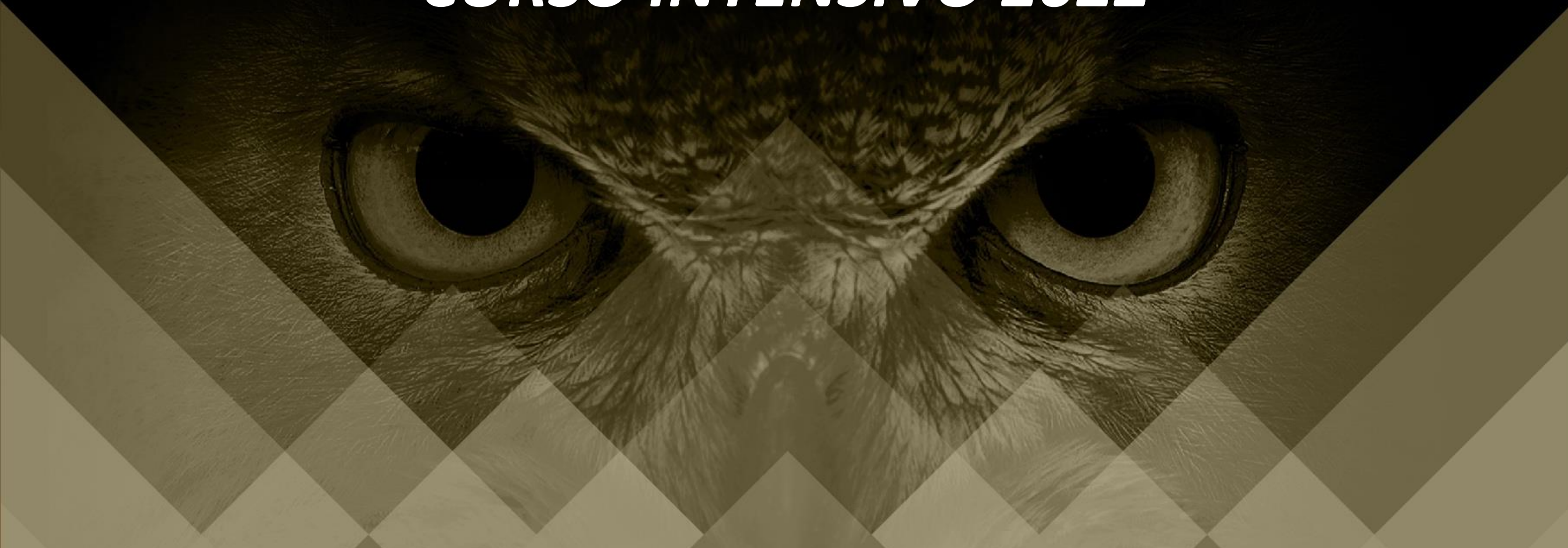
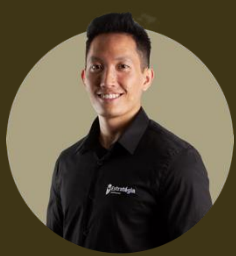
Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022



ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So



www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Introdução

Nessa aula estudaremos sequências, esse é um tema que costuma ser cobrado nos vestibulares militares. Veremos o que é uma sequência e também os tipos que podemos encontrar. Os mais conhecidos são a progressão aritmética e a progressão geométrica.

O importante nessa aula é que você entenda o raciocínio utilizado na resolução das questões. Se você for um aluno que possui uma base bem consolidada no assunto, você pode pular diretamente para a lista de questões e tentar resolver o máximo número de questões possível.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

/victorso /profvictorso /profvictorso

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Sequências

1.1. Definição

Chama-se sequência uma série de números onde para cada número natural corresponde um número real.

A notação usual para uma sequência é dada por:

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ são chamados de termos da sequência.

Os números que acompanham os termos são chamados de índices.

A sequência também pode ser representada por $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplo:

O índice do primeiro termo a_1 da sequência é 1.

O índice do segundo termo a_2 da sequência é 2.

O índice do n-ésimo termo a_n da sequência é n.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma sequência finita.

$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ é uma sequência infinita. Os "..." indicam que a sequência segue indefinidamente.

1.2. Lei de Formação

A lei de formação de uma sequência permite calcular qualquer termo de uma sequência.

Exemplos:

1) $(1, 4, 9, 16, \dots)$

Sua lei de formação é dada por:

$$a_n = n^2$$

Essa lei é chamada de termo geral da sequência, pois conseguimos obter o valor de qualquer termo através dessa lei.

$$a_1 = 1^2 = 1\ (primeiro\ termo)$$
$$a_2 = 2^2 = 4\ (segundo\ termo)$$
$$a_3 = 3^2 = 9\ (terceiro\ termo)$$
$$\vdots$$

Formalmente, dizemos que essa lei de formação é uma função de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cujo termo geral a_n possibilita obter o valor de qualquer termo da sequência.

2) $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$

Famosa sequência de Fibonacci. Ela pode ser escrita através da seguinte lei de formação:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$$
$$F_2 = F_1 = 1$$

Essa lei é chamada de fórmula de recorrência, pois seus termos são obtidos através de termos anteriores. Importante salientar que os termos iniciais devem ser definidos para a fórmula de recorrência. Para o caso da sequência de Fibonacci, temos os termos iniciais $F_2 = F_1 = 1$.

$$F_3 = F_2 + F_1 = 1 + 1 = 2$$
$$F_4 = F_3 + F_2 = 2 + 1 = 3$$
$$F_5 = F_4 + F_3 = 3 + 2 = 5$$
$$\vdots$$

2. Progressão Aritmética (PA)

2.1. Definição

Uma sequência é uma progressão aritmética quando sua lei de formação é dada por:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r \end{matrix}}$$

a_1 é o primeiro termo da PA e r é sua razão.

$a_n = a_{n-1} + r$ é a fórmula de recorrência da PA.

Para verificarmos se uma sequência é uma PA, basta verificar se a diferença entre seus termos consecutivos resulta em uma constante.

Exemplo:

1) $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$

Essa sequência é uma PA de razão $r = 1$, pois:

$$a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_3 - a_2 = 3 - 2 = 1$$
$$a_4 - a_3 = 4 - 3 = 1$$
$$a_5 - a_4 = 5 - 4 = 1$$
$$a_6 - a_5 = 6 - 5 = 1$$
$$a_7 - a_6 = 7 - 6 = 1$$

Perceba que essa sequência segue a lei de formação:

$$a_n = a_{n-1} + 1$$

2.2. Classificação

Uma progressão aritmética pode ser classificada de acordo com sua razão.

2.2.1. PA crescente

$$r > 0 \Rightarrow PA\ crescente$$

$(2, 6, 10, 14, 18)$ é uma PA crescente de razão $r = 4 > 0$

2.2.2. PA constante

$$r = 0 \Rightarrow PA\ constante$$

$(3, 3, 3, 3, 3)$ é uma PA constante de razão $r = 0$

2.2.3. PA decrescente

$$r < 0 \Rightarrow PA\ decrescente$$

$(10, 5, 0, -5, -10)$ é uma PA decrescente de razão $r = -5 < 0$

2.3. Termo Geral

O termo geral de uma PA é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

a_n é chamado de n-ésimo termo da PA.

Também podemos escrever o termo geral em função de outro termo que não seja o primeiro, ele é dado por:

$$\boxed{a_n = a_p + (n-p)r}$$

Esse é o termo geral em função de qualquer índice.

2.4. Propriedades

2.4.1. Termos Equidistantes

Seja $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ uma PA de razão r.

$$\boxed{a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} + a_{n-j} = cte}$$

Essa propriedade diz que a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma PA é igual à soma dos extremos $(a_1 + a_n)$.

Termos equidistantes são os termos que possuem a soma dos índices iguais a $1 + n$. Veja:

$$a_1 + a_n \Rightarrow soma\ dos\ índices = 1 + n$$
$$a_2 + a_{n-1} \Rightarrow soma\ dos\ índices = 2 + (n-1) = 1 + n$$
$$a_{j+1} + a_{n-j} \Rightarrow soma\ dos\ índices = (j+1) + (n-j) = 1 + n$$

2.4.2. Soma dos Termos da PA

A soma dos termos de uma PA é dada pela fórmula:

$$\boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

A soma dos n termos de uma sequência também pode ser representada dessa forma:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

$\sum$ é o símbolo usado para representar um somatório.

O índice j abaixo desse símbolo indica o primeiro termo do somatório e o índice n indica até qual índice vai o somatório.

Exemplo:

$$\sum_{j=2}^{5} a_j = a_2 + a_3 + a_4 + a_5$$

Para o caso de uma PA com n termos e n ímpar, podemos escrever:

$$\boxed{S_n = a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)} \cdot n}$$

Onde $a_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}$ é o termo médio da PA.

2.4.3. Média Aritmética

$$\boxed{a_j = \frac{a_{j-1} + a_{j+1}}{2}}$$

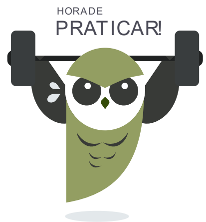
Essa propriedade é muito útil para resolução de diversas questões envolvendo PA, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão. Isso facilita os cálculos.

2.4.4. Notação Especial

$$PA\ com\ 3\ termos:$$
$$\boxed{(x - r, x, x + r)}$$

$$PA\ com\ 4\ termos:$$
$$\boxed{(x-3r', x-r', x+r', x+3r')}$$
$$PA\ com\ 5\ termos:$$
$$\boxed{(x-2r, x-r, x, x+r, x+2r)}$$

Essa propriedade é útil para facilitar os cálculos de problemas envolvendo PA. Representamos seus termos em função de um x e r. Note que a razão da PA com 4 termos é $r = 2r'$.



(Exercícios de Fixação)

1. Dado $a_1 = 3$ e $r = 5$, o primeiro termo e a razão de uma PA, respectivamente. Calcule:

a) a_{10}

b) a_{20}

Resolução:

a) a_{10}

Temos os dados do primeiro termo e a razão da PA. Vamos usar o termo geral da PA para calcular a_{10}:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{10} = 3 + (10-1)5$$
$$a_{10} = 3 + 9 \cdot 5$$
$$a_{10} = 48$$

b) a_{20}

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$
$$a_{20} = 3 + (20-1)5$$
$$a_{20} = 3 + 19 \cdot 5$$
$$a_{20} = 98$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{10} = 48}$ b) $\boldsymbol{a_{20} = 98}$

2. Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{50})$ uma PA de razão r. Dado $a_{10} = 24$ e $a_{20} = 44$, calcule a_1 e r.

Resolução:

Vamos escrever a_{10} e a_{20} usando o termo geral da PA.

$$a_{10} = a_1 + (10-1)r = 24 \Rightarrow a_1 + 9r = 24\ (I)$$

$$a_{20} = a_1 + (20-1)r = 44 \Rightarrow a_1 + 19r = 44\ (II)$$

Fazendo $(II) - (I)$, obtemos:

$$(a_1 + 19r) - (a_1 + 9r) = 44 - 24$$

$$a_1 + 19r - a_1 - 9r = 20$$

$$10r = 20$$

$$r = 2$$

Substituindo $r = 2$ em (I) para encontrar a_1:

$$a_1 + 9(2) = 24$$

$$a_1 + 18 = 24$$

$$a_1 = 6$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_1 = 6}$ **e** $\boldsymbol{r = 2}$

3. Obter a soma dos 30 primeiros termos da PA $(10, 5, 0, -5, \ldots)$.

Resolução:

Vamos aplicar a fórmula da soma:

$$S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})30}{2} = (a_1 + a_{30})15$$

Sabemos a_1, precisamos calcular a_{30} e a razão r. Calculando r:

$$a_2 = a_1 + r$$

$$5 = 10 + r$$

$$r = -5$$

Usando o termo geral para calcular a_{30}:

$$a_{30} = a_1 + (30-1)r$$

$$a_{30} = 10 + 29 \cdot (-5)$$

$$a_{30} = 10 - 145 = -135$$

Substituindo os valores em S_{30}:

$$S_{30} = \big(10 + (-135)\big)15$$

$$S_{30} = (-125)15 = -1875$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_{30} = -1875}$

4. Dado $S_n = n^2 + n, \forall n \in \mathbb{N}^*$, a soma dos n termos de uma PA. Calcular o primeiro termo e a razão da PA.

Resolução:

Para calcular a_1, podemos substituir $n = 1$ em S_n:

$$S_n = n^2 + n$$

$$S_1 = a_1$$
$$S_1 = 1^2 + 1 = 2$$

Para descobrir a razão r, vamos calcular o segundo termo através de S_2:

$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_2 = 2^2 + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$a_1 + a_2 = 6$$
$$2 + a_2 = 6$$
$$a_2 = 4$$

A razão será dada por:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$r = a_2 - a_1$$
$$r = 4 - 2 = 2$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_1 = 2}$ **e** $\boldsymbol{r = 2}$

5. Obter 3 números em PA de modo que sua soma seja 21 e a soma de seus quadrados seja 165.

Resolução:

Temos que encontrar uma PA com 3 termos que satisfaça às condições da questão.

Vamos representar a PA da seguinte forma:

$$(x - r, x, x + r)$$

Assim, a soma dos seus termos é dado por:

$$(x - r) + x + (x + r) = 21$$
$$3x = 21$$
$$x = 7$$

A soma de seus quadrados é:

$$(x - r)^2 + x^2 + (x + r)^2 = 165$$

Substituindo $x = 7$ na equação e desenvolvendo seus termos:

$$(7 - r)^2 + 7^2 + (7 + r)^2 = 165$$
$$49 - 14r + r^2 + 49 + 49 + 14r + r^2 = 165$$
$$2r^2 + 3 \cdot 49 = 165$$
$$2r^2 + 147 = 165$$
$$2r^2 = 18$$
$$r^2 = 9$$
$$r = \pm 3$$

Encontramos $x = 7$ e $r = \pm 3$. Temos duas PA's:

$$r = 3 \Rightarrow (7 - 3, 7, 7 + 3) = (4, 7, 10)\ PA\ crescente$$

$$r = -3 \Rightarrow \big(7-(-3), 7, 7+(-3)\big) = (10, 7, 4)\ PA\ decrescente$$

Gabarito: $(\mathbf{4}, \mathbf{7}, \mathbf{10})$ **e** $(\mathbf{10}, \mathbf{7}, \mathbf{4})$

6. Interpolando-se 5 termos entre os números 2 e 20, obtemos uma PA. Ache a razão de interpolação e escreva a PA formada.

Resolução:

Os números 2 e 20 são os extremos da PA. Quando interpolamos, inserimos termos entre esses extremos. Com isso, a interpolação de 5 termos entre 2 e 20 gera uma PA com 7 termos $(5\ termos + 2\ extremos)$.

Vamos formar a PA e calcular a razão.

$$a_1 = 2 \text{ e } a_7 = 20$$

$$a_7 = a_1 + (7-1)r$$

$$20 = 2 + 6r$$

$$18 = 6r$$

$$r = 3$$

Temos os valores de a_1 e r, a PA formada é:

$$(2, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, 20)$$

$$(2, 5, 8, 11, 14, 17, 20)$$

Gabarito: $(\mathbf{2}, \mathbf{5}, \mathbf{8}, \mathbf{11}, \mathbf{14}, \mathbf{17}, \mathbf{20})$

7. Interpolando-se n vezes, $n \in \mathbb{N}$, entre os números n e $n^2 + 3n + 1$ obtemos uma PA. Achar a razão de interpolação.

Resolução:

Interpolar n vezes significa inserir n termos entre os extremos. A PA que procuramos possui a forma:

$$(n, \underbrace{a_2, a_3, \dots, a_{n+1}}_{n\ termos}, n^2 + 3n + 1)$$

Perceba que essa PA possui $n + 2$ termos.

Os extremos são:

$$a_1 = n$$

$$a_{n+2} = n^2 + 3n + 1$$

Escrevendo os extremos usando o termo geral da PA, obtemos:

$$a_{n+2} = a_1 + [(n+2) - 1]r$$

$$n^2 + 3n + 1 = n + (n+1)r$$

$$n^2 + 2n + 1 = (n+1)r$$

Fatorando e simplificando:

$$(n+1)^2 = (n+1)r$$

$$r = n + 1$$

∴A razão de interpolação da PA obtida é $r = n + 1$

Gabarito: $\boldsymbol{r = n + 1}$

2.5. Progressão Aritmética de Ordem Superior

Esse assunto é um aprofundamento da Progressão Aritmética e dificilmente é cobrado nos vestibulares, mas nada impede que isso aconteça no seu ano! Veremos apenas como proceder com a questão, caso caia algo parecido na prova, você saberá resolvê-la. Alguns assuntos que serão usados nesse tópico ainda serão aprendidos em aulas futuras. Caso você não entenda, tente memorizar o bizu de como proceder.

2.5.1. Definição

A sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ é uma PA de ordem k, se após "k diferenças" entre os termos consecutivos obtivermos uma PA estacionária, ou seja, uma PA com razão nula.

Exemplo:

1) $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$

Se subtrairmos cada termo dessa sequência para encontrar a razão, vemos que a razão não é constante:

$$r = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$r' = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$

Vamos obter outra sequência através da subtração de seus termos consecutivos. Seu termo é da forma $b_i = a_{i+1} - a_i$.

$$b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$$
$$b_2 = a_3 - a_2 = 4 - 2 = 2$$
$$b_3 = a_4 - a_3 = 8 - 4 = 4$$
$$b_4 = a_5 - a_4 = 15 - 8 = 7$$
$$b_5 = a_6 - a_5 = 26 - 15 = 11$$

Após a **primeira diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Novamente, a sequência obtida ainda não é uma PA estacionária. Vamos obter outra sequência aplicando a mesma ideia:

$$c_1 = b_2 - b_1 = 2 - 1 = 1$$
$$c_2 = b_3 - b_2 = 4 - 2 = 2$$
$$c_3 = b_4 - b_3 = 7 - 4 = 3$$
$$c_4 = b_5 - b_4 = 11 - 7 = 4$$

Após a **segunda diferença**, obtemos a sequência:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)$$

Perceba que esses termos possuem uma razão constante $r = 1$.

A sequência obtida é uma PA de primeira ordem.

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ primeira\ ordem$$

Subtraindo os termos consecutivos dessa PA, obtemos uma PA estacionária após a **terceira diferença**:

$$(1, 1, 1, 1, \dots)\ PA\ estacionária$$

Assim, a sequência $(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)$ é uma PA de ordem 3, pois foram necessárias 3 diferenças entre os termos consecutivos para se obter uma PA estacionária.

As progressões aritméticas de ordem superior são classificadas da seguinte forma:

$$(1, 2, 3, 4, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 1$$
$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 2$$
$$(1, 2, 4, 8, 15, 26, \dots)\ PA\ de\ ordem\ 3$$

Assim, a PA do exemplo é de terceira ordem.

2.5.2. Teorema do Termo Geral

$$\boxed{\boldsymbol{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)\ PA\ de\ ordem\ k \Leftrightarrow a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \cdots + A_1 n^1 + A_0}}$$

Se encontrarmos uma PA de ordem k, podemos escrever o seu termo geral em função de um polinômio de grau k em n.

$A_i, 0 \leq i \leq k$, é o coeficiente do polinômio.

$$a_n = A_k n^k + A_{k-1} n^{k-1} + A_{k-2} n^{k-2} + \cdots + A_1 n^1 + A_0$$

Vamos encontrar o termo geral da seguinte PA de ordem superior:

$$(1, 2, 4, 7, 11, \dots)$$

Vimos que essa sequência é uma PA de ordem 2 (exemplo do tópico anterior). Então de acordo com o teorema, podemos escrever seu termo geral como um polinômio de grau 2:

$$a_n = An^2 + Bn + C$$

Precisamos encontrar os valores de A, B, C. Para isso, podemos obter esses valores através dos dados da PA de ordem 2. Como temos três variáveis, devemos ter três equações para encontrar seus valores (para encontrar os coeficientes do polinômio com n variáveis, devemos ter n equações).

$$a_1 = 1 \Rightarrow A(1)^2 + B(1) + C = 1 \Rightarrow A + B + C = 1$$
$$a_2 = 2 \Rightarrow A(2)^2 + B(2) + C = 2 \Rightarrow 4A + 2B + C = 2$$
$$a_3 = 4 \Rightarrow A(3)^2 + B(3) + C = 4 \Rightarrow 9A + 3B + C = 4$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 & (I) \\ 4A + 2B + C = 2 & (II) \\ 9A + 3B + C = 4 & (III) \end{cases}$$

Fazendo $(III) - (II)$ e $(II) - (I)$:

$$(III) - (II): 5A + B = 2 \ \ (IV)$$
$$(II) - (I): 3A + B = 1 \ \ (V)$$
$$(IV) - (V): 2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/2$ em (V):

$$3A + B = 1 \Rightarrow 3\left(\frac{1}{2}\right) + B = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

Substituindo A e B em (I):

$$A + B + C = 1$$
$$\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + C = 1 \Rightarrow C = 1$$

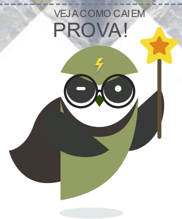
Logo, o termo geral é dado por:

$$a_n = \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1$$

2.5.3. Teorema da Soma dos Termos

$$\boxed{\boldsymbol{(a_1, a_2, \dots, a_n)\ PA\ de\ ordem\ K \rightarrow S_n = A_{k+1} n^{k+1} + A_k n^k + \cdots + A_1 n + A_0}}$$

A soma dos termos de uma PA de k-ésima ordem é dada por um polinômio de grau $k + 1$ na variável n, sendo n o número de termos da sequência.



8. **(IME/2000)** Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Resolução:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

Queremos um polinômio de grau n que representa a soma acima. Analisemos os termos dessa soma. Sabemos que cada termo é da forma $a_k = k^2$, logo:

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \rightarrow (1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2)$$

Perceba que subtraindo os termos consecutivos dessa sequência, obtemos uma PA estacionária:

$$\underbrace{(3, 5, 7, 9, 11, \ldots)}_{PA\ de\ razão\ 2}$$

Logo, a sequência formada pelos termos da soma do problema é uma PA de ordem 2. De acordo com o teorema da soma, podemos escrever S_n como um polinômio de grau 3:

$$S_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$$

Temos 4 incógnitas (A, B, C, D), então precisamos de 4 equações:

$$S_1 = A(1)^3 + B(1)^2 + C(1) + D = A + B + C + D = 1 \quad (I)$$

$$S_2 = A(2)^3 + B(2)^2 + C(2) + D = 8A + 4B + 2C + D = 5 \quad (II)$$

$$S_3 = A(3)^3 + B(3)^2 + C(3) + D = 27A + 9B + 3C + D = 14 \quad (III)$$

$$S_4 = A(4)^3 + B(4)^2 + C(4) + D = 64A + 16B + 4C + D = 30 \quad (IV)$$

$(IV) - (III)$:

$$37A + 7B + C = 16 \quad (V)$$

$(III) - (II)$:

$$19A + 5B + C = 9 \quad (VI)$$

$(II) - (I)$:

$$7A + 3B + C = 4 \quad (VII)$$

$(V) - (VI)$:

$$18A + 2B = 7 \quad (VIII)$$

$(VI) - (VII)$:

$$12A + 2B = 5 \quad (IX)$$

$(VIII) - (IX)$:

$$6A = 2 \Rightarrow A = \frac{1}{3}$$

Substituindo $A = 1/3$ em (IX):

$$12\left(\frac{1}{3}\right) + 2B = 5$$
$$4 + 2B = 5$$
$$B = \frac{1}{2}$$

Substituindo $A = 1/3$ e $B = 1/2$ em (VII):

$$7\left(\frac{1}{3}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\right) + C = 4$$
$$\frac{7}{3} + \frac{3}{2} + C = 4$$
$$\frac{(14 + 9)}{6} + C = 4$$
$$\frac{23}{6} + C = 4$$
$$C = \frac{24}{6} - \frac{23}{6} = \frac{1}{6}$$

Substituindo A, B, C em (I):

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + D = 1$$
$$\frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{1}{6} + D = 1$$
$$\frac{6}{6} + D = 1$$
$$D = 0$$

Assim, obtemos o polinômio:

$$S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$

3. Progressão Geométrica (PG)

3.1. Definição

Uma sequência é uma progressão geométrica quando sua lei de formação é dada por:

$$\boxed{\begin{matrix} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1}q \end{matrix}}$$

a_1 é o primeiro termo da PG e q é sua razão.
$a_n = a_{n-1}q$ é a fórmula de recorrência da PG.
Exemplo:
1) $(1, 3, 9, 27, \ldots)$

PG cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e sua razão é:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{1} = 3$$

3.2. Termo Geral

O termo geral da PG é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

Também podemos escrever o termo geral em função de um termo qualquer da PG.
Usando o termo geral, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_p = a_1 q^{p-1}$$

Dividindo as duas equações:

$$\frac{a_n}{a_p} = \frac{a_1}{a_1}\frac{q^{n-1}}{q^{p-1}}$$
$$a_n = a_p q^{(n-1)-(p-1)}$$
$$\boxed{a_n = a_p q^{(n-p)}}$$

3.3. Propriedades

3.3.1. Termos Equidistantes

$$\boxed{a_1 a_n = a_2 a_{n-1} = a_3 a_{n-2} = \cdots = a_{j+1} a_{n-j} = cte}$$

O produto dos termos equidistantes é um valor constante e a soma dos índices é igual à $n + 1$.

3.3.2. Soma dos Termos da PG finita

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

3.3.3. Soma dos Termos da PG infinita

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}, -1 < q < 1}$$

Quando temos uma PG infinita de razão absoluta menor que 1, a soma dos seus termos converge para $a_1/(1 - q)$.

3.3.4. Produto dos Termos da PG

O produto dos termos de uma PG é dado por:

$$\boxed{P_n = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

O produto dos termos de uma sequência também pode ser representado dessa forma:

$$P_n = \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 a_2 a_3 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$\prod$ é o símbolo usado para representar o produtório de uma sequência. Ela parte do termo de índice $j = 1$ e vai até o termo de índice n.

Para n ímpar, podemos escrever:

$$\boxed{P_n = \left(a_{\frac{n+1}{2}}\right)^n}$$

Onde $a_{\frac{n+1}{2}}$ é o termo médio da PG.

3.3.5. Média Geométrica

$$\boxed{a_j^2 = a_{j-1} a_{j+1}}$$

Essa propriedade facilita as resoluções das questões de PG, pois conseguimos expressar os termos sem usar a razão.

3.3.6. Notação Especial

$$\textbf{PG com 3 termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2) \text{ ou } \left(\frac{x}{q}, x, xq\right)}$$

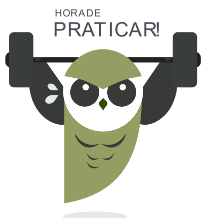
$$\textbf{PG com 4 termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2, xq^3) \text{ ou } \left(\frac{x}{y^3}, \frac{x}{y}, xy, xy^3\right)}$$

$$\textbf{PG com 5 termos:}$$

$$\boxed{(x, xq, xq^2, xq^3, xq^4) \text{ ou } \left(\frac{x}{q^2}, \frac{x}{q}, x, xq, xq^2\right)}$$

Note que a razão da PG com 4 termos é $q = y^2$.



(Exercícios de Fixação)

9. Dado a PG $(2, -4, 8, -16, 32, \ldots)$, calcule:

a) a_{20}

b) a_{30}

Resolução:

a) Para calcular os termos da PG, precisamos encontrar sua razão. Podemos aplicar a fórmula de recorrência:

$$a_2 = a_1 q$$

$$q = \frac{a_2}{a_1}$$

Observando a sequência, $a_2 = -4$ e $a_1 = 2$. Substituindo na fórmula acima:

$$q = \frac{-4}{2} = -2$$

Usando o termo geral para calcular a_{20}:

$$a_{20} = a_1 q^{20-1} = a_1 q^{19}$$

$$a_{20} = 2(-2)^{19} = -2^{20}$$

b) Conhecemos a razão e o termo inicial, vamos aplicar o termo geral:

$$a_{30} = a_1 q^{30-1} = a_1 q^{29}$$

$$a_{30} = 2(-2)^{29} = -2^{30}$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{a_{20} = -2^{20}}$ b) $\boldsymbol{a_{30} = -2^{30}}$

10. Dado $a_3 = 9$ e $a_6 = 243$, termos de uma PG. Calcule a_{100}.

Resolução:

Vamos usar o termo geral para encontrar a razão:

$$a_n = a_p q^{n-p}$$

$$a_6 = a_3 q^{6-3}$$

$$a_6 = a_3 q^3$$

$$243 = 9q^3$$

$$q^3 = \frac{243}{9} = 27 = 3^3$$

$$q^3 = 3^3$$

$$q = 3$$

Agora, aplicando o termo geral para a_{100}:

$$a_{100} = a_3 q^{100-3} = a_3 q^{97}$$

Sabemos que $a_3 = 9$ e $q = 3$, dessa forma:

$$a_{100} = 9(3)^{97} = 3^2 3^{97} = 3^{99}$$

Gabarito: $\boldsymbol{a_{100} = 3^{99}}$

11. Que número deve ser somado aos termos da sequência $(-2, 8, 68)$ para que se tenha uma PG?

Resolução:

Temos que descobrir o valor de x para que a sequência $(-2 + x, 8 + x, 68 + x)$ seja uma PG.

Vamos escrever a razão em função dos termos. Veja:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8+x}{-2+x}$$

$$q = \frac{a_3}{a_2} = \frac{68+x}{8+x}$$

Igualando as duas equações, obtemos:

$$\frac{8+x}{-2+x} = \frac{68+x}{8+x}$$

Resolvendo a equação:

$$(8+x)^2 = (68+x)(-2+x)$$

$$64 + 16x + x^2 = -136 + 66x + x^2$$

$$200 = 50x$$

$$x = 4$$

Substituindo $x = 4$ em uma das equações para encontrar o valor da razão:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{8+x}{-2+x} = \frac{8+4}{-2+4} = \frac{12}{2} = 6$$

Portanto, se adicionarmos 4 a cada termo da sequência, obteremos uma PG de razão $q = 6$.

Gabarito: $x = 4$

12. Quantos termos tem a PG $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots, \frac{1}{2048}\right)$?

Resolução:

Vamos encontrar a razão da PG:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

Agora, podemos escrever o último termo em função de n:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Substituindo os valores:

$$\frac{1}{2048} = 1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Pela fatoração $2048 = 2^{11}$

Desse modo:

$$\frac{1}{2^{11}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Igualando os expoentes:

$$11 = n - 1$$

$$n = 12$$

Gabarito: $n = 12$

13. Em uma PG com 3 termos, a soma dos seus termos é 31 e o produto deles é 125. Obtenha a PG.

Resolução:

Vamos escrever a PG usando a notação especial para 3 termos:

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

Segundo o enunciado, temos:

$$P_3 = a_1 a_2 a_3 = 125$$
$$P_3 = \left(\frac{x}{q}\right) x(xq) = 125$$
$$x^3 = 5^3$$
$$x = 5$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 31$$
$$S_3 = \frac{x}{q} + x + xq = 31$$
$$x\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 31$$

Substituindo $x = 5$ na equação:

$$5\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = 31$$

Resolvendo a equação:

$$\frac{5(1 + q + q^2)}{q} = 31$$
$$5 + 5q + 5q^2 = 31q$$
$$5q^2 - 26q + 5 = 0$$

Temos que encontrar as raízes dessa equação quadrática:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$q = \frac{-(-26) \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5}}{2 \cdot 5}$$
$$q = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 100}}{10} = \frac{26 \pm \sqrt{576}}{10} = \frac{26 \pm 24}{10} = 5 \; ou \; \frac{1}{5}$$

Assim, encontramos duas razões e consequentemente temos duas PGs.

$$q = 5 \Rightarrow \left(5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right), 5, 5 \cdot 5\right) = (1, 5, 25)$$

A outra razão é o inverso dessa que acabamos de encontrar.

$$q' = \frac{1}{5} = \frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{x}{q'}, x, xq'\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{\frac{1}{q}}, x, x\left(\frac{1}{q}\right)\right) \Rightarrow \left(xq, x, \frac{x}{q}\right)$$

A segunda PG possui os mesmos termos que a primeira com a ordem invertida:

$$(25, 5, 1)$$

Gabarito: $\mathbf{(1, 5, 25)}$ **ou** $\mathbf{(25, 5, 1)}$

14. Determine a soma de todos os divisores positivos de 8192.

Resolução:

Vamos fatorar o número 8192:

8192	2
4096	2
2048	2
1024	2
512	2
256	2
128	2
64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

Assim, podemos escrever:

$$8192 = 2^{13}$$

Os divisores do número 8192 serão todos os números que podem ser formados pelos fatores de 8192. Os números pertencem à sequência:

$$(2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^{13})$$

Note que a sequência é uma PG de razão $q = 2$.

Vamos usar a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

2^0 até 2^{13} são 14 números, logo $n = 14$.

$q = 2$ e $a_1 = 2^0 = 1$.

Substituindo os valores:

$$S_{14} = \frac{1(2^{14} - 1)}{2 - 1} = 2^{14} - 1$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = 2^{14} - 1}$

15. Simplifique:

$$\frac{(x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n})}{(x + x^2 + \cdots + x^n)}$$

Resolução:

Temos uma soma de PG finita no numerador e no denominador da fração.

Vamos primeiro simplificar o numerado usando a fórmula da soma da PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Para a sequência $x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$, a razão é $q = \frac{x^4}{x^2} = x^2$ e $a_1 = x^2$.

Vamos encontrar o número de termos dessa PG:

$$a_m = a_1 q^{m-1}$$
$$a_m = x^{2n}$$
$$x^{2n} = x^2(x^2)^{m-1}$$
$$x^{2n-2} = (x^2)^{m-1}$$
$$(x^2)^{n-1} = (x^2)^{m-1}$$
$$m = n$$

Logo, a quantidade de termos dessa PG é n.

Podemos escrever:

$$S_n = \frac{x^2((x^2)^n - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^{2n} - 1)}{x^2 - 1} = \frac{x^2(x^n - 1)(x^n + 1)}{(x - 1)(x + 1)}$$

Usando o mesmo raciocínio para o denominador:

$x + x^2 + \cdots + x^n$ possui n termos e sua razão é $q = x$.

$$s_n = \frac{x(x^n - 1)}{x - 1}$$

A fração que temos que simplificar é dado por:

$$\frac{S_n}{s_n} = \frac{\frac{x^2(x^n - 1)(x^n + 1)}{(x - 1)(x + 1)}}{\frac{x(x^n - 1)}{x - 1}} = \frac{x(x^n + 1)}{x + 1}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{x(x^n+1)}{x+1}}$

16. Calcule a soma:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Resolução:

Veja:

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots$$

Essa é uma soma de duas progressões geométricas infinitas:

$$S'=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ ½$$

$$S''=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\cdots\Rightarrow Soma\ de\ PG\ de\ razão\ 1/3$$

Usando a fórmula da soma da PG infinita para cada sequência, temos:

$$S'=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1$$

$$S''=\frac{b_1}{1-q}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

Dessa forma, a soma da questão é dada por:

$$S=S'+S''=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

Gabarito: $S=3/2$

4. Progressão Aritmética Geométrica (PAG)

Entre as sequências, podemos ter uma que é a união de uma PA com uma PG. Essa sequência chama-se progressão aritmética geométrica.

Definição:

O termo geral de uma PAG é dado por:

$$\boxed{a_n=[a_1+(n-1)r]q^{n-1}}$$

Exemplo:

$$1)\ \left(\frac{1}{1},\frac{2}{2},\frac{3}{4},\frac{4}{8},\frac{5}{16},\ldots\right)$$

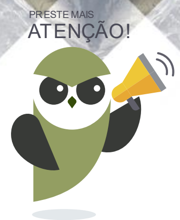
Perceba que o numerador é uma PA de razão 1 $(1,2,3,4,5,\ldots)$ e o denominador é uma PG de razão 2 $(1,2,4,8,16,\ldots)$. Essa sequência é uma PAG.

Para a PAG, a razão r é igual a 1 e a razão q é igual a $1/2$.

O termo geral é:

$$a_n=[a_1+(n-1)r]q^{n-1}$$

$$a_n=[1+(n-1)1]\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^{n-1}}=n2^{1-n}$$



As questões que podem cair na prova sobre PAG normalmente cobrarão a soma dos termos da PAG. Vamos aprender a resolver esse tipo de questão.

Considere o termo inicial da PAG $a_1 = a$ e razões r e q.

Vamos calcular:

$$S = a + [(a+r)q] + [(a+2r)q^2] + [(a+3r)q^3] + \cdots$$

O bizu dessa questão é multiplicar S por q e fazer $S - Sq$. Veja:

$$Sq = aq + [(a+r)q^2] + [(a+2r)q^3] + [(a+3r)q^4] + \cdots$$

Fazendo $S - Sq$:

$$S - Sq = a + [(a+r)q] + [(a+2r)q^2] + [(a+3r)q^3] + \cdots$$
$$-\{aq + [(a+r)q^2] + [(a+2r)q^3] + [(a+3r)q^4] + \cdots\}$$

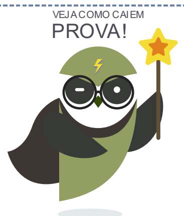
Repare que os termos com as cores correspondentes podem ser subtraídos. Dessa forma, obtemos:

$$S(1-q) = a + rq + rq^2 + rq^3 + rq^4 + \cdots$$
$$S = \frac{a + rq(1 + q + q^2 + q^3 + \cdots)}{1-q}$$

Se $-1 < q < 1$, podemos aplicar a fórmula da PG infinita em $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots$:

$$S = \frac{a + rq\left(\frac{1}{1-q}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} + \frac{rq}{(1-q)^2}$$

Encontramos uma fórmula para a soma de uma PAG de razão $-1 < q < 1$.



17. **(ITA/1975/Modificada)** Calcule $S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$

Resolução:

A questão é antiga, mas não se iluda! O ITA já cobrou questões antigas em provas recentes e a questão foi exatamente a mesma. Então vamos aprender a resolvê-la.

Perceba que a soma S é de uma PAG com razão $r = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

Vamos usar o bizu para a resolução da soma da PAG.

Multiplicando S por $q = \frac{1}{2}$:

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots$$

Comparando com S:

$$S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots$$

Fazendo $S - S/2$:

$$S - \frac{S}{2} = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + \cdots - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \cdots\right)$$

Note que os termos coloridos podem ser subtraídos. Assim, encontramos uma sequência conhecida:

$$\frac{S}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \cdots$$

Obtemos a soma de uma PG de razão $1/2$.

Como a razão é maior que -1 e menor que 1, podemos usar a fórmula da PG infinita:

$$\frac{S}{2} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{S}{2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$S = 4$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = 4}$

18. (ITA/1977/Modificada) Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + (k+1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se n é um inteiro maior que 2. Obtenha $S_n, n \in \mathbb{N}, n > 2$.

Resolução:

Vamos usar o bizu e calcular S_n.

Temos as razões $r = 1$ e $q = x$.

$$S_n = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n+1)x^n$$

Multiplicando S_n por $q = x$:

$$S_n x = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots + (n+1)x^{n+1}$$

Subtraindo as duas equações:

$$S_n - S_n x = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - (n+1)x^{n+1}$$

Aplicando a soma da PG finita para a soma $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ (perceba que temos $n+1$ termos nessa sequência):

$$S_n(1 - x) = \frac{1(x^{n+1} - 1)}{x - 1} - (n+1)x^{n+1}$$

Multiplicando por -1:

$$S_n(x - 1) = (n+1)x^{n+1} - \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

Isolando o termo S_n:

$$S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x - 1} - \frac{(x^{n+1} - 1)}{(x - 1)^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S_n = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}}$

5. Série Telescópica

Série telescópica é qualquer somatório da forma:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k+1) - f(k) = f(n+1) - f(1)$$

Das várias séries telescópicas, estudaremos a série telescópica-aritmética.

Vamos aprender a resolvê-la.

Considere uma sequência da forma:

$$\left(\frac{1}{a_1a_2}, \frac{1}{a_2a_3}, \frac{1}{a_3a_4}, \frac{1}{a_4a_5}, \dots\right)$$

$a_i, i \in \mathbb{N}$, é o termo de uma PA de primeira ordem de razão r.

A sua soma é dada por:

$$S_n = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

O bizu para resolver essa soma é escrever os termos da sequência dessa forma:

$$\boxed{\frac{1}{a_na_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)}$$

Veja:

Para $r \neq 0$, vamos escrever os termos da sequência como a diferença dos termos consecutivos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} = \frac{r}{a_1a_2}$$

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{r}{a_1a_2}$$

$$\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} = \frac{r}{a_2a_3}$$

$$\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} = \frac{r}{a_3a_4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{r}{a_{n-1}a_n}$$

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{r}{a_na_{n+1}}$$

Note que somando os termos, os termos coloridos se cancelarão. Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} = r\left(\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}}\right)$$

$$\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_4a_5} + \dots + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Perceba que a expressão do lado esquerdo é a soma telescópica. Logo, podemos escrever:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Também podemos escrever:

$$\boxed{\frac{1}{a_na_{n+1}} \equiv \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}}$$

Demonstração:

$$\frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_na_{n+1}}$$

$$\frac{Aa_{n+1} + Ba_n}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$$

Da igualdade das frações:

$$Aa_{n+1} + Ba_n = 1$$

Como a_{n+1} é um termo de uma PA de razão r:

$$A(a_n + r) + Ba_n = 1$$
$$(A + B)a_n + Ar = 1$$

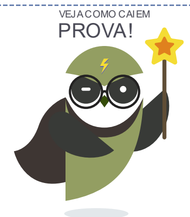
Ar é uma constante e a_n é um termo que possui valor dependente de n.

Para encontrar a solução dessa equação, devemos ter:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$
$$Ar = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{r} \Rightarrow B = -\frac{1}{r}$$

Assim, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} \equiv \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$



19. **(IME/1996)** Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Resolução:

Essa expressão é uma soma telescópica. Apesar da questão ser antiga, pode ser que ela seja cobrada no seu vestibular. O IME adora questões que exigem que o aluno já tenha visto algo parecido durante sua preparação.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar A e B:

$$\frac{1}{1\cdot 4} = \frac{A}{1} + \frac{B}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} = A + \frac{B}{4} \Rightarrow A = \frac{1-B}{4} \quad (I)$$
$$\frac{1}{4\cdot 7} = \frac{A}{4} + \frac{B}{7} \Rightarrow \frac{1}{28} = \frac{A}{4} + \frac{B}{7} \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II) para encontrar B:

$$\frac{1}{28} = \frac{\frac{1-B}{4}}{4} + \frac{B}{7}$$
$$\frac{1}{28} = \frac{1-B}{16} + \frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28} = \frac{(1-B)7 + B \cdot 16}{16 \cdot 7}$$

$$16 \cdot \frac{7}{28} = (1-B)7 + B \cdot 16$$

$$4 = 7 - 7B + 16B$$

$$-3 = 9B$$

$$B = -\frac{1}{3}$$

Substituindo B em (I):

$$A = \frac{1-B}{4} = \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4} = \frac{1+\frac{1}{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3}$$

Encontramos $A = 1/3$ e $B = -1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} - \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de S:

$$S = \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998 \cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2995} - \frac{1}{2998}\right) + \left(\frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{2995}} - \cancel{\frac{1}{2998}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2998}} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3001}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r = 3$, $a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3001}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Gabarito: $S = \frac{1000}{3001}$

20. (IME/1966) Calcule:

$$S = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

Resolução:

Perceba que os termos possuem a forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

a_n é o termo de uma PA de primeira ordem de razão $r = 2$.

Vamos reescrever os termos usando o bizu:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{A}{a_n a_{n+1}} + \frac{B}{a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{A(a_{n+2}) + B(a_n)}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$$

$$A(a_{n+2}) + B(a_n) = 1$$

Escrevendo $a_{n+2} = a_n + 2r$:

$$A(a_n + 2r) + B(a_n) = 1$$

$$(A+B)a_n + 2Ar = 1$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$2Ar = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2r} \Rightarrow B = -\frac{1}{2r}$$

Dessa forma, obtemos:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}} = \frac{1}{2r}\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}}\right)$$

Reescrevendo a soma usando essa forma e substituindo $r = 2$:

$$S = \frac{1}{1\cdot 3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 7} + \frac{1}{5\cdot 7\cdot 9} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$S = \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5}\right) + \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7}\right) + \cdots + \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{1}{(2n+1)\cdot(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+5)}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 5} - \frac{1}{5\cdot 7} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

$$S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$$

Gabarito: $S = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right)$

6. Lista de Questões

21. (ITA/2020)

Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

22. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

23. (ITA/2019/Modificada)

Classifique a afirmação:

Se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

24. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreve $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $mdc(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n.

25. (ITA/2017)

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) -140

b) -120

c) 0

d) 120

e) 140

26. (ITA/2015)

Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C,$ e os números $1, C, E,$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números $B, C, D, E,$ estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

27. (ITA/2015)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

28. (ITA/2012)

Sabe-se que $(x + 2y, 3x - 5y, 8x - 2y, 11x - 7y + 2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60

b) -30

c) 0

d) 30

e) 60

29. (ITA/2010)

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

30. (ITA/2006)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

31. (ITA/2005)

Seja $a_1, a_2, \dots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2, \; para\; n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

32. (IME/2019)

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

33. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

34. (IME/2017)

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

35. (IME/2016)

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

36. (IME/2014)

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\dots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\dots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\dots0}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

37. (IME/2014)

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) 1

38. (IME/2010)

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

39. (IME/1996)

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998 \cdot 3001}$$

40. (OBM)

O número $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2000^2} + \frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros.

41. (ITA/2021)

Um relógio digital mostra o horário no formato $\boldsymbol{H} : \boldsymbol{M} : \boldsymbol{S}$, onde $\boldsymbol{H}$ é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, $\boldsymbol{M}$ é um inteiro representando os minutos e $\boldsymbol{S}$ é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia $(\boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{S})$ são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

42. (ITA/2021)

O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;

(b) o produto dos 7 primeiros termos.

43. (IME/2021)

Uma sequência é gerada pelo produto dos termos correspondentes de duas progressões aritméticas de números inteiros. Os três primeiros termos dessa sequência são 3053, 3840 e 4389. O sétimo termo da sequência é:

a) 3035

b) 4205

c) 4398

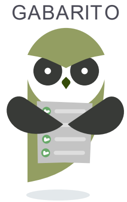
d) 4608

e) 5063

44. (IME/2021)

Considere uma progressão aritmética (PA) de números inteiros com razão $\boldsymbol{p > 2}$, seu primeiro termo maior do que 2 e seu último termo menor do que 47. Retirando-se uma determinada quantidade de elementos da PA, recai-se em uma PG de 3 elementos e razão $\boldsymbol{q > 2}$. Para $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ inteiros, $\boldsymbol{p}$ diferente de $\boldsymbol{q}$, determine a PA cuja soma de seus elementos seja a maior possível.

7. Gabarito



21. d
22. c
23. Verdadeira.
24. a) $(4, 6, 9), (8, 12, 18)\ e\ (12, 18, 27)$ b) $n = 4$
25. d
26. $B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$
27. d
28. $xyz = -60$
29. d
30. $a + r = 11$
31. $r = \frac{2\pi}{3}$ e $a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$
32. 5 termos
33. d
34. a
35. $j = 12$
36. $\underbrace{333\ldots 3}_{30\ algs}$
37. b
38. c
39. $S = \frac{1000}{3001}$
40. $\frac{4004000}{2001}$
41. $n_T = 624$
42. a) $S_{40} = 0$ b) $P_7 = -1$
43. b
44. $(\mathbf{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44})$

8. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

21. (ITA/2020)

Sejam a, b e c números reais, $a \neq 0$, tais que $a^2 + b^2 = c^2$. Se a, b e c formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão k, então o produto P e a soma S de todos os possíveis valores para k são iguais a

a) $P = 1$ e $S = 0$.

b) $P = -1$ e $S = 1$.

c) $P = -1$ e $S = -1$.

d) $P = \frac{-(1+\sqrt{5})}{2}$ e $S = 0$.

e) $P = \frac{(1+\sqrt{5})^2}{4}$ e $S = 0$.

Comentários

Vamos reescrever a sequência (a, b, c) como $\left(\frac{b}{k}, \text{b}, bk\right)$ para simplificar as contas.

Assim, a partir do enunciado, podemos escrever:

$$\left(\frac{b}{k}\right)^2 + b^2 = (bk)^2$$

$$\frac{b^2}{k^2} + b^2 = b^2k^2$$

$$b^2k^2 - b^2 - \frac{b^2}{k^2} = 0$$

Como $a \neq 0$, implica que $b \neq 0$, dessa forma, temos:

$$k^2 - 1 - \frac{1}{k^2} = 0$$

$$k^4 - k^2 - 1 = 0$$

Façamos $y = k^2$

$$y^2 - y - 1 = 0$$

$$y = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$y_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

ou

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow k^2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

Como k é um número real, temos que não existe $k^2 < 0$. Logo:

$$\Rightarrow k = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

Assim,

$$P = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \cdot \left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$S=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+\left(-\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)=0$$

Gabarito: "d".

22. (ITA/2020)

A cada aniversário, seu bolo tem uma quantidade de velas igual à sua idade. As velas são vendidas em pacotes com 12 unidades e todo ano é comprado apenas um novo pacote. As velas remanescentes são guardadas para os anos seguintes, desde o seu primeiro aniversário. Qual a sua idade, em anos, no primeiro ano em que as velas serão insuficientes?

a) 12.

b) 23.

c) 24.

d) 36.

e) 38.

Comentários

Veja que a quantidade de velas gastas a cada aniversário pode ser vista como uma progressão aritmética de razão 1.

Aniversário	Velas gastas
1º	1
2º	2
3º	3
⋮	⋮
nº	n

Assim, o total de velas gastas até o n-ésimo aniversário é:

$$V_T=\frac{(1+n)n}{2}$$

Como todo ano um novo pacote de 12 velas é compradas, temos até o n-ésimo aniversário:

$$12n-\frac{(1+n)n}{2}\text{ velas remanescentes}$$

O primeiro ano em que as velas serão insuficientes ocorrerá quando as velas remanescentes satisfazerem a condição:

$$12n-\frac{(1+n)n}{2}<0\Rightarrow 12n<\frac{(1+n)n}{2}$$

Sendo n a idade, temos que $n\neq 0$, logo:

$$12<\frac{1+n}{2}\Rightarrow 24<1+n\Rightarrow 23<n\therefore n>23$$

O menor inteiro que satisfaz essa condição é $n=24$.

Gabarito: "c".

23. (ITA/2019/Modificada)

Classifique a afirmação:

Se a, b e c são números reais positivos que formam, nessa ordem, uma progressão aritmética, então $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}},\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formam, nessa ordem, uma progressão aritmética.

Comentários

Se a, b e c formam, nessa ordem, uma PA então podemos escrever:

$$b = a + r$$

$$c = a + 2r$$

Veja que:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}\frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{\sqrt{b}-\sqrt{c}} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{b-c} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{c}}{-r} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r}$$

Analogamente:

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}\frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{\sqrt{c}-\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{c-a} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{2r}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b} = \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{-r} = \frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}$$

Então para a sequência $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ formar uma PA nessa ordem, devemos ter:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

Vamos tentar encontrar essa relação.

Calculando $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{b}}{r} + \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{r}\right) = \frac{\sqrt{c}-\sqrt{a}}{r}$$

Vamos multiplicar o numerador e o denominador por $\sqrt{c}+\sqrt{a}$:

$$\frac{(\sqrt{c}-\sqrt{a})}{r}\frac{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Da condição (a, b, c) ser uma PA:

$$c = a + 2r \Rightarrow c - a = 2r$$

Substituindo $c = 2r$ na equação $\frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$:

$$\frac{c-a}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{2r}{r(\sqrt{c}+\sqrt{a})} = \frac{2}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

Portanto:

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{2}{(\sqrt{c}+\sqrt{a})}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$$

∴Verdadeira.

Gabarito: Verdadeira.

24. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, \dots, 29, 30\}$ o conjunto dos números inteiros de 1 a 30 e (a_1, a_2, a_3) uma progressão geométrica crescente com elementos de A e razão $q > 1$.

a) Determine todas as progressões geométricas (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$.

b) Escreve $q = \frac{m}{n}$, com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $mdc(m, n) = 1$. Determine o maior valor possível para n.

Comentários

a) Temos que encontrar todas as progressões geométricas da forma (a_1, a_2, a_3) de razão $q = \frac{3}{2}$. Cada PG é formada pelos elementos de $A = \{1, 2, \dots, 30\}$.

Vamos escrever a PG em função do a_1 e de $q = 3/2$:

$$(a_1, a_2, a_3)$$

$$(a_1, a_1 q, a_1 q^2)$$

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{3}{2}\right), a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$\left(a_1, \frac{3a_1}{2}, \frac{9a_1}{4}\right)$$

Os elementos da PG são elementos de A, um conjunto de números inteiros de 1 a 30.

Assim, $a_1, \frac{3a_1}{2}, \frac{9a_1}{4}$ devem ser números inteiros e o último termo da PG deve ser menor ou igual a 30, pois este é o maior número elemento de A:

$$\frac{9a_1}{4} \leq 30$$

Disso, encontramos que a_1 deve ser múltiplo de 4, já que $\frac{9a_1}{4}$ deve ser inteiro.

Vamos encontrar as sequências:

$$a_1 = 4$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 4\left(\frac{3}{2}\right) = 6$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right) = 9$$

$(4, 6, 9)$ é a primeira PG

$$a_1 = 8$$

$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 8\left(\frac{3}{2}\right) = 12$$

$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 8\left(\frac{9}{4}\right) = 18$$

$(8, 12, 18)$ é a segunda PG

$$a_1 = 12$$
$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 12\left(\frac{3}{2}\right) = 18$$
$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 12\left(\frac{9}{4}\right) = 27$$
$(12, 18, 27)$ é a terceira PG

$$a_1 = 16$$
$$a_2 = a_1\left(\frac{3}{2}\right) = 16\left(\frac{3}{2}\right) = 24$$
$$a_3 = a_1\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 16\left(\frac{9}{4}\right) = 36 > 30 \Rightarrow não\ satisfaz\ a\ condição$$

Portanto, temos apenas três progressões geométricas que satisfazem a condição:

$$(4, 6, 9), (8, 12, 18)\ e\ (12, 18, 27)$$

b) Se $mdc(m, n) = 1 \to m$ e n são primos entre si. A PG pode ser representada por:

$$(a_1, a_2, a_3)$$
$$(a_1, a_1q, a_1q^2)$$
$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m}{n}\right)^2\right)$$
$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

Como os termos dessa PG são elementos de A, um conjunto de inteiros:

$$a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right) deve\ ser\ inteiro \to a_1\ é\ múltiplo\ de\ n^2$$

Se a_1 é múltiplo de n^2 e $a_1 \in \{1, 2, 3, \ldots, 30\}$, então a_1 é múltiplo de um número quadrado perfeito (um número quadrado perfeito é da forma x^2, onde x é um número inteiro).

Para a_1 pertencer ao conjunto A, $a_1 < 30$.

A questão pede o maior valor de n. Como a_1 é múltiplo de n^2, a_1 deve também possuir o maior valor possível.

O maior número quadrado perfeito que satisfaz essa condição é $a_1 = 25$

$$a_1 = 25 \Rightarrow n^2 = 25 \Rightarrow n = 5$$

Como $q > 1$ e m, n são primos, para o menor valor de q que satisfaz essa condição, temos:

$$q = \frac{m}{n} = \frac{6}{5}$$

Para esse valor, encontramos a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(25, 25\left(\frac{6}{5}\right), 25\left(\frac{36}{25}\right)\right)$$

$$(25, 30, 36)$$

Perceba que o último termo dessa PG não é elemento de A. Então n^2 deve ser menor que 25. O próximo valor que satisfaz a condição é:

Para $a_1 = 16 \rightarrow n^2 = 16 \rightarrow n = 4$. Esses valores geram a PG:

$$\left(a_1, a_1\left(\frac{m}{n}\right), a_1\left(\frac{m^2}{n^2}\right)\right)$$

$$\left(16, 16\left(\frac{5}{4}\right), 16\left(\frac{25}{16}\right)\right)$$

$$(16, 20, 25)$$

Essa PG satisfaz todas as condições do problema.

$$\therefore n = 4$$

Gabarito: a) $\mathbf{(4, 6, 9), (8, 12, 18)}$ $\boldsymbol{e}$ $\mathbf{(12, 18, 27)}$ b) $\boldsymbol{n = 4}$

---

25. (ITA/2017)

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que a, b, c, d formem, nesta ordem, uma progressão geométrica e que $a, b/2, c/4, d - 140$ formem, nesta ordem, uma progressão aritmética. Então, o valor de $d - b$ é

a) -140

b) -120

c) 0

d) 120

e) 140

Comentários

Do enunciado, (a, b, c, d) é PG:

$$b = aq$$

$$c = aq^2$$

$$d = aq^3$$

$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$ é PA:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$\frac{b}{2} = \frac{a + \frac{c}{4}}{2}$$

$$b = a + \frac{c}{4}$$

Usando as informações da PG na PA, obtemos:

$$aq = a + \frac{aq^2}{4}$$

$$q = 1 + \frac{q^2}{4}$$

$$q^2 - 4q + 4 = 0$$

Fatorando:

$$(q-2)^2 = 0$$

A solução para essa equação é: $q = 2$.

Substituindo $q = 2$ e representando b, c, d em função de a:

$$b = aq = 2a$$

$$c = aq^2 = 4a$$

$$d = aq^3 = 8a$$

Das informações da PA, obtemos:

$$\left(a, \frac{b}{2}, \frac{c}{4}, d - 140\right)$$

$$\left(a, \frac{2a}{2}, \frac{4a}{4}, 8a - 140\right)$$

$$(a, a, a, 8a - 140)$$

Repare nos termos dessa PA. Essa sequência é uma PA de razão $r = 0$, pois

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Então, podemos escrever:

$$a_4 = a$$

$$8a - 140 = a$$

$$7a = 140$$

$$a = 20$$

A questão pede $d - b$:

$$d - b = aq^3 - aq = 20(2)^3 - 20(2) = 160 - 40 = 120$$

$$\therefore d - b = 120$$

Gabarito: "d".

26. (ITA/2015)

Sabe-se que $1, B, C, D$ e E são cinco números reais que satisfazem às propriedades:

I. B, C, D, E são dois a dois distintos;

II. os números $1, B, C,$ e os números $1, C, E,$ estão, nesta ordem, em progressão aritmética;

III. os números $B, C, D, E,$ estão, nesta ordem, em progressão geométrica.

Determine B, C, D, E.

Comentários

Vamos extrair as informações do enunciado.

Da afirmação II, temos:

$$(1, B, C) \text{ PA} \rightarrow B = 1 + r \text{ e } C = 1 + 2r$$

$$(1, C, E) \text{ PA} \rightarrow C = 1 + r' \text{ e } E = 1 + 2r'$$

Igualando os dois valores de C:

$$C = 1 + 2r = 1 + r' \rightarrow r' = 2r$$

Colocando E em função de r:

$$E = 1 + 2r' = 1 + 4r$$

Então, encontramos:

$$B = 1 + r$$

$$C = 1 + 2r$$

$$E = 1 + 4r$$

Da III, (B, C, D, E) estão em PG nesta ordem. Seja q sua razão:

$$C = Bq$$

$$q = \frac{C}{B} = \frac{1 + 2r}{1 + r}$$

Vamos escrever E em função do primeiro termo B e da razão q:

$$E = Bq^3 = (1 + r)\left(\frac{1 + 2r}{1 + r}\right)^3 = \frac{(1 + 2r)^3}{(1 + r)^2}$$

Temos duas equações para E, vamos igualá-las:

$$E = 1 + 4r = \frac{(1 + 2r)^3}{(1 + r)^2}$$

Desenvolvendo a equação e simplificando:

$$(1 + 4r)(1 + r)^2 = (1 + 2r)^3$$

$$(1 + 4r)(1 + 2r + r^2) = 1 + 8r^3 + 3(1)^2(2r) + 3(1)(2r)^2$$

$$1 + 2r + r^2 + 4r + 8r^2 + 4r^3 = 1 + 8r^3 + 6r + 12r^2$$

$$1 + 6r + 9r^2 + 4r^3 = 1 + 6r + 12r^2 + 8r^3$$

$$8r^3 - 4r^3 + 12r^2 - 9r^2 + 6r - 6r + 1 - 1 = 0$$

$$4r^3 + 3r^2 = 0$$

$$r^2(4r + 3) = 0$$

As raízes dessa equação são:

$$r = 0 \text{ ou } 4r + 3 = 0$$

Da afirmação I, os termos são dois a dois distintos, logo $r \neq 0$.

$$4r + 3 = 0 \rightarrow r = -\frac{3}{4}$$

Vamos encontrar o valores dos números reais:

$$B = 1 + r = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$C = 1 + 2r = 1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$E = 1 + 4r = 1 + 4\left(-\frac{3}{4}\right) = -2$$

$$(B, C, D, E)\ PG \rightarrow q = \frac{1 + 2r}{1 + r}$$

$$q = \frac{1 + 2\left(-\frac{3}{4}\right)}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)} = -2$$

$$D = Cq = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2) = 1$$

$$\therefore B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$$

Gabarito: $B = \frac{1}{4}, C = -\frac{1}{2}, D = 1, E = -2$

---

27. (ITA/2015)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ a sequência definida da seguinte forma: $a_1 = 1, a_2 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ para $n \geq 3$. Considere as afirmações a seguir:

I. Existem três termos consecutivos, a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, que, nesta ordem, formam uma progressão geométrica.

II. a_7 é um número primo.

III. Se n é múltiplo de 3, então a_n é par.

É (são) verdadeira(s)

a) apenas II.

b) apenas I e II.

c) apenas I e III.

d) apenas II e III.

e) I, II e III.

Comentários

A sequência da questão é conhecida como sequência de Fibonacci. Vamos analisar as afirmações:

I. Pela definição da sequência, podemos escrever:

$$a_{p+2} = a_{p+1} + a_p$$

Se (a_p, a_{p+1}, a_{p+2}) for uma PG de razão q, podemos escrever:

$$a_p q^2 = a_p q + a_p$$

$$q^2 = q + 1$$
$$q^2 - q - 1 = 0$$

Temos que resolver uma equação de segundo grau. Podemos encontrá-lo usando a fórmula:

$$q = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Da equação, temos $a = 1, b = -1, c = -1$:

$$q = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-1)}}{2(1)}$$
$$q = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Encontramos uma razão irracional. Então, se multiplicarmos a_p pela razão q, um número irracional, obteremos a_{p+1}, um número irracional. Pela definição da sequência de Fibonacci, seus termos são a soma dos dois anteriores. A sequência é formada apenas por números inteiros positivos, logo é impossível ter números irracionais na sequência.

∴Falsa.

II. Vamos ver se a_7 é um número primo. A sequência de Fibonacci é:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$
$$a_7 = 13$$

13 é número primo

∴Verdadeira.

III. Vamos olhar a sequência:

$$(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots)$$

Perceba que os termos com índices múltiplo de 3 são pares:

$$a_3 = 2, a_6 = 8, a_9 = 34$$

Os dois termos anteriores a estes números são ímpares.

Vamos provar por PIF a propriedade:

1) Já verificamos a sua validade para a_3.

2) Temos que generalizar o resultado.

Hipótese: $n = 3k \in \mathbb{N}, a_{3k}$ é par e a_{3k-1} e a_{3k-2} são ímpares.

Tese: $a_{3(k+1)}$ é par

Supondo a hipótese verdadeira, vamos tentar chegar à tese.

$$a_{3k+1} = a_{3k} + a_{3k-1}$$

a_{3k-1} é ímpar e 3_{3k} é par $\rightarrow a_{3k+1}$ é ímpar

$$3_{3k+2} = a_{3k+1} + a_{3k}$$

a_{3k+1} é ímpar e a_{3k} é par $\rightarrow a_{3k+2}$ é ímpar

$$a_{3k+3} = a_{3k+2} + a_{3k+1}$$

$$a_{3k+2} \text{ é ímpar e } a_{3k+1} \text{ é ímpar} \rightarrow a_{3k+3} \text{ é par}$$

$$a_{3k+3} = a_{3(k+1)} \text{ é par}$$

Pela hipótese conseguimos provar que a tese também é verdadeira. Logo, está provada a propriedade.

∴Verdadeira.

ESCLARECENDO

Considere os números naturais a, b, c:

c será par quando a e b forem ímpares ou a e b forem pares ao mesmo tempo.

Se a for par e b for ímpar, c será ímpar. Veja:

$$a\ par \rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ ímpar \rightarrow b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = 2k + 2k' + 1$$

$$c = 2(k + k') + 1$$

$$k + k' = k'' \in \mathbb{N}$$

$$c = 2k'' + 1$$

$$c \text{ é } ímpar$$

O mesmo resultado é válido se a for ímpar e b for par.

Se a for ímpar e b for ímpar, c será par:

$$a\ ímpar \rightarrow a = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ ímpar \rightarrow b = 2k' + 1, k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = (2k + 1) + (2k' + 1)$$

$$c = 2k + 2k' + 2$$

$$c = 2(k + k' + 1)$$

$$k + k' + 1 = k'' \in \mathbb{N}$$

$$c = 2k''$$

$$c \text{ é } par$$

Se a é par e b é par, c será par:

$$a\ par \rightarrow a = 2k, k \in \mathbb{N}$$

$$b\ par \rightarrow b = 2k', k' \in \mathbb{N}$$

$$c = a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$$

$$k + k' = k''$$

$$c = 2k''$$

$$c \text{ é } par$$

Gabarito: "d".

28. (ITA/2012)

Sabe-se que $(x+2y, 3x-5y, 8x-2y, 11x-7y+2z)$ é uma progressão aritmética com o último termo igual a -127. Então, o produto xyz é igual a

a) -60

b) -30

c) 0

d) 30

e) 60

Comentários

Temos uma PA cujos termos possuem as incógnitas x, y e z. Pelas propriedades da PA, podemos escrever:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$$

$$3x - 5y = \frac{(x+2y) + (8x-2y)}{2}$$

$$3x - 5y = \frac{9x}{2}$$

$$6x - 10y = 9x$$

$$-10y = 3x$$

$$3x + 10y = 0 \ \ (I)$$

Também podemos escrever:

$$a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2}$$

$$8x - 2y = \frac{(3x-5y) + (11x - 7y + 2z)}{2}$$

$$16x - 4y = 14x - 12y + 2z$$

$$2x + 8y - 2z = 0$$

$$x + 4y - z = 0 \ \ (II)$$

A questão afirma que o último termo é igual a -127:

$$11x - 7y + 2z = -127 \ \ (III)$$

Dessa forma, encontramos o sistema linear:

$$\begin{cases} 3x + 10y = 0 \ \ (I) \\ x + 4y - z = 0 \ \ (II) \\ 11x - 7y + 2z = -127 \ \ (III) \end{cases}$$

(A resolução desse sistema será melhor entendida na aula de Sistemas Lineares.)

Vamos resolver esse sistema, somando $2 \cdot (II)$ e (III), obtemos:

$$(2x + 11x) + (8y - 7y) + (2z - 2z) = -127$$

$$13x + y = -127 \ \ (IV)$$

Para encontrar x, podemos fazer $10 \cdot (IV) - (I)$:

$$10 \cdot (IV) = 130x + 10y = -1270$$

$$-(I) = -3x - 10y = 0$$

$$10 \cdot (IV) - (I) = 127x = -1270$$

$$x = -10$$

Substituindo $x = -10$ em (I) para encontrar y:

$$3x + 10y = 0 \ \ (I)$$

$$3(-10) + 10y = 0$$

$$10y = 30$$

$$y = 3$$

Por fim, substituímos $x = -10$ e $y = 3$ em (II) para encontrar z:

$$x + 4y - z = 0 \ \ (II)$$

$$z = x + 4y$$

$$z = (-10) + 4(3)$$

$$z = 2$$

$$xyz = (-10)(3)(2)$$

$$\therefore xyz = -60$$

Gabarito: $xyz = -60$

29. (ITA/2010)

Considere a progressão aritmética $(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ de razão d.

Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3.

b) 6.

c) 9.

d) 11.

e) 14.

Comentários

Pelo enunciado, podemos extrair:

$$S_{10} = \sum_{n=1}^{10} a_n = 10 + 25d$$

$$S_{10} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{10} = 10 + 25d$$

$$S_{50} = \sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$$

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$(a_1, a_2, \dots, a_{50})$ é uma PA de razão d.

A soma de uma PA de razão d é dado pela fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Aplicando a fórmula na primeira somatória:

$$S_{10} = \frac{(a_1 + a_{10})10}{2} = 10 + 25d$$

$$(a_1 + a_{10})5 = 10 + 25d$$

Simplificando:

$$a_1 + a_{10} = 2 + 5d$$

Podemos escrever a_{10} em função de a_1 e d:

$$a_{10} = a_1 + 9d$$

Substituindo a_{10} na equação:

$$a_1 + (a_1 + 9d) = 2 + 5d$$

$$2a_1 = 2 - 4d$$

$$a_1 = 1 - 2d$$

Encontramos uma equação com a_1 e d. Vamos aplicar a fórmula para a segunda somatória e encontrar a outra equação:

$$S_{50} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{50} = 4550$$

$$\frac{(a_1 + a_{50})50}{2} = 4550$$

$$(a_1 + a_{50})25 = 4550$$

$$(a_1 + a_{50}) = 182$$

Escrevendo a_{50} em função de a_1 e d:

$$a_{50} = a_1 + 49d$$

Substituindo na equação e simplificando:

$$\left(a_1 + (a_1 + 49d)\right) = 182$$

$$2a_1 + 49d = 182$$

$$2a_1 = 182 - 49d$$

Temos agora duas equações:

$$(I)\ a_1 = 1 - 2d$$

$$(II)\ 2a_1 = 182 - 49d$$

Vamos encontrar o valor de d, substituindo (I) em (II):

$$2(1 - 2d) = 182 - 49d$$

$$2 - 4d = 182 - 49d$$

$$49d - 4d = 182 - 2$$
$$45d = 180$$
$$\Rightarrow d = 4$$

Substituindo $d = 4$ na (I) para encontrar a_1:

$$a_1 = 1 - 2(4)$$
$$a_1 = 1 - 8 = -7$$

Encontramos o valor de d e a_1, a questão pede $d - a_1$:

$$d - a_1 = 4 - (-7) = 11$$

Gabarito: "d".

---

30. (ITA/2006)

Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é $16/13$, determine o valor de $a + r$.

Comentários

Problema de PG infinita com razão r e $a_1 = a$.

A questão nos dá a soma dos termos de índices pares e também a soma dos termos de índices múltiplos de 3. Desse modo:

$$a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = 4$$
$$a_3 + a_6 + a_9 + \cdots = \frac{16}{13}$$

Perceba que podemos definir $(a_2, a_4, a_6, \ldots)$ e $(a_3, a_6, a_9, \ldots)$ como duas novas PG`s infinitas. Veja:

$$\begin{cases} a_4 = a_2 r^2 \\ a_6 = a_2 r^4 \\ a_8 = a_2 r^6 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^2\ e\ termo\ inicial\ a_2$$

$$\begin{cases} a_6 = a_3 r^3 \\ a_9 = a_3 r^6 \\ a_{12} = a_3 r^9 \\ \quad \vdots \end{cases} \Rightarrow PG\ infinita\ de\ razão\ r^3\ e\ termo\ inicial\ a_3$$

Vamos usar a fórmula da soma de PG infinita nas duas PG`s e encontrar uma relação para a e r:

$$S_1 = \frac{a_2}{1 - r^2} = \frac{a_1 r}{1 - r^2} = \frac{ar}{1 - r^2} = 4$$
$$S_2 = \frac{a_3}{1 - r^3} = \frac{a_1 r^2}{1 - r^3} = \frac{ar^2}{1 - r^3} = \frac{16}{13}$$

Fatorando S_1 e S_2:

$$S_1 = \frac{ar}{1 - r^2} = 4 \Rightarrow \frac{ar}{(1 - r)(1 + r)} = 4$$
$$S_2 = \frac{ar^2}{1 - r^3} = \frac{16}{13} \Rightarrow \frac{ar^2}{(1 - r)(1 + r + r^2)} = \frac{16}{13}$$

Vamos dividir $\frac{S_1}{S_2}$ para sumir com o termo a:

$$\frac{\frac{ar}{(1-r)(1+r)}}{\frac{ar^2}{(1-r)(1+r+r^2)}} = \frac{4}{\frac{16}{13}}$$

$$\frac{ar}{ar^2}\frac{(1-r)(1+r+r^2)}{(1-r)(1+r)} = 4 \cdot \frac{13}{16}$$

$$\frac{\cancel{ar}}{\cancel{a}r^2}\frac{\cancel{(1-r)}(1+r+r^2)}{\cancel{(1-r)}(1+r)} = \frac{13}{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{(1+r+r^2)}{(1+r)} = \frac{13}{4}$$

Desenvolvendo a equação:

$$4(1+r+r^2) = 13r(1+r)$$

$$4 + 4r + 4r^2 = 13r + 13r^2$$

$$4r^2 + 9r - 4 = 0$$

Encontramos uma equação de segundo grau, ainda estudaremos esse assunto mais a fundo nas próximas aulas.

Lembre-se: as raízes de uma equação de segundo grau dessa forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

É dado por:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = \mathrm{b}^2 - 4ac$$

Vamos encontrar as raízes da equação:

$$9r^2 + 9r - 4 = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (9)^2 - 4(9)(-4) = 81 + 144 = 225$$

$$r_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{2 \cdot 9} = \frac{-9 \pm 15}{18}$$

$$r_1 = \frac{-9-15}{18} = -\frac{4}{3}$$

$$r_2 = \frac{-9+15}{18} = \frac{1}{3}$$

O enunciado diz que a razão é positiva, logo $r = r_2 = \frac{1}{3}$.

Substituindo $r = 1/3$ em S_1 para encontrar a:

$$S_1 = \frac{ar}{1-r^2} = 4$$

$$\frac{a\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = 4$$

$$\frac{\left(\frac{a}{3}\right)}{\frac{8}{9}} = 4$$

$$\frac{3a}{8} = 4$$

$$a = \frac{32}{3}$$

Vamos encontrar $a + r$:

$$a + r = \frac{32}{3} + \frac{1}{3} = \frac{33}{3} = 11$$

Gabarito: $a + r = 11$

---

31. (ITA/2005)

Seja $a_1, a_2, \ldots$ uma progressão aritmética infinita tal que

$$\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2,\ para\ n \in \mathbb{N}^*$$

Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Comentários

Temos uma PA infinita. A questão nos dá a fórmula do somatório de seus elementos em função de um $n \in \mathbb{N}$.

O somatório é a soma dos elementos a_{3k}, isso que dizer que ela é a soma dos elementos múltiplos de 3, isto é, $a_3 + a_6 + a_9 + \cdots + a_n$.

Vamos substituir os valores de n e encontrar alguma relação.

Para $n = 1$:

$$a_3 = 1 \cdot \sqrt{2} + \pi 1^2$$

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi$$

Para $n = 2$:

$$a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + \pi(2)^2 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

Substituindo a_3 na equação para encontrar a_6:

$$\sqrt{2} + \pi + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi$$

$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$$

A forma geral dos elementos de uma PA é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

A questão pede a_1 e r.

Vamos encontrar a_3 em função de a_1 e r:

$$a_3 = a_1 + (3-1)r = a_1 + 2r$$

Fazendo o mesmo para a_6:

$$a_6 = a_1 + (6-1)r = a_1 + 5r$$

Encontramos as relações:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$
$$a_6 = \sqrt{2} + 3\pi = a_1 + 5r$$

Subtraindo a_6 e a_3:

$$a_6 - a_3 = \sqrt{2} + 3\pi - \left(\sqrt{2} + \pi\right) = a_1 + 5r - (a_1 + 2r)$$
$$2\pi = 3r$$
$$r = \frac{2\pi}{3}$$

Substituindo r em a_3 para encontrar a_1:

$$a_3 = \sqrt{2} + \pi = a_1 + 2r$$
$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + 2\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$\sqrt{2} + \pi = a_1 + \frac{4\pi}{3}$$
$$a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$$

Gabarito: $r = \frac{2\pi}{3}$ e $a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

---

32. (IME/2019)

Mostre que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG e obtenha a quantidade de termos dessa PG, sabendo que seus elementos são números naturais.

Comentários

Precisamos mostrar que os números 16, 24 e 81 podem pertencer a uma PG. A única condição é que os termos dessa PG sejam número naturais. Vamos supor que essa PG seja crescente de razão $q \in \mathbb{Q}$ e ver se encontramos uma PG com esses números.

$$\left(a_0, a_1, \dots, \underbrace{16}_{a_i}, \dots, \underbrace{24}_{a_j}, \dots, \underbrace{81}_{a_k}, \dots, a_n\right) \; PG \; de \; razão \; q > 0$$

Da relação dos termos da PG:

$$\begin{cases} a_j = a_i \cdot q^{j-i} \\ a_k = a_j \cdot q^{k-j} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{24}{16} = q^{j-i} \; (1) \\ \frac{81}{24} = q^{k-j} \; (2) \end{cases}, com \; i, j, k \in \mathbb{N}$$

Simplificando a relação (1), obtemos:

$$\frac{24}{16} = q^{j-i} \Rightarrow q^{j-i} = \frac{3}{2} = \left(\frac{3}{2}\right)^1$$

Sendo $q \in \mathbb{Q}$ e $i, j \in \mathbb{N}$, devemos ter:

$$\boxed{q = \frac{3}{2}}$$
$$\boxed{j - i = 1}$$

Para a relação (2):

$$\frac{81}{24} = q^{k-j} \Rightarrow q^{k-j} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

Aqui, podemos ter:

$$q = \frac{27}{8} \text{ e } k - j = 1 \text{ ou } q = \frac{3}{2} \text{ e } k - j = 3$$

Das condições das relações (1) e (2), concluímos que:

$$\begin{cases} q = \frac{3}{2} \\ j - i = 1 \\ k - j = 3 \end{cases}$$

Desse modo:

$$j = i + 1$$
$$k = j + 3 = i + 4$$

A PG é do seguinte tipo:

$$\left(a_0, a_1, \dots, \underbrace{16}_{a_i}, \underbrace{24}_{a_{i+1}}, a_{i+2}, a_{i+3}, \underbrace{81}_{a_{i+4}}, \dots, a_n\right)$$

Vamos calcular a_{i+2} e a_{i+3}:

$$a_{i+2} = 24 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 36$$
$$a_{i+3} = 36 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = 54$$
$$\boxed{(a_0, a_1, \dots, 16, 24, 36, 54, 81, \dots, a_n)}$$

Supondo que exista o termo a_{i-1}, devemos ter:

$$a_i = a_{i-1} \cdot q \Rightarrow a_{i-1} = \frac{16}{\frac{3}{2}} = \frac{32}{3} \notin \mathbb{N}$$

Como a_{i-1} não é um número natural, podemos concluir que 16 é o termo inicial da PG e, assim, $i = 1$:

$$(16, 24, 36, 54, 81, a_6, \dots, a_n)$$

Resta verificar se existe a_6:

$$a_6 = 81 \cdot \left(\frac{3}{2}\right) = \frac{243}{2} \notin \mathbb{N}$$

a_6 não é um número natural, logo, $a_5 = 81$ é o último termo da PG.

Portanto, a PG possui 5 termos.

Gabarito: 5 termos

---

33. (IME/2019)

Os ângulos $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{100}$ são os termos de uma progressão aritmética na qual $\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$. O valor de $sen(\sum_{i=1}^{100} \theta_i)$ é

a) -1

b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) 0

d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) 1

Comentários

Como os ângulos estão em PA, podemos encontrar a expressão que representa o somatório usando a fórmula da soma da PA.

Lembrando que essa fórmula é dada por:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Temos:

$$S_{100} = \sum_{i=1}^{100} \theta_i = \frac{(\theta_1 + \theta_{100})100}{2} = 50(\theta_1 + \theta_{100})$$

O bizu nessa questão é perceber que os termos $\underbrace{\theta_1 + \theta_{100}}_{1+100=101} = \underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{11+90=101} = \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{26+75=101}$ são equidistantes. Assim, usando a propriedade dos termos equidistantes de uma PA:

$$\theta_{11} + \theta_{26} + \theta_{75} + \theta_{90} = \frac{\pi}{4}$$

$$\underbrace{\theta_{11} + \theta_{90}}_{\theta_1+\theta_{100}} + \underbrace{\theta_{26} + \theta_{75}}_{\theta_1+\theta_{100}} = \frac{\pi}{4}$$

$$2(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{(\theta_1 + \theta_{100}) = \frac{\pi}{8}}$$

Então, o valor que queremos calcular é:

$$sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = sen\big(50(\theta_1 + \theta_{100})\big) = sen\left(\frac{50\pi}{8}\right) = sen\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \boxed{sen\left(\sum_{i=1}^{100} \theta_i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Gabarito: “d”.

34. (IME/2017)

Sejam uma progressão aritmética $(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)$ e uma progressão geométrica $(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)$ de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3, a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:

a) 1

b) 2

c) 3

d) 4

e) 5

Comentários

Do enunciado, temos:

$$a_1 + b_2 = 3 \quad (I)$$
$$a_4 + b_3 = 26 \quad (II)$$
$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) \text{ é PA} \Rightarrow a_4 = a_1 + 3r$$
$$(b_1, b_2, b_3, \dots) \text{ é PG} \Rightarrow b_2 = b_1 q \text{ e } b_3 = b_1 q^2$$

Reescrevendo as equações, obtemos:

$$a_1 + b_1 q = 3 \Rightarrow a_1 = 3 - b_1 q \quad (I)$$
$$(a_1 + 3r) + b_1 q^2 = 26 \quad (II)$$

Substituindo (I) em (II):

$$(3 - b_1 q + 3r) + b_1 q^2 = 26$$
$$3r + b_1 q^2 - b_1 q = 26 - 3$$
$$3r + b_1 q(q - 1) = 23 \quad (III)$$

A PA e a PG da questão possuem termos inteiros e r e q também são inteiros.

A questão nos dá uma desigualdade para q e b_1. Repare que temos $b_1 q(q-1)$ na equação (III). Vamos tentar encontrar alguma relação usando essas desigualdades.

Como q é inteiro, podemos escrever:

$$q > 2 \Rightarrow q \geq 3$$
$$q - 1 \geq 3 - 1 \Rightarrow q - 1 \geq 2$$

b_1 também é inteiro:

$$b_1 > 0 \Rightarrow b_1 \geq 1$$

Das propriedades da desigualdade de números inteiros, podemos multiplicar os termos e encontrar uma nova desigualdade:

$$b_1 \geq 1$$
$$q \geq 3$$
$$q - 1 \geq 2$$
$$b_1 q(q - 1) \geq 1 \cdot 3 \cdot 2$$
$$b_1 q(q - 1) \geq 6 \quad (IV)$$

Da equação (III):

$$3r + b_1 q(q - 1) = 23$$
$$b_1 q(q - 1) = 23 - 3r$$

Dessa forma, encontramos as seguintes relações:

$$\begin{cases} b_1 q(q - 1) \geq 6 \\ b_1 q(q - 1) = 23 - 3r \end{cases}$$

Combinando as duas, obtemos:

$$23 - 3r \geq 6$$
$$23 - 6 \geq 3r$$
$$17 \geq 3r$$
$$3r \leq 17$$

Sabemos que r é inteiro positivo. Vamos ver quais valores de r podemos ter com essa desigualdade.

$3r$ deve ser menor ou igual a 17.

$r = 6$ já não satisfaz essa condição, pois $3r = 3 \cdot 6 = 18 > 17$.

$r = 5 \Rightarrow 3r = 15 < 17$

$r = 5$ satisfaz a condição, então r deve ser menor ou igual a 5, ou seja, $r \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Agora temos valores plausíveis para r, vamos substituir esses valores na equação (III):

$$3r + b_1 q(q-1) = 23 \quad (III)$$
$$b_1 q(q-1) = 23 - 3r$$

a) $r = 5$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 5$$
$$b_1 q(q-1) = 8 = 2^3$$

Note que $q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos já que q é inteiro positivo. $b_1 q(q-1) = 2 \cdot 2 \cdot 2$ é produto de inteiros iguais e $q \geq 3$. Não podemos ter q e $q-1$ que satisfaz essas condições.

b) $r = 4$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 4$$
$$b_1 q(q-1) = 11$$

b_1 é inteiro
$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$$q \geq 3$$

11 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos
Não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

c) $r = 3$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 3$$
$$b_1 q(q-1) = 14 = 2 \cdot 7$$

b_1 é inteiro
$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos
Se $q = 2$ e $b_1 = 7$, teríamos $b_1 q(q-1) = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$
Mas $q \geq 3$, então $q = 2$ não é possível.
Logo, não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

d) $r = 2$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 2$$
$$b_1 q(q-1) = 17$$

b_1 é inteiro
$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$$q \geq 3$$

17 é um número primo e não é produto de inteiros consecutivos.
Não temos valores para b_1, q que satisfaz essas condições.

e) $r = 1$

$$b_1 q(q-1) = 23 - 3 \cdot 1$$
$$b_1 q(q-1) = 20 = 4 \cdot 5$$

b_1 é inteiro
$q(q-1)$ é um produto de inteiros consecutivos

$$q \geq 3$$

20 é produto de inteiros consecutivos
Se $q = 5$ e $b_1 = 1$:

$$b_1 q(q-1) = 1 \cdot 5 \cdot 4 = 20$$

Para $r = 1$, temos valores para b_1 e q que satisfazem o problema.

$$\therefore b_1 = 1$$

Gabarito: “a”.

35. (IME/2016)

Os inteiros $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

Comentários

Se a_1, a_2, a_{10} estão em PG nessa ordem, então das propriedades da PG, podemos escrever:

$$a_2^2 = a_1 a_{10}$$

Como $a_1, a_2, \ldots, a_{25}$ estão em PA com razão $r \neq 0$, podemos escrever esses termos em função do primeiro termo e da razão r:

$$a_1 = a$$
$$a_2 = a + r$$
$$a_{10} = a + 9r$$
$$(a+r)^2 = a(a+9r)$$
$$a^2 + 2ar + r^2 = a^2 + 9ar$$
$$r^2 = 7ar$$
$$r \neq 0 \Rightarrow r = 7a$$

a_6, a_j, a_{25} também estão em PG $\Rightarrow a_j^2 = a_6 a_{25}$

Escrevendo a_6 e a_{25} em função de a e r:

$$a_6 = a + 5r$$
$$a_{25} = a + 24r$$

Substituindo $r = 7a$ nos termos:

$$a_6 = a + 5(7a) = 36a$$
$$a_{25} = a + 24(7a) = 169a$$

Encontrando uma relação para a_j:

$$a_j^2 = a_6 a_{25} = 36a \cdot 169a = 6^2 \cdot 13^2 \cdot a^2$$
$$a_j = \pm 6 \cdot 13 \cdot a$$
$$a_j = \pm 78a$$

Vamos testar os valores encontrados para a_j:

$$a_j = a + (j-1)r = a + (j-1)7a = a(7j-6)$$

I) $a_j = -78a$

$$-78a = a(7j-6)$$
$$-78 = 7j - 6$$
$$7j = -72$$
$$j < 0$$

j é o índice do termo da PA, logo não pode ser negativo.

II) $a_j = 78a$

$$78a = a(7j-6)$$
$$78 = 7j - 6$$
$$7j = 84$$
$$j = 12$$

Esse valor satisfaz as condições do problema.

$$\therefore j = 12$$

Gabarito: $j = 12$

---

36. (IME/2014)

Calcular o valor da expressão abaixo

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"}}$$

Obs.: algs = algarismos

Comentários

Vamos simplificar a expressão.

Para o primeiro termo, temos:

$$\underbrace{370370\ldots037}_{89\ algarismos} = \underbrace{370370370370\ldots37037}_{89\ algarismos}$$

Vamos escrever esse número em potências de 10:

$$370370370370\ldots37037 = 37 \cdot 10^{87} + 37 \cdot 10^{84} + 37 \cdot 10^{81} + \cdots + 37 \cdot 10^{3} + 37 \cdot 10^{0}$$

Perceba que escrevendo dessa forma, obtemos uma PG finita cujo primeiro termo é $a_1 = 37$ e razão é $q = 10^3$.

Podemos aplicar a fórmula para soma de PG finita:

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Vamos calcular o número de termos dessa PG.

Pela forma da PG, podemos escrever:

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$
$$a_n = 37 \cdot 10^{87} = 37 \cdot (10^3)^{n-1}$$
$$37 \cdot 10^{87} = 37 \cdot 10^{3(n-1)}$$
$$3(n-1) = 87$$
$$n - 1 = \frac{87}{3} = 29$$
$$n = 30$$

Logo, a PG possui 30 termos.

Substituindo as variáveis na fórmula da soma, obtemos:

$$S_{30} = \frac{37((10^3)^{30} - 1)}{10^3 - 1}$$

Simplificando:

$$S_{30} = \frac{37(10^{90} - 1)}{1000 - 1} = \frac{10^{90} - 1}{\frac{999}{37}} = \frac{10^{90} - 1}{27}$$

Vamos reescrever o segundo termo e colocá-lo em função de potências de 10:

$$\underbrace{11\ldots1}_{30\ algs\ "1"}\underbrace{00\ldots0}_{30\ algs\ "0"} = \underbrace{(10^{29} + 10^{28} + 10^{27} + \cdots + 10^1 + 10^0)}_{PG\ de\ razão\ q=10\ e\ n=30} \cdot 10^{30}$$

$$10^{29} + 10^{28} + 10^{27} + \cdots + 10^1 + 10^0 = \frac{10^0(10^{30} - 1)}{10 - 1} = \frac{10^{30} - 1}{9}$$

$$\underbrace{11\dots1}_{30\ algs\ "1"}\ \underbrace{00\dots0}_{30\ algs\ "0"} = \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}$$

Dessa forma, temos que calcular o valor da seguinte expressão:

$$\sqrt[3]{\underbrace{370370\dots037}_{89\ algarismos} - \underbrace{11\dots1}_{30\ algs\ "1"}\ \underbrace{00\dots0}_{30\ algs\ "0"}} = \sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}}$$

Podemos fatorar o termo $10^{90}-1$ usando a fatoração clássica:

$$10^{90}-1 = (10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)$$

Substituindo na expressão e simplificando:

$$\sqrt[3]{\frac{10^{90}-1}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{(10^{30}-1)}{9}10^{30}} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{10^{30}}{9}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{(10^{60}+10^{30}+1)}{27} - \frac{3\cdot 10^{30}}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}+10^{30}+1-3\cdot 10^{30}}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{(10^{30}-1)\left[\frac{10^{60}-2\cdot 10^{30}+1}{27}\right]} =$$

$$\sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)(10^{30}-1)^2}{3^3}} = \sqrt[3]{\frac{(10^{30}-1)^3}{3^3}} =$$

$$\frac{10^{30}-1}{3} = \frac{1}{3}\underbrace{999\dots9}_{30\ algs} =$$

$$\underbrace{333\dots3}_{30\ algs}$$

Gabarito: $\underbrace{333\dots3}_{30\ algs}$

37. (IME/2014)

Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) $\frac{1}{6}$

b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

c) $\sqrt{6}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

e) 1

Comentários

Temos uma PA crescente e a questão nos dá a soma dos três termos consecutivos S_1 e a soma de seus quadrados S_2. Vamos representar a PA dessa forma:

$$(a-r, a, a+r)$$

Assim, podemos escrever:

$$S_1 = (a-r) + a + (a+r) = 3a$$

$$S_1 = 3a$$

$$S_2 = (a-r)^2 + a^2 + (a+r)^2$$

$$S_2 = a^2 - 2ar + r^2 + a^2 + a^2 + 2ar + r^2$$

$$S_2 = 3a^2 + 2r^2$$

Os dois maiores termos da PA são a e $a+r$ e são também raízes da equação:

$$x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Substituindo S_1 e S_2:

$$x^2 - 3ax + \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Estudaremos relações de Girard na aula de Expressões Algébricas. Das relações de Girard, podemos escrever:

$$a'x^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a'}$$

$$a + (a+r) = -\frac{-3a}{1} = 3a$$

$$r = a$$

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a'}$$

$$a(a+r) = \left(3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}\right)$$

$$a^2 + ar = 3a^2 + 2r^2 - \frac{1}{2}$$

Substituindo $r = a$, na equação acima:

$$a^2 + aa = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$2a^2 = 3a^2 + 2a^2 - \frac{1}{2}$$

$$3a^2 = \frac{1}{2}$$

$$a^2 = \frac{1}{6}$$

$$a = \pm\frac{1}{\sqrt{6}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6} = r$$

Como a PA é crescente, temos $r = \sqrt{6}/6$.

Gabarito: "b".

---

38. (IME/2010)

Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + \cdots + 79^2$. O valor de S satisfaz:

a) $S < 7x10^4$

b) $7x10^4 \leq S < 8x10^4$

c) $8x10^4 \leq S < 9x10^4$

d) $9x10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

Comentários

Nessa questão, você deve se lembrar que na aula de Álgebra Elementar, na lista de exercícios, demonstramos que a seguinte relação é válida:

$$\boxed{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

É normal não ter memorizado essa fórmula, então, vamos aprender a deduzi-la. Sabendo que $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$, temos:

$$1^3 = 1^3$$

$$2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 1^2 + 1^3$$

$$3^3 = (1+2)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 + 2^3$$

$$4^3 = (1+3)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 3 + 3 \cdot 1 \cdot 3^2 + 3^3$$

$$\vdots$$

$$n^3 = \left(1 + (n-1)\right)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot (n-1) + 3 \cdot 1 \cdot (n-1)^2 + (n-1)^3$$

Somando todas essas equações, obtemos:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$$
$$= n \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot \left(1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)\right) + 3 \cdot 1 \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2)$$
$$+ (1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n-1)^3)$$

Vamos definir $X = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$.

Note que os termos em vermelho se eliminam. A soma dos termos em azul é a soma de uma PA de razão 1 e a soma verde é a soma $X - n^2$. Assim, podemos escrever:

$$n^3 = n + \frac{3\big(1 + (n-1)\big)(n-1)}{2} + 3(X - n^2)$$

Isolando X:

$$n^3 = n + \frac{3n(n-1)}{2} + 3X - 3n^2$$

$$2n^3 = 2n + 3n^2 - 3n + 6X - 6n^2$$

$$2n^3 = 6X - n - 3n^2$$

$$6X = 2n^3 + 3n^2 + n = n(2n^2 + 3n + 1) = n(n+1)(2n+1)$$

Portanto, encontramos a fórmula para a soma dos naturais elevados ao quadrado:

$$X = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Vamos voltar à resolução da questão:

Perceba que S é a soma dos números naturais ímpares elevados ao quadrado.

Para calcular $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + 79^2$, precisamos completar a soma com os números pares.

Podemos reescrever a soma da seguinte forma:

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - (2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + \cdots + 78^2)$$

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - ((2 \cdot 1)^2 + (2 \cdot 2)^2 + (2 \cdot 3)^2 + \cdots + (2 \cdot 39)^2)$$

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - (2^2 \cdot 1^2 + 2^2 \cdot 2^2 + 2^2 \cdot 3^2 + \cdots + 2^2 \cdot 39^2)$$

$$S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots + 79^2 - 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 39^2)$$

Sabendo que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Temos:

$$S = \frac{79(79+1)(2 \cdot 79 + 1)}{6} - \frac{4\big(39(1+39)(2 \cdot 39 + 1)\big)}{6}$$

$$S = \frac{79 \cdot 80 \cdot 159}{6} - \frac{4(39 \cdot 40 \cdot 79)}{6}$$

Simplificando:

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 53 - 2 \cdot 13 \cdot 40 \cdot 79$$

Perceba que temos os termos $79 \cdot 40$ nos dois números acima. Vamos fatorar:

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 53 - 26 \cdot 40 \cdot 79$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot (53 - 26)$$

$$S = 79 \cdot 40 \cdot 27$$

Agora, podemos calcular o valor de S:

$$S = 85320$$

S é um número entre 80000 e 90000.

$$\therefore \boxed{8x10^4 \leq S < 9x10^4}$$

Atenção! Sempre que você puder, você deve fatorar os números para facilitar o cálculo.

Gabarito: "c".

39. (IME/1996)

Calcule a soma abaixo:

$$\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\cdots+\frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Comentários

Essa expressão é uma soma telescópica. Apesar da questão ser antiga, pode ser que ela seja cobrada no seu vestibular. O IME adora questões que exigem que o aluno já tenha visto algo parecido durante sua preparação.

Lembra do bizu da aula?

Para resolver essa questão, precisamos escrevê-la na forma:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}}=\frac{A}{a_n}+\frac{B}{a_{n+1}}$$

Vamos substituir os valores e encontrar A e B:

$$\frac{1}{1\cdot 4}=\frac{A}{1}+\frac{B}{4}\Rightarrow\frac{1}{4}=A+\frac{B}{4}\Rightarrow A=\frac{1-B}{4}\quad (I)$$

$$\frac{1}{4\cdot 7}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\Rightarrow\frac{1}{28}=\frac{A}{4}+\frac{B}{7}\quad (II)$$

Substituindo (I) em (II) para encontrar B:

$$\frac{1}{28}=\frac{\frac{1-B}{4}}{4}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{1-B}{16}+\frac{B}{7}$$

$$\frac{1}{28}=\frac{(1-B)7+B\cdot 16}{16\cdot 7}$$

$$16\cdot\frac{7}{28}=(1-B)7+B\cdot 16$$

$$4=7-7B+16B$$

$$-3=9B$$

$$B=-\frac{1}{3}$$

Substituindo B em (I):

$$A=\frac{1-B}{4}=\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}{4}=\frac{1+\frac{1}{3}}{4}=\frac{\frac{4}{3}}{4}=\frac{1}{3}$$

Encontramos $A=1/3$ e $B=-1/3$.

Podemos escrever:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{A}{a_n} + \frac{B}{a_{n+1}}$$

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3a_n} - \frac{1}{3a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Agora podemos resolver a questão. Vamos chamar a soma de S:

$$S = \frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots + \frac{1}{2998\cdot 3001}$$

Podemos reescrever a soma usando o termo geral da série telescópica aritmética:

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2995} - \frac{1}{2998}\right) + \left(\frac{1}{2998} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{4}} - \cancel{\frac{1}{7}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{7}} - \cancel{\frac{1}{10}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{2995}} - \cancel{\frac{1}{2998}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2998}} - \frac{1}{3001}\right)\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3001}\right)$$

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Poderíamos aplicar diretamente a fórmula para a soma:

$$S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$$

Observando a soma telescópica, vemos que $r = 3, a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 3001$.

Substituindo os valores na fórmula, obtemos:

$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3001}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{3000}{3001}\right) = \frac{1000}{3001}$$

Gabarito: $S = \frac{1000}{3001}$

---

40. (OBM)

O número $\sqrt{1 + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}} + \cdots + \sqrt{1 + \frac{1}{2000^2} + \frac{1}{2001^2}}$ é racional; escreva-o na forma $\frac{p}{q}$, p e q inteiros.

Comentários

Para resolver essa questão, vamos pensar o seguinte: Isso não parece uma PG, muito menos uma PA. Seria interessante se de alguma forma aparecesse uma soma telescópica. Vamos tentar o seguinte então:

Olhando o termo geral, temos:

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}$$

Desenvolvendo, temos:

$$\sqrt{\frac{a^4+2a^3+3a^2+2a+1}{a^2(a+1)^2}}$$

Se $a^4+2a^3+3a^2+2a+1$ fosse um quadrado perfeito isso resolveria nosso problema. Perceba que não é tão simples fatorar esse número por separação de termos. Porém, podemos suspeitar que isso é, de alguma forma, um quadrado perfeito, pois faria a questão dar certo... Então vamos tentar achar algo da forma $A^2+2AB+B^2$. Fazendo $a^4+2a^3+3a^2+2a+1=(a^2)^2+2a^2(a+1)+(a^2+2a+1)=(a^2+a+1)^2$ obtemos o nosso quadrado perfeito!

Assim,

$$\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=\sqrt{\frac{(a^2+a+1)^2}{a^2(a+1)^2}}=\frac{(a^2+a+1)}{a(a+1)}=1+\frac{1}{a(a+1)}=1+\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}$$

$$\sum_{a=1}^{2000}\sqrt{1+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}}=1+\frac{1}{1}-\frac{1}{1+1}+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2+1}+\cdots+1+\frac{1}{2000}-\frac{1}{2000+1}$$

$$=2000+1-\frac{1}{2001}=\frac{4004000}{2001}$$

Gabarito: $\frac{4004000}{2001}$

---

41. (ITA/2021)

Um relógio digital mostra o horário no formato $H:M:S$, onde H é um inteiro entre 1 e 12 representando as horas, M é um inteiro representando os minutos e S é um inteiro representando os segundos, ambos entre 0 e 59. Quantas vezes em um dia (H,M,S) são, nessa ordem, os três primeiros termos de uma progressão aritmética de razão estritamente positiva?

Comentários

Como a progressão aritmética deve ter razão estritamente positivo, devemos ter $r>0$. As progressões são da forma:

$$(H,M,S)=(H,H+r,H+2r), com\ r\in\mathbb{N}$$

Veja que para cada hora, devemos analisar a quantidade de progressões que podemos ter. Observe o caso para $H=1$:

$$\{(1,2,3);(1,3,4);(1,4,7);(1,5,9);\dots;(1,30,59)\}\Rightarrow total=29\ casos$$

Note que em cada progressão para $H=1$ a razão aumenta 1 unidade. Assim, podemos contar da seguinte forma: a primeira razão será $r=1$ e a última será dada por:

$$H+2r\le 59\Rightarrow r\le\frac{59-H}{2}$$

$$H=1\Rightarrow r_{max}\le\frac{59-1}{2}=29\Rightarrow r_{max}=29\Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 29\Rightarrow 29\ casos$$

$$H=2\Rightarrow r_{max}\le\frac{59-2}{2}=\frac{57}{2}\Rightarrow r_{max}=28\Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28\Rightarrow 28\ casos$$

$$H=3\Rightarrow r_{max}\le\frac{59-3}{2}=28\Rightarrow r_{max}=28\Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 28\Rightarrow 28\ casos$$

$$H=4\Rightarrow r_{max}\le\frac{59-4}{2}=\frac{55}{2}\Rightarrow r_{max}=27\Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27\Rightarrow 27\ casos$$

$$H = 5 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-5}{2} = 27 \Rightarrow r_{max} = 27 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 27 \Rightarrow 27\ casos$$
$$H = 6 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-6}{2} = \frac{53}{2} \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$
$$H = 7 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-7}{2} = 26 \Rightarrow r_{max} = 26 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 26 \Rightarrow 26\ casos$$
$$H = 8 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-8}{2} = \frac{51}{2} \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$
$$H = 9 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-9}{2} = 25 \Rightarrow r_{max} = 25 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 25 \Rightarrow 25\ casos$$
$$H = 10 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-10}{2} = \frac{49}{2} \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$
$$H = 11 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-11}{2} = 24 \Rightarrow r_{max} = 24 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 24 \Rightarrow 24\ casos$$
$$H = 12 \Rightarrow r_{max} \leq \frac{59-12}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow r_{max} = 23 \Rightarrow r\ varia\ de\ 1\ a\ 23 \Rightarrow 23\ casos$$

Somando os casos, encontramos:

$$n = 29 + 2(28+27+26+25+24) + 23 = 52 + 2 \cdot \frac{(28+24)5}{2} = 52 \cdot 6 = 312$$

Como queremos a quantidade em 1 dia, devemos considerar AM e PM, ou seja, devemos multiplicar o valor encontrado por 2:

$$n_T = 624$$

Gabarito: $n_T = 624$

42. (ITA/2021)

O primeiro termo de uma progressão geométrica de números reais é 1 e a soma de seus primeiros 79 termos é igual ao produto de seus primeiros 13 termos. Determine:

(a) a soma dos 40 primeiros termos;

(b) o produto dos 7 primeiros termos.

Comentários

Temos a seguinte progressão geométrica de razão q:

$$(1, q, q^2, q^3, q^4, \dots)$$

A soma e produto dos n primeiros termos de uma PG é

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, q \neq 1$$
$$P_n = a_1^n q^{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

Do enunciado:

$$S_{79} = P_{13} \Rightarrow \frac{q^{79}-1}{q-1} = q^{\frac{13(12)}{2}} = q^{78}$$
$$q^{79} - 1 = q^{79} - q^{78}$$
$$q^{78} = 1 \therefore q = \pm 1 \Rightarrow q = -1$$

Portanto, a PG é $(1, -1, 1, -1, \dots)$.

a) A soma é

$$S_{40} = \frac{(-1)^{40} - 1}{-1-1} \therefore S_{40} = 0$$

b) O produto é

$$P_7 = (-1)^{21} \therefore P_7 = -1$$

Gabarito: a) $S_{40} = 0$ **b)** $P_7 = -1$

43. (IME/2021)

Uma sequência é gerada pelo produto dos termos correspondentes de duas progressões aritméticas de números inteiros. Os três primeiros termos dessa sequência são 3053, 3840 e 4389. O sétimo termo da sequência é:

a) 3035

b) 4205

c) 4398

d) 4608

e) 5063

Comentários

Temos duas progressões aritméticas:

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots)\ PA\ de\ razão\ r$$
$$(b_1, b_2, b_3, b_4, \dots)\ PA\ de\ razão\ q$$

Do enunciado, temos a sequência:

$$(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3, \dots) = (3053, 3840, 4389, \dots)$$
$$\Rightarrow a_1b_1 = 3053$$
$$a_2b_2 = (a_1 + r)(b_1 + q) = a_1b_1 + a_1q + b_1r + rq$$
$$a_2b_2 - a_1b_1 = a_1q + b_1r + rq$$
$$a_1q + b_1r + rq = 3840 - 3053 = 787$$
$$\Rightarrow \boxed{a_1q + b_1r = 787 - rq}$$
$$a_3b_3 = (a_1 + 2r)(b_1 + 2q) = a_1b_1 + 2(a_1q + b_1r) + 4rq$$
$$a_3b_3 - a_1b_1 = 2(a_1q + b_1r) + 4rq$$
$$4389 - 3053 = 2(787 - rq) + 4rq$$
$$1336 = 1574 + 2rq$$
$$\Rightarrow \boxed{rq = -119}$$
$$a_1q + b_1r = 787 - (-119)$$
$$\Rightarrow \boxed{a_1q + b_1r = 906}$$

O número pedido é a_7b_7:

$$a_7b_7 = (a_1 + 6r)(b_1 + 6q) = a_1b_1 + 6(a_1q + b_1r) + 36rq$$
$$a_7b_7 = 3053 + 6(906) + 36(-119)$$
$$a_7b_7 = 3053 + 5436 - 4284$$
$$\therefore a_7b_7 = 4205$$

Gabarito: B

44. (IME/2021)

Considere uma progressão aritmética (PA) de números inteiros com razão $\boldsymbol{p} > \mathbf{2}$, seu primeiro termo maior do que 2 e seu último termo menor do que 47. Retirando-se uma determinada quantidade de elementos da PA, recai-se em uma PG de 3 elementos e razão $\boldsymbol{q} > \mathbf{2}$. Para $\boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{q}$ inteiros, $\boldsymbol{p}$ diferente de $\boldsymbol{q}$, determine a PA cuja soma de seus elementos seja a maior possível.

Comentários

Sabemos que os termos envolvidos são todos inteiros positivos. Vamos analisar a restrição da PG. Como temos três termos e razão $q > 2$, podemos escrever:

$$(b, bq, bq^2)$$

Lembrando que o último termo da PA é menor do que 47 e os termos da PG são termos da PA, vamos analisar alguns casos:

1) $b \geq 6$ e admitindo razão mínima $q = 3$:

$$bq^2 \geq 6 \cdot 3^2 = 54 > 47$$

Portanto, como o termo ultrapassa o maior valor permitido para o último termo da PA, verificamos que o primeiro termo da PG deve ser $b \leq 5$.

2) $q \geq 4$ e admitindo o menor termo possível $b = 3$:

$$bq^2 \geq 3 \cdot 4^2 = 48 > 47$$

Novamente extrapolamos o valor do último termo da PA, logo $q \leq 3$.

Como $q > 2$ e é inteiro, temos que $\boxed{q = 3}$.

Para maximizarmos a soma da PA, um possível caminho seria maximizar o número de termos dela. Isso pode ser feito minimizando o valor da razão p da PA.

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Como $p \neq q$, temos $p \geq 4$.

Sabendo que $q = 3$, os possíveis termos da PG são:

a) $(3, 9, 27)$

Nessa sequência, temos $k_1 \cdot p = 9 - 3 = 6$, ou seja, p deve ser divisor de 6. Como $p \neq q = 3$, devemos ter $p = 6$, logo, a PA é:

$$(3, 9, 15, 21, 27, 33, 39, 45)$$

$$S_a = \frac{(3 + 45)8}{2} = 192$$

b) $(4, 12, 36)$

Analogamente, temos $k_2 \cdot p = 12 - 4 = 8$. p deve ser mínimo, diferente de q e divisor de 8, logo $p = 4$ é o menor valor possível:

$$(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$$

$$S_b = \frac{(4 + 44)11}{2} = 264$$

c) $(5, 15, 45)$

Analogamente, temos $k_3 \cdot p = 15 - 5 = 10$. p deve ser divisor de 10, logo $p = 5$.

$$(5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45)$$

$$S_c = \frac{(5 + 45)9}{2} = 225$$

Das possibilidades acima, a maior soma é $S_b = 264$, logo a PA que satisfaz ao problema é

$$(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$$

Gabarito: $(4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44)$