Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá.

Vimos na aula passada, uma introdução ao conceito de funções. Nessa aula, estudaremos as funções quadráticas e modulares. Veremos os principais temas que poderão ser cobrados na prova e também resolveremos diversas questões. Se você for um aluno que já possui base no assunto, vá direto para a lista de questões.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/victorso /profvictorso /profvictorso

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Funções Quadráticas

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função quadrática quando definida por:

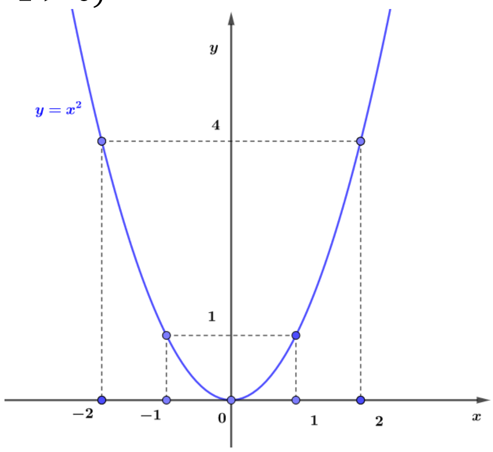
$$\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$$

Com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Quando desenhamos o gráfico dessa função, obtemos uma **parábola** (veremos o que é uma parábola usando o gráfico). Dependendo do valor de a, ela **pode possuir a concavidade voltada para cima ou para baixo**.

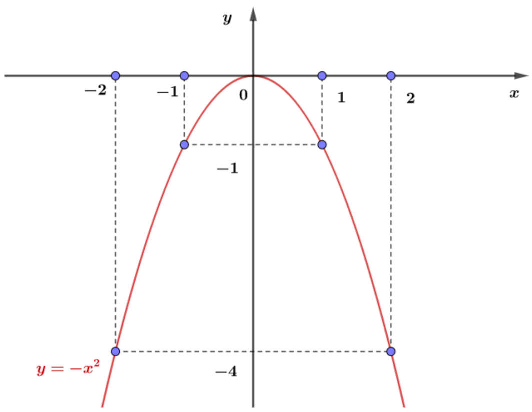
Para $a > 0$, **a concavidade** é voltada **para cima** e para $a < 0$, ela é voltada **para baixo**. Vejamos alguns exemplos:

1) Gráfico de $y = x^2$ $(a = 1 > 0)$



Note a concavidade da função voltada para cima.

2) Gráfico de $y = -x^2$ $(a = -1 < 0)$



Note a concavidade da função voltada para baixo.

Vimos basicamente o que é uma função de segundo grau. Vamos aprofundar mais no assunto estudando sua forma canônica.

1.1. Forma Canônica

Na escola, somos levados a decorar que as raízes de uma função de segundo grau são dadas pela fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Δ é o símbolo utilizado para representar o **discriminante** de uma equação quadrática. Lê-se "**delta**".

Saiba que essa fórmula é obtida através da transformação da função quadrática em sua forma canônica. Então, vamos encontrar essa forma.

Sendo $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, uma função quadrática, dada por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como $a \neq 0$, podemos colocar a em evidência na expressão:

$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Lembra da aula de fatoração? Vamos manipular a expressão acima de forma a obter um quadrado perfeito. Reescrevendo a expressão:

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{c}{a}\right)$$

Perceba o termo $\frac{b}{2a}$, vamos completar o quadrado perfeito, somando e subtraindo esse número elevado ao quadrado da expressão, obtemos:

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

$$f(x) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Agora, podemos fatorá-lo:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right)$$

Reescrevendo a expressão, obtemos:

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{4ac}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-b^2 + 4ac)}{4a^2}\right)$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}\right)$$

Chamando de delta o número $b^2 - 4ac$:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}}}$$

Essa é a forma canônica do trinômio do 2º grau.

Note que ela foi obtida através da fatoração da expressão $ax^2 + bx + c$. A forma canônica nos permite analisar e extrair diversas informações importantes. Vamos explorá-las.

1.1.1. Raízes da função quadrática

Usando a forma canônica, podemos encontrar as raízes da função quadrática:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

Resolvendo em x, temos:

$$\boxed{\boldsymbol{x = -\frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, com\ \Delta = b^2 - 4ac}}$$

Desse modo, temos duas raízes para a função quadrática:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \ e \ x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

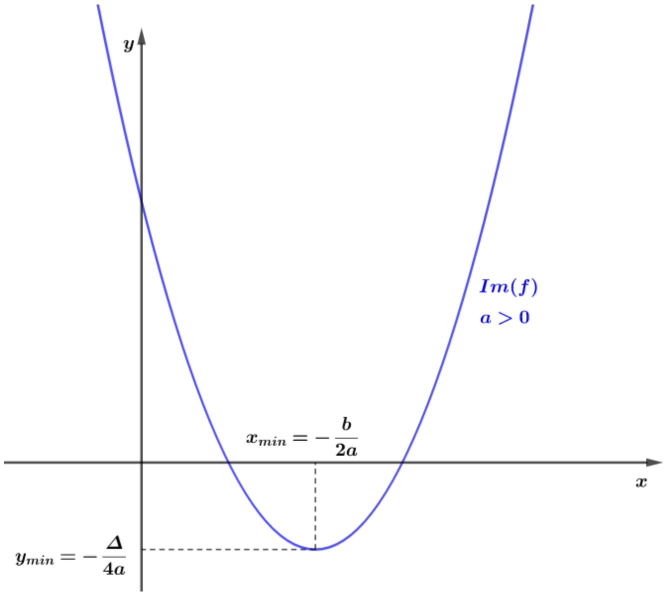
1.1.2. Máximo e mínimo da função quadrática

Para a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos que se

I) $a > 0 \Rightarrow \exists mínimo$

$$x_{min} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_{min} = -\frac{\Delta}{4a}$$

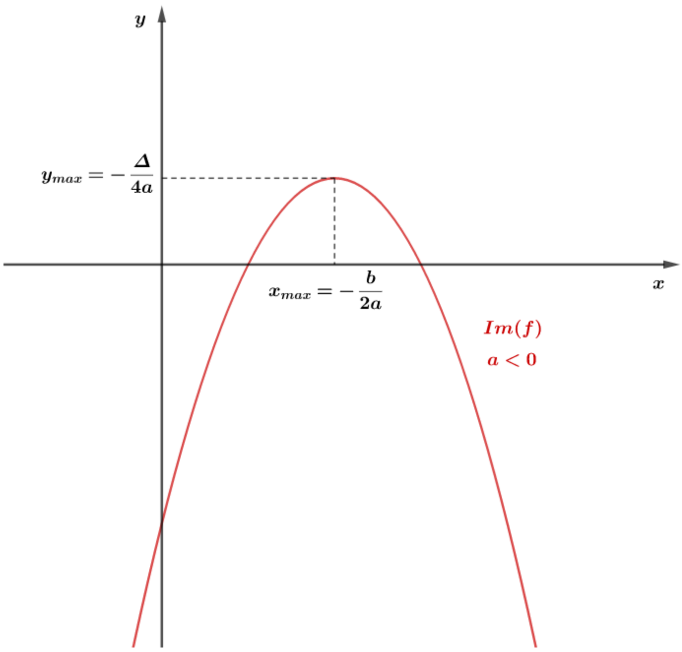
Graficamente:



II) $a < 0 \Rightarrow \exists máximo$

$$x_{max} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow y_{max} = -\frac{\Delta}{4a}$$

Graficamente:



RESUMINDO

$$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = \begin{cases} \text{mínimo para } a > 0 \\ \text{máximo para } a < 0 \end{cases}$$

CURIOSIDADE

Existe um método simples envolvendo cálculo para encontrar o valor do x máximo ou x mínimo (dependendo do a da função quadrática). Podemos derivar a função do 2º grau e igualá-lo a zero, o x resultante é o x_{max} ou x_{min}. Veja o exemplo:

Calcule o valor de x onde a função abaixo assume o menor valor:

$$f(x) = 3x^2 - 5x - 12$$

Usando a fórmula que encontramos, temos:

$$x_{min} = -\frac{b}{2a} \Rightarrow x_{min} = -\frac{-5}{2 \cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Mas, se esquecermos dessa fórmula na hora da prova?

Nesse caso, podemos usar a derivada da função f e igualá-lo a zero:

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{2-1} - 1 \cdot 5x^{1-1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{6x - 5}_{f'(x)} = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{6}$$

Vamos explicar o que aconteceu.

Inicialmente, devemos saber que, usualmente, representamos a derivada de uma função f por f'.

Para calcular a derivada de uma função, podemos usar a "regra do tombo". Para cada potência de x na função, multiplicamos a constante pelo grau de x e subtraímos 1 do seu grau. Veja:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$f(x) = ax^2 + bx^1 + cx^0$$

$$f'(x) = 2 \cdot ax^{2-1} + 1 \cdot bx^{1-1} + 0 \cdot cx^{0-1}$$

$$f'(x) = 2ax^1 + bx^0$$

$$f'(x) = 2ax + b$$

Se igualarmos essa derivada a zero, encontramos o ponto crítico dessa função:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2ax + b = 0 \Rightarrow x_{crítico} = -\frac{b}{2a}$$

Esse ponto pode ser o ponto de máximo ou mínimo a depender do coeficiente a.

Note que essa é a fórmula que encontramos usando a forma canônica da função quadrática.

Você pode usar esse método se quiser encontrar o máximo ou mínimo de uma função quadrática!

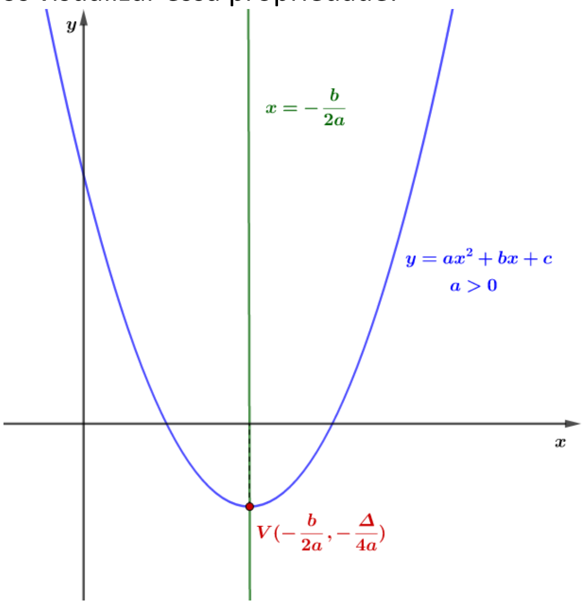
Agora, temos mais uma ferramenta para nos ajudar a resolver as questões da prova!

1.1.3. Eixo de Simetria e Vértice

Observando o gráfico do tópico anterior, podemos perceber que o ponto $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ representa a "ponta" da parábola. Para esse ponto, chamamos de vértice e usualmente representamos por V.

Além disso, perceba que a parábola é simétrica em relação à reta que passa pelo seu vértice dado por $x = -\frac{b}{2a}$.

Graficamente, podemos visualizar essa propriedade:



1.2. Gráfico

Vamos aprender a esboçar o gráfico de uma função quadrática. O gráfico é muito útil para resolver diversas questões das provas, pois ela nos permite analisar os principais pontos do gráfico e extrair informações relevantes.

Para esboçar o gráfico de uma função quadrática, devemos nos atentar às seguintes etapas:

I) Analisar o valor de delta e verificar se há raízes. Lembrando que se

a) $\Delta < 0 \Rightarrow não\ há\ raízes$

b) $\Delta = 0 \Rightarrow 1\ raiz$

c) $\Delta > 0 \Rightarrow 2\ raízes\ distintas$

II) Saber se a concavidade é voltada para cima $(a > 0)$ ou para baixo $(a < 0)$.

III) Encontrar o vértice da parábola, cujo ponto é $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

IV) Desenhar uma parábola simétrica em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$ (reta perpendicular ao eixo x).

Exemplos:

Vamos esboçar o gráfico da seguinte função:

$$y = x^2 - 8x + 12$$

Seguindo as etapas para o esboço do gráfico, vamos encontrar o valor de delta:

$$x^2 - 8x + 12 \Rightarrow a = 1, b = -8, c = 12$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4(1)(12) = 64 - 48 = 16 > 0$$

Logo, a função possui duas raízes. Vamos calculá-las:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-8) \pm \sqrt{16}}{2(1)} = \frac{(8 \pm 4)}{2}$$

$$x_1 = \frac{8-4}{2} = \frac{4}{2} = 2$$
$$x_2 = \frac{8+4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

CURIOSIDADE

Perceba que a função $f(x) = x^2 - 8x + 12$ possui $b = -8$, um número par. Podemos encontrar as raízes dessa função de uma forma mais rápida. Veja:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 1 \cdot 12}}{1} = 4 \pm \sqrt{4} = 4 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 2\ e\ x_2 = 6$$

Essas são as raízes da função. Note que o cálculo delas envolve números menores e, por isso, o cálculo se torna mais simples. Podemos usar essa fórmula simplificada apenas quando b for um número par, isto é, $b = 2k$.

Vamos explicar o que aconteceu.

Sendo a equação quadrática da forma:

$$ax^2 + 2kx + c = 0$$

As raízes da equação são dadas por:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{(2\mathrm{k})^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4\mathrm{k}^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm 2\sqrt{\mathrm{k}^2 - ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow \boldsymbol{x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}}$$

Note que a fórmula é obtida através da fatoração da expressão.

Essa é a fórmula simplificada para encontrar as raízes de uma equação com b par. Ela facilita os cálculos quando os coeficientes da equação forem grandes.

Encontrado as raízes, devemos encontrar o vértice da parábola.

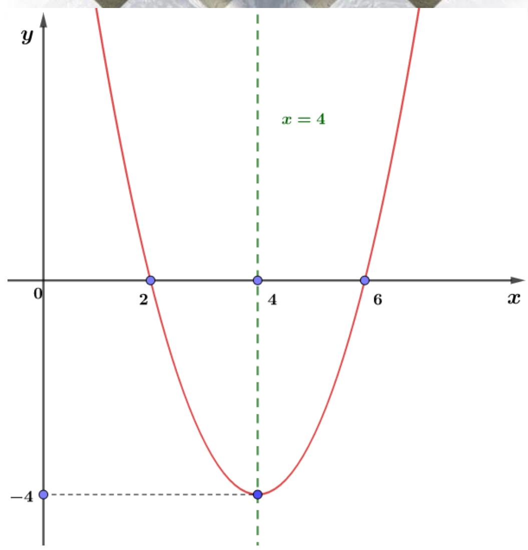
$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-8)}{2} = 4$$

Para encontrar y_V, podemos substituir x_V na função ou usar a fórmula pronta. Vamos usar a fórmula:

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16}{4} = -4$$

Resta verificar a concavidade da parábola. Temos $a = 1 > 1$, logo a concavidade é voltada para cima.

Para esboçar o gráfico, devemos desenhar uma parábola simétrica em relação à reta $x = 4$ e que passa pelos pontos $x_1(2{,}0), x_2(6{,}0), V(4,-4)$:



Esse é o gráfico resultante.

1.3. Decomposição em Fatores do 1º Grau

As funções quadráticas podem ser decompostas em fatores do 1º grau:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Onde x_1 e x_2 são as raízes dessa função.

Para isso, ela deve ter pelo menos uma raiz.

Vamos ver na prática como fazemos:

1) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

Encontrando as raízes, usando a fórmula simplificada:

$$x = 3 \pm \sqrt{3^2 - 5} = 3 \pm \sqrt{4} = 3 \pm 2 = 5 \; ou \; 1$$

Reescrevendo a função:

$$f(x) = (x - 5)(x - 1)$$

2) $g(x) = 2x^2 + 3x - 5$

Encontrando as raízes:

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-5)}}{2 \cdot 2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{-3 \pm 7}{4} = -\frac{5}{2} \; ou \; 1$$

Reescrevendo a função:

$$g(x) = 2\left(x - \left(-\frac{5}{2}\right)\right)(x - 1) = 2\left(x + \frac{5}{2}\right)(x - 1) = (2x + 5)(x - 1)$$

1.4. Inequações Quadráticas

Antes de estudar as inequações quadráticas, vamos fazer o estudo do sinal da função quadrática.

1.4.1. Estudo do Sinal

Para encontrarmos os sinais da função, devemos verificar o valor de delta e também conferir o valor do coeficiente a.

Sendo $f(x) = ax^2 + bx + c$. Temos três casos para delta:

$$\Delta < 0 \; ou \; \Delta = 0 \; ou \; \Delta > 0$$

A análise será feita usando o número $a \cdot f(x)$ (a é o coeficiente da função quadrática). Começaremos pelo primeiro caso:

1) $\boldsymbol{\Delta < 0}$

A função não possui raiz, logo não intercepta o eixo x.

Usando a forma canônica de f, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, vamos analisar o sinal de $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a\left(a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4} = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-\Delta)}{4}$$

Como $\Delta < 0$, temos $-\Delta > 0$. Observe a equação:

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo} \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{positivo} + \underbrace{\frac{(-\Delta)}{4}}_{positivo}$$

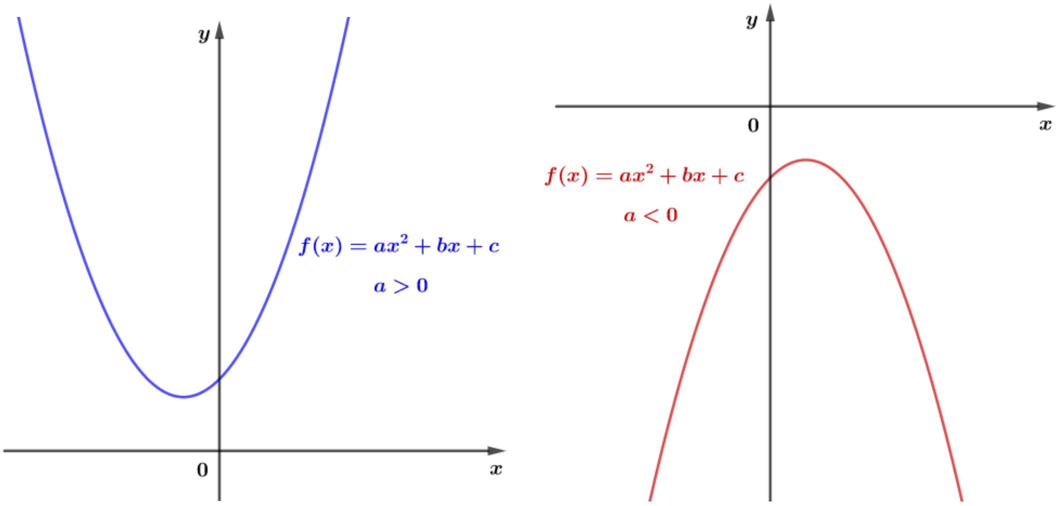
Perceba que todos os termos à direita são positivos, então a soma desses números deve resultar em um número positivo. Com isso, podemos concluir:

$$a \cdot f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Dessa desigualdade, resulta:

$$\boxed{\begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow f(x) > 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \end{array}}$$

Pelo gráfico, podemos visualizar as possibilidades:



2) $\Delta = 0$

Nesse caso, temos uma única raiz. Ela intercepta o eixo das abcissas no ponto $x = -b/2a$.
Calculando $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}$$

Substituindo $\Delta = 0$ na equação, obtemos:

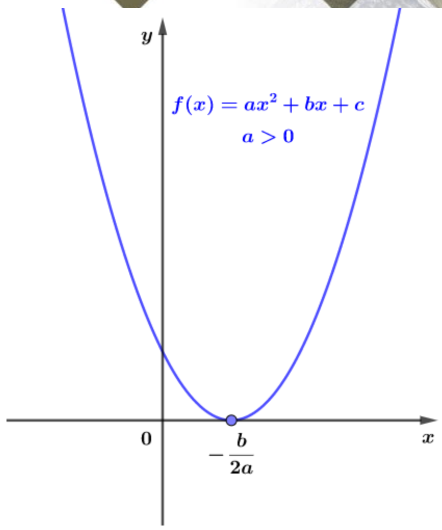
$$\Delta = 0 \Rightarrow a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo} \underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\geq 0}$$

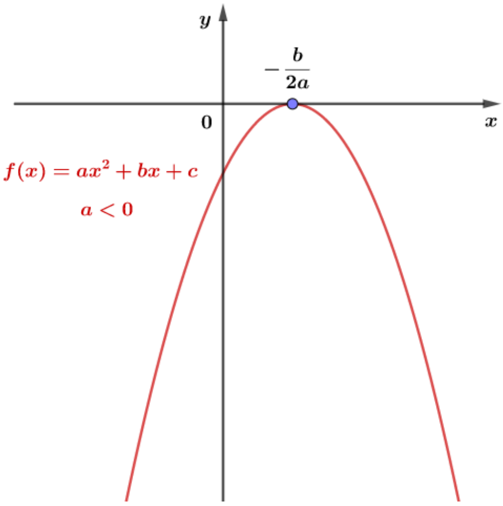
$$a \cdot f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Com isso, temos:

$$\boxed{\begin{array}{l} a > 0 \Rightarrow f(x) \geq 0 \\ a < 0 \Rightarrow f(x) \leq 0 \end{array}}$$

Graficamente:





3) $\Delta > 0$

Temos duas raízes reais que interceptam o eixo das abcissas.

Calculando $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a\left(a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right]$$

Vamos aplicar o produto notável no termo em vermelho (lembrando que $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$):

$$a \cdot f(x) = a^2\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right] = a^2\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

Sabemos que para $\Delta > 0$, temos duas raízes reais dadas por:

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \; e \; x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Podemos substituí-las em $a \cdot f(x)$:

$$a \cdot f(x) = a^2\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = a^2\left(x-\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(x-\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)$$

$$a \cdot f(x) = \underbrace{a^2}_{positivo}(x-x_2)(x-x_1)$$

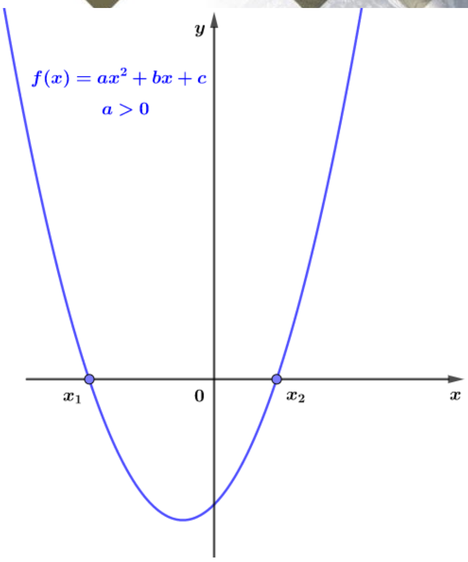
Com isso, vemos que o sinal de $a \cdot f(x)$ é dado pelo estudo do sinal de $a^2(x-x_2)(x-x_1)$.

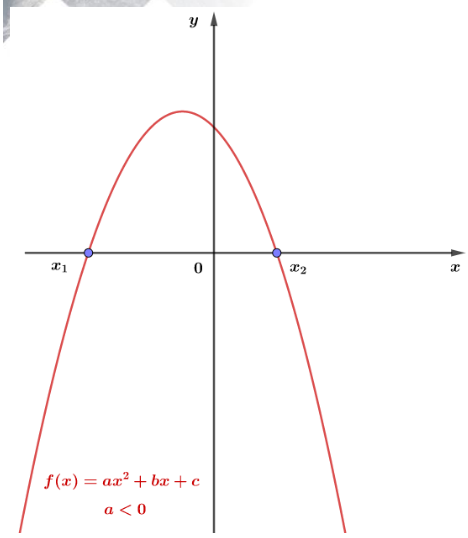
Para cada valor de a, temos:

$$\boxed{a > 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, x < x_1 \; ou \; x > x_2 \\ f(x) < 0, x_1 < x < x_2 \\ f(x) = 0, x = x_1 \; ou \; x = x_2 \end{cases}}$$

$$\boxed{a < 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0, x_1 < x < x_2 \\ f(x) < 0, x < x_1 \; ou \; x > x_2 \\ f(x) = 0, x = x_1 \; ou \; x = x_2 \end{cases}}$$

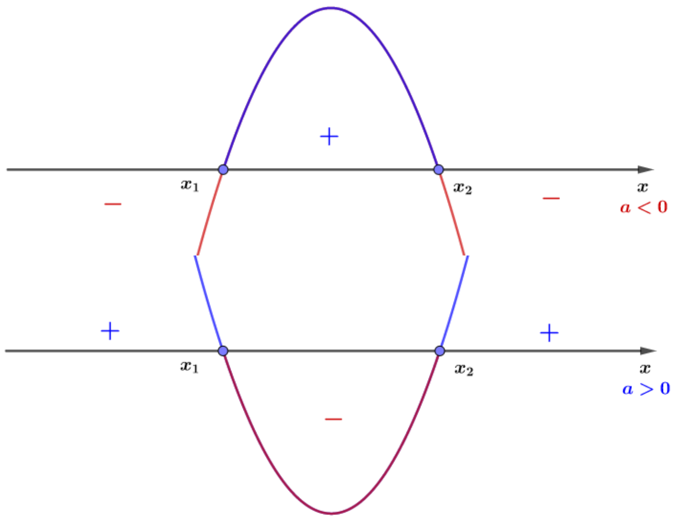
Graficamente:



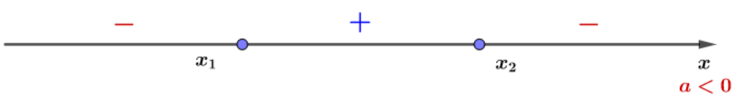


Resumindo:
Para fazer o estudo do sinal da função, devemos:
1) Analisar o sinal do coeficiente a.
2) Verificar se há raízes.
3) Representar os sinais no eixo x.

Geralmente, as questões de inequações quadráticas terão raízes. Usamos os seguintes eixos para representar o sinal da função:



Simplificadamente:



1.4.2. Inequações do Segundo Grau

Aprendemos no tópico anterior todos os casos de sinais possíveis para a função quadrática.

Para resolver uma inequação quadrática, temos que verificar o que se pede na questão e analisar quais os valores de x resultam na desigualdade pedida. Vamos ver um exemplo:

Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$:

$$-x^2 + 2x + 3 \geq 0$$

Vamos analisar o valor de delta:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2)^2 - 4(-1)(3) = 4 + 12 = 16$$

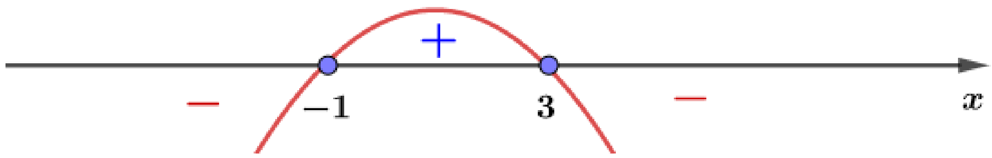
Como $\Delta > 0$, temos duas raízes:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$$

$$x_1 = -1 \text{ e } x_2 = 3$$

$$a = -1 < 0 \Rightarrow \text{concavidade para baixo}$$

Representando o sinal no eixo x, temos:



Os valores que nos interessam são os maiores ou iguais a zero:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$$

1.5. Equações e Inequações Paramétricas

Vamos finalizar o assunto de funções quadráticas estudando as equações e inequações paramétricas. Esse tema é um assunto que pode parecer difícil à primeira vista, então vamos nos atentar a todos os detalhes!

Mas, o que seria uma equação ou inequação paramétrica?

Vejamos alguns exemplos:

1) $x^2 + px + q = 0$

Em uma equação paramétrica, alguns coeficientes tornam-se parâmetros. Esses parâmetros podem variar e mudar totalmente a forma da equação.

No exemplo (1), temos dois parâmetros, p e q. O único coeficiente conhecido é $a = 1$.

Normalmente, as questões que envolvem esse tema pedirão para comparar um número real com as raízes da equação ou analisar os sinais das raízes da equação. Veremos como resolver cada caso.

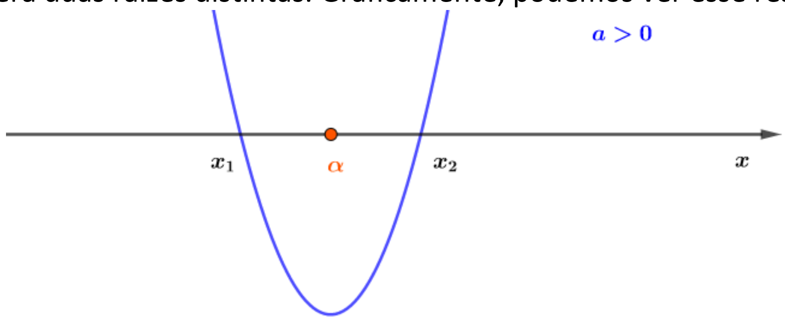
As inequações paramétricas podem ser resolvidas usando os métodos que aprendemos até aqui e também aplicar as técnicas que aprenderemos agora. Vamos ver dois teoremas que nos permitem localizar um número real ao longo do eixo x.

1.5.1. Teorema 1 $(\boldsymbol{a \cdot f(\alpha)})$

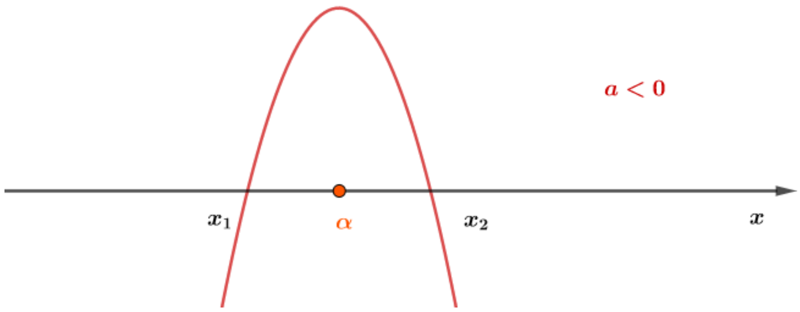
Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\boxed{a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow \Delta > 0 \text{ e } x_1 < \alpha < x_2}$$

Esse teorema diz que se o produto $a \cdot f(\alpha) < 0$, o número real α estará entre as raízes da função e a função f terá duas raízes distintas. Graficamente, podemos ver esse resultado:



Ou



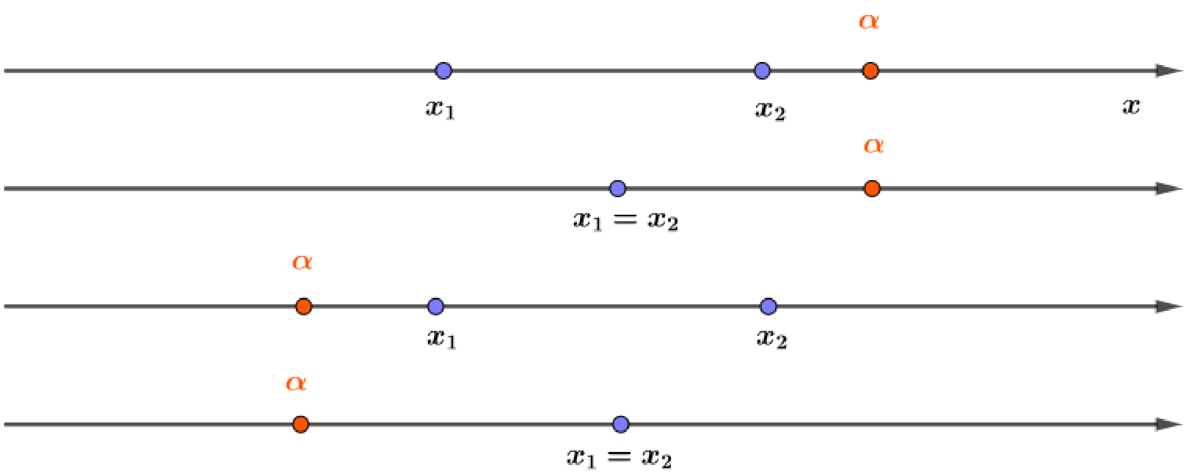
1.5.2. Teorema 2 $(a \cdot f(\alpha))$

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f(x) = ax^2 + bx + c$, temos:

$$\boxed{a \cdot f(\alpha) > 0 \text{ e } \Delta \geq 0 \Rightarrow \alpha < x_1 \text{ ou } \alpha > x_2}$$

O teorema diz que se $a \cdot f(\alpha) > 0$ e $\Delta \geq 0$, o número real α estará à esquerda da menor raiz ou à direita da maior raiz.

Possíveis casos:



Vamos ver a aplicabilidade desses dois teoremas usando exemplos.

Exemplos:

Determine os valores de m na equação $x^2 + (m-2)x + 1 - m = 0$ de modo que o número 2 esteja entre as raízes.

Queremos que $x_1 < 2 < x_2$, então vamos usar o teorema 1.

Sendo $f(x) = x^2 + (m-2)x + 1 - m$:

$$a \cdot f(\alpha) < 0 \Rightarrow 1 \cdot f(2) < 0$$

Calculando $f(2)$:

$$f(2) = 2^2 + (m-2)2 + 1 - m = 4 + 2m - 4 + 1 - m = m + 1$$

Substituindo na condição inicial, encontramos:

$$m + 1 < 0 \Rightarrow m < -1$$

Então, para $m < -1$ o número 2 estará entre as raízes da função.

Determine m de modo que a equação $(m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1 = 0$ tenha raízes reais tais que $x_1 < x_2 < 1$.

Nesse caso, temos que usar o teorema 2.

Considerando $f(x) = (m-3)x^2 + 2(m-2)x + m + 1$. Para satisfazer as condições do problema, temos que encontrar m tal que:

$$(I)\ a \cdot f(1) > 0$$
$$(II)\ \Delta \geq 0$$
$$(III)\ -\frac{b}{2a} < 1$$

Vamos analisar cada condição separadamente.

$$(I)\ a \cdot f(1) > 0$$
$$f(1) = m - 3 + 2(m-2) + m + 1 = 4m - 6$$
$$\Rightarrow a \cdot f(1) = (m-3)(4m-6) > 0$$

Disso resulta:

$$m - 3 > 0 \text{ e } 4m - 6 > 0 \Rightarrow m > 3\ e\ m > \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m > 3}$$

Ou

$$m - 3 < 0 \text{ e } 4m - 6 < 0 \Rightarrow m < 3\ e\ m < \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m < \frac{3}{2}}$$

$(II)\ \Delta \geq 0$

$$\Delta = [2(m-2)]^2 - 4(m-3)(m+1) =$$
$$4(m^2 - 4m + 4) - 4(m^2 - 2m - 3) =$$
$$4(m^2 - 4m + 4 - m^2 + 2m + 3) =$$
$$4(-2m + 7) =$$
$$-8m + 28$$

$$\Rightarrow -8m + 28 \geq 0 \Rightarrow 28 \geq 8m \Rightarrow \boxed{m \leq \frac{7}{2}}$$

$$(III)\ -\frac{b}{2a} < 1$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{[2(m-2)]}{2(m-3)} = \frac{2-m}{m-3} < 1$$

$$\frac{2-m}{m-3} - 1 < 0 \Rightarrow \frac{5-2m}{m-3} < 0$$

Possibilidades:

$$5 - 2m < 0\ e\ m - 3 > 0$$
$$\Rightarrow m > \frac{5}{2}\ e\ m > 3 \Rightarrow \boxed{m > 3}$$

Ou

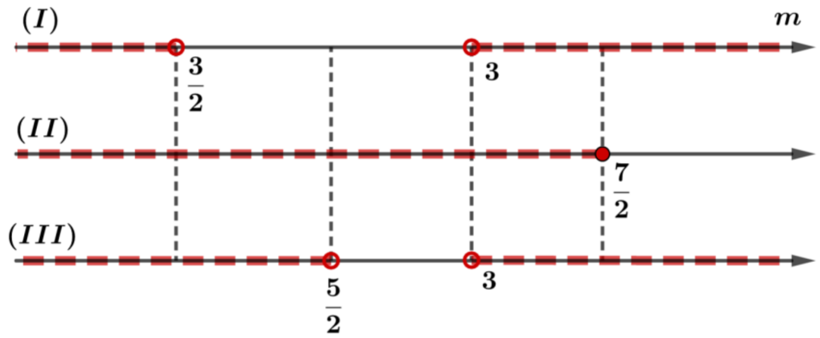
$$5 - 2m > 0\ e\ m - 3 < 0$$
$$\Rightarrow m < \frac{5}{2}\ e\ m < 3 \Rightarrow \boxed{m < \frac{5}{2}}$$

Juntando as possibilidades para $m \in \mathbb{R}$, temos:

$$(I)\ m > 3\ ou\ m < \frac{3}{2}$$

$$(II)\ m \leq \frac{7}{2}$$

$$(III)\ m > 3\ ou\ m < \frac{5}{2}$$



Os valores de m que satisfazem ao problema são resultados da intersecção dos intervalos acima:

$$m < \frac{3}{2}\ ou\ 3 < m \leq \frac{7}{2}$$

1.6. Equações e Inequações Irracionais

Neste tópico, vamos aprender a resolver equações e inequações irracionais.

1.6.1. Equação Irracional

Antes de mais nada, vejamos a definição de uma equação irracional:

Uma **equação irracional** é uma equação cuja variável está sob **um ou mais radicais**.

Exemplos:

1) $\sqrt{x+1} = 2$

2) $\sqrt{x^2 - 2x} = 1$

3) $\sqrt{2x+1} = x - 3$

Para resolver uma equação irracional, devemos eliminar os radicais usando as potências convenientes para isso. Vamos ver na prática como fazemos:

Resolva a seguinte equação:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}} = 3$$

Vamos elevar a equação ao quadrado para eliminar o radical externo:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}}^{2} = 3^{2} \Rightarrow 5 + \sqrt{3 + x} = 9$$

Agora, isolamos o radical na equação:

$$\sqrt{3 + x} = 9 - 5 \Rightarrow \sqrt{3 + x} = 4$$

Elevando ao quadrado:

$$\sqrt{3 + x}^{2} = 4^2 \Rightarrow 3 + x = 16 \Rightarrow x = 13$$

Mas, antes de afirmar que essa é a solução, devemos testar a raiz ou verificar se ela atende às condições de existência do problema, pois elevar uma equação ao quadrado pode trazer soluções que não satisfazem ao problema. Por exemplo, se elevamos a equação $x = 4$ ao quadrado, encontramos $x^2 = 16$. Resolvendo esse problema, encontramos $x = \pm 4$ e sabemos que $x = -4$ não é solução da equação inicial.

Vamos testar a solução $x = 13$:

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + x}} = \sqrt{5 + \sqrt{3 + 13}} = \sqrt{5 + \sqrt{16}} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

Logo, encontramos uma única solução $S = \{13\}$.

Se quiséssemos verificar a raiz usando as condições de existência, teríamos:
Condição de existência:

$$3 + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$$

Para $x \geq -3$, temos $\sqrt{3+x} \geq 0$ e, assim, $5 + \sqrt{3+x} \geq 5 > 0$. Logo, $3 + x \geq 0$ é a única condição de existência da inequação.

Como $x = 13 > -3$, temos que ele é solução.

1.6.2. Inequação Irracional

Para resolver uma inequação irracional, devemos seguir alguns passos. Vamos resolver um exercício para ver como procedemos.

Resolva a inequação em $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x^2 - 5x} > x - 3$$

Nesse caso, devemos verificar as condições do problema.

Para ter solução nos reais, a expressão dentro do radical deve ser maior ou igual a zero:

$$x^2 - 5x \geq 0$$

Agora, temos duas possibilidades:

1) Se o lado direito for negativo, temos o seguinte sistema de inequações:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases}$$

2) Se o lado direito for positivo, podemos elevar ambos os lados ao quadrado e encontrar a solução. O sistema fica:

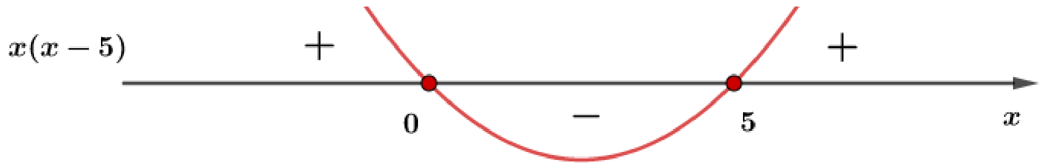
$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Vamos resolver cada caso isoladamente. A solução será a união das soluções encontradas.

Caso 1:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) \geq 0 \\ x < 3 \end{cases}$$

Vamos fazer a análise do sinal da equação quadrática. Representando os sinais no eixo x, obtemos:



Observando a figura, podemos extrair a solução:

$$x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \; ou \; x \geq 5$$

Fazendo intersecção com $x < 3$, obtemos:

$$\Rightarrow x \leq 0$$

Nesse caso a solução é:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} | x \leq 0\}$$

Caso 2:

$$\begin{cases} x^2 - 5x \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-5) \geq 0 \\ x \geq 3 \\ x^2 - 5x > (x-3)^2 \end{cases}$$

Já fizemos o estudo do sinal das duas primeiras inequações.

Da primeira, temos:

$$x^2 - 5x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \; ou \; x \geq 5$$

Juntando com $x \geq 3$, encontramos:

$$\Rightarrow x \geq 5$$

Resta analisar a última inequação, vamos desenvolvê-la:

$$x^2 - 5x > x^2 - 6x + 9 \Rightarrow \quad 6x - 5x > 9 \Rightarrow x > 9$$

Assim, $x \geq 5$ e $x > 9$ implica $x > 9$.

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} | x > 9\}$$

Juntando as soluções:

$$S = S_1 \cup S_2 =]-\infty, 0] \cup]9, +\infty[$$

1.6.3. Inequação Irracional Paramétrica

Vamos aprender a resolver uma paramétrica irracional.

Resolva a seguinte inequação em $\mathbb{R}$, para $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$$

Antes de proceder, devemos analisar a condição de existência:

$$a + x \geq 0 \Rightarrow x \geq -a$$
$$a - x \geq 0 \Rightarrow x \leq a$$

Agora, vamos variar o valor do parâmetro a:

$\boldsymbol{a < 0}$:

Como a é negativo, temos $-a > 0$. Então, representando a no eixo x:

Das condições de existência, temos:

$$x \geq -a \text{ e } x \leq a$$

Nesse caso, não temos solução pois os intervalos não possuem intersecção:

$$a < 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$\boldsymbol{a = 0}$:

Substituindo na inequação do problema, obtemos:

$$\sqrt{x} + \sqrt{-x} > a$$

Como estamos no conjunto dos reais, não temos solução:

$$x > 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{R} \; e \; \sqrt{-x} \in \mathbb{C}$$
$$x < 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathbb{C} \; e \; \sqrt{-x} \in \mathbb{R}$$
$$x = 0 \Rightarrow 0 + 0 > 0 \Rightarrow 0 > 0$$
$$a = 0 \Rightarrow S = \emptyset$$

$\boldsymbol{a > 0}$:

Nesse caso, temos:

Das condições de existência:

$$x \geq -a \text{ e } x \leq a \Rightarrow x \in [-a, a]$$

Vamos resolver a inequação:

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} > a$$

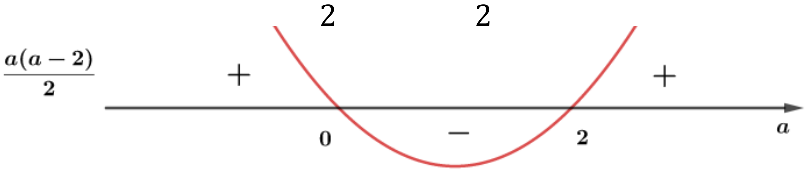
Elevando a inequação ao quadrado:

$$a + x + a - x + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$
$$2a + 2\sqrt{a^2 - x^2} > a^2$$

$$\sqrt{a^2 - x^2} > \frac{a^2 - 2a}{2}$$

Devemos analisar o sinal da expressão $(a^2 - 2a)/2$:

$$\frac{a^2 - 2a}{2} = \frac{a(a-2)}{2}$$



Para $0 < a < 2$, temos:

$$\frac{a(a-2)}{2} < 0$$

Qualquer x que satisfaça as condições de existência é solução. Então:

$$x \in [-a, a]$$

$$0 < a < 2 \Rightarrow S = [-a, a]$$

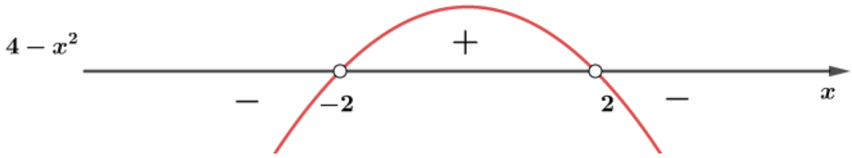
Para $a = 2$:

Substituindo na inequação:

$$\sqrt{4 - x^2} > \frac{4-4}{2} \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} > 0$$

Sabemos que $\sqrt{4 - x^2} \geq 0$. Vamos encontrar a solução em x.

Analisando o sinal de $4 - x^2$ para verificar a condição de existência:



Vemos que temos solução para $x \in]-2{,}2[$.

$$a = 2 \Rightarrow S =]-2, 2[$$

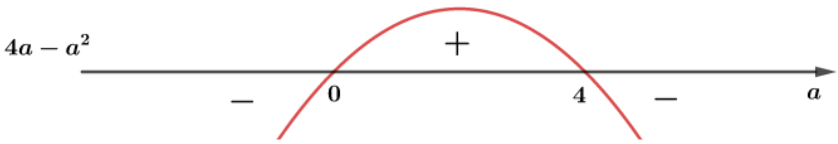
Para $a > 2$:

Procedemos elevando a inequação ao quadrado:

$$a^2 - x^2 > \frac{(a^2 - 2a)^2}{4} \Rightarrow a^2 - \frac{a^2(a-2)^2}{4} > x^2 \Rightarrow x^2 < a^2 - \frac{a^2(a-2)^2}{4}$$

$$\Rightarrow x^2 < \frac{a^2\left(4 - (a^2 - 4a + 4)\right)}{4} \Rightarrow x^2 < \frac{a^2(4a - a^2)}{4}$$

a^2 é positivo, vamos estudar o sinal de $4a - a^2$:



Se $a < 0$ ou $a > 4$, temos:

$$x^2 < \frac{a^2(4a - a^2)}{4} < 0 \Rightarrow x^2 < 0\ (impossível)$$

$$a > 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Logo, temos que:

$$\frac{a^2(4a - a^2)}{4} > 0 \Rightarrow 0 < a < 4$$

Como $a > 2$:

$$\frac{a^2(4a - a^2)}{4} > 0 \Rightarrow 2 < a < 4$$

Para esse intervalo de a a solução é dada por:

$$x^2 < \frac{a^2(4a-a^2)}{4} \Rightarrow -\sqrt{\frac{a^2(4a-a^2)}{4}} < x < \sqrt{\frac{a^2(4a-a^2)}{4}} \Rightarrow -\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2} < x < \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}$$

$$2 < a < 4 \Rightarrow S = \left]-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right[$$

Resta analisar $a = 4$:

Substituindo na expressão:

$$x^2 < \frac{4^2(4 \cdot 4 - 4^2)}{4} = 0 \Rightarrow x^2 < 0 \ (impossível)$$

$$a = 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Com isso, encontramos todas as possibilidades para o parâmetro a:

$$a \leq 0 \Rightarrow S = \emptyset$$
$$0 < a < 2 \Rightarrow S = [-a, a]$$
$$a = 2 \Rightarrow S =]-2, 2[$$
$$2 < a < 4 \Rightarrow S = \left]-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right[$$
$$a \geq 4 \Rightarrow S = \emptyset$$

Obs.: Inequações paramétricas também podem ser resolvidas usando geometria analítica. Estudaremos com mais detalhes quando chegarmos nesse assunto.

2. Módulo de um número Real

2.1. Definição

Seja f uma função na variável x. A definição de módulo é dada por:

$$\boxed{|f(x)| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}}$$

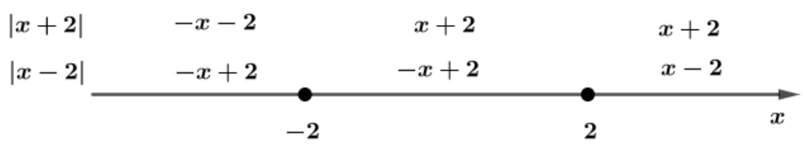
$|f(x)|$ é chamado de módulo de uma função na variável x. O módulo também é conhecido como valor absoluto.

Exemplos:

1) $g(x) = |x-2| + |x+2|$

$$|x-2| \text{ pode ser } x-2 \text{ ou } -x+2$$
$$|x+2| \text{ pode ser } x+2 \text{ ou } -x-2$$

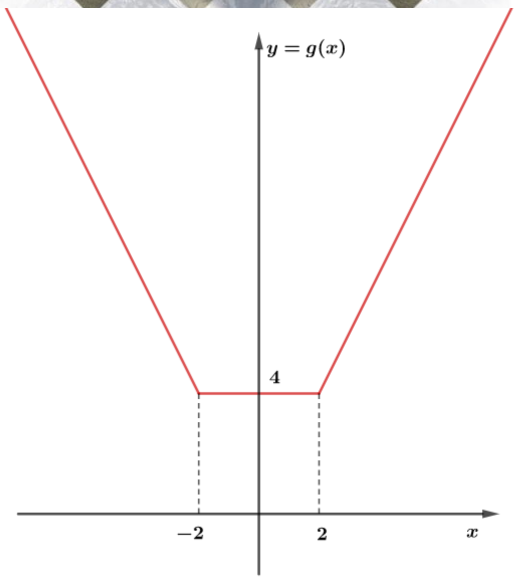
Representando os sinais das funções envolvidas no eixo x:



Analisando a figura, temos:

$$x < -2 \Rightarrow g(x) = -x + 2 - x - 2 = -2x$$
$$-2 \leq x < 2 \Rightarrow g(x) = -x + 2 + x + 2 = 4$$
$$x \geq 2 \Rightarrow g(x) = x - 2 + x + 2 = 2x$$

Gráfico:



2.2. Gráfico

Usando o gráfico, podemos explicitar os pontos mais importantes de uma função. Vamos aprender como esboçar o gráfico de uma função modular por meio de um exemplo:

$$E(x) = \left||x^2 - 1| - 2\right|$$

Temos que esboçar a figura de dentro pra fora. O primeiro passo é esboçar o módulo da parte interior:

$$|x^2 - 1|$$

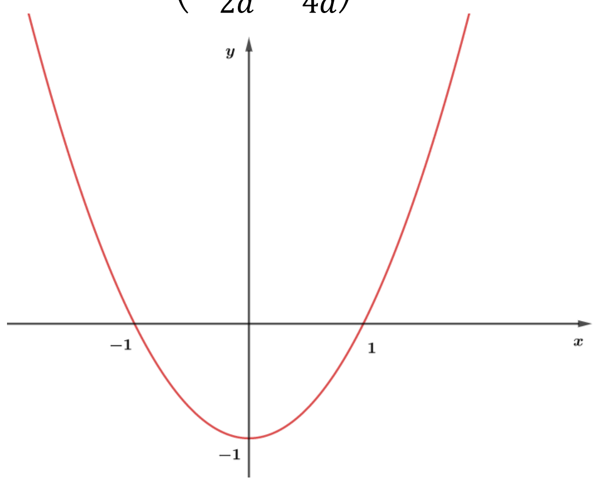
Vamos por partes. Primeiro, representamos $x^2 - 1$:

Raízes:

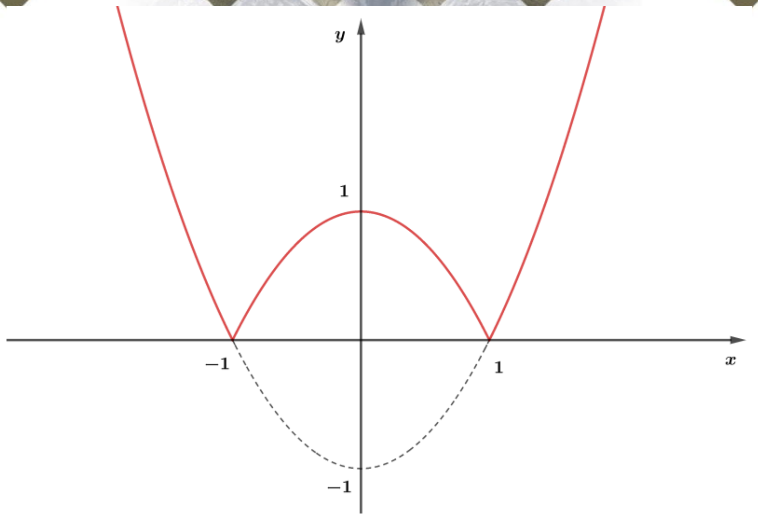
$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Vértice:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) = (0, -1)$$

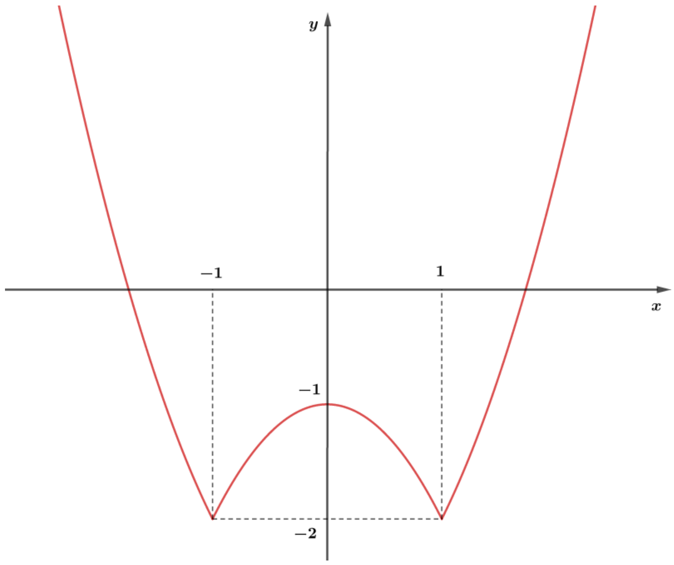


Agora, representamos $|x^2 - 1|$. Basta espelhar a parte negativa para cima:



O próximo passo é transladar -2 na função acima. Devemos deslocar o gráfico 2 números para baixo verticalmente.

$|x^2 - 1| - 2$:



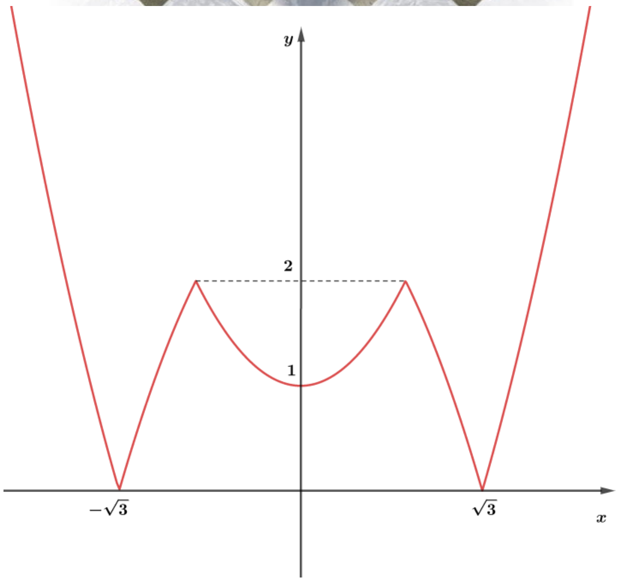
Por último, espelhamos a parte negativa para cima:

$\left||x^2 - 1| - 2\right|$:

Observando o gráfico de $|x^2 - 1| - 2$, vemos que a função que representa os pontos de raízes é dada pelo gráfico da parábola $x^2 - 1$ subtraído de 2:

$$x^2 - 1 - 2 = x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Com isso, obtemos o resultado final:



2.3. Propriedades

P1) $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
P2) $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$
P3) $|x|^2 = |x^2| = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$
P4) $|x| = \sqrt{x^2}$
P5) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
P6) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$
P7) $|x| \geq a, a > 0 \Leftrightarrow x \leq -a \; ou \; x \geq a$
P8) $|x| \leq a, a > 0 \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$
P9) $|x + y| \leq |x| + |y|$
P10) $|x - y| \geq |x| - |y|$
P11) $|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$
P12) $|x + y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

1. Construa o gráfico da seguinte função em $\mathbb{R}$:

$$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$$

Resolução:

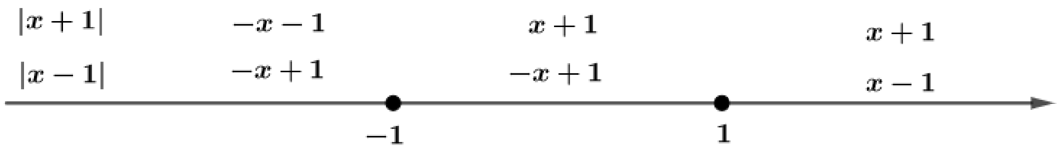
$f(x) = |x + 1| + |x - 1|$

Vamos dividir em casos. Sabemos que:

$$|x + 1| = \begin{cases} x + 1, x \geq -1 \\ -x - 1, x < -1 \end{cases}$$

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, x \geq 1 \\ -x + 1, x < 1 \end{cases}$$

Construindo a tabela:



Para $x < -1$:

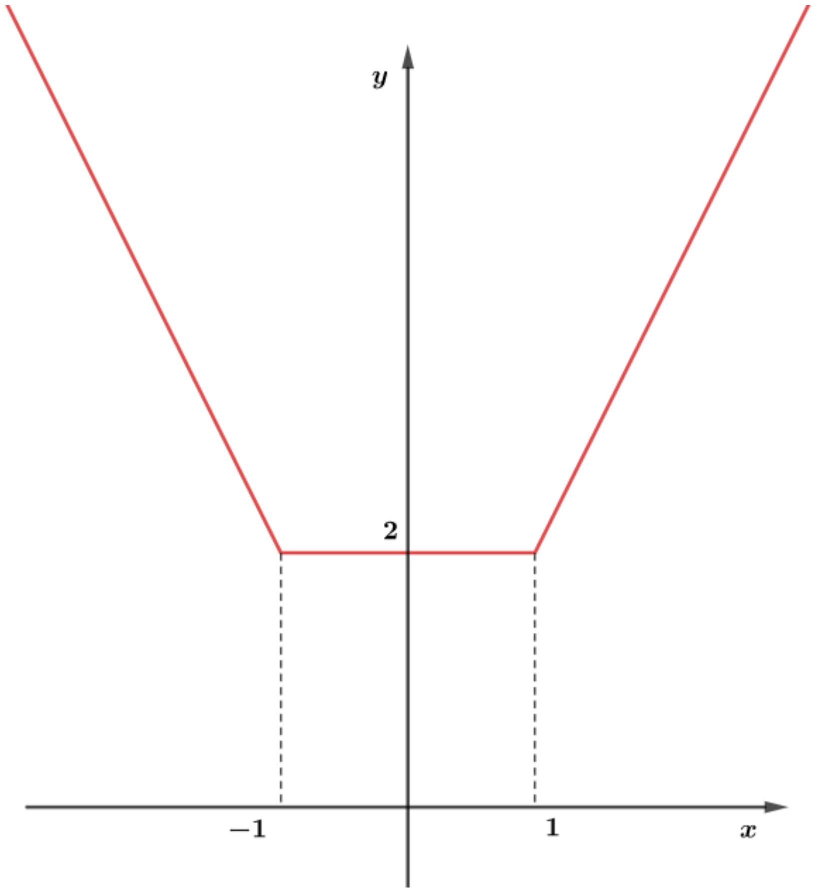
$$f(x) = -x - 1 - x + 1 = -2x$$

Para $-1 \leq x < 1$:

$$f(x) = x + 1 - x + 1 = 2$$

Para $x \geq 1$:

$$f(x) = x + 1 + x - 1 = 2x$$



2. Encontre a função por intervalos:

$$f(x) = |x^2 - 4| - |x - 2|$$

Resolução:

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, x \geq 2 \\ -x + 2, x < 2 \end{cases}$$

$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, x \leq -2 \ ou \ x \geq 2 \\ -x^2 + 4, -2 < x < 2 \end{cases}$$

Para $x \geq 2$:

$$f(x) = x^2 - 4 - (x - 2) = x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$$

Para $-2 < x < 2$:

$$f(x) = -x^2 + 4 - (-x + 2) = -x^2 + x + 6 = -(x - 3)(x + 2)$$

Para $x \leq -2$:

$$f(x) = x^2 - 4 - (-x + 2) = x^2 + x - 6$$

Então, podemos escrever f em intervalos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2, x \geq 2 \\ -x^2 + x + 6, -2 < x < 2 \\ x^2 + x - 6, x \leq -2 \end{cases}$$

3. Resolva as seguintes equações, em $\mathbb{R}$:

a) $|3x - 1| = 2$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

c) $|3x + 2| = |x - 1|$

Resolução:

a) $|3x - 1| = 2$

Para resolver uma equação modular, devemos encontrar o valor de x para cada caso do módulo:

$$\begin{cases} 3x - 1 = 2 \\ -(3x - 1) = 2 \end{cases}$$

$$3x - 1 = 2 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

$$1 - 3x = 2 \Rightarrow -1 = 3x \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 3\right\}$$

b) $|x^2 - 4x + 5| = 2$

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 = 2 \\ -(x^2 - 4x + 5) = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 4x + 5 = 2 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1 \; ou \; x = 3$$

$$-x^2 + 4x - 5 = 2 \Rightarrow -x^2 + 4x - 7 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(-1)(-7) = 16 - 28 = -12 < 0$$

Não tem raiz

$$\therefore S = \{1, 3\}$$

c) $|3x + 2| = |x - 1|$

$$\begin{cases} 3x + 2 = x - 1 \\ 3x + 2 = -x + 1 \end{cases}$$

$$3x + 2 = x - 1 \Rightarrow 2x = -3 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

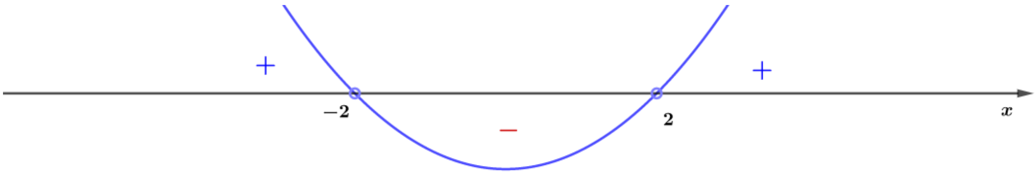
$$3x + 2 = -x + 1 \Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$$

$$\therefore S = \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right\}$$

4. Resolva a inequação $|x^2 - 4| < 3x$.

Resolução:

Vamos analisar o sinal de $x^2 - 4$:



Da análise do sinal da figura, temos:

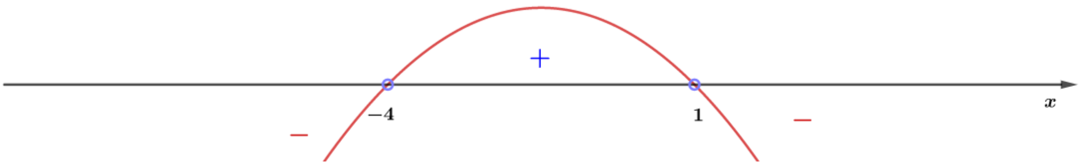
$$|x^2 - 4| = \begin{cases} x^2 - 4, x \leq -2 \; ou \; x \geq 2 \\ -x^2 + 4, -2 < x < 2 \end{cases}$$

Para $-2 < x < 2$:

$$-x^2 + 4 < 3x \Rightarrow -x^2 - 3x + 4 < 0$$

$$\Rightarrow -(x + 4)(x - 1) < 0$$

Analisando o sinal:



$$\Rightarrow x < -4 \; ou \; x > 1$$

Fazendo a intersecção com $-2 < x < 2$, temos:

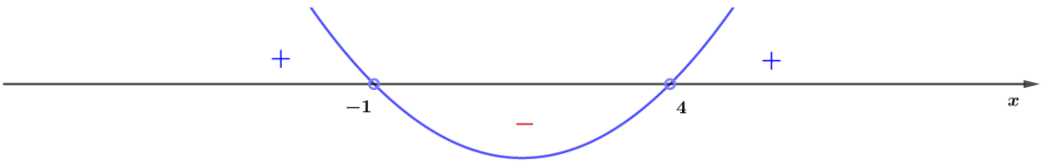
$$1 < x < 2$$

Para $x \leq -2 \; ou \; x \geq 2$:

$$x^2 - 4 < 3x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$\Rightarrow (x - 4)(x + 1) < 0$$

Estudando o sinal:



$$\Rightarrow -1 < x < 4$$

Fazendo a intersecção com a condição inicial $x \leq -2 \; ou \; x \geq 2$:

$$2 \leq x < 4$$

Portanto a solução é dada por:

$$S =]1, 2[\cup [2, 4[=]1, 4[$$

3. Lista de Questões

5. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

6. (ITA/2015)

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-\frac{1}{2}} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

7. (ITA/2012)

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3 + x^2, & x \geq 0 \\ 3 - x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

8. (ITA/2008)

Resolva a inequação $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2$.

9. (ITA/2007)

Considere a equação: $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes.

10. (ITA/2007)

Sobre a equação na variável real x,

$$\left|\left||x-1|-3\right|-2\right|=0,$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

11. (ITA/2005)

Determine todos os valores reais de a para que $(x-1)^2=|x-a|$ admita exatamente 3 soluções distintas.

12. (ITA/2005)

Considere a equação em $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$$

Sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

13. (ITA/2005)

a) Mostre que o número real $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3+3x-4=0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

14. (ITA/2005)

Sobre o número $x=\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0,2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x \in]2,3[$.

15. (ITA/2004)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$ em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
$Valor\ mínimo$	$Ponto\ de\ mínimo$	$Valor\ máximo$	$Ponto\ de\ máximo$
-1	< 0	$9/4$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f\ o\ g)(x) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

16. (ITA/2002)

Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a expressão real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left||2x - 1| - 6\right|}$ está definida, formam o conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[-5, 6]$

c) $[-5, 0] \cup [1, +\infty[$

d) $]-\infty, 0] \cup [1, 6]$

e) $[-5,0] \cup [1,6]$

17. (ITA/2001)

O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + (2m + 1)x + (m^2 + 2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

b) $]\frac{1}{4}, \infty[$

c) $]0, \frac{7}{4}[$

d) $]-\infty, \frac{1}{4}]$

e) $]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

18. (ITA/2000)

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{11}{6}$

e) $\frac{7}{6}$

19. (IME/2012)

Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Obtém-se $f(x)$ igual a:

a) $x^2 - (a+b+c)x + abc$

b) $x^2 + x - abc$

c) x^2

d) $-x^2$

e) $x^2 - x + abc$

20. (IME/2007)

Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$

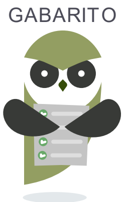
b) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$

c) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$

d) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$

e) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

4. Gabarito



5. $a = 4$ e $b = 1$

6. e
7. $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ e\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-3}, y \geq 3 \\ -\sqrt{3-y}, y < 3 \end{cases}$
8. $S = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup (2, +\infty)$
9. a) $p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$ b) $x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$
10. d
11. $a \in \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right\}$
12. a) $S = \left\{0, \pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq m < 1$
13. Demonstração
14. b
15. d
16. e
17. d
18. d
19. c
20. a

5. Lista de Questões Comentadas

5. (ITA/2020)

Sejam a e b dois números reais. Sabendo que o conjunto dos números reais k para os quais a reta $y = kx$ intersecta a parábola $y = x^2 + ax + b$ é igual a $(-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$, determine os números a e b.

Comentários

Devemos ter que:

$$kx = x^2 + ax + b$$
$$x^2 + (a-k)x + b = 0$$
$$\Delta = (a-k)^2 - 4b \geq 0 \text{ (pois existe intersecção)}$$
$$a^2 - 2ak + k^2 - 4b \geq 0$$
$$k^2 - 2ak + a^2 - 4b \geq 0 \ \ (I)$$
$$\Delta' = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 4b) = 4a^2 - 4a^2 + 16b$$
$$\Rightarrow \Delta' = 16b$$

Encontrando as raízes em k:

$$\begin{cases} k_1 = \dfrac{2a + \sqrt{16b}}{2} = a + 2\sqrt{b} \\ k_2 = \dfrac{2a - \sqrt{16b}}{2} = a - 2\sqrt{b} \end{cases}$$

O intervalo que satisfaz a inequação (I) é:

$$k \in \left(-\infty, a - 2\sqrt{b}\right] \cup \left[a + 2\sqrt{b}, +\infty\right)$$

Comparando com o intervalo dado no enunciado:

$$k \in (-\infty, 2] \cup [6, +\infty)$$

Temos que:

$$\begin{cases} a + 2\sqrt{b} = 6 \\ a - 2\sqrt{b} = 2 \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (4,1)$$

Gabarito: $a = 4$ e $b = 1$

---

6. **(ITA/2015)**

Considere a equação $\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x-\frac{1}{2}} = 5$, com a e b números inteiros positivos. Das afirmações:

I. Se $a = 1$ e $b = 2$, então $x = 0$ é uma solução da equação.

II. Se x é solução da equação, então $x \neq \frac{1}{2}, x \neq -1$ e $x \neq 1$.

III. $x = \frac{2}{3}$ não pode ser solução da equação.

É (são) verdadeira(s):

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentários

I. Verdadeira.

Substituindo $a = 1, b = 2, x = 0$ na equação, obtemos:

$$\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{1}{1-0^2} - \frac{2}{0 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = 1 + 4 = 5$$

II. Verdadeira.

A condição de existência da equação implica:

$$1 - x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 1$$

$$x - \frac{1}{2} \neq 0 \Rightarrow x \neq \frac{1}{2}$$

Para a equação possuir x como solução, devemos ter $x \neq \pm 1$ e $x \neq 1/2$.

III. Verdadeira.

Vamos substituir $x = 2/3$ e analisar a equação:

$$\frac{a}{1-x^2} - \frac{b}{x - \frac{1}{2}} = 5$$

$$\frac{a}{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}-\frac{b}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}=5$$
$$\frac{a}{1-\frac{4}{9}}-\frac{b}{\frac{1}{6}}=5$$
$$\frac{9a}{5}-6b=5$$
$$\frac{9a}{5}=5+6b$$
$$9a=5(5+6b)$$
$$9a=25+30b$$
$$9a-30b=25$$
$$3(3a-10b)=25$$

Como $a, b \in \mathbb{Z}^*$, temos $3a-10b \in \mathbb{Z}$. Sabemos que 25 não é múltiplo de 3, logo é impossível haver valores para a e b inteiros positivos que satisfaçam a equação acima.

Gabarito: "e".

7. (ITA/2012)

Analise se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \begin{cases} 3+x^2, & x \geq 0 \\ 3-x^2, & x < 0 \end{cases}$ é bijetora e, em caso afirmativo, encontre $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Comentários

Podemos provar que a função f é bijetora de dois modos:

1) Analiticamente:

Para $x_1, x_2 \geq 0, x_1 x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \neq x_2$$

Como ambos são positivos e diferentes entre si, podemos elevar ambos ao quadrado:

$$x_1^2 \neq x_2^2$$
$$3+x_1^2 \neq x_2^2+3$$
$$f(x_1) \neq x(x_2), x_1, x_2 \geq 0$$

Para $x_1, x_2 < 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}$:

$$x_1 \neq x_2$$

Ambos são negativos e diferentes entre si, podemos elevar ao quadrado:

$$x_1^2 \neq x_2^2$$
$$-x_1^2 \neq -x_2^2$$
$$3-x_1^2 \neq 3-x_2^2$$
$$f(x_1) \neq f(x_2)$$

Portanto, f é injetora.

Dado que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, vamos provar que $Im(f) = \mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} 3+x^2, & x \geq 0 \\ 3-x^2, & x < 0 \end{cases}$$

Se $y \in \mathbb{R}$ e $y = f(x)$. Para $x \geq 0$:

$$y = 3+x^2$$
$$x^2 = y-3$$
$$|x| = \sqrt{y-3}$$
$$x = \begin{cases} \sqrt{y-3} \geq 0 \\ -\sqrt{y-3} \leq 0 \end{cases}$$

$$x \geq 0 \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \geq 0 \Rightarrow y - 3 \geq 0 \Rightarrow y \geq 3$$

Para $x < 0$:

$$y = 3 - x^2$$
$$x^2 = 3 - y$$
$$|x| = \sqrt{3-y}$$
$$x = \begin{cases} \sqrt{3-y} \geq 0 \\ -\sqrt{3-y} \leq 0 \end{cases}$$
$$x < 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3-y} < 0 \Rightarrow 3 - y > 0 \Rightarrow y < 3$$

Portanto, $Im(f) = \mathbb{R}$. f também é sobrejetora. f é bijetora.

2) Graficamente:

f é a união de duas parábolas. Uma com concavidade para cima $(3 + x^2)$ e outra com concavidade para baixo $(3 - x^2)$.

O ponto que separa as duas equações é $x = 0$. Para $x = 0$:

$$f(0) = 3$$

O ponto de vértice das duas parábolas é:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

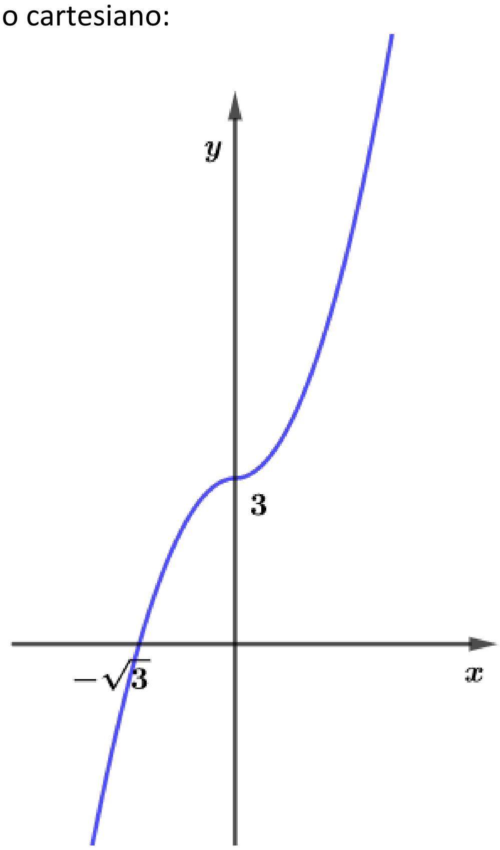
Como $b = 0$ para as duas equações, temos $x_v = 0$. Para $x_v = 0$, temos $f(0) = 3$.

A única equação que possui raiz é $3 - x^2, x < 0$.

$$3 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

Como $x < 0$, temos como raiz $x = -\sqrt{3}$.

Representando f no plano cartesiano:



Percebemos pelo gráfico que f é uma função crescente $\left(x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)\right)$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

Logo, f é bijetora e inversível.

Vamos encontrar a inversa de f:
Se $y = f(x)$:

$$x \geq 0$$
$$y = 3 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-3} \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y-3}, y \geq 3$$
$$x < 0$$
$$y = 3 - x^2 \Rightarrow x = -\sqrt{3-y} \Rightarrow f^{-1}(y) = -\sqrt{3-y}, y < 3$$

Dessa forma, a inversa é dada por:

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; e \; f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-3}, y \geq 3 \\ -\sqrt{3-y}, y < 3 \end{cases}$$

Gabarito: $\boldsymbol{f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; e \; f^{-1}(y) = \begin{cases} \sqrt{y-3}, y \geq 3 \\ -\sqrt{3-y}, y < 3 \end{cases}}$

---

8. (ITA/2008)

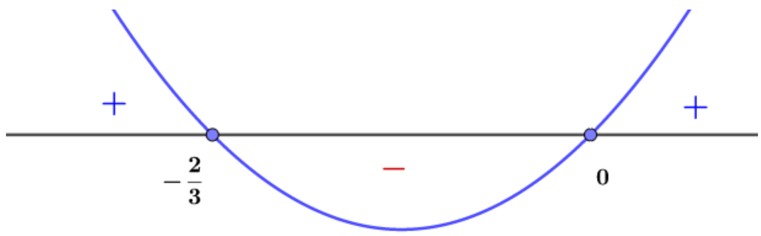
Resolva a inequação $\sqrt{3x^2 + 2x} < x^2$.

Comentários

Vamos analisar a condição de existência:

$$3x^2 + 2x \geq 0$$
$$x(3x+2) \geq 0$$

Analisando o sinal:



$$\Rightarrow x \leq -\frac{2}{3} \; ou \; x \geq 0$$

Vamos elevar a inequação ao quadrado:

$$(3x^2 + 2x) < x^4$$
$$x^4 - 3x^2 - 2x > 0$$

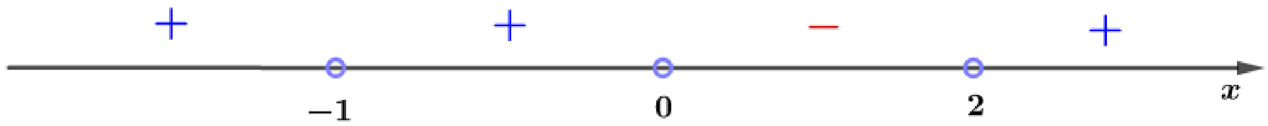
Fatorando:

$$x^4 - 3x^2 - 2x = x(x^3 - 3x - 2) = x(x^3 - x - 2x - 2) = x\big(x(x^2-1) - 2(x+1)\big)$$
$$x\big(x(x-1)(x+1) - 2(x+1)\big) = x(x+1)(x(x-1) - 2) = x(x+1)(x^2 - x - 2)$$
$$x(x+1)(x-2)(x+1) = x(x+1)^2(x-2)$$

Com isso, temos:

$$x(x+1)^2(x-2) > 0$$

Fazendo o estudo do sinal (lembrando que $x = -1$ é raiz dupla):



Dessa forma, encontramos:

$$x < -1 \; ou - 1 < x < 0 \; ou \; x > 2$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência:

$$x \leq -\frac{2}{3} \; ou \; x \geq 0$$

$$\Rightarrow x < -1 \; ou - 1 < x \leq -\frac{2}{3} \; ou \; x > 2$$

$$\Rightarrow S = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup (2, +\infty)$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = (-\infty, -1) \cup \left(-1, -\frac{2}{3}\right] \cup (2, +\infty)}$

---

9. (ITA/2007)

Considere a equação: $\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x$

a) Para que valores do parâmetro real p a equação admite raízes reais?

b) Determine todas essas raízes.

Comentários

a) Devemos verificar inicialmente as condições de existência da equação:

$$\underbrace{\sqrt{x^2 - p}}_{\geq 0} + 2\underbrace{\sqrt{x^2 - 1}}_{\geq 0} = \underbrace{x}_{\geq 0}$$

$$\begin{cases} x^2 - p \geq 0 \\ x^2 - 1 \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq p \\ x^2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq p \\ x \geq 1 \; ou \; x \leq -1 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 \geq p \\ x \geq 1 \end{cases} (I)$$

Agora, podemos resolver a equação. Elevando ao quadrado, obtemos:

$$x^2 - p + 4(x^2 - 1) + 4\sqrt{x^2 - p}\sqrt{x^2 - 1} = x^2$$

$$-p + 4x^2 - 4 + 4\sqrt{x^2 - p}\sqrt{x^2 - 1} = 0$$

$$4\sqrt{(x^2 - p)(x^2 - 1)} = p + 4 - 4x^2$$

Temos que verificar a condição de existência da nova equação:

$$p + 4 - 4x^2 \geq 0$$

$$p + 4 \geq 4x^2$$

$$\Rightarrow x^2 \leq \frac{p + 4}{4} \; (II)$$

Elevando ao quadrado a nova equação:

$$16(x^2 - p)(x^2 - 1) = (p + 4 - 4x^2)^2$$

$$16(x^4 - (p + 1)x^2 + p) = (p + 4)^2 + 16x^4 - 8x^2(p + 4)$$

$$\cancel{16x^4} - 16px^2 - 16x^2 + 16p = p^2 + 8p + 16 + \cancel{16x^4} - 8px^2 - 32x^2$$

Isolando os termos com $\boldsymbol{x^2}$:

$$-16px^2 - 16x^2 + 8px^2 + 32x^2 = p^2 + 8p + 16 - 16p$$

$$16x^2 - 8px^2 = p^2 - 8p + 16$$

Fatorando:

$$(16 - 8p)x^2 = (p - 4)^2$$
$$x^2 = \frac{(p-4)^2}{16 - 8p}$$
$$|x| = \frac{p-4}{\sqrt{16-8p}} = \frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}}$$
$$\Rightarrow x = \pm\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}}$$

O denominador deve ser diferente de zero e a parte interna ao radical deve ser positiva. Logo, a nova condição de existência é:

$$4 - 2p > 0 \Rightarrow 4 > 2p \Rightarrow p < 2$$

Vamos verificar quais valores de $\boldsymbol{x}$ satisfaz as condições de existência $(\boldsymbol{I})$ e $(\boldsymbol{II})$:

(I):

$$\begin{cases} x^2 \geq p \\ x \geq 1 \end{cases}$$

Da condição $\boldsymbol{x \geq 1}$, temos que a raiz deve ser positiva. Como $\boldsymbol{p < 2}$, temos $\boldsymbol{p - 4 < 0}$ e:

$$\frac{p-4}{2\sqrt{4-2p}} < 0 \Rightarrow \frac{-(p-4)}{2\sqrt{4-2p}} > 0$$

Logo, o valor de $\boldsymbol{x}$ deve ser:

$$x = \frac{-(p-4)}{2\sqrt{4-2p}} = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

Verificando $\boldsymbol{x^2 \geq p}$:

$$\left(\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right)^2 \geq p$$
$$\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)} \geq p$$

Como $\boldsymbol{2\sqrt{4-2p} > 0}$, temos $\boldsymbol{4(4-2p) > 0}$. Então, podemos multiplicar a inequação por esse número:

$$(4-p)^2 \geq p\big(4(4-2p)\big)$$

Resolvendo a inequação:

$$16 - 8p + p^2 \geq 16p - 8p^2$$
$$\Rightarrow 9p^2 - 24p + 16 \geq 0$$

Podemos fatorar a expressão:

$$(3p - 4)^2 \geq 0$$

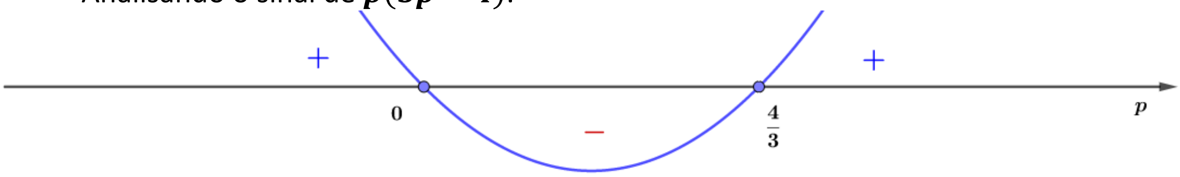
Logo, qualquer $\boldsymbol{p < 2}$ satisfaz a inequação.

(II):

$$x^2 \leq \frac{p+4}{4}$$
$$\left(\frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}\right)^2 \leq \frac{p+4}{4}$$
$$\frac{(4-p)^2}{4(4-2p)} \leq \frac{p+4}{4}$$
$$(4-p)^2 \leq (p+4)(4-2p)$$
$$16 - 8p + p^2 \leq -2p^2 - 4p + 16$$

$$3p^2 - 4p \leq 0$$
$$p(3p-4) \leq 0$$

Analisando o sinal de $\boldsymbol{p(3p-4)}$:



Vemos que $\mathbf{0 \leq p \leq 4/3}$.
Juntando com a condição $\boldsymbol{p < 2}$, temos como solução para $\boldsymbol{p}$:

$$p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]$$

E a solução da equação é:

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

b) As raízes para $\boldsymbol{p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]}$ são dados por:

$$x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{p \in \left[0, \frac{4}{3}\right]}$ **b)** $\boldsymbol{x = \frac{4-p}{2\sqrt{4-2p}}}$

---

10. (ITA/2007)

Sobre a equação na variável real x,

$$\left|\left||x-1|-3\right|-2\right| = 0,$$

Podemos afirmar que

a) ela não admite solução real.

b) a soma de todas as suas soluções é 6.

c) ela admite apenas soluções positivas.

d) a soma de todas as soluções é 4.

e) ela admite apenas duas soluções reais.

Comentários

Vamos resolver a equação:

$$\left|\left||x-1|-3\right|-2\right| = 0$$

Como a igualdade da equação é zero, podemos remover o módulo mais externo:

$$\left||x-1|-3\right|-2 = 0$$
$$\left||x-1|-3\right| = 2$$

Agora, temos duas possibilidades:

$$|x-1|-3 = 2 \ ou \ |x-1|-3 = -2$$

Para o primeiro caso:

$$|x-1|-3 = 2$$

$$|x-1|=5$$

Temos mais duas possibilidades:

$$x-1=5 \Rightarrow x=6$$

Ou

$$x-1=-5 \Rightarrow x=-4$$

Para o segundo caso:

$$|x-1|-3=-2$$
$$|x-1|=1$$

Duas possibilidades:

$$x-1=1 \Rightarrow x=2$$

Ou

$$x-1=-1 \Rightarrow x=0$$

Portanto, a equação possui 4 soluções dadas por:

$$S=\{6,-4,0,2\}$$

Analisando as alternativas:

a) Falsa. Pois temos soluções reais.

b) Falsa. A soma de todas as soluções é $s=6-4+0+2=4$

c) Falsa. Temos a solução negativa -4.

d) Verdadeira. A soma de fato é 4.

e) Falsa. Admite 4 soluções reais.

Gabarito: “d”.

---

11. (ITA/2005)

Determine todos os valores reais de a para que $(x-1)^2=|x-a|$ admita exatamente 3 soluções distintas.

Comentários

Vamos dividir o problema em casos.

Para $x \geq a$:

$$(x-1)^2=x-a$$

Desenvolvendo, obtemos a equação:

$$x^2-2x+1=x-a$$
$$x^2-3x+a+1=0 \ \ (I)$$

Encontrando as raízes:

$$x=\frac{3 \pm \sqrt{9-4(a+1)}}{2}=\frac{3 \pm \sqrt{5-4a}}{2}$$

Para $x<a$:

$$(x-1)^2 = -x + a$$
$$x^2 - 2x + 1 = -x + a$$
$$x^2 - x + 1 - a = 0 \ \ (II)$$

Encontrando as raízes:

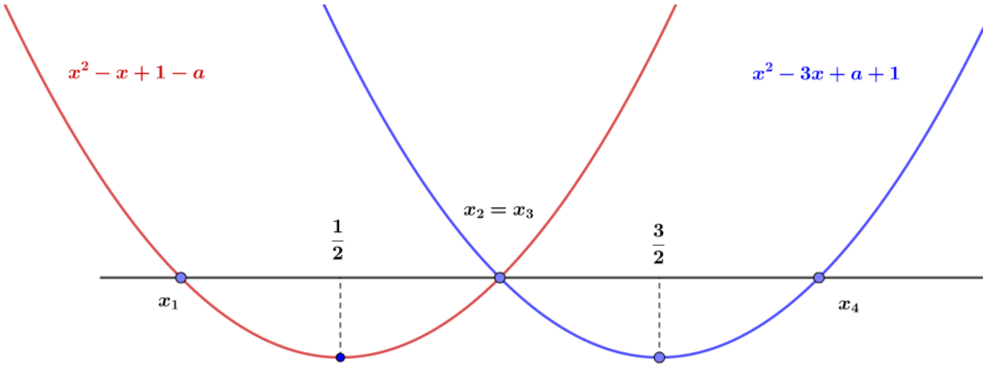
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1-a)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$$

Para termos exatamente 3 raízes, temos 3 casos:

1) Raiz única na equação (I).

2) Raiz única na equação (II).

3) Uma das raízes das equações (I) e (II) são semelhantes.



Vamos resolver para cada caso:

1) Devemos ter $\Delta = 0$:

$$x^2 - 3x + a + 1 = 0 \ \ (I)$$
$$\Delta = 9 - 4(a+1) = 5 - 4a = 0$$
$$\Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

2) $\Delta = 0$:

$$x^2 - x + 1 - a = 0 \ \ (II)$$
$$\Delta = 1 - 4(1-a) = 4a - 3 = 0$$
$$\Rightarrow a = \frac{3}{4}$$

3) A maior raiz da equação II deve ser igual à menor raiz da equação I:

Maior raiz da equação II:

$$x_2 = \frac{1 + \sqrt{4a-3}}{2}$$

Menor raiz da equação I:

$$x_3 = \frac{3 - \sqrt{5-4a}}{2}$$

Igualando $x_2 = x_3$:

$$\frac{1+\sqrt{4a-3}}{2}=\frac{3-\sqrt{5-4a}}{2}$$

$$\sqrt{4a-3}+\sqrt{5-4a}=2$$

Elevando ao quadrado:

$$4a-3+5-4a+2\sqrt{4a-3}\sqrt{5-4a}=4$$

$$2\sqrt{(4a-3)(5-4a)}=2$$

$$\sqrt{(4a-3)(5-4a)}=1$$

$$(4a-3)(5-4a)=1$$

$$20a-16a^2-15+12a=1$$

$$-16a^2+32a-16=0$$

$$a^2-2a+1=0$$

$$(a-1)^2=0$$

$$\Rightarrow a=1$$

Portanto, os valores de a são:

$$a\in\left\{1,\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\}$$

Gabarito: $a\in\left\{1,\frac{3}{4},\frac{5}{4}\right\}$

12. (ITA/2005)

Considere a equação em $x\in\mathbb{R}$.

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$$

Sendo m um parâmetro real.

a) Resolva a equação em função do parâmetro m.

b) Determine todos os valores de m para os quais a equação admite solução não nula.

Comentários

Essa é uma questão difícil e podemos resolvê-la de diferentes maneiras. Vamos usar o que aprendemos até agora.

a) Inicialmente, vamos eliminar os radicais da expressão para encontrar as raízes:

$$\sqrt{1+mx}=x+\sqrt{1-mx}$$

$$\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}=x$$

Elevando ao quadrado:

$$\left(\sqrt{1+mx}-\sqrt{1-mx}\right)^2=x^2$$

$$1+mx+(1-mx)-2\sqrt{1+mx}\sqrt{1-mx}=x^2$$

$$2-2\sqrt{1-m^2x^2}=x^2$$

Isolando o termo com radical:

$$2 - x^2 = 2\sqrt{1 - m^2x^2}$$

Devemos analisar a condição de existência da raiz:

$$2\sqrt{1 - m^2x^2} \geq 0 \Rightarrow 2 - x^2 \geq 0$$

$$2 \geq x^2$$

$$|x| \leq \sqrt{2}$$

Elevando novamente ao quadrado:

$$4 - 4x^2 + x^4 = 4(1 - m^2x^2)$$

$$x^4 - 4x^2 + 4 - 4 + 4m^2x^2 = 0$$

$$x^4 + 4x^2(m^2 - 1) = 0$$

$$x^2\left(x^2 + 4(m^2 - 1)\right) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$x^2 + 4(m^2 - 1) = 0 \Rightarrow x^2 = 4(1 - m^2) \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{1 - m^2}$$

$$\Rightarrow x_3 = 2\sqrt{1 - m^2}$$

$$\Rightarrow x_4 = -2\sqrt{1 - m^2}$$

Devemos analisar as condições de existência das raízes $x_{3,4}$:

$$1 - m^2 \geq 0$$

$$m^2 \leq 1$$

$$|m| \leq 1$$

Como não verificamos as condições de existência do problema e elevamos a equação ao quadrado, devemos verificar se essas raízes satisfazem ao problema:

Para $x_1 = x_2 = 0$:

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx} \Rightarrow \sqrt{1} = 0 + \sqrt{1} \Rightarrow 1 = 1\ (V)$$

Para $x_{3,4} = \pm 2\sqrt{1 - m^2}$:

$$\sqrt{1 + mx} = x + \sqrt{1 - mx} \Rightarrow \sqrt{1 \pm 2m\sqrt{1 - m^2}} = \pm 2\sqrt{1 - m^2} + \sqrt{1 \mp 2m\sqrt{1 - m^2}}$$

Vamos fatorar as expressões, completando os quadrados:

$$\sqrt{1 - m^2 \pm 2m\sqrt{1 - m^2} + m^2} = \pm 2\sqrt{1 - m^2} + \sqrt{1 - m^2 \mp 2m\sqrt{1 - m^2} + m^2}$$

$$\sqrt{\sqrt{(1 - m^2)^2} \pm 2m\sqrt{1 - m^2} + m^2} = \pm 2\sqrt{1 - m^2} + \sqrt{\sqrt{(1 - m^2)^2} \mp 2m\sqrt{1 - m^2} + m^2}$$

$$\sqrt{\left(m \pm \sqrt{1 - m^2}\right)^2} = \pm 2\sqrt{1 - m^2} + \sqrt{\left(m \mp \sqrt{1 - m^2}\right)^2}$$

$$\left|m \pm \sqrt{1 - m^2}\right| = \pm 2\sqrt{1 - m^2} + \left|m \mp \sqrt{1 - m^2}\right|$$

Agora, devemos analisar cada possibilidade:

I) $0 \le m \le 1$ e $|m| \ge \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \underbrace{\pm 2\sqrt{1-m^2}}_{x_{3,4}} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m \pm \sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} + m \mp \sqrt{1-m^2}$$

$$\pm 2\sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} \ \ (V)$$

II) $0 \le m \le 1$ e $|m| < \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m + \sqrt{1-m^2}\right| = 2\sqrt{1-m^2} + \left|m - \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m + \sqrt{1-m^2} = 2\sqrt{1-m^2} - m + \sqrt{1-m^2}$$

$$2m = 2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

$$\left|m - \sqrt{1-m^2}\right| = -2\sqrt{1-m^2} + \left|m + \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-m + \sqrt{1-m^2} = -2\sqrt{1-m^2} + m + \sqrt{1-m^2}$$

$$-2m = -2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

III) $-1 \le m < 0$ e $|m| \ge \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m \pm \sqrt{1-m^2}\right| = \pm 2\sqrt{1-m^2} + \left|m \mp \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-\left(m \pm \sqrt{1-m^2}\right) = \pm 2\sqrt{1-m^2} - \left(m \mp \sqrt{1-m^2}\right)$$

$$-m \mp \sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} - m \pm \sqrt{1-m^2}$$

$$\mp 2\sqrt{1-m^2} = \pm 2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

Nessas condições, a igualdade não é satisfeita.

IV) $-1 \le m < 0$ e $|m| < \left|\sqrt{1-m^2}\right|$

$$\left|m + \sqrt{1-m^2}\right| = 2\sqrt{1-m^2} + \left|m - \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$m + \sqrt{1-m^2} = 2\sqrt{1-m^2} - \left(m - \sqrt{1-m^2}\right)$$

$$2m = 2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

$$\left|m - \sqrt{1-m^2}\right| = -2\sqrt{1-m^2} + \left|m + \sqrt{1-m^2}\right|$$

$$-\left(m - \sqrt{1-m^2}\right) = -2\sqrt{1-m^2} + m + \sqrt{1-m^2}$$

$$-2m = -2\sqrt{1-m^2} \ \ (F)$$

Portanto, para $|m| \ge \sqrt{1-m^2}$, temos solução dada por:

$$S = \left\{0; \pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}$$

b) Queremos solução não nula. Então, devemos verificar as raízes $x = \pm 2\sqrt{1-m^2}$.

Da condição de existência da raiz, temos:

$$0 \le m \le 1$$

$$|x| \le \sqrt{2}$$

Verificando a raiz:

$$\Rightarrow \left|\pm 2\sqrt{1-m^2}\right| \le \sqrt{2}$$

$$2\sqrt{1-m^2} \le \sqrt{2}$$

$$4(1-m^2) \le 2$$

$$1-m^2 \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \le m^2$$

$$\Rightarrow |m| \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Se $m = 1$, temos $x_{3,4} = 0$. Como queremos raízes não nulas, devemos ter $m \neq 1$. Portanto, m deve pertencer ao intervalo:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{S = \left\{0, \pm 2\sqrt{1-m^2}\right\}}$ **b)** $\boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2} \le m < 1}$

---

13. (ITA/2005)

a) Mostre que o número real $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ é raiz da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$.

b) Conclua de (a) que α é um número racional.

Comentários

a) Para provar que o número α é raiz da equação, temos que mostrar que $\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$.

Vamos elevar o número α ao cubo:

$$\alpha^3 = \left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)^3$$

Lembrando que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$$\alpha^3 = 2 + \sqrt{5} + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)^2}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}} + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{\left(2-\sqrt{5}\right)^2} + 2 - \sqrt{5}$$

Não vamos elevar os radicais ao quadrado para não complicar o cálculo, ao invés disso, vamos fatorar:

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{4-5}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 + 3\sqrt[3]{-1}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$$

$$\alpha^3 = 4 - 3\underbrace{\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)}_{\alpha}$$

Perceba que o termo entre parênteses é o próprio α. Reescrevendo:

$$\alpha^3 = 4 - 3\alpha$$

$$\alpha^3 + 3\alpha - 4 = 0$$

Encontramos a igualdade. Logo, α é raiz da equação.

b) Vamos encontrar as raízes da equação cúbica.

$$x^3 + 3x - 4 = 0$$

Fatorando:

$$x^3 - x + 4x - 4 = 0$$

$$x(x^2 - 1) + 4(x - 1) = 0$$

$$x(x-1)(x+1) + 4(x-1) = 0$$

$$(x-1)(x(x+1) + 4) = 0$$

$$(x-1)(x^2 + x + 4) = 0$$

Encontramos uma raiz:

$$x = 1$$

Vamos verificar se $x^2 + x + 4$ possui raiz:

$$\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -15 < 0$$

Logo, essa equação não possui raiz real.

Como α é real, temos que $\alpha = 1$. Portanto, α é racional.

Gabarito: Demonstração

14. (ITA/2005)

Sobre o número $x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$ é correto afirmar que

a) $x \in]0, 2[$.

b) x é racional.

c) $\sqrt{2x}$ é irracional.

d) x^2 é irracional.

e) $x \in]2, 3[$.

Comentários

Normalmente, nesse tipo de questão, a expressão dentro do radical será um quadrado perfeito, então, para resolvê-lo, devemos tentar fatorar a expressão.

Vamos fatorar x:

$$x = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{4 + 3 - 2 \cdot 2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{2^2 + \sqrt{(3)^2} - 2 \cdot 2\sqrt{3}} + \sqrt{3}$$

$$x = \sqrt{\left(2 - \sqrt{3}\right)^2} + \sqrt{3} = \left|2 - \sqrt{3}\right| + \sqrt{3}$$

Como $2 > \sqrt{3}$, podemos remover o módulo do número:

$$x = 2 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 2$$

Portanto, x é racional.

Gabarito: "b".

15. (ITA/2004)

Sejam as funções f e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$ em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que

f		g	
Valor mínimo	*Ponto de mínimo*	*Valor máximo*	*Ponto de máximo*
-1	< 0	$9/4$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais $(f\ o\ g)(x) = 0$ é igual a

a) 0

b) 2

c) 4

d) 6

e) 8

Comentários

A questão nos dá as informações do valor mínimo de f e o valor máximo de g. Analisando f:

$$f(x) = x^2 + \alpha x$$

O coeficiente de x^2 de f é positivo, o valor mínimo de f será o valor da vértice da função. Desse modo:

$$f_{min} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4(1)} = -\frac{\Delta}{4}$$

$$f_{min} = -1$$

$$-\frac{\Delta}{4} = -1 \Rightarrow \Delta = 4 \Rightarrow \alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha = \pm 2$$

Da tabela, ponto de mínimo < 0:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{\alpha}{2(1)} < 0 \Rightarrow \alpha > 0$$

Alfa é positivo, logo $\alpha = 2$.

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Analisando g:

$$g(x) = -x^2 - \beta x$$

g é uma parábola com concavidade para baixo $(-x^2)$, o máximo de g será seu vértice:

$$g_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{\Delta}{4(-1)} = \frac{\Delta}{4}$$

Da tabela:

$$g_{\max} = \frac{9}{4} \Rightarrow \frac{\Delta}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \Delta = 9$$

$$\beta^2 = 9 \Rightarrow \beta = \pm 3$$

Ponto de máximo > 0:

$$x_v = -\frac{b}{2a} > 0$$

$$-\frac{(-\beta)}{2(-1)} = -\frac{\beta}{2} > 0 \Rightarrow \beta < 0$$

Beta é negativo, logo $\beta = -3$.

$$g(x) = -x^2 - (-3)x$$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$

A função composta é dado por:

$$f(x) = x^2 + 2x$$

$$g(x) = -x^2 + 3x$$

$$(f\ o\ g)(x) = f\big(g(x)\big) = 0$$

$$f\big(g(x)\big) = [g(x)]^2 + 2g(x) = (-x^2 + 3x)^2 + 2(-x^2 + 3x)$$

$$f\big(g(x)\big) = (-x^2 + 3x)(-x^2 + 3x + 2)$$

$$f\big(g(x)\big) = x(-x + 3)(-x^2 + 3x + 2)$$

$$f\big(g(x)\big) = 0 \Rightarrow x(-x + 3)(-x^2 + 3x + 2)$$

As raízes da equação são:

$$x(-x + 3) \Rightarrow x_1 = 0\ e\ x_2 = 3$$

$$-x^2 + 3x + 2 \Rightarrow x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{-1} = 3$$

A soma das raízes é:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 + 3 + 3 = 6$$

*Poderíamos resolver diretamente a soma da raízes usando as Relações de Girard. Aprenderemos esse assunto na aula de Equações Algébricas.

Gabarito: “d”.

---

16. (ITA/2002)

Os valores de $x \in \mathbb{R}$, para os quais a expressão real dada por $f(x) = \sqrt{5 - \left||2x-1| - 6\right|}$ está definida, formam o conjunto:

a) $[0, 1]$

b) $[-5, 6]$

c) $[-5, 0] \cup [1, +\infty[$

d) $]-\infty, 0] \cup [1, 6]$

e) $[-5,0] \cup [1,6]$

Comentários

Inicialmente, devemos verificar a condição de existência da função em $\mathbb{R}$:

$$5 - \left||2x-1| - 6\right| \geq 0$$

$$5 \geq \left||2x-1| - 6\right|$$

$$\left||2x-1| - 6\right| \leq 5$$

Removendo o módulo externo, temos:

$$-5 \leq |2x-1| - 6 \leq 5$$

$$1 \leq |2x-1| \leq 11$$

Vamos separar em duas inequações:

$$|2x-1| \leq 11$$

$$|2x-1| \geq 1$$

Resolvendo a primeira:

$$|2x-1| \leq 11$$

$$-11 \leq 2x - 1 \leq 11$$

$$-10 \leq 2x \leq 12$$

$$-5 \leq x \leq 6$$

Resolvendo a segunda:

$$|2x-1| \geq 1$$

$$2x - 1 \geq 1 \; ou \; 2x - 1 \leq -1$$

$$2x - 1 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2x - 1 \leq -1 \Rightarrow x \leq 0$$

Fazendo a intersecção dos intervalos que obtemos, temos:

$$S = \{x \in \mathbb{R} | -5 \leq x \leq 0 \; ou \; 1 \leq x \leq 6\}$$

$$S = [-5, 0] \cup [1,6]$$

Gabarito: "e".

17. (ITA/2001)

O conjunto de todos os valores de m para os quais a função

$$f(x) = \frac{x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3)}{\sqrt{x^2 + (2m + 1)x + (m^2 + 2)}}$$

está definida e é não negativa para todo x real é:

a) $[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

b) $]\frac{1}{4}, \infty[$

c) $]0, \frac{7}{4}[$

d) $]-\infty, \frac{1}{4}]$

e) $]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}[$

Comentários

Para f estar definida $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que o denominador de f deve ser diferente de zero e também a função com radical deve ser positiva.

Disso, temos:

$$x^2 + (2m + 1)x + (m^2 + 2) > 0$$

Como $a = 1 > 0$, a função será sempre positiva se forçarmos $\Delta < 0$. Então:

$$\Delta < 0$$

$$\Delta = (2m + 1)^2 - 4(m^2 + 2) < 0$$

Resolvendo a inequação:

$$4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 8 < 0$$

$$4m - 7 < 0$$

$$\Rightarrow m < \frac{7}{4}$$

Queremos que a função seja não negativa para todo x real. O denominador é sempre positivo, então o numerador deve ser igual ou maior que zero:

$$x^2 + (2m + 3)x + (m^2 + 3) \geq 0$$

Essa condição ocorre quando $\Delta \leq 0$:

$$\Delta = (2m + 3)^2 - 4(m^2 + 3) \leq 0$$

Resolvendo a inequação:

$$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 12 \leq 0$$

$$12m - 3 \leq 0$$

$$\Rightarrow m \leq \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

O conjunto dos valores de m que satisfaz o problema é dado por:

$$m < \frac{7}{4}\, e\; m \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \in \,]-\infty, 1/4]$$

Gabarito: “d”.

18. (ITA/2000)

Sendo I um intervalo de números reais com extremidades em a e b, com $a < b$, o número real $b - a$ é chamado de comprimento de I. Considere a inequação $6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$. A soma dos comprimentos dos intervalos nos quais ela é verdadeira é igual a:

a) $\frac{3}{4}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{7}{3}$

d) $\frac{11}{6}$

e) $\frac{7}{6}$

Comentários

Inicialmente, devemos fatorar a expressão para analisá-la:

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x = x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4)$$

Para fatorar a expressão cúbica, vamos separar os termos de modo a poder evidenciar algum termo em comum:

$$x(6x^3 - 5x^2 - 7x + 4) = x(6x^3 - 4x^2 - x^2 - 6x - x + 4)$$

$$x[6x(x^2 - 1) - 4(x^2 - 1) - x(x + 1)]$$

Note o fator $(x + 1)$:

$$x[6x(x - 1)(x + 1) - 4(x - 1)(x + 1) - x(x + 1)]$$

Evidenciando $(x + 1)$ e simplificando a expressão:

$$x(x + 1)(6x(x - 1) - 4(x - 1) - x)$$

$$x(x + 1)(6x^2 - 6x - 4x + 4 - x)$$

$$x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4)$$

Vamos verificar se a função quadrática possui raiz:

$$\Delta = 11^2 - 4 \cdot 6 \cdot 4 = 121 - 96 = 25 > 0$$

Temos duas raízes, vamos encontrá-las:

$$x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 6} = \frac{11 \pm 5}{12} = \frac{4}{3}\; ou\; \frac{1}{2}$$

Com isso, obtemos a expressão fatorada:

$$x(x + 1)(6x^2 - 11x + 4) = 6x(x + 1)\left(x - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

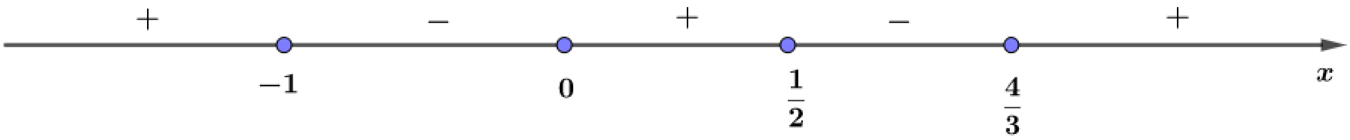
Vamos fazer o estudo do sinal.

Testando o sinal para $x = 1$:

$$6\underbrace{(1)}_{+}\underbrace{(1+1)}_{+}\underbrace{\left(1-\frac{4}{3}\right)}_{-}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{+} < 0$$

Não precisamos calcular o valor dessa expressão, basta saber o sinal dela. Note que temos 3 números positivos e 1 negativo, o produto deles gera um número negativo. Vamos usar o método da multiplicidade das raízes para encontrar o sinal dos outros intervalos.

1 está entre $1/2$ e $4/3$ e nesse ponto temos sinal negativo. Desse modo, obtemos o sinal da função:



Os valores de x que satisfazem ao problema é:

$$6x^4 - 5x^3 - 7x^2 + 4x < 0$$

$$S =]-1{,}0[\cup]\frac{1}{2}, \frac{4}{3}[$$

Queremos a soma dos intervalos da solução:

$$s = (0-(-1)) + \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{8-3}{6} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}$$

Gabarito: "d".

19. (IME/2012)

Seja a, b e c números reais e distintos. Ao simplificar a função real, de variável real,

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Obtém-se $f(x)$ igual a:

a) $x^2 - (a+b+c)x + abc$

b) $x^2 + x - abc$

c) x^2

d) $-x^2$

e) $x^2 - x + abc$

Comentários

Perceba que f é uma função quadrática. Veja:

$$f(x) = \frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

Os termos em vermelho são expressões quadráticas e os termos em verde são números reais. A soma das expressões quadráticas resulta em uma expressão quadrática. Logo, podemos escrever:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

Vamos encontrar relações para f:

$$x = a \Rightarrow f(a) = \frac{a^2(a-b)(a-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(a-c)(a-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(a-a)(a-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(a) = a^2$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = \frac{a^2(b-b)(b-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(b-c)(b-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(b-a)(b-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(b) = b^2$$

$$x = c \Rightarrow f(c) = \frac{a^2(c-b)(c-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2(c-c)(c-a)}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2(c-a)(c-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$f(c) = c^2$$

Dessa forma, substituindo $x = a, b, c$ na função $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, encontramos o sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta a + \gamma = a^2 \quad (I) \\ \alpha b^2 + \beta b + \gamma = b^2 \quad (II) \\ \alpha c^2 + \beta c + \gamma = c^2 \quad (III) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$(I) - (II): \alpha(a-b)^2 + \beta(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(I) - (III): \alpha(a-c)^2 + \beta(a-c) = a^2 - c^2$$

Simplificando ambas as equações (lembrando $(a-b)^2 = (a+b)(a-b)$):

$$\begin{cases} \alpha(a+b) + \beta = a + b \quad (III) \\ \alpha(a+c) + \beta = a + c \quad (IV) \end{cases}$$

Fazendo $(III) - (IV)$:

$$\alpha(b-c) = b - c \Rightarrow \alpha = 1$$

Substituindo α em (III):

$$(1)(a+b) + \beta = a + b \Rightarrow \beta = 0$$

Substituindo α, β em (I):

$$(1)a^2 + (0)a + \gamma = a^2 \Rightarrow \gamma = 0$$

Portanto, encontramos $\alpha = 1, \beta = 0, \gamma = 0$. f é dado por:

$$f(x) = x^2$$

Na hora da prova não precisaríamos realizar todas essas etapas para encontrar a resposta. Bastaria perceber a relação:

$$x = a \Rightarrow f(a) = a^2$$

$$x = b \Rightarrow f(b) = b^2$$
$$x = c \Rightarrow f(c) = c^2$$

Poderíamos substituir $x = a, b, c$ nas alternativas e encontrar nossa resposta.

Gabarito: "c".

20. (IME/2007)

Se r_1 e r_2 são raízes reais distintas de $x^2 + px + 8 = 0$, é correto afirmar que:

a) $|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$

b) $|r_1 + r_2| < \sqrt{2}$

c) $|r_1| \geq 2$ e $|r_2| \geq 2$

d) $|r_1| \geq 3$ e $|r_2| \leq 1$

e) $|r_1| < 1$ e $|r_2| < 2$

Comentários

O enunciado afirma que a equação possui 2 raízes reais distintas, então:

$$\Delta > 0$$
$$\Delta = p^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = p^2 - 32 > 0$$
$$p^2 > 32$$
$$\Rightarrow |p| > 4\sqrt{2}$$

Vamos analisar as alternativas. Devemos analisar o valor de cada raiz:

$$r_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 32}}{2}$$
$$r_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 32}}{2}$$

Entre as alternativas, vemos que (a) e (b) analisam a soma das raízes. Vamos somá-las:

$$r_1 + r_2 = -p$$

Calculando seu módulo:

$$|r_1 + r_2| = |p|$$

Da condição inicial, encontramos $|p| > 4\sqrt{2}$. Logo:

$$|r_1 + r_2| > 4\sqrt{2}$$

Gabarito: "a".