CURSO INTENSIVO 2022

Física

ITA - 2022

Ondulatória 1

Prof. Toni Burgatto

SUMÁRIO

Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo de ondulatória. Partiremos dos princípios matemáticos das ondas e deduziremos todas as equações que envolvem os fenômenos ondulatórios. Algumas deduções são apenas de caráter ilustrativo e não devem ser memorizadas pelo aluno.

As fórmulas e demonstrações importantes serão sinalizadas. Somente estas deverão ser memorizadas para a prova do ITA. Em geral, o assunto de ondulatória é muito cobrado no vestibular do ITA. O maior enfoque está vinculado a interferência e acústica.

Preste muita atenção nos conceitos de interferência de uma onda e na abordagem por fasores, pois pode ser bem útil para o ITA.

Vamos começar por duas questões do IME que são mais simples. As questões do ITA geralmente requer uma sacada mais forte que as questões do IME, geralmente.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Definição e caracterização

1.1. Definição de ondas

Uma onda é qualquer perturbação de uma situação de equilíbrio, que se propaga sem transportar matéria. Em geral, uma onda transporta energia e momento.

A perturbação criada por uma onda é representada por uma função $y(x,t)$. Essa função de duas variáveis fornece a posição num dado instante de tempo para uma partícula que está sofrendo a dada perturbação.

1.2. Ondas mecânicas e ondas eletromagnéticas

1.2.1. Ondas mecânicas

São propagações de energia através de partículas de um meio material. Uma onda mecânica necessita de um meio para que ela se propague. As ondas mecânicas não se propagam no vácuo.

As ondas na praia são ondas mecânicas. Em alto mar (profundidade da água extremamente elevada) essas ondas transportam apenas energia. Ao se aproximar da praia, devido à grande variação de profundidade, as ondas "quebram" e deixam de apresentar comportamento ondulatório.

Figura 1: Ondas ao chegar à praia.

As ondas produzidas por alto-falantes também são exemplos de ondas mecânicas. Neste caso, o meio de propagação é o ar e as ondas são chamadas de sonoras. Estudaremos de forma bem aprofundada as ondas sonoras no tópico de Acústica, que será a aula seguinte a esta.

1.2.2. Ondas eletromagnéticas

As ondas eletromagnéticas são a união (indução entre campos) de um campo elétrico e de um magnético que, no vácuo, se propagam com a velocidade da luz. Nos meios materiais, a velocidade de propagação é menor que no vácuo.

As ondas eletromagnéticas não necessitam de meio material para se propagar. As ondas de rádio, os raios-X, os raios-gama e as micro-ondas são exemplos de ondas eletromagnéticas.

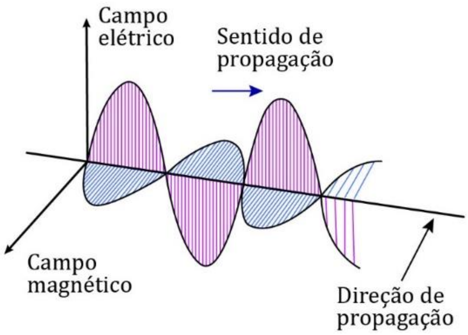


Figura 2: Propagação de uma onda eletromagnética.

1.3. Ondas transversais e ondas longitudinais

1.3.1. Ondas transversais

Ondas transversais são ondas em que sua oscilação ocorre perpendicularmente a direção de propagação da onda.

Em geral, as ondas transversais são ondas senoidais que apresentam cristas e vales. Uma crista é a região da onda que há um máximo de deslocamento no sentido positivo de um eixo adotado. Já o vale é a região da onda que há um mínimo de deslocamento no sentido negativo de um eixo adotado. Veja a figura abaixo.

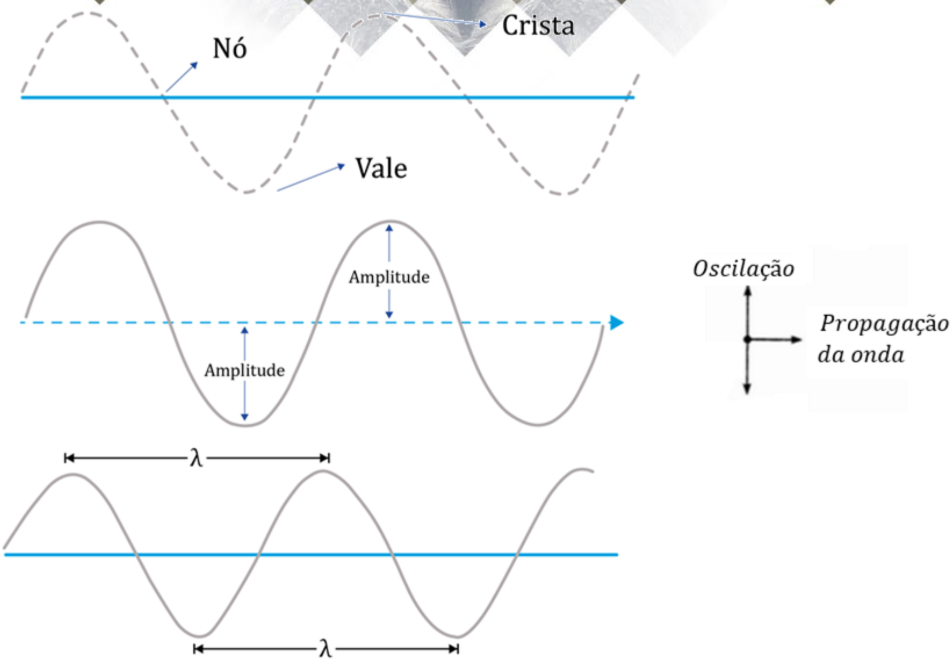


Figura 3: Oscilação versus direção de propagação. Além disso, alguns elementos de uma onda.

A distância entre duas cristas ou dois vales é chamado de comprimento de onda (λ). Encontraremos uma relação entre o comprimento de onda e os outros parâmetros da onda nos tópicos seguintes.

As ondas eletromagnéticas são todas transversais. Isso porque, o campo elétrico e o campo magnético sempre serão perpendiculares à direção de propagação da onda.

1.3.2. Ondas longitudinais

As ondas longitudinais são ondas que tem sua oscilação na mesma direção de propagação da onda.

As ondas longitudinais formam regiões de compressão e rarefação. Veremos em acústica as zonas de pressão vinculadas a essas regiões. Entretanto, ainda nesta aula, podemos analisar de forma simplificada uma onda longitudinal pela figura abaixo.

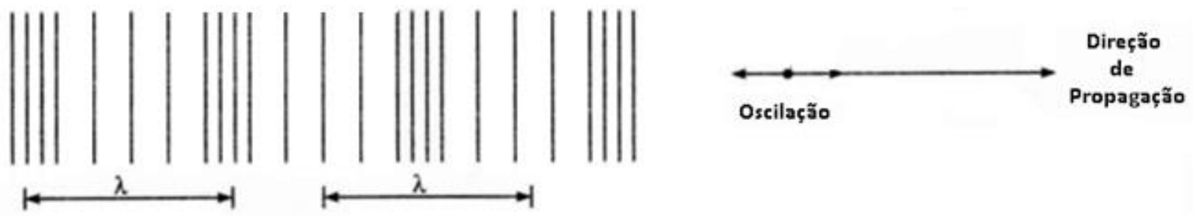


Figura 4: Perfil da onda longitudinal.

As regiões mais "concentradas", em linhas verticais, são as chamadas regiões de compressão. As regiões mais "vazias", em linhas verticais, são chamadas de regiões de rarefação.

1.3.3. Ondas mistas

Ondas mistas são ondas formadas pela combinação entre ondas longitudinais e ondas transversais.

As ondas mistas têm suas oscilações em direções múltiplas. Como exemplo, podemos citar as ondas do mar e ondas sonoras quando se propagam em meios sólidos.

1.4. Frente de onda e raio de Onda

Podemos classificar uma onda quanto a sua direção de propagação. Temos ondas unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

1.4.1. Ondas unidimensionais

São ondas que se propagam em apenas uma dimensão. Como exemplo, podemos citar as ondas em uma corda.

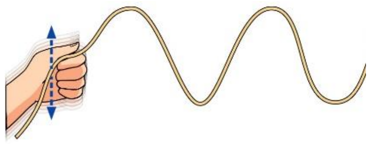


Figura 5: Onda em uma corda.

1.4.2. Ondas bidimensionais

São ondas que se propagam em duas dimensões. Como exemplo, podemos citar as ondas na superfície de um líquido.

Figura 6: Onda na superfície de um líquido.

1.4.3. Ondas tridimensionais.

São ondas que se propagam em três dimensões. Como exemplo, podemos citar as ondas luminosas.

Para o estudo rigoroso das ondas bidimensionais e tridimensionais, devemos introduzir o conceito de raio e frente de onda.

Frente de onda: É a região de fronteira entre o espaço atingido e o espaço não atingido pela onda.

Raio de onda: É um segmento orientado com origem na fonte de onda que é perpendicular às frentes de onda. O sentido do raio de onda indica a direção de propagação daquela onda.

A figura abaixo representa as frentes e os raios de onda de uma perturbação na superfície de um líquido.

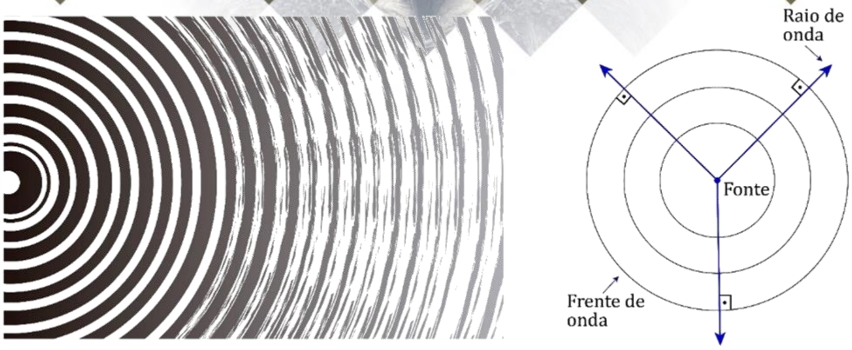


Figura 7: Frentes e raios de ondas.

2. Equação geral de onda

Podemos associar uma onda a uma função de duas variáveis $y(x,t) = y$. Entretanto, nem toda função que é dependente do espaço e do tempo é uma onda. Para que se tenha uma onda, a função deve respeitar a seguinte equação:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

A equação acima é chamada de equação geral da onda. Ela se baseia nas derivadas parciais de segunda ordem em relação à posição e ao tempo. O fator de proporcionalidade entre as derivadas parciais é a velocidade de propagação da onda (v). Não se assuste com a equação de onda. Basta derivar y em relação ao tempo e depois derivar y em relação a x.

A solução geral dessa equação diferencial é da seguinte forma:

$$y(x,t) = f(a \cdot x \pm b \cdot t)$$

$$\begin{cases} f(a \cdot x + b \cdot t), propagação\ na\ direção\ de\ x - negativo \\ f(a \cdot x - b \cdot t), propagação\ na\ direção\ de\ x - positivo \end{cases}$$

Entretanto, há uma condição para que a função f satisfaça a equação da onda: A uma função deve ser finita para qualquer posição em todos os instantes de tempo. Se esta condição for satisfeita, a velocidade de propagação da onda é dada por:

$$v = \frac{coeficiente\ de\ "t"}{coeficiente\ de\ "x"} = \frac{b}{a}$$

3. Ondas harmônicas progressivas

Considere a função $y = f(x)$ e o deslocamentos $y = f(x + x_0)$ e $y = f(x - x_0)$, mostrados na figura abaixo.

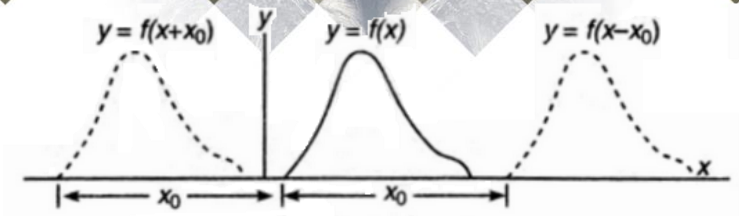


Figura 8: Deslocamentos da função y.

Claramente, após realizar os deslocamentos, o perfil da onda não é alterado. Ao deslocar a função, tanto para x positivo quanto para x negativo, os valores da imagem apenas trocam seus representantes no domínio da função.

Se fizermos uma transformação de variável do tipo $x_0 = v \cdot t$, temos uma função que "progredindo no espaço ao longo do tempo" $y = f(x - v \cdot t)$. A transformação feita representa um pulso de onda se movendo para a direita com velocidade v, chamada **velocidade de propagação** ou **velocidade de fase.** Se fizermos a transformação oposta $y = f(x + v \cdot t)$, temos um pulso que se propaga para a esquerda. Veja as duas representações abaixo.

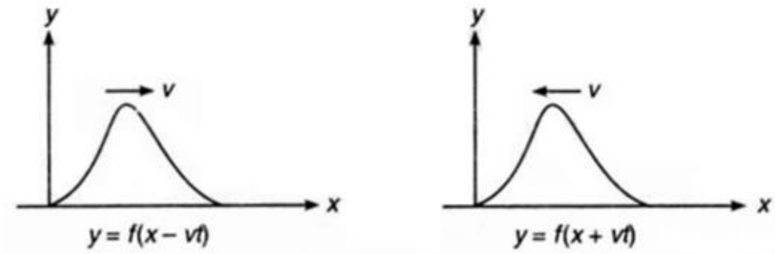


Figura 9: Pulsos se propagando.

Deste modo, concluímos que a função de um pulso, representando uma onda harmônica, é da seguinte forma:

$$y = f(x \pm v \cdot t)$$

Quando $y(x,t)$ é um seno ou cosseno, temos:

$$\boxed{y(x,t) = A \cdot sen[k(x - v \cdot t)]}$$

$$\boxed{y(x,t) = A \cdot cos[k(x - v \cdot t)]}$$

Essas equações representam **ondas harmônicas progressivas.**

3.1. Número de onda

As ondas harmônicas representadas por seno ou cosseno são ondas periódicas. Considere a onda com a seguinte função $y(x, t = 0) = y_0 sen(kx)$. Por definição, o deslocamento y é o mesmo nas duas extremidades do comprimento de onda, ou seja, $x = x_1$ e $x = x_1 + \lambda$. Matematicamente:

$$y_0 sen(kx_1) = y_0 sen\big(k(x_1 + \lambda)\big)$$

$$y_0 sen(kx_1) = y_0 sen(kx_1 + k\lambda)$$

Como a função seno é periódica e de período 2π, então:

$$\therefore k\lambda = 2\pi \Rightarrow k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

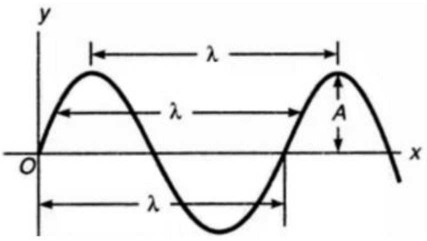


Figura 10: Comprimento de onda e amplitude da onda harmônica progressiva.

3.2. Frequência angular

Definimos a frequência angular ω como o produto entre o número de onda e a velocidade de propagação.

$$\omega = k \cdot v \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \qquad (I)$$

Da frequência angular e seus aspectos cinemáticos, temos:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \qquad (II)$$

Relacionando as equações (1) e (2), temos:

$$2\pi f = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot v \Rightarrow \boxed{v = \lambda \cdot f}$$

A equação acima é a chamada de equação fundamental da ondulatória. Ela relaciona a velocidade de propagação com o comprimento de onda e a frequência de oscilação.

3.3. Velocidade de oscilação

As partículas do meio onde a onda está propagando oscilam em movimento harmônico simples na direção perpendicular à de propagação.

Considere a onda de equação $y(x,t) = A \cdot sen(kx - \omega t)$:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = -A \cdot \omega \cdot \ cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = A \cdot k \cdot \ cos(kx - \omega t)$$

Podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = velocidade\ de\ propagação\ da\ onda$$

$$V_p = \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = Velocidade\ de\ oscilação\ da\ partícula$$

$$m = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} = Inclinação\ da\ reta\ tangente\ à\ função$$

Assim, podemos escrever:

$$\boxed{V_P = -v \cdot m}$$

3.4. Aceleração de oscilação

Para a aceleração da partícula, fazemos as próximas derivadas parciais.

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = -\omega^2 \cdot y(x,t)$$

Assim, definimos aceleração da seguinte maneira:

$$a_P = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = aceleração\ de\ oscilação\ da\ partícula$$

$$\therefore$$

$$\boxed{a_P = -\omega^2 \cdot y(x,t)}$$

Utilizando a figura abaixo, podemos agora analisar as velocidades em cada ponto da onda progressiva.

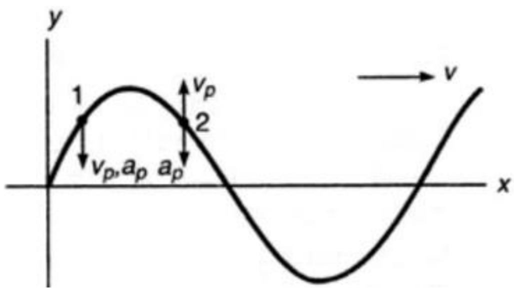


Figura 11: Análise da velocidade e aceleração de oscilação.

Para o ponto 1, o coeficiente da reta tangente é positivo, então a velocidade de oscilação é negativa e, como $y > 0$, então a aceleração de oscilação é negativa.

Para o ponto 2, o coeficiente da reta tangente é negativa, então a velocidade de oscilação é positiva e, como $y > 0$, então a aceleração de oscilação é negativa.

ESCLARECENDO!

1.

Considere a seguinte equação de onda:

$$y(x,t) = 0{,}05 \cdot sen\left[\frac{\pi}{2}(10x - 40t) - \frac{\pi}{4}\right]$$

a) Encontre o comprimento de onda, a frequência e a velocidade de propagação.

b) Encontre a velocidade oscilação em $x = 0{,}5\ m\ e\ t = 0{,}05\ s$.

Comentário:

a) A equação pode ser escrita da seguinte forma:

$$y(x,t) = 0{,}05 \cdot sen\left[5\pi x - 20\pi t - \frac{\pi}{4}\right]$$

Comparando com a equação de onda progressiva $y(x,t) = A \cdot sen(kx - \omega t + \varphi_0)$, temos:

$$k = 5\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow \boxed{\lambda = 0{,}4\ m}$$

A frequência angular é dada por:

$$\omega = 20\pi = 2\pi f \Rightarrow \boxed{f = 10\ Hz}$$

Da equação fundamental da ondulatória, temos:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \boxed{v = 4\ m/s}$$

b) A velocidade da partícula é dada por:

$$V_P = -(20\pi) \cdot 0{,}05 \cdot sen\left[5\pi \cdot \frac{1}{2} - \pi - \frac{\pi}{4}\right] \Rightarrow \boxed{V_P \cong 2{,}22\ m/s}$$

4. Onda transversal na corda

Considere um pulso de onda que está se propagando em uma corda de densidade linear de massa μ que está tensionada por uma força T.

Considere um trecho infinitesimal dx da corda. Esse trecho corresponde ao segmento de corda entre os pontos A e B.

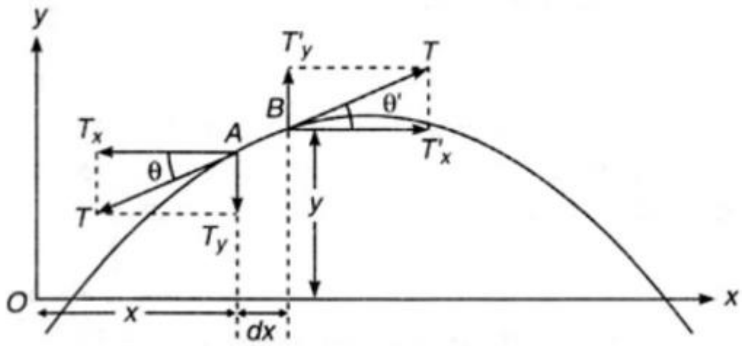


Figura 12: Trecho de corda com a onda se propagando.

Devido a curvatura da corda, as forças T e T' não são opostas. Pode-se demonstrar que:

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}}$$

Encontramos que a velocidade de propagação de uma onda em uma corda depende da tração que esta corda está submetida e de sua densidade linear de massa.

Podemos reescrever essa equação em termos da densidade da corda (ρ)e de sua área de seção (A):

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{m \cdot A}{L \cdot A} = \rho \cdot A \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{T}{\rho \cdot A}}}$$

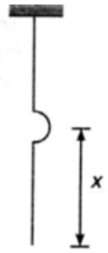
Além disso, se quisermos utilizar o conceito de tensão ao invés de tração, podemos manipular da seguinte maneira:

$$Tensão = \frac{T}{A} = \Upsilon \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\Upsilon}{\rho}}}$$

2. (IME – 2017)

Considere uma corda pendurada no teto de uma sala de aula. Calcule o intervalo de tempo para um pulso ondulatório percorrer toda a corda. O comprimento da corda é L, sua densidade linear é μ e a gravidade local vale g.

Comentário:



Considere o pulso a uma dada distância x. A massa do comprimento x de corda é dado por:

$$m = \frac{M}{L}x$$

A tração é:

$$T = mg = \frac{M}{L}xg = \mu xg$$

Da velocidade de uma onda na corda:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu xg}{\mu}} = \sqrt{xg} \Rightarrow v^2 = xg$$

Podemos associar a equação acima à equação de Torricelli $v^2 = v_o^2 \pm 2ax$. Percebemos que o pulso tem aceleração constante que vale:

$$a = \frac{g}{2}$$

Desta maneira, o tempo gasto para percorrer toda a corda é dado por:

$$L = \frac{\frac{g}{2}t^2}{2} \Rightarrow \boxed{t = 2\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

5. Energia da onda progressiva

Para produzir uma oscilação nas partículas do meio onde a onda se propaga, um gasto de energia deve ser realizado. Associamos essa energia gasta à energia da onda. Como a onda se propaga, cada porção do meio exerce uma força e realiza um trabalho sobre a porção adjacente.

5.1. Densidade de energia

Por densidade de energia da onda progressiva plana, entendemos a energia mecânica total (cinética + potencial) por unidade de volume do meio pelo qual a onda está passando.

Primeiramente, iremos calcular a energia cinética por volume do meio. Considere uma onda de equação $y(x,t) = A \cdot sen(kx - \omega t)$ que se propaga em uma corda de densidade ρ e área de seção S. A velocidade da onda é dada por dy/dx.

$$\frac{K}{\Delta V} = \Delta K = energia\ cinética\ por\ volume$$

$$\Delta K = \frac{\frac{1}{2}(\Delta m) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}{\Delta V} \Rightarrow \Delta K = \frac{1}{2}(\rho) \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

Da equação da onda, temos a velocidade:

$$\frac{dy}{dt} = -A\omega \cdot cos(kx - \omega t)$$

Substituindo na equação da energia cinética por unidade de volume, vem:

$$\Delta K = \frac{1}{2}(\rho) \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2(kx - \omega t) \ \ (I)$$

Para calcular a energia potencial por volume, devemos relacionar a inclinação da reta tangente e a tração na corda.

$$\frac{U}{\Delta V} = \Delta U = energia\ potencial\ por\ volume$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\rho)v^2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

Da inclinação:

$$\frac{dy}{dx} = A \cdot k \cdot cos(kx - \omega t)$$

Substituindo na equação da energia potencial por unidade de volume, vem:

$$\Delta U = \frac{1}{2}(\rho) \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2(kx - \omega t) \ \ (II)$$

Para saber a densidade de energia total por volume (u), devemos somar a contribuição da cinética e da potencial. Usando as equações (I) e (II), temos:

$$u = \Delta K + \Delta U$$

$$u = (\rho) \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot cos^2(kx - \omega t)$$

O valor médio de $cos^2(kx - \omega t)$ no tempo é $1/2$. Portanto:

$$\boxed{u = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2}$$

5.2. Potência

A potência de uma onda é a taxa instantânea com a qual a energia é transferida ao longo da corda (se considerarmos uma onda progressiva em uma corda).

Em uma unidade de tempo, a onda progrediu uma distância $(v \cdot 1)$. Se a área de seção da corda é S, então o volume de comprimento percorrido foi $v \cdot 1 \cdot S$. Dessa maneira, a energia transmitida por unidade de tempo é dada por:

$$P = (densidade\ volumétrica\ de\ energia) \cdot (volume)$$

$$P = u \cdot (v \cdot 1 \cdot S)$$

$$\boxed{P = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v \cdot S}$$

5.3. Intensidade

A intensidade de uma onda é a medida de quanta energia atravessa uma dada seção. Para uma onda progressiva na corda, dividiremos a potência pela seção da corda.

$$I = \frac{P}{S}$$

$$I = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v \cdot S}{S} \Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v}$$

5.4. Intensidade e potência para fontes pontuais

Embora as relações deduzidas para potência e intensidade terem sido baseadas na onda transversal progressiva em cordas, podemos adaptá-las para outras situações.

Para fontes pontuais a emissão de ondas é uniforme em todas as direções. A energia a uma distância r da fonte é distribuída uniformemente por uma superfície esférica de raio r e área $4\pi r^2$.

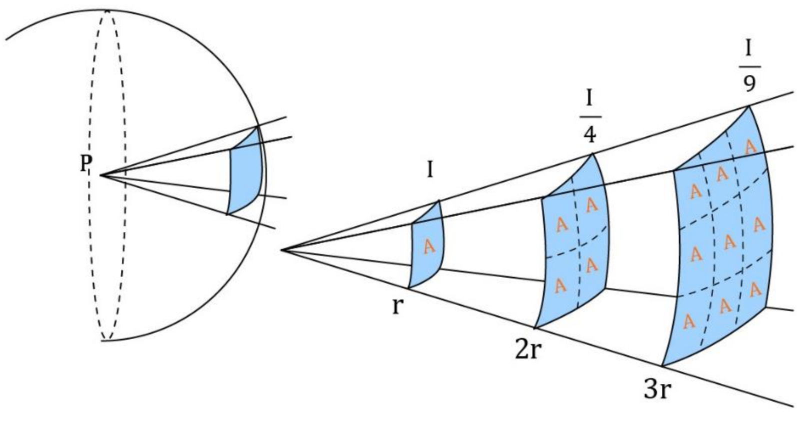


*Figura 13: Fonte pontual **P** e superfície esféricas.*

Dessa maneira, para uma fonte pontual de potência P, podemos dizer que a intensidade é dada por:

$$\boxed{I = \frac{P}{4\pi r^2}}$$

Assim, percebe-se que a intensidade é inversamente proporcional ao quadrado distância até a fonte.

$$I \propto \frac{1}{r^2}$$

Como a amplitude $A \propto \sqrt{I}$, uma onda esférica harmônica emitida de uma fonte pontual pode ser escrita como:

$$\boxed{y(r,t) = \frac{A}{r} sen(kr - \omega t)}$$

Escrevendo da maneira acima enunciada, podemos utilizar todas as relações já deduzidas anteriormente. Nenhuma alteração precisará ser feita.

6. Superposição de ondas

6.1. Princípio da superposição

Duas ou mais ondas podem se propagar simultaneamente em um meio sem afetar o movimento umas das outras. Entretanto, o deslocamento resultante de cada partícula do meio em qualquer instante é a soma vetorial dos deslocamentos produzidas por cada onda separadamente. Matematicamente, podemos enunciar o princípio da superposição da seguinte maneira:

$$y(x,t) = \sum_{i=1}^{n} y_i(x,t)$$

O princípio da superposição garante que duas ondas diferentes podem se propagara no mesmo meio sem "atrapalharem" umas às outras.

Como exemplo, considere uma longa corda AB. De suas extremidades foram lançados dois pulsos com velocidades opostas. Veja a figura abaixo:

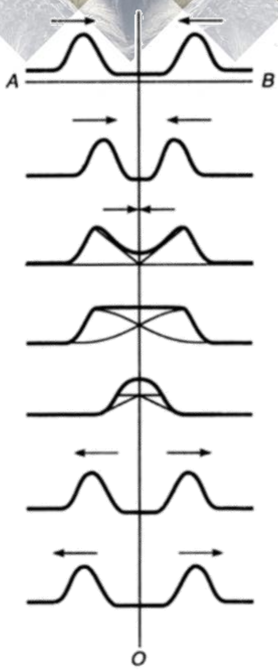


Figura 14: Superposição de dois pulsos.

Note que ao se cruzar os pulsos se interferem e geram um novo pulso resultante. Porém, após a interferência, seguem sua propagação normalmente. Não há perda de nenhuma propriedade individual de cada pulso.

6.2. Características da superposição

Considere a superposição de duas ondas senoidais com mesma frequência em um ponto. Iremos assumir que as ondas estão viajando para a mesma direção e com a mesma velocidade. Dessa maneira, a equação das duas ondas são:

$$y_1 = A_1 \cdot sen(kx - \omega t)$$

$$y_1 = A_2 \cdot sen(kx - \omega t + \varphi)$$

Para efetuar a superposição das ondas, basta somá-las:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A_1 \cdot sen(kx - \omega t) + A_2 \cdot sen(kx - \omega t + \varphi)$$

$$y = A_1 \cdot sen(kx - \omega t) + A_2 \cdot sen(kx - \omega t) cos\varphi + A_2 \cdot cos(kx - \omega t) sen\varphi$$

$$y = (A_1 + A_2 cos\varphi) \cdot sen(kx - \omega t) + (A_2 \cdot sen\varphi) \cdot cos(kx - \omega t)$$

Podemos realizar a seguinte troca:

$$(A_1 + A_2 cos\varphi) = Acos\theta \text{ e } (A_2 \cdot sen\varphi) = Asen\theta$$

Daí, temos:

$$y = Acos\theta \cdot sen(kx - \omega t) + Asen\theta \cdot cos(kx - \omega t)$$

$$\boxed{y = Asen(kx - \omega t + \theta)}$$

A amplitude resultante A, pode ser determinada da seguinte maneira:

$$(A_1 + A_2 cos\varphi)^2 = A^2 cos\theta^2$$

$$(A_2 \cdot sen\varphi)^2 = A^2 sen\theta^2$$

Somando as duas equações, vem:

$$A^2 = (A_1 + A_2 cos\varphi)^2 + (A_2 \cdot sen\varphi)^2$$

$$\boxed{A = \sqrt{(A_1 + A_2 cos\varphi)^2 + (A_2 \cdot sen\varphi)^2}}$$

6.3. Abordagem por fasores

Podemos abordar a superposição de ondas utilizando fasores. Na física um vetor de fase ou fasor, é uma representação de uma função senoidal cuja amplitude (A), frequência angular (ω) e fase (θ) são invariantes no tempo.

As duas ondas acima podem ser representadas pelos seguintes fasores:

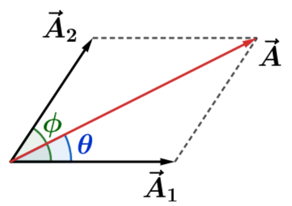


Figura 15: Representação por fasores.

A notação de fasores é interessante para determinar de forma rápida e prática a amplitude e a fase resultante da superposição de ondas com mesma frequência angular.

Note que pela representação ser feita por vetores, podemos utilizar a geometria para determinar as grandezas que desejamos obter. Faremos um exemplo abaixo para elucidar a ideia de fasor.

3.

Duas ondas harmônicas são representadas no SI, por:

$$\begin{cases} y_1 = 0{,}2sen(x - 3t) \\ y_2 = 0{,}2sen\left(x - 3t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

Determine a equação da onda gerada pela superposição das duas ondas acima.

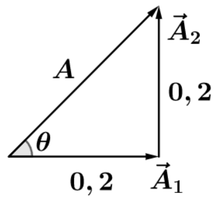
Comentário:

Fazendo a superposição temos:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = 0{,}2sen(x - 3t) + 0{,}2sen\left(x - 3t + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = Asen(x - 3t + \theta)$$

Para determinar a amplitude e a fase, iremos usar o conceito de fasor. Como temos a diferença de fase entre as duas ondas como $\frac{\pi}{2}$, temos um triângulo retângulo:



Assim, tiramos que a amplitude é de $0{,}2\sqrt{2}\ m$ e a fase é dada por $\theta = 45°$.

7. Reflexão e refração de ondas

Antes de começar a refletir e refratar uma onda, a partir de uma fronteira onde dois meios de comunicação se separam, vamos falar de meios densos e meios rarefeitos. Diz-se que um meio é mais denso (em relação ao outro) se a velocidade da onda nesse meio for menor que a velocidade da onda no outro meio. Assim, é a velocidade da onda que decide se o meio é mais denso ou mais rarefeito para aquela onda específica.

Para uma mesma onda, a velocidade no meio denso é menor que a velocidade no meio rarefeito.

$$v_{denso} < v_{rarefeito}$$

Dessa maneira, iremos analisar as variações nas grandezas físicas ondulatórias que envolvem a reflexão e a refração das ondas.

Para a reflexão das ondas, respeitaremos o princípio básico da reflexão:

$$Angulo\ de\ incidencia = Angulo\ de\ reflexão$$

Para a refração das ondas, respeitaremos o princípio da lei de Snell:

$$\frac{sen(\theta_1)}{v_{rarefeito}} = \frac{sen(\theta_2)}{v_{denso}}$$

Considere a situação onde a onda está propagando de um meio mais denso e para um mais rarefeito.

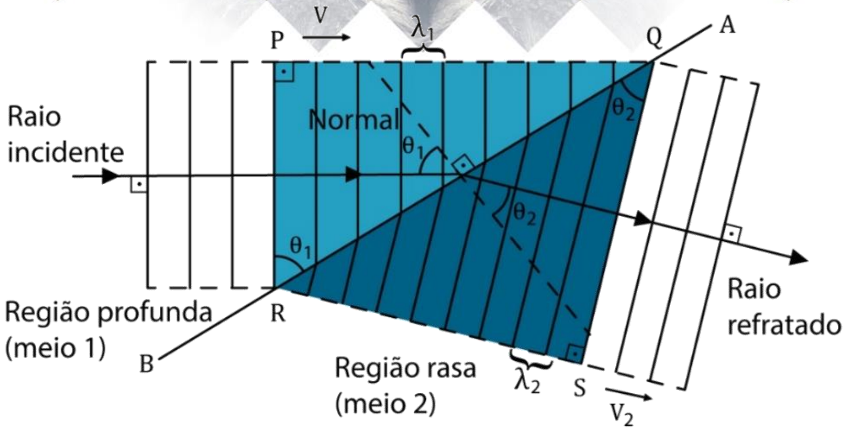


Figura 16: Onda sofrendo refração.

De imediato, como a onda vem de um meio mais rarefeito e refrata para um meio mais denso, a sua velocidade de propagação diminui. Assim, pela lei de Snell:

$$v_{denso} < v_{rarefeito} \Rightarrow \boxed{\theta_2 < \theta_1}$$

Veremos agora, o que ocorre com cada grandeza física quando a onda reflete e refrata na fronteira entre dois meios.

7.1. Velocidade de propagação (v)

A velocidade de propagação de uma onda depende das características do meio.

Reflexão	Para a reflexão o meio não muda e, portanto, não há mudança na velocidade de propagação
Refração	Para a refração há mudança de meio. A mudança de velocidade pode ser determinada pela lei de Snell: $$\frac{sen(\theta_1)}{v_{rarefeito}} = \frac{sen(\theta_2)}{v_{denso}}$$

7.2. Frequência (f), período (T) e frequência angular (ω)

Essas três grandezas se relacionam da seguinte maneira:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

A frequência de uma onda só depende da fonte que a origina. A frequência é a medida de oscilações e, portanto, não depende do meio.

Reflexão	Não há mudança na frequência
Refração	Não há mudança na frequência

7.3. Comprimento de onda (λ)

O comprimento de onda se relaciona com a velocidade de propagação e a frequência da onda pela equação fundamental da ondulatória:

$$v = \lambda \cdot f$$

Assim, como a frequência é um valor constante, o comprimento de onda muda proporcionalmente à velocidade.

Reflexão	Para a reflexão o meio não muda e, portanto, não há mudança no comprimento de onda.
Refração	Para a refração há mudança de meio. A mudança de comprimento de onda pode ser determinada pela lei de Snell: $$\frac{sen(\theta_1)}{\lambda_{rarefeito}} = \frac{sen(\theta_1)}{\lambda_{denso}}$$

7.4. Amplitude (A) e Intensidade (I)

A expressão para a intensidade de uma onda é:

$$I = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot v$$

$$I \propto A^2$$

Quando a onda incide na fronteira entre dois meios parte da onda é refletida e a outra parte é refratada. Dessa maneira, a amplitude e consequentemente a intensidade são alteradas.

Reflexão	Há mudança.
Refração	Há mudança.

7.5. Fase (φ)

A fase de uma onda só é alterada na reflexão.

Reflexão	• Se a onda vai do meio mais denso para o meio menos denso $\boldsymbol{\Delta\varphi = 0}$ • Se a onda vai do meio menos denso para o meio mais denso $\boldsymbol{\Delta\varphi = \pi}$
Refração	Sem mudança de fase.

7.6. Reflexão de pulsos na mesma corda

7.6.1. Extremidade fixa

Quando um pulso que viaja ao longo de uma corda chega até sua extremidade, ele é refletido. Se a extremidade for fixa como na figura (15), o pulso retornará invertido. Isso ocorre porque, quando a borda principal atinge a parede, a corda puxa a parede. De acordo com a terceira lei de Newton, a parede exercerá uma força igual e oposta à da corda. Essa força é, portanto, dirigida primeiro para baixo e depois para cima. Produz um pulso que é invertido, mas idêntico ao original.

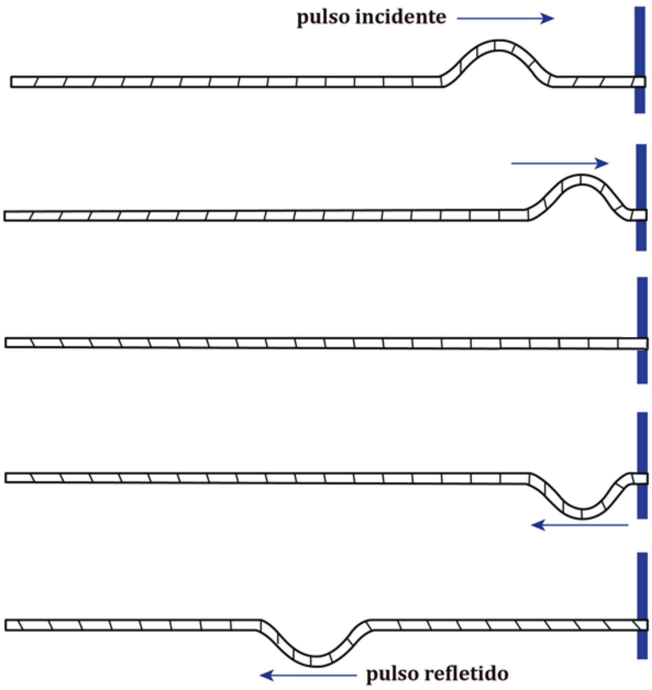


Figura 17: Corda com extremidade fixa.

7.6.2. Extremidade livre

Quando uma onda chega a essa extremidade livre, o anel desliza ao longo da haste. O anel atinge um deslocamento máximo. Nesta posição, o anel e a corda param momentaneamente, como no segundo desenho da figura (18).

Entretanto, a corda é esticada nessa posição, aumentando a tensão, de modo que a extremidade livre da corda é puxada para baixo e, novamente, um pulso refletido é produzido, mas agora a direção do deslocamento é a mesma do pulso inicial.

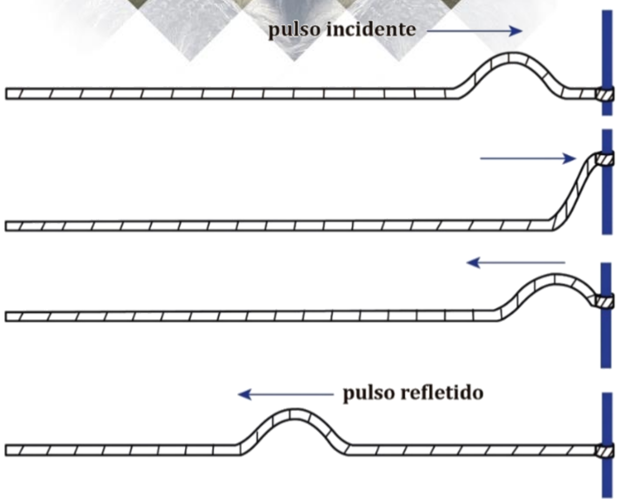


Figura 18: Corda com extremidade livre.

7.6.3. Propriedade do pulso refletido

A formação do pulso refletido é similar a superposição de dois pulsos viajando em direções opostas. O deslocamento líquido em cada ponto é dado pelo princípio da superposição. Veja o esquema da figura abaixo.

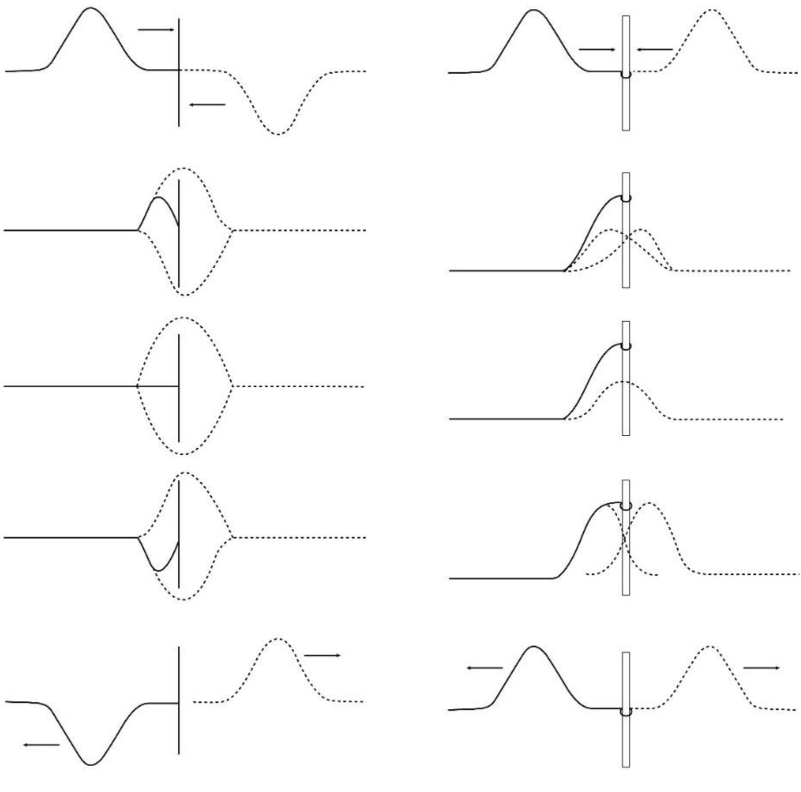


Figura 19: Princípio da superposição dos pulsos.

7.7. Reflexão e refração de pulsos para cordas unidas

Como caso geral, um pulso pode encontrar a fronteira entre uma corda leve e uma corda pesada. Isso resulta em reflexão parcial e transmissão parcial. Como as tensões são as mesmas, as magnitudes relativas das velocidades das ondas são determinadas pelas densidades de massa.

Na figura (20), o pulso se aproxima da corda leve. A corda pesada se comporta como uma parede, mas pode se mover e, portanto, parte do pulso original é transmitida à corda pesada.

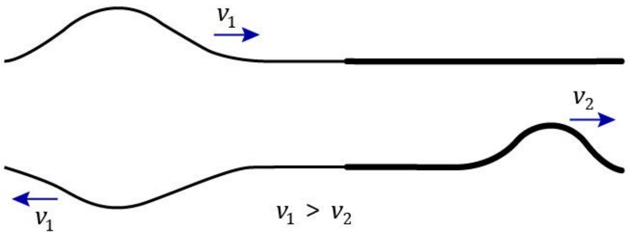


Figura 20: Pulso se propagando da corda menos densa para a mais densa.

Na figura (19) o pulso se aproxima de uma corda pesada. A corda leve oferece pouca resistência e agora se aproxima de uma extremidade livre. Consequentemente, o pulso refletido não é invertido.

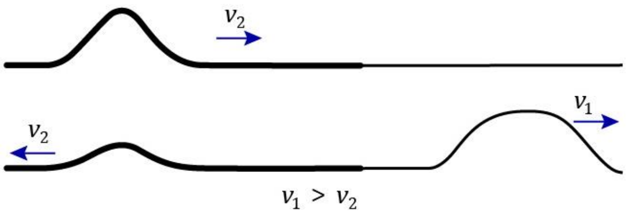


Figura 21: Pulso se propagando da corda mais densa para a menos densa.

Agora, considere duas cordas unidas submetidas a mesma tração. Uma das cordas tem densidade linear de massa μ_1 e a outra μ_2. Considere que as equações da ondas incidente, refletida e transmitida são, respectivamente:

$$y_i = A_i \cdot sen(k_1 x - \omega t);\ y_r = A_r \cdot sen(k_1 x + \omega t) \text{ e } y_t = A_t \cdot sen(k_2 x - \omega t)$$

As amplitudes das refletida e transmitida são:

- Em termos das densidades lineares:

$$\boxed{A_r = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \cdot A_i} \text{ e } \boxed{A_t = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} \cdot A_i}$$

- Em termos das velocidades:

$$\boxed{A_r = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \cdot A_i} \text{ e } \boxed{A_r = \frac{2v_2}{v_2 + v_1} \cdot A_i}$$

A figura abaixo exemplifica os casos possíveis para a reflexão e transmissão de um pulso.

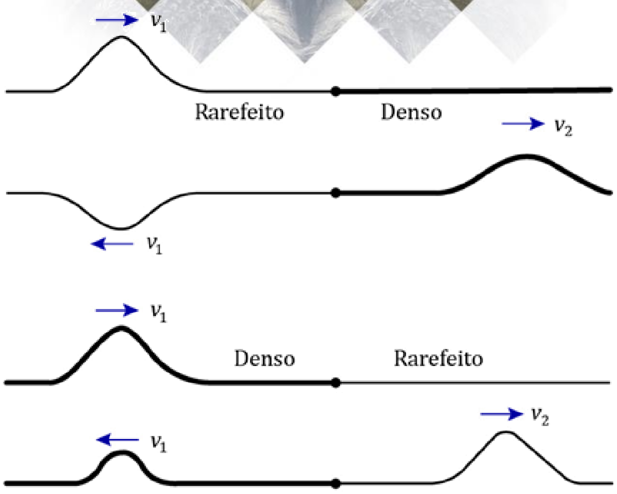


Figura 22: Casos possíveis para reflexão e transmissão.

8. Ondas estacionárias

Estudaremos o que acontece quando duas ondas harmônicas de mesma frequência e mesma amplitude se propagam através do mesmo meio (corda) em sentidos opostos. Suponha que as equações de onda são:

$$y_1 = A \cdot sen(kx - \omega t) \text{ e } y_2 = A \cdot sen(kx + \omega t)$$

Pelo princípio da superposição das ondas:

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = A \cdot [sen(kx - \omega t) + sen(kx + \omega t)]$$

$$\boxed{y = 2A \cdot sen(kx) \cdot \cos(\omega t)}$$

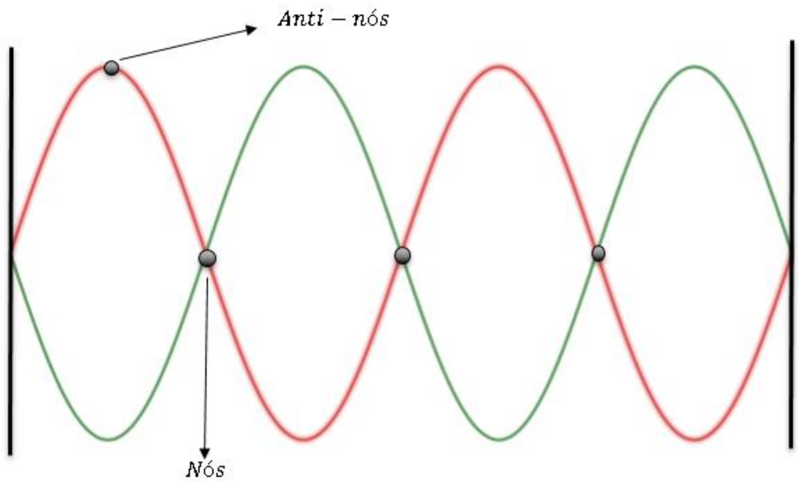


Figura 23: Exemplo de onda estacionária estabelecida em uma corda presa entre duas paredes.

A equação acima é chamada de equação da onda estacionária. A expressão é diferente da representação de onda que vimos até agora. Essa expressão não possui a propriedade $f(x \pm vt)$ e, portanto, não descreve uma onda progressiva.

A equação da onda estacionária pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$y = A(x) \cdot \cos(\omega t)$$

$$A(x) = 2A \cdot sen(kx)$$

A equação da onda estacionária é uma equação de movimento harmônico simples, em que a amplitude é uma função da posição.

8.1. Nós

São pontos da onda estacionária em que não deslocamento da posição de equilíbrio. Podemos encontrar as posições dos nós fazendo $A(x) = 0$.

$$2A \cdot sen(kx) = 0 \Rightarrow kx = m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots.., \frac{n\lambda}{2}$$

A distância entre dois nós consecutivos sempre vale $\frac{\lambda}{2}$.

8.2. Anti-nós

São pontos da onda estacionária em que deslocamento da posição de equilíbrio é máximo. Podemos encontrar as posições dos anti-nós fazendo $sen(kx) = \pm 1$.

$$kx = \frac{\pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0, \frac{\lambda}{4}, \frac{3\lambda}{4}, \dots.., \frac{(2n-1)\lambda}{4}$$

A distância entre dois anti-nós consecutivos sempre vale $\frac{\lambda}{2}$.

8.3. Energia

A energia em uma onda estacionária não se propaga entre nós. A energia fica confinada entre os nós da onda estacionária. Podemos encontrar a energia confinada entre dois nós da onda estacionária. Já deduzimos anteriormente o valor da densidade de energia:

$$u = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2$$

A onda estacionária é formada por duas ondas de mesma amplitude A e mesma frequência angular ω. A corda em que as ondas se propagam tem seção S. Podemos associar uma energia para cada uma das ondas que forma a estacionária.

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot (Volume\ de\ corda\ entre\ nós\ consecutivos)$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot (Volume\ de\ corda\ entre\ nós\ consecutivos)$$

Note que $E_1 = E_2 = E$.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \left(S \cdot \frac{\lambda}{2}\right)$$

Como $\lambda = \frac{2\pi}{k}$:

$$\boxed{E = \frac{\pi}{2k} \cdot \rho \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot S}$$

8.4. Modos normais de vibração

Em um meio contínuo e ilimitado, não há restrição nas frequências ou comprimentos de onda das ondas estacionárias.

No entanto, se as ondas estiverem confinadas no espaço - por exemplo, quando uma corda é amarrada em ambas as extremidades, as ondas podem ser configuradas para um conjunto discreto de frequências ou comprimentos de onda.

Considere uma corda de comprimento fixo L, rigidamente presa nas duas extremidades. Quando montamos uma onda senoidal na corda, ela é refletida pelas extremidades fixas. Pela superposição de duas ondas idênticas viajando em direções opostas, ondas estacionárias são estabelecidas na corda.

O único requisito que precisamos satisfazer é que os pontos na extremidades fixas sejam nós, pois esses pontos não podem oscilar. Eles estão permanentemente em repouso. Pode haver qualquer número de nós entre eles ou nenhum, de modo que a comprimento de onda associada às ondas estacionárias possa assumir valores muito diferentes.

Como distância entre dóis nós adjacentes é de $\frac{\lambda}{2}$ e se a corda tem comprimento L, temos que:

$$N \cdot \frac{\lambda}{2} = L \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{2L}{N}}$$

Da equação fundamental da ondulatória:

$$\lambda = \frac{v}{f} = \frac{\sqrt{\frac{T}{\mu}}}{f} \Rightarrow \boxed{f = \frac{N}{2L} \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad N = 1, 2, 3, \dots.}$$

A imagem abaixo representa os quatro primeiros harmônicos de um modo de vibração.

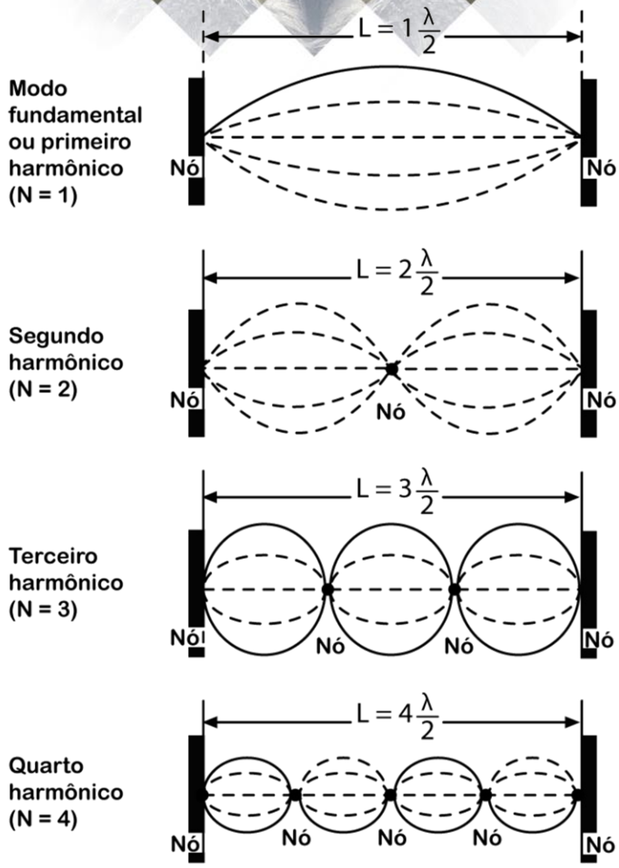


Figura 24: Modos normais de vibração na corda com extremidades fixas.

O primeiro modo de vibração $(n = 1)$ é chamado de **fundamental.** Os demais são chamados de segundo harmônico (primeiro sobretom), terceiro harmônico (segundo sobretom) e assim por diante.

A nomenclatura **modo normal** é devido ao movimento das partículas. Toda vez que as partículas oscilarem em um movimento senoidal, todas com a mesma frequência, teremos um modo normal.

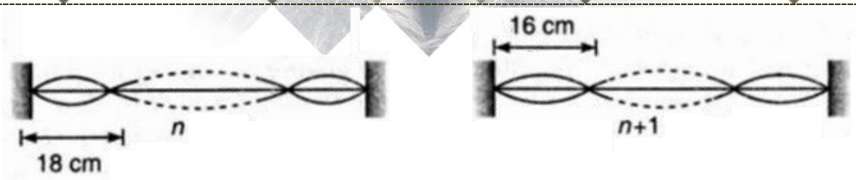
4.

Uma corda que tem as extremidades fixas tem modos normais de vibração consecutivos para distância entre nós consecutivos de 18 cm e 16 cm, respectivamente.

a) Qual é o menor comprimento possível para a corda?

b) Se a tração na corda é de 10 N e a sua densidade linear é de $4\ g/m$, qual é a sua frequência fundamental?

Comentário:



a) Pela figura, podemos escrever:

$$18n = L \text{ e } 16(n+1) = L$$

Assim, temos:

$$\boxed{L = 144\ cm}$$

b) Para a frequência fundamental:

$$f = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow f = \frac{1}{2 \cdot 1{,}44} \cdot \sqrt{\frac{10}{0{,}004}}$$

$$\boxed{f = 17{,}36\ Hz}$$

9. Introdução às ondas sonoras

De todas as ondas mecânicas que ocorrem na natureza, as mais importantes em nossa vida cotidiana são as ondas longitudinais chamadas ondas sonoras. A razão é que o ouvido humano é tremendamente sensível e pode detectar ondas sonoras mesmo com intensidade muito baixa.

O ouvido humano é sensível a ondas na faixa de frequências de cerca de 20 a 20000 Hz, chamada de faixa audível.

Usamos o termo som para ondas com frequências acima (ultrassônica) e abaixo (infra-sonora) do alcance da audição humana. Nossa principal preocupação neste capítulo é com as ondas sonoras no ar, mas o som pode viajar através de qualquer gás, líquido ou sólido.

9.1. Velocidade das ondas sonoras

O som pode se propagar através de qualquer meio. Para cada meio é possível determinar a velocidade do som.

9.1.1. Sons em líquidos

A velocidade do som em líquidos é guiada pelo módulo de compressibilidade B. O módulo de compressibilidade é a propriedade que a matéria apresenta quando sofre a ação de forças uniformemente distribuídas, produzindo uma diminuição de volume.

A velocidade do som em um líquido de densidade ρ e módulo de compressibilidade B é dada por:

$$\boxed{v_{líquido} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}}$$

Essa fórmula também é válida para os gases. Entretanto, para sistemas gasosos iremos refinar ainda mais a expressão.

9.1.2. Sons em sólidos

Ao contrário dos fluidos, a velocidade do som nos sólidos é guiada pelo módulo de Young (Υ) do material.

Considere uma barra de densidade ρ e módulo de Young Υ, a velocidade do som nessa barra é dada por:

$$\boxed{v_{sólido} = \sqrt{\frac{\Upsilon}{\rho}}}$$

9.1.3. Sons em gases

Como visto no tópico (9.1.1) a velocidade do som em gases é a mesma que nos líquidos.

$$v_{gases} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

Para sistemas gasosos, cabe uma importante pergunta: Quando uma onda viaja através de um gás, as compressões e expansões são adiabáticas ou há condução de calor suficiente entre as camadas adjacentes de gás para manter uma temperatura quase constante durante todo o processo?

Como as condutividades térmicas dos gases são muito pequenas, verifica-se que, para frequências de som comuns (20 Hz a 20000 Hz), a propagação do som é quase adiabática. Assim, na equação acima, usamos o módulo adiabático B_S, que é dado por:

$$B_S = \gamma \cdot P$$

Em que γ é o coeficiente de Poisson do gás e P é a pressão do gás. Então, temos:

$$v_{gases} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}}$$

A densidade de um gás pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\rho = \frac{PM}{RT} \Rightarrow \boxed{v_{gases} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}}$$

9.1.4. Efeito da temperatura, pressão e humidade na velocidade do som no ar

(A) Efeito da temperatura:

Para a equação da velocidade

$$v_{gases} = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

Temos:

$$v_{gases} \propto \sqrt{T}$$

Portanto:

$$\boxed{\frac{v_{gases,T1}}{v_{gases,T2}} = \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}}$$

Considere agora a CNTP, temperatura de 0°C ou 273 K e pressão de 1 bar. Se a velocidade do som a 273 K é v_0, encontraremos a velocidade do som a $T\ °C$.

$$\frac{v_0}{v_T} = \sqrt{\frac{273}{273+T}} \Rightarrow v_T = v_0\left(1+\frac{T}{273}\right)^{1/2}$$

Para as condições encontradas no planeta Terra, a temperatura T, que está em graus Celsius, oscila entre $-60°C\ e + 60\ °C$. Assim, é uma boa aproximar fazer:

$$\left(1+\frac{T}{273}\right)^{1/2} \approx \left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{T}{273}\right)$$

Portanto, considerando que a velocidade do som no ar a 0 °C é de aproximadamente 332 m/s, temos:

$$\boxed{v_T = 332\left(1+\frac{T}{546}\right)\ m/s}$$

(B) Efeito da pressão:

Considerando a fórmula:

$$v_{gases} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}}$$

Podemos inferir que $v_{gases} \propto \sqrt{P}$. Entretanto, isso não ocorre. Isso porque, temos:

$$\frac{P}{\rho} = \frac{RT}{M} = Constante\ para\ uma\ temperatura$$

Dessa maneira, para uma temperatura constante se P muda de valor a densidade do gás também muda, de tal forma que a razão fique constante. Assim, se a temperatura for constante, a pressão não exerce nenhuma influência sobre a velocidade do som no gás.

(C) Efeito da umidade:

A densidade do ar úmido é menor que a densidade do ar seco. Isso ocorre porque as partículas de poeira pesada do ar úmido se acalmam devido à condensação. Portanto, a densidade do ar diminui, aumentando a velocidade do som. Portanto, assumindo o valor de γ para o ar úmido igual ao do ar seco, resulta da fórmula $v_{gases} = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P}{\rho}}$ que a velocidade do som no ar úmido é ligeiramente maior que no ar seco.

9.2. Intensidade das ondas sonoras

A sensação fisiológica do som está intimamente relacionada à intensidade da onda que produz o som. Com uma frequência de 1 kHz, as pessoas são capazes de detectar sons com intensidades tão baixas quanto 10^{-12} W / m².

Por outro lado, uma intensidade de 1 W / m² pode causar dor e a exposição prolongada ao som nesse nível danificará os ouvidos de uma pessoa. Como o intervalo de intensidade sobre o qual as pessoas ouvem é tão grande, é conveniente usar uma escala logarítmica para especificar intensidades. Essa escala é definida da seguinte maneira.

Se a intensidade do som for I, o níve de intensidade β em decibeis (dB) é dada por:

$$\boxed{\beta = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right)}$$

Em que a $I_0 = Limiar\ da\ dor = 10^{-12}\ W/m^2$. Podemos montar uma tabela para as algumas intensidades encontradas em nosso cotidiano.

Som	Nível de intensidade (dB)
Sussurrar	20
Sala silenciosa	30
Fala normal	65
Barulho dos carros nas ruas	80
Ferramenta de rebite	100
Trovão	110
Show de Rock	120

5.

Uma fonte pontual emite uma potência constante. Em quantos decibéis cairá a intensidade sonora se caminharmos no ponto P1 para o ponto P2? A distância de P2 até a fonte é o dobro da distância de P1 até a fonte.

Comentário:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \left(log\left(\frac{I_2}{I_0}\right) - log\left(\frac{I_1}{I_0}\right) \right)$$

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)$$

Para fontes pontuais:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{(2R)^2}{R^2} = 4$$

Substituindo na primeira expressão:

$$\beta_2 - \beta_1 = 10 \cdot \log\left(\frac{1}{4}\right) \therefore \boxed{\beta_2 - \beta_1 = -6\ dB}$$

9.3. Interferência de ondas sonoras

O princípio da superposição também é válido para as ondas sonoras. Quando duas ou mais ondas se encontram em algum momento em um meio, a perturbação resultante é igual à soma das perturbações produzidas por ondas individuais. Dependendo da diferença de fase, as ondas podem interferir construtivamente, levando a um aumento ou diminuição correspondente na intensidade resultante.

Antes de estudar a interferência das ondas sonoras, vamos primeiro discutir os dois termos:

- Diferença de fase.
- Fontes coerentes.

9.3.1. Diferença de fase

A diferença de fase entre dois pontos diferentes P_1 e P_2, que tem Δx como diferença de caminho ou diferenças de tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, é:

$$\boxed{\frac{\Phi}{2\pi} = \frac{\Delta x}{\lambda} = \frac{\Delta t}{T}}$$

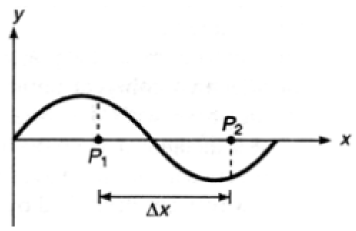


Figura 25: Diferença de caminho.

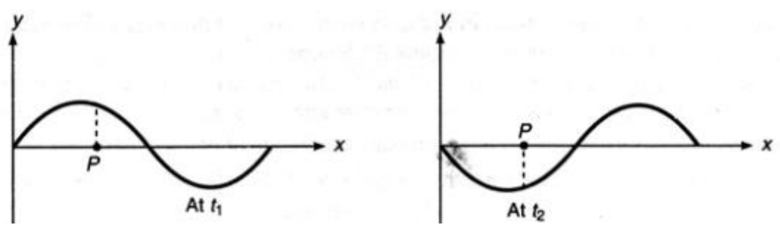


Figura 26: Diferença de tempo.

9.3.2. Fontes coerentes

Duas fontes que estão em fase ou têm uma diferença de fase constante são chamadas fontes coerentes. Para que as duas fontes sejam coerentes, suas frequências devem ser as mesmas. Mas o inverso nem sempre é verdadeiro, ou seja, duas fontes diferentes com a mesma frequência nem sempre são coerentes.

Se a diferença de fase das fontes muda aleatoriamente com o tempo, mesmo que tenham a mesma frequência, como as fontes são compostas por um grande número do de átomos, não há como ser coerente. Como existem muitos átomos envolvidos em cada fonte e eles não oscilam na fase, elas são incoerentes. Assim, duas fontes de luz diferentes não podem ser coerentes.

9.3.3. Interferência

Considere duas fontes coerentes S_1 e S_2 que oscilam em fase com mesma frequência angular ω. Um ponto P está situado a uma distância x de S_1 e $x + \Delta x$ de S_2, de tal maneira que a diferença de caminho é Δx.

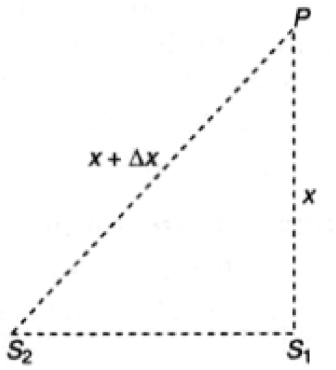


Figura 27: Fontes S1 e S2

Podemos modelar as equações de onda da seguinte maneira:

$$y_1 = A_1 \cdot sen(kx - \omega t) \text{ e } y_2 = A_2 \cdot sen(kx - \omega t + \Phi)$$

Com:

$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x$$

Desta maneira, a onda resultante no ponto P é dada por:

$$y = A \cdot sen(kx - \omega t + \theta)$$

Em que a amplitude é dada pela soma fasorial, vista nos tópicos anteriores:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2cos\Phi$$

Como $I \propto A^2$, temos a que a intensidade resultante em P é dada por:

$$\boxed{I_{P,coerente} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}cos\Phi}$$

A partir da expressão acima, podemos montar a seguinte tabela:

	Diferença de fase	Diferença de caminho	Intensidade

Interferência construtiva	$\Phi = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Delta x = k\lambda, k \in \mathbb{Z}$	$I = \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2$
Interferência destrutiva	$\Phi = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\Delta x = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda, k \in \mathbb{Z}$	$I = \left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2$

Se as fontes são incoerentes, a diferença de fase entre as fontes muda continuamente. Em qualquer ponto P, algumas vezes há interferências construtivas e outras vezes há destrutivas. Se a intensidade devida a cada fonte for I, a intensidade resultante varia rápida e aleatoriamente entre $4I$ e zero, de modo que a intensidade média observável é $2I$. Se as intensidades devidas a fontes individuais são I_1 e I_2, a intensidade resultante é:

$$\boxed{I_{P,incoerente} = I_1 + I_2}$$

Portanto, nenhum efeito de interferência é observado. Para a interferência ser observável, as fontes devem ser coerentes. Uma maneira de obter um par de fontes coerentes é obter duas ondas sonoras da mesma fonte, dividindo a onda original por dois caminhos diferentes e combinando-as. As duas ondas diferem na fase apenas por causa dos diferentes caminhos percorridos.

9.4. Ondas sonoras em tubos fechados

Para ressonar em um tubo de órgão fechado, as ondas sonoras são enviadas por uma fonte (normalmente um garfo de afinação) perto da extremidade aberta. A ressonância corresponde a um antinó de pressão na extremidade fechada e um nó de pressão na extremidade aberta.

Desta maneira, sempre deverá existir um múltiplo impar de $\lambda/4$ confinado no interior do tubo. Se o tubo tem comprimento L, temos:

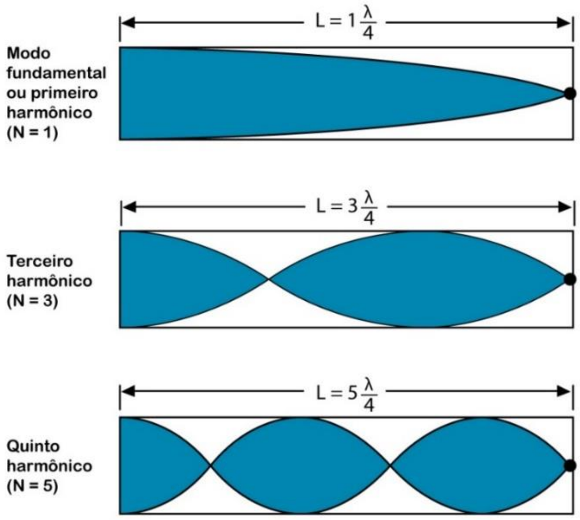


Figura 28: Tubo fechado em uma das extremidades.

$$L = N \cdot \frac{\lambda}{4}, \ \ N \ \epsilon \ \{1,3,5,7, \dots, 2k+1\}$$

$$L = N \cdot \frac{v}{4 \cdot f}, \ \ N \ \epsilon \ \{1,3,5,7, \dots, 2k+1\}$$

$$\boxed{f = \frac{N \cdot v}{4 \cdot L}, \qquad N \ \epsilon \ \{1,3,5,7, \dots, 2k+1\}}$$

Em que v é a velocidade do som no interior do tubo.

- $f_1 = \frac{v}{4 \cdot L} = Frequência\ fundamental\ do\ primeiro\ harmônico.$
- $f_3 = \frac{3v}{4 \cdot L} = Primeiro\ sobretom\ ou\ terceiro\ harmônico.$
- $f_5 = \frac{5v}{4 \cdot L} = segundo\ sobretom\ ou\ quinto\ harmônico.$

Assim, essa sequência se espande indefinidamente.

9.5. Ondas sonoras em tubos abertos

Como as duas extremidades do tubo estão abertas, existem nós de pressão nas duas extremidades.

Considere um tubo que tenha comprimento L. Uma vez que a distância entre os nós de pressão é $\lambda/4$, a condição de ressonância é:

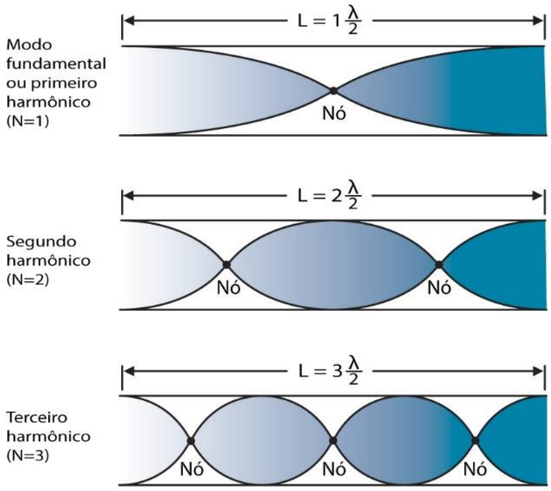


Figura 29: Tubo com duas extremidades abertas.

$$L = N \cdot \frac{\lambda}{2}, \ \ N \ \epsilon \ \{1,2,3,4, \dots, n\}$$

$$L = N \cdot \frac{v}{2 \cdot f}, \qquad N \ \epsilon \ \{1,2,3,4, \dots, n\}$$

$$\boxed{f = \frac{N \cdot v}{2 \cdot L}, \qquad N \ \epsilon \ \{1,2,3,4, \dots, n\}}$$

Em que v é a velocidade do som no interior do tubo.

- $f_1 = \frac{v}{2 \cdot L} = Frequência\ fundamental\ do\ primeiro\ harmônico.$
- $f_2 = \frac{v}{L} = Primeiro\ sobretom\ ou\ segundo\ harmônico.$
- $f_3 = \frac{3v}{2 \cdot L} = segundo\ sobretom\ ou\ terceiro\ harmônico.$

Assim, essa sequência se espande indefinidamente.

9.6. Batimentos

Quando duas de onda da mesma frequência viajam ao longo da mesma linha em direções opostas, ondas estacionárias são formadas de acordo com o princípio da superposição. Nas ondas estacionárias, a amplitude é uma função da distância. Isso ilustra um tipo de interferência que podemos chamar de interferência no espaço.

O mesmo princípio de superposição nos leva a outro tipo de interferência, que podemos chamar de **interferência no tempo**. Ocorre quando duas onda de frequência ligeiramente diferente viajam pela mesma região. Se as ondas estiverem em fase em algum momento, a interferência será construtiva e a amplitude resultante nesse momento será $A_1 + A_2$, em que A_1 e A_2 são as amplitudes deonda individuais.

Porém, em algum momento posterior ($t = t_0$), como as frequências são diferentes, as ondas ficarão fora de fase ou a interferência será destrutiva e a amplitude resultante será $A_1 - A_2$.

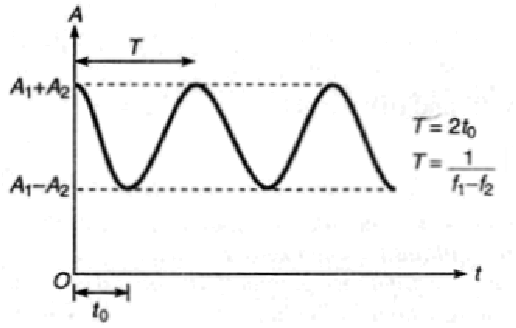


Figura 30: Variação de amplitude e batimento.

Deste modo, a amplitude resultante oscila entre $A_1 + A_2$ e $A_1 - A_2$ com um período:

$$T = 2t_0 = \frac{1}{f_1 - f_2}$$

Ou com frequência:

$$f = f_1 - f_2$$

A frequência encontrada acima é chamada de frequência de batimento.

$$\boxed{f_{batimento} = f_1 - f_2}$$

9.6.1. Cálculo da frequência de batimento

Considere duas ondas de frequências f_1 e f_2 se encontrando em um mesmo ponto do espaço. Os períodos correspondentes são T_1 e T_2. Se as duas ondas estão em fase em t =0, elas estarão novamente em fase quando a primeria tiver executado exatamente um ciclo a mais que a segunda. Isso ocorre no tempo $t = T$, que é o período de batimento.

$$T = n \cdot T_1$$
$$T = (n - 1) \cdot T_2$$

Deste modo, temos:

$$T = \frac{1}{f_1 - f_2} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{T} = f_1 - f_2}$$

10. Efeito Doppler

Se a fonte de onda e um receptor estiverem se movendo um em relação ao outro, a frequência observada pelo receptor (f') será diferente da frequência real da fonte (f). Esse fenômeno é chamado efeito Doppler.

Consideramos o caso especial em que a fonte e o observador se movem ao longo da linha que os une. Usaremos os seguintes símbolos:

$$v = velocidade\ do\ som;\ v_s = velocidade\ da\ fonte; \text{ e } v_0 = velocidade\ do\ observador$$

10.1. Fonte em repouso, observador se movendo

Considere um observador O se aproximando da fonte S com uma velocidade v_0. A velocidade do som relativa à O é dada por:

$$v_r = v + v_0$$

Entretanto, o comprimento de onda tem seu valor normal $\lambda = v/f$. Então, a frequência ouvida pelo observador é:

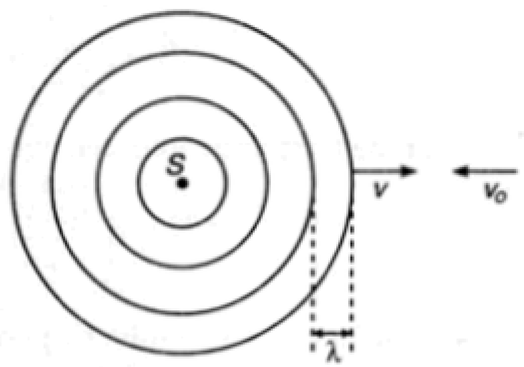


Figura 31: Observador se aproximando da fonte.

$$f' = \frac{v_r}{\lambda} \Rightarrow f' = \frac{v + v_0}{v/f} \Rightarrow f' = \frac{v + v_0}{v} \cdot f$$

Se o observador está se afastando da fonte, temos:

$$f' = \frac{v - v_0}{v} \cdot f$$

Combinando as duas expressões, temos:

$$\boxed{f' = \frac{v \pm v_0}{v} \cdot f}$$

$$\begin{cases} (+) \leftrightarrow Aproximando\ da\ fonte \\ (-) \leftrightarrow Afastando\ da\ fonte \end{cases}$$

10.2. Fonte se movendo, observador em repouso

Suponha que a fonte S está se movendo em direção à O, como mostra a figura (32). Se S estivesse em repouso, a distância entre dois consecutivos pulsos de onda e teria sido $\lambda = \frac{v}{f} = vT$.

Entretanto, em um período, a fonte moveu-se uma distância $v_s T$ antes de emitir o próximo pulso. O resultado desse deslocamento é a mudança no comprimento de onda.

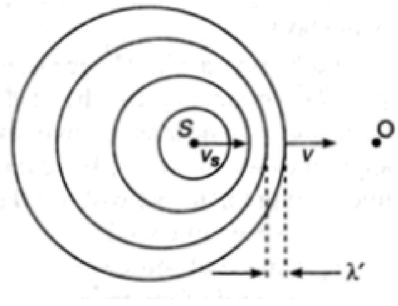


Figura 32: Fonte se movendo

$$\lambda' = vT - v_s T \Rightarrow \lambda' = \frac{v - v_s}{f}$$

A velocidade do som relativa à O é simplesmente v. Deste modo, a frequência observada é dada por:

$$f' = \frac{v}{v - v_s} \cdot f$$

Se a fonte estivesse se afastando do observador, teríamos:

$$f' = \frac{v}{v + v_s} \cdot f$$

Combinando as duas expressões, temos:

$$\boxed{f' = \frac{v}{v \pm v_s} \cdot f} \begin{cases} (-) \leftrightarrow Aproximando\ da\ fonte \\ (+) \leftrightarrow Afastando\ da\ fonte \end{cases}$$

10.3. Combinação dos resultados

Se a fonte e observador estão se movendo, podemos unir as duas expressões acima.

$$\boxed{\frac{f_{emitida}}{v_{som} \pm v_{fonte}} = \frac{f_{aparente}}{v_{som} \pm v_{observador}}}$$

A convenção de sinal é feita seguindo os seguintes passos:

1° - Faça um segmento orientado do observador até a fonte. O observador é a origem do segmento e a fonte é a extremidade.

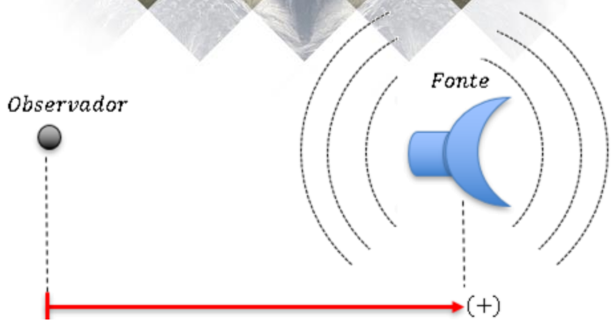


Figura 33: Segmento orientado do observador para a fonte.

2° - As velocidades que possuírem o mesmo sentido que o segmento orientado usamos o sinal positivo. As velocidades com sentido contrário recebem sinal negativo.

Como exemplo, se no caso da figura (33) o observador estiver aproximando da fonte e a fonte estiver se aproximando do observador, usamos:

$$\frac{f}{v - v_s} = \frac{f'}{v + v_0}$$

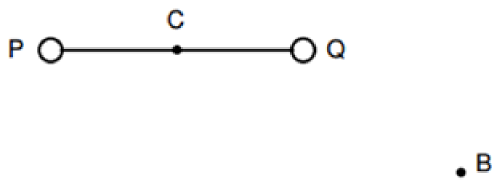
Entretanto, se no caso da figura (33) o observador estiver se aproximando da fonte e a fonte estiver se afastando do observador, usa-se:

$$\frac{f}{v + v_s} = \frac{f'}{v + v_0}$$

11. Lista de questões

1. (IME 2015)

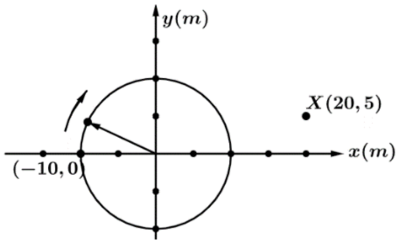
A figura acima apresenta duas fontes sonoras P e Q que emitem ondas de mesma frequência. As fontes estão presas às extremidades de uma haste que gira no plano da figura com velocidade angular constante em torno do ponto C, equidistante de P e Q. Um observador, situado no ponto B também no plano da figura, percebe dois tons sonoros simultâneos distintos devido ao movimento das fontes. Sabendo-se que, para o observador, o menor intervalo de tempo entre a percepção de tons com a máxima frequência possível é T e a razão entre a máxima e a mínima frequência de tons é k, determine a distância entre as fontes.



Dado: velocidade da onda sonora: v e a distância entre B e C é maior que a distância entre P e C.

2. (IME 2002)

Um corpo realiza um movimento circular uniforme, no sentido horário, com velocidade angular w = π rad/s sobre uma circunferência de raio igual a 10 metros emitindo um tom de 1 kHz, conforme a figura abaixo. Um observador encontra-se no ponto de coordenadas (20, 5), escutando o som emitido pelo corpo. Aciona-se um cronômetro em t = 0, quando o corpo passa pelo ponto (–10, 0). Levando em consideração o efeito Doppler, determine:



a) a menor frequência percebida pelo observador;

b) a maior frequência percebida pelo observador;

c) a frequência percebida em t = 1/6 s.

Dado: velocidade do som = 340 m/s

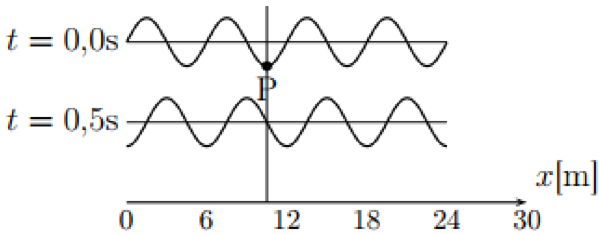
3. (ITA 2018)

Em Queixa a polícia, um músico depõe ter sido quase atropelado por um carro, tendo distinguido o som em Mi da buzina na aproximação do carro e em Ré, no seu afastamento. Então, com base no fato de ser 10/9 a relação das frequências $\nu_{Mi}/\nu_{Ré}$, a perícia técnica conclui que a velocidade do carro, em km/h, deve ter sido aproximadamente de

a) 64 b) 71 c) 83 d) 102 e) 130

4. (ITA 2017)

Uma corda harmônica propaga-se para a direita com velocidade constante em uma corda de densidade linear $\mu = 0{,}4\ g/cm$. A figura mostra duas fotos da corda, uma num instante t = 0 s e a outra no instante t = 0,5 s. Considere as seguintes afirmativas:



I. A velocidade mínima do ponto P da corda é de 3 m/s.

II. O ponto P realiza um movimento oscilatório com período de 0,4 s.

III. A corda está submetida a uma tensão de 0,36 N.

Assinale a(s) afirmativa(as) possível(possíveis) para o movimento da onda na corda

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

5. (ITA – 2017)

Duas cordas de mesmo comprimento, de densidades μ_1e μ_2, tendo a primeira o dobro da massa da outra, são interconectadas formando uma corda única afixada em anteparos Inter distantes de l. Dois pulsos propagam-se ao mesmo tempo em sentidos opostos nessa corda. Determine o instante e a posição em que os pulsos se encontram sabendo que a corda está submetida a uma tensão T.

6. (ITA-2016)

Um dado instrumento, emitindo um único som de frequência f_0, é solto no instante $t = 0s$ de uma altura h em relação ao chão onde você, imóvel, mede a frequência f que a cada instante chega aos seus ouvidos. O gráfico resultante de $\frac{1}{f}\ x\ t$ mostra uma reta de coeficiente angular $-3 \cdot 10^{-5}$. Desprezando a resistência do ar, determine o valor de f_0.

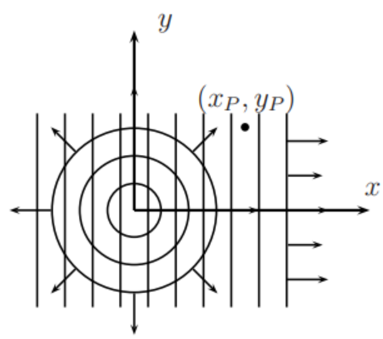
7. (ITA-2015)

Um fio de comprimento L e massa específica linear μ é mantido esticado por uma força F em suas extremidades. Assinale a expressão do tempo que um pulso demora para percorre-lo.

a) $\frac{2LF}{\mu}$ b) $\frac{F}{2\pi L\mu}$ c) $L\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ d) $\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ e) $\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{F}}$

8. (ITA-2012)

Em uma superfície líquida, na origem de um sistema de coordenadas encontra-se um emissor de ondas circulares transversais. Bem distante dessa origem, elas têm a forma aproximada dada por $h_1(x,y,t) = h_0 sen\left(2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - ft\right)\right)$, em que λ é o comprimento de onda, f é a frequência e r, a distância de um ponto da onda até a origem. Uma onda plana transversal com a forma $h_2(x,y,t) = h_0 sen\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right)$ superpõe-se à primeira, conforme a figura. Na situação descrita, podemos afirmar, sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, que



a) nas posições $\left(\frac{y_P^2}{2n\lambda} - \frac{n\lambda}{8}, y_p\right)$ as duas ondas estão em fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$.

b) nas posições$\left(\frac{y_P^2}{2n\lambda} - \frac{n\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

c) nas posições$\left(\frac{y_P^2}{2n\lambda} - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

d) nas posições$\left(\frac{y_P^2}{(2n+1)\lambda} - \frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$.

e) na posição $\left(\frac{2y_P^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{8}, y_p\right)$ a diferença de fase entre as ondas é de 45°.

9. (ITA-2011)

Uma pessoa de 80,00 kg deixa-se cair verticalmente de uma ponte amarrada a uma corda elástica de “bungee jumping” com 16,0 m de comprimento. Considere que a corda se esticará até 20,0 m de comprimento sob a ação do peso. Suponha que, em todo o trajeto, a pessoa toque continuamente uma vuvuzela, cuja frequência natural é de 235 Hz. Qual(is) é(são) a(s) distância(s) abaixo da ponte em que a pessoa se encontra para que um som de 225 Hz seja percebido por alguém parado sobre a ponte?

a) 11,4 m b) 11,4 m e 14,4 m c) 11,4 m e 18,4 m

d) 14,4 m e 18,4 m e) 11,4 m, 14,4 m e 18,4 m

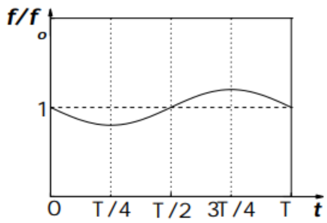
10. (ITA 2011)

O tubo mais curto de um órgão típico de tubos tem um comprimento de aproximadamente 7 cm. Qual é o harmônico mais alto na faixa audível, considerada como estando entre 20 Hz e 20.000 Hz, de um tubo deste comprimento aberto nas duas extremidades?

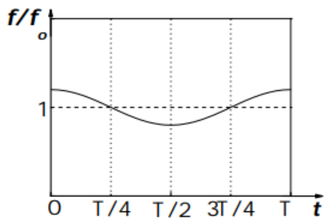
11. (ITA 2010)

Uma jovem encontra-se no assento de um carrossel circular que gira a uma velocidade angular constante com período T. Uma sirene posicionada fora do carrossel emite um som de frequência f_0 em direção ao centro de rotação. No instante $t = 0$, a jovem está à menor distância em relação à sirene. Nesta situação, assinale a melhor representação da frequência f ouvida pela jovem.

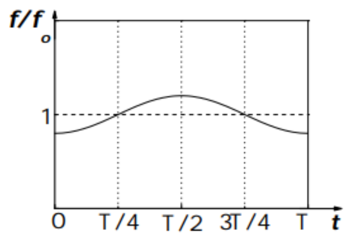
a)



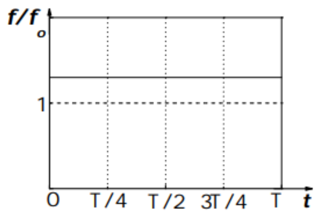
b)



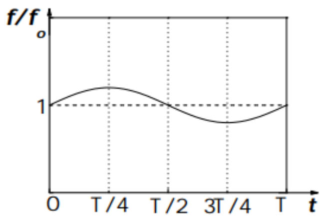
c)



d)



e)



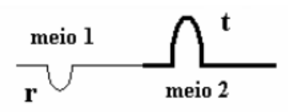
12. (ITA-2008)

No estudo de ondas que se propagam em meios elásticos, a impedância característica de um material é dada pelo produto da sua densidade pela velocidade da onda nesse material, ou seja, $z = \mu \cdot v$. Sabe-se, também, que uma onda de amplitude a_1, que se propaga em um meio 1 ao penetrar em uma outra região, de meio 2, origina ondas, refletida e transmitida, cuja amplitude são, respectivamente:

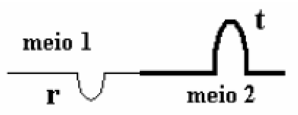
$$a_r = \frac{\frac{z_1}{z_2}-1}{\frac{z_1}{z_2}+1} \cdot a_1 \text{ e } a_t = \frac{2}{\frac{z_2}{z_1}+1} \cdot a_1$$

Num fio, sob tensão T, a velocidade da onda nesse meio é dada por $v = \sqrt{\mu/T}$. Considere agora o caso de uma onda que se propaga num fio de densidade linear μ (meio 1) e penetra num trecho desse fio em que a densidade linear muda para 4μ (meio 2). Indique a figura que representa corretamente as ondas refletidas (r) e transmitida (t).

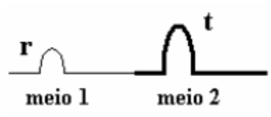
a)



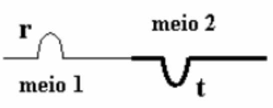
b)



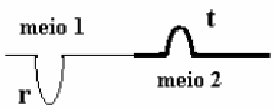
c)



d)

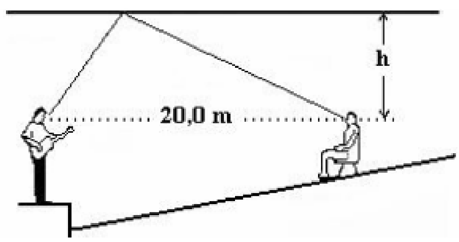


e)



13. (ITA-2008)

Um apreciador de música ao vivo vai a um teatro, que não dispõe de amplificação eletrônica, para assistir a um show de seu artista predileto. Sendo detalhista, ele toma todas as informações sobre as dimensões do auditório, cujo teto é plano e nivelado. Estudos comparativos em auditórios indicam preferência para aqueles em que seja de 30 ms a diferença de tempo entre o som direto e aquele que primeiro chega após uma reflexão. Portanto, ele conclui que deve se sentar a 20 m do artista, na posição indicada na figura. Admitindo a velocidade do som no ar de 340 m/s, a que altura h deve estar o teto com a relação à sua cabeça?



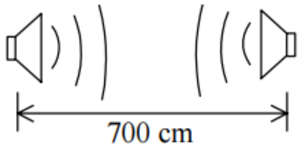
14. (ITA-2007)

Numa planície, um balão meteorológico com um emissor e receptor de som é arrastado por um vento forte de 40 m/s contra a base de uma montanha. A frequência do som emitido pelo balão é de 570 Hz e a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s. Assinale a opção que indica a frequência refletida pela montanha e registrada no receptor do balão.

a) 450 Hz b) 510 Hz c) 646 Hz d) 722 Hz e) 1292 Hz

15. (ITA-2007)

A figura mostra dois alto-falantes alinhados em fase por um amplificador de áudio na frequência de 170 Hz. Considere que seja desprezível a variação da intensidade do som de cada um dos alto-falantes com a distância e que a velocidade do som é de 340 m/s. A maior distância entre dois máximos de intensidade da onda sonora formada entre os alto-falantes é igual a



a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m e) 6 m

16. (ITA-2006)

Considere duas ondas que se propagam com frequências f_1 e f_2, ligeiramente diferentes entre si, e mesma amplitude A, cujas equações são respectivamente $y_1(t) = Acos(2\pi f_1 t)$ e $y_2(t) = Acos(2\pi f_2 t)$. Assinale a opção que indica corretamente:

	Amplitude máxima da onda resultante	Frequência da onda resultante	Frequência de batimento
a)	$A\sqrt{2}$	$f_1 + f_2$	$\frac{f_1 - f_2}{2}$
b)	$2A$	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$\frac{f_1 - f_2}{2}$
c)	$2A$	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$f_1 - f_2$
d)	$A\sqrt{2}$	$f_1 + f_2$	$f_1 - f_2$
e)	A	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$f_1 - f_2$

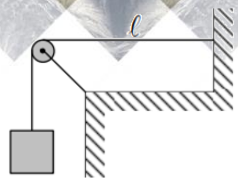
17. (ITA 2005)

Uma banda de rock irradia certa potência em um nível de intensidade sonora igual a 70 decibéis. Para elevar esse nível a 120 decibéis, a potência irradiada deverá ser elevada de:

a) 71% b) 171% c) 7100% d) 9999900 % e) 10000000%

18. (ITA-2005)

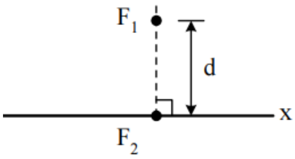
São de 100 Hz e 125 Hz, respectivamente, as frequências de duas harmônicas adjacentes de uma onda estacionária no trecho horizontal de um cabo esticado, de comprimento $l = 2\ m$ e densidade linear de massa igual a 10 g/m (veja a figura). Considerando a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, a massa do bloco suspenso deve ser de:



a) 10 kg b) 16 kg c) 60 kg d) 100 kg e) 10000 kg

19. (ITA-2004)

Na figura F1 e F2 são fontes sonoras idênticas que emitem, em fase, ondas de frequência f e comprimento de onda λ. A distância d entre as fontes é igual a 3λ. Pode-se então afirmar que a menor distância não nula, tomada a partir de F2, ao longo do eixo x, para a qual ocorre interferência construtiva, é igual a



a) $4\lambda/5$ b) $5\lambda/4$ c) $3\lambda/2$ d) 2λ e) 4λ

20. (ITA-2004)

Um tubo sonoro de comprimento l, fechado numa das extremidades, entra em ressonância, no seu modo fundamental, com o som emitido por um fio, fixado nos extremos, que também vibra no modo fundamental. Sendo L o comprimento do fio, m sua massa e c, a velocidade do som no ar, pode-se afirmar que a tensão submetida ao fio é dada por:

a) $\left(\frac{c}{2L}\right)^2 ml$ b) $\left(\frac{c}{2l}\right)^2 mL$ c) $\left(\frac{c}{l}\right)^2 mL$

d) $\left(\frac{c}{l}\right)^2 ml$ e) n.d.a

12. Gabarito sem comentários

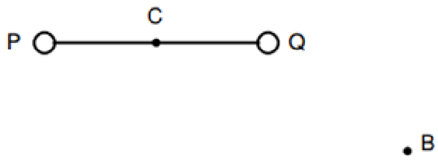
1. a) $915{,}4\ Hz$ b) $1101{,}8\ Hz$ c) $1048{,}4\ Hz$
2. $d = \frac{2 \cdot T \cdot v_S}{\pi} \cdot \frac{k-1}{k+1}$
3. A
4. E
5. $\frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}(1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$
6. 980 Hz
7. C
8. D

9. C
10. N = 8
11. A
12. A
13. 11,3 m
14. D
15. E
16. C
17. D
18. A
19. B
20. B

13. Lista de questões comentadas

1. (IME 2015)

A figura acima apresenta duas fontes sonoras P e Q que emitem ondas de mesma frequência. As fontes estão presas às extremidades de uma haste que gira no plano da figura com velocidade angular constante em torno do ponto C, equidistante de P e Q. Um observador, situado no ponto B também no plano da figura, percebe dois tons sonoros simultâneos distintos devido ao movimento das fontes. Sabendo-se que, para o observador, o menor intervalo de tempo entre a percepção de tons com a máxima frequência possível é T e a razão entre a máxima e a mínima frequência de tons é k, determine a distância entre as fontes.



Dado: velocidade da onda sonora: v e a distância entre B e C é maior que a distância entre P e C.

Comentários:

A máxima frequência é percebida quando uma das fontes se move na sua direção com sentido de aproximação ao ponto B. Isso ocorre duas vezes a cada período, sendo uma vez por conta da fonte P e outra por conta da fonte Q. O período do movimento circular, portanto, é de $2 \cdot T$.

Pelo efeito Doppler:

$$f = f_0 \cdot \frac{v_s}{v_s \pm v_f}$$

$$k = \frac{f_0 \cdot \dfrac{v_s}{v_s - v_f}}{f_0 \cdot \dfrac{v_s}{v_s + v_f}} = \frac{v_s + v_f}{v_s - v_f} \Rightarrow k \cdot v_s - k \cdot v_f = v_s + v_f$$

$$v_f \cdot (k+1) = (k-1) \cdot v_s \Longrightarrow v_f = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_s$$

A velocidade escalar das fontes também pode ser obtida pela relação entre as grandezas lineares e angulares, isto é:

$$v_f = \frac{d}{2} \cdot \omega = \frac{d}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot T} = \frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{T}$$

Igualando:

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{\pi}{T} = \frac{k-1}{k+1} \cdot v_s \Longrightarrow \boxed{d = \frac{2 \cdot T \cdot v_s}{\pi} \cdot \frac{k-1}{k+1}}$$

GABARITO: $\boldsymbol{d = \frac{2 \cdot T \cdot v_s}{\pi} \cdot \frac{k-1}{k+1}}$

---

2. (IME 2002)

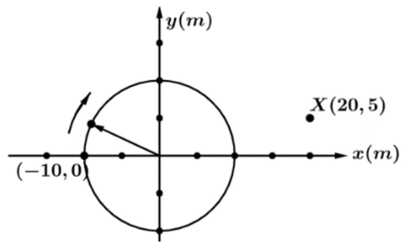
Um corpo realiza um movimento circular uniforme, no sentido horário, com velocidade angular w = π rad/s sobre uma circunferência de raio igual a 10 metros emitindo um tom de 1 kHz, conforme a figura abaixo. Um observador encontra-se no ponto de coordenadas (20, 5), escutando o som emitido pelo corpo. Aciona-se um cronômetro em t = 0, quando o corpo passa pelo ponto (–10, 0). Levando em consideração o efeito Doppler, determine:

a) a menor frequência percebida pelo observador;

b) a maior frequência percebida pelo observador;

c) a frequência percebida em t = 1/6 s.

Dado: velocidade do som = 340 m/s



Comentários:

Pelo efeito Doppler para um observador fixo:

$$f = f_0 \cdot \frac{v_s}{v_s \pm v_f}$$

A frequência mínima é percebida quando a fonte se move na direção do observador com sentido afastando-se do observador. Nesse caso:

$$v_f = 10 \cdot \pi \Rightarrow f = 1000 \cdot \frac{340}{340 + 10 \cdot \pi} = 915{,}4\ Hz$$

A frequência máxima é percebida quando a fonte se move na direção do observador com sentido aproximando-se do observador. Nesse caso:

$$v_f = 10 \cdot \pi \Rightarrow f = 1000 \cdot \frac{340}{340 - 10 \cdot \pi} = 1101{,}8\ Hz$$

Para $t = \frac{1}{6}\ s$, a partícula está na posição:

$$P = \left(-5 \cdot \sqrt{3}\ ;\ 5\right)$$

Sua velocidade é dada pelo vetor:

$$v = 10 \cdot \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\ ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

O vetor que une o observador e a fonte é paralelo à horizontal. Portanto, a velocidade da fonte considerada é somente à que está nessa direção:

$$v_{f_x} = 5 \cdot \pi$$

A frequência é dada por:

$$f = 1000 \cdot \frac{340}{340 - 5 \cdot \pi} = 1048{,}4\ Hz$$

Gabarito: a) $915{,}4\ Hz$ b) $1101{,}8\ Hz$ c) $1048{,}4\ Hz$

---

3. (ITA 2018)

Em Queixa a polícia, um músico depõe ter sido quase atropelado por um carro, tendo distinguido o som em Mi da buzina na aproximação do carro e em Ré, no seu afastamento. Então, com base no fato de ser 10/9 a relação das frequências $\nu_{Mi}/\nu_{Ré}$, a perícia técnica conclui que a velocidade do carro, em km/h, deve ter sido aproximadamente de

a) 64 b) 71 c) 83 d) 102 e) 130

Comentários:

Pela fórmula baseado no efeito Doppler:

$$f_{aparente} = f \cdot \frac{v_{som} \pm v_{obj}}{v_{som} \pm v_{fonte}}$$

Ajustando os sinais para cada caso, tem-se:

$$v_{Mi} = f \cdot \frac{v_{som}}{v_{som} - v} \ \text{ e } \ v_{Ré} = f \cdot \frac{v_{som}}{v_{som} + v}$$

$$\frac{v_{Mi}}{v_{Ré}} = \frac{v_{som} + v}{v_{som} - v} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1224 + v}{1224 - v}$$

$$1224 \cdot 10 - 10 \cdot v = 9 \cdot 1224 + 9 \cdot v$$

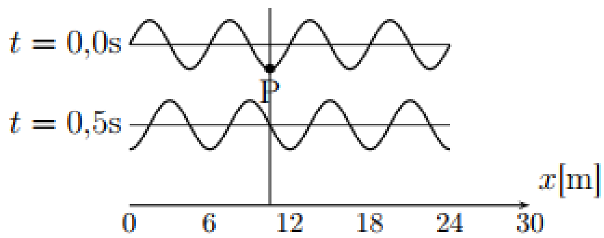
$$1224 = 19 \cdot v \therefore v \cong 64{,}42\ km/h$$

Gabarito: A

---

4. (ITA 2017)

Uma corda harmônica propaga-se para a direita com velocidade constante em uma corda de densidade linear $\mu = 0{,}4\ g/cm$. A figura mostra duas fotos da corda, uma num instante t = 0 s e a outra no instante t = 0,5 s. Considere as seguintes afirmativas:



I. A velocidade mínima do ponto P da corda é de 3 m/s.

II. O ponto P realiza um movimento oscilatório com período de 0,4 s.

III. A corda está submetida a uma tensão de 0,36 N.

Assinale a(s) afirmativa(as) possível(possíveis) para o movimento da onda na corda

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

Comentários:

Pela imagem, nota-se que houve uma passagem de $\frac{1}{4}+k$ comprimentos de onda, sendo k um número inteiro. Assim:

$$T=\frac{0,5\cdot 4}{4k+1}=\frac{2}{4k+1}$$

(II é possível): Com esse período, tem-se que:

$$f=\frac{1}{T}=\frac{4k+1}{2}$$

$$v=\lambda\cdot f=6\cdot\frac{4k+1}{2}=3\cdot(4k+1)\ m/s$$

Entretanto, esta é a velocidade de propagação da onda. O ponto P em si não se desloca na horizontal. Portanto, quando sua velocidade vertical for nula (quando P for crista ou vale) a velocidade de P será nula.

(I é falso): Com essa velocidade:

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}=5\sqrt{T}$$

$$T=\frac{v^2}{25}=\frac{\left(3\cdot(4k+1)\right)^2}{25}=0,36\cdot(4k+1)^2$$

(III é possível): Logo, a alternativa correta é **letra E.**

Gabarito: E

---

5. **(ITA – 2017)**

Duas cordas de mesmo comprimento, de densidades μ_1e μ_2, tendo a primeira o dobro da massa da outra, são interconectadas formando uma corda única afixada em anteparos Inter distantes de l. Dois pulsos propagam-se ao mesmo tempo em sentidos opostos nessa corda. Determine o instante e a posição em que os pulsos se encontram sabendo que a corda está submetida a uma tensão T.

Comentários:

Como:

$$v=\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Tem-se que:

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Como $v_2 > v_1$, a onda que se propaga na corda 2 irá chegar à junção das cordas e transmitir-se para a corda 1. Assim:

$$t_1 = \frac{\frac{l}{2}}{v_2} = \frac{l}{2 \cdot v_2}$$

Em que t_1 é o tempo até a onda na corda 2 atingir a junção. Nesse intervalo de tempo, a onda na corda 1 deslocou-se:

$$S_1 = v_1 \cdot t_1 = \frac{v_1}{v_2} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot l$$

Quando a onda da corda 2 passa a propagar-se na corda 1, sua velocidade passar a ser v_1. Portanto, o tempo necessário até o encontro é dado por:

$$t_2 = \frac{\frac{l}{2} - S_1}{2 \cdot v_1} = \frac{l\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)}{2 \cdot v_1} = \frac{l \cdot (2 - \sqrt{2})}{8 \cdot v_1}$$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{l}{2} \cdot \left(\frac{1}{v_2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4 \cdot v_1}\right) = \frac{l}{2} \cdot \left(\sqrt{\frac{\mu_2}{T}} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\frac{\mu_1}{T}}\right)$$

$$t = \frac{l}{2 \cdot \sqrt{T}} \cdot \left(\sqrt{\mu_2} + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{\mu_1}\right)$$

Mas $\sqrt{\mu_2} = \sqrt{\frac{\mu_1}{2}}$

$$t = \frac{l \cdot \sqrt{\mu_1}}{2 \cdot \sqrt{T}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{l}{4} \cdot \sqrt{\frac{\mu_1}{T}} \cdot \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{l}{4}\sqrt{\frac{\mu_1}{T}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$

---

6. (ITA-2016)

Um dado instrumento, emitindo um único som de frequência f_0, é solto no instante $t = 0s$ de uma altura h em relação ao chão onde você, imóvel, mede a frequência f que a cada instante chega aos seus ouvidos. O gráfico resultante de $\frac{1}{f}$ x t mostra uma reta de coeficiente angular $-3 \cdot 10^{-5}$. Desprezando a resistência do ar, determine o valor de f_0.

Comentários:

Conforme a equação:

$$f_{ap} = f_0 \cdot \frac{v_s \pm v_{obs}}{v_s \pm v_f}$$

No caso do problema:

$$f_{ap} = f_0 \cdot \frac{v_s}{v_s - g \cdot t} \Rightarrow \frac{1}{f_{ap}} = \frac{1}{f_0} \cdot \frac{v_s - g \cdot t}{v_s}$$

$$\frac{1}{f_{ap}} = \frac{1}{f_0} \cdot \left(1 - \frac{g \cdot t}{v_s}\right)$$

Considerando o coeficiente angular igual a $-3 \cdot 10^{-5}$:

$$\frac{g}{f_0 \cdot v_s} = 3 \cdot 10^{-5} \Rightarrow f_0 = \frac{g}{3 \cdot 10^{-5} \cdot v_s} = \frac{10}{3 \cdot 10^{-5} \cdot 340} \cong 980\ Hz$$

Gabarito: 980 Hz

---

7. (ITA-2015)

Um fio de comprimento L e massa específica linear μ é mantido esticado por uma força F em suas extremidades. Assinale a expressão do tempo que um pulso demora para percorre-lo.

a) $\frac{2LF}{\mu}$ b) $\frac{F}{2\pi L\mu}$ c) $L\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ d) $\frac{L}{\pi}\sqrt{\frac{\mu}{F}}$ e) $\frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu}{F}}$

Comentários:

A velocidade de um pulso em uma corda é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

O tempo para que a onda percorra toda a corda é dado por:

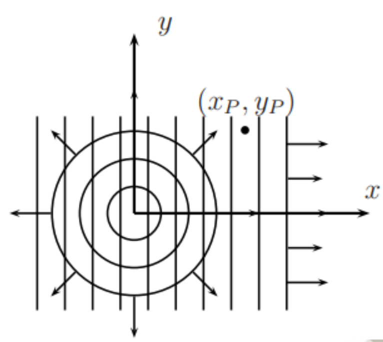
$$t = \frac{L}{v} = \frac{L}{\sqrt{\frac{F}{\mu}}} = L \cdot \sqrt{\frac{\mu}{F}}$$

Gabarito: C

---

8. (ITA-2012)

Em uma superfície líquida, na origem de um sistema de coordenadas encontra-se um emissor de ondas circulares transversais. Bem distante dessa origem, elas têm a forma aproximada dada por $h_1(x,y,t) = h_0 sen\left(2\pi\left(\frac{r}{\lambda} - ft\right)\right)$, em que λ é o comprimento de onda, f é a frequência e r, a distância de um ponto da onda até a origem. Uma onda plana transversal com a forma $h_2(x,y,t) = h_0 sen\left(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - ft\right)\right)$ superpõe-se à primeira, conforme a figura. Na situação descrita, podemos afirmar, sendo $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, que



a) nas posições $\left(\frac{y_p^2}{2n\lambda}-\frac{n\lambda}{8}, y_p\right)$ as duas ondas estão em fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$.

b) nas posições$\left(\frac{y_p^2}{2n\lambda}-\frac{n\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

c) nas posições$\left(\frac{y_p^2}{2n\lambda}-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$.

d) nas posições$\left(\frac{y_p^2}{(2n+1)\lambda}-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\lambda}{2}, y_p\right)$ as duas ondas estão em oposição de fase se n $\epsilon\ \mathbb{Z}$.

e) na posição $\left(\frac{2y_p^2}{\lambda}-\frac{\lambda}{8}, y_p\right)$ a diferença de fase entre as ondas é de 45°.

Comentários:

Utilizando o princípio da superposição para ambas as ondas:

$$h(x,y,t)=h_1(x,y,t)+h_2(x,y,t)$$

$$h(x,y,t)=h_0\cdot\left(sen\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{r}{\lambda}-f\cdot t\right)\right)+sen\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{x}{\lambda}-f\cdot t\right)\right)\right)$$

Com:

$$sen\ a+sen\ b=sen\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2}$$

$$h(x,y,t)=h_0\cdot sen\left(2\cdot\pi\cdot\left(\frac{r+x}{\lambda}-2\cdot f\cdot t\right)\right)\cdot\cos\left(2\cdot\pi\cdot\frac{r-x}{2\cdot\lambda}\right)$$

O termo cossenoidal, independente do tempo, é o responsável por definir se as ondas estão em fase ou em oposição de fase. As ondas estarão em oposição de fase para um ponto $P=\left(x_p,y_p\right)$ quando:

$$\cos\left(\pi\cdot\frac{r-x_p}{\lambda}\right)=0\Rightarrow\pi\cdot\frac{r-x_p}{\lambda}=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi$$

$$r-x_p=\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}+k\right)\Rightarrow r=x_p+\lambda\cdot\left(\frac{1}{2}+k\right)$$

Mas:

$$r=\sqrt{x_p^2+y_p^2}$$

Logo:

$$x_p^2+y_p^2=x_p^2+x_p\cdot\lambda\cdot(1+2k)+\lambda^2\cdot\frac{1}{4}\cdot(1+2k)^2$$

$$y_p^2-\frac{\lambda^2}{4}\cdot(1+2k)^2=x_p\cdot\lambda\cdot(1+2k)$$

$$x_p=\frac{y_p^2}{(2k+1)\cdot\lambda}-\frac{\lambda}{4}\cdot(1+2k)$$

$$x_p = \frac{y_p^2}{(2k+1)\cdot\lambda} - \frac{\lambda}{2}\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

Assim, o ponto de interferência destrutiva é:

$$P(x_p, y_p) = (\frac{y_p^2}{(2k+1)\cdot\lambda} - \frac{\lambda}{2}\cdot\left(k+\frac{1}{2}\right), y_p)$$

Gabarito: D

---

9. (ITA-2011)

Uma pessoa de 80,00 kg deixa-se cair verticalmente de uma ponte amarrada a uma corda elástica de "bungee jumping" com 16,0 m de comprimento. Considere que a corda se esticará até 20,0 m de comprimento sob a ação do peso. Suponha que, em todo o trajeto, a pessoa toque continuamente uma vuvuzela, cuja frequência natural é de 235 Hz. Qual(is) é(são) a(s) distância(s) abaixo da ponte em que a pessoa se encontra para que um som de 225 Hz seja percebido por alguém parado sobre a ponte?

a) 11,4 m
b) 11,4 m e 14,4 m
c) 11,4 m e 18,4 m
d) 14,4 m e 18,4 m
e) 11,4 m, 14,4 m e 18,4 m

Comentários:

Para que a frequência percebida pelo observador sobre a ponte seja menor do que a frequência emitida, considerando que o observador está parado, é deduzido que a pessoa que pulou de da ponte está com velocidade para baixo.

A pessoa acelera até em que a força elástica se iguala ao peso, passando então a desacelerar até atingir velocidade nula no ponto mais baixo de sua trajetória. Portanto, todos os possíveis valores de velocidade são percorridos duas vezes com exceção da velocidade no ponto em que a força resultante é nula.

Assim, calculando a velocidade necessária para que a frequência percebida seja igual a 225 hz e a velocidade quando a força resultante é nula:

$$f_{ap} = f\cdot\frac{v_s}{v_s+v_f}$$

$$225 = 235\cdot\frac{340}{340+v_f} \Rightarrow 340\cdot 10 = 225\cdot v_f \therefore v_f \cong 15{,}1\ m/s$$

Calculando o k por energia para o caso do ponto mais baixo da trajetória:

$$\frac{k\cdot x^2}{2} = m\cdot g\cdot h \Rightarrow \frac{k}{2}\cdot 16 = 800\cdot 20 \therefore k = 2\cdot 10^3\ N/m$$

Verificando primeiramente se há ocorrência dessa velocidade durante o movimento de queda livre:

$$m\cdot g\cdot h = m\cdot\frac{v^2}{2} \Rightarrow 10\cdot h = \frac{15{,}1^2}{2} \therefore h = \frac{15{,}1^2}{20} = 11{,}4\ m$$

Agora, verifica-se quando ocorre essa velocidade para o caso em que o elástico está esticado.

$$m \cdot g \cdot h = m \cdot \frac{v^2}{2} + k \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$800 \cdot h = 80 \cdot \frac{15{,}1^2}{2} + 2 \cdot 10^3 \cdot \frac{(h-16)^2}{2}$$

$$h^2 - 32 \cdot h + 256 - 0{,}8 \cdot h + 9{,}12 = 0$$

$$h^2 - 32{,}8 \cdot h + 265{,}12 = 0$$

$$h_1 = 18{,}4\ m \ \text{ e } \ h_2 = 14{,}4\ m$$

Como a suposição era de que o elástico estava esticado, $h \geq 16$ era condição. Portanto, somente h_1 é válido. Assim as respostas são $h = 11{,}4\ m$ e $h = 18{,}4\ m$.

Gabarito: C

---

10. (ITA 2011)

O tubo mais curto de um órgão típico de tubos tem um comprimento de aproximadamente 7 cm. Qual é o harmônico mais alto na faixa audível, considerada como estando entre 20 Hz e 20.000 Hz, de um tubo deste comprimento aberto nas duas extremidades?

Comentários:

O tubo de um órgão sendo tratado como aberto em ambas as extremidades:

$$f_n = n \cdot \frac{v_s}{2 \cdot l}$$

Em que: f_n é a frequência do harmônico; n é o número do harmônico; v_s é a velocidade do som; e l é o comprimento do tubo. Substituindo:

$$n \cdot \frac{v_s}{2 \cdot l} \leq 20000$$

$$n \leq 20000 \cdot 2 \cdot \frac{0{,}07}{340} \therefore n \leq 8{,}23$$

Logo, o harmônico mais alto é o oitavo ($n = 8$).

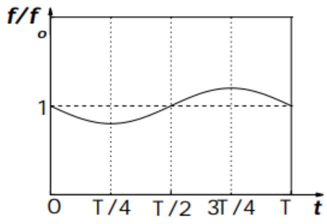
Gabarito: N = 8

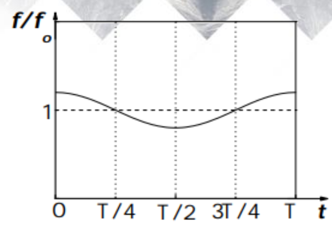
---

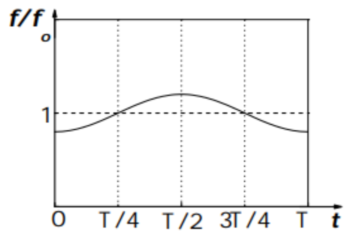
11. (ITA 2010)

Uma jovem encontra-se no assento de um carrossel circular que gira a uma velocidade angular constante com período T. Uma sirene posicionada fora do carrossel emite um som de frequência f_0 em direção ao centro de rotação. No instante $t = 0$, a jovem está à menor distância em relação à sirene. Nesta situação, assinale a melhor representação da frequência f ouvida pela jovem.

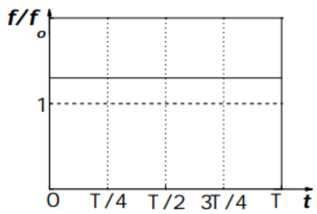
a) b) c)



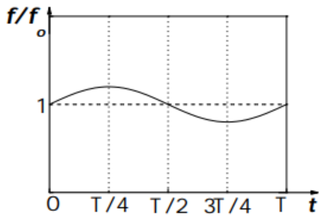




d)



e)



Comentários:

Para o efeito Doppler:

$$f = f_0 \cdot \frac{v_s \pm v_o}{v_s \pm v_f}$$

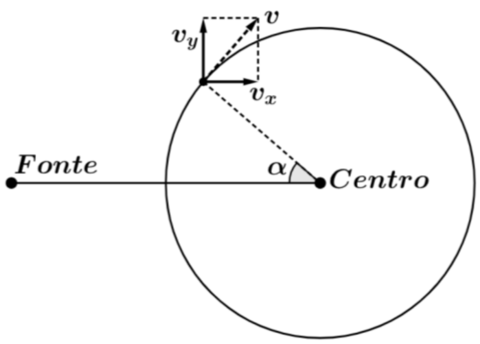
Em que: v_s é a velocidade do som; v_f é a velocidade da fonte; v_o é a velocidade do observador; e f é a frequência percebida. Para este caso, $v_f = 0$:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{v_s \pm v_o}{v_s} \Rightarrow \frac{f}{f_0} = 1 \pm \frac{v_o}{v_s}$$

Analisando a cinética da jovem:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

Analisando a figura abaixo:



$$\alpha = \omega \cdot t \Rightarrow v_o = v \cdot sen\, \alpha$$

$$v_o = v \cdot sen\,(\omega \cdot t) \Rightarrow v_o = v \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

Assim, ajustando o sinal:

$$\frac{f}{f_0} = 1 - \frac{v}{v_s} \cdot sen\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

Dessa forma, a melhor representação está na alternativa A.

Gabarito: A

---

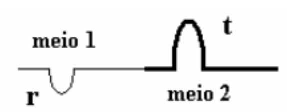
12. (ITA-2008)

No estudo de ondas que se propagam em meios elásticos, a impedância característica de um material é dada pelo produto da sua densidade pela velocidade da onda nesse material, ou seja, $z = \mu \cdot v$. Sabe-se, também, que uma onda de amplitude a_1, que se propaga em um meio 1 ao penetrar em uma outra região, de meio 2, origina ondas, refletida e transmitida, cuja amplitude são, respectivamente:

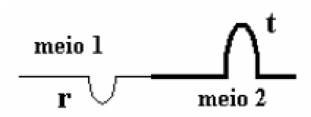
$a_r = \frac{\frac{z_1}{z_2}-1}{\frac{z_1}{z_2}+1} \cdot a_1$ e $a_t = \frac{2}{\frac{z_2}{z_1}+1} \cdot a_1$

Num fio, sob tensão T, a velocidade da onda nesse meio é dada por $v = \sqrt{\mu/T}$. Considere agora o caso de uma onda que se propaga num fio de densidade linear μ (meio 1) e penetra num trecho desse fio em que a densidade linear muda para 4μ (meio 2). Indique a figura que representa corretamente as ondas refletidas (r) e transmitida (t).

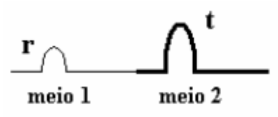
a)



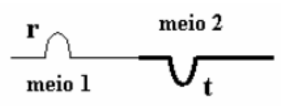
b)



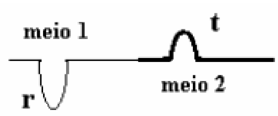
c)



d)



e)



Comentários:

Sabendo que as ondas se propagam com velocidade $v = \sqrt{\frac{\mu}{T}}$:

$$v_r = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \text{ e } v_t = \sqrt{\frac{T}{4 \cdot \mu}} = \frac{1}{2} \cdot v_r$$

Logo, a onda transmitida se propaga com velocidade menor que a refletida. As impedâncias são dadas por $z = \mu \cdot v$:

$$z_r = \mu \cdot v_r \;\; I \text{ e } z_t = 4 \cdot \mu \cdot v_t = 2 \cdot \mu \cdot v_r$$
$$\therefore z_t = 2 \cdot z_r$$

Utilizando as fórmulas das amplitudes:

$$a_r = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} \cdot a_1 = -\frac{1}{3} \cdot a_1$$

$$a_t = \frac{2}{2+1} \cdot a_1 = \frac{2}{3} \cdot a_1$$

Portanto:

$$a_r = -2 \cdot a_t$$

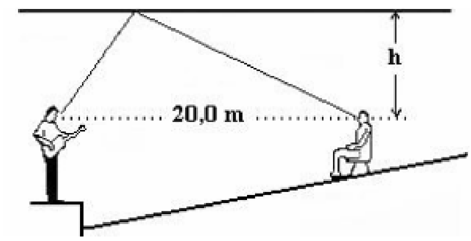
Somente na letra A as ondas apresentaram inversão de fase onde a transmitida é maior que a refletida. Além disso, respeitou-se a diferença mas velocidades das ondas.

Gabarito: A

---

13. (ITA-2008)

Um apreciador de música ao vivo vai a um teatro, que não dispõe de amplificação eletrônica, para assistir a um show de seu artista predileto. Sendo detalhista, ele toma todas as informações sobre as dimensões do auditório, cujo teto é plano e nivelado. Estudos comparativos em auditórios indicam preferência para aqueles em que seja de 30 ms a diferença de tempo entre o som direto e aquele que primeiro chega após uma reflexão. Portanto, ele conclui que deve se sentar a 20 m do artista, na posição indicada na figura. Admitindo a velocidade do som no ar de 340 m/s, a que altura h deve estar o teto com a relação à sua cabeça?



Comentários:

O som que vai direto ao espectador leva um tempo T_1:

$$T_1 = \frac{20}{340} = \frac{1}{17}\ s$$

O som que reflete uma vez no teto leva um tempo T_2:

$$T_2 = T_1 + 3 \cdot 10^{-2}\ s$$

Mas:

$$T_2 \cdot v_s = 2 \cdot \sqrt{100 + h^2}$$

$$(T_1 + 3 \cdot 10^{-2}) \cdot 340 = 2 \cdot \sqrt{100 + h^2}$$

$$30{,}2 \cong 2 \cdot \sqrt{100 + h^2}$$

$$h^2 = 15{,}1^2 - 100 \therefore h \cong 11{,}31\ m$$

GABARITO: 11,3 m

14. (ITA-2007)

Numa planície, um balão meteorológico com um emissor e receptor de som é arrastado por um vento forte de 40 m/s contra a base de uma montanha. A frequência do som emitido pelo balão é de 570 Hz e a velocidade de propagação do som no ar é de 340 m/s. Assinale a opção que indica a frequência refletida pela montanha e registrada no receptor do balão.

a) 450 Hz b) 510 Hz c) 646 Hz d) 722 Hz e) 1292 Hz

Comentários:

A onda recebida pela montanha é refletida e retorna ao balão. Portanto ocorre efeito Doppler para a frequência que chega à montanha (balão é uma fonte móvel) e em seguida efeito Doppler para a frequência que chega a balão (balão é um observador móvel).

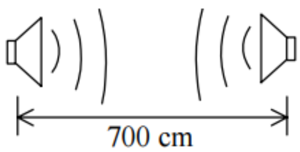
$$f_1 = f_0 \cdot \frac{v_s}{v_s - 40}$$

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{v_s + 40}{v_s} \Rightarrow f_2 = f_0 \cdot \frac{v_s + 40}{v_s - 40} = 570 \cdot \frac{380}{300} = 722\ Hz$$

Gabarito: D

15. (ITA-2007)

A figura mostra dois alto-falantes alinhados em fase por um amplificador de áudio na frequência de 170 Hz. Considere que seja desprezível a variação da intensidade do som de cada um dos alto-falantes com a distância e que a velocidade do som é de 340 m/s. A maior distância entre dois máximos de intensidade da onda sonora formada entre os alto-falantes é igual a



a) 2 m b) 3 m c) 4 m d) 5 m e) 6 m

Comentários:

Para que ocorra um máximo de intensidade, a diferença de fase entre as ondas deve ser um número inteiro de comprimentos de onda. Assim:

$$\Delta x = n \cdot \lambda = n \cdot \frac{v}{f} = 2 \cdot n$$

Portanto, a diferença de caminho entre os máximos é de $2 \cdot n$ metros, onde n pertence aos naturais.

$$2 \cdot n \leq 7 \Rightarrow n \leq 3{,}5 \Rightarrow n = 3 \therefore \Delta x = 6\ m$$

Gabarito: E

16. (ITA-2006)

Considere duas ondas que se propagam com frequências f_1 e f_2, ligeiramente diferentes entre si, e mesma amplitude A, cujas equações são respectivamente $y_1(t) = Acos(2\pi f_1 t)$ e $y_2(t) = Acos(2\pi f_2 t)$. Assinale a opção que indica corretamente:

	Amplitude máxima da onda resultante	Frequência da onda resultante	Frequência de batimento
a)	$A\sqrt{2}$	$f_1 + f_2$	$\frac{f_1 - f_2}{2}$
b)	$2A$	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$\frac{f_1 - f_2}{2}$
c)	$2A$	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$f_1 - f_2$
d)	$A\sqrt{2}$	$f_1 + f_2$	$f_1 - f_2$
e)	A	$\frac{f_1 + f_2}{2}$	$f_1 - f_2$

Comentários:

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t) + A \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f_2 \cdot t)$$

Utilizando a transformação de soma em produto:

$$y(t) = A \cdot 2 \cdot \cos\big(\pi \cdot t \cdot (f_1 + f_2)\big) \cdot \cos\big(\pi \cdot t \cdot (f_1 - f_2)\big)$$

A amplitude portanto é $2 \cdot A$. A frequência da função que envolve a onda é:

$$\frac{f_1 + f_2}{2} = f$$

A frequência de batimento é:

$$f' = f_1 - f_2$$

Gabarito: C

---

17. (ITA 2005)

Uma banda de rock irradia certa potência em um nível de intensidade sonora igual a 70 decibéis. Para elevar esse nível a 120 decibéis, a potência irradiada deverá ser elevada de:

a) 71% b) 171% c) 7100% d) 9999900 % e) 10000000%

Comentários:

Como decibéis é uma escala logarítmica tal que:

$$N(dB) = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

Para 70 dB:

$$70 = 10 \cdot \log \frac{I_{70}}{I_0} \Rightarrow 10^7 \cdot I_0 = I_{70}$$

Para 120 dB:

$$120 = 10 \cdot \log \frac{I_{120}}{I_0} \Rightarrow 10^{12} \cdot I_0 = I_{120}$$

$$\frac{I_{120}}{I_{70}} = 10^5 = 10^7\%$$

Entretanto, o aumento é de:

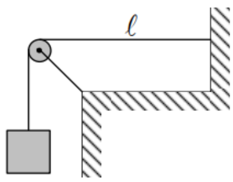
$$Aumento = 10000000\% - 100\% = 9999900\%$$

Gabarito: D

---

18. (ITA-2005)

São de 100 Hz e 125 Hz, respectivamente, as frequências de duas harmônicas adjacentes de uma onda estacionária no trecho horizontal de um cabo esticado, de comprimento $l = 2\ m$ e densidade linear de massa igual a 10 g/m (veja a figura). Considerando a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$, a massa do bloco suspenso deve ser de:



a) 10 kg b) 16 kg c) 60 kg d) 100 kg e) 10000 kg

Comentários:

A frequência das ondas estacionárias com extremidades presas é de:

$$f_n = n \cdot \frac{v}{2 \cdot L}$$

Pelo enunciado:

$$f_n = 100 = n \cdot \frac{v}{2 \cdot 2} = \frac{n \cdot v}{4} \rightarrow n \cdot v = 400$$

$$f_{n+1} = 125 = (n+1) \cdot \frac{v}{2 \cdot 2} \rightarrow (n+1) \cdot v = 500$$

Logo, $v = 100\ m/s$. A velocidade da onda nessa corda é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10 \cdot m}{10^{-2}}}$$

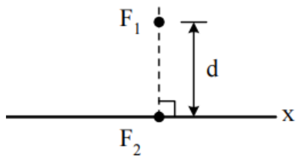
Substituindo:

$$10^4 = 10^3 \cdot m \therefore m = 10\ kg$$

Gabarito: A

19. (ITA-2004)

Na figura F1 e F2 são fontes sonoras idênticas que emitem, em fase, ondas de frequência f e comprimento de onda λ. A distância d entre as fontes é igual a 3λ. Pode-se então afirmar que a menor distância não nula, tomada a partir de F2, ao longo do eixo x, para a qual ocorre interferência construtiva, é igual a



a) $4\lambda/5$ b) $5\lambda/4$ c) $3\lambda/2$ d) 2λ e) 4λ

Comentários:

Para que ocorra interferência construtiva, a diferença da distância percorrida deve ser um número inteiro de comprimentos de onda.

$$d_1 - d_2 = n \cdot \lambda$$

$$\sqrt{x^2 + d^2} - x = n \cdot \lambda \Rightarrow x^2 + d^2 = n^2 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot x \cdot n \cdot \lambda + x^2$$

$$d^2 = n^2 \cdot \lambda^2 + 2 \cdot x \cdot n \cdot \lambda$$

Substituindo $d = 3 \cdot \lambda$ e rearranjando:

$$x = \frac{(9 - n^2) \cdot \lambda}{2 \cdot n}$$

Então: $n = 0 \rightarrow impossível$; $n = 1 \rightarrow x = 4 \cdot \lambda$; $n = 2 \rightarrow x = \frac{5}{4} \cdot \lambda$; $n = 3 \rightarrow x = 0$; e $n \geq 4 \rightarrow x < 0\ (não\ convém)$. Logo, a menor distância é $x = \frac{5}{4} \cdot \lambda$

Gabarito: B

20. (ITA-2004)

Um tubo sonoro de comprimento l, fechado numa das extremidades, entra em ressonância, no seu modo fundamental, com o som emitido por um fio, fixado nos extremos, que também vibra no modo fundamental. Sendo L o comprimento do fio, m sua massa e c, a velocidade do som no ar, pode-se afirmar que a tensão submetida ao fio é dada por:

a) $\left(\frac{c}{2L}\right)^2 ml$ b) $\left(\frac{c}{2l}\right)^2 mL$ c) $\left(\frac{c}{l}\right)^2 mL$

d) $\left(\frac{c}{l}\right)^2 ml$ e) n.d.a

Comentários:

Para um tubo fechado em uma das extremidades, ressoando no seu modo fundamental $\left(\lambda = \frac{l}{4}\right)$:

$$c = \lambda \cdot f = 4 \cdot l \cdot f \Rightarrow f = \frac{c}{4 \cdot l}$$

A frequência da onda é a mesma frequência da onda estacionária no fio que vibra no modo fundamental ($\lambda = 2L$). A velocidade da onda no fio é:

$$v = \lambda' \cdot f = 2 \cdot L \cdot \frac{c}{4 \cdot l} = \frac{c}{2} \cdot \frac{L}{l}$$

Mas, a velocidade também é dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{T}{\frac{m}{L}}} = \sqrt{\frac{T \cdot L}{m}} \Rightarrow \frac{c^2}{4} \cdot \frac{L^2}{l^2} = T \cdot \frac{L}{m} \therefore T = \frac{m \cdot c^2 \cdot L}{4 \cdot l^2}$$

Gabarito: B

---

14. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue todos os conceitos vistos até agora.

Estude com calma e muita atenção o fenômeno do efeito Doppler. Nossos vestibulares adoram esse tema e costumam colocar questões difíceis na prova. Às vezes, as questões referente a este assunto são apenas teóricas.

Além disso, guarde bem os conceitos de interferência, superposição, reflexão, refração e velocidade de propagação de ondas. A incidência desses assuntos é bem alta.

Estude com calma os conceitos de ondas estacionárias. Estas ondas são de extrema importância para a Física e possuem poucas abordagens nos livros de ensino médio comum.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

15. Referências bibliográficas

[1] Pandey, DC. Understanding Physics.

[2] Sharma, B.M. Physics for IIT-JEE – Waves and Thermodinamic. 1. Ed. Cengage Learning's.

16. Versão de aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	**21/08/2021**