CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá!

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem o conteúdo desta aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver os exercícios dos vestibulares.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e, sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Geometria de Posição

1.1. Postulados ou Axiomas

Considerando que os postulados ou axiomas são proposições primitivas aceitas sem demonstração, vejamos os principais.

1.1.1. Postulado da existência

a) Existe reta e numa reta, existem infinitos pontos dentro e fora dela.

b) Existe plano e num plano, existem infinitos pontos dentro e fora dele.

1.1.2. Postulado da determinação

a) Dois pontos distintos no espaço determinam uma única reta que passa por eles.

b) Três pontos não colineares no espaço determinam um único plano que passa por eles.

1.1.3. Postulado da inclusão

a) Se uma reta tem dois pontos distintos num plano, então ela está contida no plano.

1.1.4. Postulados da separação

a) Um ponto O contido em uma reta $\overleftrightarrow{AB}$ separa-a em duas semirretas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, e a origem das semirretas é o ponto dado.

b) Uma reta r contida em um plano α separa-o em dois semiplanos α_1 e α_2, e a origem dos semiplanos é a reta dada.

c) Um plano α de um espaço E separa-o em dois semiespaços, E_1 e E_2, e a origem dos semiespaços é o plano dado.

1.1.5. Postulado de Euclides

Por um ponto P, situado fora de uma reta r, passa uma única reta paralela à r que passa por P.

1.2. O Espaço

Visto os postulados, vamos iniciar a construção da base do conhecimento de Geometria Espacial. Iniciemos pelas propriedades decorrentes dos axiomas vistos. Esses conceitos serão importantes na hora de resolver questões.

1.2.1. O plano

Pelo postulado da determinação, sabemos que três pontos não colineares determinarão um único plano. Assim, um triângulo cujos vértices são A, B, C determinarão um único plano no espaço.

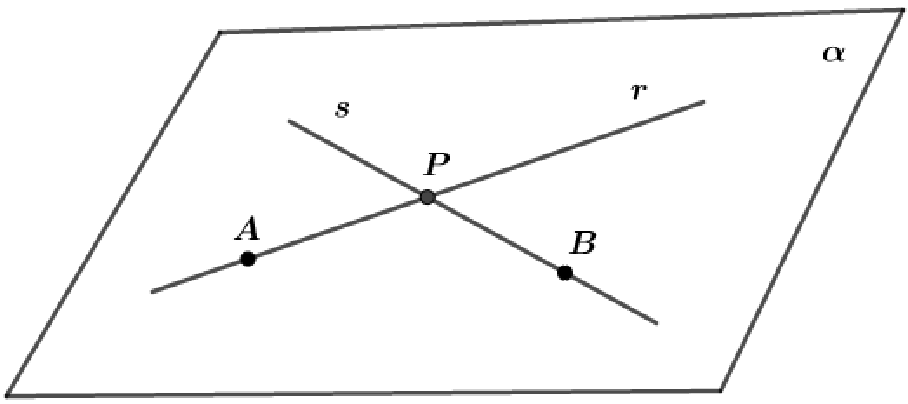
Vamos apresentar algumas propriedades provenientes dos postulados.

Propriedade 1. Uma reta r e um ponto $P \notin r$ determinam um único plano.

Supondo que dois pontos A e B pertencem à reta r e sabendo que P não pertence à r, temos que A, B, P não são colineares e, assim, pelo postulado da determinação, esses pontos determinam um único plano.

Propriedade 2. Duas retas concorrentes determinam um único plano.

Sabendo que r e s são retas concorrentes num ponto P, tomando-se os pontos $A \in r$ e $B \in s$ tal que $A \neq P$ e $B \neq P$, temos que existe um plano α tal que $\alpha = (A; B; P)$.



Como $r = \overleftrightarrow{AP}$, temos que $r \subset \alpha$. Analogamente, $s = \overleftrightarrow{BP}$ implica que $s \subset \alpha$. Portanto, o plano α determinado pelos pontos A, B, P é o único plano que contém simultaneamente as retas r e s.

Propriedade 3. Duas retas paralelas e distintas determinam um único plano.

Nesse caso, temos a própria definição de retas paralelas. Se r e s são retas paralelas tais que $r \neq s$, então existe um plano α que contém r e s.

Para provar que esse plano é único, podemos tomar os pontos distintos A e B pertencentes à r e o ponto P pertencente à s. Assim, temos que se $\alpha = (r; s)$:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \alpha = (r; s) = (A; B; P)$$

Se existir um outro plano β tal que $\beta = (r; s)$, então:

$$A, B \in r \text{ e } P \in s \Rightarrow \beta = (r; s) = (A; B; P) = \alpha$$

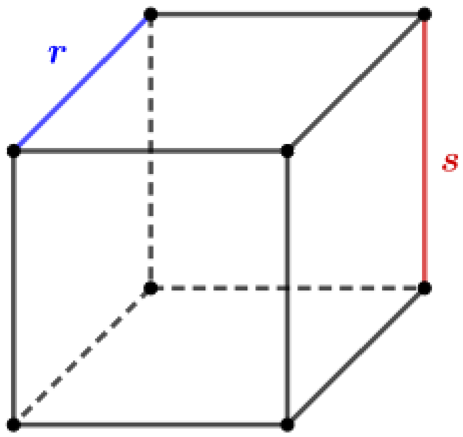
Portanto, os planos α e β são coincidentes, ou seja, há apenas um único plano que contém as retas paralelas r e s.

1.2.2. Retas reversas

Duas retas no espaço são reversas se não estão contidas em um mesmo plano.

$$\boxed{r \text{ e } s \text{ são retas reversas} \Leftrightarrow \nexists \alpha \text{ tal que } r \subset \alpha \text{ e } s \subset \alpha}$$

Um exemplo de retas reversas pode ser visto na figura a seguir:

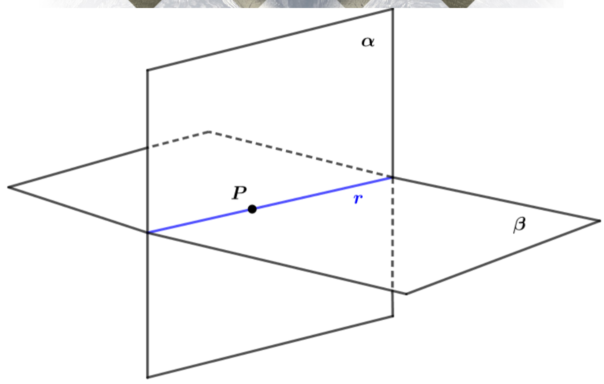


Note que os segmentos de reta r e os segmentos de reta s do cubo não podem pertencer a um mesmo plano, pois não conseguimos tomar um plano que contenha uma das retas sem que a outra o "fure".

1.2.3. Teorema da intersecção

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Se dois planos distintos possuem um ponto em comum, então a intersecção entre eles} \\ \text{é uma única reta que passa por esse ponto.}\end{array}}$$

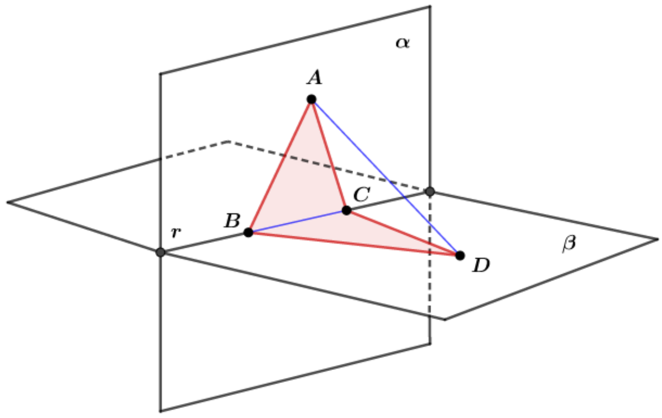
O que devemos extrair desse teorema é que a intersecção entre dois planos não paralelos e não coincidentes é uma reta, ou seja, dois planos secantes formam uma reta. Basta pensarmos no quarto da nossa residência: duas paredes adjacentes podem ser vistas como dois planos, e o que as separa é justamente uma reta. A figura abaixo exemplifica o teorema:



$$\alpha \cap \beta = r$$

1.2.4. Quadrilátero reverso

Tomemos dois planos secantes, α e β, cuja intersecção é a reta r e os pontos A, B, C, D representados conforme a figura abaixo:



Chamamos de quadrilátero reverso à figura $ABCD$, pois as diagonais $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ são segmentos de retas reversos. Uma outra definição para quadrilátero reverso é que seus quatro vértices não podem pertencer a um mesmo plano.

1.3. Paralelismo no Espaço

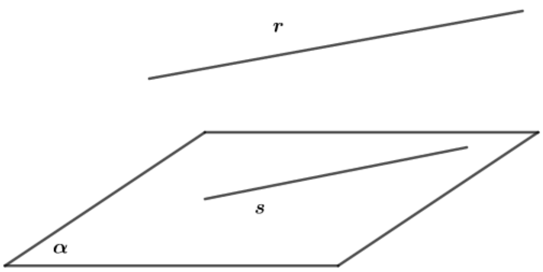
Relembremos a definição de retas paralelas e adaptemos ao espaço. Dizemos que duas retas r e s no espaço são paralelas se, e somente se, são coplanares e não possuam ponto em comum, ou seja, $r \parallel s \Leftrightarrow r \cap s = \emptyset$. Note que a definição é a mesma usada na Geometria Plana.

Conhecendo esse fato, vamos estudar o paralelismo entre retas e planos no espaço. Iniciando pelo teorema:

Uma reta não contida em um plano é paralela a este plano se, e somente se, for paralela a uma reta contida neste plano.

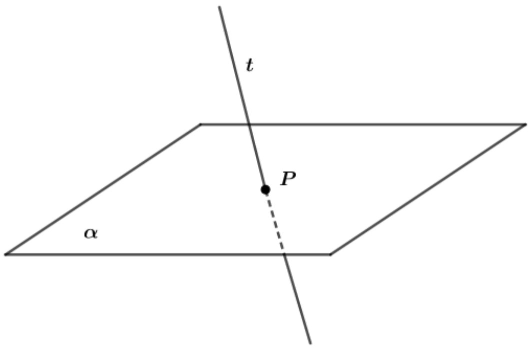
A questão é: como saber se uma reta é paralela a um plano?

Sabemos que, em um plano, há infinitas retas, e conhecemos a definição de retas paralelas. Assim, basta tomar uma reta do plano que seja paralela à reta dada. Intuitivamente, se pensarmos em uma reta que "não fura" o plano, podemos afirmar que, ou ela está contida no plano, ou ela é paralela ao plano. Vejamos as figuras a seguir:



$$s \subset \alpha \ e \ s \cap r = \emptyset \Rightarrow r \parallel \alpha$$

Neste caso, a reta r é paralela ao plano α, pois podemos tomar a reta s contida em α que é paralela à reta r.



Esse é um exemplo de reta que não é paralela ao plano, pois a reta t intercepta o plano no ponto P, ou seja, $r \cap \alpha = \{P\} \neq \emptyset$.

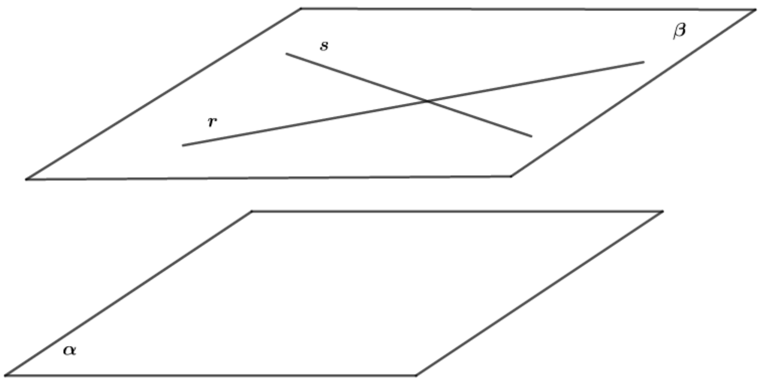
1.3.1. Planos paralelos

A definição de paralelismo entre planos é a mesma usada entre retas. Vejamos.

$$\boxed{\text{Os planos } \alpha \text{ e } \beta \text{ são paralelos se, e somente se, eles não têm ponto comum ou são coincidentes.}}$$

Para saber se dois planos são paralelos, podemos tomar duas retas concorrentes a um plano e, se essas retas forem ambas paralelas a outro plano, então os planos são paralelos. Esse é o teorema para testar o paralelismo de planos.

$$\boxed{\text{Dois planos } \alpha \text{ e } \beta \text{ são paralelos entre si se, e somente se, existir em } \beta \text{ um par de retas concorrentes paralelas a } \alpha.}$$

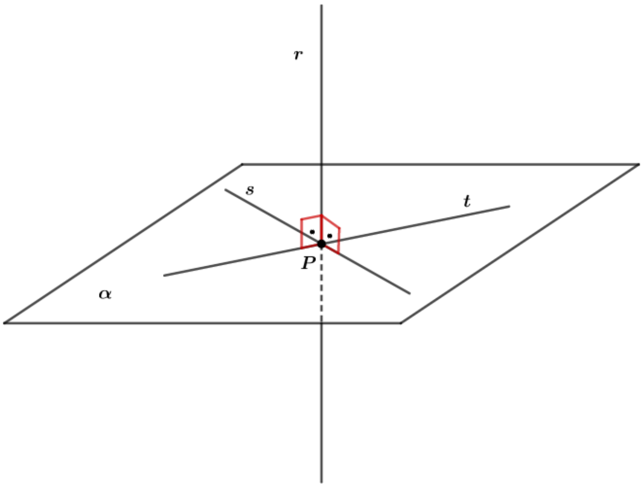


As retas r e s estão contidas no plano β e ambas são paralelas ao plano α, logo, α é paralelo a β.

1.4. Perpendicularismo no Espaço

Como saber se uma reta é perpendicular a um plano?

Intuitivamente, se r é uma reta perpendicular a um plano α, então r deve interceptar o plano em um ponto P (esse ponto é chamado de pé da reta r, perpendicular ao plano). Para que seja perpendicular, todas as retas contidas em α que passam por P devem ser perpendiculares à reta r.



Pela figura, podemos ver que $r \perp s$ e $r \perp t$, como $r, s \subset \alpha$, temos que $r \perp \alpha$.

Assim, segue o teorema:

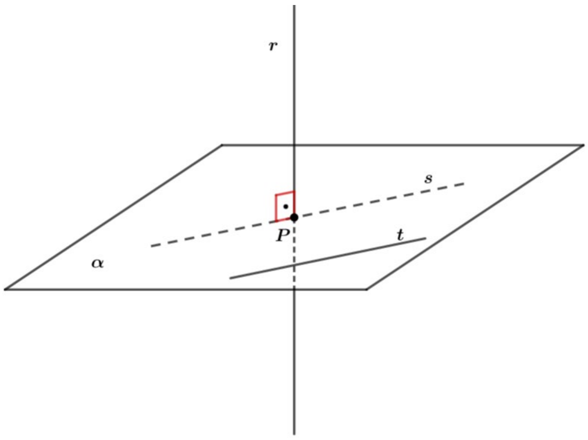
$$\boxed{\text{Uma reta é perpendicular a um plano se, e somente se, for perpendicular a duas retas concorrentes do plano.}}$$

Esse teorema garante que uma reta é perpendicular a um plano.

Para saber se dois planos são perpendiculares, basta tomar uma reta contida em um deles que seja perpendicular ao outro.

1.4.1. Retas ortogonais

Dizemos que duas retas são ortogonais se elas são reversas e formam um ângulo reto, ou seja, se r é perpendicular a um plano α e t é uma reta do plano que não possui ponto comum com r, então r e t são ortogonais.

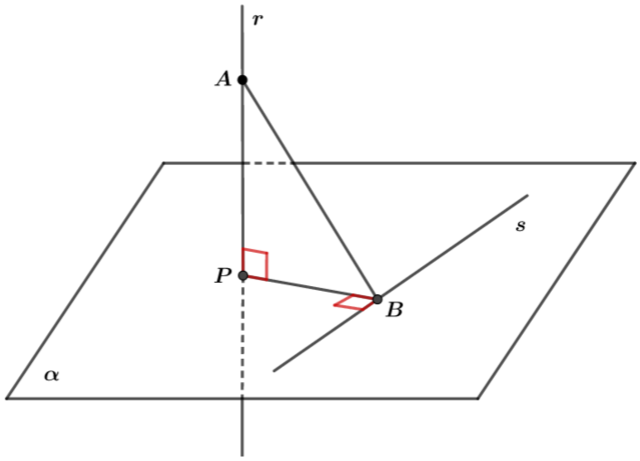


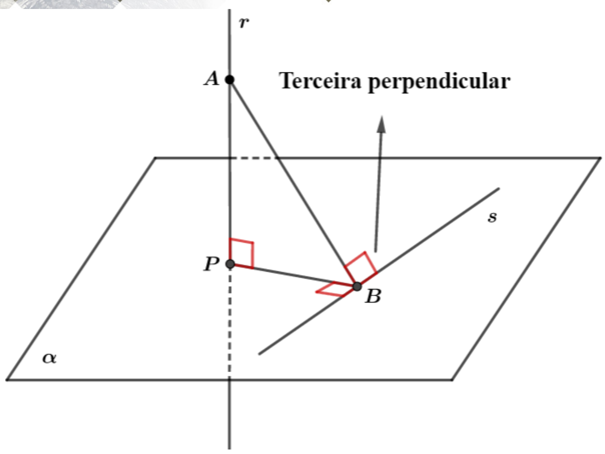
Na figura acima, r e t são retas ortogonais, pois r é perpendicular ao plano α e não intercepta a reta t contida em α, logo r e t são reversas e formam um ângulo reto. Note que $t \parallel s$.

1.4.2. Teorema das três perpendiculares

Sejam r e s duas retas reversas e um plano α tais que r é perpendicular a α, $r \cap \alpha = \{P\}$ e $s \subset \alpha$. Se A é um ponto pertencente à r e B é um ponto pertencente à s, então $\overline{AB}$ é perpendicular à s se, e somente se, $\overline{PB}$ é perpendicular à s.

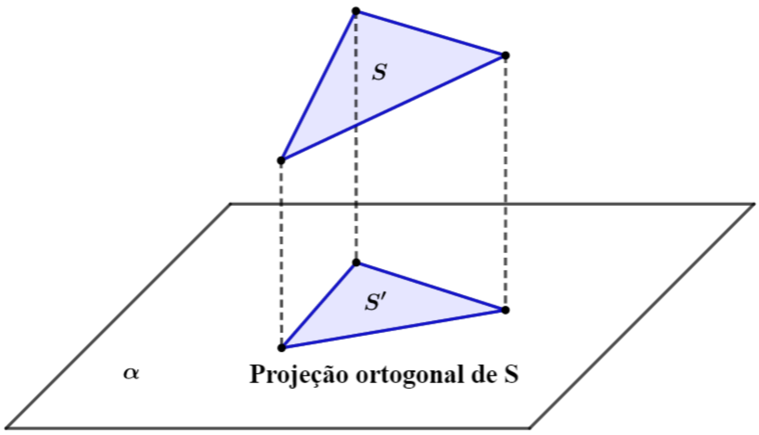
Essa propriedade é conhecida como o **teorema das três perpendiculares**. O que podemos afirmar dela é que, tomando-se A como um ponto qualquer da reta r, se $r \perp \alpha$ e $\overline{PB} \perp s$, então $\overline{AB} \perp s$.





1.5. Projeções Ortogonais

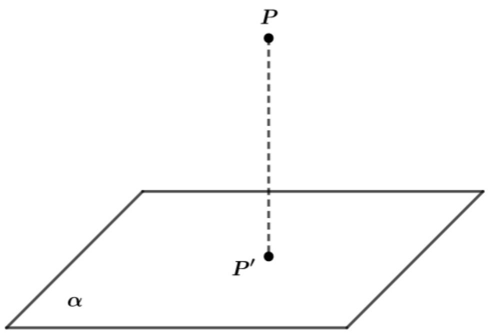
Projeção ortogonal é a imagem de uma figura geométrica projetada perpendicularmente em um plano. Podemos entender essa projeção como a sombra que a figura faz em um plano quando o sol está no seu ponto mais alto. Desse modo, a dimensão da figura projetada não seria alterada.



Estudaremos agora os tipos de projeções.

1.5.1. Projeção de um ponto

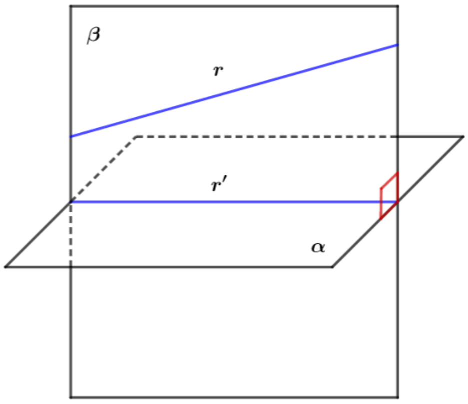
A projeção ortogonal de um ponto P sobre um plano α é o pé da reta perpendicular ao plano que contém P.



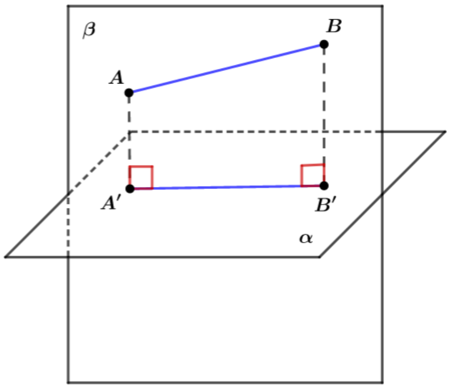
P' é a projeção ortogonal de P sobre o plano α.

1.5.2. Projeção de uma reta

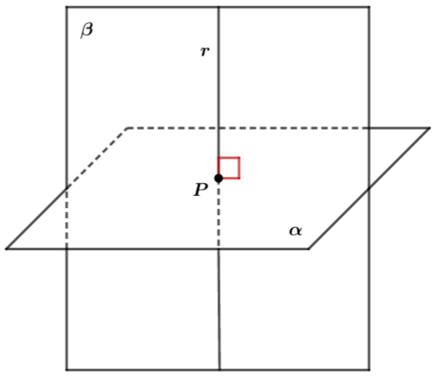
A projeção ortogonal de uma reta r oblíqua sobre um plano α é a reta formada pela intersecção de um plano β, perpendicular a α, que contém a reta r.



No caso de termos um segmento de reta não perpendicular ao plano cujas extremidades são os pontos A e B, a projeção ortogonal desse segmento em um plano α é o segmento de reta que liga a projeção ortogonal dos pontos A e B sobre α.

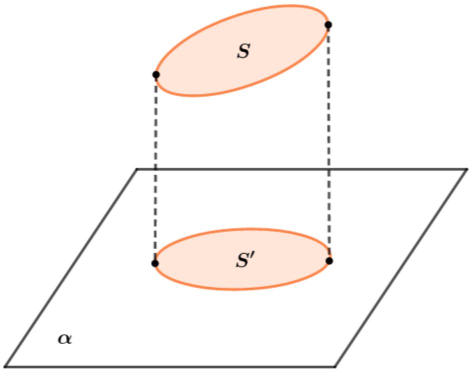


A projeção ortogonal de uma reta ou segmento de reta que é perpendicular a um plano é apenas um ponto.



1.5.3. Projeção de uma figura

Quando a projeção ortogonal é de uma figura geométrica, a projeção será a figura formada pelo conjunto das projeções ortogonais de todos os pontos que formam a figura. Na prática, o que fazemos é desenhar a sombra da figura sobre um plano.

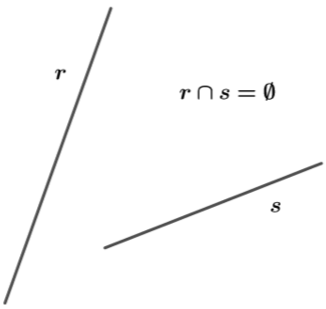


1.6. Ângulos e distâncias no espaço

Tudo que estudamos na Geometria Plana sobre os conceitos de ângulos e distâncias é válido na Geometria Espacial. A única diferença aqui é que os elementos primitivos, ponto, reta e plano, podem não pertencer a um mesmo plano. A questão é: como determinar o ângulo e distância entre elementos primitivos que não estão contidos no mesmo plano? Para responder a essa pergunta, veremos cada caso separadamente.

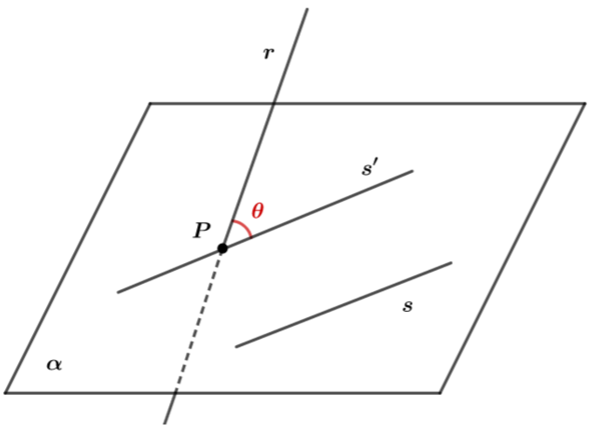
1.6.1. Ângulo entre retas

Vamos estudar o ângulo entre retas reversas, pois o caso de retas coplanares já foi abordado na Geometria Plana. Consideremos, então, as retas reversas r e s:



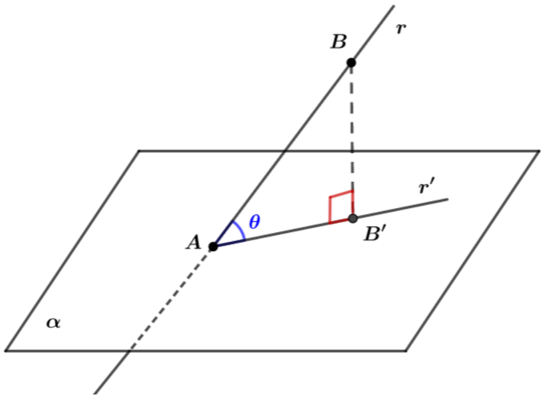
Para determinar o ângulo entre r e s, podemos proceder da seguinte forma:

Tomamos um plano α que contém a reta s. A reta r intercepta α em um ponto P. Traçamos a reta s' paralela à s, contida em α, que contém P. O ângulo entre as retas r e s será igual ao ângulo agudo entre r e s'.



1.6.2. Ângulo entre reta e plano

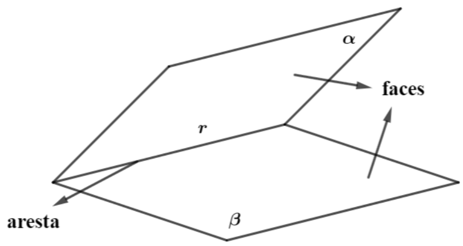
Estudaremos o caso em que a reta é oblíqua ao plano. Para determinarmos o ângulo formado entre uma reta r e um plano α, construímos a projeção ortogonal de r sobre α. O menor ângulo entre r e α será igual ao ângulo agudo entre r e sua projeção ortogonal r'.



B é um ponto da reta r e $r \cap \alpha = \{A\}$.
O ângulo θ pode ser denotado por $\widehat{r\alpha}$.

1.6.3. Ângulo entre dois planos

Quando estudamos ângulos na Geometria Plana, vimos que ela é a figura formada por dois pares de semirretas com a mesma origem. Podemos estender esse conceito à Geometria Espacial. Nesse caso, o **ângulo entre planos** é chamado de **diedro**. Um diedro é a união de dois semiplanos com a mesma reta de origem. Os semiplanos que determinam o diedro são as faces do diedro e a origem comum dos semiplanos é sua aresta.



$$\alpha\, \hat{r}\, \beta = \alpha \cup \beta$$

O diedro determinado pelos semiplanos α e β cuja origem comum é a reta r pode ser denotado por: $\alpha\, \hat{r}\, \beta$, $\widehat{\alpha\beta}$ ou $di(r)$. Há outras denotações para o diedro, mas vamos usar apenas essas.

Um bom exemplo de diedro é um livro aberto. As páginas opostas do livro são as faces do diedro, e a lombada do livro é a aresta do diedro.

Como saber a medida do diedro?

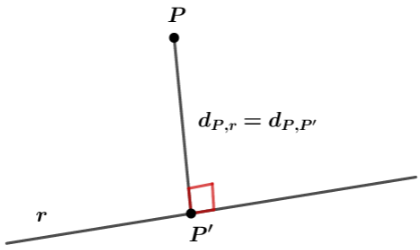
Vamos usar o exemplo do livro. Se colocarmos esse livro semiaberto em uma mesa de tal forma que ele fique em pé (apoiado pela parte de baixo do livro), podemos ver pela vista de cima o ângulo formado pelas páginas do livro. Esse ângulo é a medida do diedro.

Assim, para determinarmos a medida de um diedro formado pelos planos α e β, devemos seccionar os planos com um plano secante perpendicular à aresta do diedro. Esse plano determinará duas semirretas de mesma origem e o ângulo formado por essas semirretas será a medida do diedro.

É possível provar, por trigonometria, que esse ângulo é o maior ângulo agudo entre α e β.

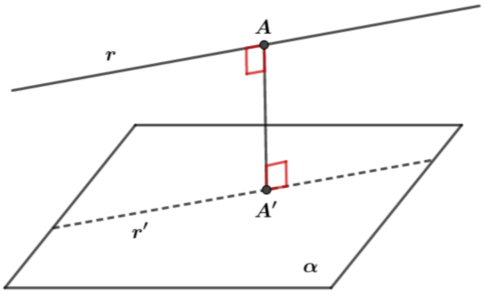
1.6.4. Distância entre ponto e reta

Para determinar a distância entre um ponto P e uma reta r no espaço, devemos tomar uma reta s perpendicular à r que passa por P. A intersecção de s com r é o ponto P'. Assim, a distância de P à r será igual à distância de P a P'.



1.6.5. Distância entre reta e plano paralelos

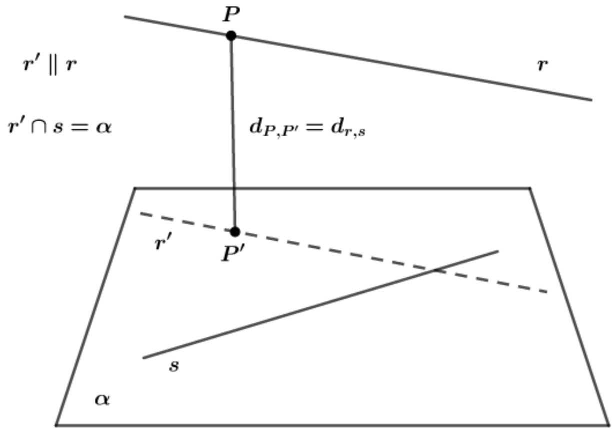
Se r é uma reta paralela ao plano α, então a distância de r a α será igual à distância de r à sua projeção ortogonal em α.



$$d_{r,\alpha} = d_{AA'}$$

1.6.6. Distância entre duas retas reversas

Por último, vamos aprender a calcular a distância entre duas retas reversas. Leve em consideração que r e s são duas retas reversas. Para determinar a distância entre essas retas, basta tomar um plano α que contém a reta s e que seja paralela à r. A distância entre as retas reversas será igual à distância entre a reta r e o plano paralelo α.



HORA DE PRATICAR!

1. (ITA/1969)

Dizemos que um conjunto C de pontos do espaço é convexo se dados pontos A e B quaisquer pertencentes a C, o segmento de reta AB está contido em C. Há conjunto convexo numa das afirmações abaixo? Assinale a afirmação verdadeira.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

c) a região plana limitada por um quadrilátero.

d) a superfície lateral de um prisma.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Comentários

Vamos analisar cada uma das alterativas.

a) o plano excluído um dos seus pontos.

Se foi excluído um dos pontos do plano, há uma espécie de "vazio" dentro desse plano, um "buraco", uma concavidade.

Dessa forma, é possível que um segmento de reta que contenha dois pontos desse plano passe exatamente em cima dessa concavidade, e isso descaracteriza a região como convexa.

b) o conjunto dos pontos situados sobre uma câmara de ar de automóvel.

A superfície da câmara de ar de um automóvel é um exemplo claro de concavidade. Como podemos traçar segmentos com extremidades que pertençam à câmara e pontos do segmento que não pertencem a ela, a região é côncava, não convexa.

d) a superfície lateral de um prisma.

Mesmo caso da câmara de ar. Se só a superfície for considerada, podemos ter segmentos de reta que contenham pontos da superfície do prisma e pontos fora dela. Assim, temos, novamente, uma região côncava.

e) nenhum dos conjuntos acima.

Como não encontramos região alguma nas alternativas anteriores que caracterizasse uma região convexa, essa é nosso gabarito.

Gabarito: "e".

2. (ITA/1969)

Consideremos um plano α e uma reta r que encontra esse plano num ponto P, e que não é perpendicular a α. Assinale qual das afirmações é a verdadeira.

a) existem infinitas retas de α perpendiculares a r pelo ponto P.

b) existe uma e somente uma reta de α perpendicular a r por P.

c) não existe reta de α, perpendicular a r, por P.

d) existem duas retas de α perpendiculares a r passando por P.

e) nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

Comentários

Se a reta r fosse perpendicular ao plano α, todas as retas de α que passam por P seriam perpendiculares à reta r.

Como isso não é verdade, ou seja, r não é perpendicular a α, temos apenas uma reta do plano α que passa por P que é perpendicular à r.

Para explicitar o caso, imagine um plano perpendicular à r e que passe por P. A intersecção entre esse plano novo e o plano α delimita uma reta perpendicular à r e pertencente a α. Como esses dois planos não são coincidentes, a intersecção destes delimita uma única reta, portanto, essa reta, que é perpendicular à r e pertencente a α existe e é única.

Gabarito: "b".

3. (ITA/1969)

Considere o plano de uma mesa e um ponto dado deste plano. Você dispõe de uma folha de papel que possui um só bordo reto. Dobrando esta folha de papel, conduza uma perpendicular ao plano da mesa, pelo ponto dado. A justificativa de tal construção está em um dos teoremas abaixo.

a) Se uma reta é perpendicular a um plano, todo plano que passa por ela é perpendicular ao primeiro.

b) Se dois planos são perpendiculares, toda reta de um deles que for perpendicular à intersecção será perpendicular ao outro.

c) Se uma reta é perpendicular a duas retas concorrentes pelo seu ponto de intersecção, então a reta é perpendicular ao plano determinado por essas duas retas.

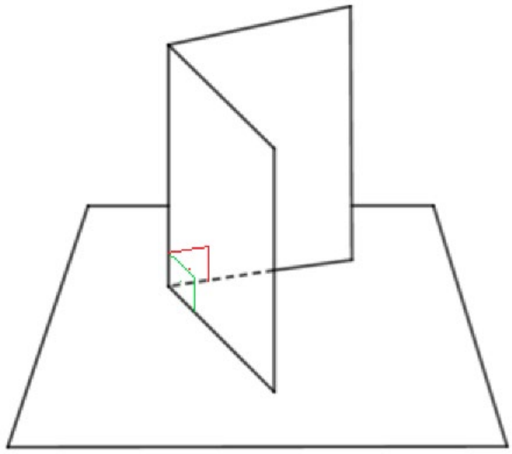
d) Por um ponto exterior a um plano passa uma reta perpendicular ao plano e somente uma.

e) Todas as perpendiculares a uma reta traçadas por um de seus pontos pertencem a um plano.

Comentários

Ao dobrar a folha de papel exatamente no meio do bordo reto, pode-se construir um vinco perpendicular a duas retas, definidas por cada segmento de reta gerado pela dobradura.

Ao colocar o bordo reto da folha no plano da mesa, geramos duas retas (pertencentes ao plano) perpendiculares ao vinco, o que está de acordo com o exposto na alternativa c).



Gabarito: “c”.

4. (ITA/1968)

Dadas duas retas concorrentes a e b e dado um ponto M, fora do plano determinado por a e b, consideremos os pontos E e F, simétricos de M em relação às retas a e b, respectivamente. A reta que une os pontos E e F é:

a) Perpendicular ao plano determinado por a e b.

b) Paralela ao plano determinado por a e b.

c) Oblíqua ao plano determinado por a e b.

d) Pertencente ao plano determinado por a e b.

e) Nenhuma das respostas anteriores.

Comentários

Se E é simétrico de M em relação à reta a, E está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

O mesmo ocorre com o ponto F. Se F é simétrico de M em relação à reta b, F está à mesma distância do plano formado por a e b que M.

Dessa forma, como E e F têm a mesma distância do plano formado por a e b que M, a reta que os une é paralela ao plano.

Gabarito: “b”.

5. (Inédita)

Os pontos A e A' são simétricos com relação ao plano α e nenhum deles pertencem a α. A intersecção entre a reta r definida A e A' com o plano α define

a) uma reta pertencente a α e perpendicular a r.

b) uma reta pertencente a α e paralela a r.

c) um único ponto.

d) uma única reta, não pertencente a r.

e) um outro plano.

Comentários

Como os pontos A e A' não pertencem ao plano α, a reta definida por eles é secante ao plano, ou seja, só apresenta um ponto em comum com α.

Gabarito: "c".

2. Lugares Geométricos

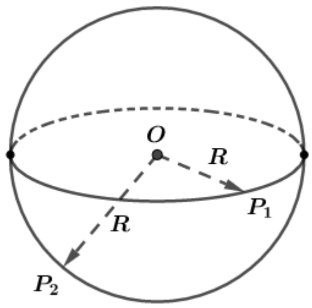
O conceito de **lugares geométricos**, na Geometria Espacial, não é muito diferente dos vistos na Geometria Plana. A diferença aqui é a inclusão de uma dimensão. Apresentaremos neste tópico alguns lugares geométricos no espaço.

Na Geometria Plana, vimos que o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um dado ponto é chamado de circunferência, ou seja, dado um ponto O, chamado de centro, temos que a circunferência λ de raio r e centro O é definida por:

$$\lambda\{O, r\} = \left\{P \in \underbrace{\alpha}_{plano} \middle| d_{P,O} = \underbrace{r}_{raio\ da\ circunferência}\right\}$$

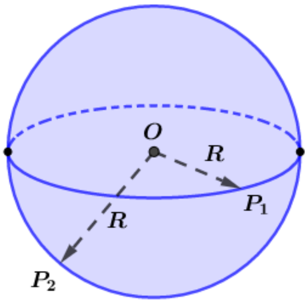
Quando usamos essa definição de pontos equidistantes de um dado ponto no espaço, o lugar geométrico que esse conjunto representa é uma **superfície esférica**. Todos os pontos dessa figura **equidistam do centro O**:

$$S\{O, R\} = \left\{P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\ da\ esfera}\right\}$$



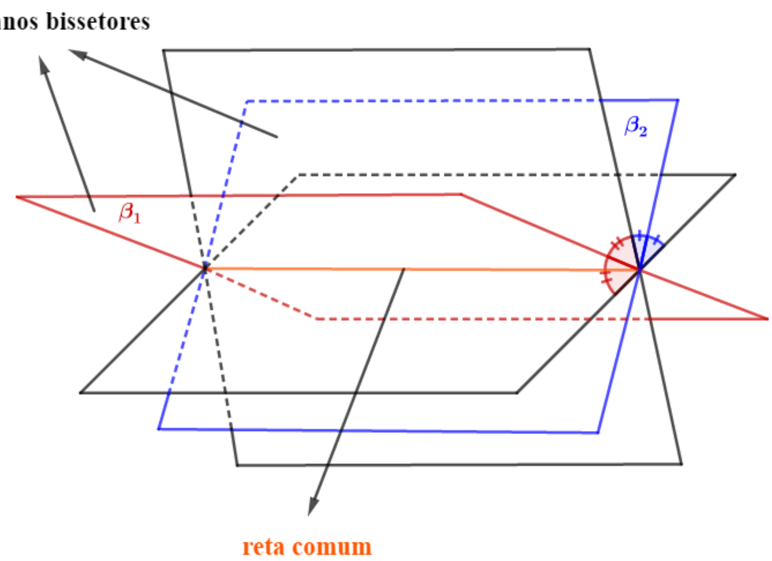
Se quisermos uma esfera maciça, basta trocar o sinal de igual pela desigualdade $\leq$:

$$S_1\{O, R\} = \{P \in \epsilon | d_{P,O} \leq R\}$$

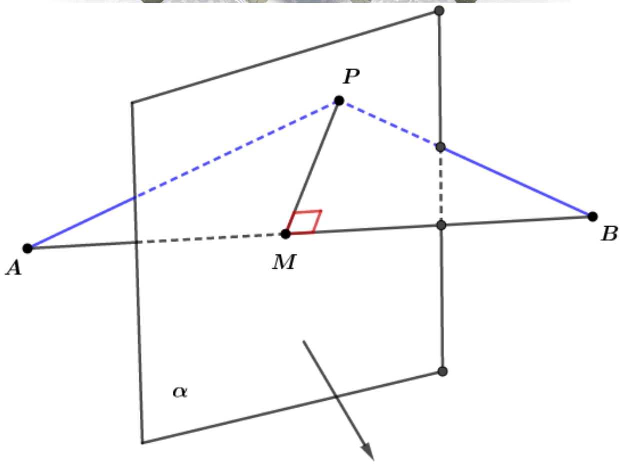


Nesse caso, todos os pontos da superfície esférica e do interior da esfera fazem parte do lugar geométrico.

Outro lugar geométrico no espaço é o plano bissetor. Na Geometria Plana, estudamos a reta bissetriz. Esse é o lugar geométrico dos pontos do plano que equidistam de duas retas concorrentes. Na Geometria Espacial, no lugar de reta, teremos um plano. Desse modo, o lugar geométrico dos pontos do espaço que **equidistam de dois planos secantes** é chamado de **plano bissetor**. E assim como no estudo plano, onde duas retas concorrentes geram duas retas bissetrizes, no estudo do espaço, temos que dois planos secantes gerarão dois planos bissetores.

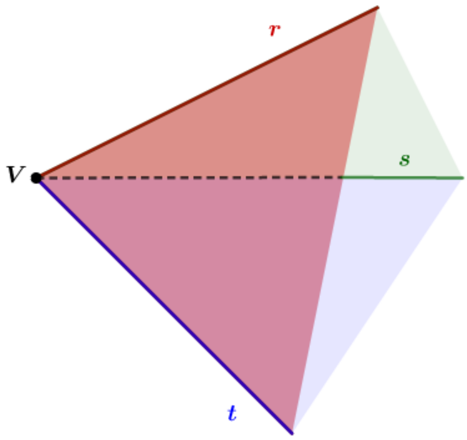


Temos também o lugar geométrico **plano mediador**. Ele é o conjunto dos **pontos equidistantes de dois pontos distintos**. Assim, dado um segmento de reta AB no espaço, ele será o plano perpendicular ao segmento e conterá o seu ponto médio. Na Geometria Plana, ele é conhecido como reta mediatriz.



3. Triedros

Vimos que um diedro é uma figura formada por dois semiplanos com a mesma origem, sendo essa uma reta comum. Um **triedro** é a figura formada por **três semirretas não coplanares e de mesma origem**, sendo essa origem um ponto comum chamado de vértice. Se r, s e t são semirretas que formam um triedro, então podemos denotar o triedro formado por essas semirretas por $V(r; s; t)$.

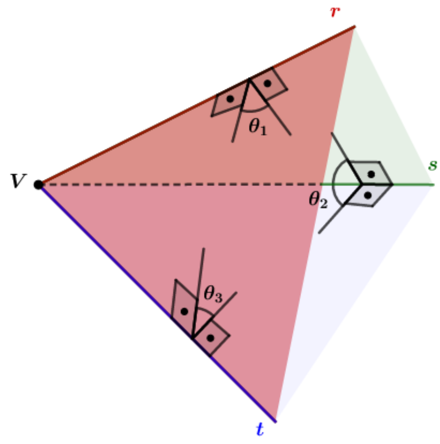


Dizemos que $\boldsymbol{V}$ é o **vértice** do triedro, cada **semirreta** é a **aresta** do triedro e as **faces** são determinadas por cada **par de semirretas**. Assim, temos:

$$V - vértice$$
$$r, s, t - arestas$$
$$r\,\hat{V}\,s, r\,\hat{V}\,t, s\,\hat{V}\,t - ângulos\ das\ faces\ ou\ faces$$

As faces também podem ser denotadas por $\widehat{rs}, \widehat{rt}$ e $\widehat{st}$.

Note que no triedro, cada semirreta forma um diedro, ou seja, este é determinado por duas faces do triedro.



$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 - \hat{a}ngulos\ diedros$$

3.1. Propriedades do triedro

No estudo do triângulo, vimos a desigualdade triangular que diz que dado um triângulo de lados a, b e c, temos, para qualquer lado do triângulo:

$$|b - c| < a < b + c$$

No estudo do triedro, temos uma desigualdade parecida com essa. Enunciemos o teorema.

3.1.1. Teorema 1 – Desigualdade dos ângulos das faces

Em um triedro de faces α, β e γ, temos válida a seguinte desigualdade:

$$\boxed{|\beta - \gamma| < \alpha < \beta + \gamma}$$

Essa desigualdade é válida tomando-se como referência qualquer face do triedro.

3.1.2. Teorema 2

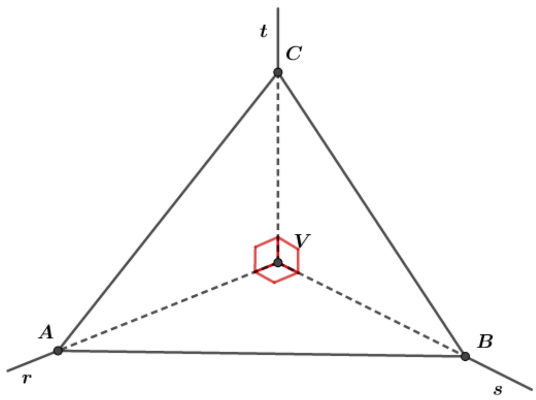
A soma das faces em graus de um triedro qualquer é sempre menor que 360°:

$$\alpha + \beta + \gamma < 360°$$

3.2. Triedro trirretângulo

Um triedro trirretângulo é aquele que possui todos os ângulos das faces iguais a 90°. Vamos estudar essa figura geométrica e extrair algumas propriedades dela.

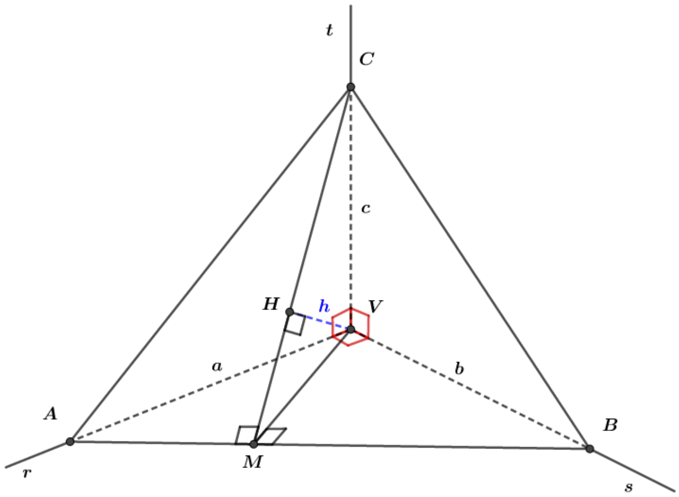
Considere um triedro trirretângulo no qual os pontos A, B, C sejam pontos de suas arestas, conforme representada na figura abaixo:



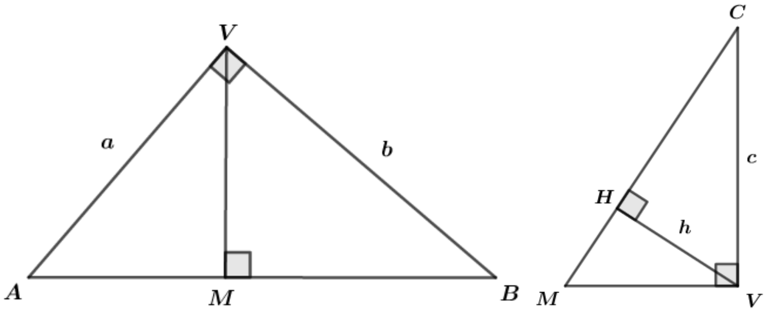
Os pontos A, B, C determinam um plano no espaço, ou seja, esse plano fecha o triedro na região aberta e, assim, obtemos a figura de uma pirâmide.

*Observação: muitas vezes, os pontos A, B, C podem não ser dados na questão e, ao invés disso, o problema pode dizer que um plano secciona (ou corta) o triedro a uma determinada distância do vértice. Isso "fechará" o triedro de modo a obter um sólido.

Vamos cortar a pirâmide perpendicularmente à aresta VC de modo a obter a seguinte figura:



VH é a distância do vértice à face ABC. Perceba, pelo desenho, que temos diversos triângulos retângulos no espaço. Analisemos esses triângulos.



Do triângulo ΔAVB, temos pelas relações métricas do triângulo retângulo:

$$\frac{1}{(MV)^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \quad (I)$$

Do triângulo CVM:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{(MV)^2} \quad (II)$$

Portanto, substituindo (I) em (II):

$$\boxed{\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}$$

Essa propriedade relaciona a altura da pirâmide $VABC$ com suas arestas a, b, c. Vamos calcular a área da face ABC.

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow AB = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Delta AVB \Rightarrow (AB)(MV) = ab \Rightarrow MV = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Delta CVM \Rightarrow MC^2 = c^2 + MV^2 \Rightarrow MC = \sqrt{c^2 + \left(\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2}$$

$$\Rightarrow MC = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}}$$

A área do ΔABC é dada por:

$$\underbrace{[ABC]}_{\text{área do } \Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB)(MC) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{a^2 + b^2}}$$

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot \cancel{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{\sqrt{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}}{\cancel{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4}}$$

$$[ABC]^2 = \underbrace{\left(\frac{ab}{2}\right)^2}_{[AVB]} + \underbrace{\left(\frac{ac}{2}\right)^2}_{[AVC]} + \underbrace{\left(\frac{bc}{2}\right)^2}_{[BVC]}$$

$$\therefore \boxed{[ABC]^2 = [AVB]^2 + [AVC]^2 + [BVC]^2}$$

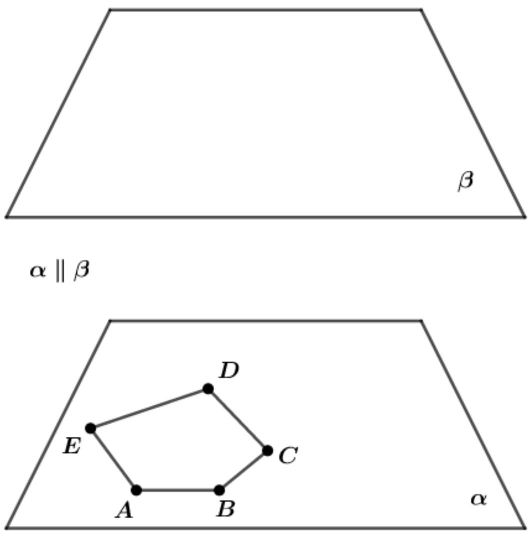
Portanto, a área da face ABC ao quadrado é igual à soma das áreas das outras faces ao quadrado.

4. Poliedros

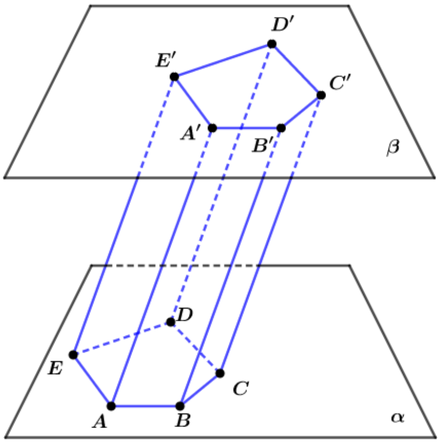
Neste capítulo, iniciaremos o estudo dos sólidos. Na Geometria Plana, estudamos diversos polígonos tais como o hexágono, o pentágono, o quadrado, entre outros... Na Geometria Espacial, os sólidos cujas faces são polígonos são chamados de poliedros. Diversos deles são figuras conhecidas, como o cubo, a pirâmide, o paralelepípedo, o prisma etc. Estudaremos cada um dos sólidos que podem ser cobrados no vestibular, então vamos iniciar pelo prisma.

4.1. Prismas

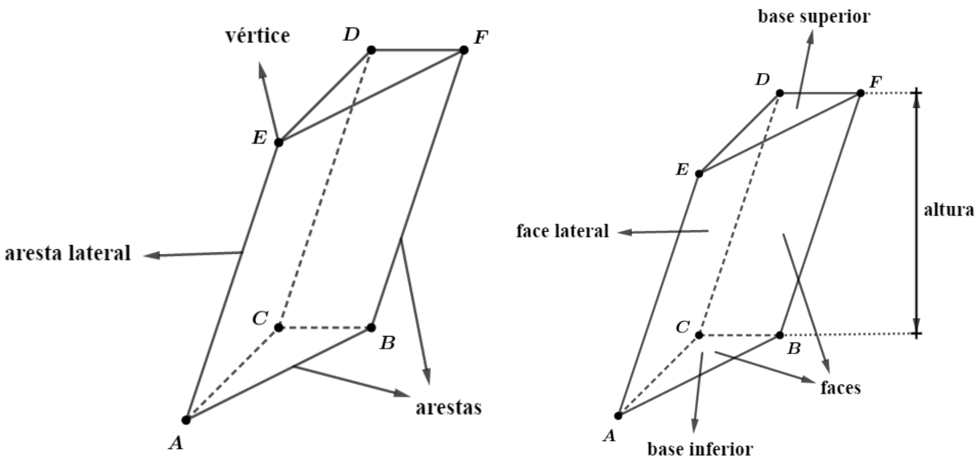
Consideremos dois planos paralelos α e β. Seja $ABCDE$ um polígono convexo determinado no plano α.



Tomando-se as retas paralelas que contém os vértices A, B, C, D, E do polígono em α, essas retas determinarão um polígono $A'B'C'D'E'$ em β. A figura formada pelos segmentos de retas e pelos polígonos convexos em α e β é chamada de prisma.



Perceba que $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ representam o mesmo polígono. Cada um dos segmentos $AA', \dots, EE'$ é chamado de **aresta lateral**. Os polígonos convexos $ABCDE$ e $A'B'C'D'E'$ são denominados de bases do prisma. Usualmente, definimos a base $\boldsymbol{ABCDE}$ como **base inferior** e a base $\boldsymbol{A'B'C'D'E'}$ como **base superior**. A medida da **altura** do prisma é igual à **distância entre os planos paralelos**. Note que $ABB'A'$ é um paralelogramo. Cada um dos **paralelogramos do prisma** é chamado de **face lateral**. Os pontos $A, B, C, \dots, D', E'$ são chamados de vértices do prisma. Cada segmento de reta do prisma é denominado de aresta. A figura abaixo apresenta os elementos presentes no prisma:



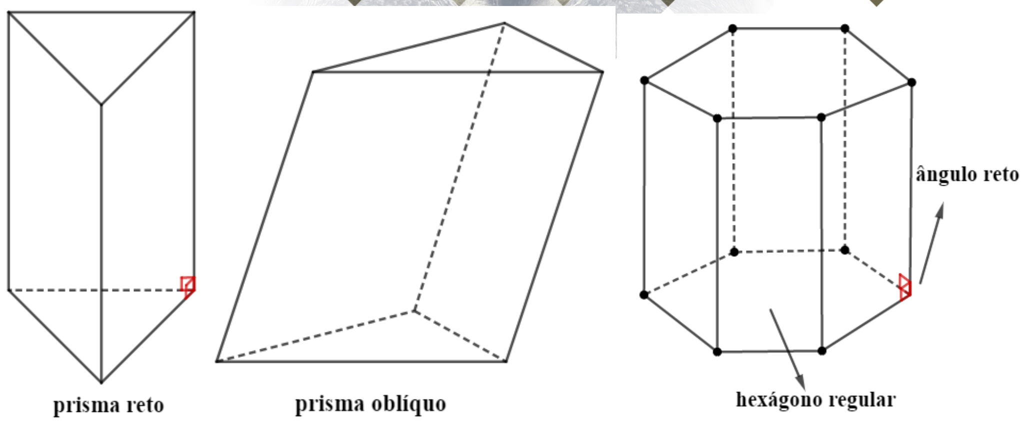
Se a base do prisma for um polígono de n lados, teremos:

- n faces laterais;
- n arestas laterais;
- $n + 2$ faces (faces laterais + duas bases);
- $3n$ arestas.

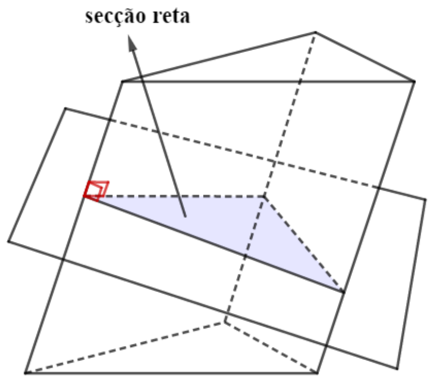
Note que a base do prisma pode ser qualquer polígono convexo. Se a base for um hexágono, por exemplo, teremos um prisma hexagonal. Se for um pentágono, teremos um prisma pentagonal. Dependendo do ângulo que as arestas laterais formam com as bases, podemos ter dois tipos de prismas:

- Prisma oblíquo;
- Prisma reto.

Dizemos que um **prisma é regular** quando ele é **reto** e a **base é um polígono convexo regular**. Vejamos alguns exemplos de prismas:



Quando cortamos o prisma com um plano perpendicular às arestas laterais, dizemos que a figura formada é uma **secção normal ou secção reta**.



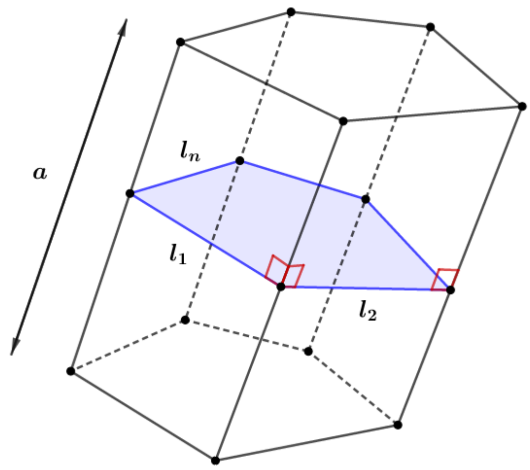
4.1.1. Área da superfície do prisma

Identificamos os elementos presentes no prisma. Na Geometria Plana, aprendemos a calcular a área de diversas figuras planas. Podemos usar esse conhecimento para calcular as áreas dos sólidos. A área total da superfície do prisma é dada por A_T, tal que:

$$A_T = A_L + 2A_B$$

Sendo que A_L é a área lateral do prisma e é igual à soma das áreas das faces laterais, e A_B é a área da base.

Tomando-se a secção normal de um prisma de lados medindo $l_1, l_2, \dots, l_n$, temos:



A medida da aresta lateral do prisma é a, desse modo, podemos calcular a área de cada face lateral do prisma:

$$A_i = a \cdot l_i, i = \{1,2, \dots, n\}$$

A área lateral do prisma é igual à soma das áreas das faces laterais, logo:

$$A_l = a \cdot l_1 + a \cdot l_2 + \cdots + a \cdot l_n = a \cdot \underbrace{(l_1 + l_2 + \cdots + l_n)}_{perímetro\ da\ secção\ normal}$$

Definindo como $2p$ o perímetro da secção normal, obtemos:

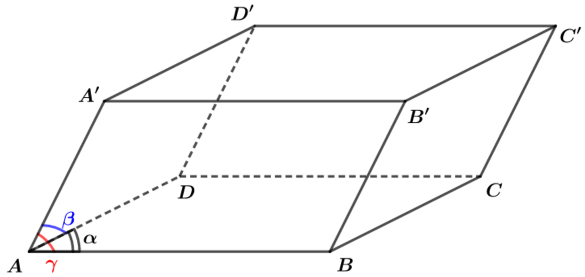
$$\boxed{A_l = 2p \cdot a}$$

4.1.2. Paralelepípedos

Um paralelepípedo é um tipo específico de prisma cuja base é um paralelogramo. Todas as faces do paralelepípedo são paralelogramos. Vamos estudar os diferentes tipos desse sólido:

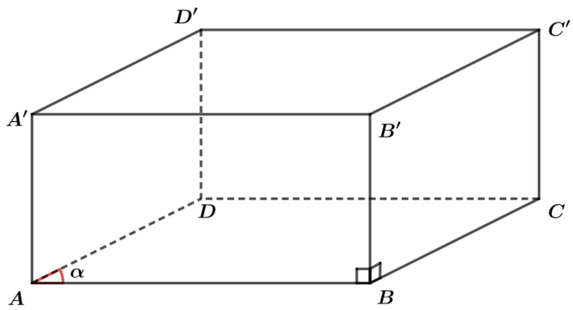
a) Oblíquo

Um paralelepípedo é oblíquo quando sua aresta lateral não forma ângulo reto com o plano da base.

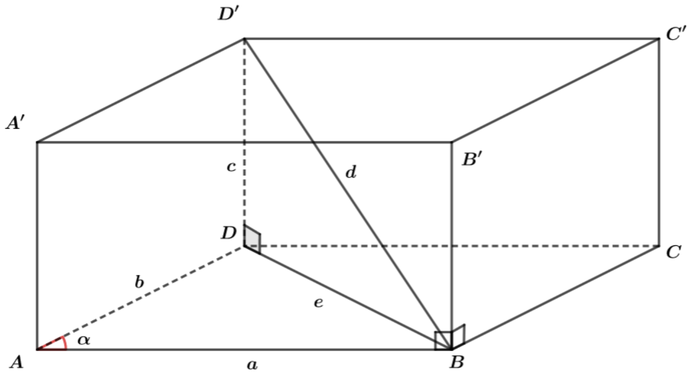


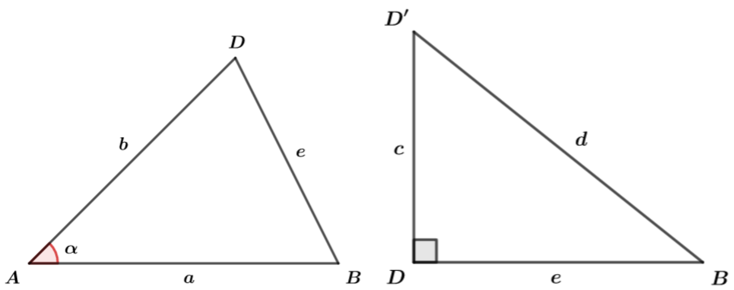
b) Reto

Um paralelepípedo é reto quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base.



Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos o paralelepípedo de dimensões conforme a seguinte imagem:





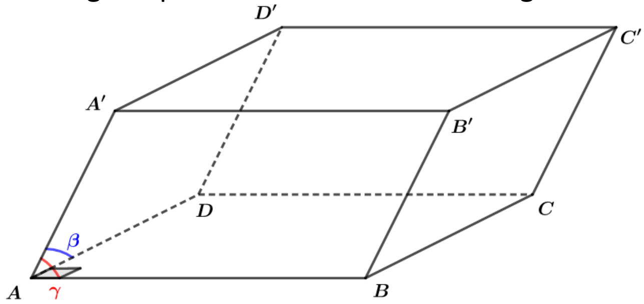
e é a diagonal menor da base, e d é a diagonal menor do paralelepípedo. Observando as figuras, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha \ \ (lei\ dos\ cossenos)$$
$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 \Rightarrow d^2 = c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$$
$$\therefore \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab\cos\alpha}}$$

Podemos usar o mesmo raciocínio para encontrar a outra diagonal do paralelepípedo.

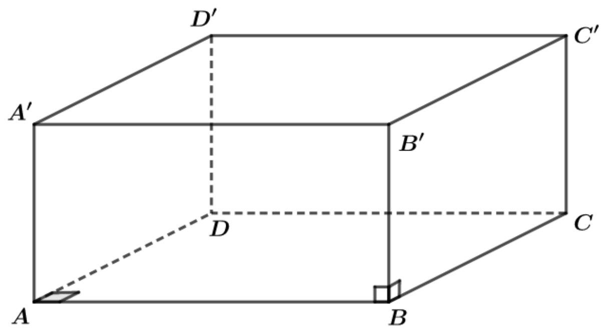
c) Retângulo

Um paralelepípedo é retângulo quando sua base é um retângulo.

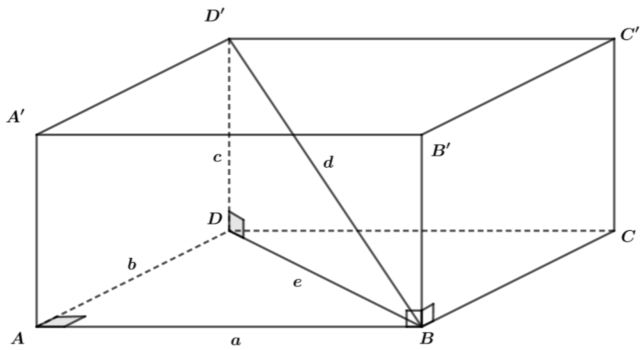


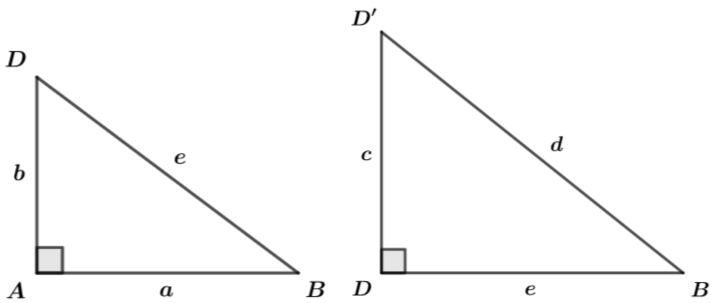
d) Reto-retângulo

Um paralelepípedo é reto-retângulo quando sua aresta lateral forma ângulo reto com a base e esta é um retângulo.



Vejamos algumas propriedades desse sólido. Consideremos o paralelepípedo com as seguintes dimensões:





Pelas figuras, podemos ver que:

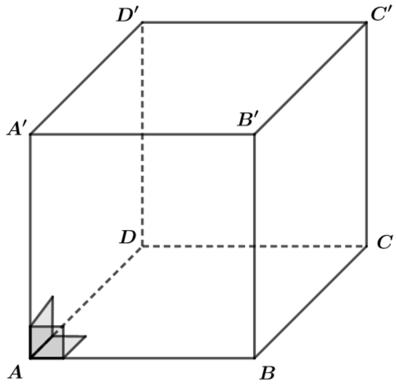
$$\Delta ABD \Rightarrow e^2 = a^2 + b^2$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = c^2 + e^2 = c^2 + a^2 + b^2 \Rightarrow \boxed{d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

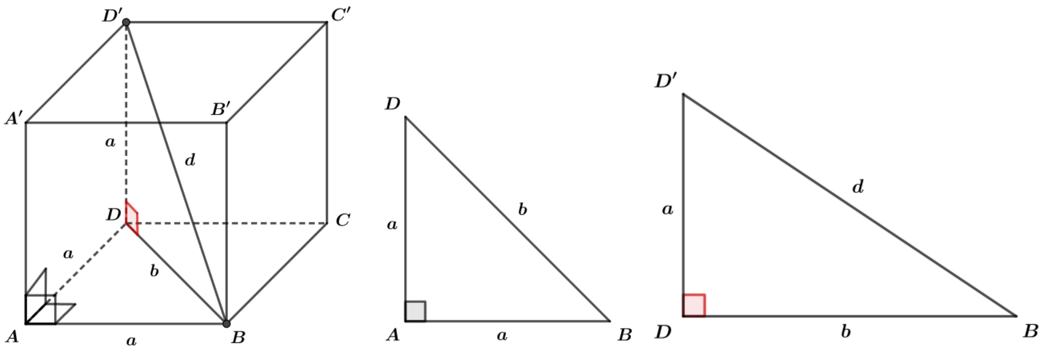
$$A_T = ab + ab + ac + ac + bc + bc \Rightarrow \boxed{A_T = 2(ab + ac + bc)}$$

e) Cubo

Esse sólido é um paralelepípedo cujas faces são todas quadrados.



Vamos estudar algumas propriedades dessa figura. Consideremos um cubo de aresta a e tracemos as diagonais conforme a imagem abaixo:



b é a diagonal da base, e d é a diagonal do cubo. Observando as faces, temos:

$$\Delta ABD \Rightarrow b^2 = a^2 + a^2 \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{2}}$$

$$\Delta DBD' \Rightarrow d^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow d^2 = a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{d = a\sqrt{3}}$$

Além disso, como as faces são quadrados de lado a, para calcular a área total, basta somar seis vezes a área de cada face, ou seja:

$$\text{área total do cubo} \Rightarrow \boxed{A_T = 6a^2}$$

4.1.3. Volume do paralelepípedo

O volume de um paralelepípedo reto-retângulo é dado pelo produto entre a área da sua base e a sua altura.

$$\boxed{V = (\text{área da base}) \cdot (\text{altura}) = A_B \cdot h}$$

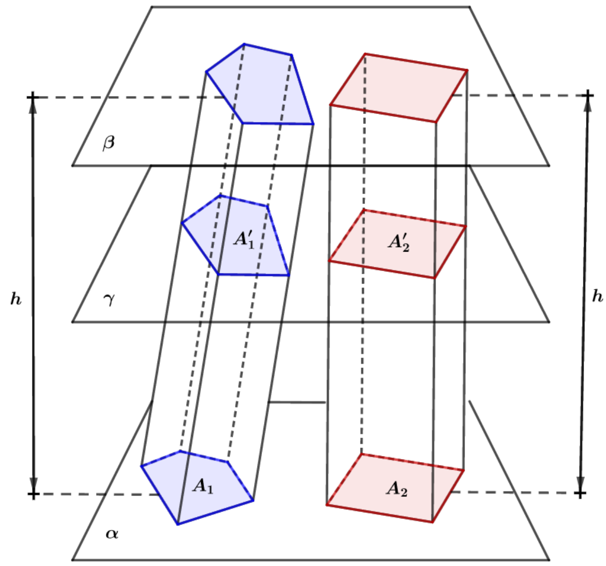
E se quisermos calcular o volume de um prisma qualquer? Para descobrir o volume desse sólido, estudaremos o **princípio de Cavalieri**.

4.1.4. Princípio de Cavalieri

O princípio de Cavalieri diz que:

Dados dois sólidos cujas bases estão contidas num mesmo plano, se qualquer plano secante, paralelo ao plano da base, forma superfícies de áreas iguais nos sólidos, então os sólidos têm volumes iguais.

Na prática, se dois prismas possuem alturas iguais e bases de mesma área, podemos afirmar que os dois sólidos possuem o mesmo volume. Assim, vamos tomar dois prismas: um será um prisma oblíquo de base pentagonal (a base pode ser qualquer polígono), e o outro será um paralelepípedo reto-retângulo. As suas bases estarão no mesmo plano e ambos têm mesma área. Vejamos a figura abaixo.



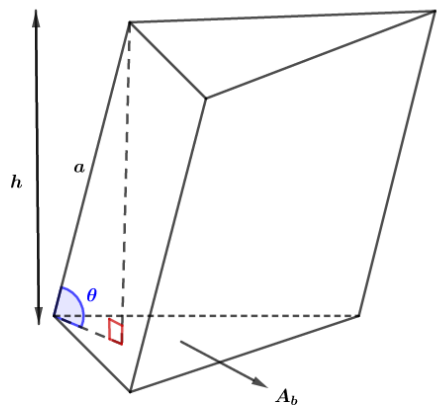
Como as bases têm áreas iguais, temos $A_1 = A_2$. Pelo princípio de Cavalieri, temos:

$$V_1 = V_2 = A_2 \cdot h = A_1 \cdot h$$
$$\therefore V_1 = A_1 \cdot h$$

Portanto, a área de um prisma qualquer é igual ao produto da área da base pela sua altura.

$$\boxed{V = A_B \cdot h}$$

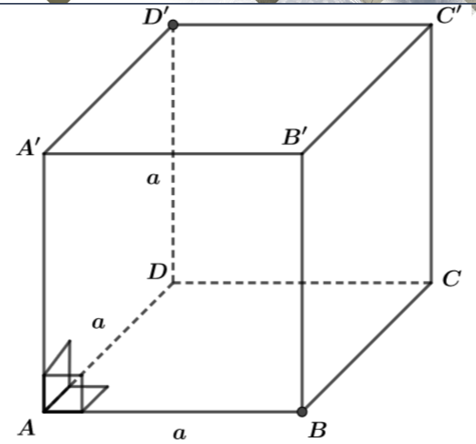
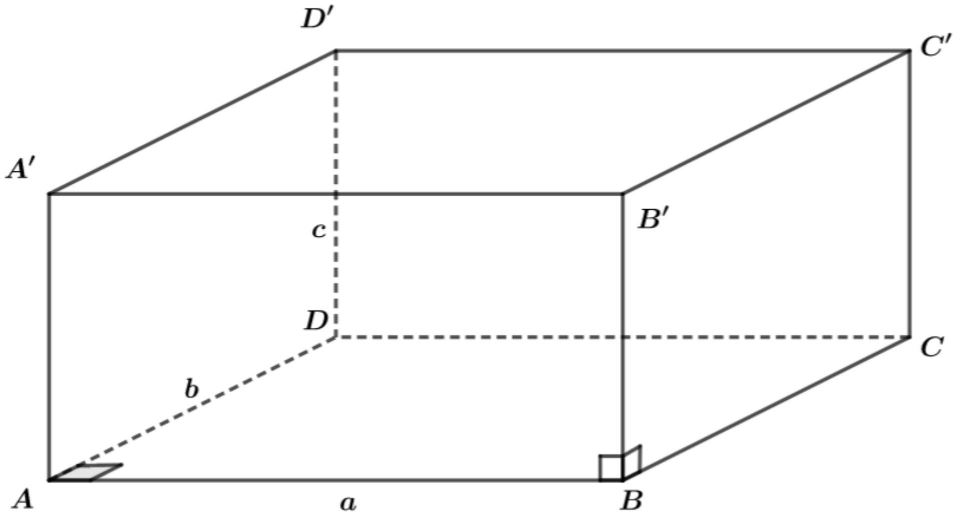
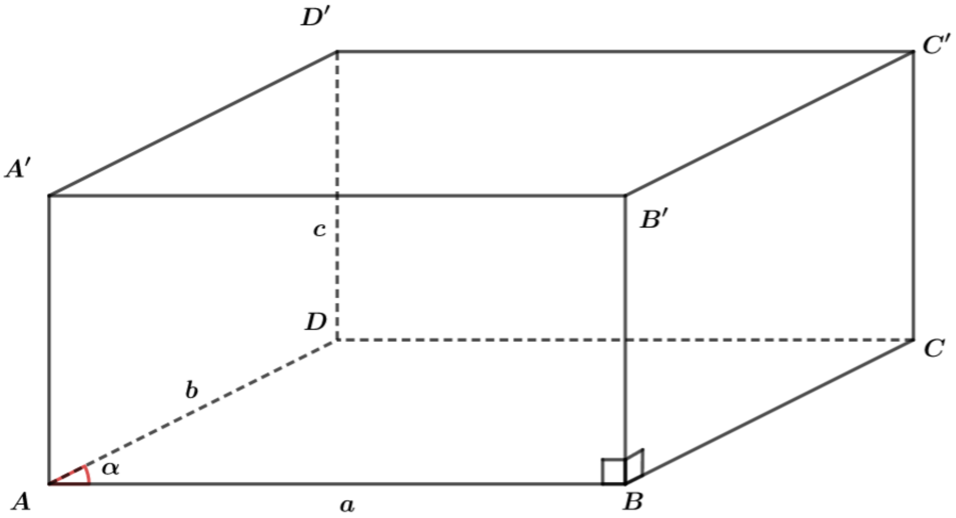
Se tivermos apenas a informação da aresta lateral ao invés da altura do prisma, podemos usar a trigonometria para encontrar a altura. Veja:



Podemos ver que:

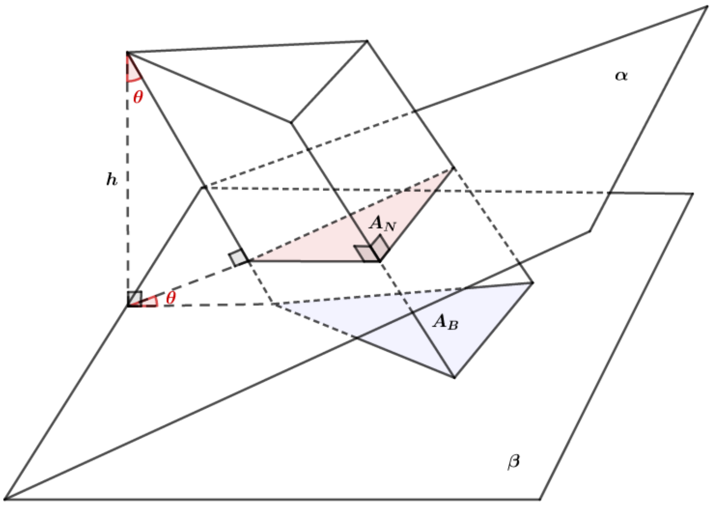
$$sen\ \theta = \frac{h}{a} \Rightarrow \boxed{h = a \cdot sen\ \theta}$$

Vejamos o volume de alguns paralelepípedos:

	Cubo $V = A_B \cdot h = a \cdot a \cdot a$ $\boxed{V = a^3}$
	Reto-retângulo $V = \underbrace{A_B}_{ab} \cdot \underbrace{h}_{c}$ $\boxed{V = abc}$
	Reto $V = \underbrace{A_B}_{ab\,sen\alpha} \cdot \underbrace{h}_{c}$ $\boxed{V = abc\ sen\ \alpha}$

4.1.5. Projeção ortogonal no prisma oblíquo

Seja α um plano que corta, perpendicularmente, a aresta lateral de um prisma oblíquo, segundo a figura abaixo:



Consideremos a seguinte legenda:

$$A_B\text{: área da base}$$
$$h\text{: altura}$$
$$A_N\text{: área da secção normal}$$
$$\theta\text{: medida do diedro formado entre } \alpha \text{ e o plano da base } \beta$$

A_N é a projeção ortogonal de A_B sobre o plano α, logo, podemos escrever:

$$\boxed{A_B \cdot \cos\theta = A_N}$$

Dessa relação, temos:

$$A_B = \frac{A_N}{\cos\theta}$$

Além disso, θ também é o ângulo formado entre a aresta lateral do prisma e sua altura:

$$a \cdot \cos\theta = h$$

Como o volume do prisma é

$$V = A_B \cdot h$$

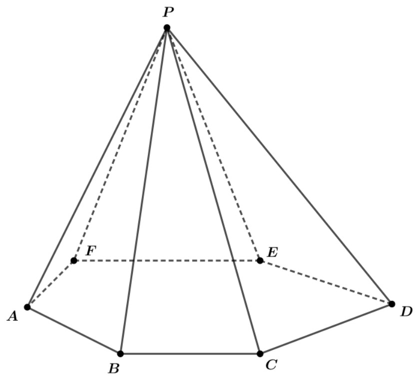
Temos:

$$V = \frac{A_N}{\cos\theta} \cdot a \cdot \cos\theta$$
$$\therefore \boxed{V = A_N \cdot a}$$

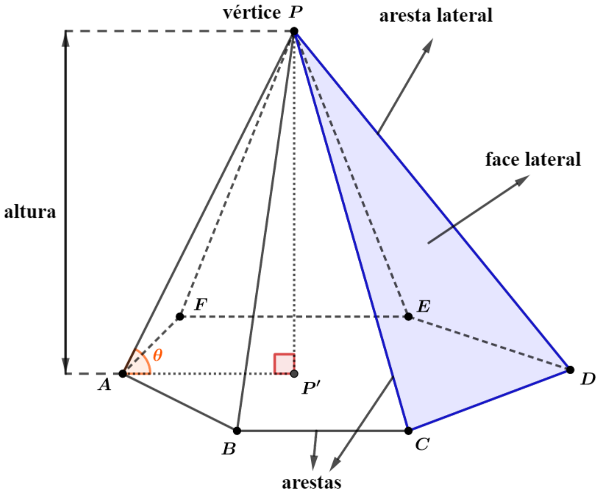
Portanto, o volume do prisma é igual ao produto entre a área da secção normal e sua aresta lateral.

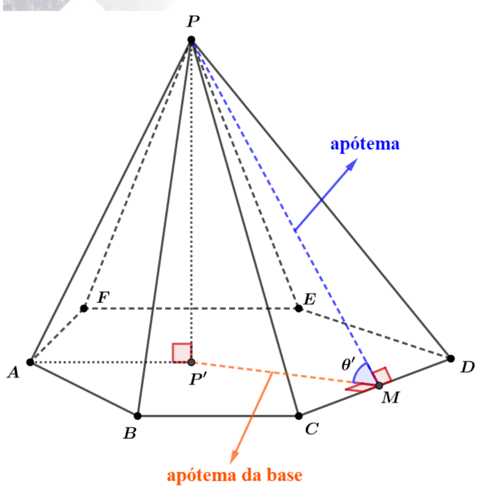
4.2. Pirâmides

Consideremos um polígono convexo contido em um plano α e um ponto P fora de α. A figura formada pelos segmentos de reta que ligam P aos vértices do polígono é chamada de pirâmide convexa.



Vejamos os elementos presentes na pirâmide.





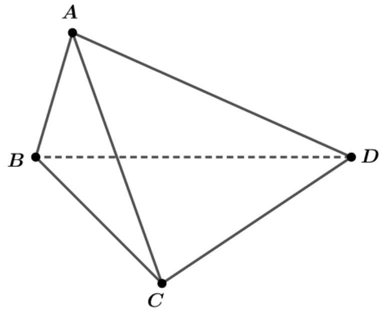
- θ é o ângulo formado pela aresta lateral AP e o plano da base;
- A altura da pirâmide é igual à distância entre o vértice P e o plano da base;
- Apótema é o termo usado para a altura de uma face lateral;
- θ' é o ângulo diédrico da aresta CD.

A natureza da pirâmide varia de acordo com o polígono da base. Se a base for um pentágono, teremos uma pirâmide pentagonal. Se a base for um hexágono, teremos uma pirâmide hexagonal, e assim por diante.

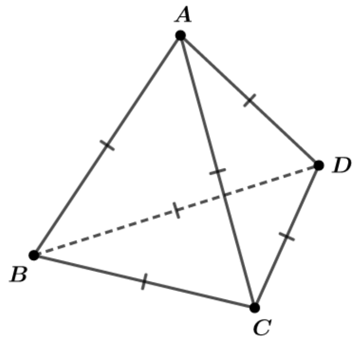
Dizemos que uma pirâmide é **regular** quando a sua **base é um polígono regular** e a **projeção ortogonal do vértice é o centro da base**. Nesse caso, as arestas laterais são todas congruentes e as faces laterais são triângulos isósceles.

4.2.1. Tetraedro

Tetraedro é uma figura que costuma ser cobrada bastante nos vestibulares. Ele é uma pirâmide triangular.



Um tetraedro é regular quando todas as suas arestas são congruentes. Desse modo, as faces dessa pirâmide são triângulo equiláteros.



4.2.2. Área da superfície da pirâmide

A área lateral de uma pirâmide é igual à soma das áreas laterais das faces.

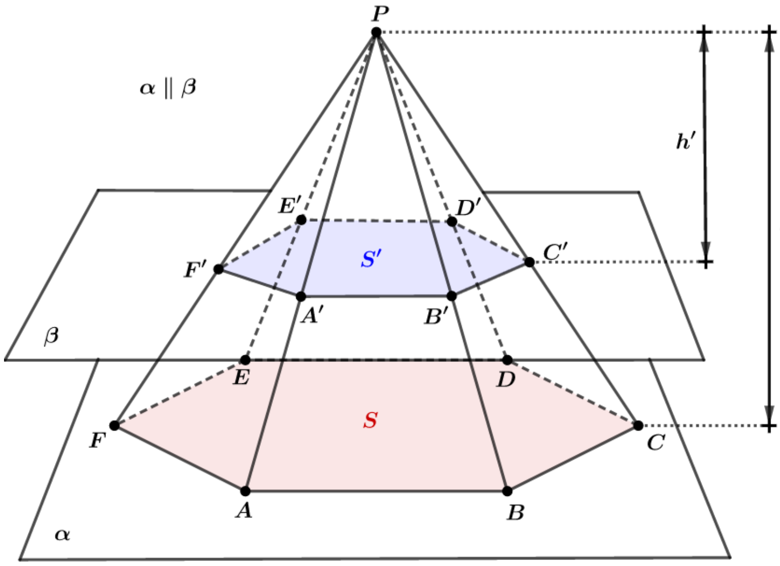
A área total é igual à soma da área lateral com a área com base.

4.2.3. Volume da pirâmide

$$\boxed{V_{pirâmide} = \frac{1}{3} A_{base} \cdot h}$$

4.2.4. Plano secante paralelo à base da pirâmide

Quando seccionamos um plano paralelamente ao plano da base, obtemos duas pirâmides semelhantes.



A razão entre as áreas da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^2, onde k é a razão de proporção entre os segmentos das pirâmides.

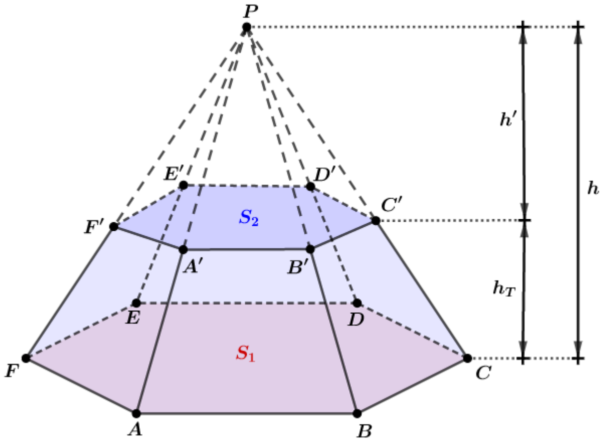
$$\frac{h}{h'} = \frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'} = \cdots = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \cdots = k$$

$$\boxed{\frac{S}{S'} = k^2}$$

A razão entre os volumes da pirâmide menor e a pirâmide maior é igual k^3:

$$\boxed{\frac{V}{V'} = k^3}$$

A figura formada pelos vértices $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ é chamada de **tronco de pirâmide de bases paralelas**. Vamos calcular o volume desse tronco.



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes da pirâmide maior, da pirâmide menor e do tronco, respectivamente. Assim, temos:

$$V_T = V_1 - V_2 = \frac{1}{3}S_1 \underbrace{h}_{h'+h_T} - \frac{1}{3}S_2h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3}S_1(h' + h_T) - \frac{1}{3}S_2h'$$

$$\Rightarrow V_T = \frac{1}{3}[(S_1 - S_2)h' + S_1h_T]$$

Como as pirâmides são semelhantes, podemos escrever:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h}{h'}\right)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{(h' + h_T)}{h'} \Rightarrow \sqrt{S_1}h' = \sqrt{S_2}h' + \sqrt{S_2}h_T$$

$$\therefore h' = \frac{h_T\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}$$

Substituindo h' na expressão do volume:

$$V_T = \frac{1}{3}\left[(S_1 - S_2)\left(\frac{h_T\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2}}\right) + S_1h_T\right]$$

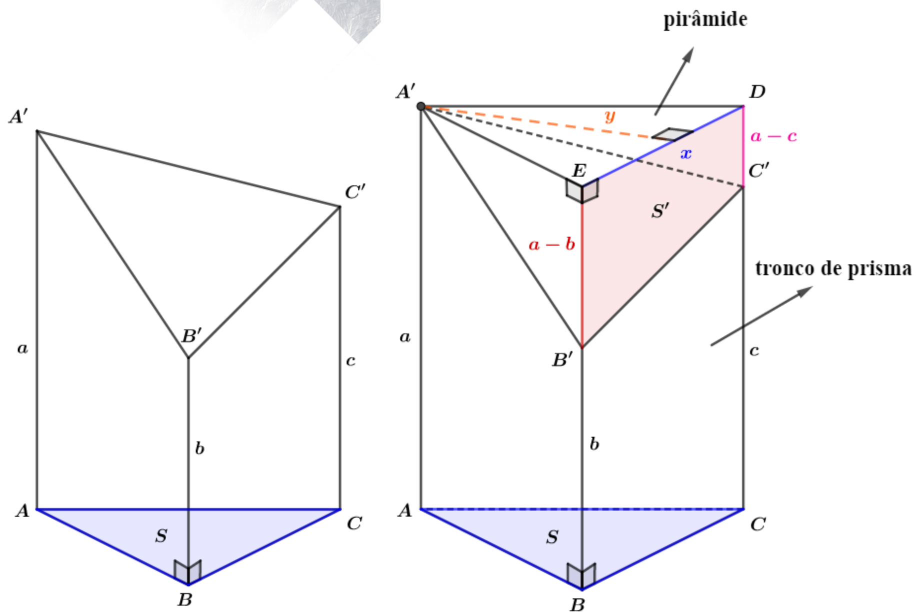
Note que $S_1 - S_2 = \sqrt{(S_1)^2} - \sqrt{(S_2)^2} = (\sqrt{S_1} - \sqrt{S_2})(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})$, substituindo acima:

$$V_T = \frac{1}{3}[(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})\sqrt{S_2}h_T + S_1h_T]$$

$$\boxed{V_T = \frac{h_T}{3}(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2})}$$

4.2.5. Tronco de prisma triangular

Vamos estudar o volume de um tronco de prisma triangular. Consideremos um prisma triangular com uma base perpendicular às arestas laterais, conforme mostra a figura abaixo.



A área da base perpendicular é S. Podemos completar esse tronco de prisma com uma pirâmide de modo a formar um prisma reto. Desse modo, temos que o volume do tronco é dado por:

$$V_T = V_{prisma} - V_{pirâmide}$$

$$V_{prisma} = a \cdot S$$

$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} S' y = \frac{1}{3} \frac{[(a-b+a-c)x]}{2} y = \frac{1}{3} \cdot (2a-b-c) \cdot \underbrace{\frac{xy}{2}}_{S} = \frac{1}{3}(2a-b-c) \cdot S$$

$$\Rightarrow V_T = a \cdot S - \frac{1}{3}(2a-b-c) \cdot S$$

$$\therefore \boxed{V_T = \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot S}$$

Caso o prisma tenha ambas as bases não perpendiculares às arestas laterais, podemos dividir esse prisma por uma secção normal e, assim, teremos dois prismas cuja base forma um ângulo reto com as arestas laterais. Procedendo dessa forma, encontramos:

$$\boxed{V_T = \frac{1}{3}(a+b+c) \cdot S}$$

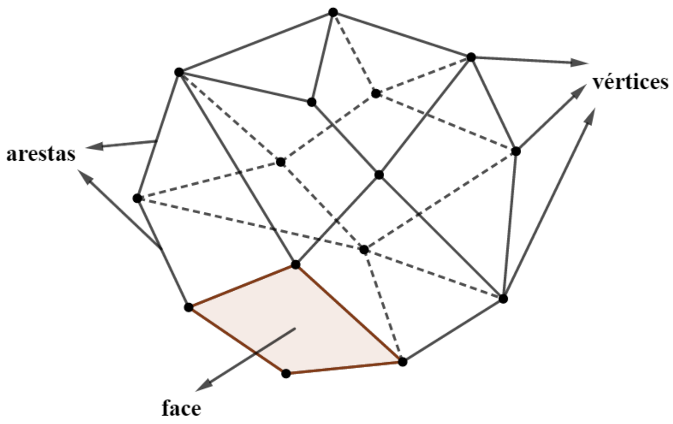
Onde a, b, c são as medidas das arestas laterais do tronco de prisma oblíquo e S é a área da secção normal.

4.3. Poliedros convexos

Dizemos que um sólido é um poliedro convexo quando a sua superfície é formada por n polígonos que satisfazem as seguintes condições:

- Dois polígonos quaisquer não estão no mesmo plano;
- Qualquer aresta de um polígono é comum a apenas dois polígonos;
- O plano de qualquer polígono deixa os demais no mesmo semiespaço.

As faces do polígono convexo são os polígonos convexos, as suas arestas são os lados dos polígonos e os seus vértices são os vértices dos polígonos.



4.3.1. Relação de Euler

A relação de Euler é uma propriedade que relaciona as arestas, vértices e faces de um poliedro convexo. Para todo poliedro convexo, vale a relação:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

Os poliedros que admitem a relação de Euler são chamados de **poliedros eulerianos**.

Atenção! Todo poliedro convexo é euleriano, mas nem todo poliedro euleriano é convexo!

4.3.2. Soma dos ângulos das faces de um poliedro convexo

A soma dos ângulos de todas as faces de um poliedro convexo é igual à

$$S = (V - 2) \cdot 360°$$

Em que V é o número de vértices do poliedro convexo.

4.3.3. Poliedros de Platão

Um poliedro é classificado como poliedro de Platão quando satisfaz os seguintes requisitos:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- Admite a relação de Euler.

Existem apenas cinco tipos de poliedros de Platão, são eles:

1. Tetraedro;
2. Hexaedro;
3. Octaedro;
4. Dodecaedro;
5. Icosaedro.

Não veremos a prova disso, pois este não é um assunto que costuma cair em prova.

4.3.4. Poliedros regulares

Os poliedros convexos são classificados como regulares quando:

- Todas as faces possuem o mesmo número de arestas;
- De cada vértice, parte um mesmo número de arestas;
- Todas as faces são polígonos regulares.

Note que os poliedros regulares possuem uma definição parecida com os poliedros de Platão. A única ressalva é que as faces dos poliedros regulares são polígonos regulares.

Assim, temos apenas cinco tipos de poliedros regulares:

1. Tetraedro regular;
2. Hexaedro regular (cubo);
3. Octaedro regular;
4. Dodecaedro regular;
5. Icosaedro regular.

5. Lista de Questões

Questões ITA

6. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a $2160°$.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

7. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

8. (ITA/2018)

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

9. (ITA/2018)

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10.

b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 30.

10. (ITA/2018)

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se MN = CN = 2 cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$

b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

11. (ITA/2018)

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2} cm^2$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

12. (ITA/2017)

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

13. (ITA/2015)

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

14. (ITA/2014)

Uma pirâmide de altura $h = 1\,cm$ e volume $V = 50\,cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}cm^2$ e $S_6 = 3\,cm^2$. Então n é igual a

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

e) 32

15. (ITA/2013)

Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a $10\,cm^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

16. (ITA/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo, é (são) verdadeira(s) apenas

a) III.

b) I e III.

c) II e III.

d) III e IV.

e) I, II e IV.

17. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2

b) 4

c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

18. (ITA/2011)

Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces tem a mesma medida $\alpha = 120°$.

II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30°, 45°, 50°, 50°$ e $170°$.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880°$.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II.

b) IV.

c) II e IV.

d) I, II e IV.

e) II, III e IV.

19. (ITA/2010)

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\sqrt{2}/6$

b) $\sqrt{2}/8$

c) $\sqrt{3}/6$

d) $\sqrt{3}/8$

e) $\sqrt{3}/9$

20. (ITA/2007)

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\text{cm}^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio.

Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

21. (ITA/2007)

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$

d) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{22}$

22. (ITA/2005)

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11.

b) 32.

c) 10.

d) 20.

e) 22.

23. (ITA/2005)

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0, 0), B = (2, 2)$ e $C = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$. O volume do tetraedro é

a) $8/3$.

b) 3.

c) $3\sqrt{3}/2$.

d) $5\sqrt{3}/2$.

e) 8.

Questões IME

24. (IME/2020)

Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

a) $2\sqrt{3}-3$

b) $4-2\sqrt{3}$

c) $2-\sqrt{3}$

d) $1-\sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{3}}{2}-1$

25. (IME/2020)

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a $1/3$ do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n = \frac{1}{3}D_{n-1}, \text{para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

26. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

27. (IME/2019)

Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do ΔABC é igual à área do ΔACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\widehat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2, sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $30°$.

a) $\left(2-\sqrt{3}\right)$

b) $\left(2+\sqrt{3}\right)$

c) $4\left(2-\sqrt{3}\right)$

d) $4\left(2+\sqrt{3}\right)$

e) 4

28. (IME/2018)

Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm

b) $\sqrt{19}$ cm

c) $\sqrt{21}$ cm

d) $2\sqrt{7}$ cm

e) $\sqrt{29}$ cm

29. (IME/2018)

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

30. (IME/2017)

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) $50\ \text{cm}^3$

b) $42\sqrt{3}/3\ \text{cm}^3$

c) $43\sqrt{3}/2\ \text{cm}^3$

d) $43\sqrt{2}\ \text{cm}^3$

e) $42\sqrt{3}\ \text{cm}^3$

31. (IME/2016)

Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$

b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

d) $\frac{a\sqrt[4]{2}}{8}$

e) $\frac{a\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}$

32. (IME/2015)

Em um prisma oblíquo ABCDEFA’B’C’D’E’F’, cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

e) $\frac{5}{2}a^3$

33. (IME/2015)

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

34. (IME/2015)

Seja um tetraedro regular ABCD de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

35. (IME/2014)

Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

36. (IME/2014)

Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}, \overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$

b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{17}$

37. (IME/2012)

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

38. (IME/2012)

Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta a. As faces laterais fazem um ângulo de $15°$ com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de a.

a) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

b) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

c) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

d) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

e) $a^3\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

6. Gabarito

GABARITO

Gabarito das Questões ITA

6. b
7. a
8. $V = 6$
9. d
10. a
11. $\boldsymbol{H^1_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;\ H^2_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)cm;\ H^3_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)cm}$
12. $[\boldsymbol{LMN}] = \sqrt{\boldsymbol{3}}$
13. $\boldsymbol{AC = \frac{\sqrt{337}}{5}cm}$
14. c
15. a) $\boldsymbol{AB = 3\ cm}$ e $\boldsymbol{AE = 5\ cm}$ b) $\boldsymbol{S' = 94\ cm^2}$
16. d
17. a
18. c
19. b
20. $\boldsymbol{\left(8-\frac{4\pi}{3}\right)\ cm^3}$
21. c
22. a
23. a

Gabarito das Questões IME

24. a

25. $a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}$

26. b

27. d

28. c

29. $\frac{11}{52}$

30. e

31. d

32. d

33. $h^1_{sólido} = \frac{\sqrt{6}d}{3\sqrt[3]{3}}$; $h^2_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{2}-1\right)d}{3\sqrt[3]{3}}$; $h^3_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)d}{3\sqrt[3]{3}}$

34. c

35. $a = \sqrt{k}$

36. b

37. $R = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$

38. a

7. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

Questões ITA

6. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Todo poliedro formado por 16 faces quadrangulares possui exatamente 18 vértices e 32 arestas.

II. Em todo poliedro convexo que possui 10 faces e 16 arestas, a soma dos ângulos de todas as faces é igual a 2160°.

III. Existe um poliedro com 15 faces, 22 arestas e 9 vértices.

É(são) VERDADEIRA (S)

a) apenas I.

b) apenas II.

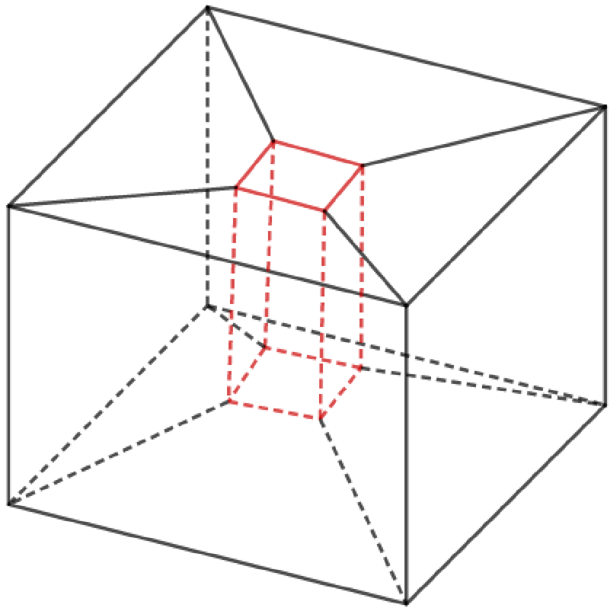
c) apenas III.

d) apenas I e II.

e) apenas II e III.

Comentários

I. Cuidado quando a afirmação diz "todo poliedro", pois podemos ter um poliedro côncavo que não possui esse número de vértices e arestas. Veja o contraexemplo:



Esse poliedro possui 16 faces quadrangulares, 32 arestas e 16 vértices. Portanto, afirmação falsa.

II. A afirmação diz que o poliedro convexo possui 10 faces e 16 arestas, logo $F = 10$ e $A = 16$. Pela relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$
$$V - 16 + 10 = 2 \therefore V = 8$$

A soma dos ângulos internos de um poliedro convexo é dada por:

$$S_i = 360° \cdot (V - 2)$$
$$S_i = 360° \cdot (8 - 2) = 360° \cdot 6 = 2160°$$

Portanto, afirmação verdadeira.

III. Se existe um poliedro com tais características, devemos ter:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Note que

$$3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots \geq 3F_3 + 3F_4 + 3F_5 + \cdots = 3(F_3 + F_4 + F_5 + \cdots) = 3F$$
$$\Rightarrow 2A \geq 3F$$

Substituindo $A = 22$ e $F = 15$, temos:

$$2 \cdot 22 \geq 3 \cdot 15 \Rightarrow 44 \geq 45\ (Absurdo!)$$

Portanto, afirmação falsa.

Gabarito: "b".

---

7. (ITA/2020)

Considere as seguintes afirmações:

I. Sejam π_1, π_2 e π_3 três planos distintos, e secantes dois a dois segundo as retas distintas r, s e t. Se $r \cap s \neq \emptyset$ então $r \cap s \cap t \neq \emptyset$.

II. As projeções ortogonais de duas retas paralelas r e s sobre um plano π são duas retas paralelas.

III. Para quaisquer retas r, s e t reversas duas a duas, existe uma reta u paralela à r e concorrente com s e com t.

É(são) VERDADEIRA(S)

a) apenas I.

b) apenas II.

c) apenas I e II.

d) apenas I e III.

e) nenhuma.

Comentários

I. Como r, s, t são as retas da interseção dos três planos distintos e secantes dois a dois, temos:

$$r \in \pi_1 \cap \pi_2$$
$$s \in \pi_1 \cap \pi_3$$
$$t \in \pi_2 \cap \pi_3$$

Se $r \cap s \neq \emptyset$ e sabendo que as retas são distintas (não podem ser coincidentes), temos:

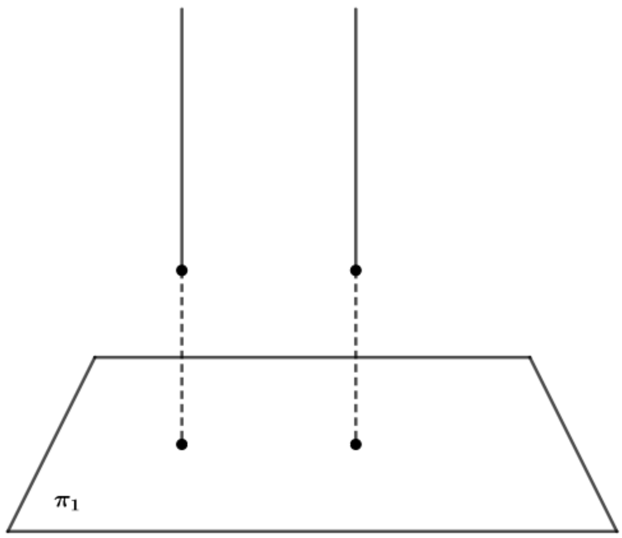
$$r \cap s = \{P\}$$

Logo:

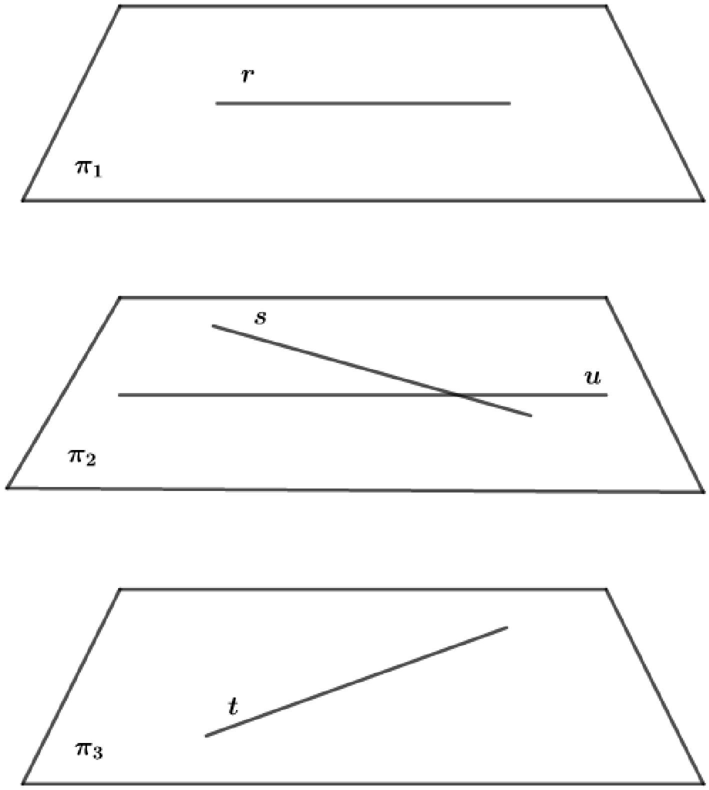
$$P \in r \Rightarrow P \in \pi_1 \; e \; P \in \pi_2$$
$$P \in s \Rightarrow P \in \pi_1 \; e \; P \in \pi_3$$
$$P \in \pi_2 \; e \; P \in \pi_3 \Rightarrow P \in t$$

Portanto, $r \cap s \cap t = \{P\} \neq \emptyset$. Verdadeira.

II. Podemos ter duas retas paralelas e perpendiculares a um mesmo plano, a projeção delas no plano será dois pontos. Portanto, falsa.



III. Vejamos o contra-exemplo:



Note que tomando-se os planos $\pi_1//\pi_2//\pi_3$ e as retas $r \in \pi_1, s \in \pi_2$ e $t \in \pi_3$, não paralelas entre elas, temos que a reta u paralela à r não pode ser concorrente simultaneamente à s e à t. Portanto, falsa.

Gabarito: "a".

8. (ITA/2018)

Um poliedro convexo tem faces triangulares e quadrangulares. Sabe-se que o número de arestas, o número de faces triangulares e o número de faces quadrangulares formam, nessa ordem, uma progressão aritmética de razão -5. Determine o número de vértices do poliedro.

Comentários

Pela fórmula de Euler, temos:

$$V + F = A + 2 \ (1)$$

Dado A, F_3 e F_4 estão, nessa ordem, em P.A. de razão -5, então:

$$F_3 = A - 5 \ (2)$$
$$F_4 = A - 10 \ (3)$$

É sabido também que:

$$2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$$

Em que: $F_i = 0, i \geq 5$

Daí,

$$2A = 3F_3 + 4F_4 \ (4)$$

Substituindo (2) e (3) em (4), temos:

$$2A = 3(A-5) + 4(A-10) \therefore 5A = 55 \therefore A = 11 \ (5)$$

Com isso,

$$F_3 = 6;$$
$$F_4 = 1;$$

$$F = 6 + 1 \therefore \boldsymbol{F = 7}\ (6)$$

Utilizando (5) e (6) em (1), então:

$$\boldsymbol{V = 6}$$

Gabarito: $V = 6$

9. (ITA/2018)

Considere a classificação: dois vértices de um paralelepípedo são não adjacentes quando não pertencem à mesma aresta. Um tetraedro é formado por vértices não adjacentes de um paralelepípedo de arestas 3 cm, 4 cm e 5 cm. Se o tetraedro tem suas arestas opostas de mesmo comprimento, então o volume do tetraedro é, em cm^3:

a) 10.

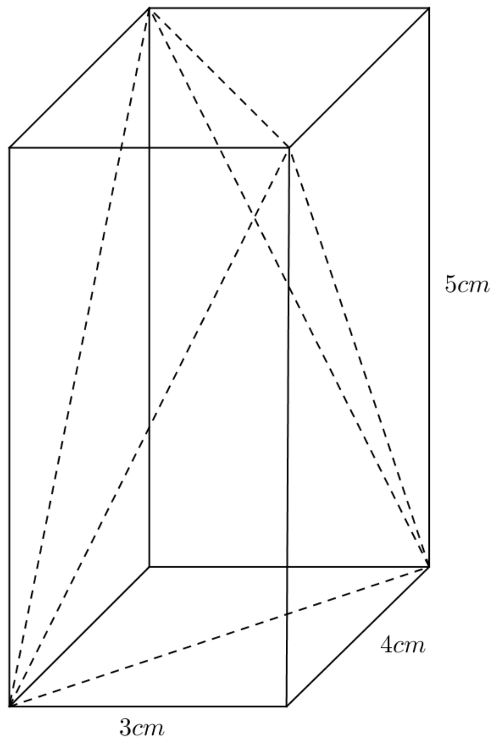
b) 12.

c) 15.

d) 20.

e) 30.

Comentários



O volume do tetraedro formado (acima representado) pode ser dado pela seguinte diferença:

$$V_{tetraedro} = V_{paralelepípedo} - V_{pirâmides}$$

Observe, na figura acima, que há 4 pirâmides idênticas "encaixadas" dentro do paralelepípedo. Logo,

$$V_{tetraedro} = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{3 \cdot 2} \therefore \boldsymbol{V_{tetraedro} = 20\ cm^3}$$

Gabarito: "d"

10. (ITA/2018)

Os triângulos equiláteros ABC e ABD têm lado comum $\overline{AB}$. Seja M o ponto médio de $\overline{AB}$ e N o ponto médio de $\overline{CD}$. Se MN = CN = 2 cm, então a altura relativa ao lado $\overline{CD}$ do triângulo ACD mede, em cm,

a) $\frac{\sqrt{60}}{3}$

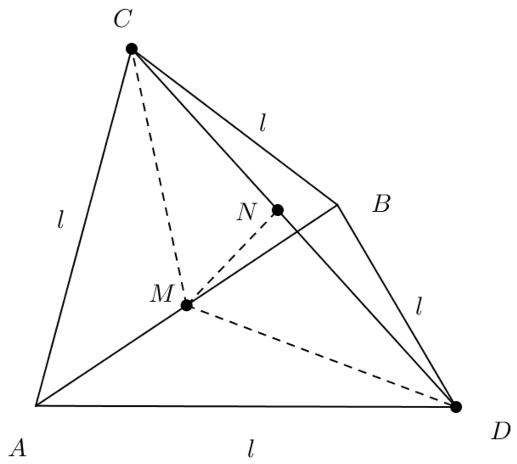
b) $\frac{\sqrt{50}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{40}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{30}}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Comentários



Sendo o ΔCMD isósceles por M, a mediana MN também é altura relativa ao vértice M, ou seja, por Pitágoras no ΔMNC, temos:

$$MC^2 = CN^2 + MN^2 \therefore MC = 2\sqrt{2}\ cm.$$

Mas MC é altura do triângulo equilátero.

Logo,

$$MC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot l \therefore l = \frac{4\sqrt{6}}{3}\ cm$$

Finalmente, no ΔANC retângulo por N, já que o segmento AN é altura e mediana do ΔACD, então:

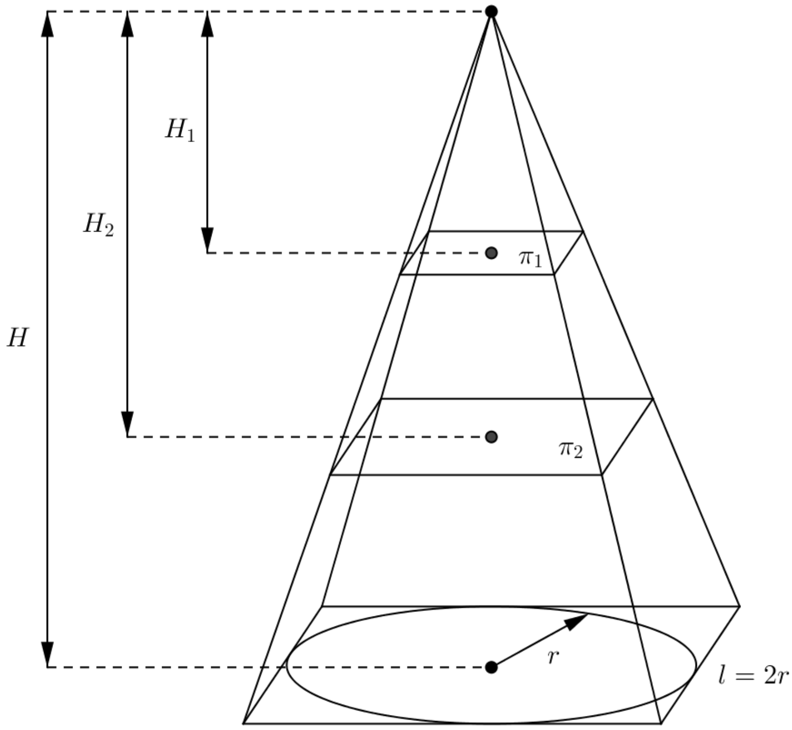
$$AN^2 = l^2 - CN^2 \therefore \boldsymbol{AN = \frac{\sqrt{60}}{3}\ cm}$$

Gabarito: "a"

11. (ITA/2018)

A aresta lateral de uma pirâmide reta de base quadrada mede 13 cm e a área do círculo inscrito na base mede $\frac{25\pi}{2} cm^2$. Dois planos, π_1 e π_2, paralelos à base, decompõem a pirâmide em três sólidos de mesmo volume. Determine a altura de cada um desses sólidos.

Comentários



Note que as três pirâmides cujas alturas são $H, H_1\ e\ H_2$ são semelhantes entre si. Com isso, sejam $k_1\ e\ k_2$ a razão de semelhança entre as pirâmides de altura H_1 e H e entre as de altura H_2 e H, respectivamente.

Logo,

$$H_1 = k_1 \cdot H \text{ e } l_1 = k_1 \cdot l \Rightarrow S_1 = {k_1}^2 \cdot S \Rightarrow V_1 = {k_1}^3 \cdot V\,;$$
$$H_2 = k_2 \cdot H \text{ e } l_2 = k_2 \cdot l \Rightarrow\ S_2 = {k_2}^2 \cdot S \Rightarrow V_2 = {k_2}^3 \cdot V\,;$$

Dado que $V_2 - V_1 = V_1 = V - V_2$, então:

$$ {k_2}^3 \cdot V - {k_1}^3 \cdot V = {k_1}^3 \cdot V = V - {k_2}^3 \cdot V \therefore \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

Por Pitágoras, temos:

$$H^2 + \left(\sqrt{2}r\right)^2 = 13^2 (\text{Como } \pi r^2 = \tfrac{25\pi}{2} \therefore H = 12\ cm). \text{ Daí,}$$
$$H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;$$
$$H_2 = \frac{12\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3}}\ cm;$$

Finalmente, as alturas dos sólidos formados serão dadas por:

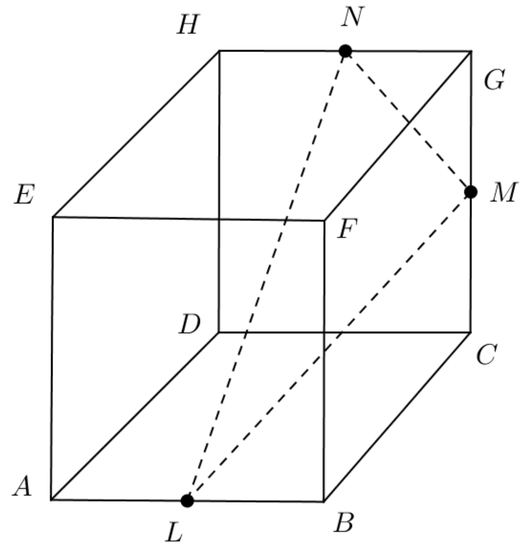
$$\boldsymbol{H^1_{sólido} = H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm}$$
$$\boldsymbol{H^2_{sólido} = H_2 - H_1 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) cm}$$
$$\boldsymbol{H^3_{sólido} = H - H_2 = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) cm}$$

Gabarito: $\boldsymbol{H^1_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}}\ cm;\ H^2_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right) cm;\ H^3_{sólido} = \frac{12}{\sqrt[3]{3}} \cdot \left(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}\right) cm}$

12. (ITA/2017)

Considere o cubo ABCDEFGH de aresta 2 tal que: ABCD é o quadrado da base inferior; EFGH, o quadrado da base superior e $\overline{AE}, \overline{BF}, \overline{CG}$ e $\overline{DH}$ são as arestas verticais. Sejam L, M e N os pontos médios das arestas $\overline{AB}$, $\overline{CG}$ e $\overline{GH}$, respectivamente. Determine a área do triângulo LMN.

Comentários



Por Pitágoras no ΔNGM, temos:

$$MN^2 = 1^2 + 1^2 \therefore MN = \sqrt{2}$$

Por Pitágoras, novamente no ΔMLC, temos:

$$ML^2 = LC^2 + 1^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 \therefore ML = \sqrt{6}$$

$$LN = BG = 2\sqrt{2}$$

Finalmente, note que $LN^2 = ML^2 + MN^2$, ou seja, o ΔLMN é retângulo por M.

Logo,

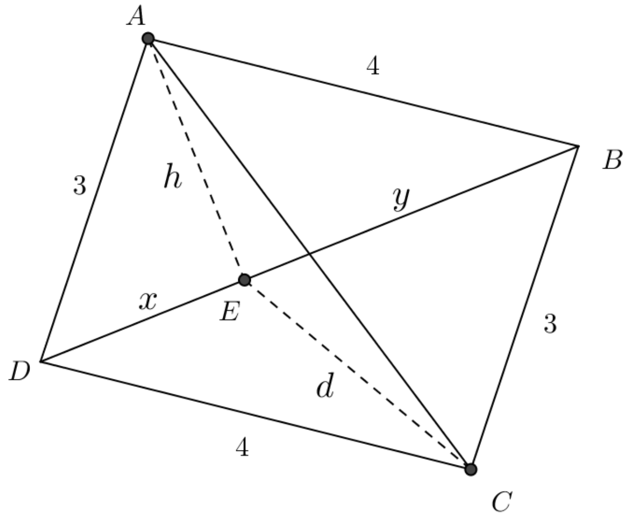
$$[LMN] = \frac{MN \cdot ML}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} \therefore [\boldsymbol{LMN}] = \sqrt{\mathbf{3}}$$

Gabarito: $[LMN] = \sqrt{3}$

13. (ITA/2015)

Na construção de um tetraedro, dobra-se uma folha retangular de papel, com lados de 3 cm e 4 cm, ao longo de uma de suas diagonais, de modo que essas duas partes da folha formem um ângulo reto e constituam duas faces do tetraedro. Numa segunda etapa, de maneira adequada, completa-se com outro papel as faces restantes para formar o tetraedro. Obtenha as medidas das arestas do tetraedro.

Comentários



As arestas do tetraedro são $AD = 3cm, BC = 3cm, AB = 4cm, CD = 4cm, BD$ e AC.
Por Pitágoras no ΔABD, temos:

$$BD^2 = 3^2 + 4^2 \therefore BD = 5cm$$

Por Pitágoras no ΔACE, temos:

$$AC^2 = h^2 + d^2$$

Sendo h a altura por A do ΔABD, então:

$$h = \frac{3 \cdot 4}{5} \therefore h = \frac{12}{5}cm$$

Por Pitágoras no ΔADE, temos:

$$x^2 = 3^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 \therefore x = \frac{9}{5}cm \Rightarrow y = \frac{16}{5}cm$$

Utilizando a relação de Stewart no ΔBCD para obter d, chega-se a:

$$3^2 \cdot \left(\frac{9}{5}\right) + 4^2 \cdot \left(\frac{16}{5}\right) = 5 \cdot \left(d^2 + \left(\frac{9}{5}\right) \cdot \left(\frac{16}{5}\right)\right) \therefore$$

$$d^2 = \frac{9^2 + 16^2 - 9 \cdot 16}{25} \therefore d = \frac{\sqrt{193}}{5}cm$$

Finalmente,

$$AC^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{193}}{5}\right)^2 \therefore \boldsymbol{AC = \frac{\sqrt{337}}{5}cm}$$

Gabarito: $AC = \frac{\sqrt{337}}{5}cm$

14. (ITA/2014)

Uma pirâmide de altura $h = 1\,cm$ e volume $V = 50\,cm^3$ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se $n-3$ diagonais que o decompõem em $n-2$ triângulos cujas áreas S_i, $i = 1, 2, \ldots, n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3 = \frac{3}{2}cm^2$ e $S_6 = 3\,cm^2$. Então n é igual a

a) 22

b) 24

c) 26

d) 28

e) 32

Comentários

A razão da P.A. e o termo inicial são dados por:

$$r=\frac{S_6-S_3}{3}=\frac{3-\frac{3}{2}}{3}\therefore r=\frac{1}{2}\ cm^2;$$

$$\boldsymbol{S_1=S_3-2r\therefore S_1=\frac{1}{2}\ cm^2;}$$

Com isso, a área total do polígono é dada por:

$$\boldsymbol{S_{total}=S_1+S_2+\cdots+S_{n-2}\therefore}$$

$$\boldsymbol{S_{total}=(S_1+S_{n-2})\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)\therefore S_{total}=\left(\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{(n-3)}{2}\right)\right)\cdot\left(\frac{n-2}{2}\right)\therefore}$$

$$\boldsymbol{S_{total}=(n-1)\cdot\left(\frac{n-2}{4}\right)}$$

Logo,

$$\boldsymbol{V_{pirâmide}=\frac{1}{3}\cdot(n-1)\cdot\left(\frac{n-2}{4}\right)\cdot 1}$$

Dado que $\boldsymbol{V_{pirâmide}=50\ cm^3}$, temos:

$$\boldsymbol{(n-2)\cdot(n-1)=12\cdot 50=24\cdot 25}$$

$$\boldsymbol{n=26}$$

Gabarito: "c"

---

15. (ITA/2013)

Seja ABCDEFGH um paralelepípedo de bases retangulares ABCD e EFGH, em que A, B, C e D são, respectivamente, as projeções ortogonais de E, F, G e H. As medidas das arestas distintas AB, AD e AE constituem uma progressão aritmética cuja soma é 12 cm. Sabe-se que o volume da pirâmide ABCF é igual a $10\ cm^3$. Calcule:

a) As medidas das arestas do paralelepípedo.

b) O volume e a área total da superfície do paralelepípedo.

Comentários

a) Dado que AB, AD e AE estão em P.A. designe $AB=AD-r$ e $AE=AD+r$, em que r é a razão da P.A.

Com isso,

$$(AD-r)+AD+(AD+r)=12\ cm\therefore AD=4\ cm$$

O volume da pirâmide $ABCF$ é dado por:

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{AB\cdot AD}{2}\right)\cdot AE\therefore(4-r)\cdot 4\cdot(4+r)=6\cdot V=6\cdot 10=60\therefore(16-r^2)\cdot 4=60\therefore$$

$$r=1\ cm\therefore AB=3\ cm \text{ e } AE=5\ cm$$

b) O volume do paralelepípedo é dado por:

$$V'=AB\cdot AD\cdot AE=6\cdot V=60\therefore V'=60\ cm^3$$

Logo, a área total do paralelepípedo é dada por:

$$S'=2\cdot(AB\cdot AD+AB\cdot AE+AD\cdot AE)=2\cdot(4\cdot 3+4\cdot 5+3\cdot 5)\therefore \boldsymbol{S'=94\ cm^2}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{AB=3\ cm}$ e $\boldsymbol{AE=5\ cm}$ b) $\boldsymbol{S'=94\ cm^2}$

---

16. (ITA/2013)

Das afirmações:

I. Duas retas coplanares são concorrentes;

II. Duas retas que não têm ponto em comum são reversas;

III. Dadas duas retas reversas, existem dois, e apenas dois, planos paralelos, cada um contendo uma das retas;

IV. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero reverso definem um paralelogramo,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) III.

b) I e III.

c) II e III.

d) III e IV.

e) I, II e IV.

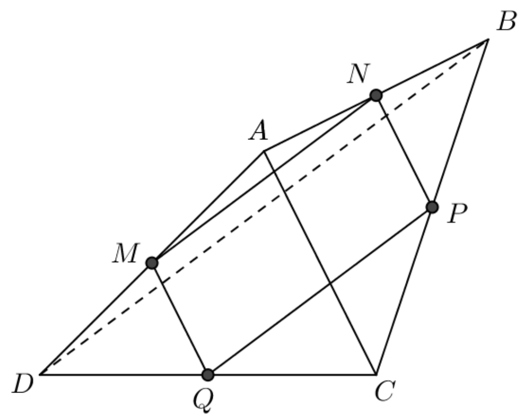
Comentários

I. **Falsa**, duas retas paralelas e coplanares não são concorrentes.

II. **Falsa**, na verdade, duas retas não coplanares são reversas, duas retas paralelas e coplanares não têm ponto em comum e não são reversas.

III. **Verdadeira,** pois existe só um plano passando por umas das duas retas que é paralelo à outra reta, ou seja, 2 planos no total, sendo cada reta pertencente a um deles.

IV. **Verdadeira**, seja a figura abaixo:



No quadrilátero $ABCD$ reverso, seus quatro vértices não pertencem a um mesmo plano, os lados NP e MQ são paralelos ao segmento AC, já que são bases médias para os ΔABC e ΔACD, respectivamente. Com isso: $NP \parallel MQ$. Analogamente, $MN \parallel QP$. Em outras palavras, o quadrilátero $ABCD$ é um paralelogramo.

Gabarito: "d"

17. (ITA/2013)

Um plano intercepta as arestas de um triedro trirretângulo de vértice V, determinando um triângulo ABC cujos lados medem, respectivamente, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$ e 5 cm. O volume, em cm^3, do sólido VABC é

a) 2

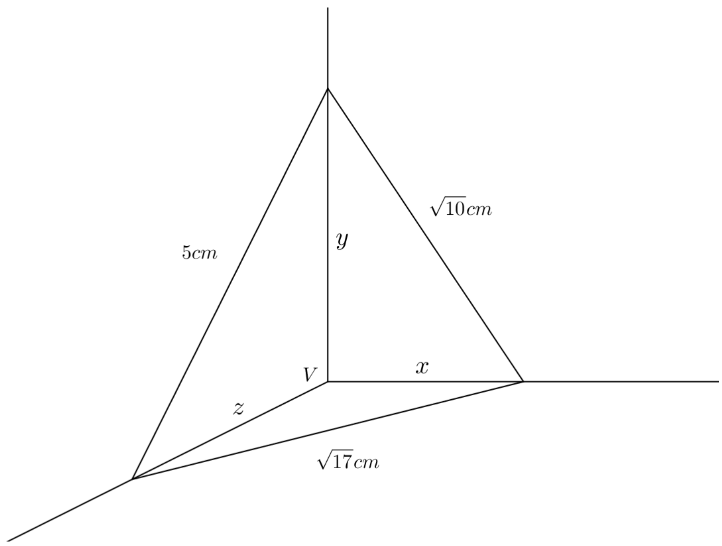
b) 4

c) $\sqrt{17}$

d) 6

e) $5\sqrt{10}$

Comentários



Por Pitágoras, nas três faces contendo o vértice V, temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10(I) \\ x^2 + z^2 = 17(II) \\ y^2 + z^2 = 25(III) \end{cases}$$

Fazendo $(II) - (I)$ e somando esse resultado à (III), chega-se a:

$$2z^2 = 32 \therefore z = 4\ cm \Rightarrow x = 1\ cm \text{ e } y = 3\ cm.$$

Logo,

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 1}{2} \therefore \boldsymbol{V = 2\ cm^3}$$

Gabarito: "a"

18. (ITA/2011)

Considere as afirmações:

I. Existe um triedro cujas 3 faces tem a mesma medida $\alpha = 120°$.

II. Existe um ângulo poliédrico convexo cujas faces medem, respectivamente, $30°, 45°, 50°, 50°$ e $170°$.

III. Um poliedro convexo que tem 3 faces triangulares, 1 face quadrangular, 1 face pentagonal e 2 faces hexagonais tem 9 vértices.

IV. A soma das medidas de todas as faces de um poliedro convexo com 10 vértices é $2880°$.

Destas, é(são) correta(s) apenas

a) II.

b) IV.

c) II e IV.

d) I, II e IV.

e) II, III e IV.

Comentários

I. **Falsa**, pois um triedro deve ter $\alpha < 360°$.

II. **Verdadeira**, pois $30° + 45° + 50° + 50° + 170° = 345° < 360°$.

III. **Falsa**, resolução segue abaixo:

$$V + F = A + 2$$

Onde:

$2A = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 2 \therefore A = 15$ e $F = 3 + 1 + 1 + 2 \therefore F = 7 \Rightarrow \boldsymbol{V = 10}$

IV. **Verdadeira**, um poliedro convexo de 10 vértices é o da afirmação III., ou seja, basta calcularmos a soma das medidas dos ângulos de todas as faces para esse poliedro.

Logo,

$$S = 3 \cdot 180° + 1 \cdot 360° + 1 \cdot 540° + 2 \cdot 720° \therefore \boldsymbol{S = 2880°}$$

Gabarito: “c”

---

19. (ITA/2010)

Sejam A, B, C e D os vértices de um tetraedro regular cujas arestas medem 1 cm. Se M é o ponto médio do segmento $\overline{AB}$ e N é o ponto médio do segmento $\overline{CD}$, então a área do triângulo MND, em cm^2, é igual a

a) $\sqrt{2}/6$

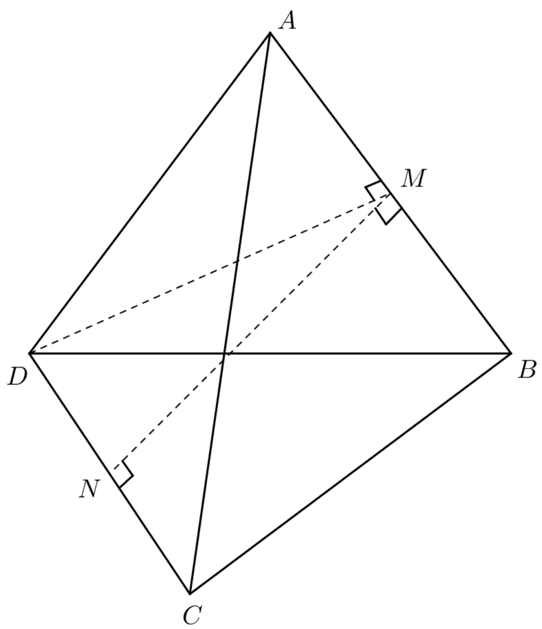
b) $\sqrt{2}/8$

c) $\sqrt{3}/6$

d) $\sqrt{3}/8$

e) $\sqrt{3}/9$

Comentários



Como o segmento NM é mediana para o triângulo isósceles ΔABN, ele também o será altura.

Por Pitágoras no ΔAMN, temos:

$$AN^2 = NM^2 + AM^2 \therefore NM^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore NM = \frac{1}{\sqrt{2}}\,cm$$

O segmento NM é perpendicular ao segmento ND, implicando o ΔMND ser retângulo por N. Logo,

$$[MND] = \frac{1}{2} \cdot ND \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \therefore [\boldsymbol{MND}] = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{8}}\ \boldsymbol{cm^2}$$

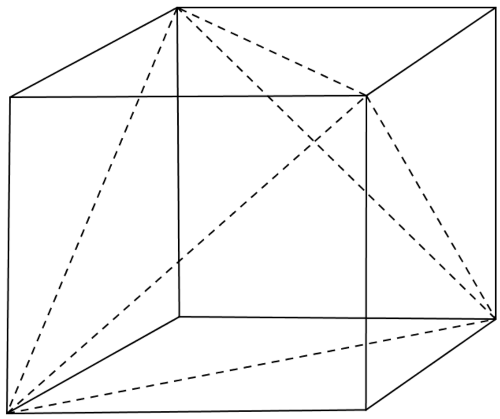
Gabarito: "b"

20. (ITA/2007)

Os quatro vértices de um tetraedro regular, de volume $8/3\text{cm}^3$, encontram-se nos vértices de um cubo. Cada vértice do cubo é centro de uma esfera de 1 cm de raio.

Calcule o volume da parte do cubo exterior às esferas.

Comentários



O tetraedro está dentro do cubo como de acordo à figura acima, sendo assim:

$V_{tetraedro} = V_{cubo} \cdot \left(1 - 4 \cdot \frac{1}{6}\right) \therefore V_{tetraedro} = \frac{V_{cubo}}{3}$, pois cada volume de pirâmide formada pela região vazia dentro do cubo corresponde a $\frac{1}{6}$ do volume total do cubo, sendo no total 4 dessas pirâmides.

Logo,

$$V_{cubo} = 3 \cdot \frac{8}{3} = 8\ cm^3$$

Quanto às esferas com centro nos vértices do cubo, o volume de cada esfera que fica interno ao cubo é de $\frac{1}{8}$ do volume da esfera, sendo 8 dessas esferas no total.

Com isso,

$$V_{cubo}^{exterior\ \text{às}\ esferas} = V_{cubo} - 8 \cdot \left(\frac{1}{8} \cdot V_{esfera}\right) \therefore$$

$$V_{cubo}^{exterior\ \text{às}\ esferas} = 8 - \frac{4\pi 1^3}{3} \therefore$$

$$\boldsymbol{V_{cubo}^{exterior\ \text{às}\ esferas}} = \left(\mathbf{8} - \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)\ \boldsymbol{cm^3}$$

Gabarito: $\left(\mathbf{8} - \frac{\mathbf{4}\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{3}}\right)\ \boldsymbol{cm^3}$

21. (ITA/2007)

Considere uma pirâmide regular de base hexagonal, cujo apótema da base mede $\sqrt{3}$ cm. Secciona-se a pirâmide por um plano paralelo à base, obtendo-se um tronco de volume igual a 1 cm^3 e uma nova pirâmide. Dado que a razão entre as alturas das pirâmides é $1/\sqrt{2}$, a altura do tronco, em centímetros, é igual a

a) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

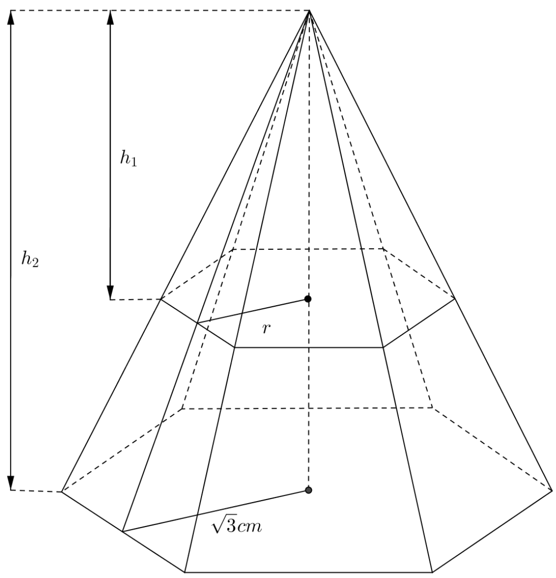
b) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{3}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}$

d) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{6}$

e) $\frac{2\sqrt{6}-\sqrt{2}}{22}$

Comentários



As duas pirâmides acima representadas são semelhantes, então:

$$\frac{\sqrt{3}}{r}=\frac{h_2}{h_1}$$

Mas é dado que $\frac{h_2}{h_1}=\sqrt{2}$.

Com isso,

$$r=\frac{\sqrt{6}}{2}\ cm$$

Sabendo que:

$$V_{tronco}=\frac{h}{3}\cdot\left(S_{base}^{inferior}+S_{base}^{superior}+\sqrt{S_{base}^{inferior}S_{base}^{superior}}\right)$$

Onde:

$$S_{base}^{inferior}=S_{hexágono\ a=\sqrt{3}} \text{ e } S_{base}^{superior}=S_{hexágono\ a=\sqrt{6}/_2}$$

Calculando o V_{tronco}, então:

$$V_{tronco}=1\ cm^3=\frac{h}{3}\cdot\left(2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\sqrt{2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\cdot 2\sqrt{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2}\right)\therefore$$

Após certo algebrismo, obtém-se que:

$$\boldsymbol{h=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{6}}{21}\ cm}$$

Gabarito: "c"

22. (ITA/2005)

Considere um prisma regular em que a soma dos ângulos internos de todas as faces é $7200°$. O número de vértices deste prisma é igual a

a) 11.

b) 32.

c) 10.

d) 20.

e) 22.

Comentários

Como as faces de um prisma regular são retângulos, a soma dos ângulos internos dos retângulos da face é $360° \cdot n$, em que n é o número de arestas do polígono da base.

Com isso,

$$7200° = 360° \cdot n + 2 \cdot 180° \cdot (n-2) \therefore \boldsymbol{n = 11}$$

Gabarito: "a"

23. (ITA/2005)

Em relação a um sistema de eixos cartesiano ortogonal no plano, três vértices de um tetraedro regular são dados por $A = (0,0), B = (2,2)$ e $C = \left(1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}\right)$. O volume do tetraedro é

a) $8/3$.

b) 3.

c) $3\sqrt{3}/2$.

d) $5\sqrt{3}/2$.

e) 8.

Comentários

A partir dos valores de A, B e C acima fornecidos, sabe-se que a aresta do tetraedro regular é de $l = 2\sqrt{2}$. Sabendo que o volume de um tetraedro regular em função da aresta é dado por $V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot l^2$, chega-se a:

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot \left(2\sqrt{2}\right)^3 \therefore \boldsymbol{V = \frac{8}{3}}$$

Gabarito: "a"

Questões IME

24. (IME/2020)

Um triângulo equilátero é projetado ortogonalmente em um plano, gerando um triângulo isósceles, cujo ângulo desigual mede $30°$. O cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção é:

a) $2\sqrt{3} - 3$

b) $4 - 2\sqrt{3}$

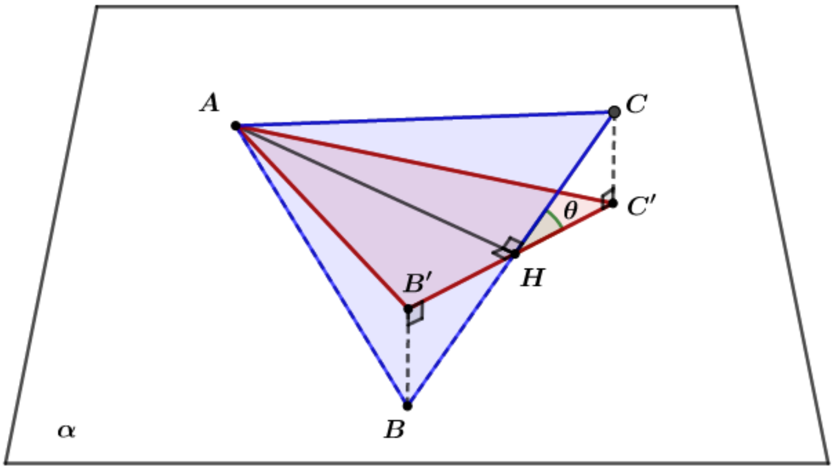
c) $2 - \sqrt{3}$

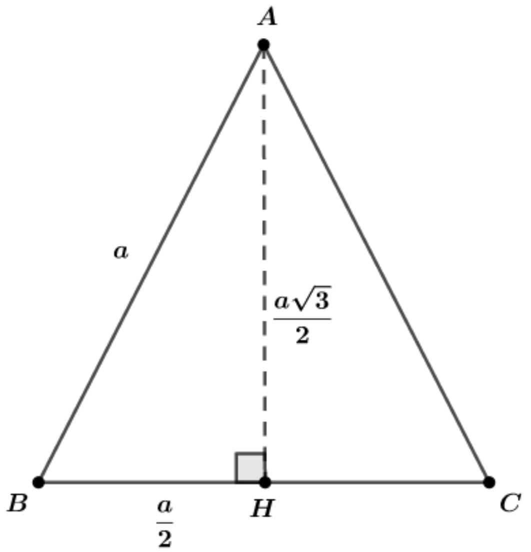
d) $1 - \sqrt{3}$

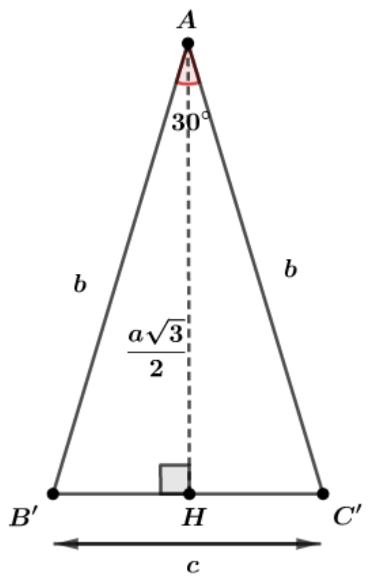
e) $\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$

Comentários

Muita atenção nessa questão! Ao ler o enunciado, pensaríamos que para gerar um triângulo isósceles através da projeção ortogonal de um triângulo equilátero, deveríamos ter um lado do triângulo equilátero paralelo ao plano de projeção. Mas a questão diz que o ângulo desigual do triângulo isósceles mede $\mathbf{30}°$, ou seja, esse ângulo é menor que o ângulo do vértice correspondente do triângulo que o gerou. Desse modo, para a projeção ortogonal desse triângulo equilátero ser um triângulo isósceles que satisfaz as condições do enunciado, a altura do triângulo equilátero deve ser paralela ao plano de projeção. Assim, do enunciado, podemos desenhar as seguintes figuras:







ABC é o triângulo equilátero e $AB'C'$ é sua projeção ortogonal ao plano α. Note que as alturas desses triângulos são congruentes. Aplicando a lei dos cossenos no $\Delta AB'C'$, temos:

$$c^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cos 30° = 2b^2 - b^2\sqrt{3} = b^2\left(2 - \sqrt{3}\right)$$

$$\Rightarrow b^2 = \frac{c^2}{2 - \sqrt{3}} = c^2\left(2 + \sqrt{3}\right)$$

$$\therefore \boxed{b = c\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $AB'H$:

$$b^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(c\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2 - \frac{c^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$$

$$\frac{c^2(7+4\sqrt{3})}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow c^2(2+\sqrt{3})^2 = 3a^2 \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{(2+\sqrt{3})^2}$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \sqrt{3}(2-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}-3$$

A questão pede o cosseno do ângulo do plano do triângulo equilátero com o plano de projeção. Perceba que esse valor é a razão $\frac{B'C'}{BC}$, logo:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{c}{a} = 2\sqrt{3}-3}$$

Gabarito: "a".

---

25. (IME/2020)

Um determinado material radioativo, com volume inicial Q_0, é manipulado numa usina nuclear. A cada dia o resíduo impuro da substância é descartado, através de uma ligação por um pequeno orifício, num invólucro lacrado em formato de paralelepípedo retângulo. No primeiro dia, a quantidade D_1 descartada corresponde a $1/3$ do volume inicial do material e, de um modo geral, a quantidade D_n descartada no n-ésimo dia é dada pela relação:

$$D_n = \frac{1}{3}D_{n-1}, \text{para } n \geq 2.$$

Determine as dimensões do invólucro (altura, largura e profundidade) onde se armazena o material descartado de modo que o custo de fabricação seja mínimo (isto é, a superfície lateral tenha área mínima) e tenha capacidade prevista de armazenamento por tempo indeterminado.

Comentários

Note que pela relação dada, temos que a quantidade descartada é uma progressão geométrica decrescente de razão $q = 1/3$ cujo primeiro termo é $D_1 = Q_0/3$.

$$\left(\frac{Q_0}{3}, \frac{Q_0}{3^2}, \dots, \frac{Q_0}{3^n}, \dots\right) P.G.$$

Aplicando a fórmula da soma para a P.G. infinita temos que o volume total descartado é:

$$V = D_1 + D_2 + D_3 + \cdots = \frac{D_1}{1-q} = \frac{\left(\frac{Q_0}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)} \therefore V = \frac{Q_0}{2}$$

Sejam a, b, c as dimensões do invólucro que armazenarão o volume descartado. Para guardar todo o lixo radioativo, devemos ter:

$$V_{invólucro} = abc = \frac{Q_0}{2}$$

Como queremos que o custo de fabricação seja mínimo, a área da superfície lateral do invólucro deve ser mínima. A área da superfície lateral é dada por:

$$S_{superfície} = 2(ab + ac + bc)$$

Para minimizar esse valor, basta encontrar o mínimo da expressão $ab + ac + bc$. Podemos usar a desigualdade das médias $MA \geq MG$:

$$\frac{ab + ac + bc}{3} \geq \sqrt[3]{ab \cdot ac \cdot bc}$$
$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2}$$

Substituindo abc pelo volume descartado:

$$ab + ac + bc \geq 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

O mínimo valor ocorre quando $MA = MG$, logo:

$$ab + ac + bc = 3\sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

A desigualdade das médias ocorre se, e somente se, os termos envolvidos são iguais, logo:

$$ab = ac = bc = \sqrt[3]{\left(\frac{Q_0}{2}\right)^2}$$

Dessa forma, temos $a = b = c$, ou seja, as dimensões do invólucro pedido são:

$$\boxed{a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a = b = c = \sqrt[3]{\frac{Q_0}{2}}}$

---

26. (IME/2019)

Considere as afirmações abaixo:

I) se três pontos são colineares, então eles são coplanares;

II) se uma reta tem um ponto sobre um plano, então ela está contida nesse plano;

III) se quatro pontos são não coplanares, então eles determinam 6 (seis) planos;

IV) duas retas não paralelas determinam um plano;

V) se dois planos distintos têm um ponto em comum, então a sua interseção é uma reta.

Entre essas afirmações:

a apenas uma é verdadeira;

b) apenas duas são verdadeiras;

c) apenas três são verdadeiras;

d) apenas quatro são verdadeiras;

e) todas são verdadeiras.

Comentários

I) Verdadeiro.

Como os três pontos são colineares, eles estão numa mesma reta. Toda reta está contida em um plano.

II) Falso.

A reta pode ser secante ao plano.

III) Falso.

Três pontos determinam um plano. Sendo os quatro pontos não coplanares, podemos calcular o número de planos que podemos formar com esses pontos usando a combinação simples:

$$C_{4,3} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = 4$$

IV) Falso.

Podemos ter retas reversas e, nesse caso, não é possível determinar um plano que contenha ambas.

V) Verdadeiro.

Sendo os dois planos distintos, eles não são coincidentes. Como eles possuem um ponto em comum, eles também não podem ser paralelos. Logo, a interseção desses planos forma uma reta.

Gabarito: "b".

27. (IME/2019)

Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC. A área do ΔABC é igual à área do ΔACD, e o ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\hat{D}A$, onde M é ponto médio de BC. Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2, sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a $30°$.

a) $\left(2 - \sqrt{3}\right)$

b) $\left(2 + \sqrt{3}\right)$

c) $4\left(2 - \sqrt{3}\right)$

d) $4\left(2 + \sqrt{3}\right)$

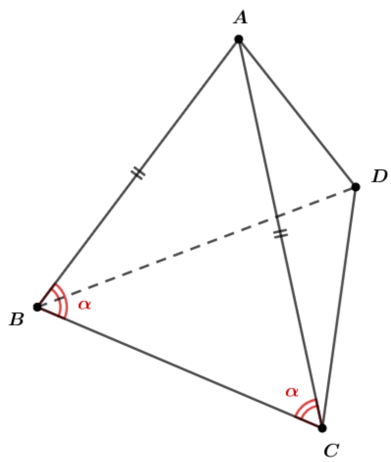
e) 4

Comentários

O segredo para resolver esse tipo de problema é saber interpretar as informações do enunciado.

Vamos por partes.

"Em um tetraedro $ABCD$, os ângulos $A\hat{B}C$ e $A\hat{C}B$ são idênticos e a aresta AD é ortogonal à BC." Nessa informação, como $A\hat{B}C = A\hat{C}B$, podemos afirmar que a face ABC é um triângulo isósceles com $AB = AC$. Sendo a aresta AD ortogonal à BC, temos que AD é reversa e forma um ângulo reto com BC.



"A área do ΔABC é igual à área do ΔACD"

Aqui, temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{ACD}\ (I)}$$

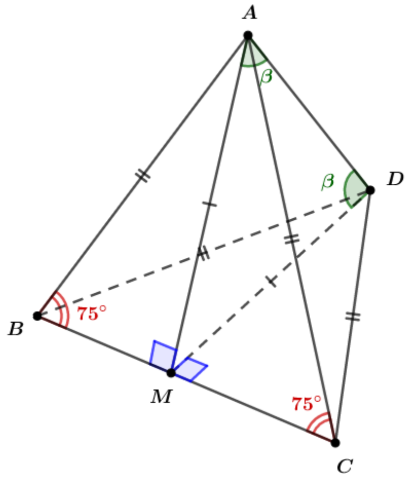
Vamos guardar essa informação.

"...ângulo $M\hat{A}D$ é igual ao ângulo $M\widehat{D}A$, onde M é ponto médio de BC."

$M\hat{A}D = M\widehat{D}A$ implica que ΔAMD é isósceles com $MA = MD$.

Como $AB = AC, MA = MD$ e AD é ortogonal a BC, temos $BD = CD$. Logo, ΔBCD é isósceles. Sendo M o ponto médio do segmento BC, e sendo ΔABC e ΔBCD isósceles, temos que MA e MD são perpendiculares a BC.

Ainda, $MD \perp BC$ e $MA = MD$ implica que $AB = AC = BD = CD$. Logo, $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$.



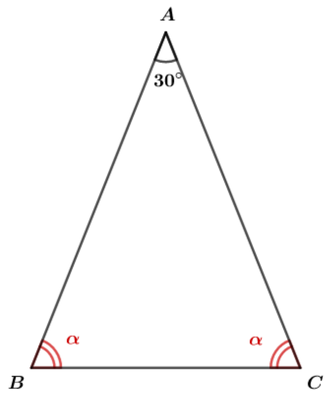
"Calcule a área total do tetraedro $ABCD$, em cm^2..."

Queremos saber o valor da área total do tetraedro, então, devemos calcular a soma da área das quatro faces dessa figura:

$$\boxed{S_T = S_{ABC} + S_{ACD} + S_{ABD} + S_{BCD}}$$

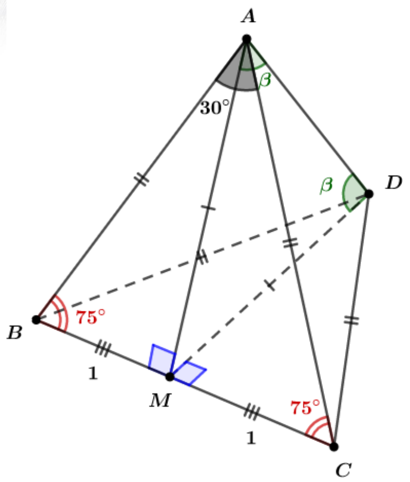
"...sabendo que $BC = 2cm$, e que o ângulo $B\hat{A}C$ é igual a 30°."

Se $BC = 2cm$, temos $BM = MC = 1cm$. Como $B\hat{A}C = 30°$, podemos calcular o valor de α do ΔABC:



$$30° + \alpha + \alpha = 180° \Rightarrow 2\alpha = 150° \Rightarrow \alpha = 75°$$

Assim, temos a seguinte figura:



Dado que temos o valor da aresta BC e os ângulos internos do ΔABC, podemos calcular a medida de AB, AC e AM. Usando as relações trigonométricas, temos:

$$tg(75°) = \frac{AM}{1} \Rightarrow AM = tg(45° + 35°) = \frac{tg(45°) + tg(30°)}{1 - tg(45°)tg(30°)} = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$AM = MD = 2 + \sqrt{3}\,cm$$

Podemos calcular o valor da área do ΔABC:

$$S_{ABC} = \frac{BC \cdot AM}{2} = \frac{2 \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right)}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

Da relação (I), temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{ACD} = 2 + \sqrt{3}\,cm^2}$$

Como $\Delta ABC \equiv \Delta BCD$, temos:

$$\boxed{S_{ABC} = S_{BCD}}$$

Os triângulos ABD e ACD são isósceles com a mesma base AD, portanto:

$$\boxed{S_{ABD} = S_{ACD}}$$

Desse modo, podemos concluir:

$$S_{ABC} = S_{ACD} = S_{ABD} = S_{BCD} = 2 + \sqrt{3}\,cm^2$$

Assim, a área total é:

$$\boxed{S_T = 4\left(2 + \sqrt{3}\right)cm^2}$$

Gabarito: “d”.

---

28. (IME/2018)

Um prisma retangular reto possui três arestas que formam uma progressão geométrica de razão 2. Sua área total é de 28 cm^2. Calcule o valor da diagonal do referido prisma.

a) $\sqrt{17}$ cm

b) $\sqrt{19}$ cm

c) $\sqrt{21}$ cm

d) $2\sqrt{7}$ cm

e) $\sqrt{29}$ cm

Comentários

Sejam x, y e z as arestas em P.G. de razão 2 do prisma. Sendo assim, é possível escrever o seguinte:

$$x = \frac{y}{2};$$
$$z = 2y;$$

Com isso,

$$S_{total} = 2(xy + xz + yz) = 2\left(y \cdot \frac{y}{2} + \frac{y}{2} \cdot 2y + y \cdot 2y\right) = 2y^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + 2\right) = 7y^2$$

Dado que $S_{total} = 28\ cm^2$, então:

$$7y^2 = 28 \therefore y = 2\ cm$$

Com isso,

$$x = 1\ cm;$$
$$z = 4\ cm;$$

Finalmente,

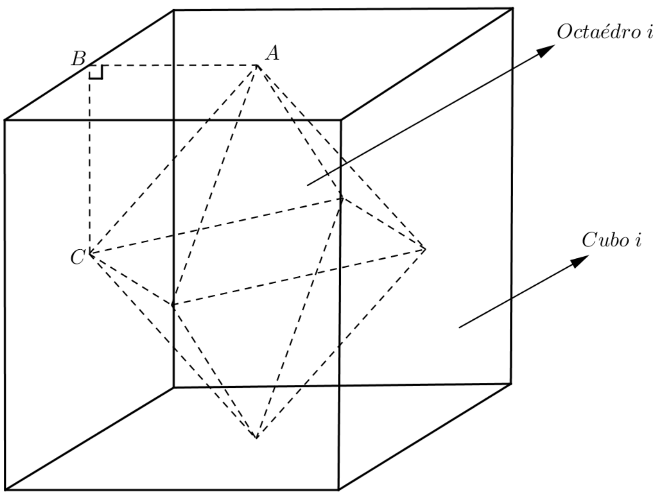
$$D = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \therefore D = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} \therefore \boldsymbol{D = \sqrt{21}\ cm}$$

Gabarito: "c"

29. (IME/2018)

Seja um cubo regular, onde os centros de suas faces são vértices de um octaedro. Por sua vez, os centros das faces deste octaedro formado são vértices de outro cubo. Obtendo consecutivamente octaedros e cubos infinitamente, determine a razão da soma do volume de todos os poliedros inscritos pelo volume do cubo inicial.

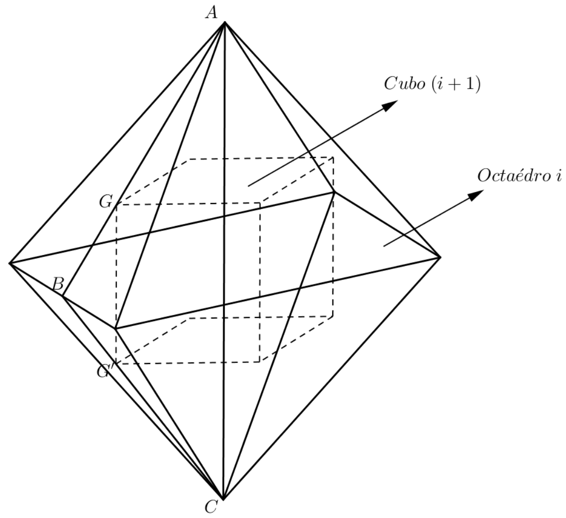
Comentários



Defina a aresta do cubo i como sendo a_i, com $a_i < a_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ e a aresta do octaédro i como sendo a'_i, com $a'_i < a'_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$.

Na figura acima, por Pitágoras no ΔABC, temos:

$$\left(\frac{a_i}{2}\right)^2 + \left(\frac{a_i}{2}\right)^2 = {a'_i}^2 \therefore a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{2}}\ (I)$$



Agora, na figura acima, note que $\Delta ABC \sim \Delta GBG'$.
Com isso,

$$\frac{GG'}{AC} = \frac{GB}{AB}$$

Como G e G' são os baricentros das suas respectivas faces triangulares, chega-se a:

$$GB = \frac{AB}{3}$$

Daí,

$$GG' = \frac{AC}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{2 \cdot \left(\frac{a'_i}{\sqrt{2}}\right)}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{\sqrt{2}a'_1}{3}$$

Mas por (I) $a'_i = \frac{a_i}{\sqrt{2}}$, temos:

$$a_{i+1} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{a_i}{\sqrt{2}}}{3} \therefore a_{i+1} = \frac{a_i}{3} \therefore a_i = \left(\frac{a_1}{3}\right)^{i-1} \quad (II)$$

Daí,

$$a'_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{3}\right)^{i-1} \quad (III)$$

Sendo V_i e V'_i os volumes do cubo e do octaédro i, respectivamente, temos:

$$V_i = a_i^3$$

$$V'_i = \frac{\sqrt{2}a'^3_i}{3} \therefore V'_i = \frac{a_i^3}{6}$$

Assim, $\sum_{i=2}^{\infty} V_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} V'_i$ correspondem à soma dos volumes de todos os cubos inscritos ao cubo maior e à soma de todos os octaedros inscritos ao cubo maior.

Agora, por (II) e (III), chega-se a:

$$\sum_{i=2}^{\infty} V_i = V_2 + V_3 + \cdots = a_2{}^3 + a_3{}^3 + \cdots = \left(\frac{a_1}{3}\right)^3 + \left(\frac{a_1}{3^2}\right)^3 + \cdots = a_1{}^3 \cdot \left\{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right] + \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^2 + \cdots\right\}$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} V_i = a_1{}^3 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^3}\right] \therefore \sum_{i=2}^{\infty} V_i = \frac{a_1{}^3}{26} \ (IV)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} V'_i = V'_1 + V'_2 + \cdots = \frac{a_1{}^3}{6} + \frac{a_2{}^3}{6} + \cdots = \frac{1}{6} \cdot (a_1{}^3 + a_2{}^3 + \cdots)$$

Note que no cálculo de (IV), foi obtido o valor da soma $({a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots)$. Como $({a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots) = {a_1}^3 + ({a_2}^3 + {a_3}^3 + \cdots) \therefore ({a_1}^3 + {a_2}^3 + \cdots) = {a_1}^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{26}\right) = \frac{27{a_1}^3}{26}$.

Logo,

$$\sum_{i=1}^{\infty} V'_i = \frac{1}{6} \cdot \frac{27{a_1}^3}{26} \therefore \sum_{i=1}^{\infty} V'_i = \frac{9{a_1}^3}{52}\ (V)$$

Finalmente, por (IV) e (V), chega-se a:

$$\frac{\sum_{i=2}^{\infty} \boldsymbol{V_i} + \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{V'_i}}{\boldsymbol{V_1}} = \frac{\frac{\boldsymbol{a_1}^3}{\boldsymbol{26}} + \frac{\boldsymbol{9a_1}^3}{\boldsymbol{52}}}{\boldsymbol{a_1}^3} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{26}} + \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{52}} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{52}}$$

Gabarito: $\frac{11}{52}$

30. (IME/2017)

Um tronco de pirâmide regular possui 12 vértices. A soma dos perímetros das bases é 36 cm, a soma das áreas das bases é $30\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^2$ e sua altura mede 3 cm. Calcule o volume do tronco de pirâmide.

a) $50\ \mathrm{cm}^3$

b) $42\sqrt{3}/3\ \mathrm{cm}^3$

c) $43\sqrt{3}/2\ \mathrm{cm}^3$

d) $43\sqrt{2}\ \mathrm{cm}^3$

e) $42\sqrt{3}\ \mathrm{cm}^3$

Comentários

Sabendo que as bases desse tronco possuem o mesmo número de vértices, é possível inferir que se trata de um tronco de pirâmide de base hexagonal, como segue abaixo:

$$N_{vértices\ tronco} = 2N_{vértices\ base} = 12 \therefore N_{vértices\ base} = 6$$

Defina como sendo l_1 e l_2 as medidas das arestas hexagonais da base inferior e superior do tronco, respectivamente.

Dado que $S_{base}^{inferior} + S_{base}^{superior} = 30\sqrt{3}\ cm^2$ e $(2p)_{base}^{inferior} + (2p)_{base}^{superior} = 36\ cm$, temos:

$$\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot {l_1}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot {l_2}^2 = 30\sqrt{3} \therefore {l_1}^2 + {l_2}^2 = 20\ cm^2 (I)$$

$$6l_1 + 6l_2 = 36 \therefore l_1 + l_2 = 6\ cm (II)$$

Elevando (II) ao quadrado e substituíndo (I) nesse resultado, então:

$$(l_1 + l_2)^2 = {l_1}^2 + {l_2}^2 + 2l_1 l_2 = 6^2 = 36 \therefore 20 + 2l_1 l_2 = 36 \therefore l_1 l_2 = 8\ cm^2 (III)$$

Finalmente, calculemos o volume do tronco de pirâmide hexagonal:

$$V = \frac{3}{3} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot {l_1}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot {l_2}^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot l_1 l_2\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \left[\left({l_1}^2 + {l_2}^2\right) + l_1 l_2\right]$$

Utilizando as equações (I) e (III), chega-se a:

$$V = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot [(20) + 8] = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 28 \therefore \boldsymbol{V = 42\sqrt{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "e"

31. (IME/2016)

Sejam dois quadrados de lado a situados em planos distintos que são paralelos entre si e situados a uma distância d, um do outro. A reta que liga os centros dos quadrados é perpendicular a esses planos. Cada diagonal de um quadrado é paralela a dois lados do outro quadrado. Liga-se cada vértice de cada quadrado aos dois vértices mais próximos do outro quadrado. Obtêm-se, assim, triângulos que, conjuntamente com os quadrados, formam um sólido S. Qual a distância entre estes planos distintos em função de a, de modo que os triângulos descritos acima sejam equiláteros?

a) $\frac{a}{2}$

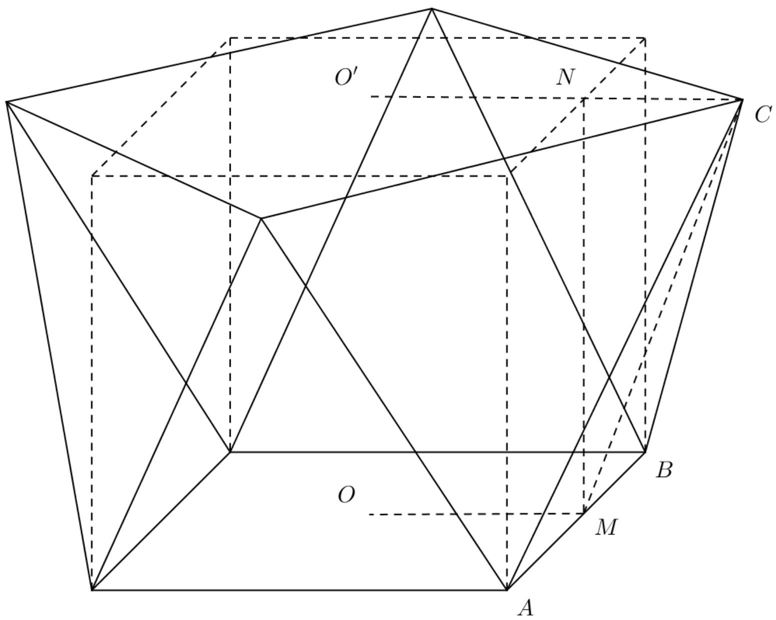
b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) $\frac{a\sqrt{10}}{8}$

d) $\frac{a\sqrt[4]{8}}{2}$

e) $\frac{a(4-3\sqrt{2})}{2}$

Comentários



Dado que os planos dos dois quadrados de lado a são paralelos, temos:

$$NC = O'C - O'N = O'C - OM = \frac{\sqrt{2}a}{2} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)$$

Por Pitágoras no ΔMNC, chega-se a:

$$MC^2 = MN^2 + NC^2 \therefore MN = \sqrt{MC^2 - NC^2}$$

Como o ΔABC é equilátero de lado a, o segmento MC é a altura desse triângulo.
Assim,

$$MC = \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

Finalmente,

$$MN = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}a}{2}\right)^2 - \left[\frac{a}{2}\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2} \therefore MN = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2\cdot\left(3-2\sqrt{2}\right)}{4}} \therefore MN = \sqrt{a^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} \therefore$$

$$\boldsymbol{MN = \frac{a}{\sqrt[4]{2}} = \frac{a\sqrt[4]{8}}{2}}$$

Gabarito: "d"

32. (IME/2015)

Em um prisma oblíquo ABCDEFA'B'C'D'E'F', cuja base ABCDEF é um hexágono regular de lado a, a face lateral EFF'E' está inclinada 45° em relação à base, e a projeção ortogonal da aresta F'E' sobre a base ABCDEF coincide com a aresta BC. O volume do prisma é:

a) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

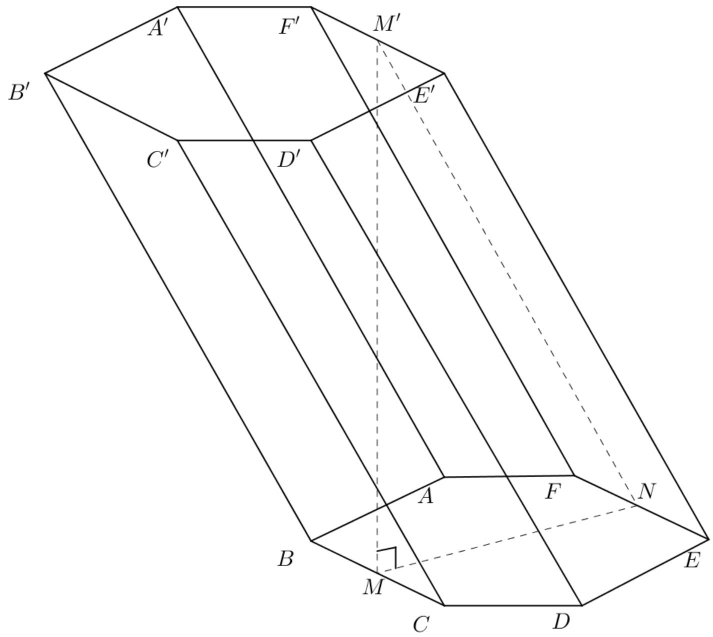
b) $\frac{9}{4}a^3$

c) $\frac{5\sqrt{3}}{3}a^3$

d) $\frac{9}{2}a^3$

e) $\frac{5}{2}a^3$

Comentários



Sejam M e M' os pontos médios dos segmentos CB e $E'F'$, respectivamente, onde M é a projeção de M' sobre a base do prisma e N o ponto médio do segmento EF.

Dado que o ângulo entre o plano $EFF'E'$ e a base do prisma é 45°, então:

$$\angle MNM' = 45°$$

No $\Delta MNM'$, temos:

$$\tan \angle MNM' = \tan 45° = \frac{MM'}{MN} \therefore MM' = H = MN$$

Mas pela figura, note que:

$$MN = CE = 2 \cdot (a \cos 30°) = \sqrt{3}a$$

Daí,

$$H = \sqrt{3}a$$

Finalmente,

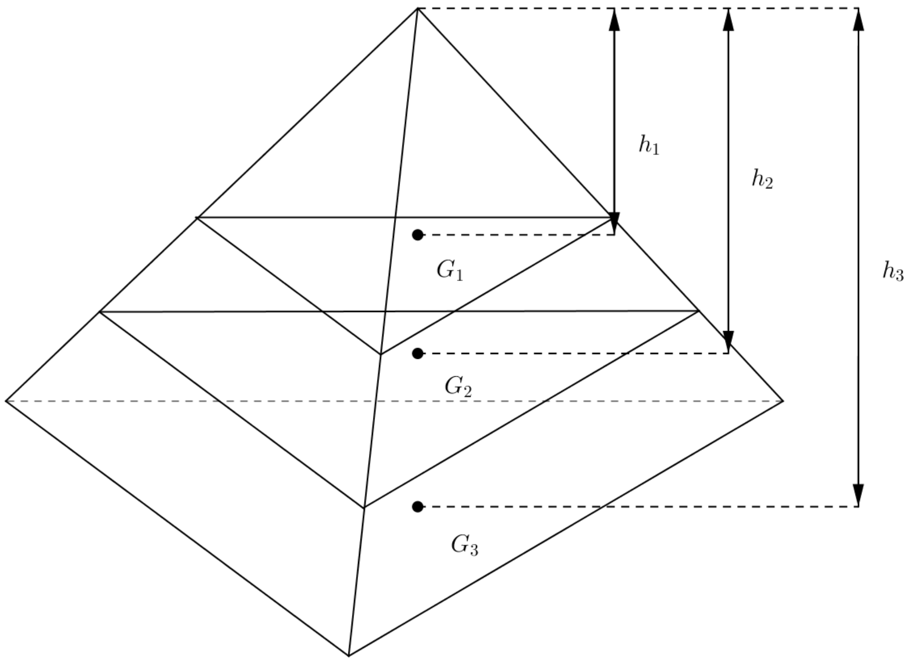
$$V = S_{base\ hexagonal} \cdot H \therefore V = \left(\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{3}a\right) \therefore \boldsymbol{V = \frac{9a^3}{2}}$$

Gabarito: "d"

33. (IME/2015)

Um tetraedro regular, com arestas de comprimento igual a d, é cortado por 2 planos paralelos entre si e a uma das bases, dividindo-o em 3 sólidos de volumes iguais. Determine a altura de cada um destes 3 sólidos em função de d.

Comentários



Note que as três pirâmides cujas alturas são $h = (h_1 + h_2), h_1\ e\ h_2$ são semelhantes entre si. Com isso, sejam $k_1\ e\ k_2$ a razão de semelhança entre as pirâmides de altura h_1 e h e entre as de altura h_2 e h, respectivamente.

Com isso,

$$h_1 = k_1 \cdot h \text{ e } d_1 = k_1 \cdot d \Rightarrow S_1 = {k_1}^2 \cdot S \Rightarrow V_1 = {k_1}^3 \cdot V\ ;$$
$$h_2 = k_2 \cdot h \text{ e } d_2 = k_2 \cdot d \Rightarrow\ S_2 = {k_2}^2 \cdot S \Rightarrow V_2 = {k_2}^3 \cdot V\ ;$$

Dado que $V_2 - V_1 = V_1 = V - V_2$, então:

$${k_2}^3 \cdot V - {k_1}^3 \cdot V = {k_1}^3 \cdot V = V - {k_2}^3 \cdot V \therefore \begin{cases} k_1 = \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\dfrac{2}{3}} \end{cases}$$

Como h é a altura de um tetraedro regular de aresta d, chega-se a:

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot d$$

Finalmente, as alturas dos sólidos formados serão dadas por:

$$h^1_{sólido} = h_1 = k_1 \cdot h = \frac{1}{\sqrt[3]{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h^1_{sólido} = \frac{\sqrt{6}d}{3\sqrt[3]{3}}}$$

$$h^2_{sólido} = h_2 - h_1 = (k_2 - k_1) \cdot h = \left(\frac{\sqrt[3]{2} - 1}{\sqrt[3]{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h^2_{sólido}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt[3]{2} - 1)\boldsymbol{d}}{3\sqrt[3]{3}}$$

$$h^3_{sólido} = h - h_2 = (1 - k_2) \cdot h = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{3}}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} d \therefore \boldsymbol{h^3_{sólido}} = \frac{\sqrt{6} \cdot (\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})\boldsymbol{d}}{3\sqrt[3]{3}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{h^1_{sólido} = \frac{\sqrt{6}d}{3\sqrt[3]{3}}; h^2_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt[3]{2}-1)d}{3\sqrt[3]{3}}; h^3_{sólido} = \frac{\sqrt{6}\cdot(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2})d}{3\sqrt[3]{3}}}$

34. (IME/2015)

Seja um tetraedro regular ABCD de aresta a e um octaedro inscrito no tetraedro, com seus vértices posicionados nos pontos médios das arestas do tetraedro. Obtenha a área da seção do octaedro formada pelo plano horizontal paralelo à base do tetraedro BCD, distando desta base de um quarto da altura do tetraedro.

a) $\frac{\sqrt{3}}{192}a^2$

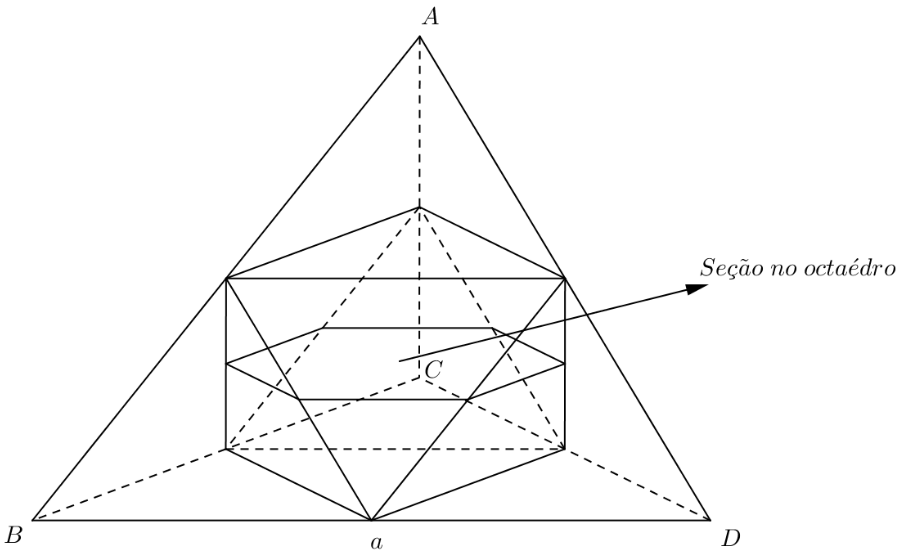
b) $\frac{\sqrt{3}}{96}a^2$

c) $\frac{3\sqrt{3}}{32}a^2$

d) $\frac{3\sqrt{3}}{64}a^2$

e) $\frac{9\sqrt{3}}{64}a^2$

Comentários



Na figura acima, note que cada aresta do octaedro inscrito ao tetraedro é a metade da aresta do tetraedro.

Da mesma maneira, cada aresta da seção hexagonal é a metade da aresta do octaedro.

Daí, sendo x a medida da aresta da secção hexagonal regular, temos:

$$x = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2}\right) \therefore x = \frac{a}{4}$$

Portanto,

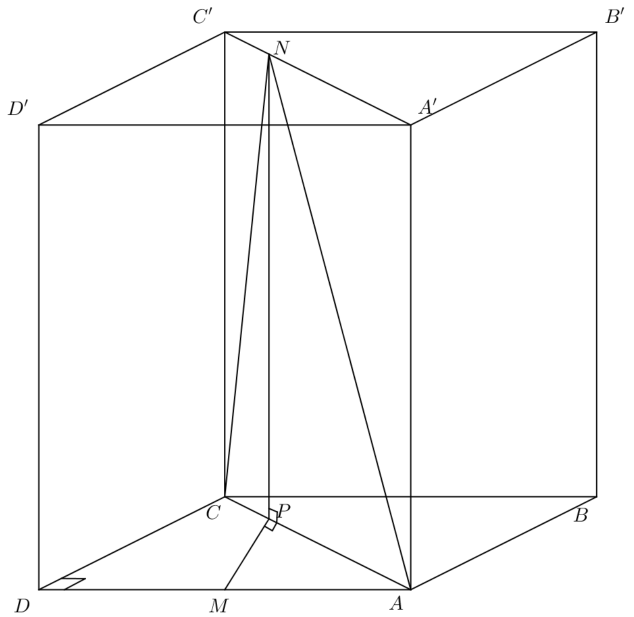
$$S_{seção} = \frac{3\sqrt{3}\cdot x^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}\cdot\left(\frac{a}{4}\right)^2}{2} \therefore \boldsymbol{S_{seção} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{32}}$$

Gabarito: "c"

35. (IME/2014)

Seja ABCDA'B'C'D' um prisma reto de base retangular ABCD. Projeta-se o ponto médio M da maior aresta da base sobre a diagonal AC, obtendo-se o ponto P. Em seguida projeta-se o ponto P na face oposta, obtendo-se o ponto N. Sabe-se que $|\overline{NA}^2 - \overline{NC}^2| = k$. Determine o comprimento da menor aresta da base.

Comentários



Sejam a e b os lados da base retangular do prisma, com $b = AD > a = AB$. Por Pitágoras no ΔNPA e no ΔNPC, temos:

$$NA^2 = PA^2 + PN^2 \therefore PN^2 = NA^2 - PA^2;$$
$$NC^2 = PC^2 + PN^2 \therefore PN^2 = NC^2 - PC^2;$$

Daí,

$$NA^2 - PA^2 = NC^2 - PC^2 \therefore NA^2 - NC^2 = PA^2 - PC^2$$

Pela figura, note que o $\Delta ABC \sim \Delta AMP$.

Com isso,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AM}{PA} \therefore \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b} = \frac{\left(\frac{b}{2}\right)}{PA} \therefore PA = \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Logo,

$$PC = AC - PA \therefore PC = \sqrt{a^2+b^2} - \frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \therefore PC = \frac{2(a^2+b^2)-b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}} \therefore PC = \frac{2a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}$$

Finalmente,

$$NA^2 - NC^2 = \left(\frac{b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 - \left(\frac{2a^2+b^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = \frac{b^4 - (2a^2+b^2)^2}{4(a^2+b^2)} = -\frac{4a^4+4a^2b^2}{4(a^2+b^2)} \therefore$$

$$NA^2 - NC^2 = -\frac{4a^2\cdot(a^2+b^2)}{4(a^2+b^2)} = -a^2 \therefore$$

$$|NA^2 - NC^2| = a^2 \therefore a = \sqrt{|NA^2 - NC^2|} \therefore \boldsymbol{a = \sqrt{k}}$$

Gabarito: $a = \sqrt{k}$

36. (IME/2014)

Seja SABCD uma pirâmide, cuja base é um quadrilátero convexo ABCD. A aresta SD é a altura da pirâmide. Sabe-se que $\overline{AB} = \overline{BC} = \sqrt{5}$, $\overline{AD} = \overline{DC} = \sqrt{2}, \overline{AC} = 2$ e $\overline{SA} + \overline{SB} = 7$. O volume da pirâmide é

a) $\sqrt{5}$

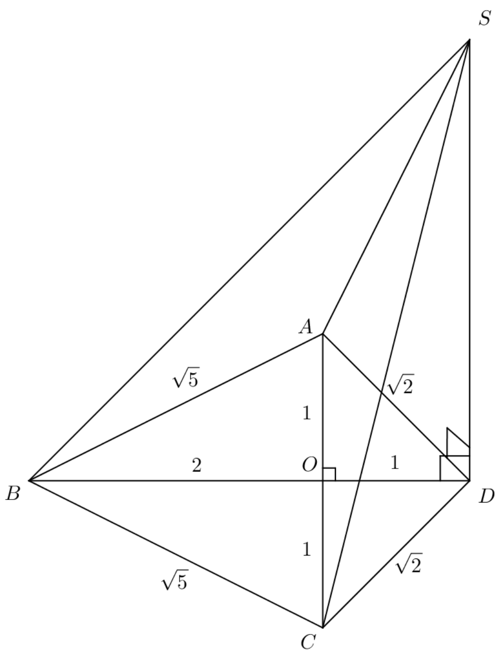
b) $\sqrt{7}$

c) $\sqrt{11}$

d) $\sqrt{13}$

e) $\sqrt{17}$

Comentários



No ΔABO e no ΔADO, por Pitágoras, chega-se a:

$$AB^2 = BO^2 + AO^2 \therefore BO = \sqrt{AB^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - 1} = 2 \therefore BO = 2$$

$$AD^2 = DO^2 + AO^2 \therefore DO = \sqrt{AD^2 - AO^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1} = 1 \therefore DO = 1$$

Com isso,

$$S_{base} = S_{ACD} + S_{ABC} = \frac{AC \cdot DO}{2} + \frac{AC \cdot BO}{2} = \frac{2 \cdot 1}{2} + \frac{2 \cdot 2}{2} = 1 + 2 = 3 \therefore S_{base} = 3$$

Agora, por Pitágoras no ΔSAD e no ΔSBD, temos:

$$SA^2 = AD^2 + DS^2 \therefore DS^2 = SA^2 - 2$$
$$SB^2 = BD^2 + DS^2 \therefore DS^2 = SB^2 - 9$$

Igualando ambos os termos, chega-se a:

$$SA^2 - 2 = SB^2 - 9 \therefore SB^2 - SA^2 = 7 \therefore (SB - SA) \cdot (SB + SA) = 7$$

Mas é dado que $SB + SA = 7$ (I).

Daí,

$$SB - SA = 1\ (II)$$

Por (I) e (II), então:

$$SB = 4 \therefore DS^2 = 4^2 - 9 = 7 \therefore DS = \sqrt{7}$$

Finalmente,

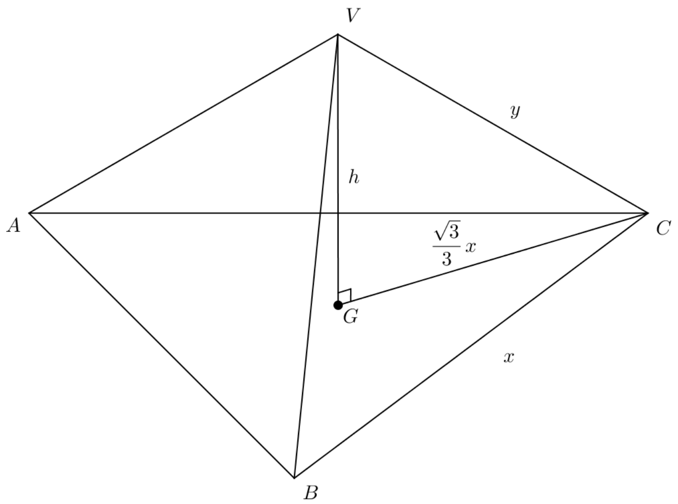
$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{7} \therefore \boldsymbol{V = \sqrt{7}}$$

Gabarito: “b”

37. (IME/2012)

Uma pirâmide regular triangular apresenta um volume V. Determine o raio da circunferência circunscrita a uma das faces laterais da pirâmide em função de V, sabendo que o ângulo do vértice vale 30°.

Comentários

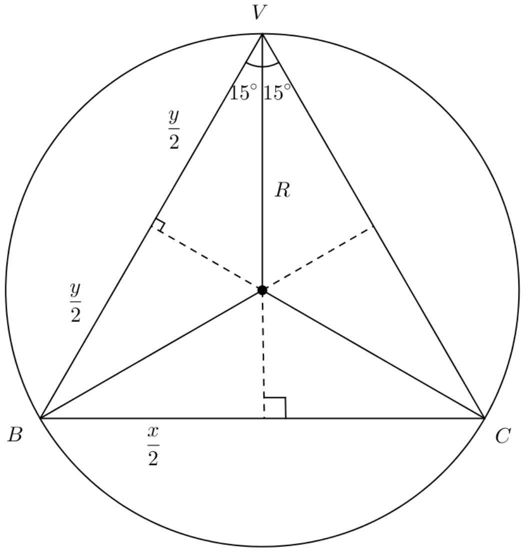


Sejam x , y e h as arestas da base e laterais e a altura da pirâmide, respectivamente.
Pela figura acima, sendo G o baricentro do ΔABC, temos:

$$GC = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x;$$

Por Pitágoras no ΔVGC, então:

$$y^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot x\right)^2\ (I)$$



Agora, observe a figura acima, representativa de uma das faces da pirâmide com sua respectiva circunferência circunscrita.

Pelas relações trigonométricas aplicadas à figura, chega-se a:

$$\frac{y}{2} = R\cos 15° \therefore y = 2R\cos 15°$$

$$y = \left(\frac{x}{2}\right)\csc 15° \ \ (II)$$

Igualando ambas as equações, temos:

$$2R\cos 15° = \left(\frac{x}{2}\right)\csc 15° \therefore x = 2R\cdot(2\text{sen}\,15°\cdot\cos 15°) \therefore x = 2R\,\text{sen}\,30° \therefore x = R\ (III)$$

Substituindo (II) e (III) em (I), chega-se a:

$$\left[\left(\frac{x}{2}\right)\csc 15°\right]^2 = h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot x\right)^2 \therefore h^2 = x^2\cdot\left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) = R^2\cdot\left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) \therefore$$

$$h^2 = R^2\cdot\left(\frac{\csc^2 15°}{4} - \frac{1}{3}\right) = \frac{R^2}{4\,\text{sen}^2\,15°} - \frac{R^2}{3} \therefore$$

Mas,

$$\text{sen}^2\,15° = \frac{1-\cos 30°}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \therefore \text{sen}^2\,15° = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

Daí,

$$h^2 = \frac{R^2}{4\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{4}} - \frac{R^2}{3} = R^2\cdot\left(2+\sqrt{3}-\frac{1}{3}\right) \therefore h^2 = R^2\cdot\left(\frac{5+3\sqrt{3}}{3}\right) \therefore h = R\cdot\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}$$

Finalmente,

$$V = \frac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}x^2}{4}\right)\cdot\left(R\cdot\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}\cdot R^2}{4}\right)\cdot R\cdot\sqrt{\frac{5+3\sqrt{3}}{3}} \therefore$$

$$V = \frac{R^3}{3\cdot 4}\cdot\left(\sqrt{5+3\sqrt{3}}\right) = \frac{R^3\cdot\sqrt{5+3\sqrt{3}}}{12} \therefore \boldsymbol{R} = \sqrt[3]{\frac{\boldsymbol{12V}}{\sqrt{\boldsymbol{5+3\sqrt{3}}}}}$$

Gabarito: $R = \sqrt[3]{\frac{12V}{\sqrt{5+3\sqrt{3}}}}$

38. (IME/2012)

Uma pirâmide regular possui como base um dodecágono de aresta a. As faces laterais fazem um ângulo de $15°$ com o plano da base. Determine o volume desta pirâmide em função de a.

a) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

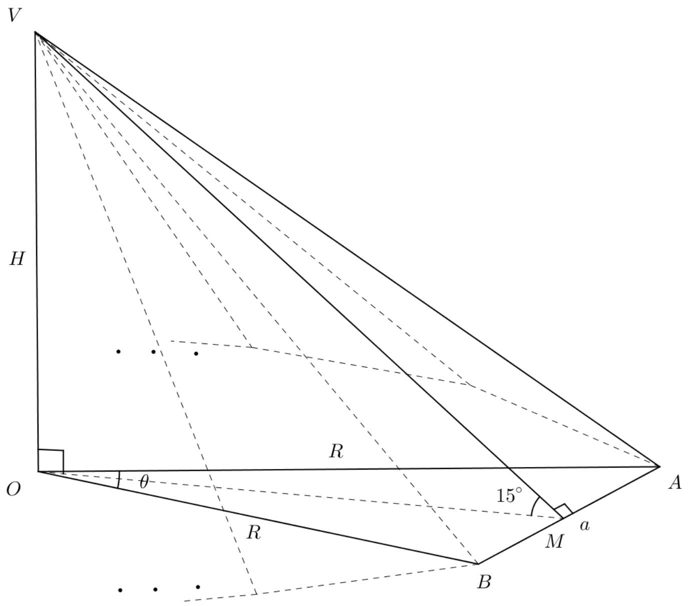
b) $\frac{a^3}{2}\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

c) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$

d) $a^3\frac{\sqrt{\sqrt{3}-2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

e) $a^3\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{\sqrt{3}+2}}$

Comentários



Para cada aresta do dodecágono, tem-se um ângulo θ.
Logo,

$$12\theta = 360° \therefore \theta = 30°$$

Utilizando a lei dos cossenos no ΔOAB, chega-se a:

$$a^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 30° \therefore 2R^2 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a^2 \therefore R = \frac{a}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}$$

Com isso, sendo M o ponto médio do lado AB, temos:

$$H = OM \cdot \tan 15°$$

Mas note que:

$$S_{OAB} = \frac{R^2 \cdot \text{sen}\, 30°}{2} = \frac{a \cdot OM}{2} \therefore OM = \frac{R^2}{2a} = \frac{a^2}{2-\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2a} \therefore OM = \frac{a}{2} \cdot (2+\sqrt{3})$$

Daí,

$$H = \frac{a}{2} \cdot \left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) \therefore H = \frac{a}{2}$$

Agora, calculemos a área da base dodecagonal:

$$S_{base} = 12 S_{OAB} = 12 \cdot \frac{R^2 \cdot \text{sen}\, 30°}{2} = 3R^2 = 3 \cdot \left(\frac{a}{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}\right)^2 \therefore S_{base} = \frac{3a^2}{\left(2 - \sqrt{3}\right)}$$

Finalmente,

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{base} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2}{\left(2 - \sqrt{3}\right)} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{2} \cdot \left(\frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right) \therefore \boldsymbol{V} = \frac{\boldsymbol{a^3}}{\mathbf{2}} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{\mathbf{3}} + \mathbf{2}}}{\sqrt{\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}}}$$

Gabarito: “a”