CURSO INTENSIVO 2022

Física

ITA - 2022

Movimentos uniformes e uniformemente variados

Prof. Toni

Sumário

INTRODUÇÃO 4

1. MOVIMENTO UNIFORME 4

1. Definição 4

1.2. Função horária do espaço 5

1.3. Gráficos no MRU 5

2. MOVIMENTO UNIFORMEMENTE VARIADO 9

2.1. Aceleração escalar média 9

2.2. Aceleração escalar instantânea 9

2.3. Movimento acelerado e retardado 10

2.4. Função horária da velocidade no MRUV 11

2.5. Função horária do espaço no MRUV 11

2.6. Cálculo da velocidade média no MRUV 13

2.7. A equação de Torricelli 15

2.8. Movimento vertical no vácuo 17

2.9. Altura máxima 18

2.10. Tempo de subida até altura máxima 19

2.11. Tempo de subida e tempo de descida entre dois pontos A e B 20

2.12. Velocidade v para uma altura h qualquer: 20

3. ANÁLISES GRÁFICAS 23

3.1. Velocidade escalar média 23

3.2. Velocidade escalar instantânea 24

3.3. Aceleração escalar média 24

3.4. Aceleração escalar instantânea 25

3.5. Variação do espaço no gráfico $v \times t$ 26

3.6. Variação da velocidade escalar no gráfico $a \times t$ 26

3.7. Gráficos no MRU 28

3.8. Gráficos no MRUV 29

4. MOVIMENTO CIRCULAR 33

4.1. Grandezas angulares 33

4.2. Movimento circular uniforme (MCU) 36

4.3. Movimento circular uniformemente variado (MCUV) 38

4.4. Transmissão de movimento circular 39

5. LISTA DE EXERCÍCIOS 42

7. LISTA DE EXERCÍCIOS COMENTADA 51

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS DA AULA 73

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 73

10. VERSÃO DA AULA 73

Introdução

Nesta aula iniciaremos do Movimento Uniforme (MU), Movimento Uniformemente Variado (MUV), Movimento Circular Uniforme (MCU), Movimento Circular Uniformemente Variado (MCUV). Além disso, faremos análises gráficas dos movimentos.

O ITA adora cobrar os temas dessa aula e gosta de questões que envolvem transmissão de movimento em movimentos circulares, principalmente análises gráficas. Além disso, questão envolvendo problemas em três dimensões.

É comum no ITA aparecer questões puramente de cinemática, mas também sempre aparece dentro de outras questões maiores. Por isso, saber todos os conceitos é fundamental para mandar bem no vestibular do ITA.

Fique à vontade para tirar dúvidas comigo no fórum de dúvidas ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Movimento uniforme

1. Definição

Caracteriza-se como movimento uniforme aquele que possui velocidade de módulo constante e diferente de zero, isto é,

$$\boxed{v_m = v = \frac{\Delta s}{\Delta t}}, v \neq 0$$

De outra forma, podemos dizer que: $\Delta s = v . \Delta t$.

Escrevendo dessa forma, podemos ver que a variação do espaço (Δs) é diretamente proporcional ao intervalo de tempo correspondente (Δt). Além disso, vemos que Δs varia linearmente com Δt. Portanto, para intervalos de tempos iguais, as variações de espaços também são iguais, como mostra a figura abaixo:

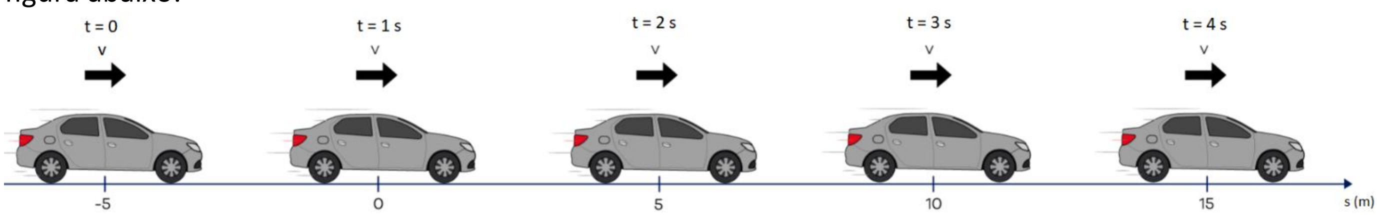


Figura 1: Carro realizando um MRU.

Quando o movimento uniforme (UM) for em uma reta, chamamos de MRU – Movimento Retilíneo Uniforme. Quando o movimento uniforme for em uma circunferência, chamamos de MCU – Movimento Circular Uniforme. Lembrete: velocidade é uma grandeza vetorial!

1.2. Função horária do espaço

Definido o espaço inicial como s_0 correspondente ao instante t_0, para um instante t temos que o espaço será s, com $\Delta t = t - t_0$ e $\Delta s = s - s_0$. A partir de $\Delta s = v.\Delta t$, concluímos que:

$$s - s_0 = v(t - t_0) \Rightarrow \boxed{s = s_0 + v(t - t_0)}$$

Geralmente, adotamos como tempo inicial $t_0 = 0$, quando zeramos cronômetro e passamos a contar o tempo a partir do zero. Dessa forma, a função do espaço para o MU se reduz a:

$$\boxed{s = s_0 + vt}$$

Isto é, a função horária do espaço é uma função do primeiro grau em t. A principal característica do movimento retilíneo uniforme é fato da velocidade escalar ser constante, isto é, a aceleração escalar é nula.

Para verificar se um movimento é MU, devemos observar se o movimento respeita qualquer uma destas três características:

1) A velocidade escalar instantânea é constante: $v = v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}, v \neq 0$
2) O espaço obedece a uma função horária do primeiro grau em t: $s = s_0 + vt$
3) A aceleração escalar instantânea é nula: $a = a_m = 0$

1.3. Gráficos no MRU

Dado que a função horária do espaço é dada por $s = s_0 + vt$, então a função de $s(t)$ é uma função do primeiro grau, análoga a $f(x) = b + ax$. Então, dada a $s(t) = s_0 + vt$ temos que s_0 é o coeficiente linear da função e v é o coeficiente angular da função.

Da matemática, lembramos que o coeficiente linear caracteriza o ponto onde a função toca quando passa pelo eixo y. Já o coeficiente angular nos mostra a inclinação da reta, isto é, a taxa como cresce ou descreve a função.

1.3.1. Diagrama $\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{t}$

Como visto na Aula 00, no movimento progressivo ($v > 0$) o espaço cresce ($\Delta s > 0$) com o tempo (figura 2) e, no movimento retrógrado ($v < 0$), o espaço decresce ($\Delta s < 0$) com o tempo (figura 2)

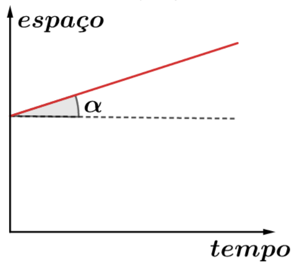


Figura 2: Gráfico sxt no MRU, com v>0.

Dado que $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ e, segundo a trigonometria, tangente é uma função que é definida pela razão do cateto oposto pelo cateto adjacente, temos que $v \overset{N}{=} tg\alpha$. Isto é, a tangente da inclinação da reta é igual numericamente a velocidade.

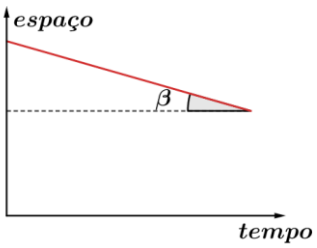


Figura 3: Gráfico sxt no MU, com v<0.

Para o caso do movimento retrógrado, a $tg\beta \overset{N}{=} |v|$. Entretanto, temos que neste caso a velocidade é negativa, então, devemos lembrar de colocar o sinal de menos após calcular a tangente para de fato determinar a velocidade.

1.3.2. Diagrama $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{t}$

O MRU é caracterizado por ter velocidade constante, dessa forma, o módulo da velocidade não se altera com o decorrer do tempo. Logo a função da velocidade com o tempo é uma reta paralela ao eixo dos tempos.

Para o movimento progressivo temos $v > 0$, logo, a reta é paralela e está acima do eixo dos tempos. Para o movimento retrógrado temos $v < 0$, portanto, a reta é paralela e está abaixo do eixo dos tempos, conforme as figuras abaixo:

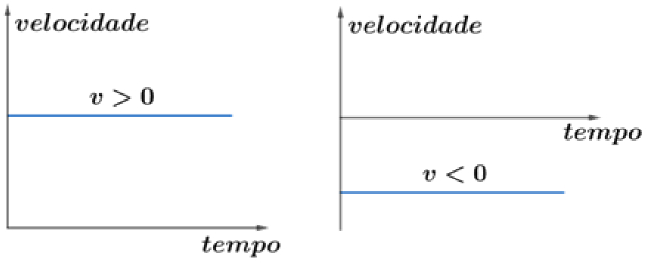


Figura 4: Gráficos vxt no MRU.

Como dito anteriormente, neste movimento não existe aceleração, logo o gráfico da aceleração pelo tempo coincide com o eixo dos tempos.

1)

Dois automóveis A e B percorrem uma mesma trajetória, com as seguintes funções horárias: $s_A = 20 + 60t$ e $s_B = 40 + 40t$. Onde o tempo é medido em horas e o espaço em quilômetros.

a) Determine o instante de encontro.

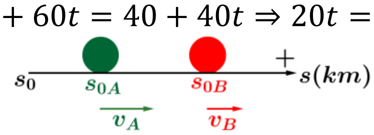
b) Qual a posição de encontro.

c) Em um mesmo gráfico, coloque a função horária de casa automóvel.

Comentários:

a) Quando falamos de encontro, dado que se trata de pontos materiais, a posição dos automóveis devem ser a mesma, isto é, no instante do encontro, os espaços os móveis devem ser iguais. Logo:

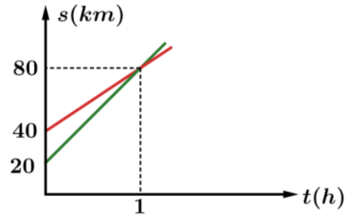
$$s_A = s_B \Rightarrow 20 + 60t = 40 + 40t \Rightarrow 20t = 20 \Rightarrow \boxed{t = 1\ h}$$



b) Para encontrarmos a posição, basta substituir em uma das funções horárias:

$$s_A = 20 + 60.1 = 80\ km = s_B$$

c) Gráfico das funções horárias:



Este exercício pode ser resolvido pelo conceito de velocidade relativa (nós abordaremos mais desse assunto mais à frente). Vamos colocar o nosso referencial no automóvel mais à frente(B). Dessa forma, o automóvel B vê o automóvel se aproximar dele com velocidade, em valor absoluto, de $20km/h$ $(60km/h - 40km/h)$.

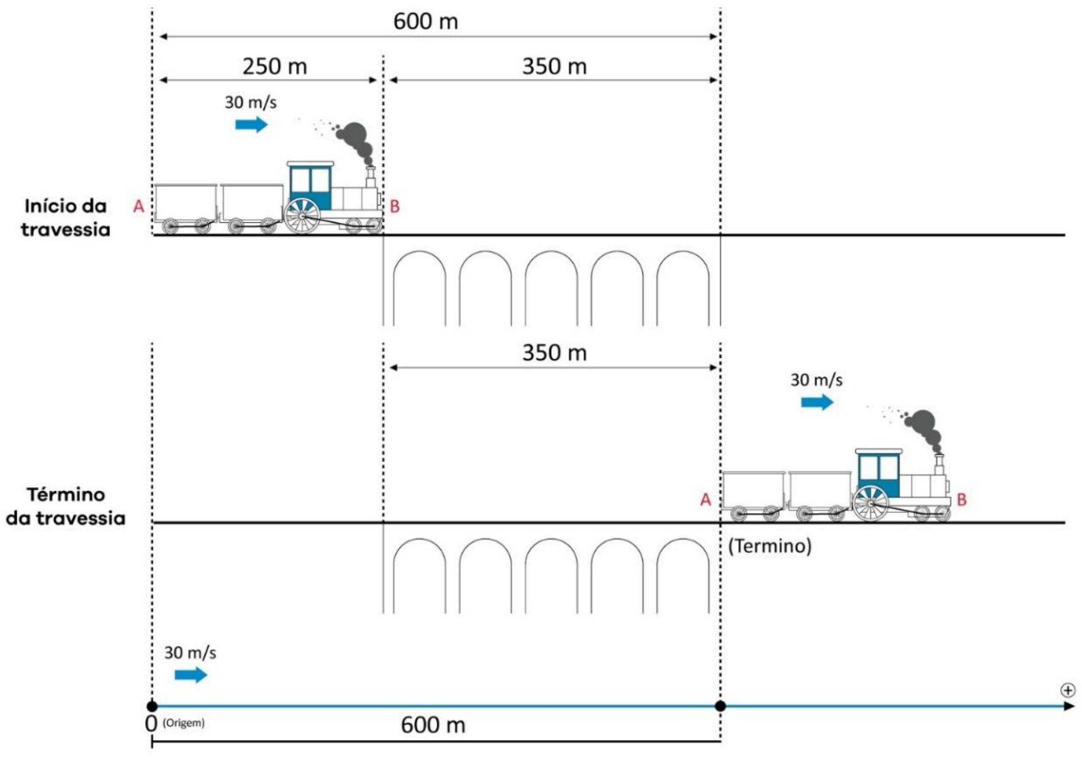
Tudo se passa como o móvel B estivesse parado. Assim, devemos pegar a distância relativa entre B e A também, pois, uma vez que parámos o móvel B, sua distância até o móvel A, em valor absoluto, é de $20\ km$ $(40\ km - 20\ km)$. Dessa forma, poderíamos escrever a função horária do movimento relativo:

$$|\Delta s_{rel}| = |v_{rel}|.\Delta t \Rightarrow 20 = 20.\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1\ h}$$

2)

Um trem de $250\ m$ de comprimento, com velocidade escalar constante de $108\ km/h$, atravessa uma ponte de $350\ m$ de comprimento. Em quanto tempo o trem demora na travessia?

Comentários:



Notamos que o início da travessia começa a ser contado ($t_0 = 0$), quando a frente do trem está no início da ponte e o término da travessia finaliza quando a traseira do trem está no limite de sai da ponte.

Portanto, tomando como $s_0 = 0$ a traseira do trem, quando ele terminar a travessia, sua traseira estará na posição $s = tamanho\ do\ trem + tamanho\ da\ ponte \Rightarrow s = 250 + 350 = 600\ m$. Assim, podemos escrever que:

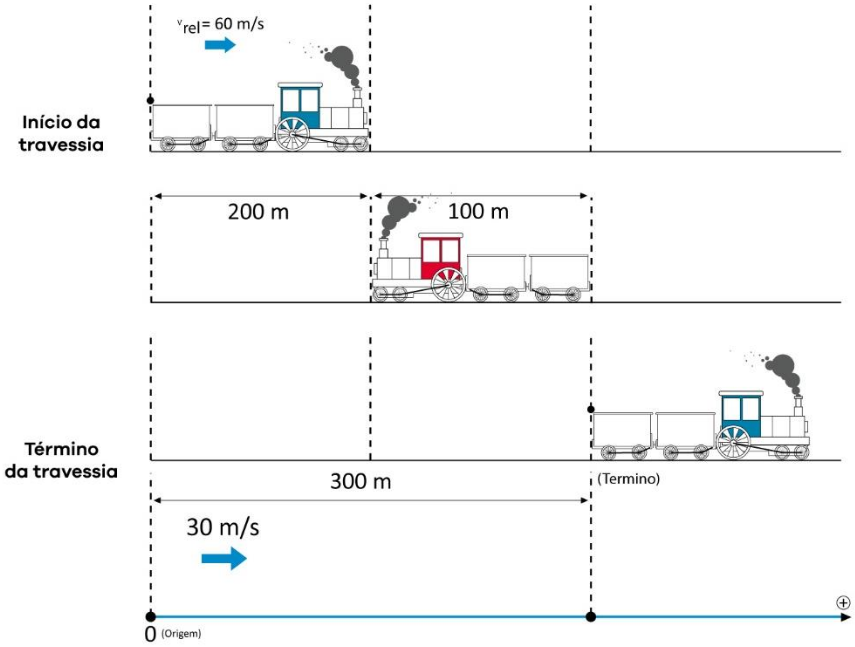
$$s = s_0 + vt \Rightarrow 600 = 0 + \frac{108}{3,6}.t \Rightarrow \boxed{t = 20\ s}$$

3) (Trens se aproximando)

Um trem de $200\ m$ de comprimento, com velocidade de $20\ m/s$, desloca-se de A para B enquanto um segundo trem de $100\ m$ de comprimento, desloca-se em uma linha paralela de B para A, com velocidade de $40\ m/s$.

Determine quanto tempo durará o cruzamento dos dois trens. Quanto que o trem B percorre durante o cruzamento, em relação a um referencial na Terra?

Comentários:



Vamos considerar como instante zero o momento quando as frentes dos dois trens estão na mesma posição. Neste instante, vamos considerar o segundo trem como nosso referencial e então, determinar a velocidade escalar de A em relação a B.

Para isso, imagino que você está no trem B, se você estivesse nele e parado, você estaria vendo o trem A se aproximando com a própria velocidade $20\ m/s$ mais a velocidade que o trem b deveria estar, isto é, você veria o trem A se aproximar com $20m/s\ + 40m/s = 60m/s$. Logo, a velocidade relativa de A em relação a B, dado nosso referencial de A para B é $v_{rel} = 60m/s$.

Para determinar a distância percorrida pelo trem A (o trem B está parado), notamos que a traseira do trem A deve passar pela traseira do caminhão B, ou seja, seu deslocamento relativo será:

$$\Delta s_{rel} = 200 + 100 = 300\ m$$

Portanto, o tempo de do cruzamento dos dois trens é dado por:

$$\Delta s_{rel} = v_{rel}.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{300}{60} \Rightarrow \boxed{\Delta t = 5\ s}$$

Para determinarmos a distância percorrida por B, basta utilizarmos a definição de variação de espaço para o MRU, pois já sabemos quanto tempo durou o cruzamento dos trens:

$$\Delta s_B = v_B.\Delta t \Rightarrow \Delta s = 40.5 = 200\ m.$$

4) (Super vespa)

São José e Jacareí são ligadas por uma estrada reta de d comprimento e, em um dado momento, dois trens partem um ao encontro do outro, com velocidades escalares iguais a v_T. No instante da partida, uma vespa parada na parte dianteira de um dos trens parte voando, em linha reta, ao encontro do outro trem, com velocidade de v_v. Ao chegar no outro trem, a vespa volta imediatamente ao primeiro trem, e assim prossegue até que os dois trens se colidem e esmagam a vespa. Determine a distância percorrida pela vespa.

Comentários:

Inicialmente, precisamos determinar quanto tempo os trens levam para se chocarem. Dado que os trens se locomovem com velocidades iguais, não é difícil de ver que ele se encontrar no ponto médio de São José a Jacareí.

Logo, o tempo que os trens levam para se chocarem é:

$$\Delta s_{trem} = v_T . \Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{d}{2v_T}}$$

Portanto, a vespa se moveu com uma velocidade v_v durante este tempo, então:

$$\boxed{d_{vespa} = v_v . \frac{d}{2v_T}}$$

2. Movimento uniformemente variado

Até agora, vimos apenas movimentos uniformes onde não existia aceleração tangencial, isto é, o módulo da velocidade era constante ou ainda, simplesmente dizemos que a aceleração tangencial é constante e igual a zero.

2.1. Aceleração escalar média

Do mesmo modo que definimos velocidade escalar média, podemos definir aceleração escalar média:

$$\boxed{a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}, a_m \neq 0}$$

Ou ainda:

$$\boxed{\Delta v = a_m . \Delta t}$$

Como a variação de tempo é sempre positiva, o sinal da aceleração escalar média (a_m) é o mesmo sinal da variação da velocidade (Δv).

2.2. Aceleração escalar instantânea

Podemos definir a aceleração escalar instantânea como:

$$\boxed{a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Da mesma forma, este limite mostra que a aceleração escalar instantânea é a derivada da velocidade escalar em relação ao tempo. Denota-se por:

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

Diante disso, notamos que a derivada do espaço resulta na velocidade escalar instantânea e a derivada desta resulta na aceleração escalar instantânea:

$$\boxed{s \xrightarrow{derivada} v \xrightarrow{derivada} a}$$

Notamos que, tanto na definição de aceleração escalar média quanto na definição de aceleração escalar instantânea, a aceleração escalar é definido como um quociente de velocidade pelo tempo. Então, a unidade de aceleração é dada por:

$$u(aceleração) = \frac{u(velocidade)}{u(tempo)}$$

Logo, no SI, temos que a unidade de aceleração escalar é dada por $\frac{\frac{m}{s}}{s} = m/s^2$.

2.3. Movimento acelerado e retardado

2.3.1. Movimento acelerado

Chamamos de **movimento acelerado** quando o módulo da velocidade escalar **aumenta** com o decorrer do tempo. Em outras palavras:

$$\boxed{movimento\ acelerado\ \leftrightarrow |v|\ aumenta\ com\ o\ tempo}$$

Como sabemos da teoria de módulo de um número real, v pode ser maior ou menor que zero, mas $|v| > 0$ sempre. Dessa forma, existem dois tipos de movimentos acelerados:

1)**Movimento acelerado é progressivo:**

Nesse tipo de movimento $\boldsymbol{v > 0}$ e **se** $|v|$ aumenta com o tempo, resulta que v também aumenta com o tempo. Assim, Δv é positivo, em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a > 0}$.

2)Movimento acelerado é retrógrado

Nesse tipo de movimento $\boldsymbol{v < 0}$ e se $\boldsymbol{|v|}$ **aumenta** como tempo, então v diminui. Assim, $\Delta v < 0$ em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a < 0}$. Podemos resumir da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{movimento\ acelerado} \begin{cases} \boldsymbol{progressivo: v > 0\ e\ a > 0} \\ \boldsymbol{ou} \\ \boldsymbol{retrógrado: v < 0\ e\ a < 0} \end{cases}}$$

Assim, concluímos que no **movimento acelerado** $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ **têm mesmo sinal**. De outra forma: $\boxed{v.a > 0}$ caracteriza o movimento acelerado.

2.3.2. Movimento retardado

Chamamos de **movimento retardado** quando o módulo da velocidade escalar **diminui** com o decorrer do tempo. Em outras palavras:

$$\boxed{movimento\ retardado\ \leftrightarrow |v|\ diminui\ com\ o\ tempo}$$

Como sabemos da teoria de módulo de um número real, v pode ser maior ou menor que zero, mas $|v| > 0$ sempre. Dessa, existem dois tipos de movimentos retardados:

1) Movimento retardado é progressivo:

Nesse caso $\boldsymbol{v > 0}$ e se $\boldsymbol{|v|}$ **diminui** com o tempo, então v também diminui com o tempo. Assim, Δv é negativo, em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a < 0.}$

2) Movimento retardado é retrógrado

Nesse caso $\boldsymbol{v < 0}$ e se $\boldsymbol{|v|}$ **diminui** como tempo, então v aumenta. Assim, $\Delta v > 0$ em qualquer intervalo de tempo, o que implica $\boldsymbol{a > 0}$. Podemos resumir da seguinte forma:

$$\boxed{\boldsymbol{movimento\ retardado} \begin{cases} \boldsymbol{progressivo: v > 0\ e\ a < 0} \\ \boldsymbol{ou} \\ \boldsymbol{retrógrado: v < 0\ e\ a > 0} \end{cases}}$$

Assim, concluímos que no **movimento retardado** $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{a}$ **têm sinais contrários**. De outra forma: $\boxed{v.a < 0}$ caracteriza o movimento retardado.

A partir de agora, estudaremos movimentos onde existe mudança de velocidade causada por uma aceleração. Mas ainda nos restringiremos a mudanças uniformes nas velocidades, isto é, mudança de velocidade a uma taxa constante. Por isso, caracterizamos este movimento como ***uniformemente variado***.

Assim, dizemos que o móvel sofre variações de velocidades iguais em intervalos de tempos iguais. Em outras palavras, dizemos que no MUV a aceleração escalar média também é a aceleração escalar instantânea, isto é:

$$\boxed{a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

Assim, dizemos que o móvel sofre variações de velocidades iguais em intervalos de tempos iguais.

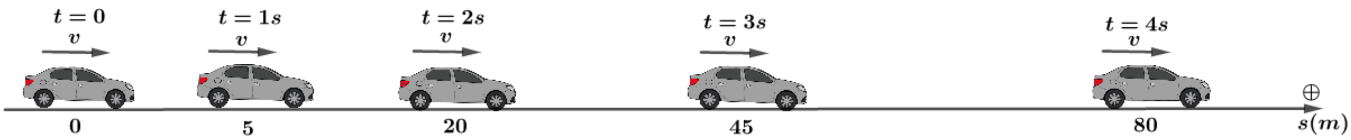


Figura 5: Representação de um MRUV.

Quando a trajetória do MUV for uma reta chamamos de MRUV – movimento retilíneo uniformemente variado. Quando a trajetória do MUV for uma circunferência, chamamos de MCUV – movimento curvilíneo uniformemente variado.

2.4. Função horária da velocidade no MRUV

Neste movimento, temos como principal característica:

$$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Se um móvel com velocidade v_0 no instante t_0 passa a ter uma velocidade v em um instante t, podemos escrever que:

$$a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v - v_0 = a(t - t_0) \therefore \boxed{v = v_0 + a(t - t_0)}$$

Para simplificar nossa vida, vamos contar o início do movimento na origem dos tempos, isto é, $t_0 = 0$. Então:

$$\boxed{v = v_0 + a.t}$$

A partir desse resultado, podemos concluir que:

1) a função horária da velocidade no MRUV é uma função do primeiro grau em t.

2) v_0 é a velocidade para o instante $t = 0$, sendo o coeficiente linear da nossa função do primeiro grau em t.

3) a é a aceleração escalar instantânea diferente de zero, sendo o coeficiente angular da nossa função do primeiro grau em t. O valor de $|a|$ é quem determina a taxa de crescimento ou diminuição da nossa velocidade.

4) v é a velocidade em um dado instante t.

2.5. Função horária do espaço no MRUV

Para chegarmos à função horária do espaço no MRUV, vamos utilizar o caso de um móvel com velocidades positivas e aceleração positiva, isto é, descrevendo um movimento acelerado progressivo. Sem perdas de generalidade, podemos desenhar o gráfico da função horária de sua velocidade da seguinte forma:

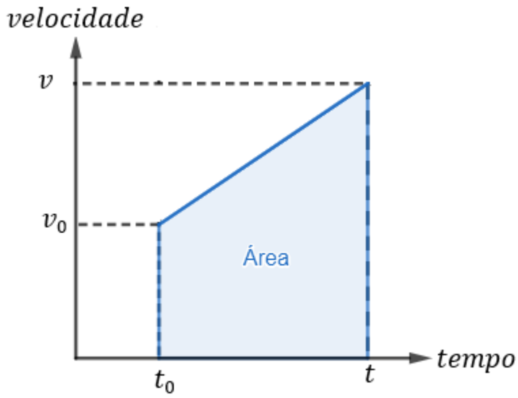


Figura 6: Representação da área no gráfico vxt.

Para a dedução da função horária do espaço no MRUV vamos utilizar o conceito de áreas de gráficos na cinemática, que será nosso próximo capítulo. Antecipando algumas definições, temos que a área azul do gráfico de $v \times t$ é numericamente igual à variação do espaço para o tempo correspondente, isto é:

$$\boxed{\Delta s \overset{N}{=} \text{área azul}}$$

Nossa área em questão é um trapézio retângulo, com base menor igual a v_0, base maior igual a v e altura igual a $\Delta t = t - t_0$. Assim:

$$\text{área azul} = \frac{(\text{base maior} + \text{base menor})}{2} . \text{altura}$$

$$\therefore \boxed{\Delta s = \frac{(v + v_0)}{2} . \Delta t}$$

Essa relação é extremamente importante para a dedução de algumas equações, a chamaremos de equação coringa. No MRUV, sabemos que a velocidade obedece a seguinte equação: $v = v_0 + a(t - t_0)$. Logo:

$$\Delta s = \frac{(v_0 + a(t - t_0) + v_0)}{2} . (t - t_0) \Rightarrow s - s_0 = \frac{2v_0(t - t_0)}{2} + \frac{a(t - t_0)^2}{2}$$

$$\therefore \boxed{s = s_0 + v_0(t - t_0) + \frac{a(t - t_0)^2}{2}}$$

Ou ainda, quando tomamos a contagem do tempo na origem dos tempos, ou seja, $t_0 = 0$, temos finalmente que:

$$\boxed{s = s_0 + v_0 . t + \frac{a . t^2}{2}}$$

Dessa forma, a função horária do espaço no MRUV é uma função do segundo grau em t ($a \neq 0$), onde:

1) s_0 é o espaço inicial quando $t = 0$.
2) v_0 é a velocidade inicial, isto é, velocidade para $t = 0$.
3) a é a aceleração escalar instantânea.
4) s o espaço para um dado instante t.

Pausa na teoria de MRUV e vamos ver uma pouco mais de teoria de cinemática com Cálculo. Como vimos na Aula 00, a velocidade escalar instantânea é a derivada do espaço em relação ao tempo. Se aplicarmos esse conceito, podemos dizer que:

$$\boxed{v=\frac{ds}{dt}}\Rightarrow v=\frac{d\left(s_0+v_0.t+\frac{at^2}{2}\right)}{dt}=1.v_0.t^{1-1}+2.\frac{at^{2-1}}{2}\Rightarrow\boxed{v=v_0+at}$$

Vale lembrar que a derivada de uma constante é zero e s_0 é constante. Da mesma forma, sabemos que a aceleração escalar instantânea é a derivada da velocidade em relação ao tempo. Ou seja:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d(v_0+at)}{dt}=1.a.t^{1-1}=a$$

Tudo conforme visto anteriormente:

$s\xrightarrow{derivada}v\xrightarrow{derivada}a.$

Por outro lado, dado a função horária da velocidade, para determinar a função horária do espaço é necessário fazer o processo inverso da derivação, isto é, fazer uma integração. Para o caso de funções polinomiais, basta pensarmos no processo inverso para cada termo. Para o MRUV, dado $v=v_0+at$, podemos extrair quem são v_0 e a.

Depois, para escrever a função de s, você precisa saber alguma informação da questão sobre a posição inicial (s_0) e, assim, determinará completamente a função horária do espaço.

Para o caso de a função horária da velocidade não ser de um MUV, por exemplo, $v=2t+3t^2$, vamos resolver, de forma informal, esse problema.

Não vamos ser rigorosos matematicamente, apenas operacional para encontrar a nossa resposta. Dizemos que:

$$v=\frac{ds}{dt}\Rightarrow s=\int vdt$$

Não se assuste com este símbolo, é apenas mais um símbolo matemático. Volto a dizer que no primeiro do ano do ITA, você terá toda formalidade e conceito para resolver qualquer integral, mas no nosso curso de cinemática, apenas nos atentaremos para o caso de integrar uma função polinomial (função do tipo $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$).

Assim, escrevemos que $s=\int(2t+3t^2)dt$ e pensamos no processo inverso. Quando existia a função s e derivamos para saber v, usamos a regra do tombo e eliminamos a constante. Agora vamos elevar o grau do expoente e dividir o número pelo grau do expoente para o qual o termo foi.

$$2.t\rightarrow\frac{2.t^{1+1}}{(1+1)}=t^2$$

$$3.t^2\rightarrow 3.\frac{t^{2+1}}{(2+1)}=t^3$$

Além disso, devemos adicionar uma constante de integração (ao derivar eliminamos a constante), o espaço inicial. Dessa forma, temos que a função horária do espaço é dada por:

$$s=s_0+t^2+t^3$$

Note que, ao derivarmos a expressão de s chegaremos em v conforme o enunciado do exemplo. Se quisermos a aceleração, basta derivarmos a velocidade:

$$a=\frac{dv}{dt}=1.2.t^{1-1}+2.3.t^{2-1}=2+6t$$

2.6. Cálculo da velocidade média no MRUV

Apenas no MRU a velocidade escalar média (v_m) é igual à velocidade escalar instantânea (v). Entretanto, o conceito de velocidade não muda no MRUV:

$$v_m=\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Dessa forma, podemos usar nossa equação coringa para calcular de forma simples a velocidade média no MRUV:

$$\Delta s = \frac{(v + v_0)}{2}.\Delta t \Rightarrow \boxed{\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2}}$$

Ao analisarmos está última relação, apenas manipulando algebricamente a equação coringa, podemos observar que para dois instantes genéricos ($t = 0$ e t), a velocidade escalar média é a média aritmética das velocidades escalares instantâneas nos correspondentes instantes, então:

$$\boxed{v_m = \frac{(v + v_0)}{2}}$$

Neste momento não podemos confundir as condições do MRU e do MRUV. No MRU não podíamos simplesmente calcular a velocidade média entre dois instantes como a média aritmética das velocidades.

No MRUV, a velocidade escalar média em dois instantes é sim a média das velocidades para estes dois instantes. Para o caso de a velocidade instantânea variar de forma não linear com o tempo, a velocidade média deverá ser unicamente calculada pela forma tradicional:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Graficamente, temos que:

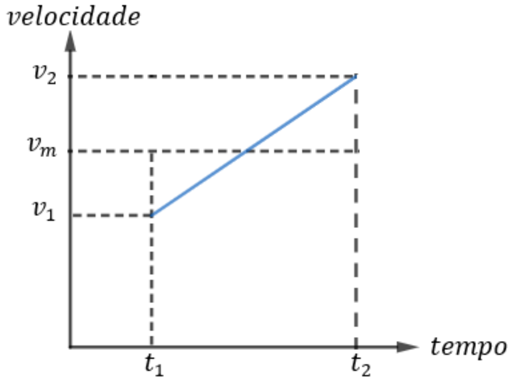


Figura 7: Cálculo da área no gráfico vxt, dado que ela é numericamente igual à variação do espaço.

Vamos calcular a área do trapézio ($A_{trapézio}$) retângulo definido por v_1, v_2, t_1 e t_2, e, a área do retângulo ($A_{retângulo}$) delimitado por v_m, t_1 e t_2. Logo:

$$A_{trapézio} = \frac{(v_1 + v_2)}{2}.(t_2 - t_1) \Rightarrow A_{retângulo} = v_m.(t_2 - t_1)$$

Como, $v_m = \frac{(v_1+v_2)}{2}$, temos que:

$$A_{trapézio} = \frac{(v_1 + v_2)}{2}.(t_2 - t_1) = v_m.(t_2 - t_1) = A_{retângulo}$$

Em outras palavras, calcular a velocidade escalar média obter uma velocidade que satisfaça a condição do móvel percorrer a mesma variação de espaço no intervalo de tempo correspondente.

2.7. A equação de Torricelli

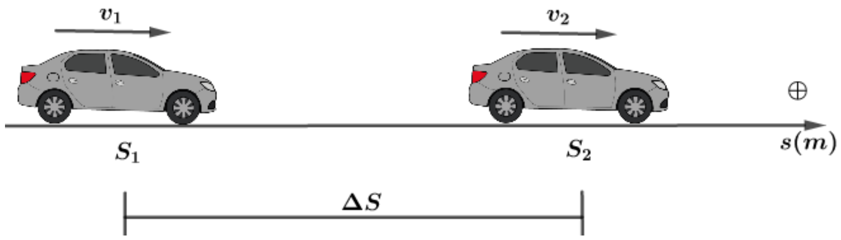


Figura 8: Móvel realizando um MRUV dois momentos onde sabemos suas velocidades, a variação de espaço e a aceleração.

Novamente, vamos utilizar a função horária da velocidade e isolar Δt:

$$v = v_0 + a.\Delta t \Rightarrow \boxed{\Delta t = \frac{v - v_0}{a}}$$

Observação: como estamos no MRUV, a aceleração escalar instantânea é diferente de zero, logo, não há problemas fazer está manipulação matemática. A partir desse resultado, vamos utilizar novamente nossa equação coringa e substituir o Δt que acabamos de encontrar:

$$\Delta s = \frac{(v + v_0).\Delta t}{2} \Rightarrow \Delta s = \frac{(v + v_0)}{2}.\frac{(v - v_0)}{a} \Rightarrow v^2 - v_0^2 = 2.a.\Delta s \therefore \boxed{v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s}$$

2.7.1. Discussão dos sinais da velocidade escalar v quando usamos Torricelli

Quando utilizamos a equação de Torricelli, a primeira dúvida que surge é quanto ao sinal da velocidade, pois:

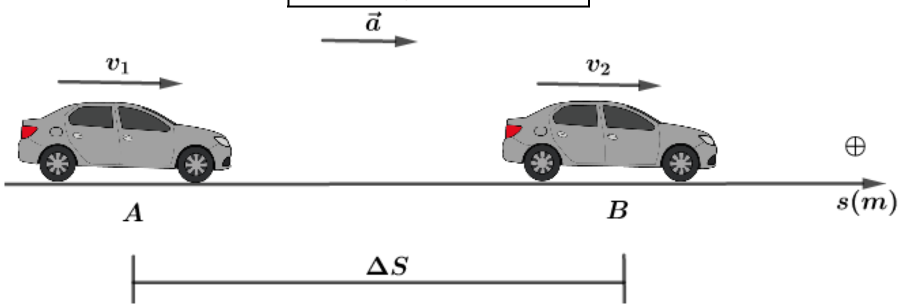
$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s \Rightarrow \boxed{v = \pm\sqrt{v_0^2 + 2.a.\Delta s}}$$

Assim, obtivemos duas possíveis velocidades escalares: uma positiva e outra negativa. No entanto, escolher dentre as duas qual será a velocidade do móvel dependerá da orientação da trajetória e do tipo de movimento: acelerado ou retardado.

a) Movimento acelerado:

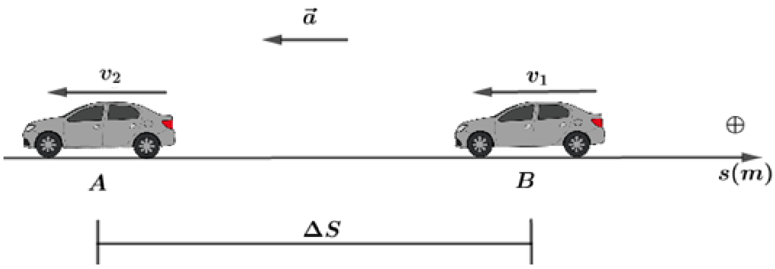
1) **movimento progressivo**: Para o movimento acelerado, o móvel passará por B uma única vez e terá velocidade positiva se estiver indo no sentido da trajetória. Portanto:

$$\boxed{v_2 = +\sqrt{v_1^2 + 2.a.\Delta s}}$$



2) **movimento retrógrado:** Se o móvel estiver indo no sentido contrário da trajetória (movimento retrógrado) e for acelerado, então passará por B ou por A uma única vez e sua velocidade será negativa:

$$\boxed{v_2 = -\sqrt{v_1^2 + 2.a.\Delta s}}$$



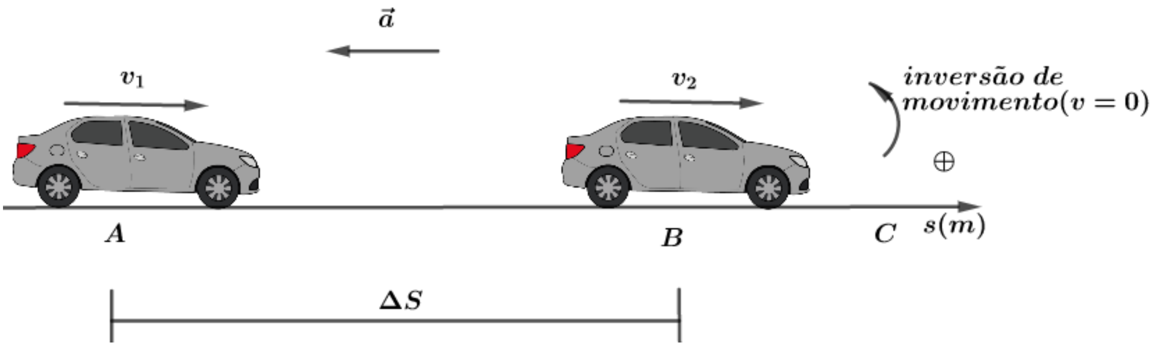
Note que a aceleração é negativa, mas a variação do espaço também, de forma que o produto $a. \Delta s$ será positivo. Portanto, $|v|$ aumentará, característica de **movimento acelerado.**

b) Movimento retardado

1) **Inicialmente progressivo:** Analisando o movimento retardado, se inicialmente o móvel vai de A para B (sentido da trajetória) sabemos que sua velocidade é positiva, mas sua aceleração será negativa, então nesse intervalo, o móvel possui velocidade positiva. Logo, utilizamos:

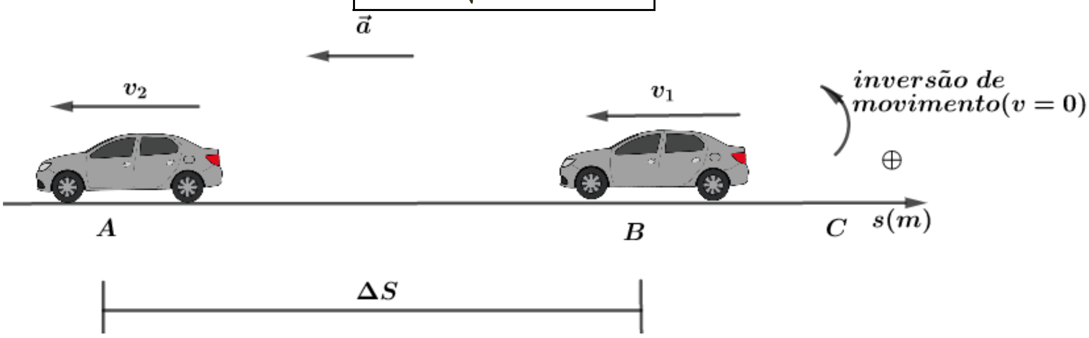
$$\boxed{v_2 = +\sqrt{v_1^2 + 2. a. \Delta s}}$$

Entretanto, sabemos que a velocidade está diminuindo devido ao fato de a aceleração estar em sentido contrário ao da velocidade, até chegar o momento em que velocidade se anula e o móvel muda de sentido. A característica da mudança de sentido é o fato de a velocidade ser nula nesse instante.



Note que o produto $a \cdot \Delta S < 0$, logo $|v_2| < |v_1|$. Após esse momento, o movimento **passa a ser retrógrado acelerado**, isto é, ele vai para a esquerda acelerado, portanto, sua velocidade será negativa:

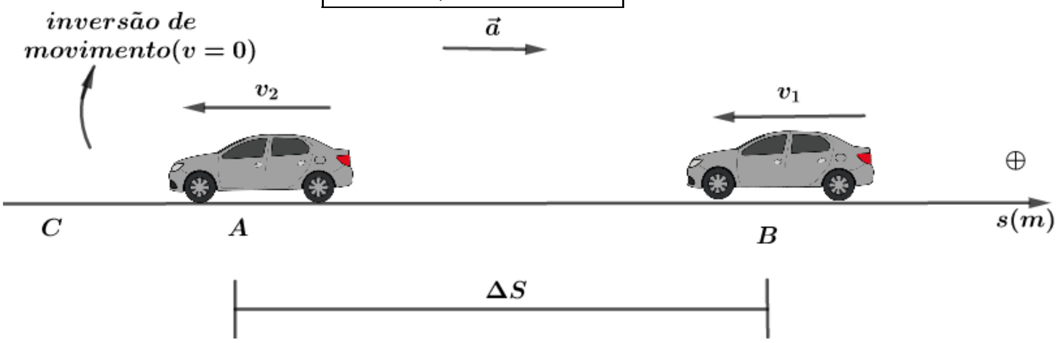
$$\boxed{v_2 = -\sqrt{v_1^2 + 2. a. \Delta s}}$$



Neste caso, temos que o movimento é retrogrado acelerado e o produto $a.\Delta s$ será positivo, isto é, $|v|$ aumenta nessa fase do movimento.

2) Inicialmente retrógrado: Agora, se o móvel se desloca no sentido de B para A (contrário a trajetória, movimento retrogrado) mas retardado, ou seja, sua velocidade vai diminuindo de B para A, pois a aceleração é contraria a velocidade, o móvel chegará novamente ao momento onde inverte seu sentido. Até esse momento, sua velocidade será negativa (contraria ao movimento), dado por:

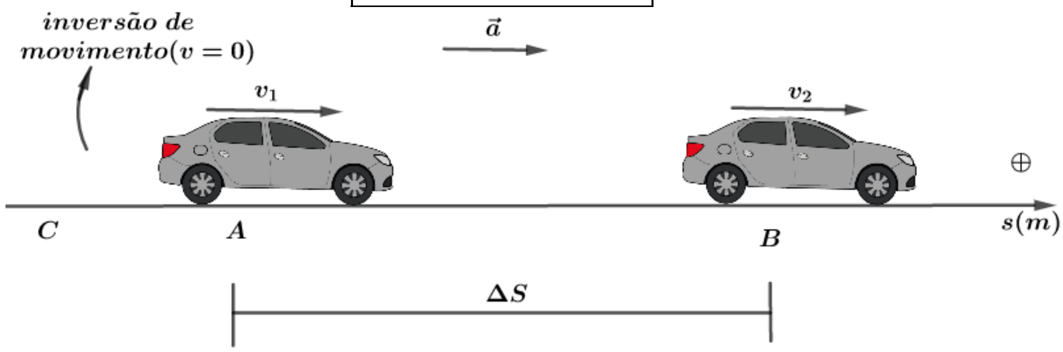
$$\boxed{v_2 = -\sqrt{v_1^2 + 2.a.\Delta s}}$$



Notamos que a aceleração é positiva, mas a variação do espaço é negativa, logo, o produto $a.\Delta s$ será negativo, isto é $|v|$ diminui nessa fase do movimento, conforme visto na teoria anteriormente.

Após o instante em que a velocidade é nula, a velocidade inverte de sentido e agora **passa a ser um movimento progressivo acelerado** (teremos $a.v > 0$). Nesta fase do movimento, teremos que a velocidade será positiva e dado por:

$$\boxed{v_2 = +\sqrt{v_1^2 + 2.a.\Delta s}}$$



Notamos que a aceleração é positiva e a variação do espaço é positiva, logo, o produto $a.\Delta s$ será positivo, portanto, $|v|$ aumenta nessa fase do movimento, conforme visto na teoria anteriormente.

2.8. Movimento vertical no vácuo

No nosso mundo de vestibular, para pequenas alturas vamos considerar a aceleração da gravidade consta e muitas vezes os exercícios fornecem o módulo da aceleração da gravidade, outras vezes você deve apenas considerar que o módulo é g e, em alguns casos, é aconselhado usar $|\vec{g}| = 10m/s^2$para facilitar as contas na questão e a gravidade aponta para o centro da Terra.

Por razões didáticas sempre adotaremos orientação positiva para cima: quando o móvel está subindo, sua velocidade é positiva ($v > 0$, sentido da trajetória) mas a aceleração da gravidade para baixo. Logo, teremos um movimento retardado progressivo ($v.a < 0$).

Fisicamente, isto mostra que o módulo da velocidade ($|v|$) da bolinha está diminuindo (ela está sendo freada) até que chegue em um ponto onde sua velocidade é zero. Neste ponto, dizemos que a bolinha atingiu a altura máxima, pois, a partir desse instante, a bolinha terá velocidade negativa ($v < 0$), indicando que ela inverteu o sentido do movimento (orientação da trajetória para cima).

Em seguida, a bolinha começa a descer, isto é, ela está sendo acelerada para baixo e o módulo da velocidade ($|v|$) começa a aumentar à medida que ela está descendo, inicia-se o movimento acelerado retrógrado ($v.a > 0$).

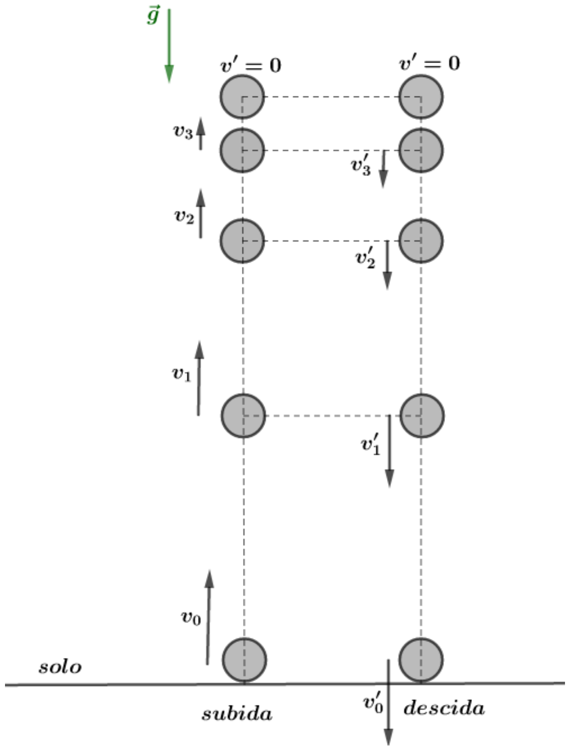


Figura 9: Na subida temos um movimento retardado, até a velocidade zerar e a esfera inverter o sentido. Após este instante, a esfera desce em um movimento acelerado. Repare que todo movimento é simétrico.

2.9. Altura máxima

Vamos estudar o lançamento vertical de um corpo, a partir do solo, com velocidade inicial v_0, sujeito exclusivamente a ação da gravidade durante o movimento, isto é, vamos desprezar quaisquer resistências.

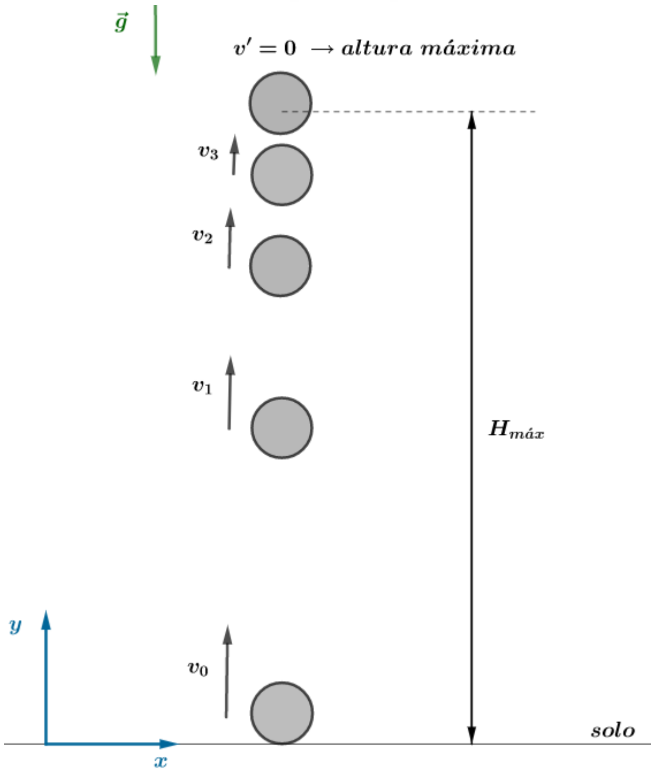


Figura 10: Lançamento vertical de um corpo para cima até atingir a altura máxima.

A altura máxima que o corpo pode atingir, quando lançado como uma velocidade v_0, pode ser determinada diretamente pela equação de Torricelli, da seguinte maneira:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s$$

Em que:

1) $a = -g$, pois, a aceleração da gravidade é contrária ao sentido adotado;
2) $v_0 > 0$, pois, quando lançamos a velocidade está na direção da orientação;
3) $\Delta s > 0$, dado que a orientação é para cima, o deslocamento vertical pode ser escrito como $\Delta s = h_{máx} - h_0$, onde h_0 está situado na origem do eixo adotado, portanto, $h_0 = 0$;
4) $v = 0$, pois, quando a bolinha atinge a altura máxima, sua velocidade é nula (característica de inversão de sentido).

Dessa forma, temos que:

$$\underbrace{v}_{=0}{}^2 = v_0^2 + 2.(-g).\left(h_{máx} - \underbrace{h_0}_{=0}\right) \Rightarrow 0^2 = v_0^2 - 2gh_{máx} \therefore \boxed{h_{máx} = \frac{v_0^2}{2g}}$$

2.10. Tempo de subida até altura máxima

Para determinar o tempo de subida, precisamos de uma equação que correlacione tempo e alguma informação que já sabemos. Dessa forma, a função horária da velocidade é perfeita para determinar o tempo de subida, pois sabemos que a velocidade escalar quando atinge a altura máxima é nula. Logo:

$$v = v_0 + a.t$$

A aceleração da gravidade aponta para baixo, logo, $a = -g$. Então

$$v = v_0 - g.t \Rightarrow 0 = v_0 - g.t_{subida} \therefore \boxed{t_{subida} = \frac{v_0}{g}}$$

2.11. Tempo de subida e tempo de descida entre dois pontos A e B

Vamos tomar dois pontos da vertical A e B, como visto abaixo:

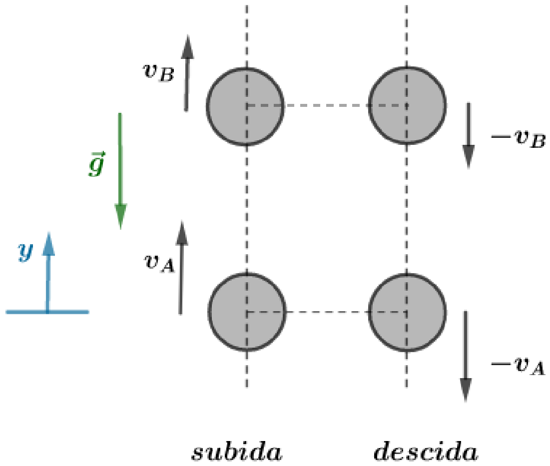


Figura 11: Intervalo de tempos iguais na subida e na descida entre dois níveis horizontais.

Pela função horaria da velocidade, podemos escrever a equação da velocidade em B a partir do ponto A no momento de subida, isto é:

$$v_B = v_A - g.(t_B - t_A) \Rightarrow (t_B - t_A) = \boxed{t_{subida\ A \to B} = \frac{v_A - v_B}{g}}$$

No momento da descida, o corpo vai de B para A, sentido contrário à orientação adotada, logo:

$$-v_A = -v_B - g.(t_{A'} - t_{B'}) \Rightarrow (t_{A'} - t_{B'}) = \boxed{t_{descida\ B \to A} = \frac{v_A - v_B}{g}}$$

Dessa forma, vemos que entre dois pontos da trajetória, o tempo de subida é igual ao tempo de descida, isto é, o movimento é simétrico. Então, o tempo de subida até a altura máxima é igual ao tempo de descida da altura máxima até o solo, ou seja:

$$t_{subida} = t_{descida} = \frac{v_0}{g}$$

Logo, o tempo total de voo do corpo lançado do solo para cima com velocidade escalar v_0 no vácuo é dado por:

$$t_{total} = t_{subida} + t_{descida} \therefore \boxed{t_{total} = \frac{2v_0}{g}}$$

2.12. Velocidade v para uma altura h qualquer:

Para um corpo lançado verticalmente para cima, com velocidade inicial v_0, podemos determinar a velocidade a uma altura h pela equação de Torricelli.

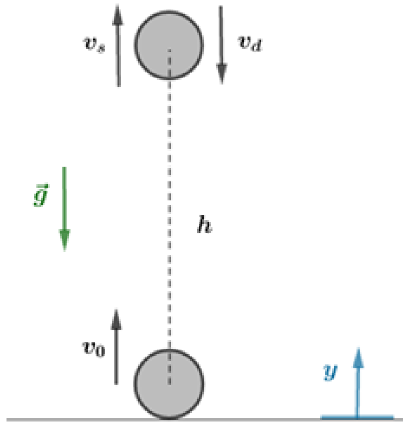


Figura 12: Aplicação de Torricelli no lançamento vertical.

Se orientarmos a trajetória para cima, podemos aplicar Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 - 2g(h - 0) \therefore \boxed{v = \pm\sqrt{v_0^2 - 2.g.h}}$$

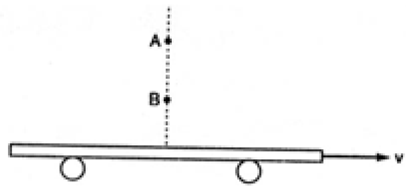
Quando esquematizamos dessa forma, existem dois valores possíveis para velocidade pois existem dois momentos possíveis onde o corpo pode estar a uma altura h: o corpo pode ainda estar subindo quando passa por h ou o corpo pode já estar descendo.

Entretanto, podemos que o módulo da velocidade é o mesmo na subida e na descida quando passa por h. Assim, determinar o sinal dependerá da condição do problema, mas dada nossa orientação, já sabemos que:

- Subida: $v_s = +\sqrt{v_0^2 - 2.g.h}$, $v_s > 0$.
- Descida: $v_d = -\sqrt{v_0^2 - 2.g.h}$, $v_d < 0$.

5) (IME – 1994)

De dois pontos A e B situados sobre a mesma vertical, respectivamente, a 45 metros e a 20 metros do solo, deixa-se cair no mesmo instante duas esferas, conforme mostra a figura abaixo. Uma prancha se desloca no solo, horizontalmente, com movimento uniforme. As esferas atingem a prancha em pontos que distam 2,0 metros. Sendo $g = 10\ m/s^2$ e desprezando a resistência do ar, determine a velocidade da prancha.



Comentários:

Primeiramente, vamos considerar que a velocidade da prancha não se altera quando uma esfera atinge ela. O assunto de colisões será abordado bem mais para frente, mas a título de curiosidade, esse resultado pode ser obtido quando consideramos que a massa da prancha é muito maior que a massa das esferas, considerando choque inelástico.

Diante disso, podemos calcular o tempo de queda de cada esfera:

$$t_A = \sqrt{\frac{2h_A}{g}} = \sqrt{\frac{2.45}{10}} = 3\ s$$
$$t_B = \sqrt{\frac{2h_B}{g}} = \sqrt{\frac{2.20}{10}} = 2\ s$$

Então, o intervalo de tempo de cada choque é de 1 segundo. Por outro lado, a diferença dos pontos onde as esferas atingem na prancha é de 2 m, ou seja, a prancha andou 2 m em 1 s. Portanto:

$$v_{prancha} = \frac{\Delta s_{prancha}}{\Delta t} = \frac{2}{1} = 2\ m/s$$

6) (ITA)
De uma estação parte um trem A com velocidade constante $V_a = 80\ km/h$. Depois de certo tempo, parte dessa mesma estação um outro trem B, com velocidade constante $V_b = 100\ km/h$. Depois de um tempo de percurso, o maquinista de B verifica que o seu trem se encontra a 3 km de A; a partir desse instante ele aciona os freios indefinidamente, comunicando ao trem uma aceleração de $a = -50\ km/h^2$. O trem A continua seu movimento anterior. Nessas condições:
a) não houve encontro dos trens.
b) depois de duas horas o trem B para e a distância que o separa de A é de 64 km.
c) houve encontro dos trens depois de 12 min.
d) houve encontro dos trens depois de 36 min.
e) não houve encontro dos trens; continuam caminhando e a distância que os separa agora é de 2 km.

Comentário:
Tomando como origem de tempo quando o trem A parte da estação e como origem de espaço a estação, podemos que a equação horária para cada trem:

$$s_A = 3 + v_A.t$$
$$s_B = v_B t + a_B.\frac{t^2}{2}$$

Quando os trens se encontram:

$$s_A = s_B \Rightarrow 3 + v_A.t = v_B.t + a_B.\frac{t^2}{2}$$

Substituindo valores, temos que:

$3 + 80t = 100t - \frac{50t^2}{2} \Rightarrow 25t^2 - 20t + 3 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{1}{5}h = 12\ min$ ou $t_2 = \frac{3}{5}h = 36\ min.$

Matematicamente, encontramos dois instantes onde os trens terão a mesma posição, entretanto, no primeiro instante ocorre a colisão, não havendo fisicamente a segunda colisão.

7) (ITA-2001)
Um elevador está descendo com velocidade constante. Durante este movimento, uma lâmpada, que o iluminava, desprende-se do teto e cai. Considere $g = 9{,}8\ m/s^2$. Sabendo-se que o teto está a 3 m de altura acima do piso do elevador, qual o tempo que a lâmpada demora para atingir o piso?
a) 0,61 s
b) 0,78 s
c) 1,54 s
d) infinito, pois a lâmpada só atingirá o piso se o elevador sofre uma desaceleração.
e) indeterminado, pois não se conhece a velocidade do elevador.
Comentários:

Vamos considerar que inicialmente o piso do elevador está a uma altura h_0 do solo, descendo, e a lâmpada está a uma altura $h_0 + L$, onde L é a altura do elevador. Quando a lâmpada tocar o piso do elevador eles estarão na mesma altura. Adotando o referencial do movimento para cima, teremos que:

$$s_{lampada} = h_0 + L - v.t - \frac{gt^2}{2}$$
$$s_{elevador} = h_0 - v.t$$

Encontro da lâmpada com o piso do elevador:

$$s_{lampada} = s_{elevador} \Rightarrow h_0 + L - v.t - g.\frac{t^2}{2} = h_0 - v.t \Rightarrow L = g.\frac{t^2}{2}$$
$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.L}{g}} \Rightarrow \boxed{t \cong 0{,}78\ s}$$

3. Análises gráficas

Inicialmente, vamos estudar os conceitos envolvendo os gráficos de $s \times t$, $v \times t$ e $a \times t$, com foco no significado da reta tangente em cada gráfico. Em seguida, vamos estudar as relações das áreas dos gráficos.

Não podemos confundir o gráfico com a trajetória. A curva de um gráfico é apenas um conjunto de valores definidos por uma relação matemática entre duas variáveis. Por outro lado, trajetória é o conjunto de posições do móvel que são ocupadas pelo móvel.

3.1. Velocidade escalar média

Vamos relembrar a definição matemática de velocidade escalar média:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Assim, dado um movimento qualquer de um corpo, não precisamos especificar o tipo do movimento, podemos escrever a curva do espaço pelo tempo e a partir de dois pontos determinar a velocidade escalar média pelo gráfico:

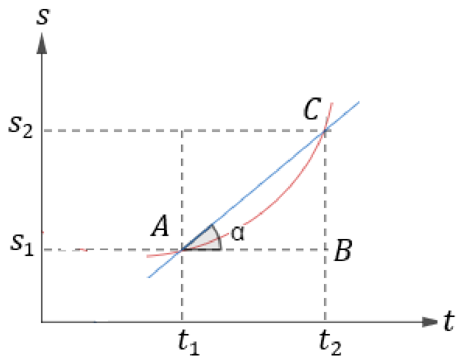


Figura 13: Cálculo da velocidade média a partir do gráfico sxt.

De acordo com o gráfico, podemos calcular $tg\alpha$ no triângulo ABC:

$$tg\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} \therefore \boxed{tg\alpha \overset{N}{=} v_m}$$

Assim, podemos concluir que dado o gráfico do espaço pelo tempo ($s \times t$), podemos obter a velocidade escalar média entre dois pontos calculando a tangente do ângulo formado pela reta que liga os pontos e a horizontal, independente de qual seja o tipo do movimento do corpo.

3.2. Velocidade escalar instantânea

Para determinarmos a velocidade escalar em um dado instante, temos que usar a definição de velocidade escalar instantânea:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Essa definição mostra que devemos calcular a velocidade escalar média em dois instantes muito próximos. Vamos ilustrar essa operação matemática utilizando o gráfico abaixo:

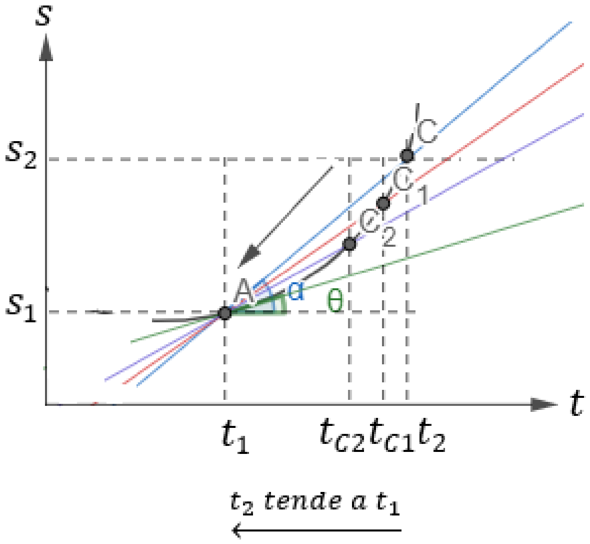


Figura 14: Representação da velocidade em um gráfico sxt.

Quando fazemos o Δt tender a zero, estamos aproximando t_2 de t_1, isto é, pegando intervalos de tempo cada vez menores. Assim, a reta secante que une os pontos A e C vai se tornando a reta tangente no ponto A. Dessa forma, a deixamos de calcular a velocidade escalar média e obtemos a velocidade escalar instantânea no ponto A.

Assim, podemos dizer que a velocidade escalar instantânea, em t_1, é numericamente igual a tangente do ângulo que passa por A, isto é:

$$\boxed{v \overset{N}{=} tg\theta}$$

Para o caso do MRU, sabemos que a velocidade escalar instantânea é igual a velocidade escalar média, portanto, em qualquer ponto do gráfico de $s \times t$, a reta terá a mesma inclinação, ou seja, o mesmo coeficiente angular. Esse resultado já era esperado, já que no MRU a função horária do espaço é dada por:

$$s = s_0 + v.t$$

3.3. Aceleração escalar média

Devido as semelhanças nas definições, a análise gráfica da aceleração escalar média é análoga a velocidade escalar média (sempre tome cuidado com os eixos dos gráficos e tome cuidado para não confundir e calcular errado).

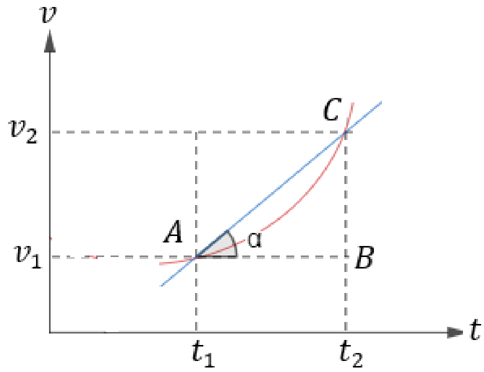


Figura 15: Representação da aceleração média no gráfico vxt.

Assim, no gráfico da $v \times t$, podemos calcular a aceleração escalar média entre dois pontos (A e C), por:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

Mas, $tg\alpha$ é dada por: $tg\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. Portanto, concluímos que:

$$\boxed{a_m \overset{N}{=} tg\alpha}$$

3.4. Aceleração escalar instantânea

Diante das semelhanças nas definições, a análise gráfica da aceleração escalar instantânea segue o mesmo modelo da velocidade escalar instantânea:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Assim, a aceleração escalar instantânea, em um gráfico $v \times t$, corresponde numericamente a tangente do ângulo entre a reta tangente e o eixo do tempo. Graficamente:

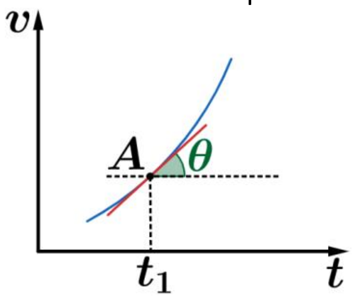


Figura 16: Representação da aceleração no gráfico vxt.

Observação: para simplificar e se tornar mais visual a reta tangente, não desenhamos as retas secantes, como feito no gráfico da velocidade escalar instantânea. Portanto, dizemos que:

$$\boxed{a \overset{N}{=} tg\theta}$$

Concluímos que para calcular a aceleração escalar instantânea no gráfico $v \times t$, basta acharmos a tangente do ângulo da reta tangente no instante desejado. No caso do MRUV, sabemos que a velocidade escalar é dada por:

$$v = v_0 + a.t$$

Ou seja, função horária da velocidade é uma reta, portanto, tem inclinação constante, logo, a aceleração escalar instantânea coincide com o coeficiente angular do gráfico. Sendo assim, a aceleração escalar instantânea é igual a aceleração escalar média, característica desse movimento.

Assim, dado um gráfico de $s \times t$, basta traçarmos a reta tangente num ponto desejado e verificamos como a velocidade se comporta:

a) inclinação para cima: velocidade positiva.
b) inclinação para baixo: velocidade negativa.

Outro fato importante é a inclinação da reta tangente: quanto mais inclinada a reta tangente, mais cresce a função derivada. Isto é, se tomarmos dois pontos com inclinações diferentes, podemos dizer se uma cresce mais que a outra ou dizer qual inclinação é maior.

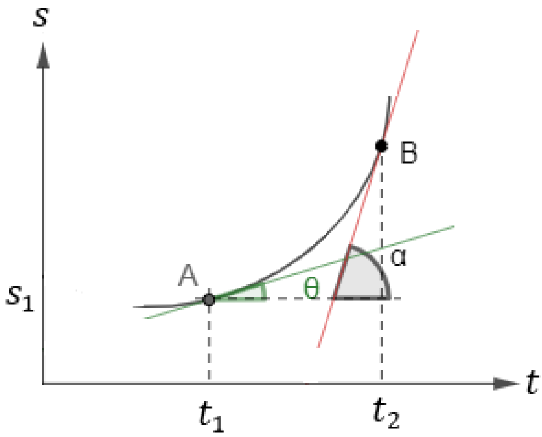


Figura 17: Como comparar a velocidade em dois pontos em um gráfico sxt.

Pelo gráfico, temos que $tg\alpha > tg\beta$, logo: $v_B > v_A$. A mesma análise é válida para o gráfico $v \times t$, analisando a aceleração em instantes diferentes.

3.5. Variação do espaço no gráfico $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{t}$

Vamos utilizar o gráfico do MRU para ilustrar o resultado do cálculo da área no gráfico $v \times t$.

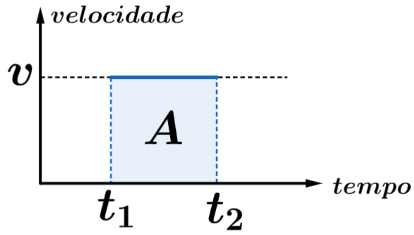


Figura 18: Cálculo da variação do espaço a partir do gráfico vxt.

Sabemos que: $\Delta s = v.\Delta t$. Calculando a área do gráfico de $v \times t$, para o caso do MU, encontramos que:

$$A = v.(t_2 - t_1)$$

Como $\Delta t = t_2 - t_1$, podemos afirmar que a área é numericamente igual a variação do espaço:

$$\boxed{\Delta s \overset{N}{=} \text{A}}$$

Embora mostremos para um caso particular de movimento, o resultado é valido para qualquer movimento. Infelizmente, para demonstrar este fato com rigor matemático é necessário recursos do Cálculo Diferencial Integral que não são os objetivos desse curso.

3.6. Variação da velocidade escalar no gráfico $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{t}$

De forma análoga aos resultados obtidos para a variação do espaço, vamos mostrar a representação da área no gráfico $a \times t$, especificando para o MUV, onde a aceleração escalar é constante.

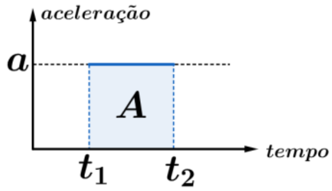


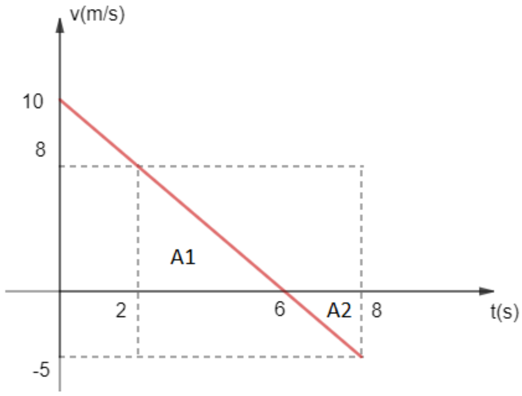
Figura 19: Cálculo da variação da velocidade a partir do gráfico axt.

Pela teoria de MRUV, sabemos que: $\Delta v = a.\Delta t$. Quando calculamos a área delimitada pela região azul do gráfico logo acima, concluímos que:

$$A = a.(t_2 - t_1) = a.\Delta t \therefore \boxed{\Delta v \overset{N}{=} A}$$

No caso de a curva da aceleração não ser constante, serão necessários outros métodos para obtenção da área. Para o caso de a aceleração variar linearmente com o tempo, a velocidade pode ser determinada pela área, com os auxílios da geometria plana. Para outras curvas, apenas com Cálculo para determinar a área embaixo da curva.

Observação: se ao construir o gráfico de $v \times t$ a área estiver abaixo do eixo dos tempos, a variação de espaço é igual a área, entretanto, coloca-se o sinal negativo. Contudo, quando se deseja o deslocamento total do móvel, utilizamos os módulos das variações de espaço. Isso é valido para o caso do gráfico de $a \times t$, conforme o exemplo a seguir:



Calcule a variação de espaço e o deslocamento de 2 a 8 segundos. Para calcular a variação de espaço e o deslocamento de 2 a 8 segundos, precisamos calcular as áreas de cada intervalo.

Entre 2 e 6 segundos:

$$A_1 = \frac{8.(6-2)}{2} = 16$$

Entre 6 e 8 segundos:

$$A_2 = \frac{8.(8-6)}{2} = 8$$

Logo, a variação de espaço do móvel foi de:

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 16 + (-8) = 8\,m$$

Para determinar o deslocamento, devemos somar os módulos de cada deslocamento:

$$d = |\Delta s_1| + |\Delta s_2| = 16 + 8 = 24\,m$$

No momento em que o móvel passa pelo eixo dos tempos (no nosso exemplo $t = 6\,s$), sua velocidade altera o sentido, isto é, houve inversão no sentido do movimento.

3.7. Gráficos no MRU

3.7.1. $\boldsymbol{s \times t}$

Da teoria, sabemos que a função horária do espaço é dada por: $s = s_0 + v.t$. Trata-se de uma função do primeiro grau, portanto uma reta, onde o coeficiente linear é s_0 e o coeficiente angular é v.

Como o coeficiente angular é igual a v e, pela teoria da equação da reta sabemos que o coeficiente angular é igual a tangente do ângulo de inclinação da reta com o eixo horizontal, portanto, temos que $\boxed{v \overset{N}{=} tg\alpha}$.

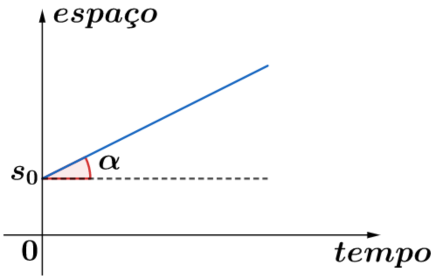


Figura 20: Gráfico de sxt, para v > 0.

Para $v > 0$, temos o movimento progressivo e a função é crescente, pois coeficiente angular é positivo, então temos os seguintes gráficos possíveis:

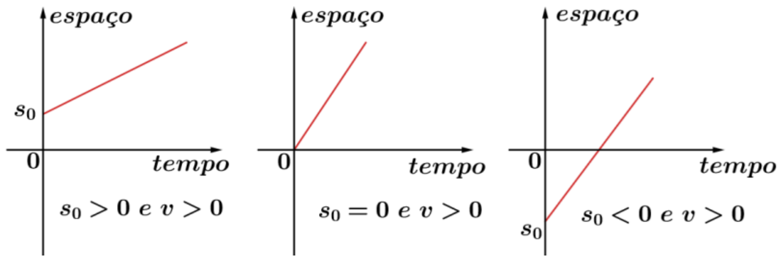


Figura 21: Gráficos de sxt no MRU para v > 0.

Para $v < 0$, temos o movimento retrógrado, e a função é decrescente, pois o coeficiente angular é negativo, então temos os seguintes gráficos possíveis:

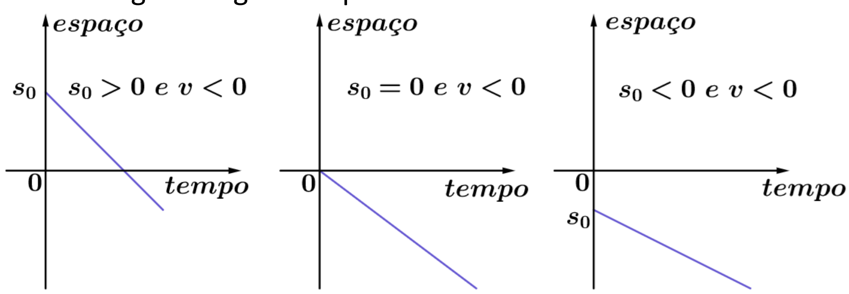


Figura 22: Gráficos de sxt no MRU para v < 0.

3.7.2. $\boldsymbol{v \times t}$

Devido ao fato de a velocidade ser constante nesse movimento, temos que o gráfico da velocidade pelo tempo sempre será uma reta paralela ao eixo do tempo.

Para o caso de movimento progressivo, isto é, $v > 0$, a reta paralela está acima do eixo do tempo.

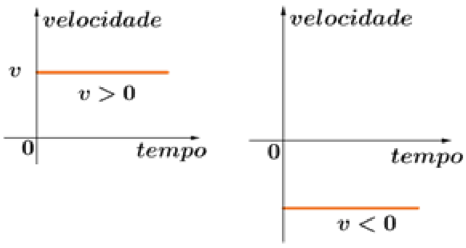


Figura 23: Gráfico de vxt no MRU.

Como a aceleração escalar linear é nula no MRU, então a reta da função horária da aceleração é nula, isto é, uma reta que coincidente com o eixo do tempo, independentemente de ser progressivo ou retrógrado.

3.8. Gráficos no MRUV

3.8.1. $\boldsymbol{s \times t}$

Como visto anteriormente, a função horária do espaço é dada por:

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$

Em que $a \neq 0, v_0\ e\ s_0$ são constantes. De acordo com a teoria de função do segundo grau, sabemos que a função $s(t)$ é uma parábola cuja concavidade depende do valor de a.

1) Caso $\boldsymbol{a > 0}$:

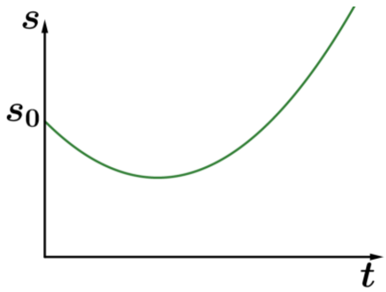


Figura 24: Gráfico de sxt no MRUV, com a<0.

Para ilustrar, tomamos que $s_0 > 0$ mas o espaço inicial poderia ser menor que zero, apenas estaria deslocada para baixo a curva, sem afetar os resultados teóricos aqui obtidos.

No caso de a aceleração escalar positiva, o vértice da parábola representa o espaço mínimo (s_V) alcançado pelo móvel no correspondente instante de tempo (t_V). Notamos que:

- De 0 a t_V: o espaço do móvel decresce, a inclinação da reta tangente nesse intervalo é negativa, isto é, a velocidade é negativa. Entretanto, $a > 0$ para todo movimento. Como $a.v < 0$, implica movimento retardado. Logo, o módulo da velocidade diminui com o tempo, como esperado uma vez uma vez que a inclinação é negativa e está tendendo a zero.

  Quando chegamos no instante t_V, a reta tangente no gráfico neste ponto é horizontal, paralela ao eixo dos tempos, isto é, sua inclinação é nula. Portanto, a velocidade nesse ponto é nula. Após este instante, o móvel muda de sentido e seu espaço começa a crescer e a inclinação é positiva, portanto, temos $v > 0$ e $a > 0$, característica de movimento acelerado.

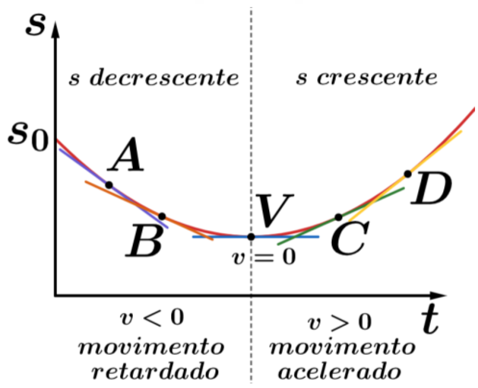


Figura 25: Gráfico de sxt no MRUV, com a > 0, mostrando as fases do movimento.

2) Caso $a < 0$:

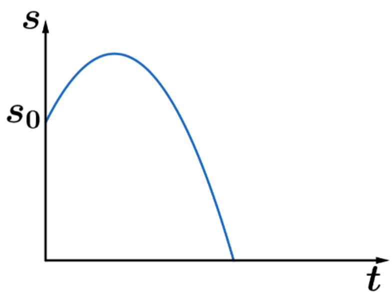


Figura 26: Gráfico de sxt no MRUV, com a < 0.

Novamente, pegamos o caso de $s_0 > 0$, mas os resultados são validos para qualquer espaço inicial. Para o caso de $a < 0$, temos que o gráfico acima representa uma parábola com concavidade para baixo, mostrando que o móvel atinge um espaço máximo no vértice da parábola, quando atinge o instante t_V.

Notamos que o espaço é crescente até o instante t_V, isto é, velocidade positiva nesse intervalo de tempo e, como $v > 0$ e $a < 0$, trata-se de um movimento retardado, ou seja, o módulo da velocidade diminui, como visto também pelo fato da inclinação da reta tangente diminuir a medida que nos aproximamos de t_V.

No instante t_V a velocidade é nula, característica de mudança de sentido. Para $t > t_V$, o espaço do móvel começa a decrescer, o que significa velocidade negativa. Então, trata-se de um movimento acelerado, pois, $a < 0$ e $v < 0$ $(a.v < 0)$. Assim, podemos afirmar que o módulo da velocidade está aumentando, o que também é visto pelo fato de a inclinação da reta tangente estar aumentando, em módulo, com o passar do tempo.

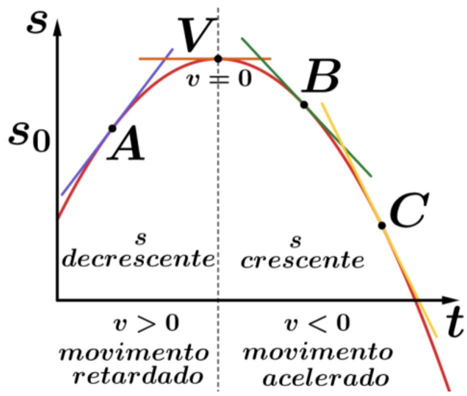


Figura 27: Gráfico de sxt no MRUV, com a < 0, mostrando as fases do movimento.

Sendo assim, concluímos que em ambos os casos para $t < t_V$ teremos movimento retardado e para $t > t_V$ teremos movimento acelerado. Além disso, podemos observar toda vez que a reta tangente é paralela ao eixo dos tempos, a velocidade naquele instante é nula. Isto é valido não só para o MRUV, mas para todo movimento variado.

3.8.2. $\boldsymbol{v \times t}$

Para o MRUV, sabemos que a função horária da velocidade é dada por: $v = v_0 + a.t$. Com v_0 e a são valores constantes. Sabemos que essa função é uma reta, onde:

v_0: coeficiente linear
a: coeficiente angular

1) Caso $\boldsymbol{a > 0}$:

Trata-se de uma função do primeiro grau crescente, cujo gráfico é dado por:

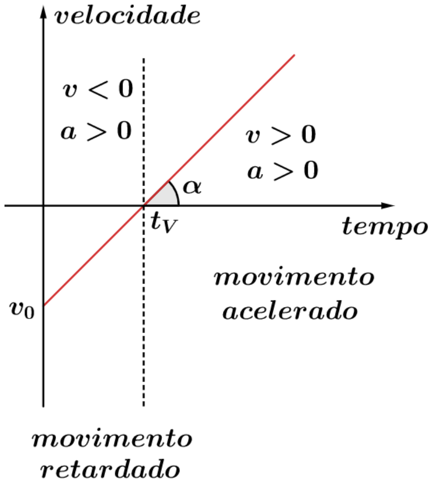


Figura 28: Gráfico de vxt no MRUV, com a > 0, mostrando as fases do movimento.

Analisando o gráfico acima, podemos ver que para $0 < t < t_V$, a velocidade é negativa. Logo, como $a > 0$, trata-se de um movimento retardado, pois temos que $a.v < 0$.

Para $t = t_V$, temos que a velocidade do móvel é nula (mudança de sentido). A partir deste instante, a velocidade é positiva. Logo, como $a > 0$, trata-se de um movimento acelerado, pois temos que $a.v > 0$.

2) Caso $\boldsymbol{a < 0}$:

Trata-se de uma função do primeiro grau decrescente, cujo gráfico é dado por:

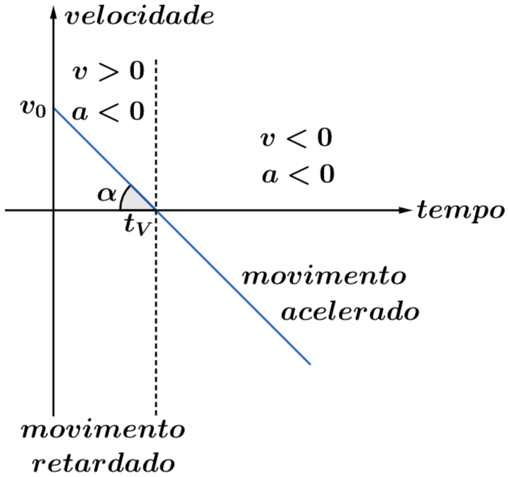


Figura 29: Gráfico de vxt no MRUV, com a < 0, mostrando as fases do movimento.

Analisando o gráfico acima, podemos ver que para $0 < t < t_V$, a velocidade é positiva. Logo, como $a < 0$, trata-se de um movimento retardado, pois temos que $a.v < 0$.

Para $t = t_V$, temos que a velocidade do móvel é nula (mudança de sentido). A partir deste instante, a velocidade é negativa. Logo, como $a < 0$, trata-se de um movimento acelerado, pois temos que $a.v > 0$.

Vale lembrar que a aceleração é numericamente igual a tangente de alfa ($a \underline{\underline{N}} tg\alpha$). Neste caso, embora a tangente de alfa ser positiva, a aceleração escalar é negativa, pois trata-se de uma reta decrescente (o cálculo da tangente é apenas para determinação do módulo).

3.8.3 $\boldsymbol{a \times t}$

No MRUV, sabemos que a aceleração é constante, portanto, existe dois gráficos para a aceleração:

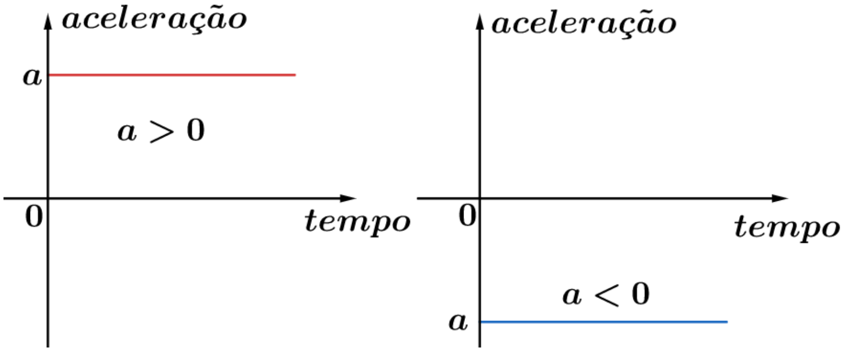
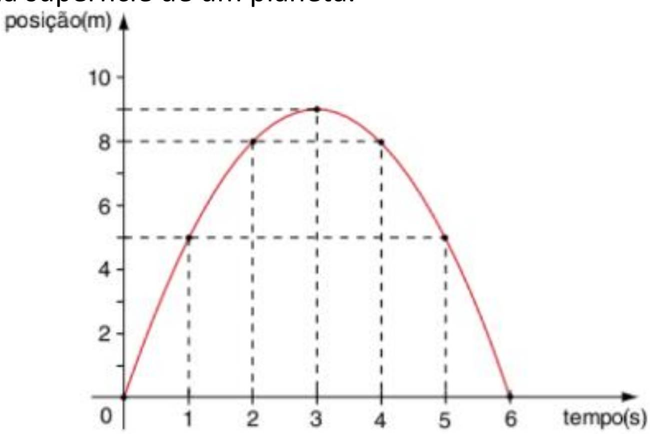


Figura 30: Gráficos de axt no MUV.

Observação: se a aceleração é nula, então não estamos no MRUV, trata-se de um movimento uniforme.

8)

A figura representa o gráfico posição-tempo do movimento de um corpo lançado verticalmente para cima com velocidade inicial v_0, na superfície de um planeta.



Qual o valor:

a) da aceleração da gravidade na superfície do planeta?

b) da velocidade inicial v_0?

Comentários:

Pelo gráfico da questão, podemos encontrar a função horária do espaço:

$$s(t) = s_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$

Como o gráfico da posição pelo tempo sai da origem, dizemos que seu espaço inicial é nulo, isto é, $s_0 = 0$.

Além disso, consideremos nossa orientação de trajetória para cima. Agora, vamos utilizar nossos conhecimentos de função do segundo grau e determinar os coeficientes v_0 e a. Para isto, vamos utilizar a forma fatorada da função do segundo grau:

$$s_{grafico}(t) = \alpha(t - r_1)(t - r_2)$$

Onde r_1 e r_2 são as raízes da função, no nosso caso: $r_1 = 0$ e $r_2 = 6$. Logo:

$$s_{grafico}(t) = \alpha.t.(t - 6)$$

Basta agora substituir em ponto bem determinado:

$$s_{grafico}(3) = \alpha.3.(3 - 6) = 9 \Rightarrow \boxed{\alpha = -1\, m/s^2}$$

Note que $a < 0$, como esperado, pois, a função do segundo grau tem concavidade para baixo.
Logo, a função do espaço pelo tempo para este móvel é:

$$s_{grafico}(t) = -1.t(t - 6) = 6.t - 1.t^2$$

Fazendo comparação entre:

$$s(t) = s_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2} \ e \ s_{grafico}(t) = 6.t - 1.t^2$$

Logo:

$$s_0 = 0,\ v_0 = 6\, m/s \text{ e } a = -2\, m/s^2$$

TOME NOTA!

4. Movimento circular

Até aqui descrevemos movimentos por intermédio de grandezas escalares lineares, onde as grandezas eram definidas em relação a medidas de comprimentos. A partir de agora, vamos introduzir o conceito de grandeza escalar circular (espaço angular, velocidade escalar angular e aceleração escalar angular), tomando como medidas ângulos na circunferência.

4.1. Grandezas angulares

Considere uma partícula realizando um movimento circular da figura.

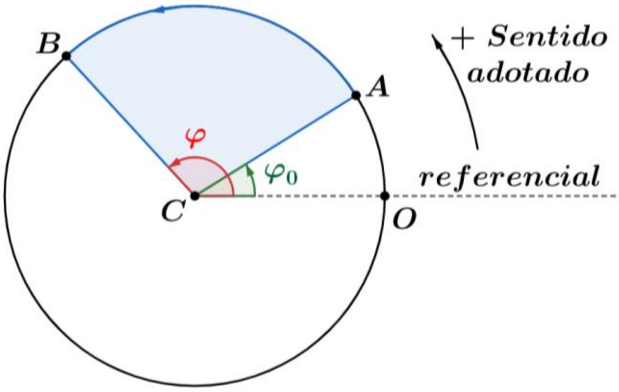


Figura 31: Representação de grandezas angulares.

Na figura acima, A é a posição inicial da partícula e B é a posição final da partícula. Considere a origem O e adota-se o sentido anti-horário como positivo, dizemos que:

$$s_0: espaço\ inicial\ \ e\ \ s: espaço\ final$$

Devido a trajetória ser circular, podemos escrever a posição inicial e final do ponto material utilizando ângulos:

$$\varphi_0: espaço\ angular\ inicial\ \ e\ \ \varphi: espaço\ angular\ final$$

Vale lembrar a relação da geometria plana para ângulos em **radianos**:

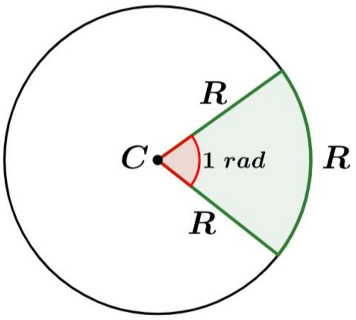


Figura 32: Definição de radianos.

Então, estabelecemos uma relação entre ângulo central e comprimento do arco de circunferência:

Ângulo		Arco
1 rad	**-**	**R**
$\boldsymbol{\alpha}$	**-**	**s**

Logo:

$$1 \cdot s = \alpha \cdot R \therefore \boxed{s = \alpha \cdot R}$$

Atenção: ângulo α em radianos. Além disso, como a definição de radianos envolve a divisão entre duas grandezas de distâncias, radianos se torna essencialmente adimensional. Assim, podemos escrever a variação angular da partícula, como:

$$\boxed{\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0}$$

Dessa forma, define-se velocidade angular média como a razão entre a variação do espaço angular e a variação do tempo correspondente:

$$\boxed{\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

Analogamente a velocidade escalar, define-se velocidade angular instantânea como o limite da velocidade angular média para Δt tendendo a zero:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_m} \text{ ou } \boxed{\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

Portanto, a velocidade angular instantânea é a derivada do espaço angular em relação ao tempo:

$$\boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt}}$$

Como os espaços angulares são expressos em radianos e o tempo em segundos, a unidade de velocidade angular é expressa em radianos por segundo (rad/s). Semelhante a definição de aceleração escalar média, define-se aceleração angular média como a razão entre a variação da velocidade angular e o intervalo de tempo correspondente:

$$\boxed{\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Como a velocidade angular é expressa em rad/s e o tempo em segundos, a unidade de aceleração angular é rad/s^2.

A aceleração angular instantânea é definida pelo limite da aceleração angular média quanto Δt tende a zero:

$$\boxed{\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \gamma_m} \; ou \; \boxed{\gamma = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}}$$

Portanto, a aceleração angular instantânea é a derivada da velocidade angular em relação ao tempo:

$$\boxed{\gamma = \frac{d\omega}{dt}}$$

Pela geometria plana, podemos escrever algumas relações entre as grandezas escalares lineares e as grandezas angulares:

- Relação de ângulo com comprimento de arcos na circunferência:

$$\boxed{\varphi_0 = \frac{s_0}{R}} \qquad \boxed{\varphi = \frac{s}{R}} \qquad \boxed{\Delta\varphi = \frac{\Delta s}{R}}$$

- Relação ente velocidade linear média e velocidade angular média:

$$\omega_m = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta s}{\mathrm{R}}}{\Delta t} = \frac{1}{R}.\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{R}.v_m \therefore \boxed{\omega_m = \frac{v_m}{R}}$$

Para velocidades instantâneas, também vale a relação:

$$\boxed{\omega = \frac{v}{R}} \text{ ou } \boxed{v = \omega.R}$$

- Relação entre aceleração linear média e aceleração angular média:

$$\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\frac{\Delta v}{R}}{\Delta t} = \frac{1}{R}.\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1}{R}.a_m$$

$$\therefore \boxed{\gamma_m = \frac{a_m}{R}}$$

Para acelerações instantâneas, também vale a relação:

$$\boxed{\gamma = \frac{a}{R}} \text{ ou } \boxed{a = \gamma.R}$$

ESCLARECENDO!

9)
A hélice de um ventilado está girando com velocidade angular de 10 rad/s, quando uma pessoa desliga o ventilador e a hélice para em 10 s. Determine:
a) a aceleração angular média do ventilador entre o instante em que foi desligado até a hélice parar totalmente;
b) a aceleração linear média dos pontos que distam 0,20 m do eixo de rotação, nesse mesmo intervalo de tempo.
Comentários:
a) Pelas condições do problema, temos que a velocidade angular inicial é 10 rad/s e a velocidade angular final é zero. Logo:

$$\gamma_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0-10}{10-0} \Rightarrow \boxed{\gamma_m = -1{,}0\, rad/s^2}$$

b) A aceleração linear média pode ser calculada pela relação:

$$a_m = \gamma_m . R \Rightarrow a_m = (-1{,}0).\,0{,}2 \Rightarrow \boxed{a_m = -0{,}20\, m/s^2}$$

4.2. Movimento circular uniforme (MCU)

Chamamos de MCU o movimento realizado por um ponto material percorrendo uma circunferência de raio R em movimento uniforme, isto é, o ponto material varre ângulos iguais em intervalos de tempos iguais. Dessa forma, dizemos que o **MCU é periódico**, pois, a cada volta completada pelo móvel, as características do movimento se repetem em intervalos de tempo iguais.

4.2.1. Período e frequência

Define-se *período*, representado pela letra T como sendo o intervalo de tempo mínimo para o movimento repetir-se, com as mesmas características.

Por exemplo, no MCU, período é o intervalo de tempo que o ponto material leva para percorrer uma volta completa, ou seja, se ele leva 0,5 s para realizar uma volta no MCU, seu período é dado por $T = 0{,}5\, s$.

De forma correlacionada, define-se *frequência* como sendo o número de vezes que o movimento se repete na unidade de tempo. Ou seja:

$$f = \frac{n}{\Delta t}$$

Em que n número de repetições e Δt intervalo de tempo considerado. Para o MCU, f é o número de voltas (ou ciclos) que o ponto material realiza na unidade de tempo. Por exemplo: se uma partícula completa 5 voltas em 10 segundos, então, sua frequência será:

$$f = \frac{5}{10} = 0{,}5\, ciclos/s$$

A unidade de ciclos/s recebe o nome de *hertz*, denotada por Hz. Esta é a unidade de frequência no SI. Logo, dizemos que nossa frequência do exemplo é de $0{,}5\, Hz$.

Em alguns lugares aparece o termo “cada volta” é chamado de *rotação.* Por isso encontramos em alguns lugares o termo rps (rotações por segundo), outro nome para unidade hertz.

Diante da definição de período e de frequência, podemos encontrar uma relação entre as duas grandezas, por uma regra de três simples e direta:

nº de voltas		Intervalo de tempo
1	-	**T**
f	-	**1**

$$1 \cdot 1 = f \cdot t \therefore \boxed{f = \frac{1}{T}} \text{ ou } \boxed{T = \frac{1}{f}}$$

Essa relação é extremamente importante no estudo de movimentos periódicos. No exemplo anterior, para uma frequência de $0{,}5\ Hz$, o período é de: $T = \frac{1}{0{,}5} = 2\ s$.

Apesar da unidade de frequência ser hertz (Hz), é comum aparecer a unidade rotações por minuto (rpm). A relação entre as unidades é dada por:

$$1rpm = 1\frac{rotação}{minuto} = 1\frac{rotação}{60\ s} = \frac{1}{60}Hz$$

$$\boxed{\begin{array}{c} Hz \xrightarrow{\times 60} rpm \\ rpm \xrightarrow{\div 60} Hz \end{array}}$$

Com isso, podemos relacionar período e frequência com as velocidades do ponto material no MCU. Para uma volta completa, o espaço angular do móvel foi de 2π e o intervalo de tempo corresponde ao período T. Logo:

$\Delta\varphi = 2\pi$ e $\Delta t = T$

Portanto, podemos escrever a velocidade angular em função do período ou em função da frequência:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}} \text{ ou } \boxed{\omega = 2\pi f}$$

Como $v = \omega . R$, podemos escrever a velocidade linear como:

$$\boxed{v = \frac{2\pi R}{T}} \text{ ou } \boxed{\omega = 2\pi f R}$$

4.2.2. Função horária do espaço angular

Considere um móvel realizando um MCU, no sentido anti-horário, como visto abaixo:

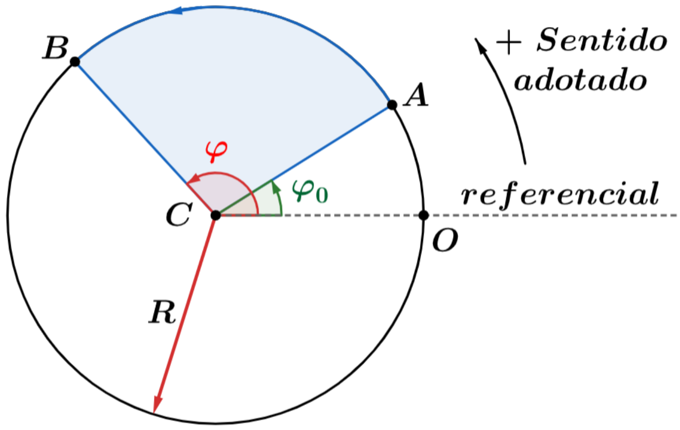


Figura 33: Representação de uma partícula realizando um MCU entre A e B.

Como característica deste movimento, a velocidade escalar linear é constante, portanto, como $\omega_m = \frac{v_m}{R}$, concluímos que a velocidade escalar angular também é constante, logo:

$$\omega = \omega_m \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}$$

Se no instante t_0 (início do movimento) o ponto material está no espaço angular φ_0 e, em um instante qualquer t, o ponto material tem espaço angular φ, então:

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 \text{ e } \Delta t = t - t_0$$

Portanto:

$$\omega = \frac{\varphi - \varphi_0}{t - t_0} \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega(t - t_0)}$$

Para simplificar a expressão, vamos começar a contabilizar o início do movimento na origem dos tempos, isto é, $t_0 = 0$, temos que:

$$\boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega.t}$$

Como esperado, a função horária do espaço angular no MCU é uma expressão do primeiro grau em t, onde:

- φ_0 é o espaço angular inicial quando $t = 0$.
- ω é a velocidade escalar angular instantânea ($\omega \neq 0$).
- φ_0 e ω são valores constantes.

De imediato, como $\omega_m = \omega$, dizemos que a velocidade escalar angular não varia, ou seja, dizemos que neste movimento não existe aceleração escalar angular ($\gamma = 0$).

Outra forma de obter a função horária do espaço angular é dividir a função horária do espaço linear pelo raio da circunferência onde o móvel descreve o MCU:

$$s = s_0 + v.t \xrightarrow{\div R} \frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v}{R}.t \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega.t}$$

10)

Um corpo em movimento circular tem frequência de 500 rpm. Se a trajetória tem 20 cm de raio, calcule:

a) a frequência em hertz. b) o período em segundos.
c) a velocidade angular. d) a velocidade linear.

Comentários:

a) Basta transformar a unidade da frequência: $f = \frac{500}{60} = \frac{25}{3} = 8{,}33\ Hz$.

b) O período é o inverso da frequência: $T = \frac{1}{f} = \frac{3}{25} = 0{,}12\ s$.

c) Podemos calcular a velocidade angular a partir da frequência:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi.\frac{25}{3} = \frac{50\pi}{3}\ rad/s$$

d) Para chegarmos à velocidade linear, basta lembrarmos da relação entre as velocidades:

$$v = \omega.r = \frac{50\pi}{3}.20 = \frac{1000\pi}{3}\ cm/s$$

4.3. Movimento circular uniformemente variado (MCUV)

O movimento circular uniformemente variado tem como característica a aceleração angular instantânea coincidir com a aceleração angular média:

$$\boxed{\gamma = \gamma_m}$$

Para um móvel realizando um movimento circular, conforme a figura x, podemos escrever as equações do móvel da seguinte forma:

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2};\ v = v_0 + a.t;\ v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s$$

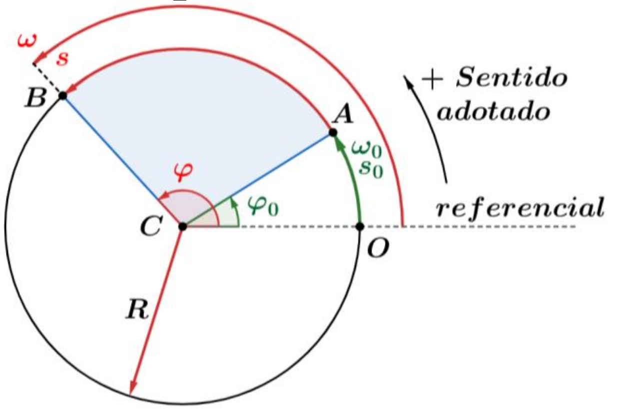


Figura 34: Representação de uma partícula realizando um MCUV entre os pontos A e B.

Como visto anteriormente, podemos pegar cada expressão e dividir pelo raio da circunferência descrita pelo móvel:

$$\frac{s}{R} = \frac{s_0}{R} + \frac{v_0}{R}.t + \frac{1}{2}.\frac{a}{R}.t^2 \Rightarrow \boxed{\varphi = \varphi_0 + \omega_0.t + \frac{\gamma.t^2}{2}}$$

$$\frac{v}{R} = \frac{v_0}{R} + \frac{a}{R}.t \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0 + \gamma.t}$$

$$\frac{v^2}{R^2} = \frac{v_0^2}{R^2} + 2.\frac{a}{R}.\frac{\Delta s}{R} \Rightarrow \boxed{\omega^2 = \omega_0^2 + 2.\gamma.\Delta\varphi}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{a}{R}} \text{ ou } \boxed{a = \gamma.R}$$

Como podemos notar, o MCUV é movimento não periódico, pois a aceleração linear não-nula, por isso, cada volta é realizada em um intervalo de tempo diferente da outra, não sendo possível definir período ou frequência para esse movimento.

Para análise de gráficos, a teoria abordada no MRU pode ser aplicada ao MCU, enquanto a teoria abordada no MRUV pode ser aplicada ao MCUV, pois, devido as características dos movimentos circulares, basta apenas dividir a grandeza escalar linear pelo raio da circunferência para chegar à grandeza escalar angular. Portanto, basta substituir s por φ, v por ω e a por γ.

4.4. Transmissão de movimento circular

4.4.1. Correia comum a duas rodas ou por contato direto.

É comum utilizar a transmissão de movimentos para fins de amplificar ou reduzir uma grandeza física. O exemplo mais comum nas nossas vidas está em uma bicicleta, onde o ciclista estabelece uma velocidade na correia dos pedais, que é transmitida por uma corrente para a correia da roda de trás. Podemos representar essa transmissão pela figura abaixo:

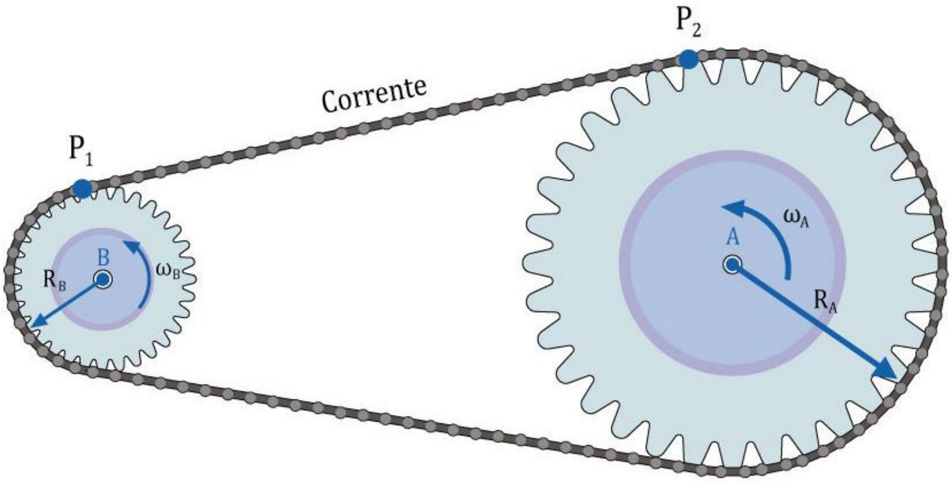


Figura 35: Transmissão de movimento entre duas coroas ligadas por uma corrente.

Se não existe escorregamento entre a corrente e as coroas, podemos dizer que a velocidade linear das duas coroas é igual a velocidade da corrente, ou seja, a velocidade linear é a mesma em qualquer ponto da corrente. Portanto:

$$\boxed{v_{P_1} = v_{P_2}}$$

Dessa forma, podemos encontrar uma relação para as velocidades angulares e as frequências para este conjunto:

$$v_{P_1} = v_{P_2} \Rightarrow \boxed{\omega_B . R_B = \omega_A . R_A}$$

Como $\omega = 2\pi f$, então: $2\pi f_B . R_B = 2\pi f_A . R_A \Rightarrow \boxed{f_B . R_B = f_A . R_A}$. Assim, podemos concluir que se $R_A > R_B$, então $\omega_A < \omega_B$ e $f_A < f_B$. De forma análoga, podemos chegar as mesmas conclusões para o caso das coroas (ou engrenagem) em contato direto:

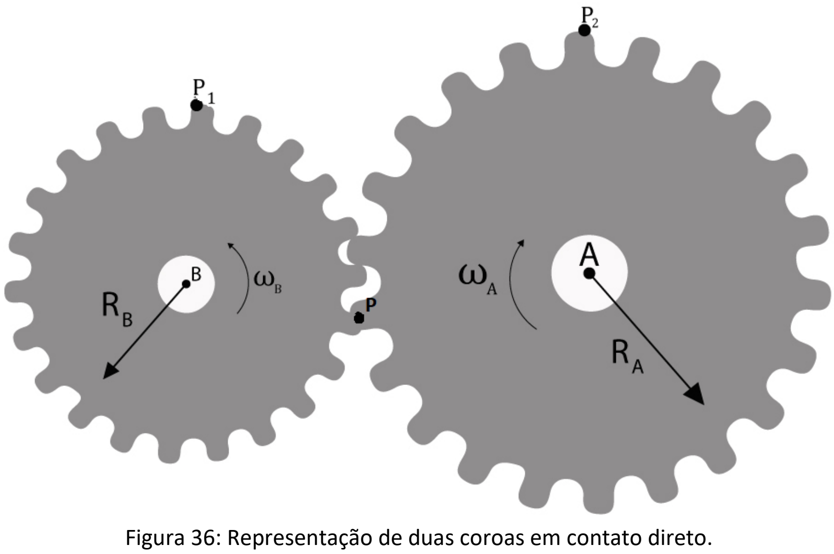


Figura 36: Representação de duas coroas em contato direto.

Caso não haja escorregamento e como as duas coroas se encontram em um ponto em comum, a velocidade linear das duas coroas deve ser a mesma: $\boxed{v_P = v_{P_1} = v_{P_2}}$.

Então: $\boxed{\omega_B . R_B = \omega_A . R_A}$ e $\boxed{f_B . R_B = f_A . R_A}$. Novamente, podemos concluir que se $R_A > R_B$, então: $\omega_A < \omega_B$ e $f_A < f_B$. Caso o móvel esteja realizando um MCUV:

$$\boxed{a_A = a_B} \text{ e } \boxed{\gamma_A . R_A = \gamma_B . R_B}$$

4.4.2. Engrenagens com mesmo eixo de rotação

Considerando a transmissão entre duas engrenagens ligadas por um mesmo eixo, como na figura a seguir:

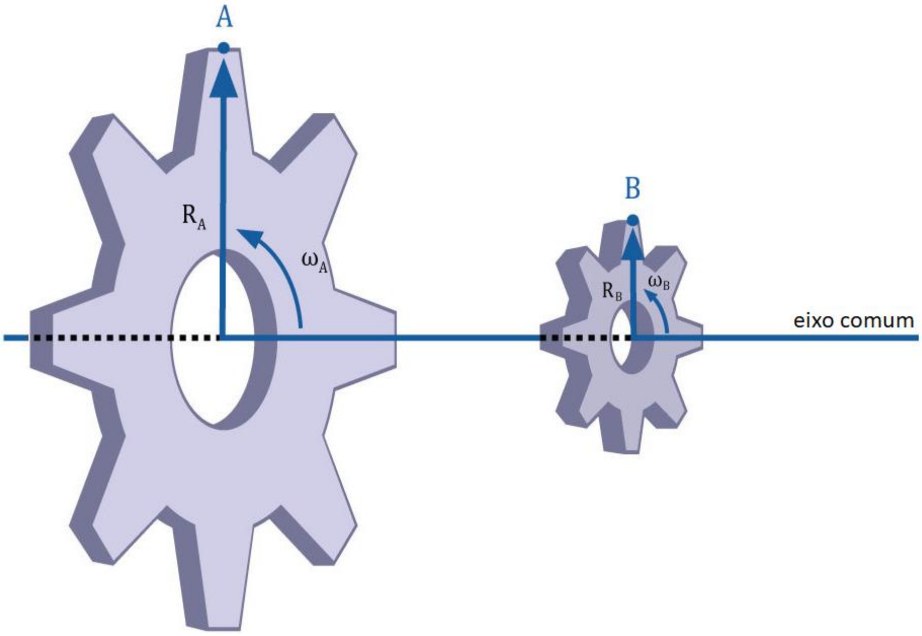


Figura 37: Representação de duas engrenagens com o mesmo eixo de rotação.

Nesse caso, podemos ver que está amarrada a variação angular de cada coroa, isto é, se pegarmos um ponto na coroa B, sua projeção na coroa A terá a mesma variação angular. Dessa forma, podemos deduzir que: $\boxed{\Delta\varphi_B = \Delta\varphi_A}$.

Assim, as velocidades angulares e as frequências serão as mesmas: $\Delta\varphi_A = \Delta\varphi_B \Rightarrow \omega_A.\Delta t = \omega_B.\Delta t \Rightarrow \boxed{\omega_A = \omega_B}$. Como $\omega = 2\pi f$, temos que: $\omega_A = \omega_B \Rightarrow 2\pi f_A = 2\pi f_B \Rightarrow \boxed{f_A = f_B}$. Para velocidades lineares, encontramos que:

$$\omega_A = \omega_B \Rightarrow \boxed{\frac{v_A}{R_A} = \frac{v_B}{R_B}}$$

Concluímos que se $R_A > R_B$, então: $v_A > v_B$. Caso o móvel esteja realizando um MCUV: $\boxed{\gamma_A = \gamma_B}$ e $\boxed{\frac{a_A}{R_A} = \frac{a_B}{R_B}}$. Até aqui, deduzimos todas as equações para o caso de transmissão no MCU. Entretanto, toda análise feita é válida para qualquer tipo de movimento circular.

ESCLARECENDO!

11)
Dois discos fixados a um mesmo eixo, que gira com frequência igual a f. A distância entre os discos é d. Um projétil é disparado, em uma linha paralela ao eixo, com uma velocidade v_p, perfurando os dois discos de tal forma que o ângulo formado pelo eixo comum com o furo do primeiro disco e o plano formado pelo eixo comum com o furo do segundo disco é φ. Calcule a velocidade do projétil.
Comentários:

Inicialmente, vamos calcular o tempo que o projétil gasta para percorrer a distância entre os dois discos: $\Delta t = \frac{d}{v_p}$. Nesse intervalo de tempo, o eixo teve uma variação angular de φ, logo:

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \Rightarrow 2\pi f = \frac{\varphi}{\Delta t} \Rightarrow 2\pi f = \frac{\varphi}{\frac{d}{v_p}} \Rightarrow \boxed{v_p = \frac{2\pi f d}{\varphi}}$$

5. Lista de exercícios

1. (ITA)

Um avião a jato passa sobre um observador, em voo horizontal. Quando ele está exatamente na vertical que passa pelo observador, o som parece vir de um ponto atrás do avião, numa direção inclinada 30º com a vertical. Sendo v_s a velocidade do som, calcule a velocidade escalar do avião.

2. (ITA-2016)

No sistema de sinalização de trânsito urbano chamado de “onda verde”, há semáforos com dispositivos eletrônicos que indicam a velocidade a ser mantida pelo motorista para alcançar o próximo sinal ainda aberto. Considere que de início o painel indique uma velocidade de 45 km/h. Alguns segundos depois ela passa para 50 km/h e, finalmente, para 60 km/h. Sabendo que a indicação de 50 km/h no painel demora 8,0 s antes de mudar para 60 km/h, então a distância entre os semáforos é de:

a) $1{,}0 \times 10^{-1}$ km. b) $2{,}0 \times 10^{-1}$ km. c) $4{,}0 \times 10^{-1}$ km.
d) $1{,}0$ km. e) $1{,}2$ km.

3. (Problemas selecionados de Física Elementar)

Um engenheiro trabalha numa fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente, ao chegar à última estação ferroviária, um carro da fábrica transporta-o para o local de trabalho. Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e sem esperar o carro foi a pé até o local de trabalho. No caminho encontrou-se com o carro e chegou à fábrica 10 min antes do horário habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro? Resolva graficamente.

4. (ITA – 88 modificada)

Três turistas, que possuem bicicleta, devem chegar ao centro turístico o menor espaço de tempo) o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar duas pessoas e por isso o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontre a velocidade média dos turistas, sendo a velocidade do que vai a pé $v_1 = 4\ km/h$ e a do ciclista $v_2 = 20\ km/h$.

5. (ITA – 1996)

Um automóvel a 90 km/h passa por um guarda num local que a velocidade máxima é 60 km/h. O guarda começou a perseguir o infrator com sua motocicleta, mantendo aceleração constante até que atinge 108 km/h em 10 s e continua com essa velocidade até alcançá-lo, quando lhe faz parar. Pode-se afirmar que:

a) o guarda levou 5 s para alcançar o carro.

b) o guarda levou 60 s para alcançar o carro.

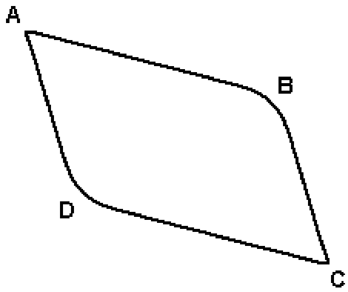
c) a velocidade do guarda ao alcançar o carro era de 25m/s.

d) o guarda percorreu 750m desce que saiu em perseguição até alcançar o motorista infrator.

e) nenhuma das respostas acima é correta.

6. (ITA – 1997)

No arranjo mostrado a seguir, do ponto A largamos com velocidade nula duas pequenas bolas que se moverão sob a influência da gravidade em um plano vertical, sem rolamento ou atrito, uma pelo trecho ABC e a outra pelo trecho ADC. As partes AD e BC dos trechos são paralelas e as partes AB e DC também. Os vértices B de ABC e D de ADC são suavemente arredondados para que cada bola não sofra uma brusca mudança na sua trajetória.



a) A bola que se move pelo trecho ABC chega ao ponto C primeiro.

b) A bola que se move pelo trecho ADC chega ao ponto C primeiro.

c) As duas bolas chegam juntas ao ponto C.

d) A bola de maior massa chega primeiro (e se tiverem a mesma massa, chegam juntas).

e) É necessário saber as massas das bolas e os ângulos relativos à vertical de cada parte dos trechos para responder.

7. (ITA-2001)

Uma partícula, partindo do repouso, percorre, no intervalo de tempo t, uma distância D. Nos intervalos de tempo seguintes, todos iguais a t, as respectivas distâncias percorridas são iguais a 3D, 5D, 7D, etc. A respeito desse movimento pode-se afirmar que:

a) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento cresce exponencialmente com o tempo.

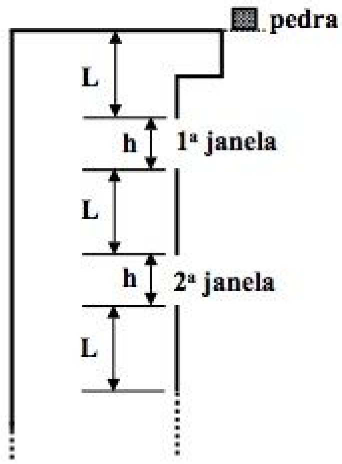
b) a velocidade da partícula cresce exponencialmente com o tempo.

c) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.

d) a velocidade da partícula é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.

e) nenhuma das opções acima está correta.

8. (ITA – 2003)



A partir do repouso, uma pedra é deixada cair da borda no alto de um edifício. A figura mostra a disposição das janelas, com as pertinentes alturas **h** e distâncias **L** que se repetem igualmente para as demais janelas, até o térreo. Se a pedra percorre a altura **h** da primeira janela em **t** segundos, quanto tempo levará para percorrer, em segundas, a mesma altura **h** da quarta janela? (despreze a resistência do ar)

a) $[(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})/(\sqrt{2L+2h}-\sqrt{2L+h})\ ]t.$

b) $[(\sqrt{2L+2h}-\sqrt{2L+h})/(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})]t.$

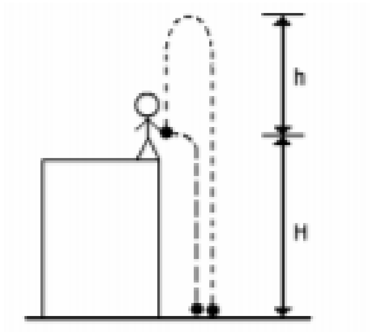
c) $[\left(\sqrt{4(L+h)}-\sqrt{3(L+h)+L}\right)/(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})]t.$

d) $[\left(\sqrt{4(L+h)}-\sqrt{3(L+h)+L}\right)/(\sqrt{2L+2h}-\sqrt{2L+h})]t.$

e) $[\left(\sqrt{3(L+h)}-\sqrt{2(L+h)+L}\right)/(\sqrt{L+h}-\sqrt{L})]t.$

9. (ITA – 2006)

Á borda de um precipício de um certo planeta, no qual se pode desprezar a resistência do ar, um astronauta mede o tempo t_1 que uma pedra leva para atingir o solo, após deixada cair de uma altura H. A seguir, ele mede o tempo t_2 que uma pedra também leva para atingir o solo, após ser lançada para cima até uma altura h. Calcule a altura H em função $t_1, t_2\ e\ h$.



10. (ITA – 2016)

A partir do repouso, um foguete de brinquedo é lançado verticalmente do chão, mantendo uma aceleração constante de $5{,}00\ m/s^2$durante os 10,0 primeiros segundos. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima atingida pelo foguete e o tempo total de sua permanência no ar são?

a) 375 m e 23,7 s.
b) 375 m e 30,0 s.
c) 375 m e 34,1 s.
d) 500 m e 23,7 s.
e) 500 m e 34,1 s.

11. (ITA – 2005)

Um avião de vigilância aérea está voando a uma altura de 5,0 km, com velocidade de $50\sqrt{10}\ m/s$ no rumo norte, e capta no radiogoniômetro um sinal de socorro vindo da direção noroeste, de um ponto fixo no solo. O piloto então liga o sistema de pós-combustão da turbina, imprimindo uma aceleração constante de $6{,}0\ m/s^2$. Após $\frac{40\sqrt{10}}{3}\ s$, mantendo a mesma direção, ele agora constata que o sinal está chegando da direção oeste. Neste instante, em relação ao avião, o transmissor do sinal se encontra a uma distância de:

a) 5,2 km. b) 6,7 km. c) 12 km. d) 13 km. e) 28 km.

12. (ITA 2002)

Billy sonha que embarcou em uma nave espacial para viajar até o distante planeta Gama, situado a10,0 anos-luz da terra. Metade do percurso foi percorrida com aceleração de 15m/s², e o restante com desaceleração da mesma magnitude. Desprezando a atração gravitacional e efeitos relativos, estime o tempo total em meses de ida e volta da viagem do sonho de Billy, justifique sua resposta.

13. (ITA – 2009)

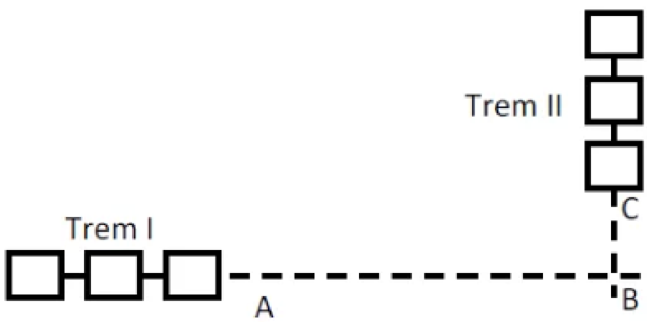
Dentro de um elevador em queda livre num campo gravitacional g, uma bola é jogada para baixo com velocidade v de uma altura h. Assinale o tempo previsto para a bola atingir o piso do elevador.

a) $t = \frac{v}{g}$ b) $t = \frac{h}{v}$ c) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

d) $t = \frac{\sqrt{v^2+2gh}-v}{g}$ e) $t = \frac{\sqrt{v^2-2gh}-v}{g}$

14. (IME)

O trem I desloca-se em linha reta, com velocidade constante de 54 km/h, aproximando-se do ponto B, como mostra a figura. Determine quanto tempo após a locomotiva do trem atingir o ponto A, deve o trem II partir do repouso em C, com aceleração constante de 0,2 m/s² de forma que, 10 segundos após terminar sua passagem pelo ponto B o trem I inicie no mesmo ponto.



NOTAS:

1) Ambos os trens medem 100 metros de comprimento, incluindo suas locomotivas, que viajam à frente.

2) As distâncias ao ponto B são:

AB = 3.000 m

CB = 710 m

15. (IME – 1988)

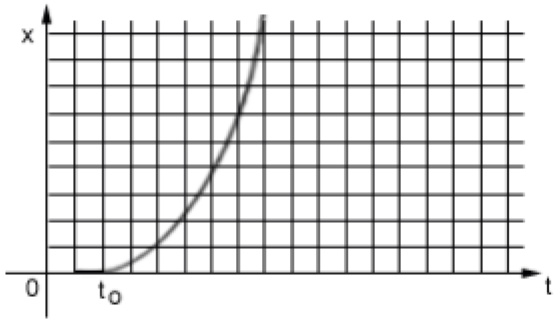
Um elevador parte do repouso e sobe com aceleração constante igual a $2m/s^2$ em relação a um observador fixo, localizado fora do elevador. Quando sua velocidade atinge o valor $v = 6\ m/s$, uma pessoa que está dentro do elevador larga um pacote de uma altura $h = 2{,}16\ m$, em relação ao piso do elevador. Considerando que o elevador continue em seu movimento acelerado ascendente, determine para o observador fixo e para o localizado no interior do elevador:

a) o tempo de queda;

b) o espaço total percorrido pelo pacote até que este encontre o piso do elevador.
Obs: considere $g = 10 m/s^2$.

16. (ITA-1972)

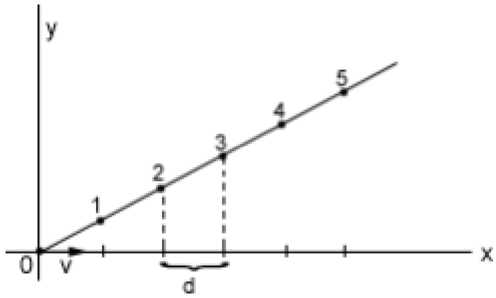
Um móvel descreve uma trajetória retilínea tendo seu espaço x em função do tempo t descrito pelo gráfico. Sendo k e b constantes, o espaço x poderá ser expresso analiticamente por:



a) $x = k(t - t_0)$.
b) $x = kt^2$.
c) $x = k(t + t_0)^2$.
d) $x = k(t - t_0)^2$.
e) $x = k\cos(bt)$.

17. (ITA-1974)

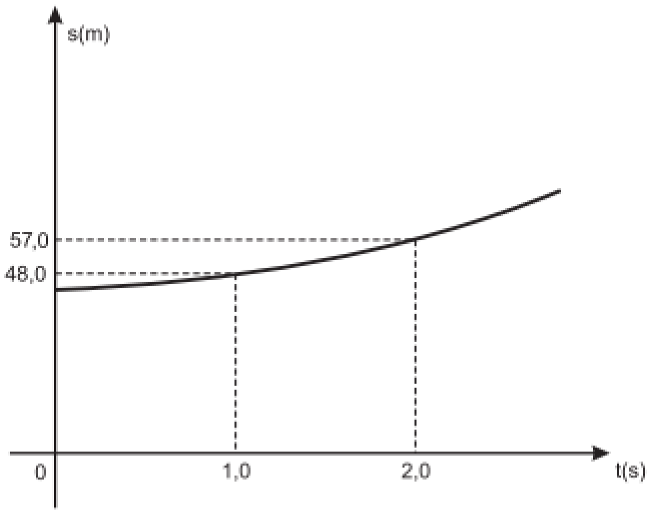
Cinco bolinhas de aço estão presas por eletroímãs ao longo de uma reta r, de equação $y = kx$. As bolas estão em posições equidistantes tais que $d = 0{,}5\, m$. Uma bolinha O parte da origem ao longo de x (mesa horizontal sem atrito) com velocidade $v = 2\, m/s$, constante, no mesmo instante em que todas as outras são desligadas dos eletroímãs. Assinale o valor de k tal que O se choque com a bola número 4. Adote $g = 10\, m/s^2$.



a) 0,62.
b) 1,25.
c) 1,87.
d) 2,50.
e) 3,12.

18. (ITA – 1977)

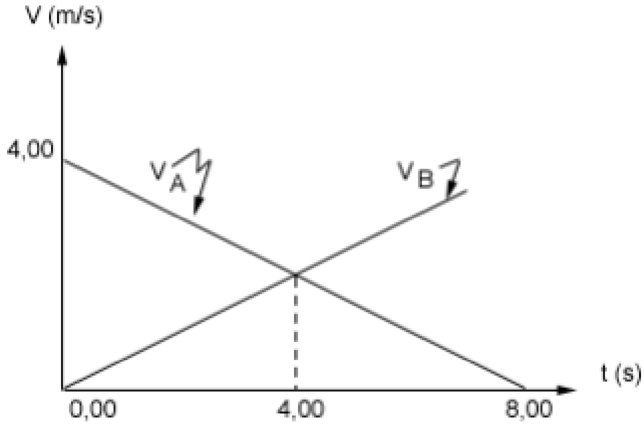
A curva da figura a seguir é a representação gráfica da equação horária de um movimento retilíneo. Ela é constituída por um trecho de um ramo de parábola cujo vértice está localizado no eixo dos espaços. Neste movimento:



a) a velocidade inicial é nula e a aceleração escalar vale – $6{,}0\, m\,.\,s^{-2}$.
b) a velocidade inicial é de $48\, m\,.\,s^{-1}$ e a aceleração escalar é de $6{,}0\, m\,.\,s^{-2}$.
c) a aceleração escalar é de $39\, m\,.\,s^{-2}$.
d) a velocidade escalar média no intervalo de zero a $2{,}0\, s$ é de $9{,}0\, m\,.\,s^{-1}$.
e) o espaço inicial vale $45\, m$, a velocidade escalar inicial é nula, e a aceleração escalar é de +6,0 m/s².

19. (ITA-1981)

Dois móveis, A e B, percorrem a mesma reta, no mesmo sentido, de tal maneira que, no instante $t = 0{,}00\, s$ a distância entre eles é de $10{,}0\, m$. Os gráficos de suas velocidades são mostrados na figura. Sabe-se que os móveis passam um pelo outro num certo instante $t_E > 0$, no qual a velocidade de B em relação à de A tem um certo valor v_{BA}. Podemos concluir que:

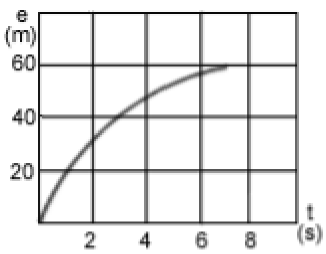


a) $t_E = 8{,}00\, s$ e $v_{BA} = 4{,}00\, m.s^{-1}$.
b) $t_E = 4{,}00\, s$ e $v_{BA} = 0{,}00\, m.s^{-1}$.
c) $t_E = 10{,}00\, s$ e $v_{BA} = 6{,}00\, m.s^{-1}$.
d) O problema como foi proposto não tem solução.
e) $t_E = 8{,}00\, s$ e $v_{BA} = 4{,}00\, m.s^{-1}$.

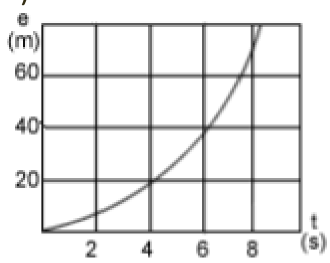
20. (ITA-1989)

Os gráficos representam possíveis movimentos retilíneos de um corpo, com e = espaço percorrido e t = tempo de percurso. Em qual deles é maior a velocidade média entre os instantes $t_1 = 5\, s$ e $t_2 = 7\, s$?

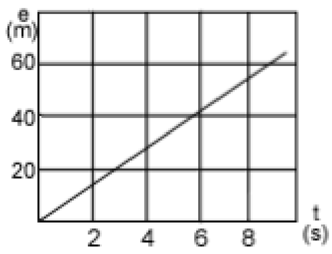
a)



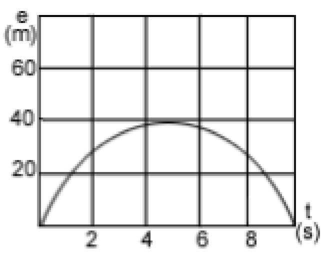
b)



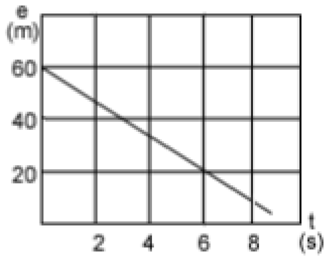
c)



d)

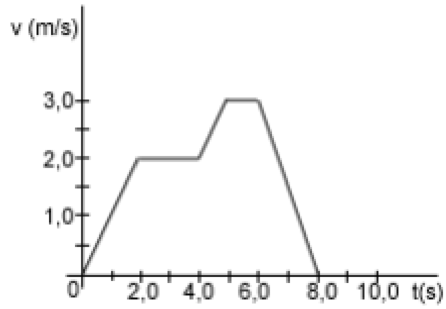


e)



21. (ITA-1990)

Um corpo em movimento retilíneo e uniforme tem sua velocidade em função do tempo dada pelo gráfico:



Neste caso pode-se afirmar que:

a) A velocidade média entre t = 4 s e t = 8 s é de 2,0 m/s.
b) A distância percorrida entre t = 0 e t = 4 s é de 10 m.
c) Se a massa do corpo é de 2,0 kg, a resultante das forças que atuam sobre ele entre t = 0 e t = 2 s é de 0,5 N.
d) A aceleração média entre t = 0 e t = 8 s é de 2,0 m/s2.

e) Todas as afirmativas acima estão erradas.

22. (ITA-1972)

No movimento circular e uniforme de uma partícula, considerando-se como vetores as grandezas físicas envolvidas, podemos afirmar que:

a) Força, aceleração, velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
b) Aceleração, velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
c) Velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
d) Velocidade angular é constante.
e) Nenhuma das grandezas é constante.

23. (ITA-1985)

Uma roda de bicicleta tem raio de 25 cm. Em 5 s o ciclista alcança a velocidade de 10 m/s. A aceleração angular da roda, suposta constante, é:

a) $20\ rad/s^2$. b) $0{,}08\ rad/s^2$. c) $2\ rad/s^2$.
d) $8\ rad/s^2$. e) $0{,}5\ rad/s^2$.

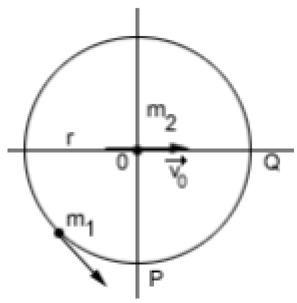
24. (ITA-1988)

Um disco gira, em torno de seu eixo, sujeito a um torque constante (aceleração linear constante). Determinando-se a velocidade angular média entre os instantes $t = 2{,}0\ s$ e $t = 6{,}0\ s$, obteve-se $10\ rad/s$, e, entre os instantes $t = 10\ s$ e $t = 18\ s$, obteve-se $5{,}0\ rad/s$. A velocidade angular inicial ω_0 (em rad/s), e a aceleração angular (em rad/s^2) valem, respectivamente:

a) 12 e -0,5. b) 15 e -0,5. c) 20 e 0,5.
d) 20 e -2,5. e) 35 e 2,5.

25. (ITA-1989)

Num plano horizontal, sem atrito, uma partícula m_1 move-se com movimento circular uniforme de velocidade angular ω. Ao passar pelo ponto P, outra partícula, m_2, é lançada do ponto O com velocidade $\vec{v}$. Qual é o módulo de $\overrightarrow{v_0}$ para que m_1 e m_2 colidam em Q?



a) $2\pi.r.\omega$ b) $\frac{2\omega}{\pi r}$ c) $\frac{2r\omega}{\pi}$
d) $\frac{r\omega}{\pi}$ e)$\pi.r.\omega$

26. (ITA-1991)

Considere dois carros que estejam participando de uma corrida. O carro A consegue realizar cada volta em 80 s enquanto o carro B é 5,0% mais lento. O carro A é forçado a uma parada nos boxes ao completar a volta de número 6. Incluindo aceleração, desaceleração e reparos, o carro A perde 135 s. Qual deve ser o número mínimo de voltas completas da corrida para que o carro A possa vencer?

a) 28. b) 27. c) 33.
d) 34. e) Nenhuma das alternativas anteriores.

27. (ITA-2001)

Uma partícula move-se ao longo de uma circunferência circunscrita em um quadrado de lado L, com velocidade angular constante. Na circunferência inscrita nesse quadrado, outra partícula move-se com a mesma velocidade angular. A razão entre os módulos das respectivas velocidades tangenciais dessas partículas é:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

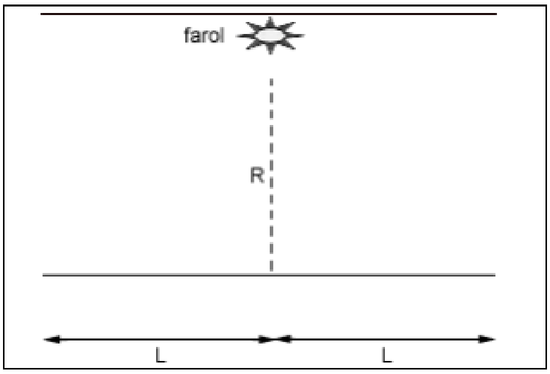
28. (ITA-2001)

No sistema convencional de tração de bicicletas, o ciclista impele os pedais, cujo eixo movimenta a roda dentada (coroa) a ele solidária. Esta, por sua vez, aciona a corrente responsável pela transmissão do movimento à outra roda dentada (catraca), acoplada ao eixo traseiro da bicicleta. Considere agora um sistema duplo de tração, com 2 coroas, de raios R1 e R2 (R1< R2) e duas catracas de raios R3 e R4 (R3 < R4), respectivamente. Obviamente, a corrente só toca uma coroa e uma catraca de cada vez, conforme o comando da alavanca de câmbio. A combinação que permite a máxima velocidade da bicicleta, para uma velocidade angular dos pedais fixa, é:

a) Coroa R1 e catraca R3. b) Coroa R1 e catraca R4.
c) Coroa R2 e catraca R3. d) Coroa R2 e catraca R4.
e) Indeterminada já que não se conhece o diâmetro da roda traseira da bicicleta.

29. (ITA-2001)

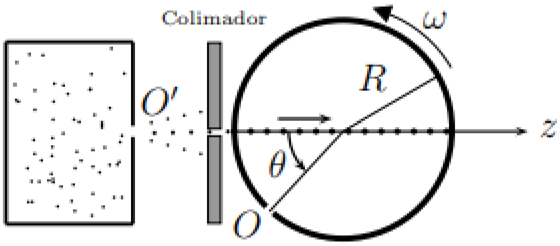
Em um farol de sinalização, o feixe de luz acoplado a um mecanismo rotativo realiza uma volta completa a cada T segundos. O farol se encontra a uma distância R do centro de uma praia de comprimento 2L, conforme a figura. O tempo necessário para o feixe de luz "varrer" a praia, em cada volta, é:



a) $arctg\left(\frac{L}{R}\right).\frac{T}{2\pi}$ b) $arctg\left(\frac{2L}{R}\right).\frac{T}{2\pi}$
c) $arctg\left(\frac{L}{R}\right).\frac{T}{\pi}$ d) $arctg\left(\frac{L}{2R}\right).\frac{T}{2\pi}$
e) $arctg\left(\frac{L}{R}\right).\frac{2T}{\pi}$

30. (ITA - 2013)

Um dispositivo é usado para determinar a distribuição de velocidades de um gás. Em $t = 0$, com os orifícios O' e O alinhados no eixo z, moléculas ejetadas de O', após passar por um colimador, penetram no orifício O do tambor de raio interno R, que gira com velocidade angular constante ω. Considere, por simplificação, que neste instante inicial ($t = 0$) as moléculas em movimento encontram-se agrupadas em torno do centro do orifício O. Enquanto o tambor gira, conforme mostra a figura, tais moléculas movem-se horizontalmente no interior deste ao longo da direção do eixo z, cada qual com sua própria velocidade, sendo paulatinamente depositadas na superfície interna do tambor no final de seus percursos. Nestas condições, obtenha em função do ângulo θ a expressão para $v - v_{min}$, em que v é a velocidade da molécula depositada correspondente ao giro θ do tambor



e v_{min} é a menor velocidade possível para que as moléculas sejam depositadas durante a primeira volta deste.

6. Gabarito sem comentários

1) $v_{avião} = \frac{v_S}{2}$
2) D
3) 55 min
4) 10 km/h
5) D
6) B
7) C
8) C
9) $H = \frac{4t_1^2 . t_2^2}{(t_2^2 - t_1^2)^2} . h$
10) A
11) D
12) 122,5 meses
13) B
14) 100 s
15) a) 0,6 s b) 1,80 m e 2,16 m
16) D
17) D
18) E
19) D
20) B
21) E
22) D
23) D
24) A
25) C
26) C
27) A
28) C
29) C
30) $R\omega\left(\frac{2}{\theta + 2k\pi} - \frac{1}{\pi}\right)$

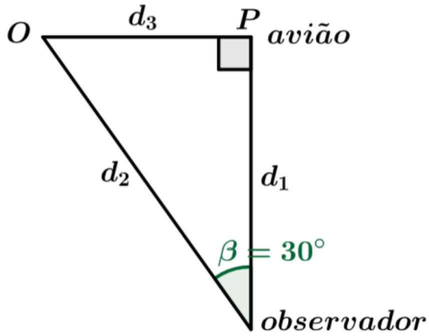
7. lista de exercícios comentada

1. (ITA)

Um avião a jato passa sobre um observador, em voo horizontal. Quando ele está exatamente na vertical que passa pelo observador, o som parece vir de um ponto atrás do avião, numa direção inclinada 30º com a vertical. Sendo v_s a velocidade do som, calcule a velocidade escalar do avião.

Comentários:

Vamos fazer um desenho esquemático para representar o problema:



O tempo que o som leva quando o avião está em O até chegar ao observador é o mesmo tempo que o avião leva para ir de O para P. Portanto:

$$t_{avião_{O\to P}} = t_{som\ O\to observador} \Rightarrow \frac{d_3}{v_{avião}} = \frac{d_2}{v_s}$$

Da geometria do problema, temos que: $sen(30°) = \frac{1}{2} = \frac{d_3}{d_2}$. Logo, temos que:

$$v_{avião} = \left(\frac{d_3}{d_2}\right).v_s \Rightarrow \boxed{v_{avião} = \frac{v_s}{2}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{v_{avião} = \frac{v_s}{2}}$

---

2. (ITA-2016)

No sistema de sinalização de trânsito urbano chamado de "onda verde", há semáforos com dispositivos eletrônicos que indicam a velocidade a ser mantida pelo motorista para alcançar o próximo sinal ainda aberto. Considere que de início o painel indique uma velocidade de 45 km/h. Alguns segundos depois ela passa para 50 km/h e, finalmente, para 60 km/h. Sabendo que a indicação de 50 km/h no painel demora 8,0 s antes de mudar para 60 km/h, então a distância entre os semáforos é de:

a) $1{,}0 \times 10^{-1}$ km.
b) $2{,}0 \times 10^{-1}$ km.
c) $4{,}0 \times 10^{-1}$ km.
d) $1{,}0$ km.
e) $1{,}2$ km.

Comentários:

Considere que um primeiro carro vai do primeiro para o segundo semáforo com velocidade de 45 km/h. Então, podemos dizer que a distância entre os semáforos será:

$$d = 45.T \ \ (1)$$

Um segundo carro, andando a 50 km/h passa pelo primeiro semáforo (indicação do painel) e dentro de 8 segundos o painel alterará sua velocidade para 60 km/h. Portanto, o segundo carro terá $T - \frac{8}{3600}$ para percorrer a mesma distância com velocidade de 50 km/h. Então, podemos escrever a distância percorrida pelo segundo carro:

$$d = 50.\left(T - \frac{8}{3600}\right) \ \ (2)$$

Isolando T em (1) e substituindo em (2), temos:

$$d = 50.\left(\frac{d}{45} - \frac{8}{3600}\right) \Rightarrow d.\frac{50}{45} - d = \frac{50.8}{3600} \Rightarrow d.\frac{5}{45} = \frac{50.8}{3600} \Rightarrow \boxed{d = 1\ km}$$

Gabarito: D

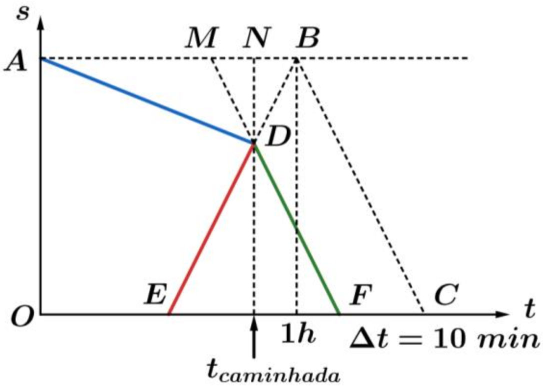
3. **(Problemas selecionados de Física Elementar)**

Um engenheiro trabalha numa fábrica, que fica nos arredores da cidade. Diariamente, ao chegar à última estação ferroviária, um carro da fábrica transporta-o para o local de trabalho. Certa vez, o engenheiro chegou à estação uma hora antes do habitual e sem esperar o carro foi a pé até o local de trabalho. No caminho encontrou-se com o carro e chegou à fábrica 10 min antes do horário habitual. Quanto tempo caminhou o engenheiro antes de encontrar-se com o carro? Resolva graficamente.

Comentários:

Habitualmente, o engenheiro faz seu caminho até a estação de trabalho de $A \rightarrow B$ e depois pega o carro para andar $B \rightarrow C$ até chegar na empresa na hora (h). No dia em que ele chega uma hora mais cedo na última estação, ele faz o caminho $A \rightarrow D$ a pé e depois encontra com o carro chegando no trabalho em F, 10 min antes do habitual.

O movimento comum do carro é $E \rightarrow B$, seguindo de $B \rightarrow C$. Nesse dia, o carro foi de $E \rightarrow D$, onde pegou o engenheiro e seguiu para o trabalho ($D \rightarrow F$). Assim, representamos graficamente o problema:



Pela geometria do gráfico, dizemos $t_{MB} = 10\ min$, portanto, $t_{NB} = 5\ min$. Portanto, $t_{caminhada} = 1h - 5\ min = 55\ min$. Logo, o tempo que o engenheiro caminhou foi de 55 min.

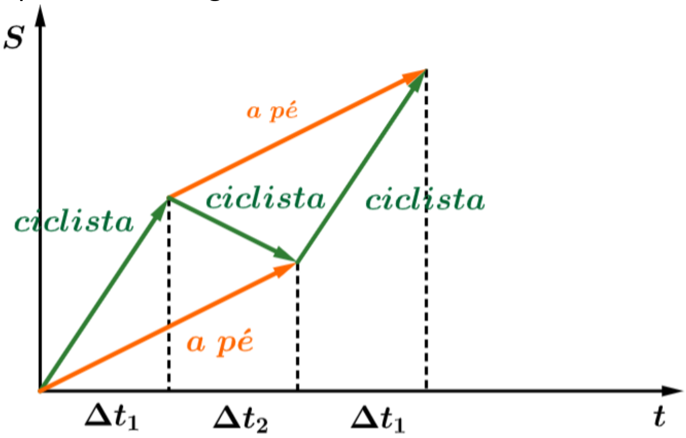
Gabarito: 55 min

4. **(ITA – 88 modificada)**

Três turistas, que possuem bicicleta, devem chegar ao centro turístico o menor espaço de tempo) o tempo conta-se até que o último turista chegue ao centro). A bicicleta pode transportar duas pessoas e por isso o terceiro turista deve ir a pé. Um ciclista leva o segundo turista até um determinado ponto do caminho, de onde este continua a andar a pé e o ciclista regressa para transportar o terceiro. Encontre a velocidade média dos turistas, sendo a velocidade do que vai a pé $v_1 = 4\ km/h$ e a do ciclista $v_2 = 20\ km/h$.

Comentários:

Para a condição de menor tempo possível, dado que o tempo conta quando até que o último turista chegue ao local de destino, os três turistas devem chegar ao mesmo tempo. Diante disso, construímos o gráfico da figura abaixo, notando que o intervalo de tempo que o ciclista usa para levar o primeiro turista é o mesmo para levar o segundo turista:



Do gráfico, vemos as seguintes relações de variação de espaço:

$$\Delta s_{total} = \boxed{v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2 \Delta t_1 = v_m(\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_1)} \quad (1)$$

Variação do espaço do ciclista levando o primeiro turista e voltando para buscar o turista indo a pé:

$$\Delta s_1 - \Delta s_2 = \Delta s_3$$

$$\boxed{v_2 \Delta t_1 - v_2 \Delta t_2 = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2)} \quad (2)$$

Isolando Δt_2 em (2) e substituindo em (1), podemos encontrar que:

$$\boxed{\Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}.\Delta t_1}$$

Então:

$$v_m = \frac{v_1\left(\Delta t_1 + \frac{v_2 - v_1}{v_1 + v_2}.\Delta t_1\right) + v_2 \Delta t_1}{2.\Delta t_1 + \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}.\Delta t_1} \Rightarrow v_m = \frac{\Delta t_1\left[v_1 + \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1} \cdot v_1 + v_2\right]}{\Delta t_1\left[2 + \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\right]}$$

Portanto:

$$\boxed{v_m = \frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1}.v_2}$$

Para o caso de $v_1 = 4\ km/h$ e $v_2 = 20\ km/h$, encontramos que $v_m = 10\ km/h$.

Gabarito: 10 km/h.

---

5. (ITA – 1996)

Um automóvel a 90 km/h passa por um guarda num local que a velocidade máxima é 60 km/h. O guarda começou a perseguir o infrator com sua motocicleta, mantendo aceleração constante até que atinge 108 km/h em 10 s e continua com essa velocidade até alcançá-lo, quando lhe faz parar. Pode-se afirmar que:

a) o guarda levou 5 s para alcançar o carro.

b) o guarda levou 60 s para alcançar o carro.

c) a velocidade do guarda ao alcançar o carro era de 25m/s.

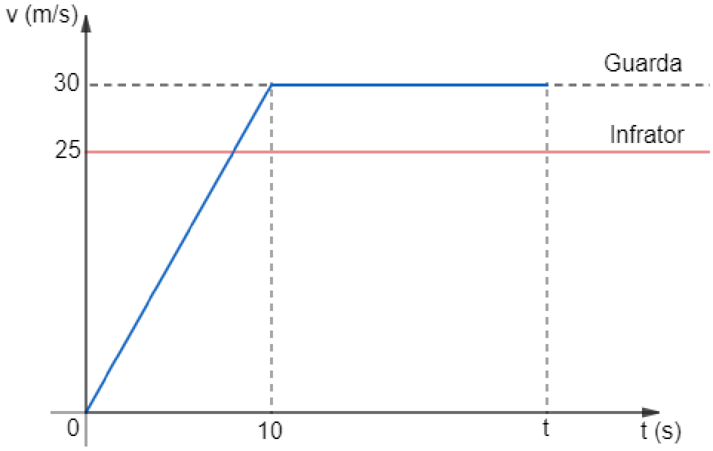
d) o guarda percorreu 750m desce que saiu em perseguição até alcançar o motorista infrator.

e) nenhuma das respostas acima é correta.

Comentários:

Considerando que o guarda começa seu movimento no instante em que o automóvel passa por ele, podemos escrever o gráfico $v \times t$ e vamos utilizar o conceito da área do gráfico $v \times t$ ser numericamente igual a variação do espaço. Atenção com as unidades! As unidades do enunciado estão em km/h, mas vamos transformá-las em m/s, como estão as respostas:

$$v_{guarda} = \frac{108}{3,6} = 30\frac{m}{s};\ v_{motorista} = \frac{90}{3,6} = 25\ m/s$$



No instante t em que o guarda alcança o motorista infrator, podemos escrever que seus espaços são iguais e ainda dizer que a variação de espaço foi a mesma pois ambos têm a mesma origem de espaço (momento em que o infrator passa pelo guarda). Logo:

$$s_{Guarda} = s_{motorista} \Rightarrow s_{Guarda} - s_0 = s_{motorista} - s_0 \Rightarrow \boxed{\Delta s_{guarda} = \Delta s_{motorista}}$$

Calculando a área abaixo de cada figura até o instante t, temos que:

$$\Delta s_{guarda} = \frac{t + (t - 10)}{2}.30 = 15(2t - 10) \Rightarrow \Delta s_{motorista} = 25.t$$

Então:

$$15(2t - 10) = 25.t \Rightarrow \boxed{t = 30\ s}$$

Dessa forma, o deslocamento do guarda é dado por:

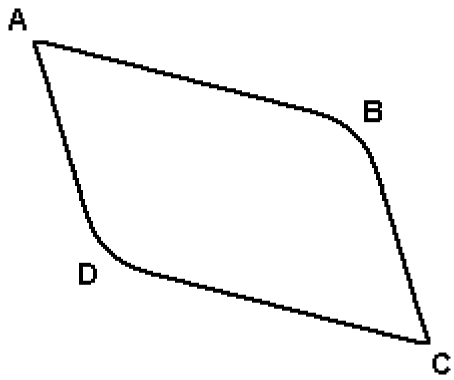
$$\Delta s_{guarda} = 25.30 \Rightarrow \boxed{\Delta s_{guarda} = 750\ m}$$

Gabarito: D

6. (ITA – 1997)

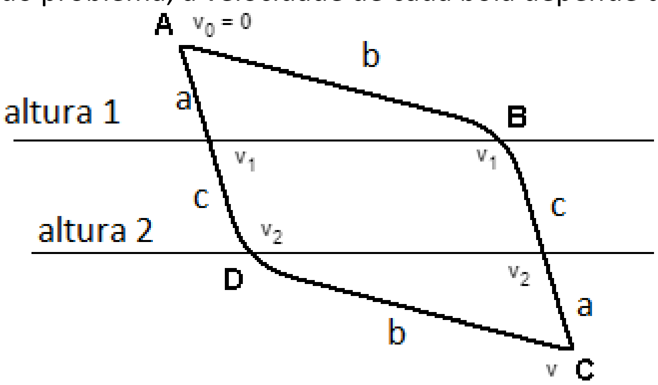
No arranjo mostrado a seguir, do ponto A largamos com velocidade nula duas pequenas bolas que se moverão sob a influência da gravidade em um plano vertical, sem rolamento ou atrito, uma pelo trecho ABC e a outra pelo trecho ADC. As partes AD e BC dos trechos são paralelas e as partes AB e DC também. Os vértices B de ABC e D de ADC são suavemente arredondados para que cada bola não sofra uma brusca mudança na sua trajetória.

a) A bola que se move pelo trecho ABC chega ao ponto C primeiro.
b) A bola que se move pelo trecho ADC chega ao ponto C primeiro.
c) As duas bolas chegam juntas ao ponto C.
d) A bola de maior massa chega primeiro (e se tiverem a mesma massa, chegam juntas).
e) É necessário saber as massas das bolas e os ângulos relativos à vertical de cada parte dos trechos para responder.



Comentários:

Diante das condições do problema, a velocidade de cada bola depende da altura:



Devido ao fato de a figura ser um “paralelogramo”, os lados guardam algumas relações métricas conforme mostrado na figura acima. Vale lembrar a nossa relação coringa para o MRUV:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{v_1 + v_2}{2} \therefore \boxed{\Delta t = \frac{2\Delta s}{v_1 + v_2}}$$

Assim, vamos escrever o intervalo de tempo para cada trecho:

- Trecho ABC: $\Delta t_{ABC} = \frac{2b}{v_1} + \frac{2c}{v_1+v_2} + \frac{2a}{v_2+v}$
- Trecho ADC: $\Delta t_{ADC} = \frac{2a}{v_1} + \frac{2c}{v_1+v_2} + \frac{2b}{v_2+v}$

Como visto em teoria, podemos escrever uma relação de ordem dos módulos das velocidades $v > v_2 > v_1 > 0$. Dessa forma, calculamos a diferença entre os tempos:

$$d = \Delta t_{ABC} - \Delta t_{ADC} = \frac{2b}{v_1} + \frac{2c}{v_1 + v_2} + \frac{2a}{v_2 + v} - \left[\frac{2a}{v_1} + \frac{2c}{v_1 + v_2} + \frac{2b}{v_2 + v}\right]$$

$$d = \frac{2}{v_1}(b-a) - \frac{2}{v_2 + v}(b-a) \Rightarrow d = 2(b-a)\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_2 + v}\right)$$

$$\therefore \boxed{d = \frac{2(b-a)(v_2 + v - v_1)}{v_1(v_2 + v)}}$$

Pela geometria do problema temos que $b > a$ e da cinemática do MUV escrevemos que $v_2 > v_1$, logo podemos afirmar que $d > 0$. Portanto: $\boxed{\Delta t_{ABC} > \Delta t_{ADC}}$.

No nosso estudo de movimento uniformemente variado não consideremos qualquer tipo de resistência do ar, a questão também menciona o fato de não ter atrito e não ter rolamento das bolas (por isso não nos preocupamos com momento de inercia das bolas, assunto abordado bem mais à frente no nosso curso).

Dessa forma, não consideramos a massa nas nossas resoluções e chegamos que o tempo no trajeto ABC é maior que no trajeto ADC, portanto, a letra d está errada. Além disso, não precisamos fazer qualquer menção aos ângulos do paralelogramo provando que o resultado independente dos ângulos com a vertical. Logo, a alternativa e está errada.

Gabarito: B

---

7. **(ITA-2001)**

Uma partícula, partindo do repouso, percorre, no intervalo de tempo t, uma distância D. Nos intervalos de tempo seguintes, todos iguais a t, as respectivas distâncias percorridas são iguais a 3D, 5D, 7D, etc. A respeito desse movimento pode-se afirmar que:

a) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento cresce exponencialmente com o tempo.

b) a velocidade da partícula cresce exponencialmente com o tempo.

c) a distância da partícula desde o ponto em que inicia seu movimento é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.

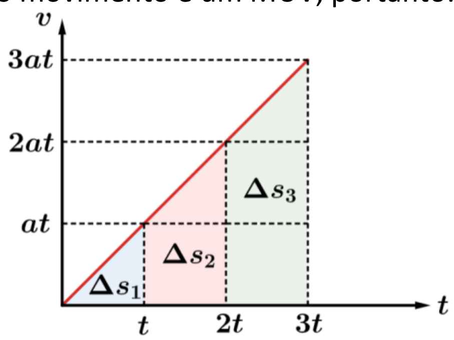
d) a velocidade da partícula é diretamente proporcional ao tempo elevado ao quadrado.

e) nenhuma das opções acima está correta.

Comentários:

Vamos atacar essa questão de duas formas: por gráfico e por função horária do espaço:

1) Gráfico: Vamos admitir que o movimento é um MUV, portanto:



Então:

$$\Delta s_1 = \frac{at^2}{2} = D$$

$$\Delta s_2 = (at + 2at).\frac{(2t - t)}{2} = 3.\frac{at^2}{2} = 3D$$

$$\Delta s_3 = (2at + 3at).\frac{(3t - 2t)}{2} = 5.\frac{at^2}{2} = 5D$$

Portanto, podemos dizer que o movimento possui as características, de fato, de um MUV, logo, o deslocamento é $D = \frac{at^2}{2}$.

2) função horária do espaço: vamos dizer que o espaço do móvel é dado por:

$$s = k.t^n$$

Ou seja, a distância é proporcional a t^n, ainda não sabemos a natureza do movimento, por isso não podemos assumir um tipo de movimento, apenas sabemos que ele percorre distâncias em progressão aritmética, isto é:

$0 \to t: s_1 - 0 = k.t^n - 0 \Rightarrow s_1 = k.t^n = D$

$t \to 2t: s_2 - s_1 = k.(2t)^n - k.t^n \Rightarrow k.t^n(2^n - 1) = 3D$

$2t \rightarrow 3t: s_3 - s_2 = k(3t)^n - k(2t)^n \Rightarrow k.t^n(3^n - 2^n) = 5D$

E assim sucessivamente. Pegando as duas primeiras, verificamos que:

$$k.t^n = D \text{ e } k.t^n(2^n - 1) = 3D \Rightarrow D.(2^n - 1) = 3D \Rightarrow 2^n = 2^2 \therefore n = 2$$

Logo, temos que a função horária do espaço é dada por $s = k.t^2$, demonstrando que se trata de uma partícula num MUV. Essa relação das distâncias percorridas em tempos iguais, partindo do repouso, é conhecida como regra de Galileu.

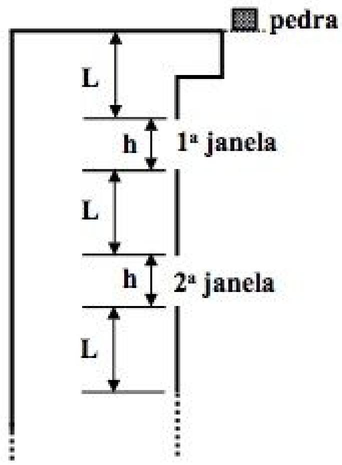
A alternativa a) está errada pois afirma que o espaço da partícula cresce exponencialmente, mas sabemos que o espaço cresce como uma função quadrática. Como se trata de um MUV, a velocidade cresce linearmente com o tempo, logo, as alternativas b) e d) estão incorretas. Como a alternativa c) está correta, não pode ser a alternativa e).

Gabarito: C

---

8. (ITA – 2003)

A partir do repouso, uma pedra é deixada cair da borda no alto de um edifício. A figura mostra a disposição das janelas, com as pertinentes alturas **h** e distâncias **L** que se repetem igualmente para as demais janelas, até o térreo. Se a pedra percorre a altura **h** da primeira janela em **t** segundos, quanto tempo levará para percorrer, em segundas, a mesma altura **h** da quarta janela? (despreze a resistência do ar)



a) $[(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})/(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})\,]t.$

b) $[(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t.$

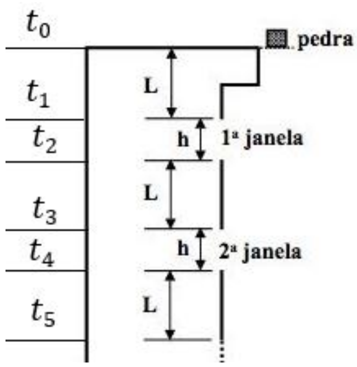
c) $[\left(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{3(L+h)+L}\right)/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t.$

d) $[\left(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{3(L+h)+L}\right)/(\sqrt{2L+2h} - \sqrt{2L+h})]t.$

e) $[\left(\sqrt{3(L+h)} - \sqrt{2(L+h)+L}\right)/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})]t.$

Comentários:

Vamos representar graficamente a queda da pedra por um desenho esquemático mostrando os tempos para cada andar:



Lembrando que o tempo de queda de um ponto material é dado por:

$$t_{queda} = \sqrt{\frac{2h_{queda}}{g}}$$

Vamos escrever o intervalo de tempo para a primeira janela e em seguida para a quarta janela:

1) primeira janela: $t_2 - t_1 = t = \sqrt{\frac{2(L+h)}{g}} - \sqrt{\frac{2L}{g}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})$.

2) quarta janela: ao percorrer a quarta janela, pela lógica da formação dada, ele estará no t_8 e terá percorrido uma altura $4L + 4h$. Além disso, antes de chegar na 4 janela, a pedra terá passado por 4 andares e 3 janelas, logo, desceu $4L + 3h$, e estava no t_7.

$$t_8 - t_7 = \Delta t = \sqrt{\frac{2(4L+4h)}{g}} - \sqrt{\frac{2(4L+3h)}{g}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{4L+3h}\right)$$

Logo:

$$\Delta t = [\left(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{4L+3h}\right)/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})].t$$

Ou ainda:

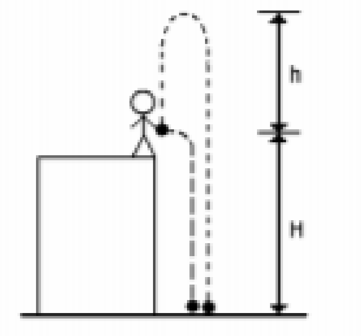
$$\boxed{\Delta t = [\left(\sqrt{4(L+h)} - \sqrt{3(L+h)+L}\right)/(\sqrt{L+h} - \sqrt{L})].t}$$

Gabarito: C

---

9. **(ITA – 2006)**

Á borda de um precipício de um certo planeta, no qual se pode desprezar a resistência do ar, um astronauta mede o tempo t_1 que uma pedra leva para atingir o solo, após deixada cair de uma altura H. A seguir, ele mede o tempo t_2 que uma pedra também leva para atingir o solo, após ser lançada para cima até uma altura h. Calcule a altura H em função t_1, t_2 e h.



Comentários:

Primeiramente, vamos calcular o tempo de queda quando ele deixa a pedra cair da altura H, considerando o planeta com aceleração da gravidade a_p, para encontrar uma relação entre H, a_p e t_1:

$$t_1 = \sqrt{\frac{2H}{a_p}} \therefore \boxed{a_p = \frac{2H}{t_1^2}} \quad (1)$$

Tempo para a pedra sair da altura H e chegar ao solo quando lançada para cima com v_0:

$$s = s_0 + v_0.t + a.\frac{t^2}{2} \therefore \boxed{0 = H + v_0.t_2 - a_p.\frac{t_2^2}{2}} \quad (2)$$

Ainda não temos uma relação de v_0 e a_p, por isso, vamos utilizar a condição de que a pedra, quando lançada para cima, tem altura máxima h, em relação ao topo do precipício. Assim, utilizando Torricelli, encontramos que:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta s \Rightarrow 0 = v_0^2 - 2.a_p.h \therefore \boxed{v_0^2 = 2.a_p.h} \quad (3)$$

Dessa forma, vamos substituir (1) em (3), temos:

$$v_0^2 = \frac{2.2H}{t_1^2}.h \therefore \boxed{v_0 = \frac{2\sqrt{h.H}}{t_1}} \; (4)$$

Conhecendo v_0, vamos substituir (4) e (1) em (2):

$$0 = H + \frac{2\sqrt{h.H}}{t_1}.t_2 - \frac{2H}{t_1^2}.\frac{t_2^2}{2}$$

$$\frac{H(t_2^2 - t_1^2)}{t_1^2} = 2\sqrt{h}.\frac{\sqrt{H}}{t_1}.t_2 \Rightarrow \frac{\sqrt{H}(t_2^2 - t_1^2)}{t_1} = 2\sqrt{h}.t_2$$

$$\therefore \boxed{H = \frac{4t_1^2.t_2^2}{(t_2^2 - t_1^2)^2}.h}$$

Gabarito: $\boldsymbol{H = \frac{4t_1^2.t_2^2}{(t_2^2 - t_1^2)^2}.h}$

---

10. (ITA – 2016)

A partir do repouso, um foguete de brinquedo é lançado verticalmente do chão, mantendo uma aceleração constante de 5,00 m/s^2 durante os 10,0 primeiros segundos. Desprezando a resistência do ar, a altura máxima atingida pelo foguete e o tempo total de sua permanência no ar são?

a) 375 m e 23,7 s.
b) 375 m e 30,0 s.
c) 375 m e 34,1 s.
d) 500 m e 23,7 s.
e) 500 m e 34,1 s.

Comentários:

Vamos dividir o problema em 2 etapas:

1) subida acelerada: o foguete sobe com uma aceleração de 5 m/s² durante 10 s, portanto, ele alcança uma altura de:

$$h_1 = h_0 + v_0.t + \frac{at^2}{2}$$

No nosso problema, temos que $h_0 = 0$ e $v_0 = 0$, logo:

$$h_1 = \frac{5.10^2}{2} = 250\,m$$

$$v_1^2 = v_0^2 + 2.a.h_1 = 2.5.250 \Rightarrow v_1 = 50\,m/s$$

2) foguete continua subindo, mas num movimento retardado, pois a aceleração da gravidade está desacelerando o corpo, até que ele pare atingindo uma altura h_2, então por Torricelli:

$$v_2^2 = v_1^2 - 2.g.h_2$$

$$0 = 2500 - 2.10.h_2 \Rightarrow h_2 = 125\,m$$

Portanto, a altura em relação ao solo é:

$$H = h_1 + h_2 = 250 + 125 = 375\,m$$

3) tempo para o foguete que está a uma altura h_1 chegar ao solo, dado que ele tem uma velocidade v_1, e está sujeito a uma aceleração gravitacional g para baixo. Como sempre adotamos nossa orientação da trajetória para cima, podemos construir a equação do espaço:

$$s = s_0 + v_0.t + \frac{at^2}{2}$$

$$0 = h_1 + v_1.t_2 - \frac{g.t_2^2}{2} \Rightarrow 5t_2^2 - 50t_2 - 250 = 0$$

$$t_2^2 - 10t_2 - 50 = 0 \Rightarrow t_2^2 - 2.5.t_2 + 5^2 - 75 = 0$$

$$(t_2 - 5)^2 = 75 \Rightarrow t_2 - 5 = \pm\sqrt{75}$$

$$t_2 = 5 \pm \sqrt{75}$$

Como $\sqrt{75} > 5$, não podemos pegar o caso de $5 - \sqrt{75}$. Logo, nosso tempo nessa parte do movimento é $5 + \sqrt{75}$.

Portanto, o tempo total é de $t_T = 10 + 5 + \sqrt{75} = 15 + 5\sqrt{3}$. Considerando raiz de 3 igual a 1,7 (é comum está consideração no vestibular do ITA), temos que o tempo total será:

$$t_T \cong 15 + 5.1{,}7 \cong 23{,}7\ s$$

Gabarito: A

---

11. (ITA – 2005)

Um avião de vigilância aérea está voando a uma altura de 5,0 km, com velocidade de $50\sqrt{10}\ m/s$ no rumo norte, e capta no radiogoniômetro um sinal de socorro vindo da direção noroeste, de um ponto fixo no solo. O piloto então liga o sistema de pós-combustão da turbina, imprimindo uma aceleração constante de $6{,}0\ m/s^2$. Após $\frac{40\sqrt{10}}{3}\ s$, mantendo a mesma direção, ele agora constata que o sinal está chegando da direção oeste. Neste instante, em relação ao avião, o transmissor do sinal se encontra a uma distância de:

a) 5,2 km. b) 6,7 km. c) 12 km. d) 13 km. e) 28 km.

Comentários:

Inicialmente, o piloto está voando para o norte, vamos calcular seu deslocamento para o norte, mantendo-se a altura de 5,0 km:

$$\Delta s = v_0.t + \frac{a.t^2}{2} = 50\sqrt{10}.40.\frac{\sqrt{10}}{3} + \frac{6.\left(\frac{40\sqrt{10}}{3}\right)^2}{2}$$

$$\Delta s = 12000\ m = 12\ km$$

Portanto, em relação ao transmissor, o avião está a 12 km para o norte e a 5 km de altura, logo, pelo teorema de Pitágoras, temos que a distância do avião ao transmissor é:

$$d^2 = 12^2 + 5^2 \therefore \boxed{d = 13\ km}$$

Gabarito: D

---

12. (ITA 2002)

Billy sonha que embarcou em uma nave espacial para viajar até o distante planeta Gama, situado a10,0 anos-luz da terra. Metade do percurso foi percorrida com aceleração de $15 m/s^2$, e o restante com desaceleração da mesma magnitude. Desprezando a atração gravitacional e efeitos relativos, estime o tempo total em meses de ida e volta da viagem do sonho de Billy, justifique sua resposta.

Comentários:

Vamos lembrar o que é um ano-luz: um ano –luz é a distância percorrida pela luz no vácuo dentro de um ano. Embora muitas pessoas façam confusão, anos-luz não é medida de tempo, é uma medida de distância.

Diante disso, podemos dizer que a distância de 1 ano-luz, considerando a velocidade da luz no vácuo igual a 3.10^8, é:

$$1ano - luz = 3.10^8.365.24.3600 \cong 946.10^{13}\ m$$

A primeira metade é percorrida com aceleração escalar constante de $15\ m/s^2$. Então:

$$\Delta s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 \Rightarrow 5.946.10^{13} = \frac{1}{2}.15.t_1^2 \therefore \boxed{t_1 = 7{,}94.10^7 s}$$

O tempo total (ida e volta) do percurso é $4.t_1$. Portanto, o tempo total é:

$$T = 4t_1 \Rightarrow T = 31{,}76.10^7 s \therefore \boxed{T = 122{,}5\ meses}$$

Gabarito: 122,5 meses.

---

13. (ITA – 2009)

Dentro de um elevador em queda livre num campo gravitacional g, uma bola é jogada para baixo com velocidade v de uma altura h. Assinale o tempo previsto para a bola atingir o piso do elevador.

a) $t = \frac{v}{g}$ b) $t = \frac{h}{v}$ c) $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

d) $t = \frac{\sqrt{v^2+2gh}-v}{g}$ e) $t = \frac{\sqrt{v^2-2gh}-v}{g}$

Comentários:

Vamos escrever a equação horária do espaço na vertical para o elevador e para a bolinha:

$$y_e = y_0 - \frac{g.t^2}{2}$$

$$y_{bola} = y_0 + h - v.t - \frac{g.t^2}{2}$$

Como de costume, colocamos a orientação da trajetória para cima! Quando a bola encontra o piso do elevador:

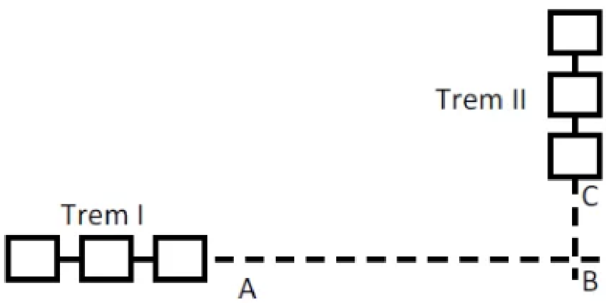
$$y_e = y_{bola} \Rightarrow y_0 - \frac{g.t^2}{2} = y_0 + h - v.t - \frac{g.t^2}{2} \therefore \boxed{t = \frac{h}{v}}$$

Gabarito: B

---

14. (IME)

O trem I desloca-se em linha reta, com velocidade constante de 54 km/h, aproximando-se do ponto B, como mostra a figura. Determine quanto tempo após a locomotiva do trem atingir o ponto A, deve o trem II partir do repouso em C, com aceleração constante de 0,2 m/s² de forma que, 10 segundos após terminar sua passagem pelo ponto B o trem I inicie no mesmo ponto.



NOTAS:

1) Ambos os trens medem 100 metros de comprimento, incluindo suas locomotivas, que viajam à frente.

2) As distâncias ao ponto B são: AB = 3.000 m e CB = 710 m.

Comentários:

Inicialmente, vamos transformar a velocidade de v_1 para m/s: $v_1 = 54\frac{km}{h} = \frac{54}{3{,}6} = 15\ m/s$. De acordo com a condição do problema, quando o trem I chegar em B, o último vagão do trem II deve estar saindo de B.

Dessa forma, o deslocamento do trem II é $BC + 100 = 810\ m$. Logo, o tempo que o trem II será:

$$\Delta s_{II} = \frac{a.t_{II}^2}{2} \Rightarrow 810 = \frac{0{,}2.\mathrm{t}_{\mathrm{II}}^2}{2} \Rightarrow \boxed{t_{II} = 90\ s}$$

Por outro lado, o tempo que o trem I leva para chegar em B é:

$$t_I = \frac{\Delta s_I}{v_I} = \frac{3000}{15} \Rightarrow \boxed{t_I = 200\ s}$$

Assim, para o trem II chegar com o final do último vagão em B demora 90 s e para o trem I chegar com sua frente em B demora 200 s, então, se quisermos que ambos aconteçam simultaneamente, basta que o trem II saia 110 s depois. Entretanto, o enunciado impõe que o trem II passa pelo ponto B 10 s antes, portanto, o trem II tem que sair $110 - 10 = 100\ s$ antes para que isso ocorra.

Gabarito: 100 s.

---

15. (IME – 1988)

Um elevador parte do repouso e sobe com aceleração constante igual a $2m/s^2$ em relação a um observador fixo, localizado fora do elevador. Quando sua velocidade atinge o valor $v = 6\ m/s$, uma pessoa que está dentro do elevador larga um pacote de uma altura $h = 2{,}16\ m$, em relação ao piso do elevador. Considerando que o elevador continue em seu movimento acelerado ascendente, determine para o observador fixo e para o localizado no interior do elevador:

a) o tempo de queda;

b) o espaço total percorrido pelo pacote até que este encontre o piso do elevador.

Obs: considere $g = 10m/s^2$.

Comentários:

a) Quando o pacote é abandonado pela pessoa dentro do elevador, ele fica sujeito a aceleração da gravidade. Vamos escrever a função horária do espaço para o piso do elevador e para a bolinha, lembrando que orientamos nossa trajetória para cima:

$$y_e = y_0 + v_0 \cdot t + \frac{a_e \cdot t^2}{2}$$

$$y_{pac} = y_0 + 2{,}16 + v_0 \cdot t - \frac{g.t^2}{2}$$

Note que o pacote possui a velocidade do elevador, quando o homem abandona ele. Quando o pacote encontra o piso do elevador:

$$y_e = y_{pac}$$

$$y_0 + v_0 \cdot t_q + \frac{a_e \cdot t_q^2}{2} = y_0 + 2{,}16 + v_0 \cdot t_q - \frac{g.t_q^2}{2}$$

$$6 \cdot t_q + \frac{2 \cdot t_q^2}{2} = 2{,}16 + 6 \cdot t_q - 5t_q^2 \Rightarrow 6t_q^2 = 2{,}16$$

$$\therefore \boxed{t_q = 0{,}6\ s}$$

b) Para alguém que está num referencial inicial (observador fixo), podemos utilizar a equação horária do espaço do pacote e determinar o deslocamento:

$$y_{pac} - (y_0 + 2{,}16) = \Delta s_{pac} = -5 \cdot t_q^2 \Rightarrow \Delta s_{pac} = -5 \cdot 0{,}6^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta s_{pac} = -1{,}80\ m}$$

Dessa forma, o deslocamento do elevador para o observador externo é:

$$y_e - y_0 = \Delta s_e = 6 \cdot 0{,}6 + \frac{2.0{,}6^2}{2} = 3{,}96\ m$$

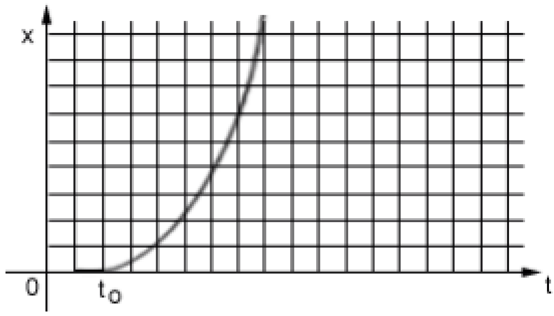
Para quem está dentro do elevador, ele vê o objeto sair de onde ele largou até o piso do elevador, portanto, o deslocamento é 2,16 m.

Gabarito: a) 0,6 s b) 1,80 m e 2,16 m

---

16. (ITA-1972)

Um móvel descreve uma trajetória retilínea tendo seu espaço x em função do tempo t descrito pelo gráfico. Sendo k e b constantes, o espaço x poderá ser expresso analiticamente por:



a) $x = k(t - t_0)$.
b) $x = kt^2$.
c) $x = k(t + t_0)^2$.
d) $x = k(t - t_0)^2$.
e) $x = k\cos(bt)$.

Comentários:

Trata-se de uma questão conceitual, mostrando o caso de tomarmos a origem do tempo diferente de zero, isto é, $t_0 \neq 0$.

Pela figura temos que quando $t = t_0$, o espaço é igual a zero, isto é, $s_0 = 0$. Além disso, podemos que em t_0 temos que a reta tangente nesse ponto possui inclinação nula em relação ao eixo t. Logo, a velocidade inicial é nula. Portanto, a curva deve ser algo como:

$$x = k(t - t_0)^n$$

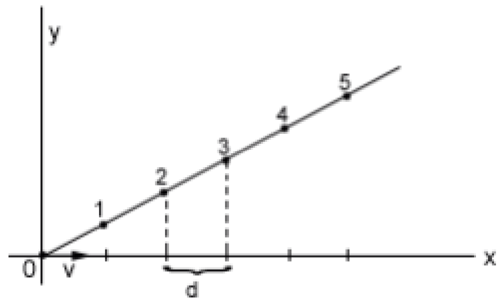
Onde $n \neq 1$, pois, com $n = 1$ teríamos uma reta, não servindo na nossa questão. Assim, a única curva possível é a $x = k(t - t_0)^2$.

Gabarito: D

---

17. (ITA-1974)

Cinco bolinhas de aço estão presas por eletroímãs ao longo de uma reta r, de equação $y = kx$. As bolas estão em posições equidistantes tais que $d = 0{,}5\,m$. Uma bolinha O parte da origem ao longo de x (mesa horizontal sem atrito) com velocidade $v = 2\,m/s$, constante, no mesmo instante em que todas as outras são desligadas dos eletroímãs. Assinale o valor de k tal que O se choque com a bola número 4. Adote $g = 10\,m/s^2$.



a) 0,62.
b) 1,25.
c) 1,87.
d) 2,50.
e) 3,12.

Comentários:

Vamos calcular o tempo para a bola O percorrer cada intervalo d:

$$t = \frac{\mathrm{d}}{v} = \frac{0{,}5}{2} = 0{,}25\,s$$

Logo, o tempo que a bolinha O leva para chegar na linha vertical de 4 é: $4x0{,}25 = 1\,s$. Então, a bolinha 4 deve estar a uma altura que corresponda a esse tempo de queda:

$$t_4 = \sqrt{\frac{2.h_4}{g}} \Rightarrow 1 = \sqrt{\frac{2.h_4}{g}} \Rightarrow h_4 = \frac{10}{2} = 5\,m$$

Como sabemos da função do primeiro grau, o coeficiente angular de uma reta é igual a tangente do ângulo da reta com a paralela ao eixo horizontal, dessa forma:

$$k = tg\theta = \frac{5 - 0}{2 - 0} = 2{,}5$$

Vamos verificar se existe algum choque antes da bolinha O com a terceira:

$$t_{O\to 1}=\frac{3d}{v}=\frac{3.0,5}{2}=0,75\ s.$$

Possível tempo de queda para a bolinha que está na reta encontrada acima:

$$y=2,5.1,5=1,25\ m$$

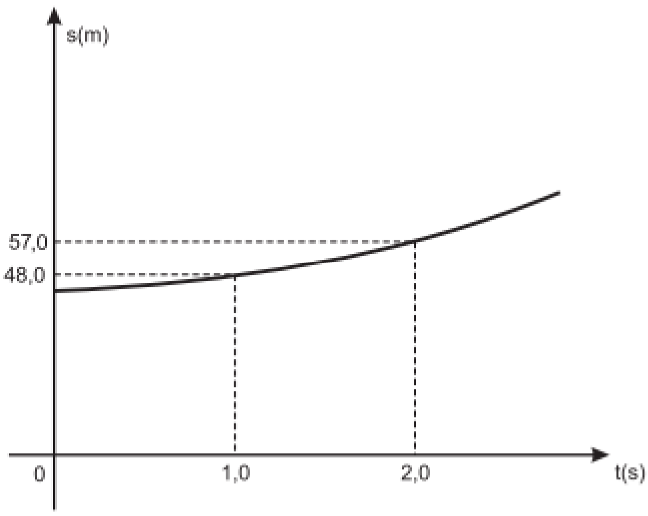
$$t_1=\sqrt{\frac{2.1,25}{10}}=0,86\ s$$

Logo, a bola O passa pela linha vertical da terceira bolinha bem antes da bolinha 3 chegar ao solo, portanto, não há chances das outras bolas se chocarem com a bolinha O, apenas a esfera 4.

Gabarito: D

18. (ITA – 1977)

A curva da figura a seguir é a representação gráfica da equação horária de um movimento retilíneo. Ela é constituída por um trecho de um ramo de parábola cujo vértice está localizado no eixo dos espaços. Neste movimento:



a) a velocidade inicial é nula e a aceleração escalar vale – $6,0\ m\,.\,s^{-2}$.

b) a velocidade inicial é de $48\ m\,.\,s^{-1}$ e a aceleração escalar é de $6,0\ m\,.\,s^{-2}$.

c) a aceleração escalar é de $39\ m\,.\,s^{-2}$.

d) a velocidade escalar média no intervalo de zero a $2,0\ s$ é de $9,0\ m\,.\,s^{-1}$.

e) o espaço inicial vale $45\ m$, a velocidade escalar inicial é nula, e a aceleração escalar é de +6,0 m/s².

Comentários:

Inicialmente, observamos que no final do enunciado ele menciona que o vértice da parábola está no eixo dos espaços, mas sabemos que no vértice da parábola, a derivada é nula, pois a reta tangente é para ao eixo dos tempos, isto é, o ângulo de inclinação com o eixo dos tempos é zero.

Como a velocidade é numericamente igual a tangente da inclinação no ponto em questão, sabemos que no vértice da parábola a velocidade é nula. Logo, $v_0=0$.

A partir dessas informações e a função horária ser uma parábola para um objeto em movimento retilíneo, trata-se de um objeto em MRUV. Então:

$$s=s_0+v_0.t+\frac{a.t^2}{2}$$

Vamos utilizar dois pontos do gráfico bem determinados:

$$s(1)=48\Rightarrow 48=s_0+\frac{a.1^2}{2}\Rightarrow 48=s_0+\frac{a}{2}$$

$$s(2)=57\Rightarrow 57=s_0+\frac{a.2^2}{2}\Rightarrow 57=s_0+2a$$

Subtraindo as duas equações temos que:

$$9 = \frac{3}{2}a \Rightarrow \boxed{a = 6\ m/s^2}$$

Substituindo em qualquer uma das duas, encontramos o espaço inicial:

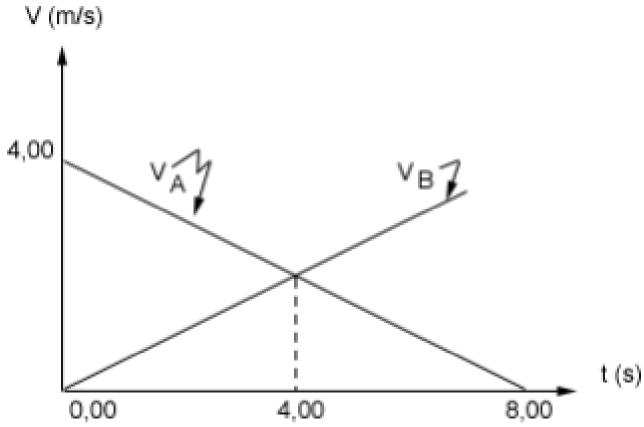
$$57 = s_0 + 2.6 \Rightarrow \boxed{s_0 = 45\ m}$$

Gabarito: E

---

19. (ITA-1981)

Dois móveis, A e B, percorrem a mesma reta, no mesmo sentido, de tal maneira que, no instante $t = 0{,}00\ s$ a distância entre eles é de $10{,}0\ m$. Os gráficos de suas velocidades são mostrados na figura. Sabe-se que os móveis passam um pelo outro num certo instante $t_E > 0$, no qual a velocidade de B em relação à de A tem um certo valor v_{BA}. Podemos concluir que:



a) $t_E = 8{,}00\ s$ e $v_{BA} =\ 4{,}00\ m.s^{-1}$.

b) $t_E = 4{,}00\ s$ e $v_{BA} = 0{,}00\ m.s^{-1}$.

c) $t_E = 10{,}00\ s$ e $v_{BA} = 6{,}00\ m.s^{-1}$.

d) O problema como foi proposto não tem solução.

e) $t_E = 8{,}00\ s$ e $v_{BA} = 4{,}00\ m.s^{-1}$.

Comentários:

Precisamos encontrar o tempo de encontro, para isso, devemos encontrar a equação horária de espaço para cada carro, mas primeiramente, vamos encontrar a função horária da velocidade para cada carro:

$$v_A = 4 - 0{,}5.t$$

No instante $t = 4{,}00\ s$, temos que as velocidades são iguais, então a velocidade de B também é igual a 2,00 m/s. Logo:

$$v_B = 0{,}5.t$$

Integrando as velocidades com relação ao tempo, temos as equações horárias do espaço:

$$s_A = s_{A0} + 4.t - 0{,}25.t^2$$
$$s_B = s_{B0} + 0{,}25.t^2$$

Encontro:

$$s_A = s_B$$
$$s_{A0} + 4.t_E - 0{,}25.t_E^2 = s_{B0} + 0{,}25.t_E^2$$

Considerando que pelo texto, A está à frente de B em 10 metros em $t = 0$, então:

$$0{,}5t_E^2 - 4.t_E - 10 = 0$$
$$\boxed{t_E = 10{,}0\ s}$$

Quando $t = 10\ s$, temos as seguintes velocidades:

$$v_A(10) = 4 - 0{,}5.10 = -1{,}00\ m/s$$
$$v_B(10) = 0{,}5.10 = 5{,}00\ m/s$$

Por isso, a velocidade de B em relação a A é dada por:

$$v_{BA} = v_B - v_A = 5 - (-1) = 6{,}00\ m/s$$

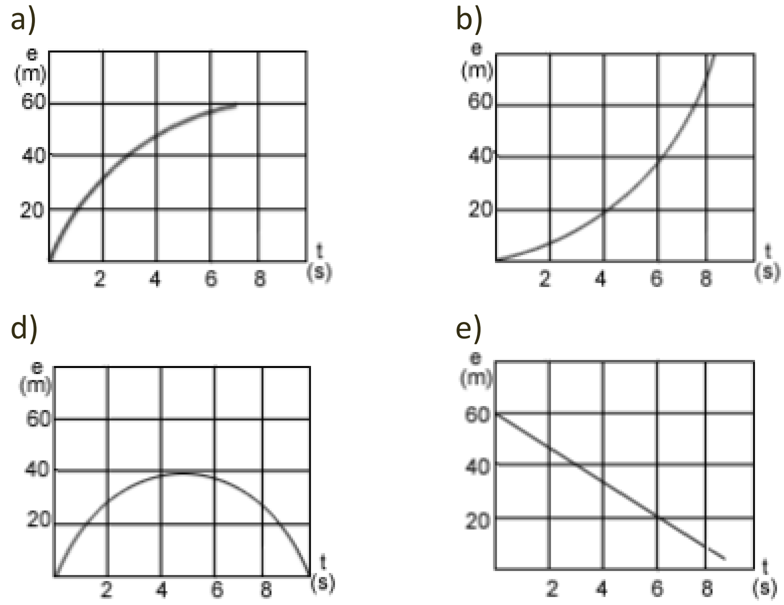
Diante disso, somos levados a marcar a alternativa C, entretanto, o gráfico não especifica a natureza do movimento depois dos 8,00 s. Então, não podemos afirmar que nossas considerações estão corretas e como existe a alternativa D, somos levados a marcar a alternativa D.

Gabarito: D

---

20. (ITA-1989)

Os gráficos representam possíveis movimentos retilíneos de um corpo, com e = espaço percorrido e t = tempo de percurso. Em qual deles é maior a velocidade média entre os instantes $t_1 = 5\ s$ e $t_2 = 7\ s$?



Comentários:

Pela definição de velocidade média, temos que:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Num gráfico de espaço pelo tempo, temos que:

$$v_m = tg(\theta)$$

Logo, temos que ver qual gráfico tem a maior tangente, quando fazemos:

$$\frac{s_7 - s_5}{t_7 - t_5}$$

Isto ocorre na alternativa b, pois ao ligar os pontos do gráfico, observamos que esta tem a maior inclinação com a horizontal.

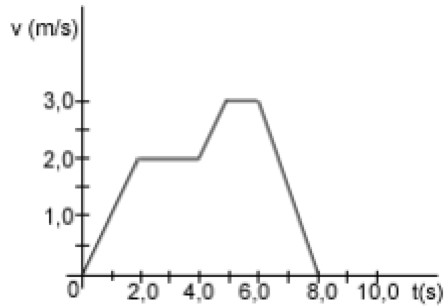
Gabarito: B

---

21. (ITA-1990)

Um corpo em movimento retilíneo e uniforme tem sua velocidade em função do tempo dada pelo gráfico:

Neste caso pode-se afirmar que:



a) A velocidade média entre t = 4 s e t = 8 s é de 2,0 m/s.
b) A distância percorrida entre t = 0 e t = 4 s é de 10 m.
c) Se a massa do corpo é de 2,0 kg, a resultante das forças que atuam sobre ele entre t = 0 e t = 2 s é de 0,5 N.
d) A aceleração média entre t = 0 e t = 8 s é de 2,0 m/s2.
e) Todas as afirmativas acima estão erradas.

Comentários.

O corpo está realizando um movimento retilíneo e uniforme. No gráfico $v \times t$, temos que a área representa a variação da posição e as tangentes das retas corresponde a aceleração escalar do corpo. Vamos responde item por item.

a) Para determinar velocidade média entre 4 e 8, temos que saber qual foi o Δs e dividir pelo Δt correspondente:

$$\Delta s = \frac{(2+3)(5-4)}{2} + 3.(6-5) + \frac{3(8-6)}{2} = 8{,}5\, m$$

$$v_m = \frac{8{,}5}{4} = 2{,}125\, m/s$$

Alternativa é falsa.

b) Vamos novamente calcular a área de 0 a 4 segundos:

$$\Delta s = \frac{2.2}{2} + 2(4-2) = 4\, m$$

c) Ainda não falamos da segunda lei de Newton, vamos apenas lembrar que: $|\vec{F_R}| = m.|\overrightarrow{a_R}|$

Então, precisamos calcular a aceleração no intervalo de 0 a 2 segundos:

$$a = tg\alpha$$

$$a = \frac{2}{2} = 1{,}0\, m/s$$

Para um corpo de 2kg e tendo como aceleração resultante de 1,0 m/s, então a força é de 2.1=2 N. Alternativa também é falsa.

d) Vamos utilizar a definição de aceleração escalar média:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Para os dois instantes, temos que:

$$a_m = \frac{0-0}{8} = 0$$

Alternativa d) também está errada.

Gabarito: E

---

22. (ITA-1972)

No movimento circular e uniforme de uma partícula, considerando-se como vetores as grandezas físicas envolvidas, podemos afirmar que:

a) Força, aceleração, velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
b) Aceleração, velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
c) Velocidade tangencial e velocidade angular são constantes.
d) Velocidade angular é constante.
e) Nenhuma das grandezas é constante.

Comentários:

Vamos lembrar que no movimento circular uniforme, MCU, a velocidade angular é constante, entretanto, ainda não falamos sobre as causas que tornam o movimento circular possível.

Quando dizemos que a aceleração linear é nula, estamos pensando na aceleração que altera a velocidade linear, que está diretamente ligada a velocidade angular pela relação $v = \omega . R$. Entretanto, ainda existe uma aceleração no movimento circular que garante o formato da trajetória, a famosa aceleração centrípeta.

Vamos discutir sua importância no movimento na próxima aula. Portanto, o único fato que temos certeza de considerar no MCU é a velocidade angular ser constante.

Gabarito: D

---

23. (ITA-1985)

Uma roda de bicicleta tem raio de 25 cm. Em 5 s o ciclista alcança a velocidade de 10 m/s. A aceleração angular da roda, suposta constante, é:

a) $20\, rad/s^2$. b) $0{,}08\, rad/s^2$. c) $2\, rad/s^2$.
d) $8\, rad/s^2$. e) $0{,}5\, rad/s^2$.

Comentários:

A velocidade linear da bicicleta é de 10 m/s dado o raio de 25 cm, então:

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{0{,}25} = 40\, rad/s$$

Portanto:

$$\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow \gamma = \frac{40}{5} \Rightarrow \boxed{\gamma = 8\, rad/s^2}$$

Gabarito: D

---

24. (ITA-1988)

Um disco gira, em torno de seu eixo, sujeito a um torque constante (aceleração linear constante). Determinando-se a velocidade angular média entre os instantes $t = 2{,}0\, s$ e $t = 6{,}0\, s$, obteve-se $10\, rad/s$, e, entre os instantes $t = 10\, s$ e $t = 18\, s$, obteve-se $5{,}0\, rad/s$. A velocidade angular inicial ω_0 (em rad/s), e a aceleração angular (em rad/s^2) valem, respectivamente:

a) 12 e -0,5. b) 15 e -0,5. c) 20 e 0,5.
d) 20 e -2,5. e) 35 e 2,5.

Comentários:

Se a aceleração linear constante podemos dizer que a aceleração angular também é constante, pois, $a = \gamma . R$.

Novamente, vamos usar nossa equação coringa do MUV aplicada ao MCUV:

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}$$

Entre os instantes 2 e 6 segundos:

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = 10 \Rightarrow \boxed{\omega_1 + \omega_2 = 20}$$

Para os instantes 10 e 18 segundos:

$$\frac{\omega_3 + \omega_4}{2} = 5 \Rightarrow \boxed{\omega_3 + \omega_4 = 10}$$

Dado que estamos no MCUV, a função horária da velocidade angular é dada por:

$$\omega = \omega_0 + \gamma . t$$

Então podemos escrever que:

$$\omega_1 = \omega_0 + \gamma.2$$
$$\omega_2 = \omega_0 + \gamma.6$$
$$\omega_3 = \omega_0 + \gamma.10$$
$$\omega_4 = \omega_0 + \gamma.18$$

Portanto:

$$(\omega_0 + 2\gamma) + (\omega_0 + 6\gamma) = 20$$
$$(\omega_0 + 10\gamma) + (\omega_0 + 18\gamma) = 10$$

Subtraindo as equações, temos que:

$$20\gamma = -10 \Rightarrow \boxed{\gamma = -0{,}5\, rad/s^2}$$

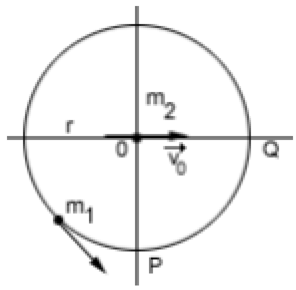
Logo:

$$2\omega_0 + 8(-0{,}5) = 20 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = 12\, rad/s}$$

Gabarito: A

25. (ITA-1989)

Num plano horizontal, sem atrito, uma partícula m_1 move-se com movimento circular uniforme de velocidade angular ω. Ao passar pelo ponto P, outra partícula, m_2, é lançada do ponto O com velocidade $\vec{v}$. Qual é o módulo de $\overrightarrow{v_0}$ para que m_1 e m_2 colidam em Q?



a) $2\pi.r.\omega$ b) $\frac{2\omega}{\pi r}$ c) $\frac{2r\omega}{\pi}$ d) $\frac{r\omega}{\pi}$ e) $\pi.r.\omega$

Comentários:

O tempo gasto pela partícula 1 para sair de P e chegar em Q, realizando um MCU é o mesmo tempo para a partícula que sai de O para Q.

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta\varphi_1}{\omega_1} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\omega}$$
$$\Delta t_2 = \frac{\Delta s_2}{v_2} = \frac{R}{v_0}$$

Como $\Delta t_1 = \Delta t_2$, temos que:

$$\frac{\pi}{2\omega} = \frac{R}{v_0} \Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{2\omega R}{\pi}}$$

Gabarito: C

26. (ITA-1991)

Considere dois carros que estejam participando de uma corrida. O carro A consegue realizar cada volta em 80 s enquanto o carro B é 5,0% mais lento. O carro A é forçado a uma parada nos boxes ao completar a volta de número 6. Incluindo aceleração, desaceleração e reparos, o carro A perde 135 s. Qual deve ser o número mínimo de voltas completas da corrida para que o carro A possa vencer?

a) 28. b) 27. c) 33.
d) 34. e) Nenhuma das alternativas anteriores.

Comentários:

Definindo v_A e v_B as velocidades escalares médias em cada volta dos carros A e B, temos do enunciado que:

$$v_B = 0{,}95\ v_A$$
$$\frac{2\pi R}{t_B} = \frac{0{,}95.2\pi R}{t_A} \Rightarrow \boxed{t_B \cong 84{,}2\ s}$$

Este resultado mostra que a diferença entre os períodos é de 4,2 segundos. Quando A para ao completar a 6ª volta, o carro A tem uma vantagem sobre B é de:

$$6x4{,}2 = 25{,}2\ s$$

Dessa forma, podemos dizer que a desvantagem de A, quando parar nos boxes é de 135 s. Logo, a desvantagem de A em relação a B é de $135 - 25{,}2 = 109{,}8\ s$.

O número de voltas necessárias para que A alcance B é de:

$$\frac{109{,}8}{4{,}2} \cong 26{,}1\ voltas$$

Dessa forma, são necessárias mais 27 voltas desde a parada para A vencer. Como já foram 6 voltas, a corrida deve ter no mínimo 33 voltas.

Gabarito: C

---

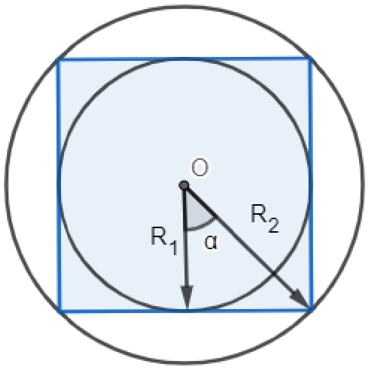
27. (ITA-2001)

Uma partícula move-se ao longo de uma circunferência circunscrita em um quadrado de lado L, com velocidade angular constante. Na circunferência inscrita nesse quadrado, outra partícula move-se com a mesma velocidade angular. A razão entre os módulos das respectivas velocidades tangenciais dessas partículas é:

a) $\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Comentários:

Inicialmente, vamos relembrar a relação da geometria:



Diante da construção geométrica, temos que $\alpha = 45°$, então:

$$\cos(45°) = \frac{R_1}{R_2} \Rightarrow \boxed{R_2 = R_1\sqrt{2}}$$

Ambas têm a mesma velocidade angular:

$$v_1 = \omega.R_1;\ v_2 = \omega.R_2$$

Dividindo a segunda pela primeira, temos que:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\omega.R_2}{\omega.R_1} = \sqrt{2}$$

Gabarito: A

---

28. (ITA-2001)

No sistema convencional de tração de bicicletas, o ciclista impele os pedais, cujo eixo movimenta a roda dentada (coroa) a ele solidária. Esta, por sua vez, aciona a corrente responsável pela transmissão do movimento à outra roda dentada (catraca), acoplada ao eixo traseiro da bicicleta. Considere agora um sistema duplo de tração, com 2 coroas, de raios R1 e R2 (R1< R2) e duas catracas de raios R3 e R4 (R3 < R4), respectivamente. Obviamente, a corrente só toca uma coroa e uma catraca de cada vez, conforme o comando da alavanca de câmbio. A combinação que permite a máxima velocidade da bicicleta, para uma velocidade angular dos pedais fixa, é:

a) Coroa R1 e catraca R3. b) Coroa R1 e catraca R4.

c) Coroa R2 e catraca R3. d) Coroa R2 e catraca R4.

e) Indeterminada já que não se conhece o diâmetro da roda traseira da bicicleta.

Comentários:

Em uma bicicleta, temos que:

$$\boxed{v_{bic} = \omega_{roda} . R_{roda}} \; (1)$$

Como a velocidade angular da roda é a mesma da catraca, podemos reescrever a equação anterior:

$$\boxed{v_{bic} = \omega_{catraca} . R_{roda}} \; (2)$$

Por outro lado, podemos relacionar a velocidade angular da catraca com a velocidade da corrente:

$$\omega_{catraca} = \frac{v_{corrente}}{R_{catraca}}$$

De (2) em (1), temos que:

$$\boxed{v_{bic} = \frac{v_{corrente}}{R_{catraca}} . R_{roda}} \; (3)$$

Analisando a coroa, escrevemos que:

$$\boxed{v_{corrente} = \omega_{coroa} . R_{coroa}} \; (4)$$

Substituindo (4) em (3), vem que:

$$\boxed{v_{bic} = \frac{\omega_{coroa} . R_{coroa}}{R_{catraca}} . R_{roda}}$$

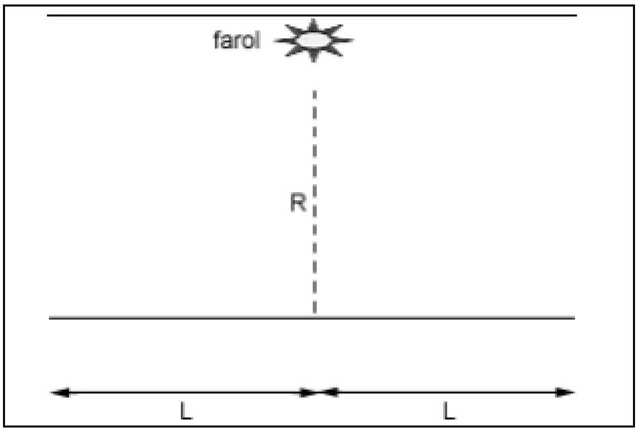
Dessa forma, como ω_{coroa} e R_{roda} são constantes, a velocidade da bicicleta será máxima quando o raio da roda for máximo e o raio da catraca é mínimo. Assim, $R_{coroa} = R_2$ e $R_{catraca} = R_3$.

Gabarito: C

---

29. (ITA-2001)

Em um farol de sinalização, o feixe de luz acoplado a um mecanismo rotativo realiza uma volta completa a cada T segundos. O farol se encontra a uma distância R do centro de uma praia de comprimento 2L, conforme a figura. O tempo necessário para o feixe de luz "varrer" a praia, em cada volta, é:



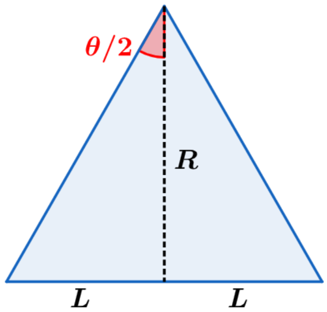
a) $arctg\left(\frac{L}{R}\right) . \frac{T}{2\pi}$ b) $arctg\left(\frac{2L}{R}\right) . \frac{T}{2\pi}$

c) $arctg\left(\frac{L}{R}\right) . \frac{T}{\pi}$ d) $arctg\left(\frac{L}{2R}\right) . \frac{T}{2\pi}$

e) $arctg\left(\frac{L}{R}\right).\frac{2T}{\pi}$

Comentários:

Se θ é o ângulo varrido pelo farol, então, temos que:



Pela trigonometria, temos:

$$tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{L}{R} \Rightarrow \theta = 2arctg\left(\frac{L}{R}\right)$$

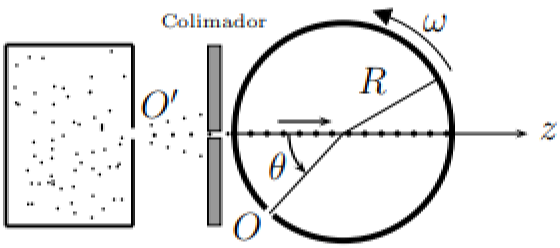
Assim, a velocidade angular do feixe luminoso é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\theta}{\Delta t} \therefore \boxed{\Delta t = arctg\left(\frac{L}{R}\right).\frac{T}{\pi}}$$

Gabarito: C

---

30. (ITA - 2013)



Um dispositivo é usado para determinar a distribuição de velocidades de um gás. Em $t = 0$, com os orifícios O' e O alinhados no eixo z, moléculas ejetadas de O', após passar por um colimador, penetram no orifício O do tambor de raio interno R, que gira com velocidade angular constante ω. Considere, por simplificação, que neste instante inicial ($t = 0$) as moléculas em movimento encontram-se agrupadas em torno do centro do orifício O. Enquanto o tambor gira, conforme mostra a figura, tais moléculas movem-se horizontalmente no interior deste ao longo da direção do eixo z, cada qual com sua própria velocidade, sendo paulatinamente depositadas na superfície interna do tambor no final de seus percursos. Nestas condições, obtenha em função do ângulo θ a expressão para $v - v_{min}$, em que v é a velocidade da molécula depositada correspondente ao giro θ do tambor e v_{min} é a menor velocidade possível para que as moléculas sejam depositadas durante a primeira volta deste.

Comentários:

Para v_{min}, o tambor dará uma volta completa, então:

$$v_{min} = \frac{2R}{\Delta t_{min}} = \frac{2R}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{R\omega}{\pi}$$

Para v, o tambor dará uma volta correspondente a um ângulo $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Logo:

$$\boxed{v = \frac{2R\omega}{\theta + 2k\pi}}$$

Portanto:

$$\boxed{v - v_{min} = R\omega\left(\frac{2}{\theta + 2k\pi} - \frac{1}{\pi}\right)}$$

Gabarito: $\boldsymbol{R\omega\left(\frac{2}{\theta+2k\pi} - \frac{1}{\pi}\right)}$

8. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa segunda aula de cinemática. Falta apenas mais uma aula de cinemática para fecharmos todo o conteúdo abordado no ITA.

Tente fazer todas as questões da lista sem olhar o gabarito. O caminho para passar no ITA é difícil, por isso é muito importante fazer as questões e não abandonar nenhuma dúvida.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

9. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 1. ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.
[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.
[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.
[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.
[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.
[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p.

10. Versão da aula

Versão da Aula	Data de atualização
1.0	**08/06/2021**