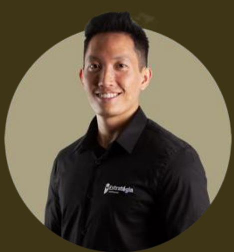
CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So



www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Olá!

Vamos continuar o estudo de trigonometria. Nessa aula, veremos como resolver equações e inequações trigonométricas. Também estudaremos o valor de algumas razões trigonométricas não triviais que podem ser cobradas na prova.
Se você já possui um bom conhecimento de trigonometria, vá direto para a lista de questões e treine!

Sempre que você tiver dúvidas, críticas ou sugestões nos procure no fórum de dúvidas ou entre em contato comigo:

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Alguns Arcos Importantes

Vamos estudar o valor do seno e cosseno de alguns ângulos que podem ser cobradas nas provas.

I) $\boldsymbol{\pi/8}$ $(\mathbf{22,5°})$

Esse arco é o arco metade de $\pi/4$. Vamos usar as fórmulas de arco metade:

$$sen\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}$$

Sabemos que o seno do primeiro quadrante é positivo. O arco $\pi/8$ está localizado no primeiro quadrante. Assim, podemos escrever:

$$sen\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Para a tangente, podemos usar a relação fundamental:

$$tg\left(\frac{\pi}{8}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

Simplificando essa razão, obtemos:

$$\boxed{tg\left(\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{2}-1}$$

II) $\boldsymbol{\pi/12\ (15°)}$

Decore os valores de seno e cosseno para esse ângulo. Ela já foi cobrada na prova do ITA!

$\pi/12$ é o arco metade de $\pi/6$. Assim, usando as seguintes transformações, podemos escrever:

$$sen\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-cosA}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{A}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+cosA}{2}}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Simplificando a tangente, temos:

$$tg\left(\frac{\pi}{12}\right)=2-\sqrt{3}$$

Podemos também escrever seno, cosseno e tangente de outra forma para esse ângulo. Usando a subtração de arcos, temos:

$$45°-30°=15°$$

$$sen\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+sen\left(\frac{\pi}{4}\right)sen\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$$

III) $\pi/10$ $(18°)$

$$2\cdot18°+3\cdot18°=90°$$

Usando a propriedade de arco complementar, podemos escrever:

$$sen\left(2\cdot\frac{\pi}{10}\right)=sen\left(\frac{\pi}{2}-3\cdot\frac{\pi}{10}\right)=\cos\left(3\cdot\frac{\pi}{10}\right)$$

Aplicando as fórmulas de arco duplo e triplo:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^3\left(\frac{\pi}{10}\right)-3\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Como $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)\neq0$, podemos simplificar:

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right)-3$$

$$2sen\left(\frac{\pi}{10}\right)=4\left(1-sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)\right)-3$$

$$4sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right) + 2sen\left(\frac{\pi}{10}\right) - 1 = 0$$

Encontrando as raízes da equação de segundo grau:

$$sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Como $18°$ pertence ao primeiro quadrante, podemos afirmar:

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}}$$

Para o cosseno, podemos usar a relação fundamental:

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2}$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}}$$

IV) $\boldsymbol{\pi/5}$ $(\mathbf{36°})$

$36°$ é arco duplo de $18°$, usando a fórmula de arco duplo, temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2$$

$$\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}}$$

Usando a relação fundamental:

$$sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{4}\right)^2}$$

$$\boxed{sen\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}}$$

2. Lei dos senos e cossenos

2.1. Lei dos senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

2.2. Lei dos cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{matrix} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{matrix}}$$

3. Equações Trigonométricas

3.1. Equações Fundamentais

Vamos aprender a resolver equações trigonométricas. A maioria das equações trigonométricas podem ser resolvidas se conhecermos as equações fundamentais. Vamos apresentá-las:

Equações Fundamentais	
(I)	$sen\alpha = sen\beta$
(II)	$cos\alpha = cos\beta$
(III)	$tg\alpha = tg\beta$

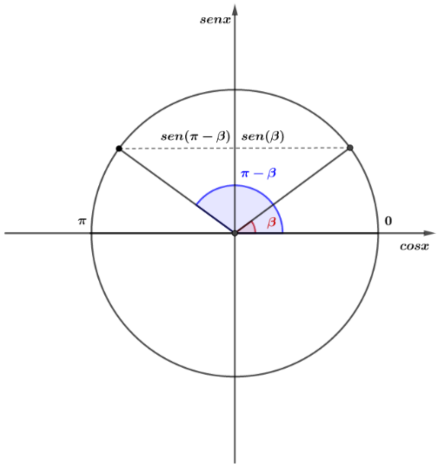
$(I)\ sen\alpha = sen\beta$

Para resolver essa equação, temos que considerar dois casos:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que temos que somar o termo $2k\pi$ para encontrar todos os ângulos que tornam essa igualdade verdadeira. $2k\pi$ é o termo que representa k voltas completas na circunferência trigonométrica.

2) α e β são suplementares, então $\alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso, devemos lembrar que a função seno repete seu valor no primeiro e segundo quadrantes e, por isso, temos que considerar o caso desses ângulos serem suplementares um do outro.

Vamos usar o ciclo trigonométrico para melhor visualização:



$(II)\ cos\alpha = cos\beta$

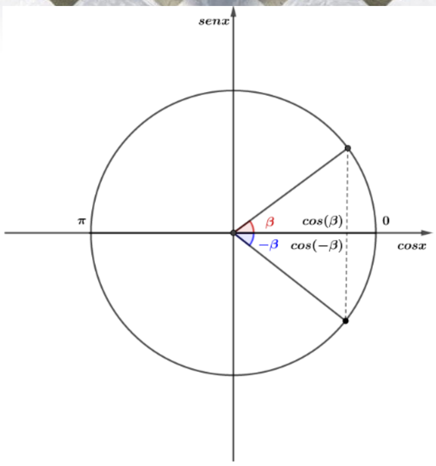
Nesse caso, também temos duas possibilidades:

1) α e β são congruentes, então $\alpha = \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2) α e β são replementares (replementares são ângulos que a relação $\alpha = 2\pi - \beta$). Assim, temos $\alpha = 2\pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Perceba que podemos incluir o termo 2π em $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dessa forma:

$$\alpha = -\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



$(III)\ tg\alpha = tg\beta$

A função tangente repete seu valor para dois casos:

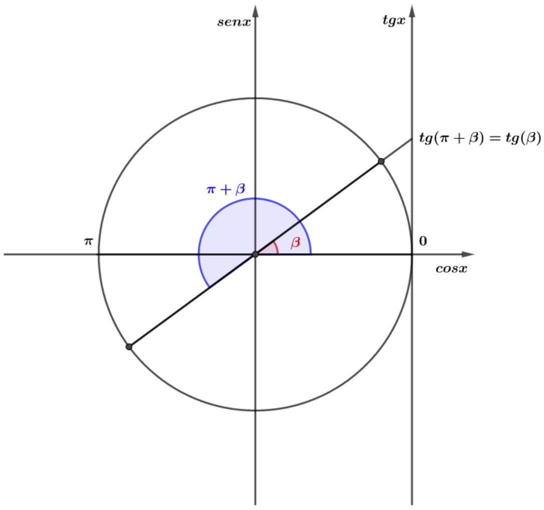
1) α e β são congruentes, então, $\alpha = \beta + 2k\pi$

2) α e β têm imagens simétricas em relação ao centro do ciclo, então, $\alpha = \pi + \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Essas duas soluções podem ser escritas em uma só:

$$x = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ciclo trigonométrico dos casos:



RESUMINDO

Equações Fundamentais	Solução
$sen\alpha = sen\beta$	$\alpha = \beta + 2k\pi\ ou\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$cos\alpha = cos\beta$	$\alpha = \pm\beta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$tg\alpha = tg\beta$	$\alpha = \beta + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

3.2. Equações Clássicas

Além das equações fundamentais, temos as equações clássicas. Vamos aprender a resolvê-las.

Equações Clássicas

(I)	$asenx + bcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(II)	$a(senx + cosx) + bsenxcosx = c\ (a, b, c \in \mathbb{R}^*)$
(III)	$sen^4 x + \cos^4 x = a\ (a \in \mathbb{R})$
(IV)	$sen^6 x + \cos^6 x = a\ (a \in \mathbb{R})$

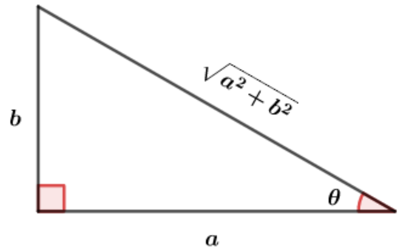
$(I)\ asenx + bcosx = c$

Método 1:

Se $\sqrt{a^2+b^2} \neq 0$, podemos dividir essa equação por $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{asenx}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{bcosx}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Essa divisão se baseia no seguinte triângulo retângulo:



Assim, podemos escrever:

$$sen\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
$$cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Substituindo na equação, obtemos:

$$cos\theta senx + sen\theta cosx = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

A expressão à esquerda é a fórmula da soma do seno, assim, temos:

$$sen(x+\theta) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Com essa equação, basta encontrar o valor dos ângulos que satisfazem essa equação.

A solução é dada por:

$$x + \theta = arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$x + \theta = \pi - arcsen\left(\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para usar esse método, devemos nos atentar à condição de existência:

$$\left|\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \leq 1$$

Que é o mesmo que dizer:

$$-1 \leq \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq 1$$

Método 2:
Podemos usar as seguintes identidades:

$$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cosx = \frac{\left(1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Fazendo $t = tg\left(\frac{x}{2}\right)$:

$$senx = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$cosx = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

Substituindo na equação:

$$a\left(\frac{2t}{1 + t^2}\right) + b\left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}\right) = c$$

$$2at + b - bt^2 = c + ct^2$$

$$(b + c)t^2 - 2at + c - b = 0$$

Para encontrar as soluções, basta resolver a equação do segundo grau acima.

$(II)\ a(senx + cosx) + bsenxcosx = c$
Podemos fazer $z = senx + cosx$ e, assim, obtermos:

$$z = senx + cosx$$

Elevando ao quadrado:

$$z^2 = sen^2x + 2senxcosx + \cos^2 x \Rightarrow z^2 = 1 + 2senxcosx \Rightarrow senxcosx = \frac{z^2 - 1}{2}$$

Substituindo na equação:

$$az + \frac{b(z^2 - 1)}{2} = c$$

$$bz^2 + 2az - b - 2c = 0$$

Dessa forma, a solução é dada pelas raízes da equação do segundo grau acima.
Para encontrar a solução em x, devemos resolver $sen(2x) = z^2 - 1$.
A solução é dada por:

$$2x = arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen(z^2 - 1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(III)\ sen^4x + cos^4x = a$
Podemos fatorar essa equação:

$$\left(\underbrace{sen^2x + \cos^2 x}_{1}\right)^2 - 2sen^2xcos^2x = a$$

$$1 - 2(senxcosx)^2 = a$$

$$\left[\frac{sen(2x)}{2}\right]^2 = \frac{1 - a}{2}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{2(1 - a)}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{2(1 - a)}$$

Devemos analisar a condição de existência:
Condição do radical:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

Condição do seno:

$$0 \leq \sqrt{2(1-a)} \leq 1 \Rightarrow a \geq \frac{1}{2}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{2(1-a)}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$(IV)\ sen^6 x + \cos^6 x = a$
Podemos usar a seguinte identidade:

$$sen^6 x + \cos^6 x = \left(\underbrace{sen^2 x + \cos^2 x}_{1}\right)(sen^4 x - sen^2 x cos^2 x + \cos^4 x)$$

$$sen^6 x + \cos^6 x = \underbrace{sen^4 x + \cos^4 x}_{1-2sen^2 x cos^2 x} - sen^2 x cos^2 x$$

$$sen^6 x + \cos^6 x = 1 - 3sen^2 x cos^2 x$$

Assim, substituindo na equação, obtemos:

$$1 - 3sen^2 x cos^2 x = a$$

$$1 - a = 3\left(\frac{sen(2x)}{2}\right)^2$$

$$sen^2(2x) = \frac{4(1-a)}{3}$$

$$|sen(2x)| = \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

$$sen(2x) = \pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}$$

Devemos analisar a condição de existência:

$$1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 1$$

$$0 \leq \sqrt{\frac{4(1-a)}{3}} \leq 1$$

$$4(1-a) \leq 3 \Rightarrow 1 - a \leq \frac{3}{4} \Rightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

Intersecção das condições:

$$\frac{1}{4} \leq a \leq 1$$

A solução é dada por:

$$2x = arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$2x = \pi - arcsen\left(\pm\sqrt{\frac{4(1-a)}{3}}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

4. Inequações Trigonométricas

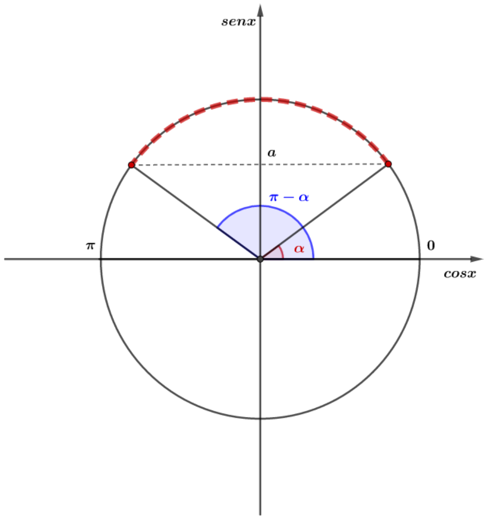
Para resolver inequações trigonométricas, devemos aprender a resolver os 6 tipos diferentes de inequações.

Seja a um número real dado:

Inequações Fundamentais	
(I)	$senx \geq a$
(II)	$senx \leq a$
(III)	$cosx \geq a$
(IV)	$cosx \leq a$
(V)	$tgx \geq a$
(VI)	$tgx \leq a$

$(I)\ senx \geq a$

Sempre que resolvemos inequações, podemos usar o gráfico para nos ajudar a ver o resultado. Vamos usar o ciclo trigonométrico e inserir $sen\alpha = a$:

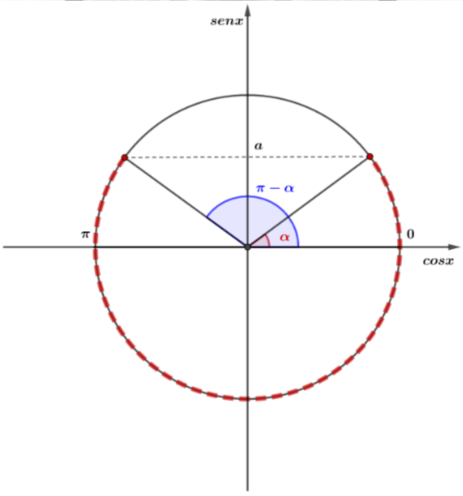


Observando o ciclo, podemos afirmar que os valores do seno que são maiores ou iguais a a devem pertencer ao intervalo:

$$\boldsymbol{arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq \pi - arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(II)\ senx \leq a$

Sendo $sen\alpha = a$, podemos usar o ciclo trigonométrico:



Observando a figura, podemos afirmar que os valores de x que satisfazem a inequação são dados por:

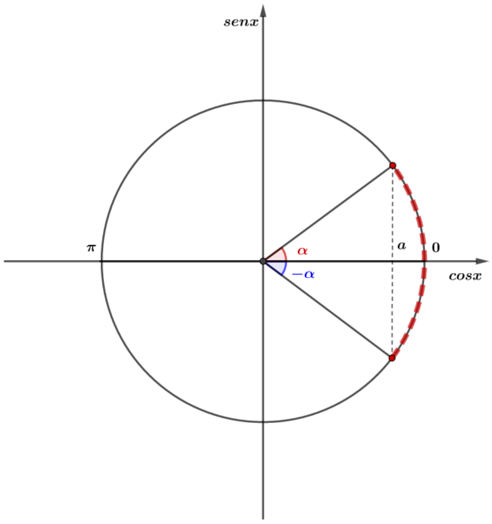
$$\mathbf{0 + 2k\pi \leq x \leq arcsen(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

Ou

$$\mathbf{\pi - arcsen(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(III)\ cosx \geq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$, temos:

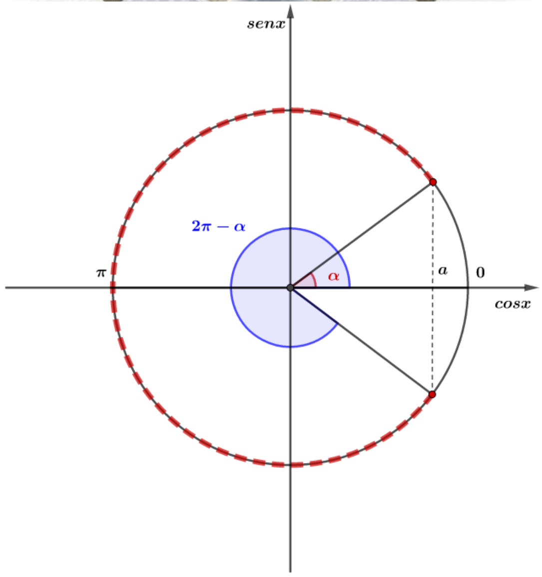


Pela figura, podemos ver que as soluções em x são dadas por:

$$\mathbf{-arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq arccos(a) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(IV)\ cosx \leq a$

Usando o ciclo trigonométrico e considerando $cos\alpha = a$:

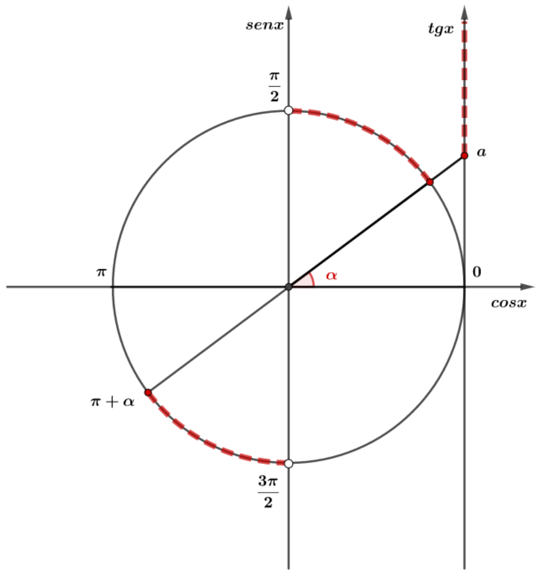


Podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{arccos(a) + 2k\pi \leq x \leq 2\pi - arccos(a) + 2k\pi}$$

$(V)\ tgx \geq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico, temos:



Analisando a figura, podemos ver que as soluções são dadas por:

$$arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

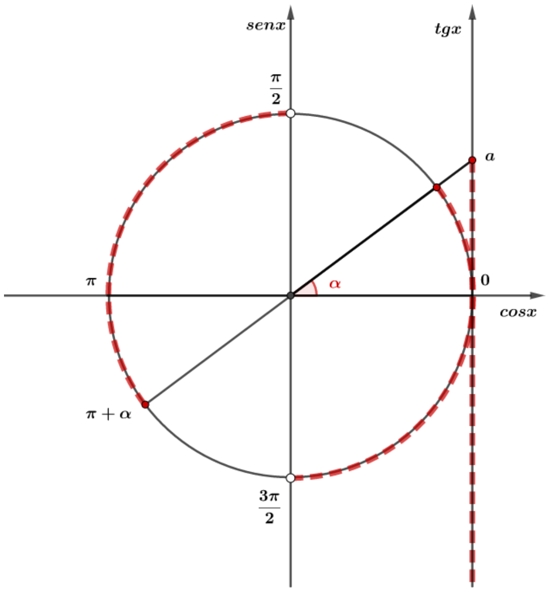
$$\pi + arctg(a) + 2k\pi \leq x < \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

Podemos resumir essas duas soluções:

$$\boldsymbol{arctg(a) + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}}$$

$(VI)\ tgx \leq a$

Fazendo $tg\alpha = a$ e usando o ciclo trigonométrico:



Pela figura, podemos ver que a solução é dada por:

$$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}+k\pi<x\leq\pi+arctg(a)+k\pi, k\in\mathbb{Z}}$$

5. Somatório Trigonométrico

Uma questão que é passível de cair no IME é o somatório trigonométrico. Vamos aprender a resolvê-la.

Veja o seguinte somatório:

$$S=\sum_{i=1}^{n} sen(A+ri)$$

A é um ângulo dado e r é a razão do somatório.

Para resolver essa soma, devemos usar a seguinte fórmula de Werner:

$$\boxed{\boldsymbol{-2senAsenB=\cos(A+B)-\cos(A-B)}}$$

Então, o bizu é multiplicar o somatório por $2\cdot sen\left(\frac{r}{2}\right)$:

$$S=\frac{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}\sum_{i=1}^{n} sen(A+ri)$$

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{2sen\left(\frac{r}{2}\right)sen(A+ri)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Assim, transformamos a soma em uma soma telescópica:

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{\cos\left(A+ri-\frac{r}{2}\right)-\cos\left(A+ri+\frac{r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

Organizando os termos, encontramos a soma telescópica:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{\cos\left(A + \frac{(2i-1)r}{2}\right) - \cos\left(A + \frac{(2i+1)r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}$$

$$S = \frac{1}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}\left[\cos\left(A + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(A + \frac{3r}{2}\right) + \cos\left(A + \frac{3r}{2}\right)\right.$$

$$\left. - \cos\left(A + \frac{5r}{2}\right) + \cdots + \cos\left(A + \frac{(2n-1)r}{2}\right) - \cos\left(A + \frac{(2n+1)r}{2}\right)\right]$$

$$S = \frac{1}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}\left[\cos\left(A + \frac{r}{2}\right) \cancel{-cos\left(A + \frac{3r}{2}\right)} + \cancel{cos\left(A + \frac{3r}{2}\right)}\right.$$

$$\left. \cancel{-cos\left(A + \frac{5r}{2}\right)} + \cdots + \cancel{cos\left(A + \frac{(2n+1)r}{2}\right)} - \cos\left(A + \frac{(2n+1)r}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{S = \frac{\cos\left(A + \frac{r}{2}\right) - \cos\left(A + \frac{(2n+1)r}{2}\right)}{2sen\left(\frac{r}{2}\right)}}$$

Não é necessário decorar essa fórmula, basta que você saiba como chegar a ela.

6. Questões de Provas Anteriores

1. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0 < a < \frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x \in [0, 2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x \ sen(a + x) = sen\ a$$

é igual a

a) $5\pi + 2a$.

b) $5\pi + a$.

c) 5π.

d) $5\pi - a$.

e) $5\pi - 2a$.

2. (ITA/2019)

Determine todas as soluções da equação $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

3. (ITA/2019)

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\operatorname{sen}\hat{B}$, sabendo que

$$\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{B})=\frac{4}{5}=\operatorname{sen}(\hat{A}-\hat{C}).$$

4. (ITA/2018)

Com relação à equação $\frac{tg^3x-3tgx}{1-3tg^2x}+1=0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$.

e) existem duas soluções no intervalo $]-\frac{\pi}{2},0[$.

5. (ITA/2017)

O número de soluções da equação $(1+\sec\theta)(1+cossec\theta)=0$, com $\theta\in[-\pi,\pi]$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

6. (ITA/2017)

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right)-tg^2x=1$.

7. (ITA/2016)

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0,\pi]$. Determine todos os pares ordenados (x,y) tais que

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x-sen\ y=\frac{1}{2}\\ \sqrt{2}sen\ x+\sqrt{3}\cos y=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

8. (ITA/2015)

Seja n um inteiro positivo tal que $sen\left(\frac{\pi}{2n}\right)=\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

9. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$$

e

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha+\beta)$ é igual a

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) 0

10. (ITA/2014)

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem simultaneamente, a

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

e

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}cotgx\right)cotgx$$

11. (ITA/2013)

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4senxcosx - 1)$.

12. (ITA/2013)

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - sen^8x + 4sen^6x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = 1/2$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e III.

d) apenas II e IV.

e) todas.

13. (ITA/2013)

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\, x \,]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3}sen(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

14. (ITA/2012)

Determine os valores reais de x de modo que $sen(2x) - \sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

15. (ITA/2010)

Se os números reais α e β, com $\alpha + \beta = \left(\frac{4\pi}{3}\right), 0 \leq \alpha \leq \beta$, maximizam a soma $sen\alpha + sen\beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{5\pi}{8}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

16. (ITA/2010)

Considere a equação

$$(3 - 2\cos^2 x)\left(1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) - 6tg\left(\frac{x}{2}\right) = 0$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0, \pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $cotgx$.

17. (ITA/2008)

Determine todos os valores de $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ tais que a equação (em x) $x^4 - 2\sqrt[4]{3}x^2 + tg\alpha = 0$ admita apenas raízes reais e simples.

18. (ITA/2008)

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

Que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

19. (ITA/2007)

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2}tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sqrt{3}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)\sec(x)\geq 0.$$

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{12}$

20. (ITA/2006)

Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{cosx}(4sen^2x-1)-\log_{cosx}(4-\sec^2 x)>2.$$

21. (ITA/2006)

Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{77}sen\left[5\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B=\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}$. Se m é o maior elemento de $B\cap(-\infty,0)$ e n é o menor elemento de $B\cap(0,+\infty)$, então $m+n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$

b) $\frac{\pi}{15}$

c) $-\frac{\pi}{30}$

d) $-\frac{\pi}{15}$

e) $-\frac{2\pi}{15}$

22. (ITA/2006)

O conjunto solução de $(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, é

a) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

e) $\left\{\left(\frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

23. (ITA/2005)

O intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\left[\frac{1+x}{2}\right] + \arctan\left[\frac{1-x}{2}\right] \geq \frac{\pi}{6}$$

É

a) $[-1, 4]$

b) $[-3, 1]$

c) $[-2, 3]$

d) $[0, 5]$

e) $[4, 6]$

24. (ITA/2005)

Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$sen(x+y) + sen(x-y) = \frac{1}{2}$$

$$senx + cosy = 1$$

25. (ITA/2004)

Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1-x^2} \geq a - x$.

26. (IME/2020)

Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$senx - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{12}$

27. (IME/2019)

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

a) $2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

b) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = cos(\hat{A}) + cos(\hat{C})$

c) $2sen(\hat{A}-\hat{C}) = sen(\hat{A}) - sen(\hat{C})$

d) $2cos(\hat{A}-\hat{C}) = cos(\hat{A}) - cos(\hat{C})$

e) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

28. (IME/2019)

Determine todas as soluções da equação

$$4sen^2(7x) \cdot \cos(2x) + 2sen(9x) + 8sen^2(x) + 5\cos(2x) + 2sen(5x) = 4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

29. (IME/2018)

A menor raiz real positiva da equação $arctg\left(x \cdot tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) = \frac{2\pi}{x+2}$ encontra-se no intervalo:

a) $(0, 1]$

b) $(1, 2]$

c) $(2, 3]$

d) $(3, 4]$

e) $(4, 5]$

30. (IME/2018)

Sabendo que $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

31. (IME/2016)

Determine o conjunto solução da equação:

$$(sen\ x)\left(1 + tgx\ tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

32. (IME/2015)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Marque a opção verdadeira:

a) f não tem raízes reais

b) f é uma função ímpar

c) f é uma função par

d) $|f(x)| \leq 1$

e) f é sobrejetora

33. (IME/2015)

O número de soluções da equação $\cos(8x) = sen(2x) + tg^2(x) + cotg^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 8

34. (IME/2014)

Resolva a equação $(\log_{\cos x} sen^2 x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\ x) = 4$.

35. (IME/2012)

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105°, \alpha$ e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) as raízes da equação $3secx + m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx$, em função de m;

b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

36. (IME/2011)

O valor de x que satisfaz a equação $sen(arccotg(1 + x)) = \cos(arctg(x))$:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $-\frac{3}{2}$

7. Gabarito

1. e
2. $S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x=arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right)+k\pi\ ou\ x=arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right)+k\pi;k\in\mathbb{Z}\right\}$
3. $\boldsymbol{sen\,\widehat{B}=\frac{44}{125}}$
4. b
5. a
6. $\boldsymbol{S=\left\{\frac{2\pi}{3}+2k\pi;-\frac{2\pi}{3}+2k\pi;\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi;-\arccos\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi\middle|k\in\mathbb{Z}\right\}}$
7. $\boldsymbol{(x,y)=\left(\frac{\pi}{12},\frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x,y)=\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)}$
8. $\boldsymbol{\text{a) } n=6\ \text{ b) } sen\left(\frac{\pi}{24}\right)=\frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}}$
9. b
10. $\boldsymbol{S=S_1\cap S_2=\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{6}\right)}$
11. $\boldsymbol{D=\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right)}$
12. e
13. $\boldsymbol{S=\left\{\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right);\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right\}}$
14. $\boldsymbol{x=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}}$
15. b
16. a) $\boldsymbol{S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}}$ b) $\boldsymbol{cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3};cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3};cotg\left(\frac{\pi}{2}\right)=0}$
17. $\boldsymbol{0<\alpha<\frac{\pi}{3}}$
18. e
19. d
20. $\boldsymbol{x\in\left(-\frac{\pi}{4},-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)}$
21. e
22. d
23. c
24. $\boldsymbol{(x,y)\in\left\{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right);\left(\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right);\left(\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{3}\right);\left(\frac{5\pi}{6};\frac{5\pi}{3}\right)\right\}}$
25. $\boldsymbol{a\leq\sqrt{2}}$
26. c
27. a

28. $\boldsymbol{S=\left\{\frac{7\pi}{4};\frac{67\pi}{42};\frac{71\pi}{42};\frac{79\pi}{42};\frac{83\pi}{42}\right\}}$
29. d
30. $\boldsymbol{x=arctg\left(\frac{1}{2}\right)}$
31. $\boldsymbol{S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x=\frac{5\pi}{12}+k\pi\ ou\ x=\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$
32. b
33. c
34. $\boldsymbol{S=\left\{x\in\mathbb{R}\middle|x=arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}}$
35. a) $\boldsymbol{x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\ ou\ x=arctg(m)+k\pi,k\in\mathbb{Z}}$ b) $\boldsymbol{m=1}$
36. d

8. Questões de Provas Anteriores Resolvidas e Comentadas

1. (ITA/2020)

Seja a um número real satisfazendo $0<a<\frac{\pi}{2}$. Então, a soma de todos os valores de $x\in[0,2\pi]$ que satisfazem a equação

$$\cos x\ \ sen(a+x)=sen\ a$$

é igual a

a) $5\pi+2a$.

b) $5\pi+a$.

c) 5π.

d) $5\pi-a$.

e) $5\pi-2a$.

Comentários

Reescrevendo a equação, obtemos:

$$\cos x\ \ sen(a+x)=sen\ a$$
$$\cos x\,(sena\cos x+senx\cos a)=sen\ a$$
$$sena\cos^2 x+senx\cos x\cos a=sen\ a$$

Note que

$$sen\ 2x=2senx\cos x\Rightarrow senx\cos x=\frac{sen\ 2x}{2}$$
$$\cos 2x=2\cos^2 x-1\Rightarrow\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Substituindo na equação:

$$sena\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)+\left(\frac{sen\ 2x}{2}\right)\cos a=sen\ a$$
$$\frac{sen\ a}{2}+\frac{sen\ a\cos 2x}{2}+\frac{sen\ 2x\cos a}{2}=sen\ a$$

$$\frac{sen\, a \cos 2x + sen\, 2x \cos a}{2} = \frac{sen\, a}{2}$$
$$sen(a + 2x) = sen\, a$$

Assim, temos as seguintes soluções:

$$a + 2x = a + 2k\pi \Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$a + 2x = \pi - a + 2k\pi \Rightarrow 2x = \pi - 2a + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para o intervalo $x \in [0, 2\pi]$ e lembrando que $a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} - a > 0$, as soluções são:

$$x = k\pi \Rightarrow x \in \{0, \pi, 2\pi\}$$
$$x = \frac{\pi}{2} - a + k\pi \Rightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} - a, \frac{3\pi}{2} - a\right\}$$

Somando-se as soluções:

$$S = 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{2} - a + \frac{3\pi}{2} - a = 5\pi - 2a$$

Gabarito: "e".

---

2. (ITA/2019)

Determine todas as soluções da equação $sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$.

Comentários

$$sen^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{12}$$

Para resolver essa questão, podemos usar o seguinte produto notável

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Assim, temos

$$(sen^2 x + \cos^2 x)^3 = sen^6 x + 3sen^4 x \cos^2 x + 3sen^2 x \cos^4 x + \cos^6 x$$
$$\underbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)^3}_{1} = \underbrace{sen^6 x + \cos^6 x}_{\frac{7}{12}} + 3sen^2 x\, cos^2 x \underbrace{(sen^2 x + \cos^2 x)}_{1}$$
$$1 = \frac{7}{12} + 3sen^2 x(1 - sen^2 x)$$
$$1 - \frac{7}{12} - 3sen^2 x + 3sen^4 x = 0$$
$$3sen^4 x - 3sen^2 x + \frac{5}{12} = 0$$

Encontrando as raízes:

$$sen^2 x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{5}{12}}}{6} = \frac{3 \pm 2}{6} = \frac{1}{6}\ ou\ \frac{5}{6}$$
$$sen^2 x = \frac{1}{6} \Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$sen^2 x = \frac{5}{6} \Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{30}}{6} \Rightarrow x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, as soluções são:

$$\boxed{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi\ ou\ x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

Gabarito: $S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + k\pi \text{ ou } x = arcsen\left(\pm\frac{\sqrt{30}}{6}\right) + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$

3. (ITA/2019)

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo. Determine $\operatorname{sen}\hat{B}$, sabendo que

$$\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{5} = \operatorname{sen}(\hat{A}-\hat{C}).$$

Comentários

Se $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ são os ângulos internos de um triângulo, temos $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\pi$. Logo:

$$\operatorname{sen}(\hat{A}+\hat{B}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \operatorname{sen}(\pi-\hat{C}) = \frac{4}{5} \Rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{4}{5}}$$

Como $\hat{C}$ é um ângulo interno do triângulo e $\operatorname{sen}\hat{C} = \frac{4}{5}$, podemos ter:

$$\cos\hat{C} = \frac{3}{5} \text{ ou } \cos\hat{C} = -\frac{3}{5}$$

O cosseno assume um valor negativo apenas se o ângulo for obtuso, assim, $\cos\hat{C} < 0$ somente se ele for o maior ângulo do triângulo. Vamos analisar.

Se $\hat{C} > \hat{A}$, temos $\hat{A}-\hat{C} < 0$ e, assim, $sen(\hat{A}-\hat{C}) < 0$, o que é um absurdo, pois, pela relação dada no enunciado:

$$sen(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{4}{5}$$

Assim, $\hat{C} < \hat{A}$ e, consequentemente, $\cos\hat{C} > 0$. Logo,

$$\boxed{\cos\hat{C} = \frac{3}{5}}$$

Para $\cos\hat{C} = 3/5$, temos:

$$sen(\hat{A}-\hat{C}) = \frac{4}{5} \Rightarrow sen\hat{A}\cos\hat{C} - sen\hat{C}\cos\hat{A} = \frac{4}{5}$$

$$sen\hat{A}\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cos\hat{A} = \frac{4}{5} \Rightarrow 3sen\hat{A} - 4\cos\hat{A} = 4$$

Fazendo $t = tg\left(\frac{A}{2}\right)$ e usando as seguintes identidades

$$sen\hat{A} = \frac{2t}{1+t^2} \text{ e } \cos\hat{A} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

Temos:

$$3\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) - 4\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) = 4$$

$$6t - 4 + 4t^2 = 4 + 4t^2$$

$$6t = 8$$

$$t = \frac{4}{3} \Rightarrow tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right) = \frac{4}{3}$$

Assim, podemos calcular o valor de tgA:

$$tg\hat{A} = \frac{2tg\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)}{1-tg^2\left(\frac{\hat{A}}{2}\right)} = \frac{2\left(\frac{4}{3}\right)}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = -\frac{24}{7} = \frac{sen\hat{A}}{\cos\hat{A}}$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$hipotenusa^2 = 24^2 + 7^2 \Rightarrow hipotenusa = \sqrt{576+49} = 25$$

Como $0 < A < \pi$, temos:

$$\boxed{sen\hat{A}=\frac{24}{25}} \text{ e } \boxed{\cos\hat{A}=-\frac{7}{25}}$$

Usando os dados encontrados, vamos calcular $sen\hat{B}$:

$$sen\ \hat{B}=sen(\pi-\hat{B})=sen(\hat{A}+\hat{C})=sen\hat{A}\cos\hat{C}+sen\hat{C}\cos\hat{A}$$

$$sen\ \hat{B}=\frac{24}{25}\cdot\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{7}{25}\right)=\frac{72-28}{125}=\frac{44}{125}$$

$$\therefore \boxed{sen\ \hat{B}=\frac{44}{125}}$$

Gabarito: $sen\ \hat{B}=\frac{44}{125}$

4. (ITA/2018)

Com relação à equação $\frac{tg^3x-3tgx}{1-3tg^2x}+1=0$, podemos afirmar que

a) no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ a soma das soluções é igual a 0.

b) no intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ a soma das soluções é maior que 0.

c) a equação admite apenas uma solução real.

d) existe uma única solução no intervalo $]0,\frac{\pi}{2}[$.

e) existem duas soluções no intervalo $]-\frac{\pi}{2},0[$.

Comentários

Vamos substituir $tgx=y$ para obter a equação:

$$\frac{y^3-3y}{1-3y^2}+1=0$$

Simplificando:

$$\frac{y^3-3y+1-3y^2}{1-3y^2}=0$$

$$\Rightarrow y^3-3y^2-3y+1=0$$

Fatorando a expressão, obtemos:

$$(y^3+1)-3y(y+1)$$
$$(y+1)(y^2-y+1-3y)$$
$$\Rightarrow (y+1)(y^2-4y+1)=0$$

Encontrando as raízes:

Para $y+1=0$:

$$y=-1\Rightarrow tgx=-1$$
$$x=\frac{3}{4}\pi+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Para $y^2-4y+1=0$:

$$y=2\pm\sqrt{3}$$
$$tgx=2\pm\sqrt{3}$$

Para esses valores de tangente, temos:

$$x=arctg(2-\sqrt{3})=\frac{\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$x=arctg(2+\sqrt{3})=\frac{5\pi}{12}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

*À primeira vista, esses valores de tangente podem não ser claros. Mas com a prática de vários exercícios, você saberia que $tg(45° - 30°) = 2 - \sqrt{3}$ e $tg(45° + 30°) = 2 + \sqrt{3}$.

Analisando as alternativas, vemos que as raízes estão compreendidas entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Então, temos:

$$x = \frac{3}{4}\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_1 = -\frac{\pi}{4}$$
$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_2 = \frac{\pi}{12}$$
$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x_3 = \frac{5\pi}{12}$$

Se somarmos as raízes, encontramos:

$$S = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} > 0$$

Portanto, o gabarito é a letra b.

Gabarito: “b”.

---

5. (ITA/2017)

O número de soluções da equação $(1 + \sec\theta)(1 + cossec\theta) = 0$, com $\theta \in [-\pi, \pi]$, é

a) 0

b) 1

c) 2

d) 3

e) 4

Comentários

Vamos analisar a condição de existência da equação:

$$sec\theta = \frac{1}{cos\theta} \Rightarrow \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$cossec\theta = \frac{1}{sen\theta} \Rightarrow \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nessa questão, devemos analisar os dois casos possíveis:

$$(1 + sec\theta)(1 + cossec\theta) = 0$$
$$1 + sec\theta = 0 \ \ (I)$$
Ou
$$1 + cossec\theta = 0 \ \ (II)$$

(I):

$$1 + sec\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{cos\theta} = -1$$
$$cos\theta = -1$$
$$\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Como $\theta \in [-\pi, \pi]$, temos:

$$\Rightarrow \theta = -\pi \text{ ou } \theta = \pi$$

(II):

$$1 + cossec\theta = 0 \Rightarrow \frac{1}{sen\theta} = -1$$
$$sen\theta = -1$$
$$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$$

Fazendo a intersecção da solução com a condição de existência do problema, temos:

$$\theta = \pm\pi \text{ não convém, pois } \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = -\frac{\pi}{2} \text{ não convém, pois } \theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Portanto, a solução é o conjunto vazio:

$$S = \emptyset$$

Gabarito: "a".

6. (ITA/2017)

Determine o conjunto das soluções reais da equação $3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$.

Comentários

Vamos, inicialmente, simplificar a equação:

$$3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) - tg^2x = 1$$

$$3cossec^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + tg^2x$$

Usando a identidade $1 + tg^2x = \sec^2 x$, temos:

$$\frac{3}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sec^2 x$$

$$\frac{3}{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Vamos igualar os ângulos. Sabendo que o cosseno do arco metade é dado por $cosx = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$, temos:

$$cosx = 1 - 2sen^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - cosx}{2}$$

Substituindo a identidade acima na equação, obtemos:

$$\frac{3}{\frac{1 - cosx}{2}} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$6\cos^2 x = 1 - cosx$$

$$6\cos^2 x + cosx - 1 = 0$$

$$cosx = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{2} \; ou \; \frac{1}{3}$$

Para $cosx = -1/2$:

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $cosx = 1/3$:

$$x = \pm \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi; -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi; -\arccos\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}}$

7. (ITA/2016)

Sejam x e y pertencentes ao intervalo $[0,\pi]$. Determine todos os pares ordenados (x,y) tais que

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x - sen\, y = \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\, x + \sqrt{3}\cos y = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Comentários

Se $x,y \in [0,\pi]$, temos $0 < senx < 1$ e $0 < seny < 1$.

Isolando $senx$ e $cosx$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\, y + \dfrac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\, x = -\sqrt{3}\cos y - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Elevando as equações ao quadrado e somando, temos:

$$2\left(\underbrace{\cos^2 x + sen^2 x}_{1}\right) = \left(sen^2 y + seny + \frac{1}{4}\right) + \left(3\cos^2 y + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{4}\right)$$

$$2 = \underbrace{sen^2 y + 3\cos^2 y}_{1+2\cos^2 y} + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$2 = 1 + 2\cos^2 y + seny + \sqrt{3}cosy + \frac{1}{2}$$

$$seny = \frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy$$

*Sempre que elevamos uma equação trigonométrica ao quadrado, devemos verificar se as raízes satisfazem ao problema.

Elevando a equação ao quadrado:

$$sen^2 y = \left(\frac{1}{2} - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy\right)^2$$

$$1 - \cos^2 y = \frac{1}{4} + 4\cos^4 y + 3\cos^2 y - 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy + 4\sqrt{3}\cos^3 y$$

$$4\cos^4 y + 4\sqrt{3}\cos^3 y + 2\cos^2 y - \sqrt{3}cosy - \frac{3}{4} = 0$$

$$16\cos^4 y + 16\sqrt{3}\cos^3 y + 8\cos^2 y - 4\sqrt{3}cosy - 3 = 0$$

Substituindo $a = \cos y$, temos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + 8a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Nesse momento, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini para simplificar a equação. Mas, podemos, também, usar a fatoração. Perceba os termos coloridos:

$$16a^4 + 16\sqrt{3}a^3 + \underbrace{8a^2}_{12a^2-4a^2} - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

$$16a^4 + +16\sqrt{3}a^3 + 12a^2 - 4a^2 - 4\sqrt{3}a - 3 = 0$$

Podemos fatorar:

$$4a^2\left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) - \left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) = 0$$

$$(4a^2 - 1)\left(4a^2 + 4\sqrt{3}a + 3\right) = 0$$

Com isso, basta resolver as duas equações quadráticas:

$$4a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm\frac{1}{2}$$

$$4a^2+4\sqrt{3}a+3=0 \Rightarrow a=\frac{-4\sqrt{3}}{8}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ (raiz\ dupla)$$

Agora, devemos testar os valores para encontrar x e y.

Para $a=1/2$:

$$cosy=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{\pi}{3}$$
$$\sqrt{2}sen\ x=-\sqrt{3}\cos y-\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}sen\ x=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$
$$senx=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Mas $senx>0$, então, **não convém**.

Para $a=-1/2$:

$$cosy=-\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{2\pi}{3}$$
$$\sqrt{2}sen\ x=-\sqrt{3}\cos y-\frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}sen\ x=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}$$
$$senx=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}>0\Rightarrow x=\frac{\pi}{12}\ ou\ x=\frac{11\pi}{12}$$

Para $x=\frac{\pi}{12}$:

$$cosx=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$seny=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$cosy=-\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}\sqrt{2}\cos x=sen\ y+\frac{1}{2}\\ \sqrt{2}sen\ x=-\sqrt{3}\cos y-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$\left.\begin{cases}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}\right.\Rightarrow OK!$$

Logo, o par $\left(\frac{\pi}{12};\frac{2\pi}{3}\right)$ é solução do sistema.

Para $x=\frac{11\pi}{12}$:

$$\begin{cases}-\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)=-\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\neq\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{cases}$$

Como a primeira equação não foi satisfeita, $x = \frac{11\pi}{12}$ não é solução do sistema.

Para $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$cosy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{5\pi}{6}$$
$$\sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2}$$
$$\sqrt{2}senx = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$
$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}\ ou\ x = \frac{3\pi}{4}$$

Testando os valores:

Para $x = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}sen\ x = -\sqrt{3}\cos y - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow OK!$$

Portanto, $x = \frac{\pi}{4}$ e $y = \frac{5\pi}{6}$ é solução.

Para $x = \frac{3\pi}{4}$:

$$\sqrt{2}\cos x = sen\ y + \frac{1}{2} \Rightarrow -1 \neq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

Não convém, devido à primeira equação.

Dessa forma, temos apenas dois pares ordenados que satisfazem ao sistema:

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Gabarito: $(x, y) = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{3}\right)\ ou\ (x, y) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$

---

8. (ITA/2015)

Seja n um inteiro positivo tal que $sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$.

a) Determine n.

b) Determine $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Comentários

a) Vamos analisar o valor do seno:

$$sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

Sendo $n \in \mathbb{Z}_+$, temos $\frac{\pi}{2n} < \frac{\pi}{2}$.

Podemos usar a fórmula $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ e tentar encontrar um número que é mais fácil de ser analisado. Calculando o valor do cosseno:

$$\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = 1 - 2\left[\frac{(2-\sqrt{3})}{4}\right] = \frac{4 - 4 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Assim, o valor de n é:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$
$$\Rightarrow n = 6$$

O número $\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$ já caiu várias vezes nas provas do ITA. Vimos na teoria que esse número resulta de $sen\left(\frac{\pi}{12}\right)$. Poderíamos escrever diretamente:

$$sen\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = sen\left(\frac{\pi}{2n}\right) \Rightarrow n = 6$$

b) Vamos usar a fórmula $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - 2sen^2\left(\frac{\pi}{24}\right)$$
$$sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2}}$$

Encontrando o valor de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{1-\left(\frac{2-\sqrt{3}}{4}\right)} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{8}} = \sqrt{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{8}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo esse valor na equação de $sen\left(\frac{\pi}{24}\right)$:

$$sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}} = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$$
$$\Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$$

Gabarito: a) $n = 6$ b) $sen\left(\frac{\pi}{24}\right) = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{6}-2\sqrt{2}}}{4}$

---

9. (ITA/2015)

Sejam α e β números reais tais que $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in]0, 2\pi[$ e satisfazem as equações

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{1}{5}$$

e

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right) = \frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right) + \frac{3}{7}$$

Então, o menor valor de $\cos(\alpha+\beta)$ é igual a

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) 0

Comentários

Vamos resolver cada equação separadamente:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{4}{5}\cos^4\left(\frac{\alpha}{2}\right)+\frac{1}{5}$$

Fazendo $x=\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$:

$$x=\frac{4}{5}x^2+\frac{1}{5}$$
$$4x^2-5x+1=0$$

Raízes:

$$x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=1\ ou\ \frac{1}{4}$$

Encontrando os valores de α:

I) $x=1$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=1\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm1\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\alpha=2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\alpha\in]0,2\pi[$, para esses valores de α, não temos solução, pois 0 e 2π não pertencem a esse intervalo.

II) $x=1/4$:

$$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\alpha=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Para $\alpha\in]0,2\pi[$:

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}\ ou\ \alpha=\frac{4\pi}{3}$$

Encontramos os valores possíveis de α. Vamos resolver a outra equação:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{4}{7}\cos^4\left(\frac{\beta}{3}\right)+\frac{3}{7}$$

Fazendo $y=\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)$:

$$7y=4y^2+3$$
$$4y^2-7y+3=0$$

Raízes:

$$y=\frac{7\pm\sqrt{1}}{8}=1\ ou\ \frac{3}{4}$$

Encontrando os valores de β:

III) $y=1$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=1\Rightarrow\cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=\pm1\Rightarrow\frac{\beta}{3}=k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\beta=3k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

Como $\beta\in]0,2\pi[$, não temos solução para esse caso.

IV) $y=3/4$:

$$\cos^2\left(\frac{\beta}{3}\right)=\frac{3}{4}\Rightarrow\cos\left(\frac{\beta}{3}\right)=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow\frac{\beta}{3}=\pm\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

$$\beta = \pm\frac{\pi}{2} + 3k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$\beta \in]0, 2\pi[\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

Com os valores de α e β, vamos calcular os valores de $\cos(\alpha + \beta)$:

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Portanto, o menor valor é:

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: "b".

10. (ITA/2014)

Determine o conjunto de todos os valores de $x \in [0,2\pi]$ que satisfazem simultaneamente, a

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

e

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}cotgx\right)cotgx$$

Comentários

Vamos resolver cada inequação separadamente:

$$\frac{2sen^2x + senx - 1}{\cos x - 1} < 0$$

Nessa inequação, temos duas funções:

$$f(x) = 2sen^2x + senx - 1$$
$$g(x) = cosx - 1$$

Como condição de existência, temos$g(x) \neq 0$:

$$cosx \neq 1$$

Como $-1 \leq cosx < 1$, a função g sempre é negativa:

$$-1 \leq cosx < 1$$
$$-2 \leq cosx - 1 < 0$$
$$-2 \leq g(x) < 0$$

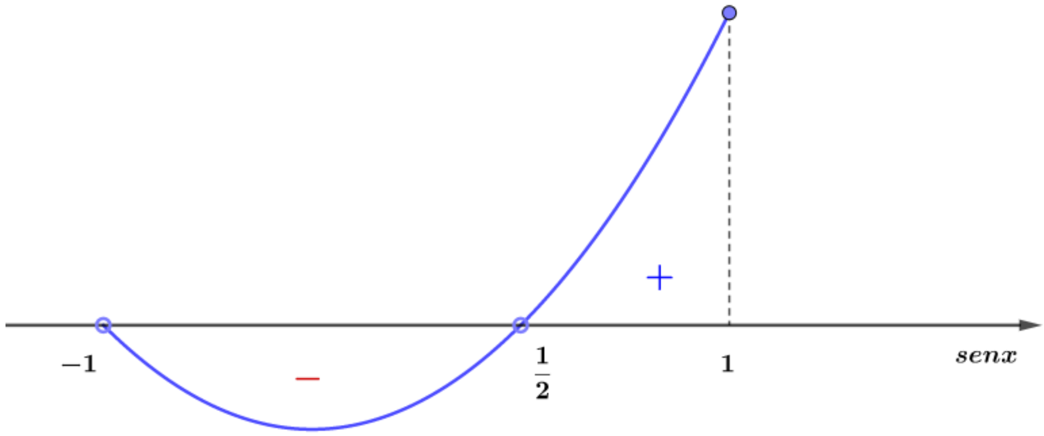
Portanto, devemos ter:

$$2sen^2x + senx - 1 > 0$$

Raízes da equação:

$$senx = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = -1 \; ou \, \frac{1}{2}$$
$$2(senx + 1)\left(senx - \frac{1}{2}\right) > 0$$

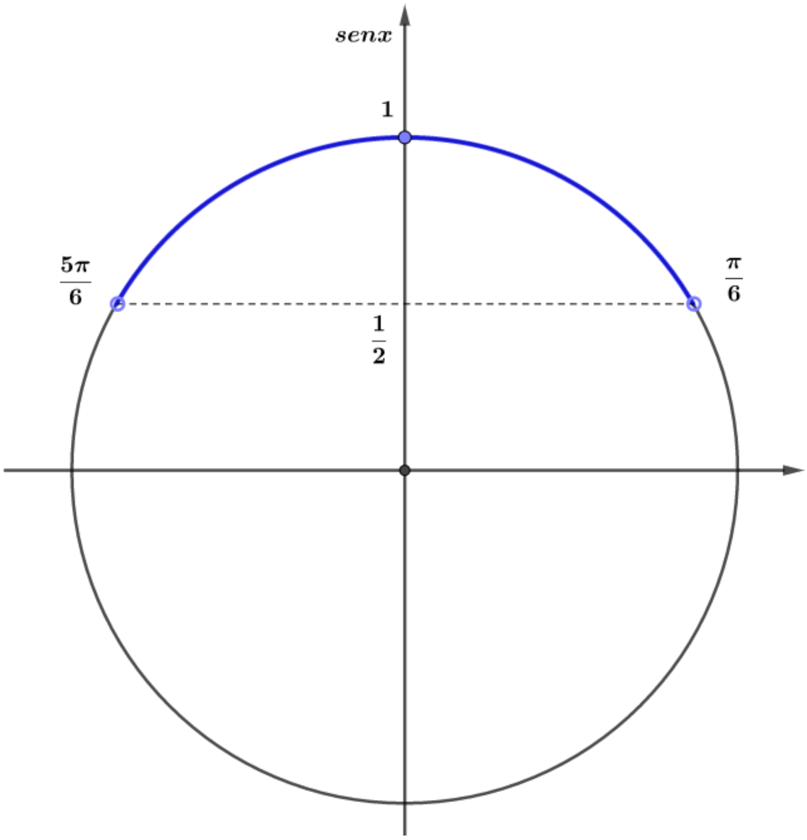
Analisando o sinal, temos:



Pela figura, vemos que $\frac{1}{2} < senx \leq 1$:

$$\frac{1}{2} < senx \leq 1$$

Usando o ciclo trigonométrico:



Podemos ver que $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$.

$$S_1 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Resolvendo a outra inequação:

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \sqrt{3}cotgx\right)cotgx$$

$$tgx + \sqrt{3} < \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{tgx}\right)\left(\frac{1}{tgx}\right)$$

$$tgx + \sqrt{3} < \frac{tgx + \sqrt{3}}{tg^2x}$$

$$\frac{tg^2x(tgx+\sqrt{3})-(tgx+\sqrt{3})}{tg^2x}<0$$

$$\frac{(tg^2x-1)(tgx+\sqrt{3})}{tg^2x}<0$$

$$\Rightarrow (tg^2x-1)(tgx+\sqrt{3})<0$$

Substituindo $tgx = y$:

$$(y^2-1)(y+\sqrt{3})<0$$

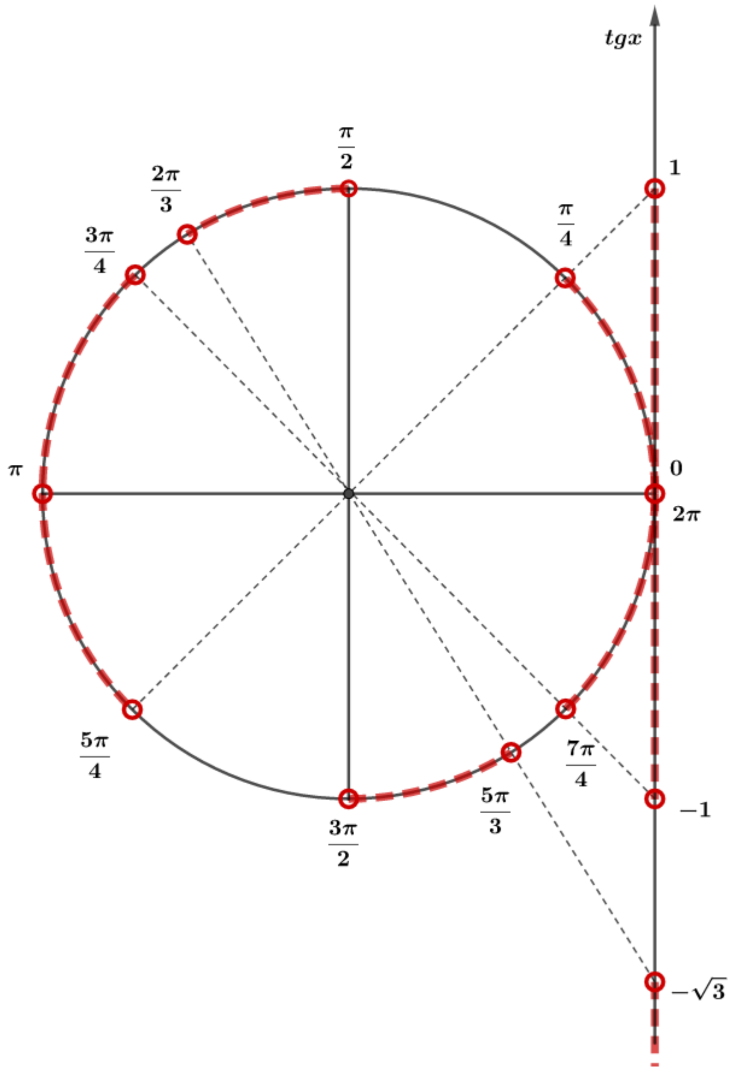
Analisando o sinal, temos a seguinte tabela:

y		$-\sqrt{3}$		-1		1	
y^2-1	$+$		$+$		$-$		$+$
$y+\sqrt{3}$	$-$		$+$		$+$		$+$
$(y^2-1)(y+\sqrt{3})$	$-$		$+$		$-$		$+$

Os valores de $\boldsymbol{y}$ que satisfazem a inequação são dados por:

$$\boldsymbol{y < -\sqrt{3}\ ou -1 < y < 1}$$

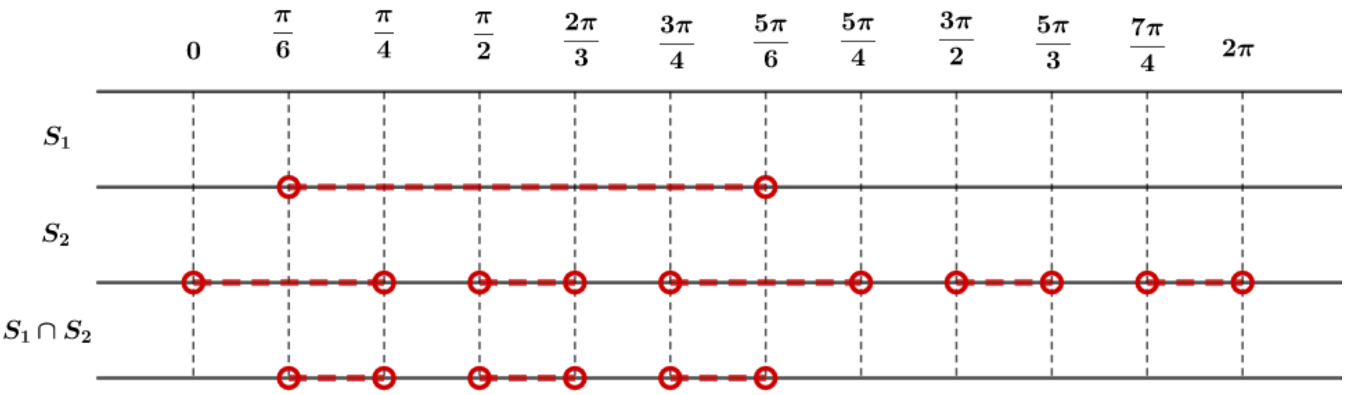
Usando o ciclo trigonométrico:



Podemos ver que a solução dessa inequação é dada por:

$$S_2 = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right) \cup \left(\pi, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$$

Fazendo a intersecção das soluções, temos:



Portanto, a solução do problema é dada por:

$$S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$$

Gabarito: $S = S_1 \cap S_2 = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right)$

11. (ITA/2013)

Determine o maior domínio $D \subset \mathbb{R}$ da função $f: D \to \mathbb{R}, f(x) = \log_{x\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}(4senxcosx - 1)$.

Comentários

Vamos verificar as condições de existência da função f:

$$\begin{cases} 4senxcosx - 1 > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0 \\ x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \neq 1 \end{cases}$$

Analisando cada restrição, temos:

I) $4senxcosx - 1 > 0$

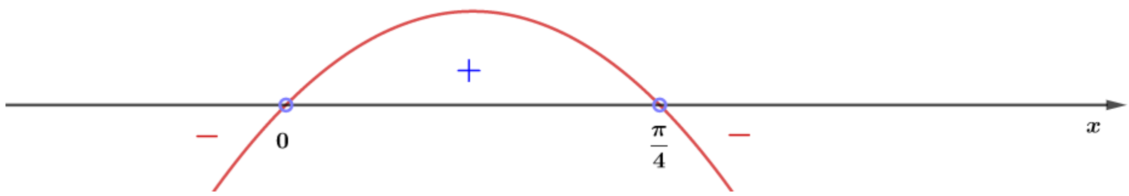
$$2sen(2x) - 1 > 0$$

$$sen(2x) > \frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6} + 2k\pi < 2x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

II) $x\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > 0$



$$\Rightarrow 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

III) $x(\frac{\pi}{4} - x) \neq 1$

Desenvolvendo a equação:

$$-x^2 + \pi x - 4 \neq 0$$

Verificando o discriminante:

$$\Delta = \pi^2 - 16 < 0$$

Logo, a equação não possui raízes e por isso é diferente de zero para qualquer valor de x.

Fazendo a intersecção dos resultados:

$$\frac{\pi}{12} + k\pi < x < \frac{5\pi}{12} + k\pi \ e \ 0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12} < x < \frac{\pi}{4}$$

Dessa forma, o maior domínio da função é dada por:

$$D = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Gabarito: $D = \left(\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4}\right)$

---

12. (ITA/2013)

Sejam a um número real e n o número de todas as soluções reais e distintas $x \in [0, 2\pi]$ da equação $\cos^8 x - sen^8 x + 4sen^6 x = a$. Das afirmações:

I. Se $a = 0$, então $n = 0$;

II. Se $a = 1/2$, então $n = 8$;

III. Se $a = 1$, então $n = 7$;

IV. Se $a = 3$, então $n = 2$,

É (são) verdadeira(s)

a) apenas I.

b) apenas III.

c) apenas I e III.

d) apenas II e IV.

e) todas.

Comentários

Inicialmente, vamos escrever a equação em função de $senx$:

$$\cos^8 x - sen^8 x + 4sen^6 x = a$$
$$(1 - sen^2 x)^4 - sen^8 x + 4sen^6 x - a = 0$$

Simplificando:

$$(1 - 2sen^2 x + sen^4 x)^2 - sen^8 x + 4sen^6 x - a = 0$$
$$1 + 4sen^4 x + sen^8 x - 4sen^2 x + 2sen^4 x - 4sen^6 x - sen^8 x + 4sen^6 x - a = 0$$
$$6sen^4 x - 4sen^2 x - a + 1 = 0$$

Vamos analisar as afirmações:

I. Para $a = 0$, temos:

$$6sen^4 x - 4sen^2 x + 1 = 0$$
$$\Delta = 16 - 24 = -8 < 0$$

Como $\Delta < 0$, não temos solução real nesse caso. Logo, $n = 0$. Verdadeira.

II. Para $a = 1/2$:

$$6sen^4x - 4sen^2x + \frac{1}{2} = 0$$
$$sen^2x = \frac{2 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{1}{2}\ ou\ \frac{1}{6}$$
$$\Rightarrow senx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}$$

Como $x \in [0, 2\pi]$, temos:

$$senx = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4\ soluções\ (\text{2 para seno positivo e 2 para seno negativo})$$
$$senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} \Rightarrow 4\ soluções$$

Nesse caso, temos 4 soluções para cada valor de seno. Então, $n = 8$. Verdadeira.

III. Para $a = 1$:

$$6sen^4x - 4sen^2x = 0$$
$$2sen^2x(3sen^2x - 2) = 0$$
$$sen^2x = 0\ ou\ sen^2x = \frac{2}{3}$$
$$\Rightarrow senx = 0\ ou\ senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$senx = 0 \Rightarrow x = 0, \pi, 2\pi\ (3\ soluções)$$
$$senx = \pm\frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow 4\ soluções$$
$$\Rightarrow n = 7$$

∴Verdadeira

IV. Para $a = 3$:

$$6sen^4x - 4sen^2x - 2 = 0$$
$$3sen^4x - 2sen^2x - 1 = 0$$
$$sen^2x = \frac{1 \pm \sqrt{4}}{3} = 1\ ou\ -\frac{1}{3}$$
$$\Rightarrow senx = \pm 1\ (2\ soluções)$$
$$\Rightarrow sen^2x = -\frac{1}{3}\ (não\ convém)$$
$$\Rightarrow n = 2$$

∴Verdadeira

Gabarito: "e".

13. (ITA/2013)

Encontre os pares $(\alpha, \beta) \in]0, \frac{\pi}{2}[\times]0, \frac{\pi}{2}[$ que satisfazem simultaneamente as equações

$(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$ e $\sqrt{3}sen(\alpha + \beta) + \cos(\alpha + \beta) = \sqrt{3}$.

Comentários

Vamos resolver cada equação separadamente:

$$(tg\alpha + cotg\beta)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$
$$\left(\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} + \frac{cos\beta}{sen\beta}\right)cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$
$$\frac{(sen\alpha sen\beta + cos\alpha cos\beta)}{sen\beta cos\alpha}cos\alpha sen\beta - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$
$$\cos(\alpha - \beta) - 2\cos^2(\alpha - \beta) = -1$$

$$2\cos^2(\alpha-\beta)-\cos(\alpha-\beta)-1=0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{1\pm\sqrt{9}}{4}=1\ ou -\frac{1}{2}$$
$$\cos(\alpha-\beta)=1\Rightarrow\alpha-\beta=2k\pi,k\in\mathbb{Z}\ (I)$$
$$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\alpha-\beta=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\ (II)$$

Como $(\alpha,\beta)\in]0,\pi/2[\ x\ ]0,\pi/2[$, temos:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$
$$0<\beta<\frac{\pi}{2}\Rightarrow-\frac{\pi}{2}<-\beta<0$$
$$-\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$$

Dessa forma, podemos escrever de (I):

$$\alpha-\beta=0$$

Para a outra equação, temos:

$$\sqrt{3}sen(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+\beta)=\sqrt{3}$$

O bizu agora é perceber os termos escondidos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}sen(\alpha+\beta)+\frac{1}{2}\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)sen(\alpha+\beta)+sen\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$sen\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ (III)$$

Ou

$$\Rightarrow\alpha+\beta+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$
$$\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\ \ (IV)$$

Como $(\alpha,\beta)\in]0,\pi/2[\ x\ ]0,\pi/2[$, temos:

$$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$$
$$0<\beta<\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow0<\alpha+\beta<\pi$$

De (III) e (IV), temos:

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\ ou\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$$

Assim, encontramos dois sistemas:

$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{6}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{12}\ e\ \beta=\frac{\pi}{12}$$
$$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}\end{cases}\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}\ e\ \beta=\frac{\pi}{4}$$

Portanto, encontramos dois pares ordenados que satisfazem simultaneamente as equações:

$$S=\left\{\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right);\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S=\left\{\left(\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{12}\right);\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)\right\}}$

14. (ITA/2012)

Determine os valores reais de x de modo que $sen(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$ seja máximo.

Comentários

Perceba os termos escondidos na expressão:

$$sen(2x)-\sqrt{3}\cos(2x)$$
$$2\left(\frac{1}{2}sen(2x)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(2x)\right)$$
$$2\left(sen(2x)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-sen\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)\right)$$
$$2sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$$

Seja $f(x)=2sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$, queremos x que torne f máximo. O maior valor que f assume ocorre quando o seno for igual a 1:

$$sen\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=1$$
$$2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
$$2x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$
$$x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Gabarito: $\boldsymbol{x=\frac{5\pi}{12}+k\pi, k\in\mathbb{Z}}$

15. (ITA/2010)

Se os números reais α e β, com $\alpha+\beta=\left(\frac{4\pi}{3}\right), 0\le\alpha\le\beta$, maximizam a soma $sen\alpha+sen\beta$, então α é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$

b) $\frac{2\pi}{3}$

c) $\frac{3\pi}{5}$

d) $\frac{5\pi}{8}$

e) $\frac{7\pi}{12}$

Comentários

Do enunciado, temos:

$$\alpha+\beta=\frac{4\pi}{3}$$

A soma do seno é dada por:

$$sen\alpha+sen\beta=2sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\pi}{3}$$

$$sen\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow sen\alpha+sen\beta=\frac{2\sqrt{3}}{2}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sqrt{3}\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

A soma é máxima quando o cosseno é igual a 1:

$$\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=1$$

$$\begin{cases}\dfrac{\alpha-\beta}{2}=2k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \alpha+\beta=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\alpha-\beta=4k\pi, k\in\mathbb{Z}\\ \alpha+\beta=\dfrac{4\pi}{3}\end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$2\alpha=\frac{4\pi}{3}+4k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

$$\beta=\frac{4\pi}{3}-\alpha$$

$$\Rightarrow \beta=\frac{2\pi}{3}-2k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

Das condições do problema:

$$0\le\alpha\le\beta$$

$$0\le\frac{2\pi}{3}+2k\pi\le\frac{2\pi}{3}-2k\pi$$

$$0\le\frac{1}{3}+k\le\frac{1}{3}-k$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\le k\le 0$$

Como $k\in\mathbb{Z}$, devemos ter $k=0$:

Assim, o valor de α é dado por:

$$\alpha=\frac{2\pi}{3}+2k\pi=\frac{2\pi}{3}$$

Gabarito: "b".

---

16. (ITA/2010)

Considere a equação

$$(3-2\cos^2 x)\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)-6tg\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

a) Determine todas as soluções x no intervalo $[0,\pi[$.

b) Para as soluções encontradas em a), determine $cotgx$.

Comentários

a) Resolvendo a equação:

$$(3-2\cos^2 x)\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)-6tg\left(\frac{x}{2}\right)=0$$

$$(3-2\cos^2 x)\left(1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right)=6tg\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$(3-2\cos^2 x)\left(1+\frac{sen^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{6sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$(3-2\cos^2 x)\left(\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{6sen\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$3-2\cos^2 x=6sen\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$3-2\cos^2 x=3senx$$

$$3-2(1-sen^2x)=3senx$$

$$2sen^2x-3senx+1=0$$

Raízes:

$$senx=\frac{3\pm\sqrt{1}}{4}=1\ ou\ \frac{1}{2}$$

Como $x\in[0,\pi[$, temos:

$$senx=1\Rightarrow x=\frac{\pi}{2}$$

$$senx=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}\ ou\ x=\frac{5\pi}{6}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$$

b) Calculando os valores de $cotgx$:

$$cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}$$

$$cotg\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$$

Gabarito: a) $S=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right\}$ b) $cotg\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}; cotg\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\sqrt{3}; cotg\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$

17. (ITA/2008)

Determine todos os valores de $\alpha\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ tais que a equação (em x) $x^4-2\sqrt[4]{3}x^2+tg\alpha=0$ admita apenas raízes reais e simples.

Comentários

Podemos fazer a seguinte substituição $y=x^2\geq 0$:

$$y^2-2\sqrt[4]{3}y+tg\alpha=0$$

Para essa equação ter apenas raízes reais simples, devemos ter:

$$\Delta>0$$

$$\left(2\sqrt[4]{3}\right)^2-4tg\alpha>0$$

$$4\sqrt{3}>4tg\alpha$$

$$tg\alpha<\sqrt{3}$$

*Não podemos ter $\Delta \geq 0$, pois caso $\Delta = 0$, teríamos uma raiz dupla em y e consequentemente geramos 2 raízes duplas em x.

Com essa condição, temos 2 raízes em y distintas. Como $y = x^2 > 0$, a menor raiz deve ser maior que zero. Encontrando a menor raiz:

$$y = \frac{2\sqrt[4]{3} - \sqrt{4\sqrt{3} - 4tg\alpha}}{2}$$
$$y = \sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha}$$
$$y > 0$$
$$\sqrt[4]{3} - \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha} > 0$$
$$\sqrt[4]{3} > \sqrt{\sqrt{3} - tg\alpha}$$

Já que ambos os termos dessa inequação são positivos (devido à condição $tg\alpha > 0$), temos:

$$\sqrt{3} > \sqrt{3} - tg\alpha$$
$$tg\alpha > 0$$

Assim, devemos satisfazer as seguintes condições:

$$\begin{cases} 0 < tg\alpha < \sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Os valores de α são dados por:

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$

---

18. (ITA/2008)

A soma de todas as soluções distintas da equação

$$\cos 3x + 2\cos 6x + \cos 9x = 0,$$

Que estão no intervalo $0 \leq x \leq \pi/2$, é igual a

a) 2π

b) $\frac{23}{12}\pi$

c) $\frac{9}{6}\pi$

d) $\frac{7}{6}\pi$

e) $\frac{13}{12}\pi$

Comentários

Vamos transformar a seguinte soma em produto usando a fórmula de Prostaférese:

$$\cos 3x + \cos 9x = 2\cos\left(\frac{9x + 3x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x - 3x}{2}\right) = 2\cos(6x)\cos(3x)$$

Assim, temos:

$$\cos(3x) + 2\cos(6x) + \cos(9x) = 0$$
$$2\cos(6x) + 2\cos(6x)\cos(3x) = 0$$
$$2\cos(6x)\,(1 + \cos(3x)) = 0$$

Encontrando as raízes:

$$\cos(6x) = 0 \Rightarrow 6x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

Ou

$$1 + \cos(3x) = 0 \Rightarrow \cos(3x) = -1 \Rightarrow 3x = \pi + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Queremos a soma de todas as soluções no intervalo $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \; ou \; x = \frac{\pi}{4} \; ou \; x = \frac{5\pi}{12}$$

$$x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{3}$$

$$S = \frac{13\pi}{12}$$

Gabarito: "e".

---

19. (ITA/2007)

Seja x um número real no intervalo $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Assinale a opção que indica o comprimento do menor intervalo que contém todas as soluções da desigualdade

$$\frac{1}{2} tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sqrt{3}\left(\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}\right)\sec(x) \geq 0.$$

a) $\frac{\pi}{2}$

b) $\frac{\pi}{3}$

c) $\frac{\pi}{4}$

d) $\frac{\pi}{6}$

e) $\frac{\pi}{12}$

Comentários

Devemos simplificar a expressão. Perceba que o ângulo da tangente é complementar, então:

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{tgx} = cotgx$$

O termo $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{2}$ é a fórmula do arco metade:

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

Para $\alpha = x/2$:

$$\cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$$

Reescrevendo a inequação:

$$\frac{1}{2} cotgx - \sqrt{3}\left(\frac{1 + \cos(x)}{2} - \frac{1}{2}\right) secx \geq 0$$

$$cotgx - \frac{\sqrt{3}\cos(x)}{\cos(x)} \geq 0$$

$$cotgx \geq \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{tgx} \geq \sqrt{3}$$

$$tgx \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in \,]0, \pi/2[$, temos:

$$0 < tgx < \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$0 < x < \frac{\pi}{6}$$

O comprimento desse intervalo é:

$$I = \frac{\pi}{6}$$

Gabarito: "d".

---

20. (ITA/2006)

Determine para quais valores de $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ vale a desigualdade

$$\log_{cosx}(4sen^2x - 1) - \log_{cosx}(4 - \sec^2 x) > 2.$$

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência dos logaritmos:

$$cosx > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$cosx \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$$
$$4sen^2x - 1 > 0 \Rightarrow sen^2x > \frac{1}{4} \Rightarrow senx > \frac{1}{2} \text{ ou } senx < -\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$$
$$4 - \sec^2 x > 0 \Rightarrow \sec^2 x < 4 \Rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} < 4$$

Como $\cos^2 x > 0$ e $cosx > 0$:

$$\cos^2 x > \frac{1}{4} \Rightarrow cosx > \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$$

Fazendo a intersecção das condições, obtemos:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right)$$

Resolvendo a inequação:

$$\log_{\cos x}\left(\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x}\right) > 2$$

Como $0 < cosx < 1$, a desigualdade fica:

$$\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x} < \cos^2 x$$
$$\frac{4sen^2x - 1}{4 - \sec^2 x} - \cos^2 x < 0$$
$$\frac{4sen^2x - 1 - 4\cos^2 x + \underbrace{\sec^2 x \cos^2 x}_{1}}{4 - \sec^2 x} < 0$$
$$\frac{4sen^2x - 4\cos^2 x}{4 - \sec^2 x} < 0$$

Da condição de existência, temos $4 - \sec^2 x > 0$, assim, temos:

$$4sen^2x - 4\cos^2 x < 0$$
$$sen^2x < \cos^2 x$$
$$tg^2x < 1$$

$$-1 < tgx < 1$$
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

Fazendo a intersecção com a condição de existência, encontramos a solução:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$$

Gabarito: $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$

21. (ITA/2006)

Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \sqrt{77}sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right]$ e seja B o conjunto dado por $B = \{x \in \mathbb{R}: f(x) = 0\}$. Se m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$ e n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$, então $m + n$ é igual a

a) $\frac{2\pi}{15}$

b) $\frac{\pi}{15}$

c) $-\frac{\pi}{30}$

d) $-\frac{\pi}{15}$

e) $-\frac{2\pi}{15}$

Comentários

Vamos encontrar o conjunto B, de acordo com o enunciado:

$$f(x) = 0$$
$$\sqrt{77}sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$
$$sen\left[5\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\right] = 0$$
$$5\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{k\pi}{5} - \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$$

m é o maior elemento de $B \cap (-\infty, 0)$:

$$B \cap (-\infty, 0) = \left\{-\frac{\pi}{6}; -\frac{11\pi}{30}; -\frac{17\pi}{30}; \dots\right\}$$

O maior elemento desse conjunto é:

$$m = -\frac{\pi}{6}$$

n é o menor elemento de $B \cap (0, +\infty)$:

$$B \cap (0, +\infty) = \left\{\frac{\pi}{30}; \frac{7\pi}{30}; \frac{13\pi}{30}; \dots\right\}$$
$$n = \frac{\pi}{30}$$

Calculando $m + n$:

$$m + n = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{30} = -\frac{4\pi}{30} = -\frac{2\pi}{15}$$

Gabarito: "e".

22. (ITA/2006)

O conjunto solução de $(tg^2x - 1)(1 - cotg^2x) = 4, x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$, é

a) $\left\{\left(\frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\left\{\left(\frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\left\{\left(\frac{\pi}{8}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

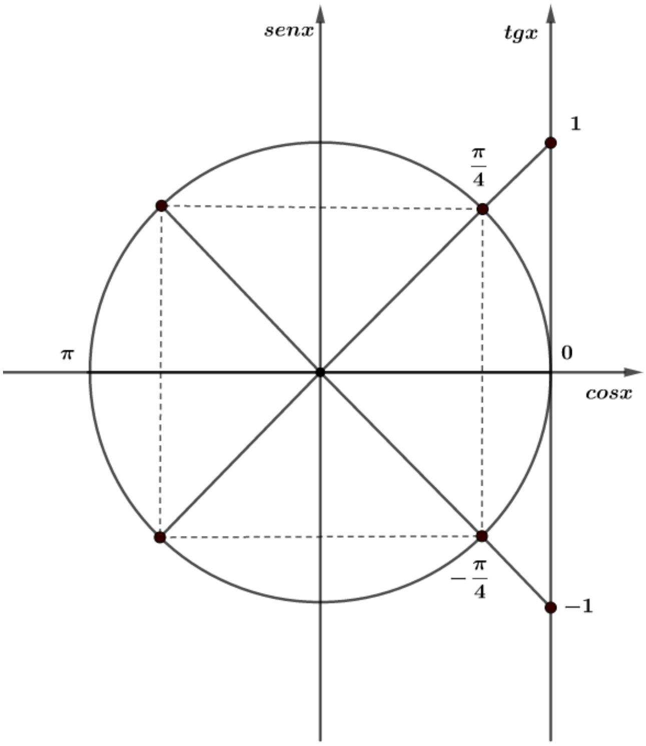
e) $\left\{\left(\frac{\pi}{12}\right) + \left(\frac{k\pi}{4}\right), k \in \mathbb{Z}\right\}$

Comentários

Simplificando a expressão:

$$\left(\frac{sen^2x}{\cos^2 x} - 1\right)\left(1 - \frac{\cos^2 x}{sen^2x}\right) = 4$$
$$\frac{(sen^2x - \cos^2 x)}{\cos^2 x}\left(\frac{sen^2x - \cos^2 x}{sen^2x}\right) = 4$$
$$(sen^2x - \cos^2 x)^2 = 4sen^2xcos^2x$$
$$(-\cos(2x))^2 = (2senxcosx)^2$$
$$\cos^2(2x) = sen^2(2x)$$
$$tg^2(2x) = 1$$
$$tg(2x) = \pm 1$$

Pelo ciclo trigonométrico, podemos ver que:



$$2x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$
$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Gabarito: “d”.

23. (ITA/2005)

O intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções da inequação

$$\arctan\left[\frac{1+x}{2}\right] + \arctan\left[\frac{1-x}{2}\right] \geq \frac{\pi}{6}$$

É

a) $[-1, 4]$

b) $[-3, 1]$

c) $[-2, 3]$

d) $[0, 5]$

e) $[4, 6]$

Comentários

Fazendo $\alpha = \arctan\left(\frac{1+x}{2}\right)$ e $\beta = \arctan\left(\frac{1-x}{2}\right)$, temos:

$$tg\alpha = \frac{1+x}{2}$$
$$tg\beta = \frac{1-x}{2}$$

Analisando a inequação:

$$tg(\alpha+\beta) \geq tg\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{\frac{1+x}{2} + \frac{1-x}{2}}{1 - \left(\frac{1+x}{2}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right)} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{4}{4-(1-x^2)} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\frac{4}{3+x^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$12 \geq 3\sqrt{3} + \sqrt{3}x^2$$
$$\frac{12}{\sqrt{3}} - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \geq x^2$$
$$x^2 \leq 4\sqrt{3} - 3$$
$$-\sqrt{4\sqrt{3}-3} \leq x \leq \sqrt{4\sqrt{3}-3}$$

Usando a aproximação $\sqrt{3} \cong 1{,}7$, temos:

$$-\sqrt{4 \cdot 1{,}7 - 3} \leq x \leq \sqrt{4 \cdot 1{,}7 - 3}$$
$$-\sqrt{3{,}4} \leq x \leq \sqrt{3{,}4}$$
$$-2 < -\sqrt{3{,}4} \leq x \leq \sqrt{3{,}4} < 2$$

Analisando as alternativas, vemos que o intervalo $I \subset \mathbb{R}$ que contém todas as soluções é:

$$I = [-2, 3]$$

Gabarito: "c".

24. (ITA/2005)

Obtenha todos os pares (x, y), com $x, y \in [0, 2\pi]$, tais que

$$sen(x+y) + sen(x-y) = \frac{1}{2}$$

$$senx + cosy = 1$$

Comentários

Desenvolvendo a primeira equação, encontramos:

$$senxcosy + senycosx + senxcosy - senycosx = \frac{1}{2}$$

$$2senxcosy = \frac{1}{2}$$

$$senxcosy = \frac{1}{4}$$

Usando a segunda equação:

$$senx = 1 - cosy$$

Substituindo na primeira:

$$(1 - cosy)cosy = \frac{1}{4}$$

$$\cos^2 y - cosy + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\cos y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Substituindo $\cos y = 1/2$ na segunda equação:

$$senx\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

$$senx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \ ou\ x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Como $x, y \in [0, 2\pi]$, temos:

$$y = \frac{\pi}{3}\ ou\ y = \frac{5\pi}{3}$$

$$x = \frac{\pi}{6}\ ou\ x = \frac{5\pi}{6}$$

Portanto, os pares ordenados que satisfazem as equações são dados por:

$$(x, y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$$

Gabarito: $(x, y) \in \left\{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right); \left(\frac{5\pi}{6}; \frac{5\pi}{3}\right)\right\}$

---

25. (ITA/2004)

Determine os valores reais do parâmetro a para os quais existe um número real x satisfazendo $\sqrt{1 - x^2} \geq a - x$.

Comentários

Temos uma inequação paramétrica. Um bizu para resolver esse tipo de questão é observar o termo $\sqrt{1 - x^2}$. Podemos usar a trigonometria para resolvê-la. Veja:

Analisando a condição de existência:

$$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

x deve pertencer ao intervalo $[-1; 1]$. Então, podemos fazer a seguinte substituição:

$$x = sen\alpha, \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Assim, temos:

$$\sqrt{\underbrace{1 - sen^2\alpha}_{\cos^2\alpha}} \geq a - sen\alpha$$

Como $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, temos $cos\alpha \geq 0$. Então:

$$cos\alpha \geq a - sen\alpha$$
$$sen\alpha + cos\alpha \geq a$$

Temos uma expressão clássica. Vamos multiplicar a inequação por $\sqrt{2}/2$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} sen\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} cos\alpha \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$sen\alpha \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + sen\left(\frac{\pi}{4}\right) cos\alpha \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$
$$sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Sabemos que o máximo valor da função seno é 1:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq sen\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

Assim, a inequação possui solução real para a satisfazendo:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leq 1$$
$$a \leq \sqrt{2}$$

*Podemos resolver essa questão usando geometria analítica. Estudaremos o método na aula de geometria analítica.

Gabarito: $a \leq \sqrt{2}$

---

26. (IME/2020)

Todos os arcos entre 0 e 2π radianos que satisfazem a desigualdade

$$senx - \frac{1}{2} > \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

a) $\frac{\pi}{12}$ e $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{12}$ e $\frac{7\pi}{12}$

c) $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{2}$

e) $\frac{5\pi}{6}$ e $\frac{11\pi}{12}$

Comentários

Reescrevendo a inequação, temos:

$$\boldsymbol{senx - \cos x > \frac{\sqrt{3} + 1}{2}}$$

O membro à esquerda pode ser reescrito do seguinte modo:

$$senx - \cos x = \sqrt{2}\left(senx\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos x\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(senx \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos x\, sen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$\therefore senx - \cos x = \sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Assim, temos:

$$\sqrt{2} \cdot sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2} \Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

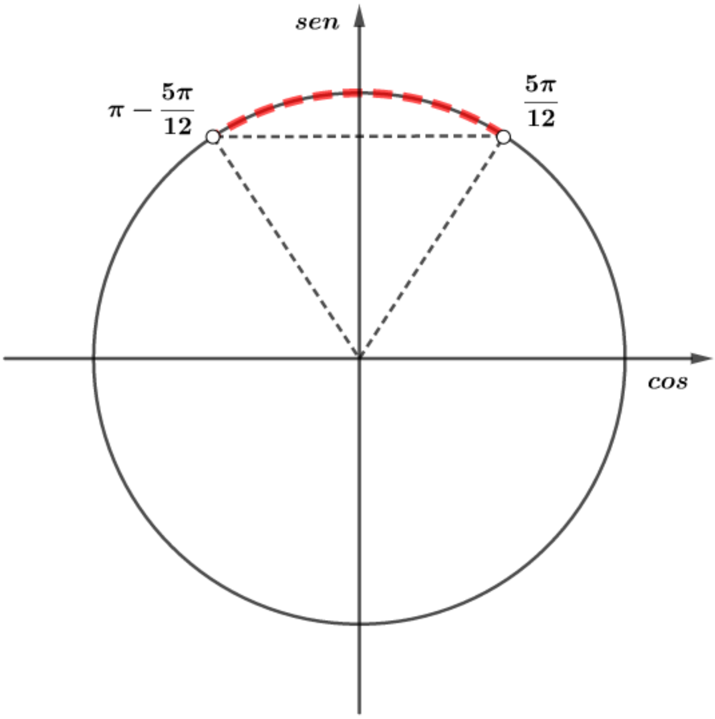
$$\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

O número à direita é um valor conhecido de seno, ele é o seno de $75°$:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = sen(75°) = sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow sen\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > sen\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

Para resolver essa inequação, podemos fazer uso do ciclo trigonométrico:



Observando o ciclo, podemos ver que os ângulos que satisfazem à inequação devem satisfazer a seguinte condição:

$$\frac{5\pi}{12} < x - \frac{\pi}{4} < \pi - \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi}{4} < x < \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{8\pi}{12} < x < \frac{10\pi}{12}$$

$$\therefore \boxed{\frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}}$$

Gabarito: "c".

27. (IME/2019)

Seja um triângulo ABC com lados a, b e c opostos aos ângulos $\hat{A}, \hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente. Os lados a, b e c formam uma progressão aritmética nesta ordem. Determine a relação correta entre as funções trigonométricas dos ângulos dos vértices desse triângulo.

a) $2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

b) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = cos(\hat{A}) + cos(\hat{C})$

c) $2sen(\hat{A}-\hat{C}) = sen(\hat{A}) - sen(\hat{C})$

d) $2cos(\hat{A}-\hat{C}) = cos(\hat{A}) - cos(\hat{C})$

e) $2cos(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})$

Comentários

Como (a, b, c) formam uma PA, podemos escrever:

$$\boxed{2b = a + c} \ (I)$$

A questão pede as relações trigonométricas dos ângulos do triângulo. Podemos usar a lei dos senos para relacionar os lados e os ângulos internos. Então, temos:

$$\frac{a}{sen(\hat{A})} = \frac{b}{sen(\hat{B})} = \frac{c}{sen(\hat{C})} = 2R$$

$$\begin{cases} a = 2Rsen(\hat{A}) \\ b = 2Rsen(\hat{B}) \\ c = 2Rsen(\hat{C}) \end{cases}$$

R é o raio da circunferência circunscrita ao ΔABC.

Vamos substituir essas relações na equação (I):

$$2\left(2Rsen(\hat{B})\right) = 2Rsen(\hat{A}) + 2Rsen(\hat{C})$$

$$\boxed{2sen(\hat{B}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})} \ (II)$$

Nas alternativas, podemos ver que devemos substituir o ângulo $\hat{B}$. Usando a relação dos ângulos internos do ΔABC, temos:

$$\hat{B} = \pi - (\hat{A} + \hat{C})$$

$$\Rightarrow sen(\hat{B}) = sen\left(\pi - (\hat{A}+\hat{C})\right) = sen(\hat{A}+\hat{C})$$

Portanto:

$$\boxed{2sen(\hat{A}+\hat{C}) = sen(\hat{A}) + sen(\hat{C})}$$

Gabarito: "a".

28. (IME/2019)

Determine todas as soluções da equação

$$4sen^2(7x) \cdot \cos(2x) + 2sen(9x) + 8sen^2(x) + 5\cos(2x) + 2sen(5x) = 4$$

no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$.

Comentários

Para encontrar as soluções da equação, devemos simplificá-lo:

$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2sen(9x)+8sen^2(x)+5\,cos(2x)+2sen(5x)=4$$

$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2\big(sen(9x)+sen(5x)\big)+4(2sen^2(x)-1)+5\,cos(2x)=0$$

Sabendo que:

$$sen(p)+sen(q)=2sen\left(\frac{p+q}{2}\right)cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(2x)=1-sen^2(x)$$

Temos:

$$sen(9x)+sen(5x)=2sen\left(\frac{9x+5x}{2}\right)cos\left(\frac{9x-5x}{2}\right)=2sen(7x)\cos(2x)$$
$$2sen^2(x)-1=-\cos(2x)$$

Desse modo, a equação pode ser reescrita como:

$$\Rightarrow 4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+2(2sen(7x)\cos(2x))+4(-\cos(2x))+5\,cos(2x)=0$$
$$4sen^2(7x)\cdot cos(2x)+4sen(7x)\cos(2x)+\cos(2x)=0$$
$$\cos(2x)\,(4sen^2(7x)+4sen(7x)+1)=0$$
$$\Rightarrow \cos(2x)\,(2sen(7x)+1)^2=0$$

Assim:

$$I)\ \cos(2x)=0\Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, devemos ter:

$$\boxed{x=\frac{7\pi}{4}}$$

$$II)\ 2sen(7x)+1=0\Rightarrow sen(7x)=-\frac{1}{2}$$

$$(i)\ \ 7x=\frac{7\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7},k\in\mathbb{Z}$$

Ou

$$(ii)\ \ 7x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x=\frac{11\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7},k\in\mathbb{Z}$$

Para $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$, temos:

$$(i)\ \ \frac{3\pi}{2}\le\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{7}\le 2\pi\Rightarrow\frac{3}{2}\le\frac{1}{6}+\frac{2k}{7}\le 2$$
$$\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\le\frac{2k}{7}\le 2-\frac{1}{6}$$
$$\frac{8}{6}\le\frac{2k}{7}\le\frac{11}{6}$$
$$56\le 12k\le 77$$
$$\Rightarrow k=5\ ou\ k=6$$
$$k=5\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{10\pi}{7}\Rightarrow\boxed{x=\frac{67\pi}{42}}$$
$$k=6\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{12\pi}{7}\Rightarrow\boxed{x=\frac{79\pi}{42}}$$

$$(ii)\ \ \frac{3\pi}{2}\le\frac{11\pi}{42}+\frac{2k\pi}{7}\le 2\pi\Rightarrow\frac{3}{2}\le\frac{11}{42}+\frac{2k}{7}\le 2$$
$$\frac{3}{2}-\frac{11}{42}\le\frac{2k}{7}\le 2-\frac{11}{42}$$
$$\frac{52}{42}\le\frac{2k}{7}\le\frac{73}{42}$$

$$\frac{52}{6} \leq \frac{12k}{6} \leq \frac{73}{6}$$
$$\Rightarrow k = 5 \; ou \; k = 6$$
$$k = 5 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{42} + \frac{10\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{71\pi}{42}}$$
$$k = 6 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{42} + \frac{12\pi}{7} \Rightarrow \boxed{x = \frac{83\pi}{42}}$$

Portanto, a solução da equação é dada por:

$$S = \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{67\pi}{42}; \frac{71\pi}{42}; \frac{79\pi}{42}; \frac{83\pi}{42}\right\}$$

Gabarito: $S = \left\{\frac{7\pi}{4}; \frac{67\pi}{42}; \frac{71\pi}{42}; \frac{79\pi}{42}; \frac{83\pi}{42}\right\}$

29. (IME/2018)

A menor raiz real positiva da equação $arctg\left(x \cdot tg\left(arcsen\left(\frac{3}{5}\right)\right)\right) = \frac{2\pi}{x+2}$ encontra-se no intervalo:

a) $(0, 1]$

b) $(1, 2]$

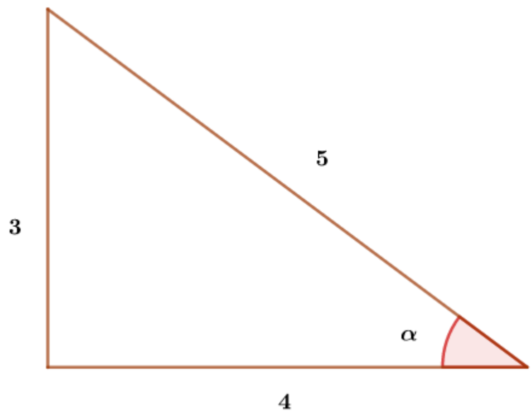
c) $(2, 3]$

d) $(3, 4]$

e) $(4, 5]$

Comentários

Perceba que $tg\left(\underbrace{arcsen\left(\frac{3}{5}\right)}_{\alpha}\right) = \frac{3}{4}$:



Assim, temos:

$$arctg\left(\frac{3}{4}x\right) = \frac{2\pi}{x+2}$$

Sabemos que a imagem da função arco-tangente é o intervalo $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Assim, temos:

$$-\frac{\pi}{2} < arctg\left(\frac{3}{4}x\right) < \frac{\pi}{2}$$
$$-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi}{x+2} < \frac{\pi}{2}$$

$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} < \frac{1}{4}$$
$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{4} \Rightarrow x > 2$$
$$-\frac{1}{4} < \frac{1}{x+2} \Rightarrow x < -6$$

Como o problema pede a menor solução positiva, vamos considerar $x > 2$:

Retornando à equação, temos:

$$tg\left(arctg\left(\frac{3}{4}x\right)\right) = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$$
$$\frac{3}{4}x = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$$

Seja as funções $f(x) = \frac{3}{4}x$ e $g(x) = tg\left(\frac{2\pi}{x+2}\right)$. No intervalo $x > 2$, a função f é estritamente crescente e a função g é estritamente decrescente. Para encontrar a solução dessa equação, devemos usar o método da tentativa:

Para $x = 2$:

$$f(2) = \frac{6}{4} = 1{,}5$$
$$g(2) = tg\left(\frac{2\pi}{4}\right) = tg\left(\frac{\pi}{2}\right) = +\infty$$
$$\Rightarrow g(2) > f(2)$$

Para $x = 3$:

$$f(3) = \frac{9}{4} = 2{,}25$$
$$g(3) = tg\left(\frac{2\pi}{5}\right) = tg(72°)$$

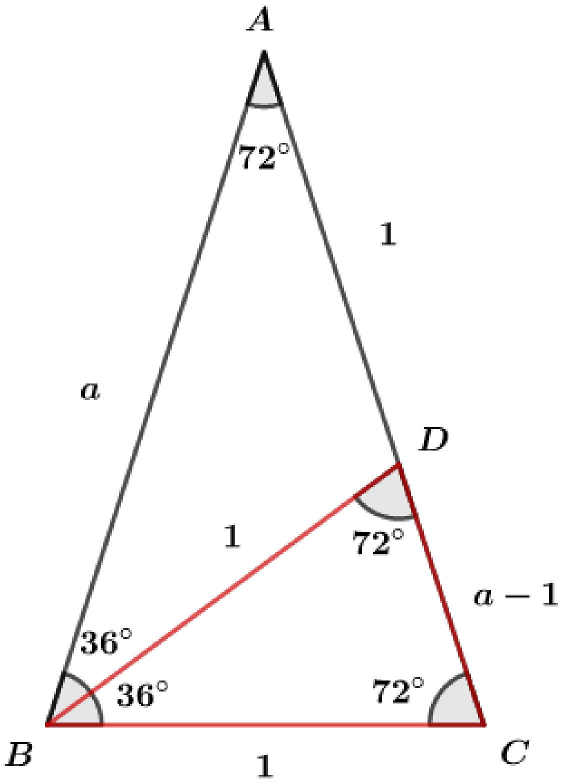
Para $x = 4$:

$$f(4) = 3$$
$$g(4) = tg\left(\frac{2\pi}{6}\right) = tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$
$$\Rightarrow g(4) < f(4)$$

Perceba que $2 < x < 4$, pois para $x = 2$, $g(2) > f(2)$ e para $x = 4$, $g(4) < f(4)$.

Temos que descobrir o valor de $tg(72°)$ para saber se $3 < x < 4$:

Vamos usar o triângulo isósceles para encontrar esse valor:



Devemos encontrar o valor de a. Perceba que os triângulos ABC e BCD são semelhantes. Dessa forma:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD}$$
$$\frac{a}{1} = \frac{1}{a-1}$$
$$a^2 - a - 1 = 0$$
$$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $a > 0$, temos:

$$a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Vamos usar a Lei dos Cossenos para o triângulo ABC:

$$AB^2 = BC^2 + CA^2 - 2(BC)(CA)\cos(72°)$$
$$a^2 = 1 + a^2 - 2\,a\cos(72°)$$
$$\cos(72°) = \frac{1}{2a}$$
$$\sec(72°) = 2a = \sqrt{5} + 1$$

Usando a relação $\sec^2 72° = 1 + tg^2 72°$:

$$\left(\sqrt{5}+1\right)^2 = 1 + tg^2(72°)$$
$$5 + 2\sqrt{5} = tg^2(72°)$$

Como $5 + 2\sqrt{5} > 2{,}25$, temos:

$$g(3) > f(3)$$

Portanto, podemos concluir que $3 < x < 4$.

Gabarito: "d".

---

30. (IME/2018)

Sabendo que $|x| \leq \frac{\pi}{6}$ e que x satisfaz a equação abaixo

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$

Determine os possíveis valores de x.

Comentários

Inicialmente, devemos simplificar a equação:

$$\frac{3 - cosx(4cosx + senx)}{10sen^2x - 8senxcosx} = \frac{1}{2}$$

$$6 - 8\cos^2 x - 2senxcosx = 10sen^2x - 8senxcosx$$

$$6 - 8(1 - sen^2x) + 6senxcosx - 10sen^2x = 0$$

$$-2sen^2x + 6senxcosx - 2 = 0$$

Como $|x| \leq \pi/6$, podemos dividir a equação por $\cos^2 x$:

$$-\frac{2sen^2x}{\cos^2 x} + \frac{6senxcosx}{\cos^2 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = 0$$

$$-2tg^2x + 6tgx - 2\sec^2 x = 0$$

Fazendo $\sec^2 x = 1 + tg^2x$, temos:

$$-2tg^2x + 6tgx - 2(1 + tg^2x) = 0$$

$$-4tg^2x + 6tgx - 2 = 0$$

Encontrando as raízes:

$$tgx = \frac{-3 \pm \sqrt{1}}{-4} = 1 \; ou \; \frac{1}{2}$$

Temos que verificar a condição $|x| \leq \pi/6$:

$$tgx = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para esse valor de x, o resultado não condiz com a condição $|x| \leq \pi/6$. Portanto, não é solução.

Para a outra raíz:

$$tgx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Devemos verificar se esse valor atende à condição. Usando as seguintes aproximações:

$$tg\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cong 0{,}57$$

$$tgx = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Como a função tangente é crescente para x positivo e $tg\left(\frac{\pi}{6}\right) > tgx$, temos:

$$x = arctg\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{\pi}{6}$$

Dessa forma, encontramos uma única solução:

$$x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$$

Gabarito: $x = arctg\left(\frac{1}{2}\right)$

---

31. (IME/2016)

Determine o conjunto solução da equação:

$$(sen\, x)\left(1 + tgx\, tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

Comentários

Preliminarmente, devemos analisar a condição de existência da equação:

$$tgx = \frac{senx}{cosx} \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \neq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$cotgx = \frac{cosx}{senx} \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Unindo as restrições, temos:

$$x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Agora, podemos resolver a equação:

$$(sen\ x)\left(1 + tgx\ tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - cotgx$$

Vamos escrever os termos trigonométricos com arco metade:

$$senx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$tgx = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$cotgx = \frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right)\left(1 + \left(\frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right) tg\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 4 - \left(\frac{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}\right)$$

Fazendo $tg\left(\frac{x}{2}\right) = y$:

$$\Rightarrow \left(\frac{2y}{1 + y^2}\right)\left(1 + \left(\frac{2y}{1 - y^2}\right)y\right) = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

$$\left(\frac{2y}{1 + y^2}\right)\left(\frac{1 + y^2}{1 - y^2}\right) = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

$$\frac{2y}{1 - y^2} = 4 - \left(\frac{1 - y^2}{2y}\right)$$

Perceba que os termos coloridos podem ser escritos como:

$$tg(x) = \frac{2tg\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - tg^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Dessa forma, temos:

$$tgx = 4 - \frac{1}{tgx}$$

$$\Rightarrow tg^2x - 4tgx + 1 = 0$$

Raízes:

$$tgx = 2 \pm \sqrt{3}$$

Lembra do bizu na aula teórica? Conhecemos esses valores de tangente:

Para $tgx = 2 + \sqrt{3}$:

$$x = \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $tgx = 2 - \sqrt{3}$:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, a solução é dada por:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ou \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \ ou \ x = \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

32. (IME/2015)

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Marque a opção verdadeira:

a) f não tem raízes reais

b) f é uma função ímpar

c) f é uma função par

d) $|f(x)| \leq 1$

e) f é sobrejetora

Comentários

Temos que analisar cada alternativa. Vamos simplificar a função:

$$f(x) = \ln \frac{8 + 3senx - sen3x}{8 - 4senx + 2sen2xcosx}$$

Fazendo $sen2x = 2senxcosx$ e $sen3x = 3senx - 4sen^3x$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 3senx - (3senx - 4sen^3x)}{8 - 4senx + 2(2senxcosx)cosx}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 3senx - 3senx + 4sen^3x}{8 - 4senx + 4senxcos^2x}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4senx + 4senx(1 - sen^2x)}\right)$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$

a) Verificando se f tem raízes:

$$f(x) = 0$$

$$\ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right) = 0$$

$$\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x} = 1$$

$$8sen^3x = 0$$

$$senx = 0$$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f tem raízes reais. Portanto, alternativa falsa.

b) Verificando a paridade da função:

$$f(x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3(-x)}{8 - 4sen^3(-x)}\right)$$
$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 - 4sen^3x}{8 + 4sen^3x}\right)$$
$$f(-x) = \ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)^{-1}$$
$$f(-x) = -\ln\left(\frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x}\right)$$
$$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$$

Portanto, a função é ímpar. Alternativa correta.

c) Falsa, como provado na letra b.

d) Falsa, pois para $x = \frac{\pi}{2}$, temos:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \ln\left(\frac{8+4}{8-4}\right) = \ln 3 > 1$$

e) Falsa, pois a imagem de f não é o conjunto dos reais:

$$-1 \le senx \le 1$$
$$-1 \le sen^3x \le 1$$
$$-4 \le 4sen^3x \le 4$$
$$\Rightarrow 4 \le 8 + 4sen^3x \le 12$$
$$-1 \le -sen^3x \le 1$$
$$-4 \le -4sen^3x \le 4$$
$$\Rightarrow 4 \le 8 - 4sen^3x \le 12$$

Assim, temos a desigualdade:

$$\frac{1}{3} \le \frac{8 + 4sen^3x}{8 - 4sen^3x} \le 3$$
$$\ln\left(\frac{1}{3}\right) \le f(x) \le \ln 3$$

Gabarito: "b".

---

33. (IME/2015)

O número de soluções da equação $\cos(8x) = sen(2x) + tg^2(x) + cotg^2(x)$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) 4

e) 8

Comentários

Analisando a equação:

$$\cos(8x) = sen(2x) + tg^2x + cotg^2x$$
$$tg^2x + \frac{1}{tg^2x} = \cos(8x) - sen(2x)$$

Nessa questão, devemos usar a desigualdade das médias para resolvê-la:

$$MA \ge MG$$

Então, vamos analisar os termos $tg^2x + cotg^2x$:

$$\frac{tg^2x + \frac{1}{tg^2x}}{2} \geq \sqrt{tg^2x \cdot \left(\frac{1}{tg^2x}\right)}$$

$$\Rightarrow tg^2x + \frac{1}{tg^2x} \geq 2$$

$$\Rightarrow \cos(8x) - sen(2x) \geq 2$$

Agora, devemos perceber que:

$$|\cos\,(8x)| \leq 1$$
$$|sen(2x)| \leq 1$$
$$\cos(8x) - sen(2x) \geq 2$$

Essa desigualdade é satisfeita quando $\cos(8x) = 1\ e\ sen(2x) = -1$. Assim, temos:

$$\cos(8x) = 1 \Rightarrow 8x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$sen(2x) = -1 \Rightarrow 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Portanto, as soluções devem satisfazer ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x = \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Para o intervalo pedido, encontramos as seguintes soluções:

$$x \in [0, 2\pi] \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}\ e\ x = \frac{7\pi}{4}$$

Assim, temos apenas 2 soluções.

Gabarito: "c".

---

34. (IME/2014)

Resolva a equação $(\log_{\cos x} sen^2x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\ x) = 4$.

Comentários

Inicialmente, devemos analisar a condição de existência do logaritmo:

$$cosx > 0$$
$$senx > 0$$
$$cosx \neq 1$$

Dessas restrições, concluímos que x pertence ao primeiro quadrante com $0 < x < \pi/2$. Simplificando a equação, temos:

$$(\log_{\cos x} sen^2x) \cdot (\log_{\cos^2 x} sen\ x) = 4$$

Usando as propriedades do logaritmo:

$$2(\log_{\cos x} senx) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\log_{cosx} sen\ x) = 4$$

$$(\log_{cosx} senx)^2 = 4$$

$$\log_{\cos x} senx = \pm 2$$

$$senx = \cos^2 x\ \ ou\ senx = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Para $senx = \cos^2 x$:

$$senx = 1 - sen^2x$$
$$sen^2x + senx - 1 = 0$$

$$senx = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $senx > 0$, temos:

$$senx = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

$$cosx = \sqrt{1 - sen^2x} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} - 1}{2}} > 0$$

$$cosx \neq 1$$

Portanto, temos a seguinte solução:

$$\Rightarrow x = arcsen\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Para $senx = \frac{1}{\cos^2 x}$:

Devemos verificar a condição de existência do logaritmo:

$$cosx \neq 1 \ e \ cosx > 0 \Rightarrow 0 < cosx < 1$$

$$\cos^2 x < 1$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} > 1$$

Como $senx = 1/\cos^2 x$:

$$\Rightarrow senx > 1$$

Isso é um absurdo, logo, para essa relação, não temos solução.

Portanto, temos apenas a seguinte solução:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| x = arcsen\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}}$

35. (IME/2012)

Os ângulos de um triângulo obtusângulo são $105°, \alpha$ e β. Sabendo que $m \in \mathbb{R}$ (real), determine:

a) as raízes da equação $3secx + m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx$, em função de m;

b) o valor de m para que α e β sejam raízes dessa equação.

Comentários

a) Vamos isolar o termo com m e simplificar a equação:

$$3secx + m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 3cosx + \sqrt{3}senx - \frac{3}{\cos x}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3\cos^2 x + \sqrt{3}senxcosx - 3}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3(\cos^2 x - 1) + \sqrt{3}senxcosx}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{3(-sen^2x) + \sqrt{3}senxcosx}{cosx}$$

$$m(\sqrt{3}cosx - 3senx) = \frac{senx}{cosx}(\sqrt{3}cosx - 3senx)$$

$$(m - tgx)(\sqrt{3}cosx - 3senx) = 0$$

$$\sqrt{3}cosx - 3senx = 0 \Rightarrow tgx = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$
$$ou$$
$$m = tgx \Rightarrow x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Das relações de ângulo do triângulo, temos que:

$$\alpha + \beta = 180° - 105° = 75°$$

Queremos que α e β sejam raízes da equação da letra (a). Então, podemos supor:

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}$$
$$x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \beta = arctg(m)$$
$$\alpha + \beta = 75° = \frac{5\pi}{12}$$
$$\frac{\pi}{6} + arctg(m) = \frac{5\pi}{12}$$
$$arctg(m) = \frac{3\pi}{12}$$
$$arctg(m) = \frac{\pi}{4}$$
$$m = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Portanto, o valor de m que torna α e β raízes da equação é dado por:

$$m = 1$$

Gabarito: a) $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $x = arctg(m) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ b) $m = 1$

---

36. (IME/2011)

O valor de x que satisfaz a equação $sen\big(arccotg(1+x)\big) = \cos\big(arctg(x)\big)$:

a) $\frac{3}{2}$

b) $\frac{1}{2}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $-\frac{1}{2}$

e) $-\frac{3}{2}$

Comentários

Fazendo $\alpha = arccotg(1+x)$ e $\beta = arctg(x)$, temos:

$$sen\big(arccotg(1+x)\big) = \cos\big(arctg(x)\big) \Rightarrow sen\alpha = cos\beta$$

Disso, concluímos que α e β são complementares:

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$$

Para $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$:

$$cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = sen\beta$$
$$\Rightarrow cos\alpha = sen\beta$$

Dividindo $sen\alpha = cos\beta$ por $cos\alpha$:

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\beta}{cos\alpha} = \frac{cos\beta}{sen\beta}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{tg\beta}$$

$$\alpha = arccotg(1+x) \Rightarrow cotg\alpha = 1 + x \Rightarrow tg\alpha = \frac{1}{1+x}$$

$$\beta = arctg(x) \Rightarrow tg\beta = x$$

Substituindo esses valores na equação, temos:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}$$

$$x = 1 + x$$

$$0 = 1$$

Isso é um absurdo, logo não convém.

Para $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$:

$$cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = -sen\beta$$

$$\Rightarrow cos\alpha = -sen\beta$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{cos\beta}{-sen\beta}$$

$$tg\alpha = \frac{1}{-tg\beta}$$

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{-x}$$

$$-x = 1 + x$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Portanto, temos apenas uma única solução:

$$S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Gabarito: “d”.