Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá,

Na aula passada, estudamos alguns tópicos de geometria plana. Vimos o que é a geometria Euclidiana e também conceitos de retas, ângulos e triângulos. Nessa aula, estudaremos o teorema de Tales e usaremos esse teorema para provar semelhança de triângulos. Também veremos como calcular as cevianas de um triângulo qualquer e quais os pontos notáveis de um triângulo.

Tente se acostumar a "enxergar" quando dois triângulos são semelhantes. Isso será útil para resolver as questões de geometria plana da prova.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

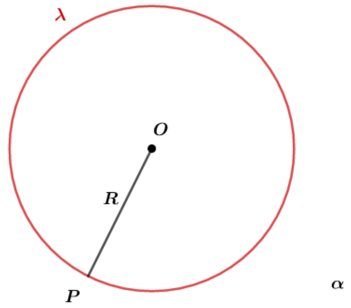
1. Lugar Geométrico

Lugar geométrico é o conjunto de pontos de um plano com uma determinada propriedade. Vamos estudar os principais:

1.1. Circunferência

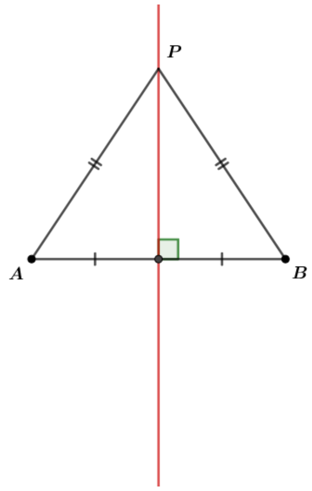
Circunferência é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que distam R de um ponto fixo O. Sejam λ, α, O e R, a circunferência, o plano, o centro e o raio, respectivamente. Em símbolos, o LG da circunferência pode ser escrito como:

$$\lambda = \{p \in \alpha | OP = R\}$$



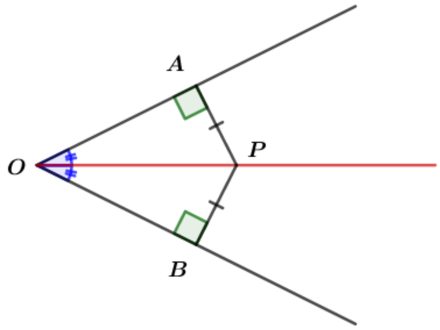
1.2. Mediatriz

Mediatriz é o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam das extremidades de um segmento.



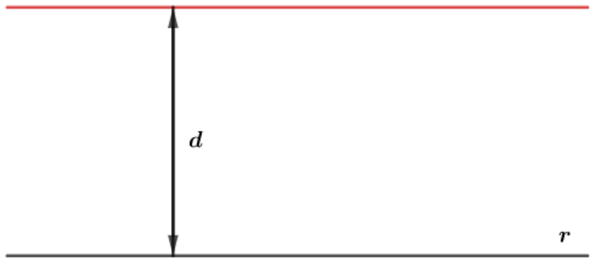
1.3. Bissetriz

É o lugar geométrico dos pontos de um plano que equidistam de duas retas concorrentes. Consequentemente, esse LG divide o menor ângulo entre as retas concorrentes em duas partes iguais.



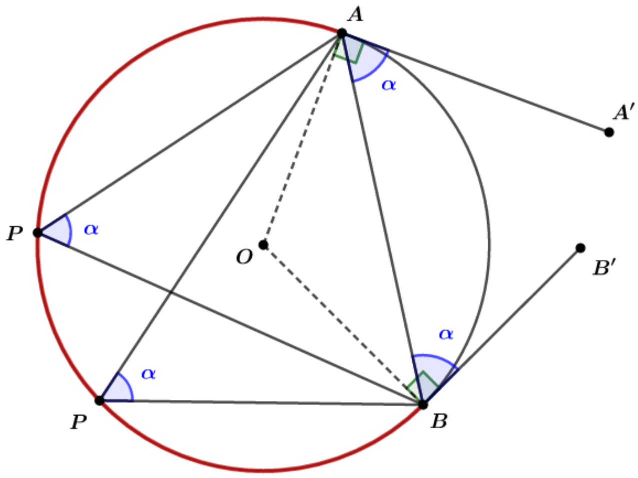
1.4. Par de Retas Paralelas

É o lugar geométrico dos pontos que equidistam d de uma reta.



1.5. Arco Capaz

É o lugar geométrico dos pontos que “enxergam” o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α dado.



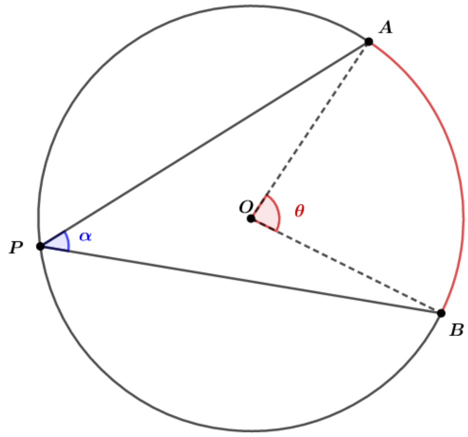
Todos os pontos P pertencentes à região vermelha da circunferência são pontos do arco capaz. Perceba que quando $P \equiv A$ ou $P \equiv B$, temos que os segmentos de reta AA' e BB' tangenciam a circunferência nos pontos A e B, respectivamente. Nesses pontos, eles também enxergam o segmento $\overline{AB}$ sob um ângulo α.

Outro ponto a se notar é que toda reta tangente a uma circunferência forma um ângulo reto com o segmento de reta que liga o ponto de tangência ao centro da circunferência.

INDO MAIS FUNDO!

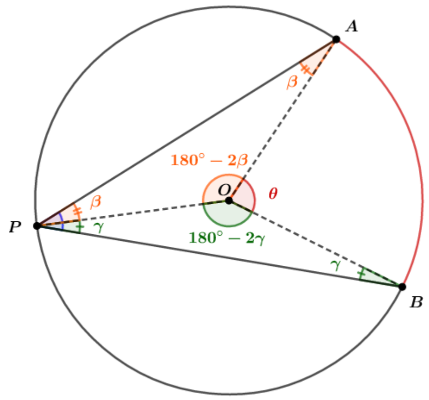
Podemos encontrar uma relação entre α e o menor arco de $\widehat{AB}$.

Sabemos que o ângulo do centro da circunferência é igual ao ângulo formado pelo arco $\widehat{AB}$.



$$\theta = \widehat{AB}$$

Podemos traçar o segmento de reta que liga o ponto P ao centro O. Como $\overline{OP} = \overline{OA} = \overline{OB}$, formamos dois triângulos isósceles OPA e OPB:



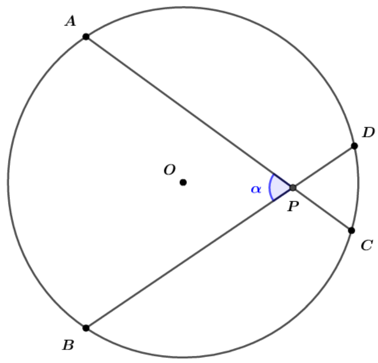
Perceba que $A\hat{P}B = \alpha = \beta + \gamma$. Analisando o centro da circunferência, vemos que:

$$\theta + 180° - 2\beta + 180° - 2\gamma = 360°$$
$$\theta = 2(\beta + \gamma)$$
$$\theta = 2\alpha$$
$$\alpha = \frac{\theta}{2}$$
$$\therefore \boldsymbol{\alpha} = \frac{\widehat{\boldsymbol{AB}}}{\mathbf{2}}$$

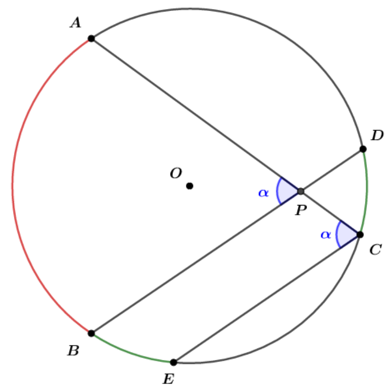
Além desse caso, temos outros dois:

P pode estar localizado no interior da circunferência ou P pode estar no exterior da circunferência.

Para o caso de P interno à circunferência:



Nesse caso, podemos traçar um segmento de reta paralelo ao segmento $\overline{BD}$ e que passe por C:

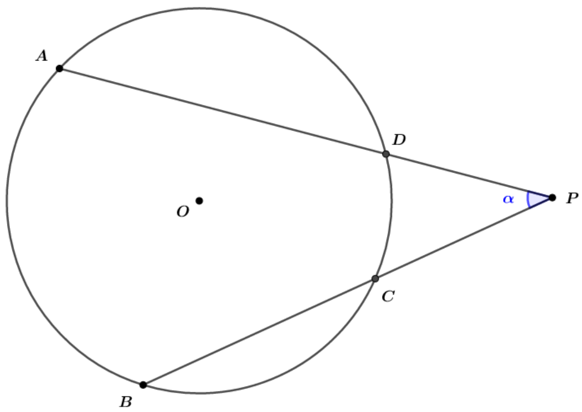


Como $EC//BD$, temos $E\hat{C}A \equiv B\hat{P}A$ e a medida dos arcos $\widehat{BE}$ e $\widehat{CD}$ são iguais. Assim, podemos ver que:

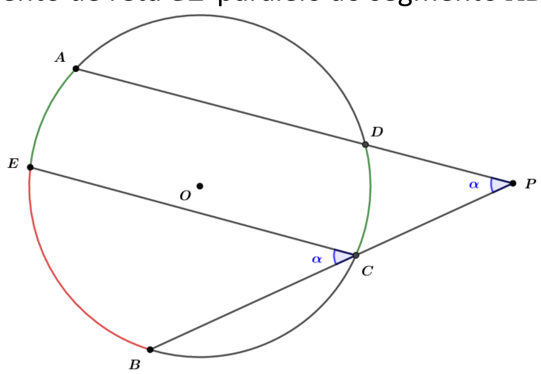
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} + \widehat{BE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha} = \frac{\widehat{\boldsymbol{AB}} + \widehat{\boldsymbol{CD}}}{\mathbf{2}}$$

Para o caso de P externo à circunferência:



Vamos construir o segmento de reta $\overline{CE}$ paralelo ao segmento $\overline{AD}$:



Como $CE//AD$, temos $E\hat{C}B \equiv A\hat{P}B$ e $\widehat{AE} \equiv \widehat{CD}$. Desse modo:

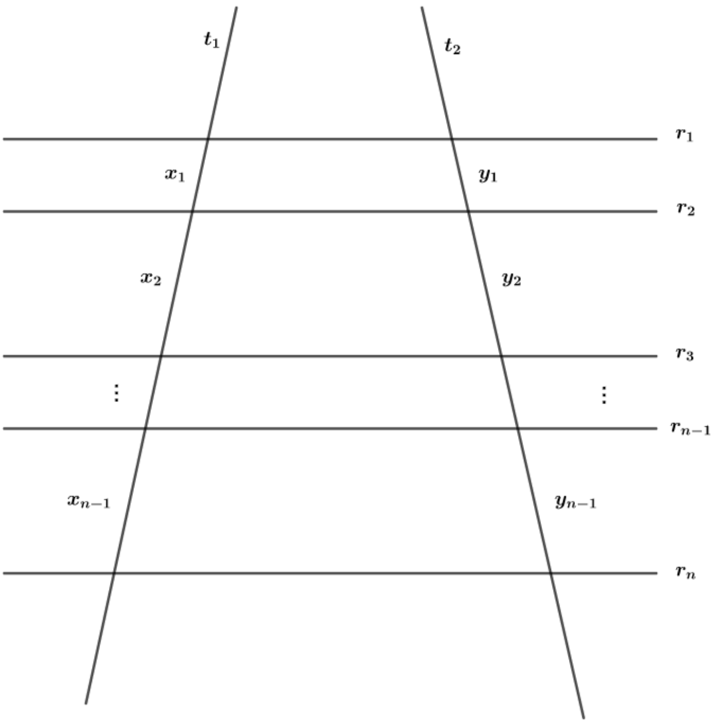
$$\alpha = \frac{\widehat{AB} - \widehat{AE}}{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{\alpha} = \frac{\widehat{\boldsymbol{AB}} - \widehat{\boldsymbol{CD}}}{\mathbf{2}}$$

2. Teorema de Tales

O Teorema de Tales afirma que dado um feixe de retas paralelas, os segmentos de retas transversais a estas retas são proporcionais entre si.

Sejam as retas $r_1//r_2//r_3//\ldots//r_n$ e $k \in \mathbb{R}_+^*$, então:

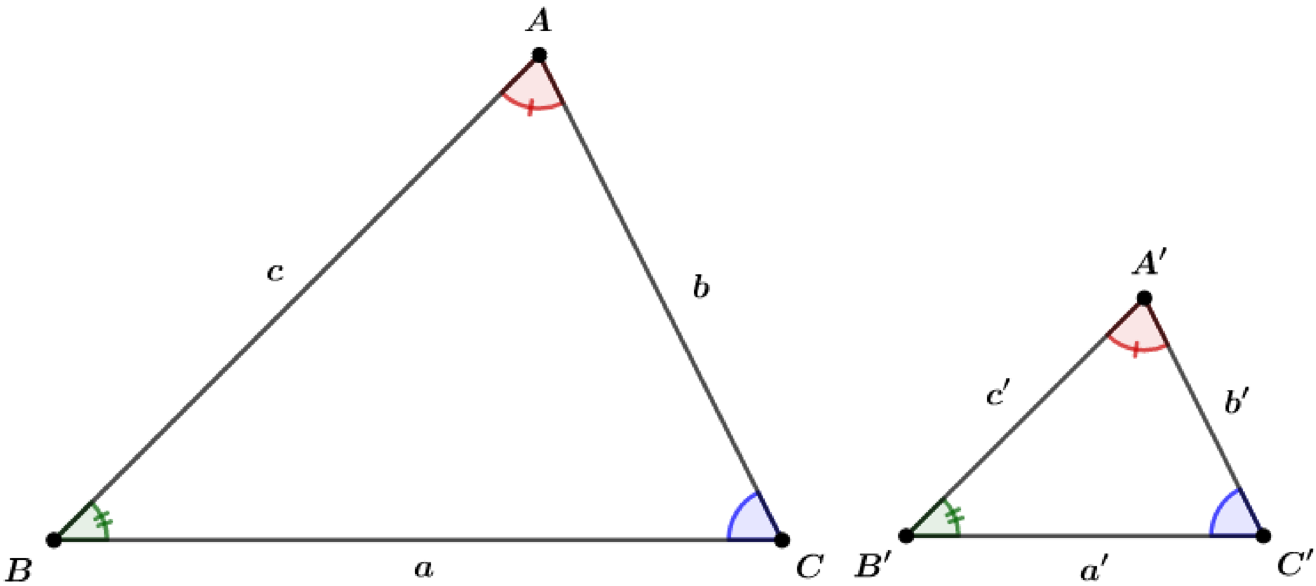


$$\boxed{\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_{n-1}}{y_{n-1}} = k}$$

t_1 e t_2 são as retas transversais ao feixe de retas paralelas.

3. Semelhança de Triângulos

Dois triângulos são semelhantes se, e somente se, os ângulos internos são congruentes e os lados opostos a esses ângulos congruentes são proporcionais entre si. Usamos o símbolo $\sim$ para indicar que dois triângulos são semelhantes.

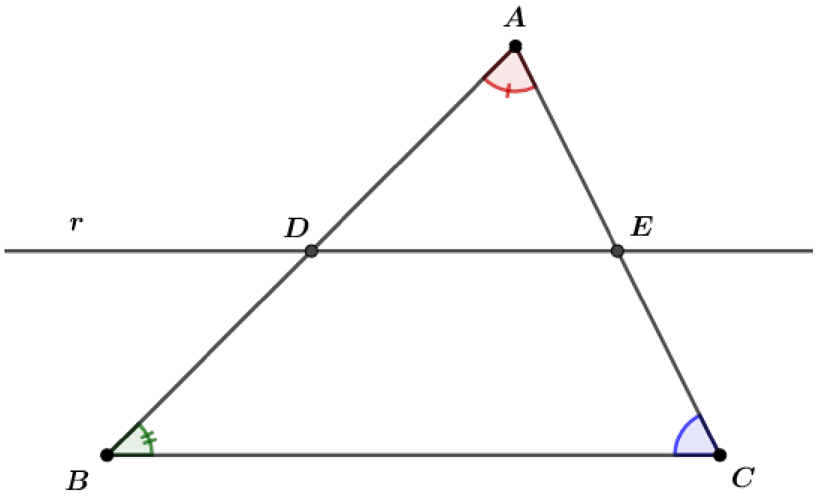


$$\boxed{\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv A', B \equiv B', C \equiv C' \\ \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = k \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}}$$

Definimos k como a razão de semelhança dos triângulos semelhantes.

3.1. Teorema Fundamental

Dado o seguinte triângulo ABC e a reta r que passa por ele nos pontos D e E, temos:



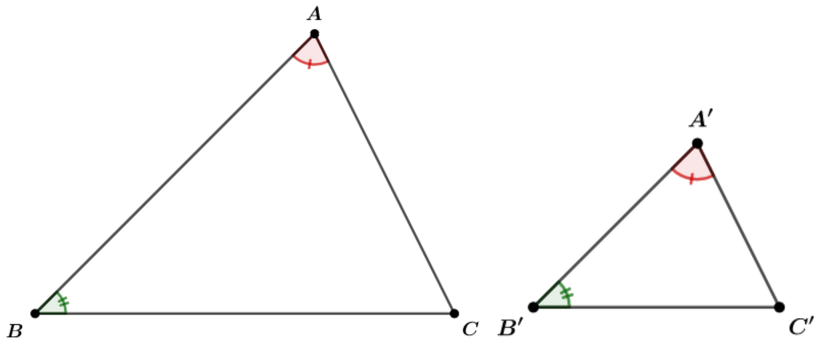
$$\boxed{r//BC \Leftrightarrow \Delta ADE \sim \Delta ABC}$$

Se a reta r for paralela a um dos lados de um triângulo ABC, o ΔADE que ele determina é semelhante ao ΔABC.

3.2. Critérios de Semelhança

3.2.1. AA (dois ângulos congruentes)

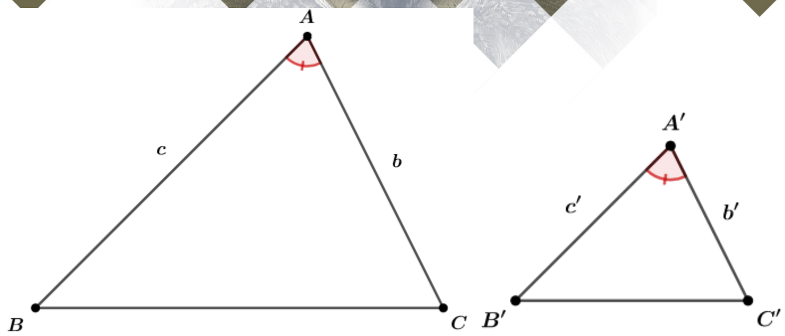
Se dois triângulos tiverem dois ângulos congruentes, eles serão semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ B \equiv B' \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.2.2. LAL (lado-ângulo-lado)

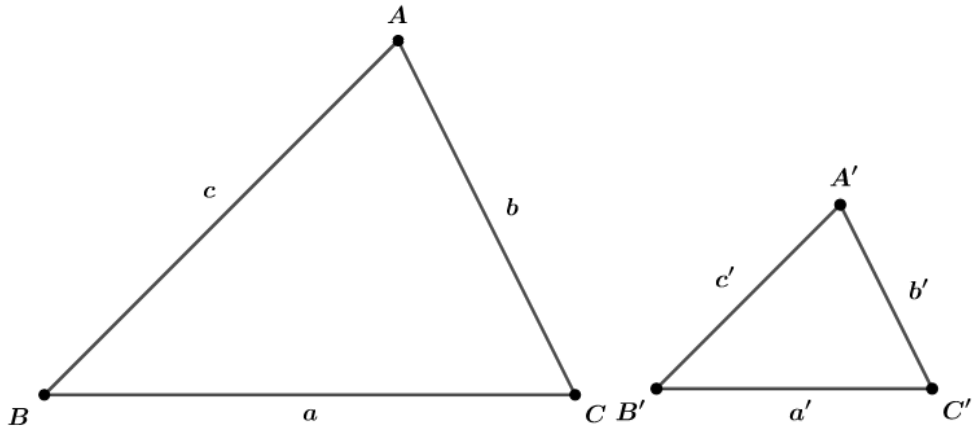
Se dois triângulos tiverem dois lados proporcionais e o ângulo compreendido entre eles for congruente, então esses triângulos são semelhantes.



$$\begin{cases} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \dfrac{c}{c'} = \dfrac{b}{b'} \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.2.3. LLL (lado-lado-lado)

Se dois triângulos tiverem os lados correspondentes proporcionais entre si, então eles são semelhantes.



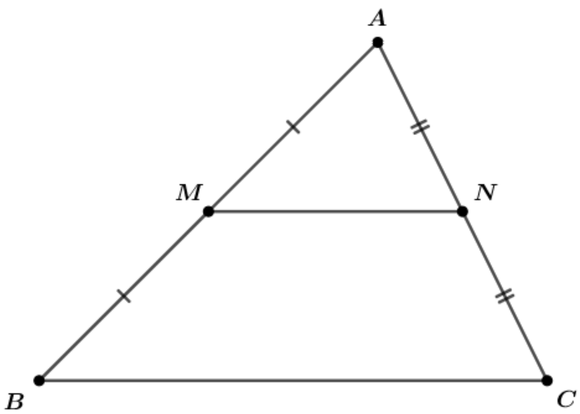
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

3.3. Propriedades

As seguintes propriedades decorrem da semelhança de triângulos.

3.3.1. Base Média

Seja ABC, um triângulo qualquer. Se M é o ponto médio do lado AB e N é o ponto médio do lado AC, temos:



Pelo Teorema de Tales, sendo $AM = MB$ e $AN = NC$:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \Rightarrow MN//BC$$

Desse modo:

$$M \equiv B \text{ e } N \equiv C$$

Pelo critério de semelhança AA, temos:

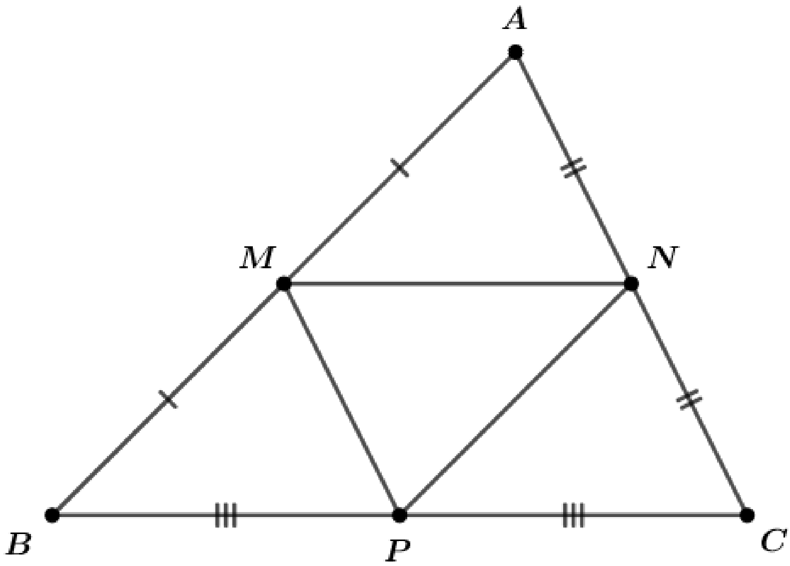
$$\Delta AMN \sim \Delta ABC$$

A razão de proporção entre eles é $1/2$:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = \frac{1}{2}$$

Se BC é a base do triângulo ABC, então MN é chamado de base média do triângulo ABC.

Tomando-se P, o ponto médio do lado BC e formando o triângulo MNP, encontramos:



Vimos que MN é paralelo ao lado BC, analogamente, para os outros lados, podemos provar que $NP//AB$ e $MP//AC$. Então, o triângulo MNP é semelhante ao triângulo ABC e possui razão igual a $1/2$.

3.3.2. Razão de Proporção

Se a razão de proporção de dois triângulos é k, então a razão entre seus elementos lineares correspondentes é k. Assim, a razão entre:

-suas alturas é k;

-suas medianas é k;

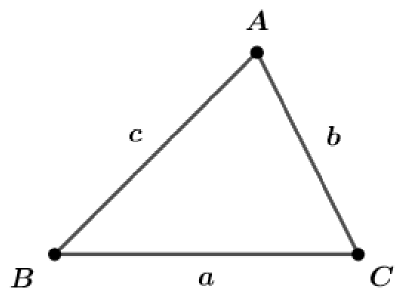
-seus perímetros é k;

-os raios das circunferências inscritas é k;

-os raios das circunferências circunscritas é k;

-dois elementos lineares e homólogos é k.

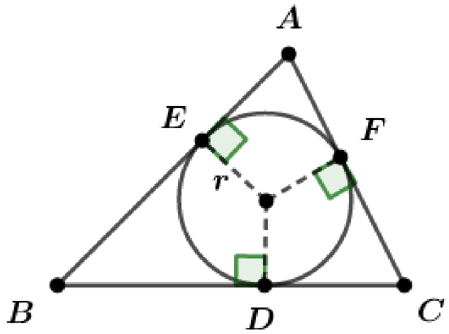
Chamamos de perímetro a soma de todos os lados de um triângulo, então para um triângulo ABC:



$$2p = a + b + c$$

p é o semiperímetro do triângulo ABC e $2p$ é o seu perímetro.

Uma circunferência inscrita em um triângulo é uma circunferência que tangencia internamente os lados do triângulo:

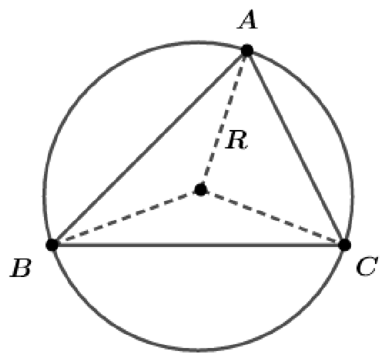


D, E, F são os pontos de tangência da circunferência inscrita ao triângulo ABC.

r é o raio da circunferência inscrita.

Perceba que os segmentos de reta que ligam o centro da circunferência aos pontos de tangência sempre formam um ângulo reto.

Uma circunferência circunscrita a um triângulo é uma circunferência que passa por todos os vértices do triângulo:



R é o raio da circunferência circunscrita.

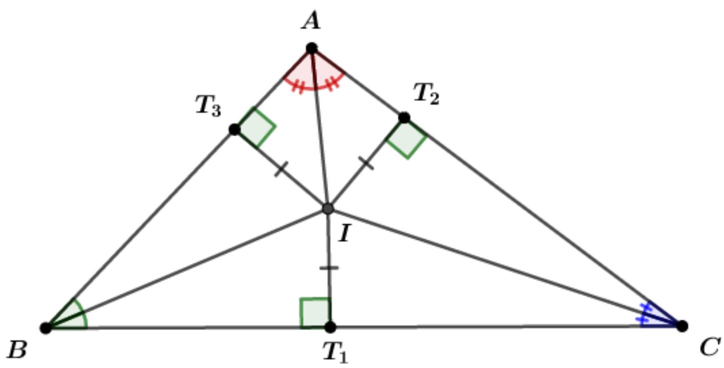
Dizemos que dois elementos são homólogos quando ambos são correspondentes um ao outro. Por exemplo, tomando-se dois triângulos semelhantes, podemos afirmar que os lados opostos aos ângulos congruentes são homólogos.

4. Pontos Notáveis no Triângulo

4.1. Incentro e Ex-incentro

4.1.1. Incentro

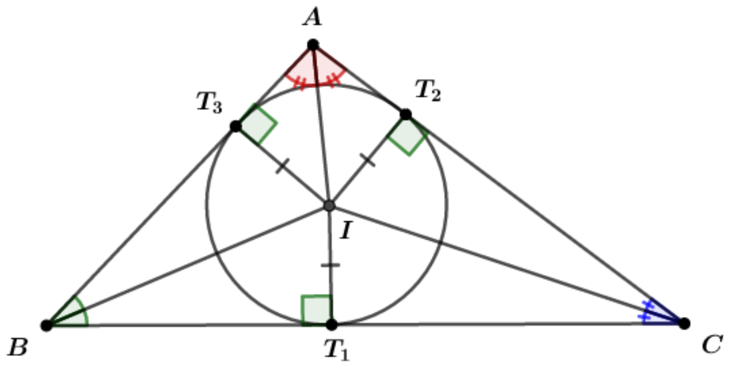
As bissetrizes internas de um triângulo encontram-se em um único ponto. A este ponto denominamos incentro do triângulo.



I é o incentro e este equidista dos lados do triângulo:

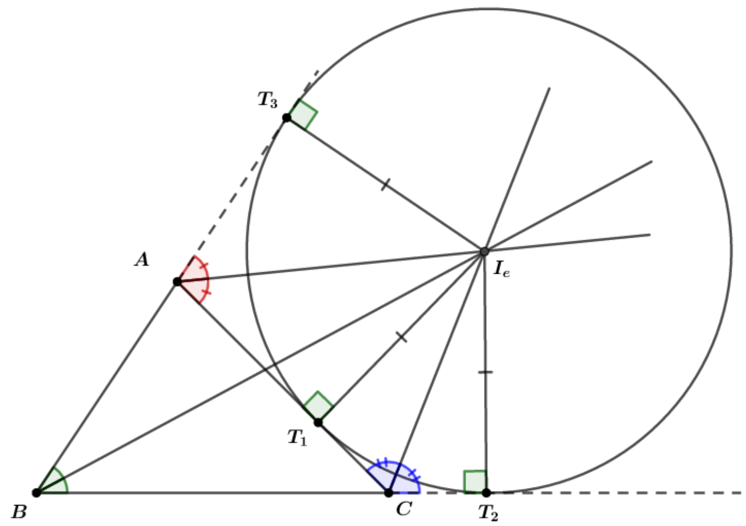
$$IT_1 = IT_2 = IT_3$$

Por esse ponto, podemos desenhar uma circunferência a qual chamamos de circunferência inscrita.



4.1.2. Ex-incentro

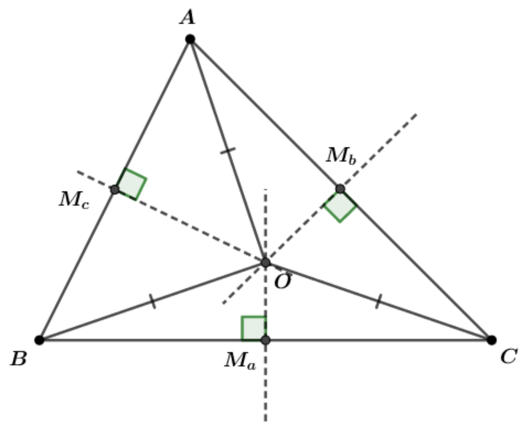
Chamamos de ex-incentro ao ponto que é interceptado por uma bissetriz interna e duas bissetrizes externas. Esse ponto também equidista dos lados do triângulo e dos prolongamentos dos lados adjacentes:



I_e é o ex-incentro do triângulo ABC em relação ao lado AC.

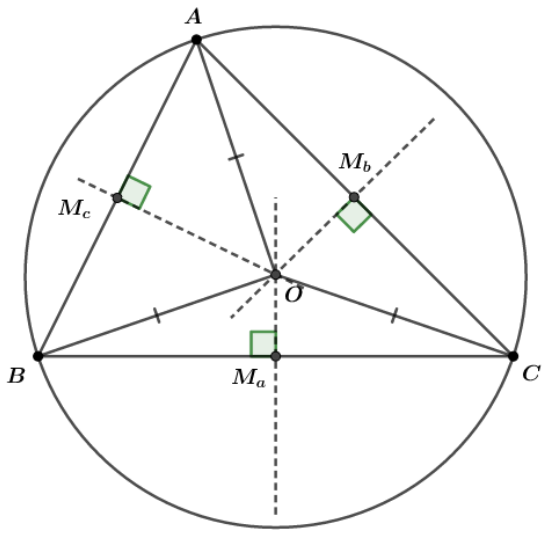
4.2. Circuncentro

As mediatrizes de cada um dos lados de um triângulo se encontram em um único ponto chamado de circuncentro. Este ponto equidista dos vértices do triângulo.



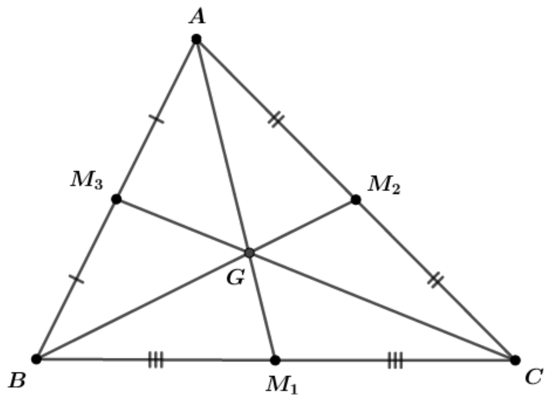
O é o circuncentro do triângulo ABC.

Como o circuncentro equidista dos vértices do triângulo, este ponto é o centro de uma circunferência que passa pelos vértices desse triângulo.



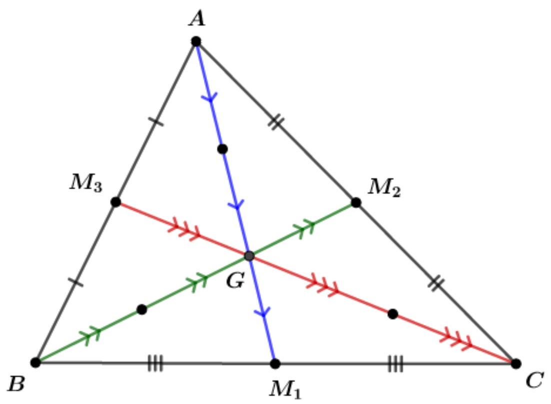
4.3. Baricentro

As três medianas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de baricentro.



G é o baricentro do triângulo ABC.

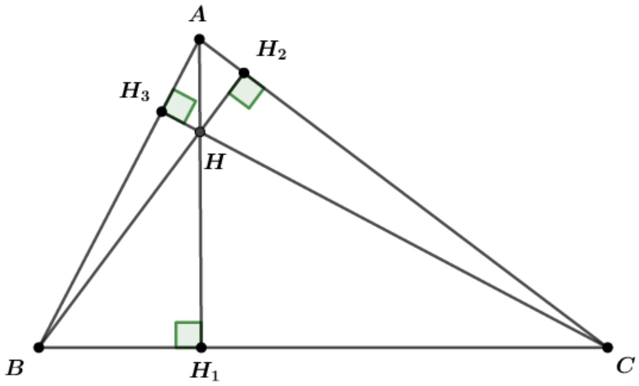
Uma propriedade do baricentro é que ela divide as medianas na razão de $2/1$:



$$\boldsymbol{AG = 2GM_1}$$
$$\boldsymbol{BG = 2GM_2}$$
$$\boldsymbol{CG = 2GM_3}$$

4.4. Ortocentro

As três alturas de um triângulo interceptam-se num único ponto chamado de ortocentro.



H é o ortocentro do triângulo ABC.

5. Triângulos Quaisquer

5.1. Teorema dos Senos

$$\boxed{\frac{a}{senA} = \frac{b}{senB} = \frac{c}{senC} = 2R}$$

A lei dos senos afirma que a razão entre cada lado do triângulo e o seno do ângulo oposto é igual à $2R$, sendo R o raio da circunferência que a circunscreve.

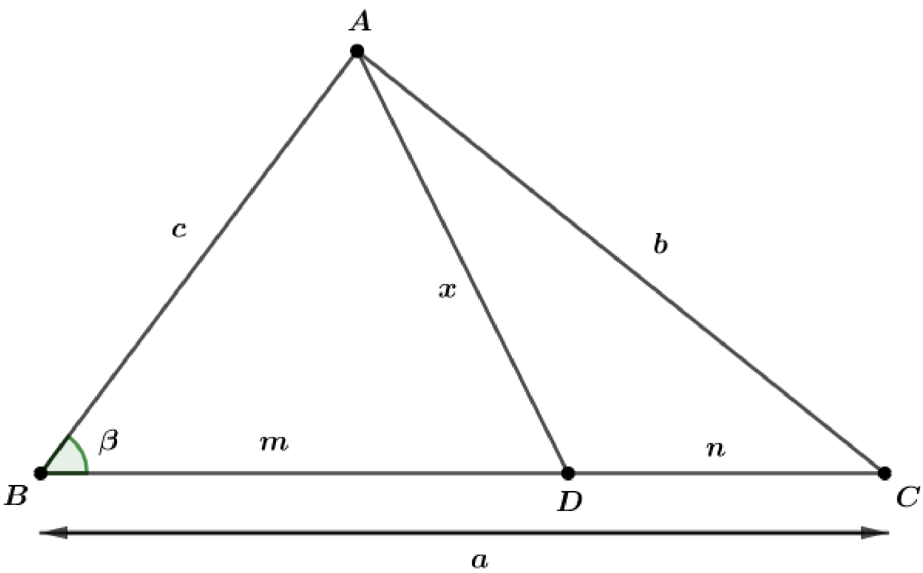
5.2. Teorema dos Cossenos

Seja ABC um triângulo qualquer e a, b, c são seus lados. A lei dos cossenos afirma que:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\,cosA \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\,cosB \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\,cosC \end{aligned}}$$

5.3. Relação de Stewart

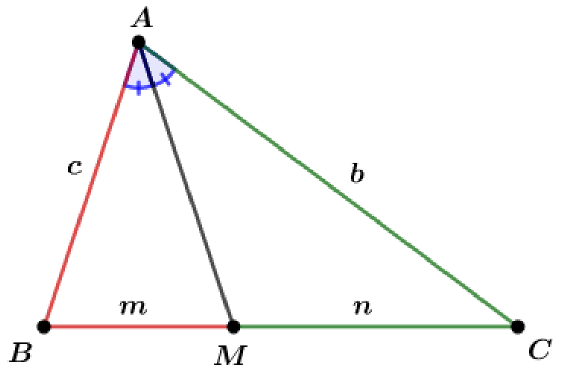
Dado um triângulo ABC, temos:



$$\boxed{ax^2 + amn = b^2m + c^2n}$$

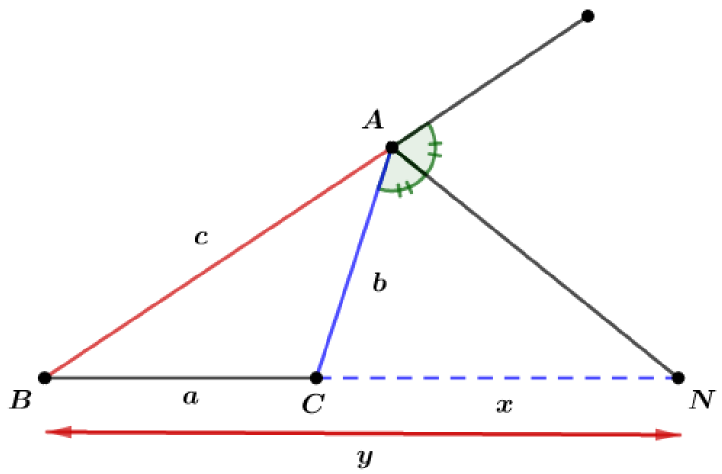
5.4. Teorema das Bissetrizes

5.4.1. Teorema da Bissetriz Interna



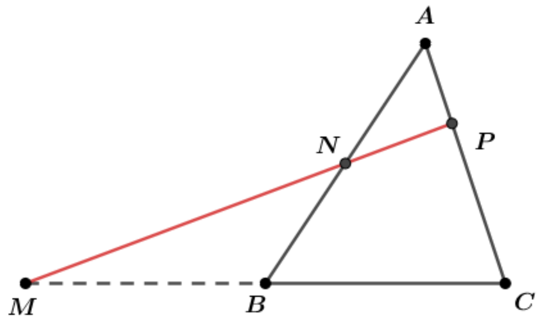
$$\boxed{\frac{c}{m} = \frac{b}{n}}$$

5.4.2. Teorema da Bissetriz Externa



$$\boxed{\frac{c}{y} = \frac{b}{x}}$$

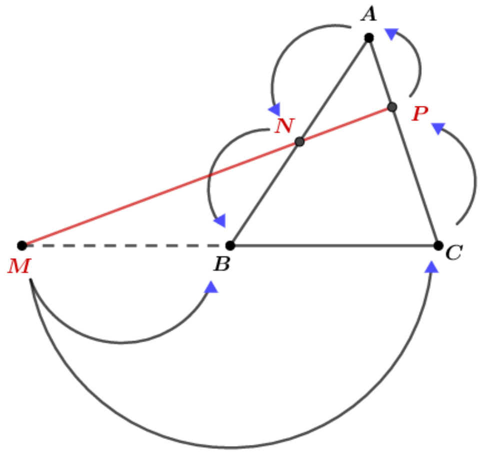
5.5. Teorema de Menelaus



$$\boxed{\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1}$$

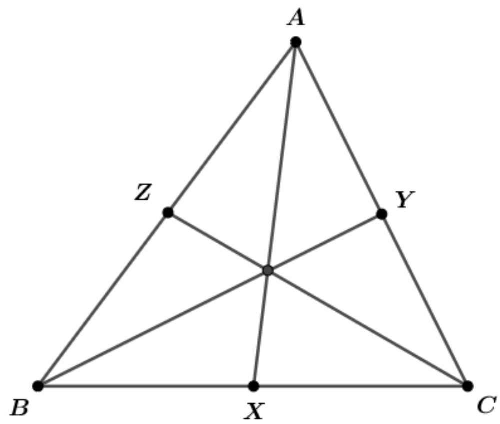
Esse teorema é conhecido como teorema da colinearidade, pois caso os pontos MNP satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos são colineares. $\overleftrightarrow{MP}$ é a reta de Menelaus.

ESQUEMATIZANDO



$$\boxed{\frac{MB}{MC}\cdot\frac{CP}{PA}\cdot\frac{AN}{NB}=1}$$

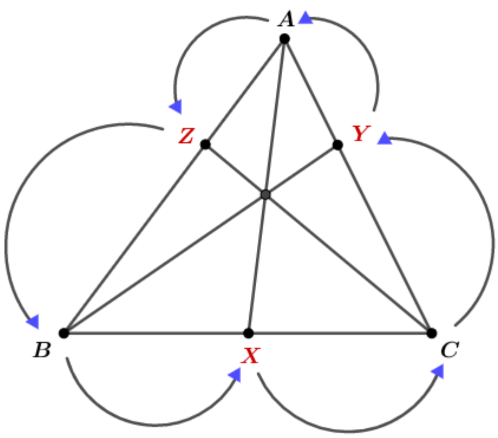
5.6. Teorema de Ceva



$$\boxed{\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1}$$

Esse teorema é conhecido como o teorema da concorrência, pois caso os pontos X, Y, Z satisfaçam essa relação, podemos afirmar que esses pontos se encontram em um mesmo ponto.

ESQUEMATIZANDO

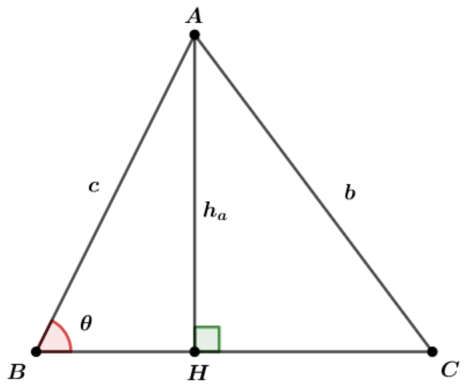


$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=1$$

5.7. Cálculo das Cevianas

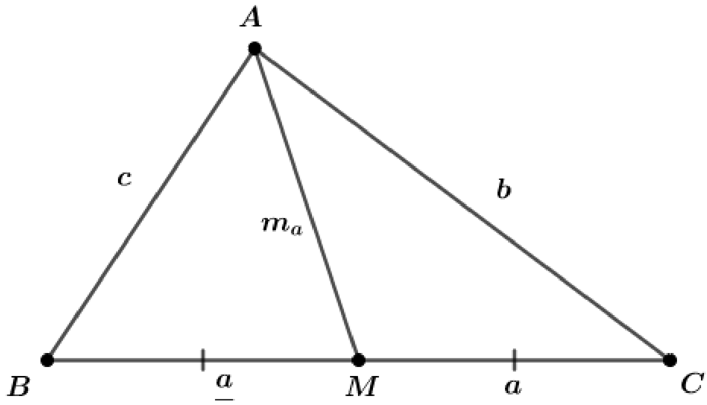
Usando-se os teoremas vistos até aqui, podemos encontrar a fórmula para calcular as cevianas de um triângulo qualquer.

5.7.1. Altura



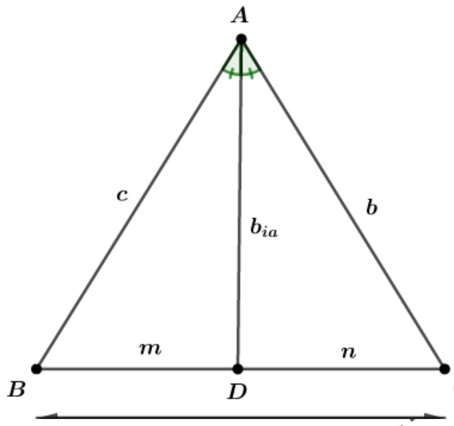
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

5.7.2. Mediana



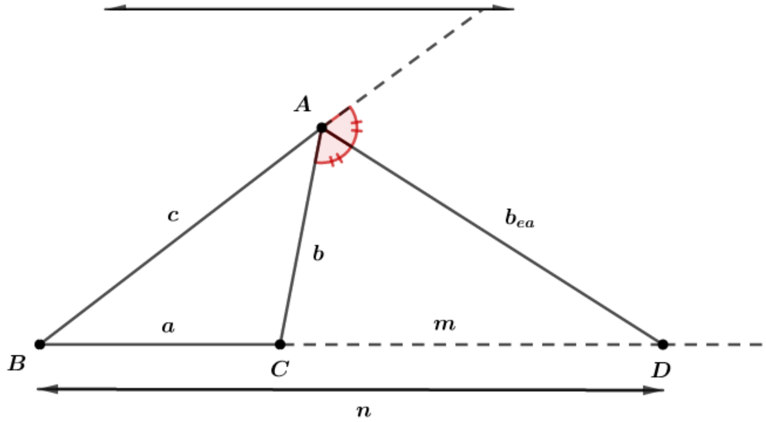
$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$
$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$
$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$$

5.7.3. Bissetriz Interna



$$b_{ia} = \sqrt{bc - mn}$$
$$b_{ia} = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$
$$b_{ib} = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$
$$b_{ic} = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

5.7.4. Bissetriz Externa

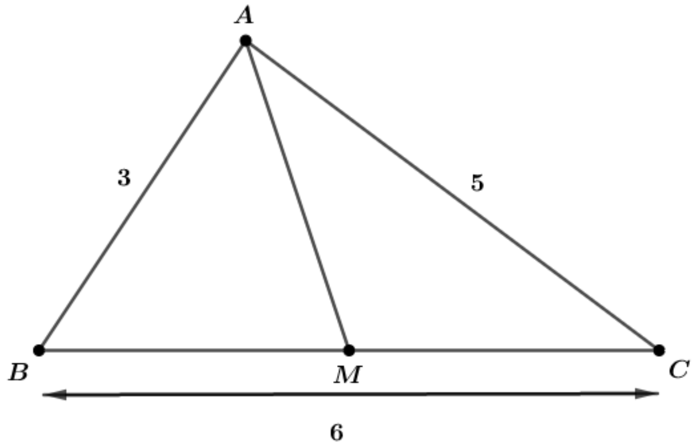


$$b_{ea} = mn - bc$$
$$b_{ea} = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$
$$b_{eb} = \frac{2}{|a-c|}\sqrt{ac(p-a)(p-c)}$$
$$b_{ec} = \frac{2}{|a-b|}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}$$

HORA DE PRATICAR!

Exercícios de Fixação

1. Determine a medida da mediana $\overline{AM}$ do triângulo ABC abaixo:



Resolução:

Vamos usar a fórmula da mediana:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(5^2 + 3^2) - 6^2}$$

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{68 - 36}$$

$$m_a = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{m_a = 2\sqrt{2}}$

2. Determine a medida das alturas do triângulo de lados $6, 10$ e 12.

Resolução:

Usando as fórmulas das alturas, temos:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Calculando o semiperímetro p:

$$2p = 6 + 10 + 12$$

$$p = 14$$

Calculando o valor da expressão $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, supondo que $a = 6, b = 10$ e $c = 12$:

$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{14(14-6)(14-10)(14-12)} = \sqrt{14 \cdot 8 \cdot 4 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 8\sqrt{14}$$

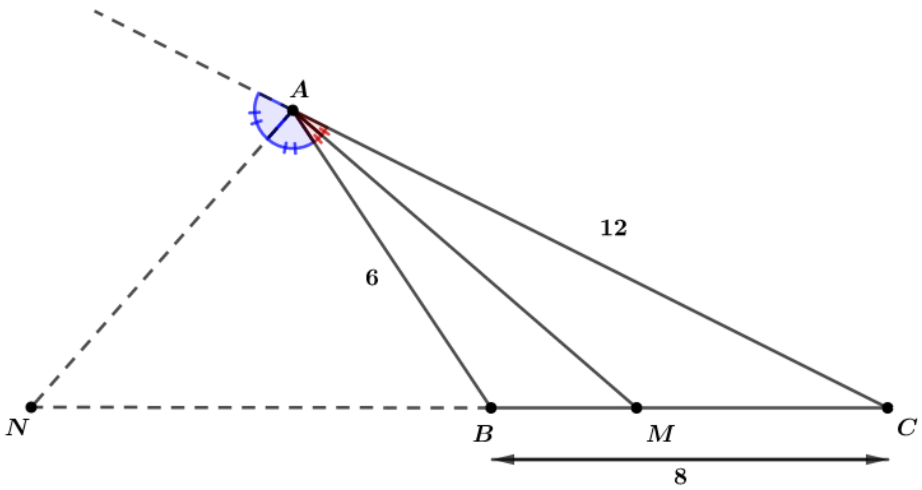
$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{6} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{3}$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{10} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{8\sqrt{14}}{5}$$

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{2}{12} \cdot 8\sqrt{14} = \frac{4\sqrt{14}}{3}$$

Gabarito: $\boldsymbol{h_a = \frac{8\sqrt{14}}{3}; h_b = \frac{8\sqrt{14}}{5}; h_c = \frac{4\sqrt{14}}{3}}$

3. Determine a medida da bissetriz interna $\overline{AM}$ e bissetriz externa $\overline{AN}$ da figura abaixo:



Resolução:

Lembrando que a fórmula da bissetriz interna e bissetriz externa são dadas por:

$$AM = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$$

$$AN = \frac{2}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)}$$

Calculando os valores:

$$2p = a + b + c$$

$$p = \frac{6+8+12}{2} = 13$$

$$AM = \frac{2}{12+6}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot (13-8)}$$

$$AM = \frac{1}{9}\sqrt{6^2 \cdot 26 \cdot 5}$$

$$AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}$$

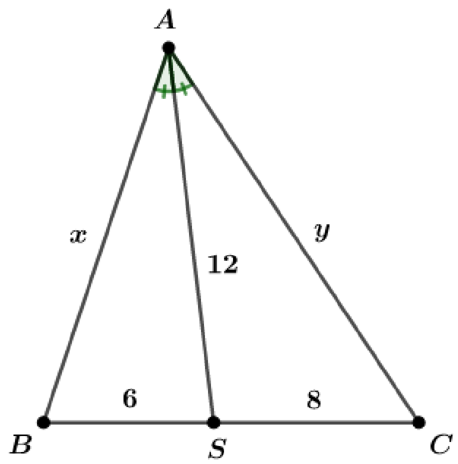
$$AN = \frac{2}{|12-6|}\sqrt{12 \cdot 6 \cdot (13-12)(13-6)}$$

$$AN = \frac{1}{3}\sqrt{6^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7}$$

$$AN = 2\sqrt{14}$$

Gabarito: $AM = \frac{2}{3}\sqrt{130}; AN = 2\sqrt{14}$

4. Se $\overline{AS}$ é bissetriz interna do triângulo ABC, determine x e y.



Resolução:

Usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{x}{6} = \frac{y}{8} \ \ (I)$$

Aplicando a relação de Stewart no triângulo ABC:

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = x^2 \cdot 8 + y^2 \cdot 6 \ \ (II)$$

Elevando (I) ao quadrado:

$$x^2 = y^2 \cdot \frac{9}{16}$$

Substituindo x^2 em (II):

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{16} \cdot 8 + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \cdot \frac{9}{2} + y^2 \cdot 6$$

$$12^2 \cdot 14 + 12 \cdot 6 \cdot 8 = y^2 \left(\frac{21}{2}\right)$$

$$y^2 = \frac{2}{21} \cdot \left(\underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{14}_{2 \cdot 7} + \underbrace{12}_{2^2 \cdot 3} \cdot \underbrace{6}_{2 \cdot 3} \cdot \underbrace{8}_{2^3}\right)$$

$$y = \sqrt{\frac{2}{3 \cdot 7} \cdot 2^5 \cdot (3^2 \cdot 7 + 3^2 \cdot 2)}$$

$$y = 2^3 \sqrt{\frac{1}{7}(3 \cdot 7 + 3 \cdot 2)}$$

$$y = 8\sqrt{\frac{28}{7}}$$

$$y = 16$$

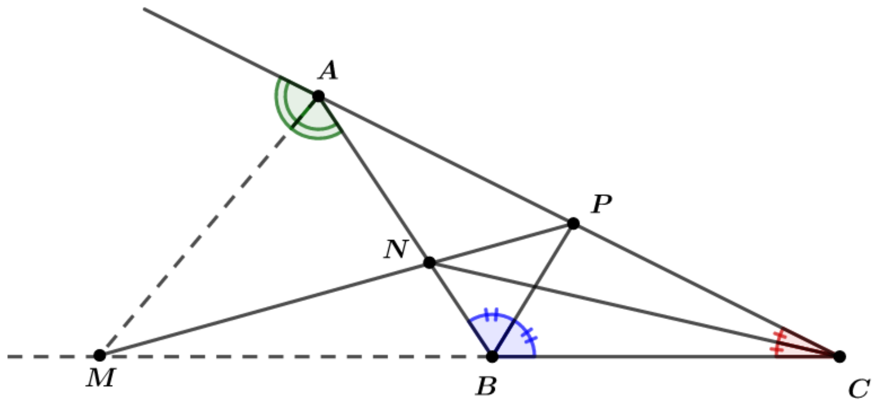
$$x = \frac{3}{4} y \Rightarrow x = 12$$

Gabarito: $x = 12$ **e** $y = 16$

5. Prove que as bissetrizes internas de dois ângulos de um triângulo não isósceles e a bissetriz externa do terceiro ângulo cortam os lados opostos em 3 pontos colineares.

Resolução:

Vamos supor que o triângulo ABC é representado pela figura abaixo:



Aplicando o teorema da bissetriz interna no triângulo ABC:

$$\hat{B} \Rightarrow \frac{AB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{AN+NB}{AP} = \frac{BC}{CP} \Rightarrow \frac{CP}{AP} = \frac{BC}{AN+NB}$$

$$\hat{C} \Rightarrow \frac{AC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AP+PC}{AN} = \frac{BC}{BN} \Rightarrow \frac{AN}{NB} = \frac{AP+PC}{BC}$$

Usando o teorema da bissetriz externa em Â:

$$\hat{A} \Rightarrow \frac{AC}{MC} = \frac{AB}{MB} \Rightarrow \frac{AP+PC}{MC} = \frac{AN+NB}{MB} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AN+NB}{AP+PC}$$

Para provar que M, N, P são colineares, podemos usar o teorema de Menelaus. Assim, devemos provar que:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = 1$$

Vamos calcular o valor da expressão da esquerda:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB}$$

Substituindo cada razão pelos valores encontrados usando o teorema das bissetrizes interna e externa, encontramos:

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{CP}{PA} \cdot \frac{AN}{NB} = \frac{AN+NB}{AP+PC} \cdot \frac{BC}{AN+NB} \cdot \frac{AP+PC}{BC} = 1$$

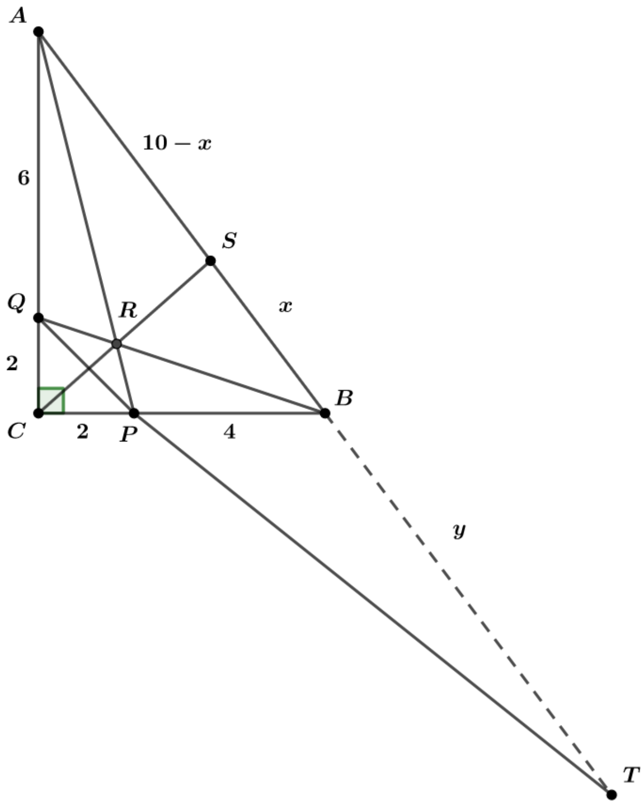
Portanto, os pontos M, N, P satisfazem ao teorema de Menelaus, logo, são colineares.

Gabarito: Demonstração

6. No triângulo retângulo ABC, P e Q estão sobre BC e AC, respectivamente, tais que $CP = CQ = 2$. Pelo ponto de interseção R de AP e BQ, uma reta é desenhada passando também por C e cortando AB em S. O prolongamento de PQ corta AB em T. Se a hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, encontre TS.

Resolução:

Como ABC é retângulo com hipotenusa $AB = 10$ e $AC = 8$, temos pelo teorema de Pitágoras $BC = 6$. Desenhando a figura do texto, temos:



R é ponto de concorrência do triângulo ABC, assim, podemos usar o teorema de Ceva:

$$\frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} \cdot \frac{BS}{SA} = 1$$

$$\frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{x}{10-x} = 1$$

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{x}{10-x} = 1$$

$$3x = 20 - 2x$$

$$5x = 20$$

$$\therefore x = 4$$

Como T é prolongamento de PQ, temos que Q, P, T são colineares, logo, podemos aplicar o teorema de Menelaus:

$$\frac{TB}{TA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CP}{PB} = 1$$

$$\frac{y}{10+y} \cdot \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{4} = 1$$

$$\frac{y}{10+y} \cdot \frac{3}{2} = 1$$

$$3y = 20 + 2y$$

$$\therefore y = 20$$

Portanto, TS é dado por:

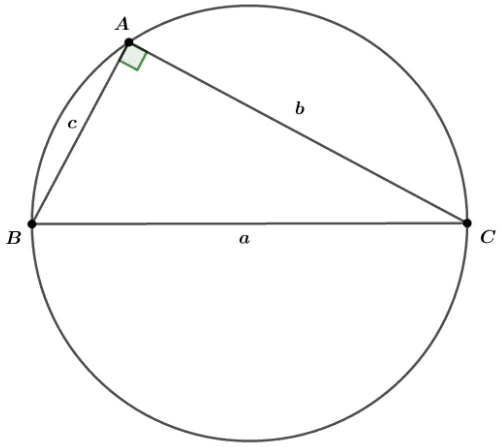
$$TS = x + y = 4 + 20 = 24$$

Gabarito: $\boldsymbol{TS = 24}$

6. Triângulo Retângulo

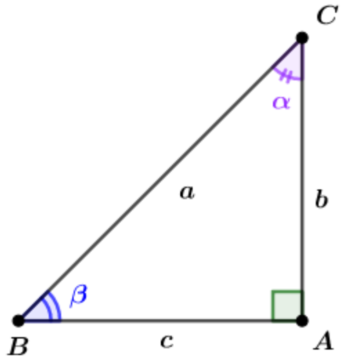
6.1. Pontos Notáveis no Triângulo Retângulo

A hipotenusa de um triângulo retângulo inscrito em uma circunferência possui medida igual à diagonal da circunferência.

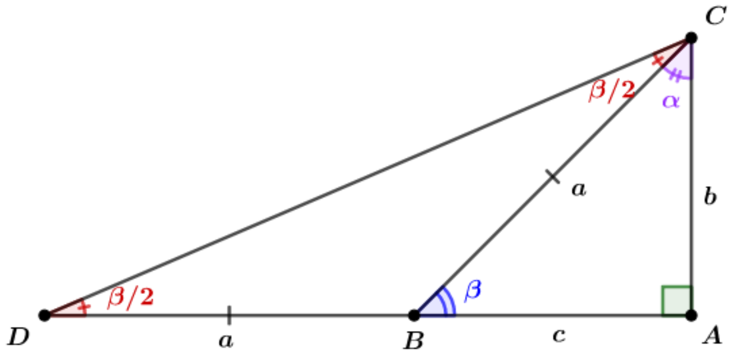


6.2. Relação Trigonométrica no Triângulo Retângulo

Podemos usar a geometria plana para encontrar algumas razões trigonométricas não triviais. O bizu para isso é usar a propriedade do triângulo isósceles. Seja o triângulo ABC dado abaixo:



Vamos prolongar o segmento $\overline{AB}$ de modo a obter um triângulo isósceles com $\overline{BD} \equiv \overline{BC}$.



Perceba que pela propriedade do ângulo externo, temos $B\widehat{D}C \equiv B\hat{C}D = \beta/2$.

Podemos calcular as tangentes do triângulo ADC:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{b}{a+c}$$

Dividindo o lado direito da equação por a, temos:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\frac{b}{a}}{1+\frac{c}{a}}$$

Do triângulo ABC, podemos escrever:

$$sen\beta=\frac{b}{a}$$
$$cos\beta=\frac{c}{a}$$

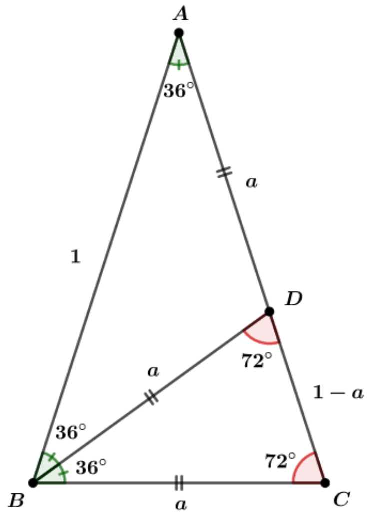
Substituindo na equação da tangente:

$$tg\left(\frac{\beta}{2}\right)=\frac{sen\beta}{1+cos\beta}$$

Usando essa ideia, podemos calcular o valor das razões trigonométricas para os ângulos de 15° e 22,5°.

6.2.1. 36°

Nesse caso, devemos usar o seguinte triângulo isósceles de lados $AB=AC=1$:

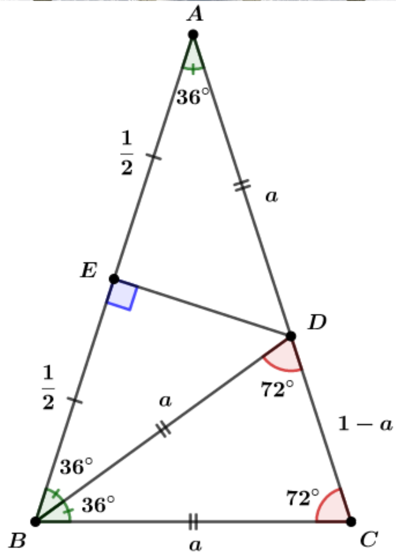


Note que $\overline{BD}$ é a bissetriz do triângulo ABC no vértice B.
ΔABC e ΔBCD são isósceles.
Vamos calcular o valor da base. Usando a semelhança de triângulos:

$$\Delta ABC\sim\Delta BCD\Rightarrow\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}$$

$$\frac{1}{a}=\frac{a}{1-a}\Rightarrow 1-a=a^2\Rightarrow a^2+a-1=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\therefore a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Agora, podemos calcular o valor do cosseno de 36°. Como ΔABD é isósceles com base AB, temos que ED é a sua mediatriz. Assim, temos:



Do triângulo BED, podemos escrever:

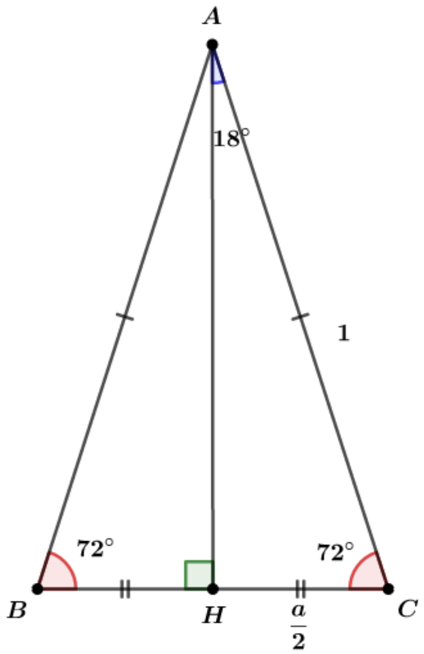
$$\cos(36°)=\frac{\frac{1}{2}}{a}\Rightarrow\cos(36°)=\frac{1}{2a}\Rightarrow\cos(36°)=\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}\Rightarrow\cos(36°)=\frac{1}{\sqrt{5}-1}$$

$$\therefore\cos(36°)=\frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

Para calcular o valor do seno, basta aplicar o teorema de Pitágoras e encontrar o valor do lado ED.

6.2.2. **18°**

Podemos calcular o valor do seno de 18° através do mesmo triângulo do item anterior:



Como ΔABC é isósceles com base BC, temos que AH é a mediatriz do triângulo. Assim, H é o ponto médio da base BC. Desse modo:

$$sen(18°)=\frac{\frac{a}{2}}{1}$$

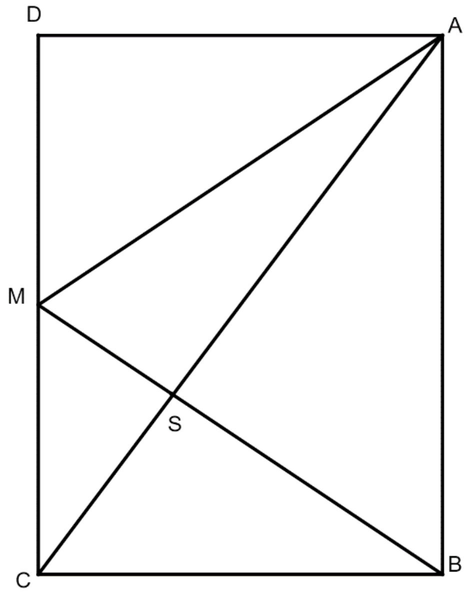
$$sen(18°)=\frac{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}{2}$$

$$\therefore sen(18°)=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

7. Lista de Questões

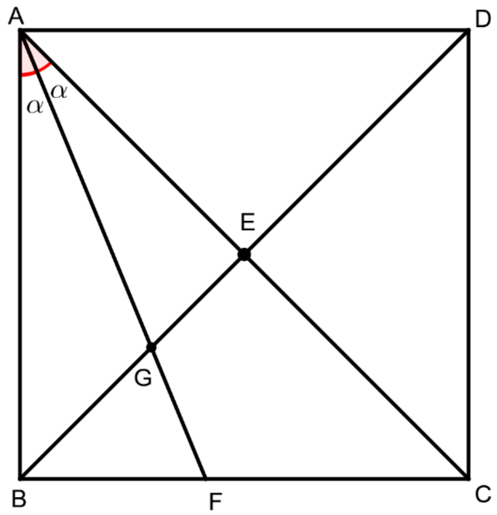
7. (Tópicos de Matemática)

Na figura $ABCD$ é um retângulo, M é o ponto médio de CD e o triângulo ABM é equilátero. Se $AB = 15m$, calcule BS.



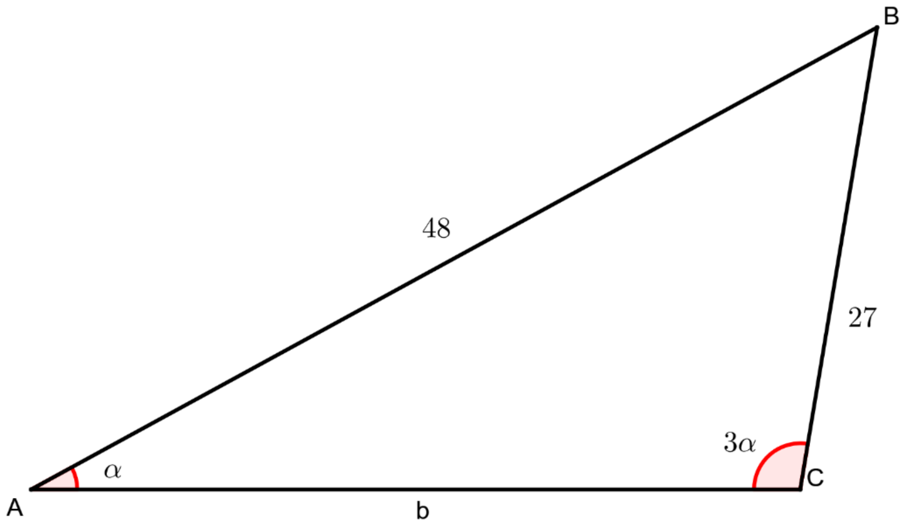
8. (Tópicos de Matemática)

Em um quadrado $ABCD$, AC e BD se interceptam em E. O ponto F sobre BC é tal que os ângulos $C\hat{A}F$ e $F\hat{A}B$ são iguais, se AF intersecta BD em G e se $EG = 24$, determine CF.



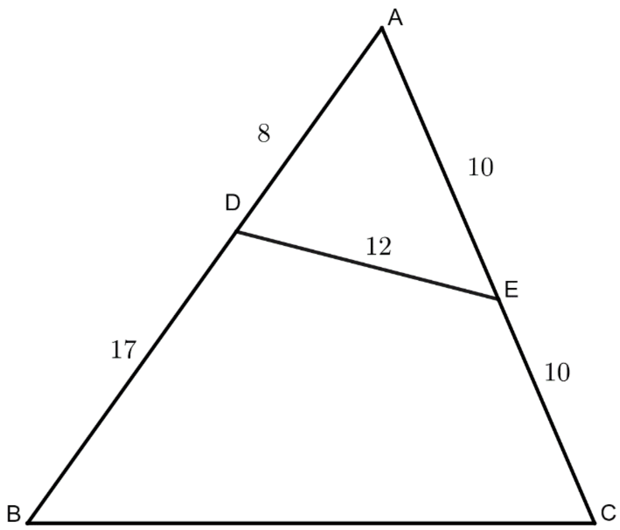
9. (Tópicos de Matemática)

No triângulo ABC (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida b do lado AC.



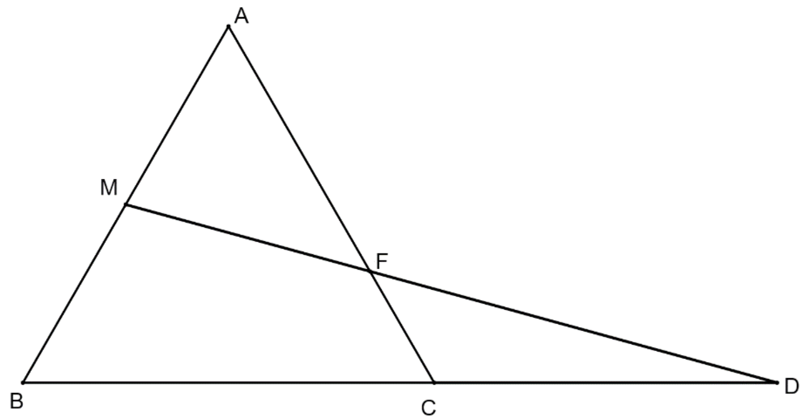
10. (Tópicos de Matemática)

No triângulo ABC da figura abaixo, determine a medida do lado BC.



11. (Mack/1978)

O triângulo ABC da figura é equilátero. $AM = MB = 10$ e $CD = 12$. Calcule o valor de FC.



12. (CN/2019)

A circunferência λ, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:

a) $(pq)^2$

b) $(2pq)^2$

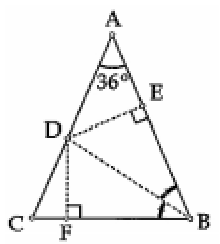
c) $\sqrt{pq}$

d) $\sqrt{2pq}$

e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

13. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com $B\hat{A}C = 36^\circ$ e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{BF}$ é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

14. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = b e BC = a. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

15. (CN/2013)

Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.

IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

16. (CN/2010)

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

17. (CN/2009)

Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

c) $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

18. (CN/2008)

Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

a) 6,5

b) 7,0

c) 7,5

d) 8,0

e) 8,5

19. (CN/2005)

No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1

b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

20. (ITA/2017)

Considere o triângulo ABC, em que os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, $10\ cm, 15\ cm$ e $20\ cm$. Seja D um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja E um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de D, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em cm, de CE é

a) $\frac{11\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{13\sqrt{6}}{3}$

c) $\frac{17\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$

e) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

21. (ITA/2013)

Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

a) $\frac{1}{2}A\hat{B}C$

b) $\frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C$

c) $\frac{2}{3}A\hat{B}C$

d) $2A\hat{B}C - \pi$

e) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$

22. (ITA/2013)

Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de l.

b) Os ângulos $C\hat{A}B, A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

23. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) $3/4$

b) $15/6$

c) $15/4$

d) $25/4$

e) $25/2$

24. (ITA/2007)

Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

25. (ITA/2005)

Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

a) $4/5$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

26. (ITA/1998)

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$

b) $32°$

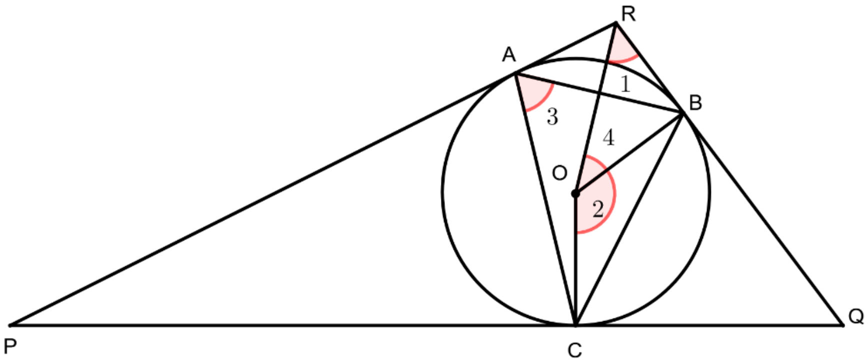
c) $36°$

d) $40°$

e) $45°$

27. (ITA-1992)

Considere o triângulo $\boldsymbol{PQR}$ abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro $\boldsymbol{O}$, cujos pontos de tangência são $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$. Sabe-se que os ângulos $\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\boldsymbol{Q}}$ e $\hat{\boldsymbol{R}}$ estão nessa ordem, em progressão aritmética de razão $\mathbf{20°}$. Os ângulos $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:



a) $40°, 120°, 60°, 50°$.

b) $40°, 100°, 50°, 40°$.

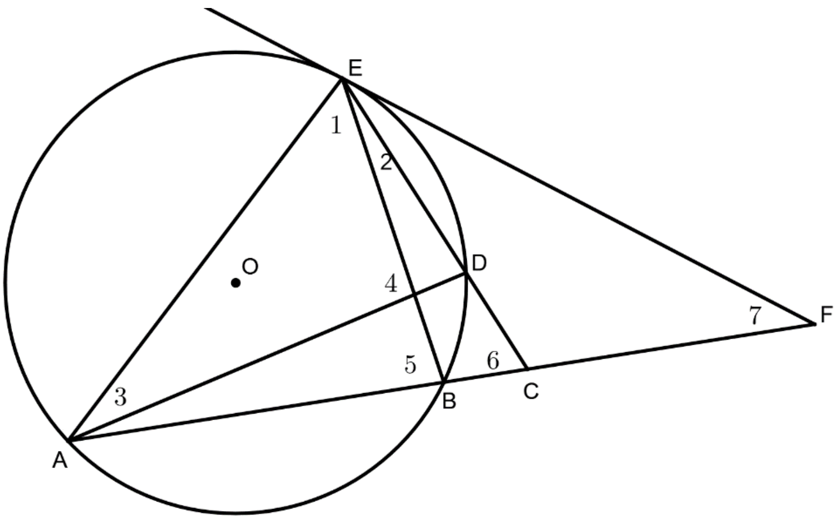
c) $60°, 140°, 60°, 40°$.

d) $60°, 120°, 40°, 50°$.

e) $n.d.a.$

28. (ITA-1990)

Na figura abaixo $\boldsymbol{O}$ é centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{F}$ é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ são dadas, respectivamente, por $\mathbf{49°}, \mathbf{18°}, \mathbf{34°}$, determinar a medida dos ângulos $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}$ e $\mathbf{7}$. Nas alternativas a seguir considere os valores dados iguais às medidas de $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}$ e $\mathbf{7}$, respectivamente:



a) $97°, 78°, 61°, 26°$.

b) $102°, 79°, 58°, 23°$.

c) $92°, 79°, 61°, 30°$.

d) $97°, 79°, 61°, 27°$.

e) $97°, 80°, 62°, 29°$.

29. (IME/2017)

Em um triângulo ABC, a medida da bissetriz interna AD é a média geométrica entre as medidas dos segmentos BD e DC, e a medida da mediana AM é a média geométrica entre os lados AB e AC. Os pontos D e M estão sobre o lado BC de medida a. Pede-se determinar os lados AB e AC do triângulo ABC em função de a.

30. (IME/2016)

Em um triângulo ABC, o ponto D é o pé da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{AD}, r = \overline{AB}/\overline{AC}$ e que $\hat{C} = \alpha$. Portanto o valor de $sen^2\alpha$ é

a) $\frac{3r-1}{4}$

b) $\frac{3r-1}{4r}$

c) $\frac{r+3}{4}$

d) $\frac{3r+1}{4r}$

e) $\frac{3r+1}{4}$

31. (IME/2013)

Seja um triângulo ABC. AH é a altura relativa de BC, com H localizado entre B e C. Seja BM a mediana relativa de AC. Sabendo que $BH = AM = 4$, a soma dos possíveis valores inteiros de BM é

a) 11

b) 13

c) 18

d) 21

e) 6

8. Gabarito

GABARITO

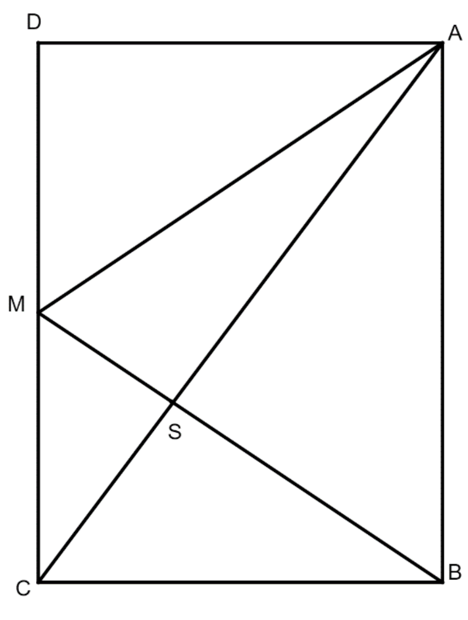
7. $BS = 10$
8. $CF = 48$
9. $b = 35$
10. $BC = 30$
11. $FC = 60/11$
12. d
13. b

14. a
15. d
16. e
17. c
18. c
19. b
20. e
21. b
22. a) $CM = l/2$ b) $C\hat{A}B = 67{,}5°, B\hat{C}A = 90°, A\hat{B}C = 22{,}5°$
23. d
24. $\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{2}{9}$
25. c
26. c
27. a
28. d
29. $AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ e $AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ou $AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ e $AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$
30. d
31. b

9. Lista de Questões Comentadas

7. (Tópicos de Matemática)

Na figura $\boldsymbol{ABCD}$ é um retângulo, $\boldsymbol{M}$ é o ponto médio de $\boldsymbol{CD}$ e o triângulo $\boldsymbol{ABM}$ é equilátero. Se $\boldsymbol{AB = 15m}$, calcule $\boldsymbol{BS}$.



Comentários

Como o triângulo ABM é equilátero, temos $BM = MA = AB = 15$.
Além disso, dado que M é ponto médio de CD, temos $DM = MC = 7{,}5$.
Seja $BS = x$, então $MS = BM - BS = 15 - x$.
Veja que os triângulos ABS e CSM são semelhantes pelo caso AA, então temos:

$$\frac{MS}{BS} = \frac{MC}{AB} \Rightarrow \frac{15 - x}{x} = \frac{7{,}5}{15} = \frac{1}{2} \Rightarrow 30 - 2x = x \Rightarrow 3x = 30 \Rightarrow x = 10$$

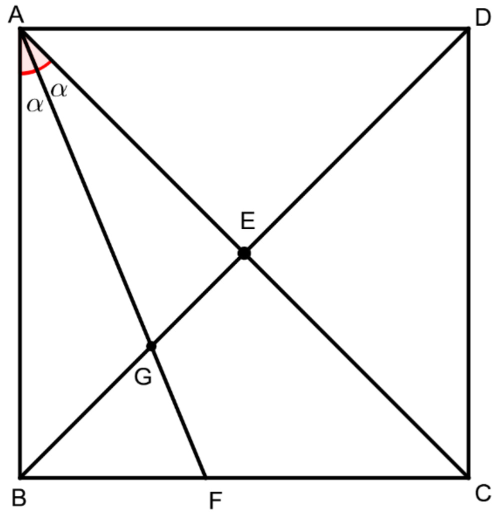
Portanto $BS = 10$.

Gabarito: $BS = 10$

---

8. (Tópicos de Matemática)

Em um quadrado $ABCD$, AC e BD se interceptam em E. O ponto F sobre BC é tal que os ângulos $C\hat{A}F$ e $F\hat{A}B$ são iguais, se AF intersecta BD em G e se $EG = 24$, determine CF.



Comentários

Como AC é diagonal do quadrado, temos $2\alpha = 45°$ e o ΔABE é retângulo em E. Dessa forma, temos:

$$\Delta ABF \Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB} \ (I)$$

$$\Delta AEG \Rightarrow tg\alpha = \frac{EG}{EA}$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \frac{BF}{AB} = \frac{EG}{EA}$$

Mas $EA = \frac{AC}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2}$ e $EG = 24$, logo:

$$\frac{BF}{AB} = \frac{24}{\frac{AB\sqrt{2}}{2}}$$

$$\boxed{BF = 24\sqrt{2}}$$

Além disso, de (I):

$$AB = \frac{BF}{tg\alpha} \ (II)$$

Sabendo que:

$$tg(a+b)=\frac{tga+tgb}{1-tga\,tgb}$$

Sendo $a=b=22{,}5°=\alpha$, temos:

$$tg\ 45°=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$
$$tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$$
$$tg\alpha=-1\pm\sqrt{2}$$

Mas $0°<\alpha<90°$, logo, $tg\alpha>0$. Assim:

$$tg\alpha=\sqrt{2}-1$$

Substituindo em (II):

$$AB=\frac{24\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$
$$\boxed{AB=24\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)=BC}$$

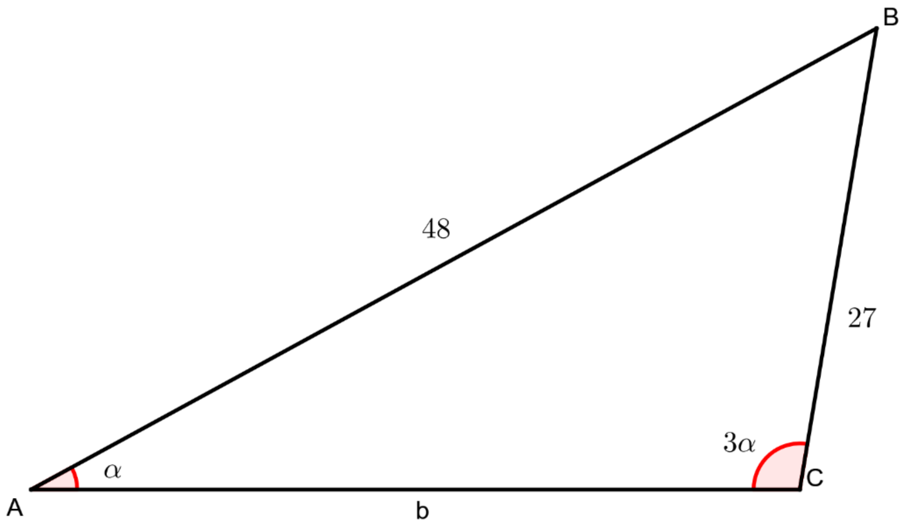
Por fim:

$$CF=BC-BF=24\cdot\left(2+\sqrt{2}\right)-24\sqrt{2}$$
$$\boxed{CF=48}$$

Gabarito: $CF=48$

9. **(Tópicos de Matemática)**

No triângulo ABC (obtusângulo) da figura abaixo, determine a medida b do lado AC.



Comentários

Pela lei dos senos, temos que:

$$\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{48}{sen\ 3\alpha}=\frac{b}{sen\ (180-4\alpha)}=\frac{b}{sen\ 4\alpha}$$

Mas $sen\ 3\alpha$ pode ser escrito como:

$$sen\ 3\alpha=sen\ \alpha\cdot\cos 2\alpha+\cos\alpha\cdot sen\ 2\alpha$$
$$sen\ 3\alpha=sen\ \alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)+2\ sen\ \alpha\cdot cos^2\ \alpha$$
$$\Rightarrow sen\ 3\alpha=sen\ \alpha\cdot(4cos^2\ \alpha-1)$$

Substituindo $sen\ 3\alpha$ na razão encontrada acima, temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{48}{sen\ 3\alpha}\Rightarrow\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{48}{sen\ \alpha\cdot(4cos^2\ \alpha-1)}$$

Sendo α ângulo interno do triângulo, temos $sen\ \alpha\neq 0$, logo:

$$4cos^2\ \alpha-1=\frac{48}{27}=\frac{16}{9}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{5}{6}$$

Podemos escrever $sen\ 4\alpha$ como:

$$sen\ 4\alpha=2sen\ 2\alpha\cos 2\alpha$$
$$sen\ 4\alpha=4\ sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)$$

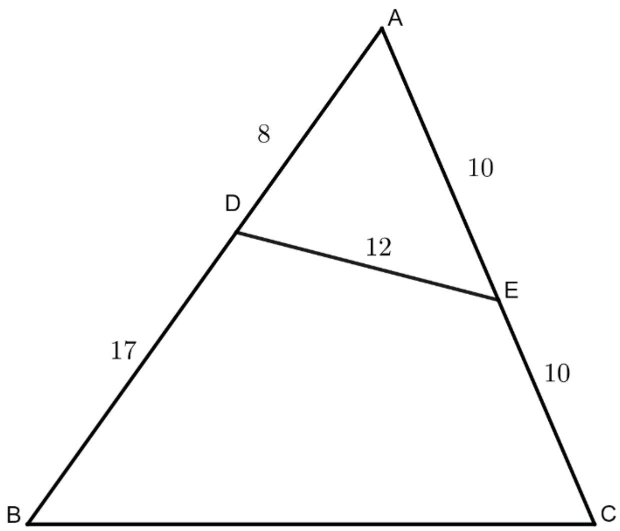
Substituindo $sen\ 4\alpha$ e $cos\ \alpha$ temos:

$$\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{b}{sen\ 4\alpha}\Rightarrow\frac{27}{sen\ \alpha}=\frac{b}{4\ sen\ \alpha\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)}$$
$$b=4\cdot 27\cdot\cos\alpha\cdot(2cos^2\ \alpha-1)$$
$$b=4\cdot 27\cdot\frac{5}{6}\cdot\left(2\frac{25}{36}-1\right)=35$$

Gabarito: $b=35$

10. (Tópicos de Matemática)

No triângulo ABC da figura abaixo, determine a medida do lado BC.



Comentários

Perceba as seguintes relações:

$$\frac{AE}{AB}=\frac{10}{8+17}=\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$$
$$\frac{AD}{AC}=\frac{8}{20}=\frac{2}{5}$$
$$\Rightarrow\frac{AE}{AB}=\frac{AD}{AC}$$

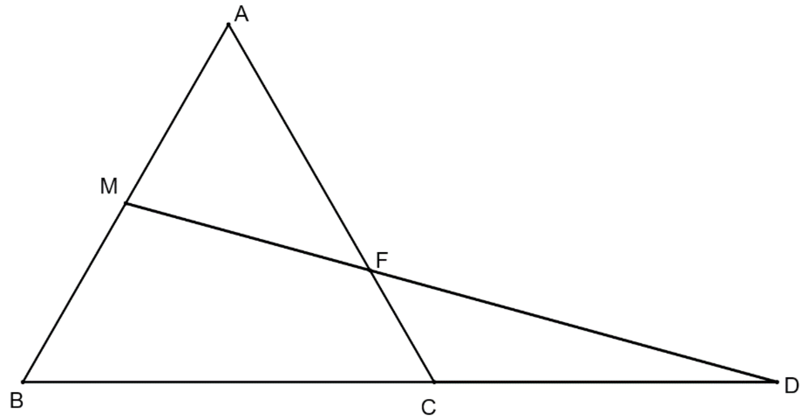
Então, pelo caso LAL, os triângulos ADE e ACB são semelhantes. Portanto:

$$\frac{DE}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow\frac{12}{BC}=\frac{2}{5}\Rightarrow BC=30$$

Gabarito: $BC=30$

11. (Mack/1978)

O triângulo ABC da figura é equilátero. $AM = MB = 10$ e $CD = 12$. Calcule o valor de FC.



Comentários

Como o triângulo ABC é equilátero, temos:

$$AB = BC = CA = 20$$

Assim:

$$BD = BC + CD = 20 + 12 = 32$$

Pelo teorema de Menelaus, temos que:

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CF}{FA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1 \Rightarrow \frac{32}{12} \cdot \frac{CF}{20 - CF} \cdot \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow 8CF = 3(20 - CF) \Rightarrow \boxed{FC = \frac{60}{11}}$$

Gabarito: $FC = \frac{60}{11}$

12. (CN/2019)

A circunferência λ, inscrita no triângulo retângulo ABC, tangencia a hipotenusa BC, dividindo-a em dois segmentos de reta de medidas $'p'$ e $'q'$, a partir desse ponto de tangência. A média geométrica dos catetos $'b'$ e $'c'$ desse triângulo é igual a:

a) $(pq)^2$

b) $(2pq)^2$

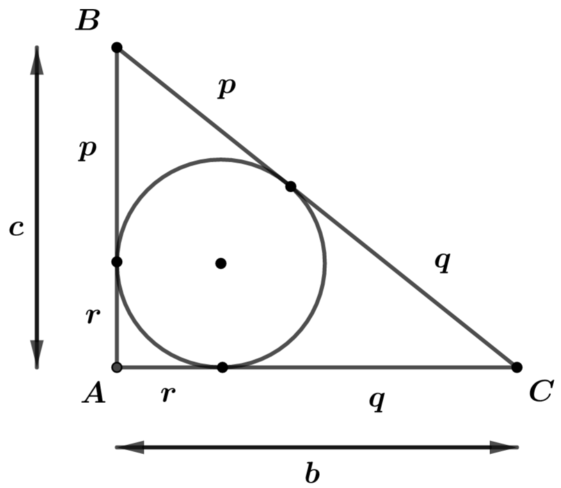
c) $\sqrt{pq}$

d) $\sqrt{2pq}$

e) $\sqrt{\frac{pq}{2}}$

Comentários

Observe a seguinte figura:



Queremos:

$$\sqrt{bc}$$

Da figura, podemos escrever:

$$r = c - p = b - q \Rightarrow c - b = p - q \Rightarrow c^2 + b^2 - 2bc = (p - q)^2$$

Além disso, do teorema de Pitágoras:

$$b^2 + c^2 = (p + q)^2$$

Logo, temos que:

$$(p + q)^2 - 2bc = (p - q)^2 \Rightarrow (p + q)^2 - (p - q)^2 = 2bc$$

Fatorando o lado esquerdo:

$$(p + q + p - q)(p + q - p + q) = 2bc \Rightarrow 4pq = 2bc \Rightarrow bc = 2pq$$

Do que segue que:

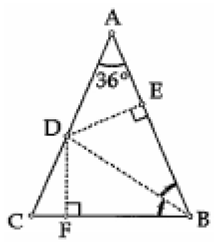
$$\sqrt{bc} = \sqrt{2pq}$$

Gabarito: "d".

---

13. (CN/2017)

Observe a figura a seguir.



A figura a acima mostra um triângulo isósceles ABC, com BÂC = 36° e AB = AC = 1 m. A bissetriz interna de B corta AC em D. Por D, traçam-se as distâncias até AB e até BC, determinando os pontos E e F, respectivamente. Sendo assim, é correto afirmar que o valor do produto $\frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{BF}$ é

a) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

b) $\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$

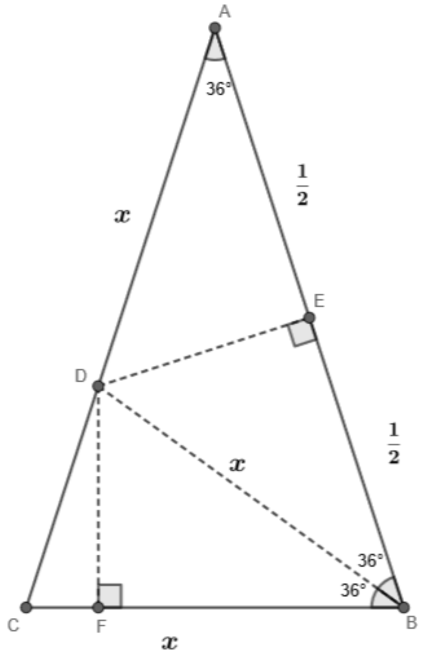
c) $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

d) $\frac{3\sqrt{5}-1}{2}$

e) $\frac{4-\sqrt{5}}{2}$

Comentários

Observe a figura abaixo:



Nela, foram destacadas algumas relações provenientes da construção fornecida no enunciado. Os triângulos ΔABC e ΔCBD são semelhantes pelo caso AAA. Disso, podemos escrever que:

$$\frac{AC}{CB} = \frac{BD}{DC} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0 \; eq.01$$

Resolvendo para $x > 0$, temos:

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Queremos $\frac{DE}{AD} \cdot \frac{DF}{BF}$. Pela congruência entre os triângulos $\Delta FDB, \Delta BDE \; e \; \Delta DEA$, temos que:

$$DE = DF = y$$

$$AD = x \; e \; BF = \frac{1}{2}$$

Ou seja, queremos na verdade:

$$\frac{y^2}{x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}$$

Por Pitágoras no ΔDEB, vem:

$$x^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2$$

Da $eq.01$:

$$x^2 = 1 - x \Rightarrow x^2 = 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Ou seja:

$$y^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5-2\sqrt{5}}{4}$$

Logo:

$$\frac{y^2}{x\cdot\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{5-2\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}-1}=\frac{5-2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}=\frac{3\sqrt{5}-5}{4}$$

Gabarito: “b”.

14. (CN/2014)

Considere que ABC é um triângulo retângulo em A, de lados AC = b e BC = a. Seja H o pé da perpendicular traçada de A sobre BC, e M o ponto médio de AB, se os segmentos AH e CM cortam-se em P, a razão $\frac{AP}{PH}$ será igual a:

a) $\frac{a^2}{b^2}$

b) $\frac{a^3}{b^2}$

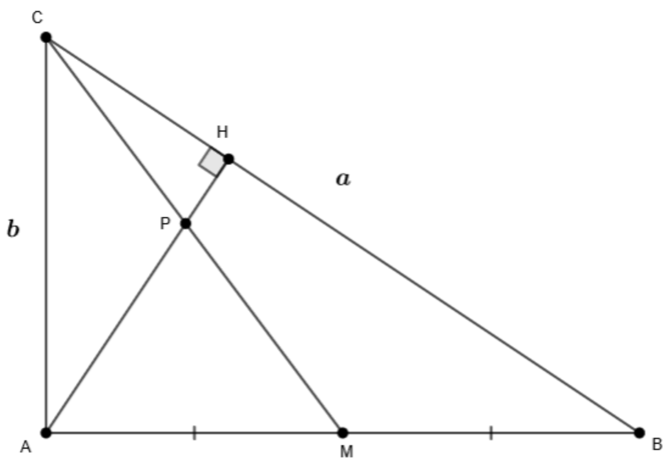
c) $\frac{a^2}{b^3}$

d) $\frac{a^3}{b^3}$

e) $\frac{a}{b}$

Comentários

Observe a figura abaixo:



Essa questão é uma aplicação direta do teorema de Menelaus ao triângulo ΔABH, isto é:

$$\frac{BC}{CH}\cdot\frac{HP}{PA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$$

Veja que, como M é ponto médio:

$$AM=MB\Rightarrow\frac{AM}{MB}=1$$

Além disso, da semelhança entre os triângulos ΔABC e ΔAHC:

$$\frac{AC}{BC}=\frac{CH}{AC}\Rightarrow\frac{CH}{BC}=\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{BC}{CH}=\frac{a^2}{b^2}$$

Por fim, temos que:

$$\frac{BC}{CH}\cdot\frac{HP}{PA}\cdot 1=1\Rightarrow\frac{AP}{PH}=\frac{BC}{CH}=\frac{a^2}{b^2}$$

Gabarito: “a”.

15. (CN/2013)

Analise as afirmativas abaixo, em relação ao triângulo ABC.

I. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se o ângulo interno no vértice A é reto, então $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Seja AB = c, AC = b e BC = a. Se $a^2 = b^2 + c^2$, então o ângulo interno no vértice A é reto.

III. Se M é ponto médio de BC e $\mathrm{AM} = \frac{\mathrm{BC}}{2}$, ABC é retângulo.

IV. Se ABC é retângulo, então o raio do seu círculo inscrito pode ser igual a três quartos da hipotenusa.

Assinale a opção correta.

a) Apenas as afirmativas I e II são verdadeiras.

b) Apenas a afirmativa I é verdadeira.

c) Apenas as afirmativas II e IV são verdadeiras.

d) Apenas as afirmativas I, II e III são verdadeiras.

e) Apenas as afirmativas II, III e IV são verdadeiras.

Comentários

Vamos analisar cada afirmativa.

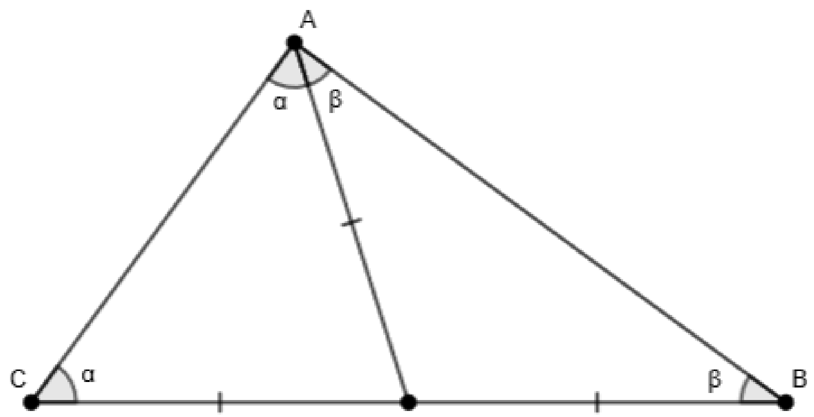
Afirmativa I:

Segue do próprio teorema de Pitágoras o resultado. Logo, é verdadeiro.

Afirmativa II:

Essa é a volta do Teorema de Pitágoras, logo, verdadeiro.

Afirmativa III:



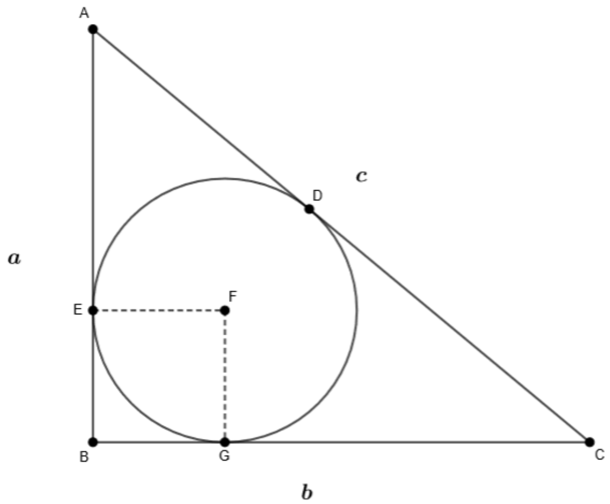
Do triângulo acima, temos:

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 180° \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$$

Ou seja, o ângulo $B\hat{A}C$ é reto. Portanto, a alternativa é verdadeira.

Afirmativa IV:

Suponha que seja possível.



Observe a figura. Do teorema do bico, temos que:

$$AE = AD \text{ e } GC = CD$$

Mas:

$$EB = BG = \frac{3}{4}c$$

Ou seja:

$$AE = a - \frac{3}{4}c \text{ e } GC = b - \frac{3}{4}c$$

Como $AD + CD = c \Rightarrow a - \frac{3}{4}c + b - \frac{3}{4}c \Rightarrow a + b = \frac{5}{2}c$.

Disso, temos que:

$$(a+b)^2 = \frac{25}{4}c^2 \Rightarrow ab = \frac{21}{8}c^2$$

Da desigualdade das médias:

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2} = ab = \frac{21}{8}c^2$$

Do teorema de Pitágoras:

$$\frac{a^2+b^2}{2} = \frac{c^2}{2} \geq \frac{21}{8}c^2 \Rightarrow 0 \geq c^2$$

Que é absurdo, pois $c > 0$. Logo, é falsa.

Gabarito: "d".

16. (CN/2010)

Em um triângulo acutângulo não equilátero, os três pontos notáveis (ortocentro, circuncentro e baricentro) estão alinhados. Dado que a distância entre o ortocentro e o circuncentro é k, pode-se concluir que a distância entre o circuncentro e o baricentro será

a) $\frac{5k}{2}$

b) $\frac{4k}{3}$

c) $\frac{4k}{5}$

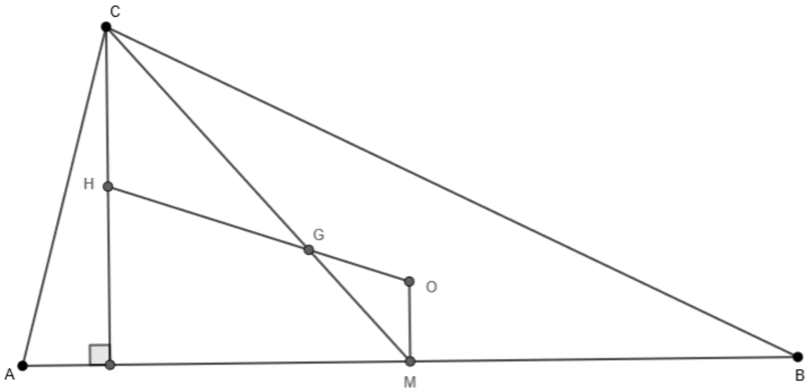
d) $\frac{k}{2}$

e) $\frac{k}{3}$

Comentários

O resultado de que os pontos notáveis do triângulo estão alinhados é conhecido como reta de Euler.

Sabe-se, do estudo da geometria plana, que o baricentro divide a mediana na razão de $2:1$. Dessa forma, observe a figura abaixo:



Do enunciado:

$$HO = k$$

Além disso, do que foi dito acima:

$$\frac{CG}{GM} = 2$$

Os triângulos ΔHGC e ΔGMO são semelhantes pelo caso LLL. Disso, temos:

$$\frac{CG}{GM} = \frac{GH}{GO} = 2 \Rightarrow GH = 2GO$$

Mas:

$$GH + GO = k \Rightarrow 2GO + GO = k \Rightarrow GO = \frac{k}{3}$$

Gabarito: "e".

---

17. (CN/2009)

Em um triângulo retângulo ABC, BD é a bissetriz interna relativa ao cateto maior AC e AH é a altura relativa à hipotenusa BC. Se o ponto I é a intersecção entre BD e AH, pode-se afirmar que $\frac{med(BH)}{med(IH)}$ é igual a:

a) $\frac{med(BC)}{med(AH)}$

b) $\frac{med(BC)}{med(AD)}$

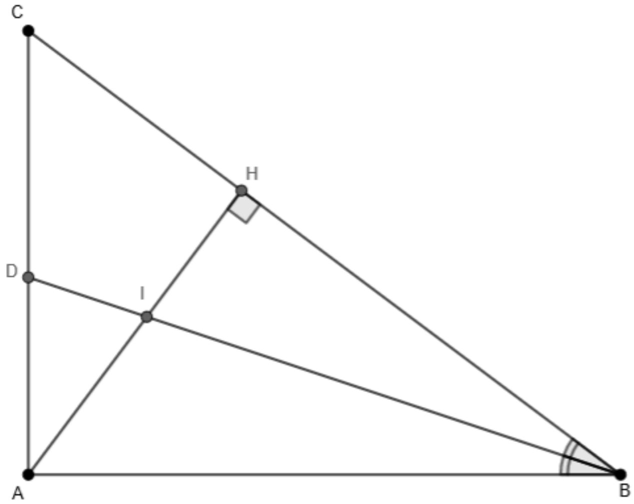
c) $\frac{med(BC)}{med(CD)}$

d) $\frac{med(AD)}{med(AI)}$

e) $\frac{med(AD)}{med(IH)}$

Comentários

Observe o esquema abaixo:



Os triângulos ΔHIB e ΔABD são semelhantes (AA), logo:

$$\frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD}$$

Aplicando o teorema da bissetriz interna ao triângulo ΔABC, temos:

$$\frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

Por fim:

$$\frac{BH}{HI} = \frac{BA}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

Gabarito: "c".

---

18. (CN/2008)

Um triângulo retângulo, de lados expressos por números inteiros consecutivos, está inscrito em um triângulo equilátero T de lado x. Se o maior cateto é paralelo a um dos lados de T, pode-se concluir que x é aproximadamente igual a

a) 6,5

b) 7,0

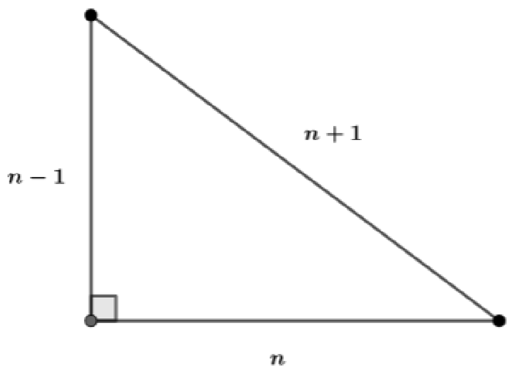
c) 7,5

d) 8,0

e) 8,5

Comentários

O primeiro passo é descobrir os lados do triângulo retângulo:



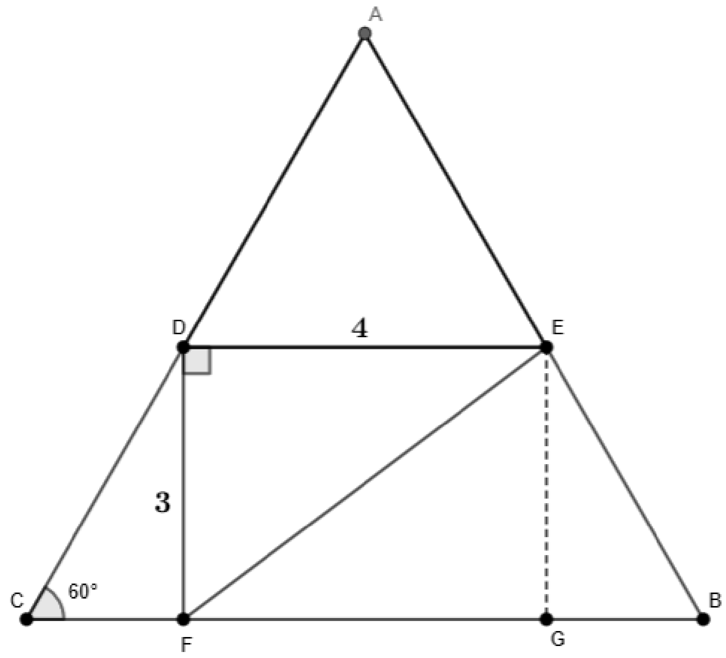
Do teorema de Pitágoras:

$$(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$$
$$n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 \Rightarrow n^2 - 4n = 0 \Rightarrow n(n-4) = 0$$

Como $n \neq 0$:

$$n - 4 = 0 \Rightarrow n = 4$$

Esse triângulo está inscrito em outro, equilátero, de modo que seu cateto maior seja paralelo a um dos lados deste. Disso, temos a seguinte figura:



Da trigonometria aplicada à geometria, temos:

$$\tan 60° = \frac{DF}{CF} \Rightarrow CF = \frac{DF}{\tan 60°} = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Por simetria, $CF = GB = \sqrt{3}$.

Como o lado do triângulo vale x, temos:

$$x = CB = CF + FG + GB = \sqrt{3} + 4 + \sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3} \approx 7{,}46$$

Gabarito: “c”.

---

19. (CN/2005)

No triângulo ABC, os lados AB e AC têm a mesma medida x e a mediana BM tem a mesma medida y do lado BC. Sendo assim, é correto afirmar que a razão $\frac{x}{y}$ é um valor compreendido entre

a) 0 e 1

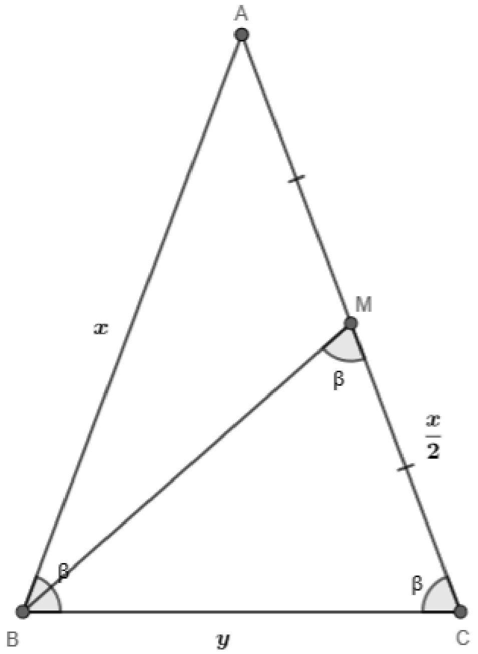
b) 1 e 2

c) 2 e 3

d) 3 e 4

e) 4 e 5

Comentários



Os $\Delta ABC\ e\ \Delta BMC$ são semelhantes pelo caso AAA, já que eles compartilham o ângulo $B\hat{C}A$ e são ambos isósceles.

Dessa forma, podemos dizer que:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CM} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{\frac{x}{2}} \Rightarrow \frac{x^2}{y^2} = 2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{2}$$

Sabemos que $1 < \sqrt{2} < 2$.

Gabarito: "b".

20. (ITA/2017)

Considere o triângulo ABC, em que os segmentos $\overline{AC}, \overline{CB}$ e $\overline{AB}$ medem, respectivamente, $10\ cm, 15\ cm$ e $20\ cm$. Seja D um ponto do segmento $\overline{AB}$ de tal modo que $\overline{CD}$ é a bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$ e seja E um ponto do prolongamento de $\overline{CD}$, na direção de D, tal que $D\hat{B}E = D\hat{C}B$. A medida, em cm, de CE é

a) $\frac{11\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{13\sqrt{6}}{3}$

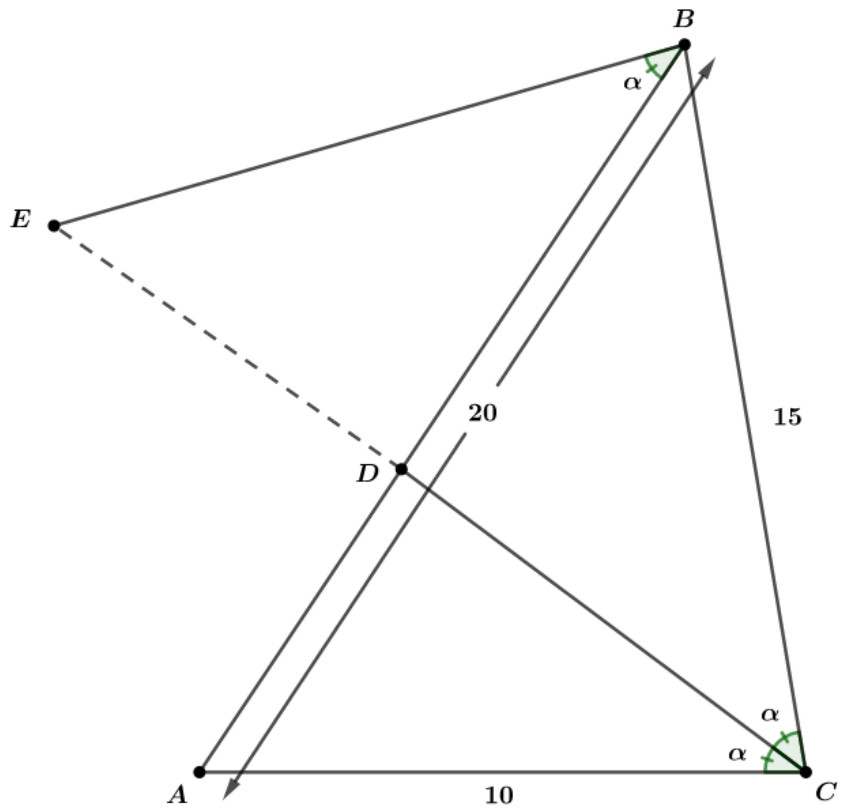
c) $\frac{17\sqrt{6}}{3}$

d) $\frac{20\sqrt{6}}{3}$

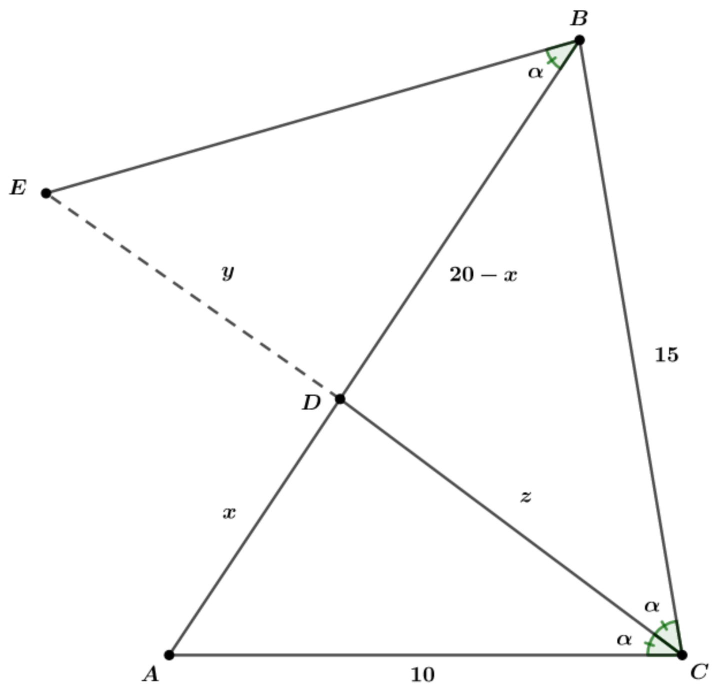
e) $\frac{25\sqrt{6}}{3}$

Comentários

Desenhando a figura da questão, obtemos:

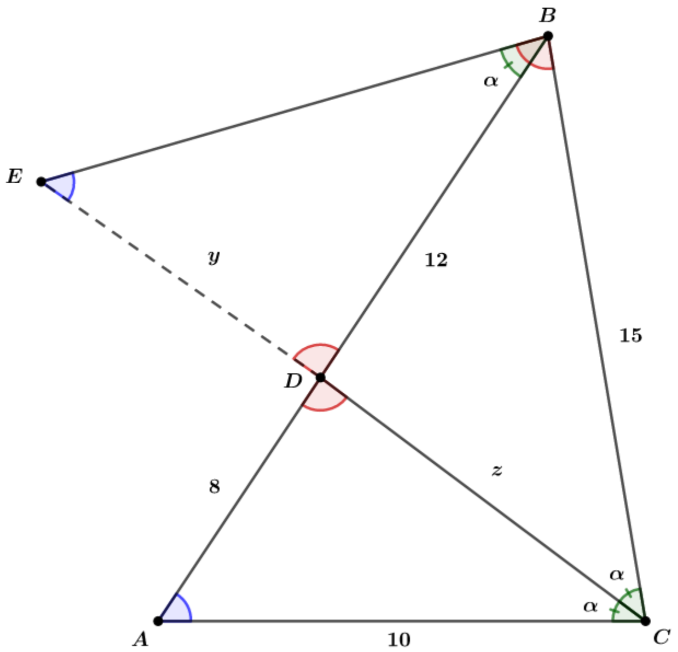


Usando o teorema da bissetriz interna:



$$\frac{AD}{AC}=\frac{BD}{BC}\Rightarrow\frac{x}{10}=\frac{20-x}{15}\Rightarrow 15x=200-10x\Rightarrow x=8$$

Como $A\widehat{D}C$ e $E\widehat{D}B$ são opostos pelo vértice e $A\hat{B}E=A\hat{C}D$, temos que $\Delta ADC\equiv\Delta EDB\equiv\Delta EBC$:



Assim, temos as seguintes razões:

$$\Delta ADC \sim \Delta EDB \Rightarrow \frac{8}{z} = \frac{y}{12} \Rightarrow yz = 96 \ \ (I)$$

$$\Delta ADC \sim \Delta EBC \Rightarrow \frac{10}{z} = \frac{y+z}{15} \Rightarrow 150 = yz + z^2 \ \ (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$150 = 96 + z^2 \Rightarrow z = \sqrt{54} \Rightarrow z = 3\sqrt{6}$$

Substituindo z em (I):

$$y = \frac{96}{z} \Rightarrow y = \frac{96}{3\sqrt{6}} \Rightarrow y = \frac{16\sqrt{6}}{3}$$

A medida de CE é dada por:

$$CE = y + z = \frac{16\sqrt{6}}{3} + 3\sqrt{6} = \frac{25\sqrt{6}}{3}$$

Gabarito: "e".

---

21. (ITA/2013)

Uma reta r tangencia uma circunferência num ponto B e intercepta uma reta s num ponto A exterior à circunferência. A reta s passa pelo centro desta circunferência e a intercepta num ponto C, tal que o ângulo $A\hat{B}C$ seja obtuso. Então o ângulo $C\hat{A}B$ é igual a

a) $\frac{1}{2}A\hat{B}C$

b) $\frac{3}{2}\pi - 2A\hat{B}C$

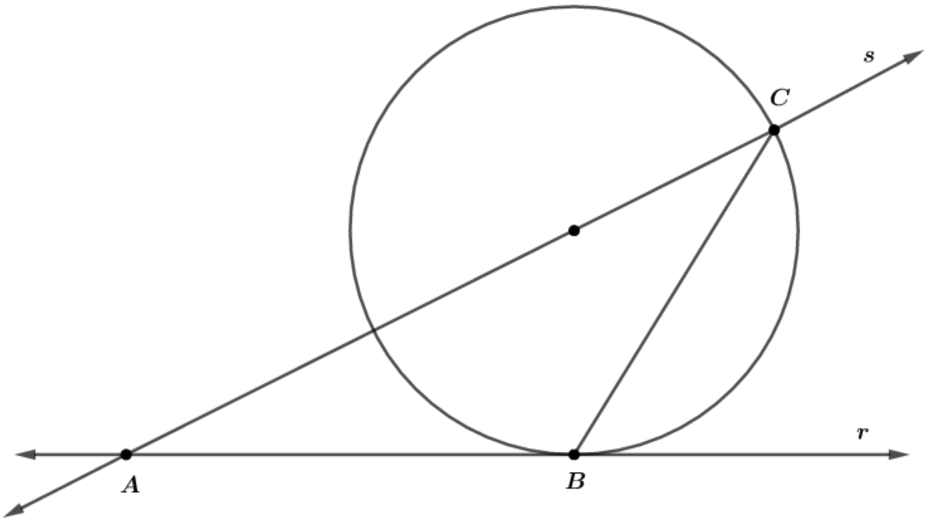
c) $\frac{2}{3}A\hat{B}C$

d) $2A\hat{B}C - \pi$

e) $A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}$

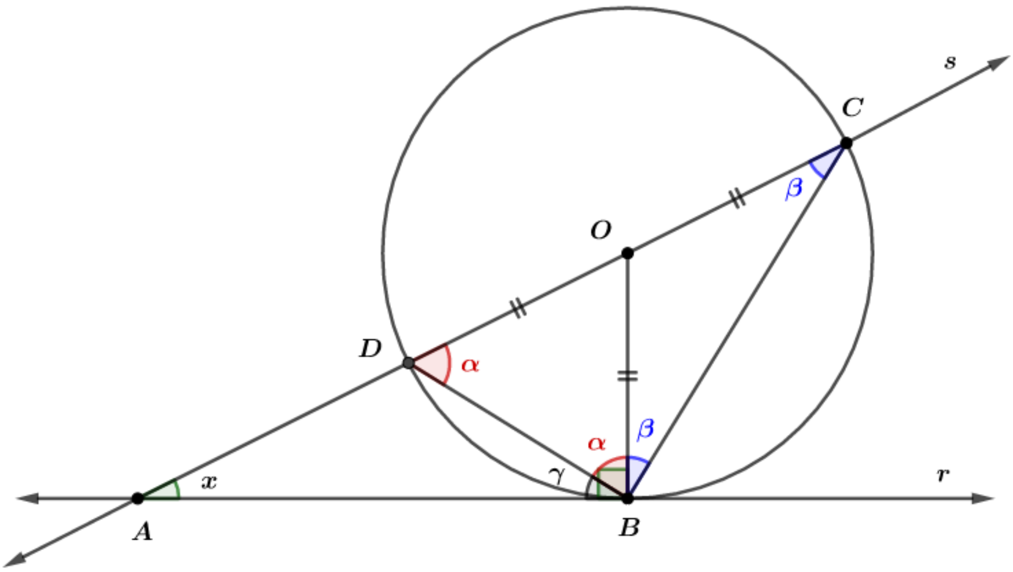
Comentários

O desenho do enunciado é dado abaixo:

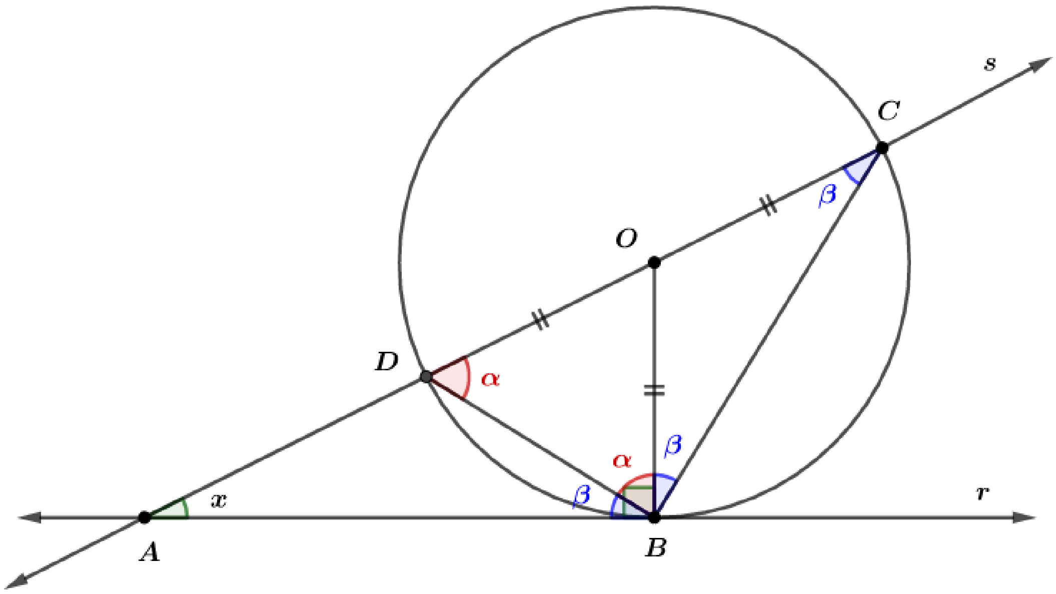


Seja O, o centro da circunferência. Então, $\overline{OB} \perp \overleftrightarrow{AB}$.

Os triângulos OBD e OBC são isósceles, então $O\hat{B}D = O\hat{D}B$ e $O\hat{C}B = O\hat{B}C$.



Perceba que $A\hat{B}D$ e $B\hat{C}D$ enxergam o mesmo segmento $\overline{BD}$, logo $\gamma = \beta$.



Queremos calcular o valor de $C\hat{A}B = x$. Analisando as alternativas, vemos que todas opções possuem o ângulo $A\hat{B}C$. Desse modo, vamos encontrar uma relação entre x e $A\hat{B}C$.

$$A\hat{B}C = \alpha + \beta + \beta = \alpha + 2\beta$$

Somando os ângulos internos do ΔABC e ΔBCD:

$$x + \alpha + \beta + \beta + \beta = \pi \Rightarrow x = \pi - \alpha - 3\beta$$

$$2\alpha + 2\beta = \pi \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$$

Assim, temos as seguintes relações:

$$\begin{cases} A\hat{B}C = \alpha + 2\beta \ \ (I) \\ x = \pi - \alpha - 3\beta \ \ (II) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta \ \ (III) \end{cases}$$

Substituindo (III) em (I):

$$A\hat{B}C = \frac{\pi}{2} - \beta + 2\beta \Rightarrow \beta = A\hat{B}C - \frac{\pi}{2} \ \ (IV)$$

Substituindo (III) em (II):

$$x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) - 3\beta$$

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\beta \ \ (V)$$

Substituindo (IV) em (V):

$$x = \frac{\pi}{2} - 2\left(A\hat{B}C - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x = \frac{3\pi}{2} - 2A\hat{B}C$$

Gabarito: "b".

22. (ITA/2013)

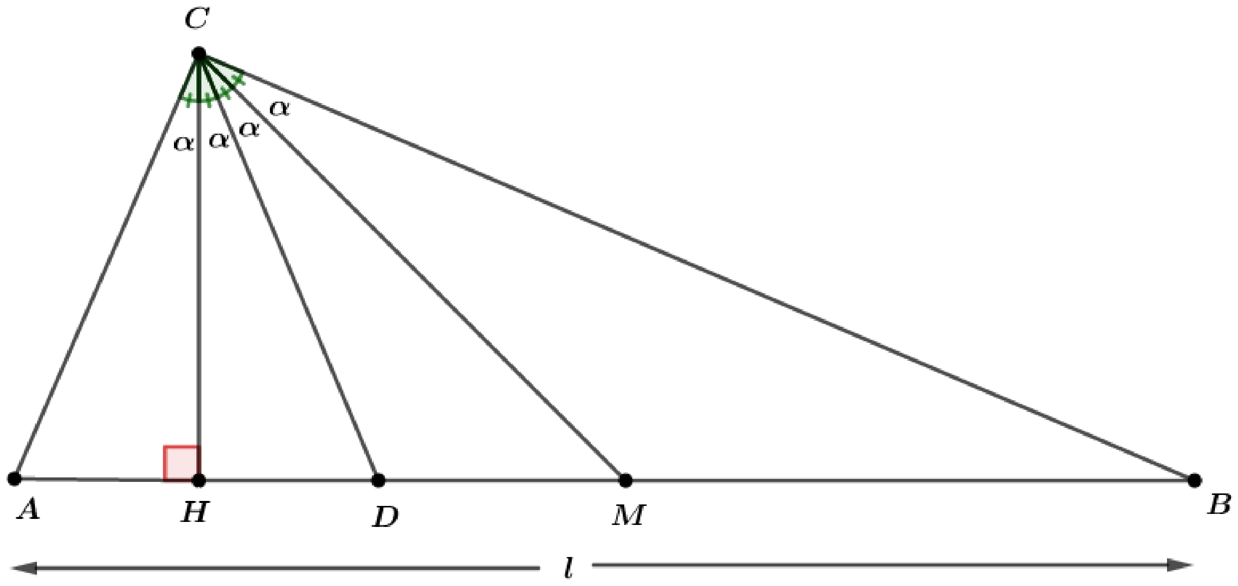
Em um triângulo de vértices A, B e C, a altura, a bissetriz e a mediana, relativamente ao vértice C, dividem o ângulo $B\hat{C}A$ em quatro ângulos iguais. Se l é a medida do lado oposto ao vértice C, calcule:

a) A medida da mediana em função de l.

b) Os ângulos $C\hat{A}B, A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$.

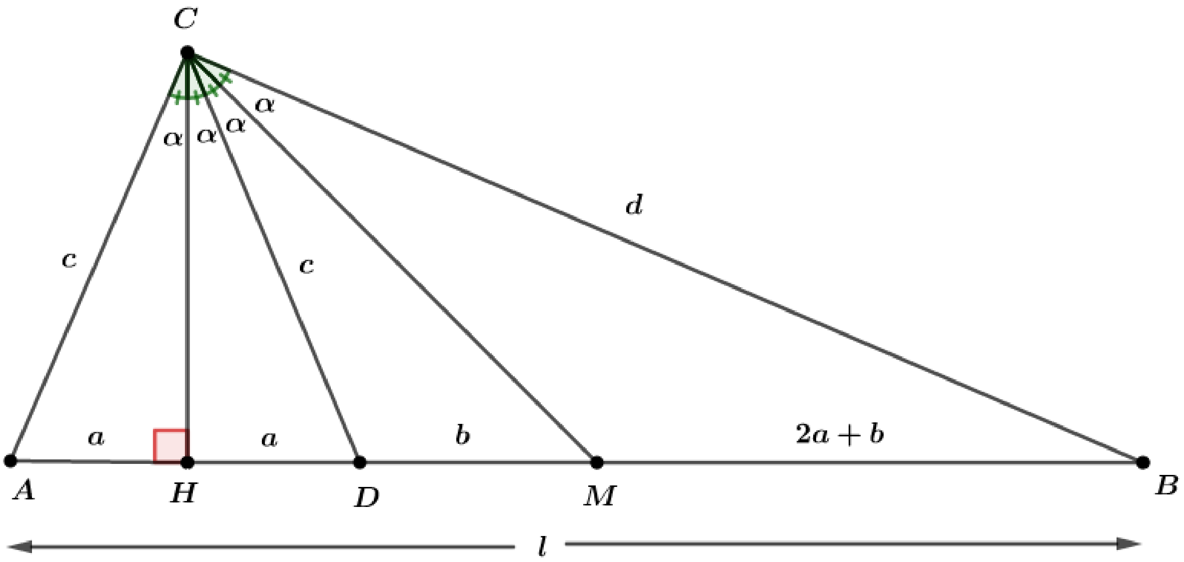
Comentários

Pelo enunciado, temos a seguinte figura:



a) Queremos calcular o valor de CM.

Analisando a figura, podemos ver que CH é mediatriz do triângulo ADC, pois esse segmento é altura e bissetriz do triângulo. Desse modo, $AH = HD = a$. Como M é o ponto médio do segmento AB, temos $AM = MB$. Então, se $DM = b$, temos $MB = a + a + b = 2a + b$.



Vamos aplicar o teorema da bissetriz interna nos triângulos ABC e BCD:

$$\Delta ABC \Rightarrow \frac{c}{2a} = \frac{d}{2a + 2b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{a}{a + b}\ (I)$$

$$\Delta BCD \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{d}{2a+b} \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{2a+b}\ (II)$$

Igualando (I) e (II):

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{2a+b}$$

$$2a^2 + ab = ab + b^2$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{2}$$

Podemos tentar encontrar o valor de α. Analisando os triângulos AHC e MHC:

$$\Delta AHC \Rightarrow tg\alpha = \frac{a}{CH}\ (III)$$

$$\Delta MHC \Rightarrow tg(2\alpha) = \frac{a+b}{CH}\ (IV)$$

Dividindo (IV) por (III):

$$\frac{tg(2\alpha)}{tg\alpha} = \frac{a+b}{a} = 1 + \frac{b}{a}$$

$$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \cdot \frac{1}{tg\alpha} = 1 + \sqrt{2}$$

$$2 = (1 - tg^2\alpha)(1+\sqrt{2})$$

$$\frac{2}{1+\sqrt{2}} = 1 - tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha = 1 - \frac{2}{\underbrace{1+\sqrt{2}}_{2(\sqrt{2}-1)}}$$

$$tg^2\alpha = 3 - 2\sqrt{2}$$

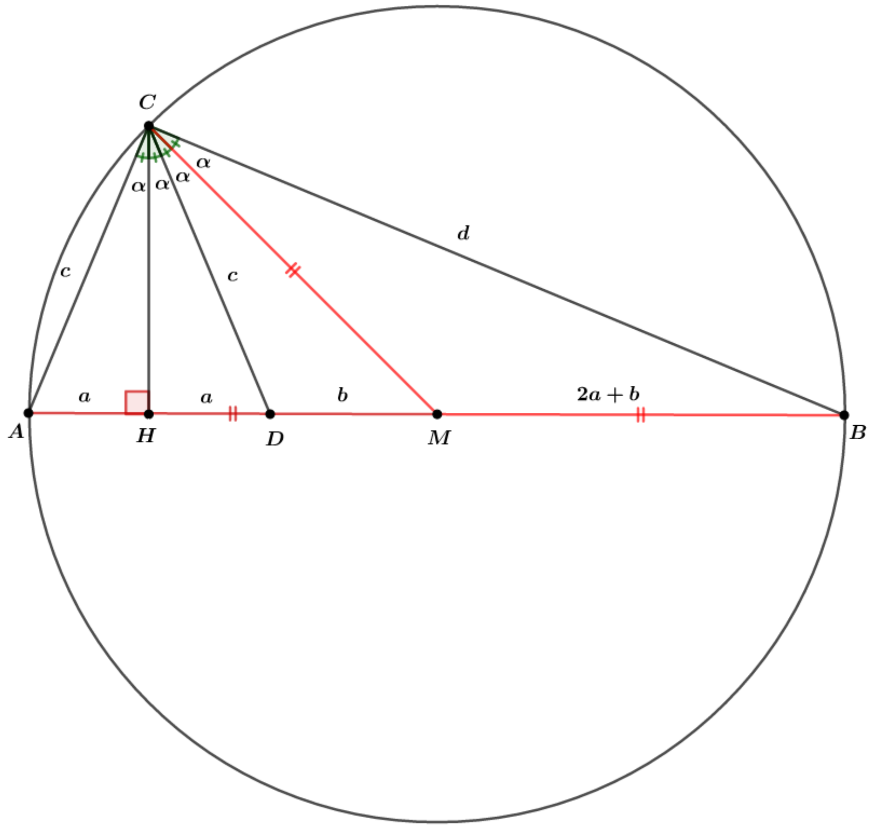
$$tg^2\alpha = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

$$\Rightarrow tg\alpha = \sqrt{2} - 1$$

Esse valor de tangente é conhecido como $45°/2$, então:

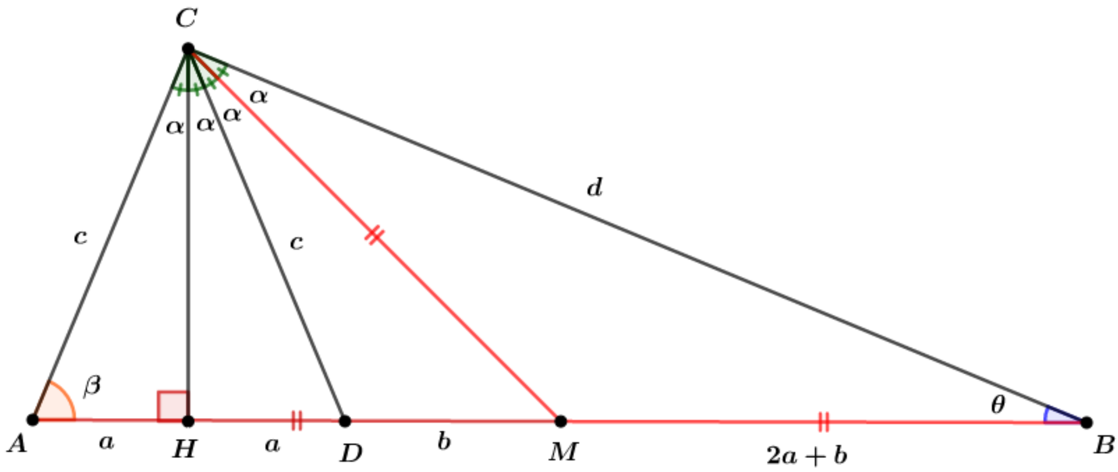
$$\alpha = \frac{45°}{2} = 22{,}5°$$

Assim, podemos ver que o triângulo ABC é retângulo em C. Como M é o ponto médio do segmento AB e ΔABC é retângulo, temos que ΔABC pode ser inscrito em uma circunferência e M é o seu centro. Logo, $CM = AM = BM = l/2$.



$$CM = \frac{l}{2}$$

b) Analisando os ângulos internos do triângulo, obtemos:



$$\Delta AHC \Rightarrow \beta + 22{,}5° + 90° = 180° \Rightarrow \beta = 67{,}5°$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \beta + 90° + \theta = 180° \Rightarrow \theta = 22{,}5°$$

$$\therefore C\hat{A}B = 67{,}5°, B\hat{C}A = 90°, A\hat{B}C = 22{,}5°$$

Gabarito: a) $CM = l/2$ b) $C\hat{A}B = 67,5°, B\widehat{C}A = 90°, A\widehat{B}C = 22,5°$

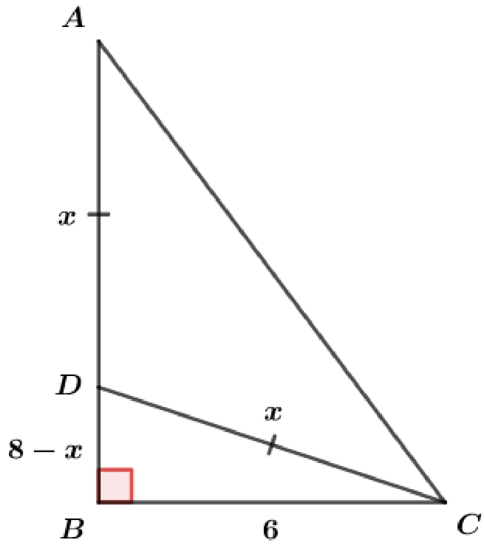
23. (ITA/2011)

Seja ABC um triângulo cujos catetos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ medem 8 cm e 6 cm, respectivamente. Se D é um ponto sobre $\overline{AB}$ e o triângulo ADC é isósceles, a medida do segmento $\overline{AD}$, em cm, é igual a

a) 3/4
b) 15/6
c) 15/4
d) 25/4
e) 25/2

Comentários

De acordo com o enunciado, temos a seguinte figura:



Como o ΔBDC é retângulo, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$x^2 = (8 - x)^2 + 6^2$$

$$x^2 = x^2 - 16x + 64 + 36$$

$$16x = 100$$

$$x = \frac{25}{4}$$

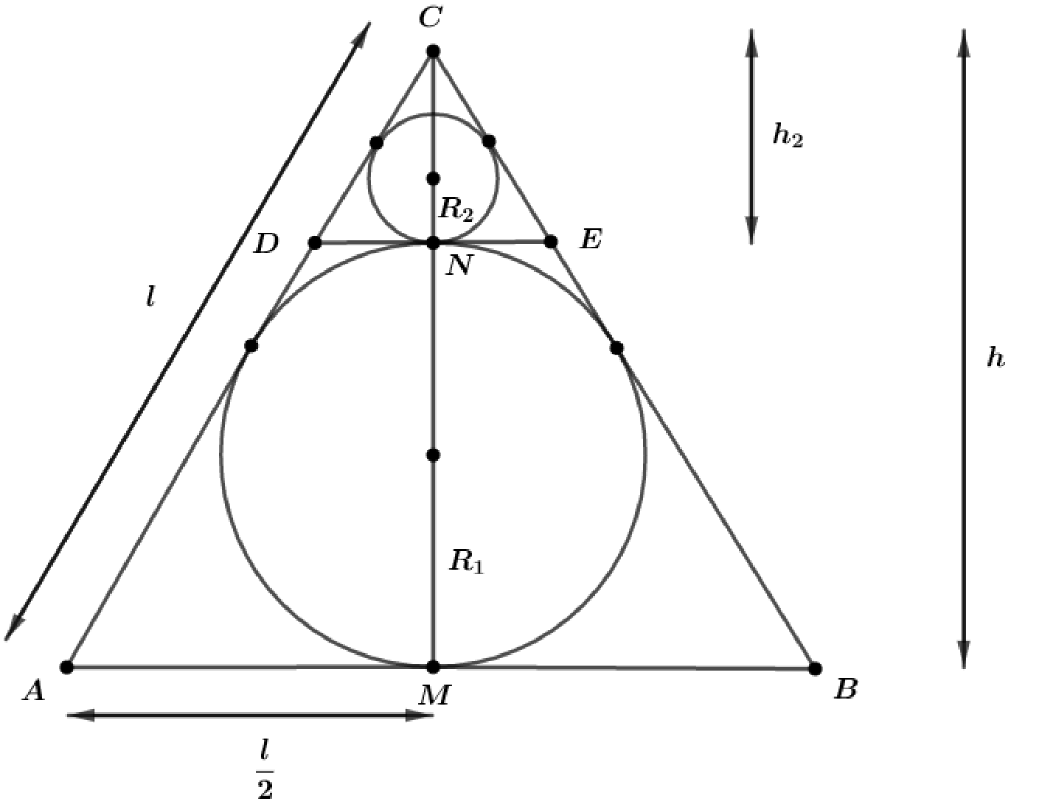
Gabarito: “d”.

24. (ITA/2007)

Seja C_1 uma circunferência de raio R_1 inscrita num triângulo equilátero de altura h. Seja C_2 uma segunda circunferência, de raio R_2, que tangencia dois lados do triângulo internamente e C_1 externamente. Calcule $(R_1 - R_2)/h$.

Comentários

Temos a seguinte figura:



Pelas propriedades da circunferência inscrita num triângulo equilátero, temos:

$$h = 3R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{h}{3}$$

$$h_2 = 3R_2 \Rightarrow R_2 = \frac{h_2}{3}$$

$$h_2 = R_1 = \frac{h}{3}$$

Vamos escrever R_1 e R_2 em função do lado l do triângulo equilátero ABC. Aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAMC:

$$l^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + h^2$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$$

DE é paralelo ao lado AB, então o triângulo CDE também é equilátero. Como $h_2 = \frac{h}{3}$, temos que o lado desse triângulo é $\frac{l}{3}$. Então:

$$h_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{l}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{6}l$$

$$\Rightarrow R_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}l$$

$$\Rightarrow R_2 = \frac{\sqrt{3}}{18}l$$

Calculando $(R_1 - R_2)/h$:

$$\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}l - \frac{\sqrt{3}}{18}l}{\frac{\sqrt{3}}{2}l} = \frac{2\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{9}$$

Gabarito: $\frac{R_1 - R_2}{h} = \frac{2}{9}$

25. (ITA/2005)

Em um triângulo retângulo, a medida da mediana relativa à hipotenusa é a média geométrica das medidas dos catetos. Então, o valor do cosseno de um dos ângulos do triângulo é igual a

a) $4/5$

b) $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$

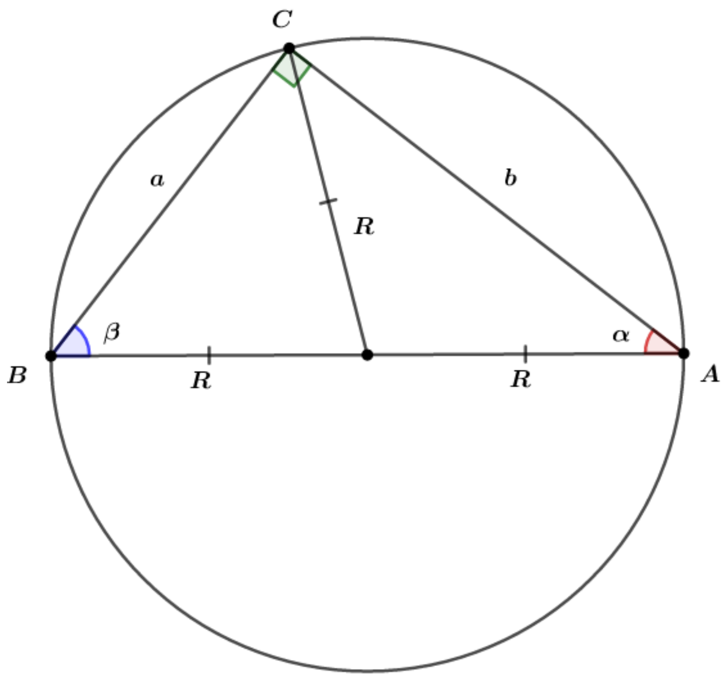
c) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

d) $\frac{1}{4}\sqrt{4+\sqrt{3}}$

e) $\frac{1}{3}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Comentários

A mediana de um triângulo retângulo relativa à hipotenusa é igual ao raio da circunferência que a circunscreve, então:



Vamos escrever os catetos em função de R. Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo:

$$(2R)^2 = a^2 + b^2$$

Segundo o enunciado:

$$R = \sqrt{ab}$$

Substituindo na equação de Pitágoras:

$$4ab = a^2 + b^2$$
$$a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

Resolvendo a equação em a:

$$a = 2b \pm \sqrt{3b^2} = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)b$$

Substituindo a na equação de R:

$$R^2 = \left(2 \pm \sqrt{3}\right)b^2$$
$$b = \frac{R}{\sqrt{2 \pm \sqrt{3}}}$$
$$b = R\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$$

Calculando o cosseno de α:

$$cos\alpha = \frac{b}{2R} = \frac{R\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}}{2R}$$
$$cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2 \mp \sqrt{3}}$$

Analisando as alternativas, vemos que um possível valor de cosseno é:

$$cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$$

Gabarito: "c".

---

26. (ITA/1998)

Seja ABC um triângulo isósceles de base BC. Sobre o lado AC deste triângulo considere um ponto D tal que os segmentos AD, BD e BC são todos congruentes entre si. A medida do ângulo $B\hat{A}C$ é igual a:

a) $23°$

b) $32°$

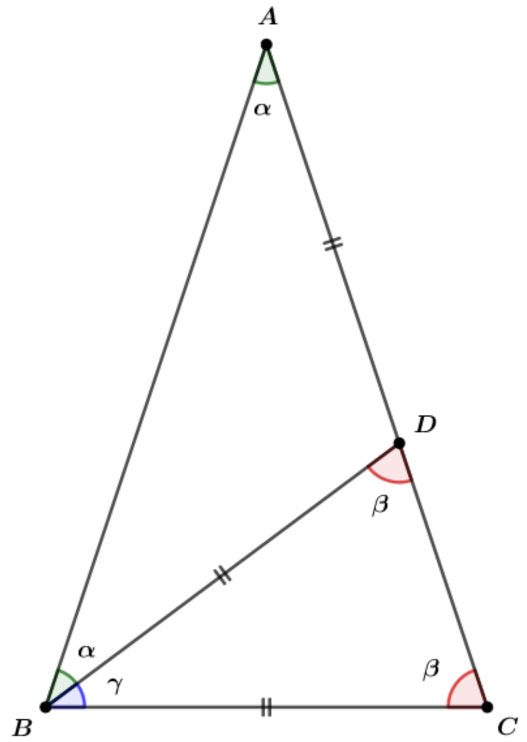
c) $36°$

d) $40°$

e) $45°$

Comentários

Dos dados do enunciado, temos a seguinte figura:



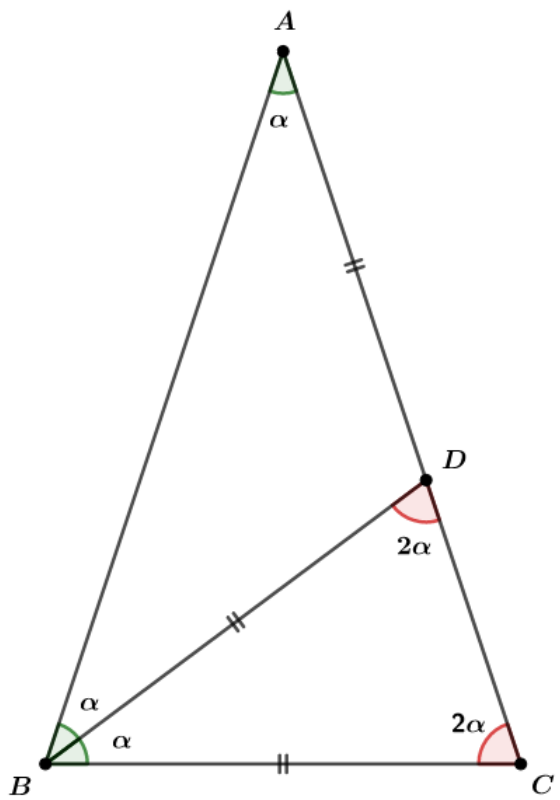
Como $AD \equiv BD \equiv BC$, temos:

$$\Delta DAB \text{ é isósceles} \Rightarrow D\hat{A}B = D\hat{B}A$$

$$\Delta BCD \text{ é isósceles} \Rightarrow B\hat{C}D = B\hat{D}C$$

$$B\hat{D}C \text{ é externo ao triângulo } DAB \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

$$\Delta DAB \text{ é isósceles} \Rightarrow \alpha + \gamma = \beta \Rightarrow \gamma = \alpha$$



Somando-se os ângulos internos, encontramos:

$$\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 180°$$

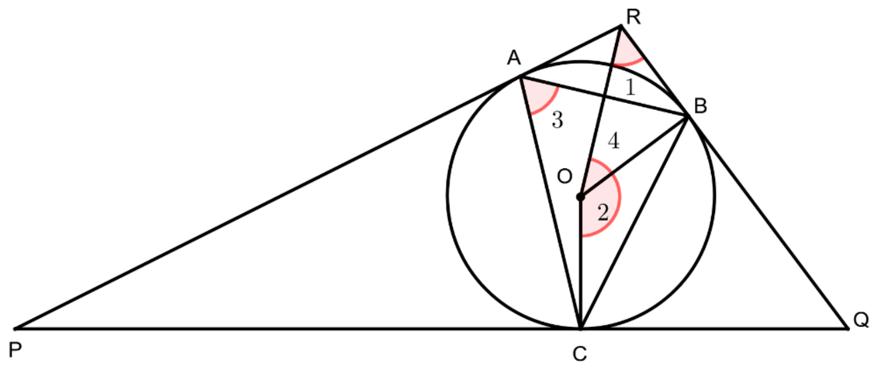
$$5\alpha = 180°$$

$$\alpha = 36°$$

Gabarito: "c".

27. (ITA-1992)

Considere o triângulo $\boldsymbol{PQR}$ abaixo, circunscrito a uma circunferência de centro $\boldsymbol{O}$, cujos pontos de tangência são $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ e $\boldsymbol{C}$. Sabe-se que os ângulos $\hat{\boldsymbol{P}}, \hat{\boldsymbol{Q}}$ e $\hat{\boldsymbol{R}}$ estão nessa ordem, em progressão aritmética de razão $\mathbf{20}°$. Os ângulos $\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}$ conforme mostrado na figura abaixo medem, nesta ordem:



a) $40°, 120°, 60°, 50°$.

b) $40°, 100°, 50°, 40°$.

c) $60°, 140°, 60°, 40°$.

d) $60°, 120°, 40°, 50°$.

e) $n.d.a.$

Comentários

Os ângulos $\hat{P}, \hat{Q}$ e $\hat{R}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética de razão 20°. Seja $\hat{P} = x$, então, temos do ΔPQR:

$$\hat{P} + \hat{Q} + \hat{R} = 180° \Rightarrow x + (x + 20°) + (x + 40°) = 180° \Rightarrow x = 40°$$

Portanto $\hat{P} = 40°, \hat{Q} = 60°$ e $\hat{R} = 80°$.

Sabendo que O é obtido do encontro das bissetrizes do triângulo, então o ângulo 1 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 1 = \frac{\hat{R}}{2} = \frac{80°}{2} = 40°$$

Além disso, como B e C são pontos de tangência, temos $O\hat{B}Q = O\hat{C}Q = 90°$. Lembrando que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°, temos:

$$\hat{a}ngulo\ 2 + 90° + 90° + \hat{Q} = 360° \Rightarrow \hat{a}ngulo\ 2 = 180° - \hat{Q} = 180° - 60° = 120°$$

O ângulo 3 é dado pela metade do ângulo 2, assim, ela mede:

$$\hat{a}ngulo\ 3 = \frac{120°}{2} = 60°$$

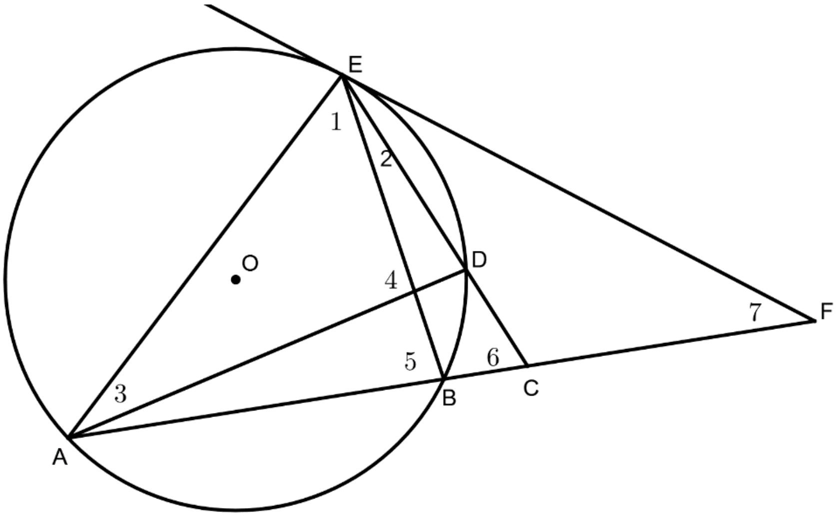
Por fim, como $O\hat{B}R = 90°$, o ângulo 4 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 4 = 90° - \frac{\hat{R}}{2} = 90° - 40° = 50°$$

Gabarito: “a”

28. (ITA-1990)

Na figura abaixo $\boldsymbol{O}$ é centro de uma circunferência. Sabendo-se que a reta que passa por $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{F}$ é tangente a esta circunferência e que a medida dos ângulos $\mathbf{1}, \mathbf{2}$ e $\mathbf{3}$ são dadas, respectivamente, por $\mathbf{49}°, \mathbf{18}°, \mathbf{34}°$, determinar a medida dos ângulos $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}$ e $\mathbf{7}$. Nas alternativas a seguir considere os valores dados iguais às medidas de $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}$ e $\mathbf{7}$, respectivamente:



a) $97°, 78°, 61°, 26°$.

b) $102°, 79°, 58°, 23°$.

c) $92°, 79°, 61°, 30°$.

d) $97°, 79°, 61°, 27°$.

e) $97°, 80°, 62°, 29°$.

Comentários

Nessa questão, devemos usar a propriedade do arco capaz. Então, se dois pontos na circunferência “enxergam” o mesmo segmento de reta, podemos afirmar que os ângulos desses pontos são congruentes.

Note que a soma dos ângulos 1, 3 e 4 é 180°. Logo, o ângulo 4 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 4 = 180° - 49° - 34° = 97°$$

Veja que $D\hat{A}B = 18°$, pois “enxerga” o mesmo segmento de reta que o ângulo 2. Assim, o ângulo 5 mede:

$$\hat{a}ngulo\ 4 = \hat{a}ngulo\ 5 + D\hat{A}B$$
$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 5 = \hat{a}ngulo\ 4 - D\hat{A}B = 97° - 18° = 79°$$

No triângulo AEC, temos que a soma dos ângulos é:

$$\hat{a}ngulo\ 1 + \hat{a}ngulo\ 2 + \hat{a}ngulo\ 3 + D\hat{A}B + \hat{a}ngulo\ 6 = 180°$$
$$\hat{a}ngulo\ 6 = 180° - \left(\hat{a}ngulo\ 1 + \hat{a}ngulo\ 2 + \hat{a}ngulo\ 3 + D\hat{A}B\right) = 61°$$
$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 6 = 180° - (49° + 18° + 34° + 18°) = 61°$$

Por fim, $F\hat{E}C = F\hat{E}D = 34°$, pois é igual ao valor do ângulo 3. Assim, o ângulo 7 é:

$$\hat{a}ngulo\ 6 = \hat{a}ngulo\ 7 + F\hat{E}C$$
$$\Rightarrow \hat{a}ngulo\ 7 = \hat{a}ngulo\ 6 - F\hat{E}C = 61° - 34° = 27°$$

Gabarito: “d”

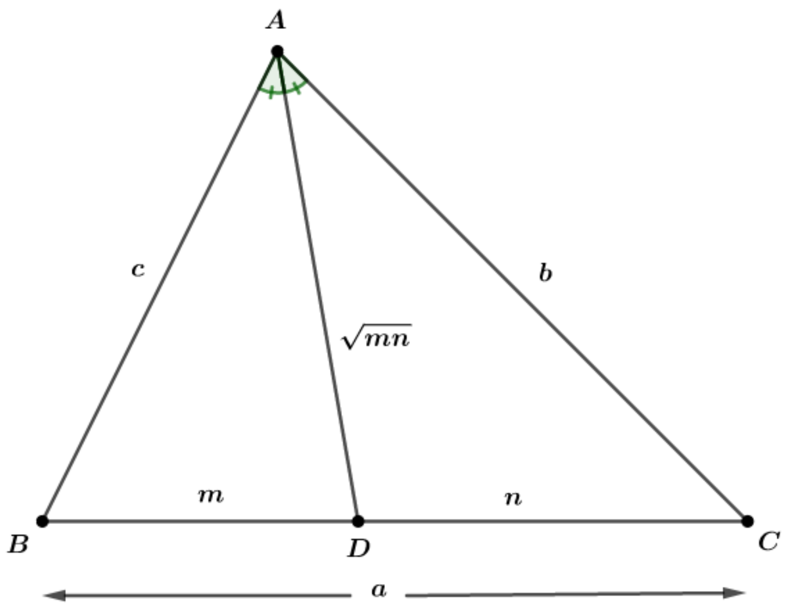
29. (IME/2017)

Em um triângulo ABC, a medida da bissetriz interna AD é a média geométrica entre as medidas dos segmentos BD e DC, e a medida da mediana AM é a média geométrica entre os lados AB e AC. Os pontos D e M estão sobre o lado BC de medida a. Pede-se determinar os lados AB e AC do triângulo ABC em função de a.

Comentários

Vamos dividir o problema em dois casos. Para cada um dos casos, temos as seguintes figuras:

Caso 1) Bissetriz AD:



Usando o teorema de Stewart, temos:

$$b^2m + c^2n = mna + \sqrt{mn}^2 a$$

$$b^2m + c^2n = 2mna \quad (I)$$

Podemos escrever m e n em função de a, b, c usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{c}{m} = \frac{b}{n} \Rightarrow cn = bm$$

De acordo com a figura:

$$a = m + n \Rightarrow m = a - n$$

$$cn = b(a - n)$$

$$n = \frac{ab}{b + c}$$

Analogamente, para m:

$$n = a - m$$

$$c(a - m) = bm$$

$$m = \frac{ac}{b + c}$$

Substituindo em (I):

$$b^2\left(\frac{ac}{b+c}\right)+c^2\left(\frac{ab}{b+c}\right)=2\left(\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right)a$$

$$\frac{abc(b+c)}{b+c}=\frac{2(a^3bc)}{(b+c)^2}$$

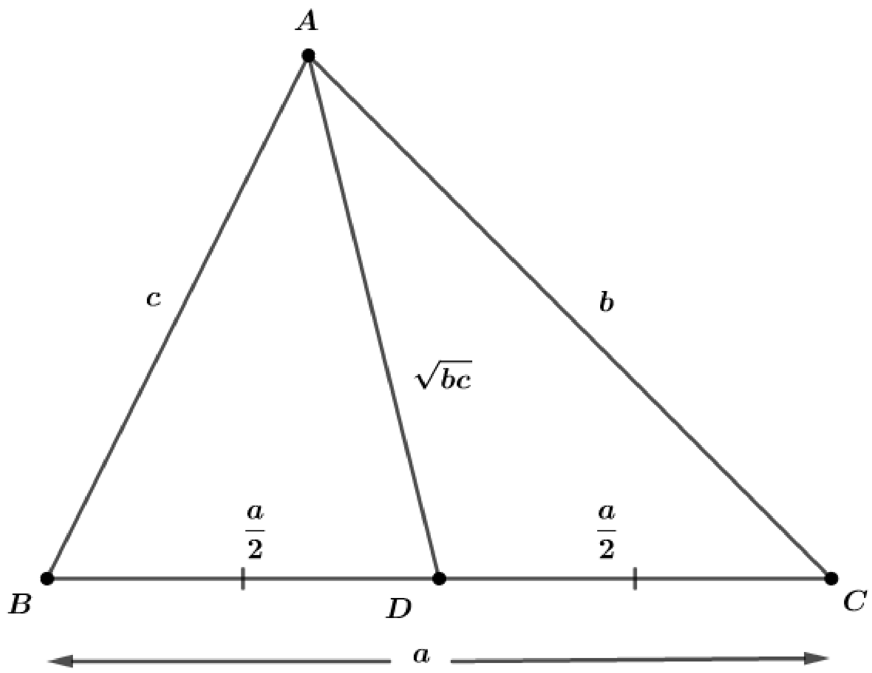
Como $b+c\neq 0$ e $abc\neq 0$, podemos simplificar:

$$(b+c)^2=2a^2$$

a, b, c são os lados de um triângulo, então $a>0$ e $b+c>0$:

$$b+c=a\sqrt{2}\ \ (II)$$

Caso 2) Mediana AM:



Aplicando o teorema de Stewart:

$$\frac{b^2a}{2}+\frac{c^2a}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot a+\left(\sqrt{bc}\right)^2a$$

$$a\neq 0\Rightarrow\frac{b^2+c^2}{2}=\frac{a^2}{4}+bc$$

$$\frac{a^2}{4}=\frac{b^2-2bc+c^2}{2}$$

$$a^2=2(b-c)^2$$

$$|b-c|=\frac{a\sqrt{2}}{2}\ \ (III)$$

Supondo que $b>c$, temos:

$$b-c=\frac{a\sqrt{2}}{2}\ \ (IV)$$

Somando (IV) e (II):

$$2b = a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$b = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Substituindo o valor de b em (II):

$$c = a\sqrt{2} - a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$c = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Se $c > b$:

$$c - b = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (V)$$

Somando (V) e (II):

$$2c = a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$c = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$b = a\sqrt{2} - a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

$$b = a\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, temos o seguinte resultado:

$$AB = \frac{a\sqrt{2}}{4} \; e \; AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Ou

$$AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4} \; e \; AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

Gabarito: $AB = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ $e\ AC = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ ou $AB = a\frac{3\sqrt{2}}{4}$ $e\ AC = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

30. (IME/2016)

Em um triângulo ABC, o ponto D é o pé da bissetriz relativa ao ângulo $\hat{A}$. Sabe-se que $\overline{AC} = \overline{AD}, r = \overline{AB}/\overline{AC}$ e que $\hat{C} = \alpha$. Portanto o valor de $sen^2\alpha$ é

a) $\frac{3r-1}{4}$

b) $\frac{3r-1}{4r}$

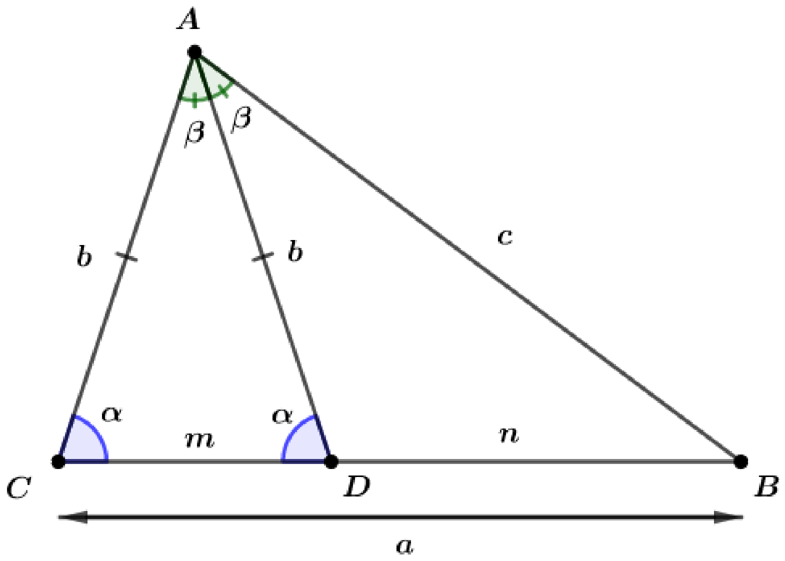
c) $\frac{r+3}{4}$

d) $\frac{3r+1}{4r}$

e) $\frac{3r+1}{4}$

Comentários

De acordo com o enunciado:



O texto afirma que $r = \overline{AB}/\overline{AC}$:

$$r = \frac{c}{b} \Rightarrow c = br$$

Usando o teorema da bissetriz interna:

$$\frac{b}{m} = \frac{c}{n} \Rightarrow n = \frac{cm}{b} \Rightarrow n = \frac{brm}{b} = rm \Rightarrow m = \frac{n}{r}$$

Aplicando o teorema dos senos no triângulo ACD:

$$\frac{m}{sen\beta} = \frac{b}{sen\alpha} \Rightarrow m = \frac{bsen\beta}{sen\alpha} \Rightarrow \frac{n}{r} = \frac{bsen\beta}{sen\alpha} \Rightarrow n = br \cdot \frac{sen\beta}{sen\alpha}$$

Aplicando o teorema dos senos no ΔABC:

$$\frac{a}{sen(2\beta)} = \frac{c}{sen\alpha}$$

Como $a = m + n$:

$$\frac{m+n}{sen(2\beta)} = \frac{c}{sen\alpha}$$

$$\left(\frac{n}{r} + n\right) \cdot \frac{1}{sen(2\beta)} = \frac{br}{sen\alpha}$$

$$br \cdot \frac{sen\beta}{sen\alpha} \cdot \left(\frac{1}{r} + 1\right) \cdot \frac{1}{sen(2\beta)} = \frac{br}{sen\alpha}$$

$$sen\alpha \neq 0 \ e \ b, r \neq 0 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{r}\right)\left(\frac{sen\beta}{2sen\beta cos\beta}\right) = 1$$

$$\Rightarrow cos\beta = \frac{r+1}{2r}$$

Somando os ângulos internos do ΔACD:

$$\beta + 2\alpha = \pi \Rightarrow \beta = \pi - 2\alpha$$
$$cos(\pi - 2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$
$$-cos(2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$
$$-(1 - 2sen^2\alpha) = \frac{r+1}{2r}$$
$$2sen^2\alpha = \frac{r+1}{2r} + 1$$
$$\Rightarrow sen^2\alpha = \frac{3r+1}{4r}$$

Gabarito: "d".

31. (IME/2013)

Seja um triângulo ABC. AH é a altura relativa de BC, com H localizado entre B e C. Seja BM a mediana relativa de AC. Sabendo que $BH = AM = 4$, a soma dos possíveis valores inteiros de BM é

a) 11

b) 13

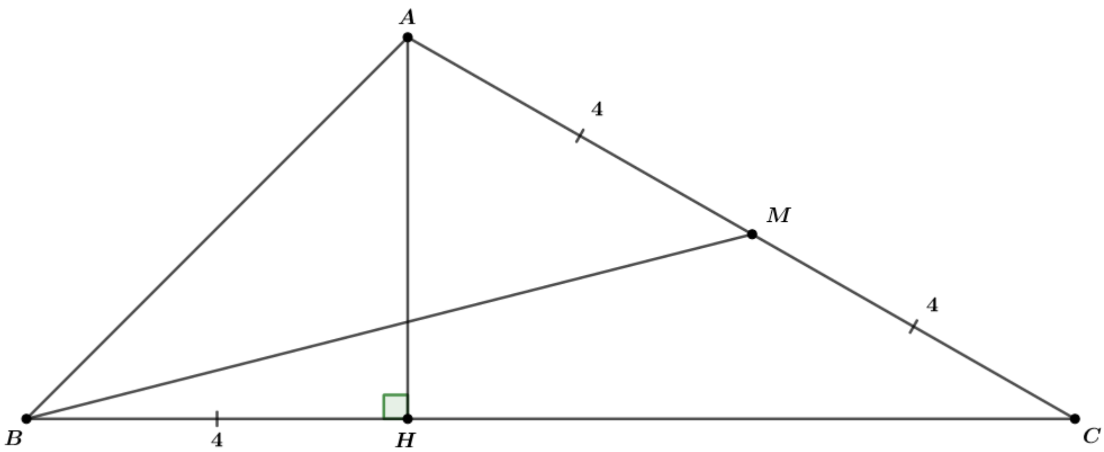
c) 18

d) 21

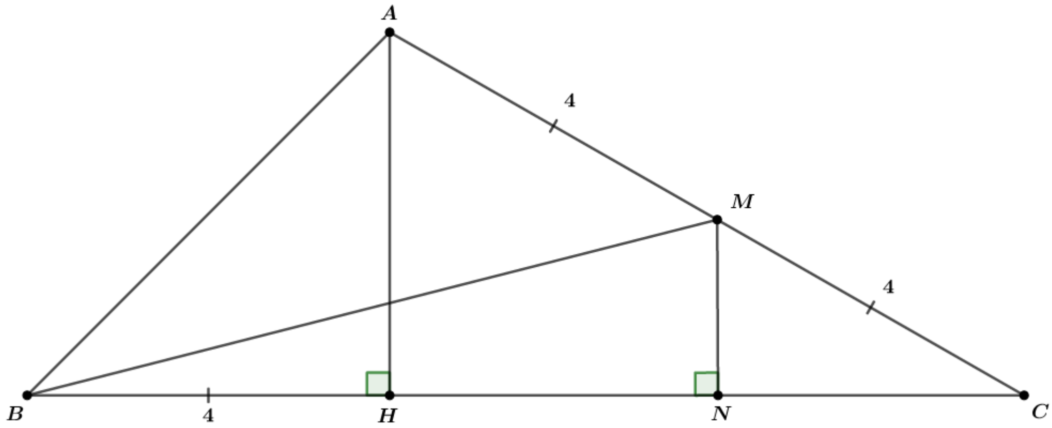
e) 6

Comentários

Do enunciado, temos a seguinte figura:



Podemos traçar a reta paralela à altura AH e que passa por M:

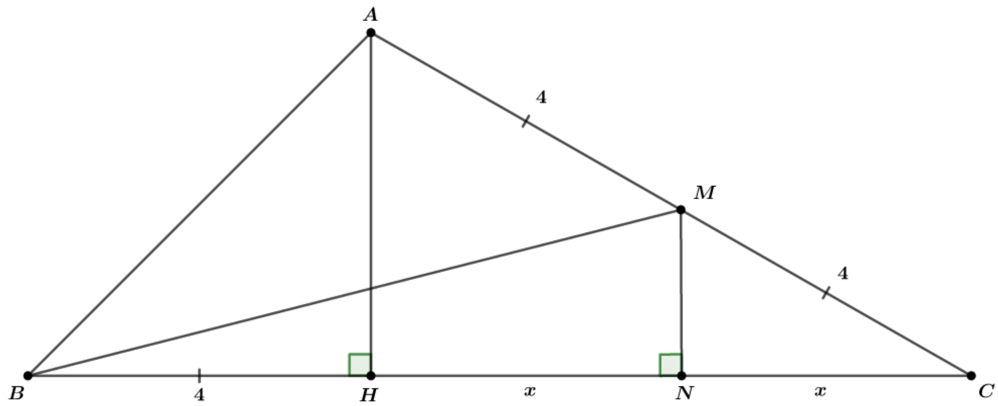


Perceba que os triângulos AHC e MNC são semelhantes, então:

$$\frac{AC}{MC} = \frac{HC}{NC}$$

$$\frac{HC}{NC} = \frac{8}{4} = 2$$

$$HC = 2NC \Rightarrow HN = NC = x$$



Aplicando o teorema de Pitágoras nos ΔMNB e ΔMNC:

$$BM^2 = MN^2 + (4+x)^2 \ \ (I)$$

$$4^2 = MN^2 + x^2 \ \ (II)$$

Fazendo $(I) - (II)$:

$$BM^2 - 4^2 = (4+x)^2 - x^2$$

$$BM^2 - 16 = 16 + 8x$$

$$\frac{BM^2 - 32}{8} = x \ \ (III)$$

Como x é o cateto do triângulo retângulo MNC, temos:

$$0 < x < 4$$

Substituindo (III) na desigualdade acima:

$$0 < \frac{BM^2 - 32}{8} < 4$$

$$32 < BM^2 < 64$$

Se $BM = 5$, temos $BM^2 = 25$ e se $BM = 8$, $BM = 64$, então $5 < BM < 8$.

Os valores inteiros possíveis para BM são:

$$BM = 6 \text{ ou } BM = 7$$

Logo, a soma desses possíveis valores é:

$$S = 6 + 7 = 13$$

Gabarito: "b".