightarrow \alpha = \arctan \mu$$

**Gabarito: A**

**4. (ITA - 1993)**

Um corpo de peso  $P$  desliza sobre uma superfície de comprimento  $l$ , inclinada com relação a horizontal de um ângulo  $\alpha$ . O coeficiente de atrito cinético entre o corpo e a superfície é  $\mu$  e a velocidade inicial do corpo é igual a zero. Quanto tempo demora o corpo para alcançar o final da superfície inclinada? Dado:  $g$  (aceleração da gravidade).

- a)  $\sqrt{2l/g}$                       b)  $\sqrt{3l/[g(\text{sen}\alpha + \mu\cos\alpha)]}$                       c)  $\sqrt{2l/[g(\mu\text{sen}\alpha - \cos\alpha)]}$   
d)  $\sqrt{3l/[g(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)]}$                       e)  $\sqrt{2l/[g(\text{sen}\alpha - \mu\cos\alpha)]}$

**Comentários:**

A força resultante agindo sobre o corpo é:

$$R = m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot N = m \cdot g \cdot \sin \alpha - \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \alpha$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)$$

Aplicando a equação de Torricelli ao movimento, temos:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot l \Rightarrow v = \sqrt{2g(\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha)l} \quad (\text{eq. 1})$$

Lembrando-se que a partícula se move com aceleração constante, a equação horária de sua velocidade é dada por:

$$v = a \cdot t$$

Substituindo (1) na equação acima, temos:

$$t = \frac{\sqrt{2 \cdot l}}{\sqrt{\sin \alpha - \mu \cdot \cos \alpha}}$$

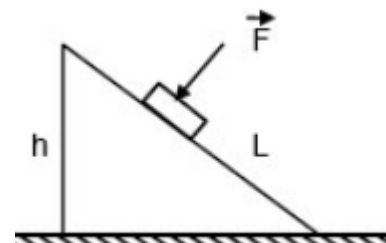
**Gabarito: E**

**5. (ITA – 1993)**

Um pequeno bloco de madeira de massa  $m = 2,0 \text{ kg}$  se encontra sobre um plano inclinado que está fixo no chão, como mostra a figura. Qual é a força  $F$  com que devemos pressionar o bloco sobre o plano para que o mesmo permaneça em equilíbrio? O coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície do plano inclinado é  $\mu = 0,40$ .

Dados: comprimento do plano inclinado,  $l = 1,0 \text{ m}$ ; altura,  $h = 0,6 \text{ m}$ ; aceleração da gravidade,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

- a)  $F = 13,7 \text{ N}$                       b)  $F = 15,0 \text{ N}$                       c)  $F = 17,5 \text{ N}$   
d)  $F = 11,2 \text{ N}$                       e)  $F = 10,7 \text{ N}$



**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei na direção perpendicular ao plano:

$$N = F + m \cdot g \cdot \cos \alpha \quad (\text{eq. 1})$$

Aplicando a Segunda Lei na direção da superfície do plano, temos:

$$fat = m \cdot g \cdot \sin \alpha \Rightarrow \mu \cdot N = m \cdot g \cdot \sin \alpha$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$F + m \cdot g \cdot \cos \alpha = \frac{m \cdot g}{\mu} \cdot \sin \alpha$$

$$F = m \cdot g \cdot \left( \frac{\sin \alpha}{\mu} - \cos \alpha \right) = 19,6 \left( \frac{3}{2} - \frac{1,6}{2} \right) = 9,8 \cdot 1,4 \approx 13,7 \text{ N}$$

**Gabarito: A**

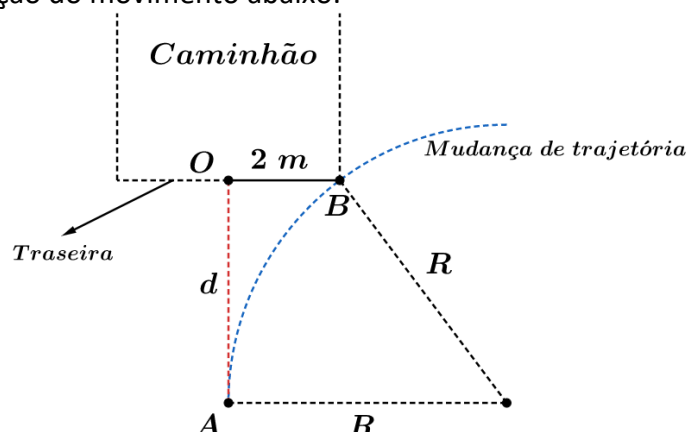
**6. (ITA - 1994)**

Um motociclista trafega em uma estrada reta e nivelada atrás de um caminhão de  $4,00 \text{ m}$  de largura, perpendicularmente à carroceria. Ambos estão trafegando a velocidade constante de  $72 \text{ km/h}$  quando o caminhão se detém instantaneamente, devido a uma colisão. Se o tempo de reação do motociclista for  $0,50 \text{ s}$ , a que distância mínima ele deverá estar trafegando para evitar o choque apenas com mudança de trajetória? Considere os coeficientes de atrito entre o pneumático e o solo  $\mu = 0,80$ , aceleração gravitacional  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$  e que a trajetória original o levaria a colidir-se no meio da carroceria.

- a)  $19,6 \text{ m}$                       b)  $79,3 \text{ m}$                       c)  $69,3 \text{ m}$   
d)  $24,0 \text{ m}$                       e)  $14,0 \text{ m}$

**Comentários:**

Veja a representação do movimento abaixo:



Aplicando a Segunda Lei no motociclista:

$$R_{cent} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = \mu \cdot m \cdot g$$

$$R = \frac{v^2}{\mu \cdot g} = \frac{400}{8} = 50 \text{ m}$$

Seja  $\theta$  o ângulo coberto pelo arco acima, temos:

$$R - R \cdot \cos \theta = 2 \Rightarrow 1 - \cos \theta = \frac{1}{25} \Rightarrow \cos \theta = \frac{24}{25}$$

Por fim, temos:

$$d = R \cdot \sin \theta = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14 \text{ m}$$

Lembrando de somar a distância que ele percorreu antes de reagir ao caminhão:

$$d_{pre} = v \cdot t_{reação} = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ m}$$

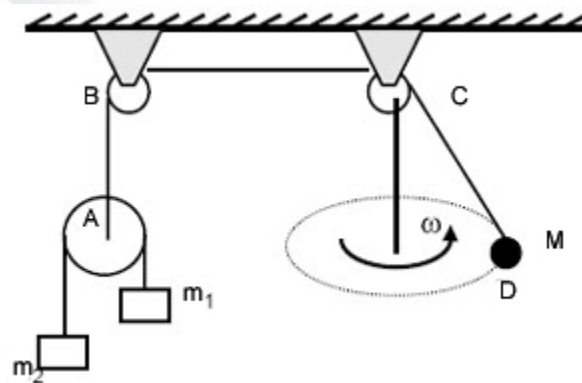
$$d_{total} = 10 + 14 = 24 \text{ m}$$

**Gabarito: D**

**7. (ITA - 1994)**



Um fio tem presa uma massa  $M$  em uma das extremidades e na outra, uma polia que suporta duas massas;  $m_1 = 3,00 \text{ kg}$  e em  $m_2 = 1,00 \text{ kg}$  unidas por um outro fio como mostra a figura. Os fios têm massas desprezíveis e as polias são ideais. Se  $\overline{CD} = 0,80 \text{ m}$  e a massa  $M$  gira com velocidade angular constante  $\omega = 5,00 \text{ rad/s}$  numa trajetória circular em torno do eixo vertical passando por  $C$ , observa-se que o trecho  $ABC$  do fio permanece imóvel. Considerando a aceleração gravitacional  $g = 10,0 \text{ m/s}^2$ , a massa  $M$  deverá ser:



- a)  $3,00 \text{ kg}$       b)  $4,00 \text{ kg}$       c)  $0,75 \text{ kg}$       d)  $1,50 \text{ kg}$       e)  $2,50 \text{ kg}$

**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei ao sistema de massas  $m_1$  e  $m_2$ , temos:

$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) g$$

Substituindo a aceleração na equação de uma das massas:

$$m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow T = \frac{2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{m_1 + m_2}$$

A Polia  $A$  está sobre ação da força  $2T$ , a qual é transmitida para  $M$  já que a corda está estática.

Seja  $\theta$  o ângulo que o segmento de fio  $CD$  faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei à massa  $M$ , na horizontal, temos:

$$R_{cent} = 2 \cdot T \cdot \sin \theta$$

$$M \cdot \omega^2 \cdot (CD \cdot \sin \theta) = 2 \cdot T \cdot \sin \theta$$

$$M = \frac{4 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot g}{\omega^2 \cdot CD \cdot (m_1 + m_2)} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 10}{25 \cdot 0,8 \cdot 4} = 1,5 \text{ kg}$$

**Gabarito: D**

**8. (ITA - 1994)**

Duas massas,  $m$  e  $M$  estão unidas uma à outra por meio de uma mola de constante  $k$ . Dependendo delas de modo que  $M$  fique no extremo inferior o comprimento da mola é  $l_1$ . Invertendo as posições das massas o comprimento da mola passa a ser  $l_2$ . O comprimento  $l_0$  da mola quando não submetido a força é:

- a)  $l_0 = (m \cdot l_1 - M \cdot l_2)/(m - M)$       b)  $l_0 = (M \cdot l_1 - m \cdot l_2)/(m - M)$   
c)  $l_0 = (M \cdot l_1 + m \cdot l_2)/(m + M)$       d)  $l_0 = (m \cdot l_1 + M \cdot l_2)/(m + M)$   
e)  $l_0 = (M \cdot l_1 + m \cdot l_2)/(m - M)$

**Comentários:**

Quando  $M$  está na extremidade inferior a força elástica da mola está equilibrando seu peso:

$$M \cdot g = k \cdot (l_1 - l_0) \quad (\text{eq. 1})$$

O mesmo acontece com  $m$ :

$$m \cdot g = k \cdot (l_2 - l_0) \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (1) por (2), obtemos:

$$\frac{l_1 - l_0}{l_2 - l_0} = \frac{M}{m} \Rightarrow l_0 = \frac{m \cdot l_1 - M \cdot l_2}{m - M}$$

**Gabarito: A**



### 9. (ITA - 1995)

Dois blocos de massas  $m_1 = 3,0 \text{ kg}$  e  $m_2 = 5,0 \text{ kg}$  deslizam sobre um plano, inclinado de  $60^\circ$  com relação à horizontal, encostados um no outro com o bloco 1 acima do bloco 2. Os coeficientes de atrito cinético entre o plano inclinado e os blocos são  $\mu_{1c} = 0,40$  e  $\mu_{2c} = 0,6$  respectivamente, para os blocos 1 e 2. Considerando a aceleração da gravidade  $g = 10 \text{ m/s}^2$ , a aceleração  $a_1$  do bloco 1 e a força  $F_{1,2}$  que o bloco 1 exerce sobre o bloco 2 são respectivamente:

- a)  $6,0 \text{ m/s}^2$ ;  $2,0N$                       b)  $0,46\text{m/s}^2$ ;  $3,2N$                       c)  $1,1 \text{ m/s}^2$ ;  $17N$   
d)  $8,5 \text{ m/s}^2$ ;  $26N$                       e)  $8,5 \text{ m/s}^2$ ;  $42 N$

**Comentários:**

Note que os blocos possuem a mesma aceleração, assim  $a_1 = a_2 = a$ . Aplicando a Segunda Lei ao sistema composto por  $m_1$  e  $m_2$ , obtemos:

$$a = \frac{10(4\sqrt{3} - 0,6 - 1,5)}{8} \approx 6 \text{ m/s}^2$$

Aplicando a Segunda Lei ao bloco 2:

$$T + m_2 \cdot g \cdot \sin 60^\circ - \mu_{2c} \cdot m_2 \cdot g \cdot \cos 60^\circ = m_2 \cdot a$$

$$T = 5 \left[ \left( 5\sqrt{3} - \frac{21}{8} \right) - 5\sqrt{3} + 3 \right] = 5 \cdot \frac{3}{8} \approx 1,9 \text{ N}$$

**Gabarito: A**

## 10. (ITA - 1996)

No campeonato mundial de arco e flecha dois concorrentes discutem sobre Física que está contida na arte do arqueiro. Surge então a seguinte dúvida quando o arco está esticado, no momento do lançamento da flecha, a força exercida sobre a corda pela mão do arqueiro é igual a:

- I- Força exercida pela outra mão sobre a madeira do arco;  
II- Tensão da corda;  
III- Força exercida sobre a flecha pela corda no momento em que o arqueiro larga a corda;

Neste caso:

- a) Todas as afirmativas são verdadeiras.                      b) Todas as afirmativas são falsas.  
c) Somente I e III são verdadeiras.                                d) Somente I e II são verdadeiras.  
e) Somente II é verdadeira.

**Comentários:**

- I- Incorreto.** No momento do disparo o arco se encontra em repouso, logo a resultante das forças externas sobre ele deve ser nula. No entanto, há 3 forças externas agindo sobre ele: a força exercida pela mão na corda, a força exercida pela mão na madeira e a força peso, assim as duas primeiras forças não podem ser iguais (o peso é não nulo).

- II- **Incorreto.** Seja  $\theta$  o ângulo que a corda saindo da mão do arqueiro faz com a horizontal. Como a corda está em equilíbrio, teremos:

$$F = 2 \cdot T \cdot \cos \theta$$

- III- Incorreto.** A corda tem massa e também é acelerada quando o arqueiro a solta, desse modo, ela possui uma força resultante sobre ela:

$$F - F_{flecha} = m_{corda} \cdot a$$

Para a flecha, temos:

$$F_{flecha} = m_{flecha} \cdot a$$

Com  $F \neq F_{flecha}$ .

**Gabarito: B**

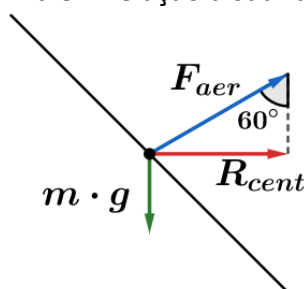
**11. (ITA - 1996)**

Um avião, ao executar uma curva nivelada (sem subir ou descer) e equilibrada, o piloto deve incliná-lo com respeito à horizontal (à maneira de um ciclista em uma curva), de um ângulo  $\theta$ . Se  $\theta = 60^\circ$ , a velocidade da aeronave é  $100 \text{ m/s}$  e a aceleração local da gravidade é  $9,5 \text{ m/s}^2$ , qual é aproximadamente o raio de curvatura?

- a) 600 m      b) 750 m      c) 200 m      d) 350 m      e) 1000 m

**Comentários:**

Nessa questão, assumimos que as forças aerodinâmicas que o avião sofre são somente direcionadas perpendicularmente para cima em relação à sua fuselagem:



A figura acima mostra uma visão frontal do avião. Aplicando a Segunda Lei na horizontal, temos:

$$R_{cent} = m \cdot g \cdot \tan 60^\circ \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \cdot \tan 60^\circ$$

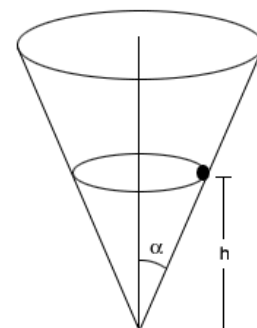
$$R = \frac{v^2}{g \cdot \tan 60^\circ} = \frac{10000}{9,5 \cdot \sqrt{3}} \approx 600 \text{ m}$$

**Gabarito: A**

**12. (ITA - 1997)**

Uma massa pontual se move, sob a influência da gravidade e sem atrito, com velocidade angular em um círculo a uma altura  $h$  na superfície interna de um cone que forma um ângulo  $\alpha$  com seu eixo central, como mostrado na figura. A altura  $h$  da massa em relação ao vértice do cone é:

- a)  $\frac{g}{\omega^2}$       b)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$       c)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{\cot \alpha}{\sin \alpha}$       d)  $\frac{g}{\omega^2} \cdot \cot^2 \alpha$   
e) Inexistente, pois a única posição de equilíbrio é  $h = 0$ .



**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei na massa:

Horizontal –

$$N \cdot \cos \alpha = R_{cent}$$

Vertical –

$$N \cdot \sin \alpha = mg$$

Dividindo as equações acima:

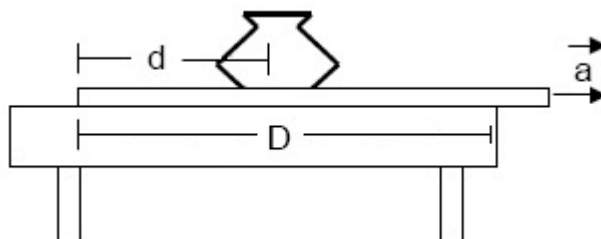
$$R_{cent} = m \cdot g \cdot \cotan \alpha \Rightarrow m \cdot \omega^2 (h \cdot \tan \alpha) = m \cdot g \cdot \cotan \alpha$$

$$h = \frac{g}{\omega^2} \cotan \alpha$$

**Gabarito: D**

### 13. (ITA - 1997)

Um antigo vaso chinês está a uma distância  $d$  da extremidade de um forro sobre uma mesa. Essa extremidade, por sua vez, se encontra a uma distância  $D$  de uma das bordas da mesa, como mostrado na figura. Inicialmente tudo está em repouso. Você apostou que consegue puxar o forro com uma aceleração constante  $a$  (veja figura) de tal forma que o vaso não caia da mesa. Considere que ambos os coeficientes de atrito, estático e cinético, entre o vaso e o forro tenham o valor  $\mu$  que o vaso pare no momento que toca na mesa. Você ganhará a aposta se a magnitude da aceleração estiver dentro da faixa:



- a)  $a < \frac{d}{D} \mu g$                       b)  $a > \frac{d}{D} \mu g$                       c)  $a > \mu g$   
d)  $a > \frac{D}{d} \mu g$                       e)  $a > \frac{D}{D-d} \mu g$

**Comentários:**

A condição para que o vaso não caia da mesa é o seu deslocamento escalar ser menor que sua distância até a beira da mesa:

$$\Delta S_{vaso} < D - d$$

Aplicando a Segunda Lei ao vaso, temos:

$$f_{at} = m \cdot a_{vaso} \Rightarrow a_{vaso} = \mu \cdot g$$

O deslocamento do vaso e do forro ocorrem simultaneamente, e suas funções horárias são dadas por:

$$\Delta S_{vaso} = \frac{\mu \cdot g \cdot t^2}{2}$$

$$\Delta S_{forro} = D = \frac{a \cdot t^2}{2} \Rightarrow \frac{t^2}{2} = \frac{D}{a}$$

$$\Delta S_{vaso} = \frac{\mu \cdot g \cdot D}{a}$$

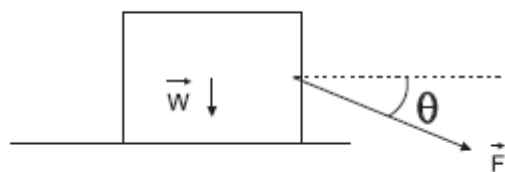
Da condição do problema, temos:

$$\frac{\mu \cdot g \cdot D}{a} < D - d \Rightarrow a > \frac{\mu \cdot g \cdot D}{D - d}$$

**Gabarito: E**

### 14. (ITA - 1998)

Um caixote de peso  $W$  é puxado sobre um trilho horizontal por uma força de magnitude  $F$  que forma um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, como mostra a figura. Dado que o coeficiente de atrito estático entre o caixote e o trilho é  $\mu$ , o valor mínimo de  $F$ , a partir de qual seria possível mover o caixote, é:



a)  $\frac{2W}{1-\mu}$

b)  $\frac{W \sec \theta}{1-\mu \tan \theta}$

c)  $\frac{W \sec \theta}{\mu - \tan \theta}$

d)  $\frac{\mu W \sec \theta}{1-\mu \tan \theta}$

e)  $(1 - \mu \tan \theta)W$

**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei na vertical:

$$N = F \cdot \sin \theta + W \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda lei na horizontal:

$$F \cdot \cos \theta - f_{at} = m \cdot a$$

Na iminência de movimento teremos  $a \approx 0$ :

$$F \cdot \cos \theta = \mu \cdot N \Rightarrow N = \frac{F}{\mu} \cdot \cos \theta$$

Substituindo a normal em (1), obtemos:

$$\frac{F}{\mu} \cdot \cos \theta = F \cdot \sin \theta + W \Rightarrow F = \frac{\mu \cdot W}{\cos \theta - \mu \cdot \sin \theta}$$

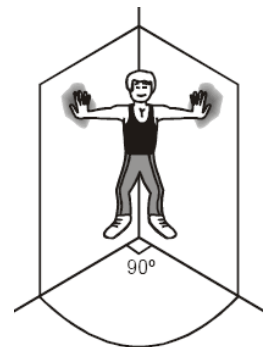
Colocando  $\cos \theta$  em evidência:

$$F = \frac{\mu \cdot W}{1 - \mu \cdot \tan \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\mu \cdot W \cdot \sec \theta}{1 - \mu \cdot \tan \theta}$$

**Gabarito: D**

**15. (ITA - 2004)**

Um atleta mantém-se suspenso em equilíbrio, forçando as mãos contra duas paredes verticais, perpendiculares entre si, dispondo seu corpo simetricamente em relação ao canto e mantendo seus braços horizontalmente alinhados, como mostra a figura. Sendo  $m$  a massa do corpo do atleta e  $\mu$  o coeficiente de atrito estático interveniente, assinale a opção correta que indica o módulo mínimo da força exercida pelo atleta em cada parede.



a)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)^{1/2}$

b)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)^{1/2}$

c)  $\frac{mg}{2}$

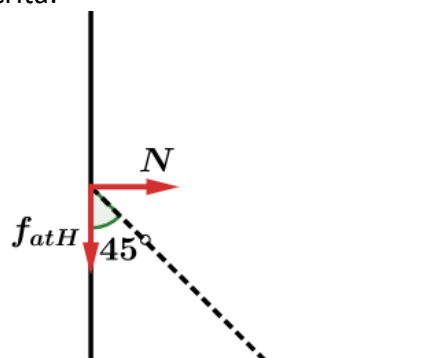
$\left(\frac{\mu^2-1}{\mu^2+1}\right)$

d)  $\frac{mg}{2} \cdot \left(\frac{\mu^2+1}{\mu^2-1}\right)$

e) n.d.a.

**Comentários:**

Além das forças de reação das paredes a única força externa agindo no atleta é o peso, na vertical. Assim a reação da parede na horizontal deve apontar na direção dos braços do atleta, já que qualquer outra configuração renderia uma força resultante na horizontal. A figura abaixo representa uma vista de cima da situação descrita:



Onde  $N$  é a normal da parede e  $fat_H$  é a força de atrito na horizontal. Pela figura temos que: (lembre-se que a reação horizontal da parede deve ter a direção da linha tracejada)

$$fat_H = N$$

Além disso, pelo equilíbrio do atleta na direção vertical, temos:

$$fat_V = \frac{m \cdot g}{2}$$

Logo:

$$fat^2 = fat_H^2 + fat_V^2 \leq fat_{max}^2 = \mu^2 \cdot N^2 \quad (eq. 1)$$

$$\mu^2 \cdot N^2 \geq N^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{4}$$

$$N \geq \frac{m \cdot g}{2} \sqrt{\frac{1}{\mu^2 - 1}} \quad (eq. 2)$$

A questão pede a força  $F$  exercida pelo atleta na parede, a qual é igual à reação da parede, assim, por (1), temos:

$$F^2 = fat^2 + N^2 = fat_H^2 + fat_V^2 + N^2$$

$$F^2 = 2N^2 + \frac{m^2 \cdot g^2}{4}$$

Substituindo (2) na equação acima, temos:

$$F \leq \frac{m \cdot g}{2} \sqrt{\frac{\mu^2 + 1}{\mu^2 - 1}}$$

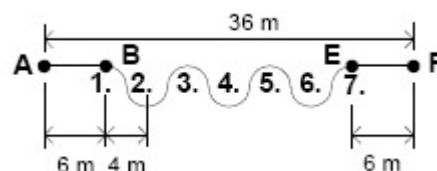
**Gabarito: B**

### 16. (ITA - 2004)

A figura representa o percurso de um ciclista, num plano horizontal, composto de dois trechos retilíneos (AB e EF), cada um com 6,0 m de comprimento, e de um trecho sinuoso intermediário formado por arcos de circunferências de mesmo diâmetro, igual a 4,0 m cujos centros se encontram numerados de 1 a 7. Considere pontual o sistema ciclista-bicicleta e que o percurso é completado no menor tempo, com velocidade escalar constante.

Se o coeficiente de atrito estático com o solo é  $\mu = 0,80$ , assinale a opção correta que indica, respectivamente, a velocidade do ciclista, o tempo despendido no percurso e frequência de ziguezague no trecho BE.

- a) 6,0 m/s 6,0 s 0,17 s<sup>-1</sup>
- b) 4,0 m/s 12 s 0,32 s<sup>-1</sup>
- c) 9,4 m/s 3,0 s 0,22 s<sup>-1</sup>
- d) 6,0 m/s 3,1 s 0,17 s<sup>-1</sup>
- e) 4,0 m/s 12 s 6,0 s<sup>-1</sup>



**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei ao ciclista na parte curva de seu percurso:

$$R_{cent} = \mu \cdot m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = \mu \cdot m \cdot g$$

$$v^2 = 0,8 \cdot 10 \cdot 2 \Rightarrow v = 4 \text{ m/s}$$

O percurso BE totaliza 3 circunferências completas de raio 2 m, assim:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{AB + BE + EF}{v}$$



$$\Delta t = \frac{(2 \cdot 6 + 6\pi \cdot 2)}{4} = 3(1 + \pi) \approx 12 \text{ s}$$

O período de ziguezague é o tempo que o ciclista leva para voltar a mesma posição que estava em um dado em um certo instante transladada para frente. Nesse período ele percorre uma distância equivalente ao comprimento de uma circunferência de raio 2 m:

$$T = \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \pi \text{ s}$$

Sendo a frequência o inverso do período, temos:

$$f = \frac{1}{\pi} \approx 0,32 \text{ s}^{-1}$$

**Gabarito: B**

### 17. (ITA - 2005)

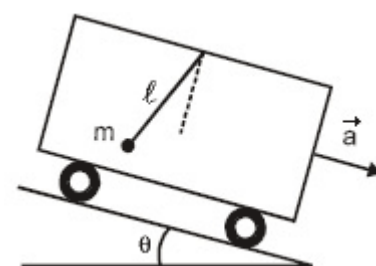
Considere uma rampa de ângulo  $\theta$  com a horizontal sobre a qual desce um vagão, com aceleração  $\vec{a}$ , em cujo teto está dependurada uma mola de comprimento  $l$ , de massa desprezível e constante de mola  $k$ , tendo uma massa  $m$  fixada na sua extremidade. Considerando que  $l_0$  é o comprimento natural da mola e que o sistema está em repouso com relação ao vagão, pode-se dizer que a mola sofreu uma variação de comprimento  $\Delta l = l - l_0$  dada por:

a)  $\Delta l = mg \sin \theta / k$

b)  $\Delta l = mg \cos \theta / k$

d)  $\Delta l = \frac{m}{k} \cdot \sqrt{a^2 - 2ag \cos \theta + g^2}$

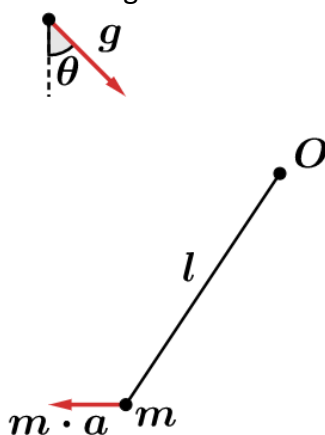
e)  $\Delta l = \frac{m}{k} \cdot \sqrt{a^2 - 2ag \sin \theta + g^2}$



c)  $\Delta l = mg / k$

**Comentários:**

Considere a situação no referencial do vagão:



Aplicando a Segunda Lei, obtemos:

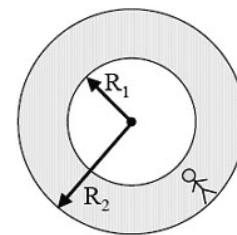
$$\begin{aligned} \vec{F}_{el} + m \cdot \vec{a} + m \cdot \vec{g} &= 0 \Rightarrow F_{el} = m \cdot |\vec{a} + \vec{g}| \\ k \cdot \Delta l &= m \cdot \sqrt{a^2 + g^2 - 2 \cdot a \cdot g \cdot \cos(90^\circ - \theta)} \\ \Delta l &= \frac{m}{k} \sqrt{a^2 + g^2 - 2 \cdot a \cdot g \cdot \sin \theta} \end{aligned}$$

**Gabarito: E**

### 18. (ITA – 2006)



Uma estação espacial em forma de um toróide, de raio interno  $R_1$ , e externo  $R_2$ , gira, com período  $P$ , em torno do seu eixo central, numa região de gravidade nula. O astronauta sente que seu “peso” aumenta de 20%, quando corre com velocidade constante  $\vec{v}$  no interior desta estação, ao longo de sua maior circunferência, conforme mostra a figura. Assinale a expressão que indica o módulo dessa velocidade.



a)  $v = \left( \sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

b)  $v = \left( 1 - \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

c)  $v = \left( 1 + \sqrt{\frac{5}{6}} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

d)  $v = \left( 1 + \frac{5}{6} \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

e)  $v = \left( \frac{6}{5} - 1 \right) \frac{2\pi R_2}{P}$

**Comentários:**

Pelo período conseguimos determinar a velocidade angular:

$$\omega = \frac{2\pi}{P}$$

O peso que “sentimos” é a normal que o solo exerce sobre nossos pés. Lembrando que pessoa está em uma trajetória circular, temos:

$$N = R_{cent} \Rightarrow N = m \cdot \omega^2 \cdot R_2 \quad (eq. 1)$$

Ao se mover com velocidade  $v$  o astronauta aumenta sua velocidade angular em  $v/R_2$ , o que resulta em um peso 20% maior:

$$1,2N = m \cdot \left( \omega + \frac{v}{R_2} \right)^2 \cdot R_2 \quad (eq. 2)$$

Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$1 + \frac{v}{\omega \cdot R_2} = \sqrt{1,2}$$

$$v = \omega \cdot R_2 \left( \sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right) = \frac{2\pi \cdot R_2}{P} \left( \sqrt{\frac{6}{5}} - 1 \right)$$

**Gabarito: A**

**19. (ITA – 2008)**

Na figura, um bloco sobe um plano inclinado, com velocidade inicial  $v_0$ . Considere  $\mu$  o coeficiente de atrito entre o bloco e a superfície. Indique a sua velocidade na descida ao passar pela posição inicial.

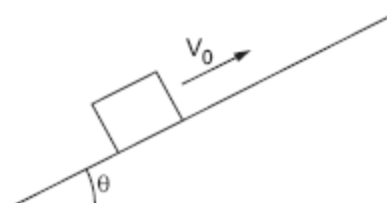
a)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}{\cos\theta - \mu \cos\theta}}$

b)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}{\text{sen}\theta + \mu \cos\theta}}$

c)  $v_0 \sqrt{\frac{\text{sen}\theta + \mu \cos\theta}{\text{sen}\theta - \mu \cos\theta}}$

d)  $v_0 \sqrt{\frac{\mu \text{sen}\theta + \cos\theta}{\mu \text{sen}\theta - \cos\theta}}$

e)  $v_0 \sqrt{\frac{\mu \text{sen}\theta - \cos\theta}{\mu \text{sen}\theta + \cos\theta}}$



**Comentários:**

O bloco sobe e desce o plano com aceleração constante, assim podemos usar a equação de Torricelli nos dois casos. Para a subida, temos:

$$0 - v_0^2 = -2(g \cdot \text{sen}\theta + \mu \cdot g \cdot \cos\theta) \cdot d \quad (eq. 1)$$

Em que  $d$  é a distância percorrida pelo bloco até sua parada. Para a descida, temos:

$$v^2 - 0 = (g \cdot \text{sen}\theta - \mu \cdot g \cdot \cos\theta) \cdot d \quad (eq. 2)$$

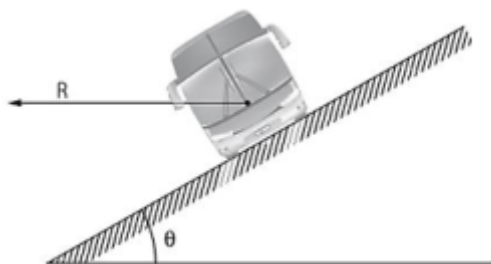
Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$v = v_0 \sqrt{\frac{\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta}{\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta}}$$

**Gabarito: B**

## 20. (IME 1993)

Considere o veículo de massa  $M$  percorrendo uma curva inclinada, de ângulo  $\theta$ , com raio  $R$  constante, a uma velocidade  $v$ . Supondo que o coeficiente de atrito dos pneus com o solo seja  $\mu$ , calcule as velocidades mínima e máxima com que este veículo pode percorrer esta curva, sem deslizamento.



### Comentários:

Na situação de máxima velocidade a tendência é escapar para o exterior da curva, assim o atrito estará direcionado para baixo. Aplicando a Segunda Lei ao veículo na vertical:

$$f_{at} \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

Na situação limite teremos o atrito máximo:

$$\mu \cdot N \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta} \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei ao veículo na horizontal:

$$R_{cent} = f_{at} \cdot \cos \theta + N \cdot \text{sen } \theta = N \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)$$

Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$\frac{m \cdot v_{max}^2}{R} = \frac{m \cdot g \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}$$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\text{sen } \theta + \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta - \mu \cdot \text{sen } \theta}}$$

Na situação de mínima velocidade a tendência é escapar para o interior da curva, assim o atrito estará direcionado para cima. Aplicando a Segunda Lei ao veículo na vertical:

$$-f_{at} \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

Na situação limite teremos o atrito máximo:

$$-\mu \cdot N \cdot \text{sen } \theta + m \cdot g = N \cdot \cos \theta$$

$$N = \frac{m \cdot g}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta} \quad (eq. 2)$$

Aplicando a Segunda Lei ao veículo na horizontal:

$$R_{cent} = -f_{at} \cdot \cos \theta + N \cdot \text{sen } \theta = N \cdot (\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)$$

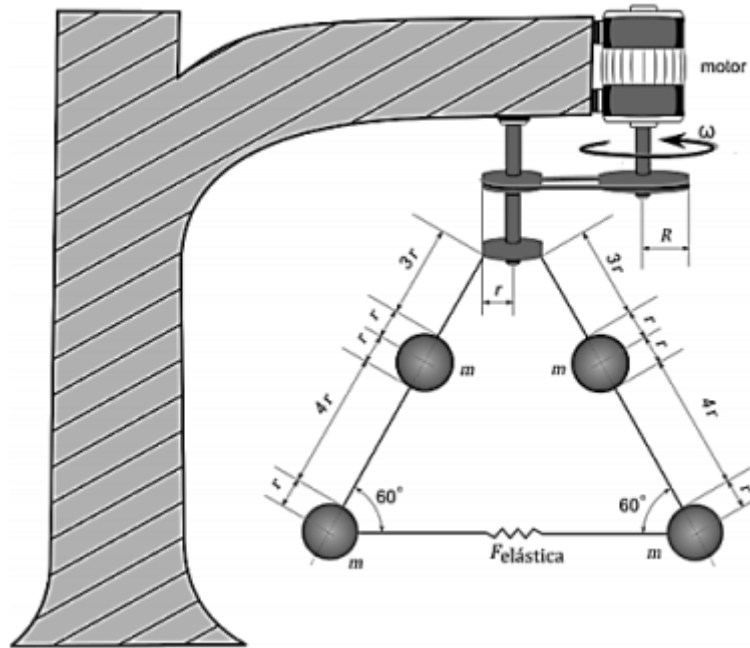
Substituindo (2) na equação acima, obtemos:

$$\frac{m \cdot v_{min}^2}{R} = \frac{m \cdot g \cdot (\text{sen } \theta - \mu \cdot \cos \theta)}{\cos \theta + \mu \cdot \text{sen } \theta}$$

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{R \cdot g \cdot (\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta)}{\cos\theta + \mu \cdot \sin\theta}}$$

**Gabarito:**  $v_{\max} = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta + \mu\cos\theta)}{\cos\theta - \mu\sin\theta}}$  e  $v_{\min} = \sqrt{\frac{Rg(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{\cos\theta + \mu\sin\theta}}$

## 21. (IME-2018)



A figura acima mostra um dispositivo composto por um motor elétrico, cujo eixo se encontra ligado a uma polia ideal de raio  $R$ , solidária a uma segunda polia de raio  $r$ , sem deslizamento. Solidário ao segundo eixo há um disco rígido metálico de raio  $r$ . Em duas extremidades opostas deste disco, foram fixados dois pêndulos compostos idênticos, com fios ideais e esferas homogêneas, de massa  $m$ . Existe um fio extensível ligando as esferas inferiores, provendo uma força elástica  $F_{\text{elástica}}$  que as mantém na configuração mostrada na figura. Determine, em função de  $g, m, r$  e  $R$ :

- a velocidade angular  $\omega$  do motor elétrico;
- a força elástica  $F_{\text{elástica}}$  do fio extensível.

Dado: aceleração da gravidade:  $g$ .

### Comentários:

- Considere o movimento de uma das esferas superiores (já que o sistema é simétrico precisamos analisar somente um lado). Teremos a ação do peso, uma tensão do fio de cima  $T_1$  e uma tensão do fio de baixo  $T_2$ . Lembre-se que a circunferência da trajetória do centro de massa dos corpos tem centro no eixo do disco metálico.

Aplicando a Segunda Lei a essa esfera, temos:

Vertical –

$$T_1 \cdot \sin 60^\circ = T_2 \cdot \sin 60^\circ + m \cdot g$$

Horizontal –

$$R_{\text{cent}} = T_1 \cdot \cos 60^\circ - T_2 \cdot \cos 60^\circ = m \cdot \omega_{\text{fio}}^2 \cdot (3r)$$

Colocando  $T_1 - T_2$  em evidência e dividindo as equações acima, obtemos:

$$m \cdot \omega_{fio}^2 \cdot 3\sqrt{3} \cdot r = m \cdot g \Rightarrow \omega_{fio} = \sqrt{\frac{g}{3\sqrt{3} \cdot r}}$$

Essa velocidade angular é a mesma da polia menor e, por sua vez, a polia menor está ligada pela sua borda com o motor, logo a velocidade linear da sua borda deve ser igual à do motor:

$$\omega_{fio} \cdot r = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{r \cdot g}{3\sqrt{3}}}$$

b) Aplicando a Segunda Lei em uma das esferas inferiores:

Vertical –

$$T_2 \cdot \sin 60^\circ = m \cdot g \Rightarrow T_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} m \cdot g$$

Horizontal –

$$R_{cent} = T_2 \cdot \cos 60^\circ + F_{elástica} = m \cdot \omega_{fio}^2 \cdot (6r)$$

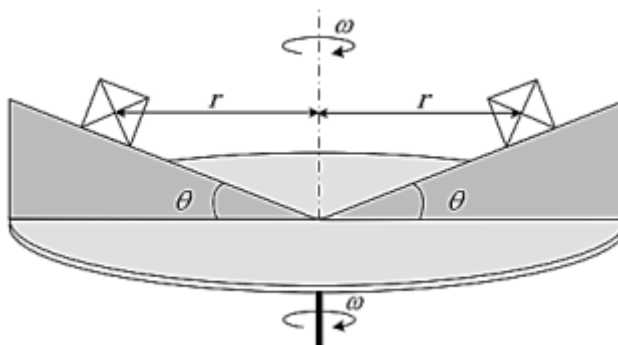
Substituindo os valores de  $T_2$  e  $\omega_{fio}$  na última equação, obtemos:

$$F_{elástica} = \frac{m \cdot g \cdot (6r)}{3\sqrt{3}r} - \frac{m \cdot g}{\sqrt{3}} = \frac{m \cdot g}{\sqrt{3}}$$

**Gabarito:** a)  $\omega = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{rg}{3\sqrt{3}}}$  b)  $F_{elástica} = \frac{\sqrt{3}mg}{3}$

## 22. (IME 2018)

O sistema mostrado na figura gira em torno de um eixo central em velocidade angular constante  $\omega$ . Dois cubos idênticos, de massa uniformemente distribuída, estão dispostos simetricamente a uma distância  $r$  do centro ao eixo, apoiados em superfícies inclinadas de ângulo  $\theta$ . Admitindo que não existe movimento relativo dos cubos em relação às superfícies, a menor velocidade angular  $\omega$  para que o sistema se mantenha nessas condições é:



Dados:

- Aceleração da gravidade:  $g$ ;
- Massa de cada cubo:  $m$ ;

- Aresta de cada cubo:  $a$ ; e
- Coeficiente de atrito entre os cubos e as superfícies inclinadas:  $\mu$

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{b)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{c)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\mu \sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \text{d)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \right]^{\frac{1}{2}} & \text{e)} & \left[ \frac{g}{r} \cdot \frac{\sin \theta - \mu \cos \theta}{\sin \theta + \mu \cos \theta} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

### Comentários:

Para a menor velocidade os cubos estarão na iminência de escaparem para o interior da trajetória circular, assim o atrito tem sentido para cima na superfície inclinada. Aplicando a Segunda Lei em um dos blocos: (sistema simétrico)

Vertical –

$$m \cdot g = N \cdot \cos \theta + f_{at_{max}} \cdot \sin \theta$$

O atrito é máximo pois o corpo está na iminência de escorregar.

$$m \cdot g = N \cdot (\cos \theta + \mu \cdot \sin \theta) \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$\begin{aligned} R_{cent} &= N \cdot \sin \theta - f_{at_{max}} \cdot \cos \theta \\ m \cdot \omega^2 \cdot r &= N \cdot (\sin \theta - \mu \cdot \cos \theta) \quad (eq. 2) \end{aligned}$$

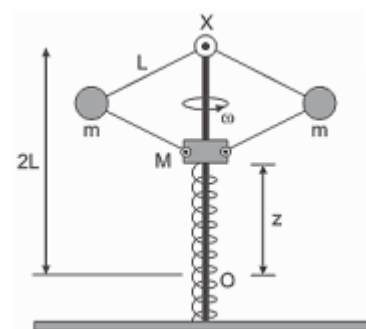
Dividindo (2) por (1), obtemos:

$$\omega = \sqrt{\frac{g \sin \theta - \mu \cos \theta}{r \cos \theta + \mu \sin \theta}}$$

### Gabarito: D

#### 23. (ITA 2015)

Na figura, o eixo vertical giratório imprime uma velocidade angular  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  ao sistema composto por quatro barras iguais, de comprimento  $L = 1 \text{ m}$  e massa desprezível, graças a uma dupla articulação na posição fixa  $X$ . Por sua vez, as barras de baixo são articuladas na massa  $M$  de  $2 \text{ kg}$  que, através de um furo central, pode deslizar sem atrito ao longo do eixo e esticar uma mola de constante elástica  $k = 100 \text{ N/m}$  a partir da posição  $O$  da extremidade superior da mola em repouso, a dois metros abaixo de  $X$ . O sistema completa-se com duas massas iguais de  $m = 1 \text{ kg}$  cada uma, articuladas às barras. Sendo desprezíveis as dimensões das massas, então, a mola distender-se-á de uma altura  $z$  acima de  $O$  dada por:



- a) 0,2m      b) 0,5m      c) 0,6m      d) 0,7m      e) 0,9m

### Comentários:

Sejam  $T_1$  e  $T_2$  as tensões nas barras de baixo e de cima, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei à massa  $m$ , temos:

Vertical –

$$T_2 \cdot \sin \theta = T_1 \cdot \sin \theta + m \cdot g \quad (eq. 1)$$

Horizontal –

$$\begin{aligned} R_{cent} &= (T_2 + T_1) \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 \cdot (L \cdot \cos \theta) \\ T_2 + T_1 &= m \cdot \omega^2 \cdot L \quad (eq. 2) \end{aligned}$$



Em que  $\theta$  é metade do ângulo com vértice na massa  $m$  do triângulo formado pelas barras + haste. Assim, podemos escrever:

$$\sin \theta = \frac{L - \frac{z}{2}}{L} = 1 - \frac{z}{2L}$$

Eliminando  $T_2$  de (1) e (2), obtemos:

$$2T_1 = m \cdot \omega^2 \cdot L - \frac{m \cdot g}{\sin \theta}$$

$$2T_1 = 100 - \frac{10}{1 - \frac{z}{2}} \Rightarrow 2T_1 = \frac{10(9 - 5z)}{1 - \frac{z}{2}}$$

Aplicando a Segunda Lei à massa  $M$ , temos:

$$M \cdot g + k \cdot z = 2T_1 \cdot \sin \theta$$

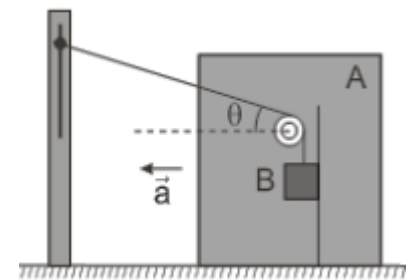
$$20 + 100z = \frac{10(9 - 5z)}{1 - \frac{z}{2}} \cdot 1 - \frac{z}{2} \Rightarrow 2 + 10z = 9 - 5z$$

$$15z = 7 \Rightarrow z \approx 0,47 \text{ m}$$

## Gabarito: B

### 24. (ITA 2012)

A figura mostra um sistema formado por dois blocos,  $A$  e  $B$ , cada um com massa  $m$ . O bloco  $A$  pode deslocar-se sobre a superfície plana e horizontal onde se encontra. O bloco  $B$  está conectado a um fio inextensível fixado à parede, e que passa por uma polia ideal com eixo preso ao bloco  $A$ . Um suporte vertical sem atrito mantém o bloco  $B$  descendo sempre paralelo a ele, conforme mostra a figura. Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre o bloco  $A$  e a superfície,  $g$  a aceleração da gravidade, e  $\theta = 30^\circ$  mantido constante, determine a tração no fio após o sistema ser abandonado do repouso.



### Comentários:

Seja  $N$  a normal horizontal entre  $A$  e  $B$ . Como o ângulo  $\theta$  se mantém constante, temos:

$$x = l \cdot \cos \theta$$

Onde  $l$  é o comprimento da polia à parede e  $x$  é a distância horizontal. Variando essa equação no tempo, obtemos:

$$a_A = a_{B,y} \cdot \cos \theta$$

Aplicando a Segunda Lei no Bloco  $B$ , temos:

Vertical –

$$m \cdot g - T = m \cdot a_{B,y} \Rightarrow a_{B,y} = g - \frac{T}{m} \quad (\text{eq. 2})$$

Horizontal –

$$N = m \cdot a_A \quad (\text{eq. 3})$$

Aplicando a Segunda Lei no Bloco  $A$ , temos:

Vertical –

$$-T \cdot \sin 30^\circ + T + m \cdot g = N_{\text{solo}} \Rightarrow N_{\text{solo}} = m \cdot g + \frac{T}{2}$$

Horizontal –

$$T \cos 30^\circ - N - \mu \cdot N_{\text{solo}} = m \cdot a_A$$

$$\frac{T}{2}(\sqrt{3} - \mu) - N - \mu \cdot m \cdot g = m \cdot a_A \quad (\text{eq. 4})$$



Substituindo (3) em (4), obtemos:

$$a_A = \frac{T(\sqrt{3} - \mu)}{4m} - \frac{\mu \cdot g}{2} \quad (\text{eq. 5})$$

Substituindo (2) e (5) em (1), temos:

$$\sqrt{3}g - \sqrt{3}\frac{T}{m} = \frac{T(\sqrt{3} - \mu)}{2m} - \mu \cdot g \Rightarrow T(3\sqrt{3} - \mu) = 2 \cdot m \cdot g(\sqrt{3} + \mu)$$

$$T = \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot m \cdot g$$

**Gabarito:**  $T = \frac{2(\sqrt{3} + \mu)}{3\sqrt{3} - \mu} \cdot mg$

## 25. (ITA 2012)

Considere uma rampa plana, inclinada de um ângulo  $\theta$  em relação à horizontal, no início da qual encontra-se um carrinho. Ele então recebe uma pancada que o faz subir até uma certa distância, durante o tempo  $t_s$ , descendo em seguida até sua posição inicial. A “viagem” completa dura um tempo total  $t$ . Sendo  $\mu$  o coeficiente de atrito cinético entre o carrinho e a rampa, a relação  $t/t_s$  é igual a:

- a) 2                                      b)  $1 + \sqrt{tg\theta + \mu/|tg\theta - \mu|}$     c)  $1 + \sqrt{\cos\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$   
d)  $1 + \sqrt{\sin\theta + \mu/|\cos\theta - \mu|}$                                       e)  $1 - \sqrt{tg\theta + \mu/|tg\theta - \mu|}$

### Comentários:

Todos os movimentos apresentam aceleração constante. Na subida o atrito tem o mesmo sentido da aceleração causado pela força peso e na descida, o sentido oposto:

$$a_{subida} = -g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta)$$

$$a_{descida} = g(\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta)$$

Usando as equações de deslocamento para movimento uniformemente variado:

$$d = \frac{g(\sin\theta + \mu \cdot \cos\theta) \cdot t_s^2}{2}$$

$$d = \frac{g(\sin\theta - \mu \cdot \cos\theta) \cdot t_d^2}{2}$$

Dividindo as duas equações acima, obtemos:

$$\frac{t_d}{t_s} = \sqrt{\frac{(\sin\theta + \mu \cos\theta)}{(\sin\theta - \mu \cos\theta)}}$$

Logo, a razão pedida pelo enunciado é:

$$\frac{t}{t_s} = \frac{t_s + t_d}{t_s} = 1 + \frac{t_d}{t_s} = 1 + \sqrt{\frac{\sin\theta + \mu \cos\theta}{\sin\theta - \mu \cos\theta}}$$

Colocando  $\sin\theta$  em evidência dentro da raiz:

$$\frac{t}{t_s} = 1 + \sqrt{\frac{\tan\theta + \mu}{\tan\theta - \mu}}$$

**Gabarito: B**

## 26. (IME-2012)

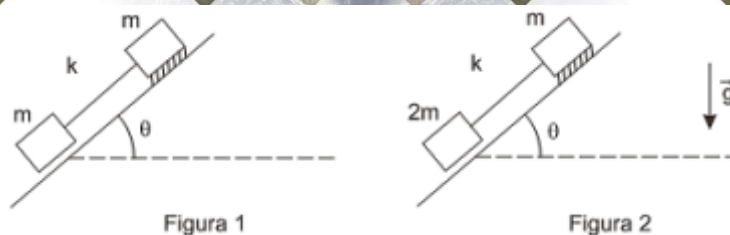


Figura 1

Figura 2

A figura 1 mostra dois corpos de massas iguais a  $m$  presos por uma haste rígida de massa desprezível, na iminência do movimento sobre um plano inclinado, de ângulo  $\theta$  com a horizontal. Na figura 2, o corpo inferior é substituído por outro com massa  $2m$ . Para as duas situações, o coeficiente de atrito estático é  $\mu$  e o coeficiente de atrito cinético é  $\mu/2$  para a massa superior, e não há atrito para a massa inferior. A aceleração do conjunto ao longo do plano inclinado, na situação da figura 2 é:

- a)  $(2g\sin\theta)/3$                       b)  $(3g\sin\theta)/2$                       c)  $(g\sin\theta)/2$   
d)  $g(2\sin\theta - \cos\theta)$                       e)  $g(2\sin\theta + \cos\theta)$

#### Comentários:

Considere primeiramente a situação na figura 1. Aplicando a Segunda Lei no sistema composto pelas duas massas:

$$2 \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta = fat_{max} = \mu \cdot m \cdot g \cdot \cos \theta$$

$$\mu = 2 \tan \theta$$

Aplicando a Segunda Lei no sistema, na configuração mostrada na figura 2, obtemos:

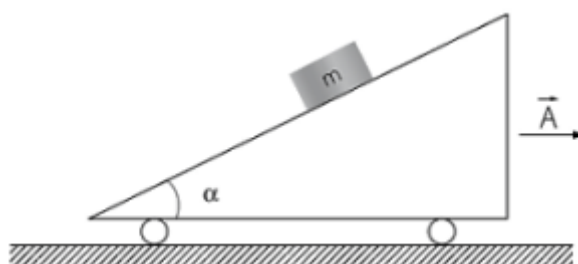
$$3 \cdot m \cdot g \cdot \sin \theta - fat_{cin} = 3 \cdot m \cdot a$$

$$3a = 3g \cdot \sin \theta - \left(\frac{\mu}{2}\right) \cdot g \cdot \cos \theta \Rightarrow a = \frac{2}{3} \cdot g \cdot \sin \theta$$

#### Gabarito: A

#### 27. (ITA 2003)

Na figura, o carrinho com rampa movimentar-se com aceleração constante  $\vec{A}$ . Sobre a rampa, repousa um bloco de massa  $m$ . Se  $\mu$  é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e a rampa, determine o intervalo para o módulo de  $\vec{A}$  no qual o bloco permanecerá em repouso sobre a rampa.



#### Comentários:

Considere a situação no referencial do carrinho, onde haverá uma força de Einstein horizontal com sentido para a esquerda. Na situação de máxima aceleração o bloco estará na iminência de descer o plano, assim o atrito será direcionado para cima na superfície do carrinho.

Aplicando a Segunda Lei ao bloco, temos:

Horizontal –

$$m \cdot A_{max} + N \cdot \sin \theta = fat_{max} \cdot \cos \theta$$

$$m \cdot A_{max} = N \cdot (\mu \cos \theta - \sin \theta) \quad (eq. 1)$$

Vertical –

$$m \cdot g = N \cdot \cos \theta + fat_{max} \cdot \sin \theta$$

$$m \cdot g = N \cdot (\cos \theta + \mu \sin \theta) \quad (eq. 2)$$

Dividindo (1) por (2), obtemos:

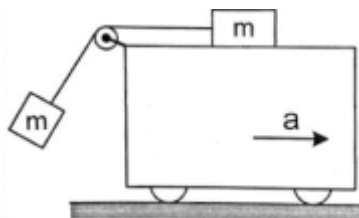
$$A_{max} = \frac{g \cdot (\mu \cdot \cos \theta - \sin \theta)}{\cos \theta + \mu \cdot \sin \theta}$$

Note que para acelerações abaixo dessa o carrinho não descerá no plano e, como força de atrito não gera movimento, o carrinho também nunca subirá no plano, assim  $a \leq a_{max}$  assegura que o bloco permanecerá em repouso. Como  $a$  é um módulo, naturalmente teremos  $a \geq 0$ , o que exige  $\mu \geq \tan \theta$ .

**Gabarito:**  $0 \leq A \leq \frac{g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha}, \mu > \tan \alpha$

28.

Na figura a seguir, dois blocos idênticos de massa  $m$  são conectados entre si por meio de um fio ideal que passa por uma polia também ideal fixa ao carrinho. O carrinho acelera para a direita com aceleração de intensidade  $a$ . Sabendo-se que o coeficiente de atrito entre o bloco e o carrinho vale  $\mu > 1$ , determine o maior valor de  $a$  para que o bloco não escorregue sobre o carrinho.



**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei no bloco sobre o carrinho:

$$f_{at} - T = m \cdot a \quad (eq. 1)$$

Seja  $\theta$  o ângulo que o fio faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei ao bloco pendurado:  
Horizontal –

$$T \cdot \cos \theta = m \cdot a \quad (eq. 2)$$

Vertical –

$$T \cdot \sin \theta = m \cdot g \quad (eq. 3)$$

Somando os quadrados de (2) e (3), obtemos:

$$T = m \cdot \sqrt{a^2 + g^2} \quad (eq. 4)$$

Substituindo (4) em (1), temos:

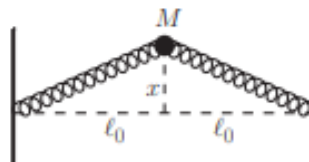
$$\begin{aligned} f_{at} &= m \cdot \left( a + \sqrt{a^2 + g^2} \right) \leq f_{at_{max}} = \mu \cdot m \cdot g \\ \sqrt{a^2 + g^2} &\leq \mu \cdot g - a \\ \boxed{a \leq g \cdot \frac{\mu^2 - 1}{2\mu}} \end{aligned}$$

**Gabarito:**  $a = \frac{\mu^2 - 1}{2\mu} \cdot g$

29. (ITA-2011)

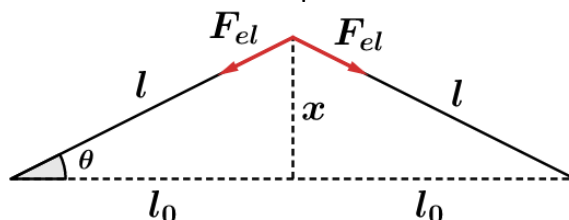
Sobre uma mesa sem atrito, uma bola de massa  $M$  é presa por duas molas alinhadas, de constante de mola  $k$  e comprimento natural  $l_0$ , fixadas nas extremidades da mesa. Então, a bola é deslocada a uma distância  $x$  na direção perpendicular à linha inicial das molas, como mostra a figura, sendo solta a seguir. Obtenha a aceleração da bola, usando a aproximação  $(1 + a)^\alpha = 1 + \alpha a$ .

- a)  $a = -kx/M$
- b)  $a = -kx^2/2Ml_0$
- c)  $a = -kx^2/Ml_0$
- d)  $a = -kx^3/2Ml_0^2$
- e)  $a = -kx^3/Ml_0^2$



**Comentários:**

A figura abaixo define as variáveis usadas no problema:



Note que não há resultante na horizontal. Pela Segunda Lei, temos:

$$a = \frac{F_r}{M} = \frac{2 \cdot F_{el} \cdot \cos \theta}{M} = -\frac{2k}{M} \cdot (l - l_0) \cdot \frac{x}{l}$$

$$a = -\frac{2 \cdot k \cdot x}{M} \cdot \left( 1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{x^2}{l_0^2}}} \right) \Rightarrow a = -\frac{2 \cdot k \cdot x}{M} \left( 1 - \left( 1 + \frac{x^2}{l_0^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

Usando a aproximação fornecida no enunciado, obtemos:

$$a = -\frac{2 \cdot k \cdot x}{M} \left( 1 - \left( 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{l_0^2} \right) \right)$$

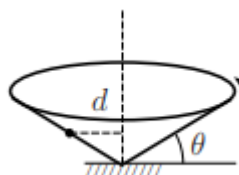
$$\boxed{a = -\frac{k \cdot x^3}{M \cdot l_0^2}}$$

**Gabarito: E**

**30. (ITA-2012)**

Um funil que gira com velocidade angular uniforme em torno do seu eixo vertical de simetria apresenta uma superfície cônica que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme a figura. Sobre esta superfície, uma pequena esfera gira com a mesma velocidade angular mantendo-se a uma distância  $d$  do eixo de rotação. Nestas condições, o período de rotação do funil é dado por:

- a)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \sin \theta}$
- b)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \cos \theta}$
- c)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \tan \theta}$
- d)  $2\pi\sqrt{d/g \cdot \sin 2\theta}$
- e)  $2\pi\sqrt{d \cos \theta / g \tan \theta}$



**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei à esfera, temos:

Horizontal –

$$R_{cent} = N \cdot \sin \theta = m \cdot \omega^2 \cdot d \quad (eq. 1)$$

Vertical –

$$N \cdot \cos \theta = m \cdot g \quad (\text{eq. 2})$$

Dividindo (1) por (2), obtemos:

$$\omega^2 \cdot d = \tan \theta \cdot g$$

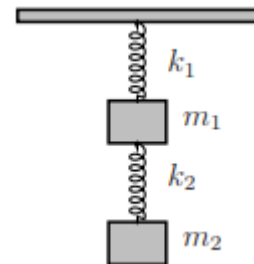
$$\omega = \sqrt{\frac{g \cdot \tan \theta}{d}} = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{d}{g \cdot \tan \theta}}$$

**Gabarito: C**

### 31. (ITA-2012)

Um elevador sobe verticalmente com aceleração constante e igual a  $a$ . No seu teto está preso um conjunto de dois sistemas massa-mola acoplados em série, conforme a figura. O primeiro tem massa  $m_1$  e constante de mola  $k_1$ , e o segundo, massa  $m_2$  e constante de mola  $k_2$ . Ambas as molas têm o mesmo comprimento natural (sem deformação)  $\ell$ . Na condição de equilíbrio estático relativo ao elevador, a deformação da mola de constante  $k_1$  é  $y$ , e a da outra,  $x$ . Pode-se então afirmar que  $(y - x)$  é:

- a)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g - a)/k_1k_2$ .
- b)  $[(k_2 + k_1)m_2 + k_2m_1](g - a)/k_1k_2$ .
- c)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2$ .
- d)  $[(k_2 + k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2 - 2\ell$ .
- e)  $[(k_2 - k_1)m_2 + k_2m_1](g + a)/k_1k_2 - 2\ell$ .



**Comentários:**

No referencial do elevador teremos uma gravidade aparente de:

$$g_{\text{apa}} = g + a$$

Aplicando a Segunda Lei a  $m_2$ , temos:

$$F_{\text{el},2} = m_2 \cdot (g + a)$$

$$k_2x = m_2 \cdot (g + a) \Rightarrow x = \frac{m_2 \cdot (g + a)}{k_2} \quad (\text{eq. 1})$$

Aplicando a Segunda Lei a  $m_1$ , temos:

$$F_{\text{el},1} - F_{\text{el},2} = m_1 \cdot (g + a)$$

$$k_1 \cdot y - m_2 \cdot (g + a) = m_1 \cdot (g + a) \Rightarrow y = \frac{(m_1 + m_2) \cdot (g + a)}{k_1} \quad (\text{eq. 2})$$

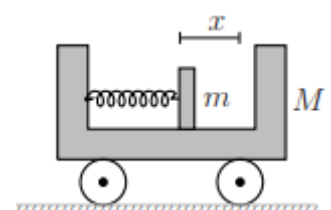
Subtraindo (1) de (2), obtemos:

$$y - x = \frac{(m_2 \cdot (k_2 - k_1) + k_2 \cdot m_1) \cdot (g + a)}{k_1 \cdot k_2}$$

**Gabarito: C**

### 32. (ITA-2012)

No interior de um carrinho de massa  $M$  mantido em repouso, uma mola de constante elástica  $k$  encontra-se comprimida de uma distância  $x$ , tendo uma extremidade presa e a outra conectada a um bloco de massa  $m$ , conforme a figura. Sendo o sistema então abandonado e considerando que não há atrito, pode-se afirmar que o valor inicial da aceleração do bloco relativa ao carrinho é:





- a)  $kx/m$                       b)  $kx/M$                       c)  $kx/(m + M)$   
d)  $kx(M - m)/mM$                       e)  $kx(M + m)/mM$

**Comentários:**

Aplicando a Segunda Lei ao bloco, temos:

$$k \cdot x = m \cdot a_m \Rightarrow a_m = \frac{k \cdot x}{m}$$

As grandezas serão consideradas positivas para a direita.

Aplicando a Segunda Lei ao carrinho, temos:

$$-k \cdot x = M \cdot a_M \Rightarrow a_M = -\frac{k \cdot x}{M}$$

A aceleração do bloco em relação ao carrinho é dada por:

$$a_{m/M} = a_{m/O} - a_{M/O} = \frac{k \cdot x \cdot (m + M)}{M \cdot m}$$

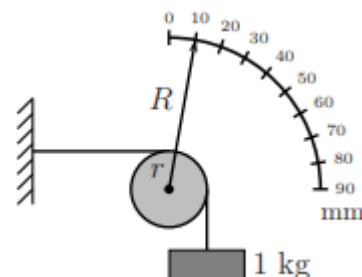
Acima foi usado  $O$  para indicar que as duas acelerações devem ser medidas em relação ao mesmo referencial.

**Gabarito: E**

**33. (ITA - 2015)**

A figura mostra um dispositivo para medir o módulo de elasticidade (módulo de Young) de um fio metálico. Ele é definido como a razão entre a força por unidade de área da seção transversal do fio necessária para esticá-lo e o resultante alongamento deste por unidade de seu comprimento. Neste particular experimento, um fio homogêneo de 1,0 m de comprimento e 0,2 mm de diâmetro, fixado numa extremidade, é disposto horizontalmente e preso pela outra ponta ao topo de uma polia de raio  $r$ . Um outro fio preso neste mesmo ponto, envolvendo parte da polia, sustenta uma massa de 1 kg. Solidário ao eixo da polia, um ponteiro de raio  $R = 10r$  acusa uma leitura de 10 mm na escala semicircular iniciada em zero. Nestas condições, o módulo de elasticidade do fio é de:

- a)  $\frac{10^{12}}{\pi} \text{ N/m}^2$   
b)  $\frac{10^{12}}{2\pi} \text{ N/m}^2$   
c)  $\frac{10^{12}}{3\pi} \text{ N/m}^2$   
d)  $\frac{10^{12}}{4\pi} \text{ N/m}^2$   
e)  $\frac{10^{12}}{8\pi} \text{ N/m}^2$



**Comentários:**

A expressão para o módulo de Young, segundo o enunciado, é dada por:

$$Y = \frac{F}{A \cdot \frac{\Delta x}{l}} = \frac{l \cdot F}{A \cdot \Delta x} \quad (eq. 1)$$

O fio, antes de estendido, chegava no topo da polia. Após ser tensionado, sofre uma variação no comprimento de:

$$\Delta x = r \cdot \Delta \theta$$

Em que  $\theta$  é o ângulo que forma o arco, o qual vai de 0 a 10 mm na escala mostrada.

$$\Delta x = r \cdot \frac{10}{R} = 1 \text{ mm} \quad (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), obtemos: (lembre-se de colocar as grandezas no SI)

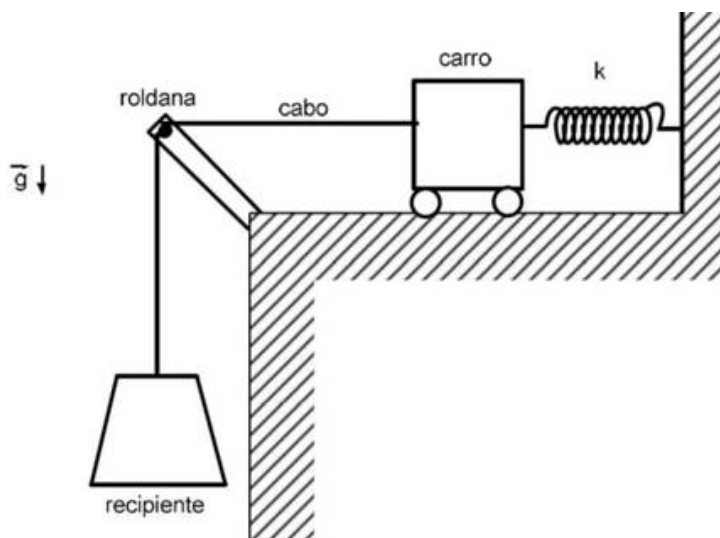


$$Y = m \cdot g \frac{l}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot \Delta x} = 10 \cdot \frac{1}{\frac{\pi 4 \cdot 10^{-8}}{4} \cdot 10^{-3}} = \frac{10^{12}}{\pi} \text{ N/m}^2$$

**Gabarito: A**

### 34. (IME-2015)

A figura acima mostra um conjunto massa-mola conectado a uma roldana por meio de um cabo. Na extremidade do cabo há um recipiente na forma de um tronco de cone de 10 cm x 20 cm x 30 cm de dimensões (diâmetro da base superior x diâmetro da base inferior x altura) e com peso desprezível. O cabo é inextensível e também tem peso desprezível. Não há atrito entre o cabo e a roldana. No estado inicial, o carro encontra-se em uma posição tal que o alongamento na mola é nulo e o cabo não se encontra tracionado. A partir de um instante, o recipiente começa a ser completado lentamente com um fluido com massa específica de  $3000 \text{ kg/m}^3$ . Sabendo que o coeficiente de rigidez da mola é  $3300 \text{ N/m}$  e a aceleração da gravidade é  $10 \text{ m/s}^2$ , o alongamento da mola no instante em que o recipiente se encontrar totalmente cheio, em cm, é igual a



- a) 0,5      b) 1,5      c) 5,0      d) 10,0      e) 15,0

#### Comentários:

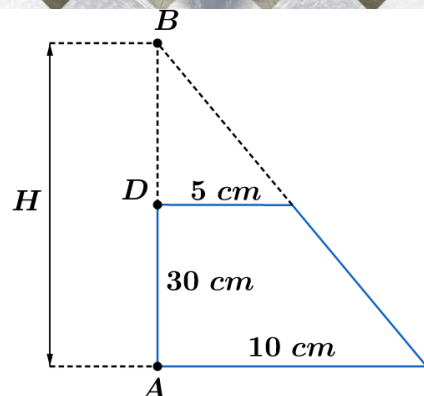
No momento em que o recipiente estiver cheio sua massa será:

$$m_{total} = \rho \cdot V_{t,cone}$$

O volume de um tronco de cone é dado por:

$$V_{t,cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot H \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

Em que  $R$  é o raio da maior base,  $r$  o raio da menor e  $H$  a altura do cone inteiro se o completássemos. Calculando  $H$ :



Por semelhança de triângulos:

$$\frac{BD}{H} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \Rightarrow BD = \frac{H}{2}$$

O que implica:  $DA = \frac{H}{2} = 30$

$$H = 60 \text{ cm}$$

Na situação de equilíbrio teremos:

$$m_{total} \cdot g = k \cdot x$$

$$x = \frac{1}{3k} \cdot \rho \cdot g \cdot \pi \cdot R^2 \cdot H \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right)$$

Substituindo os valores numéricos e lembrando de usar as grandezas em SI, obtemos:

$$x \approx 5 \text{ cm}$$

**Gabarito: C**

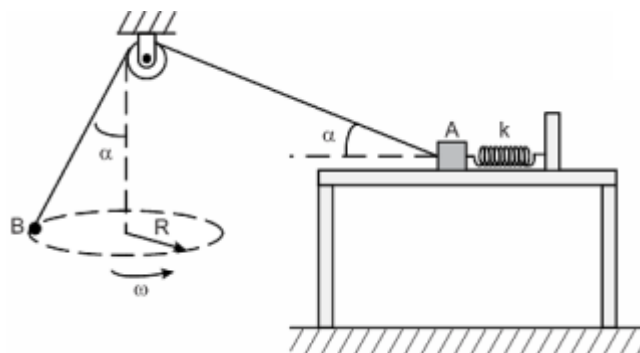
### 35. (IME 2016)

Uma mola presa ao corpo A está distendida. Um fio passa por uma roldana e tem suas extremidades presas ao corpo A e ao corpo B, que realiza um movimento circular uniforme horizontal com raio R e velocidade angular  $\omega$ . O corpo A encontra-se sobre uma mesa com coeficiente de atrito estático  $\mu$  e na iminência do movimento no sentido de reduzir a deformação da mola. Determine o valor da deformação da mola.

Dados:

- massa do corpo A:  $m_A$ ; A
- massa do corpo B:  $m_B$ ; B
- constante elástica da mola: k;
- aceleração da gravidade: g

Consideração: A massa  $m_A$  é suficiente para garantir que o corpo A permaneça no plano horizontal da mesa.



#### Comentários:

Note que o atrito deve estar direcionado para esquerda, já que o corpo está na iminência de movimento para a direita.

Aplicando a Segunda Lei ao corpo A, temos:

Vertical –

$$N = m_A \cdot g - T \cdot \sin \alpha \quad (\text{eq. 1})$$

Horizontal –

$$T \cdot \cos \alpha = k \cdot x - \mu \cdot N \quad (\text{eq. 2})$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$T \cdot \cos \alpha = k \cdot x - \mu \cdot (m_A \cdot g - T \cdot \sin \alpha) \quad (eq. 3)$$

Aplicando a Segunda Lei ao corpo B, temos:

Vertical –

$$T \cdot \sin \alpha = m_B \cdot \omega^2 \cdot R \quad (eq. 4)$$

Horizontal –

$$T \cdot \cos \alpha = m_B \cdot g \quad (eq. 5)$$

Substituindo (4) e (5) em (3), obtemos:

$$m_B \cdot g = k \cdot x - \mu \cdot (m_A \cdot g - m_B \cdot \omega^2 \cdot R)$$

$$x = \frac{\mu \cdot (m_A \cdot g - m_B \cdot \omega^2 \cdot R) + m_B \cdot g}{k}$$

**Gabarito:**  $x = \frac{\mu(m_A g - m_B \omega^2 R) + m_B \cdot g}{k}$

### 36. (ITA – 2017)

Um sistema é constituído por uma sequência vertical de  $N$  molas ideais interligadas, de mesmo comprimento natural  $\ell$  e constante elástica  $k$ , cada qual acoplada a uma partícula de massa  $m$ . Sendo o sistema suspenso a partir da mola 1 e estando em equilíbrio estático, pode-se afirmar que o comprimento da

- a) mola 1 é igual a  $\ell + (N - 1)mg/k$ .      b) mola 2 é igual a  $\ell + Nm/k$ .  
c) mola 3 é igual a  $\ell + (N - 2)mg/k$ .      d) mola  $N - 1$  é igual a  $\ell + mg/k$ .  
e) mola  $N$  é igual a  $\ell$ .

#### Comentários:

Para a enésima mola basta analisarmos o sistema composto por todas as massas abaixo dessa mola. Abaixo da enésima mola teremos  $N - n + 1$  massas, as únicas forças externas no sistema composto por essas massas são a força elástica da mola  $n$  e a força peso. Aplicando a Segunda Lei ao sistema descrito:

$$F_{el,n} = (N - n + 1) \cdot m \cdot g$$

O único item compatível é o c), para  $n = 3$ .

#### Gabarito: C

### 37. (ITA – 2017)

Considere um automóvel com tração dianteira movendo-se aceleradamente para a frente. As rodas dianteiras e traseiras sofrem forças de atrito respectivamente para:

- a) frente e frente.      b) frente e trás.      c) trás e frente.  
d) trás e trás.      e) frente e não sofrem atrito.

#### Comentários:

A força de atrito se opõe ao movimento ou tendência, no caso em questão o pneu dianteiro gira no sentido horário devido a um torque externo, assim um ponto girando na roda terá velocidade de rotação direcionada para trás na parte do baixo pneu, de modo que o atrito será direcionado para a frente.

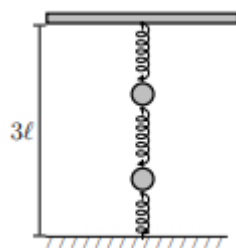
No pneu traseiro o único torque presente é do atrito e, como o pneu rotacional no sentido horário, esse atrito deve estar direcionado para trás.

#### Gabarito: B

**38. (ITA – 2018)**

Três molas idênticas, de massas desprezíveis e comprimentos naturais  $\ell$ , são dispostas verticalmente entre o solo e o teto a  $3\ell$  de altura. Conforme a figura, entre tais molas são fixadas duas massas pontuais iguais. Na situação inicial de equilíbrio, retira-se a mola inferior (ligada ao solo) resultando no deslocamento da massa superior de uma distância  $d_1$  para baixo, e da inferior, de uma distância  $d_2$  também para baixo, alcançando-se nova posição de equilíbrio. Assinale a razão  $d_2/d_1$ .

- a) 2
- b)  $3/2$
- c)  $5/3$
- d)  $4/3$
- e)  $5/4$

**Comentários:**

Assumiremos uma distensão inicial de  $x_1$  na mola de cima e  $x_2$  na mola de meio. Em decorrência das distensões acima, a mola de baixo está contraída de  $x_1 + x_2$ . Aplicando a Segunda Lei à massa de cima:

$$k \cdot x_1 - k \cdot x_2 = m \cdot g \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa de baixo, temos:

$$k \cdot x_2 + k \cdot (x_1 + x_2) = m \cdot g \quad (eq. 2)$$

Resolvendo o sistema de equações composto por (1) e (2), obtemos:

$$x_1 = \frac{m \cdot g}{k}$$
$$x_2 = 0$$

Repetiremos o mesmo processo feito acima, agora na ausência da mola de baixo.

Aplicando a Segunda Lei à massa de cima:

$$k \cdot x'_1 - k \cdot x'_2 = m \cdot g \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa de baixo, temos:

$$k \cdot x'_2 = m \cdot g \quad (eq. 2)$$

Resolvendo o sistema de equações composto por (1) e (2), obtemos:

$$x_1 = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$$
$$x_2 = \frac{m \cdot g}{k}$$

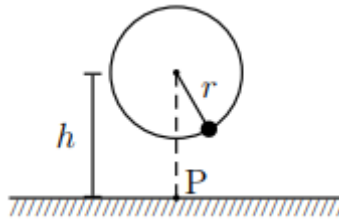
Lembre-se que a massa de baixo sofre um deslocamento composto pela distensão das duas molas:

$$d_1 = x'_1 - x_1 = \frac{m \cdot g}{k}$$
$$d_2 = (x'_2 + x'_1) - (x_2 + x_1) = \frac{2 \cdot m \cdot g}{k}$$
$$\frac{d_2}{d_1} = 2$$

**Gabarito: A****39. (ITA – 2018)**

Na figura, presa a um fio de comprimento de 1,0 m, uma massa de 1,0 kg gira com uma certa velocidade angular num plano vertical sob a ação da gravidade, com eixo de rotação a  $h = 6,0$  m do

piso. Determine a velocidade angular mínima dessa massa para a ruptura do fio que suporta no máximo a tração de 46 N, bem como a distância ao ponto P do ponto em que, nesse caso, a massa tocará o solo.



### Comentários:

Seja  $\theta$  o ângulo que o fio faz com a vertical. Aplicando a Segunda Lei à massa na direção radial:

$$R_{cent} = T - m \cdot g \cdot \cos \theta = m \cdot \omega^2 \cdot r$$

Queremos a velocidade angular mínima capaz de romper o fio:

$$T_{rup} - mg \cdot 1 = m \cdot \omega_{min}^2 \cdot r$$

O fio somente precisa atingir a tensão de ruptura onde a tensão é máxima na trajetória e isso ocorre em  $\theta = 0$ , quando a massa está o mais próximo do solo.

$$\omega_{min}^2 = \frac{46 - 10}{1 \cdot 1} = 36 \Rightarrow \omega_{min} = 6 \text{ rad/s}$$

O movimento após a ruptura é um lançamento horizontal de velocidade inicial  $\omega_{min} r$ :

$$h - r = \frac{g \cdot t_{voo}^2}{2} \Rightarrow t_{voo} = 1 \text{ s}$$

O movimento na horizontal é uniforme, assim:

$$A = (\omega_{min} \cdot r) \cdot t_{voo} \Rightarrow A = 6 \text{ m}$$

**Gabarito:  $\omega = 6 \text{ rad/s}$  e  $A = 6 \text{ m}$**

### 40. (ITA – 2019)

Considere duas partículas de massa  $m$ , cada qual presa numa das pontas de uma corda, de comprimento  $l$  e massa desprezível, que atravessa um orifício de uma mesa horizontal lisa. Conforme mostra a figura, a partícula sobre a mesa descreve um movimento circular uniforme de raio  $r$  e velocidade angular  $\omega_1$ . A partícula suspensa também descreve esse mesmo tipo de movimento, mas com velocidade angular  $\omega_2$ , estando presa a uma mola de constante elástica  $k$  e comprimento natural desprezível, mantida na horizontal. Sendo  $g$  o módulo da aceleração da gravidade e  $\theta$  o ângulo do trecho suspenso da corda com a vertical, a razão  $\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2$  é dada por:

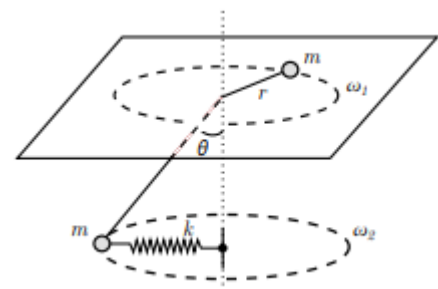
a)  $\frac{r(mg + k(l-r)\cos\theta)}{mg(l-r)}$

b)  $\frac{(l-r)(mg + krcos\theta)}{mgr\sin\theta}$

c)  $\frac{(l-r)(mg + krtg\theta)}{mgr^2}$

d)  $\frac{k(l-r)\cos\theta}{mg + kr}$

e)  $\frac{(l-r)(k\cos\theta)}{mg + k(l-r)\cos\theta}$



### Comentários:

Aplicando a Segunda Lei à massa sobre a mesa na direção radial:



$$R_{cent} = T = m \cdot \omega_1^2 \cdot r \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa suspensa:

Horizontal –

$$R_{cent} = k \cdot (l - r) \cdot \sin \theta + T \cdot \sin \theta = m \cdot \omega_2^2 \cdot (l - r) \cdot \sin \theta$$

$$k \cdot (l - r) + T = m \cdot \omega_2^2 \cdot (l - r) \quad (eq. 2)$$

Vertical –

$$T \cdot \cos \theta = m \cdot g \Rightarrow T = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \quad (eq. 3)$$

Substituindo (3) em (1) e (2), obtemos:

$$\omega_1^2 = \frac{g}{r \cdot \cos \theta} \quad (eq. 4)$$

$$\omega_2^2 = \frac{g}{(l - r) \cdot \cos \theta} + \frac{k}{m} \quad (eq. 5)$$

Dividindo (5) por (4), temos:

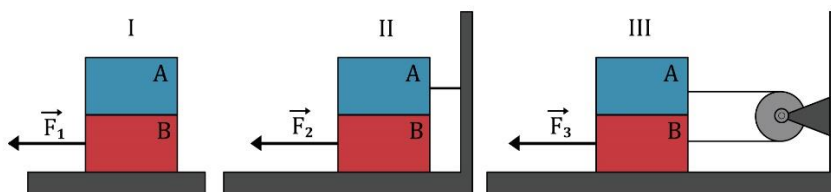
$$\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2 = \frac{r \cdot (m \cdot g + k \cdot \cos \theta \cdot (l - r))}{m \cdot g \cdot (l - r)}$$

## Gabarito: A

### 41. (ITA-SP)

Os blocos A e B da figura tem massa  $m$ . O coeficiente de atrito entre todas as superfícies é  $\mu$ . A força imprime ao bloco B da figura (I) velocidade uniforme.

Calcule as relações  $F_2/F_1$  e  $F_3/F_1$ , nas quais  $F_2$  é a força indicada na figura (II) e  $F_3$  é indicada na figura (III). Para que o bloco B nessas figuras tenha velocidade constante.



#### Comentários:

Na situação (I) não há atrito entre A e B, uma vez que, se houvesse, a massa A seria acelerada em relação a B pela ação somente do atrito, o que é um absurdo, pela natureza da força de atrito.

Aplicando a Segunda Lei à massa B, temos:

$$F_1 - fat_{B,solo} = 0 \Rightarrow F_1 = 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g$$

Na situação (II) há atrito cinético entre A e B. Aplicando a Segunda Lei à massa B, temos:

$$F_2 - fat_{A,B} - fat_{B,solo} = 0$$

$$F_2 = \mu \cdot m \cdot g + 2 \cdot \mu \cdot m \cdot g = 3 \cdot \mu \cdot m \cdot g$$

Na situação (III) a polia garante que as velocidades de A e B serão as mesmas, assim B também se move a velocidade constante. Aplicando a Segunda Lei à massa A, temos:

$$T - fat_{A,B} = 0 \Rightarrow T = \mu \cdot m \cdot g$$

Aplicando a Segunda Lei à massa B, temos:

$$F_3 - fat_{A,B} - fat_{B,solo} - T = 0 \Rightarrow F_3 = 4 \cdot \mu \cdot m \cdot g$$

Logo, temos as relações;

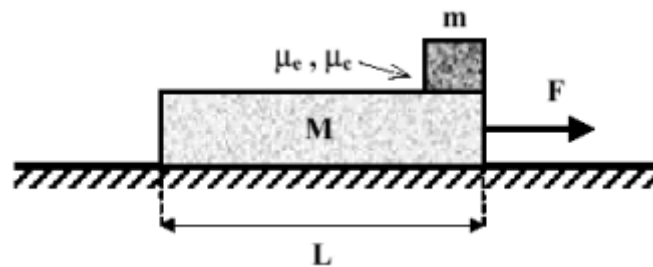
$$\frac{F_2}{F_1} = 1,5, \frac{F_3}{F_1} = 2$$

**Gabarito:**  $\frac{F_2}{F_1} = 1,5$  e  $\frac{F_3}{F_1} = 2$

### 42. (OBF 2001)



Na figura a seguir, um bloco de massa  $M$  e comprimento  $L$  encontra-se inicialmente em repouso sobre uma superfície horizontal sem atrito. Sobre tal bloco, é colocado um outro de massa  $m$ , cujo comprimento é muito menor que  $L$ , de modo que este possa ser considerado uma partícula material. Sabe-se que existe atrito entre os blocos, com coeficientes estático e cinético respectivamente denotados por  $\mu_e$  e  $\mu_c$ . Considere que sobre o bloco de massa  $M$  atua uma força constante e horizontal de módulo  $F$ . A força horizontal máxima que pode ser aplicada sobre o bloco de massa  $M$  de modo que os blocos não deslizem um sobre o outro é denotada por  $F_{m\acute{a}x}$ .



- Calcule o módulo da força máxima  $F_{m\acute{a}x}$  em função de  $\mu_e$ ,  $M$ ,  $m$  e  $g$ .
- Suponha que  $F > F_{m\acute{a}x}$ . Para tal situação, calcule o tempo que o bloco de massa  $m$  leva para perder contato com o bloco de massa  $M$ . Expresse o seu resultado em função de  $L$ ,  $M$ ,  $\mu_e$ ,  $\mu_c$ ,  $F$  e  $F_{m\acute{a}x}$ .

#### Comentários:

- Na situação onde não há deslizamento a aceleração dos blocos é a mesma. Aplicando a Segunda Lei ao sistema, temos:

$$F = (M + m) \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{M + m}$$

Aplicando a Segunda Lei ao bloco  $m$ , temos:

$$fat = m \cdot a = \frac{m \cdot F}{M + m} \leq fat_{max} = \mu_e \cdot m \cdot g$$

$$F \leq \mu_e \cdot g \cdot (m + M)$$

$$F_{max} = \mu_e \cdot g \cdot (m + M)$$

- Aplicando a Segunda Lei à massa  $m$ , temos:

$$fat_{cin} = m \cdot a_m \Rightarrow a_m = \mu_c \cdot g$$

Aplicando a Segunda Lei à massa  $M$ , temos:

$$F - fat_{cin} = M \cdot a_M \Rightarrow a_M = \frac{F - \mu_c \cdot m \cdot g}{M}$$

A aceleração de  $m$  no referencial de  $M$  é dada por:

$$a_{m/M} = a_m - a_M$$

$$a_{m/M} = \mu_c \cdot g - \frac{F - \mu_c \cdot m \cdot g}{M}$$

$$a_{m/M} = - \frac{F - \mu_c (M + m) \cdot g}{M}$$

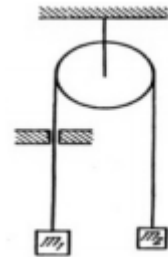
A quantidade em parênteses é o módulo, o sinal negativo apenas indica que essa aceleração é direcionada para a esquerda. Usando a equação horária de deslocamento para MRUV, obtemos:

$$L = \frac{\left[ \frac{F - \mu_c \cdot (M + m) \cdot g}{M} \right] \cdot t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot L \cdot M}{F - \left( \frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \cdot F_{max}}}$$

**Gabarito:** a)  $F_{max} = (m + M) \cdot \mu_e \cdot g$  b)  $t = \left( \frac{2LM}{F - \left( \frac{\mu_e}{\mu_c} \right) \cdot F_{max}} \right)^{\frac{1}{2}}$

**43.**

Uma corda, cujo peso é desprezado, foi colocada numa roldana de eixo fixo e passa através de um orifício. No movimento da corda o orifício atua com uma força de fricção constante  $F$ . Nos extremos da corda são colocados pesos, cujas massas são  $m_1$  e  $m_2$ . Determinar a aceleração dos pesos.



**Comentários:**

Considere a seguinte partição da corda em 3 segmentos. O segmento 3 está dentro do orifício e é ligado a  $m_1$  e  $m_2$  pelos segmentos 1 e 2, respectivamente. Aplicando a Segunda Lei ao segmento 3:

$$T_1 = T_2 + F \quad (m_3 = 0) \Rightarrow T_2 - T_1 = -F \quad (eq. 1)$$

Aplicando a Segunda Lei à massa 2, temos:

$$T_1 - m_2 \cdot g = m_2 \cdot a \quad (eq. 2)$$

Aplicando a Segunda lei à massa 1, temos:

$$m_1 \cdot g - T_1 = m_1 \cdot a \quad (eq. 3)$$

Somando (2) a (3), obtemos:

$$(m_1 - m_2) \cdot g + (T_2 - T_1) = (m_1 + m_2) \cdot a$$

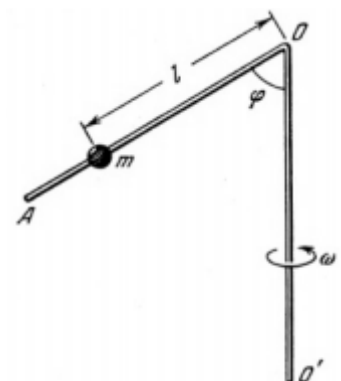
Substituindo (1) na equação acima, obtemos:

$$a = \frac{(m_1 - m_2) \cdot g - F}{m_1 + m_2}$$

**Gabarito:**  $a = \frac{(m_1 - m_2)g - F}{m_1 + m_2}$

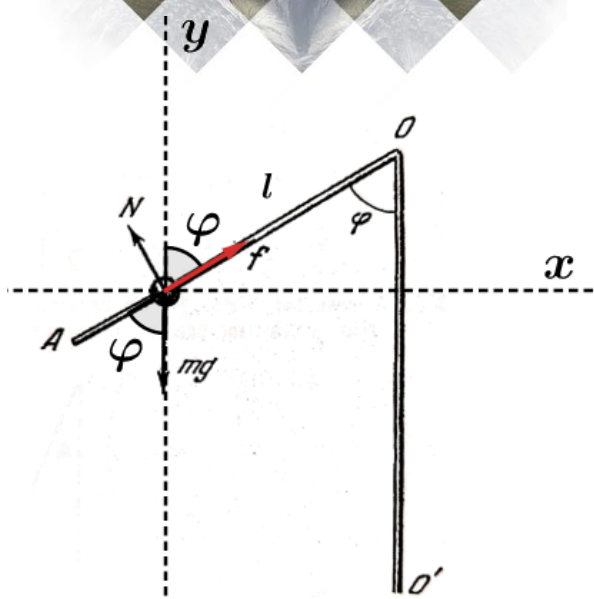
**44. (Saraeva)**

Uma barra de peso desprezível  $AOO'$ , dobrada como mostra a figura abaixo, gira com velocidade angular  $\omega$  relativamente ao eixo  $OO'$ . Na barra foi colocada uma conta de massa  $m$ . Determinar a que distância  $A$  do ponto  $O$ , a conta ficará em equilíbrio, se o coeficiente de atrito entre a conta e a barra é igual a  $k$ .



**Comentários:**

De acordo com o diagrama de forças, temos:



Decompondo das forças na direção  $y$ , temos:

$$\begin{aligned} f \cdot \cos \varphi + N \cdot \cos(90^\circ - \varphi) &= m \cdot g \\ f \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi &= m \cdot g \quad (\text{eq. 1}) \end{aligned}$$

Na direção  $x$ , temos:

$$\begin{aligned} f \cdot \sin \varphi - N \cdot \sin(90^\circ - \varphi) &= m \cdot \omega^2 \cdot r \\ f \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi &= m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \quad (\text{eq. 2}) \end{aligned}$$

Para determinar  $f$  basta fazer  $\cos \varphi \cdot (\text{eq. 1}) + \sin \varphi \cdot (\text{eq. 2})$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cos \varphi \cdot f \cdot \cos \varphi + N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ f \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi - N \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi &= m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi \end{cases} \\ \begin{cases} f \cdot \cos^2 \varphi + N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ f \cdot \sin^2 \varphi - N \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &= m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi \end{cases} \\ f \cdot \cos^2 \varphi + f \cdot \sin^2 \varphi &= m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi \\ f \cdot \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{=1} &= m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi \\ \boxed{f = m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi} \end{aligned}$$

Agora, fazendo  $\sin \varphi \cdot (\text{eq. 1}) - \cos \varphi \cdot (\text{eq. 2})$ , temos:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + N \cdot \sin \varphi \cdot \sin \varphi &= m \cdot g \cdot \sin \varphi \\ f \cdot \sin \varphi \cdot (-\cos \varphi) - N \cdot \cos \varphi \cdot (-\cos \varphi) &= m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot (-\cos \varphi) \end{cases} \\ \begin{cases} f \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + N \cdot \sin^2 \varphi &= m \cdot g \cdot \sin \varphi \\ f \cdot \sin \varphi \cdot (-\cos \varphi) + N \cdot \cos^2 \varphi &= -m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \end{cases} \\ N \cdot \underbrace{(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)}_{=1} &= m \cdot g \cdot \sin \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ \boxed{N = m \cdot g \cdot \sin \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \end{aligned}$$

Para o caso de equilíbrio, devemos ter que:

$$\begin{aligned} f &\leq k \cdot N \\ m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi &\leq k \cdot (m \cdot g \cdot \sin \varphi - m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi) \\ m \cdot g \cdot \cos \varphi + m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi &\leq k \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi - k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi \\ m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin^2 \varphi + k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot l \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi &\leq k \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi - m \cdot g \cdot \cos \varphi \\ l &\leq \frac{k \cdot m \cdot g \cdot \sin \varphi - m \cdot g \cdot \cos \varphi}{m \cdot \omega^2 \cdot \sin^2 \varphi + k \cdot m \cdot \omega^2 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi} \end{aligned}$$

$$l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \sin \varphi - \cos \varphi)}{\omega^2 \cdot \sin \varphi (\sin \varphi + k \cdot \cos \varphi)}$$

**Gabarito:**  $l \leq \frac{g \cdot (k \cdot \sin \varphi - \cos \varphi)}{\omega^2 \cdot \sin \varphi (\sin \varphi + k \cdot \cos \varphi)}$

## 7. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Encerramos aqui todo o conteúdo da dinâmica. Vamos começar a estudar outras frentes da física como eletricidade, termometria, óptica e ondas. Claro que ainda faltam assuntos da mecânica que serão retomados futuramente.

Tudo para você ter a melhor preparação, pensando na sua orientação pedagógica e aprendizado.

Os assuntos de dinâmica e de cinemática serão fundamentais na resolução de questões de outros assuntos da Física.

Faça todas as questões, quando possível, utilize e faça por mais de um método. Quando achar conveniente, faça questões no referencial inercial e não-inercial para treinar e se acostumar com os dois tipos.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



@proftoniburgatto

## 8. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
- [3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.
- [4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão

## 9. Versão de aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	22/06/2021