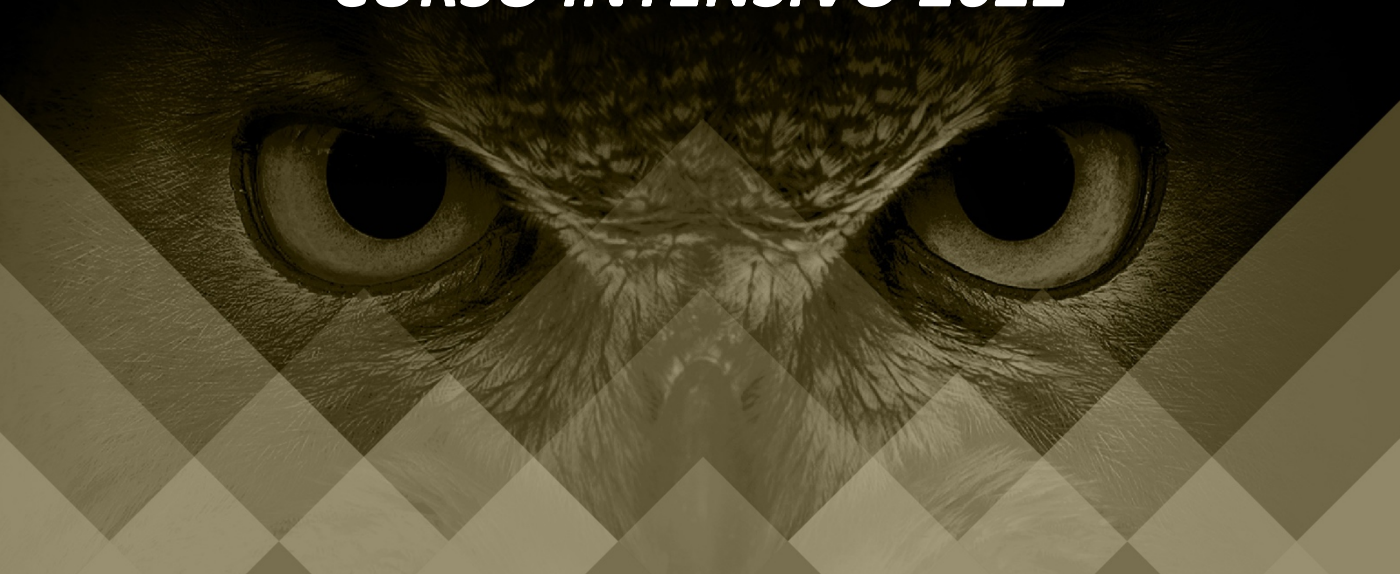
Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022



ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Olá,

Vamos iniciar o estudo da Geometria Plana. Nessa aula, veremos alguns conceitos primitivos como o que é um ponto, reta e plano. Estudaremos os principais postulados da geometria plana, segmentos de reta, razões de secção e razão harmônicas. Também estudaremos ângulos e um pouco de triângulos.

Essa aula é uma introdução à Geometria Plana e, por esse motivo, não haverá muitas questões de concursos anteriores.

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Geometria Euclidiana Plana

A geometria euclidiana, também conhecida como geometria plana, é a parte da matemática que estuda a construção e propriedades de figuras planas como triângulos, circunferência, quadriláteros etc.

Antes de iniciar, devemos aprender as noções primitivas de ponto, reta e plano e os postulados que relacionam esses entes geométricos.

1.1. Noções Primitivas

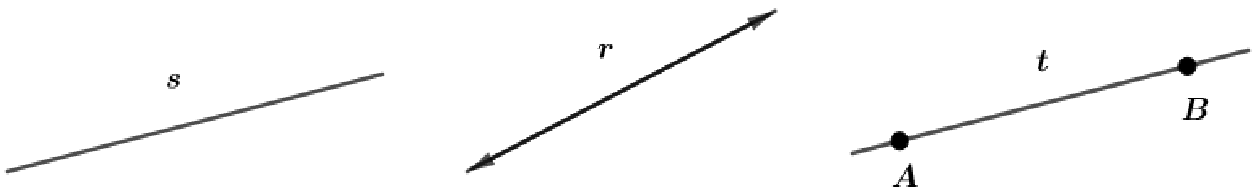
As noções primitivas são apresentadas sem definição. Vejamos:

1.1.1. Ponto

Representamos o ponto por letras maiúsculas do alfabeto: $A, B, C, D, E, \ldots$ Devemos entender o ponto como a menor parte dos entes geométricos. Ele é adimensional.

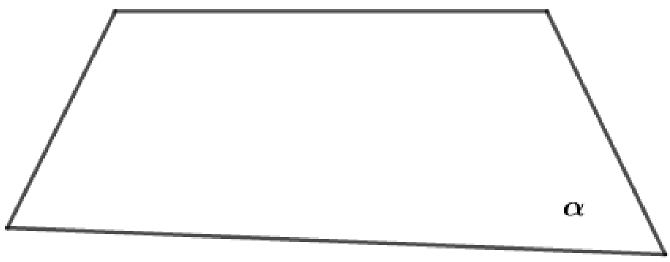
1.1.2. Reta

Usamos as letras minúsculas do alfabeto para representar uma reta: $a, b, c, d, \ldots$ A reta é o ente geométrico cujas extremidades não possuem limites, ela é contínua em ambos os lados. Por esse motivo, podemos usar setas para indicar a continuidade da reta nos dois sentidos. No exemplo abaixo, temos as retas r, s, t. No caso da reta t, $\overline{AB}$ é um segmento de reta.



1.1.3. Plano

Usualmente, representamos o plano com letras minúsculas gregas: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ Assim como a reta, ele deve ser entendido como um plano ilimitado sem bordas que o limite.



1.2. Postulados

Postulados, também conhecido como axiomas, são proposições primitivas que dispensam demonstrações. Elas são aceitas como verdades incontestáveis. Vamos estudá-las.

1.2.1. Postulado da existência

Numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.
Num plano, existem infinitos pontos.

1.2.2. Postulado da determinação

Dois pontos distintos determinam uma única reta que passa por eles.
Três pontos não colineares determinam um único plano que passa por eles.

1.2.3. Postulado da inclusão

Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

1.2.4. Postulado da separação

Toda reta r de um plano α separa-o em dois semiplanos α_1 e α_2 e a origem dos semiplanos é a reta dada.

1.2.5. Postulados de Euclides

Os postulados de Euclides são divididos em cinco:

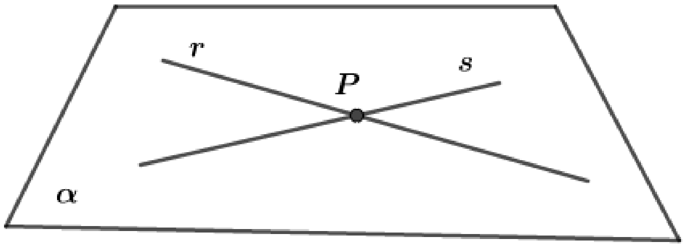
TOME NOTA!

Postulado I: Dados dois pontos distintos, existe uma única reta que os une.
Postulado II: Qualquer segmento de reta pode ser prolongado a uma reta.
Postulado III: Dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se construir uma circunferência cujo centro é o ponto dado e o raio é a distância dada.
Postulado IV: Todos os ângulos retos são iguais.
Postulado V: Se uma reta, interceptando duas outras, forma ângulos internos de um mesmo lado cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então estas duas retas, se prolongadas indefinidamente, se encontram no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

1.3. Definições

1.3.1. Retas concorrentes

Duas retas distintas são concorrentes se, e somente se, elas têm um único ponto comum.

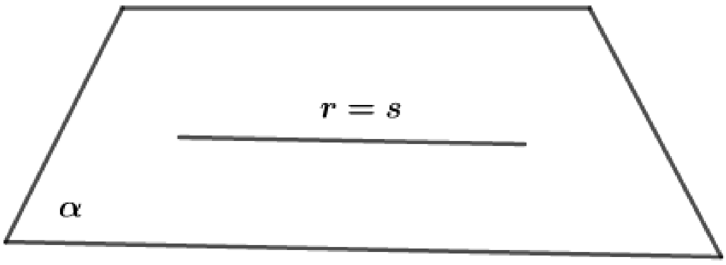


$$r \cap s = \{P\}$$

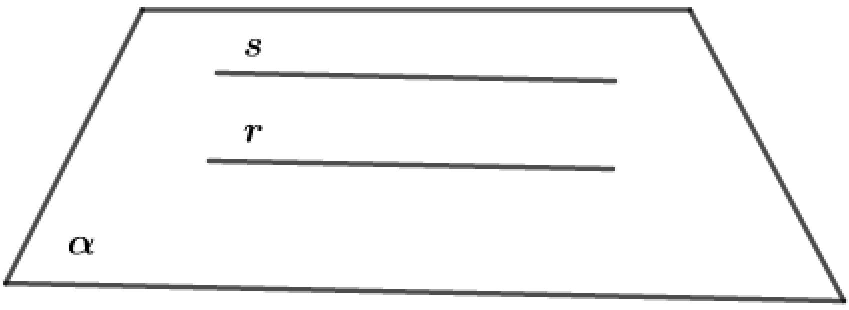
1.3.2. Retas paralelas

Se as retas r e s são paralelas e distintas entre si, então $r \cap s = \emptyset$. Simbolicamente, $r//s$ representa que a reta r é paralela à reta s. Temos duas possibilidades para $r//s$:

1) r e s são coincidentes:

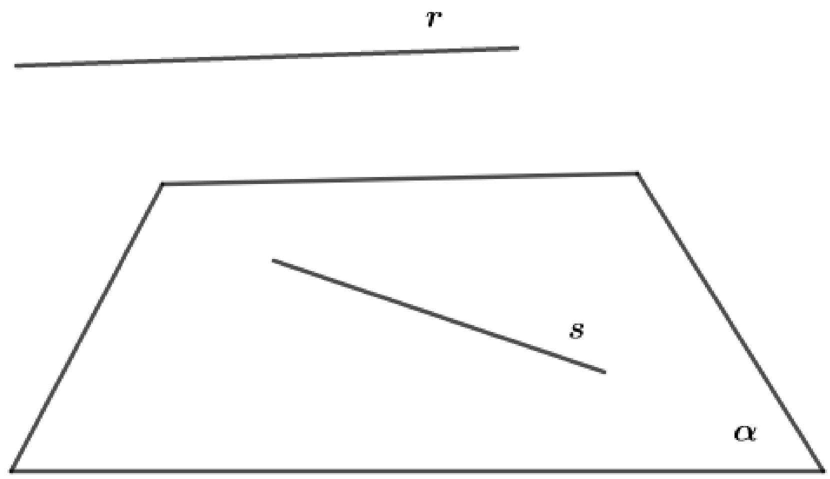


2) r e s são distintas:



1.3.3. Retas reversas

Duas retas são reversas se, e somente se, não pertencem a um mesmo plano.



$(r \text{ e } s \text{ são reversas}) \Leftrightarrow (\nexists \alpha \text{ tal que } r, s \subset \alpha \text{ e } r \cap s = \emptyset)$

Perceba que retas reversas não se interceptam e não podem ser paralelas entre si.

2. Segmento de Reta

Vimos que um segmento de reta é uma parte de uma reta e que a reta é infinita por definição. Vamos estudar as notações usuais para os diferentes tipos de retas:

Reta $\overleftrightarrow{AB}$:

Segmento de reta $\overline{AB}$:

Semirreta $\overrightarrow{AB}$:

Semirreta $\overrightarrow{BA}$:

Usualmente, representamos a medida do segmento $\overline{AB}$ por $med(\overline{AB})$ ou simplesmente AB.

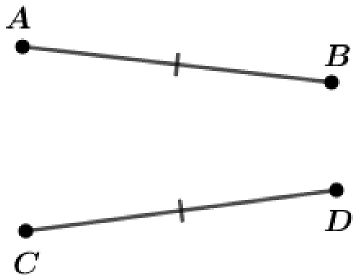
2.1. Classificação dos Segmentos

2.1.1. Congruentes

Dois segmentos de reta são congruentes quando eles possuem as mesmas medidas. Usamos o símbolo $\equiv$ para indicar a congruência.

Exemplo:

$$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$$



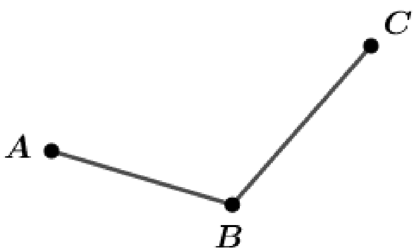
2.1.2. Colineares

Dois segmentos de reta são colineares quando eles pertencem a uma mesma reta suporte.
Exemplo:

2.1.3. Consecutivos

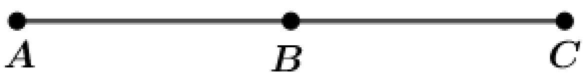
Dois segmentos de reta são consecutivos quando eles possuem uma extremidade comum.
Exemplo:

$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são consecutivos



2.1.4. Adjacentes

Dois segmentos de reta são adjacentes quando são colineares e consecutivos e possuem apenas uma extremidade comum.
Exemplo:



$\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ são adjacentes, pois possuem apenas o ponto B comum:

$$\overline{AB} \cap \overline{BC} = \{B\}$$

MN e NP não são adjacentes, pois possuem mais de uma extremidade em comum:

$$\overline{MN} \cap \overline{NP} = \overline{NP}$$

2.1.5. Comensuráveis

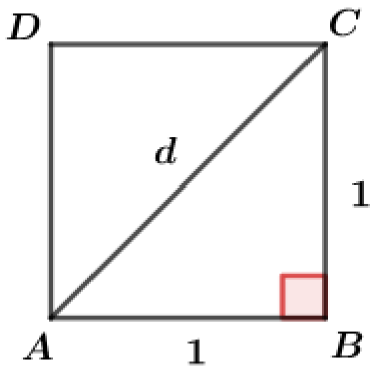
Dizemos que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis se, e somente se, existe uma unidade de segmento $u \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $\overline{AB} = n \cdot u$ e $\overline{CD} = m \cdot u$ com $m, n \in \mathbb{N}^*$. De modo mais simples, comensurável significa que algo pode ser medido. Assim, se AB é comensurável, podemos escrevê-lo como um múltiplo natural de uma unidade de segmento.

Também podemos dizer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são comensuráveis quando a razão entre eles for um número racional. Assim, temos:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{n \cdot u}{m \cdot u} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}_+^*$$

2.1.6. Incomensuráveis

Quando não pudermos medir os segmentos, dizemos que eles são incomensuráveis. Podemos tomar a diagonal e o lado de um quadrado como exemplo:



Como o triângulo ABC é retângulo, podemos aplicar o Teorema de Pitágoras para encontrar o valor da diagonal:

$$d^2 = 1^2 + 1^2 \Rightarrow d = \sqrt{2}$$

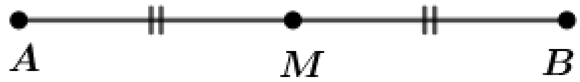
Assim, fazendo a razão entre a diagonal e o lado do quadrado, temos:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_+^*$$

Logo, como a razão entre a diagonal e o lado do quadrado não é um número racional, dizemos que o lado do quadrado não é comensurável com sua diagonal.

2.2. Ponto Médio de um Segmento

Um ponto M é chamado de ponto médio de um segmento $\overline{AB}$ quando $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$ e M está entre A e B.



Vamos provar a unicidade do ponto médio do segmento $\overline{AB}$:
Supondo que o ponto médio não é único, podemos ter os pontos médios M e N distintos tal que:

$$\overline{AM} \equiv \overline{MB} \text{ e } \overline{AN} \equiv \overline{NB}$$

Temos dois casos:
Caso 1)

M está entre A e N, então $\overline{AN} > \overline{AM}$

N está entre M e B, então $\overline{MB} > \overline{NB}$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{AM} \equiv \overline{MB} > \overline{NB}$$

$$\Rightarrow \overline{AN} > \overline{NB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$.

Caso 2)

N está entre A e M, então $\overline{AM} > \overline{AN}$

M está entre N e B, então $\overline{NB} > \overline{MB}$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{AN} \equiv \overline{NB} > \overline{MB}$$

$$\Rightarrow \overline{AM} > \overline{MB}$$

Absurdo! Pois, pela hipótese $\overline{AM} \equiv \overline{MB}$.

Portanto, o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ é único.

2.3. Razão de Secção de um Segmento

2.3.1. Interna

Dizemos que M divide o segmento $\overline{AB}$ internamente na razão k quando:

$$\frac{AM}{MB} = k$$

Perceba que $M \in \overline{AB}$ e $AM + MB = AB$. $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ são chamados de segmentos aditivos.
Exemplo:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

2.3.2. Externa

Dizemos que N divide o segmento AB externamente na razão k quando:

$$\frac{AN}{NB} = k$$

Nesse caso, $N \notin \overline{AB}$, $N \in \overleftrightarrow{AB}$ e $|AN - NB| = AB$. $\overline{AN}$ e $\overline{NB}$ são segmentos subtrativos.
Exemplo:

$$\frac{AN}{NB} = \frac{6}{2} = 3$$

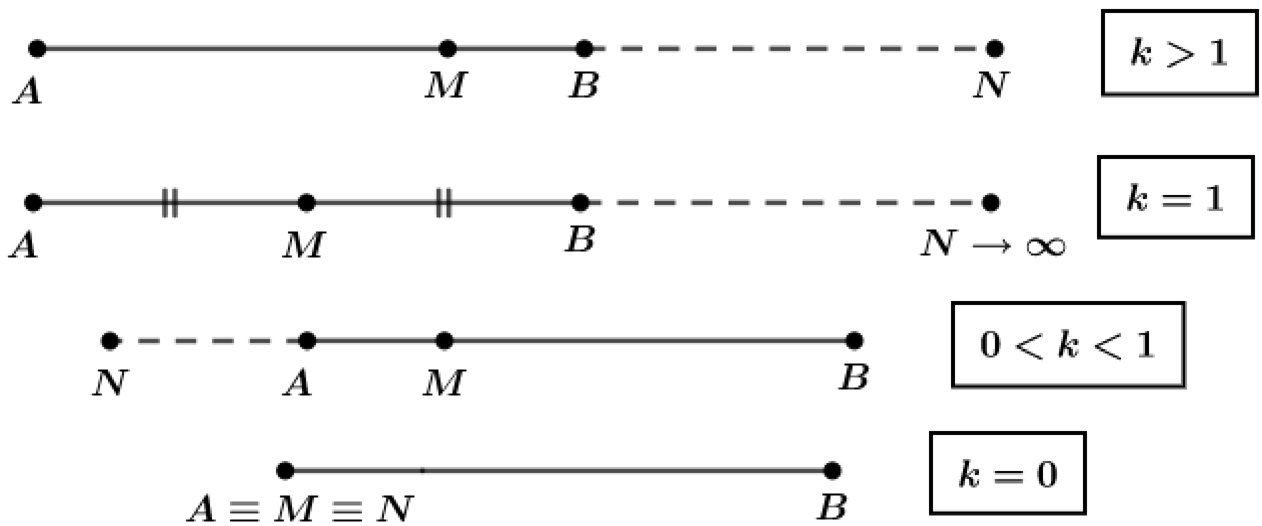
2.4. Divisão Harmônica

2.4.1. Definição

Os pontos M e N dividem harmonicamente o segmento $\overline{AB}$ na razão k quando:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k \ (k \in \mathbb{R}_+)$$

Esses pontos são chamados de conjugados harmônicos de $\overline{AB}$ na razão k.
Para cada valor de k, temos as seguintes situações:



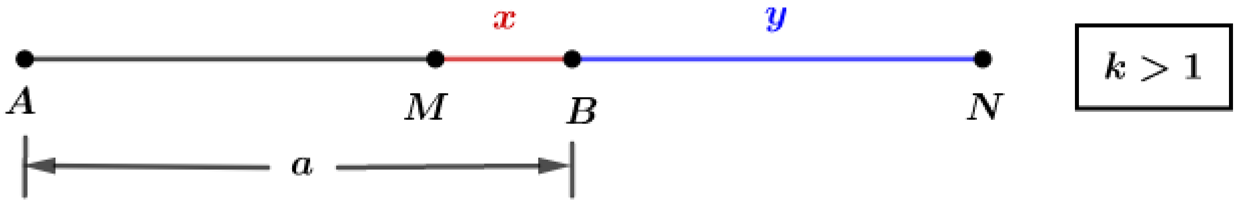
2.4.2. Propriedades

$$\boldsymbol{P1})\ \frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} - \frac{1}{AN}, k < 1$$
$$\boldsymbol{P2})\frac{2}{AB} = \frac{1}{AM} + \frac{1}{AN}, k > 1$$
$$\boldsymbol{P3})\text{ Se } O \text{ é o ponto médio de } \overline{AB}, \text{então: } OA^2 = OM \cdot ON$$

2.4.3. Distância entre os Conjugados Harmônicos

Podemos calcular a distância entre os conjugados harmônicos se forem dados a medida de AB e a razão k.

Vamos analisar a situação para $k > 1$.



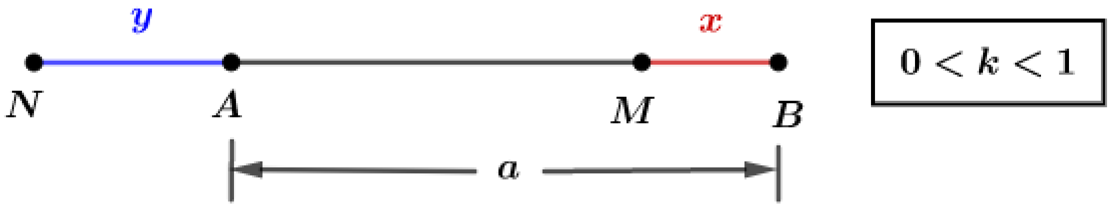
Dados $AB = a$ e a razão harmônica k, temos:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = k$$
$$\frac{AM}{MB} = \frac{a - x}{x} \Rightarrow \frac{a - x}{x} = k \Rightarrow a - x = kx \Rightarrow x = \frac{a}{k + 1}$$
$$\frac{AN}{NB} = \frac{a + y}{y} \Rightarrow \frac{a + y}{y} = k \Rightarrow a + y = ky \Rightarrow y = \frac{a}{k - 1}$$

A distância entre os conjugados harmônicos é dada por:

$$MN = x + y = \frac{a}{k + 1} + \frac{a}{k - 1} = \frac{2ak}{k^2 - 1}$$
$$\boxed{MN = \frac{2ak}{k^2 - 1}}$$

Para $0 < k < 1$:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{a - x}{x} = k \Rightarrow a - x = xk \Rightarrow x = \frac{a}{1 + k}$$
$$\frac{AN}{NB} = \frac{y}{a + y} = k \Rightarrow y = ak + ky \Rightarrow y = \frac{ak}{1 - k}$$

Calculando a distância entre os conjugados harmônicos:

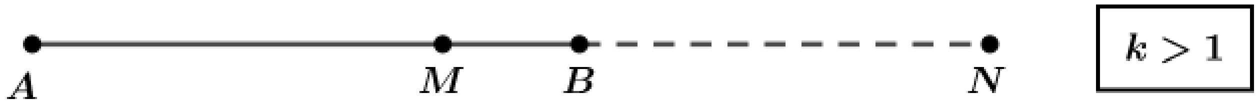
$$MN = y + a - x = \frac{ak}{1 - k} + a - \frac{a}{1 + k} = \frac{\left(ak(1 + k) + a(1 - k^2) - a(1 - k)\right)}{1 - k^2}$$
$$\boxed{MN = \frac{2ak}{1 - k^2}}$$

Portanto, para qualquer valor de k, temos:

$$\boxed{MN = \frac{2ak}{|k^2 - 1|}}$$

2.4.4. Média Harmônica

Dados AM e AN, podemos escrever AB como a média harmônica de AM e AN.
Para $k > 1$:



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB}$$
$$\frac{AM}{AB - AM} = \frac{AN}{AN - AB}$$
$$AM \cdot AN - AB \cdot AM = AB \cdot AN - AM \cdot AN$$
$$AB(AM + AN) = 2AM \cdot AN$$
$$AB = \frac{2AM \cdot AN}{AM + AN}$$

Portanto:

$$\boxed{AB = \frac{2}{\frac{1}{AN} + \frac{1}{AM}}}$$

Essa fórmula é válida apenas para o caso $k > 1$.

2.4.5. Divisão em Média e Extrema Razão

Dado o ponto X, dizemos que X divide o segmento AB em média e extrema razão quando satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB} = \varphi$$

φ, lê-se “phi”, é conhecido como a razão áurea ou número de ouro. Vamos calcular seu valor. Temos a seguinte figura:

$$\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{XB}$$
$$\frac{a + b}{a} = \frac{a}{b}$$
$$a^2 - ab - b^2 = 0 \quad (I)$$

A razão áurea é dada por:

$$\varphi = \frac{AX}{XB} = \frac{a}{b}$$

Então, dividindo a equação (I) por b^2, temos:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{a}{b} - 1 = 0$$

Substituindo $\varphi = a/b$:

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$$

Para encontrar o valor da razão, devemos calcular as raízes da equação. Lembrando que a razão sempre é um número não negativo, temos:

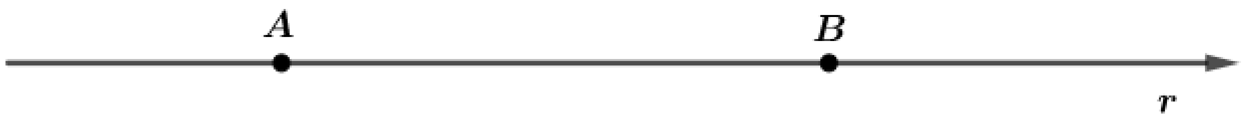
$$\varphi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \ ou \ \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Como $\varphi > 0$, temos:

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \cong 1{,}618$$

2.5. Segmento Orientado

Quando fixamos o sentido de percurso de uma reta, considerado positivo e indicado por uma seta, obtemos uma reta orientada. Vejamos um exemplo:

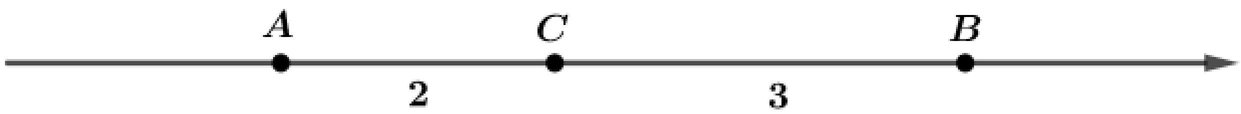


A reta r é orientada. O segmento $\overline{AB} \subset r$ é um segmento orientado cuja direção é a mesma de r e o sentido vai de A para B.

Para indicar a medida de um segmento orientado $\overline{AB}$, usamos a notação:

$$|\overline{AB}| = med(\overline{AB})$$

Exemplo:

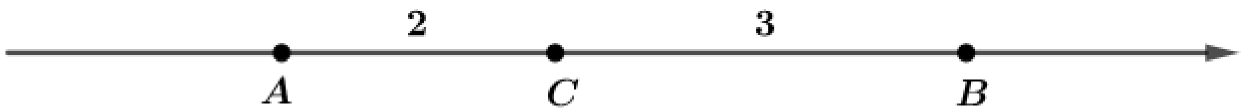


$$\overline{AC} + \overline{BC} = 2 + (-3) = -1$$
$$\overline{AC} + \overline{CB} = 2 + 3 = 5 = \overline{AB}$$
$$\overline{AB} + \overline{BA} = 5 + (-5) = 0$$

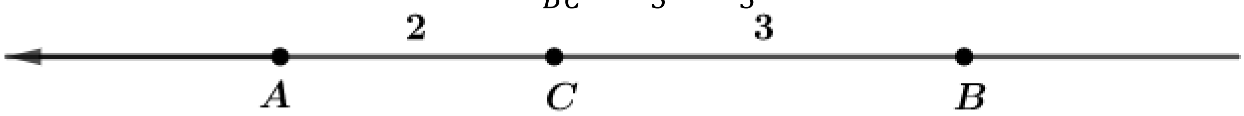
Perceba que o segmento orientado $\overline{AB}$ possui sentido de A para B e o segmento orientado $\overline{BA}$ possui sentido de B para A. Quando o sentido é contrário ao sentido de percurso da reta, devemos colocar o sinal negativo na medida do segmento.

2.6. Razão de Secção de Segmentos Orientados

Quando usamos segmentos orientados, a ordem com que os segmentos são apresentados importa no cálculo da razão. Vejamos alguns exemplos:



$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{-3} = -\frac{5}{3}$$



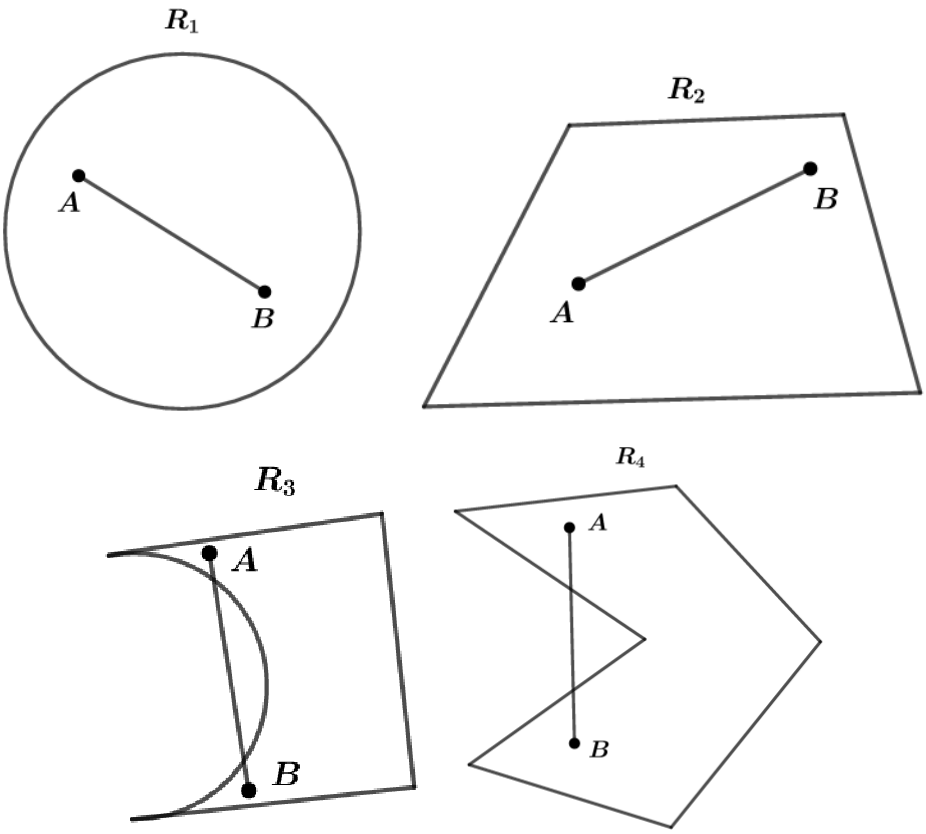
$$k = \frac{AB}{BC} = \frac{-5}{3} = -\frac{5}{3}$$

3. Ângulos

3.1. Região Convexa e Região Côncava

Um conjunto de pontos é convexo se, e somente se, para todo par de pontos A e B do conjunto, o segmento $\overline{AB}$ está inteiramente contida no conjunto. Caso contrário, esse conjunto de pontos é côncavo.

Exemplos:



Perceba que para os conjuntos R_1 e R_2, todos os pontos A e B dentro desses conjuntos estão inteiramente contidos no conjunto. Isso não ocorre para os conjuntos R_3 e R_4. Logo, os conjuntos R_1 e R_2 são convexos e os conjuntos R_3 e R_4 são côncavos.

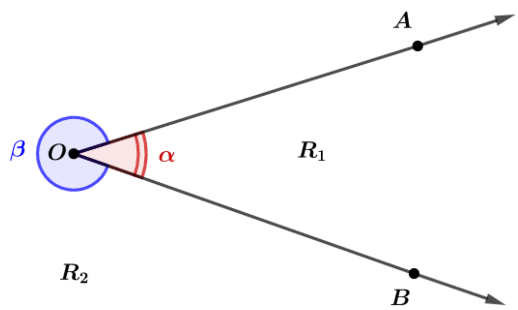
Usando símbolos matemáticos:

$$\boxed{\boldsymbol{R} \text{ é } \boldsymbol{convexa} \Leftrightarrow (\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R} \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AB}} \subset \boldsymbol{R})}$$

$$\boxed{\boldsymbol{R} \text{ é } \boldsymbol{côncava} \Leftrightarrow (\exists \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \boldsymbol{R} \ \boldsymbol{e} \ \boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{B} \rightarrow \overline{\boldsymbol{AB}} \not\subset \boldsymbol{R})}$$

3.2. Definição de Ângulo

Chamamos de ângulo a figura formada por duas semirretas não colineares de mesma origem.

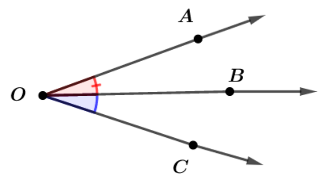


O ponto O é o vértice do ângulo e as semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ são os lados do ângulo.
Perceba que, caso as semirretas não sejam opostas, o ângulo determina duas regiões angulares, um convexo e um côncavo. A região interna do ângulo R_1 é convexa e a região externa R_2 é côncava. α é a notação usada para representar o ângulo da região convexa e β é o ângulo da região côncava. Também podemos usar a notação $\alpha = A\hat{O}B = \hat{O}$.

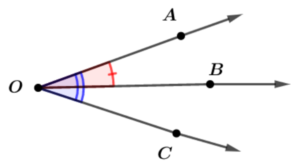
3.3. Classificação dos Ângulos

3.3.1. Ângulo Adjacente

Dois ângulos são adjacentes se, e somente se, não tem pontos internos comuns.
Exemplos:



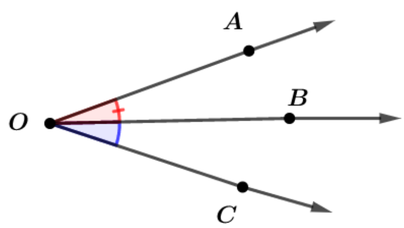
$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são adjacentes



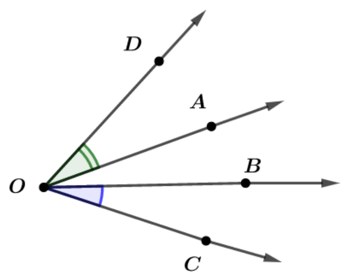
$A\hat{O}B$ e $A\hat{O}C$ não são adjacentes, pois $A\hat{O}B$ possui pontos internos comuns com $A\hat{O}C$

3.3.2. Ângulo Consecutivo

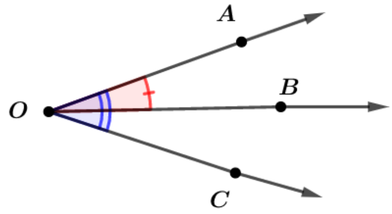
Dois ângulos são consecutivos se, e somente se, um lado de um deles coincide com o lado do outro.
Exemplos:



$A\hat{O}B$ e $B\hat{O}C$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OB}$ em comum



$A\hat{O}D$ e $B\hat{O}C$ não são consecutivos, pois não possuem lado em comum

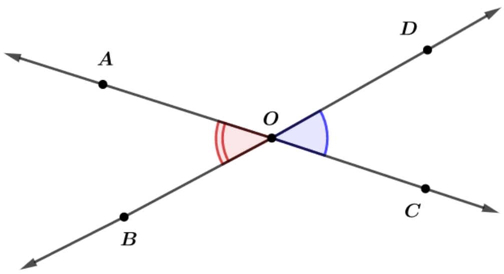


$A\hat{O}C$ e $A\hat{O}B$ são consecutivos, pois possuem o lado $\overrightarrow{OA}$ em comum

3.3.3. Ângulos Opostos pelo Vértice

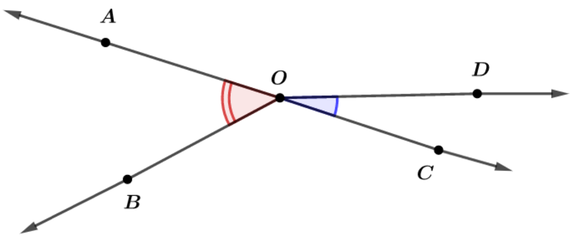
Dois ângulos são opostos pelo vértice quando os lados de um deles são as semirretas opostas dos lados do outro. Consequentemente, esses ângulos são iguais.

Exemplos:



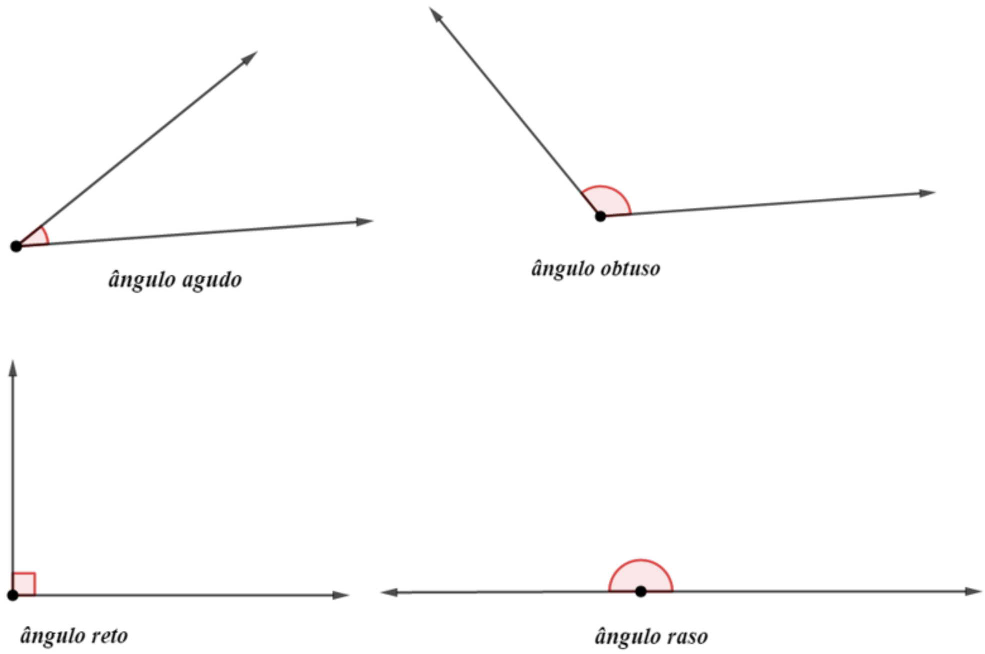
$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são opostos pelo vértice

Como $\overrightarrow{OD}$ é o oposto de $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$ é o oposto de $\overrightarrow{OA}$, temos $A\hat{O}B + A\hat{O}D = 180°$ e $C\hat{O}D + A\hat{O}D = 180°$, logo $A\hat{O}B = C\hat{O}D$.



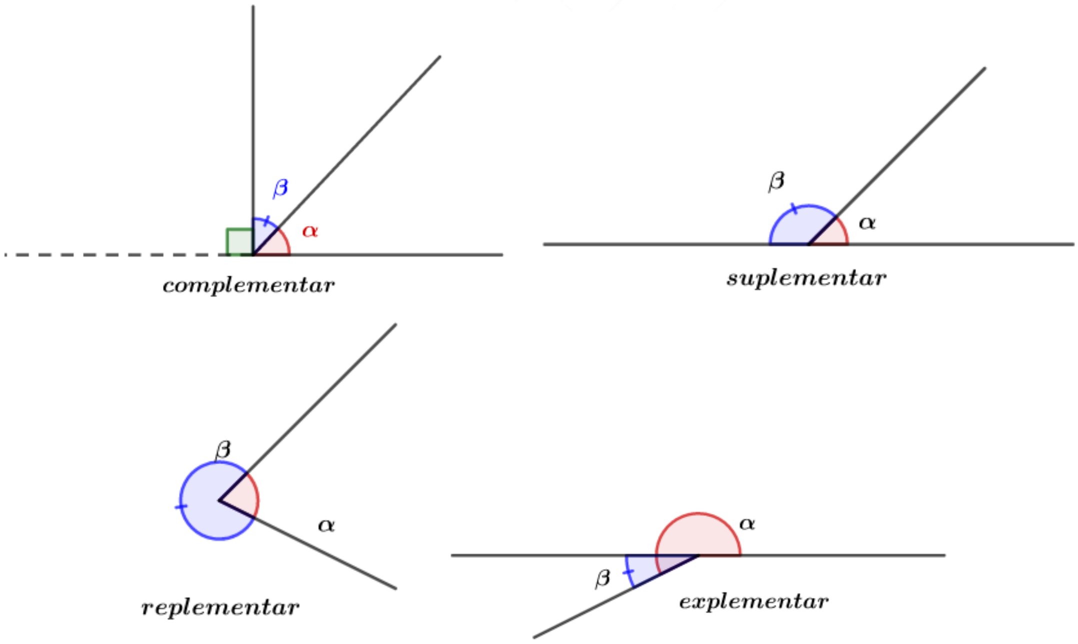
$A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ não são opostos pelo vértice, pois o lado $\overrightarrow{OD}$ não é a semirreta oposta de $\overrightarrow{OB}$

3.3.4. Ângulo Reto, Agudo, Obtuso e Raso



Tipo de Ângulo	Condição
Agudo	$< 90°$
Obtuso	$> 90°$
Reto	$= 90°$
Raso	$= 180°$

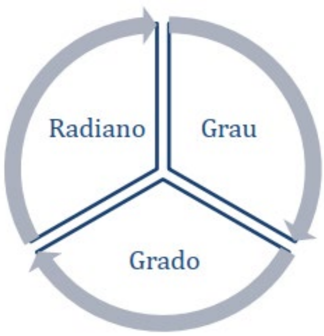
3.3.5. Ângulo Complementar, Suplementar, Replementar e Explementar



Classificação para α e β	Condição
Complementar	$\alpha + \beta = 90°$
Suplementar	$\alpha + \beta = 180°$
Replementar	$\alpha + \beta = 360°$
Explementar	$\alpha - \beta = 180°$

3.4. Unidades usuais de medidas

Atualmente, temos três unidades de medidas mais famosos: grau, grado e radiano. Vamos estudar cada um deles:



3.4.1. Grau

Um grau $(1°)$ é a unidade de medida determinada pela divisão de uma circunferência em 360 partes iguais.

O grau pode ser subdividido em duas outras:

Definimos um minuto por $1'$ e ele equivale a $1/60$ do ângulo de um grau.

Um segundo é representado por $1''$ e equivale a 1/60 do ângulo de um minuto.

Dessa forma, temos as seguintes relações:

$$1' = \frac{1°}{60} \; e \; 1'' = \frac{1'}{60}$$

$$\boxed{1° = 60' \; (60 \; minutos)}$$

$$\boxed{1' = 60'' \; (60 \; segundos)}$$

As medidas acima são conhecidas como sistema sexagesimal.

3.4.2. Grado

Um grado $(1 \; gr)$ é a unidade de medida determinada pela divisão da circunferência em 400 partes iguais. Dessa forma, se dividimos a circunferência no meio, cada arco terá a medida de $200 \; gr$.

3.4.3. Radiano

Um radiano $(1 \; rad)$ é a unidade de medida igual ao comprimento do raio da circunferência. O comprimento total de uma circunferência é dado por:

$$C = 2\pi r$$

Onde r é o raio da circunferência e C é o seu comprimento total.

π, lê-se "pi", e seu valor numérico é aproximadamente:

$$\pi \cong 3{,}14$$

Então, usando a fórmula:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento \; de \; \widehat{AB}}{comprimento \; da \; unidade}$$

E tomando $\widehat{AB}$ como o arco de uma volta completa na circunferência, temos:

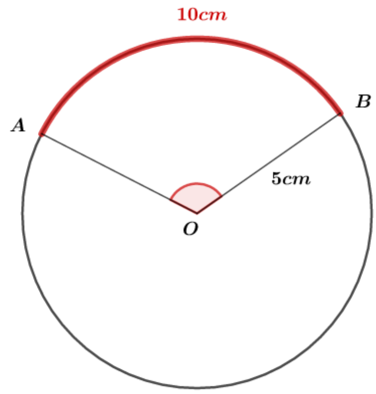
$$\widehat{AB} = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

Assim, o arco de uma volta completa corresponde a $2\pi \; rad$.

Veja o exemplo:

1) Um arco de circunferência $\widehat{AB}$ mede 10 cm e o raio da circunferência mede 5 cm. Calcule a medida do arco em radianos:

Temos a seguinte figura:



Vamos usar a fórmula da medida do arco:

$$\widehat{AB} = \frac{comprimento \; \widehat{AB}}{comprimento \; raio}$$

$$A\hat{O}B = \frac{10 \; cm}{5 \; cm} = 2 \; rad$$

Vimos os três principais tipos de medidas usadas para os ângulos. Podemos estabelecer a seguinte equivalência entre elas:

$$2\pi \; rad = 360° = 400 \; gr$$

A tabela abaixo esquematiza essas relações:

Grau	Grado	Radiano
$360°$	$400gr$	$2\pi\ rad$
$180°$	$200gr$	$\pi\ rad$

3.5. Conversão de unidades de medida

Para converter ângulos em sistemas de medidas diferentes, podemos aplicar a regra de três. Sendo G a medida em graus e g a medida em grados, a conversão de graus em radianos é dada por:

$$360° - 400\ gr$$
$$G - g$$

Aplicando a regra de três, temos:

$$360g = 400G$$
$$g = \frac{10}{9}G$$

Para converter graus em radianos, podemos usar a mesma ideia. Sendo r a medida em radianos:

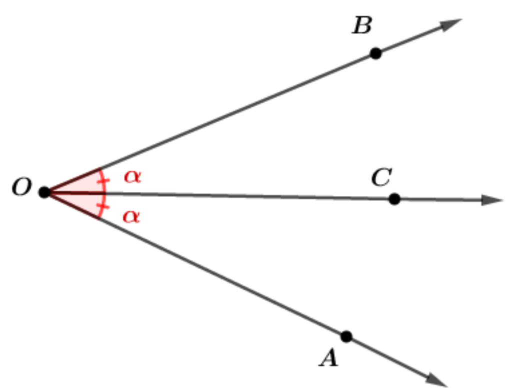
$$360° - 2\pi\ rad$$
$$G - r$$
$$360r = 2\pi G$$
$$r = \frac{\pi}{180}G$$

3.6. Bissetriz

3.6.1. Definição

Uma semirreta OC interna ao ângulo $A\hat{O}B$ é bissetriz de $A\hat{O}B$ se, e somente se, $A\hat{O}C \equiv B\hat{O}C$. Na prática, a bissetriz é a semirreta localizada internamente na metade do ângulo.

Exemplo:

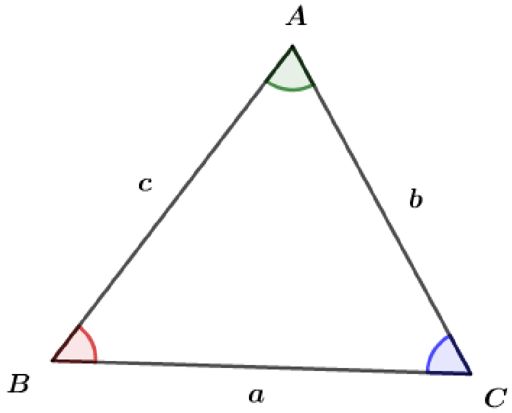


4. Triângulos

4.1. Definição

Dados três pontos A, B e C não colineares, os segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}$ e $\overline{AC}$ definem o triângulo ABC.

Dizemos que A, B e C são os vértices do triângulo e os segmentos formados por esses pontos são os lados do triângulo.



a, b e c são os lados opostos dos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente.

4.2. Classificação dos Triângulos

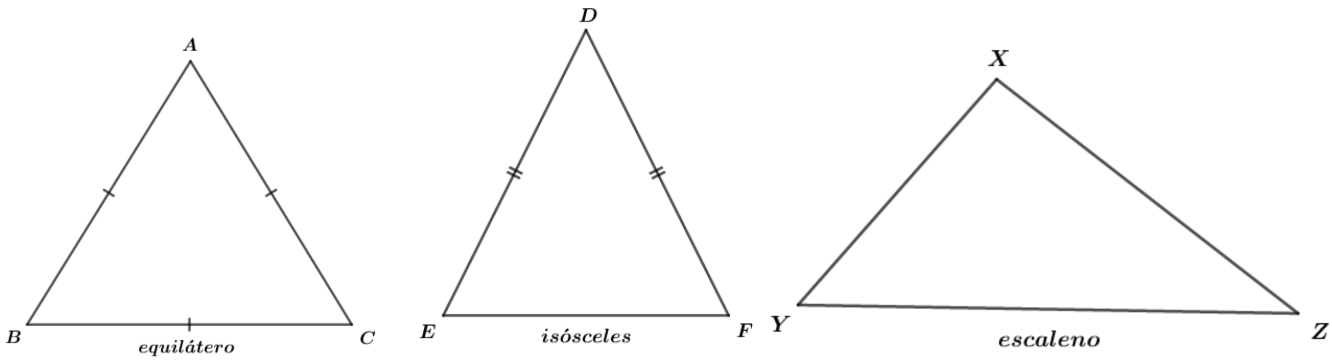
4.2.1. Quanto aos lados

Um triângulo é classificado em:

Equilátero se, e somente se, todos os seus lados são congruentes.

Isósceles se, e somente se, possui dois lados congruentes.

Escaleno se, e somente se, nenhum lado é congruente.



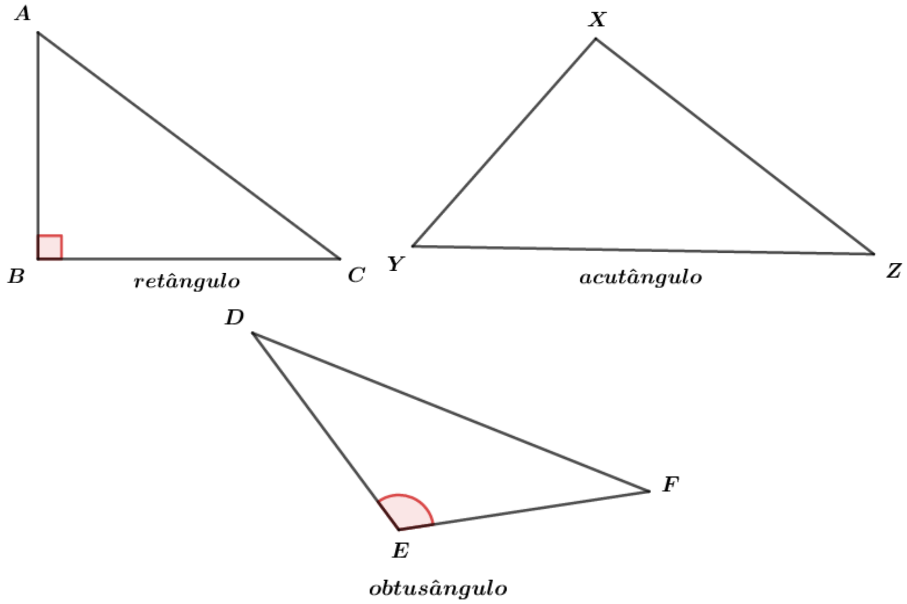
4.2.2. Quanto aos ângulos

Um triângulo é classificado em:

Retângulo se, e somente se, possui um ângulo reto.

Acutângulo se, e somente se, todos os ângulos internos são agudos.

Obtusângulo se, e somente se, possui um ângulo obtuso.



4.2.3. Síntese de Clairaut

Seja um triângulo qualquer de lados a, b e c, podemos classificar o triângulo de acordo com as seguintes condições:

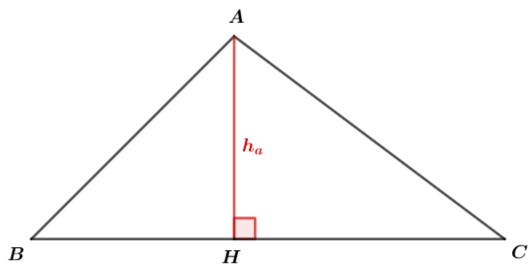
Condição	Tipo de triângulo
$a^2 < b^2 + c^2$	Acutângulo
$a^2 = b^2 + c^2$	Retângulo
$a^2 > b^2 + c^2$	Obtusângulo

4.3. Cevianas Notáveis

Definimos como ceviana qualquer reta que passa pelo vértice do triângulo. Vamos estudar as principais:

4.3.1. Altura

Usualmente, usamos a letra h para denotar a altura de um triângulo. Ela é um segmento que passa pelo vértice do triângulo e forma um ângulo reto com o lado oposto desse vértice.

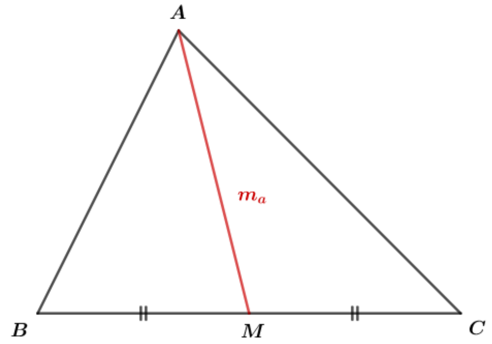


$\overline{AH}$ é a altura do vértice A.

4.3.2. Mediana

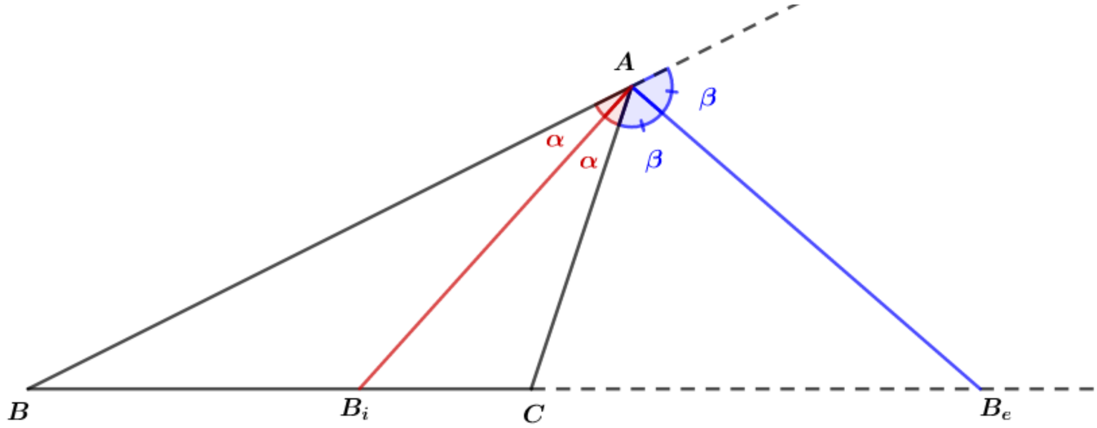
A mediana de um triângulo é o segmento que passa pelo vértice e pelo ponto médio do lado oposto ao vértice.

Na figura abaixo, $\overline{AM}$ é a mediana do vértice A.



4.3.3. Bissetrizes interna e externa

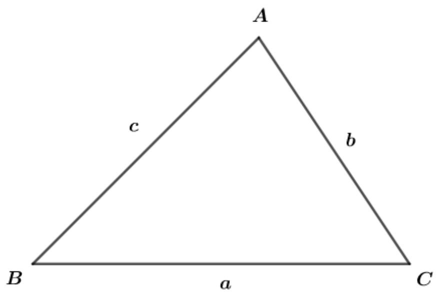
A bissetriz interna de um triângulo é o segmento que divide o ângulo interno em dois ângulos congruentes. A bissetriz externa é o segmento que divide o ângulo externo em dois ângulos congruentes.



$\overline{AB_i}$ é a bissetriz interna do ΔABC e $\overline{AB_e}$ é sua bissetriz externa.

4.4. Condição de Existência do Triângulo

Na geometria plana, temos o postulado da distância mínima que afirma:
"A menor distância entre dois pontos é uma reta".
Por esse postulado, podemos estudar a condição de existência do triângulo.
Assim, para um triângulo ABC, temos:



$$a < b + c$$
$$b < a + c \Rightarrow b - c < a$$
$$c < a + b \Rightarrow c - b < a$$
$$\boxed{|b - c| < a < b + c}$$

Essa desigualdade é conhecida como desigualdade triangular.

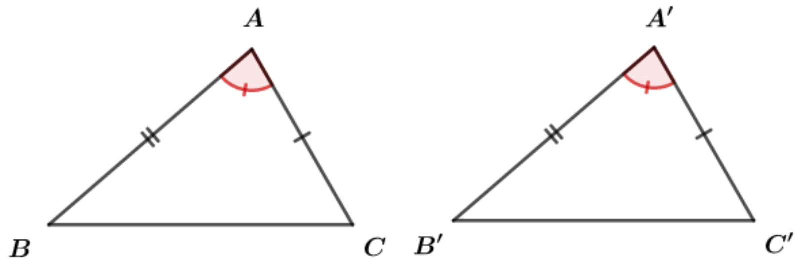
4.5. Congruência de Triângulos

Podemos afirmar que dois ou mais triângulos são congruentes se, e somente se, todos os lados e ângulos internos deles forem congruentes na mesma ordem.

Um postulado que consegue garantir a congruência de triângulos é o LAL, esse postulado gera outros teoremas que também provam a congruência de triângulos.

4.5.1. Postulado LAL (lado-ângulo-lado)

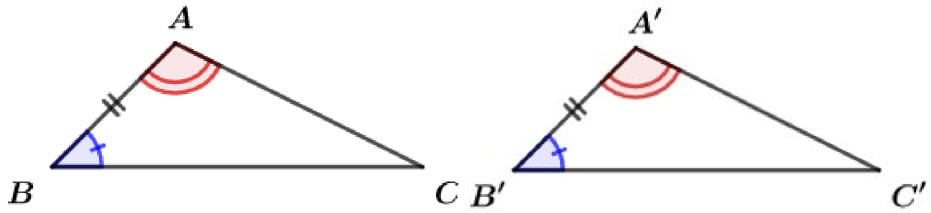
Esse postulado diz que se dois triângulos tiverem dois lados e o ângulo entre esses lados congruentes, podemos afirmar que esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.2. Teorema ALA (ângulo-lado-ângulo)

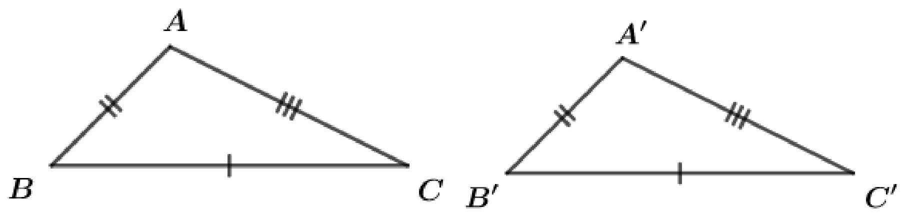
Se o lado e os ângulos adjacentes de dois triângulos forem congruentes ordenadamente, podemos afirmar que os triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{B} \equiv \widehat{B'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.3. Teorema LLL (lado-lado-lado)

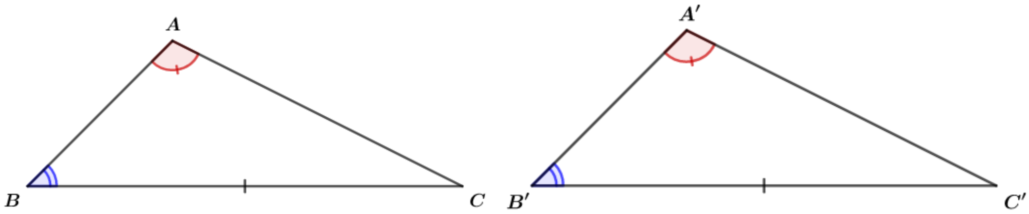
Se os três lados de dois triângulos são ordenadamente congruentes, esses triângulos são congruentes.



$$\begin{cases} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.5.4. Teorema LAA_0 (lado-ângulo adjacente-ângulo oposto)

Se dois triângulos tiverem o lado, ângulo adjacente e ângulo oposto desse lado congruentes, então esses triângulos são congruentes.



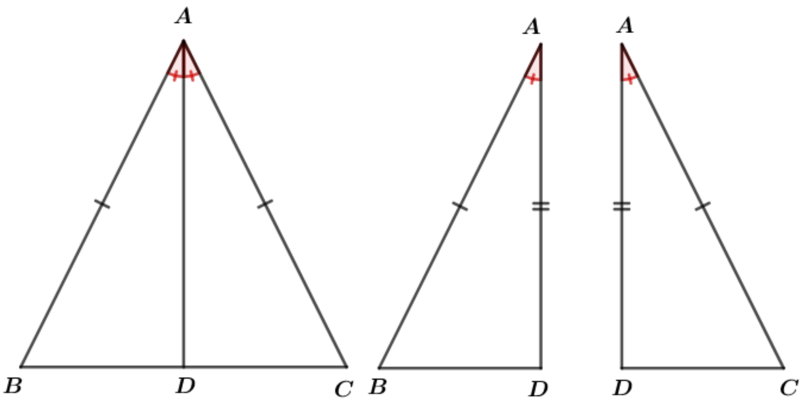
$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

4.6. Consequência do Postulado LAL

4.6.1. Triângulo Isósceles

Sabemos que um triângulo ABC é isósceles se, e somente se, possui dois lados iguais.

Seja ΔABC isósceles com $AB = AC$. Traçando-se a bissetriz no vértice A, temos:



Como AD é a bissetriz do vértice A, temos $B\hat{A}D = C\hat{A}D$.

Usando o postulado LAL, sabemos que $\Delta ABD \equiv \Delta ACD$. Então, os elementos correspondentes são congruentes:

$$\Delta ABD \equiv \Delta ACD$$
$$AB = AC \Rightarrow BD = CD \Rightarrow \overline{AD} \text{ é mediana}$$
$$\Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$
$$A\hat{D}B = A\hat{D}C = \theta \Rightarrow \theta + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 90° \Rightarrow \overline{AD} \text{ é altura}$$

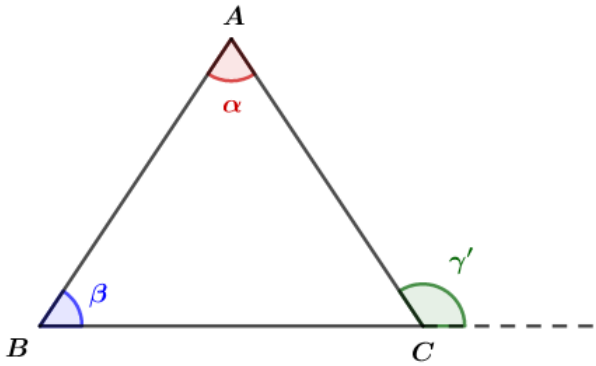
Como $\overline{AD}$ é mediana e altura ao mesmo tempo, temos por definição que $\overline{AD}$ é mediatriz do triângulo ABC. Perceba que todos os pontos da mediatriz do segmento $\overline{BC}$ são equidistantes das extremidades B e C. Então, se não soubéssemos que o triângulo ABC era isósceles, pelo fato do segmento AD ser mediatriz, poderíamos afirmar que ele é isósceles. Isso pode ser provado pelo postulado LAL:

$$\begin{cases} BD \equiv DC \\ B\hat{D}A \equiv C\hat{D}A \\ DA \equiv DA \end{cases} \Rightarrow \Delta BDA \equiv \Delta CDA \Rightarrow AB = AC$$

4.6.2. Teorema do Ângulo Externo

O Teorema do Ângulo Externo diz que:

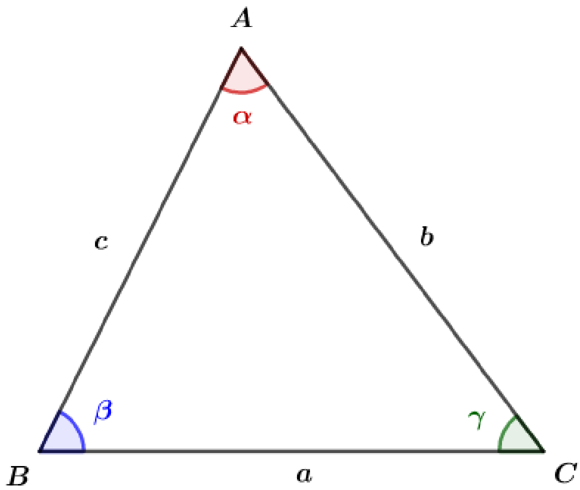
Um ângulo externo de um triângulo é maior do que qualquer um dos ângulos internos não adjacente.



$$\gamma' > \alpha$$
$$\gamma' > \beta$$

4.6.3. Desigualdades no Triângulo

Dado o triângulo ABC abaixo, temos:

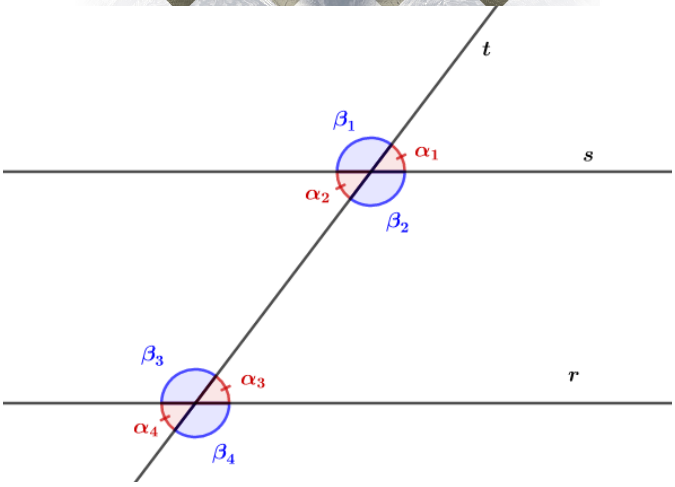


$$\boxed{a > b > c \Leftrightarrow \alpha > \beta > \gamma}$$

Podemos afirmar que o maior ângulo possui o maior lado oposto.

4.7. Ângulos de retas paralelas

Sejam as retas r, s, t dadas tal que $r//s$ e t cruza as outras duas. Os ângulos formados pelo cruzamento de t com r e s possuem uma relação entre eles, veja:



Os ângulos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ são congruentes e os ângulos $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ são congruentes.

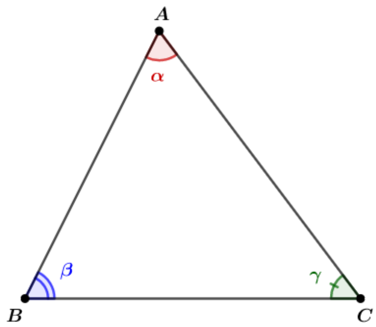
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv \alpha_4$$
$$\beta_1 \equiv \beta_2 \equiv \beta_3 \equiv \beta_4$$

Esses ângulos recebem as seguintes denominações:

Classificações	Par de ângulos
Alternos internos	α_2 e α_3 β_2 e β_3
Alternos externos	α_1 e α_4 β_1 e β_4
Colaterais internos	α_2 e β_3 β_2 e α_3
Colaterais externos	α_1 e β_4 α_4 e β_1

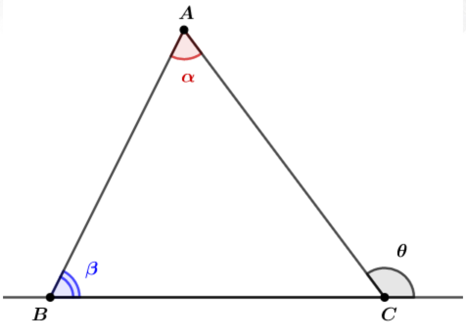
4.8. Teorema Angular de Tales

I) A soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°.



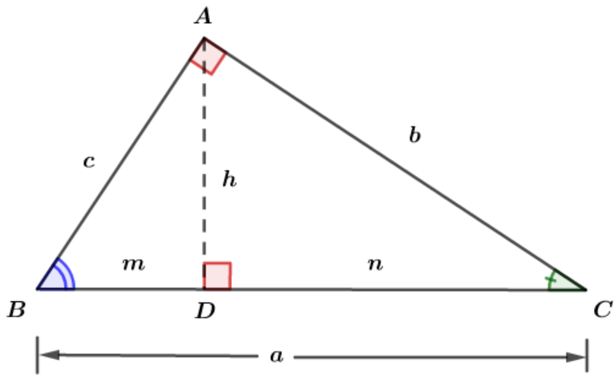
$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$$

II) O ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.



$$\boxed{\theta = \alpha + \beta}$$

4.9. Relações Métricas no Triângulo Retângulo



Relações métricas no triângulo retângulo	
(I)	$b^2 = an$
(II)	$c^2 = am$
(III)	$h^2 = mn$
(IV)	$bc = ah$
(V)	$bh = cn$
(VI)	$ch = bm$
(VII) Pitágoras	$a^2 = b^2 + c^2$
$(VIII)$	$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

Exercícios de Fixação

1. Os lados de um triângulo formam uma PG de razão q. Para que este triângulo exista, determine as condições de q.

Resolução:

Sejam a, aq, aq^2, os lados de um triângulo. Então, verificando a condição de existência do triângulo pela desigualdade triangular:

$$|aq - aq^2| < a < aq + aq^2$$

Como a é um lado de um triângulo, temos $a > 0$. Dessa forma:

$$|q - q^2| < 1 < q + q^2$$

$$\begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \\ |q - q^2| < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q^2 + q - 1 > 0 \ \ (I) \\ -1 < q - q^2 < 1 \ \ (II) \end{cases}$$

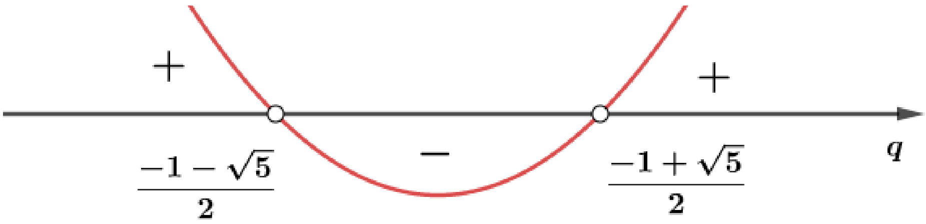
Resolvendo (I):

$$q^2 + q - 1 > 0$$

Encontrando as raízes:

$$q = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:



$$q < \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \ ou \ q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Como aq é um lado do triângulo e $a > 0$, temos $q > 0$. Então:

$$q > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Resolvendo (II):

$$-1 < q - q^2 < 1$$

$$\begin{cases} q^2 - q - 1 < 0 \ \ (III) \\ q^2 - q + 1 > 0 \ \ (IV) \end{cases}$$

Para a inequação (III), temos:

$$q^2 - q - 1 < 0$$

Raízes:

$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Estudo do sinal:

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mas $q > 0$, logo:

$$0 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Para (IV):

$$q^2 - q + 1 > 0$$

Essa inequação não possui raízes reais, pois $\Delta < 0$:

$$\Delta = -3 < 0$$

Como essa função possui concavidade para cima, temos que $\forall q \in \mathbb{R} \to q^2 - q + 1 > 0$.

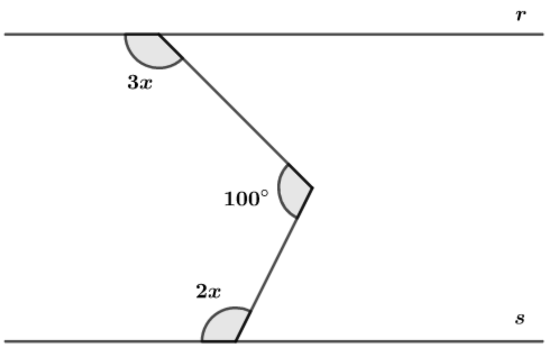
Então, as condições de q são dadas pela intersecção dos resultados encontrados:

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

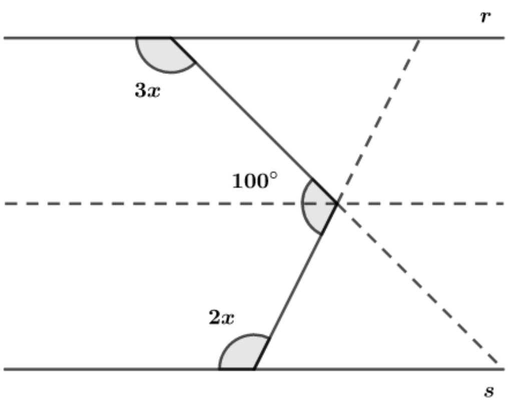
Gabarito: $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

---

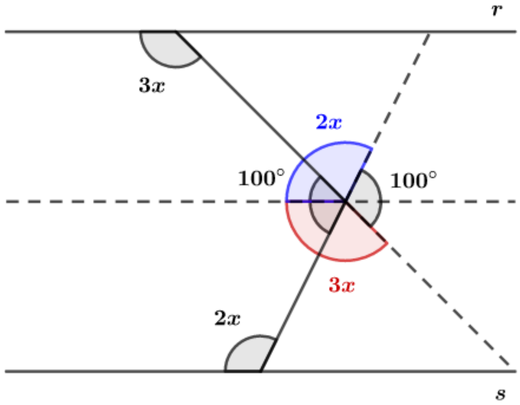
2. Sabendo que $r//s$. Determine o valor de x.



Resolução:



Escrevendo os ângulos correspondentes na figura, temos:



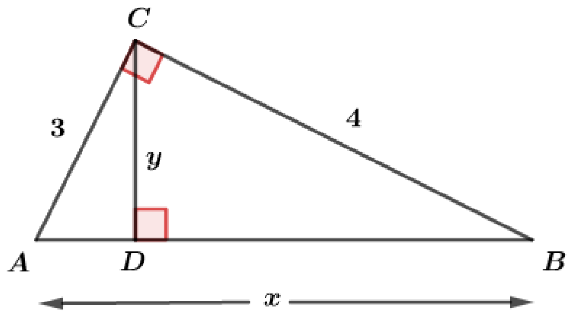
Somando os ângulos, temos:

$$2x + 3x + 100° = 360°$$
$$5x = 260°$$
$$x = 52°$$

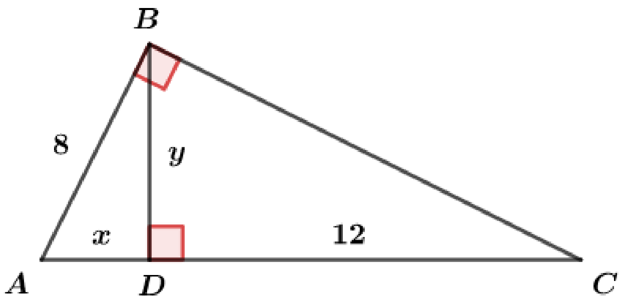
Gabarito: 52°

3. Determine x e y:

a)

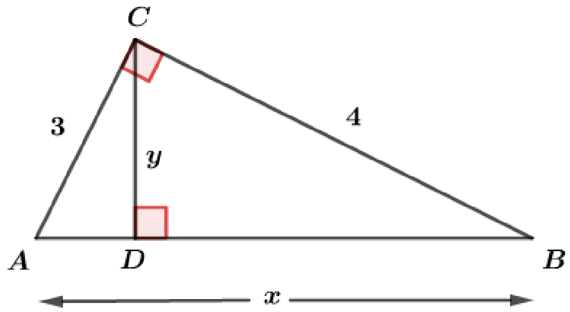


b)



Resolução:

a)



Usando as relações métricas do triângulo retângulo, temos:

$$xy = 3 \cdot 4$$

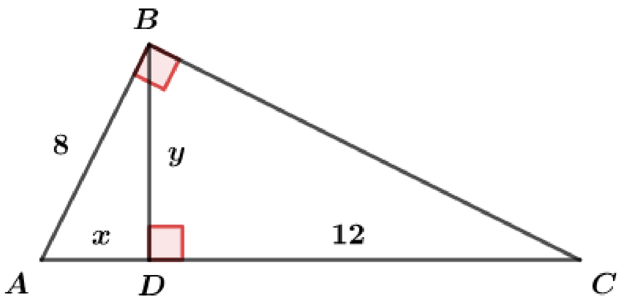
Pelo Teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$$

Substituindo x na equação:

$$5y = 12 \Rightarrow y = 12/5$$

b)



$$\Delta ABD \text{ é retângulo}$$

Usando o Teorema de Pitágoras no ΔABD:

$$8^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 64 \ \ (I)$$

$$\Delta ABD \sim \Delta BDC$$

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{12} \Rightarrow y^2 = 12x \ \ (II)$$

Substituindo (II) em (I):

$$x^2 + 12x - 64 = 0$$

$$x = \left(-6 \pm \sqrt{100}\right) = -16 \ ou \ 4$$

Como $x > 0$, temos $x = 4$.

Substituindo x em (II):

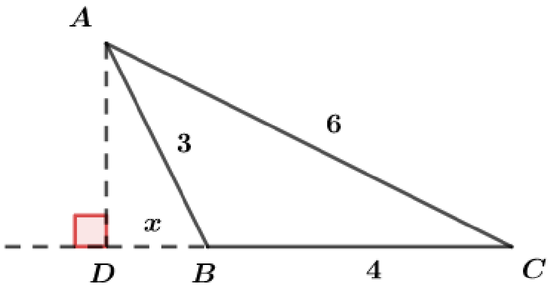
$$y^2 = 12 \cdot 4$$

$$y = 4\sqrt{3}$$

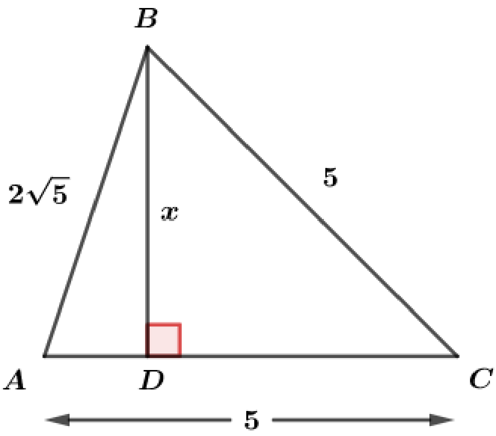
Gabarito: a) $x = 5 \ e \ y = 12/5$ b) $x = 4 \ e \ y = 4\sqrt{3}$

4. Determine x:

a)

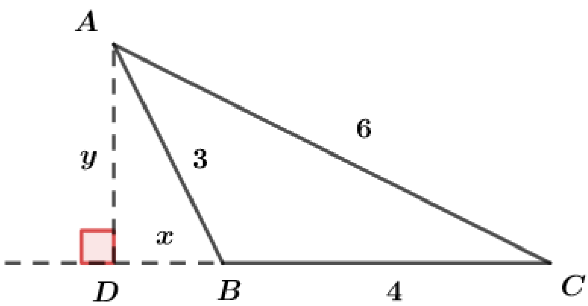


b)



Resolução:

a)



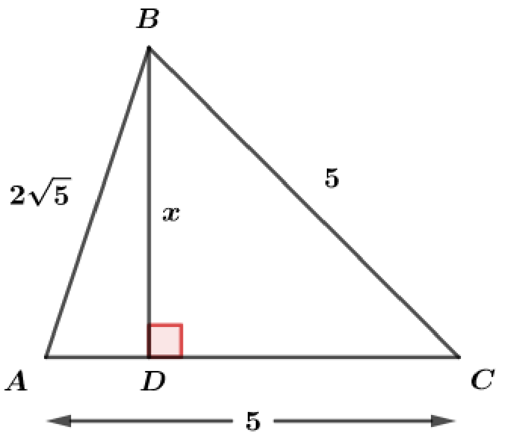
Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ABD e ADC:

$$3^2 = x^2 + y^2 \ \ (I)$$
$$6^2 = y^2 + (x+4)^2 \ \ (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

$$36 - 9 = (x+4)^2 - x^2$$
$$27 = (x + 4 - x)(x + 4 + x)$$
$$\frac{27}{4} = 2x + 4$$
$$x = \frac{27}{8} - 2 = \frac{11}{8}$$

b)



Fazendo $AD = y$ e aplicando o teorema de Pitágoras:
ΔABD:

$$\left(2\sqrt{5}\right)^2 = x^2 + y^2 \ \ (I)$$

ΔBDC:

$$5^2 = x^2 + (5-y)^2 \ \ (II)$$

Subtraindo $(II) - (I)$:

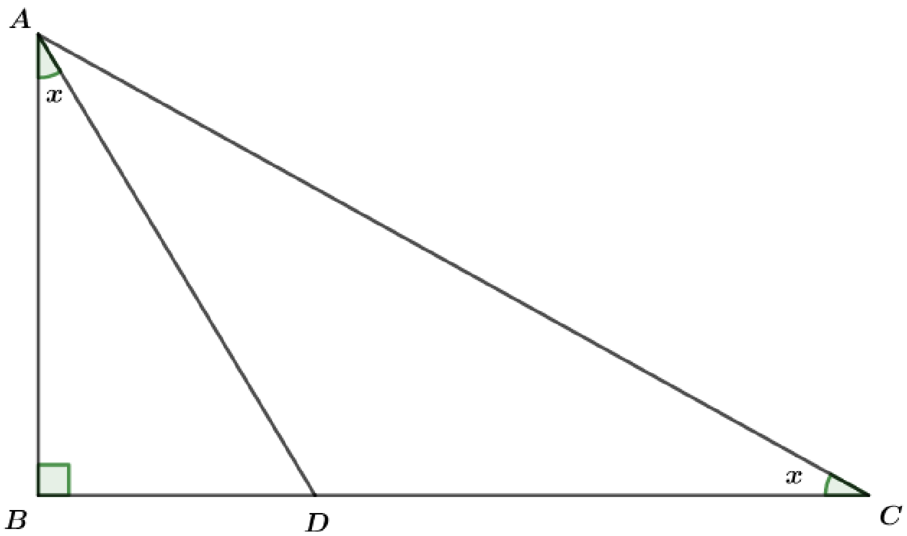
$$25 - 20 = (5-y)^2 - y^2$$
$$5 = (5-y-y)(5-y+y)$$
$$1 = 5 - 2y$$
$$2y = 4$$
$$y = 2$$

Substituindo y em (I):

$$20 = x^2 + 2^2$$
$$x^2 = 16$$
$$x = 4$$

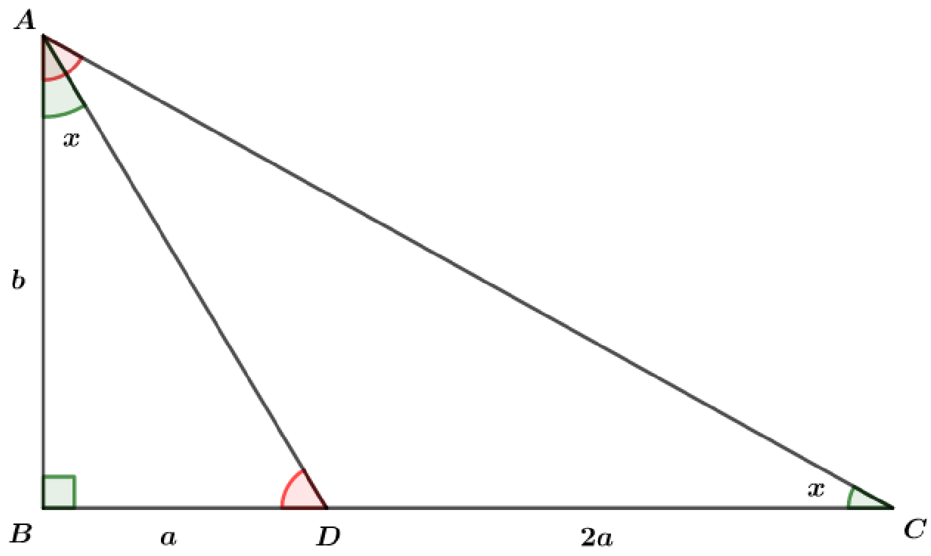
Gabarito: a) $x = 11/8$ b) $x = 4$

5. O ΔABC é retângulo em B e $CD = 2 \cdot BD$. Calcule x.



Resolução:

Fazendo $AB = b$ e $BD = a$, temos $CD = 2a$. Perceba que os triângulos ABD e ABC são semelhantes, pois possuem todos os ângulos internos congruentes:



Assim, calculando as razões entre os triângulos:

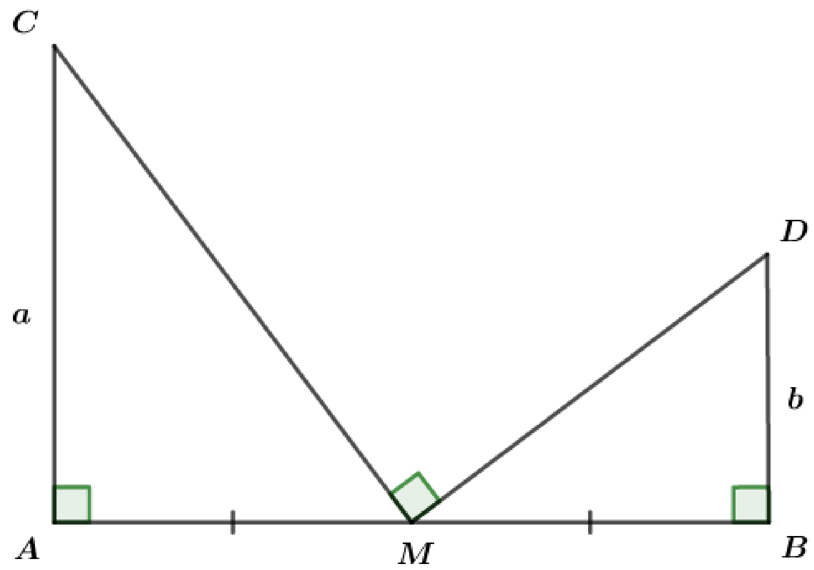
$$\Delta ABD \sim \Delta CBA$$
$$\frac{BD}{AB} = \frac{AB}{BC}$$
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{3a}$$
$$b^2 = 3a^2$$
$$b = \sqrt{3}a$$

O ângulo x é dado por:

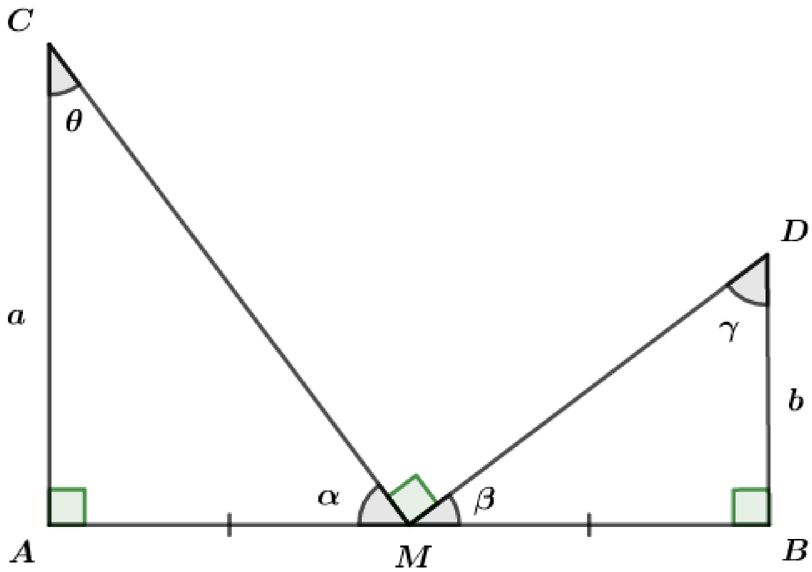
$$tgx = \frac{a}{b} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$x = 30°$$

Gabarito: $x = 30°$

6. Na figura a seguir temos $AM = MB$. Calcule a medida de $\overline{AB}$.



Resolução:



Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, temos:

$$\theta + \alpha = 90° \ (I)$$
$$\beta + \gamma = 90° \ (II)$$

Sendo $\widehat{M}$ um ângulo raso:

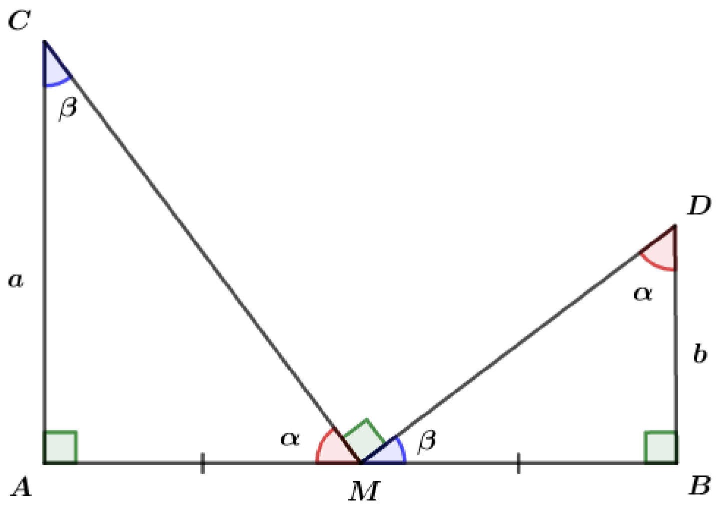
$$\alpha + \beta + 90° = 180°$$
$$\alpha + \beta = 90° \ (III)$$

Fazendo $(III) - (II)$:

$$\alpha - \gamma = 0 \Rightarrow \alpha = \gamma$$

Fazendo $(III) - (I)$:

$$\beta - \theta = 0 \Rightarrow \beta = \theta$$



Os triângulos ACM e BMD são congruentes, logo:

$$\frac{a}{AM} = \frac{MB}{b}$$
$$ab = MB \cdot AM$$

Como $AM = MB = x$, temos:

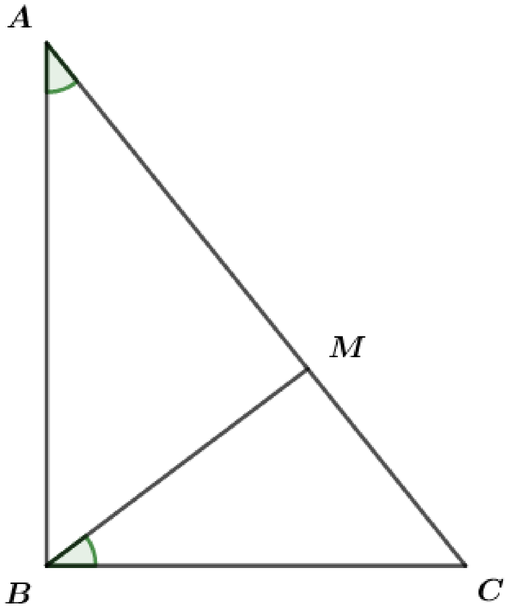
$$x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

Assim, a medida de $\overline{AB}$ é dada por:

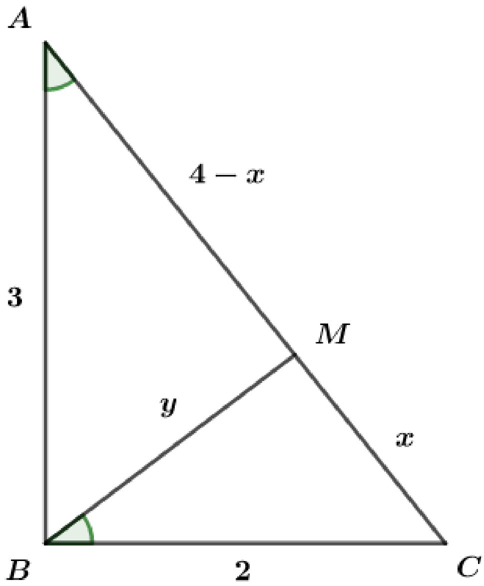
$$AB = 2x = 2\sqrt{ab}$$

Gabarito: $AB = 2\sqrt{ab}$

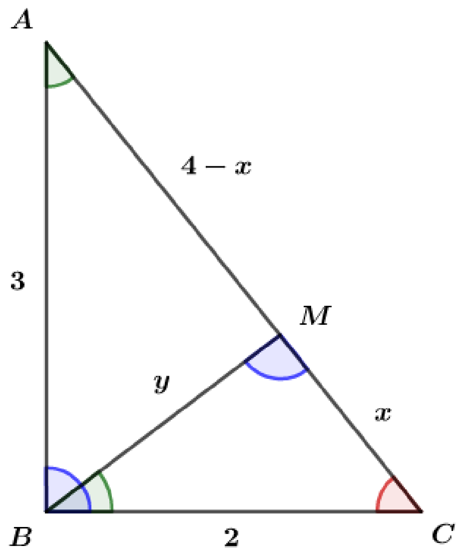
7. Na figura abaixo temos $M\hat{B}C = B\hat{A}C, AB = 3, BC = 2$ e $AC = 4$. Calcule as medidas dos segmentos $\overline{MC}$ e $\overline{MB}$.



Resolução:



Os triângulos BMC e ABC são semelhantes, pois todos os ângulos internos são congruentes:



Fazendo a semelhança dos triângulos:

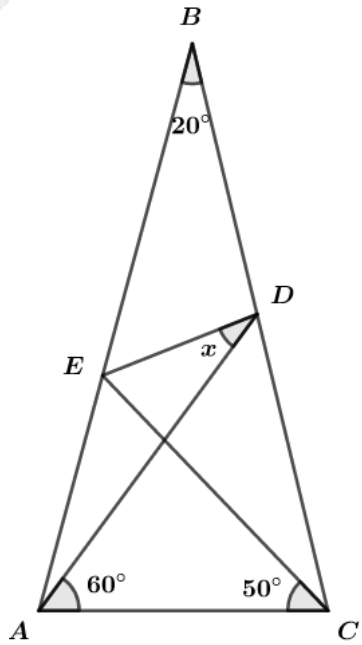
$$\Delta ABC \sim \Delta BMC$$
$$\frac{AB}{AC} = \frac{BM}{BC}$$
$$\frac{3}{4} = \frac{y}{2}$$
$$y = \frac{3}{2}$$
$$\frac{AC}{BC} = \frac{BC}{MC}$$
$$\frac{4}{2} = \frac{2}{x}$$
$$x = 1$$

Gabarito: $MC = 1$ e $MB = 3/2$

5. Lista de Questões

8. (Desafio - Triângulo Russo)

Sabendo que o triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. Se $\hat{B} = 20°$, $D\hat{A}C = 60°$ e $A\hat{C}E = 50°$, calcule x.

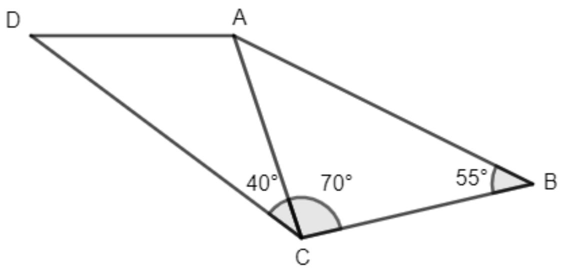


9. (Elementos da Matemática Volume 2)

ABC é um triângulo no qual $\hat{A} = 120°$; M e N são pontos do lado BC tais que $MB = AB$ e $NC = AC$. Calcular o ângulo $M\hat{A}N$.

10. (Portugal – 98)

Na figura seguinte, $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Quanto mede o ângulo $D\hat{A}C$?

11. (AFA/2013)

Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.

Dessa maneira, esse triângulo NÃO é

a) acutângulo.

b) equilátero.

c) obtusângulo.

d) isósceles.

12. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC e isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $3/4$

b) $15/6$

c) $15/4$

d) $25/4$

e) $25/2$

13. (ITA/2008)

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede $40°$. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\widehat{D}B$ vale

a) $35°$

b) $45°$

c) $55°$

d) $75°$

e) $85°$

14. (ITA/1984)

Sejam as afirmações:

I. Por um ponto passa uma única reta;

II. Um ponto e uma reta determinam um plano;

III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano então a reta está contida nesse plano;

IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.

Podemos garantir que:

a) Apenas III é verdadeira.

b) I e II são falsas.

c) Apenas I é falsa.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas II e IV são verdadeiras.

15. (ITA/1978)

Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano;

II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos;

III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano;

IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta;

V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III

b) I; II; V

c) I; III; IV

d) II; III; IV

e) N.D.A

16. (ITA/1987)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.

b) Um ponto e uma reta determinam um plano.

c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.

d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.

e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano, que é paralela a r, não será paralela à reta s.

17. (ITA/Modificada/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

É (são) verdadeira(s) apenas:

a) III

b) I e III

c) II e III

d) Apenas I

e) Apenas I e II

18. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a:

a) $\frac{23\pi}{11}$

b) $\frac{13\pi}{6}$

c) $\frac{24\pi}{11}$

d) $\frac{25\pi}{11}$

e) $\frac{7\pi}{3}$

19. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a) apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

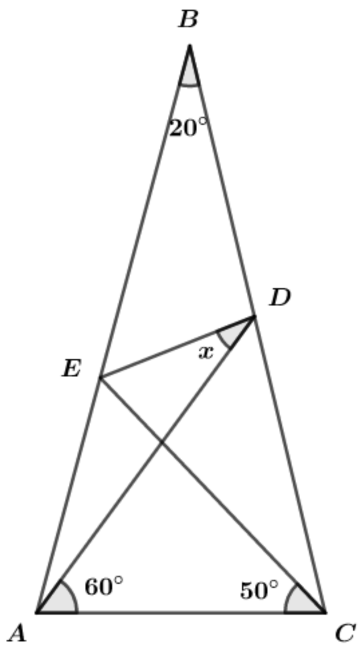
6. Gabarito

8. $x = 30°$
9. $30°$
10. $100°$
11. c
12. d
13. d
14. b
15. b
16. e
17. a
18. c
19. b

7. Lista de Questões Comentadas

8. (Desafio - Triângulo Russo)

Sabendo que o triângulo ABC é isósceles com $AB = BC$. Se $\hat{B} = 20°$, $D\hat{A}C = 60°$ e $A\hat{C}E = 50°$, calcule x.

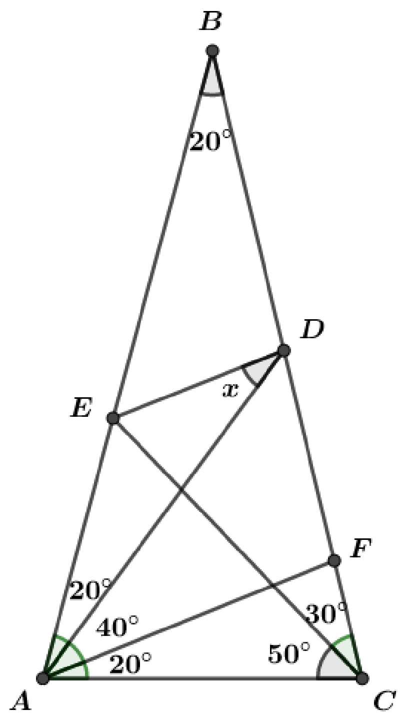


Comentários

Essa é uma questão clássica de geometria conhecida como triângulo russo. O segredo nessa questão é traçar um segmento de tal forma que gere triângulos isósceles. Como ABC é isósceles, temos:

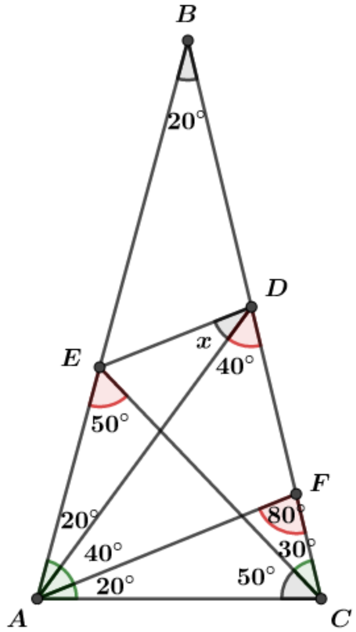
$$B\hat{A}C = B\hat{C}A = \alpha$$
$$2\alpha + 20° = 180°$$
$$\alpha = 80°$$

Vamos construir o segmento $\overline{AF}$ tal que $F\hat{A}C = 20°$:



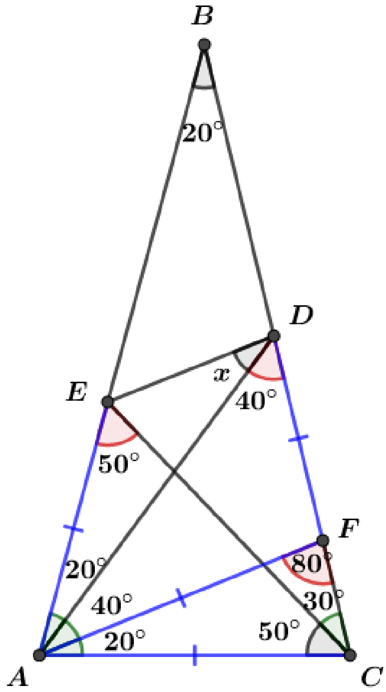
Sabendo que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, então para os triângulos AEC, ADC e AFC, temos:

$$\Delta AEC \Rightarrow A\hat{E}C + 50° + 80° = 180° \Rightarrow A\hat{E}C = 50°$$
$$\Delta ADC \Rightarrow A\hat{D}C + 60° + 80° = 180° \Rightarrow A\hat{D}C = 40°$$
$$\Delta AFC \Rightarrow A\hat{F}C + 80° + 20° = 180° \Rightarrow A\hat{F}C = 80°$$

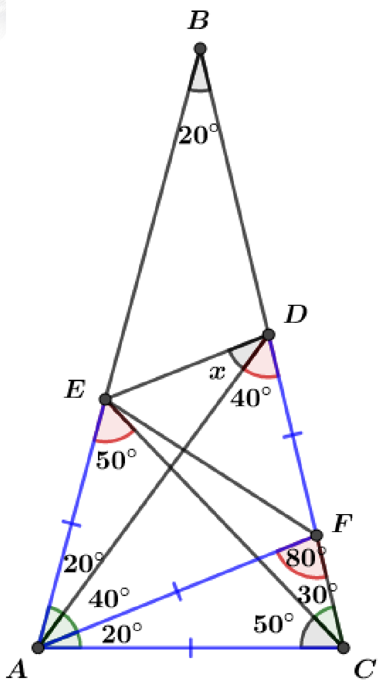


Perceba que:

$$\Delta AFC \text{ é isósceles, então } AF = AC$$
$$\Delta AEC \text{ é isósceles, então } AE = AC$$
$$\Delta AFD \text{ é isósceles, então } AF = FD$$

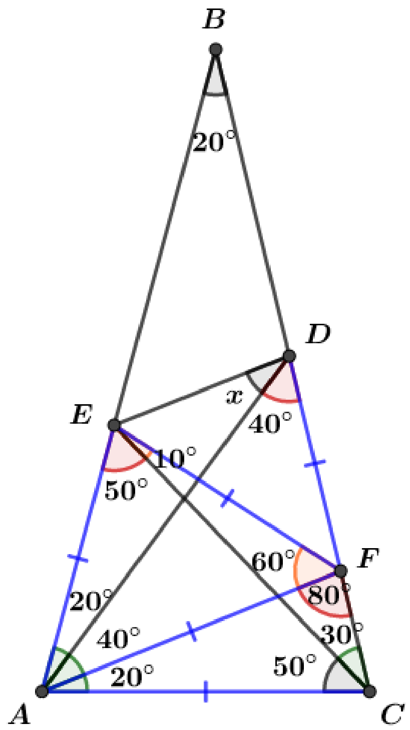


Note o ângulo $E\hat{A}F = 60°$, vamos construir o triângulo AFE:



ΔAFE é isósceles, então $A\hat{E}F = A\hat{F}E$

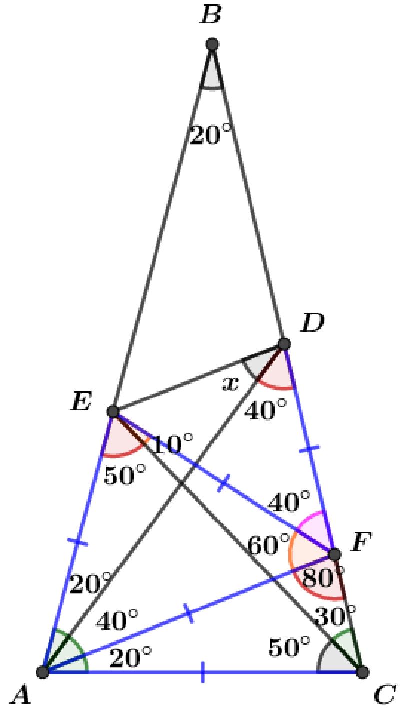
Como $E\hat{A}F = 60°$ é o vértice do triângulo, temos que ΔAFE é equilátero com $A\hat{E}F = A\hat{F}E = 60°$. Então, $AE = AF = EF$.



ΔEFD é isósceles, então $F\hat{E}D = F\hat{D}E$

Calculando $E\hat{F}D$:

$$E\hat{F}D + 60° + 80° = 180° \Rightarrow E\hat{F}D = 40°$$



Calculando os ângulos da base do ΔEFD:

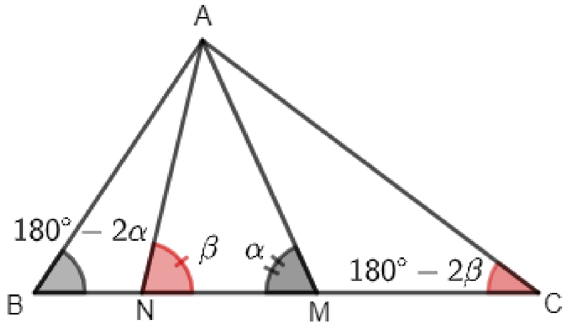
$$F\hat{E}D = F\widehat{D}E = x + 40°$$
$$x + 40° + x + 40° + 40° = 180°$$
$$2x = 60°$$
$$\therefore x = 30°$$

Gabarito: $x = 30°$

9. (Elementos da Matemática Volume 2)

ABC é um triângulo no qual $\hat{A} = 120°$; M e N são pontos do lado BC tais que $MB = AB$ e $NC = AC$. Calcular o ângulo $M\hat{A}N$.

Comentários



Seja α e β os ângulos da base MN do triângulo AMN.

Como $MB = AB$, o ΔABM é isósceles de base AM, logo $B\hat{A}M = A\widehat{M}B = \alpha$. Assim, temos que $A\hat{B}N = 180 - 2\alpha$. Analogamente, ΔACN é isósceles de base AN (pois $NC = AC$). Desse modo, $C\widehat{N}A = C\hat{A}N = \beta \Rightarrow A\hat{C}N = 180° - 2\beta$.

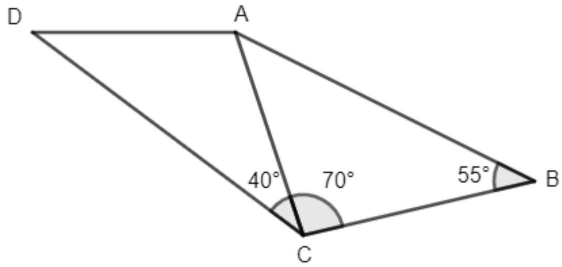
Do enunciado, temos que $B\hat{A}C = 120°$. Logo, podemos escrever que:

$$180° - 2\alpha + 180° - 2\beta + 120° = 180°$$
$$\Rightarrow \alpha + \beta = 150°$$
$$M\hat{A}N = 180° - (\alpha + \beta)$$
$$M\hat{A}N = 30°$$

Gabarito: $30°$

10. (Portugal – 98)

Na figura seguinte, $\overline{AD} = \overline{BC}$.



Quanto mede o ângulo $D\hat{A}C$?

Comentários

Da questão, podemos perceber que $C\hat{A}B = 180° - 70° - 55° = 55°$.

Logo, o triângulo ΔABC é isósceles com $AC = AB$. Porém pelo enunciado temos $AD = BC$ o que implica que $AD = AC$. Assim, ΔADC é isósceles com $A\widehat{D}C = 40°$. Portanto:

$$D\hat{A}C = 180° - 40° - 40° = 100°$$

Gabarito: $100°$

11. (AFA/2013)

Um triângulo é tal que as medidas de seus ângulos internos constituem uma progressão aritmética e as medidas de seus lados constituem uma progressão geométrica.

Dessa maneira, esse triângulo NÃO é

a) acutângulo.

b) equilátero.

c) obtusângulo.

d) isósceles.

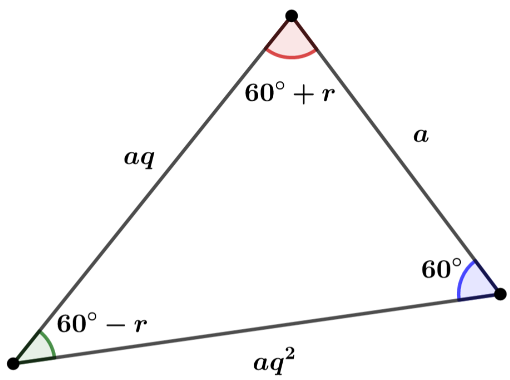
Comentários

Primeiramente, usaremos a concepção de que o maior lado está oposto ao maior ângulo e o menor lado oposto ao menor ângulo em um triângulo qualquer.

Como os ângulos estão em PA: $(x - r, x, x + r)$

$$180° = x - r + x + x + r \rightarrow x = 60°$$

Lados em PG: (a, aq, aq^2)



Para finalizar, lei dos cossenos para o triângulo:

$$(aq)^2 = a^2 + (aq^2)^2 - 2a(aq^2)\cos 60° \rightarrow q^2 = 1 + q^4 - q^2$$
$$\Rightarrow q^4 - 2q^2 + 1 = 0$$

Assim, $(q^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow q = \pm 1$.

Como os lados são comprimentos positivos, $q = 1$. Trata-se de um triângulo equilátero e, portanto, ele não pode ser obtusângulo.

Gabarito: "c".

12. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo retângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC e isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $3/4$

b) $15/6$

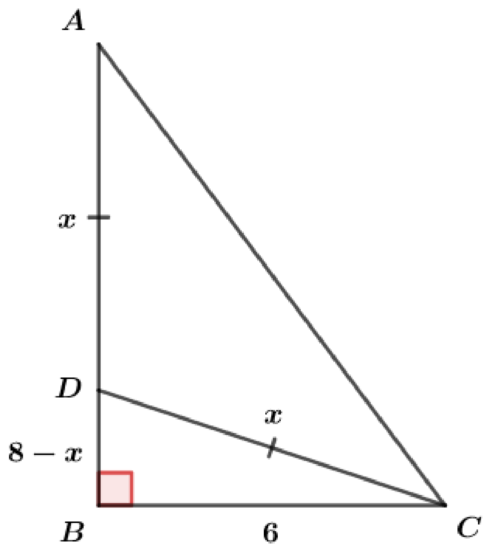
c) $15/4$

d) $25/4$

e) $25/2$

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como o ΔBDC é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$$
$$x^2 = x^2 - 16x + 64 + 36$$
$$16x = 100$$
$$x = \frac{25}{4}$$

Gabarito: "d".

13. (ITA/2008)

Considere o triângulo ABC isósceles em que o ângulo distinto dos demais, $B\hat{A}C$, mede $40°$. Sobre o lado $\overline{AB}$, tome o ponto E tal que $A\hat{C}E = 15°$. Sobre o lado $\overline{AC}$, tome o ponto D tal que $D\hat{B}C = 35°$. Então, o ângulo $E\hat{D}B$ vale

a) 35°

b) 45°

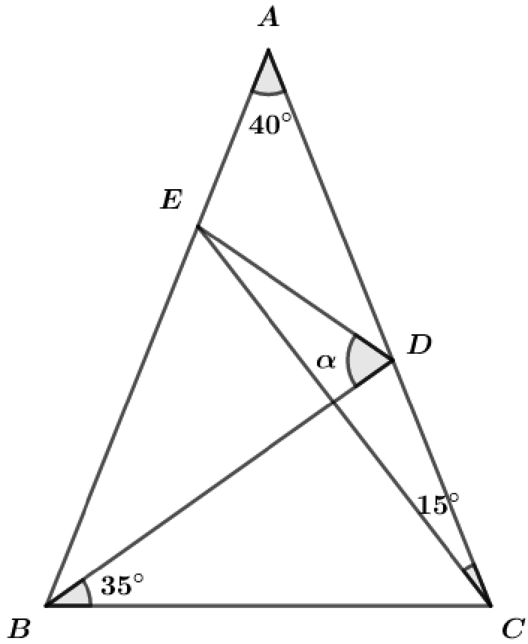
c) 55°

d) 75°

e) 85°

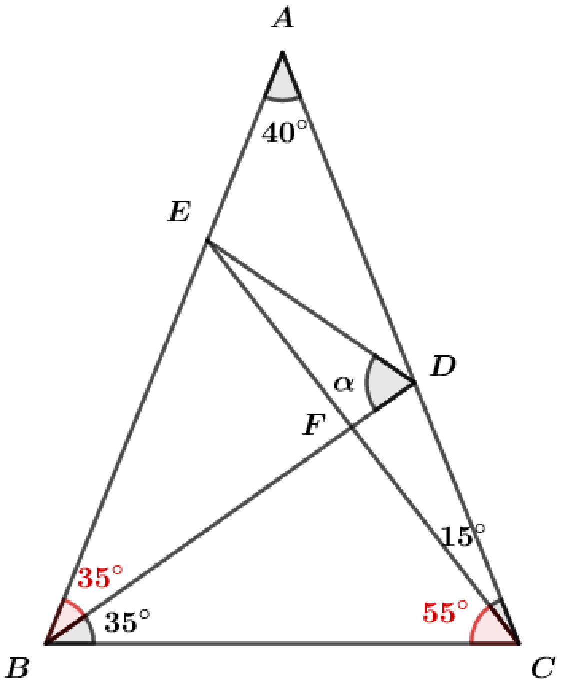
Comentários

De acordo com o enunciado do problema, temos:



Como ΔABC é isósceles, temos $A\hat{B}C = A\hat{C}B = \beta$. Desse modo:

$$40° + \beta + \beta = 180°$$
$$2\beta = 140°$$
$$\beta = 70°$$
$$\Rightarrow B\hat{C}E = 55°$$
$$\Rightarrow E\hat{B}D = 35°$$



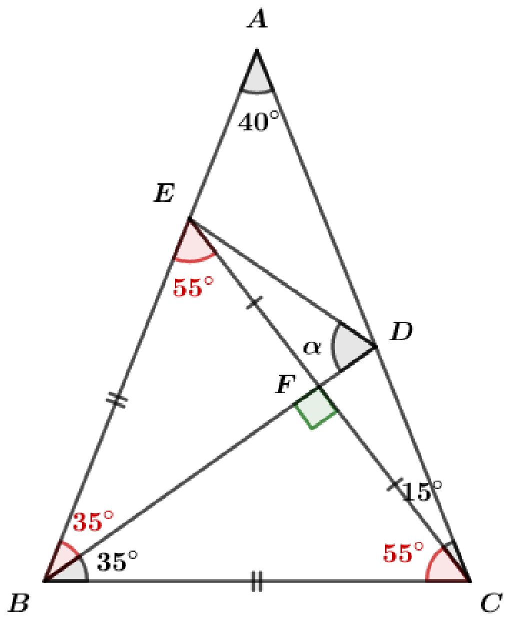
Pelo ΔBFC:

$$35° + 55° + B\hat{F}C = 180°$$
$$B\hat{F}C = 90° \Rightarrow \Delta BFC \text{ é retângulo}$$
$$B\hat{F}E = 90° \Rightarrow B\hat{E}F = 55°$$

Então, BEC é isósceles.

$$\Delta BFE \sim \Delta BFC \Rightarrow CF = FE$$

Como $E\hat{F}D$ e $B\hat{F}C$ são opostos pelo vértice, temos que $E\hat{F}D = 90°$.



DF é altura e mediana do triângulo DEC, logo DF é mediatriz e ΔDEC é isósceles. Então, $D\hat{E}C = D\hat{C}E = 15°$.

Portanto, pelo ΔDFE:

$$15° + 90° + \alpha = 180°$$
$$\alpha = 75°$$

Gabarito: "d".

14. (ITA/1984)

Sejam as afirmações:

I. Por um ponto passa uma única reta;

II. Um ponto e uma reta determinam um plano;

III. Se dois pontos de uma reta pertencem a um plano então a reta está contida nesse plano;

IV. Por um ponto situado fora de uma reta, existe uma reta paralela à reta dada.

Podemos garantir que:

a) Apenas III é verdadeira.

b) I e II são falsas.

c) Apenas I é falsa.

d) Apenas II e III são verdadeiras.

e) Apenas II e IV são verdadeiras.

Comentários

I. Falso. Por um ponto passam infinitas retas.

II. Falso. Podemos pensar no postulado da determinação, em que três pontos não colineares determinam um plano. Se tomarmos dois pontos, os quais determinam uma reta, teremos uma reta e um ponto determinando um único plano. Porém na questão não fica claro se são três pontos colineares ou não, o que torna o item falso.

III. Verdadeiro. Pelo postulado da inclusão.

IV. Verdadeiro. Pelo postulado das paralelas, temos que, por um ponto P externo à uma reta *r* dada, existe uma única reta *s,* paralela à r, passando por P.

Gabarito: "b".

---

15. (ITA/1978)

Quais as sentenças falsas nos itens abaixo?

I. Se dois planos são secantes, todas as retas de um deles sempre interceptam o outro plano;

II. Se em dois planos, num deles existem duas retas distintas paralelas ao outro plano, os planos são sempre paralelos;

III. Em dois planos paralelos, todas as retas de um são paralelas ao outro plano;

IV. Se uma reta é paralela a um plano, em tal plano existe uma infinidade de retas paralelas àquela reta;

V. Se uma reta é paralela a um plano, será paralela a todas as retas do plano.

a) I; II; III

b) I; II; V

c) I; III; IV

d) II; III; IV

e) N.D.A

Comentários

I. Falso. Existem retas em um plano que são paralelas ao outro plano. Podemos escolher uma reta de um plano paralela à reta formada pela intersecção dos planos dados e garantir que essa reta será paralela ao outro plano, pois é paralela a uma reta contida nesse outro plano. Sendo assim, nem todas as retas de um plano intersectam o outro.

II. Falso. Vamos supor que existam dois planos secantes S_1 e S_2. Podemos pegar duas retas, r e s, paralelas e distintas do plano S_1, que são paralelas à reta gerada pela intersecção desses planos. Nesse caso, as retas r e s serão paralelas ao plano S_2, o que torna a afirmação falsa.

III. Verdadeiro. No caso de dois planos paralelos e distintos, temos que toda reta de um será paralela ao outro, uma vez que não existirá intersecção entre essas retas e o plano.

IV. Verdadeiro. Existem infinitas retas paralelas e distintas em um plano. Escolhendo-se essas retas de forma que sejam paralelas à reta externa ao plano dado, temos que, se uma reta é paralela a um plano, ela será paralela a uma infinidade de retas desse plano.

V. Falso. Podemos tomar retas do plano que são perpendiculares à reta.

Gabarito: "b".

16. (ITA/1987)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Três pontos, distintos dois a dois, determinam um plano.

b) Um ponto e uma reta determinam um plano.

c) Se dois planos distintos têm um ponto em comum, tal ponto é único.

d) Se uma reta é paralela a um plano e não está contida neste plano, então ela é paralela a qualquer reta desse plano.

e) Se α é o plano determinado por duas retas concorrentes r e s, então toda reta m desse plano, que é paralela a r, não será paralela à reta s.

Comentários

a) Falso. Pegadinha! Três pontos não colineares determinam um plano.

b) Falso. De novo, pegadinha! Uma reta e um ponto fora dela determinam um plano.

c) Falso. Dois planos distintos com um ponto em comum são secantes e, portanto, a intersecção entre eles será uma reta.

d) Falso. A reta fora e a reta no plano podem ser reversas.

e) Verdadeiro. Tomemos o ponto de intersecção das retas r e s. Tomemos agora uma reta m paralela à r. Pelo postulado das paralelas, só existe uma reta passando pelo ponto de intersecção das retas que é paralela à m que, por definição, é a reta r. Logo, o item é verdadeiro.

Gabarito: "e".

17. (ITA/Modificada/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

É (são) verdadeira(s) apenas:

a) III

b) I e III

c) II e III

d) Apenas I

e) Apenas I e II

Comentários

I. Falso. Elas podem ser paralelas.

II. Falso. Retas paralelas também não possuem ponto em comum.

III. Verdadeiro. Sejam r e s retas reversas. Da definição de retas reversas, não existe um plano que contenha essas duas retas e, portanto, elas não podem ser coplanares. Seja s' a reta que passa por s e é paralela à r; e r' a reta que passa por r e é paralela a s. s e s' são concorrentes e, portanto, determinam um plano S. Como s' é paralela à r, o plano S também será paralelo a r. Analogamente, para r e r', essas retas determinam um plano R que é paralelo à s. Assim, sendo R o plano que contém r; e S o plano que contém s, então R e S são paralelos entre si e são únicos.

Gabarito: "a".

18. (ITA/2011)

Entre duas superposições consecutivas dos ponteiros das horas e dos minutos de um relógio, o ponteiro dos minutos varre um ângulo cuja medida, em radianos, é igual a:

a) $\frac{23\pi}{11}$

b) $\frac{13\pi}{6}$

c) $\frac{24\pi}{11}$

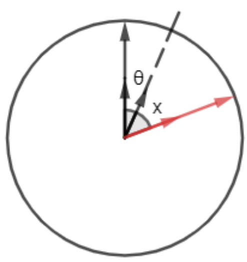
d) $\frac{25\pi}{11}$

e) $\frac{7\pi}{3}$

Comentários

Para resolver esse problema, vamos supor que a posição do primeiro encontro do ponteiro das horas com o ponteiro dos minutos ocorre em 12 horas.

Agora, devemos achar o ângulo que o ponteiro dos minutos percorre até encontrar o ponteiro das horas no segundo encontro.



Primeiro, o ponteiro dos minutos percorre $2\pi\ rad$ até voltar à posição inicial. Nesse período, o ponteiro das horas percorre θ. A partir daí, até o encontro, o ponteiro dos minutos percorrerá $\theta + x$ e o das horas, x. Dessa forma, podemos montar uma regra de três.

$$2\pi \quad - \quad \frac{\pi}{6}$$

$$\theta + x \quad - \quad x$$

$$2\pi\, x = (\theta + x).\frac{\pi}{6}$$

Mas quando o ponteiro dos minutos percorre $2\pi\ rad$, o ponteiro das horas percorrerá $\pi/6\ rad$, logo $\theta = \pi/6$ e, portanto,

$$2\pi\, x = (\theta + x).\frac{\pi}{6} \Rightarrow 12\pi x = \left(\frac{\pi}{6} + x\right)\pi \Rightarrow 12x \cdot 6 = \pi + 6x \Rightarrow 66x = \pi$$

$$\boxed{x = \frac{\pi}{66}}$$

Então, o ângulo varrido pelo ponteiro dos minutos é:

$$S = 2\pi + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{66} = \frac{24\pi}{11}$$

Gabarito: "c".

19. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a) apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

Comentários

I) Verdadeiro.

Como os três pontos são colineares, eles estão numa mesma reta. Toda reta está contida em um plano.

II) Falso.

A reta pode ser secante ao plano.

III) Falso.

Três pontos determinam um plano. Sendo os quatro pontos não coplanares, podemos calcular o número de planos que podemos formar com esses pontos usando a combinação simples:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

IV) Falso.

Podemos ter retas reversas e, nesse caso, elas não pertencem num mesmo plano.

V) Verdadeiro.

Sendo os dois planos distintos, eles não são coincidentes. Como eles possuem um ponto em comum, eles também não podem ser paralelos. Logo, a interseção desses planos forma uma reta.

Gabarito: “b”.