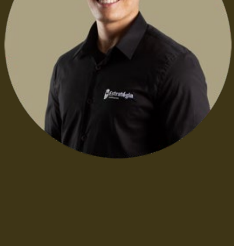
Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So



www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Na aula de hoje, estudaremos as funções exponencial e logarítmicas, assuntos muito cobrados nas provas militares. Tente fazer todos os exercícios dessa aula, pois é bem provável que você encontre uma dessas questões no seu concurso. Também aprenderemos a resolver equações funcionais e outras funções que podem ser cobradas na prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Função Exponencial

1.1. Potenciação e Radiciação

1.1.1. Definição

Para $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ vezes}$$

a^n representa o produto de n fatores iguais a a, onde n é o expoente e a é a base.

Para $n = 1$, temos a^1. Como não temos um produto de mais fatores, consideramos $a^1 = a$. Disso, podemos extrair a definição indutiva de potenciação:

$$a^{n+1} = a \cdot a^n$$

Como consequência da definição, temos:

1.1.2. Propriedades da Potenciação

P1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

P2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$

P3) $(ab)^m = a^m \cdot b^m$

P4) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}, b \neq 0$

P5) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

P6) $a > 1 \Rightarrow 1 < a < a^2 < \cdots < a^n, n \in \mathbb{N}$

P7) $0 < a < 1 \Rightarrow 1 > a > a^2 > \cdots > a^n, n \in \mathbb{N}$

A propriedade P1 nos diz que para multiplicação de potências de mesma base, conservamos a base e somamos os expoentes.

Um detalhe para essa propriedade é se $m = 0$ e $n \in \mathbb{N}^*$, usando a propriedade, obtemos:

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^0 = 1}$$

Portanto, devemos considerar que um número elevado a 0 resulta no número 1.

As propriedades vistas até aqui são válidas para um expoente n natural. Vamos ver o que acontece quando estendemos o conceito para expoentes reais.

Começando pelos expoentes inteiros:

Para $a \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ e $m = -n$, usando a propriedade P1, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{-n} \cdot a^n = a^{n-n} = a^0 = 1$$

$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Usando esse resultado, podemos provar que todas as propriedades válidas para os expoentes naturais também são válidas para os inteiros.

Agora, vejamos para expoentes racionais:

Aqui, surge o conceito de radiciação. Além da potenciação, temos a operação chamada de radiciação. O que muda entre elas é a sua forma de representação. Tipicamente, a definição de radiciação é dada por:

$$b = \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow b^n = a$$

Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*$.

b é a raiz n-ésima de a.

n é o índice da radiciação.

a é o radicando.

$\sqrt{}$ é o radical.

Vejamos as propriedades para radiciação:

1.1.3. Propriedades da Radiciação

R1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

R2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$

R3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)$

R4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

R5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$

Essas propriedades decorrem daquelas válidas para a potenciação.

Voltando ao conceito de potenciação de expoentes racionais, temos que se $n = \frac{p}{q}$, tal que $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}^*, n \in \mathbb{Q}$, temos:

$$a^n = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$$

Para expoentes racionais juntamos os conceitos de potenciação e radiciação.

Usando a definição:

Sendo $a \in \mathbb{R}, n = \frac{p}{q}, m = \frac{r}{s}, q, s \in \mathbb{N}^*$, temos:

$$a^m \cdot a^n = a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[s]{a^r} \cdot \sqrt[q]{a^p}$$

Aqui, devemos igualar os índices para conseguir juntar os números em um mesmo radical. Para isso, basta fazer:

$$a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{qr}{qs}}$$
$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{ps}{qs}}$$

Desse modo:

$$a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{qr}{qs}} \cdot a^{\frac{ps}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{qr}} \cdot \sqrt[qs]{a^{ps}} = \sqrt[qs]{a^{qr} \cdot a^{ps}} = \sqrt[qs]{a^{qr+ps}} = a^{\frac{qr+ps}{qs}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{p}{q}}$$

$$\Rightarrow a^{\frac{r}{s}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{r}{s}+\frac{p}{q}}$$

Usando esse resultado podemos provar todas as propriedades da potenciação.

Portanto, as propriedades são válidas para expoentes racionais.

Não veremos o estudo dos expoentes irracionais, pois isso foge ao escopo do curso. Mas saiba que todas aquelas propriedades podem ser usadas para expoentes reais.

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}}$$

Como eliminamos o radical do denominador do número acima?

Lembra da fatoração $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$? Vamos usá-la.

Para remover o radical, devemos multiplicar o numerador e denominador por $a - \sqrt{b}$. Com isso, obtemos:

$$\frac{1}{a+\sqrt{b}} \cdot \frac{a-\sqrt{b}}{a-\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$$

Esse processo chama-se **racionalização**.

Vamos ver 2 teoremas que nos ajudarão a resolver as questões da prova:

1.1.4. Teorema 1

Para $n \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{a > 1 \text{ e } a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0}$$

1.1.5. Teorema 2

Para $a, x, y \in \mathbb{R}$ e $a > 1$, temos:

$$\boxed{a^x > a^y \Leftrightarrow x > y}$$

1.1.6. Teorema 3

Para $n \in \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{0 < a < 1 \text{ e } a^n > 1 \Leftrightarrow n < 0}$$

1.1.7. Teorema 4

Para $a, x, y \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{0 < a < 1}$, temos:

$$\boxed{a^x > a^y \Leftrightarrow x < y}$$

1.2. Equações Exponenciais

Aprendemos as operações básicas de potenciação e radiciação. Agora, somos capazes de resolver equações exponenciais.

Vamos ver algumas equações e aprender a resolvê-las:

1) $\mathbf{2^x = 1024}$

Como encontramos o valor de x que satisfaz a equação acima?

A técnica, nesse caso, é escrever os números de modo a obter uma base em comum. Vamos fatorar o número 1024:

$$1024 = 2^{10}$$

Assim, fazendo a substituição, obtemos:

$$2^x = 2^{10}$$

Sabendo que a função 2^x é injetora, para a igualdade ser verdadeira devemos ter:

$$x = 10$$

2) $\mathbf{9^x + 3^{x+1} = 4}$

Para essa equação, devemos ver que $9^x = (3^2)^x = (3^x)^2$ e $3^{x+1} = 3^x \cdot 3$

Assim, fazendo as substituições na equação, temos:

$$(3^x)^2 + 3 \cdot 3^x = 4$$

Vamos chamar $y = 3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$:

$$y^2 + 3y = 4$$
$$y^2 + 3y - 4 = 0$$
$$(y+4)(y-1) = 0$$

Com isso, vemos que $y = -4$ u $y = 1$ são soluções da equação acima. Vamos encontrar x para cada uma delas:

Para $y = -4$:

$$3^x = -4$$

Sabemos que $3^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Então, $\nexists x$ que satisfaz a equação.

Para $y = 1$:

$$3^x = 1$$
$$\Rightarrow x = 0$$

Portanto, a equação possui apenas uma solução:

$$S = \{0\}$$

3) $\mathbf{4^x + 6^x = 2 \cdot 9^x}$

Vamos reescrever a equação:

$$(2^2)^x + (2 \cdot 3)^x = 2 \cdot (3^2)^x$$
$$(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x = 2 \cdot (3^x)^2$$

O bizu aqui é dividir a equação por $(2^x)^2$ (poderia ser também $(3^x)^2$), já que esse número é diferente de zero para todo x real:

$$\frac{(2^x)^2 + 2^x \cdot 3^x}{(2^x)^2} = 2 \cdot \frac{(3^x)^2}{(2^x)^2}$$
$$1 + \frac{3^x}{2^x} = 2 \cdot \left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2$$

$$1+\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$

Agora, chamamos $y=\left(\frac{3}{2}\right)^{x}$:

$$1+y=2y^2$$
$$2y^2-y-1=0$$

Encontrando a solução:

$$y=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{1\pm 3}{4}=1\ ou-\frac{1}{2}$$

Para encontrar a solução em x, basta testar os valores de y:

Para $y=1$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=1$$
$$\Rightarrow x=0$$

Para $y=-\frac{1}{2}$:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{x}=-\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow \nexists x\in\mathbb{R}\text{ que satisfaz a igualdade}$$
$$\therefore S=\{0\}$$

4) $\boldsymbol{3^{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}}$

Nessa equação, perceba os fatores $x+\frac{1}{x}$. Se elevarmos esse número ao quadrado, obtemos:

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2$$

Temos que fazer surgir o fator 2 no expoente do número à esquerda. Vamos multiplicar a equação por 3^2:

$$3^{x^2+\frac{1}{x^2}}\cdot 3^2=\frac{81}{3^{x+\frac{1}{x}}}\cdot 3^2$$
$$3^{x^2+\frac{1}{x^2}+2}=\frac{729}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$
$$3^{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{729}{3^{x+\frac{1}{x}}}$$

Substituindo $y=x+\frac{1}{x}$ na equação:

$$3^{y^2}=\frac{729}{3^y}$$
$$3^{y^2}\cdot 3^y=729$$
$$3^{y^2+y}=3^6$$

Dividindo por 3^6:

$$\frac{3^{y^2+y}}{3^6}=1$$
$$3^{y^2+y-6}=3^0$$

As potências possuem a mesma base. Desse modo, podemos igualar os expoentes:

$$y^2+y-6=0$$
$$(y+3)(y-2)=0$$
$$\Rightarrow y=-3\ ou\ y=2$$

Testando os valores:

Para $y = -3$:

$$x + \frac{1}{x} = -3$$
$$x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-4}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Para $y = 2$:

$$x + \frac{1}{x} = 2$$
$$x^2 - 2x + 1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow x = 1$$

Portanto, a equação possui 3 soluções distintas:

$$S = \left\{1, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}$$

1.3. Inequações Exponenciais

Vamos aprender a resolver inequações exponenciais. O método de resolução deve seguir a seguinte ideia:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{x, y \in \mathbb{R}} \\ \boldsymbol{Se\ a > 1\ e\ a^x > a^y \Rightarrow x > y} \\ \boldsymbol{Se\ 0 < a < 1\ e\ a^x > a^y \Rightarrow x < y} \end{array}}$$

1) $2^x - 1 > 2^{1-x}$

Inicialmente, devemos organizar os números da inequação:

$$2^x - 1 > \frac{2}{2^x}$$
$$2^x - 1 - \frac{2}{2^x} > 0$$
$$\frac{2^x \cdot 2^x - 2^x - 2}{2^x} > 0$$
$$\frac{(2^x)^2 - 2^x - 2}{2^x} > 0$$

O denominador da inequação acima é sempre maior que 0, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

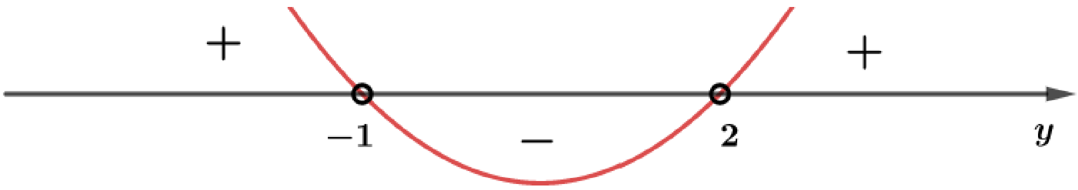
Então, devemos ter:

$$(2^x)^2 - 2^x - 2 > 0$$

Fazendo a substituição $2^x = y$, encontramos a seguinte inequação do segundo grau:

$$y^2 - y - 2 > 0$$
$$(y-2)(y+1) > 0$$

Analisando o sinal:



Assim, y deve pertencer ao intervalo:

$$y < -1\ ou\ y > 2$$

Agora, devemos retornar à variável x:

$$2^x < -1 \; ou \; 2^x > 2$$

Sabemos que $2^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, então, a única solução é $2^x > 2$:

$$2^x > 2 \Rightarrow 2^x > 2^1$$

Como as bases da inequação acima são iguais e maiores do que 1, podemos comparar usar a mesma desigualdade e escrever:

$$x > 1$$

Portanto, a solução da inequação é:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | x > 1\}$$

1.4. Funções Exponenciais

1.4.1. Definição

A função exponencial é dada por:

$$\boxed{\begin{gathered} \boldsymbol{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ \boldsymbol{f(x) = a^x; a > 0 \; e \; a \neq 1} \end{gathered}}$$

Perceba que a condição da base da função é $a > 0$ e $a \neq 1$. Vamos ver a razão disso:

Suponha $a = -3$, então:

$$f(x) = (-3)^x$$

Se $x = 1/2$, temos:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = (-3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-3} \notin \mathbb{R}$$

O número resultante é irracional e não pertence ao conjunto dos reais!

Agora, suponha $a = 0$ ou $a = 1$, nesses casos, temos as funções constantes:

$$a = 0 \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$
$$a = 1 \Rightarrow f(x) = 1^x = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Temos dois casos diferentes de função exponencial, vamos estudar cada um deles.

1.4.2. Caso 1

O primeiro caso é para base $0 < a < 1$, vamos ver o que acontece com a forma da função:

$$f(x) = a^x$$

Verificando a monotonicidade da função:

$$\forall x_2, x_1 \in \mathbb{R}, \text{tal que } x_2 < x_1 \Rightarrow x_2 - x_1 < 0$$

Usando o Teorema 2, temos:

$$\boldsymbol{0 < a < 1 \; e \; a^n > 1 \Leftrightarrow n < 0}$$

Fazendo $n = x_2 - x_1$:

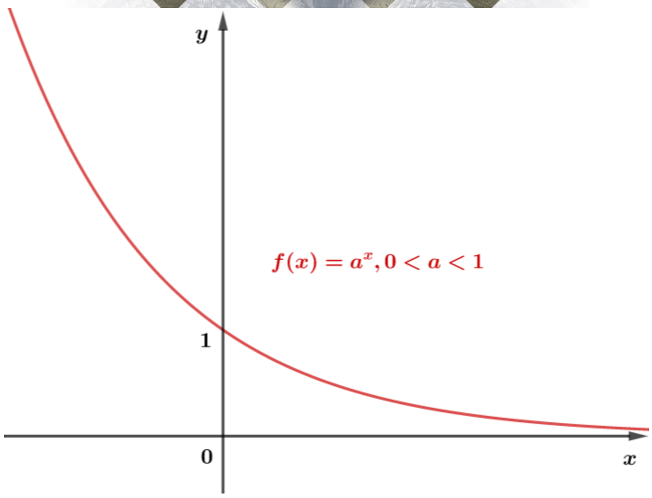
$$x_2 - x_1 < 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1$$
$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$$
$$\Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1}$$

Assim, encontramos a seguinte implicação:

$$x_2 < x_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

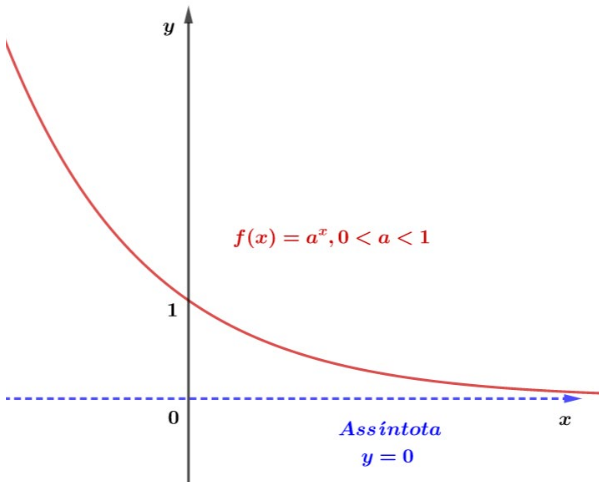
Portanto, a função é estritamente decrescente para $0 < a < 1$.

Nesse caso, o gráfico da função fica:



Note que $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. A função exponencial nunca se zera!

Chamamos de assíntota, a reta que limita o valor que a função admite. No exemplo acima, a assíntota é a reta $y = 0$ e coincide com o eixo x. Aumentando-se os valores de x, a função tende a se aproximar do valor 0!



1.4.3. Caso 2

O segundo caso é para $a > 1$. Vamos analisar a monotonicidade da função:

$\forall x_2, x_1 \in \mathbb{R}$, tal que $x_2 > x_1$, temos $x_2 - x_1 > 0$. Usando o Teorema 1:

$$\boxed{a > 1 \; e \; a^n > 1 \Leftrightarrow n > 0}$$

Fazendo $n = x_2 - x_1 > 0$, podemos escrever:

$$x_2 - x_1 > 0 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1$$

$$\frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1$$

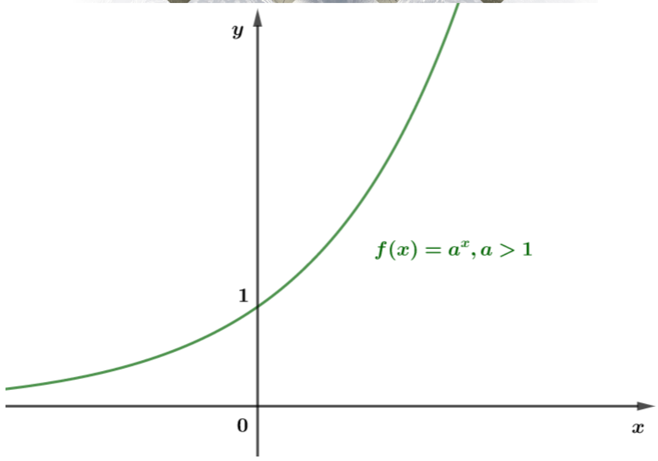
$$a^{x_2} > a^{x_1}$$

Desse modo, temos a seguinte implicação:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow a^{x_2} > a^{x_1} \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

A função é estritamente crescente para o caso $a > 1$.

Se gráfico é dado por:



Perceba que o gráfico dessa função tende a zero quando x tende a menos infinito.

A função exponencial $f(x) = a^x$ é injetora, pois para $a > 1$, a função é estritamente crescente e para $0 < a < 1$, a função é estritamente decrescente. Consequentemente, temos:

$$x_2 = x_1 \Rightarrow a^{x_2} = a^{x_1}$$

A imagem da função exponencial é o conjunto dos reais positivos:

$$Im(f) = \mathbb{R}_+^*$$

Portanto, se o contra-domínio da função f for $\mathbb{R}_+^*$, ela é sobrejetora. Logo, é bijetora.

2. Função Logarítmica

2.1. Definição

Iniciaremos o estudo das funções logarítmicas. Esse tema é muito explorado nas provas militares, então, preste bastante atenção!

Preliminarmente, vamos ver como se deu sua criação.

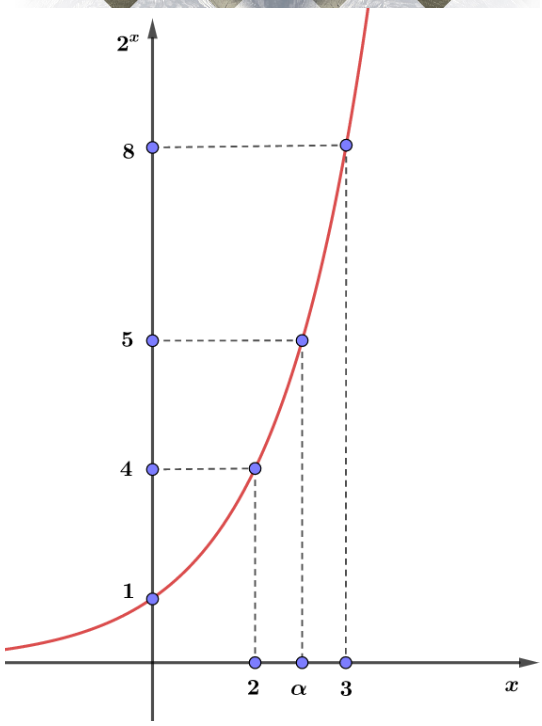
Aprendemos no capítulo anterior, como resolver equações funcionais de bases iguais, por exemplo:

$$3^x = 9$$
$$3^x = 3^2$$
$$\Rightarrow x = 2$$

Mas o que aconteceria se as bases fossem diferentes? Como no exemplo abaixo:

$$2^x = 5$$

Vimos que a função exponencial é contínua e injetora, então, podemos esboçar o gráfico da função e verificar qual intervalo que x pertence:



Se $x = \alpha$, vemos que $2 < \alpha < 3$. Podemos representar o valor de α usando a definição de logaritmo:

$$2^\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = \log_2 5$$

Dizemos que α é o expoente que na base 2 resulta em 5. Perceba que a função logarítmica é a função inversa da função exponencial!

Vejamos sua definição formal:

Para $a, b, x \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$ e $b \neq 1$, temos:

$$\boxed{\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a}$$

$\log_b a$ lê-se: logaritmo de a na base b.

a é o logaritmando ou antilogaritmo.

b é a base do logaritmo.

x é o logaritmo.

Exemplos:

1) $\log_2 16 = 4$, pois $2^4 = 16$

2) $\log_5 125 = 3$, pois $5^3 = 125$

3) $\log_7 49 = 2$, pois $7^2 = 49$

Decorre da definição as seguintes propriedades:

I) $\log_b 1 = 0$

Sabemos que qualquer base elevada a 0 resulta em 1. Logo, o logaritmo de 1 em qualquer base é 0.

II) $\log_b b = 1$

III) $b^{\log_b a} = a$

Sabemos que:

$$a = b^c \Leftrightarrow c = \log_b a$$

Basta substituir $c = \log_b a$ em $a = b^c$:

$$a = b^{\log_b a}$$

IV) $\log_b a = \log_b c \Leftrightarrow a = c$

Vamos demonstrar essa propriedade:

$$\log_b a = \log_b c$$

Usando a definição de logaritmo, temos:

$$a = b^{\log_b c}$$

Usando a propriedade III:

$$\Rightarrow a = c$$

Portanto, a função logarítmica é injetora.

Além dessas propriedades, temos alguns casos específicos de logaritmos:

$\boldsymbol{a)\ colog_a b = -\log_a b\ \ ou\ colog_a b = \log_a \left(\frac{1}{b}\right)}$

Definição de cologaritmo.

$\boldsymbol{b)\ \ln b = \log_e b}$

Essa é a definição de logaritmo natural de um número $b > 0$. Ele é o logaritmo de b na base e.
e é um número e é chamado de número de Euler devido ao matemático Leonhard Euler.
O seu valor aproximado é $e \cong 2{,}71$.

$\boldsymbol{c)\ \log b = \log_{10} b}$

Quando não dizemos qual base o logaritmo está escrito, subentende-se que a base é a decimal.

$\boldsymbol{d)\ antilog_a x = a^x}$

Definição de antilogaritmo, em símbolos, se $a, x \in \mathbb{R}$ e $a > 0$ e $a \neq 1$:

$$\log_a b = x \Leftrightarrow b = antilog_a x$$

2.2. Propriedades

Para $a, b, c > 0$ e $a \neq 1$, as seguintes propriedades são válidas:

$$\boldsymbol{P1)}\ log_a(bc) = log_a b + log_a c$$

$$\boldsymbol{P2)}\ \log_a\left(\frac{b}{c}\right) = log_a b - \log_a c$$

$$\boldsymbol{P3)}\ \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b\ ;\ \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\boldsymbol{P4)}\ \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\boldsymbol{P5)}\ \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\boldsymbol{P6)}\ \log_{a^\beta} b = \frac{1}{\beta}\log_a b\ ;\ \beta \in \mathbb{R}^*$$

$$\boldsymbol{P7)}\ a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

2.3. Funções Logarítmicas

2.3.1. Definição

Definimos a função logarítmica do seguinte modo:

$$\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{f}: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ \boldsymbol{f(x) = \log_a x} \end{array}}$$

A função logarítmica possui uma **condição de existência**:

$$x > 0$$

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$

Vamos ver alguns exemplos de funções logarítmicas:

1) $f(x) = \log x$
2) $g(x) = \ln x$
3) $h(x) = \log_{\frac{3}{2}} x$

2.3.2. Propriedades

P1) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ e $g: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = a^x$ e $g(x) = \log_a x$, para $a > 0$ e $a \neq 1$. Então, f e g são funções inversas.

P2) A função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é estritamente crescente para $a > 1$ e estritamente decrescente para $0 < a < 1$. Logo, ela é uma função injetora. Ela também é sobrejetora, já que o contradomínio dessa função é o conjunto dos reais. Portanto, ela é bijetora e por isso é inversível.

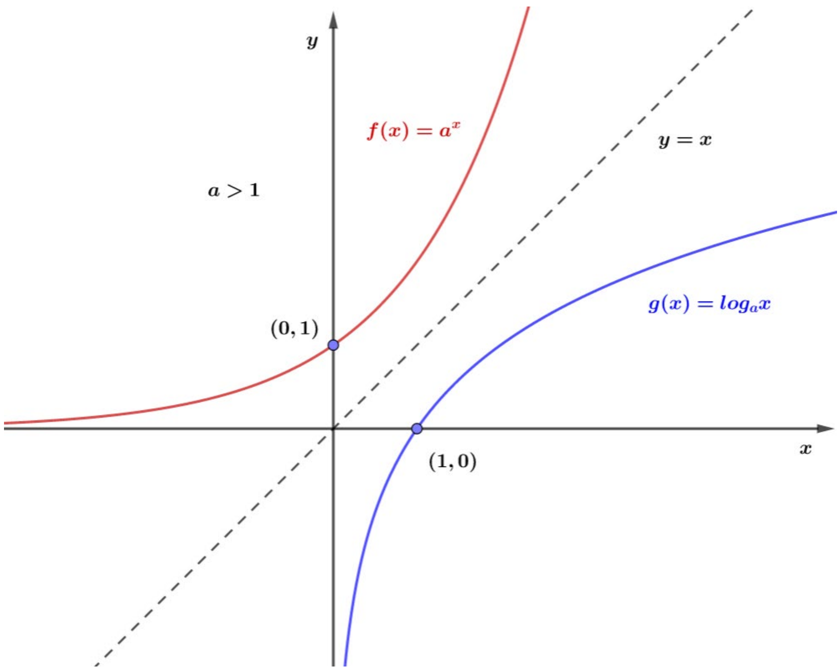
$$\boxed{f(x) = \log_a x \Rightarrow \begin{cases} \text{estritamente crescente} \Leftrightarrow a > 1 \\ \text{estritamente decrescente} \Leftrightarrow 0 < a < 1 \end{cases}}$$

2.3.3. Gráfico

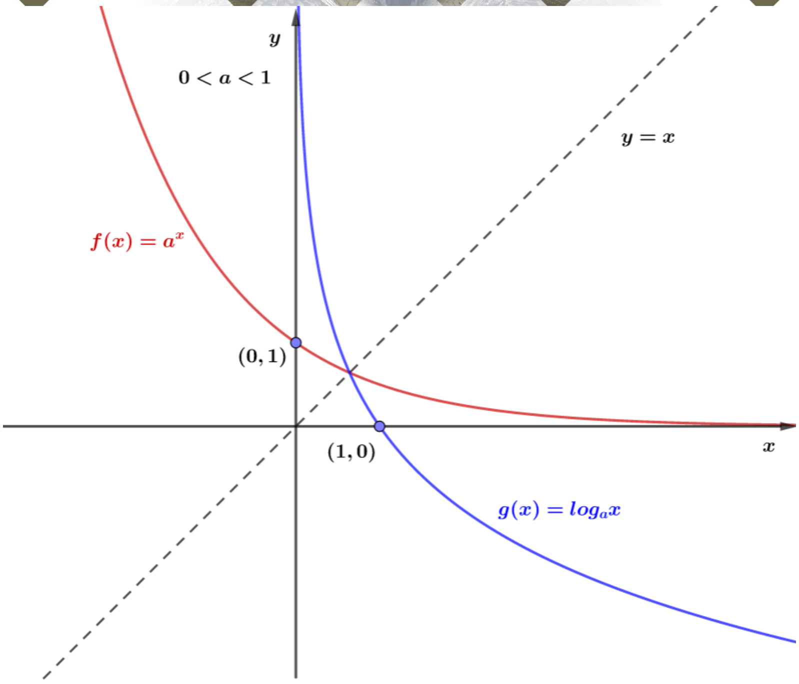
Vimos que a função exponencial é a inversa da função logarítmica. Pela definição de função inversa, essas funções são simétricas em relação à reta $y = x$. Também estudamos que a função logarítmica $f(x) = \log_a x$ é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

Vamos esboçar o gráfico para esses dois casos:

Para $a > 1$, temos:



Para $0 < a < 1$, temos:



Vamos aprender a esboçar o gráfico usando exemplos:
1) $f(x) = \log_2(2x + 8)$
Condição de existência:

$$2x + 8 > 0 \Rightarrow 2x > -8 \Rightarrow x > -4$$

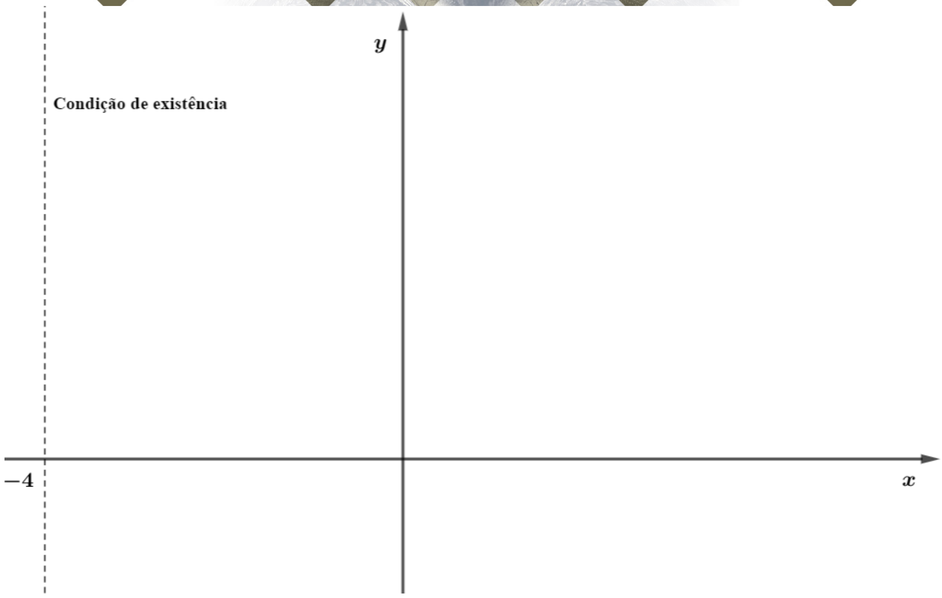
Raiz:

$$\log_2(2x + 8) = 0$$
$$2x + 8 = 2^0 = 1$$
$$x = -\frac{7}{2}$$

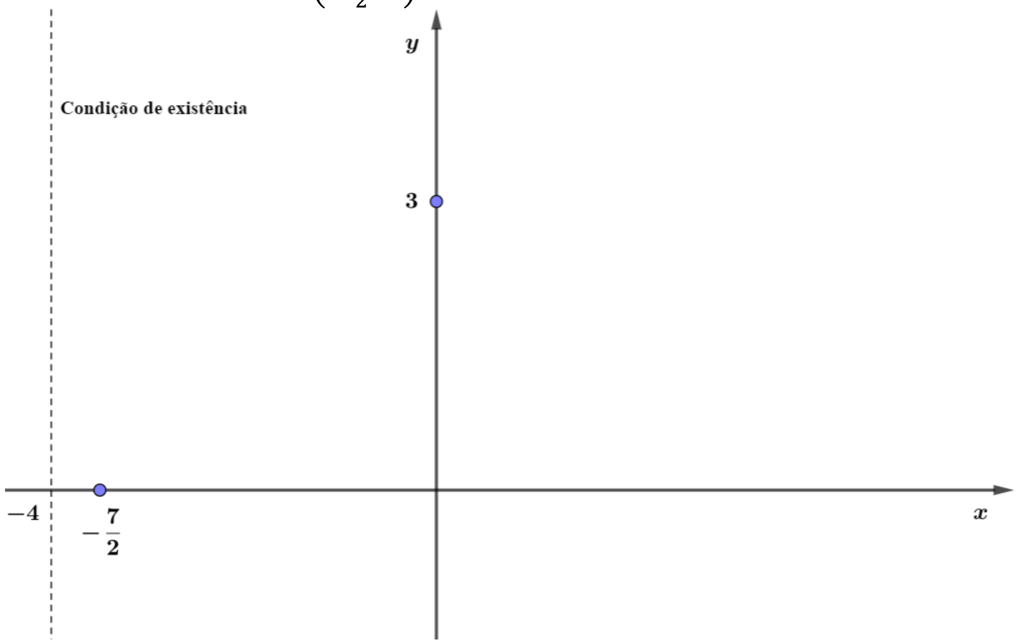
Para $x = 0$, temos: $f(0) = \log_2 8 = 3$.
Devemos verificar a monotonicidade da função:

$$x_2 > x_1$$
$$2x_2 > 2x_1$$
$$2x_2 + 8 > 2x_1 + 8$$
$$\log_2(2x_2 + 8) > \log_2(2x_1 + 8)$$
$$\Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

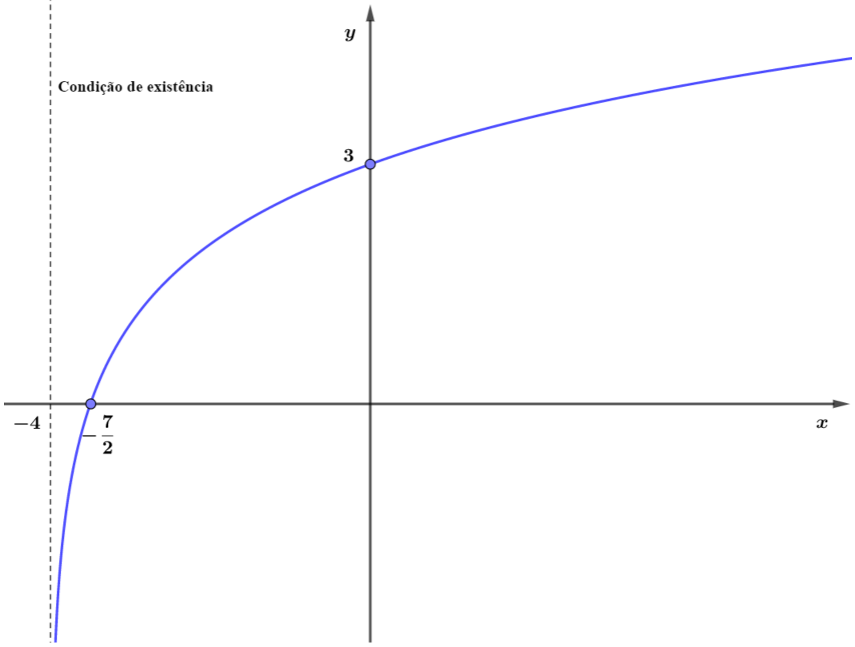
f é crescente.
Para esboçar o gráfico, devemos traçar a reta que limita os valores de x, a reta assíntota $x = -4$:



Depois, colocamos os pontos $\left(-\frac{7}{2}, 0\right)$ e $(0, 3)$:



Como a função é crescente, temos o seguinte esboço (lembrando que a função nunca encosta na assíntota!):



2.4. Equações Logarítmicas

Aprendemos a usar as propriedades logarítmicas e o que é uma função logarítmica, agora, podemos proceder à resolução de equações logarítmicas.

As equações logarítmicas podem ser divididas em 3 casos:

Caso 1) $\log_a f(x) = \log_a g(x)$

Para resolver esse tipo de equação, sempre devemos verificar as **condições de existência** do logaritmo. Desse modo, temos que:

$$a > 0 \text{ e } a \neq 1$$
$$f(x) > 0$$
$$g(x) > 0$$
$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$$

Veja o exemplo:

1) Resolva a equação:

$$\log_3(3x - 4) = \log_3(x + 1)$$

Verificando as condições de existência, temos:

$$3x - 4 > 0 \Rightarrow x > \frac{4}{3}$$
$$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$$

Fazendo a intersecção, obtemos $x > 4/3$.

Resolvendo a equação:

$$3x - 4 = x + 1$$
$$2x = 5$$
$$x = \frac{5}{2} > \frac{4}{3}$$

Como $x = 5/2 > 4/3$, temos que ela é solução da equação:

$$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$$

Caso 2) $\log_a f(x) = \beta, \beta \in \mathbb{R}$

Esse tipo de equação é resolvido fazendo:

$$f(x) = a^{\beta}$$

Para $a \neq 1$ e $a > 0$.

Não precisamos verificar as condições de existência do logaritmo, pois:

$$f(x) = a^{\beta} > 0, \forall \beta \in \mathbb{R}$$

Veja o exemplo:

2) Resolva a equação:

$$\log_4(5x+1) = 2$$

Vamos proceder usando a definição de logaritmo:

$$5x + 1 = 4^2 = 16$$
$$5x = 15$$
$$\Rightarrow x = 3$$

Caso 3) Incógnita auxiliar

Esse tipo de equação se resume a substituir uma incógnita por outra de modo a facilitar o entendimento da equação. Lembre-se de prestar atenção às condições de existência quando fizer essa substituição!

Vejamos um exemplo:

3) Resolva a equação:

$$(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x = 3$$

Condição de existência:

$$x > 0$$

Nesse caso, basta fazer $\log_3 x = y$:

$$y^2 - 2y = 3$$
$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

Essa é uma equação do segundo grau. Sabemos que suas raízes são dadas por:

$$y = 1 \pm \sqrt{4} = 1 \pm 2 = 3 \; ou - 1$$

Para $y = -1$, temos:

$$\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

Para $y = 3$, temos:

$$\log_3 x = 3 \Rightarrow x = 3^3 = 27$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{3}; \; 27\right\}$$

2.5. Inequações Logarítmicas

Para resolver inequações logarítmicas, devemos lembrar que a função logaritmo é crescente para base $a > 1$ e decrescente se $0 < a < 1$.

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{\log_a f(x) > \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \; se \; a > 1 \\ ou \\ 0 < f(x) < g(x) \; se \; 0 < a < 1 \end{cases}}$$

Vamos resolver algumas inequações:

1) Resolva a inequação:

$$\log_2(3x-6) > \log_2(x-1)$$

Antes de resolver uma inequação, sempre devemos verificar sua condição de existência:

$$3x - 6 > 0 \Rightarrow x > 2$$
$$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$$
$$\Rightarrow x > 2$$

Agora, podemos proceder à resolução:

Como a base é $2 > 1$, podemos escrever:

$$\log_2(3x-6) > \log_2(x-1) \Rightarrow 3x-6 > x-1$$
$$2x > 5$$
$$x > \frac{5}{2}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, temos:

$$x > \frac{5}{2}\ e\ x > 2 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$
$$\therefore S = \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

2.6. Logaritmos Decimais

Vamos estudar o sistema de logaritmos na base 10.

2.6.1. Característica e Mantissa

Qualquer número positivo pode ser comparado entre potências de base 10 de expoentes consecutivos.

Exemplo:

1) $0{,}012 \Rightarrow 10^{-2} < 0{,}012 < 10^{-1}$
2) $32 \Rightarrow 10^1 < 32 < 10^2$
3) $1252 \Rightarrow 10^3 < 1252 < 10^4$

Usando essa ideia, podemos escrever para $x \in \mathbb{R}_+$ e $c \in \mathbb{Z}$:

$$10^c < x < 10^{c+1}$$
$$\log 10^c < \log x < \log 10^{c+1}$$
$$c < \log x < c+1$$

Dessa desigualdade, temos:

$$\log x = c + m, 0 \leq m < 1$$

c é chamado de característica do logaritmo decimal x e m é chamado de mantissa do logaritmo decimal x.

Vamos aprender a calcular a característica e a mantissa.

Devemos dividir em dois casos:

Caso 1) $x > 1$

x é um número com n algarismo na parte inteira. Então:

$$c = n - 1$$

Caso 2) $0 < x < 1$

x é um número com n algarismo zero antes do primeiro algarismo significativo.

$$c = -n$$

Exemplos:

1) $124{,}3$

$$n = 3 \Rightarrow c = 2$$

2) $0{,}015$

$$n = 2 \Rightarrow c = -2$$

A mantissa é obtida através das tabelas de logaritmos. Ela, geralmente, é um número irracional e por esse motivo as tabelas fornecem valores aproximados dos logaritmos dos números inteiros.

2.6.2. Teorema da Mantissa

Os logaritmos decimais x e $x \cdot 10^p$ para $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $p \in \mathbb{Z}$, possuem a mesma mantissa.

3. Função Piso e Função Teto

Vamos estudar rapidamente duas funções que podem ser cobradas na prova, as funções piso e as funções teto.

3.1. Definição

A função piso é denotada por $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Ele representa o maior inteiro que é menor ou igual a x. Na prática, o que fazemos é um "arredondamento para baixo", de modo a obter um número inteiro que satisfaz os requisitos.

Ao contrário da função piso, temos a função teto, denotada por $g(x) = \lceil x \rceil$. Ele representa o menor inteiro que é maior ou igual a x. Nesse caso, fazemos o "arredondamento para cima" e pegamos o menor valor inteiro que satisfaz os requisitos da função. Vamos ver a definição formal de cada um deles:

$$\boldsymbol{f(x) = \lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} | m \leq x\}}$$
$$\boldsymbol{g(x) = \lceil x \rceil = \min\{n \in \mathbb{Z} | n \geq x\}}$$

É possível representar a parte fracionária de x, usando a seguinte função:

$$\boldsymbol{h(x) = \{x\} = x - \lfloor x \rfloor}$$

$\{x\}$ representa a parte fracionária do número real x.

Exemplos:

1) $\lfloor 1{,}5 \rfloor = 1$
2) $\lceil \sqrt{3} \rceil = 2$
3) $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$
4) $\{3{,}14159\} = 3{,}14159 - \lfloor 3{,}14159 \rfloor = 3{,}14159 - 3 = 0{,}14159$

3.1.1. Propriedades

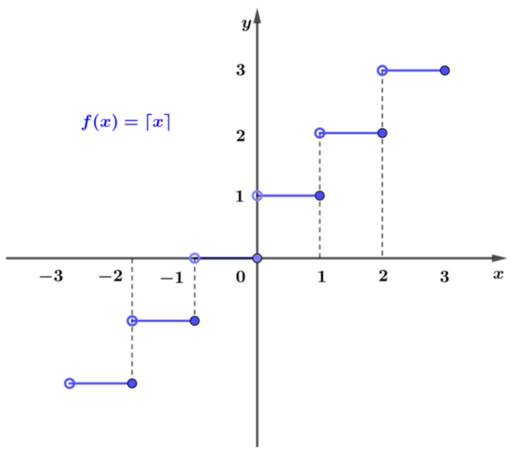
P1) $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$

P2) $x \leq \lceil x \rceil < x + 1$

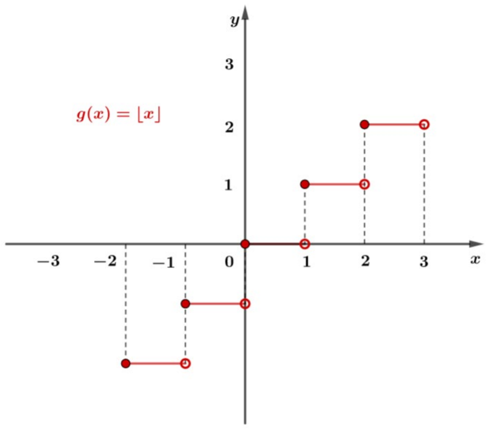
3.2. Gráfico

Vamos esboçar o gráfico das funções piso, teto e a fracionária.

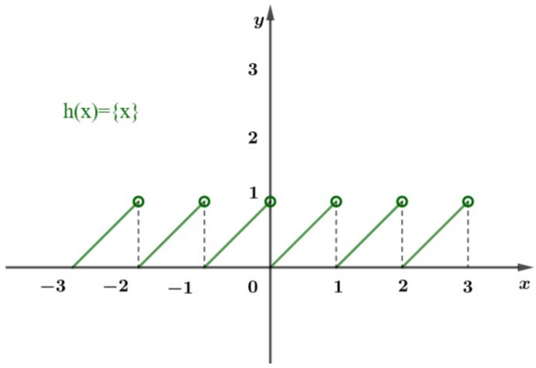
Para $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $f(x) = \lfloor x \rfloor$, temos:



Para $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tal que $g(x) = \lceil x \rceil$, temos:



Para $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = \{x\}$, temos:



1. Resolva as seguintes equações:

a) $\lceil x \rceil^2 - 2\lceil x \rceil - 3 = 0$

b) $\{x\} + 2\lfloor x \rfloor = 1$, para $x \in]3, 4[$

Resolução:

a) $\lceil x \rceil^2 - 2\lceil x \rceil - 3 = 0$

Vamos fazer a substituição $y = \lceil x \rceil$. Desse modo:

$$y^2 - 2y - 3 = 0$$

$$(y - 3)(y + 1) = 0$$

Assim, encontramos as raízes:

$$y_1 = -1 \; ou \; y_2 = 3$$

Retornando à variável x:

$$\lceil x \rceil = -1 \Rightarrow -2 < x \leq -1$$

$$\lceil x \rceil = 3 \Rightarrow 2 < x \leq 3$$

A solução é dada por:

$$S =]-2,-1] \cup]2,3]$$

b) $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$, para $x \in]3,4[$

Vamos escrever $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$:

$$x - \lfloor x \rfloor + \frac{1}{x} - \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

Como $x \in]3,4[$, temos $\lfloor x \rfloor = 3$.

Para $1/x$:

$$3 < x < 4$$
$$\frac{1}{4} < \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$$

Então:

$$\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 0$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$x - 3 + \frac{1}{x} - 0 = 1$$
$$x + \frac{1}{x} - 4 = 0$$
$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$x = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Assim, a solução é dada por:

$$S = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$$

Gabarito: a) $S =]-2,-1] \cup]2,3]$ b) $S = \left\{2 \pm \sqrt{3}\right\}$

4. Equações Funcionais

Equações funcionais são equações cujas incógnitas são funções, vamos estudar as principais e aprender a resolver algumas. As outras podem ser resolvidas usando a mesma ideia.

4.1. Equações Funcionais Básicas

4.1.1. Equações funcionais de Cauchy

$$I)\ f(x+y) = f(x) + f(x)$$
$$II)\ f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$$
$$III)\ f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$$
$$IV)\ f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$$

4.1.2. Equação funcional de Jensen

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

4.1.3. Equação funcional de D`Alambert

$$f(x+y) + f(x-y) = 2 \cdot f(x) \cdot f(y)$$

4.1.4. Equações funcionais trigonométricas

$$I)\ g(x+y) = f(x)\cdot g(y) + f(y)\cdot g(x)$$
$$II)\ g(x\cdot y) = f(x)\cdot g(y) - f(y)\cdot g(x)$$
$$III)\ f(x+y) = f(x)\cdot f(y) - g(x)\cdot g(y)$$
$$IV)\ f(x-y) = f(x)\cdot f(y) + g(x)\cdot g(y)$$

4.2. Como resolver uma equação funcional

1) Vamos resolver a primeira equação funcional de Cauchy:

$$\boldsymbol{f(x+y) = f(x) + f(y)}$$

Para resolver esse tipo de problema, devemos usar o bom senso e ver quais informações conseguimos extrair dessa equação.

Vamos verificar, inicialmente, o valor de $x = y = 0$:

$$f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$$
$$\Rightarrow f(0) = 0$$

Agora, podemos proceder verificando sua paridade, fazendo $x \in \mathbb{R}$ e $y = -x$:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x)$$
$$f(0) = f(x) + f(-x)$$
$$f(0) = 0 \Rightarrow -f(x) = f(-x)$$

Dessa forma, podemos afirmar que a paridade da função é ímpar.

E o que acontece se fizermos $y = x, 2x, 3x, 4x, \ldots$?

$$f(x+x) = f(x) + f(x)$$
$$f(2x) = 2f(x)$$
$$f(x+2x) = f(x) + f(2x)$$
$$f(3x) = 3f(x)$$
$$f(x+3x) = f(x) + f(3x)$$
$$f(4x) = 4f(x)$$
$$\vdots$$

Podemos deduzir que $f(kx) = kf(x)$. Vamos provar por PIF:

Para $k = 1$, temos $f(x) = f(x)$.

Para $k \in \mathbb{N}$, devemos provar que $f(kx) = kf(x) \Rightarrow f\big((k+1)x\big) = (k+1)f(x)$:

Usando a equação funcional e fazendo $y = kx$, temos:

$$f(x+kx) = f(x) + f(kx)$$
$$f\big((k+1)x\big) = f(x) + kf(x)$$
$$\Rightarrow f\big((k+1)x\big) = (k+1)f(x)$$

Concluímos que a função também possui a forma $f(kx) = kf(x)$.

Podemos também usar a indução vulgar e provar que $f(-kx) = -kf(x)$.

Se $f(-kx) = -kf(x)$, temos:

$$f(-x-kx) = f(-x) + f(-kx)$$

Como f é ímpar temos $f(-x) = -f(x)$:

$$f(-(k+1)x) = -f(x) - kf(x)$$
$$\Rightarrow f(-(k+1)x) = -(k+1)f(x)$$

Com isso, provamos que $f(kx) = kf(x), k \in \mathbb{Z}\ e\ x \in \mathbb{R}$.

E se fizermos $x = 1$?

$$f(k\cdot 1) = kf(1)$$
$$f(k) = kf(1)$$

Perceba que $f(1)$ pode ser escrito como uma constante, vamos defini-la como a constante c:

$$\Rightarrow f(k) = k\cdot c, k \in \mathbb{Z}$$

Se tomarmos $k = x \in \mathbb{Z}$ e substituir na equação acima, temos:

$$f(x) = cx, x \in \mathbb{Z}$$

Vamos verificar se x pode ser racional, fazendo $x = p/q$, com $p \in \mathbb{Z}$ e $q \in \mathbb{Z}^*$:

$$x = \frac{p}{q} \Rightarrow q \cdot x = p \cdot 1$$
$$f(q \cdot x) = f(p \cdot 1)$$
$$qf(x) = pf(1)$$
$$f(x) = \frac{p}{q} f(1)$$
$$\Rightarrow f(x) = xf(1)$$

Portanto, $f(x) = cx, x \in \mathbb{Q}$ e $f(1) = c$.

Usando o Teorema de Dedekind, podemos provar que $f(x) = cx, x \in \mathbb{R}$. Não veremos essa demonstração nesta aula, pois ela foge ao escopo do curso.

$$\Rightarrow f(x) = cx, x \in \mathbb{R}$$

2) Vamos aprender a resolver a equação funcional de Jensen:

$$\boldsymbol{f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}}$$

Inicialmente, vamos verificar o que ocorre quando $x \in \mathbb{R}$ e $y = 0$:

$$f\left(\frac{x+0}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+f(0)}{2}$$

Assim, vamos fazer $f(0) = b$ e substituir na equação:

$$\Rightarrow f\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{f(x)+b}{2}$$

Usando essa equação, podemos escrever:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x+y)+b}{2}$$

Mas a equação funcional também pode ser:

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Então, temos a igualdade:

$$\frac{f(x+y)+b}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$
$$f(x+y) + b = f(x) + f(y)$$

Olha o bizu! Vamos subtrair $-2b$ nos dois lados da equação:

$$f(x+y) + b - 2b = f(x) + f(y) - 2b$$
$$f(x+y) - b = [f(x) - b] + [f(y) - b]$$

Tomando $g(x) = f(x) - b$ e substituindo, temos:

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

A equação acima é a primeira equação de Cauchy, então, podemos escrever:

$$g(x) = cx, x \in \mathbb{R}$$

Retornando à função f:

$$g(x) = f(x) - b$$
$$cx = f(x) - b$$
$$\Rightarrow f(x) = cx + b, x \in \mathbb{R}$$

Portanto, a função que satisfaz a equação funcional de Jensen é a função linear acima.

5. Questões de Provas Anteriores

Questões ITA

2. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

3. (ITA/2019)

Sabendo que x pertence ao intervalo fechado $[1, 64]$, determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$$

4. (ITA/2018)

Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

5. (ITA/2018)

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial:

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$$

6. (ITA/2017)

Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|$$

7. (ITA/2017)

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c} \left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a} \left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

8. (ITA/2017)

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

9. (ITA/2016)

Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285

b) 286

c) 287

d) 288

e) 289

10. (ITA/2016)

Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

11. (ITA/2016)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

12. (ITA/2016)

Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

13. (ITA/2015)

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

14. (ITA/2014)

Determine as soluções reais da equação em x:

$$(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - \frac{3\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$$

15. (ITA/2014)

A soma

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$$

É igual a

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{17}{18}$

e) 1

16. (ITA/2013)

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{x^2+ax+b}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right)$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta gof que

a) $gof(1) = \ln 3$.

b) $\nexists gof(0)$.

c) gof nunca se anula.

d) gof está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

e) gof admite dois zeros reais distintos.

17. (ITA/2013)

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \text{ e } \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

Um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) 2

e) $3\sqrt{2}$

18. (ITA/2011)

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$$

19. (ITA/2008)

Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é

a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$

b) $\{0, 1, \log_5(2+\sqrt{5})\}$

c) $\left\{0, \left(\frac{1}{2}\right)\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5 \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $\{0, \log_5(2+\sqrt{5}), \log_5(2+\sqrt{3}), \log_5(2-\sqrt{3})\}$

e) A única solução é $x = 0$

20. (ITA/2007)

Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente $\frac{e^x-2\sqrt{5}}{4-e^y\sqrt{5}}$ são todos racionais. A soma $x+y$ é igual a

a) 0

b) 1

c) $2\log_5 3$

d) $\log_5 2$

e) $3\log_e 2$

21. (ITA/2007)

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base n são números primos satisfazendo

$$\log_n(xy) = 49$$

$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

Então, $\log_n(xyz)$ é igual a

a) 52

b) 61

c) 67

d) 80

e) 97

22. (ITA/2005)

Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$$

Onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2\ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

a) 0

b) -1

c) 1

d) $\ln 2$

e) 2

23. (ITA/2004)

Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$$

24. (ITA/2004)

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

c) $]0, 2[$

d) $]-\infty, 0[$

e) $]2, +\infty[$

25. (ITA/2003)

Mostre que toda função $f: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

26. (ITA/2003)

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x+y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III. f é par

É (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) todas.

e) nenhuma.

Questões IME

27. (IME/2020)

Sabe-se que $S = x + y + z$, onde y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

a) 84

b) 168

c) 234

d) 512

e) 600

28. (IME/2020)

Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O $log(A)$ possui a mesma mantissa, M, do $log(B)$ e C é a característica do $log(A)$. Sabe-se que $M = log(C)$ e que possui o maior valor possível. O valor da mantissa do $log(ABC)$ é:

a) M

b) $2M$

c) $3M$

d) $3M - 2$

e) $3M - 3$

29. (IME/2020)

Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ com as condições:

$$a_1 > 0$$

$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \text{ e}$$

$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de α deverá ser:

a) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$

b) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$

c) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2-b_1}}$

d) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1-b_2}}$

e) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 b_2}}$

30. (IME/2019)

Definimos a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \ \ n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \ \ n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f\big(f(2019)\big)$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

31. (IME/2018)

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

a) Os valores de a, b e c;

b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

32. (IME/2017)

Seja a equação $y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, y > 0$.

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) 2

e) 3

33. (IME/2017)

Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

34. (IME/2016/Modificada)

Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right), \log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem. Prove que $b + c < a$.

35. (IME/2016)

Quantos inteiros k satisfazem à desigualdade $2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$?

a) 10

b) 89

c) 90

d) 99

e) 100

36. (IME/2015)

Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

37. (IME/2015)

Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^\pi + \log_y x^e = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

O valor de $\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

a) 1

b) $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$

c) $\sqrt{\frac{a \cdot e}{b \cdot \pi}}$

d) $a - b$

e) $\frac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$

38. (IME/2014)

Sabe-se que $y \cdot z \cdot \sqrt{z \cdot \sqrt{x}} = x \cdot y^3 \cdot z^2 = \frac{x}{z \cdot \sqrt{y \cdot z}} = e$, em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor de $x + y + z$ é

a) $e^3 + e^2 + 1$

b) $e^2 + e^{-1} + e$

c) $e^3 + 1$

d) $e^3 + e^{-2} + e$

e) $e^3 + e^{-2} + e^{-1}$

39. (IME/2014)

Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y \end{cases}$$

40. (IME/2014)

Qual é o menor número?

a) $\pi \cdot 8!$

b) 9^9

c) $2^{2^{2^2}}$

d) 3^{3^3}

e) $2^{13} \cdot 5^3$

41. (IME/2013)

Considere a equação $\log_{3x} \frac{3}{x} + (\log_3 x)^2 = 1$. A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo

a) $[0, 5)$

b) $[5, 10)$

c) $[10, 15)$

d) $[15, 20)$

e) $[20, \infty)$

42. (IME/2012)

Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale:

a) $\frac{x+2y}{1-x}$

b) $\frac{x+y}{1-x}$

c) $\frac{2x+y}{1+x}$

d) $\frac{x+2y}{1+x}$

e) $\frac{3x+2y}{(1-x)}$

43. (IME/2010)

Seja $f(x) = |3 - \log(x)|, x \in \mathbb{R}$. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \leq \frac{9}{4}$$

Somente é possível se:

Obs.: log representa a função logarítmica na base 10.

a) $0 \leq x \leq 10^6$

b) $10^{-6} \leq x \leq 10^8$

c) $10^3 \leq x \leq 10^6$

d) $10^0 \leq x \leq 10^6$

e) $10^{-6} \leq x \leq 10^6$

6. Gabarito

Gabarito das Questões ITA

2. a
3. 81
4. e
5. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$
6. Esboço
7. c
8. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$
9. d

10. b
11. e
12. a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$ b) $S = \emptyset$ c) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2}\right\}$
13. d
14. $S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$
15. d
16. e
17. a
18. $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
19. e
20. e
21. a
22. b
23. $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$
24. c
25. Demonstração
26. a

Gabarito das Questões IME

27. a
28. d
29. c
30. $f\big(f(2019)\big) = 10$
31. a) $a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}, b = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2+1}, c = 3 \cdot 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ b) $r = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ e $q = \log_{\frac{3}{2}} 2$
32. a
33. $S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\} S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$
34. Demonstração
35. c
36. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}$
37. a
38. b
39. $x = y = 2$
40. c
41. c
42. a
43. d

7. Questões de Provas Anteriores Comentadas

Questões ITA Comentadas

2. (ITA/2020)

Sejam $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ números reais tais que $2^{x_1} = 4; 3^{x_2} = 5; 4^{x_3} = 6; 5^{x_4} = 7; 6^{x_5} = 8$ e $7^{x_6} = 9$. Então, o produto $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ é igual a

a) 6.

b) 8.

c) 10.

d) 12.

e) 14.

Comentários

Os números reais podem ser escritos como:

$$2^{x_1} = 4 \Rightarrow x_1 = \log_2 4$$
$$3^{x_2} = 5 \Rightarrow x_2 = \log_3 5$$
$$4^{x_3} = 6 \Rightarrow x_3 = \log_4 6$$
$$5^{x_4} = 7 \Rightarrow x_4 = \log_5 7$$
$$6^{x_5} = 8 \Rightarrow x_5 = \log_6 8$$
$$7^{x_6} = 9 \Rightarrow x_6 = \log_7 9$$

Assim, fazendo o produto entre eles, obtemos:

$$x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = \log_2 4 \cdot \log_3 5 \cdot \log_4 6 \cdot \log_5 7 \cdot \log_6 8 \cdot \log_7 9$$

Podemos usar a seguinte propriedade dos logaritmos para simplificar a expressão:

$$\log_b a \cdot \log_a c = \log_b c$$

Reorganizando os termos da expressão:

$$\log_2 4 \cdot \log_4 6 \cdot \log_3 5 \cdot \log_5 7 \cdot \log_7 9 \cdot \log_6 8 = \log_2 6 \cdot \log_6 8 \cdot \log_3 7 \cdot \log_7 9$$
$$= \log_2 8 \cdot \log_3 9 = \log_2 2^3 \cdot \log_3 3^2 = 3 \cdot 2 = 6$$
$$\therefore x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 6$$

Gabarito: “a”.

---

3. (ITA/2019)

Sabendo que x pertence ao intervalo fechado $[1, 64]$, determine o maior valor da função

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot \log_2\left(\frac{8}{x}\right)$$

Comentários

Para analisar os valores dessa função, devemos simplificá-lo.

Usando as propriedades do logaritmo, temos:

$$\log_2\left(\frac{8}{x}\right) = \log_2 8 - \log_2 x = \log_2 2^3 - \log_2 x = 3 - \log_2 x$$

Assim, encontramos:

$$f(x) = (\log_2 x)^4 + 12(\log_2 x)^2 \cdot (3 - \log_2 x)$$

Vamos fazer uma mudança de variável. Como $x \in [1, 64]$, fazendo $y = \log_2 x$, obtemos:

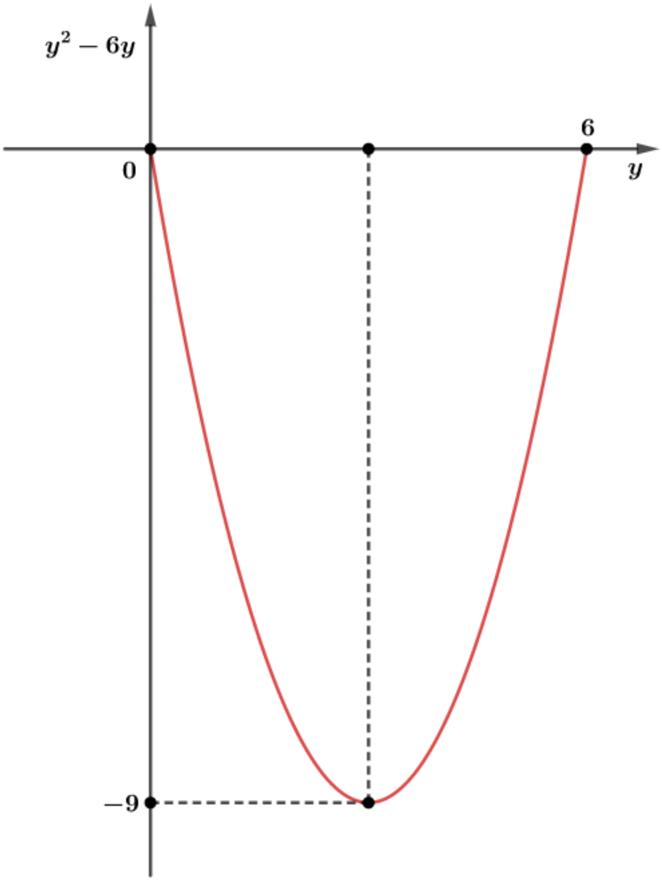
$$x = 2^y \Rightarrow 1 \leq 2^y \leq 64 \Rightarrow 2^0 \leq 2^y \leq 2^6$$

Sendo a função exponencial injetora e 2^y crescente, temos:

$$0 \leq y \leq 6 \Rightarrow y \in [0, 6]$$
$$f(y) = y^4 - 12y^3 + 36y^2$$
$$f(y) = y^2(y^2 - 12y + 36)$$
$$f(y) = y^2(y - 6)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{f(y) = (y^2 - 6y)^2}$$

A expressão $y^2 - 6y$ no plano cartesiano representa uma parábola com concavidade para cima. No intervalor $y \in [0, 6]$, essa expressão assume os valores $[-9{,}0]$ conforme a figura:



Desse modo, a imagem da função f é:

$$f(y) = (y^2 - 6y)^2 \xRightarrow{y \in [0,6]} \boxed{Im(f) \in [0, 81]}$$

Portanto, o maior valor da função é 81.

Gabarito: 81

4. (ITA/2018)

Se $\log_2 \pi = a$ e $\log_5 \pi = b$, então

a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 1$

c) $1 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{3}{2}$

d) $\frac{3}{2} < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq 2$

e) $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Comentários

Analisando as alternativas, temos que encontrar alguma relação para o número $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$. Usando os dados do enunciado, temos:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 \pi}$$
$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\log_5 \pi}$$
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$$

Vamos igualar a base dos logaritmos, fazendo:

$$\log_5 \pi = \frac{\log_2 \pi}{\log_2 5}$$

Substituindo na equação, encontramos:

$$\frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi} = \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\frac{\log_2 \pi}{\log_2 5}} = \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 \pi}$$

$$1 = \log_2 2 \Rightarrow \frac{1 + \log_2 5}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{\log_2 \pi} = \frac{\log_2 10}{\log_2 \pi} = \log_\pi 10$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_\pi 10$$

Devemos analisar quanto vale o número $\log_\pi 10$. Fazendo $x = \log_\pi 10$, temos:

$$\pi^x = 10$$

π vale aproximadamente 3,14. Podemos dizer que $\pi^2 < 10$, então x deve ser maior do que 2.

Com isso, encontramos:

$$2 < x$$
$$x = \log_\pi 10 = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
$$\Rightarrow 2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

Logo, o gabarito é a letra e.

Gabarito: “e”.

5. **(ITA/2018)**

Encontre o conjunto solução $S \subset \mathbb{R}$ da inequação exponencial:

$$3^{x-2} + \sum_{k=1}^{4} 3^{x+k} \leq \frac{1081}{18}$$

Comentários

Reescrevendo a inequação, temos:

$$3^{x-2} + 3^{x+1} + 3^{x+2} + 3^{x+3} + 3^{x+4} \leq \frac{1081}{18}$$
$$\frac{3^x}{3^2} + 3^x \cdot 3 + 3^x \cdot 3^2 + 3^x \cdot 3^3 + 3^x \cdot 3^4 \leq \frac{1081}{18}$$

Fazendo $y = 3^x$, obtemos:

$$\frac{y}{9} + 3y + 9y + 27y + 81y \leq \frac{1081}{18}$$

$$\frac{y(1 + 27 + 81 + 243 + 729)}{9} \leq \frac{1081}{18}$$

$$\frac{y1081}{9} \leq \frac{1081}{18}$$

Simplificando a inequação:

$$\Rightarrow y \leq \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Voltando à variável x:

$$y = 3^x \leq \frac{1}{2}$$

Aplicando o log na base 3 na inequação:

$$\log_3 3^x \leq \log_3 \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x \leq \log_3 \frac{1}{2}$$

O conjunto solução é dado por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x \leq \log_3 \left(\frac{1}{2}\right)\right\}}$

---

6. (ITA/2017)

Esboce o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \left|2^{-|x|} - \frac{1}{2}\right|$$

Comentários

Para esboçar o gráfico de uma função modular, devemos construir a função de dentro pra fora. Do enunciado do problema, temos:

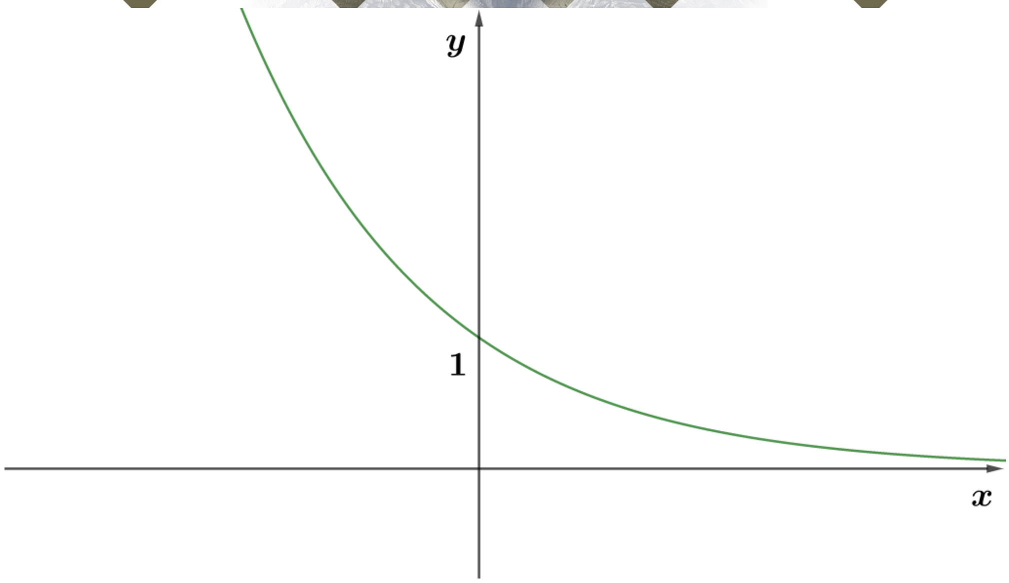
$$f(x) = \left|\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}\right|$$

Vamos iniciar pela função mais simples:

Esboçando $\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

Como a base é menor do que 1, a função é decrescente.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$



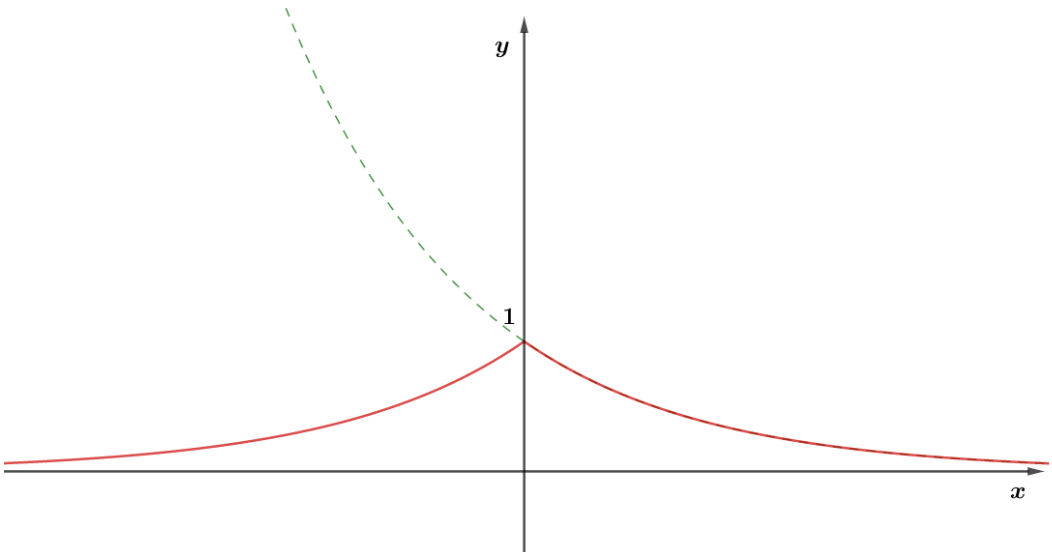
Agora aplicando o módulo em x, $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \begin{cases} \frac{1}{2^x}, x \geq 0 \\ 2^x, x < 0 \end{cases}$$

2^x é uma função crescente e $1/2^x$ é uma função decrescente. O que muda no gráfico ao aplicar o módulo é a região do gráfico cujo x é negativo.

Para esboçar esse gráfico, basta redesenhar a parte das abcissas negativas de acordo com a função abaixo:

$$f(x) = \frac{1}{2^{|x|}}$$



Agora, transladamos $-1/2$ no gráfico. Vamos descer o gráfico $1/2$ unidade verticalmente.

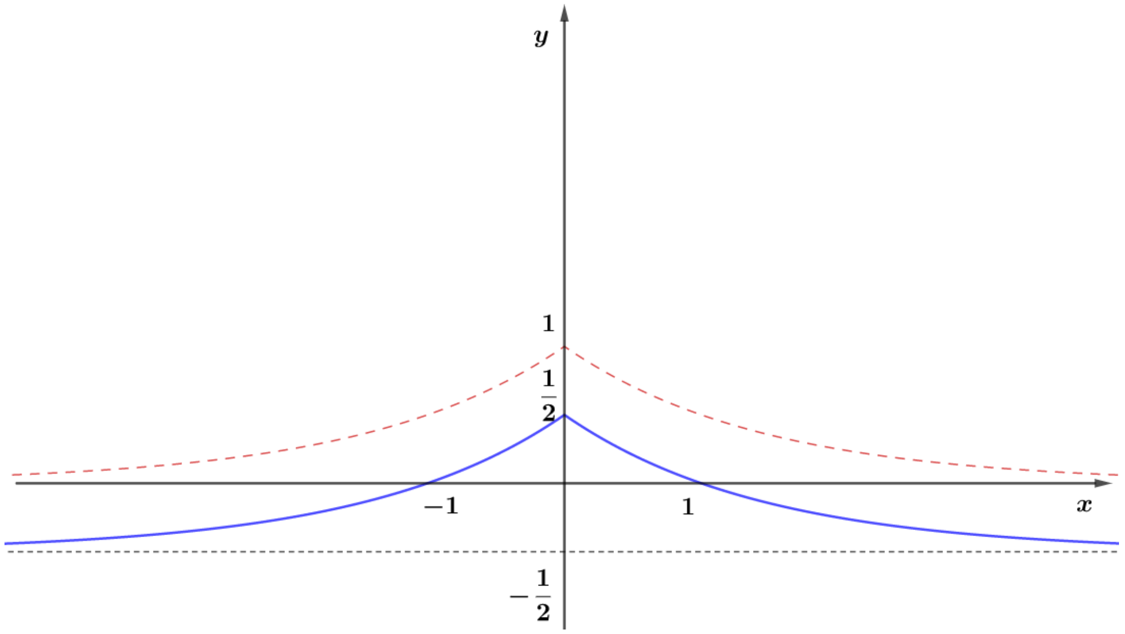
Nesse caso, temos 2 raízes:

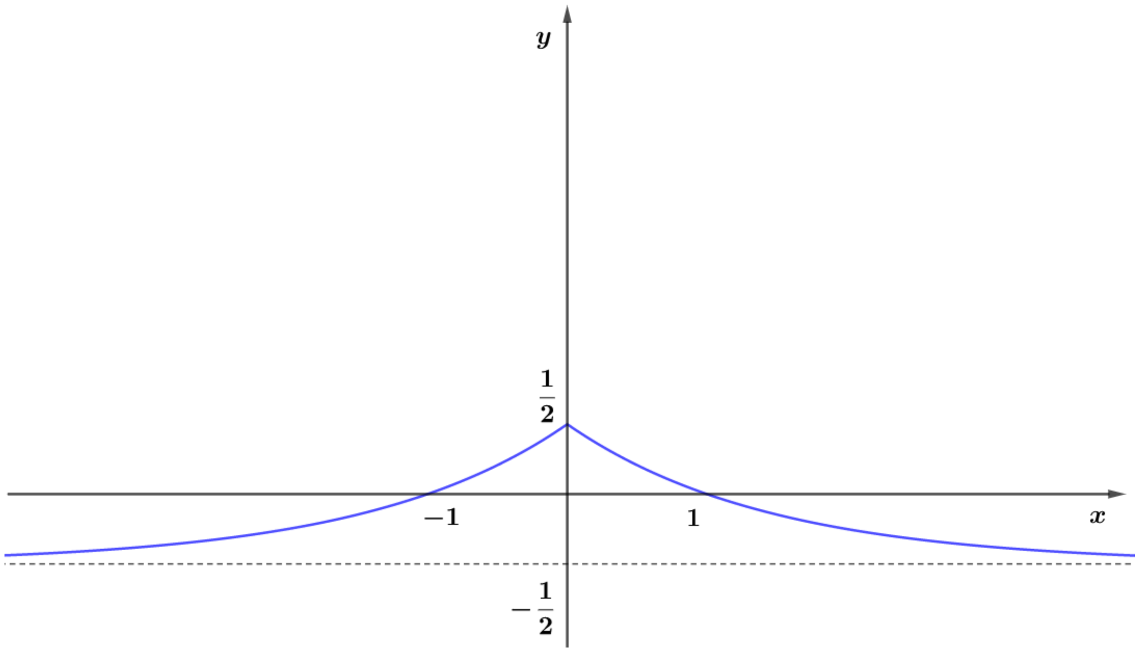
$$\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x = \pm 1$$

Esboçando:

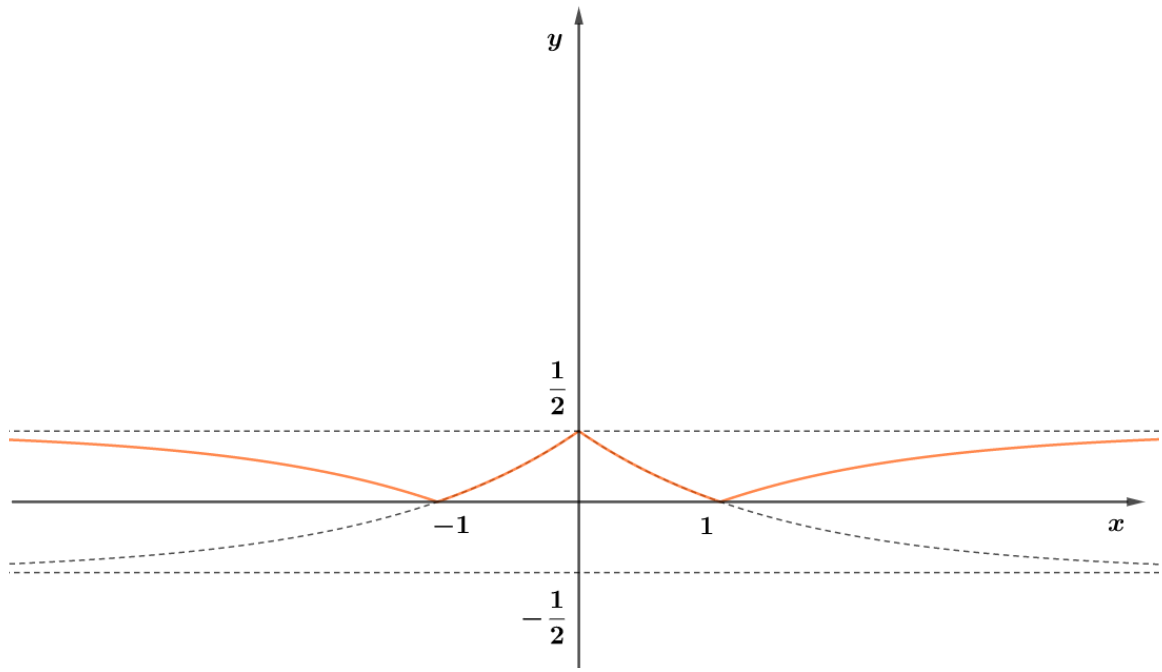
$$f(x) = \frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}$$



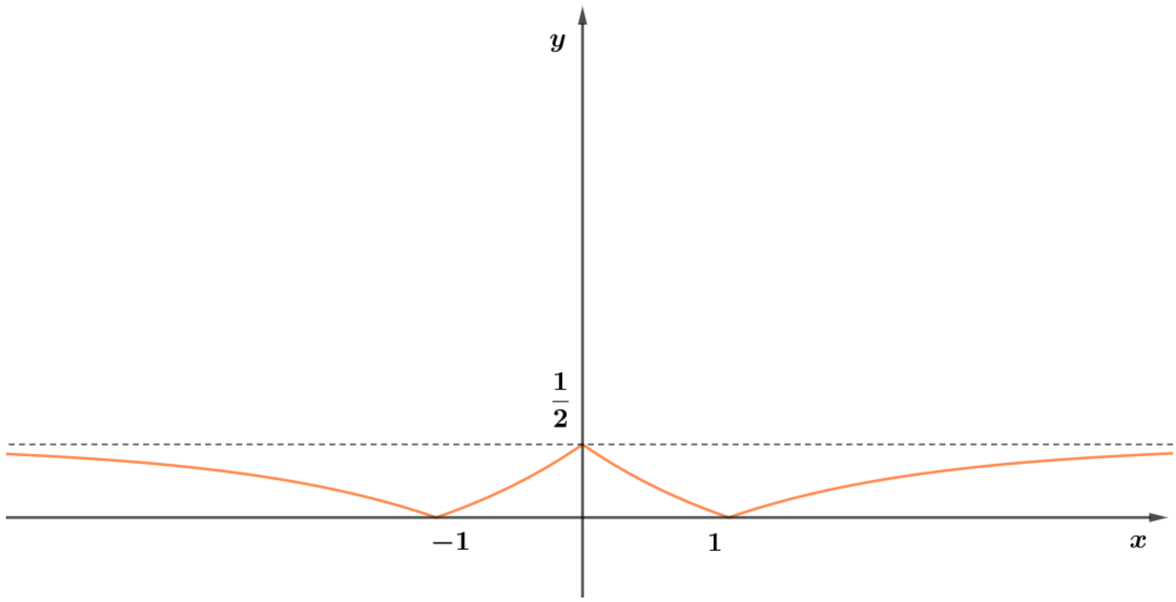


Por último, aplicamos o módulo no gráfico acima. Basta espelhar o gráfico em relação ao eixo x:

$$f(x) = \left|\frac{1}{2^{|x|}} - \frac{1}{2}\right|$$



O esboço final é dado por:



Gabarito: Esboço

7. (ITA/2017)

Sejam a, b, c, d números reais positivos e diferentes de 1. Das afirmações:

I. $a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$

II. $\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = 1$

III. $\log_{ab}(bc) = \log_a c$

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas II e III.

e) todas.

Comentários

I. Analisando a afirmação, para verificar a igualdade, devemos aplicar o log na base c em ambos os lados da igualdade:

$$\log_c a^{\log_c b} = \log_c b^{\log_c a}$$

$$\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b$$

Portanto, a afirmação é verdadeira.

II. Vamos usar a afirmação I para verificar essa afirmação.

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$$

Da equação:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\log_d c}\left(\frac{b}{c}\right)^{\log_d a}\left(\frac{c}{a}\right)^{\log_d b} = \frac{a^{\log_d c}}{b^{\log_d c}}\frac{b^{\log_d a}}{c^{\log_d a}}\frac{c^{\log_d b}}{a^{\log_d b}}$$

Vamos escrever cada termo usando x, y, z para melhor visualizar o resultado:

$$a^{\log_d c} = c^{\log_d a} = x$$

$$b^{\log_d c} = c^{\log_d b} = y$$

$$a^{\log_d b} = b^{\log_d a} = z$$

Substituindo na expressão:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{z}$$

Calculando o resultado, temos:

$$\frac{x}{y}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{z} = \frac{xyz}{xyz} = 1$$

∴Verdadeira.

III. Analisando a afirmação, se tentarmos escrever todos os logs na base 10, encontramos:

$$\frac{\log bc}{\log ab} = \frac{\log c}{\log a}$$

$$\frac{\log b + \log c}{\log a + \log b} = \frac{\log c}{\log a}$$

Vendo a equação acima, podemos perceber que é improvável que o lado esquerdo se iguale ao lado direito. Vamos pensar em um contra-exemplo:

$$\log_{ab} bc = \log_a c$$

Para $a = 2, b = 2$ e $c = 1$:

$$\log_4 2 = \log_2 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 0\ (absurdo!)$$

∴Falsa.

Gabarito: "c".

8. **(ITA/2017)**

Determine todos os valores reais de x que satisfazem a inequação $4^{3x-1} > 3^{4x}$.

Comentários

$$4^{3x-1} > 3^{4x}$$

Vamos aplicar log na inequação:

$$\log 4^{3x-1} > \log 3^{4x}$$

$$(3x-1)\log 4 > 4x \log 3$$

Isolando o x:

$$3x\log 4 - \log 4 > 4x\log 3$$

$$x(3\log 4 - 4\log 3) > \log 4$$

$$x(\log 4^3 - \log 3^4) > \log 4$$

$$x\left(\log\frac{4^3}{3^4}\right) > \log 4$$

$$x\left(\log\frac{64}{81}\right) > \log 4$$

Como $\frac{64}{81} < 1$, temos $\log\frac{64}{81} < 0$. Assim, dividindo a inequação por $\log\frac{64}{81}$, encontramos:

$$x < \frac{\log 4}{\log\frac{64}{81}}$$

Simplificando:

$$\log\frac{64}{81} = \log\frac{8^2}{9^2} = \log\left(\frac{8}{9}\right)^2 = 2\log\frac{8}{9}$$

$$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2$$

Dessa forma, temos:

$$x < \frac{2\log 2}{2\log\frac{8}{9}}$$

$$x < \frac{\log 2}{\log\frac{8}{9}}$$

$$x < \log_{\frac{8}{9}} 2$$

Portanto, a solução da inequação é:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x < \log_{\frac{8}{9}} 2\right\}}$

9. **(ITA/2016)**

Se x é um número natural com 2015 dígitos, então o número de dígitos da parte inteira de $\sqrt[7]{x}$ é igual a

a) 285

b) 286

c) 287

d) 288

e) 289

Comentários

Vamos reescrever o número x. Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in [1,10[$.

Se x é um número natural com 2015 dígitos, podemos escrever:

$$x = a \cdot 10^{2014}$$

2014 é porque a conta como 1 dígito.

Agora, aplicando o radical:

$$\sqrt[7]{x} = \sqrt[7]{a} \cdot \sqrt[7]{10^{2014}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{\frac{2014}{7}}$$

Dividindo 2014 por 7, obtemos:

$$2014 = 7 \cdot 287 + 5$$

Substituindo na equação:

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{\frac{7 \cdot 287 + 5}{7}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = a^{\frac{1}{7}} 10^{287} \cdot 10^{\frac{5}{7}}$$

$$x^{\frac{1}{7}} = (a \cdot 10^5)^{\frac{1}{7}} \cdot 10^{287}$$

$$\sqrt[7]{x} = \sqrt[7]{10^5 a} \cdot 10^{287}$$

Definimos que $1 \leq a < 10$. Então:

$$10^5 \leq 10^5 \cdot a < 10^6$$

$$1 < \sqrt[7]{10^5} \leq \sqrt[7]{10^5 \cdot a} < \sqrt[7]{10^6} < 10$$

$$1 < \sqrt[7]{10^5 \cdot a} < 10$$

Portanto, o número $\sqrt[7]{10^5 \cdot a}$ possui 1 algarismo. Logo, o total de algarismos do número é dado por:

$$\sqrt[7]{x} = \underbrace{\sqrt[7]{10^5 a}}_{1\ algarismo} \cdot \underbrace{10^{287}}_{287\ algarismos}$$

$$287 + 1 = 288$$

Gabarito: "d".

10. (ITA/2016)

Considere as seguintes afirmações:

I. A função $f(x) = \log_{10}\left(\frac{x-1}{x}\right)$ é estritamente crescente no intervalo $]1, +\infty[$.

II. A equação $2^{x+2} = 3^{x-1}$ possui uma única solução real.

III. A equação $(x+1)^x = x$ admite pelo menos uma solução real positiva.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

Comentários

I. Vamos verificar se a função é crescente comparando dois números a, b. Seja $a, b \in]1, +\infty[$ tal que $1 < a < b$. Então:

$$1 < a < b$$

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{b} > -\frac{1}{a}$$

$$1 - \frac{1}{b} > 1 - \frac{1}{a}$$

$$\frac{b-1}{b} > \frac{a-1}{a}$$

$$f(b) > f(a)$$

Portanto, $a < b \rightarrow f(a) < f(b)$. f é estritamente crescente.

$\therefore$ Verdadeira.

II. Vamos resolver a equação:

$$2^{x+2} = 3^{x-1}$$

$$4 \cdot 2^x = \frac{3^x}{3}$$

Isolando x:

$$12 = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

Aplicando log na base $3/2$:

$$\log_{\frac{3}{2}} 12 = x$$

Encontramos uma única solução real.

$\therefore$Verdadeira.

III. Verificando a equação:

$$(x+1)^x = x$$

Aplicando log na base x:

$$\log_x (x+1)^x = \log_x x$$

$$x \log_x (x+1) = 1$$

Vamos ver se existe algum x real positivo que satisfaz a equação:

Se $0 < x < 1$, temos $\log_x (x+1) < 1$ e consequentemente:

$$x \log_x (x+1) < 1$$

Se $x > 1$, temos $\log_x (x+1) > 1$ e consequentemente:

$$x \log_x (x+1) > 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, a expressão $x \log_x (x+1)$ resulta em uma desigualdade. Portanto, não temos x que satisfaz a equação.

∴Falsa.

Gabarito: "b".

11. (ITA/2016)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1000$ e $a_n = \log_{10}(1 + a_{n-1})$ para $n \geq 2$. Considere as afirmações a seguir:

I. A sequência (a_n) é decrescente.

II. $a_n > 0$ para todo $n \geq 1$.

III. $a_n < 1$ para todo $n \geq 3$.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas I e II.

c) apenas II e III.

d) I, II e III.

e) apenas III.

Comentários

I. Para $n = 2$, temos:

$$a_2 = \log_{10}(1 + a_1) = \log_{10}(1 + 1000) = \log_{10} 1001$$

Vamos comparar a_2 com a_1. Aproximando a_2:

$$a_2 = \log_{10} 1001 \cong \log_{10} 1000 = 3 < 1000 = a_1$$

Então, encontramos $a_2 < a_1$. Vamos supor que $a_{n+1} < a_n$ e provar essa propriedade usando PIF.

Para $n = 1$, já sabemos que $a_2 < a_1$.

Para $k \in \mathbb{N}$, temos que provar que $a_k < a_{k-1} \rightarrow a_{k+1} < a_k$.

Usando a definição para a_k:

$$a_k = \log_{10}(1 + a_{k-1})$$
$$10^{a_k} = 1 + a_{k-1}$$
$$a_{k-1} = 10^{a_k} - 1$$

Para a_{k+1}:

$$a_{k+1} = \log_{10}(1 + a_k)$$
$$10^{a_{k+1}} = 1 + a_k$$
$$a_k = 10^{a_{k+1}} - 1$$

Da hipótese:

$$a_k < a_{k-1}$$

Substituindo a_k e a_{k-1}:

$$10^{a_{k+1}} - 1 < 10^{a_k} - 1$$
$$10^{a_{k+1}} < 10^{a_k}$$
$$\Rightarrow a_{k+1} < a_k$$

Portanto, encontramos que $a_{n+1} < a_n$, logo, a sequência (a_n) é decrescente.

∴Verdadeira.

II. $a_1 = 1000 > 0$

Se $a_n > 0$, temos:

$$a_{n+1} = \log_{10}(1 + a_n) > \log_{10} 1 = 0$$

Portanto, $a_n > 0 \Rightarrow a_{n+1} > 0$. Logo, $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

∴Verdadeira.

III. Para $n = 3$:

$$a_3 = \log_{10}(1 + a_2)$$

Usando a aproximação $a_2 \cong 3 < 4$, temos:

$$a_3 = \log_{10}(1 + a_2) < \log_{10}(1 + 4) = \log_{10} 5 < \log_{10} 10 = 1$$

Como a sequência é decrescente e $a_3 < 1$, temos que $a_n < 1, \forall n \geq 3$.

∴Verdadeira.

Gabarito: "e".

---

12. (ITA/2016)

Seja f a função definida por $f(x) = \log_{x+1}(x^2 - 2x - 8)$. Determine:

a) O domínio D_f da função f.

b) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) = 2$.

c) O conjunto de todos os valores de $x \in D_f$ tais que $f(x) > 1$.

Comentários

a) Analisando as condições da função, encontramos os seguintes requisitos:

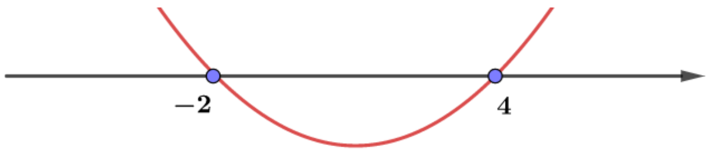
$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x^2-2x-8>0 \end{cases}$$

$$x>-1 \text{ e } x\neq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$x^2-2x-8>0$$

$$(x-4)(x+2)>0$$



$$\Rightarrow x<-2 \; ou \; x>4$$

Juntando as condições, encontramos:

$$x>4$$

Portanto, o domínio da função é dado por:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R}|x>4\}$$

b) Fazendo $f(x)=2$, temos:

$$\log_{x+1}(x^2-2x-8)=2$$

$$x^2-2x-8=(x+1)^2$$

$$x^2-2x-8=x^2+2x+1$$

$$4x=-9$$

$$\Rightarrow x=-\frac{9}{4}$$

Como o domínio de f é $x>4$, temos que $x=-9/4$ não pode ser solução do problema. Logo:

$$S=\emptyset$$

c) Fazendo $f(x)>1$, temos:

$$\log_{x+1}(x^2-2x-8)>1$$

Como $x>4$, temos que a base do logaritmo é maior do que 1, logo a função é crescente.

Dessa forma, podemos escrever:

$$x^2-2x-8>(x+1)^1$$

$$x^2-3x-9>0$$

Raízes:

$$x=\frac{3\pm\sqrt{9+36}}{2}=\frac{(3\pm\sqrt{45})}{2}=\frac{3\pm 3\sqrt{5}}{2}$$

A solução dessa inequação é dada por:

$$x < \frac{3-3\sqrt{5}}{2} \; ou \; x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2}$$

Devemos fazer a intersecção dessa solução com o domínio de f. Para isso, precisamos saber se esses números são maiores ou menores do que 4. Comparando o maior valor:

$$\frac{3+3\sqrt{5}}{2} > \frac{3+3\cdot 2}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5 > 4$$

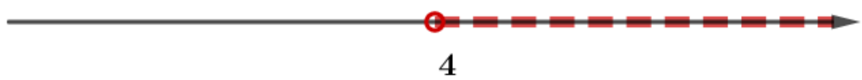
$$\Rightarrow \frac{3+3\sqrt{5}}{2} > 4$$

Agora, para o menor valor:

$$\frac{3-3\sqrt{5}}{2} < \frac{3-3\cdot 2}{2} = -\frac{3}{2} = -1{,}5 < 4$$

$$\Rightarrow \frac{3-3\sqrt{5}}{2} < 4$$

Colocando os números no eixo x, temos:



Fazendo a intersecção da solução, encontramos:

$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \right\}$$

Gabarito: a) $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x > 4\}$ **b)** $S = \emptyset$ **c)** $S = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| x > \frac{3+3\sqrt{5}}{2} \right\}$

13. (ITA/2015)

Considere as seguintes afirmações sobre números reais:

I. Se a expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é um número racional.

II. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{\sqrt{2}}{1-2\sqrt{2}}$.

III. $ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$ é um número racional.

É (são) verdadeira(s):

a) nenhuma.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) I, II e III.

Comentários

I. Do enunciado da afirmação:

A expansão decimal de x é infinita e periódica, então x é uma dízima periódica. Portanto, x é racional.

∴Verdadeira.

II. A sequência é uma PG infinita de razão $q = 1/\sqrt{2}$. Veja:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2^n}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^0}+\frac{1}{\sqrt{2}^1}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\cdots\right)$$

Lembrando que a soma de uma PG infinita é dada por:

$$S = \frac{1}{1-q}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}^0}+\frac{1}{\sqrt{2}^1}+\frac{1}{\sqrt{2}^2}+\cdots\right) = \frac{1}{\sqrt{2}-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$$

O resultado que encontramos é diferente da afirmação.

∴ Falsa.

III. Vamos simplificar o número:

$$ln\sqrt[3]{e^2} + (\log_3 2)(\log_4 9)$$

$$\frac{2}{3} + (\log_3 2)(\log_{2^2} 3^2)$$

$$\frac{2}{3} + \log_3 2 \cdot \log_2 3$$

$$\frac{2}{3} + \frac{\log 2}{\log 3}\cdot\frac{\log 3}{\log 2}$$

$$\frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \in \mathbb{Q}$$

∴Verdadeira.

Gabarito: "d".

14. (ITA/2014)

Determine as soluções reais da equação em x:

$$(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - \frac{3\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$$

Comentários

Como condição de existência: $x > 0$.

Simplificando a equação, temos:

$$(\log_4 x)^3 - \log_4(x^4) - \frac{3\log_{10} 16x}{\log_{100} 16} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - \frac{\frac{3\log_4 16x}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 16}{\log_4 100}} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - \frac{\frac{3(\log_4 4^2 + \log_4 x)}{\log_4 10}}{\frac{\log_4 4^2}{\log_4 10^2}} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - \frac{\frac{3(2 + \log_4 x)}{\log_4 10}}{\frac{2}{2\log_4 10}} = 0$$

$$(\log_4 x)^3 - 4\log_4 x - 3(2 + \log_4 x) = 0$$

Fazendo $\log_4 x = y$:

$$y^3 - 4y - 3(2 + y) = 0$$

$$y^3 - 7y - 6 = 0$$

Fatorando a equação:

$$y^3 - y - 6y - 6 = 0$$

$$y(y^2 - 1) - 6(y + 1) = 0$$

$$(y + 1)(y(y - 1) - 6) = 0$$

$$(y + 1)(y^2 - y - 6) = 0$$

$$(y + 1)(y - 3)(y + 2) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$y_1 = -1$$

$$y_2 = 3$$

$$y_3 = -2$$

Encontrando os valores de x:

$$y = \log_4 x$$

$$y_1 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{4}$$

$$y_2 = 3 \Rightarrow x_2 = 4^3 = 64$$

$$y_3 = -2 \Rightarrow x_3 = 4^{-2} = \frac{1}{16}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\frac{1}{4}, 64, \frac{1}{16}\right\}$

15. (ITA/2014)

A soma

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}}$$

É igual a

a) $\frac{8}{9}$

b) $\frac{14}{15}$

c) $\frac{15}{16}$

d) $\frac{17}{18}$

e) 1

Comentários

Simplificando a expressão, temos:

$$\sum_{1}^{4} \frac{\log_{1/2} \sqrt[n]{32}}{\log_{1/2} 8^{n+2}} = \sum_{1}^{4} \frac{\log_{2^{-1}} 2^{\frac{5}{n}}}{\log_{2^{-1}} (2^3)^{n+2}} = \sum_{1}^{4} \frac{-\frac{5}{n}}{\frac{3(n+2)}{-1}} = \sum_{1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)}$$

Calculando o valor da soma:

$$\sum_{1}^{4} \frac{5}{3n(n+2)} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6}\right)$$

$$\frac{5}{3}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24}\right) = \frac{\frac{5}{3}(40 + 15 + 8 + 5)}{120} = \frac{5}{3}\left(\frac{68}{120}\right) = \frac{68}{3\cdot 24} = \frac{68}{72} = \frac{17}{18}$$

$$\Rightarrow S = \frac{17}{18}$$

Gabarito: "d".

16. (ITA/2013)

Considere as funções f e g, da variável real x, definidas, respectivamente, por $f(x) = e^{x^2+ax+b}$ e $g(x) = \ln\left(\frac{ax}{3b}\right)$, em que a e b são números reais. Se $f(-1) = 1 = f(-2)$, então pode-se afirmar sobre a função composta gof que

a) $gof(1) = \ln 3$.

b) $\nexists gof(0)$.

c) gof nunca se anula.

d) gof está definida apenas em $\{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$.

e) gof admite dois zeros reais distintos.

Comentários

O enunciado nos dá $f(-1)$ e $f(-2)$. Vamos encontrar os coeficientes a e b de f:

$$f(-1) = e^{1-a+b} = 1$$

$$f(-2) = e^{4-2a+b} = 1$$

Dividindo $\frac{f(-1)}{f(-2)}$:

$$\frac{e^{1-a+b}}{e^{4-2a+b}} = 1$$

$$e^{a-3} = 1$$

$$e^a = e^3$$

$$\Rightarrow a = 3$$

Substituindo o resultado em $f(-1)$:

$$e^{1-3+b} = 1$$

$$e^{b-2} = 1$$

$$e^b = e^2$$

$$\Rightarrow b = 2$$

Portanto, as funções f e g são dadas por:

$$f(x) = e^{x^2+3x+2}$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{3x}{3 \cdot 2}\right) = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$$

Encontrando gof:

$$gof(x) = g\big(f(x)\big) = \ln\left(\frac{f(x)}{2}\right) = \ln\left(\frac{e^{x^2+3x+2}}{2}\right) = \ln\left(e^{x^2+3x+2}\right) - \ln 2 = x^2 + 3x + 2 - \ln 2$$

Vamos analisar as alternativas:

a) Devemos calcular $gof(1)$:

$$gof(1) = 1 + 3 + 2 - ln2 = 6 - \ln 2 \neq ln3$$

b) $gof(0) = 2 - \ln 2$. Existe $gof(0)$.

c) Vamos verificar se gof possui raízes:

$$gof(x) = 0$$

$$x^2 + 3x + 2 - \ln 2 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2 - \ln 2)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{1 + \ln 2}}{2}$$

gof possui 2 raízes distintas. O que nos leva à alternativa e.

Gabarito: "e".

17. (ITA/2013)

Se os números reais a e b satisfazem, simultaneamente, as equações

$$\sqrt{a\sqrt{b}} = \frac{1}{2} \text{ e } \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5,$$

Um possível valor de $\frac{a}{b}$ é

a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) 1

c) $\sqrt{2}$

d) 2

e) $3\sqrt{2}$

Comentários

Do enunciado, temos o sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{a\sqrt{b}} = \dfrac{1}{2} \\ \ln(a^2 + b) + \ln 8 = \ln 5 \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} a\sqrt{b} = \dfrac{1}{4} \\ \ln(a^2 + b) = \ln 5 - \ln 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b = \dfrac{1}{16} \\ \ln(a^2 + b) = \ln\left(\dfrac{5}{8}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 b = \dfrac{1}{16} \\ a^2 + b = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Vamos encontrar os valores de a e b substituindo a primeira equação na segunda:

$$a^2 = \frac{1}{16b}$$

$$\frac{1}{16b} + b = \frac{5}{8}$$

$$16b^2 - 10b + 1 = 0$$

$$b = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{16} = \frac{5 \pm 3}{16} = \frac{1}{2} \; ou \; \frac{1}{8}$$

Das condições da equação com radical, temos que necessariamente $a \geq 0$ e $b \geq 0$. Então:

$$b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{8} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$b = \frac{1}{8} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Possíveis valores para a/b:

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{8}} = 4\sqrt{2}$$

Analisando as alternativas, encontramos a resposta em a.

Gabarito: "a".

---

18. (ITA/2011)

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$$

Comentários

Vamos simplificar a inequação:

$$16 < \left(\frac{1}{4}\right)^{\log_{\frac{1}{5}}(x^2-x+19)}$$

$$4^2 < (4^{-1})^{\log_{5^{-1}}(x^2-x+19)}$$

$$4^2 < (4^{-1})^{(-1)\log_5(x^2-x+19)}$$

$$4^2 < 4^{\log_5(x^2-x+19)}$$

$$\Rightarrow 2 < \log_5(x^2 - x + 19)$$

$$5^2 < x^2 - x + 19$$

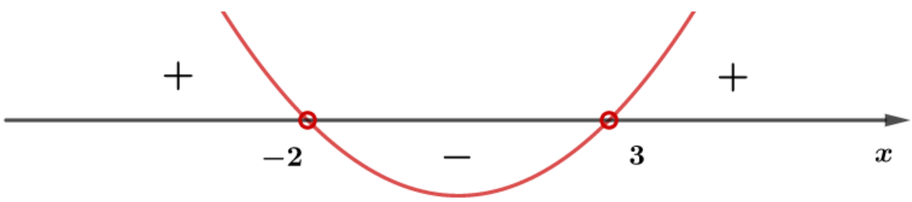
$$0 < x^2 - x - 6$$

$$0 < (x-3)(x+2)$$

Raízes:

$$x = 3 \ ou \ x = -2$$

Estudo do sinal:



$$\therefore x < -2 \ ou \ x > 3$$

$$S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

Gabarito: $S = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$

19. (ITA/2008)

Para $x \in \mathbb{R}$, o conjunto solução de $|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$ é

a) $\{0, 2 \pm \sqrt{5}, 2 \pm \sqrt{3}\}$

b) $\{0, 1, \log_5(2 + \sqrt{5})\}$

c) $\left\{0, \left(\frac{1}{2}\right)\log_5 2, \frac{1}{2}\log_5 3, \log_5 \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

d) $\{0, \log_5(2 + \sqrt{5}), \log_5(2 + \sqrt{3}), \log_5(2 - \sqrt{3})\}$

e) A única solução é $x = 0$

Comentários

Inicialmente, devemos simplificar a equação:

$$|5^{3x} - 5^{2x+1} + 4 \cdot 5^x| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^{2x} - 5 \cdot 5^x + 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x(5^x - 1)(5^x - 4)| = |5^x - 1|$$

$$|5^x - 1|(|5^x(5^x - 4)| - 1) = 0$$

Possibilidades:

$$5^x - 1 = 0 \Rightarrow 5^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Ou

$$|5^x(5^x - 4)| - 1 = 0$$

$$|5^x(5^x - 4)| = 1 \Rightarrow \begin{cases} 5^x(5^x - 4) = 1 \\ 5^x(5^x - 4) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 1 = 0 \\ 5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvendo cada equação separadamente, temos:

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x - 1 = 0$$

$$5^x = \left(2 \pm \sqrt{4 + 1}\right) = 2 \pm \sqrt{5}$$

Como $5^x > 0$ e $2 - \sqrt{5} < 0$, nesse caso, a única solução é $5^x = 2 + \sqrt{5}$. O que resulta:

$$x = \log_5(2 + \sqrt{5})$$

Resolvendo a outra equação:

$$5^{2x} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0$$

$$5^x = \left(2 \pm \sqrt{4 - 1}\right) = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$2 - \sqrt{3} > 0$$

$$\Rightarrow 5^x = 2 \pm \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow x = \log_5\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$$

Portanto, encontramos 4 soluções:

$$S = \{0, \log_5(2+\sqrt{5}), \log_5(2 \pm \sqrt{3})\}$$

Gabarito: "e".

20. (ITA/2007)

Sejam x e y dois números reais tais que e^x, e^y e o quociente

$$\frac{e^x - 2\sqrt{5}}{4 - e^y\sqrt{5}}$$

são todos racionais. A soma $x + y$ é igual a

a) 0

b) 1

c) $2\log_5 3$

d) $\log_5 2$

e) $3\log_e 2$

Comentários

Vamos eliminar o termo radical do denominador do número:

$$\frac{(e^x - 2\sqrt{5})}{(4 - e^y\sqrt{5})}\frac{(4 + e^y\sqrt{5})}{(4 + e^y\sqrt{5})}$$

$$\frac{4e^x - 8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5} - 2e^y 5}{16 - 5e^{2y}}$$

$$\frac{4e^x - 2e^y 5 - 8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5}}{16 - 5e^{2y}}$$

O enunciado afirma que o número é racional, então necessariamente os radicais do numerador devem ser iguais a zero:

$$-8\sqrt{5} + e^{x+y}\sqrt{5} = 0$$

$$e^{x+y} = 8$$

$$\Rightarrow x + y = \ln 2^3 = 3\ln 2$$

Com isso, encontramos a resposta no gabarito e.

Gabarito: "e".

21. (ITA/2007)

Sejam x, y e z números reais positivos tais que seus logaritmos numa dada base n são números primos satisfazendo

$$\log_n(xy) = 49$$

$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

Então, $\log_n(xyz)$ é igual a

a) 52

b) 61

c) 67

d) 80

e) 97

Comentários

O enunciado afirma que $\log_n x, \log_n y, \log_n z$ são números primos. Vamos procurar alguma informação usando os dados fornecidos:

$$\log_n(xy) = 49$$

$$\log_n x + \log_n y = 49$$

Como os logs envolvidos são números primos e a soma é ímpar, temos que um número deve ser par e o outro ímpar. O único par que é primo é 2, então:

$$\begin{cases} \log_n x = 2 \\ \log_n y = 47 \end{cases} ou \begin{cases} \log_n x = 47 \\ \log_n y = 2 \end{cases}$$

Usando a outra equação:

$$\log_n\left(\frac{x}{z}\right) = 44$$

$$\log_n x - \log_n z = 44$$

Testando os valores dos logs, temos:

$$\log_n x = 2 \Rightarrow 2 - \log_n z = 44$$

$$\log_n z = -42$$

$$-42 \text{ não é primo}$$

Vamos testar o outro valor:

$$\log_n x = 47 \Rightarrow 47 - \log_n z = 44$$

$$\log_n z = 3$$

$$3 \text{ é primo}$$

Então, os logs que satisfazem o problema são:

$$\log_n x = 47$$

$$\log_n y = 2$$

$$\log_n z = 3$$

A questão pede $\log_n(xyz)$:

$$\log_n(xyz) = \log_n x + \log_n y + \log_n z = 52$$

Portanto, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

22. (ITA/2005)

Considere a equação em x

$$a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$$

Onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln b = 2\ln a > 0$. A soma das soluções da equação é

a) 0

b) -1

c) 1

d) $\ln 2$

e) 2

Comentários

Aplicando ln na equação, temos:

$$\ln a^{x+1} = \ln b^{\frac{1}{x}}$$

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x}\ln b$$

Substituindo $\ln b = 2\ln a$:

$$(x+1)\ln a = \frac{1}{x}\cdot 2\ln a$$

Como $\ln a > 0$:

$$x+1 = \frac{2}{x}$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}$$

$$x_1 = -2 \; e \; x_2 = 1$$

A soma das raízes é dado por:

$$x_1 + x_2 = -2 + 1 = -1$$

Gabarito: "b".

23. (ITA/2004)

Para $b > 1$ e $x > 0$, resolva a equação em x:

$$(2x)^{\log_b 2} - (3x)^{\log_b 3} = 0$$

Comentários

Reescrevendo a equação do enunciado:

$$(2x)^{\log_b 2} = (3x)^{\log_b 3}$$

Aplicando log na base b, temos:

$$\log_b (2x)^{\log_b 2} = \log_b (3x)^{\log_b 3}$$

Simplificando:

$$\log_b 2 \log_b 2x = \log_b 3 \log_b 3x$$

$$\log_b 2\,(\log_b 2 + \log_b x) = \log_b 3\,(\log_b 3 + \log_b x)$$

$$(\log_b 2)^2 + \log_b 2 \log_b x = (\log_b 3)^2 + \log_b 3 \log_b x$$

$$\log_b 2 \log_b x - \log_b 3 \log_b x = (\log_b 3)^2 - (\log_b 2)^2$$

$$\log_b x\, (\log_b 2 - \log_b 3) = (\log_b 3 - \log_b 2)(\log_b 3 + \log_b 2)$$

$$\log_b x = -(\log_b(3 \cdot 2))$$

$$\log_b x = \log_b 6^{-1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

Portanto, encontramos uma única solução dada por:

$$S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\frac{1}{6}\right\}$

---

24. (ITA/2004)

Seja α um número real, com $0 < \alpha < 1$. Assinale a alternativa que representa o conjunto de todos os valores de x tais que

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

a) $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

b) $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

c) $]0, 2[$

d) $]-\infty, 0[$

e) $]2, +\infty[$

Comentários

Simplificando a inequação, temos:

$$\alpha^{2x}\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^{2x^2} < 1$$

$$\frac{\alpha^{2x}}{\alpha^{\frac{2x^2}{2}}} < 1$$

$$\alpha^{2x} < \alpha^{x^2}$$

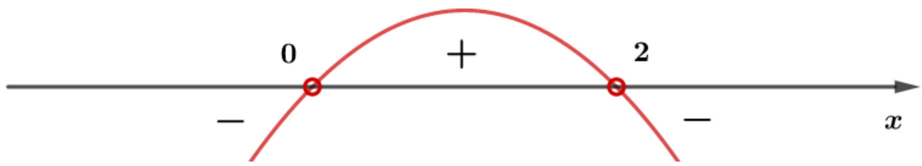
Como $0 < \alpha < 1$, temos:

$$2x > x^2$$

$$2x - x^2 > 0$$

$$x(2 - x) > 0$$

Vamos fazer o estudo do sinal da inequação acima:



Portanto, os valores de x que satisfazem a inequação é:

$$0 < x < 2$$

$$S =]0, 2[$$

Gabarito: "c".

---

25. (ITA/2003)

Mostre que toda função $f: \mathbb{R}/\{0\} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

Comentários

Vamos analisar a equação funcional dada:

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

Fazendo $x = y = k \in \mathbb{R}/\{0\}$, temos:

$$f(k \cdot k) = f(k) + f(k)$$

$$f(k^2) = 2f(k)$$

Para $x = y = -k$:

$$f\big((-k)(-k)\big) = f(-k) + f(-k)$$

$$f(k^2) = 2f(-k)$$

Desse modo, encontramos a igualdade:

$$2f(k) = 2f(-k)$$

$$f(k) = f(-k)$$

Portanto, a função f é par em todo o seu domínio.

Gabarito: Demonstração.

---

26. (ITA/2003)

Considere uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não-constante e tal que $f(x + y) = f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Das afirmações:

I. $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$

II. $f(nx) = [f(x)]^n, \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$

III. f é par

É (são) verdadeira(s):

a) apenas I e II.

b) apenas II e III.

c) apenas I e III.

d) todas.

e) nenhuma.

Comentários

I. O bizu nessa questão é fazer:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$$

Usando a equação funcional, encontramos:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) f\left(\frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x) \geq 0$$

Devemos provar que $f(x) \neq 0$:

Para $x = y = 0$:

$$f(0) = \left(f(0)\right)^2$$

$$f(0)\left(1 - f(0)\right) = 0$$

$$f(0) = 0 \; ou \; f(0) = 1$$

Para $y = 0$, temos:

$$f(x + 0) = f(x)f(0)$$

$$f(x)\left(1 - f(0)\right) = 0$$

Se $f(0) = 0$:

$$f(x) = f(x)f(0) = 0$$

$$f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

O enunciado diz que a função f não é constante, logo essa igualdade não pode ser válida.

Com isso, nos resta $f(0) = 1$.

Portanto, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

∴Verdadeira.

II. Vamos provar por PIF que essa equação é válida:

Para $n = 1$, temos:

$$f(nx) = [f(x)]^n$$

$$f(x) = f(x)^1$$

Para $n = k \in \mathbb{N}^*$, temos que provar que $f(kx) = [f(x)]^k \Rightarrow f[(k+1)x] = [f(x)]^{k+1}$.

Usando a equação funcional do enunciado:

$$f(x + y) = f(x)f(y)$$

Fazendo $y = kx$:

$$f(x + kx) = f(x)f(kx)$$

Da hipótese, temos $f(kx) = [f(x)]^k$, logo:

$$f[(k+1)x] = f(x)[f(x)]^k$$

$$\Rightarrow f[(k+1)x] = [f(x)]^{k+1}$$

Portanto, a equação da afirmação é válida.

∴Verdadeira.

III. Para $x = k$ e $y = -k$, temos:

$$f(k-k) = f(k)f(-k)$$
$$f(0) = f(k)f(-k)$$

Da afirmação I, sabemos que $f(0) = 1$. Logo:

$$f(k)f(-k) = 1 \Rightarrow f(k) = \frac{1}{f(-k)}$$

Portanto:

$$f(k) \neq f(-k)$$

A função não é par.

∴Falsa.

Gabarito: "a".

Questões IME Comentadas

27. (IME/2020)

Sabe-se que $S = x + y + z$, onde y e z são soluções inteiras do sistema abaixo.

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} \\ y = e^{2\ln(x)} \\ \log_2 y + \log_x z = (x+3) \end{cases}$$

O valor de S é:

a) 84

b) 168

c) 234

d) 512

e) 600

Comentários

Das condições de existência dos logaritmos, devemos ter $\boldsymbol{x, y, z > 0}$ e $\boldsymbol{x \neq 1}$.

Nessa questão, o bizu é observar a segunda equação:

$$y = e^{2\ln(x)} = e^{\ln(x^2)} = x^2 \Rightarrow y = x^2$$

Com essa relação, substituímos na primeira equação para achar o valor de x:

$$x = \frac{\sqrt[3]{2y^2}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2x^4}}{2} \Rightarrow 2x = \sqrt[3]{2x^4} \Rightarrow 8x^3 = 2x^4 \Rightarrow \boxed{x = 4} \Rightarrow \boxed{y = 16}$$

Agora, basta substituir x e y na terceira equação para achar z:

$$\log_2 y + \log_x z = (x+3)$$
$$\log_2 16 + \log_4 z = 7 \Rightarrow 4 + \log_4 z = 7 \Rightarrow \log_4 z = 3 \Rightarrow z = 4^3 \Rightarrow \boxed{z = 64}$$

$$\therefore S = x + y + z = 4 + 16 + 64 = 84$$

Gabarito: “a”.

28. (IME/2020)

Uma progressão geométrica é formada com os números naturais A, B e C, nessa ordem. O $log(A)$ possui a mesma mantissa, M, do $log(B)$ e C é a característica do $log(A)$. Sabe-se que $M = log(C)$ e que possui o maior valor possível. O valor da mantissa do $log(ABC)$ é:

a) M

b) $2M$

c) $3M$

d) $3M - 2$

e) $3M - 3$

Comentários

Como (A, B, C) formam uma PG nessa ordem, podemos escrever:

$$B^2 = AC$$

O enunciado dá informações a respeito da característica e da mantissa dos logaritmos. A primeira coisa que devemos lembrar é que a característica de um logaritmo é a parte inteira do seu valor e a mantissa é a parte fracionária.

O enunciado diz que:

$$\log(A) = C + M$$
$$\log(B) = X + M$$
$$\log(C) = M$$

Não sabemos qual é a característica de $\log(B)$, podemos extrair essa informação da PG:

$$B^2 = AC$$

Aplicando o log na equação acima:

$$\log(B^2) = \log(AC) \Rightarrow 2\log(B) = \log(A) + \log(C)$$

Substituindo os valores dos logaritmos:

$$2(X + M) = C + M + M \Rightarrow 2X = C \Rightarrow X = \frac{C}{2}$$

Como a característica de C é zero, temos que C é um número entre 1 e 10. Além disso, X deve ser um número natural, logo C deve ser um número par, as possibilidades são:

$$C \in \{2; 4; 6; 8\}$$

O enunciado diz que $M = \log(C)$ possui o maior valor possível, logo, $C = 8$.

Com isso, temos:

$$\log(C) = \log(8) = \log(2^3) = 3 \cdot \log(2)$$

O valor do $\log(2)$ é aproximadamente $0{,}3$, logo:

$$M \cong 3 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$$

Queremos saber o valor da mantissa do $\log(ABC)$:

$$\log(ABC) = \log(A) + \log(B) + \log(C)$$

Usando $2\log(B) = \log(A) + \log(C)$:

$$\log(ABC) = 3\log(B) = 3(X + M) = \frac{3C}{2} + 3M = \frac{3 \cdot 8}{2} + 3(0{,}9) = 12 + 2{,}7$$

Devemos notar que a mantissa do $\log(ABC)$ está no número $2{,}7$ e ele é resultado de $3M$, ou seja,

$$3M = 2{,}7 = 2 + 0{,}7 \Rightarrow 3M - 2 = 0{,}7$$

Portanto, a mantissa do $\log(ABC)$ é $0{,}7 = 3M - 2$.

Gabarito: "d".

29. (IME/2020)

Considere a progressão geométrica $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ e a progressão aritmética $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ com as condições:

$$a_1 > 0$$
$$\frac{a_2}{a_1} > 1;\text{e}$$
$$b_2 - b_1 > 0$$

Para que $[\log_\alpha(a_n) - b_n]$ não dependa de n, o valor de α deverá ser:

a) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2}}$

b) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1}}$

c) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2-b_1}}$

d) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1-b_2}}$

e) $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_1 b_2}}$

Comentários

Como $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ é uma PG e $(b_1, b_2, \dots, b_n, \dots)$ é uma PA, temos:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$b_n = b_1 + (n-1)r$$

Sendo q a razão da PG e r a razão da PA.

Das condições do enunciado:

$$a_1 > 0 \; e \; \frac{a_2}{a_1} > 1 \Rightarrow a_1 > 0 \; e \; q > 1$$
$$b_2 - b_1 > 0 \Rightarrow r > 0$$

Assim, a PG possui apenas termos positivos e é crescente e a PA também é crescente.

Vamos analisar a expressão dada:

$$[\log_\alpha(a_n) - b_n] = [\log_\alpha(a_1 q^{n-1}) - (b_1 + (n-1)r)]$$
$$= \log_\alpha a_1 + (n-1)\log_\alpha q - b_1 - nr + r$$
$$= \log_\alpha a_1 - \log_\alpha q - b_1 + r + n\log_\alpha q - nr$$

Para que a expressão não dependa de n, devemos ter:

$$n\log_\alpha q - nr = 0$$

$$n(\log_\alpha q - r) = 0 \Rightarrow \log_\alpha q - r = 0 \Rightarrow \log_\alpha q = r \Rightarrow q = \alpha^r \Rightarrow \alpha = q^{\frac{1}{r}}$$

Escrevendo q em função de a_1 e a_2, e r em função de b_1 e b_2:

$$q = \frac{a_2}{a_1} \; e \; r = b_2 - b_1$$

$$\therefore \boxed{\alpha = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{b_2-b_1}}}$$

Gabarito: "c".

30. (IME/2019)

Definimos a função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ f(2n) = f(n), \quad n \geq 1 \\ f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}, \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Determine $f(f(2019))$.

Observação: $\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a lei de formação da função. Para um número par, temos que $f(2n) = f(n)$ e para um número ímpar, $f(2n+1) = f(n) + 2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}$. A função está determinada para $n = 1$ ou $n = 0$, vamos usar esses valores para encontrar o que se pede.

Usando a lei de formação, obtemos:

$$f(2019) = f(1009) + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor}$$
$$f(1009) = f(504) + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor}$$
$$f(504) = f(252)$$
$$f(252) = f(126)$$
$$f(126) = f(63)$$
$$f(63) = f(31) + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor}$$
$$f(31) = f(15) + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor}$$
$$f(15) = f(7) + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor}$$
$$f(7) = f(3) + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor}$$
$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor}$$
$$f(1) = 1$$

Vamos somar as equações para cancelar os termos de f:

$$+\begin{cases} f(2019) = \cancel{f(1009)} + 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} \\ \cancel{f(1009)} = \cancel{f(504)} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} \\ \cancel{f(504)} = \cancel{f(252)} \\ \cancel{f(252)} = \cancel{f(126)} \\ \cancel{f(126)} = \cancel{f(63)} \\ \cancel{f(63)} = \cancel{f(31)} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} \\ \cancel{f(31)} = \cancel{f(15)} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} \\ \cancel{f(15)} = \cancel{f(7)} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} \\ \cancel{f(7)} = \cancel{f(3)} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} \\ \cancel{f(3)} = \cancel{f(1)} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} \\ \cancel{f(1)} = 1 \end{cases}$$

$$f,(2019) = 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} + 1$$

Agora, precisamos encontrar os valores de $2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor}, 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor}, \dots, 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor}$. Das propriedades dos logaritmos, sabemos que $2^{\log_2 a} = a$.

Analisemos o valor de $\lfloor \log_2 1009 \rfloor$. Seja $\log_2 1009 = x$:

$$\lfloor \log_2 1009 \rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Como 2 é uma base maior que 1, temos que a função logarítmica é crescente. Então, podemos escrever:

$$\log_2 512 < \log_2 1009 < \log_2 1024$$

$$\log_2 2^9 < x < \log_2 2^{10}$$
$$9 < x < 10$$

$\lfloor k \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a k, desse modo:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor \log_2 1009 \rfloor = 9$$

Analogamente, para os outros valores:

$$\log_2 256 < \log_2 504 < \log_2 512 \Rightarrow 8 < \log_2 504 < 9 \Rightarrow \lfloor \log_2 504 \rfloor = 8$$
$$\log_2 16 < \log_2 31 < \log_2 32 \Rightarrow 4 < \log_2 31 < 5 \Rightarrow \lfloor \log_2 31 \rfloor = 4$$
$$\log_2 8 < \log_2 15 < \log_2 16 \Rightarrow 3 < \log_2 15 < 4 \Rightarrow \lfloor \log_2 15 \rfloor = 3$$
$$\log_2 4 < \log_2 7 < \log_2 8 \Rightarrow 2 < \log_2 7 < 3 \Rightarrow \lfloor \log_2 7 \rfloor = 2$$
$$\log_2 2 < \log_2 3 < \log_2 4 \Rightarrow 1 < \log_2 3 < 2 \Rightarrow \lfloor \log_2 7 \rfloor = 1$$
$$\lfloor \log_2 1 \rfloor = 0$$

Assim, obtemos:

$$f(2019) = 2^{\lfloor \log_2 1009 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 504 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 31 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 15 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 7 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 3 \rfloor} + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} + 1$$
$$f(2019) = 2^9 + 2^8 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 + 2^0 + 1$$
$$f(2019) = 512 + 256 + 16 + 8 + 4 + 2 + 1 + 1$$
$$\boxed{f(2019) = 800}$$

Queremos o valor de $f\big(f(2019)\big)$, usando o mesmo raciocínio:

$$f\big(f(2019)\big) = f(800) = f(400) = f(200) = f(100) = f(50) = f(25)$$
$$f(25) = f(12) + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor}$$
$$f(12) = f(6)$$
$$f(6) = f(3)$$
$$f(3) = f(1) + 2^{\lfloor \log_2 1 \rfloor} = 1 + 2^0 = 2$$
$$\Rightarrow f(12) = f(6) = f(3) = 2$$
$$\Rightarrow f(25) = 2 + 2^{\lfloor \log_2 12 \rfloor}$$
$$\log_2 8 < \log_2 12 < \log_2 16 \Rightarrow 3 < \log_2 12 < 4 \Rightarrow \lfloor \log_2 12 \rfloor = 3$$
$$\Rightarrow f(25) = 2 + 2^3 = 10$$

Portanto:

$$\boxed{f\big(f(2019)\big) = 10}$$

Gabarito: $f\big(f(2019)\big) = 10$

31. (IME/2018)

Sejam a, b, c e d números reais positivos diferentes de 1. Temos que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão geométrica e que a, b e c formam uma progressão aritmética em que $a < b < c$. Sabendo-se que $b = b^{\log_a b} - a$, determine:

a) Os valores de a, b e c;

b) As razões das progressões aritmética e geométrica, r e q, respectivamente.

Comentários

a) Do enunciado, temos:

$$a, b, c, d > 0 \text{ e } a, b, c, d \neq 1$$

$(\log_a d, \log_b d, \log_c d)$ é uma PG

(a, b, c) é uma PA, com $a < b < c$

$$b = b^{\log_a b} - a$$

Vamos analisar a PA, usando os dados fornecidos, podemos escrever:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

$$\Rightarrow 2b = a + c \quad (I)$$

Analisando a PG:

$$(\log_b d)^2 = (\log_a d)(\log_c d)$$

$$\left(\frac{\log_a d}{\log_a b}\right)^2 = (\log_a d)\left(\frac{\log_a d}{\log_a c}\right) = \frac{(\log_a d)^2}{\log_a c}$$

$$\Rightarrow (\log_a b)^2 = \log_a c \quad (II)$$

Agora, vamos usar a equação para encontrar alguma informação entre a e b:

$$b = b^{\log_a b} - a$$

$$a + b = b^{\log_a b} \quad (III)$$

O bizu agora é fazer $b = a^{\log_a b}$ para o lado direito da equação (III):

$$a + b = \left(a^{\log_a b}\right)^{\log_a b} = a^{(\log_a b)^2}$$

Usando a equação (II):

$$(\log_a b)^2 = \log_a c$$

$$\Rightarrow a^{(\log_a b)^2} = a^{\log_a c} = c$$

Perceba que o termo encontrado é igual àquele encontrado na equação (III):

$$a + b = a^{(\log_a b)^2} = c$$

Dessa forma, usando as equações encontradas, podemos escrever:

$$\begin{cases} a + b = c \\ 2b = a + c \end{cases}$$

Encontrando b e c em função de a:

$$2b = a + c \Rightarrow 2b = a + a + b$$

$$\Rightarrow b = 2a$$

$$a + b = c$$

$$\Rightarrow c = 3a$$

Substituindo esses valores na equação (III), temos:

$$a + b = b^{\log_a b} \quad (III)$$

$$a + 2a = (2a)^{\log_a 2a}$$

$$3a = (2a)^{(\log_a 2 + 1)}$$

Aplicando log na base a na equação:

$$\log_a 3a = (\log_a 2 + 1)(\log_a 2a)$$

$$\log_a 3 + 1 = (\log_a 2 + 1)(\log_a 2 + 1)$$

$$\log_a 3 + 1 = (\log_a 2)^2 + 2\log_a 2 + 1$$

$$\Rightarrow \log_a 3 = (\log_a 2)^2 + 2\log_a 2$$

Escrevendo os logs na base 2:

$$\frac{\log_2 3}{\log_2 a} = \left(\frac{\log_2 2}{\log_2 a}\right)^2 + \frac{2\log_2 2}{\log_2 a}$$

Fazendo $x = \log_2 a$, temos:

$$\frac{\log_2 3}{x} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{2\log_2 2}{x}$$

$$\log_2 3\, x = 1 + 2x$$

$$x(\log_2 3 - 2) = 1$$

$$x = \frac{1}{\log_2 3 - 2}$$

Retornando à variável a:

$$\log_2 a = \frac{1}{\log_2 3 - 2} = \frac{1}{\log_2 3 - \log_2 2^2} = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{4}} = \log_{\frac{3}{4}} 2$$

$$\Rightarrow a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

$$b = 2a$$

$$\Rightarrow b = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}$$

$$c = 3a$$

$$\Rightarrow c = 3 \cdot 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

b) Temos as sequências:

$$(\log_a d, \log_b d, \log_c d) \text{ é uma PG}$$

$$(a, b, c) \text{ é uma PA, com } a < b < c$$

$$\Rightarrow r = b - a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1} - 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2} = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}(2 - 1) = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$$

$$\Rightarrow q = \frac{\log_b d}{\log_a d} = \frac{\frac{\log_2 d}{\log_2 b}}{\frac{\log_2 d}{\log_2 a}} = \frac{\log_2 a}{\log_2 b}$$

$$q = \frac{\log_2 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}}{\log_2 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}} = \frac{\log_{\frac{3}{4}} 2}{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\log_{\frac{3}{4}} 2}} = \frac{1}{1 + \log_2 \frac{3}{4}} = \frac{1}{\log_2 2 + \log_2 \frac{3}{4}} = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

Portanto, $r = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ e $q = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

Questão trabalhosa pessoal, para encontrar os valores de a, b, c, temos que ir pelo método da tentativa e erro até achar alguma informação relevante.

Gabarito: a) $a = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$, $b = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2 + 1}$, $c = 3 \cdot 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ b) $r = 2^{\log_{\frac{3}{4}} 2}$ e $q = \log_{\frac{3}{2}} 2$

32. (IME/2017)

Seja a equação $y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6, y > 0$.

O produto das raízes reais desta equação é igual a:

a) $\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{3}{4}$

d) 2

e) 3

Comentários

Vamos simplificar a equação do problema:

$$y^{\log_3 \sqrt{3y}} = y^{\log_3 3y} - 6$$

$$y^{\log_3 (3y)^{\frac{1}{2}}} = y^{\log_3 3y} - 6$$

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = y^{\log_3 3y} - 6$$

Chamando $x = y^{\frac{1}{2}\log_3 3y}$, temos:

$$x = x^2 - 6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

Raízes:

$$x_1 = -2 \; ou \; x_2 = 3$$

Encontrando os valores de y:

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = -2$$

O enunciado diz que $y > 0$, então a equação acima não é válida. Então, temos que usar a outra raiz:

$$y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = 3$$

Aplicando log na base 3:

$$\log_3 y^{\frac{1}{2}\log_3 3y} = \log_3 3$$

$$\frac{1}{2}(1 + \log_3 y)\log_3 y = 1$$

Substituindo $z = \log_3 y$:

$$(1+z)z = 2$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = -2 \; ou \; 1$$

$$z_1 = -2 \Rightarrow \log_3 y_1 = -2$$

$$y_1 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

$$z_2 = 1 \Rightarrow \log_3 y_2 = 1$$

$$y_2 = 3$$

Multiplicando as raízes, temos:

$$y_1 y_2 = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Portanto, encontramos a resposta na letra a.

Gabarito: "a".

33. (IME/2017)

Resolva o sistema de equações, onde $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1 \\ \left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143} \end{cases}$$

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência dos logs:

$$\log_{\sqrt{3}} x > 0 \Rightarrow x > 1$$

$$\log_3 y > 0 \Rightarrow y > 1$$

Vamos usar a primeira equação:

$$\log_3\left(\log_{\sqrt{3}} x\right) - \log_{\sqrt{3}}(\log_3 y) = 1$$

Fazendo $\log_{\sqrt{3}} x = z$ e $\log_3 y = w$, temos:

$$\log_3 z - \log_{3^{\frac{1}{2}}} w = 1$$

$$\log_3 z = 1 + 2\log_3 w$$

$$\log_3 z = \log_3 3 + \log_3 w^2$$

$$\log_3 z = \log_3 3w^2$$

$$\Rightarrow z = 3w^2$$

Agora, vamos usar a segunda equação:

$$\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = 3^{143}$$

Aplicando log na base 3:

$$\log_3\left(y\sqrt[3]{x}\right)^2 = \log_3 3^{143}$$

$$2\left(\log_3 y + \log_3 x^{\frac{1}{3}}\right) = 143$$

$$2\log_3 y + \frac{2}{3}\log_3 x = 143$$

Substituindo $z = \log_{\sqrt{3}} x$ e $w = \log_3 y$:

$$z = \log_{\sqrt{3}} x = 2\log_3 x$$

$$\Rightarrow 2w + \frac{z}{3} = 143$$

$$6w + z = 143 \cdot 3$$

Substituindo $z = 3w^2$:

$$6w + 3w^2 = 143 \cdot 3$$

$$2w + w^2 = 143$$

$$w^2 + 2w - 143 = 0$$

$$w = \left(-1 \pm \sqrt{1 + 143}\right) = -1 \pm 12 = -13 \; ou \; 11$$

Mas pelas condições de existência, temos $w = \log_3 y > 0$. Então, a única solução é $w = 11$. Desse modo:

$$w = 11 \Rightarrow \log_3 y = 11 \Rightarrow y = 3^{11}$$

$$z = 3w^2 = 3 \cdot 11^2 = 363$$

$$2\log_3 x = 363$$

$$\Rightarrow x = 3^{\frac{363}{2}} = \sqrt{3}^{363}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\left(\sqrt{3}^{363}; 3^{11}\right)\right\}}$

---

34. (IME/2016/Modificada)

Sabendo-se que os números reais positivos a, b e c formam uma progressão geométrica e $\log\left(\frac{5c}{a}\right), \log\left(\frac{3b}{5c}\right)$ e $\log\left(\frac{a}{3b}\right)$ formam uma progressão aritmética, ambas nessa ordem. Prove que $b + c < a$.

Comentários

Do enunciado, temos:

$$(a, b, c) \text{ é uma PG}$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

$$\left(log\left(\frac{5c}{a}\right), log\left(\frac{3b}{5c}\right), log\left(\frac{a}{3b}\right)\right) \text{ é uma PA}$$

$$\Rightarrow 2\log\left(\frac{3b}{5c}\right) = \log\left(\frac{5c}{a}\right) + \log\left(\frac{a}{3b}\right)$$

$$\log\left(\frac{3b}{5c}\right)^2 = \log\left[\left(\frac{5c}{a}\right)\left(\frac{a}{3b}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3b}{5c}\right)^2 = \frac{5c}{3b}$$

$$(3b)^3 = (5c)^3$$

$$3b = 5c$$

$$\Rightarrow b = \frac{5}{3}c$$

Usando a informação da PG:

$$b^2 = ac$$

$$\left(\frac{5}{3}c\right)^2 = ac$$

$$\Rightarrow a = \frac{25}{9}c$$

Dessa forma, somando $b + c$, temos:

$$b + c = \frac{5}{3}c + c = \frac{8}{3}c < \frac{25}{9}c = a$$

$$\therefore b + c < a$$

Gabarito: Demonstração

35. (IME/2016)

Quantos inteiros k satisfazem à desigualdade $2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$?

a) 10

b) 89

c) 90

d) 99

e) 100

Comentários

Resolvendo a inequação:

Da condição de existência do log:

$$k > 0$$

$$2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10\log_{10^{-1}} k^{\frac{1}{4}} + 3 > 0$$

$$2\sqrt{\log_{10} k - 1} + 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{-1}\log_{10} k + 3 > 0$$

Substituindo $\log_{10} k = x$:

$$2\sqrt{x - 1} - \frac{5}{2}x + 3 > 0$$

$$4\sqrt{x - 1} > 5x - 6$$

Possibilidades:

$$\begin{cases} 5x - 6 \le 0 \\ x - 1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{6}{5} \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \le x \le \frac{6}{5}$$

$$\begin{cases} 5x - 6 \ge 0 \\ x - 1 \ge 0 \\ 16(x - 1) > (5x - 6)^2 \end{cases}$$

$$x \geq \frac{6}{5}$$

$$x \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq \frac{6}{5}$$

$$16(x-1) > 25x^2 - 60x + 36$$

$$25x^2 - 76x + 52 < 0$$

Raízes:

$$x = \frac{\left(38 \pm \sqrt{38^2 - 25 \cdot 52}\right)}{25} = \frac{38 \pm \sqrt{144}}{25} = \frac{38 \pm 12}{25} = 2\ ou\ \frac{26}{25}$$

Com isso, temos:

$$\frac{26}{25} < x < 2$$

Juntando com as outras condições, temos:

$$\frac{26}{25} < \frac{6}{5} < x < 2$$

$$\Rightarrow \frac{6}{5} < x < 2$$

Unindo os intervalos de soluções, temos:

$$x \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \cup \left(\frac{6}{5}, 2\right)$$

$$\Rightarrow x \in [1, 2)$$

Dessa forma, temos os valores de k:

$$\log_{10} k = x$$

$$1 \leq x < 2$$

$$\log_{10} 10^1 \leq \log_{10} x < \log_{10} 10^2$$

$$\Rightarrow 10 \leq x < 100$$

Então, os valores inteiros de x pertencem ao intervalo $[10,100)$. A quantidade é dada por:

$$n = 99 - 10 + 1 = 90$$

Com isso, encontramos o gabarito na letra c.

Gabarito: "c".

---

36. (IME/2015)

Determine os valores reais de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

Comentários

Simplificando a inequação, temos:

$$\frac{4}{\log_3 x^2 - 2} + \log_x \frac{1}{9} > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} + \log_x 3^{-2} > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} - 2\log_x 3 > 1$$

$$\frac{4}{2\log_3 x - 2} - \frac{2}{\log_3 x} > 1$$

Fazendo $\log_3 x = y$:

$$\frac{4}{2y - 2} - \frac{2}{y} > 1$$

$$\frac{4y - 4(y - 1)}{2y(y - 1)} - 1 > 0$$

$$\frac{4 - 2y(y - 1)}{2y(y - 1)} > 0$$

$$\frac{-2y^2 + 2y + 4}{2y(y - 1)} > 0$$

$$\frac{-y^2 + y + 2}{y(y - 1)} > 0$$

$$-\frac{(y + 1)(y - 2)}{y(y - 1)} > 0$$

$$\frac{(y + 1)(y - 2)}{y(y - 1)} < 0$$

Estudando o sinal das funções acima, temos:

x	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$x > 2$
$(y+1)(y-2)$	+	−	−	−	+
$y(y-1)$	+	+	−	+	+
$\frac{(y+1)(y-2)}{y(y-1)}$	+	−	+	−	+

Analisando a tabela, vemos que y deve pertencer ao intervalo:

$$-1 < y < 0 \; ou \; 1 < y < 2$$

$$-1 < \log_3 x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3} < x < 1$$

$$1 < \log_3 x < 2 \Rightarrow 3 < x < 9$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \frac{1}{3} < x < 1 \; ou \; 3 < x < 9\right\}}$

37. (IME/2015)

Sejam x e y números reais não nulos tais que:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

O valor de $\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}}$ é:

a) 1

b) $\sqrt{\frac{\pi}{e}}$

c) $\sqrt{\frac{a\cdot e}{b\cdot \pi}}$

d) $a - b$

e) $\frac{(a+b)^{\frac{e}{\pi}}}{\pi}$

Comentários

Simplificando o sistema, temos:

$$\begin{cases} \log_x y^{\pi} + \log_y x^{e} = a \\ \dfrac{1}{\log_y x^{\pi^{-1}}} - \dfrac{1}{\log_x y^{e^{-1}}} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \log_x y + e \log_y x = a \\ \dfrac{1}{\frac{1}{\pi}\log_y x} - \dfrac{1}{\frac{1}{e}\log_x y} = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi \log_x y + e \log_y x = a \\ \pi \log_x y - e \log_y x = b \end{cases}$$

Somando as equações, encontramos:

$$2\pi \log_x y = a + b$$

$$\log_x y = \frac{a+b}{2\pi}$$

$$\frac{\log y}{\log x} = \frac{a+b}{2\pi}$$

$$\log y^{2\pi} = \log x^{a+b}$$
$$\Rightarrow y^{2\pi} = x^{a+b}$$

Subtraindo as equações:

$$2e \log_y x = a - b$$
$$2e \log x = (a-b)\log y$$
$$\log x^{2e} = \log y^{a-b}$$
$$\Rightarrow x^{2e} = y^{a-b}$$

Queremos calcular:

$$\frac{x^{a+b+2e}}{y^{a-b+2\pi}} = \frac{x^{a+b}\cdot x^{2e}}{y^{a-b}\cdot y^{2\pi}}$$

Usando as relações que encontramos, temos:

$$\frac{x^{a+b}\cdot x^{2e}}{y^{a-b}\cdot y^{2\pi}} = \frac{y^{2\pi}\cdot y^{a-b}}{y^{a-b}\cdot y^{2\pi}} = 1$$

Portanto, o gabarito é a letra a.

Gabarito: "a".

---

38. (IME/2014)

Sabe-se que $y\cdot z\cdot\sqrt{z\cdot\sqrt{x}} = x\cdot y^3\cdot z^2 = \frac{x}{z\cdot\sqrt{y\cdot z}} = e$, em que e é a base dos logaritmos naturais. O valor de $x+y+z$ é

a) e^3+e^2+1

b) $e^2+e^{-1}+e$

c) e^3+1

d) $e^3+e^{-2}+e$

e) $e^3+e^{-2}+e^{-1}$

Comentários

Analisando as condições de existência dos radicais, encontramos:

$$x, y, z > 0$$

Vamos usar as equações dadas para encontrar os valores de x, y, z:

$$y\cdot z\cdot\sqrt{z\cdot\sqrt{x}} = x\cdot y^3\cdot z^2 = \frac{x}{z\cdot\sqrt{y\cdot z}} = e$$

$$\begin{cases} y\cdot z\cdot\sqrt{z\cdot\sqrt{x}} = e \\ x\cdot y^3\cdot z^2 = e \\ \dfrac{x}{z\cdot\sqrt{y\cdot z}} = e \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} y^2 \cdot z^2 \cdot z \cdot \sqrt{x} = e^2 \\ x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \\ \dfrac{x^2}{z^2 \cdot (y \cdot z)} = e^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^4 \cdot z^6 \cdot x = e^4 \quad (I) \\ x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \quad (II) \\ x^2 \cdot y^{-1} \cdot z^{-3} = e^2 \quad (III) \end{cases}$$

Elevando a equação (III) ao quadrado e multiplicando por (I):

$$x^4 \cdot y^{-2} \cdot z^{-6} \cdot (y^4 \cdot z^6 \cdot x) = e^4 \cdot e^4$$

$$x^5 \cdot y^2 = e^8 \ \ (IV)$$

Dividindo a equação (I) pelo cubo da equação (II), temos:

$$\frac{y^4 \cdot z^6 \cdot x}{x^3 \cdot y^9 \cdot z^6} = \frac{e^4}{e^3}$$

$$x^{-2} \cdot y^{-5} = e \ \ (V)$$

Elevando (IV) ao quadrado e (V) à quinta e multiplicando ambos, temos:

$$x^{10} \cdot y^4 = e^{16}$$

$$x^{-10} \cdot y^{-25} = e^5$$

$$\Rightarrow y^{-21} = e^{21}$$

$$\Rightarrow y = e^{-1}$$

Substituindo em (V):

$$x^{-2} \cdot e^5 = e$$

$$x^{-2} = e^{-4}$$

$$\Rightarrow x = \pm e^2$$

Mas da condição de existência, $x > 0$. Então, $x = e^2$.

Substituindo x e y na equação (II):

$$x \cdot y^3 \cdot z^2 = e \qquad (II)$$

$$e^2 \cdot e^{-3} \cdot z^2 = e$$

$$z^2 = e^2$$

$$\Rightarrow z = e$$

Portanto, a soma pedida é dada por:

$$x + y + z = e^2 + e^{-1} + e$$

Encontramos a resposta na letra b.

Gabarito: "b".

39. (IME/2014)

Resolver o sistema de equações

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x} \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y \end{cases}$$

Comentários

Das condições de existência iniciais, temos:

Dos radicais:

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Do logaritmo:

$$\frac{y}{x} > 0$$

Fazendo a intersecção entre eles:

$$\Rightarrow x, y > 0$$

Analisando a primeira equação:

$$\sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \frac{y}{x}$$

Se $x > y$, temos $\frac{y}{x} < 1$ e consequentemente $\log_3 \frac{y}{x} < 0$.

$$x > y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} > 0$$

$$\log_3 \frac{y}{x} < 0$$

Nesse caso, é impossível ter valores de x e y que satisfaçam as condições acima.

Se $x < y$:

$$\frac{y}{x} > 1 \Rightarrow \log_3 \frac{y}{x} > 0$$

$$x < y \Rightarrow \sqrt{x} - \sqrt{y} < 0$$

Também temos um sistema impossível.

Portanto a única solução é $x = y$:

$$\sqrt{x} - \sqrt{x} = 0 = \log_3 1$$

Substituindo $x = y$ na segunda equação, temos:

$$2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^x$$

$$4 \cdot 2^x + (2^3)^x = 5 \cdot (2^2)^x$$

Fazendo $2^x = z$, temos:

$$4z + z^3 = 5z^2$$

$$z^3 - 5z^2 + 4z = 0$$

$$z(z^2 - 5z + 4) = 0$$

$$z(z - 4)(z - 1) = 0$$

Dessa forma, encontramos as raízes:

$$z = 0 \; ou \; z = 4 \; ou \; z = 1$$

$$z = 0 \Rightarrow 2^x = 0 \Rightarrow impossível$$

$$z = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

$$z = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0 \text{ (impossível, pois } x > 0\text{)}$$

Portanto, a única solução é $x = y = 2$.

Gabarito: $x = y = 2$

40. (IME/2014)

Qual é o menor número?

a) $\pi \cdot 8!$

b) 9^9

c) $2^{2^{2^2}}$

d) 3^{3^3}

e) $2^{13} \cdot 5^3$

Comentários

Ainda não estudamos fatorial, mas o número $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$.

Vamos comparar os números:

$$\pi \cdot 8! = \pi \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$9^9 = (3^2)^9 = 3^{18}$$

$$2^{2^{2^2}} = 2^{2^4} = 2^{16}$$

$$3^{3^3} = 3^{27}$$

$$2^{13} \cdot 5^3$$

Analisando os valores acima, temos:

$$2^{16} < 3^{18} < 3^{27}$$

$$2^{13} \cdot (2^2)^3 < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{13} \cdot 5^3 = 3^{13} \cdot 125 < 3^{13} \cdot 3^5 = 3^{18}$$

$$2^{16} < 2^{19} < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{18}$$

Dessa forma:

$$2^{16} < 2^{13} \cdot 5^3 < 3^{18} < 3^{27}$$

Resta saber se $\pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ é menor que 2^{16}:

Testando $2^{16} < \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$:

$$2^{16} < \pi \cdot 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2^9 < \pi \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$2^3 \cdot 2^6 < 3^2 \cdot \pi \cdot 35$$

$$8 \cdot 64 < 9 \cdot 105 < 9 \cdot \pi \cdot 35$$

A desigualdade acima é verdadeira, logo o menor número é 2^{16}. Encontramos o gabarito na letra c.

Gabarito: "c".

41. (IME/2013)

Considere a equação $\log_{3x}\frac{3}{x}+(\log_3 x)^2=1$. A soma dos quadrados das soluções reais dessa equação está contida no intervalo

a) $[0,5)$

b) $[5,10)$

c) $[10,15)$

d) $[15,20)$

e) $[20,\infty)$

Comentários

Inicialmente, devemos verificar a condição de existência:

$$x>0$$

Simplificando a equação, obtemos:

$$\log_{3x}\frac{3}{x}+(\log_3 x)^2=1$$

$$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_3 3x}+(\log_3 x)^2=1$$

$$\frac{1-\log_3 x}{1+\log_3 x}+(\log_3 x)^2=1$$

Substituindo $\log_3 x=y$:

$$\frac{1-y}{1+y}+y^2=1$$

$$\frac{(1-y)+y^2(y+1)}{1+y}=1$$

$$1-y+y^3+y^2=1+y$$

$$y^3+y^2-2y=0$$

$$y(y^2+y-2)=0$$

$$y(y+2)(y-1)=0$$

Encontrando as raízes da equação, temos:

$$y_1=0\Rightarrow\log_3 x_1=0\Rightarrow x_1=3^0=1$$

$$y_2=-2\Rightarrow\log_3 x_2=-2\Rightarrow x_2=\frac{1}{9}$$

$$y_3=1\Rightarrow\log_3 x_3=1\Rightarrow x_3=3$$

O problema pede a soma dos quadrados das soluções, então:

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1^2+\frac{1}{9^2}+3^2=1+\frac{1}{81}+9=10+\frac{1}{81}$$

Analisando as alternativas, encontramos:

$$10 < 10 + \frac{1}{81} < 15$$

$$\Rightarrow 10 + \frac{1}{81} \subset [10, 15)$$

O que nos leva à alternativa c.

Gabarito: "c".

42. (IME/2012)

Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale:

a) $\frac{x+2y}{1-x}$

b) $\frac{x+y}{1-x}$

c) $\frac{2x+y}{1+x}$

d) $\frac{x+2y}{1+x}$

e) $\frac{3x+2y}{(1-x)}$

Comentários

Vamos manipular $\log_5 18$ de modo a obter os fatores $\log 2$ e $\log 3$. Mudando a base e fatorando os números:

$$\log_5 18 = \frac{\log 2 \cdot 3^2}{\log\left(\frac{10}{2}\right)} = \frac{(\log 2 + 2\log 3)}{1 - \log 2}$$

Substituindo $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$:

$$\Rightarrow \log_5 18 = \frac{x + 2y}{1 - x}$$

Dessa forma, encontramos o gabarito na letra a.

Gabarito: "a".

43. (IME/2010)

Seja $f(x) = |3 - \log(x)|, x \in \mathbb{R}$. Sendo n um número inteiro positivo, a desigualdade

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \leq \frac{9}{4}$$

Somente é possível se:

Obs.: log representa a função logarítmica na base 10.

a) $0 \leq x \leq 10^6$

b) $10^{-6} \leq x \leq 10^8$

c) $10^3 \leq x \leq 10^6$

d) $10^0 \leq x \leq 10^6$

e) $10^{-6} \leq x \leq 10^{6}$

Comentários

Vamos verificar a desigualdade para vermos se encontramos alguma relação para f:

$$\left|\frac{f(x)}{4}\right| + \left|\frac{2f(x)}{12}\right| + \left|\frac{4f(x)}{36}\right| + \cdots + \left|\frac{2^{n-3}f(x)}{3^{n-1}}\right| + \cdots \leq \frac{9}{4}$$

$$\frac{1}{4}|f(x)| + \frac{2}{12}|f(x)| + \frac{4}{36}|f(x)| + \cdots + \frac{2^{n-3}}{3^{n-1}}|f(x)| + \cdots \leq \frac{9}{4}$$

$$|f(x)|\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{12} + \frac{4}{36} + \cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right) \leq \frac{9}{4}$$

O número em vermelho é a soma de uma PG infinita de razão 2/3 e $a_1 = 1/4$. Desse modo, podemos usar a fórmula da soma infinita da PG:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow |f(x)|\left(\frac{1}{4} + \frac{2}{12} + \frac{4}{36} + \cdots + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots\right) \leq \frac{9}{4}$$

$$|f(x)|\frac{3}{4} \leq \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow |f(x)| \leq 3$$

$$\Rightarrow -3 \leq f(x) \leq 3$$

Substituindo $f(x) = |3 - \log x|$, temos:

$$-3 \leq |3 - \log x| \leq 3$$

Das propriedades do módulo, sabemos que $|3 - \log x| \geq 0$.

Então:

$$0 \leq |3 - \log x| \leq 3$$

$$\Rightarrow |3 - \log x| \leq 3$$

$$-3 \leq 3 - \log x \leq 3$$

$$-6 \leq -\log x \leq 0$$

$$0 \leq \log x \leq 6$$

$$\Rightarrow 10^{0} \leq x \leq 10^{6}$$

Portanto, encontramos a resposta na letra d.

Gabarito: "d".