Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

Sumário

Apresentação

Olá,

Iniciaremos o último assunto de geometria, a espacial. Para aprender bem essa aula, o requisito básico é ter feito as aulas de geometria plana e ter bem consolidado os diversos conceitos abordados nelas. Nesta aula, estenderemos o conceito que aprendemos no plano ao espaço tridimensional. Veremos muitos exemplos e teoremas que nos ajudarão a resolver os exercícios dos vestibulares.

Se você for um aluno que já possui os conceitos de geometria espacial bem fundamentados, pule direto para a lista de exercícios e tente resolver todas questões. Caso você não consiga resolver alguma, consulte a resolução e sempre que precisar, você poderá nos encontrar no fórum de dúvidas.

Então, vamos à aula.

Bons estudos.

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

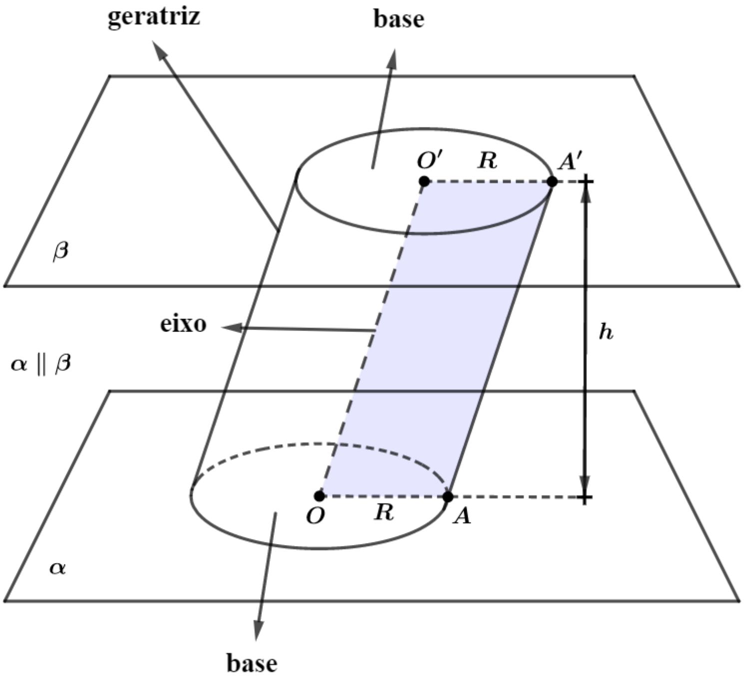
Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Sólidos Redondos

Vamos começar nosso estudo de sólidos redondos, são eles: os cilindros, os cones e as esferas. Iniciemos pelos cilindros.

1.1. Cilindros

Os cilindros são figuras muito parecidas com os prismas, a diferença é que ao invés da base ser um polígono convexo, a base do cilindro é um círculo. Podemos pensar em um prisma arredondado. Vejamos os elementos presentes no cilindro.

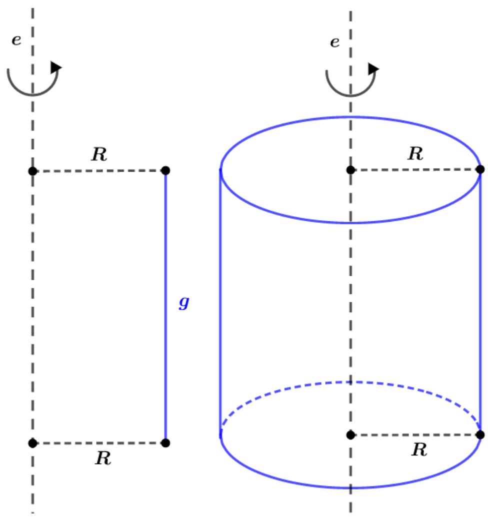


Note que o cilindro possui duas bases circulares congruentes de raio R e que $OAA'O$ é um paralelogramo. Geratriz é o termo usado para qualquer segmento de reta do cilindro distando R do eixo OO', e paralelo ao mesmo.

Quando as geratrizes do cilindro são oblíquas às bases, temos um cilindro circular oblíquo e quando elas são perpendiculares às bases, temos um cilindro circular reto. Neste caso, a altura do cilindro será igual à medida da geratriz, ou seja, $h = g$.

1.1.1. Superfície cilíndrica e cilindro de revolução

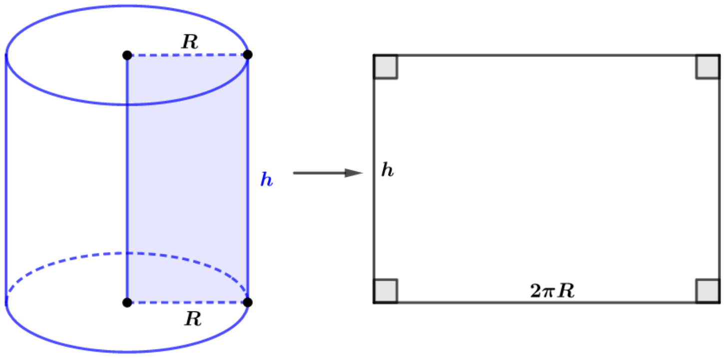
Tomando-se um eixo e e rotacionando um segmento de reta g (reta geratriz) de uma distância R ao longo de e, obtemos uma **superfície cilíndrica de revolução**.



Se ao invés de um segmento de reta, rotacionarmos um retângulo que possui um lado contido no eixo e, obtemos um **cilindro de revolução**. Perceba que esse cilindro é circular reto, ou seja, a geratriz é perpendicular ao plano da base.

1.1.2. Área lateral e área total

Se cortarmos uma superfície cilíndrica de revolução de altura h e a colocarmos em cima de uma mesa esticada, obtemos a figura de um retângulo de dimensões iguais à altura h e ao comprimento da base circular. Sabemos que o comprimento de uma circunferência de raio R é $2\pi R$. Assim, temos que a superfície lateral de um cilindro circular reto planificada é equivalente a um retângulo de dimensões h e $2\pi R$.



Logo, a área lateral de um cilindro é:

$$\boxed{A_L = 2\pi Rh}$$

Para encontrar a área total do cilindro circular reto, basta somar duas vezes a área da base. Como a base é um círculo de raio R, temos:

$$A_B = \pi R^2$$
$$A_T = A_L + 2A_B = 2\pi Rh + 2\pi R^2$$
$$\therefore \boxed{A_T = 2\pi R(h + R)}$$

1.1.3. Volume do cilindro

Para encontrar o volume de um cilindro, podemos usar o princípio de Cavalieri. Assim, tomando-se um cilindro circular de raio R e um prisma tais que ambos possuem a mesma altura h e também bases de mesma área, temos:

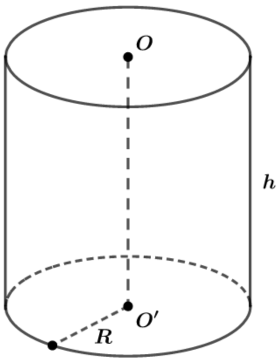
$$A_{base\_prisma} = A_{base\_cilindro} = \pi R^2$$

Pelo princípio de Cavalieri:

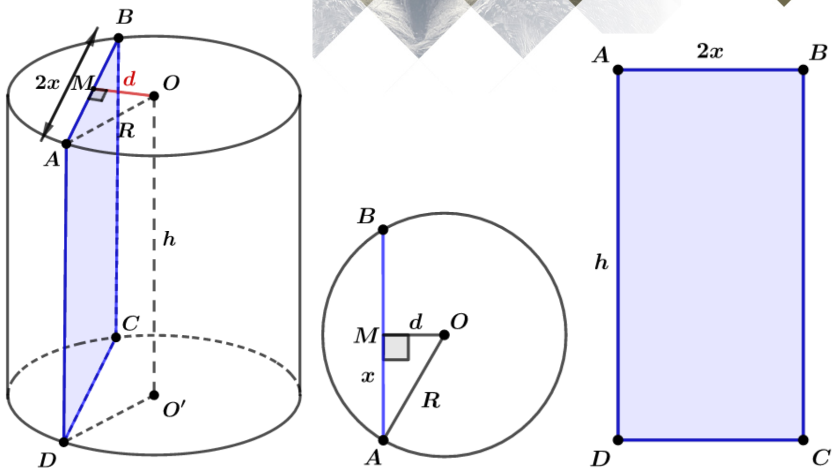
$$V_{cilindro} = V_{prisma} = A_{base_{prisma}} \cdot h$$
$$\therefore \boxed{V_{cilindro} = \pi R^2 h}$$

1.1.4. Secção paralela ao eixo

Consideremos um cilindro circular reto de eixo OO' e altura h conforme representado pela figura abaixo:



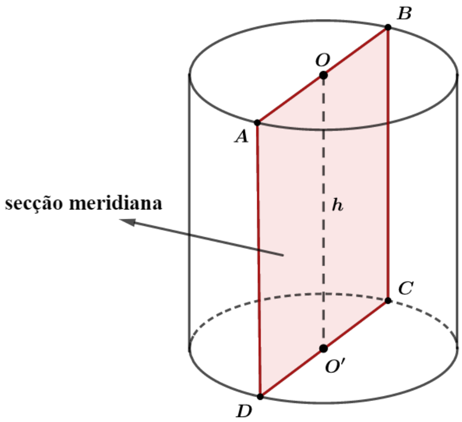
Ao seccionarmos esse cilindro por um plano paralelo ao seu eixo e a uma distância d deste, a secção plana formada é um retângulo de dimensões h e $2x$. Podemos calcular o valor de x da seguinte forma:



Observando a circunferência e aplicando o teorema de Pitágoras no ΔAOM:

$$R^2 = x^2 + d^2 \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{R^2 - d^2}; 0 \leq d \leq R}$$

Se a distância d for nula, chamamos a secção plana obtida de secção meridiana.

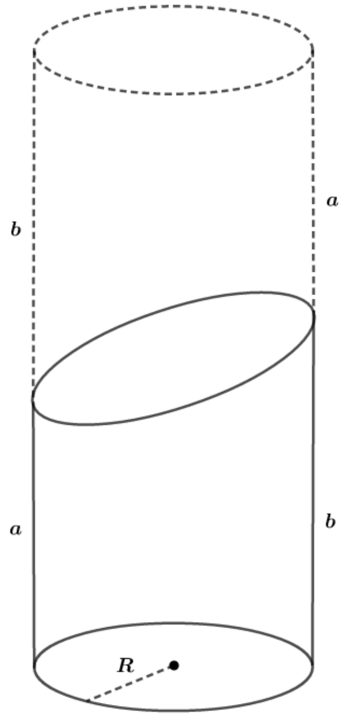


Note que a secção meridiana divide o cilindro em dois semicilindros. Quando a **secção meridiana é um quadrado**, temos um **cilindro equilátero**. Neste caso:

$$g = h = 2R$$

1.1.5. Tronco de cilindro

Consideremos o seguinte tronco de cilindro:



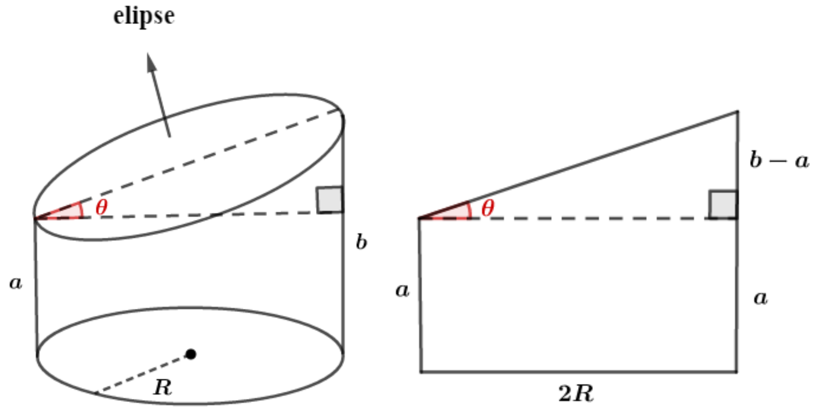
Nesse tronco, podemos ver que ao completarmos esse tronco com um outro com as mesmas dimensões, obtemos um cilindro reto. Assim, temos que seu volume V_T é dado por:

$$2V_T = V_{cilindro\ reto}$$
$$2V_T = \pi R^2(a+b)$$
$$\therefore \boxed{V_T = \frac{\pi R^2(a+b)}{2}}$$

Da mesma forma, podemos calcular sua área lateral:

$$2A_l = A_{lateral\ cilindro\ reto}$$
$$2A_l = 2\pi R(a+b)$$
$$\therefore \boxed{A_l = \pi R(a+b)}$$

Agora, vejamos o caso de um tronco de cilindro que possui uma base reta e a outra base inclinada de um ângulo θ em relação à base reta.



A base superior é uma elipse. Fazendo a projeção ortogonal da área dessa elipse, obtemos a área da base circular. Assim, podemos escrever:

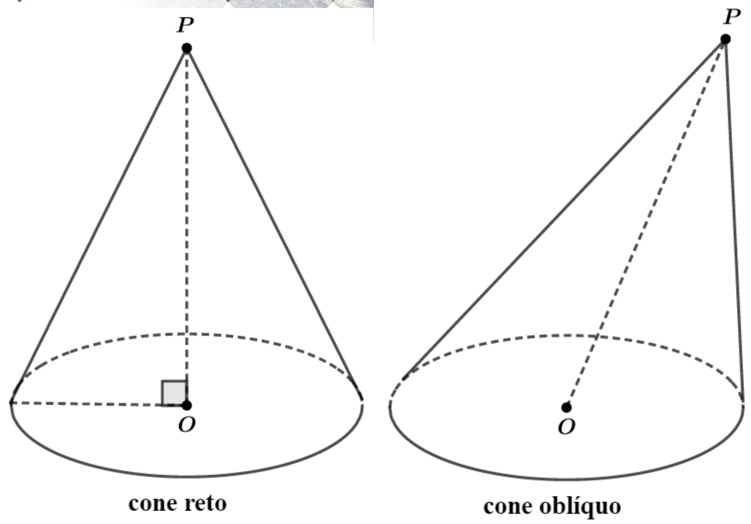
$$A_{elipse} \cdot \cos\theta = \pi R^2 \Rightarrow \boxed{A_{elipse} = \frac{\pi R^2}{\cos\theta}}$$

A figura planificada é a secção do plano que corta o tronco ao meio. Ela é um trapézio e como podemos ver, o ângulo θ deve satisfazer:

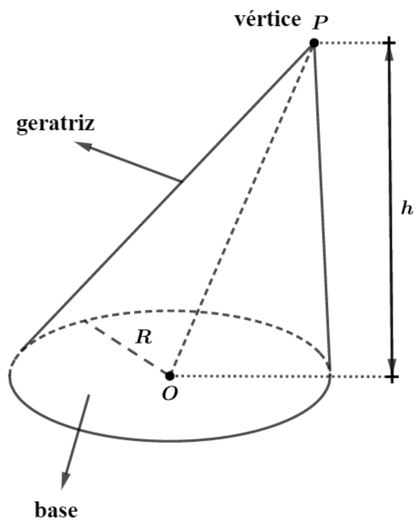
$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{b-a}{2R}}$$

1.2. Cones

Cones são sólidos que possuem uma base circular contida num plano e um vértice fora deste plano. Podemos pensar no cone como uma pirâmide arredondada. Assim, quando a projeção ortogonal do cone se encontra no centro da sua base circular, temos um cone reto. Por outro lado, quando essa projeção não está no centro da circunferência, temos um cone oblíquo.

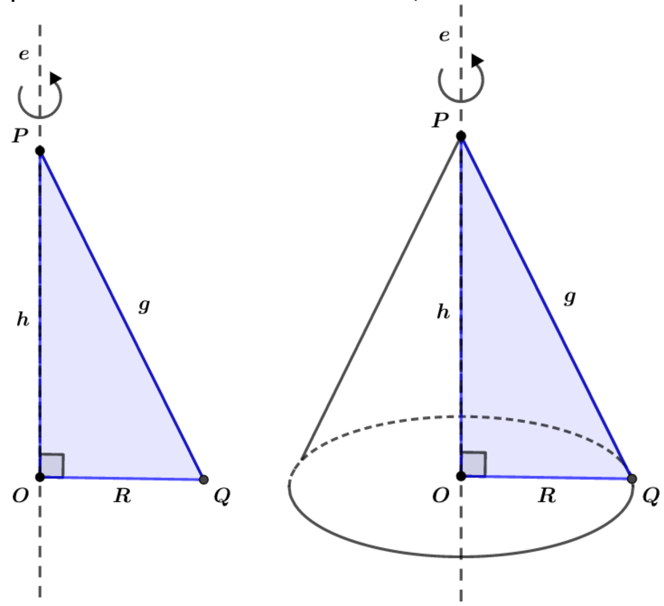


Vejamos os elementos presentes no cone:



Note que no caso do cone oblíquo, a geratriz pode ter medidas diferentes. Além disso, o termo geratriz também pode ser referido como apótema do cone.

Um **cone reto** pode ser chamado de **cone de revolução**. Pois, ao rotacionarmos um triângulo retângulo em torno de um eixo que contém um de seus catetos, obtemos um cone reto.

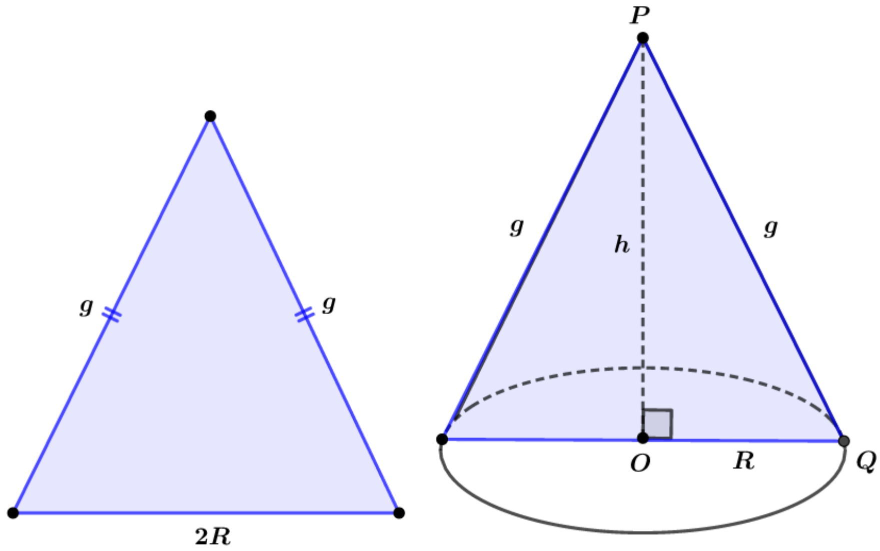


No caso do cone reto, temos a seguinte relação:

$$\boxed{g^2 = h^2 + R^2}$$

1.2.1. Secção meridiana

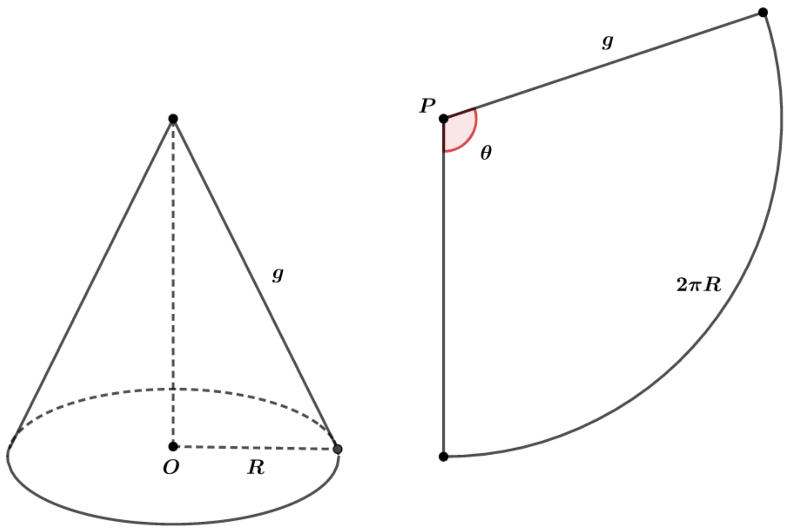
Quando seccionamos um cone reto por um plano que contém seu eixo PO, obtemos uma secção meridiana. Essa figura será um triângulo isósceles.



Se a secção meridiana for um triângulo equilátero, chamamos o cone de cone equilátero. Neste caso, temos $g = 2R$ e $h = R\sqrt{3}$.

1.2.2. Área lateral e área total

Podemos afirmar que a superfície lateral de um cone de geratriz g e raio R é equivalente a um setor circular de raio g e comprimento de arco $2\pi R$.



Do setor circular, temos:

$$\theta = \frac{2\pi R}{g}$$

A área lateral do cone será igual à área do setor circular, logo:

$$A_L = \pi g^2 \frac{\theta}{2\pi} = \frac{g^2}{2} \cdot \frac{2\pi R}{g}$$

$$\therefore \boxed{A_L = \pi R g}$$

A área total do cone é igual à soma da área lateral com a área da base:

$$A_T = A_L + A_B$$
$$A_T = \pi R g + \pi R^2$$
$$\boxed{A_T = \pi R(g + R)}$$

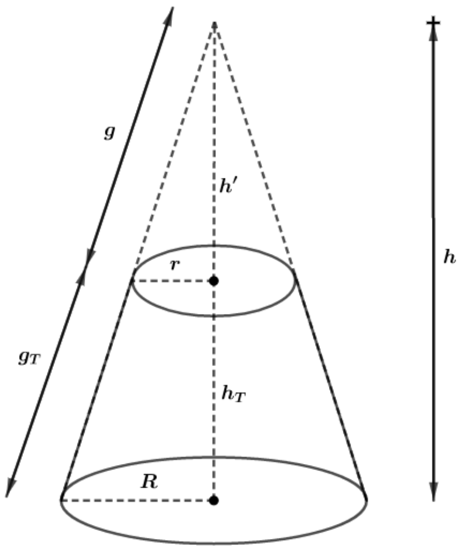
1.2.3. Volume do cone

O volume do cone pode ser obtido pelo princípio de Cavalieri tomando-se um cone e uma pirâmide de mesma altura e área da base. Assim, temos para um cone de raio R e altura h:

$$V_{cone} = \frac{1}{3} A_B \cdot h$$
$$\boxed{V_{cone} = \frac{1}{3} \pi R^2 h}$$

1.2.4. Tronco de cone de bases paralelas

Vamos deduzir a fórmula para calcular o volume de um tronco de cone de bases paralelas. Consideremos a seguinte figura:



Sejam V_1, V_2, V_T os volumes do cone menor, do cone maior e do tronco de cone. Assim, temos:

$$V_T = V_2 - V_1$$
$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi R^2 h}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3} = \frac{\pi R^2 (h' + h_T)}{3} - \frac{\pi r^2 h'}{3}$$
$$\Rightarrow V_T = \frac{\pi h' (R^2 - r^2)}{3} + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Pela semelhança dos cones, podemos escrever:

$$\frac{h'}{h} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{h'}{h' + h_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow R h' = h' r + h_T r \Rightarrow h' = \frac{h_T r}{R - r}$$

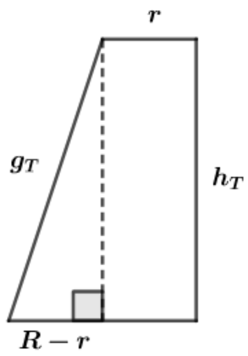
Substituindo h' na expressão do volume do tronco:

$$V_T = \frac{\pi}{3} \left(\frac{h_T r}{R - r} \right) (R^2 - r^2) + \frac{\pi R^2 h_T}{3}$$

Portanto, o volume do tronco é:

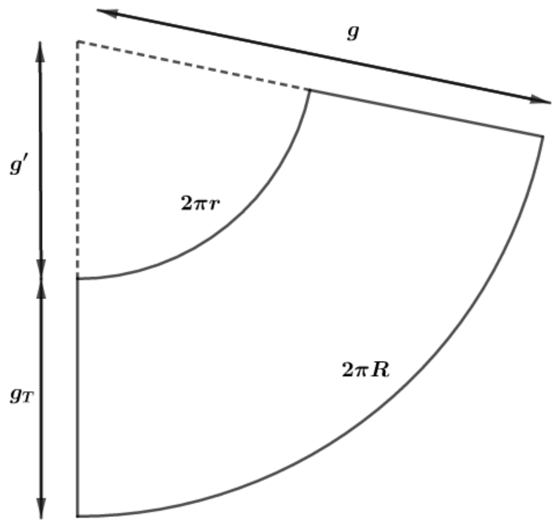
$$\boxed{V_T = \frac{\pi h_T}{3} (R^2 + r^2 + Rr)}$$

Pela figura da região planificada, vemos que podemos relacionar a geratriz, a altura e os raios das bases do tronco:



$$\boxed{g_T^2 = h_T^2 + (R-r)^2}$$

A área lateral do tronco pode ser calculada subtraindo-se a área lateral do cone menor da área lateral do cone maior. Sejam A_L, A_l, A_{LT} as áreas laterais do cone maior, do cone menor e do tronco. Assim, temos:



$$A_{LT} = A_L - A_l = \pi R g - \pi r g' = \pi R(g' + g_T) - \pi r g'$$
$$\Rightarrow A_{LT} = \pi[(R-r)g' + R g_T]$$

Pela razão de proporção, temos:

$$\frac{g'}{g} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{g'}{g' + g_T} = \frac{r}{R} \Rightarrow g' = \frac{r g_T}{R - r}$$

Substituindo na expressão da área:

$$A_{LT} = \pi\left[(R-r)\left(\frac{r g_T}{R-r}\right) + R g_T\right]$$

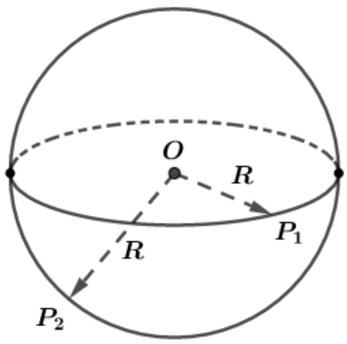
Portanto, a área lateral do tronco de cone é:

$$\boxed{A_{LT} = \pi g_T (R + r)}$$

1.3. Esferas

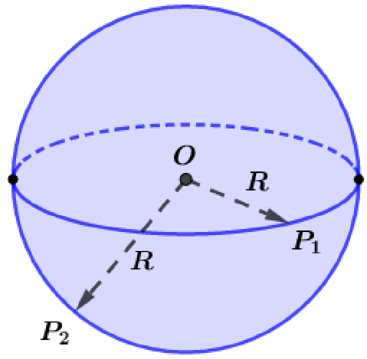
Vimos no capítulo de lugares geométricos que uma superfície esférica é o conjunto dos pontos no espaço que equidistam de um determinado ponto, denominado de centro.

$$S\{O, R\} = \left\{P \in \underbrace{\epsilon}_{espaço} \middle| d_{P,O} = \underbrace{R}_{raio\ da\ esfera}\right\}$$



Uma esfera é o conjunto dos pontos no espaço que satisfazem a seguinte relação:

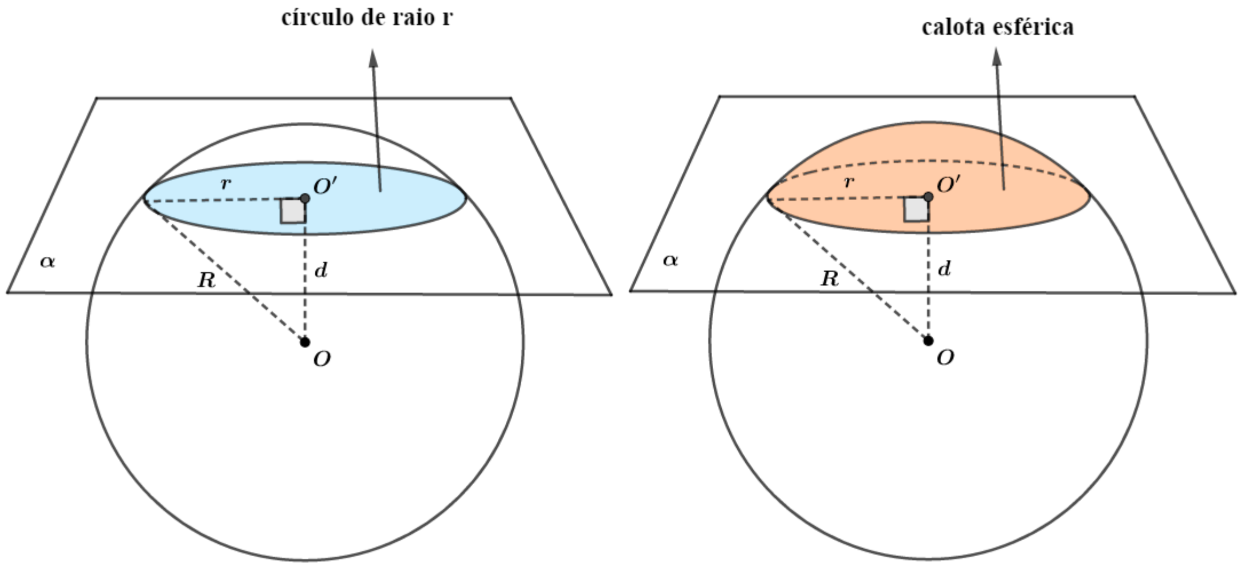
$$S_1\{O, R\} = \{P \in \epsilon | d_{P,O} \leq R\}$$



Também podemos dizer que a esfera é um sólido de revolução gerado pela rotação de uma semicircunferência em torno de um eixo que contém seu diâmetro.

1.3.1. Secção plana da esfera

Toda secção plana de uma esfera é um círculo.



Pela figura, vemos que:

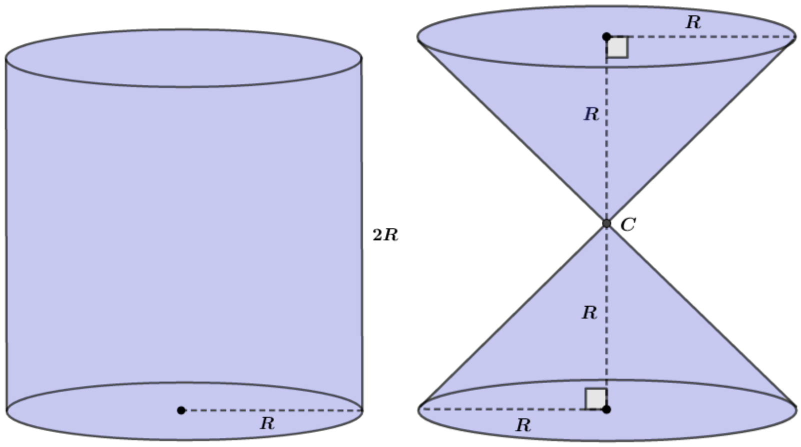
$$\boxed{R^2 = d^2 + r^2; 0 \leq d \leq R}$$

Se o plano secante à esfera passar pelo centro da esfera, a secção formada será o **círculo máximo** da esfera. Neste caso, temos $d = 0$ e, portanto, $r = R$.

Note que **calota esférica** é o termo usado para a parte da esfera cortada por um plano.

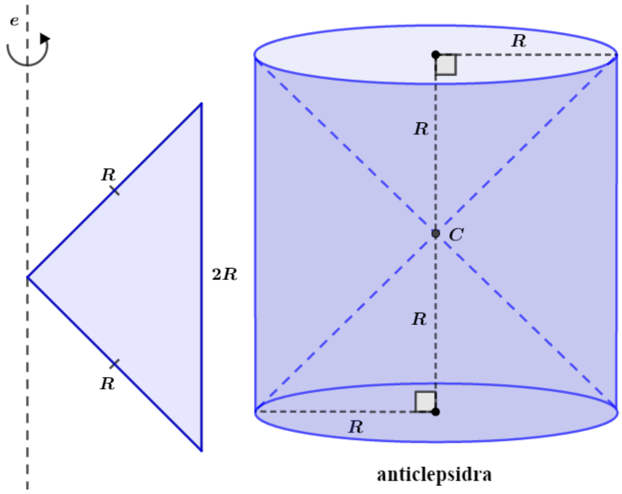
1.3.2. Volume da esfera

Para a dedução da fórmula do volume da esfera, usaremos um sólido de volume equivalente. Consideremos um cilindro equilátero de altura $2R$ e dois cones de raio R e com vértice comum C conforme representada na figura abaixo:



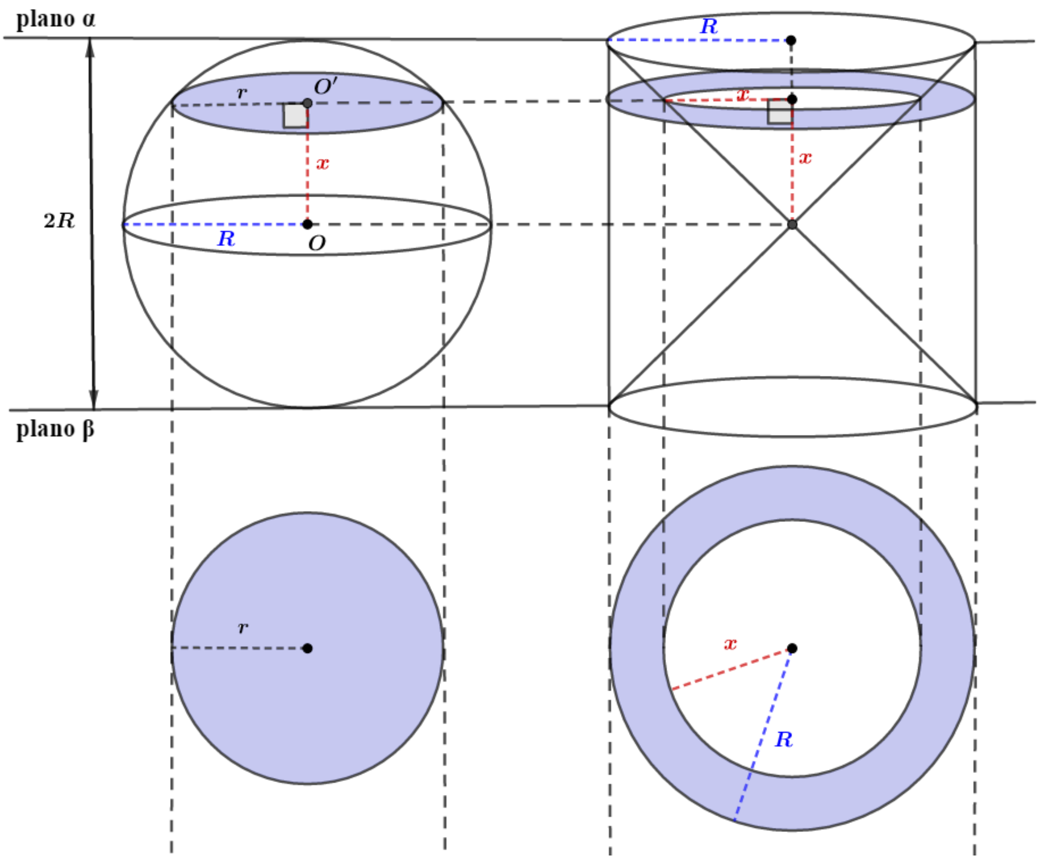
cilindro equilátero   clepsidra

A união de dois cones com vértice comum é um sólido conhecido como **clepsidra**. Tomando o cilindro e removendo uma clepsidra do seu interior, obtemos um sólido conhecido como **anticlepsidra**. Este sólido também pode ser obtido pela rotação de um triângulo isósceles de lados $R, R, 2R$ em torno de um eixo contendo o vértice oposto ao lado de medida $2R$.



anticlepsidra

Para o cálculo do volume da esfera, usaremos uma esfera de raio R e uma anticlepsidra de raio R.



Os planos α e β são paralelos e ambos tangenciam a esfera. As bases da anticlepsidra estão contidas nesses planos. Vamos calcular a área da secção plana da esfera e da anticlepsidra.

Da esfera, temos um círculo de raio r:

$$A_{secção\_esfera} = \pi r^2$$

Mas podemos escrever r em função de x e R, pelo teorema de Pitágoras:

$$R^2 = x^2 + r^2 \Rightarrow r^2 = R^2 - x^2$$
$$\Rightarrow A_{secção\_esfera} = \pi(R^2 - x^2)$$

Da anticlepsidra, temos:

$$A_{secção\_anticlepsidra} = \pi R^2 - \pi x^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

Assim, temos $A_{secção\_esfera} = A_{secção\_anticlepsidra}$. Pelo princípio de Cavalieri, como as áreas das secções são iguais e os sólidos têm mesmo volume, podemos escrever:

$$V_{esfera} = V_{anticlepsidra}$$

O volume da anticlepsidra é igual ao volume do cilindro equilátero menos o volume da clepsidra, ou seja,

$$V_{anticlepsidra} = V_{cilindro} - \underbrace{V_{clepsidra}}_{=dois\ cones} = \underbrace{\pi R^2}_{base\ cilindro}\left(\underbrace{2R}_{altura\ cilindro}\right) - 2\left(\frac{1}{3}\underbrace{\pi R^2}_{base\ cone}\underbrace{R}_{altura\ cone}\right)$$

$$\Rightarrow V_{anticlepsidra} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Portanto, o volume de uma esfera de raio R é dado por:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

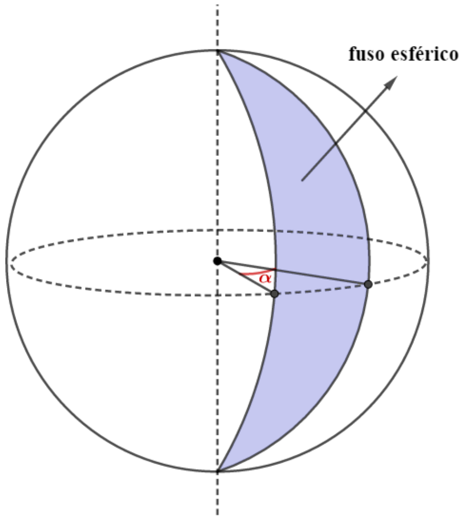
1.3.3. Área da superfície esférica

A dedução da área da superfície esférica envolve cálculo diferencial e ela pode ser obtida derivando-se o volume da esfera de raio R em relação à R:

$$A = \frac{dV}{dR} = \frac{d\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)}{dR}$$
$$\boxed{A = 4\pi R^2}$$

1.3.4. Fuso esférico e cunha esférica

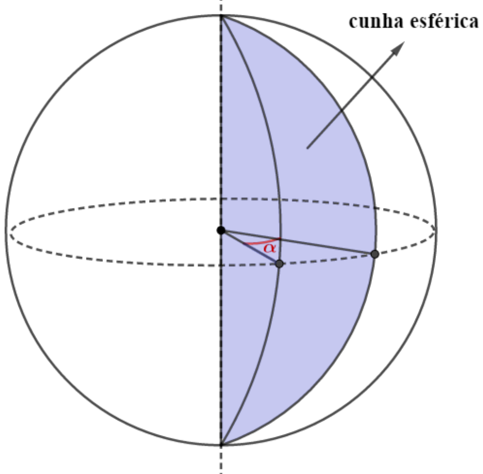
Fuso esférico é a parte da superfície esférica formada pela rotação em α graus de uma **semicircunferência** em torno do diâmetro da superfície esférica. Podemos dizer que ele é uma fatia de uma superfície esférica.



Para calcular a área do fuso, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

$$2\pi - 4\pi R^2$$
$$\alpha - A_{fuso}$$
$$\Rightarrow A_{fuso} = 4\pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$
$$\therefore \boxed{A_{fuso} = 2R^2\alpha}$$

Cunha esférica é a parte da esfera formada pela rotação em α graus de um **semicírculo** em torno do diâmetro da esfera. Podemos dizer que ela é uma fatia de uma esfera.



Para calcular o volume da cunha, podemos fazer uma simples regra de três. Considerando α em radianos:

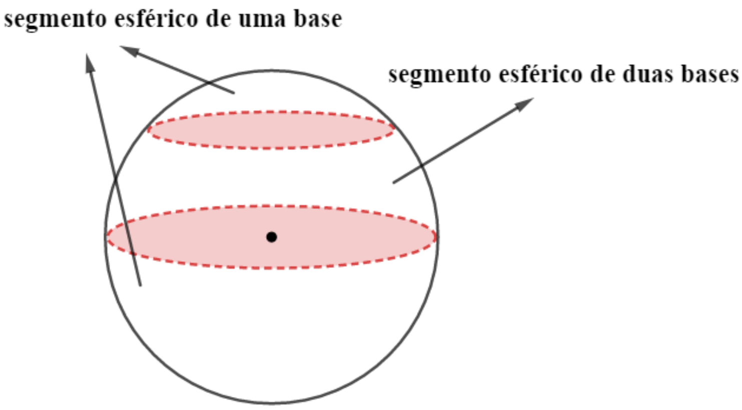
$$2\pi - \frac{4}{3}\pi R^3$$
$$\alpha - V_{cunha}$$

$$\Rightarrow V_{cunha} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{\alpha}{2\pi}$$

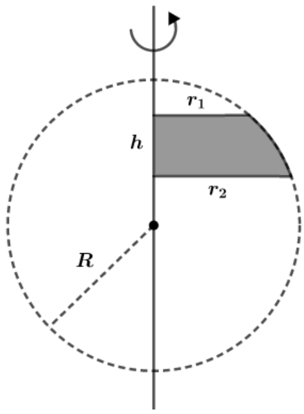
$$\therefore \boxed{A_{fuso} = \frac{2}{3}R^3\alpha}$$

1.3.5. Segmentos esféricos

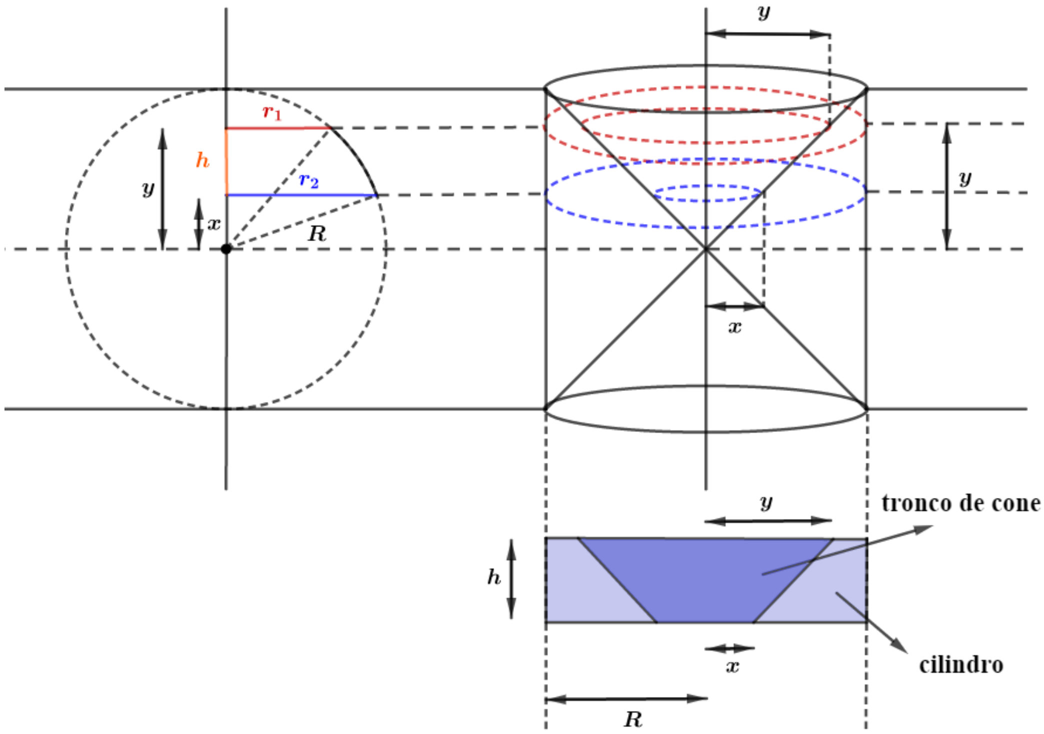
Seccionando-se uma esfera com dois planos paralelos entre si, dividimos a esfera em três partes. A região compreendida entre os planos é chamada de **segmento esférico de duas bases**. As outras duas são chamadas de **segmentos esféricos de uma base**, essas também podem ser denominadas de **calotas esféricas**.



Vamos calcular o volume de um segmento esférico de duas bases. Podemos construir esse sólido rotacionando-se a seguinte figura em torno de um eixo:



Assim, vamos usar o princípio de Cavalieri e uma anticlepsidra para encontrar o volume desse sólido.



Note que o volume do segmento esférico é igual ao volume da anticlepsidra. Este é igual à diferença entre os volumes do cilindro e do tronco de cone. Logo, temos:

$$V_{segmento\ esférico} = V_{cilindro} - V_{tronco} = \pi R^2 h - \frac{\pi h}{3}(x^2 + y^2 - xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + x^2 + y^2 - 2xy)$$

$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}(6R^2 - 3(x^2 + y^2) + (y - x)^2)$$

Na figura da esfera, podemos aplicar o teorema de Pitágoras:

$$R^2 = y^2 + r_1^2$$
$$R^2 = x^2 + r_2^2$$

Somando-se essas duas relações:

$$2R^2 = x^2 + y^2 + r_1^2 + r_2^2 \Rightarrow 3(x^2 + y)^2 = 6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)$$

Além disso, temos $y - x = h$, logo:

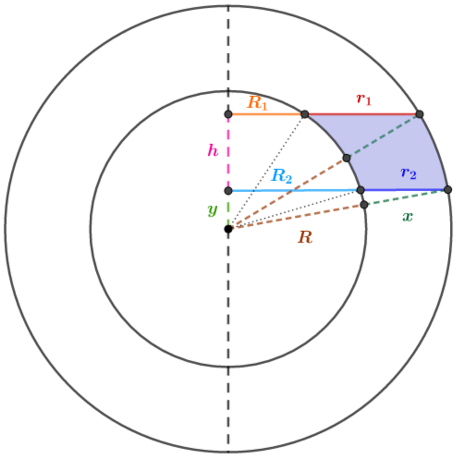
$$\Rightarrow V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}\left(6R^2 - \left(6R^2 - 3(r_1^2 + r_2^2)\right) + h^2\right)$$

$$\therefore \boxed{V_{segmento\ esférico} = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_2^2) + h^2]}$$

Para o volume do segmento esférico de uma base, basta considerar $r_1 = 0$ e $r_2 = r$. Logo:

$$\boxed{V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2)}$$

Podemos calcular a área da superfície do segmento esférico usando a expressão do seu volume. Para isso, usaremos uma casca esférica de espessura x e tomaremos um segmento esférico dessa casca. Consideremos a seguinte figura que é a secção plana que passa pelo centro desse segmento esférico:



Assim, temos que a diferença de volumes entre os segmentos de esferas concêntricas é:

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3(R_1 + r_1)^2 + 3(R_2 + r_2)^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 6R_1r_1 + 3r_1^2 + 3R_2^2 + 6R_2r_2 + 3r_2^2 + h^2] - \frac{\pi h}{6}[3R_1^2 + 3R_2^2 + h^2]$$

$$\Delta V = \frac{\pi h}{6}(6R_1r_1 + 3r_1^2 + 6R_2r_2 + 3r_2^2)$$

$$\boxed{\Delta V = \frac{\pi h}{2}(2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2)}\ (I)$$

Pelo teorema de Pitágoras, temos:

$$(R + x)^2 = y^2 + (R_2 + r_2)^2\ \ (II)$$
$$(R + x)^2 = (h + y)^2 + (R_1 + r_1)^2\ \ (III)$$
$$R^2 = y^2 + R_2^2 \Rightarrow y^2 = R^2 - R_2^2\ \ (IV)$$
$$R^2 = (h + y)^2 + R_1^2 \Rightarrow (h + y)^2 = R^2 - R_1^2\ \ (V)$$

Somando (I) e (II), temos:

$$2(R + x)^2 = y^2 + (h + y)^2 + (R_1 + r_1)^2 + (R_2 + r_2)^2$$

Substituindo (III) e (IV) na equação acima:

$$2(R + x)^2 = R^2 - R_2^2 + R^2 - R_1^2 + (R_1 + r_1)^2 + (R_2 + r_2)^2$$
$$2(R + x)^2 = 2R^2 + 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2$$
$$\Rightarrow 2R_1r_1 + 2R_2r_2 + r_1^2 + r_2^2 = 2(R + x)^2 - 2R^2\ \ (VI)$$

Substituindo (VI) em (I):

$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}[2(R + x)^2 - 2R^2]$$
$$\Delta V = \frac{\pi h}{2}(4Rx + 2x^2)$$

Dividindo a equação por x:

$$\Rightarrow \frac{\Delta V}{x} = \frac{\pi h}{2}(4R + 2x)$$

Aplicando o limite de $x \to 0$:

$$A = \lim_{x \to 0} \frac{\Delta V}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\pi h}{2}\left(4R + \underbrace{2x}_{0}\right)$$

Portanto, a área da superfície do segmento esférico é:

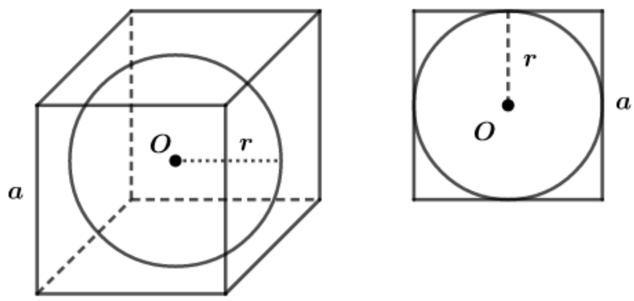
$$\therefore \boxed{A = 2\pi R h}$$

2. Inscrição e Circunscrição de Sólidos

Neste capítulo, veremos alguns casos de inscrição de circunscrição de sólidos que poderão ser cobrados no vestibular, muitas das questões desse tópico envolverão esferas, então, vamos estudá-las. A ideia aqui é apresentar o raciocínio que deve ser utilizado ao se deparar com esse tipo de questão.

2.1. Esfera e cubo

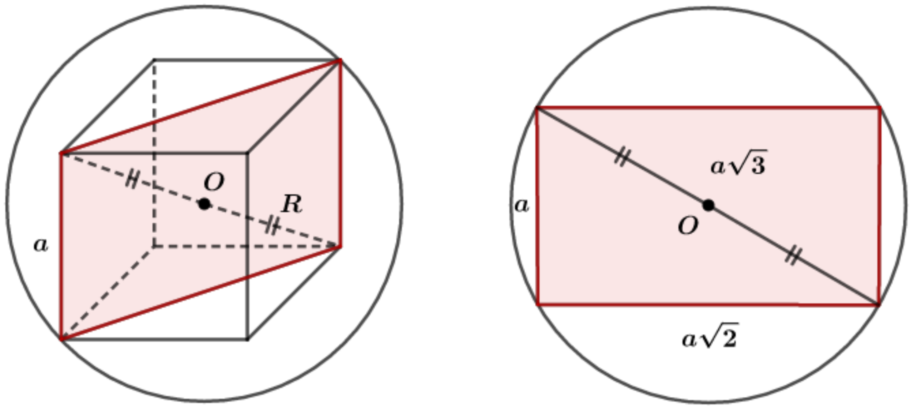
a) Esfera inscrita em cubo



Note que a esfera tangencia todas as faces do cubo. Assim, o centro da esfera equidista das faces, logo:

$$\boxed{r = \frac{a}{2}}$$

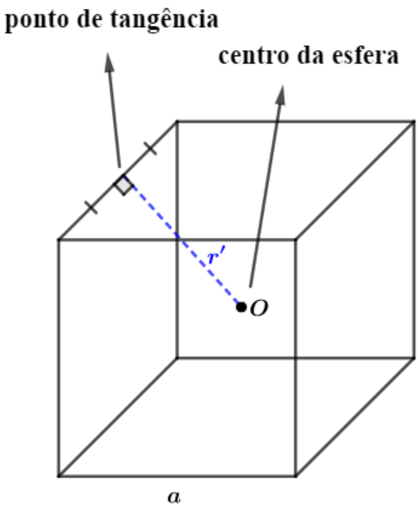
b) Esfera circunscrita ao cubo



O raio da esfera circunscrita é igual à metade da diagonal do cubo, como a diagonal do cubo mede $a\sqrt{3}$, temos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{3}}{2}}$$

c) Esfera tangente às arestas do cubo



Nesse caso, o centro da esfera equidista do ponto médio das arestas do cubo, ou seja,

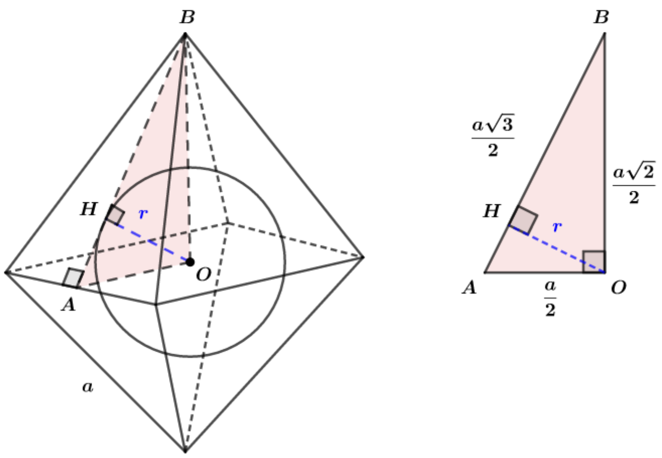
$$\boxed{r' = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

Note que, aplicando o teorema de Pitágoras, temos:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow \boxed{R^2 = r'^2 + r^2}$$

2.2. Esfera e octaedro regular

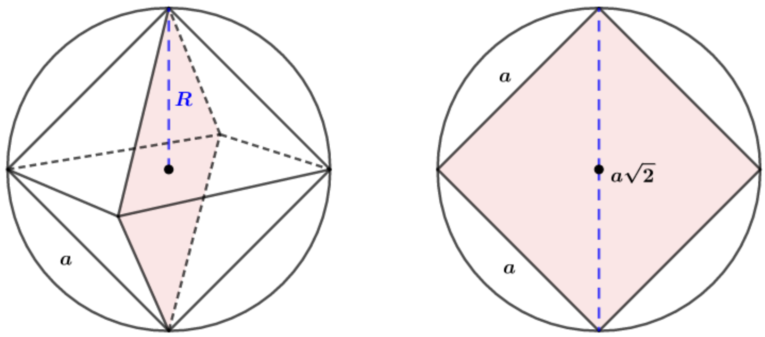
a) Esfera inscrita em um octaedro regular



A esfera tangencia todas as faces do octaedro regular. Pela figura, podemos ver que o raio da esfera inscrita é igual à altura do triângulo retângulo AOB, logo:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} r = \left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

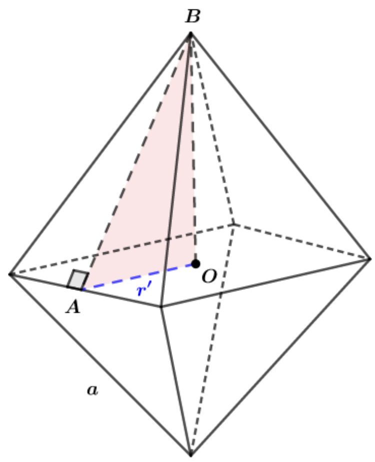
b) Esfera circunscrita ao octaedro regular



Nesse caso, o raio da esfera é igual à metade da diagonal do octaedro regular, logo:

$$\boxed{R=\frac{a\sqrt{2}}{2}}$$

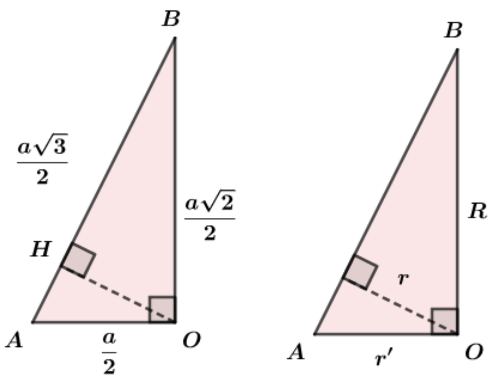
c) Esfera tangente às arestas do octaedro regular



O raio dessa esfera é

$$r'=\frac{a}{2}$$

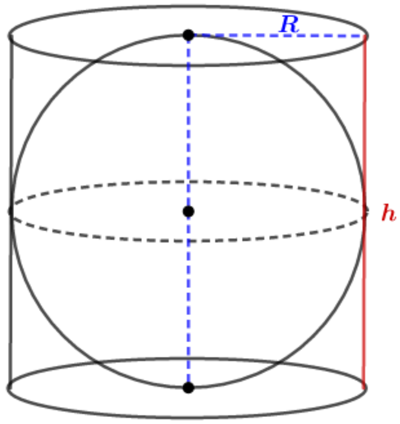
Note que os raios das esferas que estudamos podem se relacionar da seguinte forma:



$$\boxed{\frac{1}{r^2}=\frac{1}{R^2}+\frac{1}{r'^2}}$$

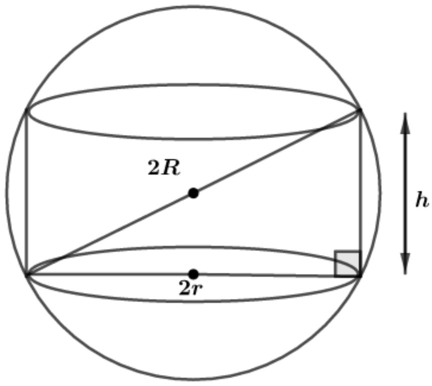
2.3. Esfera e cilindro

a) Cilindro circunscrita a uma esfera



Note que o cilindro circunscrito a uma esfera é um cilindro equilátero com $\boxed{h = 2R}$.

b) Cilindro inscrito em uma esfera



Legenda:

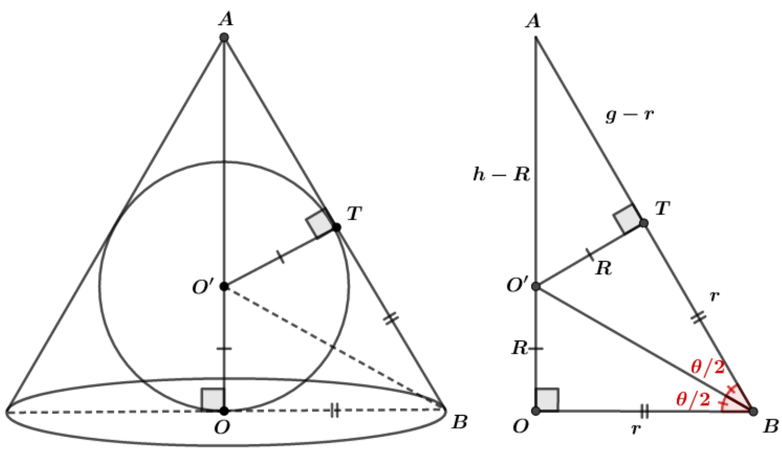
$$R - raio\ da\ esfera$$
$$r - raio\ da\ base\ do\ cilindro$$
$$h - altura\ do\ cilindro$$

Temos a seguinte relação:

$$\boxed{(2R)^2 = (2r)^2 + h^2}$$

2.4. Esfera e cone

a) Esfera inscrita em um cone



Legenda:

$$R - raio\ da\ esfera$$

$$h - altura\ do\ cone$$
$$r - raio\ da\ base\ do\ cone$$
$$g - geratriz\ do\ cone$$
$$\theta - \hat{a}ngulo\ entre\ a\ geratriz\ e\ a\ base\ do\ cone$$

T e O são pontos de tangência entre a esfera e o cone. T também é o ponto de tangência da geratriz com a esfera.

Do $\Delta ATO'$, temos:

$$\boxed{(h-R)^2 = (g-r)^2 + R^2}$$

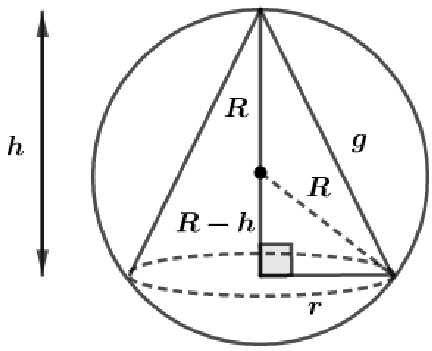
Note que $\Delta ATO' \sim \Delta AOB$, assim, pela semelhança de triângulos:

$$\boxed{\frac{h-R}{R} = \frac{g}{r}}$$

Pelas relações trigonométricas:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{R}{r} \Rightarrow \boxed{\theta = 2\,\text{arctg}\left(\frac{R}{r}\right)}$$

b) Esfera circunscrita ao cone



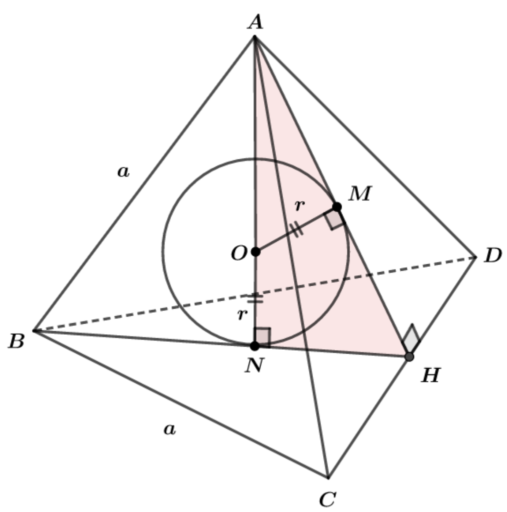
O cone possui base de raio r e altura h. Pelo teorema de Pitágoras, temos:

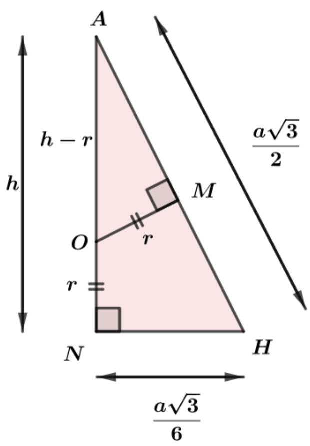
$$R^2 = (R-h)^2 + r^2 \Rightarrow R^2 = R^2 - 2Rh + h^2 + r^2$$

$$\therefore \boxed{R = \frac{h^2 + r^2}{2h}}$$

2.5. Esfera e tetraedro regular

a) Esfera inscrita em um tetraedro regular





As faces do tetraedro são triângulo equiláteros, assim, AH é altura de um triângulo equilátero de lado a, logo:

$$AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

No triângulo equilátero BCD, N é o baricentro desse triângulo, logo:

$$NH = \frac{BH}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Pelo teorema de Pitágoras, podemos achar a altura do tetraedro:

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = a^2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\right) \Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{3}}$$

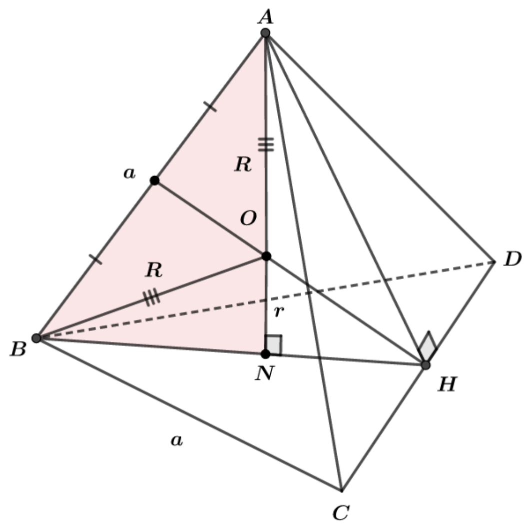
Por semelhança de triângulos, temos:

$$\Delta AMO \sim \Delta ANH \Rightarrow \frac{h - r}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} \Rightarrow h = 4r \therefore r = \frac{h}{4}$$

Portanto, o raio da esfera inscrita é:

$$\boxed{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$$

b) Esfera circunscrita ao tetraedro regular



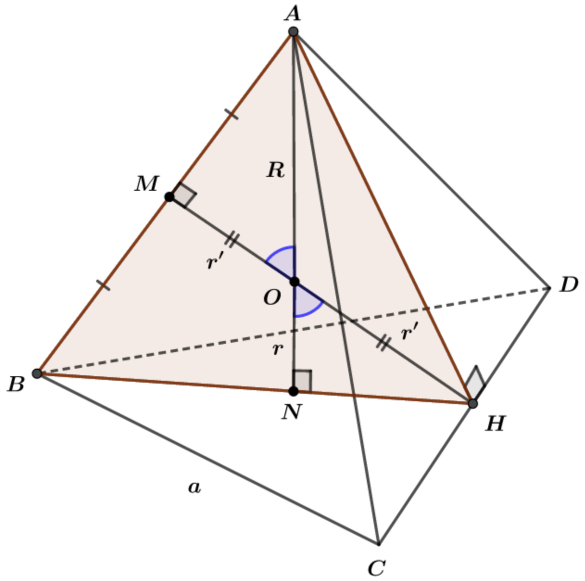
R é o raio da esfera circunscrita ao tetraedro regular. Note que $r + R = h$, desse modo:

$$r + R = 4r \Rightarrow R = 3r \Rightarrow \boxed{\frac{R}{r} = 3}$$

Substituindo a expressão de r, obtemos:

$$\boxed{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

c) Esfera tangente às arestas do tetraedro regular



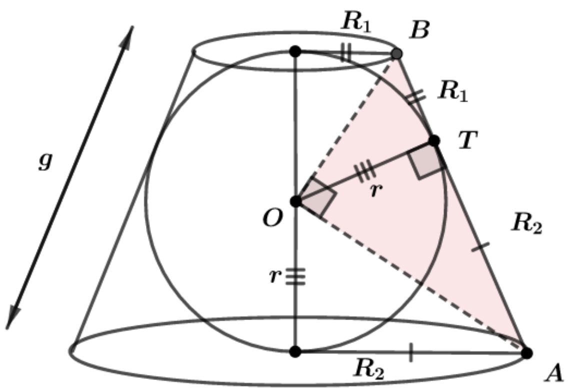
r' é o raio da esfera tangente às arestas. Por semelhança, temos:

$$\Delta AOM \sim \Delta HON \Rightarrow \frac{r'}{R} = \frac{r}{r'} \Rightarrow \boxed{r' = \sqrt{Rr}}$$

Portanto, o raio da esfera tangente às arestas é a média geométrica entre os raios das esferas inscritas e circunscritas ao mesmo tetraedro.

2.6. Esfera e tronco de cone

a) Esfera inscrita em um tronco de cone reto de bases paralelas



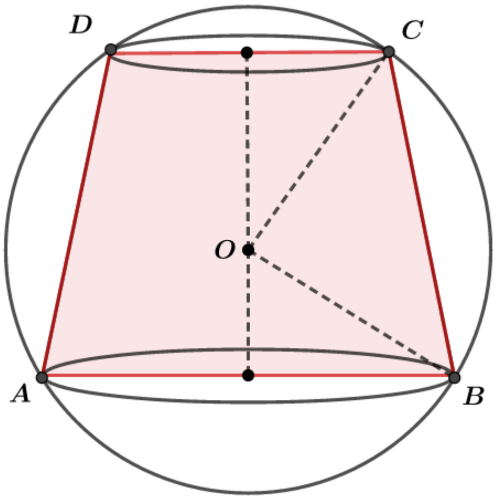
Para o tronco de cone ser circunscritível a uma esfera, devemos ter:

$$\boxed{g = R_1 + R_2}$$

Além disso, analisando o triângulo retângulo AOB, obtemos o raio da esfera inscrita em função de R_1 e R_2:

$$\Delta BTO \sim \Delta OTA \Rightarrow \frac{r}{R_1} = \frac{R_2}{r} \Rightarrow \boxed{r = \sqrt{R_1 R_2}}$$

b) Esfera circunscrita a um tronco de cone reto de bases paralelas

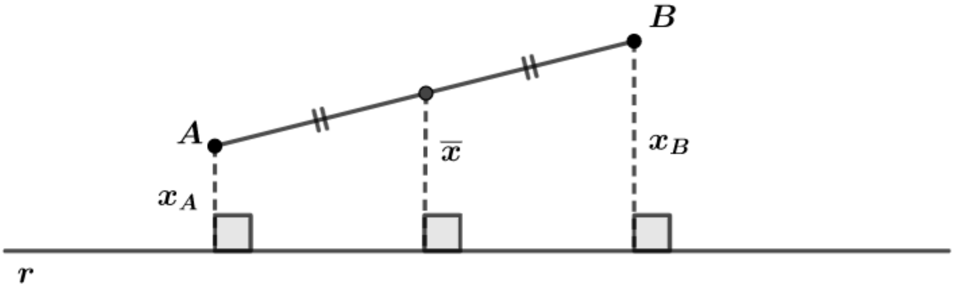


Nesse caso, tomando-se um plano secante que divide o tronco de cone em duas partes iguais, podemos ver que a secção plana é um trapézio isósceles inscrito numa circunferência.

3. Teorema de Pappus-Guldin

O teorema de Pappus-Guldin nos permite calcular facilmente a área da superfície e o volume de um sólido de revolução. Para isso, precisamos conhecer a distância do centro de gravidade da figura a ser rotacionada ao eixo de rotação. Vejamos como determinar essa distância com alguns exemplos.

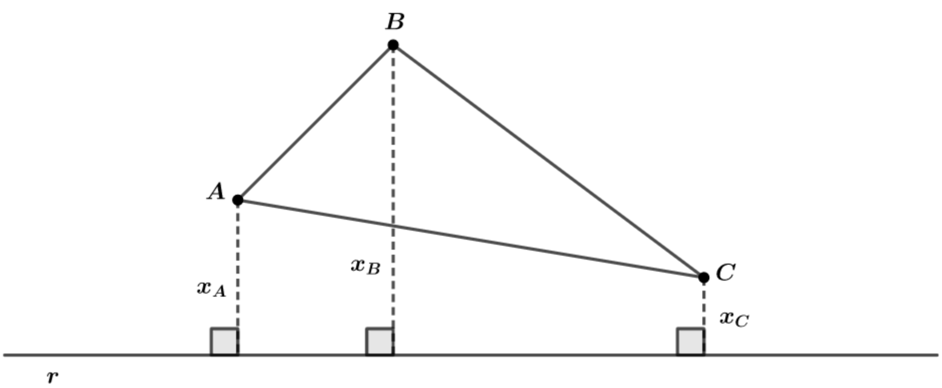
Consideremos o segmento de reta $\overline{AB}$ e a reta r abaixo:



$\bar{x}$ é a distância do centro de gravidade do segmento de reta $\overline{AB}$ à reta r, essa distância é igual à média aritmética entre x_A e x_B:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{x_A + x_B}{2}}$$

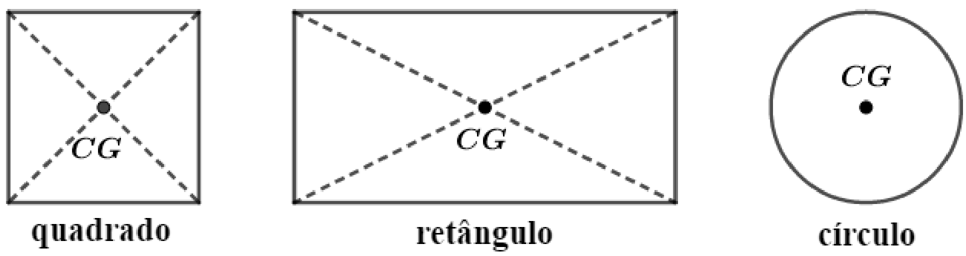
Vejamos o caso de um triângulo:



A distância do centro de gravidade do triângulo de vértices A, B e C à reta r é dado pela média aritmética entre x_A, x_B e x_C:

$$\boxed{\overline{x} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}}$$

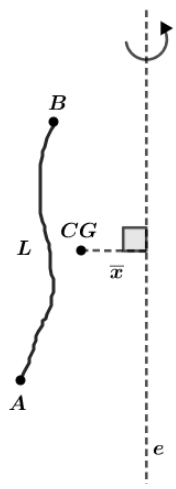
Além disso, o **centro de gravidade** de um triângulo é o seu **baricentro**.
De forma geral, o centro de gravidade de uma figura plana é o seu centro geométrico.



Agora que sabemos o que é centro de gravidade de uma figura plana, vamos aprender os teoremas de Pappus-Guldin.

3.1. Área de superfícies de revolução

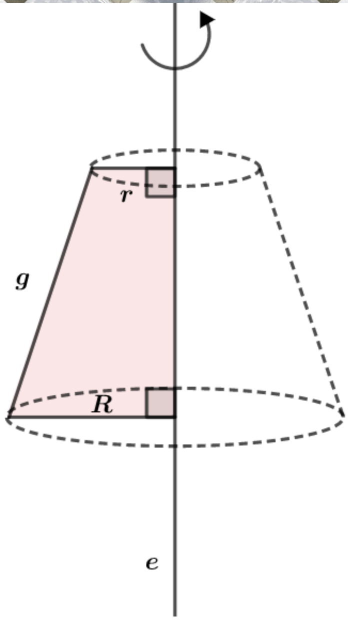
Consideremos a seguinte figura:



Ao rotacionar a linha em torno do eixo, obteremos uma superfície de revolução cuja área é dada por:

$$\boxed{A = 2\pi\overline{x}L}$$

Onde $\overline{x}$ é a distância do centro de gravidade da linha ao eixo e L é o comprimento da linha.
Vejamos um exemplo.
3.1.a) Calcule a área lateral do sólido de revolução gerado pela seguinte figura plana:



Essa figura é um trapézio cujas bases medem r e R e a distância do seu centro de gravidade ao eixo de rotação é

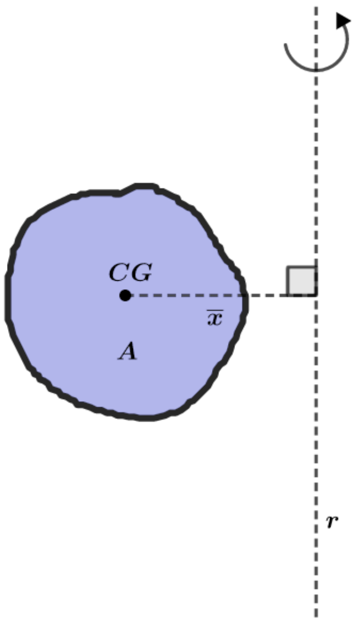
$$\overline{x} = \frac{r+R}{2}$$

O sólido gerado é um tronco de cone. Aplicando o teorema de Pappus-Guldin, obtemos a área lateral desse tronco:

$$A_L = 2\pi g\left(\frac{r+R}{2}\right) \therefore \boxed{A_L = \pi g(r+R)}$$

3.2. Volume de sólidos de revolução

Para calcular o volume de sólidos de revolução, basta conhecer a área da superfície a ser rotacionada e a distância do centro de gravidade dessa superfície ao eixo de rotação.



O volume do sólido de revolução é dado por:

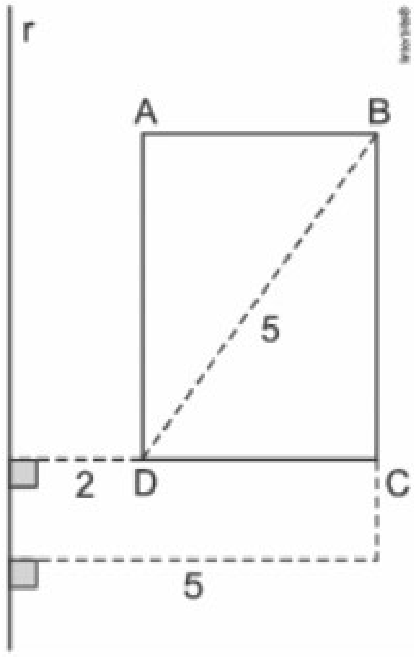
$$\boxed{V = 2\pi\overline{x}A}$$

Onde A é a área da superfície geradora.

Vejamos um exemplo.

3.2.a) (UFRGS/2019)

Considere o sólido obtido pela revolução do retângulo $ABCD$ em torno da reta r, conforme indicado na figura a seguir.

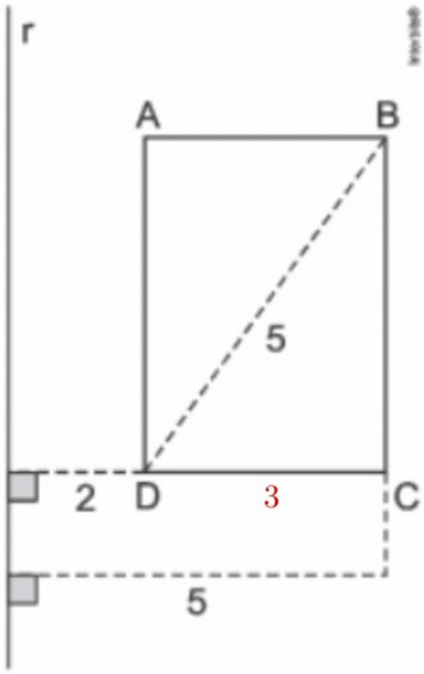


O volume do sólido obtido é

a) 16π b) 84 c) 100 d) 84π e) 100π

Comentários

Da figura, tiramos que $DC = 3$. Com esse dado, podemos calcular o valor de BC por meio do teorema de Pitágoras.



A distância do centro de gravidade de $ABCD$ à reta r é igual a

$$\overline{x} = 2 + \frac{DC}{2} = 2 + \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

A área da figura é

$$A = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto, o volume do sólido de revolução é

$$V = 2\pi\overline{x}A = 2\pi\left(\frac{7}{2}\right)12 = 84\pi$$

Gabarito: "d".

4. Lista de Questões

Questões ITA

1. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de $75°$ com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

2. (ITA/1017)

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2(1 + \sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em tomo do seu maior cateto.

3. (ITA/2016)

Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$

b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$

c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$

d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$

e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$

4. (ITA/2016)

Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

5. (ITA/2015)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$

b) $\sqrt[3]{2} - 1$

c) $(\sqrt[3]{2} - 1)h$

d) h

e) $\frac{h}{2}$

6. (ITA/2014)

Um cilindro reto de altura $h = 1\,cm$ tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0$. Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

7. (ITA/2014)

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $1/3$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

8. (ITA/2014)

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

9. (ITA/2014)

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0{,}25\ cm$ do vértice A e $0{,}75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $9/16$

b) $13/96$

c) $7/24$

d) $9/24$

e) $11/96$

10. (ITA/2013)

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0), B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1

b) $\frac{100}{105}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{100}{115}$

e) $\frac{5}{6}$

11. (ITA/2012)

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) π e $2\pi\sqrt{2}$

12. (ITA/2012)

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio $2\ cm$ e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor AB em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

13. (ITA/2012)

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $2\sqrt{3}/3$ é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $1/4$

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $2/3$

e) ¾

14. (ITA/2011)

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de $30°$ em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

15. (ITA/2011)

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

b) $\frac{13}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\frac{10}{3}$

16. (ITA/2010)

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $3/2$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

17. (ITA/2010)

Um cilindro reto de altura $\sqrt{6}/3$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm. o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

18. (ITA/2008)

Um diedro mede $120°$. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \mathrm{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$

b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) 2

19. (ITA/2008)

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e AB um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos AF e EF em torno do diâmetro AB.

20. (ITA/2006)

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

21. (ITA/2005)

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é $\pi\ \mathrm{cm}^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

22. (ITA/2005)

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\pi r^3/45$. Se o volume da menor cunha for igual a $\pi r^3/18$, então n é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 6.

d) 5.

e) 7.

23. (ITA/2005)

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.

b) 6.

c) 5.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

Questões IME

24. (IME/2020)

Em um cubo regular de aresta a, os pontos M, N e L pertencentes às três arestas distintas que partem do vértice A estão a uma distância x de A tal que $0 < x \leq \frac{a}{2}$. Para que plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é:

a) $\frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1)$

b) $\frac{a}{2}(3 - \sqrt{3})$

c) $\frac{a}{2}(2 - \sqrt{3})$

d) $\frac{a}{2}(4 - 2\sqrt{3})$

e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

25. (IME/2019)

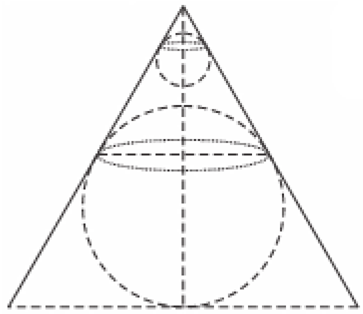
Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

26. (IME/2017)

Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



27. (IME/2016)

Um cone é inscrito em um cubo ABCDEFGH de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base ABCD. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base ABCD coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

28. (IME/2010)

Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

a) $8\pi \text{ cm}^2$

b) $9\pi \text{ cm}^2$

c) $12\pi \text{ cm}^2$

d) $16\pi \text{ cm}^2$

e) $36\pi \text{ cm}^2$

5. Gabarito

Gabarito das Questões ITA

1. $\boldsymbol{R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3}-3}{12}\right)}$
2. $\boldsymbol{S_{total} = \pi \cdot \left(18 + 2\sqrt{6}\right)}$
3. b
4. $\boldsymbol{V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right)}$
5. c
6. $\boldsymbol{S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2}$
7. a) $\boldsymbol{S = 3\sqrt{39}\ cm^2}$ b) $\boldsymbol{V = 39\pi\ cm^3}$
8. $\boldsymbol{R\left(1 + \sqrt{5}\right)}$

9. c
10. b
11. a
12. a) $S = 20\pi\ cm^2$ b) $V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$
13. d
14. $S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$
15. e
16. a) $O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm$ b) $\frac{17\pi}{5}\ cm^3$
17. d
18. e
19. $\frac{2\pi r^3}{3}$
20. $S_{total} = 108\pi\ m^2$
21. $30°$, $60°$ e $90°$.
22. c
23. c

Gabarito das Questões IME

24. b
25. a) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ b) $R = \frac{a(3-\sqrt{3})}{4}$
26. $2a = (3 - \sqrt{3})R$
27. $S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi \cdot a}{18}$
28. e

6. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

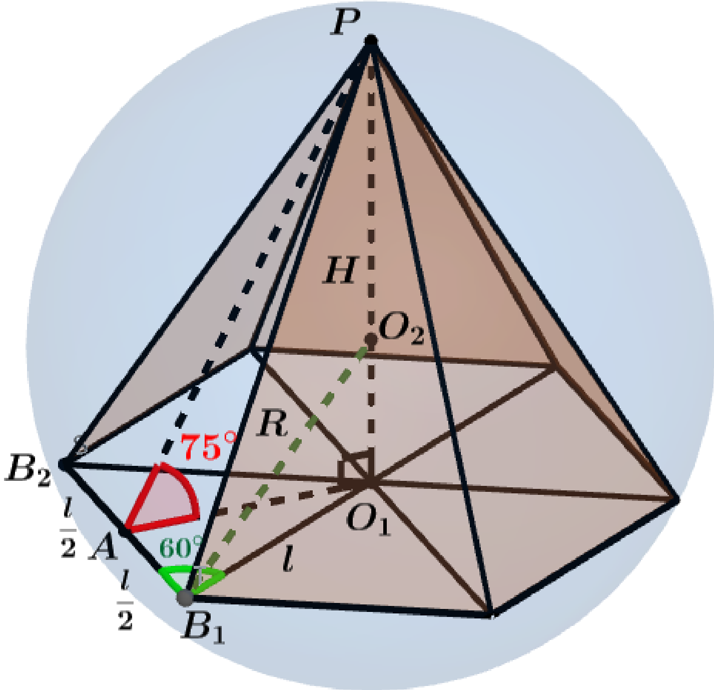
Questões ITA Comentadas

1. (ITA/2020)

Considere uma pirâmide reta P cuja base é um hexágono regular de lado l. As faces laterais dessa pirâmide formam um ângulo diedro de $75°$ com a base da própria pirâmide. Sabendo que P está inscrita em uma esfera, determine o raio dessa esfera.

Comentários

Espacialmente, temos os seguinte problema:



De acordo com a figura, pela tangente de 75° no triângulo AO_1P, vem:

$$tg(75°) = \frac{O_1P}{AO_1}$$

Em que:

$$AO_1 = O_1B_1 \cdot sen(60°)$$
$$AO_1 = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo:

$$tg(75°) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$tg(45° + 30) = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{tg45° + tg30°}{1 - tg30° \cdot tg45°} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} = \frac{H}{l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}}\right)$$
$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\left(3 + \sqrt{3}\right)^2}{6}$$
$$H = l \cdot \frac{\sqrt{3}\left(12 + 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}\right)}{12}$$

$$H = l \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)$$

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $B_1O_1O_2$, vem:

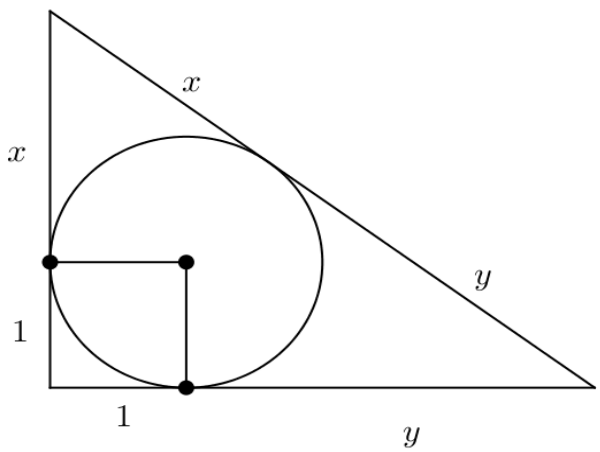
$$R^2 = (l)^2 + (H - R)^2$$
$$R^2 = l^2 + H^2 - 2 \cdot H \cdot R + R^2$$
$$0 = l^2 + l^2 \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot l \cdot \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right) \cdot R$$
$$R = l \cdot \left(\frac{1 + \left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)^2}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$
$$R = l \cdot \left(\frac{1 + 3 + 3 \cdot \sqrt{3} + \frac{9}{4}}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$
$$R = \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{25 + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}\right)$$
$$R = \frac{l}{4} \cdot \left(\frac{25 + 12\sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 3}\right) \cdot \frac{(2\sqrt{3} - 3)}{(2\sqrt{3} - 3)}$$
$$\boxed{R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3} - 3}{12}\right)}$$

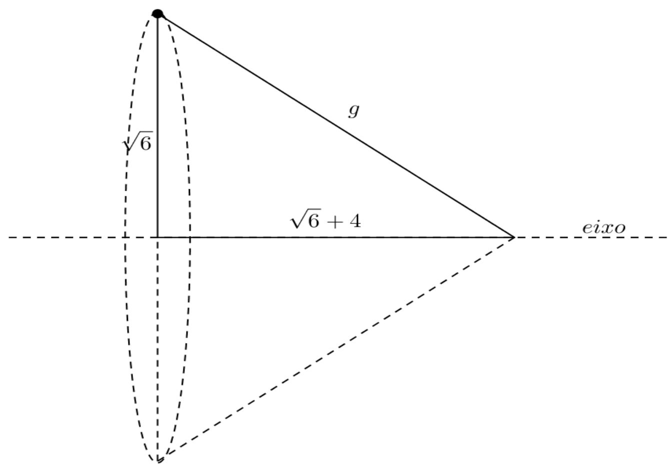
Gabarito: $R = l \cdot \left(\frac{14\sqrt{3} - 3}{12}\right)$

2. (ITA/1017)

Um triângulo retângulo com hipotenusa $c = 2(1 + \sqrt{6})$ está circunscrito a um círculo de raio unitário. Determine a área total da superfície do cone obtido ao girar o triângulo em tomo do seu maior cateto.

Comentários





Note que:

$$x + y = 2(1 + \sqrt{6}) \therefore y = 2(1 + \sqrt{6}) - x \text{ (I)}$$

Por Pitágoras, temos:

$$(x + y)^2 = 4(1 + \sqrt{6})^2 = (x + 1)^2 + (y + 1)^2 \text{ (II)}$$

Agora, substituindo (I) em (II), então:

$$4(7+2\sqrt{6}) = (x+1)^2 + (2+2\sqrt{6}-x+1)^2 \therefore$$
$$x^2 + 2x + 1 + (3+2\sqrt{6})^2 - 2x(3+2\sqrt{6}) + x^2 = 28 + 8\sqrt{6} \therefore$$
$$x^2 - 2x(1+\sqrt{6}) + (3+2\sqrt{6}) = 0 \begin{cases} x_1 = \sqrt{6}-1 \therefore y_1 = \sqrt{6}+3 \\ e\ vice-versa; \end{cases}$$

Com isso,

$$S_{total} = \pi \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{6}+g),$$

Onde:

$$g^2 = (\sqrt{6})^2 + (\sqrt{6}+4)^2 = 4(7+2\sqrt{6}) \therefore g = 2(1+\sqrt{6});$$

Logo,

$$S_{total} = \pi \cdot \sqrt{6} \cdot (\sqrt{6}+2+2\sqrt{6}) \therefore \boldsymbol{S_{total} = \pi \cdot (18+2\sqrt{6})}$$

Gabarito: $S_{total} = \pi \cdot (18+2\sqrt{6})$

3. (ITA/2016)

Uma esfera S_1, de raio $R > 0$, está inscrita num cone circular reto K. Outra esfera, S_2, de raio r, com $0 < r < R$, está contida no interior de K e é simultaneamente tangente à esfera S_1 e à superfície lateral de K. O volume de K é igual a

a) $\frac{\pi R^5}{3r(R-r)}$

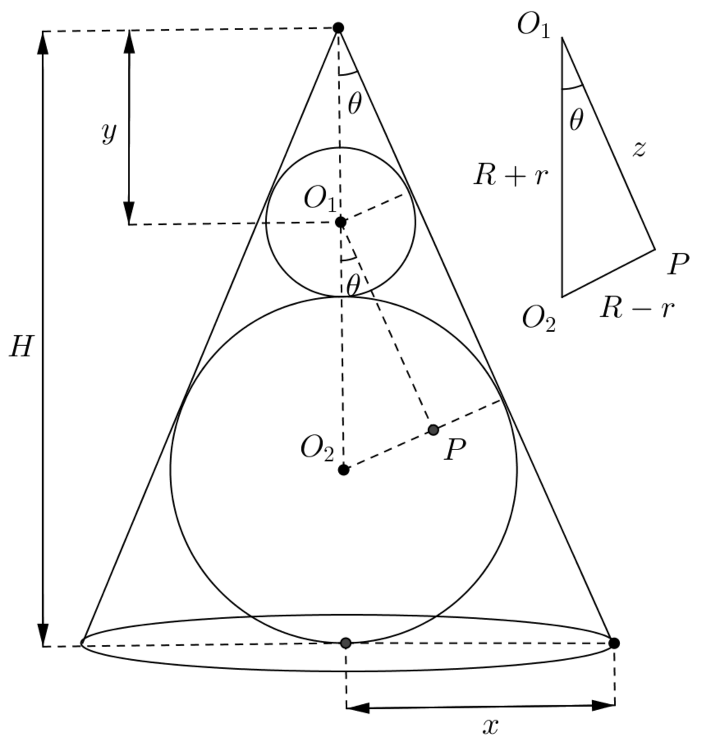
b) $\frac{2\pi R^5}{3r(R-r)}$

c) $\frac{\pi R^5}{r(R-r)}$

d) $\frac{4\pi R^5}{3r(R-r)}$

e) $\frac{5\pi R^5}{3r(R-r)}$

Comentários



Por Pitágoras no ΔPO_1O_2, temos:

$$(R+r)^2=(R-r)^2+z^2 \therefore z=2\sqrt{Rr};$$

Note que:

$$y=r\csc\theta=r\cdot\frac{R+r}{R-r}\therefore H=2R+r+y\therefore H=\frac{2R^2}{R-r};$$

$$\tan\theta=\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}=\frac{x}{H}=\therefore x=\left(\frac{2R^2}{R-r}\right)\cdot\left(\frac{R-r}{2\sqrt{Rr}}\right)\therefore x=\frac{R^2}{\sqrt{Rr}};$$

Logo,

$$V=\frac{1}{3}\cdot(\pi x^2)\cdot(H)=\frac{1}{3}\cdot\left(\pi\cdot\frac{R^4}{Rr}\right)\cdot\left(\frac{2R^2}{R-r}\right)\therefore \boldsymbol{V}=\frac{\boldsymbol{2\pi R^5}}{\boldsymbol{3r(R-r)}}$$

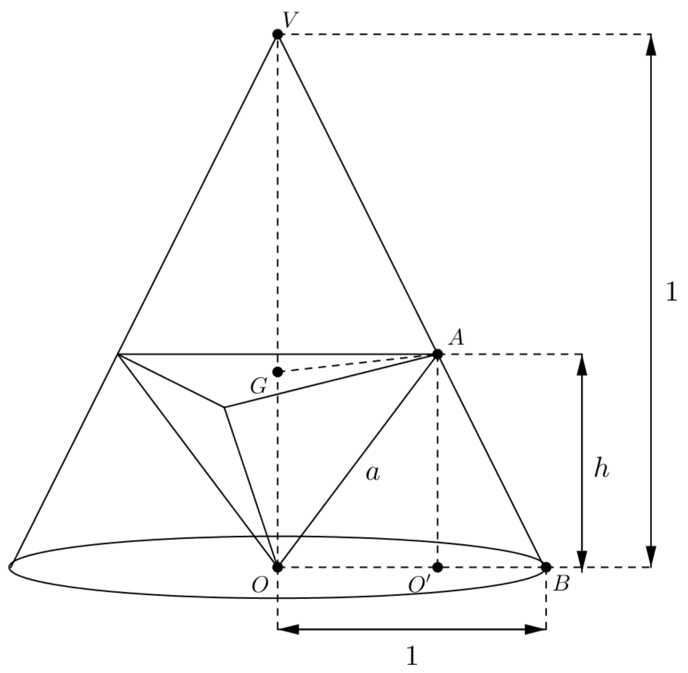
Gabarito: “b”

---

4. (ITA/2016)

Em um cone circular reto de altura 1 e raio da base 1 inscreve-se um tetraedro regular com uma de suas faces paralela à base do cone, e o vértice oposto coincidindo com o centro da base do cone. Determine o volume do tetraedro.

Comentários



Note que $\Delta AO'B \sim \Delta VOB \Rightarrow \frac{1}{h}=\frac{1}{O'B}$ e $O'B=1-GA$. Como G é o baricentro de uma das faces do tetraedro regular de aresta $a \Rightarrow GA=\frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow O'B=1-\frac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow h=1-\frac{a}{\sqrt{3}}$

Agora, apliquemos Pitágoras no $\Delta OO'A$:

$$a^2=h^2+OO'^2 \therefore a^2=h^2+\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 \therefore h^2=\frac{2a^2}{3}\therefore h=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a \therefore 1-\frac{a}{\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot a$$

$$\therefore a=\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}-1)$$

Finalmente,

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{3}\cdot S_{base}\cdot h=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}\cdot(\sqrt{2}-1)\right)^2\cdot\left(\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}-1)\right)\therefore$$

$$\boldsymbol{V_{tetraedro}=\frac{\sqrt{6}}{4}\cdot(5\sqrt{2}-7)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{V_{tetraedro} = \frac{\sqrt{6}}{4} \cdot \left(5\sqrt{2} - 7\right)}$

5. (ITA/2015)

Uma taça em forma de cone circular reto contém um certo volume de um líquido cuja superfície dista h do vértice do cone. Adicionando-se um volume idêntico de líquido na taça, a superfície do líquido, em relação à original, subirá de

a) $\sqrt[3]{2} - h$

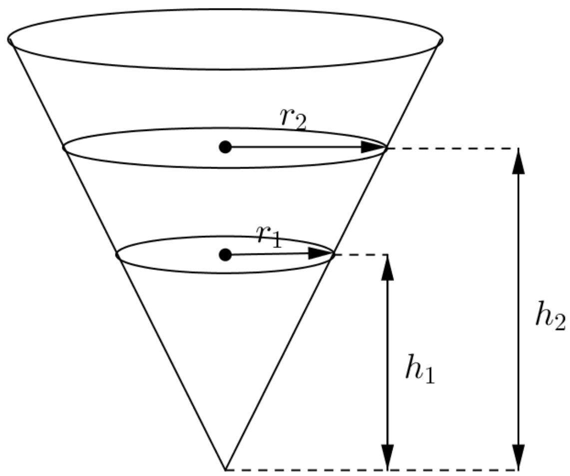
b) $\sqrt[3]{2} - 1$

c) $\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)h$

d) h

e) $\frac{h}{2}$

Comentários



Dado que $V_2 = 2V_1 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \pi {r_2}^2 \cdot h_2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi {r_1}^2 \cdot h_1$. Como os cones 1 e 2 são semelhantes, temos:

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{h_2}{h_1} \therefore \left(r_1 \cdot \frac{h_2}{h_1}\right)^2 \cdot h_2 = 2 \cdot {r_1}^2 \cdot h_1 \therefore h_2 = \sqrt[3]{2} \cdot h_1$$

Logo,

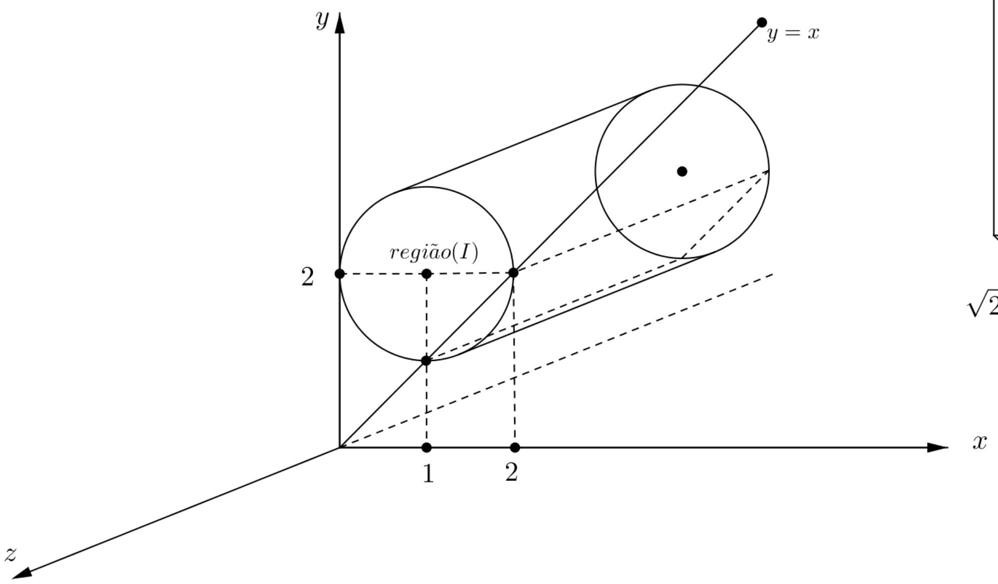
$$\Delta h = h_2 - h_1 \therefore \boldsymbol{\Delta h = h_1 \cdot \left(\sqrt[3]{2} - 1\right)}$$

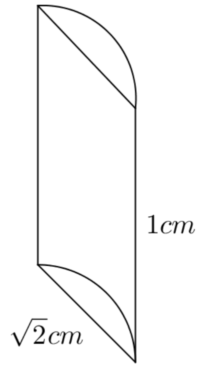
Gabarito: "c"

6. (ITA/2014)

Um cilindro reto de altura $h = 1\,cm$ tem sua base no plano xy definida por $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0$. Um plano, contendo a reta $y - x = 0$ e paralelo ao eixo do cilindro, o secciona em dois sólidos. Calcule a área total da superfície do menor sólido.

Comentários





$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 < 0 \therefore (x-1)^2 + (y-2)^2 < 1 \longleftarrow \text{Região circular (I)}$$

Pela figura acima, note que:

$$S_{sólido} = S_{retangular}^{face} + S_{bases} + S_{circular}^{face}$$

Com isso, calculemos cada umas três áreas acima necessárias, como segue abaixo:

$$S_{retangular}^{face} = \sqrt{2}\ cm^2$$

$$S_{base} = S_{arco} - S_{triângulo} \therefore S_{base} = \frac{\pi \cdot 1^2}{4} - \frac{1 \cdot 1}{2} \therefore S_{base} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right)\ cm^2$$

$$S_{circular}^{face} = \frac{90°}{360°} \cdot 2\pi \cdot 1 \cdot 1 \therefore S_{circular}^{face} = \frac{\pi}{2}\ cm^2$$

Logo,

$$S_{sólido} = \sqrt{2} + 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \therefore \boldsymbol{S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2}$$

Gabarito: $S_{sólido} = \sqrt{2} + \pi - 1\ cm^2$

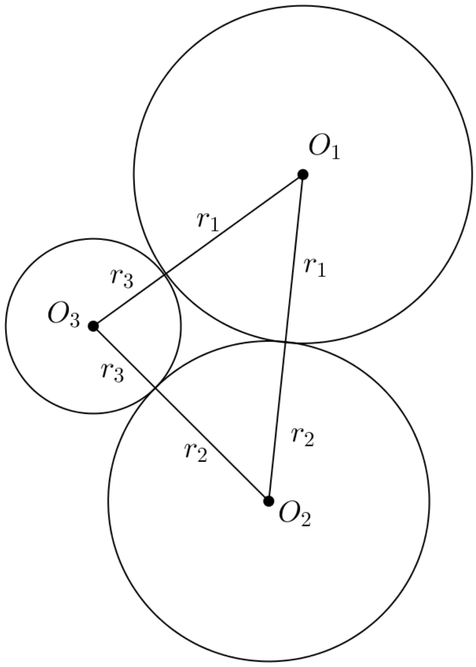
7. (ITA/2014)

Três circunferências C_1, C_2 e C_3 são tangentes entre si, duas a duas, externamente. Os raios r_1, r_2 e r_3 destas circunferências constituem, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $1/3$. A soma dos comprimentos de C_1, C_2 e C_3 é igual a $26\pi\ cm$. Determine:

a) a área do triângulo cujos vértices são os centros de C_1, C_2 e C_3.

b) o volume do sólido de revolução obtido pela rotação do triângulo em torno da reta que contém o maior lado.

Comentários



a)

Os lados do $\Delta O_1O_2O_3$ são $O_1O_2 = r_1 + r_2$; $O_2O_3 = r_2 + r_3$; $O_1O_3 = r_1 + r_3$. Dado que r_1, r_2, r_3 estão, nessa ordem, em uma P.G. de razão $q = \frac{1}{3}$ e que $2\pi \cdot (r_1 + r_2 + r_3) = 26\ cm$, então:

$$r_1 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) = 13\ cm \Rightarrow r_1 \cdot \frac{13}{9} = 13$$

$$\therefore r_1 = 9\ cm; r_2 = 3\ cm; r_3 = 1\ cm$$

Logo, os lados do $\Delta O_1O_2O_3$ são $4\ cm$, $10\ cm$ e $12\ cm$.

Finalmente, pela fórmula de Heron, temos:

$$S = \sqrt{p\big(p - (r_1 + r_2)\big)\big(p - (r_1 + r_3)\big)\big(p - (r_2 + r_3)\big)}$$

$$p = \frac{(r_1 + r_2) + (r_1 + r_3) + (r_2 + r_3)}{2} = r_1 + r_2 + r_3$$

$$S = \sqrt{(r_1 + r_2 + r_3)(r_1)(r_2)(r_3)} = \sqrt{(9 + 3 + 1)(9)(3)(1)} \therefore \boldsymbol{S = 3\sqrt{39}\ cm^2}$$

b)

Pelo teorema de Pappus-Guldin, chega-se a:

$$V = 2\pi \cdot S \cdot \overline{x}$$

$$V = 2\pi \cdot 3\sqrt{39} \cdot \underbrace{\left(\frac{h_{O_3}}{3}\right)}_{\text{distância do baricentro ao eixo de rotação}}$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot h_{O_3} \cdot (r_1 + r_2) \Rightarrow h_{O_3} = \frac{2S}{r_1 + r_2}$$

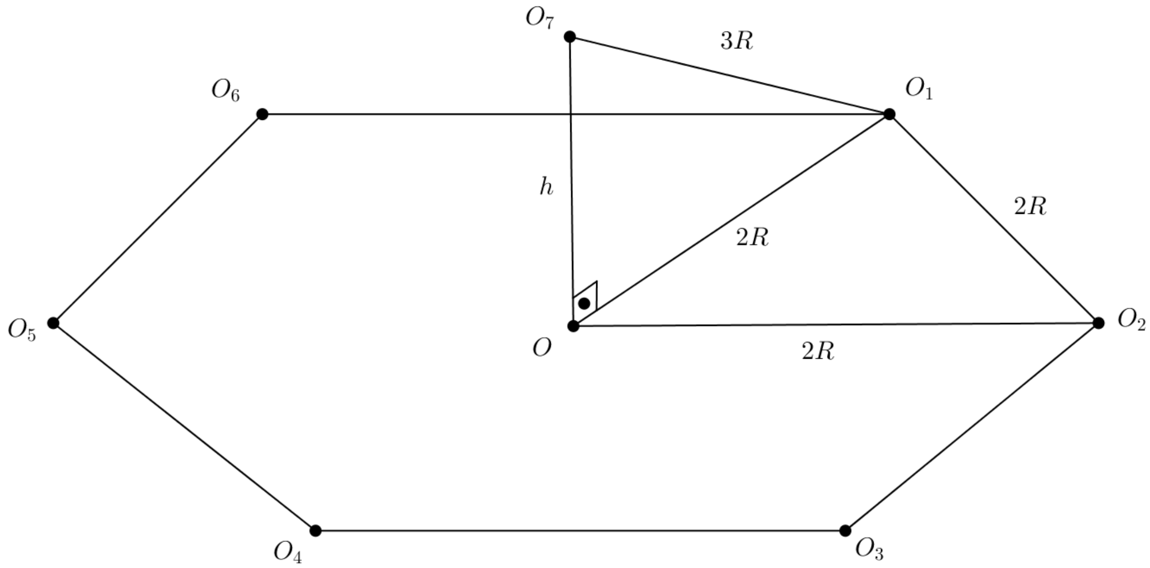
$$V = 2\pi \cdot 3\sqrt{39} \cdot \frac{2 \cdot 3\sqrt{39}}{12 \cdot 3} \therefore \boldsymbol{V = 39\pi\ cm^3}$$

Gabarito: a) $S = 3\sqrt{39}\ cm^2$ b) $V = 39\pi\ cm^3$

8. (ITA/2014)

Seis esferas de mesmo raio R são colocadas sobre uma superfície horizontal de tal forma que seus centros definam os vértices de um hexágono regular de aresta $2R$. Sobre estas esferas é colocada uma sétima esfera de raio $2R$ que tangencia todas as demais. Determine a distância do centro da sétima esfera à superfície horizontal.

Comentários



Por Pitágoras no ΔOO_1O_7, temos:

$$h^2 = (3R)^2 - (2R)^2 \therefore h = \sqrt{5}R$$

Logo,

A distância de O_7 à superfície é $\boldsymbol{R(1+\sqrt{5})}$

Gabarito: $\boldsymbol{R(1+\sqrt{5})}$

9. (ITA/2014)

Considere o sólido de revolução obtido pela rotação de um triângulo isósceles ABC em torno de uma reta paralela à base $\overline{BC}$ que dista $0{,}25\ cm$ do vértice A e $0{,}75\ cm$ da base $\overline{BC}$. Se o lado $\overline{AB}$ mede $\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\ cm$, o volume desse sólido, em cm^3, é igual a

a) $9/16$

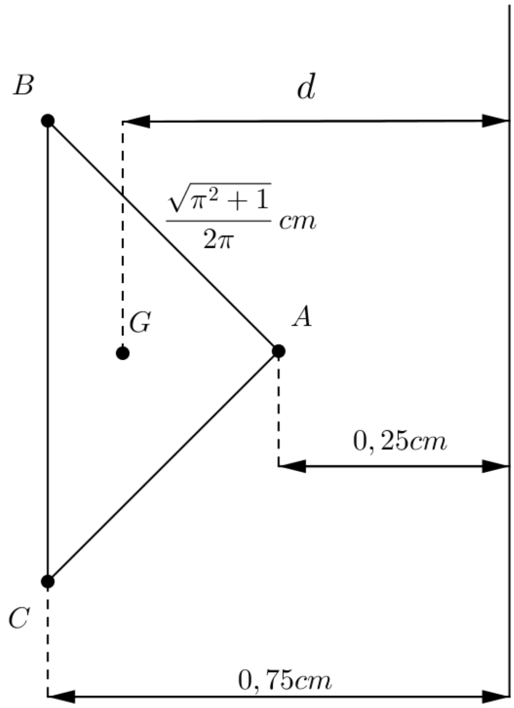
b) $13/96$

c) $7/24$

d) $9/24$

e) $11/96$

Comentários



Pelo teorema de Pappus-Guldin, o volume do sólido obtido pela revolução do triângulo em torno da reta é dado por:

$$V = 2\pi S_{\Delta ABC} d$$

Podemos escrever d como segue abaixo:

$$d = AG + 0{,}25 \therefore d = \frac{2}{3} \cdot h_A + 0{,}25$$

Onde: $h_A = (0{,}75 - 0{,}25)\ cm \therefore h_A = 0{,}5\ cm$

Logo,

$$d = \frac{7}{12}\ cm$$

O lado BC pode ser obtido por Pitágoras, como segue abaixo:

$$\left(\frac{BC}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\pi^2+1}}{2\pi}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \therefore BC = \frac{1}{\pi}\ cm$$

Com isso,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot h_A}{2} = \frac{\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2}}{2} \therefore$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4\pi}\ cm^2$$

Finalmente,

$$V = 2\pi \cdot \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{7}{12} \therefore \boldsymbol{V = \frac{7}{24}\ cm^3}$$

Gabarito: “c”

10. (ITA/2013)

No sistema xOy os pontos $A = (2, 0), B = (2, 5)$ e $C = (0, 1)$ são vértices de um triângulo inscrito na base de um cilindro circular reto de altura 8. Para este cilindro, a razão $\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície}$, em unidade de comprimento, é igual a

a) 1

b) $\frac{100}{105}$

c) $\frac{10}{11}$

d) $\frac{100}{115}$

e) $\frac{5}{6}$

Comentários

Para o triângulo de vértices $A, B\ e\ C$, temos:

$$\begin{cases} AB = \sqrt{(2-2)^2 + (5-0)^2} = 5 \\ AC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5} \\ BC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-5)^2} = 2\sqrt{5} \end{cases}$$

Com isso,

$$\frac{5 \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}}{4R} = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| = S_{ABC} \Rightarrow R = \frac{5}{2}$$

Onde R é o raio da base circular do cilindro.

Logo,

$$\frac{volume}{área\ total\ da\ superfície} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^2 \cdot 8}{2\pi \cdot \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{5}{2} + 8\right)} \therefore \frac{\boldsymbol{volume}}{\boldsymbol{área\ total\ da\ superfície}} = \frac{\mathbf{20}}{\mathbf{21}} = \frac{\mathbf{100}}{\mathbf{105}}$$

Gabarito: "b"

11. (ITA/2012)

A superfície lateral de um cone circular reto é um setor circular de $120°$ e área igual a $3\pi\ cm^2$. A área total e o volume deste cone medem, em cm^2 e cm^3, respectivamente

a) 4π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

b) 4π e $\frac{\pi\sqrt{2}}{3}$

c) 4π e $\pi\sqrt{2}$

d) 3π e $\frac{2\pi\sqrt{2}}{3}$

e) π e $2\pi\sqrt{2}$

Comentários

A área lateral do cone é dada por:

$$S_{lateral} = \pi \cdot r \cdot g$$

Onde r é o raio da base e g a geratriz do cone.

Logo,

$$S_{lateral} = 3\pi = \pi r g \therefore rg = 3(I)$$

Por outro lado, o ângulo θ do setor circular do cone segue a seguinte relação:

$$\theta(rad) = \frac{2\pi r}{g} \Rightarrow \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi r}{g} \therefore 3r = g(II)$$

Por (I) e (II), então:

$$\begin{cases} r = 1\ cm \\ g = 3\ cm \end{cases}$$

Finalmente,

$$S_{total} = \pi r \cdot (r+g) \Rightarrow S_{total} = \pi \cdot 1 \cdot 4 \therefore \boldsymbol{S_{total} = 4\pi\ cm^2}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1 \cdot h \Rightarrow V = \frac{\pi}{3} \cdot \sqrt{3^2 - 1^2} \therefore \boldsymbol{V = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}\ cm^3}$$

Gabarito: "a"

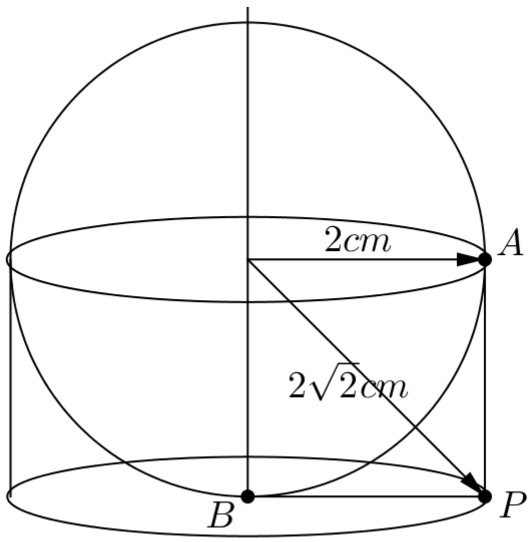
12. (ITA/2012)

Em um plano estão situados uma circunferência ω de raio $2\ cm$ e um ponto P que dista $2\sqrt{2}\ cm$ do centro de ω. Considere os segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ tangentes a ω nos pontos A e B, respectivamente. Ao girar a região fechada delimitada pelos segmentos $\overline{PA}$ e $\overline{PB}$ e pelo arco menor AB em torno de um eixo passando pelo centro de ω e perpendicular ao segmento $\overline{PA}$, obtém-se um sólido de revolução. Determine:

a) A área total da superfície do sólido.

b) O volume do sólido.

Comentário:



a) A área da superfície do sólido obtido pela rotação é igual à metade da área superficial da esfera de raio $2\ cm$ mais as áreas da base e lateral do cilindro de raio e altura iguais a $2\ cm$.

Logo,

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4\pi 2^2 + \pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 2 \therefore \boldsymbol{S = 20\pi\ cm^2}$$

b) O volume desse sólido é dado pela diferença entre o volume do cilindro de raio e altura iguais a $2\ cm$ e a metade da esfera de raio $2\ cm$.

Logo,

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \therefore \boldsymbol{V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3}$$

Gabarito: a) $S = 20\pi\ cm^2$ b) $V = \frac{8\pi}{3}\ cm^3$

13. (ITA/2012)

Um cone circular reto de altura 1 cm e geratriz $2\sqrt{3}/3$ é interceptado por um plano paralelo à sua base, sendo determinado, assim, um novo cone. Para que este novo cone tenha o mesmo volume de um cubo de aresta $\left(\frac{\pi}{243}\right)^{\frac{1}{3}}$ cm, é necessário que a distância do plano à base do cone original seja, em cm, igual a

a) $1/4$

b) $1/3$

c) $1/2$

d) $2/3$

e) $3/4$

Comentários

Sendo R e H as medidas do raio e da altura, respetivamente, do cone formado pela intersecção do plano, temos:

$$\frac{H}{R} = \frac{H_i}{R_i}$$

Onde $H_i = 1\ cm$ e $R_i = \sqrt{g^2 - {H_i}^2} = \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 1^2} \therefore R_i = \frac{1}{\sqrt{3}}\ cm$

$$R = \frac{H}{\sqrt{3}} (I)$$

Além disso,

$$V_{cone} = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot H = V_{cubo} = \frac{\pi}{243}\ cm^3 \therefore R^2 H = \frac{1}{81}\ cm^3 (II)$$

Por (I) e (II), então:

$$H = \frac{1}{3}\ cm$$

Finalmente,

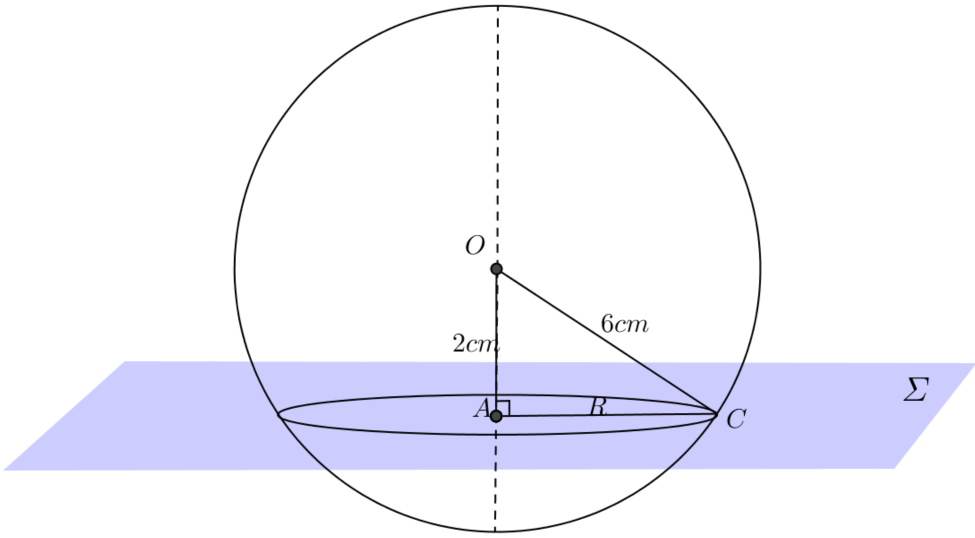
$$D_{plano\ a\ base} = H_i - H \therefore \boldsymbol{D_{plano\ a\ base} = \frac{2}{3}\ cm}$$

Gabarito: "d"

14. (ITA/2011)

Considere uma esfera Ω com centro em C e raio $r = 6$ cm e um plano Σ que dista 2 cm de C. Determine a área da intersecção do plano Σ com uma cunha esférica de $30°$ em Ω que tenha aresta ortogonal a Σ.

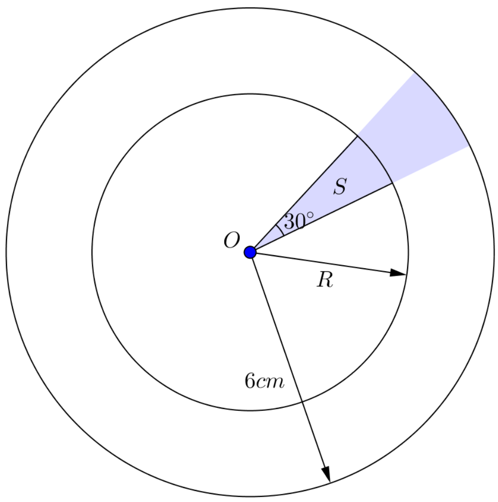
Comentários



Por Pitágoras no ΔOAC, temos:

$$R^2 = 6^2 - 2^2 = 36 - 4 = 32 \therefore R = 4\sqrt{2}\ cm$$

A área determinada por uma cunha esférica de 30° no plano Σ pode ser observada na figura abaixo:



Com isso, a área acima representada, é dada por:

$$S = \frac{30°}{360°} \cdot \pi \cdot R^2 = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 \therefore \boldsymbol{S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2}$$

Gabarito: $S = \frac{8\pi}{3}\ cm^2$

15. (ITA/2011)

Uma esfera está inscrita em uma pirâmide regular hexagonal cuja altura mede 12 cm e a aresta da base mede $\frac{10}{3}\sqrt{3}$ cm. Então o raio da esfera, em cm, é igual a

a) $\frac{10}{3}\sqrt{3}$

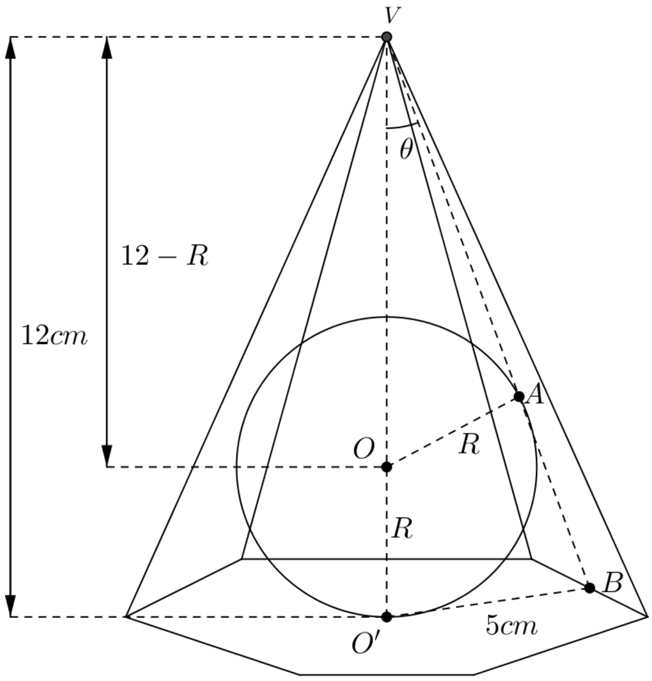
b) $\frac{13}{3}$

c) $\frac{15}{4}$

d) $2\sqrt{3}$

e) $\frac{10}{3}$

Comentários



Dada a semelhança $\Delta VAO \sim \Delta VO'B$, temos:

$$\frac{R}{12-R}=\frac{O'B}{VB}$$

Sendo $O'B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a$, onde a a aresta da base hexagonal, então:

$$O'B=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{10}{\sqrt{3}}\therefore O'B=5\ cm$$

Por Pitágoras no $\Delta VO'B$, chega-se a:

$$VB^2=5^2+12^2\therefore VB=13\ cm$$

Logo,

$$\frac{R}{12-R}=\frac{5}{13}\therefore R=\frac{10}{3}\ cm$$

Gabarito: "e"

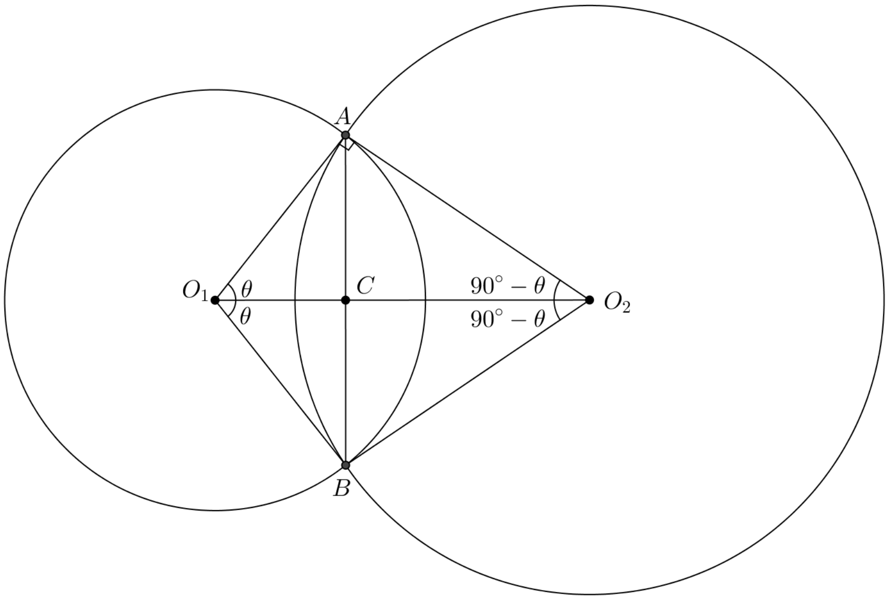
16. (ITA/2010)

As superfícies de duas esferas se interceptam ortogonalmente (isto é, em cada ponto da intersecção os respectivos planos tangentes são perpendiculares). Sabendo que os raios destas esferas medem 2 cm e $3/2$ cm, respectivamente, calcule

a) a distância entre os centros das duas esferas.

b) a área da superfície do sólido obtido pela intersecção das duas esferas.

Comentários



a) Por Pitágoras no ΔO_1O_2A, chega-se a:

$$(O_1O_2)^2 = 2^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \therefore \boldsymbol{O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm}$$

b) Atente para as relações:

$$V_{sólido}^{intersecção} = V_{calota\ O_1} + V_{calota\ O_2}$$

Onde:

$$V_{calota\ O_1} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - O_1C\right)$$
$$V_{calota\ O_2} = 2\pi \cdot 2 \cdot (2 - O_2C)$$

Utilizando Pitágoras no ΔO_1AC e no ΔO_2AC, temos:

$$\begin{cases} O_1C^2 = O_1A^2 - AC^2 \\ O_2C^2 = O_2A^2 - AC^2 \end{cases}$$

Sendo $AC = \frac{O_1A \cdot O_2A}{O_1O_2}$, então:

$$AC = \frac{2 \cdot \frac{3}{2}}{\frac{5}{2}} \therefore AC = \frac{6}{5}\ cm$$

$$O_1C^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \therefore O_1C = \frac{9}{10}\ cm;$$

$$O_2C^2 = 2^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 \therefore O_2C = \frac{8}{5}\ cm;$$

Daí,

$$V_{calota\ O_1} = 2\pi \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} - \frac{9}{10}\right) = \frac{9\pi}{5}\ cm^3$$
$$V_{calota\ O_2} = 2\pi \cdot 2 \cdot \left(2 - \frac{8}{5}\right) = \frac{8\pi}{5}\ cm^3$$

Finalmente,

$$V_{sólido}^{intersecção} = \frac{9\pi}{5} + \frac{8\pi}{5} \therefore \boldsymbol{V_{sólido}^{intersecção} = \frac{17\pi}{5}\ cm^3}$$

Gabarito: a) $O_1O_2 = \frac{5}{2}\ cm$ b) $\frac{17\pi}{5}\ cm^3$

17. (ITA/2010)

Um cilindro reto de altura $\sqrt{6}/3$ cm está inscrito num tetraedro regular e tem sua base em uma das faces do tetraedro. Se as arestas do tetraedro medem 3 cm. o volume do cilindro, em cm^3, é igual a

a) $\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$

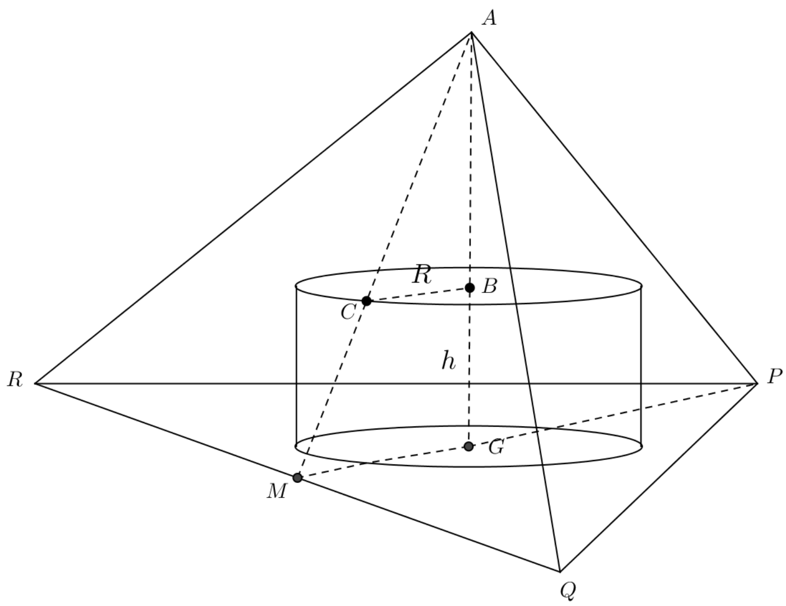
b) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi\sqrt{6}}{6}$

d) $\frac{\pi\sqrt{6}}{9}$

e) $\frac{\pi}{3}$

Comentários



Pela figura $\Delta ABC \sim \Delta AGM$, logo:

$$\frac{BC}{GM} = \frac{AB}{AG}$$

Como G é o centro do ΔPQR equilátero, temos:

$$GM = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right) = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 3 \therefore GM = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$$

E, sendo AG a altura do tetraedro, por Pitágoras no ΔAGP, então:

$$AG = \sqrt{3^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 3\right)^2} \therefore AG = \sqrt{6}\ cm$$

Logo, substituindo esses valores na relação de semelhança, obtemos:

$$\frac{R}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{\sqrt{6} - \frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{6}} \therefore R = \frac{\sqrt{3}}{3}\ cm$$

Finalmente,

$$V_{cilindro} = \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \therefore \boldsymbol{V = \frac{\pi\sqrt{6}}{9}\ cm^3}$$

Gabarito: "d"

18. (ITA/2008)

Um diedro mede $120°$. A distância da aresta do diedro ao centro de uma esfera de volume $4\sqrt{3}\pi\ \text{cm}^3$ que tangencia as faces do diedro é, em cm, igual a

a) $3\sqrt{3}$

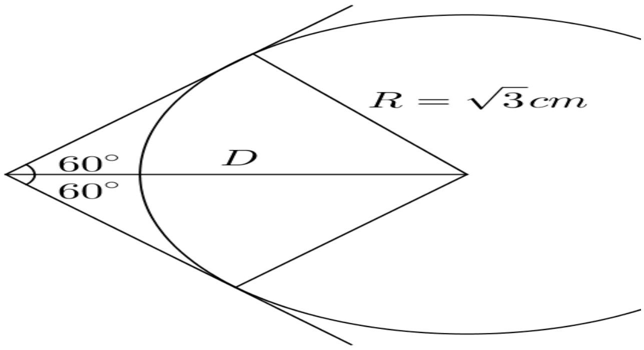
b) $3\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{3}$

d) $2\sqrt{2}$

e) 2

Comentários



O raio da esfera pode ser calculado como segue abaixo:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \Rightarrow 4\sqrt{3}\pi = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3 \therefore R = \sqrt{3}\ cm$$

Logo,

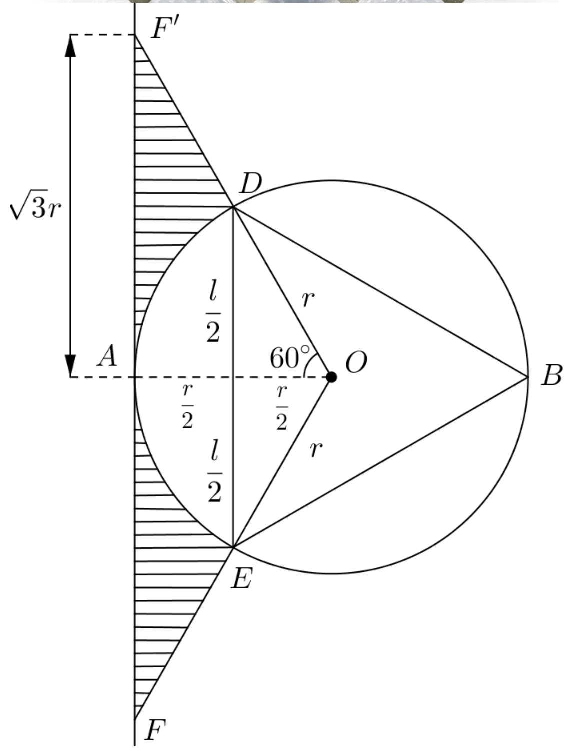
$$D = \frac{R}{\text{sen } 60°} \Rightarrow \boldsymbol{D = 2\ cm}$$

Gabarito: "e"

19. (ITA/2008)

Seja C uma circunferência de raio r e centro O e AB um diâmetro de C. Considere o triângulo equilátero BDE inscrito em C. Traça-se a reta s passando pelos pontos O e E até interceptar em F a reta t tangente à circunferência C no ponto A. Determine o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da região limitada pelo arco AE e pelos segmentos AF e EF em torno do diâmetro AB.

Comentários



Como bem representado acima, o volume do sólido de revolução é dado pela diferença entre o volume do tronco de cone $DEFF'$ e a calota esférica ADE, logo:

$$V_{sólido} = V_{tronco} - V_{calota}$$

Sendo de $h = \frac{r}{2}$ a altura do tronco e $\frac{l}{2}$ e $\sqrt{3}r$ as medidas dos raios da base do tronco de cone, respectivamente, em que l é o lado do triângulo equilátero ΔBDE, e sabendo que:

$$V_{tronco} = \frac{h}{3} \cdot \left(S_{base}^{inferior} + S_{base}^{superior} + \sqrt{S_{base}^{inferior} S_{base}^{superior}} \right)$$

Calculemos o V_{tronco} como segue abaixo:

$$V_{tronco} = \frac{r}{3} \cdot \left(\pi\left(\sqrt{3}r\right)^2 + \pi\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2 + \sqrt{\pi\left(\sqrt{3}r\right)^2 \cdot \pi\left(\frac{\sqrt{3}r}{2}\right)^2} \right) \therefore$$

$$V_{tronco} = \frac{21\pi r^3}{24}$$

Agora, sabendo-se que:

$$V_{calota} = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h);$$
$$h = \frac{r}{2};$$

Calculemos o V_{calota}:

$$V_{calota} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2}{3} \cdot \left(3r - \frac{r}{2}\right) \therefore V_{calota} = \frac{5\pi r^3}{24}$$

Finalmente,

$$V_{sólido} = \frac{21\pi r^3}{24} - \frac{5\pi r^3}{24} \therefore \boldsymbol{V_{sólido} = \frac{2\pi r^3}{3}}$$

Gabarito: $\frac{2\pi r^3}{3}$

---

20. (ITA/2006)

As medidas, em metros, do raio da base, da altura e da geratriz de um cone circular reto formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão 2 metros. Calcule a área total deste cone em m^2.

Comentário:

(R, H, g) estão em P.A de razão 2. Logo, chamando $R = H - 2$ e $g = H + 2$, por Pitágoras, temos:

$$g^2 = R^2 + H^2 \therefore (H+2)^2 = (H-2)^2 + H^2 \therefore H = 8\,m$$
$$R = 6\ m;$$
$$g = 10\,m;$$

Assim,

$$S_{total} = \pi R \cdot (R + g) = \pi \cdot 6 \cdot (8 + 10) \therefore \boldsymbol{S_{total} = 108\pi\, m^2}$$

Gabarito: $S_{total} = 108\pi\, m^2$

---

21. (ITA/2005)

Um dos catetos de um triângulo retângulo mede $\sqrt[3]{2}$ cm. O volume do sólido gerado pela rotação deste triângulo em torno da hipotenusa é $\pi\,\mathrm{cm}^3$. Determine os ângulos deste triângulo.

Comentários

Chamando de θ o ângulo adjacente ao lado de medida $\sqrt[3]{2}\,m$, a área do triângulo S e a sua altura relativa a hipotenusa h serão dadas por:

$$S = \frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \tan\theta}{2};$$
$$h = \sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{sen}\theta\,;$$

Agora, pelo teorema de Pappus-Guldin, calculemos o volume do sólido de revolução em função de θ:

$$V = \pi = 2\pi \cdot \left(\frac{\left(\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \tan\theta}{2}\right) \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \operatorname{sen}\theta \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \therefore \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{2} \Rightarrow \theta = 60°;$$

Portanto, os ângulos desse triângulo retângulo são: $30°$, $60°$ e $90°$.

Gabarito: $30°$, $60°$ e $90°$.

---

22. (ITA/2005)

Uma esfera de raio r é seccionada por n planos meridianos. Os volumes das respectivas cunhas esféricas contidas em uma semiesfera formam uma progressão aritmética de razão $\pi r^3/45$. Se o volume da menor cunha for igual a $\pi r^3/18$, então n é igual a

a) 4.

b) 3.

c) 6.

d) 5.

e) 7.

Comentários

Na esfera há n planos meridianos que a cortam. Esses planos determinam $2n$ cunhas, pois cada plano meridiano pertence a 2 cunhas simétricas em relação ao diâmetro da esfera, sendo assim, na semiesfera há n cunhas, logo:

$$V_{semiesfera}=\frac{2\pi r^3}{3}=\sum_{i=1}^{n}V_{i-ésima}^{cunha}$$

Onde $\sum_{i=1}^{n}V_{i-ésima}^{cunha}$ se trata da soma de n termos de uma P.A. de razão $\pi r^3/45$ e primeiro termo $\pi r^3/18$.

Logo,

$$V_{semiesfera}=\frac{2\pi r^3}{3}=n\cdot\frac{\left(\frac{\pi r^3}{18}+\left(\frac{\pi r^3}{18}+(n-1)\cdot\frac{\pi r^3}{45}\right)\right)}{2}\therefore 2=\frac{n}{6}+\frac{n^2}{30}-\frac{n}{30}\therefore\frac{n^2}{30}+\frac{2n}{15}-2=0$$

$$\therefore n=6\ \text{ ou } n=-10(\text{Não convém})\Rightarrow \boldsymbol{n=6}$$

Gabarito: "c"

23. (ITA/2005)

A circunferência inscrita num triângulo equilátero com lados de 6 cm de comprimento é a interseção de uma esfera de raio igual a 4 cm com o plano do triângulo. Então, a distância do centro da esfera aos vértices do triângulo é (em cm)

a) $3\sqrt{3}$.

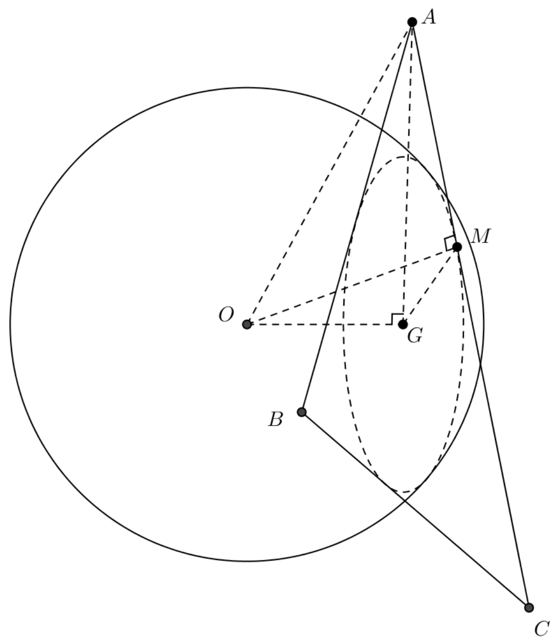
b) 6.

c) 5.

d) 4.

e) $2\sqrt{5}$.

Comentários



No ΔOGM, por Pitágoras, temos:

$$OM^2=OG^2+GM^2$$

A medida GM é o inraio do ΔABC equilátero, já que G é o centro desse triângulo, e a medida OM é o raio da esfera.

Logo,

$$OG = \sqrt{OM^2 - GM^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot 6\right)^2} = \sqrt{13} \therefore OG = \sqrt{13}\ cm$$

Finalmente, por Pitágoras no ΔOGA, temos:

$$OA^2 = OG^2 + GA^2 \therefore OA = \sqrt{\left(\sqrt{13}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 6\right)^2} \therefore \boldsymbol{OA = 5\ cm}$$

Gabarito: "c"

Questões IME Comentadas

24. (IME/2020)

Em um cubo regular de aresta a, os pontos M, N e L pertencentes às três arestas distintas que partem do vértice A estão a uma distância x de A tal que $0 < x \leq \frac{a}{2}$. Para que plano MNL seja tangente à esfera inscrita no cubo, o valor de x é:

a) $\frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)$

b) $\frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)$

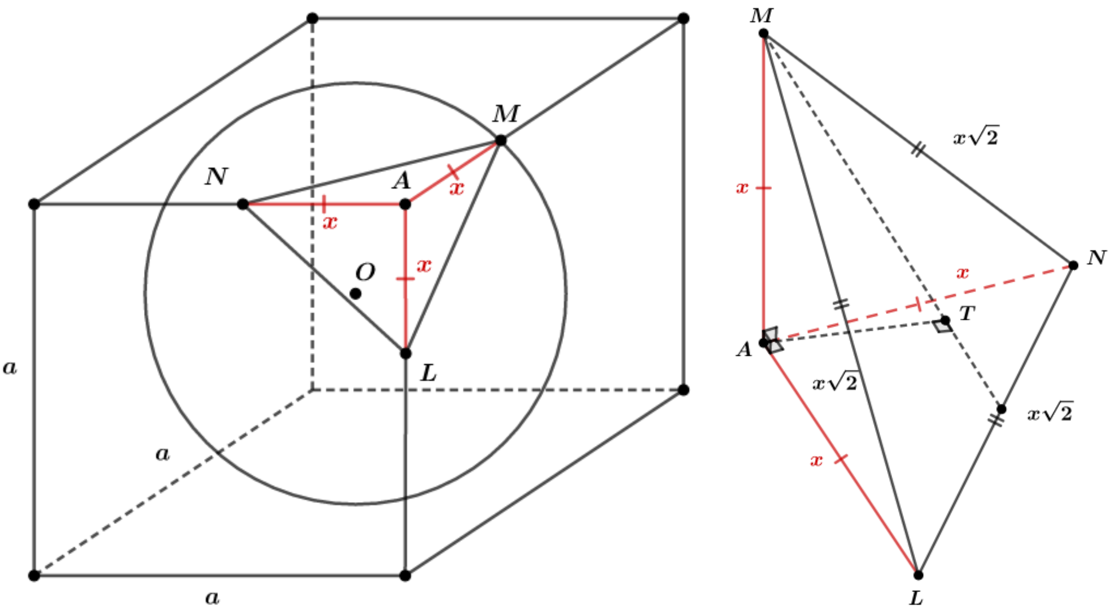
c) $\frac{a}{2}\left(2 - \sqrt{3}\right)$

d) $\frac{a}{2}\left(4 - 2\sqrt{3}\right)$

e) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

Comentários

Desenhando a figura do enunciado, temos:



$AMNL$ é uma pirâmide triangular. Como $AM = AN = AL = x$ e A é o vértice de um cubo, temos pelo teorema de Pitágoras que:

$$MN = NL = ML = x\sqrt{2}$$

Logo, MNL é um triângulo equilátero.

AT é a altura da pirâmide $AMNL$. Para que MNL seja tangente à esfera inscrita, a soma do raio da esfera com a altura AT deve ser igual à metade da diagonal do cubo, ou seja,

$$R + AT = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

O raio da esfera inscrita ao cubo é igual à metade da aresta do cubo:

$$R = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{AT = \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right)}$$

Para encontrar x em função de a, vamos calcular o volume da pirâmide de duas formas:

$$V_{AMNL} = \frac{1}{6}x^3 \ (pois\ é\ trirretângulo\ no\ vértice\ A)$$

$$V_{AMNL} = \frac{1}{3}AT \cdot S_{MNL} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2}\left(\sqrt{3} - 1\right) \cdot \frac{1}{2}\left(x\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12}$$

Igualando as expressões de volume:

$$\frac{1}{6}x^3 = \frac{ax^2\left(3 - \sqrt{3}\right)}{12} \therefore \boxed{x = \frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right)}$$

Um detalhe é que a questão restringiu os valores de x:

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}$$

Mas

$$\frac{a}{2}\left(3 - \sqrt{3}\right) \cong \frac{a}{2}(3 - 1{,}7) = \frac{a}{2}(1{,}3) > \frac{a}{2}$$

Assim, o gabarito da questão não condiz com as restrições do problema e, por isso, acreditamos que o IME vá anular essa questão.

Gabarito: "b".

25. (IME/2019)

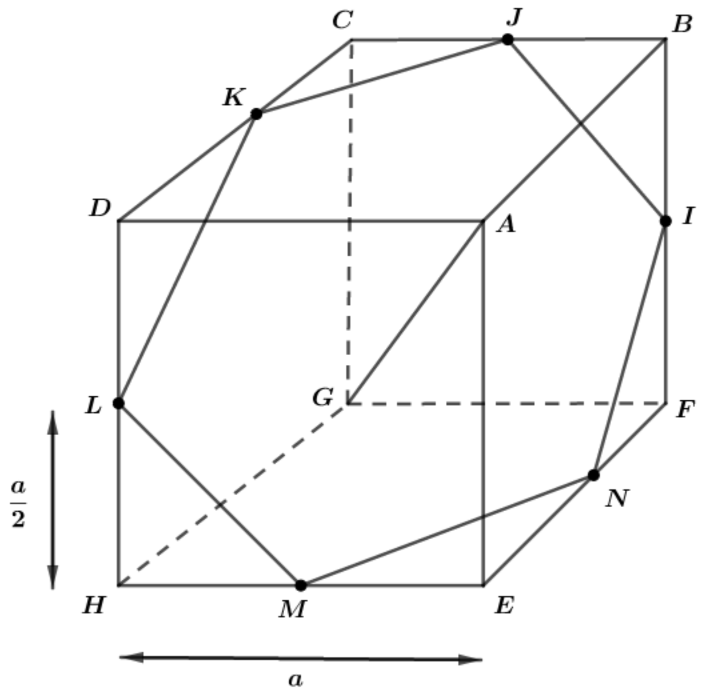
Um cubo com diagonal principal $\overline{AG}$ é interceptado pelo plano α, perpendicular à $\overline{AG}$, formando uma seção hexagonal regular. Calcule, em função da aresta a do cubo:

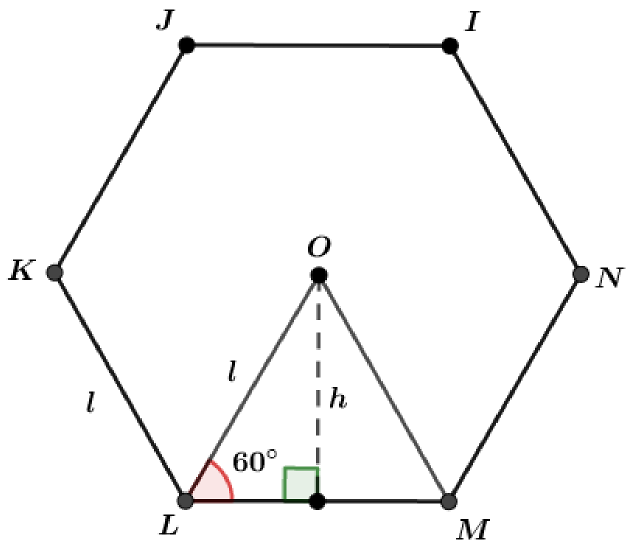
a) o apótema dessa seção hexagonal;

b) o raio da esfera que é tangente a essa seção e às faces do cubo que contém o vértice A.

Comentários

A dificuldade nessa questão está em ter a visão geométrica para desenhar a situação. A questão afirma que o plano α forma uma seção hexagonal regular no cubo, logo, devido à simetria do cubo, temos um hexágono regular cujos vértices são os pontos médios da aresta do cubo.





a) Seja l o lado do hexágono formado, então, seu apótema é dado pela medida de h:

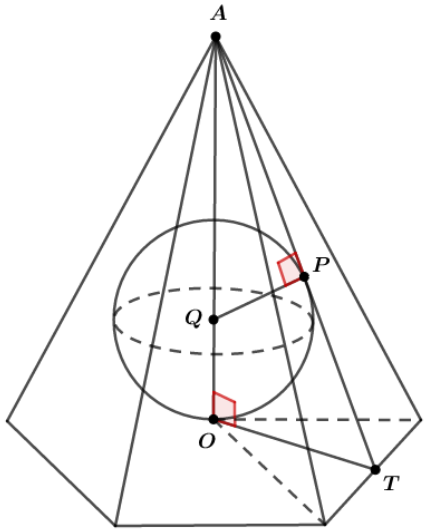
$$h = l \cdot sen(60°) = \frac{l\sqrt{3}}{2}$$

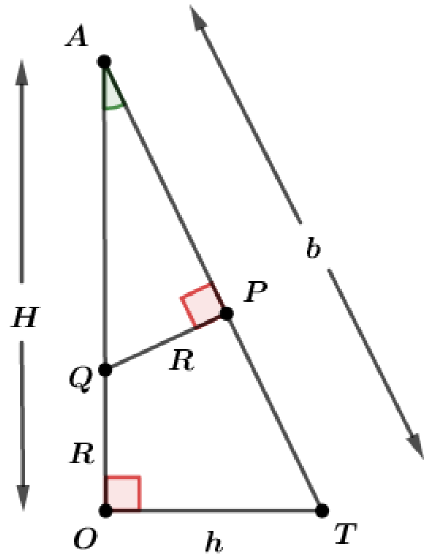
Sabendo que os vértices do hexágono são os pontos médios das arestas do cubo, temos:

$$l \cdot sen(45°) = \frac{a}{2} \Rightarrow l = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$$

b) A esfera tangente às faces do cubo e à seção hexagonal é uma esfera inscrita na pirâmide hexagonal regular.





O centro O do hexágono é o ponto médio da diagonal principal $\overline{AG}$, logo, a altura H é igual à metade da diagonal principal do cubo:

$$H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Sabemos o valor de h, podemos aplicar o teorema de Pitágoras para calcular b:

$$b^2 = h^2 + H^2 \Rightarrow b^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{2}a}{4}$$

Perceba que $\Delta APQ \sim \Delta AOT$, desse modo:

$$\frac{AQ}{QP} = \frac{AT}{OT} \Rightarrow \frac{H-R}{R} = \frac{b}{h} \Rightarrow \frac{H}{R} - 1 = \frac{b}{h} \Rightarrow R = \frac{hH}{b+h}$$

Substituindo os valores, encontramos:

$$R = \frac{\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{a\cdot 3\sqrt{2}}{4} + \frac{a\sqrt{6}}{4}} = a \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2\left(3\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)}$$

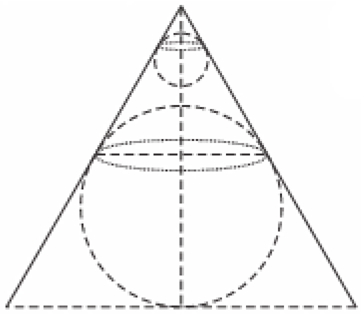
$$\Rightarrow \boxed{R = \frac{a\left(3-\sqrt{3}\right)}{4}}$$

Gabarito: a) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ b) $R = \frac{a(3-\sqrt{3})}{4}$

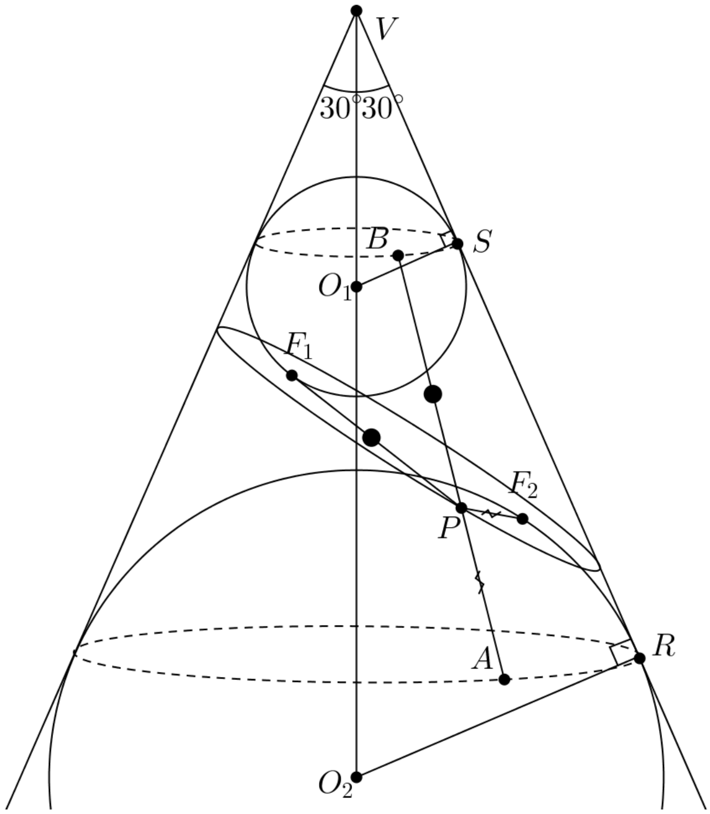
---

26. (IME/2017)

Em um cone equilátero são inscritas duas esferas de raios $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}R$ e R, conforme a figura abaixo. Um plano secante ao cone é traçado de forma que este seja tangente às duas esferas. Determine em termos de R o maior segmento possível que une dois pontos da curva formada pela interseção do referido plano com o cone.



Comentários



Na figura acima, note que o plano secante ao cone e tangente às esferas define uma curva elíptica de focos F_1 e F_2.

Para comprovar isso, basta provar que para um ponto genérico P da curva, $(PF_1 + PF_2)$ é constante.

Para isso, note que as retas PF_1 e PB são ambas tangentes à esfera de centro O_1, ou seja, possuem mesma medida.

Daí,

$$PF_1 = PB$$

Analogamente, as retas PF_2 e PA são ambas tangentes à esfera de centro O_2.

Daí,

$$PF_2 = PA$$

Logo,

$$(PF_1 + PF_2) = PA + PB = AB$$

Como AB é constante, já que os círculos definidos pelas duas esferas no cone são únicos, tal curva é uma elipse de fato.

Sabendo-se disso, o segmento solicitado no enunciado se trata do eixo maior da elipse $2a$.

Mas, atentando-se à figura acima, temos:

$$AB = RS = 2a.$$

$$2a = RS = RV - SV = O_2R \cdot \cot 30° - O_1S \cdot \cot 30° = (O_2R - O_1S) \cdot \cot 30°$$

Sendo $O_2R = R$ e $O_1S = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} R$, então:

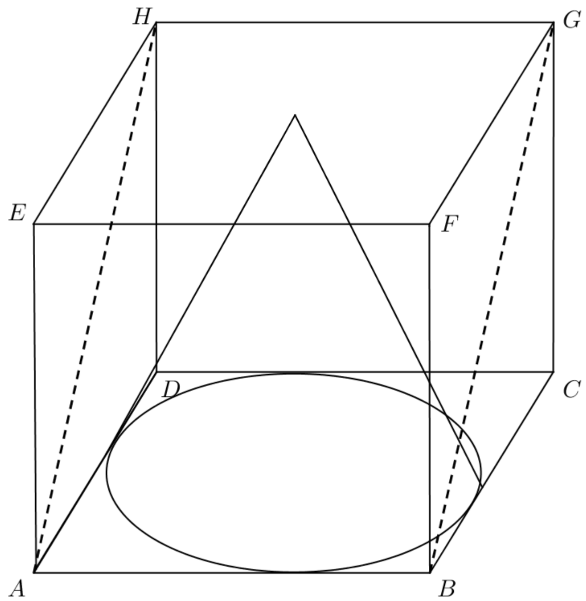
$$2a = \left(R - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} R\right) \cdot \cot 30° = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\sqrt{3}R}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} \therefore \boldsymbol{2a = (3-\sqrt{3})R}$$

Gabarito: $2a = (3-\sqrt{3})R$

27. (IME/2016)

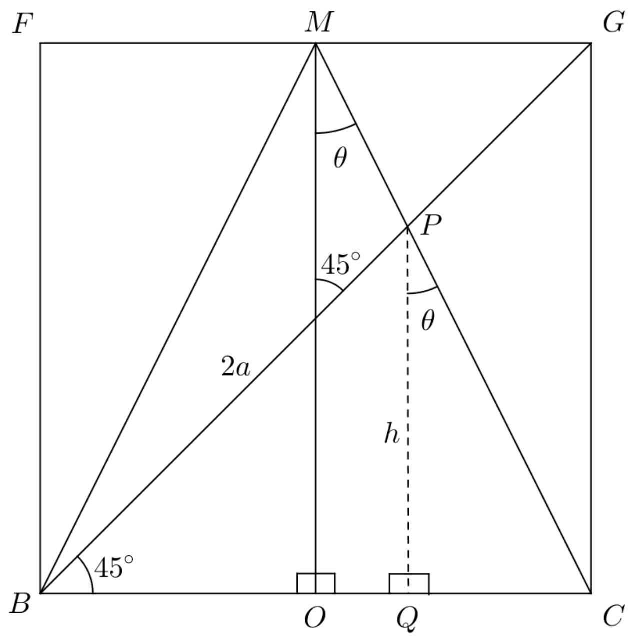
Um cone é inscrito em um cubo ABCDEFGH de forma que a base do cone é o círculo inscrito na base ABCD. O vértice do cone é o centro da face oposta do cubo. A projeção do vértice H na base ABCD coincide com o vértice D. Determine a área da seção do cone pelo plano ABH em função de a, a medida da aresta do cubo.

Comentários



A área correspondente à intersecção do plano ABH no cone se trata de uma elipse, que é a curva formada pela intersecção de um plano oblíquo sem passar pela base a um cone.

A fim de calcular a área dessa elipse, seja a figura de uma face lateral do cubo abaixo:



Note que o segmento BP corresponde ao eixo maior da elipse $2a'$.
Assim, no ΔBPQ e ΔCPQ, temos:

$$h = BQ \cdot \operatorname{tg} 45° = QC \cdot \operatorname{cotg}\theta \therefore BQ = QC \cdot \operatorname{cotg}\theta$$

Mas, sendo $\operatorname{cotg}\theta = \frac{MO}{CO} = \frac{2a}{a} = 2$, chega-se a:

$$QC = \frac{BQ}{2}$$

Como $BQ + QC = BC = a$, temos:

$$BQ = \frac{2a}{3}$$

Com isso,

$$2a' = \frac{BQ}{\cos 45°} \therefore 2a' = \frac{2\sqrt{2}a}{3} \therefore a' = \frac{\sqrt{2}a}{3}\ (I)$$

Agora, façamos uso da seguinte relação, onde e é a excentricidade da elipse, para encontrar o valor do eixo menor $2b'$:

$$e = \frac{\cos 45°}{\cos\theta}$$

Como $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, então:

$$e = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \therefore e = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$e = \frac{\sqrt{a'^2 - b'^2}}{a'} = \frac{\sqrt{10}}{4} \therefore a'^2 - b'^2 = \left(\frac{10}{16}\right)a'^2 \therefore b'^2 = a'^2 \cdot \frac{3}{8} = \left(\frac{\sqrt{2}a}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12} = \frac{3a^2}{36} \therefore$$

$$b' = \frac{\sqrt{3}a}{6}\ (II)$$

Finalmente, sendo a área de uma elipse dada por $S = \pi a' b'$, chega-se a:

$$S_{elipse} = S_{seção} = \pi \cdot \frac{\sqrt{2}a}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a}{6} \therefore \boldsymbol{S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi \cdot a}{18}}$$

Gabarito: $S_{seção} = \frac{\sqrt{6}\pi \cdot a}{18}$

28. (IME/2010)

Sejam ABC um triângulo equilátero de lado 2 cm e r uma reta situada no seu plano, distante 3 cm do seu baricentro. Calcule a área da superfície gerada pela rotação deste triângulo em torno da reta r.

a) $8\pi\ \mathrm{cm}^2$

b) $9\pi\ \mathrm{cm}^2$

c) $12\pi\ \mathrm{cm}^2$

d) $16\pi\ \mathrm{cm}^2$

e) $36\pi\ \mathrm{cm}^2$

Comentários

Utilizando o Teorema de Pappus-Guldin, como segue abaixo, temos:

$$S_{sólido} = 2\pi\bar{x}L;$$

Onde:

$\bar{x}$: distância da reta r ao centro de massa do ΔABC;

L: perímetro do ΔABC;

$$S_{sólido} = 2\pi \cdot 3 \cdot 6 \therefore \boldsymbol{S_{sólido} = 36\pi\ cm^2}$$

Gabarito: "e"