

CURSO INTENSIVO 2022



Física

ITA - 2022

Estudo de campo elétrico e lei de Gauss

Prof. Toni Burgatto



Sumário

INTRODUÇÃO	3
1. O CAMPO ELÉTRICO	4
1.1. Direção e sentido do campo elétrico	5
1.2. Linhas de força	5
1.3. Campo elétrico de uma carga puntiforme	7
1.4. Campo elétrico devido as diversas cargas puntiformes	9
1.5. Informações das linhas de forças	11
2. CAMPO ELÉTRICO DO CONDUTOR ISOLADO EM EQUILÍBRIO ELETROSTÁTICO	13
2.1. Distribuição das cargas elétricas em um condutor carregado e isolado em equilíbrio eletrostático	13
2.2. Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático	14
2.3. Blindagem eletrostática	15
2.4. O poder das pontas	17
2.5. Campo elétrico de um condutor esférico	17
3. CAMPO ELÉTRICO UNIFORME	19
3.1. Cinemática de uma carga puntiforme em um campo uniforme	21
4. A LEI DE GAUSS DA ELETRICIDADE	25
4.1. Fluxo de um campo vetorial	25
4.2. A lei de Gauss	27
4.3. Algumas aplicações da lei de Gauss	30
5. LISTA DE QUESTÕES	38
6. GABARITO SEM COMENTÁRIOS	46
7. LISTA DE QUESTÕES COMENTADAS	47
8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA	68
9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	68

Introdução


Nessa aula iniciaremos o estudo de Campo Elétrico, Lei de Gauss da Eletricidade. Esses assuntos são de extrema importância principalmente para a prova do ITA que gosta de cobrar questões teóricas bem difíceis.

Daremos o tratamento com base no Cálculo, mas sempre procuraremos mostrar tudo sem o uso de derivada e de integral.

Após essa aula, teremos uma grande quantidade de questões de eletrostática nas nossas mãos. É muito importante fazer o máximo de questões que darão uma excelente fortificação nos conceitos teóricos.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



 @proftoniburgatto

1. O Campo elétrico

Inicialmente, vamos introduzir a ideia por trás de uma força de campo. Na aula anterior, vimos que quando temos duas partículas carregadas separadas a uma distância d , a força eletrostática é dada por:

$$F_{ele} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{d^2}$$

Vamos imaginar o seguinte experimento: uma esfera A carregada com uma carga $+Q_A$ é fixada em um dado ponto do espaço. Se colocarmos uma carga $+q_B$, que chamamos de **carga de prova**, próximo a A podemos examinar a região que envolve a carga $+Q_A$.

De acordo com a teoria estudada na aula passada, vimos que a força elétrica entre A e B é repulsiva. Supostamente, podemos imaginar que o espaço ao redor de A foi modificado de alguma forma. Podemos dizer que nessa região criou-se um campo elétrico.

De outra forma, quando colocamos uma carga de prova em uma região que existe um campo elétrico, surge na carga uma força elétrica.

Se em uma dada região do espaço existe um campo elétrico, podemos usar diversas cargas de provas e medir as forças elétricas em um dado ponto P . Para cada carga vamos fazer o quociente:

$$\frac{|\vec{F}_i|}{q_i}$$

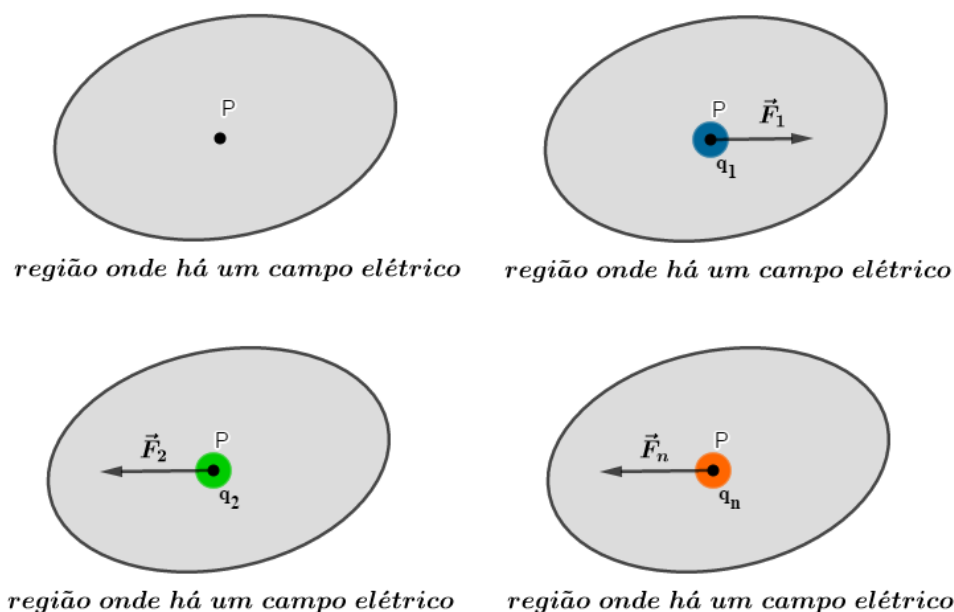


Figura 1: Experimento para determinação do campo elétrico em uma região.

Experimentalmente, verifica-se que todas as forças \vec{F}_i têm a mesma direção, alterando apenas o sentido da força quando se altera o sinal da carga q_i . Matematicamente, verifica-se que as forças são proporcionais às cargas de provas, isto é:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n} \text{ (constante)}$$

Essa razão é chamada de **vetor campo elétrico** ou somente **campo elétrico** no ponto P e denotamos por \vec{E} . Assim, temos que:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}} \text{ ou } \boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{E}}$$

Note que é interessante a carga de prova ser positiva, pois dessa forma \vec{F} e \vec{E} possuem o mesmo sentido. Observações:

- 1) Quando efetuamos $\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \frac{\vec{F}_3}{q_3} = \dots = \frac{\vec{F}_i}{q_i} = \dots = \frac{\vec{F}_n}{q_n}$, mostramos que o campo elétrico em um dado ponto P não depende do valor da carga de prova.
- 2) Utilizamos sempre uma carga de prova bem pequena, de forma que sejam desprezíveis os efeitos sobre as cargas geradoras do campo elétrico.
- 3) Quando o campo elétrico de certa região não variar com o decorrer do tempo, este campo será chamado de campo eletrostático.

A partir da definição de campo elétrico, se tomarmos uma carga de 1 C e

, uma força de 1 N , temos que:

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1 \text{ N}}{1 \text{ C}} = 1 \text{ N/C}$$

Assim, dizemos que a unidade de campo elétrico é N/C . Posteriormente, definiremos campo elétrico a partir do potencial elétrico e a unidade de campo elétrico será dado por V/m (volt por metro) no SI.

1.1. Direção e sentido do campo elétrico

Diante da definição de campo elétrico, temos que $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. Sendo q um número escalar, quando efetuamos $q \cdot \vec{E}$ sabemos que \vec{E} e \vec{F} tem sempre a mesma direção, desde que não sejam nulos. Dessa forma, temos dois sentidos possíveis:

- 1) $q > 0$: \vec{E} tem o mesmo sentido de \vec{F} .
- 2) $q < 0$: \vec{E} e \vec{F} têm sentidos contrários.

Observe que primeiramente definimos o conceito de força elétrica entre duas cargas antes do conceito de campo elétrico. Contudo, vimos que o campo é a causa da existência da força. Dessa forma, quando colocamos a carga de prova no ponto P , já está associado a esse ponto um campo elétrico \vec{E} .

1.2. Linhas de força

Trata-se de linhas imaginárias desenhadas nas representações de um campo elétrico, com a intenção de mostrar sua direção e sentido. Por definição, a linha de força em cada ponto tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor campo elétrico.

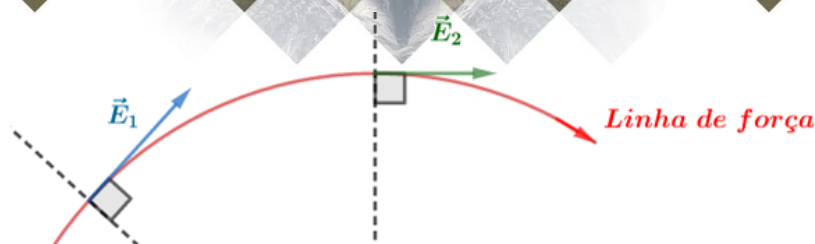


Figura 2: Representação da Linha de força.

As linhas de forças são desenhadas para visualizar um campo elétrico e, embora não forneçam o valor diretamente do campo elétrico, desenhamos de tal forma que o número de linhas por unidade de área (área medida em um plano perpendicular às linhas) é proporcional ao módulo do campo elétrico. Assim, quanto mais próximas as linhas, maior o módulo do campo.

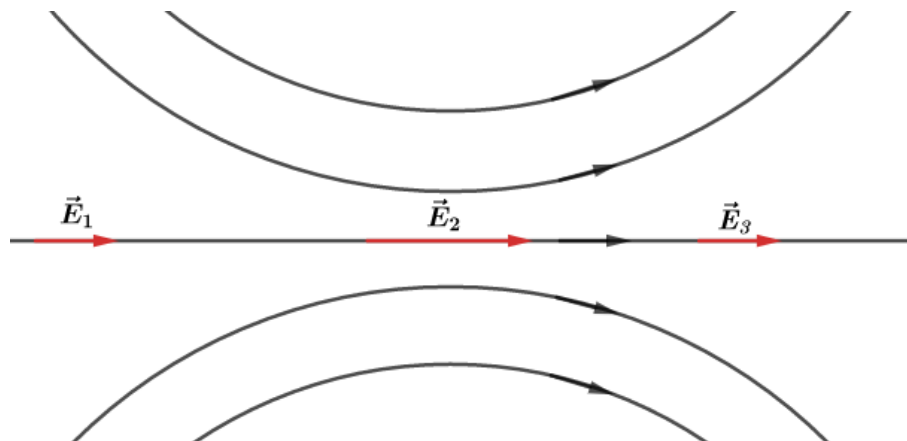


Figura 3: Linhas de força em uma dada região do espaço mostrando que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$ e $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_3|$, pois próximo a \vec{E}_2 as linhas são mais intensas.

Quando o campo elétrico é constante em todos os pontos de uma região do espaço, suas linhas de força são representadas retilíneas, paralelas, de mesmo sentido e uniformemente distribuídas. Nesse caso, dizemos que o campo elétrico é uniforme. Estudaremos as propriedades do campo elétrico uniforme mais à frente.

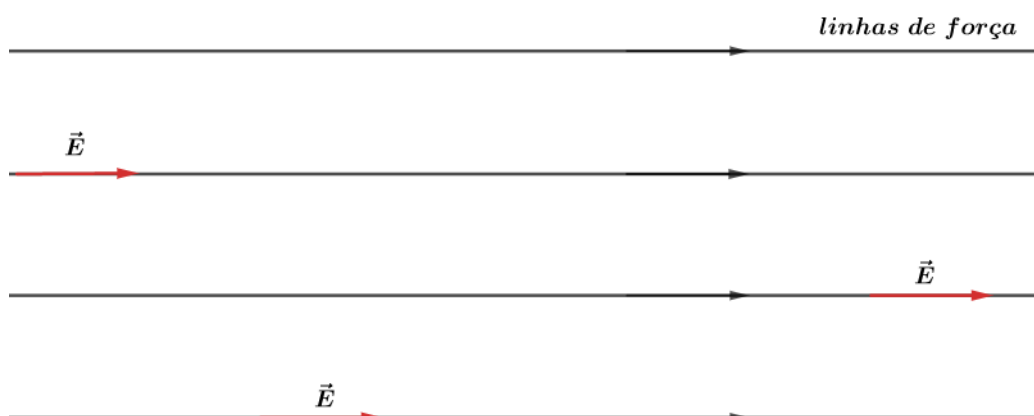


Figura 4: Região onde existe um campo elétrico uniforme.

Observações:

- 1) As linhas de força nunca se cruzam! Se isso acontecesse, teríamos no ponto de cruzamento dois vetores \vec{E} , apontando para direções distintas, o que é um **absurdo**.

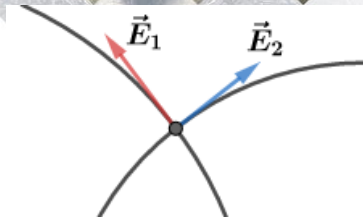


Figura 5: Linhas de forças se cruzando, gerando um absurdo.

- 2) Trajetória de uma carga sujeita a um campo elétrico: não necessariamente a trajetória de uma partícula coincide com as linhas de forças.

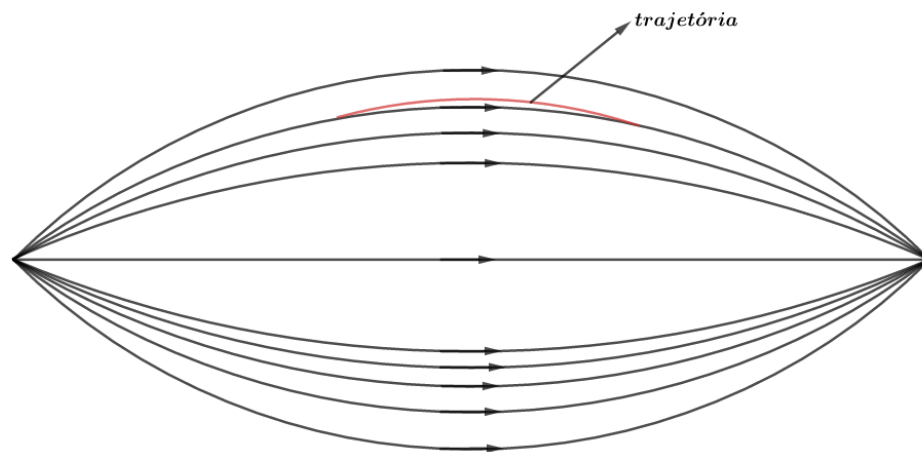


Figura 6: Linhas de força e trajetória.

1.3. Campo elétrico de uma carga puntiforme

Seja uma carga elétrica puntiforme Q gerando um campo elétrico em uma dada região do espaço. Se pegarmos um ponto P situado a uma distância d da carga Q , podemos determinar a direção, o sentido e a intensidade do vetor campo elétrico em P . Para isso, basta pegarmos uma carga de prova $q_p > 0$.

1.3.1. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q positiva

Dado que $Q > 0$ e nossa carga de prova também é ($q_p > 0$), então a força elétrica \vec{F} entre elas será de repulsão e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está se afastando.

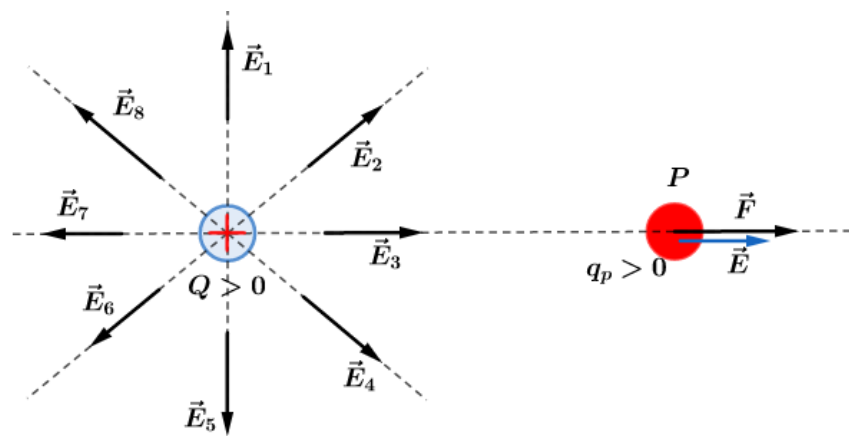


Figura 7: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme positiva.

Observe que a direção do campo será radial, já que é a mesma direção da força, ou seja, reta que passa pelos pontos onde se encontram as cargas. Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para fora da carga $Q > 0$ (se afastando).

1.3.2. Campo elétrico de uma carga puntiforme Q negativa

Dado que $Q < 0$ e nossa carga de prova é ($q_p > 0$), então a força elétrica \vec{F} entre elas será de atração e, como $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, temos que \vec{F} e \vec{E} terão o mesmo sentido. Dessa forma, podemos concluir que para uma carga elétrica puntiforme o campo elétrico está se aproximando.

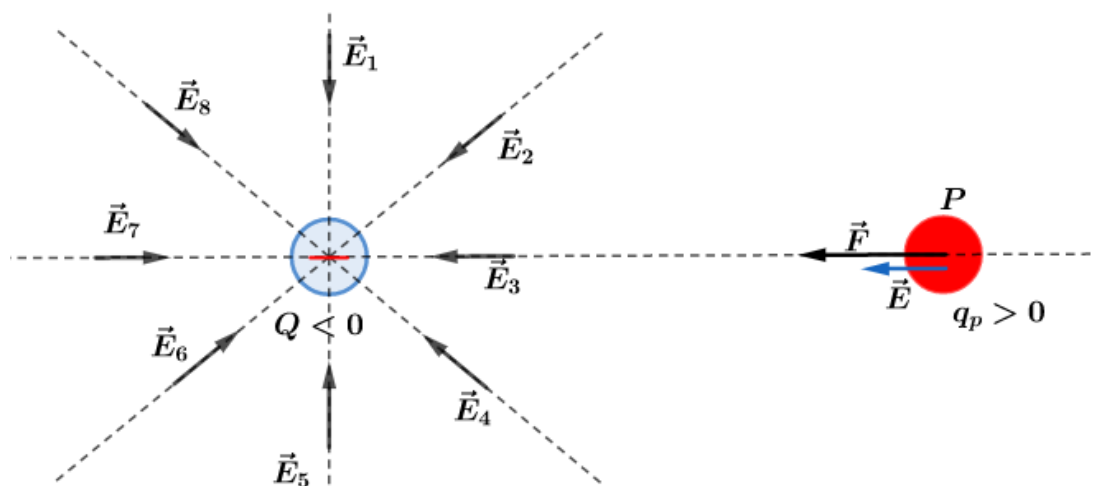


Figura 8: Campo elétrico gerado em torno de uma carga puntiforme negativa.

Dessa forma, em qualquer ponto da região que circunda a carga elétrica $Q < 0$, o campo elétrico será de aproximação, em outras palavras, \vec{E} deverá “apontar” para a carga Q .

Assim, as linhas de força desse campo são semirretas, radiais, apontando para dentro da carga $Q < 0$ (se aproximando). Note que o sentido do campo elétrico não depende do sinal da carga de prova, apenas depende da “carga-fonte” (carga que gerou o campo).

Resumindo:

$$\begin{cases} Q > 0 \rightarrow \text{campo de afastamento} \\ Q < 0 \rightarrow \text{campo de aproximação} \end{cases}$$

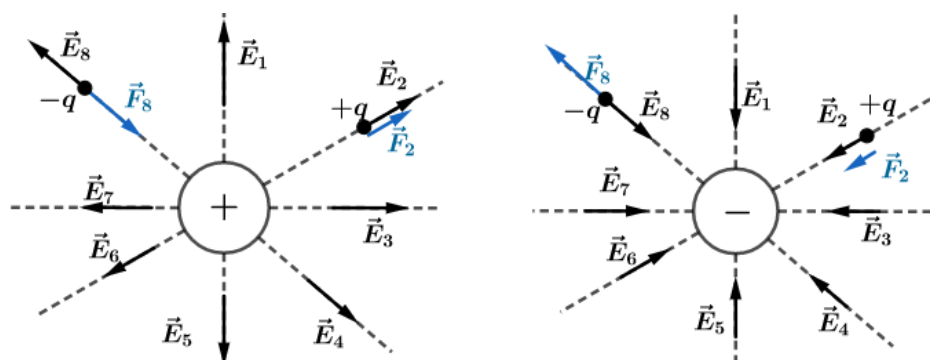


Figura 9: Linhas de força do campo elétrico de uma carga positiva e de uma negativa.

1.3.3. Intensidade do campo elétrico um ponto P devido a uma carga puntiforme

Em um dado ponto P coloca-se uma carga de prova q_p , situada a uma distância d de uma carga puntiforme Q . Pela Lei de Coulomb, temos que:

$$F = \frac{K \cdot |Q| \cdot |q_p|}{d^2} \Rightarrow \frac{F}{|q_p|} = \frac{K \cdot |Q|}{d^2} \therefore \boxed{E = K \cdot \frac{|Q|}{d^2}}$$

Observações:

- 1) Devido ao fato desse campo ser inversamente proporcional ao quadrado da distância $E \propto \frac{1}{d^2}$, ele é conhecido por “campo newtoniano” pois existe grande semelhança com a expressão do campo gravitacional de um planeta.
- 2) Quando representamos o gráfico do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância obtemos a curva:

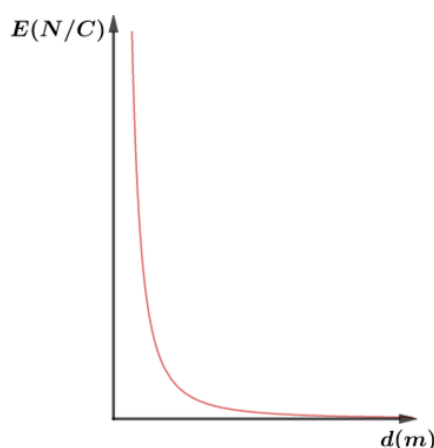


Figura 10: Gráfico da intensidade do campo elétrico de uma carga puntiforme em função da distância.

1.4. Campo elétrico devido as diversas cargas puntiformes

Quando existem várias cargas puntiformes geradoras de campo em um mesmo ponto P , podemos determinar o campo elétrico resultante dos campos pelo Princípio da Superposição.

Para isso, vamos considerar n cargas puntiformes gerando diversos campos elétricos em P . Se colocarmos uma carga de prova em P , podemos determinar a força elétrica resultante na carga de prova pelo Princípio da Superposição:

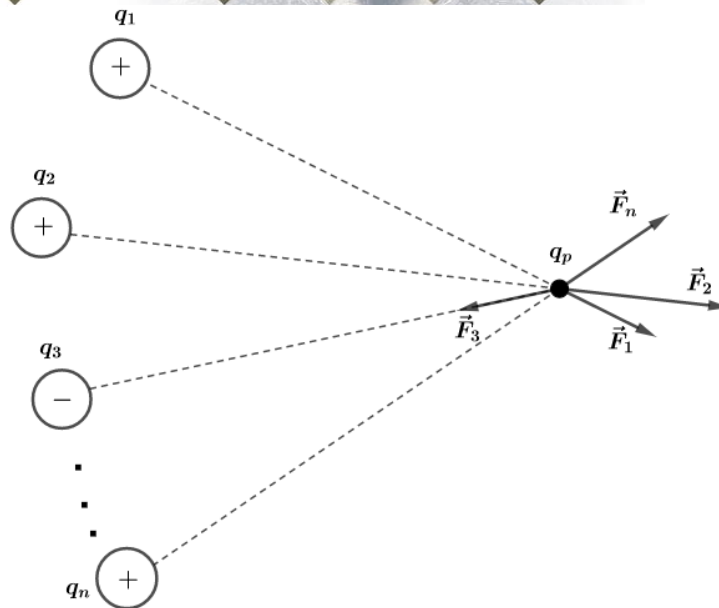


Figura 11: Campo elétrico resultante em P da superposição de n cargas.

Assim, a força resultante em P é dada por:

$$\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

Mas, cada força elétrica pode ser escrita por $\vec{F}_i = q_p \cdot \vec{E}_i$, portanto:

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p \cdot \vec{E}_1 + q_p \cdot \vec{E}_2 + \dots + q_p \cdot \vec{E}_n$$

$$q_p \cdot \vec{E}_{res} = q_p (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n)$$

$$\therefore \boxed{\vec{E}_{res} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n}$$

Para o caso particular de existirem apenas duas cargas puntiformes, temos que:

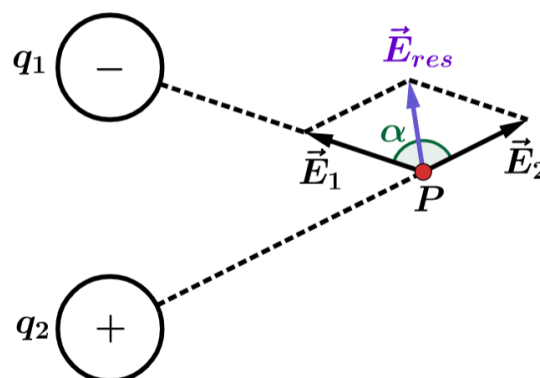


Figura 12: Campo elétrico resultante gerado por duas cargas puntiformes.

Podemos escrever que o módulo do campo elétrico resultante, de acordo com a Lei dos Cossenos, é:

$$\boxed{E_{res} = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot \cos \alpha}}$$

É evidente que o sentido do campo elétrico resultante depende dos valores das cargas q_1 e q_2 . Assim, depois de obtidos os vetores \vec{E}_1 e \vec{E}_2 utilizamos a soma de vetores para determinar o sentido e a direção de \vec{E}_{res} .

Podemos também determinar as linhas de forças devido às duas cargas. Como vimos, as linhas de força “nascem” nas cargas positivas e “morrem” nas cargas negativas. Dessa forma, para duas cargas puntiformes temos as seguintes configurações:

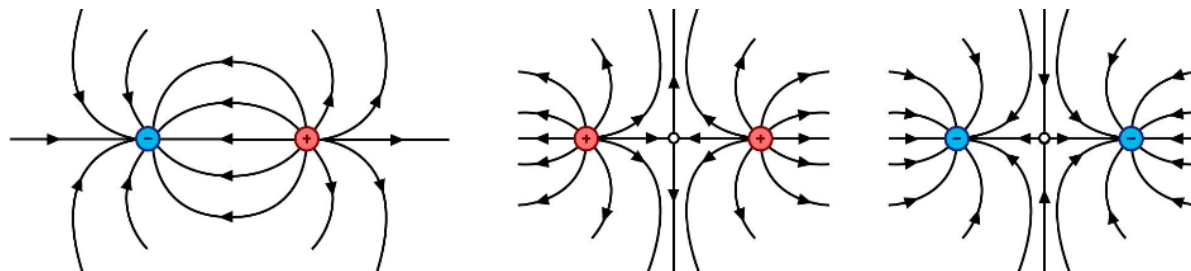


Figura 13: Possíveis linhas de forças para diferentes configurações de cargas.

1.5. Informações das linhas de forças

Vamos salientar algumas informações que podem ser extraídas de uma configuração de linhas de forças do \vec{E} :

- 1) **Direção e sentido:** tangente às linhas de força.



Figura 14: Linha de Força, direção e sentido do campo elétrico.

- 1) **Intensidade relativa do vetor \vec{E} :** obtemos através da densidade de linhas de força.

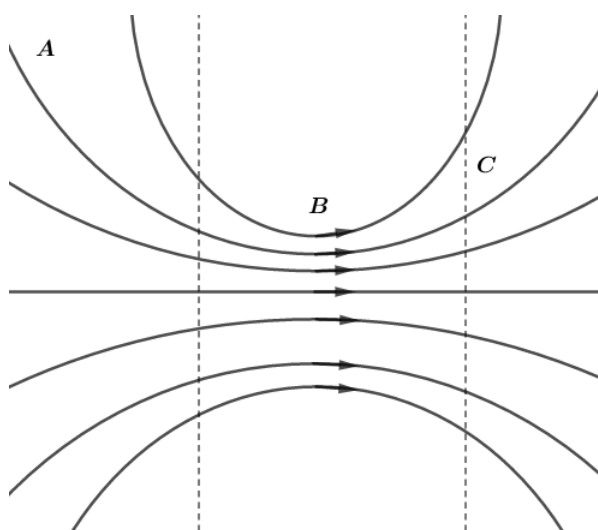


Figura 15: Intensidade relativo do campo elétrico, utilizando densidade de linhas de força.

Assim, podemos fazer a seguinte afirmação com relação aos módulos dos campos:

$$E_B > E_C > E_A$$

De outra forma, podemos representar o campo elétrico saindo ou entrando do plano do papel:

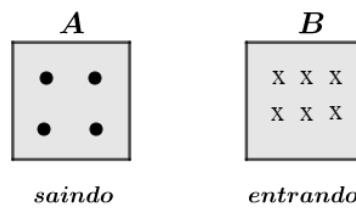


Figura 16: Representação de vetores entrando ou saindo do plano.

$$E_B > E_A$$

- 1) **Sinal da carga fonte do \vec{E} :** análise da “entrada” e “saída” de linhas de força.

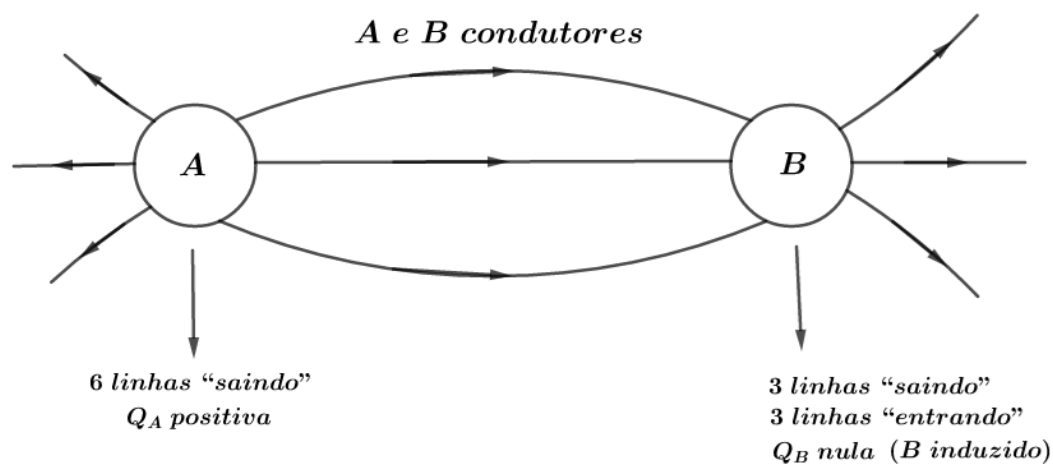


Figura 17: Representação de linhas de forças e o sinal da carga.

Se aterrarmos B , temos que:

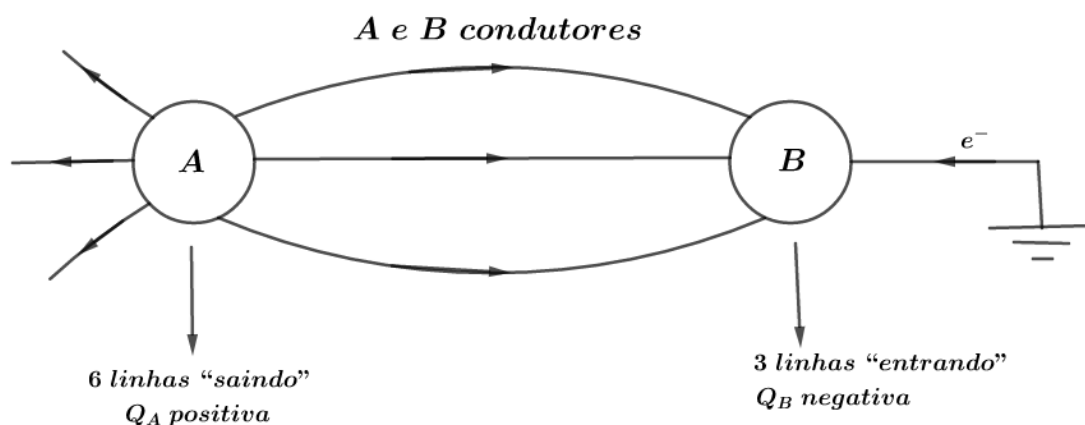


Figura 18: Representação de linhas de força e o sinal das cargas, quando uma é aterrada.

- 2) **Relação entre os módulos das cargas que geram o campo elétrico:** análise de quantidade de linhas.

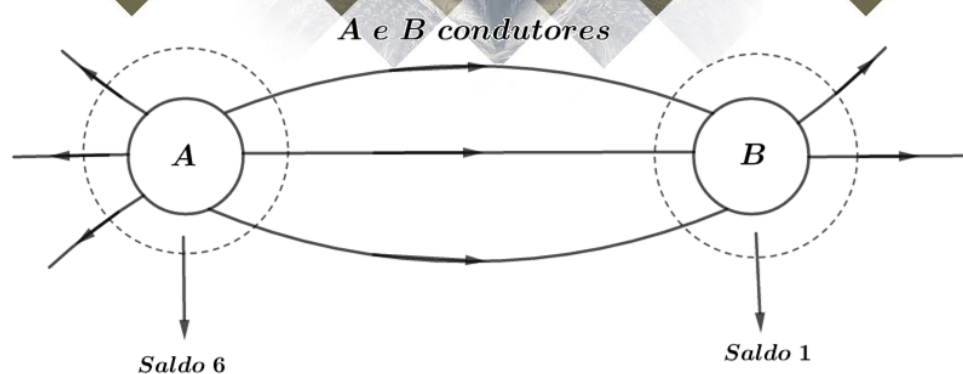


Figura 19: Representação das linhas de força e a relação entre as cargas.

$$\frac{|q_A|}{|q_B|} = \frac{6}{1} = 6$$

Mais tarde, ampliaremos nossa visão sobre as linhas de força e a relação das cargas através da Lei de Gauss.

2. Campo elétrico do condutor isolado em equilíbrio eletrostático

Dizemos que um condutor isolado está em equilíbrio eletrostático quando não existe movimento ordenado de cargas elétricas no seu interior e na sua superfície. Dessa forma, os elétrons livres encontram-se em movimento aleatório.

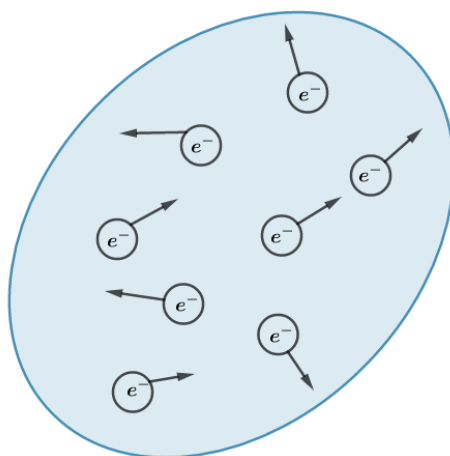


Figura 20: Condutor isolado em equilíbrio eletrostático, os elétrons livres em movimento aleatório.

Note que quando o corpo está em equilíbrio eletrostático ele pode ou não estar eletrizado.

2.1. Distribuição das cargas elétricas em um condutor carregado e isolado em equilíbrio eletrostático

Quando um condutor isolado está eletricamente carregado (positivamente ou negativamente), as cargas se repelem buscando a maior distância entre si, indo para a superfície do condutor.

Segundo alguns registros, esse fato foi observado primeiramente por Benjamin Franklin. Ele observou as cargas elétricas em excesso num cilindro metálico indo para a superfície externa quando

realizou o seguinte experimento: fez descer uma esfera de cortiça pendurada num fio isolante dentro de um cilindro oco de prata positivamente carregado:

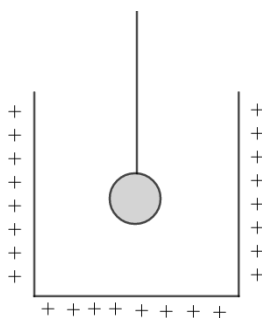


Figura 21: A esfera não é atraída pelas paredes internas do cilindro.

Em primeiro momento, o que Benjamin imaginaria era a esfera ser atraída pelas paredes ao descer no interior do cilindro. Em seguida, ele colocou a esfera próximo a parede externamente e observou uma aproximação:

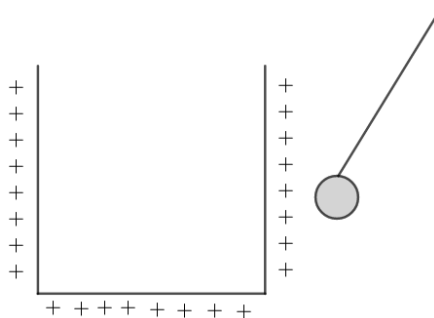


Figura 22: A esfera é atraída pela parede externa do cilindro.

Naquele momento, Franklin não conseguia explicar o que aconteceu no experimento. Mais tarde, Michael Faraday criou uma série de experimentos para comprovar que as cargas elétricas se distribuíam na superfície externa do condutor isolado.

2.2. Propriedades do condutor isolado e em equilíbrio eletrostático

Propriedade 1:

No interior do condutor o campo elétrico resultante é nulo.

Observe que se houvesse um campo elétrico resultante, diferente de zero, no interior do condutor os elétrons livres teriam um movimento ordenado devido à presença deste campo. Assim, o condutor não estaria em equilíbrio eletrostático.

Cuidado! O campo elétrico resultante é nulo apenas no interior do condutor, mas na superfície o campo resultante é diferente de zero. Mais à frente mostraremos como calcular o campo na superfície.

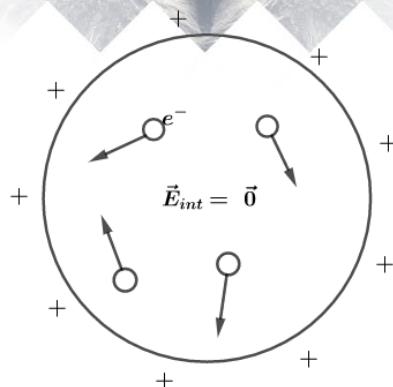


Figura 23: Condutor isolado e em equilíbrio eletrostático: campo elétrico resultante é nulo no interior e movimento aleatório dos elétrons livres.

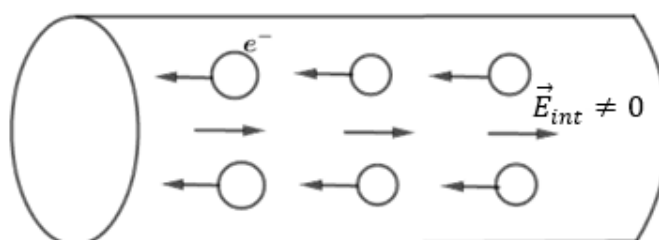


Figura 24: Quando o condutor não está em equilíbrio eletrostático, existe movimento ordenado dos elétrons.

Propriedade 2:

O campo elétrico nos pontos da superfície externa de um condutor isolado e em equilíbrio eletrostático tem direção normal à superfície.

Se houvesse um campo na superfície não perpendicular a ela, este poderia ser decomposto em duas componentes: normal \vec{E}_n e tangencial \vec{E}_t . Dessa forma, a componente tangencial ocasionaria um movimento das cargas, contrariando a hipótese de condutor em equilíbrio eletrostático.

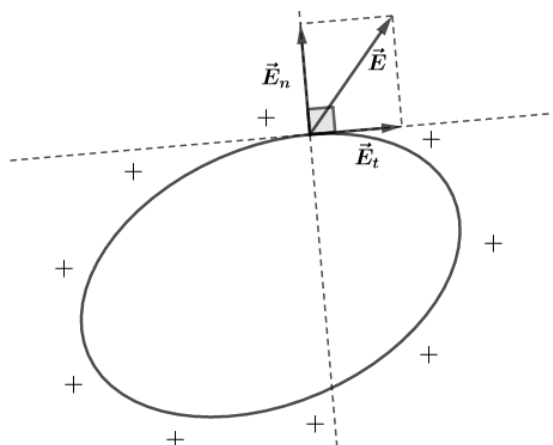


Figura 25: Caso o campo não fosse perpendicular à superfície externa.

2.3. Blindagem eletrostática

Seja um condutor oco (A) que pode estar eletrizado ou não. O corpo A possui todas as propriedades de um condutor maciço. Se um corpo B, **neutro**, for colocado no interior de A, o campo

elétrico no interior de A será nulo. Ainda que A esteja eletrizado, B não será induzido, pois está no interior de A.

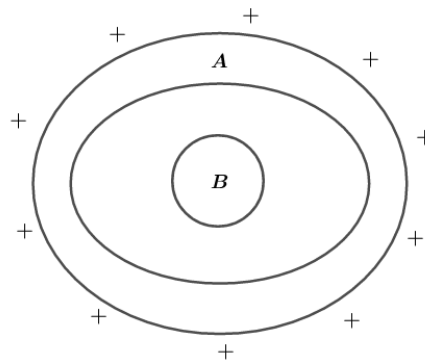


Figura 26: Blindagem eletrostática.

Ao aproximar de A um outro corpo eletrizado C, haverá indução eletrostática em A, mas B não sofrerá nenhum efeito.

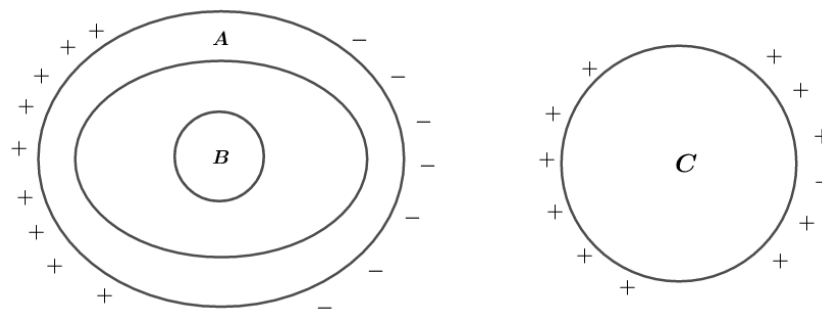


Figura 27: Aproximação de um corpo carregado e nenhum efeito observado em B.

Com este experimento, vemos que o condutor oco A blinda eletrostaticamente os corpos no seu interior. Este feito é chamado de blindagem eletrostática. Dizemos que a carcaça metálica de um automóvel é uma blindagem eletrostática. $\vec{E}_{int} \neq 0$

Em 1836, Faraday criou um experimento para provar esta blindagem eletrostática. Ele construiu uma grande “gaiola” metálica e colocou suportes isolantes. Ele entrou na gaiola portando diversos dispositivos de detecção da presença de campo elétricos, e mandou que seu assistente eletrizasse a caixa intensamente.



Figura 28: Representação de uma gaiola de Faraday, experimento realizado pelo próprio Michael Faraday para mostrar a blindagem eletrostática.

Como já era esperado por Faraday, nenhum dos aparelhos acusavam qualquer existência de campo no interior da caixa. Nem mesmo o próprio Faraday não sentiu qualquer efeito, mesmo com a caixa altamente eletrizada externamente, com grandes eflúvios elétricos saltando por vários pontos de sua superfície externa, palavras do próprio Michael Faraday.

2.4. O poder das pontas

Em um condutor, a densidade superficial σ é elevada nas pontas e a intensidade do campo elétrico é diretamente proporcional a σ . Assim, o campo elétrico nas pontas de um condutor é mais intenso.

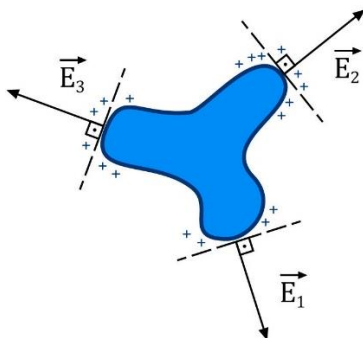


Figura 29: Efeito das pontas na superfície de um condutor, mostrando que $|\vec{E}_2| > |\vec{E}_1|$, já que o raio de curvatura em 2 é menor que em 1, por exemplo.

Quando o campo elétrico na superfície de um condutor é muito intenso, pode ocorrer a ionização das moléculas do isolante que o envolve. Dessa forma, o isolante torna-se um condutor, isto é, as cargas de mesmo sinal são repelidas e as cargas de sinais contrários são atraídas, descarregando o condutor.

Chamamos de rigidez dielétrica de um meio o maior valor de campo elétrico que um meio isolante pode suportar sem ionizar-se (“dielétrico” é sinônimo de “isolante”). Para o ar, a rigidez dielétrica é de $3 \times 10^6 \text{ N/C}$.

2.5. Campo elétrico de um condutor esférico

Dado um condutor esférico de raio R , eletrizado uniformemente com uma carga elétrica Q , em equilíbrio eletrostático, isolado e bem afastado de outros corpos. Como vimos, o campo elétrico resultante no interior do condutor é nulo. O campo elétrico a uma distância $d > R$, pode ser calculado como se fosse produzido por uma carga puntiforme Q , localizada no centro da esfera.

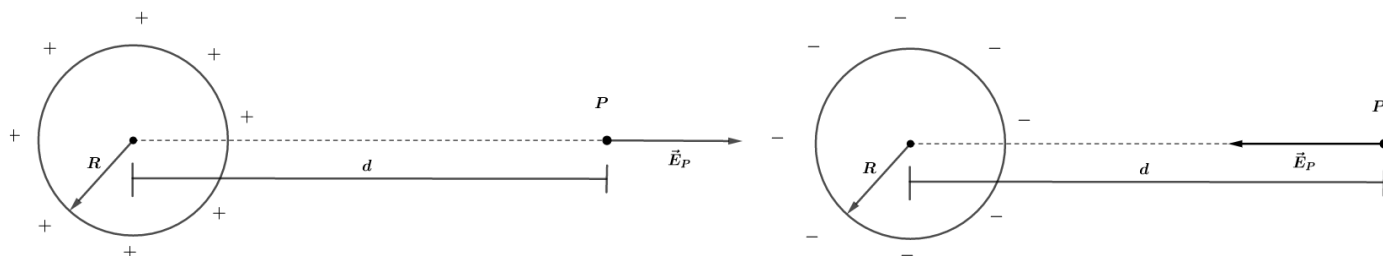


Figura 30: Campo elétrico a uma distância $d > R$.

Assim, temos que:

$$E_P = K \cdot \frac{|Q|}{d^2}, d > R$$

Se tomarmos um ponto P , ainda externo, mas bem próximo à superfície do condutor, a intensidade do campo elétrico ainda é verdadeira para esse caso.

$$E_{próx} = \lim_{d \rightarrow R} E_P = \lim_{d \rightarrow R} K \cdot \frac{|Q|}{d^2} \Rightarrow E_{próx} = K \cdot \frac{|Q|}{R^2}$$

Na **superfície do condutor**, existe uma descontinuidade. Algumas literaturas apontam que:

$$E_{sup} = \frac{1}{2} \cdot E_{próx} \therefore E_{sup} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \frac{|Q|}{R^2}$$

Podemos reunir os resultados dos campos para as três regiões do espaço no seguinte gráfico:

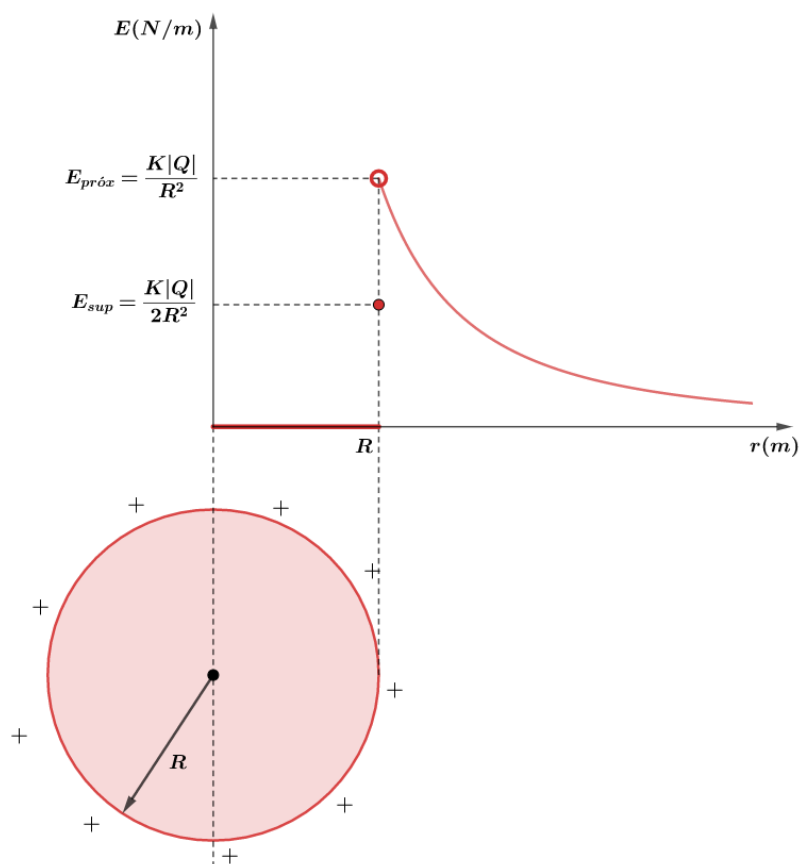


Figura 31: Descontinuidade do campo elétrico na superfície de um condutor esférico.

Leia o tópico 6.6 desta nota de aula http://www.fis.ita.br/fis32/notas/cap6_notas.pdf.



3. Campo elétrico uniforme

Campo elétrico uniforme é aquele cujo vetor \vec{E} tem mesmo módulo, direção e sentido em todos os pontos.

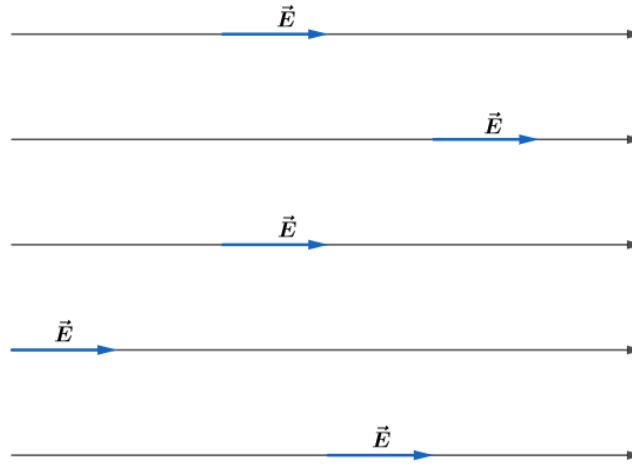


Figura 32: Região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme.

Em um campo elétrico uniforme, representamos as linhas de força por segmentos retos paralelos entre si, igualmente espaçados.

Embora não exista uma superfície ilimitada, o campo elétrico gerado por uma superfície plana, limitada e uniformemente eletrizada pode ser considerado uniforme nos pontos situados próximos a região central da placa, onde a intensidade é dada por:

$$E = \frac{|\sigma|}{2\epsilon}$$

Vamos mostrar esse resultado calculando o campo gerado por um disco uniforme em um ponto na reta suporte que passa pelo centro do disco:

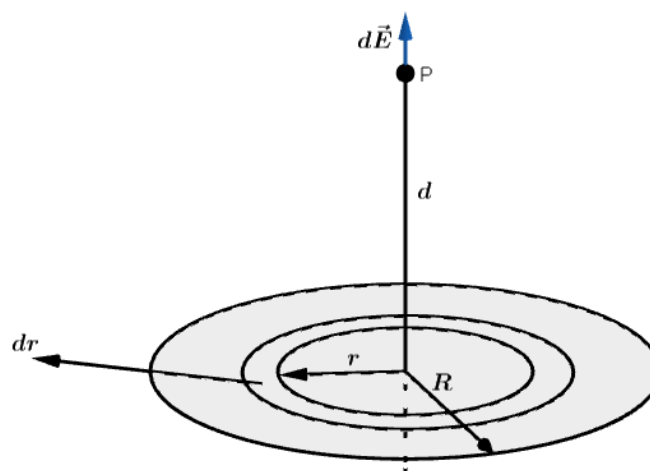


Figura 33: Campo elétrico gerado por um disco uniformemente carregado.

Quando pegamos um elemento de carga dq em um elemento de área dA como se estivéssemos pegando um anel no interior do disco, podemos escrever de forma semelhante ao caso da força em um anel, visto na aula passada, o campo elétrico no ponto P :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{dq \cdot d}{(d^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \text{ eq. 1}$$

Para calcular o campo total produzido pelo disco em P , devemos somar os infinitos anéis que somando compõem o disco, ou seja, devemos integrar a eq. 1 do centro ($r = 0$) até a borda ($r = R$).

Por causa disso, devemos escrever a carga dq em termos da largura radial dr do anel elementar. Pela densidade superficial de carga, temos que:

$$dq = \sigma dA = \sigma(2\pi r dr)$$

Assim, podemos reescrever eq. 1 e integrar de 0 a R , da seguinte forma:

$$E = \int_{r=0}^{r=R} \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{\sigma \cdot 2\pi r \cdot d}{(d^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot dr \therefore \boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon} \left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}\right)}$$

Se fizermos $R \rightarrow \infty$, mantendo d finito, o termo $\frac{d}{\sqrt{d^2 + R^2}}$ tende a zero e a equação do campo elétrico P se reduz a:

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\epsilon}}$$

Esse é o módulo do campo elétrico produzido por uma placa infinita, com distribuição uniforme de cargas na superfície de um material isolante.

Podemos conseguir um campo elétrico uniforme utilizando duas placas planas e iguais, paralelas entre si e eletrizadas com cargas de mesmo módulo e sinais opostos. Quando colocamos as placas próximas, surgem três regiões do espaço:

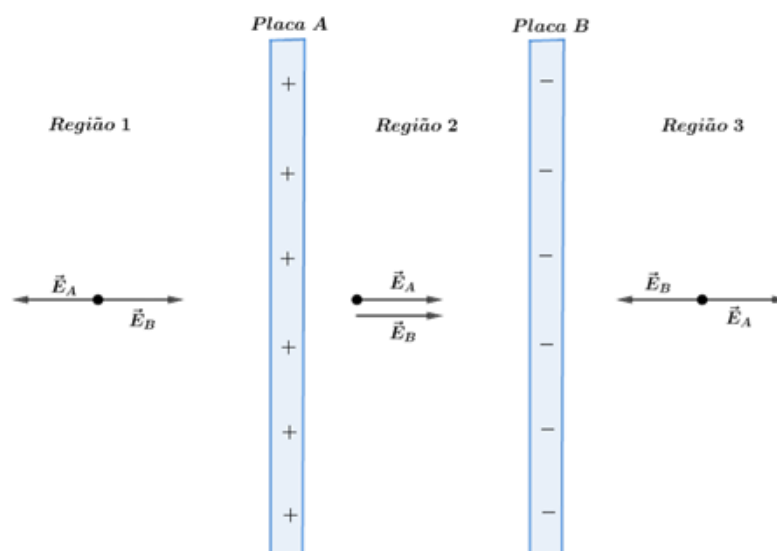


Figura 34: Campo elétrico entre duas placas infinitas e paralelas.

Dado que as placas possuem, em valor absoluto, a mesma densidade de cargas, o módulo do campo produzido por elas é o mesmo.

$$E_A = E_B = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon}$$

De acordo com a figura 34, temos o campo resultantes nas três regiões:

- Região 1:

$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

- Região 2:

$$E_R = E_A + E_B = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon} + \frac{|\sigma|}{2\varepsilon} \Rightarrow E_R = \frac{|\sigma|}{\varepsilon}$$

- Região 3:

$$\vec{E}_R = \vec{0}$$

3.1. Cinemática de uma carga puntiforme em um campo uniforme

Para estudar este problema, vamos tomar um exemplo de uma carga $+q$, entrando em uma região onde existe um campo elétrico uniforme, como mostra a figura logo abaixo:

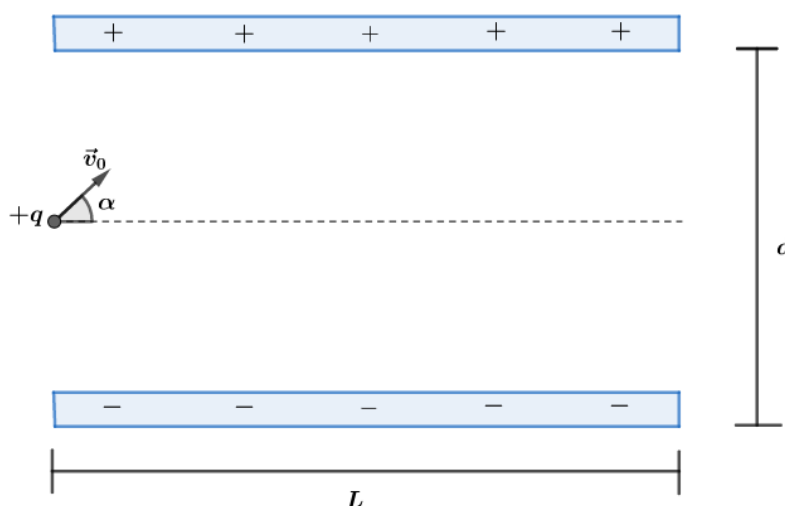
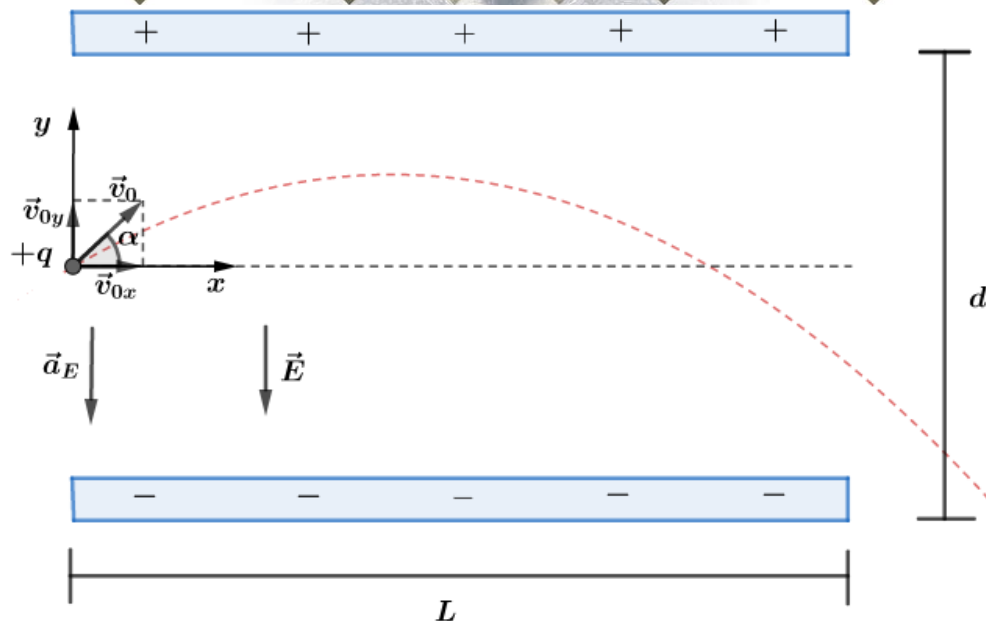


Figura 35: Carga q sendo lançada no interior de uma região com campo elétrico uniforme.

Adotando a origem do sistema de coordenada no ponto onde a carga está quase entrando na região do campo elétrico uniforme e considerando que a força peso pode ser desprezada quando comparada em magnitude com a força elétrica, podemos escrever as equações dos movimentos na horizontal e na vertical:



Supondo que $L \gg d$, podemos desprezar o efeito de borda nas extremidades das placas paralelas. Dessa forma, temos que:

- Em x:

$$\vec{F}_{Rx} = \vec{0} \Rightarrow MU \text{ em } x$$

$$\boxed{x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t} \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \text{ eq. 2}$$

- Em y:

$$\vec{F}_{Ry} = q \cdot \vec{E} \Rightarrow MUV \text{ em } y$$

Podemos escrever o módulo da aceleração em y como:

$$q \cdot E = m \cdot a_y \Rightarrow \boxed{a_y = \frac{q \cdot E}{m}}$$

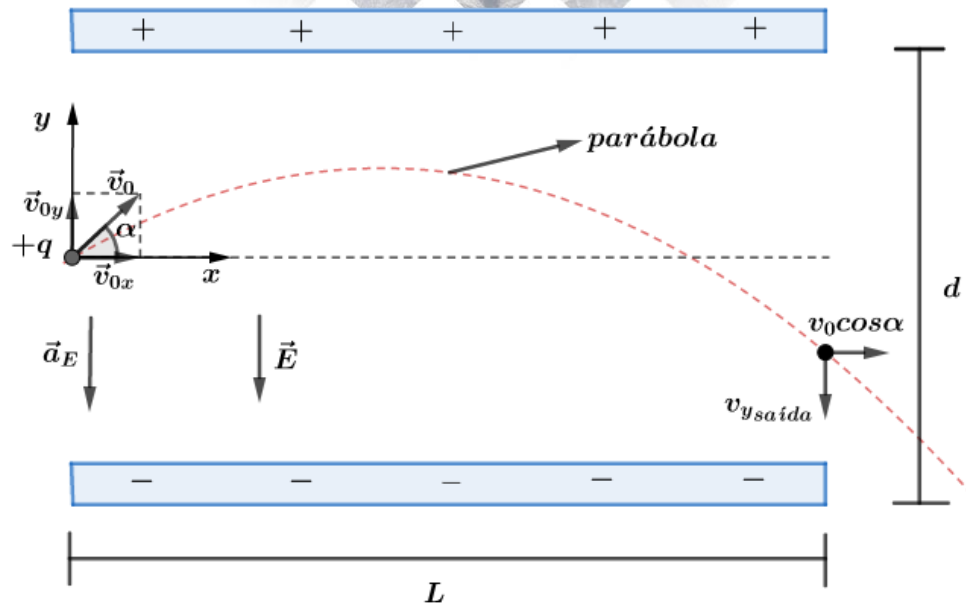
A função horária do espaço em y é dada por:

$$\boxed{y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot t^2} \text{ eq. 3}$$

Substituindo eq. 2 em eq. 3 e manipulando algebricamente, temos que:

$$y = v_0 \sin \alpha \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m} \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos \alpha} \right)^2 \therefore \boxed{y = v_0 \cdot \tan \alpha \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot E}{m \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} \cdot x^2}$$

Com este resultado, vemos que a curva no interior do campo elétrico será uma parábola, onde o tempo de voo pode ser dado por:

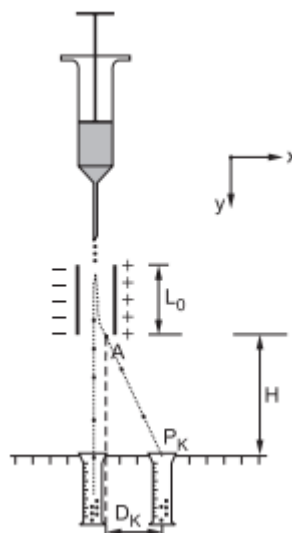


ESCLARECENDO!



1)

Um selecionador eletrostático de células biológicas produz, a partir da extremidade de um funil, um jato de gotas com velocidade V_{0y} constante. As gotas, contendo as células que se quer separar, são eletrizadas. As células selecionadas, do tipo K , em gotas de massa M e eletrizadas com carga $-Q$, são desviadas por um campo elétrico uniforme E , criado por duas placas paralelas carregadas, de comprimento L_0 . Essas células são recolhidas no recipiente colocado em P_K , como na figura. Para as gotas contendo células do tipo K , utilizando em suas respostas apenas Q, M, E, L_0, H e V_{0y} determine:



- a) A aceleração horizontal A_x dessas gotas, quando elas estão entre as placas.
- b) A componente horizontal V_x da velocidade com que essas gotas saem, no ponto A , da região entre as placas.

c) A distância D_K , indicada no esquema, que caracteriza a posição em que essas gotas devem ser recolhidas.

(Nas condições dadas, os efeitos gravitacionais podem ser desprezados).

Comentários:

a) Quando a gota eletrizada com carga $-Q$ entra na região entre as placas, ela fica sujeita a ação da força elétrica e como o campo está orientado no sentido contrário ao eixo x adotado na questão, a força elétrica na carga negativa está orientada no sentido do eixo x . A única força que atua na partícula em x é a força elétrica, portanto, ela será a resultante em x :

$$\vec{F}_{Rx} = (-Q) \cdot E \cdot (-\hat{x})$$

$$M \cdot \vec{A}_x = Q \cdot E \cdot \hat{x} \Rightarrow \boxed{\vec{A}_x = \frac{Q \cdot E}{M} \hat{x}}$$

Em módulo: $\boxed{A_x = \frac{Q \cdot E}{M}}$.

b) Em x , temos um MUV, pois existe a aceleração de módulo constante A_x . Logo, a velocidade em x obedece a equação horária:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

$$v_x = 0 + A_x \cdot t \Rightarrow v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot t$$

Em y , a gota está caindo com velocidade praticamente constante, já que os efeitos gravitacionais foram desprezados, então, a função horária do espaço é dada por:

$$y = y_0 + v_y \cdot t \Rightarrow y = 0 + V_{0y} \cdot t \Rightarrow y = V_{0y} \cdot t$$

O tempo que a gota percorre no interior das placas pode ser dado por:

$$\Delta y = L \Rightarrow L = V_{0y} \cdot t_{placas} \Rightarrow t_{placas} = \frac{L}{V_{0y}}$$

Então, a velocidade em x quando a gota sai da região das placas é dada por:

$$\boxed{v_x = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}}}$$

c) Após a gota sair da região entre as placas, nenhuma força atuará tanto em x quanto em y . Dessa forma, nessa fase do movimento da gota temos apenas a composição de dois MU, um em cada eixo:

$$\Delta y = V_{0y} \cdot t \text{ e } \Delta x = v_x \cdot t$$

Tempo para partícula percorrer H :

$$H = v_{0y} \cdot t_H$$

Logo:

$$D_K = \frac{Q \cdot E}{M} \cdot \frac{L}{V_{0y}} \cdot \frac{H}{V_{0y}} \Rightarrow \boxed{D_K = \frac{Q \cdot E \cdot L \cdot H}{M \cdot V_{0y}^2}}$$

VINDO MAIS
FUNDO!

4. A lei de Gauss da eletricidade

Antes de mostrar o que é a Lei de Gauss da Eletricidade, vamos definir alguns conceitos que serão utilizados na formulação dessa lei.

4.1. Fluxo de um campo vetorial

Chamamos de vetor área (\vec{A}) o vetor cuja direção é perpendicular e seu módulo é igual a área da superfície que ele representa. Exemplo: quadrado de lado L , temos que:

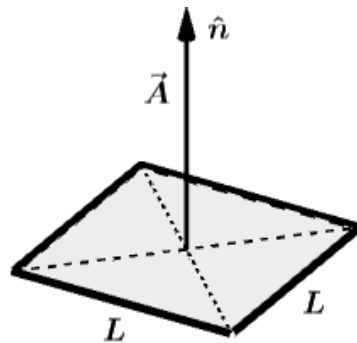


Figura 36: Representação de um vetor área.

$$\vec{A} = A \cdot \hat{n} = L^2 \cdot \hat{n}$$

O fluxo de um campo vetorial através de uma superfície imaginária de área A é uma medida do número de linhas do campo que perfuram essa superfície. Matematicamente, dizemos que:

$$\varphi = \vec{V} \cdot \vec{A} = V \cdot A \cdot \cos\theta$$

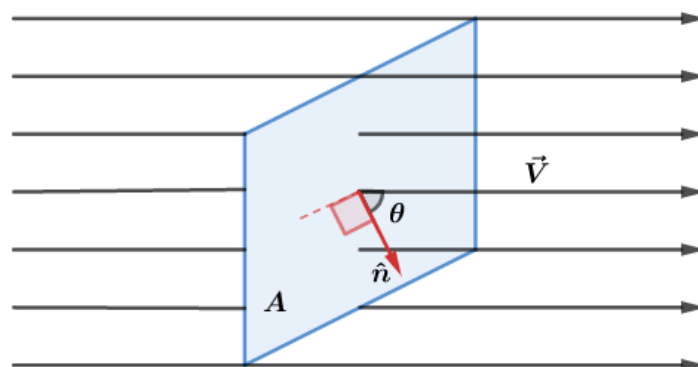


Figura 37: Vista em perspectiva do fluxo de um campo vetorial perfurando uma área imaginária A .

Na vista frontal, temos as seguintes situações particulares:

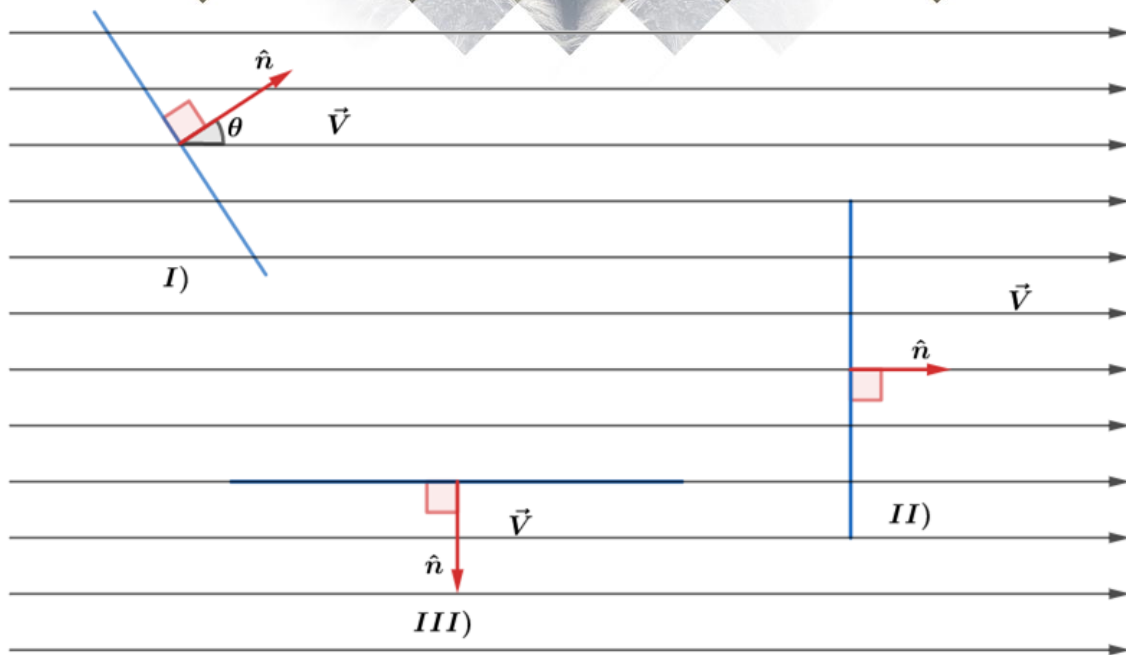


Figura 38: Vista frontal do fluxo de um campo vetorial perfurando uma área imaginária A em diferentes casos.

Para essas três situações temos os seguintes fluxos:

- I. $\varphi_V = V \cdot A \cdot \cos\theta$
- II. $\theta = 0^\circ \Rightarrow \varphi_{V_{\text{máx}}} = V \cdot A$
- III. $\theta = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 0$

Observe que quando $\theta = 0^\circ$ o fluxo é máximo pois temos o maior número de linhas de força que atravessam a superfície. Por outro lado, quando $\theta = 90^\circ$ nenhuma linha de força atravessa a superfície.

Mas o que acontece quando as linhas de um campo atravessam uma superfície externa de uma figura tridimensional? Para responder a essa pergunta vamos considerar uma superfície imaginária, fechada, num campo vetorial qualquer. Para fins de ilustração, vamos considerar que nossa superfície fechada seja a área superficial de uma esfera.

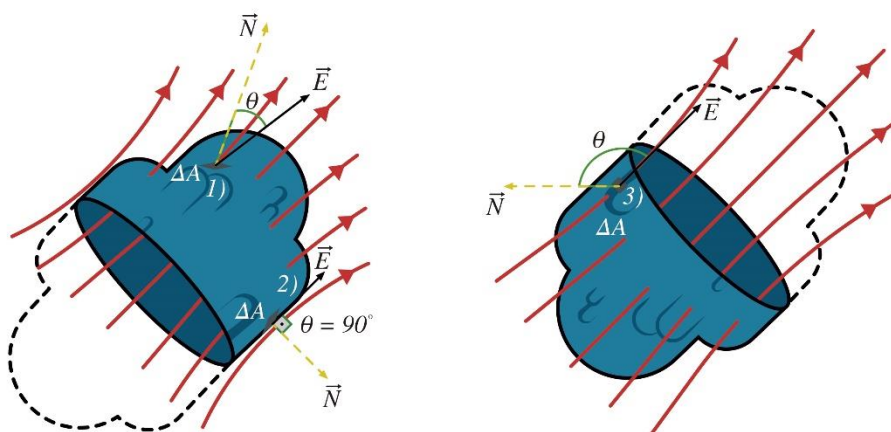


Figura 39: Fluxo de um campo vetorial em uma superfície fechada.

Quando pegamos um elemento de área ΔA tão pequeno de tal forma que podemos considerar o campo vetorial que atravessa ele, temos que:

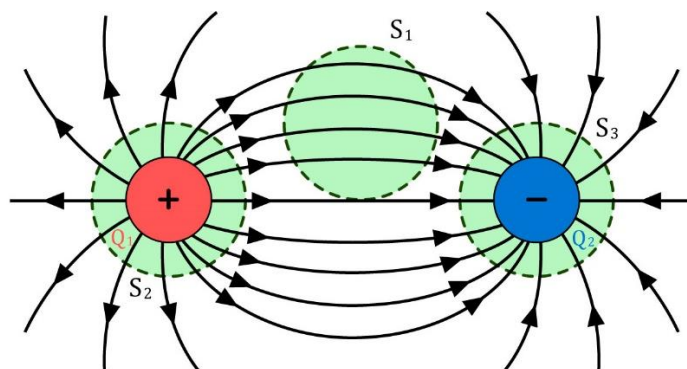
- a) Para o elemento a : $\varphi = V \cdot \Delta A \cdot \cos\theta$ (positivo, já que $\cos\theta > 0$). Observe que φ é **positivo** nos elementos de superfície em que o campo está **saindo**.
- b) Para o elemento b : $\varphi = 0$ (nulo, já que $\cos(\theta) = \cos(90^\circ) = 0$).
- c) Para o elemento c : $\varphi = V \cdot \Delta A \cdot \cos\theta$ (negativo, pois $\cos\theta < 0$). Observe que φ é **negativo** nos elementos de superfície em que o campo está **entrando**.

A determinação do fluxo total na superfície inteira é dada pela soma de todos os fluxos em todos os seus elementos de superfície. Esse processo se torna interessante, quando tomamos superfícies com elevado grau de simetria.

Para o caso de uma **superfície fechada**, o **fluxo total**, devido a **cargas externas**, é nulo. Isso é justificado pelo fato da quantidade de linhas de força que entram em uma superfície, gerando um fluxo negativo, ser igual à quantidade de linhas de forças que saem dessa superfície, gerando um fluxo positivo.

Exemplo:

Sejam duas cargas, $+q$ e $-q$, onde representamos suas linhas de forças. Vamos estudar o fluxo do campo elétrico nas três superfícies fechadas.



Na superfície S_1 , as cargas $+q$ e $-q$ são externas, portanto, o fluxo elétrico nessa superfície é nulo. Por outro, na superfície S_2 as linhas estão saindo, logo, o fluxo é positivo e na superfície S_3 as linhas estão entrando, logo, o fluxo é negativo.

4.2. A lei de Gauss

Vamos considerar uma distribuição de cargas elétricas e uma superfície imaginária fechada qualquer, que envolva essas cargas. Chamamos essa superfície imaginária de **superfície gaussiana** (Ω).

A Lei de Gauss determina que o fluxo total (φ_{total}) que atravessa a gaussiana (Ω) é igual à carga total interna $\sum Q_{interna}$ dividida pela permissividade do meio (ϵ).

$$\varphi_{total} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\epsilon} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots + Q_n}{\epsilon}$$

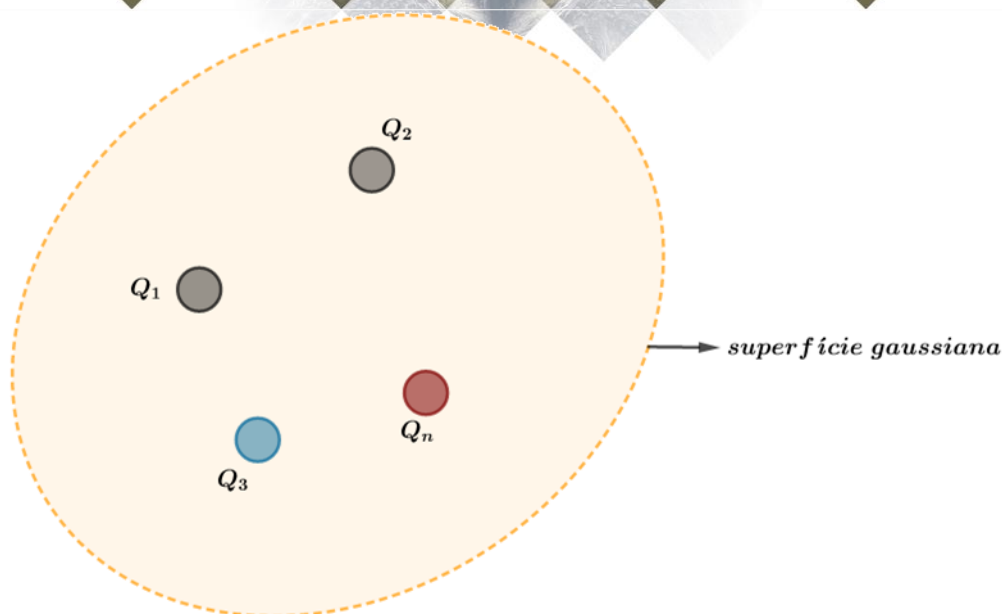


Figura 40: Aplicação da Lei de Gauss para n cargas.

A unidade de fluxo elétrico é o $\frac{N \cdot m^2}{C}$. Para exemplificar o uso da Lei de Gauss, vamos calcular o fluxo elétrico gerado por uma carga elétrica puntiforme com carga $+q$, em um meio cuja permissividade elétrica é ϵ .

Vamos pegar uma superfície gaussiana de forma que possamos ter a maior simetria no problema quando calcularmos a soma dos fluxos de cada elemento de área na gaussiana (Ω).

Sem muito esforço, vemos que se pegarmos uma esfera com centro na carga puntiforme, iremos simplificar nosso somatório dos pequenos fluxos. Então, podemos calcular o fluxo no elemento de área ΔA da seguinte forma:

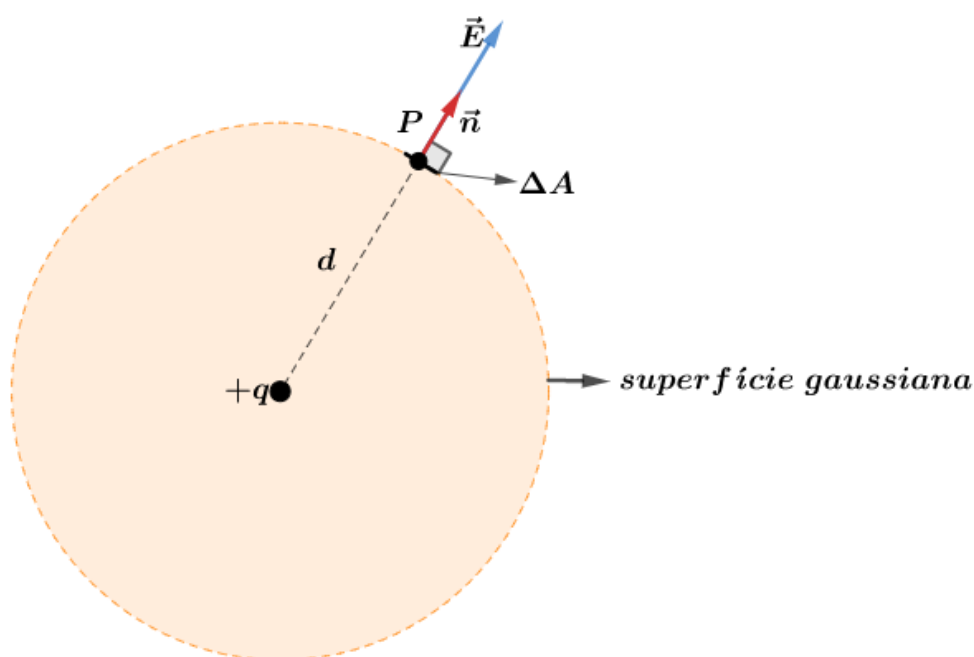


Figura 41: Aplicação da Lei de Gauss para uma carga puntiforme.

$$\varphi = E \cdot \Delta A \cdot \cos\theta$$

Note que para todos os elementos de área, $\theta = 0^\circ$ sempre. Por isso, o fluxo no pequeno elemento de área é dado por:

$$\varphi = E \cdot \Delta A$$

O fluxo total na superfície esférica é dado pela soma dos fluxos em todos os elementos de áreas na gaussiana (Ω), lembrando que o módulo do campo elétrico é mesmo dada a distância d :

$$\varphi_{total} = \sum_{i=0}^{\infty} E_i \cdot \Delta A_i = E \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \Delta A_i$$

Mas, $\sum_{i=0}^{\infty} \Delta A_i$ corresponde a área superficial da esfera (área superficial da gaussiana (Ω)), então:

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Delta A_i = 4\pi d^2$$

Portanto, o fluxo elétrico é dado por:

$$\varphi_{total} = E \cdot 4\pi d^2$$

Mas, pela Lei de Gauss, o fluxo total é:

$$\varphi_{total} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\varepsilon} = \frac{q}{\varepsilon}$$

Assim, temos que:

$$E \cdot 4\pi d^2 = \frac{q}{\varepsilon} \therefore E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \cdot \frac{q}{d^2}$$

O que entrelaça as teorias já vistas até aqui. Se tivéssemos escolhido outra superfície gaussiana (Ω) qualquer envolvendo a carga puntiforme, o teorema continuaria válido, pois o fluxo total perfurando esta outra superfície é o mesmo fluxo que perfura a superfície esférica.

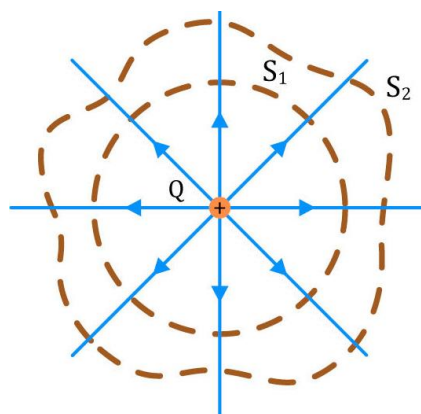


Figura 42: Fluxo do campo elétrico S_1 e S_2 . Pela Lei de Gauss, o fluxo será o mesmo pelas superfícies gaussianas, já que depende apenas da carga interna.

Observação: a Lei de Gauss apresentada aqui é válida desde que não haja cargas distribuídas ao longo da superfície gaussiana (Ω).

Diante disso, podemos criar um processo para calcular o campo elétrico \vec{E} de distribuições de cargas com certo grau de **simetria**:

- Passo 1: pelo ponto onde deseja-se calcular o módulo do campo, idealize uma gaussiana (Ω) fechada que contenha em seu interior a distribuição de cargas e que possua a simetria do problema:

$|\vec{E}|$ seja constante em todos os pontos onde $\vec{E} \cdot \Delta\vec{A} \neq 0$.

$\theta = 0^\circ$ ou $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 180^\circ$ em todos os pontos da gaussiana escolhida.

- Passo 2: efetua-se $\varphi_{total} = \sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{A} = \frac{\sum Q_{internas}}{\epsilon}$ ao longo da gaussiana desenhada.

4.3. Algumas aplicações da lei de Gauss

4.3.1. Distribuição de carga elétrica de um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático

Podemos verificar que o campo elétrico no interior de um condutor eletrizado e em equilíbrio eletrostático é nulo utilizando a Lei de Gauss. Como bem sabemos, dada a condição de equilíbrio eletrostático do condutor, as cargas no condutor se distribuem ao longo da superfície externa.

Com isso, se idealizarmos uma gaussiana (Ω) no interior do condutor, a carga interna a essa gaussiana é nula. Portanto, pela Lei de Gauss, temos que:

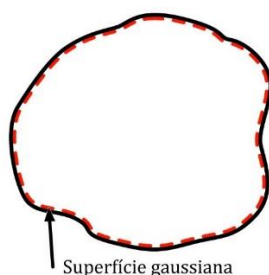


Figura 43: Desenho de uma gaussiana de acordo com o objetivo do problema.

$$\varphi_{total} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\epsilon} = \frac{0}{\epsilon} = 0 = \sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$$

A única forma de garantir que $\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta\vec{A}$ é se o campo elétrico for nulo. Dessa forma, confirmamos o resultado que já sabíamos: $\vec{E}_{int} = \vec{0}$.

4.3.2. Campo elétrico criado por uma distribuição plana e ilimitada de cargas

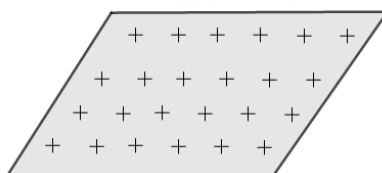


Figura 44: Placa uniformemente carregada com densidade de cargas uniforme σ .

Diante da simetria de uma placa ilimitada (infinita) com distribuição de cargas elétricas uniformes, sabemos que o campo elétrico é nulo num ponto do plano e perpendicular a ele num ponto fora dele.

Realmente, quando tomamos uma carga q situada à esquerda do ponto desejado, existe uma carga q à direita, a mesma distância do ponto, de tal forma que a componente lateral é nula.

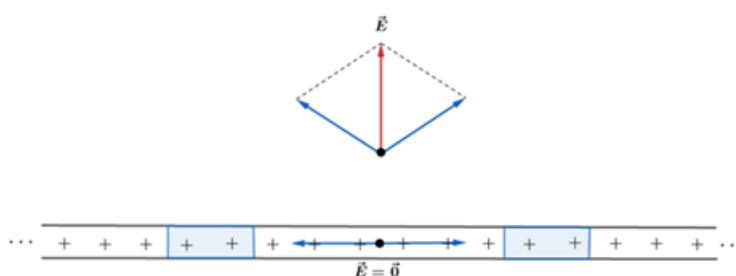


Figura 45: Representação do campo elétrico gerado por um fio retilíneo infinito em um dado ponto do espaço.

Se passarmos uma gaussiana em um elemento de carga da placa, podemos determinar o campo elétrico num ponto exterior ao plano das cargas. Assim, a gaussiana deve envolver uma área ΔA e uma carga ΔQ . Como o campo na horizontal é nulo, uma excelente gaussiana a ser tomada é superfície externa de um cilindro reto. Tomando a vista frontal, temos que:

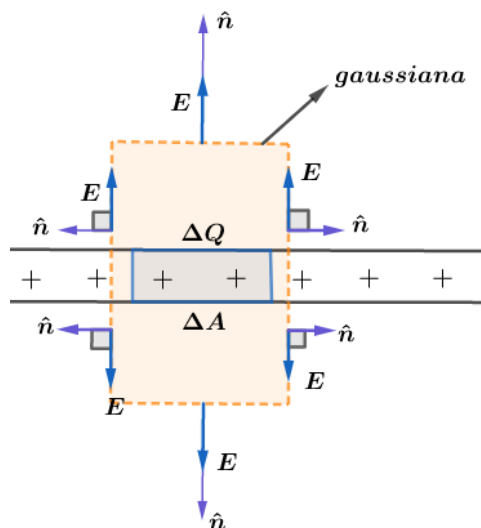


Figura 46: Utilização da Lei de Gauss para o cálculo do campo, devido ao elevado grau de simetria do campo. Note que existem duas possibilidades para o ângulo entre o campo e o vetor área na gaussiana.

Dessa forma, podemos ver que os fluxos na superfície lateral do cilindro são nulos, pois sempre teremos $\vec{E} \perp \hat{n}$. Já na superfície superior e na superfície inferior, o ângulo entre \vec{E} e \hat{n} é de 0° . Assim, o fluxo é dado por:

$$\varphi_{inferior} = E\Delta A \text{ e } \varphi_{superior} = E\Delta A$$

Pela Lei de Gauss, temos que:

$$\varphi_{total} = \varphi_{inferior} + \varphi_{superior} + \varphi_{lateral} = E\Delta A + E\Delta A + 0 = 2E\Delta A = \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\varepsilon} = \frac{\Delta Q}{\varepsilon}$$

Portanto:

$$2E\Delta A = \frac{\Delta Q}{\varepsilon}$$

Como a densidade superficial uniforme de cargas da placa pode ser escrita como $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$, concluímos que:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

4.3.3. Fio retilíneo uniformemente carregado com densidade linear de cargas λ

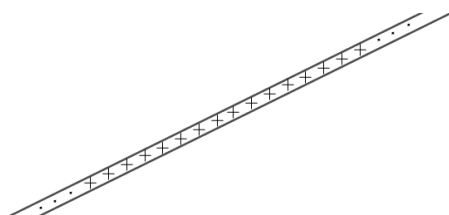


Figura 47: Fio retilíneo uniformemente carregado com densidade de carga λ .

Vamos calcular o campo elétrico gerado por um fio retilíneo tão grande quanto queiramos, com uma densidade linear de cargas λ , tal que:

$$\lambda = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$$

Para isso, vamos pegar um elemento de carga situado em um elemento de comprimento do fio. Semelhante ao caso da placa infinita com distribuição uniforme de cargas, podemos ver sem muito esforço que o campo elétrico gerado pelo fio terá o módulo igual para pontos a uma distância r e direção radial da seguinte forma:

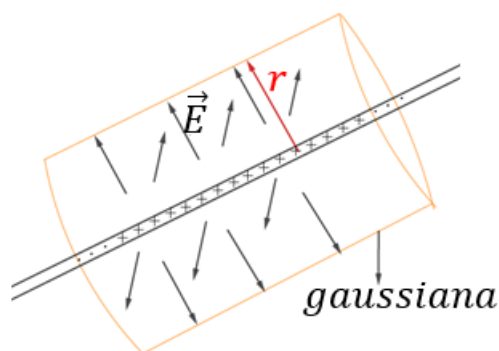


Figura 48: Traçado da gaussiana em um fio retilíneo infinito. A superfície que mais se encaixa para o problema é a superfície externa de um cilindro reto.

Fazendo uma vista frontal da superfície lateral do cilindro, temos que:

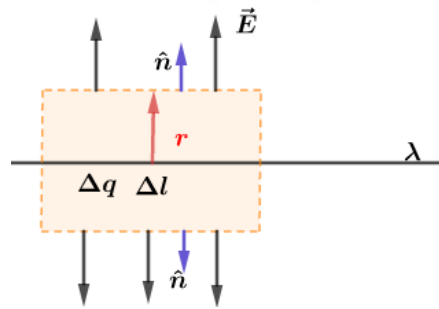


Figura 49: Representação do campo elétrico gerado pelo fio e a superfície gaussiana desenhada.

Assim, nas superfícies que formam as bases do cilindro não haverá fluxo do campo elétrico, apenas na superfície lateral do cilindro. Para o elemento de carga Δq de comprimento Δl , temos:

$$\phi_{lateral} = E \Delta A \cos \theta \Rightarrow \phi_{lateral} = E 2\pi r \Delta l \cos(0^\circ)$$

Pela Lei de Gauss, temos que:

$$\phi_{total} = \phi_{lateral} + \phi_{bases} = E 2\pi r \Delta l + 0 = \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\epsilon} = \frac{\Delta q}{\epsilon}$$

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon r} \cdot \frac{\Delta q}{\Delta l} \therefore \boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}}$$

4.3.4. Esfera isolante com densidade volumétrica $\rho(C/m^3)$

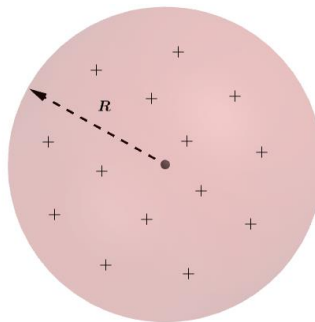


Figura 50: Esfera isolante uniformemente carregada.

Onde a densidade volumétrica de cargas pode ser dada por:

$$\boxed{\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3}, \rho = cte}$$

Utilizando a lei de Gauss no interior da esfera, de forma semelhante ao que já fizemos para o caso a carga puntiforme e utilizando o fato da densidade volumétrica de cargas ser constante, podemos encontrar que o campo no interior da esfera isolante uniformemente carregada é de:

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon} \cdot r$$

Para regiões externas da esfera, podemos aplicar novamente a lei de Gauss e tudo se passa como se fosse apenas uma carga puntiforme colocada no centro da esfera, pois o fora da esfera o campo é dado por:

$$\sum Q_{internas} = \rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3 \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot R^3}{\epsilon} \therefore$$

$$E = \frac{\rho R^3}{3\epsilon r^2} \text{ ou } E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r^2}$$

Dessa forma, o gráfico do campo elétrico de uma esfera isolante uniformemente carregada em todo espaço pode ser representado pelo gráfico:

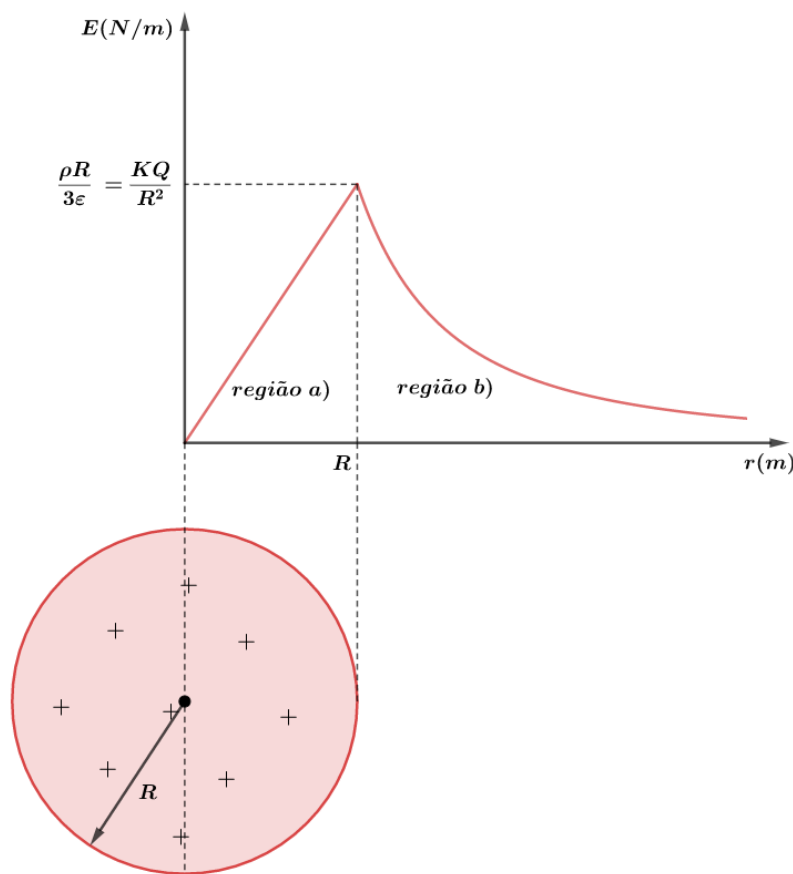


Figura 51: Gráfico do campo elétrico em função da distância ao centro.

4.3.5. Indução total vista pela lei de Gauss

Vamos tomar uma casca esférica condutora, com uma carga puntiforme no centro, conforme mostra a figura:

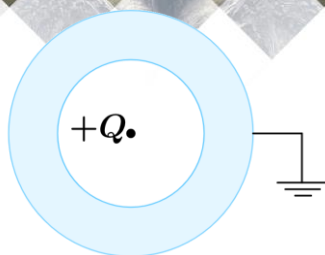


Figura 52: Casca esférica condutora aterrada.

Podemos passar uma gaussiana pelo interior da casca esférica e observar a indução na parte interior da casca, de acordo com a Lei de Gauss:

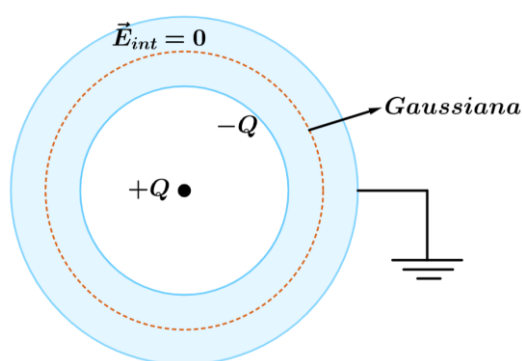


Figura 53: Campo elétrico no interior da casca condutora é nulo.

De acordo com o equilíbrio eletrostático no interior do condutor, sabemos que o campo elétrico nessa região é nulo. Logo, pela Lei de Gauss, se $|\vec{E}_{in}| = 0$ então $\varphi_{total} = 0$, o que implica $Q_{int} = 0$. Logo, a carga induzida deve ser simétrica em relação a carga no interior da casca ($+Q$). Portanto:

$$Q_{induzida} = -(Q_{indutora})$$

4.3.6. Elementos correspondentes

Considere uma esfera A carregada com carga positiva Q_A e uma esfera B carregada com carga negativa Q_B . A região das linhas de força que saem de A para B são denominados elementos correspondentes.

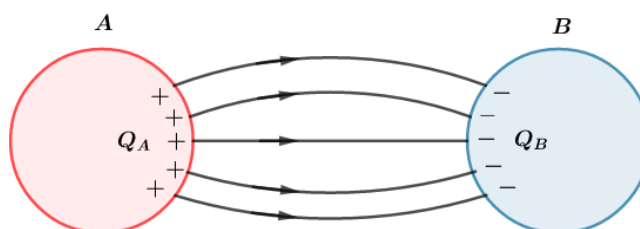


Figura 54: Linhas de força indo de A para B.

De acordo com a Lei de Gauss, podemos demonstrar que se os condutores estiverem em equilíbrio eletrostático, os módulos de Q_A e Q_B serão iguais.

Para tal fim, vamos passar uma gaussiana conforme na figura abaixo:

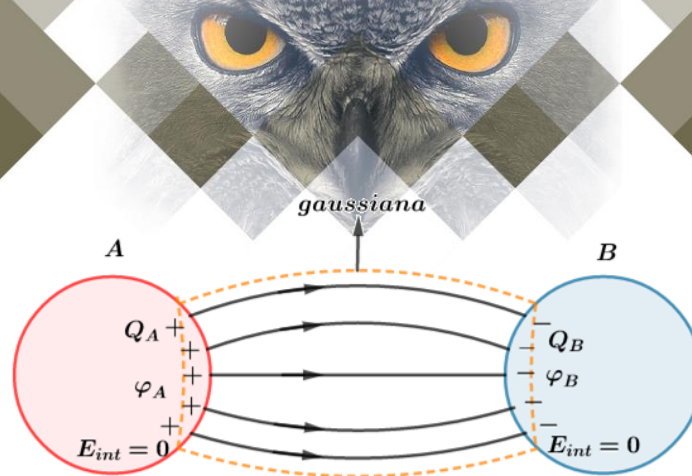


Figura 55: Gaussiana para um dipolo elétrico.

Note que os fluxos φ_A e φ_B devem ser nulos já que no interior do condutor em equilíbrio eletrostático o campo elétrico é nulo. Além disso, na região lateral da gaussiana o fluxo do campo é nulo, pois nenhuma linha de força atravessa essa superfície.

Utilizando a Lei de Gauss, temos que:

$$\varphi_{total} = \varphi_A + \varphi_B + \varphi_{lateral} = 0 \Rightarrow \frac{\sum_{\Omega} Q_{interna}}{\varepsilon} = 0 \Rightarrow \frac{Q_A + Q_B}{\varepsilon} = 0$$

$$\boxed{Q_A = -Q_B} \text{ ou } \boxed{|Q_A| = |Q_B|}$$

Podemos concluir que quando todas as linhas de força que partem de uma região e chegam a outra, as cargas dessas regiões sempre possuem o mesmo valor absoluto.

ESCLARECENDO!



2)

Considere uma superfície plana de área A imersa em um campo elétrico uniforme de intensidade E . A superfície plana gira em um movimento uniforme, de tal forma que o ângulo θ entre o vetor campo elétrico e o versor \hat{n} obedece a equação $\theta = \omega \cdot t$, onde ω é a velocidade angular. Esboce o gráfico do fluxo que atravessa a área em função do tempo, para t igual a $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3T}{4}, 2T$, onde T é o período de rotação.

Comentários:

Utilizando a definição de fluxo de um campo, temos que:

$$\varphi = EA \cos \theta$$

$$\varphi = EA \cos(\omega t) \Rightarrow \varphi(t) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

Assim, temos os seguintes valores do fluxo elétrico:

$$t = 0 \Rightarrow \varphi(0) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) \Rightarrow \varphi(0) = EA$$

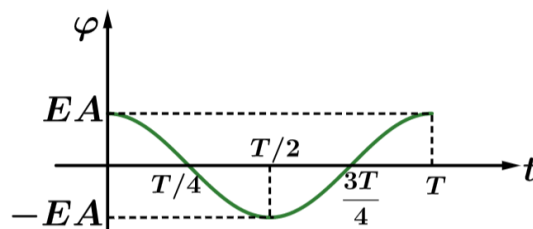
$$t = \frac{T}{4} \Rightarrow \varphi\left(\frac{T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = EA \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$t = \frac{T}{2} \Rightarrow \varphi\left(\frac{T}{2}\right) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = E \cos(\pi) = -EA$$

$$t = \frac{3T}{4} \Rightarrow \varphi\left(\frac{3T}{4}\right) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = E \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

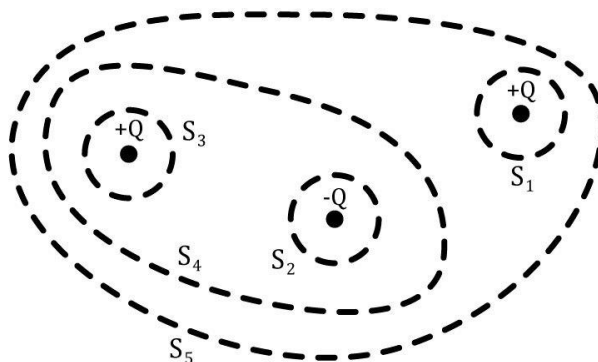
$$t = 2T \Rightarrow \varphi(2T) = E \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 2T\right) = E \cos(4\pi) = EA$$

Plotando no gráfico, temos:



3)

Determine os fluxos elétricos para cada uma das superfícies indicadas em função de Q e de ε .



Comentários:

Utilizando a lei de Gauss em cada uma das gaussianas, temos que:

$$\varphi_{S_1} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{\text{interna}}}{\varepsilon} = \frac{+Q}{\varepsilon}$$

$$\varphi_{S_2} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{\text{interna}}}{\varepsilon} = \frac{-Q}{\varepsilon}$$

$$\varphi_{S_3} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{\text{interna}}}{\varepsilon} = \frac{+Q}{\varepsilon}$$

$$\varphi_{S_4} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{\text{interna}}}{\varepsilon} = \frac{+Q - Q}{\varepsilon} = \frac{0}{\varepsilon} = 0$$

$$\varphi_{S_5} = \frac{\sum_{\Omega} Q_{\text{interna}}}{\varepsilon} = \frac{+Q + Q - Q}{\varepsilon} = \frac{+Q}{\varepsilon}$$



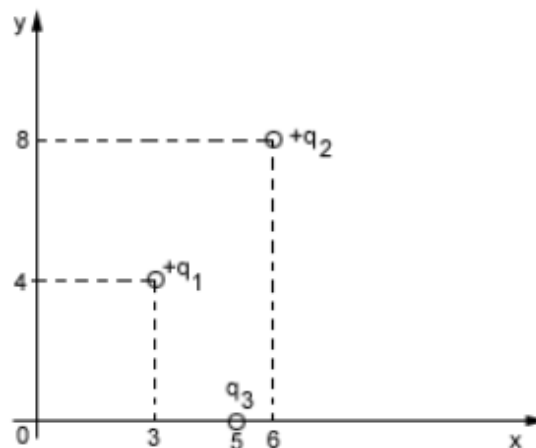
5. Lista de questões

1. (ITA-1975)

Três cargas q_1 e q_2 (iguais e positivas) e q_3 , estão dispostas conforme a figura. Calcule a relação entre q_3 e q_1 para que o campo elétrico na origem do sistema seja paralelo a y .

- a) $-\frac{5}{4}$
- b) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
- c) $-\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores.



2. (ITA-1985)

Considere um campo eletrostático cujas linhas de força são curvilíneas. Uma pequena carga de prova, cujo efeito sobre o campo é desprezível, é abandonada num ponto do mesmo, no qual a intensidade do vetor campo elétrico é diferente de zero. Sobre o movimento ulterior dessa partícula podemos afirmar que:

- a) Não se moverá porque o campo é eletrostático.
- b) Percorrerá necessariamente uma linha de força.
- c) Não percorrerá uma linha de força.
- d) Percorrerá necessariamente uma linha reta.
- e) Terá necessariamente um movimento oscilatório.

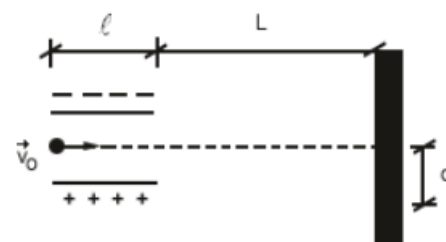
3. (ITA-1991)

Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme \vec{E} , dois pêndulos simples de massas $m = 0,20 \text{ kg}$ e comprimento L são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com $q_1 = 0,20 \text{ C}$ e a massa do segundo pêndulo com $q_2 = -0,20 \text{ C}$. São dados que a aceleração da gravidade local é $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, que o campo elétrico tem mesma direção e mesmo sentido que \vec{g} e sua intensidade é $E = 6,0 \text{ V/m}$. A razão (p_1/p_2) , entre os períodos p_1 e p_2 dos pêndulos 1 e 2, é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

4. (ITA-1993)

Duas placas planas e paralelas, de comprimento l , estão carregadas e servem como controladoras de elétrons em um tubo de raios catódicos. A distância das placas até a tela do tubo é L . Um feixe de elétrons (cada um de massa m e carga elétrica de módulo e) penetra entre as placas com uma velocidade v_0 , como mostra a figura. Qual é a intensidade do campo elétrico entre as placas se o deslocamento do feixe na tela do tubo é igual a d ?



$$a) E = \frac{mv_0^2 d}{el(L - \frac{l}{2})}$$

$$b) E = \frac{mv_0^2 d}{el(L + \frac{l}{2})}$$

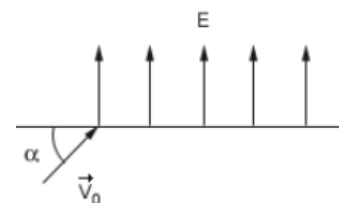
$$c) E = \frac{mv_0^2 d}{el(L + \frac{l}{2})}$$

$$d) E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL + \frac{l}{2})}$$

$$e) E = \frac{mv_0^2 d}{el(mL - \frac{l}{2})}$$

5. (ITA-1994)

Numa região onde existe um campo elétrico uniforme $E = 1,0 \times 10^2 \text{ N/C}$ dirigido verticalmente para cima, penetra um elétron com velocidade inicial $v_0 = 4,0 \times 10^5 \text{ m/s}$, seguindo uma direção que faz um ângulo de 30° com a horizontal, como mostra a figura.



Sendo a massa do elétron $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a carga do elétron $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, podemos afirmar que:

- a) O tempo de subida do elétron será $1,14 \times 10^{-8} \text{ s}$.
- b) O alcance horizontal do elétron será $5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.
- c) A aceleração do elétron será $2,0 \text{ m/s}^2$.
- d) O elétron será acelerado continuamente para cima até escapar do campo elétrico.
- e) O ponto mais elevado alcançado pelo elétron será $5,0 \times 10^{-1} \text{ m}$.

6. (ITA-1995)

Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1,0 \times 10^{-4} \text{ kg}$, carregada com uma carga elétrica $q = 3,0 \times 10^{-5} \text{ C}$ e um fio isolante de comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, de massa desprezível. Este pêndulo oscila com período P num local onde $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Quando um campo elétrico uniforme e constante \vec{E} é aplicado verticalmente em toda a região do pêndulo o seu período dobra de valor. A intensidade E do campo elétrico é de:

- a) $6,7 \times 10^3 \text{ N/C}$.
- b) 42 N/C .
- c) $6,0 \times 10^{-6} \text{ N/C}$.
- d) 33 N/C .
- e) 25 N/C .

7. (ITA-1999)

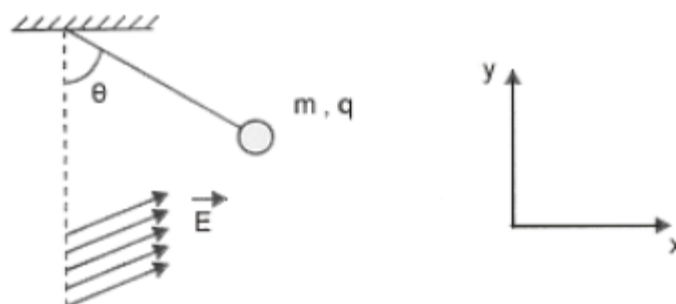
Uma esfera homogênea de carga q e massa m de $2g$ está suspensa por um fio de massa desprezível em um campo elétrico uniforme cujas componentes em x e y têm intensidades $E_x = \sqrt{3} \times 10^5 \text{ N/C}$ e $E_y = 1 \times 10^5 \text{ N/C}$, respectivamente, como mostra a figura.

Considerando que a esfera está em equilíbrio para $\theta = 60^\circ$, qual é a intensidade da força de tração no fio?

Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

- a) $9,80 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- b) $1,96 \times 10^{-2} \text{ N}$.
- c) Nula.
- d) $1,70 \times 10^{-3} \text{ N}$.
- e) $7,17 \times 10^{-3} \text{ N}$.

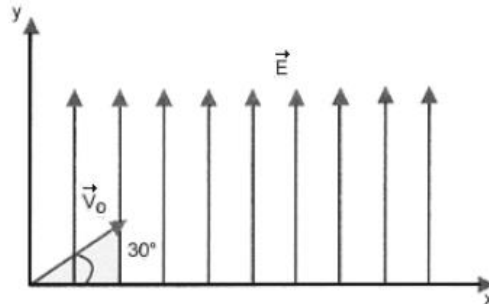
8. (ITA-1999)



No instante $t = 0$ s, um elétron é projetado em um ângulo de 30° em relação ao eixo x , com velocidade v_0 de 4×10^5 m/s, conforme o esquema abaixo.

A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31}$ kg e a sua carga elétrica é igual a $-1,6 \times 10^{-19}$ C. Considerando que o elétron se move num campo elétrico constante $E = 100$ N/C, o tempo que o elétron levará para cruzar novamente o eixo x é de:

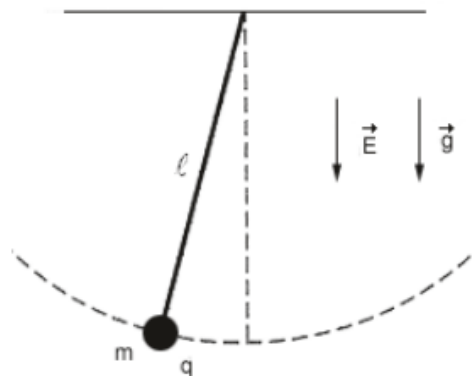
- a) 10 ns.
- b) 15 ns.
- c) 23 ns.
- d) 12 ns.
- e) 18 ns.



9. (ITA-2005)

Considere um pêndulo de comprimento l , tendo na sua extremidade uma esfera de massa m com uma carga positiva q . A seguir, esse pêndulo é colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} que atua na mesma direção e sentido da aceleração da gravidade \vec{g} . Deslocando-se essa carga ligeiramente de sua posição de equilíbrio e soltando-a, ela executa um movimento harmônico simples, cujo período é:

- a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
- b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+q}}$
- c) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{gE}}$
- d) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg-qE}}$
- e) $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg+qE}}$

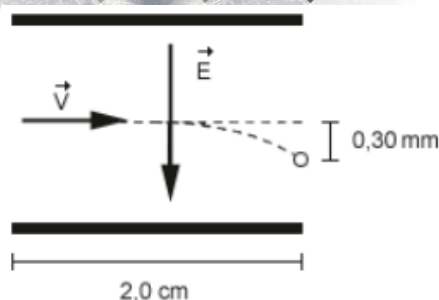


10. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu\text{m}$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20$ m/s entre as placas de comprimento igual a $2,0$ cm, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4$ N/C, como mostra a figura.

Considerando que a densidade da gota seja 1000 kg/m³ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30$ mm ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

- a) $2,0 \times 10^{-14} C$
- b) $3,1 \times 10^{-14} C$
- c) $6,3 \times 10^{-14} C$
- d) $3,1 \times 10^{-11} C$
- e) $1,0 \times 10^{-1} C$



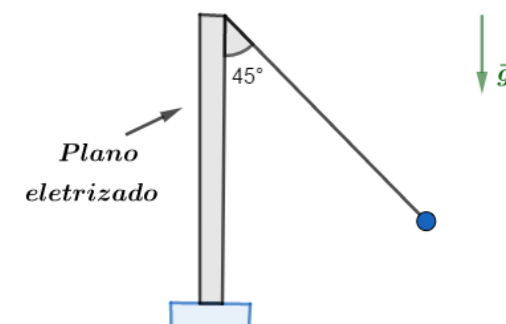
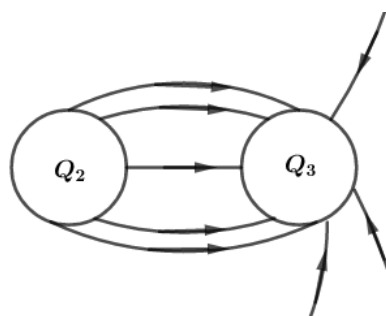
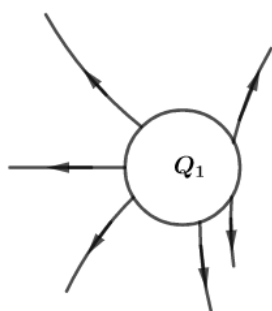
11.

Uma pequena esfera de peso $P = 5,0 \times 10^{-2} N$, eletrizada com uma carga $q = +0,20 \mu C$, está suspensa por um fio isolante bastante leve, que na posição de equilíbrio forma um ângulo de 45° com um plano vertical uniformemente eletrizado com densidade superficial σ . Qual é o módulo da densidade superficial de cargas σ ?

Dado: permissividade absoluta do meio: $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} (SI)$.

12.

Determine Q_1 e Q_3 sabendo que $Q_2 = +15 \mu C$.

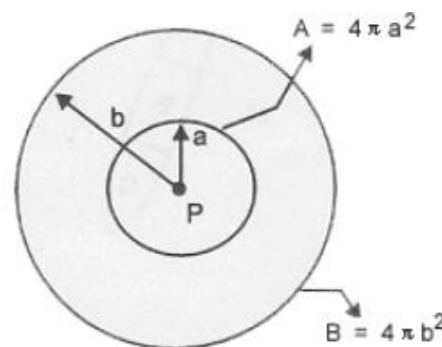


13. (ITA-1999)

Uma carga pontual P é mostrada na figura com duas superfícies gaussianas de raios a e $b = 2a$, respectivamente.

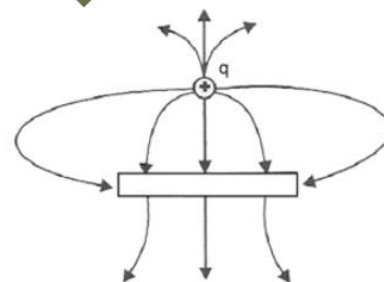
Sobre o fluxo elétrico que passa pelas superfícies de áreas A e B , pode-se concluir que:

- a) O fluxo elétrico que atravessa a área B é duas vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- b) O fluxo elétrico que atravessa a área B é a metade do fluxo elétrico que passa pela área A .
- c) O fluxo elétrico que atravessa a área B é $1/4$ do fluxo elétrico que passa pela área A .
- d) O fluxo elétrico que atravessa a área B é quatro vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- e) O fluxo elétrico que atravessa a área B é igual ao fluxo elétrico que atravessa a área A .



14. (ITA-2000)

A figura mostra uma carga elétrica puntiforme positiva q , próxima de uma barra de metal. O campo elétrico nas vizinhanças da carga puntiforme e da barra está representado pelas linhas de campo mostradas na figura. Sobre o módulo da carga da barra $|Q_{bar}|$, comparativamente ao módulo da carga puntiforme $|q|$, e sobre a carga líquida da barra Q_{bar} , respectivamente, pode-se concluir que:



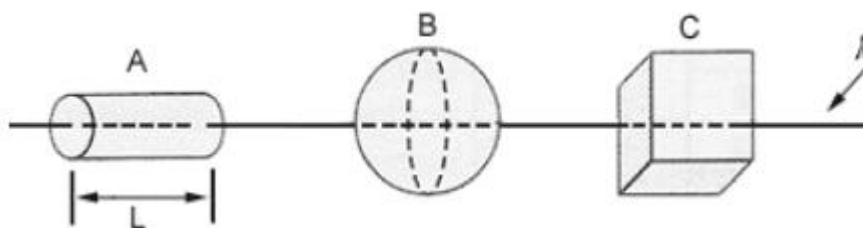
- a) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} > 0$ b) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} < 0$
c) $|Q_{bar}| = |q|$ e $Q_{bar} = 0$ d) $|Q_{bar}| > |q|$ e $Q_{bar} < 0$
e) $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} > 0$

15. (ITA-2000)

Um fio de densidade linear λ de carga positiva atravessa três superfícies fechadas A, B e C, de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento L = diâmetro de B = comprimento de um lado de C, e que o raio da base de A é a metade do raio da esfera B.

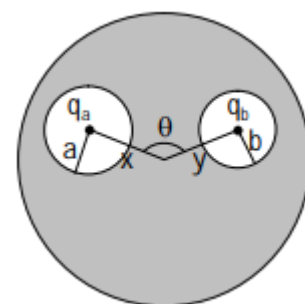
Sobre o fluxo do campo elétrico, ϕ , através de cada superfície fechada, pode-se concluir que:

- a) $\phi_A = \phi_B = \phi_C$
b) $\phi_A > \phi_B > \phi_C$
c) $\phi_A < \phi_B < \phi_C$
d) $\frac{\phi_A}{2} = \phi_B = \phi_C$
e) $\phi_A = 2\phi_B = \phi_C$



16. (ITA – 2010)

Uma esfera condutora de raio R possui no seu interior duas cavidades esféricas, de raio a e b , respectivamente, conforme mostra a figura. No centro de uma cavidade há uma carga pontual q_a e no centro da outra, uma carga também pontual q_b , cada qual distando do centro da esfera condutora de x e y , respectivamente. É correto afirmar que:



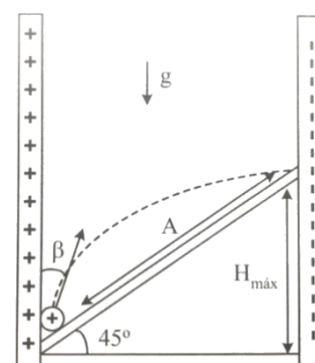
- A) a força entre as cargas q_a e q_b é $k_0 q_a q_b / (x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta)$.
B) a força entre as cargas q_a e q_b é nula.
C) não é possível determinar a força entre as cargas, pois não há dados suficientes.
D) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , esta não sentiria força alguma.
E) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , a força entre q_a e q_b seria alterada.

17.

V_0 , como na figura abaixo, sob a ação do campo elétrico das placas e do campo gravitacional (g) da terra. Determine o ângulo β para que a esfera atinja a altura máxima ($H_{\text{máx}}$) ao longo do plano inclinado. Determine $H_{\text{máx}}$. Dados:

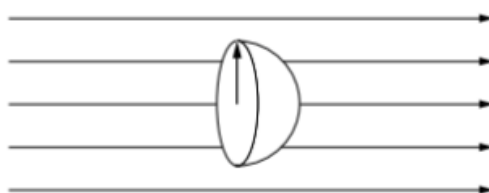
$$\sigma = 7,08 \times 10^{-6} \text{ C/m}^2 ; g = 10 \text{ m/s}^2 ; Q = +2\mu\text{C} ; M = 160 \text{ g}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2 ; V_0 = 10 \text{ m/s}.$$



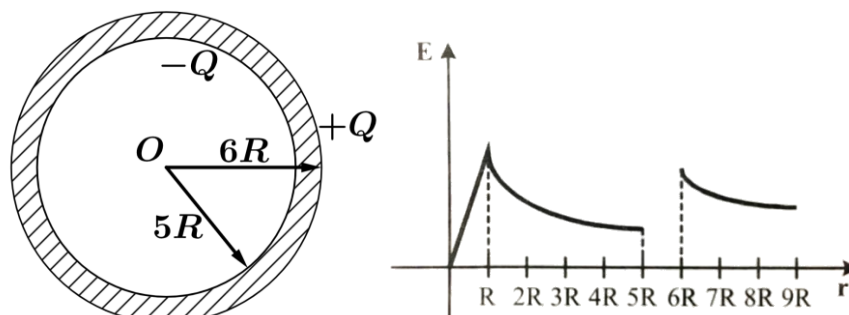
18.

Determine o fluxo através da superfície hemisférica de raio r imersa num campo elétrico uniforme \vec{E} .



19.

Utilizando a Lei de Gauss, mostre que a variação do campo elétrico com a distância ao centro do sistema abaixo é dada pelo gráfico:

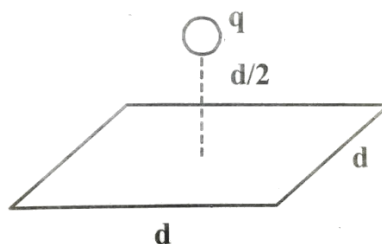


Suponha que a esfera seja metálica e que a carga Q interna seja distribuída uniformemente em uma esfera de raio R .

Qual mudança haveria no gráfico se a casca esférica de espessura R fosse isolante com carga uniformemente distribuída?

20.

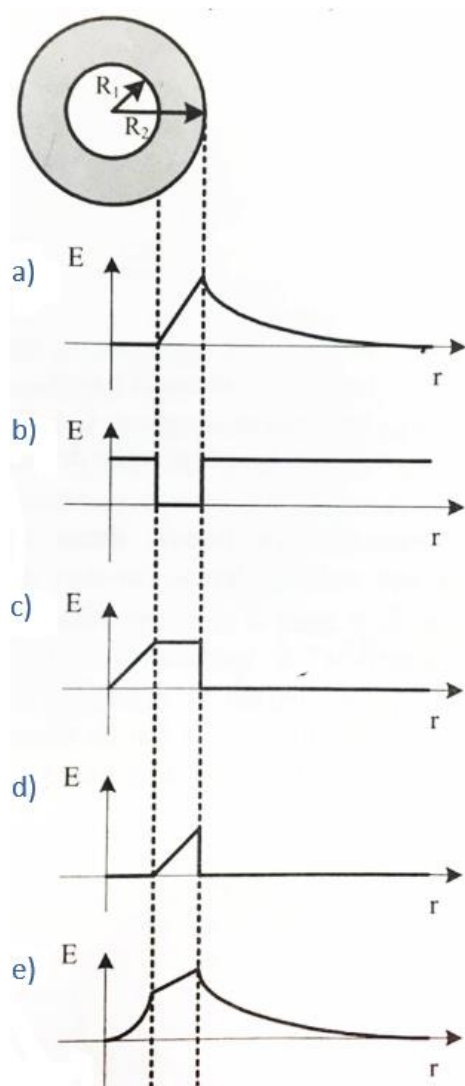
Uma carga pontual $+q$ está a uma distância $d/2$ de uma superfície quadrada de lado d e encontra-se diretamente acima do centro do quadrado, como na figura:



Determine o fluxo elétrico que passa através do quadrado.

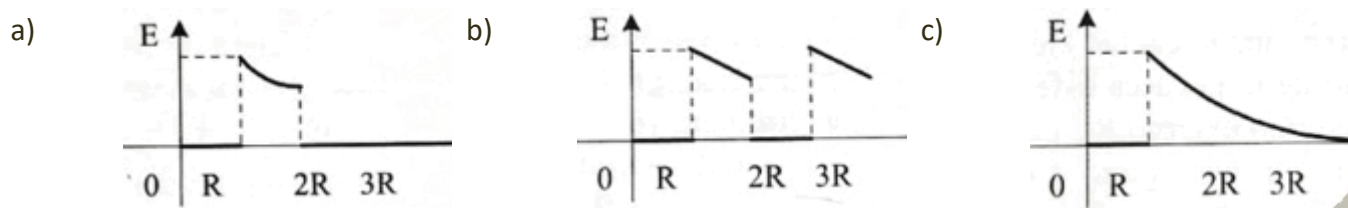
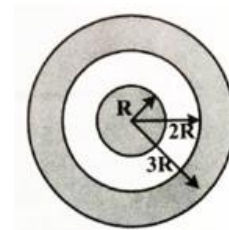
21.

Uma camada esférica isolante de raio interno R_1 e raio externo R_2 , conforme mostra a figura, é eletrizada uniformemente. O gráfico que melhor representa a variação do campo elétrico $|\vec{E}|$, ao longo de uma direção radial, é:

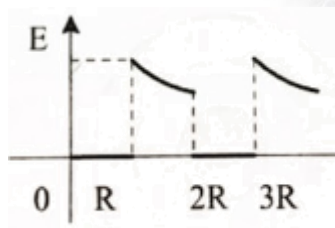


22. (PUC – SP)

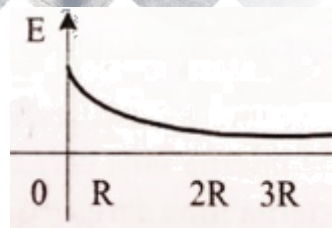
Sabendo que a esfera oca representada na figura está isolada e sua carga total é nula, escolha, dos gráficos a seguir, o que melhor representa a intensidade do campo elétrico \vec{E} em função em distância r ao centro comum. Tanto a esfera oca como a esfera maciça que estão em seu interior são condutoras. A esfera maciça está eletrizada.



d)



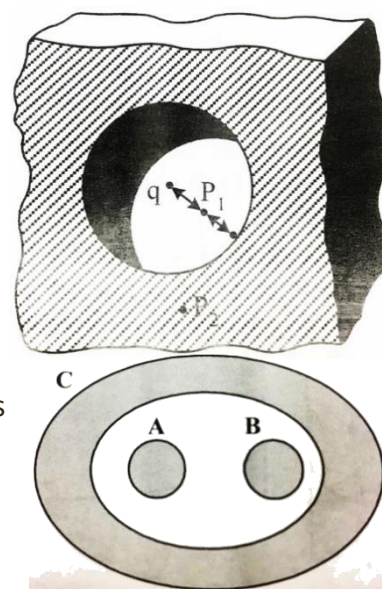
e)



23.

A figura mostra uma carga pontual de $1,0 \times 10^{-7} C$, no centro de uma cavidade esférica de raio igual a $3,0 \text{ cm}$ existente num pedaço de metal. Utilizando a Lei de Gauss, obtenha o valor do campo elétrico para:

- um ponto P_1 no meio da distância que vai do centro da cavidade à superfície.
- no ponto P_2 .

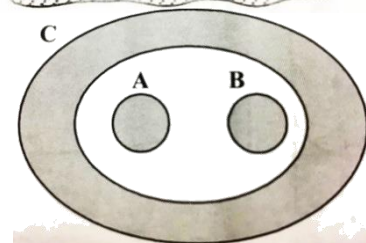


24.

Dadas as esferas A e B colocadas dentro de uma casca esférica C, todas metálicas, em equilíbrio eletrostático. Sabendo que as esferas têm cargas $+2q$, $+3q$ e $+4q$, respectivamente.

Determine:

- a carga total na superfície interna de C.
- a carga total na superfície externa de C.
- comente sobre a distribuição de cargas nas superfícies.

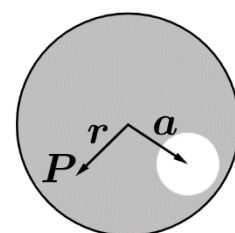


25.

Uma região esférica está uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ . Seja \vec{r} o vetor que vai do centro da esfera até um ponto genérico P no interior da esfera.

- mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r}$.

- uma cavidade esférica é aberta na esfera, como nos mostra a figura. Usando conceitos de superposição, mostre que o campo elétrico, em todos os pontos no interior da cavidade, é $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{a}$ (campo uniforme), onde \vec{a} é o vetor que vai do centro da esfera ao centro da cavidade. Note que ambos os resultados são independentes dos raios da esfera e da cavidade. Observe que o campo será uniforme apenas na cavidade.



GABARITO



6. Gabarito sem comentários

1. C
2. C
3. B
4. C
5. A
6. E
7. B
8. C
9. E
10. B
11. $4,4 \mu C/m^2$
12. $Q_1 = 18 \mu C$ e $Q_3 = 24 \mu C$
13. E
14. B
15. A
16. B
17. $\beta = 0$ e $H_{m\acute{a}x} = 5 m$
18. nulo
19. ver gráfico
20. $\phi = + \frac{q}{6\epsilon_0}$
21. A
22. D
23. a) $4 \times 10^6 N/C$ e b) zero
24. a) $-5q$ b) $+9q$ c) não-uniforme em todas as superfícies
25. a) $\frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$ b) $\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}$

ESCLARECENDO!



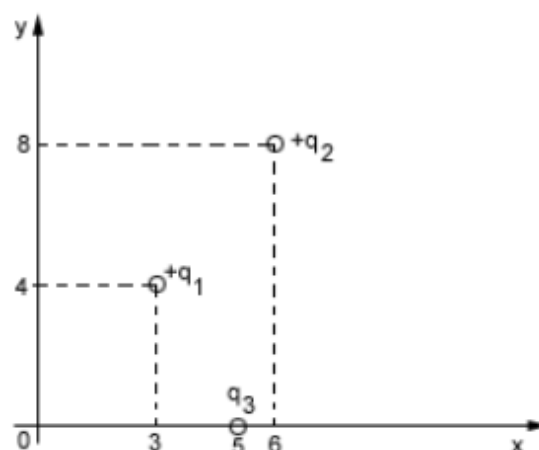
7. Lista de questões comentadas

1. (ITA-1975)

Três cargas q_1 e q_2 (iguais e positivas) e q_3 , estão dispostas conforme a figura. Calcule a relação entre q_3 e q_1 para que o campo elétrico na origem do sistema seja paralelo a y .

- a) $-\frac{5}{4}$
- b) $\frac{5\sqrt{2}}{8}$
- c) $-\frac{3}{4}$
- d) $\frac{4}{3}$

e) nenhuma das respostas anteriores.



Comentários:

Seja E o campo que q_1 exerce na origem. Como q_2 tem o mesmo módulo e o dobro da distância de q_1 à origem, seu campo será $\frac{E}{4}$. Seja θ o ângulo que o vetor posição de q_1 faz com o eixo x .

Para que não haja resultante na horizontal, devemos ter:

$$E_3 = \left(E + \frac{E}{4}\right) \cos \theta$$

$$\frac{k|q_3|}{5^2} = \frac{5}{4} \frac{kq_1}{5^2} \frac{3}{5} \Rightarrow |q_3| = \frac{3}{4} q_1$$

Como a força deve ser de atração, temos:

$$q_3 = -\frac{3}{4} q_1$$

Gabarito: C

2. (ITA-1985)

Considere um campo eletrostático cujas linhas de força são curvilíneas. Uma pequena carga de prova, cujo efeito sobre o campo é desprezível, é abandonada num ponto do mesmo, no qual a

intensidade do vetor campo elétrico é diferente de zero. Sobre o movimento ulterior dessa partícula podemos afirmar que:

- a) Não se moverá porque o campo é eletrostático.
- b) Percorrerá necessariamente uma linha de força.
- c) Não percorrerá uma linha de força.
- d) Percorrerá necessariamente uma linha reta.
- e) Terá necessariamente um movimento oscilatório.

Comentários:

Uma linha de força gera força na partícula apenas na sua direção. Para que a partícula descreva a trajetória curvilínea de qualquer linha de força, precisaria sentir uma resultante centrípeta perpendicular a essa trajetória, o que é impossível.

Gabarito: C

3. (ITA-1991)

Em uma região do espaço onde existe um campo elétrico uniforme \vec{E} , dois pêndulos simples de massas $m = 0,20 \text{ kg}$ e comprimento L são postos a oscilar. A massa do primeiro pêndulo está carregada com $q_1 = 0,20 \text{ C}$ e a massa do segundo pêndulo com $q_2 = -0,20 \text{ C}$. São dados que a aceleração da gravidade local é $g = 10,0 \text{ m/s}^2$, que o campo elétrico tem mesma direção e mesmo sentido que \vec{g} e sua intensidade é $E = 6,0 \text{ V/m}$. A razão (p_1/p_2), entre os períodos p_1 e p_2 dos pêndulos 1 e 2, é:

- a) $\frac{1}{4}$
- b) $\frac{1}{2}$
- c) 1
- d) 2
- e) 4

Comentários:

Calculando a gravidade aparente para os pêndulos:

$$g_{apa,1} = g + \frac{q_1 E}{m} \quad (eq. 1)$$

$$g_{apa,2} = g - \frac{q_2 E}{m} \quad (eq. 2)$$

Lembre-se que o período de oscilação de um pêndulo é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Assim, temos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{g - \frac{q_2 E}{m}}{g + \frac{q_1 E}{m}}}$$

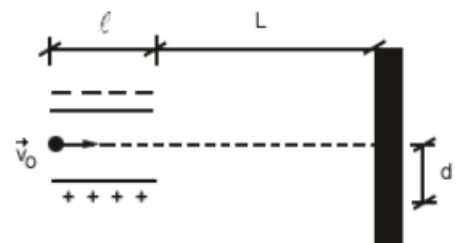
Substituindo os valores mencionado no enunciado, temos:

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{10 - 6}{10 + 6}} = \frac{1}{2}$$

Gabarito: B

4. (ITA-1993)

Duas placas planas e paralelas, de comprimento l , estão carregadas e servem como controladoras de elétrons em um tubo de raios catódicos. A distância das placas até a tela do tubo é L . Um feixe de elétrons (cada um de massa m e carga elétrica de módulo e) penetra entre as placas com uma velocidade v_0 , como mostra a figura. Qual é a intensidade do campo elétrico entre as placas se o deslocamento do feixe na tela do tubo é igual a d ?



a) $E = \frac{mv_0^2 d}{el\left(L - \frac{l}{2}\right)}$

b) $E = \frac{mv_0^2}{el\left(L + \frac{l}{2}\right)}$

c) $E = \frac{mv_0^2 d}{el\left(L + \frac{l}{2}\right)}$

d) $E = \frac{mv_0^2 d}{el\left(mL + \frac{l}{2}\right)}$

e) $E = \frac{mv_0^2 d}{el\left(mL - \frac{l}{2}\right)}$

Comentários:

Calculando a aceleração dos elétrons no tubo:

$$F = ma \Rightarrow a = -\frac{Ee}{m}$$

O movimento horizontal tem velocidade constante, logo:

$$v_0 = \frac{l}{t_{tubo}} \Rightarrow t_{tubo} = \frac{l}{v_0} \quad (eq. 1)$$

A distância vertical que percorrem, enquanto ainda se encontram no tubo, é dada por:

$$y_{tubo} = \frac{at_{tubo}^2}{2} = \frac{\left(-\frac{Ee}{m}\right)t_{tubo}^2}{2} \quad (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), temos:

$$y_{tubo} = -\frac{Eel^2}{2mv_0^2} \quad (eq. 3)$$

Após sair do tubo os elétrons se movem com velocidade constante. Calculando sua velocidade vertical nesse momento:

$$v_y = v_{y_0} + at = 0 - \frac{Ee}{m} t_{tubo} \Rightarrow v_y = -\frac{Eel}{mv_0}$$

Após sair do tubo os elétrons manterão a velocidade calculada acima:

$$\frac{y_{após}}{t_{após}} = -\frac{Eel}{mv_0} \quad (eq. 4)$$

Os elétrons também possuem velocidade horizontal constante após saírem do tubo, assim:

$$t_{após} = \frac{L}{v_0} \quad (eq. 5)$$

Substituindo (5) em (4), temos:

$$y_{após} = -\frac{EelL}{mv_0^2} \quad (eq. 6)$$

A distância vertical total percorrida pelos elétrons é dada pelo enunciado:

$$y_{tubo} + y_{após} = -d \quad (eq. 7)$$

Substituindo (3) e (6) em (7), obtemos:

$$\frac{Eel}{mv_0^2} \left(\frac{l}{2} + L \right) = d \Rightarrow E = \frac{mv_0^2 d}{el \left(\frac{l}{2} + L \right)}$$

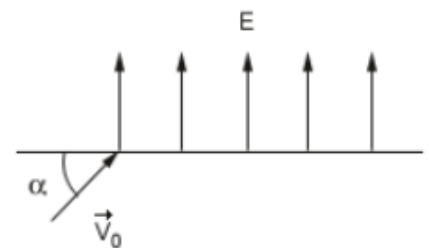
Gabarito: C

5. (ITA-1994)

Numa região onde existe um campo elétrico uniforme $E = 1,0 \times 10^2 \text{ N/C}$ dirigido verticalmente para cima, penetra um elétron com velocidade inicial $v_0 = 4,0 \times 10^5 \text{ m/s}$, seguindo uma direção que faz um ângulo de 30° com a horizontal, como mostra a figura.

Sendo a massa do elétron $9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ e a carga do elétron $-1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, podemos afirmar que:

- O tempo de subida do elétron será $1,14 \times 10^{-8} \text{ s}$.
- O alcance horizontal do elétron será $5,0 \cdot 10^{-1} \text{ m}$.
- A aceleração do elétron será $2,0 \text{ m/s}^2$.
- O elétron será acelerado continuamente para cima até escapar do campo elétrico.
- O ponto mais elevado alcançado pelo elétron será $5,0 \times 10^{-1} \text{ m}$.



Comentários:

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ ao elétron, temos:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{Ee}{m} \hat{y} - g\hat{y}$$

$$\vec{a} = \left(\frac{-1,6 \cdot 10^{-17}}{9,1 \cdot 10^{-31}} - 10 \right) \hat{y}$$

$$\vec{a} \approx -1,76 \cdot 10^{13} \text{ m/s}^2 \hat{y}$$

Como o movimento vertical do elétron tem aceleração constante, podemos escrever:

$$v_y = v_{0y} + at$$

$$0 = v_0 \sin \alpha - 1,76 \cdot 10^{13} \cdot t_{\text{subida}}$$

$$t_{\text{subida}} \approx 1,14 \cdot 10^{-8} \text{ s}$$

Gabarito: A

6. (ITA-1995)

Um pêndulo simples é construído com uma esfera metálica de massa $m = 1,0 \times 10^{-4} \text{ kg}$, carregada com uma carga elétrica $q = 3,0 \times 10^{-5} \text{ C}$ e um fio isolante de comprimento $L = 1,0 \text{ m}$, de massa desprezível. Este pêndulo oscila com período P num local onde $g = 10,0 \text{ m/s}^2$. Quando um campo elétrico uniforme e constante \vec{E} é aplicado verticalmente em toda a região do pêndulo o seu período dobra de valor. A intensidade E do campo elétrico é de:

- a) $6,7 \times 10^3 \text{ N/C}$. b) 42 N/C . c) $6,0 \times 10^{-6} \text{ N/C}$.
d) 33 N/C . e) 25 N/C .

Comentários:

O período de um pêndulo simples é dado por:

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Calculando a gravidade aparente do problema:

$$g_{\text{apa}} = g - \frac{Eq}{m}$$

Logo, a razão entre os períodos pode ser escrita como:

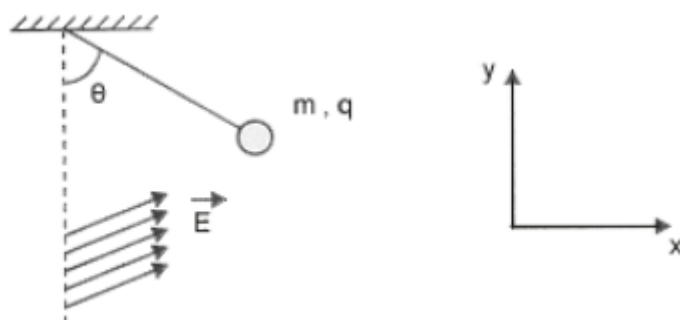
$$\frac{P_f}{P_0} = \frac{2\pi \sqrt{\frac{l}{g_{\text{apa}}}}}{2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}} = \sqrt{\frac{g}{g - \frac{Eq}{m}}} = 2$$

$$\frac{Eq}{m} = \frac{3g}{4} \Rightarrow E = \frac{3mg}{4q} = 25 \text{ N/C}$$

Gabarito: E

7. (ITA-1999)

Uma esfera homogênea de carga q e massa m de $2g$ está suspensa por um fio de massa desprezível em um campo elétrico uniforme cujas componentes em x e y têm intensidades $E_x = \sqrt{3} \times 10^5 \text{ N/C}$ e $E_y = 1 \times 10^5 \text{ N/C}$, respectivamente, como mostra a figura.



Considerando que a esfera está em equilíbrio para $\theta = 60^\circ$, qual é a intensidade da força de tração no fio?

Considere $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a) $9,80 \times 10^{-3} \text{ N}$.

b) $1,96 \times 10^{-2} \text{ N}$.

c) Nula.

d) $1,70 \times 10^{-3} \text{ N}$.

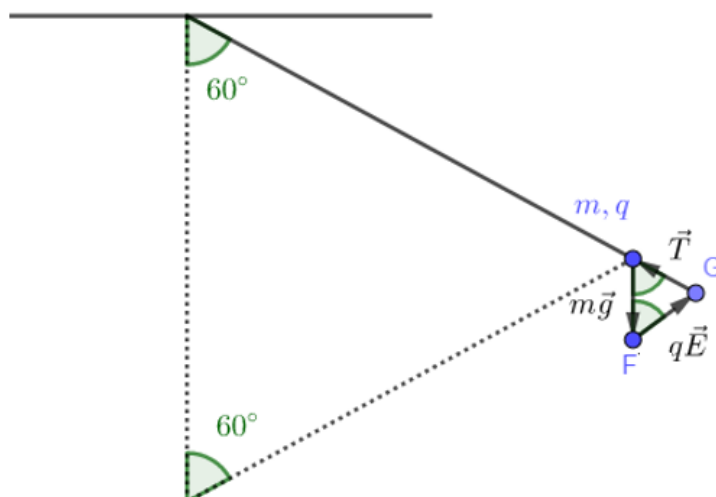
e) $7,17 \times 10^{-3} \text{ N}$.

Comentários:

Calculando o ângulo do vetor campo elétrico com a vertical:

$$\tan \alpha = \frac{E_x}{E_y} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

Observe o esquema das forças agindo na esfera:



Como a partícula está em equilíbrio a soma vetorial das forças agindo sobre ela deve resultar em um polígono fechado. (Como são três, é um triângulo)

Note que o triângulo mostrado na figura é equilátero, logo:

$$T = mg = 2 \cdot 10^{-3} \cdot 9,8 = 1,96 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

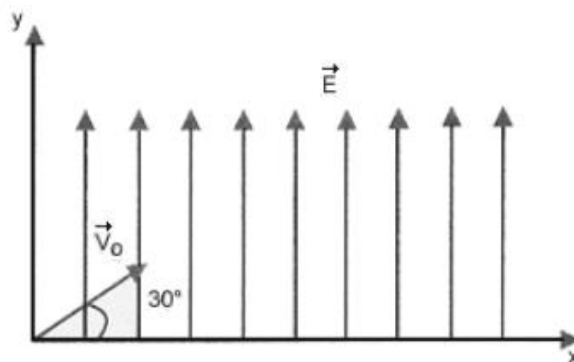
Gabarito: B

8. (ITA-1999)

No instante $t = 0$ s, um elétron é projetado em um ângulo de 30° em relação ao eixo x , com velocidade v_0 de 4×10^5 m/s, conforme o esquema abaixo.

A massa do elétron é $9,11 \times 10^{-31}$ kg e a sua carga elétrica é igual a $-1,6 \times 10^{-19}$ C. Considerando que o elétron se move num campo elétrico constante $E = 100$ N/C, o tempo que o elétron levará para cruzar novamente o eixo x é de:

- a) 10 ns. b) 15 ns. c) 23 ns.
d) 12 ns. e) 18 ns.



Comentários:

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ ao elétron, temos:

$$q\vec{E} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{-100 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{9,11 \cdot 10^{-31}} \hat{y} - 10 \hat{y} \approx -1,76 \cdot 10^{13} \hat{y} \text{ m/s}^2$$

Como o movimento vertical tem aceleração constante, podemos escrever:

$$v_y = v_{0y} + at$$

Quando a partícula cruza o eixo horizontal novamente sua velocidade vertical deve ser a mesma, com sentido invertido:

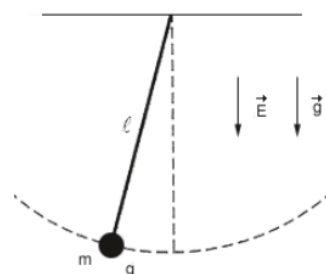
$$-v_{0y} = v_{0y} + at_{voo}$$

$$t_{voo} = \frac{2v_0 \sin 30^\circ}{-a} = \frac{4 \cdot 10^5}{1,76 \cdot 10^{13}} \approx 22,7 \text{ ns}$$

Gabarito: C

9. (ITA-2005)

Considere um pêndulo de comprimento l , tendo na sua extremidade uma esfera de massa m com uma carga positiva q . A seguir, esse pêndulo é colocado num campo elétrico uniforme \vec{E} que atua na mesma direção e sentido da aceleração da gravidade \vec{g} . Deslocando-se essa carga ligeiramente de sua posição de equilíbrio e soltando-a, ela executa um movimento harmônico simples, cujo período é:



a) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$
 $T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{gE}}$

b) $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g+q}}$

c)

$$d) T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg - qE}}$$

$$e) T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}$$

Comentários:

Calculando a gravidade aparente para o movimento:

$$g_{apa} = g + \frac{F_{eletrica}}{m} = g + \frac{qE}{m}$$

Lembrando da expressão para o período de um pêndulo simples:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Devemos substituir a gravidade pela gravidade aparente do movimento considerado:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml}{mg + qE}}$$

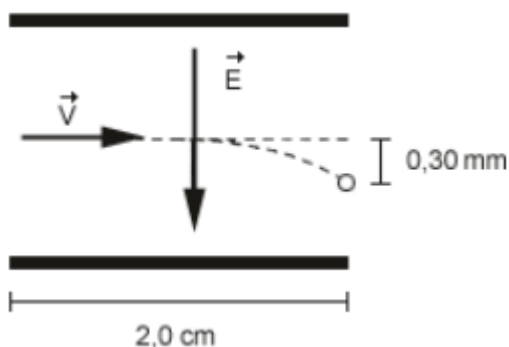
Gabarito: E

10. (ITA-2005)

Em uma impressora a jato de tinta, gotas de certo tamanho ejetadas de um pulverizador em movimento, passam por uma unidade eletrostática onde perdem alguns elétrons, adquirindo uma carga q , e, a seguir, deslocam-se no espaço entre placas planas paralelas eletricamente carregadas, pouco antes da impressão. Considere gotas de raio $10 \mu m$ lançadas com velocidade de módulo $v = 20 m/s$ entre as placas de comprimento igual a $2,0 cm$, no interior das quais existe um campo elétrico uniforme de módulo $E = 8,0 \times 10^4 N/C$, como mostra a figura.

Considerando que a densidade da gota seja $1000 kg/m^3$ e sabendo-se que a mesma sofre um desvio de $0,30 mm$ ao atingir o final do percurso, o módulo de sua carga elétrica é de:

- a) $2,0 \times 10^{-14} C$
- b) $3,1 \times 10^{-14} C$
- c) $6,3 \times 10^{-14} C$
- d) $3,1 \times 10^{-11} C$
- e) $1,0 \times 10^{-1} C$



Comentários:

Calculando a massa da gota:

$$m = \rho_{agua} V = 10^3 \cdot \frac{4}{3} \pi (10^{-5})^3 = \frac{4}{3} \pi 10^{-12} kg$$

Aplicando $\vec{F} = m\vec{a}$ à partícula, temos;

$$q\vec{E} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{qE}{m}\hat{y}$$

Perceba que a partícula sofre uma aceleração vertical constante e horizontal nula, de modo idêntico a um lançamento horizontal. A equação da parábola para um lançamento horizontal é dada por:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2}$$

Basta substituímos a aceleração da gravidade pela aceleração encontrada no movimento acima:

$$y = -\frac{\left(\frac{qE}{m}\right)x^2}{2v_0^2}$$

O desvio total ocorrerá em $x = l_{placa} = 2 \text{ cm}$:

$$3 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{2} \frac{(q \cdot 8 \cdot 10^4)}{\left(\frac{4}{3}\pi 10^{-12}\right) \cdot (20)^2} \cdot 4 \cdot 10^{-4} \Rightarrow q = \pi \cdot 10^{-14} \text{ C}$$

Gabarito: B

11.

Uma pequena esfera de peso $P = 5,0 \times 10^{-2} \text{ N}$, eletrizada com uma carga $q = +0,20 \mu\text{C}$, está suspensa por um fio isolante bastante leve, que na posição de equilíbrio forma um ângulo de 45° com um plano vertical uniformemente eletrizado com densidade superficial σ . Qual é o módulo da densidade superficial de cargas σ ?

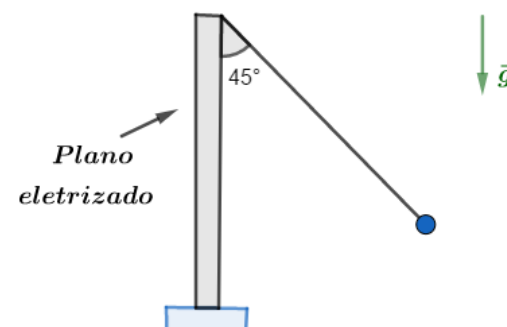
Dado: permissividade absoluta do meio: $\epsilon = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ (SI)}$.

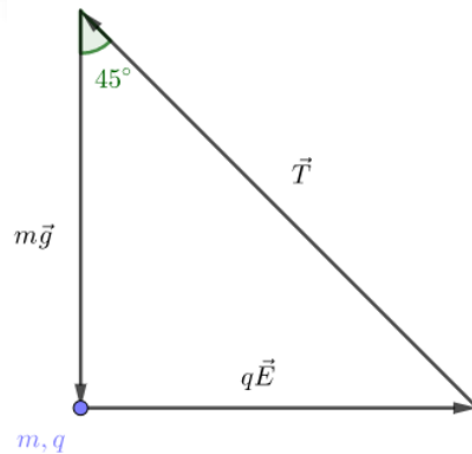
Comentários:

Considere a distância da esfera ao plano muito menor que sua extensão. Sabemos que o campo de um plano infinito é perpendicular ao mesmo e tem intensidade:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Logo, na questão teremos as seguintes forças agindo na partícula:



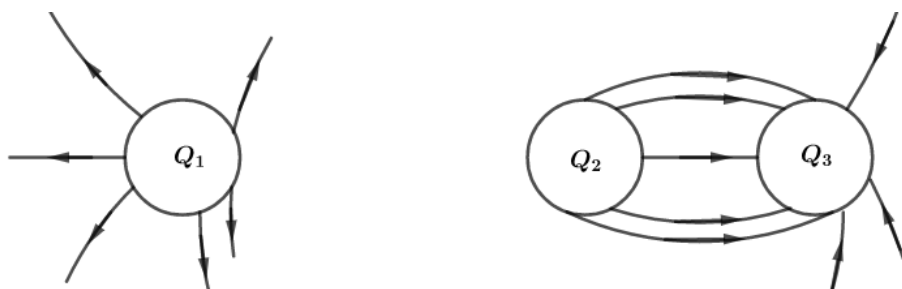


$$qE = P \Rightarrow \sigma = \frac{2\varepsilon_0 P}{q} \Rightarrow \sigma \cong 4,4 \frac{\mu C}{m^2}$$

Gabarito: $4,4 \mu C/m^2$

12.

Determine Q_1 e Q_3 sabendo que $Q_2 = +15\mu C$.



Comentários:

Consideraremos o valor do fluxo elétrico como proporcional ao número de linhas desenhadas. Usando a Lei de Gauss, com uma gaussiana encobrindo Q_3 :

$$\phi_3 = \frac{Q_3}{\varepsilon_0}$$

Do mesmo, para Q_1 e Q_2 , temos:

$$\phi_1 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0} \text{ e } \phi_2 = \frac{Q_2}{\varepsilon_0}$$

Tirando as razões das equações acima, obtemos:

$$\frac{\phi_3}{\phi_2} = \frac{Q_3}{Q_2} = -\frac{8}{5} \Rightarrow Q_3 = -24\mu C$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{6}{5} \Rightarrow Q_1 = 18\mu C$$

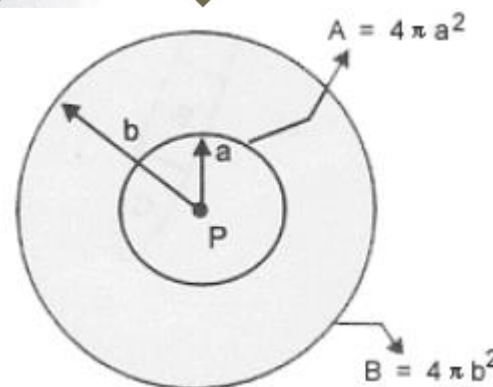
Gabarito: $Q_1 = 18 \mu C$ e $Q_3 = 24 \mu C$

13. (ITA-1999)

Uma carga pontual P é mostrada na figura com duas superfícies gaussianas de raios a e $b = 2a$, respectivamente.

Sobre o fluxo elétrico que passa pelas superfícies de áreas A e B , pode-se concluir que:

- O fluxo elétrico que atravessa a área B é duas vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- O fluxo elétrico que atravessa a área B é a metade do fluxo elétrico que passa pela área A .
- O fluxo elétrico que atravessa a área B é $1/4$ do fluxo elétrico que passa pela área A .
- O fluxo elétrico que atravessa a área B é quatro vezes maior que o fluxo elétrico que passa pela área A .
- O fluxo elétrico que atravessa a área B é igual ao fluxo elétrico que atravessa a área A .



Comentários:

Pela Lei de Gauss, aplicando em uma gaussiana qualquer Ω , temos:

$$\Phi_{\Omega, E} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

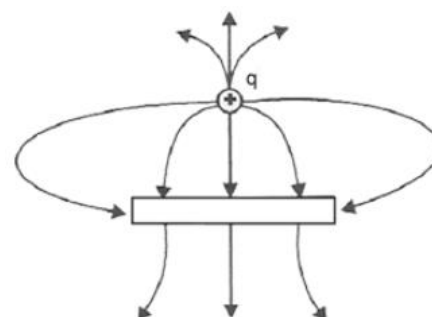
Como temos a mesma carga interna para ambas as superfícies consideradas na questão, devemos ter também o **mesmo** fluxo.

Gabarito: E

14. (ITA-2000)

A figura mostra uma carga elétrica puntiforme positiva q , próxima de uma barra de metal. O campo elétrico nas vizinhanças da carga puntiforme e da barra está representado pelas linhas de campo mostradas na figura. Sobre o módulo da carga da barra $|Q_{\text{bar}}|$, comparativamente ao módulo da carga puntiforme $|q|$, e sobre a carga líquida da barra Q_{bar} , respectivamente, pode-se concluir que:

- $|Q_{\text{bar}}| > |q|$ e $Q_{\text{bar}} > 0$
- $|Q_{\text{bar}}| < |q|$ e $Q_{\text{bar}} < 0$
- $|Q_{\text{bar}}| = |q|$ e $Q_{\text{bar}} = 0$
- $|Q_{\text{bar}}| > |q|$ e $Q_{\text{bar}} < 0$
- $|Q_{\text{bar}}| < |q|$ e $Q_{\text{bar}} > 0$



Comentários:

Consideraremos a intensidade do fluxo do campo elétrico proporcional ao número de linhas atravessando a gaussiana considerada.

Usando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω_1 encobrindo a carga q (sem encobrir a barra ou passar por dentro dela):

$$\Phi_{\Omega_1} = 7k = \frac{q}{\epsilon_0}$$

Em que k é uma constante positiva. Usando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω_2 encobrindo a barra (sem encobrir a carga q) :

$$\Phi_{\Omega_2} = (3 - 4)k = -k = \frac{Q_{bar}}{\epsilon_0}$$

Das expressões acima temos: $|Q_{bar}| < |q|$ e $Q_{bar} < 0$

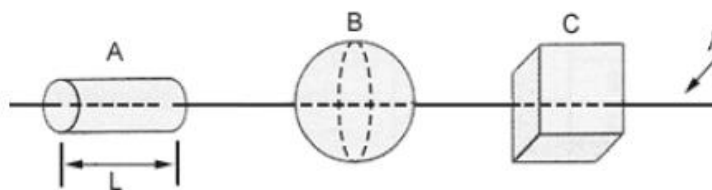
Gabarito: B

15. (ITA-2000)

Um fio de densidade linear λ de carga positiva atravessa três superfícies fechadas A, B e C, de formas respectivamente cilíndrica, esférica e cúbica, como mostra a figura. Sabe-se que A tem comprimento L = diâmetro de B = comprimento de um lado de C, e que o raio da base de A é a metade do raio da esfera B.

Sobre o fluxo do campo elétrico, ϕ , através de cada superfície fechada, pode-se concluir que:

- a) $\phi_A = \phi_B = \phi_C$
- b) $\phi_A > \phi_B > \phi_C$
- c) $\phi_A < \phi_B < \phi_C$
- d) $\frac{\phi_A}{2} = \phi_B = \phi_C$
- e) $\phi_A = 2\phi_B = \phi_C$



Comentários:

Pela Lei de Gauss sabemos que o fluxo é proporcional a quantidade de carga dentro da superfície Ω :

$$\Phi_{\Omega,E} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

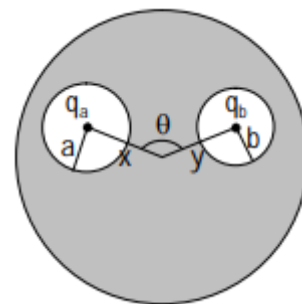
$$\Phi_A = \frac{L\lambda}{\epsilon_0}; \Phi_B = \frac{D_B\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A; \Phi_C = \frac{a_C\lambda}{\epsilon_0} = \frac{L\lambda}{\epsilon_0} = \Phi_A$$

Gabarito: A

16. (ITA – 2010)

Uma esfera condutora de raio R possui no seu interior duas cavidades esféricas, de raio a e b , respectivamente, conforme mostra a figura. No centro de uma cavidade há uma carga pontual q_a e no centro da outra, uma carga também pontual q_b , cada qual distando do centro da esfera condutora de x e y , respectivamente. É correto afirmar que:

- A) a força entre as cargas q_a e q_b é $k_0 q_a q_b / (x^2 + y^2 - 2xy \cos \theta)$.
- B) a força entre as cargas q_a e q_b é nula.



- C) não é possível determinar a força entre as cargas, pois não há dados suficientes.
- D) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , esta não sentiria força alguma.
- E) se nas proximidades do condutor houvesse uma terceira carga, q_c , a força entre q_a e q_b seria alterada.

Comentários:

No equilíbrio o condutor possui potencial uniforme e, portanto, campo nulo em seu interior. Como não há linhas de campo no interior do condutor, uma linha de campo começando na cavidade de raio a nunca alcançara a cavidade de raio b .

Do mesmo modo uma linha de campo começando fora do condutor nunca alcançará as cavidades, logo as cargas não sofrem forças já que as únicas linhas de campo dentro das cavidades são as linhas devidas aos seus próprios campos.

Pela Lei de Gauss chegamos ao resultado que a carga de indução na superfície interna das cavidades deve ser menos aquela carga no interior da cavidade. Assim, por conservação de carga, temos:

$$q_{\text{condutor},A} + q_{\text{condutor},B} + q_{\text{condutor},\text{ext}} = 0$$

$$q_{\text{condutor},\text{ext}} = q_a + q_b$$

Logo uma carga externa sentirá uma força devido a uma esfera carregada com a carga acima.

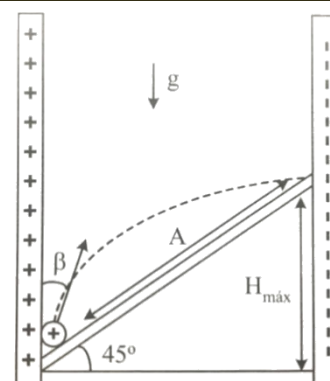
Gabarito: B

17.

V_0 , como na figura abaixo, sob a ação do campo elétrico das placas e do campo gravitacional (g) da terra. Determine o ângulo β para que a esfera atinja a altura máxima ($H_{\text{máx}}$) ao longo do plano inclinado. Determine $H_{\text{máx}}$.

Dados:

$$\sigma = 7,08 \times \frac{10^{-6} \text{C}}{\text{m}^2}; g = 10 \text{ m/s}^2; Q = +2\mu\text{C}; M = 160 \text{ g}; \varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2; V_0 = 10 \text{ m/s}.$$



Comentários:

Logo H_{max} acontecerá quando a amplitude ao longo do plano também for máxima.

Vamos trabalhar com o Princípio da Independência dos Movimentos e calcular a aceleração horizontal devido a ação da força elétrica. Notamos que o campo elétrico entre as duas placas é dado por:

$$\vec{E}_{\text{Res}} = \vec{E}_+ + \vec{E}_- \Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\varepsilon} + \frac{\sigma}{2\varepsilon} = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Logo, temos que:

$$F_R = m \cdot a$$

$$q \cdot E = m \cdot a_H \Rightarrow a_H = \frac{q\sigma}{m\varepsilon}$$

Substituindo valores, vem:

$$a_H = \frac{2 \times 10^{-6} \cdot 7,08 \times 10^{-6}}{160 \times 10^{-3} \cdot 8,85 \times 10^{-12}} \Rightarrow a_H = 10 \text{ m/s}^2$$

Notamos que a aceleração horizontal é igual a aceleração da gravidade. Portanto, a distância percorrida na horizontal será a mesma distância percorrida na vertical, dado o ângulo de 45° .

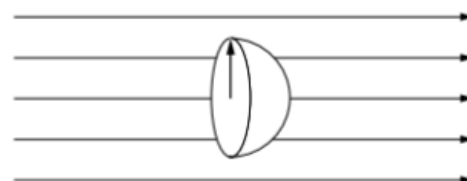
Dessa forma, basta olhar o movimento na vertical. Sabemos da cinemática que um objeto a máxima altura quando lançado na vertical, isto é, $\beta = 0$. Por Torricelli, temos que:

$$H_{\text{máx}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5 \text{ m}$$

Gabarito: $\beta = 0$ e $H_{\text{máx}} = 5 \text{ m}$

18.

Determine o fluxo através da superfície hemisférica de raio r imersa num campo elétrico uniforme \vec{E} .



Comentários:

Forme uma gaussiana Ω tampando o hemisfério com um círculo de raio r . Aplicando a Lei de Gauss a Ω , obtemos:

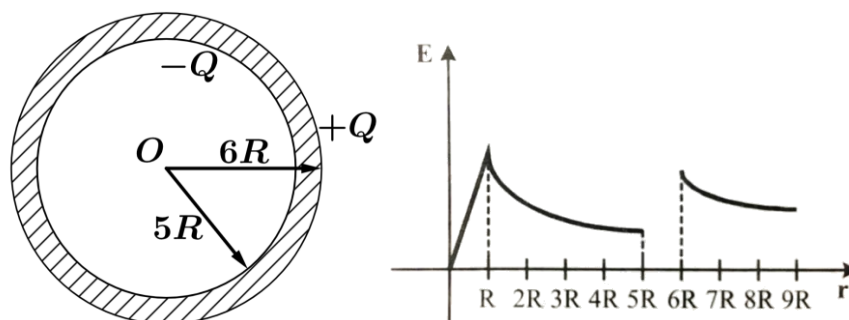
$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = \frac{q_{\text{interna}}}{\varepsilon_0} = 0$$

Logo, o fluxo é nulo. Podemos ver também que a quantidade de linhas que entram na superfície hemisférica é a mesma que saem da superfície. Como vimos, o fluxo total deve ser nulo.

Gabarito: *nula*

19.

Utilizando a Lei de Gauss, mostre que a variação do campo elétrico com a distância ao centro do sistema abaixo é dada pelo gráfico:



Suponha que a esfera seja metálica e que a carga Q interna seja distribuída uniformemente em uma esfera de raio R .

Qual mudança haveria no gráfico se a casca esférica de espessura R fosse isolante com carga uniformemente distribuída?

Comentários:

Usando a lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , temos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

Pela simetria do problema o campo elétrico deve ser radial.

Para $r < R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} = \frac{\left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) \frac{4}{3}\pi r^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{R^3} \text{ (linear)}$$

Para $R < r < 5R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Para $5R < r < 6R$ a superfície estará no interior do condutor, onde o campo é nulo.

Para $r > 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

Suponha agora uma distribuição uniforme de carga ρ_0 entre $5R$ e $6R$. O campo para $r < 5R$ continuaria o mesmo. (somente carga interna aparece na Lei de Gauss, no cálculo do campo elétrico)

Para $5R < r < 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\left(Q + \rho_0 \frac{4}{3}\pi(r^3 - (5R)^3)\right)}{\epsilon_0}$$

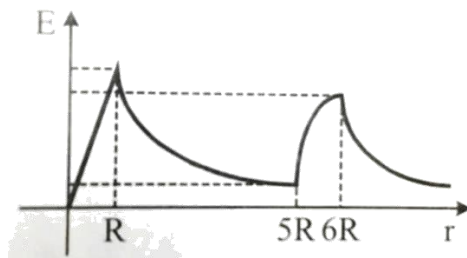
$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} + \frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} - \frac{125\rho_0 R^3}{3\epsilon_0 r^2}$$

Note que o campo acima adiciona um termo linear crescente.

Para $r > 6R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q + \rho_0 \frac{4}{3}\pi((6R)^3 - (5R)^3)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q + \rho_0 \frac{364\pi}{3}R^3}{r^2}$$

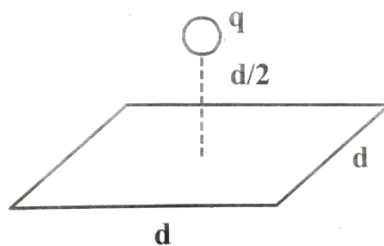
Onde $Q_{total} = Q + \rho_0 V_{5R,6R}$. O gráfico representado as funções acima ficariam:



Gabarito: ver gráfico

20.

Uma carga pontual $+q$ está a uma distância $d/2$ de uma superfície quadrada de lado d e encontra-se diretamente acima do centro do quadrado, como na figura:



Determine o fluxo elétrico que passa através do quadrado.

Comentários:

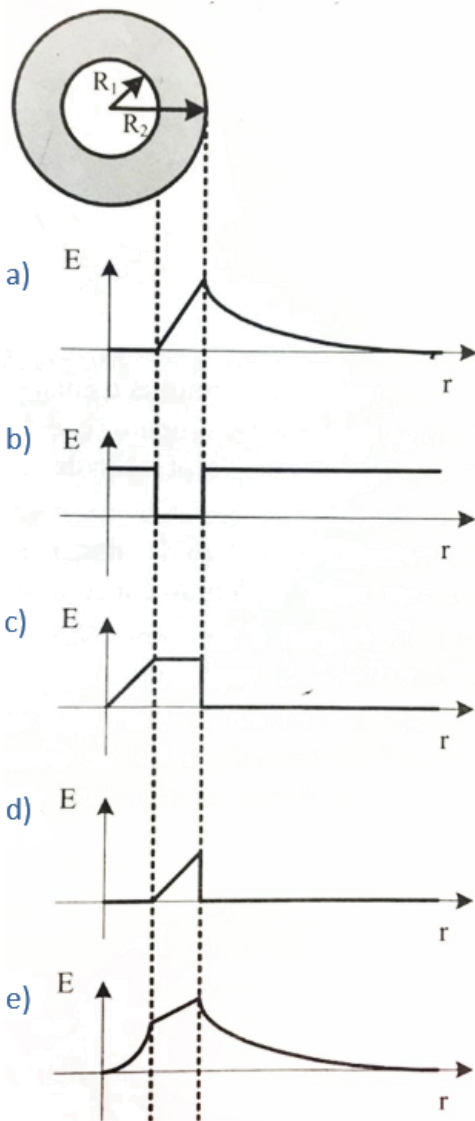
Adicione 5 quadrados ao mostrado na figura, de modo a criar um cubo englobando a carga. Perceba que cada quadrado deverá ter a mesma distância à carga. Como a superfície do cubo é fechada, podemos usá-lo na Lei de Gauss:

$$\Phi_{S(cubo)} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0} \Rightarrow 6\Phi_{face} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow \Phi_{face} = \frac{q}{6\epsilon_0}$$

Gabarito: $\phi = + \frac{q}{6\epsilon_0}$

21.

Uma camada esférica isolante de raio interno R_1 e raio externo R_2 , conforme mostra a figura, é eletrizada uniformemente. O gráfico que melhor representa a variação do campo elétrico $|\vec{E}|$, ao longo de uma direção radial, é:



Comentários:

Usando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , obtemos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} = \frac{q_{interna}}{\epsilon_0}$$

Para $r < R_1$:

$$E \cdot \Delta S = 0 \Rightarrow E = 0$$

Para $R_1 < r < R_2$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(r^3 - R_1^3)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right)$$

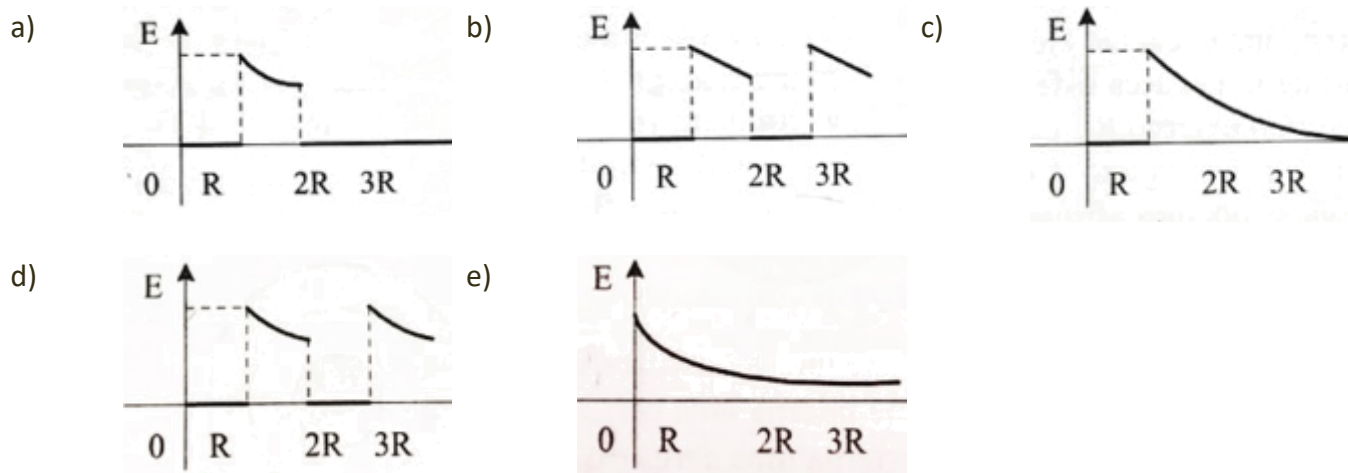
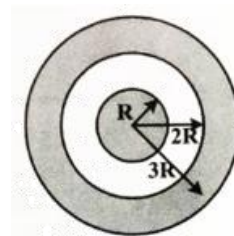
Para $r > R_2$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi(R_2^3 - R_1^3)}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho(R_2^2 - R_1^2)}{3\epsilon_0 r^2}$$

Gabarito: A

22. (PUC – SP)

Sabendo que a esfera oca representada na figura está isolada e sua carga total é nula, escolha, dos gráficos a seguir, o que melhor representa a intensidade do campo elétrico \vec{E} em função em distância r ao centro comum. Tanto a esfera oca como a esfera maciça que estão em seu interior são condutoras. A esfera maciça está eletrizada.



Comentários:

O campo no interior de condutores em equilíbrio deve ser nulo, assim ficamos somente com as alternativas b) e d). Ambas configurações possuem carga. Considere que o condutor interno possua carga $+q$, logo o externo, que é neutro, tem carga $-q$ interna e $+q$ externa.

Utilizando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica de raio r ($R < r < 2R$):

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

O campo deve ser radial devido à simetria do problema:

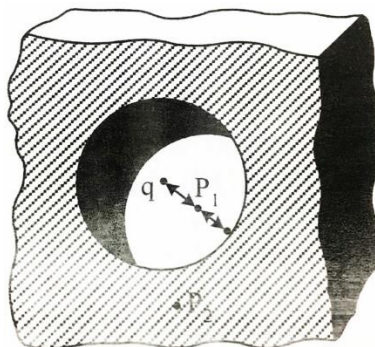
$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

Que certamente **não** é linear, como em b).

Gabarito: D

23.

A figura mostra uma carga pontual de $1,0 \times 10^{-7} C$, no centro de uma cavidade esférica de raio igual a $3,0 \text{ cm}$ existente num pedaço de metal. Utilizando a Lei de Gauss, obtenha o valor do campo elétrico para:



- um ponto P_1 no meio da distância que vai do centro da cavidade à superfície.
- no ponto P_2 .

Comentários:

a) Pela simetria do problema o campo elétrico, se existir, deve ser radial. Usando a lei de Gauss com uma gaussiana Ω esférica de raio $\frac{r}{2}$ e centro na carga, temos: (r é o raio da cavidade)

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta \vec{s} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot \left[4\pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 \right] = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\left(\frac{r}{2} \right)^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-7}}{\frac{9}{4} \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^6 \text{ N/C}$$

b) A condição de equilíbrio para um condutor é campo elétrico interno **nulo**.

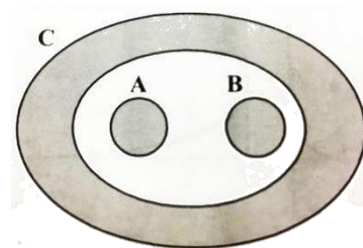
Gabarito: a) $4 \times 10^6 \text{ N/C}$ e b) zero

24.

Dadas as esferas A e B colocadas dentro de uma casca esférica C, todas metálicas, em equilíbrio eletrostático. Sabendo que as esferas têm cargas $+2q$, $+3q$ e $+4q$, respectivamente.

Determine:

- a carga total na superfície interna de C.
- a carga total na superfície externa de C.
- comente sobre a distribuição de cargas nas superfícies.



Comentários:

a) Aplicando a Lei de Gauss em uma gaussiana Ω inteiramente contida em C, temos: (campo nulo no interior de condutores)

$$\sum_{\Omega} \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0}$$

$$0 = \frac{q_A + q_B + q_{C,\text{int}}}{\epsilon_0} \Rightarrow q_{C,\text{int}} = -(q_A + q_B) = -5q$$

b) Por conservação de carga, temos:

$$q_C = q_{C,\text{ext}} + q_{C,\text{int}} \Rightarrow q_{C,\text{ext}} = q_C - q_{C,\text{int}} = 9q$$

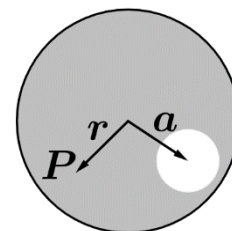
Na superfície interior haverá mais carga negativa perto dos vértices horizontais da forma elíptica, devido à atração com as cargas A e B .

c) Como é visto em A, o campo gerado pela distribuição de cargas internas é nulo e, portanto, não afeta o exterior. Na superfície exterior a carga seria distribuída igualmente se estivéssemos tratando de uma esfera, contudo como o raio de curvatura da superfície varia, teremos uma concentração de cargas maior na região dos vértices horizontais, pelo efeito conhecido como poder das pontas. (Mais acentuado quanto menor for o raio, chegando ao limite quando falamos de pontas)

Gabarito: a) $-5q$ b) $+9q$ c) não-uniforme em todas as superfícies

25.

Uma região esférica está uniformemente carregada com uma densidade volumétrica de carga ρ . Seja \vec{r} o vetor que vai do centro da esfera até um ponto genérico P no interior da esfera.



a) mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{r}$.

b) uma cavidade esférica é aberta na esfera, como nos mostra a figura. Usando conceitos de superposição, mostre que o campo elétrico, em todos os pontos no interior da cavidade, é $\vec{E} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} \cdot \vec{a}$ (campo uniforme), onde \vec{a} é o vetor que vai do centro da esfera ao centro da cavidade. Note que ambos os resultados são independentes dos raios da esfera e da cavidade.

Observe que o campo será uniforme apenas na cavidade.

Comentários:

a) Pela simetria do problema podemos concluir que o campo, se existir, deve ter direção radial. Usando a Lei de Gauss com uma gaussiana esférica $\Omega(r)$ de raio r , temos:

$$\sum_{\Omega(r)} \vec{E} \cdot \Delta \vec{S} = \frac{q_{\text{interna}}}{\epsilon_0} \Rightarrow E \cdot (4\pi r^2) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

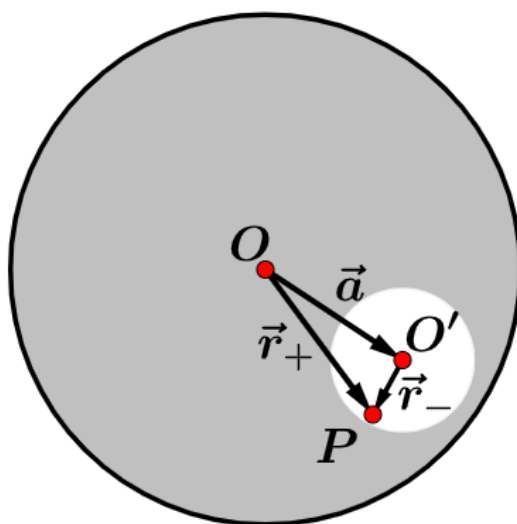
Vetorialmente:

$$\boxed{\vec{E} = E \cdot \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}}$$

b) Considere uma distribuição de cargas igual à do item a), com a adição de uma esfera de raio b e densidade $-\rho$ a uma distância a do centro. Note que a distribuição descrita acima é idêntica à proposta pelo exercício.

Calculando o campo dentro da esfera de densidade $-\rho$: (ou seja, dentro da cavidade)

$$\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} + \frac{(-\rho) \vec{r}_-}{3\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}_{res} = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$



Pela figura mostrada acima, temos:

$$\vec{r}_+ = \vec{r}_- + \vec{a}$$

$$\vec{r}_+ - \vec{r}_- = \vec{a} \Rightarrow \boxed{\vec{E}_{res} = \frac{\rho \vec{a}}{3\epsilon_0}}$$

Note que, para um campo fora da esfera de densidade $-\rho$, o termo $-\frac{\rho \vec{r}_-}{3\epsilon_0}$ se torna:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{r_-^2} \hat{r}_- = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} - \frac{\left(\rho \frac{4}{3}\pi b^3\right)}{r_-^2} \hat{r}_- = \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$$

Logo, temos que o campo em um ponto P no interior cresce à medida que ele se afasta do centro:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}}$$

Gabarito: a) $\vec{E} = E \cdot \hat{r} = \frac{\rho \vec{r}}{3\epsilon_0}$ b) $\vec{E} = \frac{\rho \vec{r}_+}{3\epsilon_0} - \frac{\rho b^3}{3\epsilon_0} \frac{\vec{r}_-}{r_-^3}$

8. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembramos conceitos estudados no ensino fundamental e aprofundamos o nosso conhecimento em alguns assuntos. Nessa aula, estudamos álgebra e aritmética elementar.

Quero que você se acostume com as notações matemáticas e a usar expressões algébricas. Isso nos ajudará a resolver e a entender as questões do ITA.

Lembre-se! Treine o maior número de exercícios que você conseguir! A minha missão é passar todo o conhecimento que você precisará para passar no ITA!

Eu sei que o caminho para a aprovação é árduo, mas comentarei o maior número de questões e passarei todos os bizus que precisei para minha aprovação.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:



@proftoniburgatto

9. Referências bibliográficas

- [1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica volume 5. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
- [2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Seleccionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977. 518p.
- [3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física volume 3. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
- [4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física, volume 3. 9ª ed. Moderna. 490p.
- [5] Resnick, Halliday, Jearl Walker. Fundamentos de Física volume 3. 10ª ed. LTC. 365p.

10. Versão de aula

Versão de Aula	Data da última atualização
1.0	27/06/2021