Física

ITA - 2022

Gravitação

Prof. Toni Burgatto

SUMÁRIO

Introdução

Nesta aula estudaremos as leis da gravitação e os principais conceitos que norteiam este ramo da Física.

Esta aula é muito importante para aqueles que desejam ir para o ITA, pois ele gosta deste assunto e cobra em um nível muito elevado.

Fique atento as leis de Kepler e a lei de Newton da gravitação universal. Além disso, se dedique no capítulo sobre energia potencial gravitacional, pois ele é muito importante na resolução de problemas complexos.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Leis de Kepler

A gravitação se propõe a estudar a interação de atração entre dois corpos no Universo. Ela foi descoberta por Newton em 1665. A força gravitacional, geralmente, tem magnitude pequena se comparada com as outras forças da natureza. Entretanto, é uma das principais forças, pois rege o nascimento das estrelas e controla o funcionamento do Universo.

1.1. Primeira lei – Lei das órbitas

Os planetas se movem ao redor do Sol em uma trajetória elíptica. Nessa trajetória o Sol ocupa um dos focos da elipse e a excentricidade da elipse é dada pela razão SO/AO.

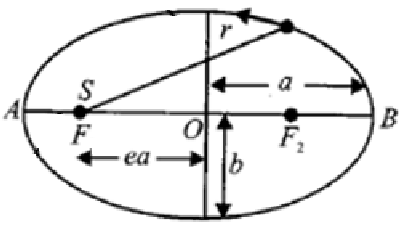


Figura 1: Propriedades de uma elipse.

Em que a é o semieixo maior e b o semieixo menor. A excentricidade da elipse é definida por:

$$e = \frac{OS}{a}$$

O corpo que desenvolve a trajetória elíptica apresenta um ponto de menor distância para o corpo (S) que é orbitado. Esse ponto é chamado de Perigeu, representado por A na figura acima. No Perigeu a distância até o corpo (S) é dada por (AS):

$$AS = AO - OS = a(1-e)$$

$$\boxed{AS = a(1-e)}$$

Há também um ponto de máxima distância entre o corpo que orbita e o corpo orbitado (S). Esse ponto é chamado de Apogeu e é representado por B na figura acima. No apogeu a distância até o corpo (S) é dada por (BS):

$$BS = AO + OS = a(1+e) \therefore \boxed{BS = a(1+e)}$$

1.2. Segunda lei - Lei das áreas

O raio vetor que une o planeta ao Sol percorre áreas iguais em tempos iguais. Em outras palavras, velocidade Areolar do planeta é constante.

1.2.1. Velocidade Areolar

A velocidade areolar é dada pela razão entre a área varrida, pelo vetor posição do planeta, pelo tempo gasto. Expressando matematicamente, temos:

$$\boxed{V_{AREOLAR} = \frac{dA}{dt}}$$

Portanto, a lei das áreas expressada matematicamente por:

$$\frac{dA}{dt} = constante$$

1.2.2. Conservação do momento angular

Dizer que a velocidade areolar é constante implica diretamente na conservação do momento angular da órbita. Observe os passos abaixo.

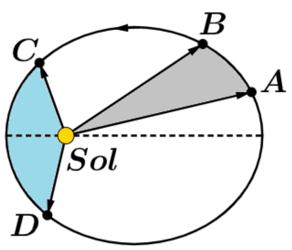


Figura 2: Sistema solar.

$$V_{AREOLAR} = \frac{dA}{dt} = \frac{\frac{1}{2} \cdot r(r \cdot d\theta)}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \omega$$

Então:

$$\frac{1}{2} \cdot r^2\omega = constante \qquad ou \qquad mr^2\omega = constante$$

O momento de inércia de um corpo esférico é dado por:

$$mr^2 = I \Rightarrow mr^2\omega = I \cdot \omega$$

Da igualdade,

$$I \cdot \omega = constante \Rightarrow L = I \cdot \omega$$

E, portanto, para o momento angular (L) concluímos que $L = constante$. Se o momento angular é constante, a todo instante, na órbita, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{dL}{dt} = 0}$$

1.2.3 Igualdade de razões

A segunda lei de Kepler permite-nos escrever a seguintes expressões:

$$V_{AREOLAR} = \frac{Área\ Varrida}{Intervalo\ de\ Tempo} = constante \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{\Delta t_1} = \frac{A_2}{\Delta t_2} = \cdots = \frac{A_n}{\Delta t_n}}$$

1.3. Terceira lei – Lei dos períodos

O período, de movimento do planeta ao redor do sol, ao quadrado é diretamente proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse percorrida pelo planeta.

Expressando a terceira lei matemática mente, temos:

$$\boxed{T^2 = K.a^3}$$

$$T - Período\ de\ revolução\ do\ planeta$$

$$a - semi - eixo\ maior\ da\ elipse$$

K é uma constante de proporcionalidade. Determinaremos seu valor no decorrer deste capítulo.

Para planetas que orbitam um mesmo corpo, a constante de proporcionalidade K é a mesma. Assim, podemos efetuar algumas igualdades. Se N planetas distintos orbitam um mesmo corpo, podemos escrever:

$$\boxed{\frac{T_1^2}{R_1^3} = \frac{T_2^2}{R_2^3} = \frac{T_3^2}{R_3^3} = \cdots = \frac{T_N^2}{R_N^3}}$$

Para o sistema solar, por exemplo:

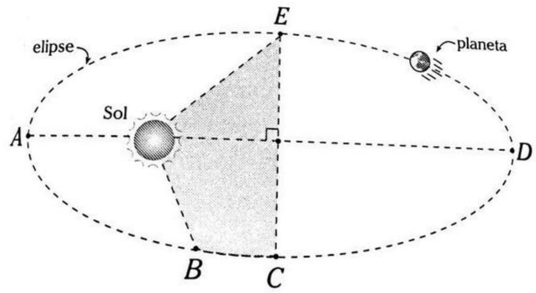
$$\frac{T_{Terra}^2}{R_{Terra}^3} = \frac{T_{Mercúrio}^2}{R_{Mercúrio}^3} = \frac{T_{Marte}^2}{R_{Marte}^3} = \cdots = \frac{T_{Netuno}^2}{R_{Netuno}^3}$$

Essa sequência de igualdades é válida, pois os planetas acima orbitam o mesmo corpo (Sol).

ESCLARECENDO!

1.

A figura abaixo mostra um planeta que orbita o sol com período de 40 meses. Se ele demora 12 meses para ir do ponto D ao ponto E e 12 meses para ir do ponto B ao ponto C, determine a área da região sombreada. A área da elipse é S.



Comentário:

Podemos associar a segunda Lei de Kepler ao exercício:

$$\frac{Area}{\Delta t} = constante \Rightarrow \frac{S}{40\ dias} = \frac{\frac{S}{4} + A_1}{12\ dias} = \frac{A_2 - A_1}{12\ dias}$$

As áreas são:

$A_1 - Área\ correspondente\ ao\ triângulo\ de\ vértices\ (Sol, E, Centro\ da\ elipse)$

$A_2 - Parte\ inferiorhachurada\ de\ vértices\ (Sol, Centro\ da\ elipse, B, C)$

A área total hachurada é dada por: $A_1 + A_2$ Da expressão

$$\frac{S}{40\ dias} = \frac{\frac{S}{4} + A_1}{12} \Rightarrow A_1 = \frac{S}{20}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{S}{4} + 3A_1 \Rightarrow \boxed{A = \frac{2S}{5}}$$

1.4. Considerações sobre as Leis de Kepler

As leis de Kepler não são aplicáveis apenas para o Sistema Solar, mas também para satélites, sistemas binários e até mesmo para sistemas complexos de galáxias.

As leis de Kepler foram obtidas empiricamente (leis baseadas na observação) e foram formuladas a partir do estudo das observações do astrônomo Tycho Brahe. Em 1605, Kepler notou que essas observações obedeciam a três leis matemáticas e então propôs as “Três leis de Kepler”.

A explicação para o comportamento dos planetas veio mais tarde com Isaac Newton. Estudaremos a seguir a Teoria da gravitação Universal proposta por Newton.

2. Lei de Newton - Gravitação universal

Isaac Newton publicou em 1687, em sua obra "*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*", a lei que descreve a gravitação universal.

Newton propôs que a gravidade é um campo criado por corpos que possuem "massa". Essa gravidade mantém todos os objetos celestes atrelados e só depende do corpo que a cria.

A veracidade dessa lei proposta por Newton pode-se ser evidenciada em alguns fenômenos da natureza, observáveis ao longo da humanidade. Alguns deles são:

- A rotação da Terra ao redor do Sol ou a rotação da Lua ao redor da Terra.
- O acontecimento e previsão dos eclipses solares e lunares.
- O fenômeno das marés.
- As estações do ano e suas peculiaridades.

Veremos a seguir a formulação matemática para a Lei da Gravitação Universal.

2.1. Lei da gravitação universal

Quaisquer dois corpos no universo se atraem com uma força proporcional ao produto de suas massas e inversamente proporcional à distância entre seus centros de gravidade ao quadrado.

Considere o corpo A de massa m_A e um corpo B de massa m_B separados por uma distância r. Os corpos se atraem com uma força F_G. Pela lei da gravitação universal temos:

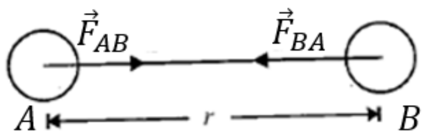


Figura 3: Interação entre dois corpos.

$$\boxed{F_G = \frac{G \cdot m_A \cdot m_B}{r^2}}$$

A constante de proporcionalidade (G) para a equação acima é chama de constante universal da gravitação.

A primeira pessoa a determine seu valor foi Henry Cavendish em 1797. A seguir veremos o experimento feito por Cavendish para determinação de G.

2.2. Determinação da constante universal da gravitação

2.2.1. Determinação por Henry Cavendish

Em 1797 (um século depois da lei de Newton), Henry Cavendish iniciou seus experimentos com a balança de torção. Duas pequenas massas são fixadas nas pontas de uma barra suspensa por um fio. Essas pequenas massas podem se deslocar. Duas outras massas (bolas maiores) são mantidas fixas nas proximidades das massas menores.

A força de interação gravitacional provocará um deslocamento da massa menor em direção à massa maior. Este deslocamento causará uma torção no fio que sustenta a barra. A distância entre as massas no equilíbrio é d. A medida do ângulo de torsão permite a determinação da constante da gravitação universal (G), presente na lei da gravitação universal de Newton. Assim, mede-se o ângulo de torção e encontra-se θ.

A partir da constante de torção é K, da distância l entre as massas (m) e da massa maior M, Cavendish determinou G da seguinte maneira:

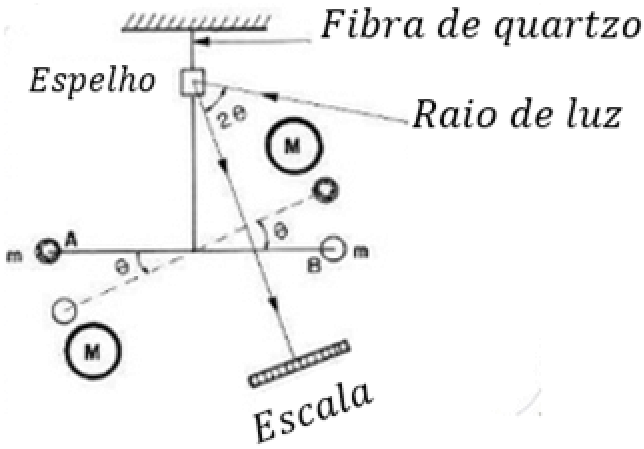


Figura 4: Desenho esquemático do experimento de Cavendish.

A força gravitacional causa um torque na fibra de quartzo:

$$\tau_{FG} = F_G \cdot \frac{l}{2} + F_G \cdot \frac{l}{2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} \cdot l$$

O torque de torção da fibra é:

$$\tau_{Fibra} = K \cdot \theta$$

$$K - constante\ de\ torção$$

Para que ocorra o equilíbrio, os torques devem ser iguais:

$$\tau_{Fibra} = \tau_{FG} \Rightarrow K \cdot \theta = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^2} \cdot l \therefore \boxed{G = \frac{K \cdot \theta \cdot d^2}{M \cdot m \cdot l}}$$

Na época, Cavendish encontrou o valor $G = 6{,}74 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{Kg^2}$, que difere apenas em 1% para o valor correto conhecido atualmente.

2.2.2. Valor da atual e análise dimensional da constante

Atualmente o valor da constante universal da gravitação é um valor conhecido e determinado com grande precisão pelos cientistas. Nas unidades do SI, seu valor é aproximadamente:

$$G \cong 6{,}674 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{Kg \cdot s^2}$$

Fazendo a transformação para o sistema M, L e T, podemos encontrar a dimensional de G:

$$[G] = \left[\frac{m^3}{Kg \cdot s^2}\right] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2} \therefore [G] = M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}$$

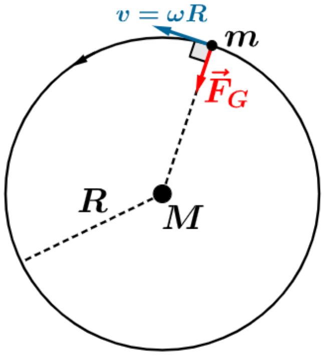
2.3. Terceira lei de Kepler e a lei da gravitação universal

A lei da gravitação universal pode ser obtida através da terceira de lei de Kepler e da primeira lei de Newton.

Considere um planeta de massa m que orbita uma estrela de massa M em uma órbita circular de raio R. O planeta sofre ação da força gravitacional,

$$F_G = \frac{G \cdot m \cdot M}{R^2}$$

Que por sua vez é a resultante centrípeta do movimento circular realizado. O período desse movimento é dado por T.



$$R_{CPT} = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{m \cdot (\omega . R)^2}{R} = m \cdot (\omega)^2 \cdot R = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R$$

Realizando a igualdade:

$$F_G = R_{CPT}$$

$$\frac{G \cdot m \cdot M}{R^2} = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot R \therefore \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}}$$

Comparando a terceira Lei de Kepler e o resultado encontrado logo acima, percebemos que a constante de proporcionalidade para a terceira lei de Kepler é:

$$K = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

Conclui-se, portanto, que a lei da Gravitação Universal comprova as leis propostas por Kepler. Além disso, podemos encontrar o valor da constante de proporcionalidade enunciada na terceira lei de Kepler.

2.4. Formulação vetorial para a lei da gravitação universal

2.4.1. Formulação matemática

Considere dois pontos massivos A e B de massa m_1 e m_2, respectivamente. Os pontos estão separados por uma distância r. Consideremos as seguintes convenções:

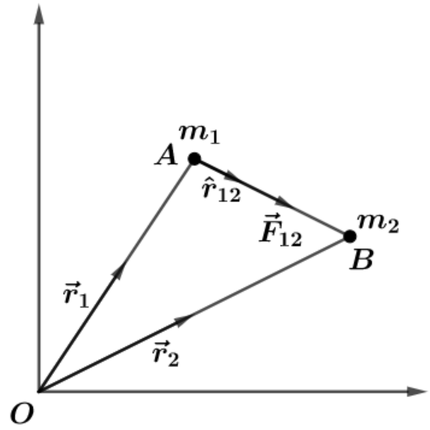


Figura 5: Representação vetorial da força gravitacional.

- $r_{12} - versor\ de\ A\ até\ B.$
- $\overrightarrow{F_{12}} - força\ gravitacional\ exercida\ pelo\ corpo\ B\ sobre\ o\ corpo\ A.$

A força gravitacional $\overrightarrow{F_{12}}$ é dada por:

$$\overrightarrow{F_{12}} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\overrightarrow{r_{12}}|^3} \cdot \overrightarrow{r_{12}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_{12}} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{|\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}|^3} \cdot (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1})}$$

2.4.2. Características gerais

De acordo com a lei de gravitação universal, a força gravitacional entre dois corpos no universo:

- Independe da natureza do meio que eles estão.
- Independe da presença de outros corpos.
- Independe da natureza e tamanho dos corpos.
- Formam pares ação-reação.
- É uma força central e atua ao longo da linha que liga os centros de gravidade dos dois corpos.
- É uma força conservativa.

2. (ITA-2018)

Quatro corpos pontuais, cada qual de massa m, atraem-se mutuamente devido à interação gravitacional. Tais corpos encontram-se nos vértices de um quadrado de lado L girando em torno do seu centro com velocidade angular constante. Sendo G a constante de gravitação universal, o período dessa rotação é dado por:

Comentário:

O centro de rotação dessas partículas é centro de gravidade do sistema. Assim, o centro de rotação é centro do quadrado.

Considere as forças que atuam em uma única partícula. Decompondo essas forças na direção do centro do quadrado temos:

$$F_R = 2 \cdot F \cdot cos45° + F'$$

$$F_R = 2 \cdot \frac{G \cdot m^2}{L^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{G \cdot m^2}{\left(L\sqrt{2}\right)^2} = \frac{G \cdot m^2}{2 \cdot L^2}\left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

A força resultante é a força centrípeta do movimento:

$$F_R = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot \omega^2 . R = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 . L \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{G \cdot m^2}{2 \cdot L^2}\left(2\sqrt{2} + 1\right)$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3\sqrt{2}}{G \cdot m \cdot \left(2\sqrt{2} + 1\right)} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3 \cdot \sqrt{2} \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)}{G \cdot m \cdot \left(2\sqrt{2} + 1\right) \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot L^3 \cdot \left(4 - \sqrt{2}\right)}{G \cdot m \cdot 7}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L^3 \cdot \left(4 - \sqrt{2}\right)}{7 \cdot G \cdot m}}}$$

2.5. Densidade volumétrica de massa

A densidade de um corpo pode ser determinada pela razão de sua massa pelo volume. Considere um corpo esférico de massa M e raio R.

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{4\pi \cdot \frac{R^3}{3}} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R^3}}$$

Considere agora a porção esférica de raio x, interna a um corpo de massa M e raio R, mostrada abaixo:

Figura 6: Corpo esférico.

Faremos duas análises para o cálculo da massa interna da porção esférica.

2.5.1. Densidade constante

Para um corpo que tenha densidade constante, podemos encontrar a massa de qualquer porção esférica interna de raio x fazendo:

$$\rho = constante = \frac{M}{4\pi \cdot \frac{R^3}{3}} = \frac{m(x)}{4\pi \cdot \frac{x^3}{3}} \therefore \boxed{m(x) = \frac{x^3}{R^3} \cdot M}$$

2.5.2. Densidade variável

Considere a densidade de um corpo varia, de alguma maneira qualquer, com a distância radial interna x, sob a lei $\rho(x)$. Temos a seguinte razão:

$$\rho(x) = \frac{dM}{dV}$$

Temos também:

$$V = 4\pi \cdot \frac{x^3}{3}$$

$$\frac{dV}{dx} = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{d(x^3)}{dx} \Rightarrow dV = 4\pi \cdot x^2 \cdot dx$$

$$dM = \rho(x) \cdot dV = \rho(x) \cdot 4\pi \cdot x^2 \cdot dx$$

$$\boxed{m(x) = 4\pi \cdot \int_0^x \rho(x) \cdot x^2 \cdot dx}$$

3. Lei de Gauss

Considere uma superfície fechada S, denominada Gaussiana. Dentro desta superfície há uma massa interna (m_{int}).

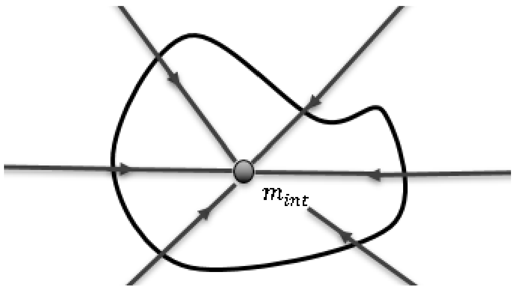


Figura 7: Campo gravitacional de um corpo qualquer.

De forma análoga ao campo elétrico, um campo gravitacional pode ser representado por linhas de forças.

As linhas gravitacionais sempre estão entrando na superfície Gaussiana, pois em gravitação as forças são sempre atrativas. Considere o campo gravitacional atuando na superfície da Gaussiana. Chamaremos esse campo de g. Analisando uma pequena porção da superfície acima:

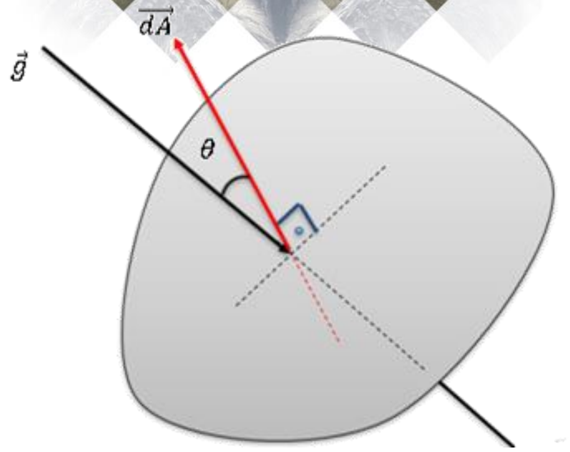


Figura 8: Campo e vetor área.

O fluxo que atravessa essa superfície é dado por:

$$d\Phi = |\vec{g}| \cdot |\overrightarrow{dA}| \cdot cos\theta$$

$$\oint d\Phi = \frac{m_{int}}{C}$$

O termo "C" é uma constante que vale $\left(-\frac{1}{4\pi \cdot G}\right)$. Assim, reescrevendo:

$$\oint |\vec{g}| \cdot |\overrightarrow{dA}| \cdot cos\theta = \frac{m_{int}}{C}$$

Transformando em o termo integrante em produto escalar:

$$\boxed{\oint \vec{g} \cdot \overrightarrow{dA} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G}$$

A expressão acima é conhecida como lei de Gauss para a gravitação. Na aula de eletrostática, veremos que a lei de Gauss para a elétrica é praticamente idêntica.

Vale ressaltar que a expressão acima será útil somente em alguns casos. Os casos mais adequados para seu uso são:

- Problemas em que a superfície S apresenta enorme grau de simetria.
- Problemas em que o campo gravitacional é sempre perpendicular à superfície S.
- Problemas que envolvem fluxo gravitacional.

Veremos como aplicar a lei de Gauss para a gravitação no tópico seguinte. Precisaremos calcular os campos gravitacionais de inúmeras distribuições de massa. Veremos quais são as destruições adequadas para aplicar o a lei.

4. Campos gravitacionais

Todo corpo que possui massa cria ao seu redor um campo gravitacional. O campo gravitacional é uma perturbação gravitacional. A seguir estudaremos vários casos de campos criados por inúmeras distribuições de massa.

Considere um ponto P que detém uma massa m. Encontraremos o campo criado por essa massa a uma distância x deste ponto.

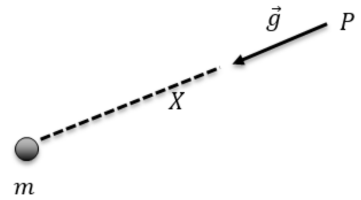


Figura 9: Massa m em uma região onde existe um campo gravitacional $\vec{g}$.

Por definição:

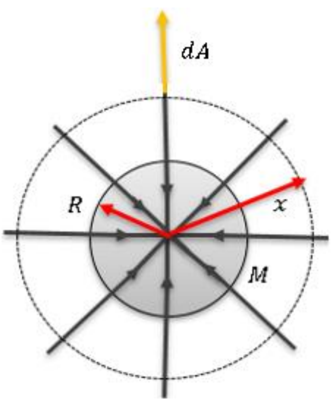
$$\boxed{|\vec{g}| = \frac{G \cdot m}{x^2}}$$

4.1. Distribuição esférica de massa

Estudaremos nesse tópico campos gravitacionais criados por distribuições esféricas de massa. Antes disso, faremos uma abordagem teórica para a lei de Gauss aplicada a Gravitação Universal.

4.1.1. Lei de Gauss para distribuições esféricas

Considere um corpo esférico de massa M e raio R. Considere também um gaussiana esférica de raio x.



Note que as linhas do campo gravitacional são perpendiculares à Gaussiana. Aplicando a lei de Gauss:

$$\oint \vec{g} \cdot \overrightarrow{dA} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G$$

$$\oint |\vec{g}| \cdot \left|\overrightarrow{dA}\right| \cdot cos180° = -M \cdot 4\pi \cdot G$$

O campo gravitacional$\vec{g}$ tem o mesmo valor em todos os pontos da superfície gaussiana. Dessa maneira, ele é constante na superfície da gaussina e, portanto, podemos retira-lo para fora da integral.

$$|\vec{g}| \cdot \oint \left|\overrightarrow{dA}\right| = M \cdot 4\pi \cdot G$$

A integral $\oint \left|\overrightarrow{dA}\right|$ é a própria área da gaussiana.

$$|\vec{g}| \cdot 4\pi x^2 = M \cdot 4\pi \cdot G \therefore \boxed{|\vec{g}| = \frac{G \cdot M_{interna}}{x^2}}$$

Note que pelo calculo da lei de Gauss para a gravitação, o campo gravitacional para superfícies esféricas possui algumas características interessantes e muito importantes de serem fixadas. São elas:

1. O campo gravitacional gerado por um corpo esférico em um ponto do espaço, pertencente a uma gaussiana esférica de raio x, só depende da massa interna à gaussiana.

2. O módulo do campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica em um ponto que dista x de seu centro, é o mesmo gerado por uma massa puntiforme (de massa igual a massa interna à gaussiana) no centro da esfera.

4.1.2. Corpo esférico com densidade uniforme

Considere um corpo de massa M e raio R. Analisaremos o campo criado por uma porção esférica concêntrica de raio x.

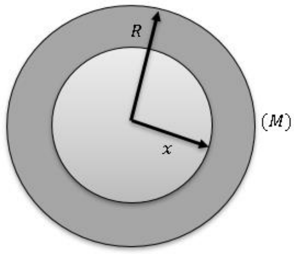


Figura 10: Corpo esférico com densidade uniforme.

(A) $Para\ x = R$ – Campo gravitacional na superfície do corpo (g_S):

Como o campo gravitacional só depende da massa interna, para $x = R$ temos toda a massa M.

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2} \Rightarrow g(R) = \frac{G \cdot M}{R^2} = g_S \Rightarrow \boxed{g_S = \frac{G \cdot M}{R^2}}$$

(B) $Para\ 0 \leq x < R$:

A massa da porção: massa interna da esfera de raio x. Pela expressão da densidade volumétrica, temos:

$$m(x) = \frac{x^3}{R^3} \cdot M$$

Assim, pela lei de Gauss, o campo gravitacional a uma distância x é dado por:

$$g(x) = \frac{G \cdot m(x)}{x^2} = \frac{G \cdot \frac{x^3}{R^3} \cdot M}{x^2} = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x \Rightarrow \boxed{g(x) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x}$$

(C) $Para\ x > R$:

Pela lei de Gauss, para pontos externos, tudo se passa como se houvesse uma massa puntiforme de massa M no centro da esfera de raio R. Assim, o campo criado a uma distância x é:

$$\boxed{g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2}}$$

Assim, para uma representação geral do campo temos:

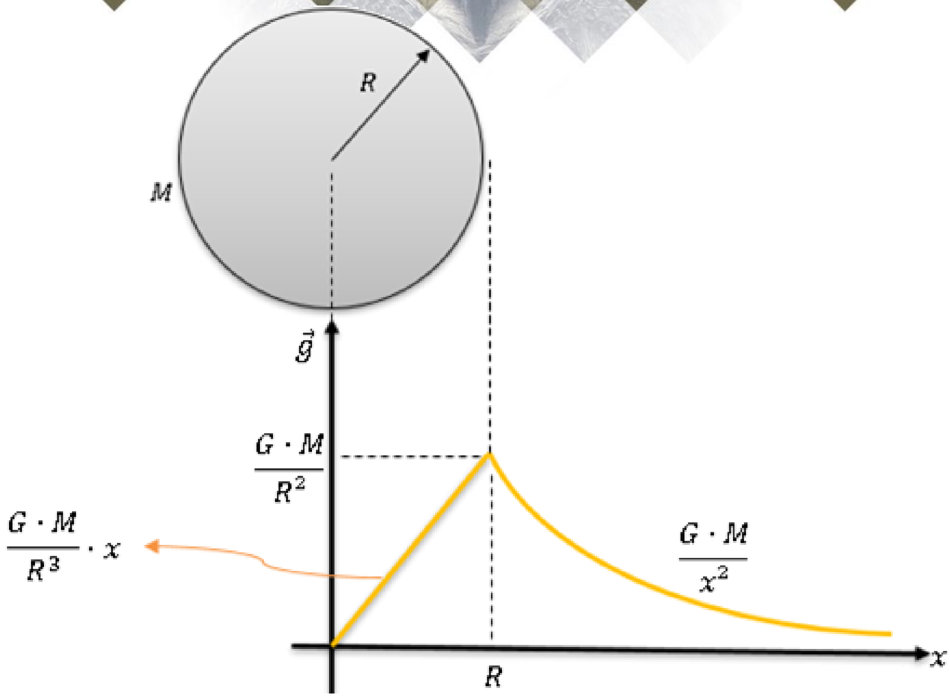
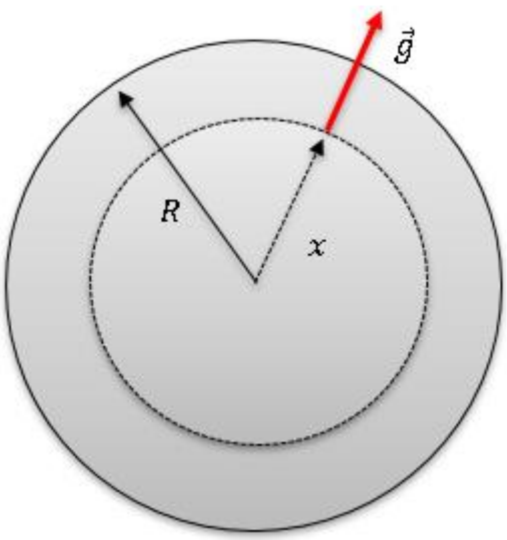


Figura 11: Gráfico do campo gravitacional em função da distância.

4.1.3. Corpo esférico com densidade variável

Considere um corpo esférico de densidade $\rho = \rho_0 . x^n, com\ n\ \epsilon\ \mathbb{Z} - \{-3\}$, e raio R. A distância x é o raio de uma esfera concentrica ao corpo. Considere também um gaussiana esférica de raio x.



(I) Cálculo da massa interna à gaussiana.

Utilizando a expressão $(F: 2.5.3)$, já demonstrada:

$$m(x) = 4\pi \cdot \int_0^x \rho(x) \cdot x^2 \cdot dx$$

$$m(x) = 4\pi \cdot \int_0^x \rho_0 . x^n \cdot x^2 \cdot dx$$

$$m(x) = 4\pi \cdot \int_0^x \rho_0 . x^{n+2} \cdot dx$$

$$M_{interna} = \frac{4\pi\rho_0 \cdot x^{n+3}}{n+3} \qquad (I)$$

(II) Massa total do corpo.

A massa total do corpo é dada para $x = R$.

$$M = \frac{4\pi\rho_0 \cdot R^{n+3}}{n+3} \qquad (II)$$

(III) Pontos no interior do corpo.

O campo gravitacional $(\vec{g})$ na superfície da gaussiana pode ser determinado pela lei de Gauss.

$$|\vec{g}| = \frac{G \cdot M_{interna}}{x^2}$$

Substituindo a equação (I):

$$|\vec{g}| = \frac{G \cdot \frac{4\pi\rho_0 \cdot x^{n+3}}{n+3}}{x^2} \Rightarrow \boxed{|\vec{g}| = \frac{4\pi\rho_0 \cdot G \cdot x^{n+1}}{n+3}, para\ 0 \leq x < R}$$

(IV) Pontos na superfície e exteriores ao corpo.

$$|\vec{g}| = \frac{G \cdot M}{x^2}$$

Substituindo a equação (II):

$$\boxed{|\vec{g}| = \frac{4\pi\rho_0 \cdot G \cdot R^{n+3}}{(n+3) \cdot x^2}, para\ x \geq R}$$

Note que para $n = 0$, retornarmos no caso anterior de densidade constante.

4.1.4. Corpo esférico com densidade uniforme e cavidade esférica

Considere um corpo de massa M e raio R. É feito uma cavidade esférica de raio a, a uma distância d do centro do corpo.

Podemos entender uma cavidade esférica como um corpo esférico de densidade negativa. Neste caso, o vetor campo gravitacional tem sentido oposto e, portanto, comporta-se como um vetor "saindo" do corpo.

(A) Para pontos no interior do corpo:

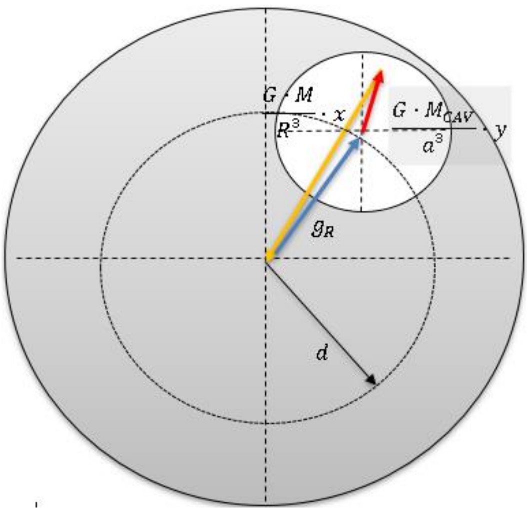


Figura 13: Corpo esférico com uma cavidade esférica.

O corpo sem o furo causa um campo gravitacional g':

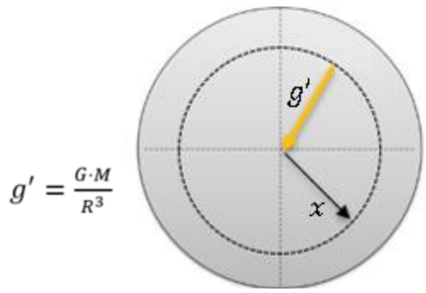


Figura 12: Região esférica caso não houvesse cavidade.

O furo esférico de raio a é posto com densidade negativa. Ele gera um campo (g_{cav}) de "repulsão" no ponto.

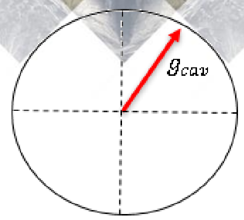


Figura 14: Cavidade esférica.

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M_{CAV}}{a^3} \cdot y$$

Em módulo, a densidade dos corpos é a mesma. A massa da cavidade é dada por:

$$\frac{M_{CAV}}{a^3} = \frac{M}{R^3} \therefore g_{cav} = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot y$$

Podemos notar que as expressões dos campos são diretamente proporcionais a distância até o ponto analisado. Desta maneira, podemos fazer o seguinte truque matemático:

$$g' = k \cdot x \text{ e } g_{cav} = k \cdot y$$

Portanto, o campo gravitacional resultante é dado por:

$$g_R = k.d \Rightarrow \boxed{g_R = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot d}$$

O campo resultante no interior da cavidade tem as seguintes propriedades:

- É um campo gravitacional uniforme.
- Só depende da distância entre o centro do corpo e o centro da cavidade esférica.

O campo gravitacional, acima demonstrado, é valido para qualquer ponto no interior do corpo. Não é preciso que ponto esteja dentro da cavidade.

(B) Pontos exteriores ao corpo:

Considere um ponto P que dista x do centro do corpo esférico e y do centro da cavidade esférica.

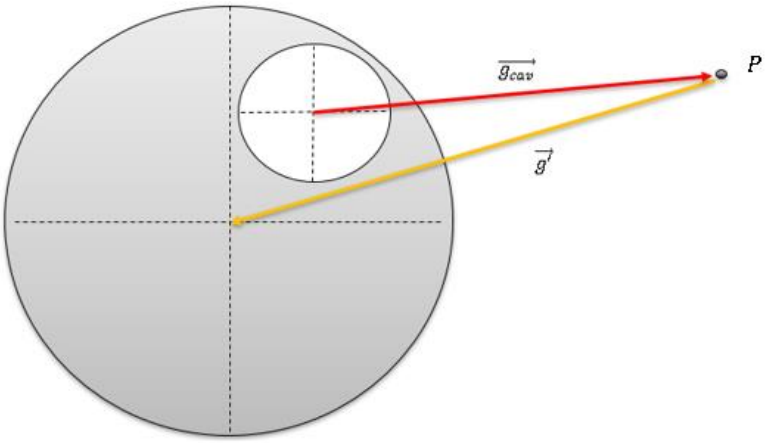


Figura 15: Composição dos campos em um dado ponto P.

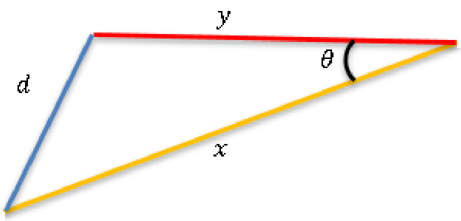
O corpo sem o furo causa um campo gravitacional g' no ponto exterior:

$$g' = \frac{G \cdot M}{x^2} \qquad (I)$$

A cavidade esférica produz um campo (g_{cav}):

$$g_{cav} = \frac{G \cdot M_{cav}}{y^2} \Rightarrow g_{cav} = \frac{G \cdot \frac{M \cdot a^3}{R^3}}{y^2} \therefore g_{cav} = \frac{G \cdot M \cdot a^3}{y^2 \cdot R^3} \quad (II)$$

Considere o seguinte triângulo abaixo. Faremos uma lei dos cossenos para determinar o valor do ângulo:



$$d^2 = x^2 + y^2 - 2 \cdot x \cdot y \cdot cos\theta$$

$$cos\theta = \frac{x^2 + y^2 - d^2}{2 \cdot x \cdot y}$$

$$sen\theta = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2 + y^2 - d^2}{2 \cdot x \cdot y}\right)^2}$$

Faremos a decomposição vetorial dos campos no ponto P. Adotaremos um eixo x paralelo ao vetor campo gravitacional da cavidade e um eixo y perpendicular à x.

$$g_x = g_{cav} - g' cos\theta$$

$$g_y = -g' sen\theta$$

O campo gravitacional resultante (g_R) em P é dado por:

$$g_R = \sqrt{g_x^2 + {g_y}^2} \Rightarrow g_R = \sqrt{(g_{cav} - g' cos\theta)^2 + (-g' sen\theta)^2}$$

$$\boxed{g_R = \sqrt{(g_{cav})^2 + (g')^2 - 2cos\theta \cdot g' \cdot g_{cav}}}$$

Para encontrar a expressão final, basta substituir as equações (I) e (II).

4.2. Bastão infinitamente longo

Considere um bastão infinitamente longo de densidade linear de massa λ. Considere o campo gravitacional ($g_{bastão}{}^{\infty}$) causado pelo bastão em um determinado ponto P.

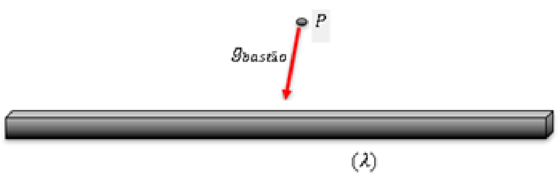


Figura 16: Bastão infinito gerando campo em um ponto P.

Para determinar o campo gerado em P, devemos escolher uma gaussiana conveninte para aplicar a lei de Gauss. Se utilizarmos uma gaussina esférica, os pontos da barra terão distâncias diferentes do ponto P e, portanto, o calculo do campo ficará muito complexo.

Note que se escolhermos uma gaussiana cilindrica, concentrica à barra, os pontos estarão a uma mesma distância e o campo gravitacional será perpenndicular à superfície da gaussiana.

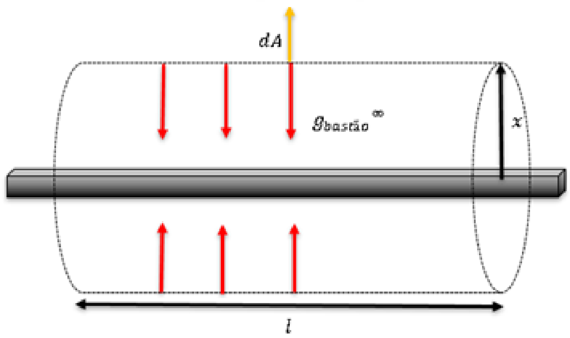


Figura 17: A gaussiana que melhor satisfaz as condições do problema é a área superficial de um cilindro.

Aplicando a lei de Gauss para a gravitação:

$$\oint \vec{g} \cdot \overrightarrow{dA} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G$$

Tomando a densidade de massa constante $\lambda = \frac{m_{int}}{l}$, podemos demonstrar que:

$$\boxed{g_{bastão}{}^{\infty} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot G}{x}}$$

4.3. Anel delgado

Considere um anel circular de raio R e massa M. Determinaremos o campo gravitacional (g_{anel}) gerado pelo anel no eixo vertical que passa pelo seu centro.

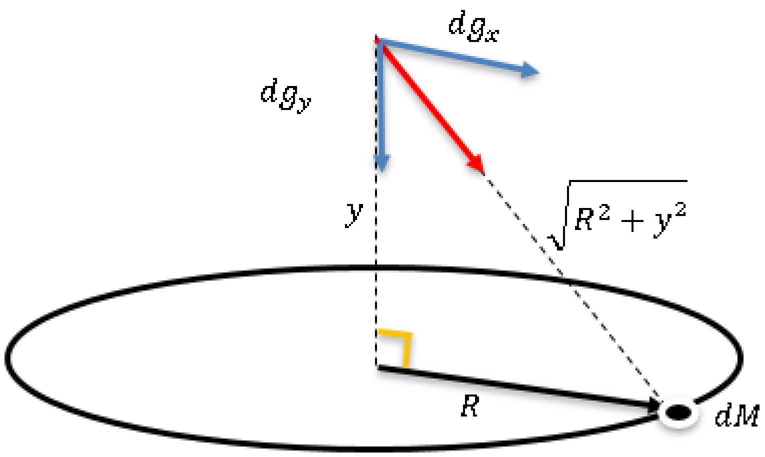


Figura 18: Anel delgado.

Considere o campo gerado por uma pequena porção de massa dM. As componentes horizontais desse campo (dg_x^{anel}) se cancelam, quando consideramos o campo resultante gerado por todas as porções do anel, e restam apenas as contribuições verticais. Desta maneira, temos:

$$g_{anel} = \int dg_y^{anel} = \int dg_{anel} \cdot cos\theta$$

$$g_{anel} = \int \frac{G \cdot dM}{(\sqrt{y^2 + R^2})^2} \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}$$

$$g_{anel} = \frac{G \cdot y}{(y^2 + R^2)^{3/2}} \cdot \int dM \therefore \boxed{g_{anel} = \frac{G \cdot M \cdot y}{(y^2 + R^2)^{3/2}}}$$

4.4. Disco

Considere um disco circular de raio R e massa M. Determinaremos o campo gravitacional (g_{disco}) gerado pelo disco no eixo vertical que passa pelo seu centro.

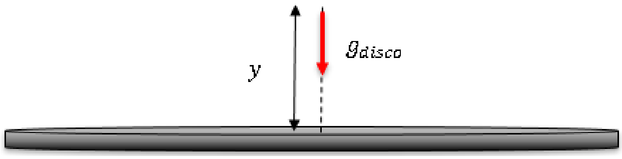


Figura 19: Disco com densidade de massa volumétrica.

Pode-se demonstrar que o campo será dado por:

$$\boxed{g_{disco} = \frac{2 \cdot G \cdot M}{R^2}\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right]}$$

Se o exercício nos fornece a densidade superfície de massa σ, podemos fazer a seguinte troca:

$$\sigma = \frac{M}{\pi R^2} \therefore \boxed{g_{disco} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi\left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right]}$$

As duas fórmulas acima são análogas. Cada um tem uma utilidade específica, dependendo do tipo de exercício a se resolver.

4.5. Plano infinito

Considere um plano infinito de densidade superficial de massa σ. O campo gerado pelo plano pode ser determinado de duas maneiras diferentes. A primeira abordagem será feita a partir do campo do disco. A segunda será feita utilizando diretamente a lei de Gauss.

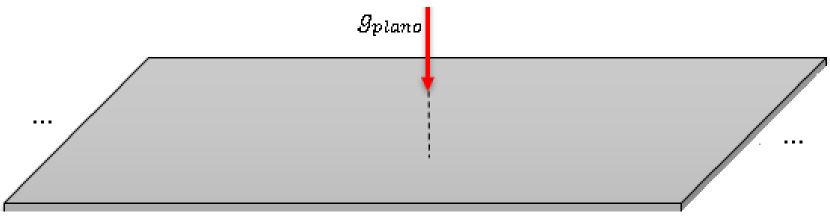


Figura 20: Plano infinito com densidade de massa constante.

4.5.1. Abordagem do disco

Utilizando a expressão para o disco, percebemos que um plano infinito é análogo a um disco com raio tendendo ao infinito. Dessa maneira, temos:

$$g_{plano} = \lim_{R\to\infty} 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right]$$

Assim, do limite:

$$\lim_{R\to\infty} \left[\frac{y}{\sqrt{y^2 + R^2}}\right] = 0 \therefore \boxed{g_{plano} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi}$$

4.5.2. Abordagem por Gauss

Considere a gaussiana cilíndrica abaixo.

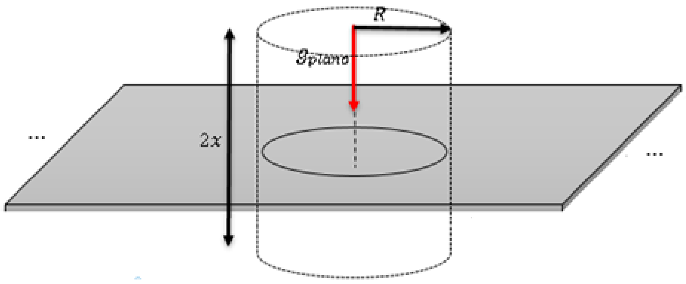


Figura 21: Gaussiana em um plano infinito.

Utilizando a lei de Gauss:

$$\oint \vec{g} \cdot \overrightarrow{dA} = -m_{int} \cdot 4\pi \cdot G$$

Como o plano é infinito, podemos analisar a simetria do problema e considerar que a gravidade será constante g_{plano}. Portanto:

$$\boxed{g_{plano} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi}$$

4.6. Bastão finito de comprimento L

Considere um bastão comprimento L e massa M. Determinaremos o campo gravitacional ($g_{bastão}$) em um ponto pertencente ao eixo comum ao bastão, a uma distância d de uma de suas extremidades.

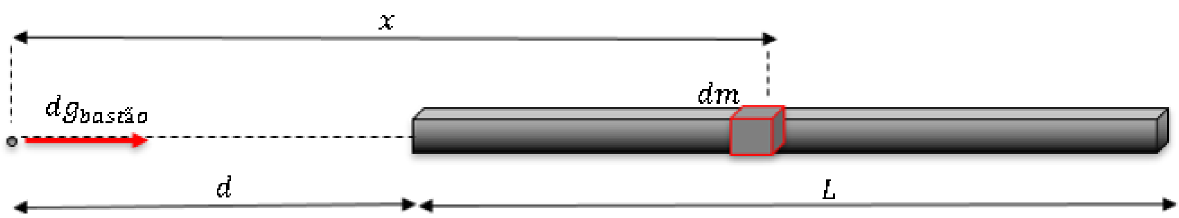


Figura 22: Campo de um bastão finito.

Considere um elemento infinitesimal de massa:

$$dg_{bastão} = \frac{G \cdot dm}{x^2} \Rightarrow dg_{bastão} = \frac{G \cdot \frac{M}{L} \cdot dx}{x^2}$$

$$dg_{bastão} = \int_{d}^{d+L} \frac{G \cdot \frac{M}{L} \cdot dx}{x^2} \therefore \boxed{g_{bastão} = \frac{G \cdot M}{d(d+L)}}$$

4.7. Variação da aceleração gravidade

Considere que a Terra é um planeta perfeitamente esférico de massa M, raio R e centro O. A terra gira em torno de seu eixo com velocidade angular ω. Chamaremos de g a aceleração da gravidade (campo gravitacional) na superfície da Terra em um dos polos.

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

4.7.1. Efeito da altitude

Se $g(H)$ a aceleração da gravidade em um ponto P, a uma altura H acima da superfície da Terra.

$$g(H) = \frac{G \cdot M}{(R+H)^2}$$

Fazendo a razão $g(H)/\ g$, vem:

$$\boxed{g(H) = g.\left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2}}$$

Note que para $R \gg H$, podemos realizar a aproximação $\left(1 + \frac{H}{R}\right)^{-2} \cong \left(1 - 2\frac{H}{R}\right)$ e, portanto:

$$\boxed{g(H) = g.\left(1 - 2\frac{H}{R}\right)}$$

4.7.2. Efeito da profundidade

Se $g(h)$ é a aceleração da gravidade em um ponto P', a uma profundidade h da superfície da terra. Utilizando a expressão da gravidade em função da pronfudidade, temos:

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x$$

A distância x é medida a partir do centro e, portanto, devemos fazer $x = R - h$.

$$g(h) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot (R - h)$$

Fazendo a razão $g(h)/\ g$, vem:

$$\boxed{g(h) = g \cdot \left(1 - \frac{h}{R}\right)}$$

4.7.3. Efeito da rotação

Considere um ponto da superfície da Terra localizado a uma latitude λ. Esse ponto está sujeito a duas forças, se considerarmos o referencial da própria terra. A primeira força é de atração gravitacional, devido ao campo gravitacional g. A segunda é a força centrifuga, devido a rotação da Terra. A soma vetorial dessas forças nos fornece a gravidade aparente de um objeto colocado naquele ponto.

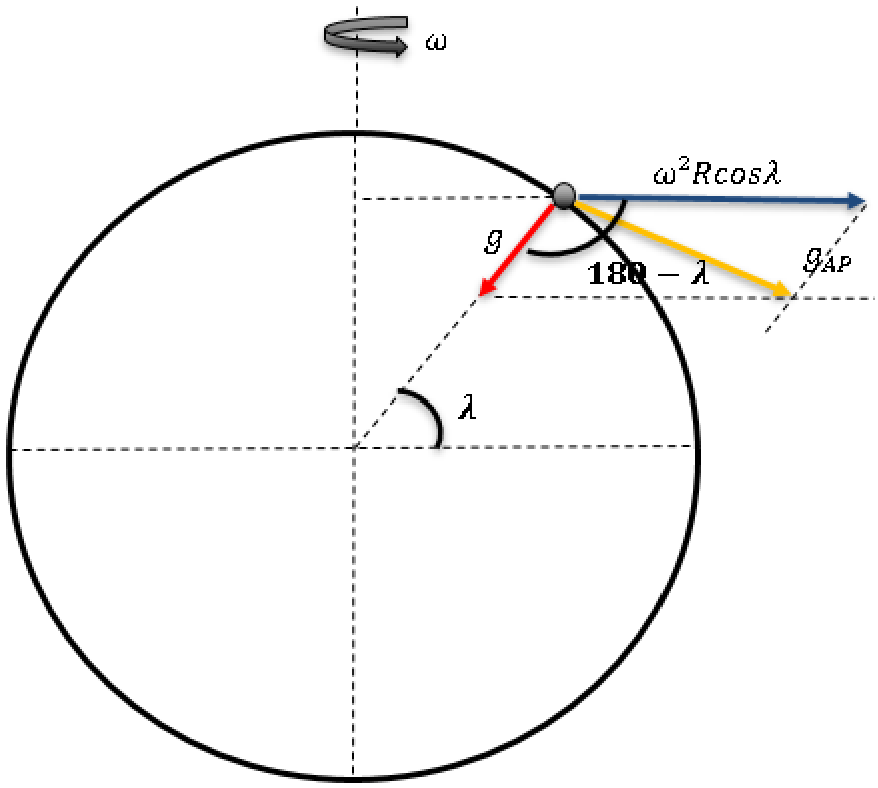


Figura 23: Efeito da rotação em um corpo a uma dada latitude.

Para determinar a gravidade aparente, fazemos a lei dos cossenos para os vetores vermelho e azul.

$$g_{ap} = \sqrt{g^2 + (\omega^2 R cos\lambda)^2 + 2 \cdot g \cdot \omega^2 R cos\lambda \cdot \cos(180 - \lambda)}$$

$$g_{ap} = \sqrt{g^2 + (\omega^2 R cos\lambda)^2 - 2 \cdot g \cdot \omega^2 R cos\lambda \cdot \cos(\lambda)}$$

$$\boxed{g_{ap} = g\sqrt{1 + \left(\frac{\omega^2 R}{g}\right)^2 cos^2\lambda - \frac{2\omega^2 R cos^2\lambda}{g}}}$$

(A) Nos polos ($\lambda = 90°$):

$$\boxed{g_{ap} = g}$$

(B) No equador ($\lambda = 0°$):

$$\boxed{g_{ap} = g - \omega^2 R}$$

3. (ITA)

Calcule a nova velocidade angular da Terra (ω'), para que o valor efetivo da aceleração da gravidade no equador seja nulo. O raio da terra vale $6400\ Km$ e a aceleração da gravidade nos polos é de $10\ m/s^2$.

Comentário:

Utilizando a expressão $(F: 4.7.6)$:

$$g_{ap} = g - \omega^2 R \Rightarrow g_{ap} = 0$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow \omega' = \sqrt{\frac{10}{6400.1000}}$$

$$\boxed{\omega' = 0{,}00125\ rad/s}$$

5. Potencial gravitacional

O potencial gravitacional em um ponto P, sujeito a ação de um campo gravitacional, é definido pelo valor do trabalho realizado para trazer um corpo de massa unitária do infinito para esse ponto, sem variação de velocidade do corpo.

Se τ é o trabalho realizado para trazer um corpo de massa m do infinito para o ponto P, sem aceleração, o potencial gravitacional (V) em P é dado por:

$$V = \frac{\tau}{m}$$

O potencial gravitacional é uma grandeza escalar. Fazendo a dimensional do potencial temos:

$$[V] = \frac{[\tau]}{[m]} = \frac{[M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]}{[M]}$$

$$\boxed{[V] = [M^0 \cdot L^2 \cdot T^{-2}]}$$

5.1. Potencial gravitacional de uma massa puntiforme

Considere uma massa puntiforme M. Determinaremos a seguir, o potencial gravitacional em um ponto P, distante x de M. As circunferências concêntricas representam superfícies equipotenciais (mesmo potencial).

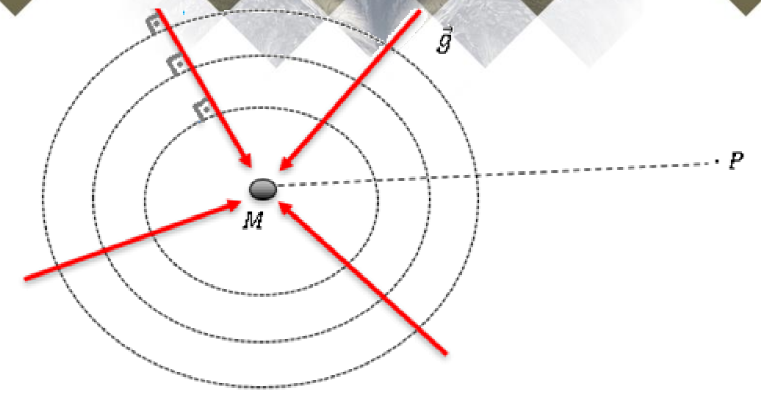


Figura 24: Campo gravitacional de uma massa puntiforme em um ponto P.

O campo gravitacional no ponto P é dado por:

$$g = \frac{G \cdot M}{x^2}$$

Para trazer uma massa unitária até o ponto P:

$$d\tau = 1 \cdot g \cdot dx \Rightarrow \tau = \int_{\infty}^{x} g \cdot dx \Rightarrow \tau = \int_{\infty}^{x} \frac{G \cdot M}{x^2} \cdot dx \Rightarrow V = \tau \therefore \boxed{V = -\frac{G \cdot M}{x}}$$

5.2. Relação entre o potencial e o campo gravitacional no ponto

Considere o campo gravitacional ($g(x)$) em função da distância x, gerado por um corpo mássico. O potencial $V(x)$ produzido por esse corpo é dado por:

$$\boxed{V(x) = -\int_{x}^{\infty} g(y).dy}$$

Outra maneira de perceber o potencial é através do gráfico do campo gravitacional em função da distância medida em relação a seu centro efetivo de massa (no caso de distribuições esféricas, o centro da esfera).

A área sob o gráfico, de um ponto P até o infinito, do campo gravitacional em função da distância, é numericamente igual ao potencial gravitacional.

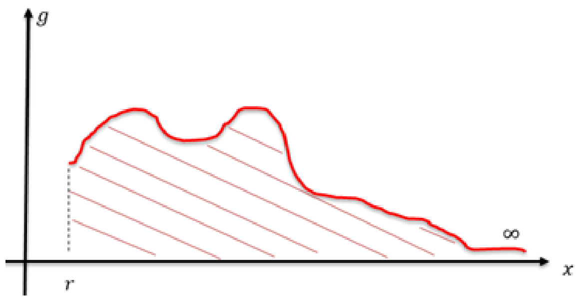


Figura 25: Área sob a curva do campo é numericamente igual a potencial gravitacional.

5.2.1. Referência

A referência para o potencial nulo é o infinito. Em qualquer outro ponto do universo, o potencial assume um valor negativo.

5.2.2. Troca de referência

Podemos definir uma troca de referência para o potencial nulo, a pedido do exercício, ou para que possamos facilitar a resolução de um problema. Adotaremos uma técnica simples para mudança de referência.

$$\boxed{V_{P,\infty} = V_{P,B} + V_{B,\infty}}$$

- $V_{P,\infty} - Potencial\ do\ ponto\ P, com\ referencial\ de\ potêncial\ nulo\ no\ \infty.$
- $V_{P,B} - Potencial\ do\ ponto\ P, com\ referencial\ de\ potêncial\ nulo\ no\ ponto\ B.$
- $V_{B,\infty} - Potencial\ do\ ponto\ B, com\ referencial\ de\ potêncial\ nulo\ no\ \infty.$

5.3. Potencial gerado por um corpo esférico

5.3.1. Potencial gerado por um corpo esférico maciço de densidade uniforme

(A) Solução pela definição:

Considere um corpo esférico de massa M e raio R. Nos tópicos anteriores determinamos o campo gravitacional gerado por essa distribuição, em diferentes pontos do espaço.

(A) $\boldsymbol{Para\ x = R}$ – Potencial gravitacional na superfície do corpo ($\boldsymbol{V_S}$):

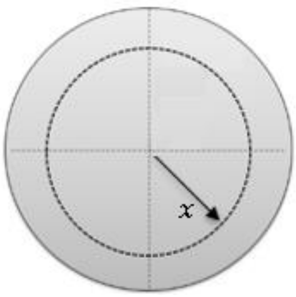
O campo gravitacional na superfície é dado por:

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{x^2}$$

Pela definição de potencial:

$$V(x) = -\int_x^{\infty} g(y).dy \Rightarrow V(R) = -\int_R^{\infty} \frac{G \cdot M}{y^2}.dy \Rightarrow V_S = V(R) \therefore \boxed{V_S = -\frac{G \cdot M}{R}}$$

(B) $\boldsymbol{Para\ 0 \le x < R}$:



Para pontos internos à esfera, é preciso fazer a troca de referência para o cálculo do potencial. Para pontos internos a esfera:

$$g(x) = \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x$$

Pela definição de potencial:

$$V_{interno} = -\int_x^{R} g(y).dy = -\int_x^{R} \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot y \cdot dy$$

$$V(x) = V_{interno} - \left[\int_R^{\infty} \frac{G \cdot M}{y^2} \cdot dy\right] \Rightarrow V(x) = -\int_x^R \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot y \cdot dy - \left[\int_R^{\infty} \frac{G \cdot M}{y^2} \cdot dy\right]$$

$$\boxed{V(x) = -\frac{G \cdot M}{2R^3}(3R^2 - x^2)}$$

(C) $\boldsymbol{Para\ x > R}$:

Para pontos externos, o comportamento do campo é análogo à superfície do corpo. Portanto:

$$\boxed{V(x) = -\frac{G \cdot M}{x}}$$

Sintetizando todas as informações em um gráfico, temos:

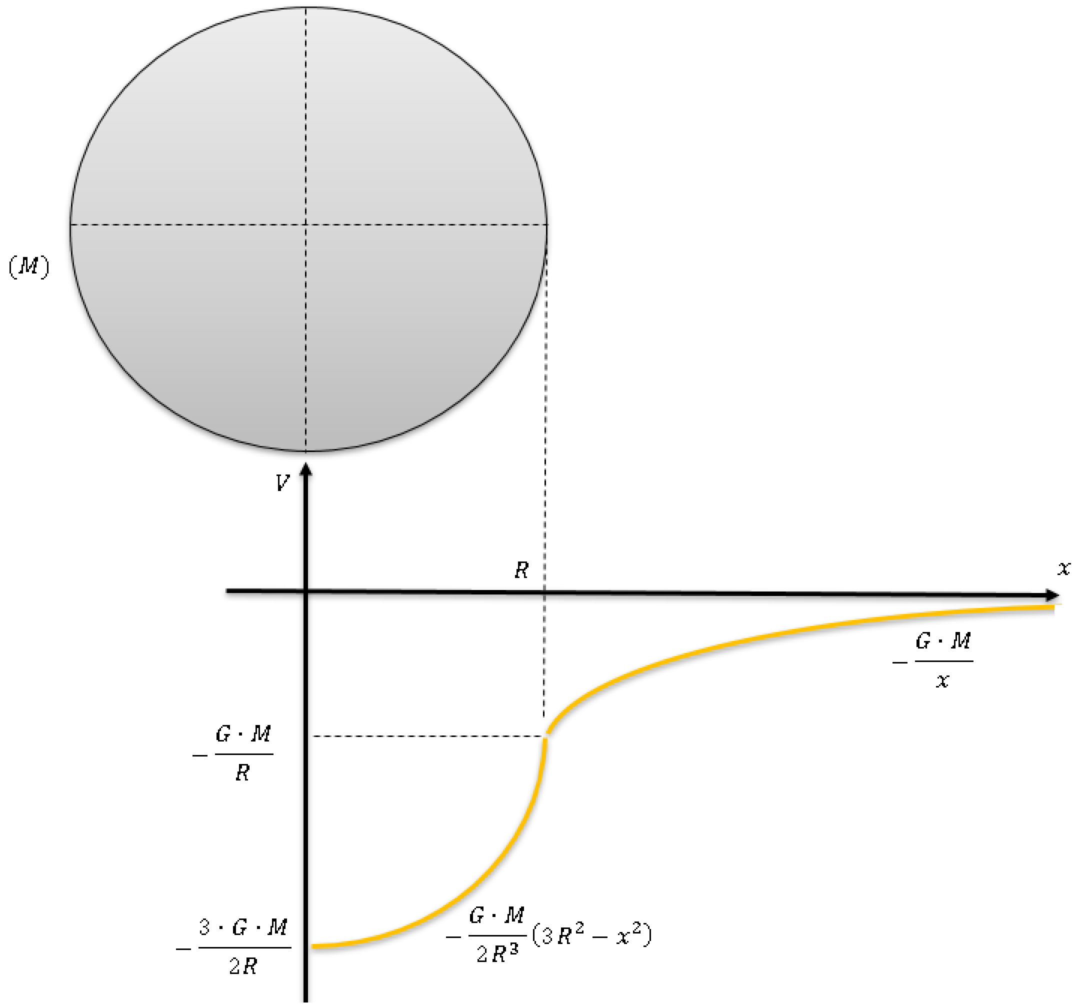


Figura 26: Gráfico do potencial gravitacional em função da distância.

(B) Solução por gráfico:

Considere o gráfico para o gráfico do campo gravitacional para a esfera:

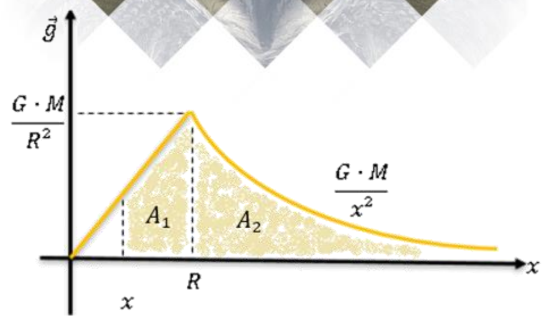


Figura 27: Gráfico do campo gravitacional em função da distância.

A área sob o gráfico é numericamente o potencial gravitacional.

$$A_1 = \frac{(x-R)}{2} \cdot \left[\frac{G \cdot M}{R^2} + \frac{G \cdot M}{R^3} \cdot x\right] \text{ e } A_2 = -\frac{G \cdot M}{R}$$

$$V(x) = A_1 + A_2$$

$$\boxed{V(x) = -\frac{G \cdot M}{2R^3}(3R^2 - x^2)}$$

5.4. Potencial gerado por outras distribuições

Resumindo as resultados encontrados até, podemos construir a seguinte tabela.

Distribuição	Campo gravitacional	Potencial Gravitacional
Bastão *infinito*	$g_{bastão}{}^{\infty} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot G}{x}$	***Se a referência for o infinito, a integral diverge. Portanto, o potencial tende a $-\infty$. Porém, podemos encontrar uma diferença de potencial:*** $V_{A,B}{}^{\infty} = 2 \cdot \lambda \cdot G \cdot \ln\left(\frac{x_B}{x_A}\right)$
Bastão Finito	$g_{bastão} = \frac{G \cdot M}{x(x+L)}$	$V_{bastão} = \frac{G \cdot M}{L} \ln\left(\frac{x}{x+L}\right)$
Anel Delgado	$g_{anel} = \frac{G \cdot M \cdot y}{(y^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}$	$V_{anel} = \frac{G \cdot M}{\sqrt{y^2+R^2}}$
Disco	$g_{disco} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi \left[1 - \frac{y}{\sqrt{y^2+R^2}}\right]$	$V_{disco} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi \left[\sqrt{y^2+R^2} - y\right]$
Plano Infinito	$g_{plano} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi$	***Se a referência for o infinito, a integral diverge. Portanto, o potencial tende a $-\infty$. Porem, podemos encontrar uma diferença de potencial:*** $V_{A,B} = 2 \cdot G \cdot \sigma \cdot \pi(x_B - x_A)$

6. Energia potencial gravitacional

A energia potencial gravitacional é a energia que um corpo possui devido a atração gravitacional de outro corpo. Ambos os corpos envolvidos nessa atração armazenam a mesma quantidade de energia (U).

A energia potencial gravitacional U pode ser determinada pelo trabalho realizado para afastar essas duas massas. Considere duas massas M e m separadas infinitamente no início. O trabalho realizado para colocar as massas a uma distância x é dado por:

$$d\tau = \frac{G \cdot M \cdot m}{x^2} \cdot dx$$

$$\tau = \int_{\infty}^{x} \frac{G \cdot M \cdot m}{y^2} \cdot dy \Rightarrow \tau = U \therefore \boxed{U = -\frac{G \cdot M \cdot m}{x}}$$

6.1. Algumas discussões

- Nota-se que para valores grandes de x a energia potencial entre os corpos diminui. Para $x \to \infty$, $U \to 0$.
- Se um corpo de massa m é movido de ponto a uma distância r_1 para um ponto a uma distância r_2, a variação da energia potencial é dada por:

$$\Delta U_{1,2} = \int_{r1}^{r2} \frac{G \cdot M \cdot m}{y^2} \cdot dy \therefore \boxed{\Delta U_{1,2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r_1} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_2}}$$

- Se um corpo é movido da superfície da Terra para um ponto a uma altura h, podemos fazer:

$$\Delta U_{1,2} = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} - \frac{G \cdot M \cdot m}{R + h}$$

Como $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$:

$$\Delta U_{1,2} = mgR - \frac{mgR^2}{R + h} = mgR\left(1 - \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}\right)$$

Se a variação de altura for pequena:

$$h \ll R$$

$$\Delta U_{1,2} = mgR\left(1 - \left(1 + \frac{h}{R}\right)\right) \therefore \boxed{\Delta U_{1,2} = mgh}$$

4.

A distância entre os centros de duas estrelas é $10R$. As massas das estrelas são M e $16M$ e seus raios são R e $2R$, respectivamente. Um corpo é lançado da superfície da estrela maior em direção a estrela menor. A velocidade tem a mesma direção da linha que une os centros das estrelas. Qual deve ser a mínima velocidade inicial para alcançar a estrela menor?

Comentário:

Primeiramente devemos encontrar o ponto P, entre as estrelas, onde o campo gravitacional é nulo:

$$\frac{G \cdot M}{x^2} = \frac{G \cdot 16M}{(10R - x)^2} \therefore x = 2R$$

Assim, o ponto P dista $2R$ da estrela menor. Potencial gravitacional em P:

$$V_P = -\frac{G \cdot M}{x} - \frac{G \cdot 16M}{10R - x} = -\frac{G \cdot M}{2R} - \frac{2G \cdot M}{R} \therefore V_P = -\frac{5G \cdot M}{2R}$$

Conservação da energia mecânica do sistema:

$$m\left(V_p - V_0\right) = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \left(-\frac{G \cdot M}{8R} - \frac{G \cdot 16M}{2R} + \frac{5G \cdot M}{2R}\right) = -\frac{v^2}{2}$$

$$\therefore \boxed{v = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{5 \cdot G \cdot M}{R}}}$$

6.1. Velocidade de escape

É a mínima velocidade inicial dada a um corpo para que ele consiga "fugir" do campo gravitacional de um sistema mássico de partículas. Para um sistema composto por dois corpos, um planeta e um satélite, por exemplo, a velocidade de escape é a mínima velocidade inicial do satélite para que ele não retorne à superfície do planeta, após ser lançado.

6.1.1. Corpo lançado de uma cavidade de um planeta esférico homogêneo

Considere um corpo de massa m no interior de uma cavidade de profundidade h. O planeta possui massa M e raio R. As dimensões da cavidade não alteram o comportamento do campo gravitacional gerado pelo planeta. Determinaremos, a seguir, a velocidade escape (V_{esc}) para esse corpo.

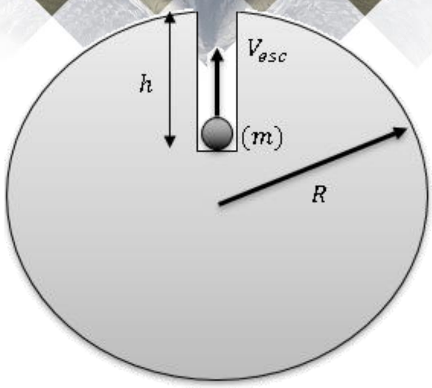


Figura 28: Corpo homogêneo com um pequeno túnel.

(1) Conservação da energia mecânica:

No infinito a energia potencial é nula e a velocidade também. A energia potencial gravitacional inicial (U_0) é a energia que o corpo de massa m tem no interior da cavidade.

$$U_0 + \frac{m \cdot V_{esc}^2}{2} = 0 + 0$$

Para uma cavidade esférica, temos:

$$U(x) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3}(3R^2 - x^2)$$

Para a cavidade temos $x = R - h$.

$$U(R-h) = U_0 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3}(3R^2 - (R-h)^2)$$

$$U_0 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2R^3}(2R^2 + 2Rh - h^2)$$

$$\boxed{V_{esc} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{R^3}(2R^2 + 2Rh - h^2)}}$$

6.1.2. Corpo lançado da superfície de um planeta esférico homogêneo

Se o lançamento for da superfície do planeta, temos $h = 0, x = R$.

$$\boxed{V_{esc} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}}$$

6.1.3. Buracos negros

Um buraco negro é um corpo, com uma massa muito grande, que não permite que nem a luz fuja de sua enorme atração. Podemos determinar qual é o raio de atuação de um buraco negro, ou seja, a região do espaço onde a luz não consegue escapar da atração do buraco negro. Essa região é chamada de raio de horizonte. Se c é a velocidade da luz no vácuo:

$$V_{esc} \geq c$$

$$V_{esc}^2 \geq c^2 \Rightarrow \frac{2 \cdot G \cdot M}{R} \geq c^2$$

$$\boxed{R \leq \frac{2 \cdot G \cdot M}{c^2}}$$

6.1.4. Propriedades

- A velocidade de escape depende da massa e do tamanho do planeta.
- A velocidade de escape independe da massa do corpo.
- A velocidade de escape para o planeta Terra é dada por:

$$V_{esc}{}^{Terra} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Como a gravidade $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$:

$$V_{esc}{}^{Terra} = \sqrt{2 \cdot g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}8 \cdot 6400.10^3} \therefore V_{esc}{}^{Terra} = 11{,}2\ Km/s$$

- Se um corpo é lançado da superfície de um planeta com uma velocidade v, menor que a de escape, o corpo volta para a superfície do planeta.

6.2. Trajetórias

Considere um corpo de massa m está sendo lançado da superfície de um planeta, de raio R e massa M, com velocidade V_0. A energia mecânica deste corpo é dada por:

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} + \frac{m \cdot V_0{}^2}{2}$$

6.2.1. Trajetória elíptica

Para que a trajetória do corpo seja elíptica:

$$E_M < 0 \Rightarrow \boxed{V_0 < \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}}$$

Sempre que a velocidade do corpo for menor que a velocidade de escape, do corpo na superfície do planeta, ele fará uma trajetória elíptica. A velocidade ser menor que a velocidade de escape, não garante que ele volte à superfície do planeta. Mostraremos, nos tópicos seguintes, a condição para que ele retorne.

6.2.2. Trajetória parabólica

Para que a trajetória do corpo seja parabólica:

$$E_M = 0 \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}}$$

6.2.3. Trajetória hiperbólica ou degenerações

Para que a trajetória do corpo seja hiperbólica

$$E_M > 0 \Rightarrow \boxed{V_0 > \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = V_{esc}}$$

6.3. Satélites

Os satélites são corpos que orbitam planetas e estrelas. Para o planeta Terra, estudaremos dois tipos de satélites:

- Satélite estacionário.
- Satélite rasante.

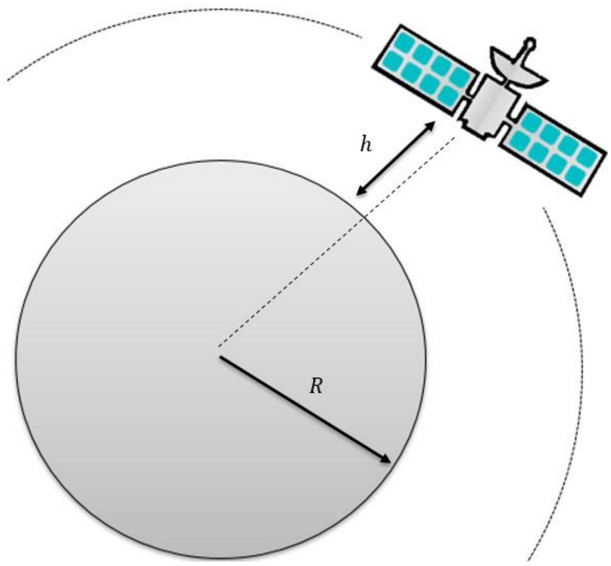


Figura 29: Satélite orbitando o planeta.

6.3.1. Satélite estacionário

Um satélite estacionário é um corpo que ocupa sempre a mesma posição em relação a um referencial ligado a superfície do planeta. Consideraremos alguns dados de um satélite estacionário:

$(\boldsymbol{A})\boldsymbol{Período}$:

Deve ser o mesmo período de rotação da terra. Se em 24 horas a terra dá uma volta completa:

$$T = 24 \cdot 60 \cdot 60\ s = 86400\ s$$

$(\boldsymbol{B})\boldsymbol{Altura}$:

Consideraremos $h = 36000\ Km$, pois é uma altura usual para de um satélite estacionário. Assim, o raio da órbita do satélite é:

$$r = 36000 + 6400 = 40000\ Km$$

Igualando a força gravitacional com a resultante centrípeta:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{(R+h)^2} = \frac{m \cdot {v_{estacionário}}^2}{(R+h)}$$

$$v_{estacionário} = \sqrt{\frac{g \cdot R^2}{R+h}} = \sqrt{\frac{9{,}8 \cdot (6{,}4.\,10^6)^2}{4.\,10^7}}$$

$$\boxed{v_{estacionário} \cong 3\ Km/s}$$

6.3.2. Satélite rasante

Um satélite rasante tem raio de orbita igual ao raio da terra.

$$R = h$$

Igualando a força gravitacional com a resultante centrípeta:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} = \frac{m \cdot {V_{rasante}}^2}{R}$$

$$V_{rasante} = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9{,}8 \cdot 6400.\,10^3} \therefore \boxed{V_{rasante} \cong 8\ Km/s}$$

Essa velocidade é chamada de velocidade cósmica primária. É a velocidade necessária para colocar um satélite em órbita rasante. O período de movimento desse satélite é dado por:

$$T_{rasante} = \frac{2\pi R}{V_{rasante}} = \frac{2\pi \cdot 6400.\,10^3}{8.\,10^3} \Rightarrow \boxed{T_{rasante} \cong 83{,}8\ minutos}$$

7. Trajetória elíptica

7.1. Momento angular e conservação

O momento angular é uma grandeza física vetorial associada à rotação de um corpo. O momento vetorial de uma partícula é definido pelo produto vetorial do vetor posição $\vec{r}$ da partícula pelo seu momento linear $\vec{p}$.

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m \cdot \vec{v})}$$

7.1.1. Conservação

Há conservação do momento angular sempre que o torque total for nulo.

Se há um sistema isolado, as forças agem internamente entre os corpos geram torque se anulam, pois essas forças são frequentemente centrais o que faz com que pares ação-reação anulem os torques.

Corpos que orbitam outros corpos, tem torque total nulo. Assim, o momento angular é conservado. Considere um corpo em uma órbita elíptica. Veja como ocorre a conservação do momento angular:

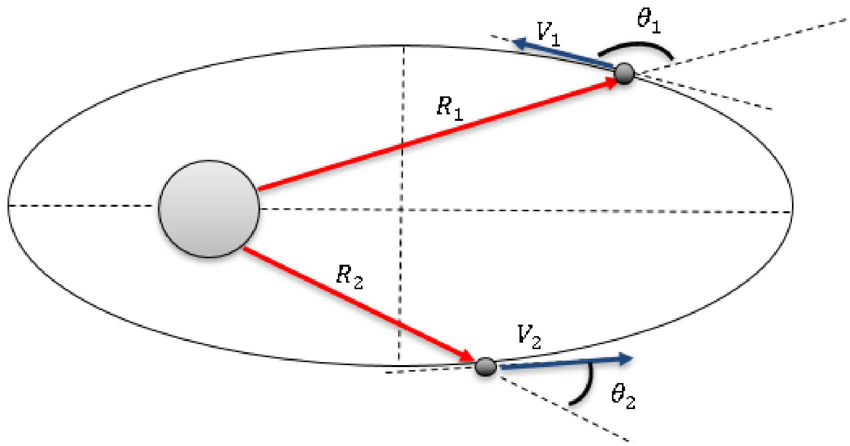


Figura 30: Representação de dois instantes distintos para um corpo orbitando outro.

$$L_1 = L_2$$

$$m \cdot V_1 \cdot r_1 \cdot sen\theta_1 = m \cdot V_2 \cdot r_2 \cdot sen\theta_2$$

$$\boxed{V_1 \cdot R_1 \cdot sen\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot sen\theta_2}$$

7.2. Corpo em órbita elíptica

Considere um corpo de massa m orbitando um planeta de massa M. Considere uma órbita elíptica de excentricidade e E semieixo maior a.

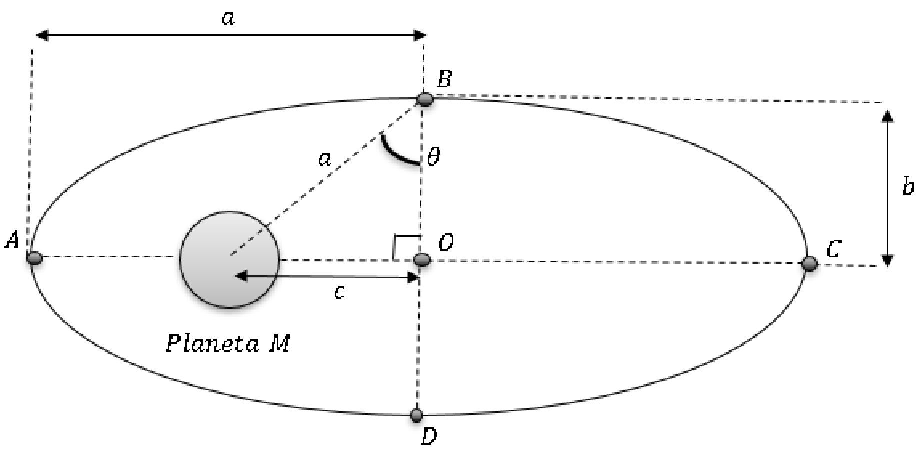


Figura 31: Corpo em órbita elíptica.

7.2.1. Elementos geométricos

Pela definição de excentricidade:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow \boxed{c = e \cdot a}$$

Utilizando a relação fundamental da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + (e \cdot a)^2 \Rightarrow \boxed{b = a\sqrt{1 - e^2}}$$

Dessa forma, temos:

$$cos\theta = \frac{b}{a} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a} \Rightarrow \boxed{cos\theta = \sqrt{1 - e^2}}$$

$$sen\theta = \frac{c}{a} = \frac{e \cdot a}{a} \Rightarrow \boxed{sen\theta = e}$$

7.2.2. Afélio e Periélio

Afélio e periélio são os pontos da trajetória mais afastado e menos afastado do planeta (M), respectivamente. O afélio corresponde ao ponto C e o periélio ao ponto A.

(A) Raios do afélio e periélio:

- $r_A - Raio\ do\ afélio$
- $r_P - Raio\ do\ periélio$

$$r_A = a + c = a + e \cdot a \Rightarrow \boxed{r_A = a(1 + e)}$$

$$r_P = a - c = a - e \cdot a \Rightarrow \boxed{r_P = a(1 - e)}$$

(B) Conservação do momento angular:

Pela conservação do momento angular, temos:

$$V_1 \cdot R_1 \cdot sen\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot sen\theta_2$$

$$V_A \cdot r_A \cdot sen90° = V_P \cdot r_P \cdot sen90°$$

$$V_A \cdot a(1 + e) = V_P \cdot a(1 - e)$$

Assim, a relação entre as velocidades no afélio e periélio:

$$\boxed{\frac{V_P}{V_A} = \frac{1 + e}{1 - e}}$$

(C) Conservação da energia:

$$-\frac{G \cdot M \cdot m}{r_P} + \frac{m \cdot V_P^2}{2} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} + \frac{m \cdot V_A^2}{2}$$

Pelas relações das velocidades do afélio e do periélio, temos:

$$\boxed{V_P = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}}} \text{ e } \boxed{V_A = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}}}$$

7.2.3. Pontos sobre o eixo menor

Determinaremos a velocidade do corpo quando está em B ou D. Faremos as contas para o ponto B, em relação a posição do periélio. Fazendo a conservação do momento angular:

$$V_1 \cdot R_1 \cdot sen\theta_1 = V_2 \cdot R_2 \cdot sen\theta_2$$

$$V_B \cdot a \cdot sen(90° + \theta) = V_P \cdot r_P \cdot sen90°$$

$$V_B \cdot a \cdot cos\theta = V_P \cdot r_P$$

$$V_B \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}} \cdot a(1 - e) \therefore \boxed{V_B = \sqrt{\frac{G \cdot M}{a}}}$$

7.2.4. Energia mecânica

O universo de forças no estudo de gravitação universal é conjunto das forças conservativas. Dessa forma, pode-se dizer que sempre há conservação da energia mecânica. A energia possui um valor fixo E_M, que iremos determinar a seguir:

Para o periélio, temos:

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r_P} + \frac{m \cdot V_P^2}{2}$$

$$E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{a(1 - e)} + \frac{m \cdot \left(\sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 + e}{1 - e}}\right)^2}{2} \therefore \boxed{E_M = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2a}}$$

A energia mecânica encontrada acima é totalmente geral. Para orbitas circulares o valor de a é o raio da órbita circular.

7.2.5. Momento angular

Em gravitação, as forças são pares ação e reação e, portanto, também se conserva o momento angular. A momento angular também possui um valor fixo. Chamaremos esse valor de L e iremos determiná-lo abaixo. Adotaremos o afélio como referência:

$$L = m \cdot V_A \cdot r_A . sen90°$$

$$L = m \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M}{a} \cdot \frac{1 - e}{1 + e}} \cdot a(1 + e). sen90° \therefore \boxed{L = m\sqrt{G \cdot M \cdot a \cdot (1 - e^2)}}$$

7.2.6. Raio de curvatura

Considere uma elipse centrada na origem. Seu eixo menor vale b e seu eixo maior vale a. Sua equação é dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = \pm \frac{a}{b} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$$

O raio de curvatura para uma função genérica é dado por:

$$\rho = \left| \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|$$

- $y' - primeira\ derivada\ da\ função.$
- $y'' - segunda\ derivada\ da\ função.$

$$y' = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x}{y} \Rightarrow y'' = -\frac{b^4}{a^2}\cdot\frac{1}{y^3} \Rightarrow \rho = \frac{(a^4\cdot y^2 + b^4\cdot x^2)^{3/2}}{a^4\cdot b^4}$$

(I) Para o eixo menor:

Encontraremos o raio de curvatura no ponto $P(0,b)$:

$$\rho_1 = \frac{(a^4\cdot b^2)^{3/2}}{a^4\cdot b^4} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \frac{a^2}{b}}$$

(II) Para o eixo maior:

Encontraremos o raio de curvatura no ponto $P(a,0)$:

$$\rho_2 = \frac{(b^4\cdot a^2)^{3/2}}{a^4\cdot b^4} \Rightarrow \boxed{\rho_2 = \frac{b^2}{a}}$$

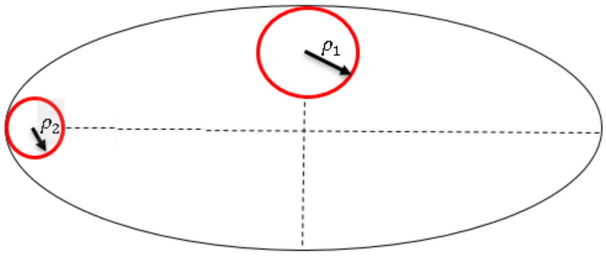


Figura 32: Raio de curvatura em dois momentos distintos.

HORA DE PRATICAR!

8. Lista de exercícios

1. (ITA)

Sabendo-se que a massa da Terra é aproximadamente 80 vezes a da Lua e que seu raio é aproximadamente 4 vezes maior, um astronauta descendo na superfície da Lua faz oscilar um pêndulo simples de comprimento L e mede seu período T_L. Comparando com o período T_T desse mesmo pêndulo medido na Terra ele observa que:

a) $T_T = 80T_L$
b) $T_L = 80T_T$
c) $T_L = 16T_T$
d) $T_T = 16T_L$
e) $T_T = 0{,}4T_L$

2. (ITA)

Os satélites de comunicação (chamados síncronos) permanecem praticamente estacionários sobre determinados pontos do equador terrestre. Com referência a esse fato, ignorando o movimento de translação da terra:

a) Um observador terrestre que esteja sob o satélite diz que ele não cai porque está fora da atração da gravidade.

b) Outro dirá que ele não cai devido ao campo magnético que envolve a terra.

c) Um terceiro invoca a terceira lei de Newton e explica que existe uma reação igual e oposta à atração da gravidade.

d) Um observador que estivesse no sol explicaria o fenômeno como um movimento circular uniforme sob a ação de uma força única, centrípeta.

e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

3. (ITA)

Uma das conclusões expressas nas famosas leis de Kepler foi sobre o movimento dos planetas em órbitas elípticas das quais o Sol ocupa um dos focos.

a) esta conclusão foi uma consequência, e, portanto, posterior, do enunciado das leis da Mecânica de Newton.

b) coube a Sir Isaac Newton interpretar teoricamente estas conclusões com base na lei de gravitação universal e nos princípios de Mecânica Clássica que ele próprio havia proposto.

c) esta conclusão não apresenta nenhuma relação com o movimento dos engenhos conhecidos como satélites artificiais da Terra.

d) o movimento da Lua em torno da Terra é de natureza diferente daquele descrito por Kepler.

e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

4. (ITA)

A relação $E = \frac{G \cdot M}{R^2}$ entre o valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra e os valores da constante de gravitação universal, massa e raio da Terra:

a) é resultado de uma fórmula empírica elaborada pelos astrônomos e válida para qualquer planeta de forma esférica.

b) dá o valor correto da aceleração da gravidade em qualquer ponto da Terra desde o polo até o equador.

c) pode ser obtida teoricamente, tanto no caso da Terra como no caso de um planeta qualquer de forma esférica, homogêneo e que não esteja em rotação em torno de um eixo relativamente a um sistema de referência inercial.

d) dá o valor correto de g mesmo para pontos internos à superfície da Terra desde que R seja interpretado como a distância entre este ponto e o centro da Terra.

e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

5. (ITA)

O trabalho necessário para levar a partícula de massa M/3 do ponto “A” até o ponto “B”, em função da constante universal de gravitação “G”, quando essa partícula se encontra sob a ação de 2 massas, “M” e “2M”, conforme figura abaixo, será dado por:

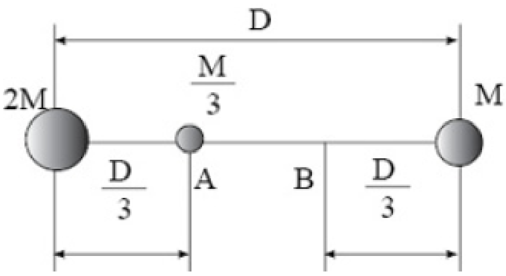
a) $+\,9GM^2/2D$

b) $-\,9\,GM^2/2D$

c) $+\,GM^2/2D$

d) $-\,GM^2/2D$

e) Nenhum dos valores acima.



6. (ITA)

Deseja-se colocar em órbita da Terra um satélite ST e, em órbita da Lua um satélite SL, de modo que ambos tenham o mesmo período de revolução.

Dados: $Raio\ da\ terra: 6{,}37 \cdot 10^6\ m$, $Raio\ da\ Lua: 1{,}74 \cdot 10^6\ m$, $Massa\ da\ Terra: 5{,}98 \cdot 10^{24}\ Kg$, $Massa\ da\ Lua: 7{,}34 \cdot 10^{22}\ Kg$.

Nestas condições, pode-se afirmar que:

a) isto não é fisicamente possível

b) se r_L é a distância entre os centros de SL e da Lua e r_T a distância entre os centros de ST e da Terra, então, $r_L = r_T$.

c) a distância de ST à superfície da Terra será maior do que 1,1 x 10^6 m

d) os segmentos que unem SL ao centro da Lua e ST ao centro da Terra descrevem áreas iguais em tempos iguais.

e) a distância de ST à superfície da Terra deve ser igual à distância de SL à superfície da Lua.

7. (ITA)

Um foguete lançado verticalmente, da superfície da Terra, atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio R da Terra. Calcular a velocidade inicial do foguete. M é a massa da Terra e G constante gravitacional.

a) $v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$ b) $v = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$ c) $v = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}$

d) $v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$ e) $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

8. (ITA)

Um satélite artificial de dimensões desprezíveis gira em torno da Terra em órbita circular

de raio R. Sua massa é m e a massa da Terra é M (muito maior que m). Considerando a Terra como uma esfera homogênea e indicando a constante de gravitação universal por G, podemos afirmar que:

a) A aceleração normal do satélite é dirigida para o centro da Terra e sua aceleração tangencial vale GMR^{-2}.

b) Se a atração gravitacional pudesse ser substituída pela ação de um cabo de massa desprezível, ligando o satélite ao centro da Terra, a tensão nesse cabo seria dada por $GmM\ /\ (2R^2)$.

c) Em relação ao satélite, a Terra percorre uma circunferência de raio mR/M.

d)O período de rotação do satélite é $2\pi\sqrt{R^3}/\sqrt{GM}$

e) A Terra é atraída pelo satélite com uma força de intensidade m/M vezes menor que a força com a qual o satélite é atraído pela Terra.

9. (ITA)

Sendo R o raio da Terra, suposta esférica, G a constante da gravitação universal, g_1 a aceleração de queda livre de um corpo no Equador, g_2 a aceleração de queda livre no pólo Norte, M a massa da Terra, podemos afirmar que:

a) $g_1 = G\ M/R^2$ b) $M = \frac{R^2 \cdot g_2}{G}$ c) g_2 é nula

d) g_1 é nula e) $\frac{GM}{R^2} = \frac{g_1+g_2}{2}$

10. (ITA)

Sabendo-se que a energia potencial gravitacional de um corpo de massa M (em kg) a uma distância r (em metros) do centro da Terra é $E_P = -4 \cdot 10^{14}\frac{M}{r}$, qual será a velocidade de lançamento que o corpo deve receber na superfície da Terra para chegar a uma distância infinita, com velocidade nula? (Ignore o atrito com a atmosfera e considere o raio da Terra como $6{,}4 \cdot 10^6\ m$).

a) 1,25 x 104 m/s
b) 5,56 x 104 m/s
c) 22 km/s
d) 19,5 x 103 m/s
e) 1,12 x 104 m/s

11. (ITA)

Uma espaçonave de massa 2000 kg está a $3 \cdot 10^8\ m$ da terra ($6 \cdot 10^{24} Kg$). A terra, espaçonave, Lua ($7{,}4 \cdot 10^{22} Kg$) e o sol ($2 \cdot 10^{30} Kg$) estão alinhados, com a Lua entre a Terra e o

sol. A distância da terra a lua é de $4 \cdot 10^8 m$, a distância da terra ao sol é de $1{,}5 \cdot 10^{11} m$. A força resultante sobre a espaçonave é:

a) 4,0 N no sentido da espaçonave ao sol
b) 4,0 N no sentido da espaçonave a terra
c) 3,0 N no sentindo da espaçonave ao sol
d) 4000 N no sentido da espaçonave ao sol
e) 3000 N no sentido da espaçonave a terra

12. (ITA)

Um corpo A, inicialmente em repouso, explode sob a ação exclusiva de forças internas, dividindo-se em duas partes, uma de massa m e outra de massa m'. Após a explosão, a única força que atua sobre cada uma das partes é a força gravitacional exercida pela outra parte. Quando a massa m está a uma distância r da posição originalmente ocupada pelo corpo A, a intensidade da aceleração de m é igual a:

a) $a = \frac{Gm}{r^2\left(1+\frac{m}{m'}\right)^2}$
b) $a = \frac{Gm'}{r^2\left(1+\frac{m}{m'}\right)^2}$
c) $a = \frac{Gm}{r^2\left(1+\frac{m'}{n}\right)^2}$
d) $a = \frac{Gm}{r^2}$
e) $a = \frac{Gm'}{r^2}$

13. (ITA)

Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela cuja massa é muito maior que a massa do planeta. Seja r a distância entre a estrela e o planeta, num ponto genérico da órbita, e a velocidade do planeta no mesmo ponto. Sabendo-se que a e b são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de r e v_1 o valor mínimo de v, pode-se afirmar que o produto $v \cdot r$ satisfaz a relação:

a) $v \cdot r\ \leq v_1 \cdot b$
b) $v \cdot r\ \geq v_1 \cdot b$
c) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{a}$
d) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{a^2}{b}$
e) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{2a}$

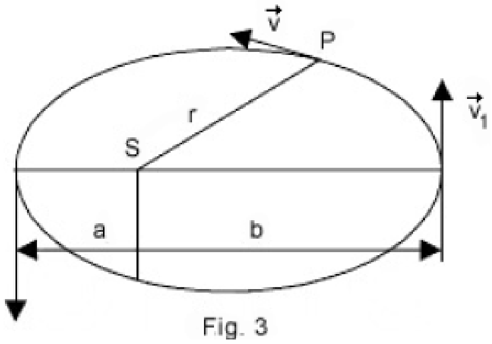


Fig. 3

14. (ITA)

Na questão anterior, designando por M a massa da estrela ($M >> m$) e por E a energia mecânica total, pode-se afirmar que:

a) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r}\right)$

b) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r}\right)$

c) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r^2}\right)$

d) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r^2}\right)$

e) $v = \left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r}\right)$

15. (ITA)

Se colocarmos um satélite artificial de massa "m" girando ao redor de Marte ($6{,}37 \cdot 10^{23}\ kg$) numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética (T) e a potencial gravitacional (U) será:

a) $T = -U/2$

b) $T = -1/2U$

c) $T = U/2m$

d) $T = m \cdot U$

e) $T = U$

16. (ITA)

A respeito da lei da gravitação universal podemos afirmar que:

a) Exprime-se pela fórmula $P = mg$.

b) Pode ser deduzida das leis de Kepler do movimento planetário.

c) Evidencia a esfericidade da Terra.

d) Implica em que todos os movimentos planetários sejam circulares.

e) É compatível com as leis de Kepler do movimento planetário.

17. (ITA)

Considere a Terra como um corpo homogêneo, isotrópico e esférico de raio R, girando em torno do seu eixo com frequência v (número de voltas por unidade de tempo), sendo g a aceleração da gravidade medida no equador. Seja v' a freqüência com que a Terra deveria girar para que o peso dos corpos no equador fosse nulo. Podemos afirmar que:

a) $v' = 4v$

b) $v' = 2v$

c) não existe v' que satisfaça às condições do problema.

d) $v' = \sqrt{\left(v^2 + \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

e) $v' = \sqrt{\left(v^2 - \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

18. (ITA)

Duas estrelas de massa m e $2m$ respectivamente, separadas por uma distância d e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, determine o tempo T para uma revolução completa, a velocidade $v(2m)$ da estrela maior, bem como a energia mínima W para separar completamente as duas estrelas são:

19. (ITA)

Comentando as leis de Kepler para o movimento planetário, um estudante escreveu:

I- Os planetas do sistema solar descrevem elipses em torno do Sol que ocupa o centro dessas elipses.

II- Como o dia (do nascer ao pôr-do-Sol) é mais curto no inverno e mais longo no verão, conclui-se que o vetor posição da Terra (linha que une esta ao Sol) varre uma área do espaço menor no inverno do que no verão para o mesmo período de 24 horas.

III- Como a distância média da Terra ao Sol é de 1,50.10^8 km e a de Urano ao Sol é de 3,00.10^9 km, pela 3a lei de Kepler conclui-se que o "ano" de Urano é igual a 20 vezes o ano da Terra.

IV- As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.

Verifique quais as afirmações que estão corretas e assinale a opção correspondente.

a) I e IV estão corretas.
b) Só a I está correta.
c) II e IV estão corretas.
d) Só a IV está correta.
e) II e III estão corretas.

20. (ITA)

Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita circular ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa m bem no centro do satélite o astronauta observa que objeto mantém sua posição ao longo tempo. Baseado na 2ª lei de Newton, um observador no Sol tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?

a) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).

b) Se a força de gravidade da Terra $F_G = G\frac{M_T m_o}{r^2}$ está atuando sobre o objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.

c) A carcaça do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.

d) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.

e) A força que age sobre o satélite é de gravitação, mas a velocidade tangencial v do satélite deve ser tal que $\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_T m_o}{r^2}$.

21. (ITA)

Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra (v_P/v_T) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra (g_P/g_T).

a) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$
b) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$
c) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{2}$
d) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$
e) Nenhuma das anteriores

22. (ITA)

Um satélite artificial geoestacionário permanece acima de um mesmo ponto da superfície da Terra em uma órbita de raio R. Usando um valor de $R_T = 6400\ Km$ para o raio da Terra. A razão R/R_T é aproximadamente igual a:

a) 290 b) 66 c) 6,6

d) 11,2 e) Indeterminada pois a massa do satélite não é conhecida.

23. (ITA)

Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre cubo do semieixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

a) $\frac{a^2}{P^2} = \frac{GMR}{4\pi^2}$ b) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{4\pi^2}$ c) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$

d) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{2\pi^2}$ e) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

24. (ITA)

Qual seria o período (T) de rotação da Terra em torno do seu eixo, para que um objeto apoiado sobre a superfície da Terra no equador ficasse desprovido de peso?

Dados: raio da Terra: $6{,}4 \cdot 10^3\ Km$; massa da terra: $6 \cdot 10^{24}\ Kg$.

a) $T = 48\ h$ b) $T = 12\ h$ c) $T = 1{,}4\ h$

d) $T = 2{,}8\ h$ e) $T = 0$

25. (ITA)

Considere que MT é a massa da Terra, RT o seu raio, g a aceleração da gravidade e G a constante de gravitação universal. Da superfície terrestre e verticalmente para cima, desejamos lançar um corpo de massa m para que, desprezando a resistência do ar ele se eleve a uma altura acima da superfície igual ao raio da Terra. A velocidade inicial V do corpo neste caso deverá ser de:

a) $v = \sqrt{\frac{2G\cdot M_T}{R_T}}$ b) $v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{3R_T}}$ c) $v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{R_T}}$

d) $v = \sqrt{\frac{3G\cdot M_T}{R_T}}$ e) $v = \sqrt{\frac{g\cdot G\cdot M_T}{\substack{m\cdot \\ R_T}}}$

26. (ITA)

Numa certa data, a posição relativa dos corpos celestes do Sistema Solar era, para um observador fora do Sistema, a seguinte: ME = Mercúrio; VE = Vênus; TE = Terra; MA = Marte; JU = Júpiter

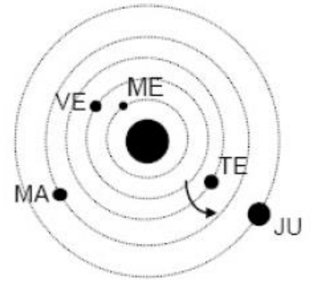
O sentido de rotação da Terra está indicado na figura. A figura não está em escala. Do diagrama apresentado, para um observador terrestre não muito distante do equador, pode-se afirmar que:

I - Marte e Júpiter eram visíveis à meia-noite.

II - Mercúrio e Vênus eram visíveis à meia-noite.

III - Marte era visível a oeste ao entardecer.

IV - Júpiter era visível à meia-noite.



Das afirmativas feitas pode-se dizer que:

a) Somente a IV é verdadeira.

b) III e IV são verdadeiras.

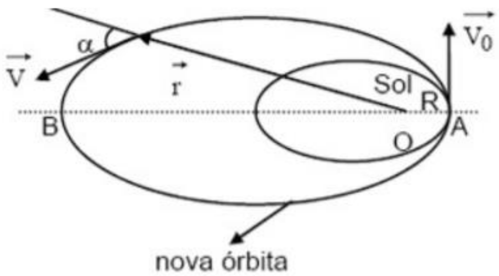
c) Todas são verdadeiras.

d) I e IV são verdadeiras.

e) Nada se pode afirmar com os dados fornecidos.

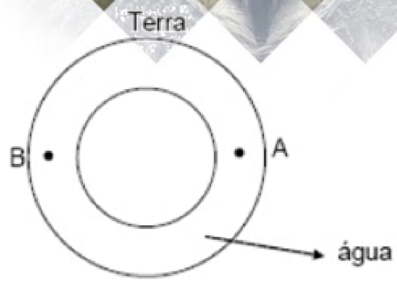
27. (ITA)

Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo V_0 seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo. O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima (distância AO = R na figura). Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como a única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, e designe por M a massa do Sol e por G a constante de gravitação universal. Considere ainda que o momento angular da Terra seja conservado, isto é, a quantidade de módulo $m \cdot v \cdot r \cdot sen\alpha$ permanece constante ao longo da nova trajetória elíptica da Terra em torno do sol (nessa expressão, m é a massa da Terra, r é o módulo do vetor posição da Terra em relação ao Sol, o módulo da velocidade da Terra e o ângulo α entre r e v). Determine a distância (OB), do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.



28. (ITA)

Sabe-se que a atração gravitacional da lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento de marés oceânicas na Terra, supostamente esférica, homogeneamente recoberta por uma camada de água.



Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:

I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés altas simultaneamente.

II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.

III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

Então está(ão) correta(s), apenas:

a) a afirmativa I
b) a afirmativa II
c) a afirmativa III
d) as afirmativas I e II
e) as afirmativas I e III

29. (ITA)

Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.

a) Latitude de 45°.
b) Latitude de 60°.
c) Latitude de 90°.
d) Em qualquer ponto do Equador.
e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

30. (ITA – 2012)

Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

31. (Solved Problems in Physics)

Qual a profundidade da cratera que devemos fazer num planeta de raio R para que, lançando um projétil do fundo da mesma com a velocidade de escape do planeta, sua altura máxima alcançada seja igual a 3R?

32. (OBF)

Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro de distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração na superfície terrestre diminuiria para (**g** é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

a) $6g/8$
b) $3g/8$
c) $5g/8$

d) $g/8$ e) $7g/8$

33. (IME)

Um astronauta equipado, utilizando o esforço máximo, salta 0,60 m de altura na superfície terrestre. Calcular o quanto saltaria na superfície lunar, nas mesmas condições. Considerar o diâmetro e a densidade da lua como 1/4 e 2/3 dos da Terra, respectivamente.

34. (IME)

Um astronauta em traje especial e completamente equipado pode dar pulos verticais de 0,5m na Terra. Determine a altura máxima que o astronauta poderá pular em um outro planeta, sabendo-se que o seu diâmetro é um quarto do da Terra e sua massa específica dois terços da terrestre. Considere que o astronauta salte em ambos os planetas com a mesma velocidade inicial.

35.

Um foguete é lançado de um planeta e retorna ao mesmo planeta, de raio R, de tal forma que o vetor velocidade no retorno é paralelo ao vetor velocidade no lançamento. A separação angular no centro do planeta entre o ponto de lançamento e o de retorno é θ. Quanto tempo dura o voo do foguete, se o período de um satélite cuja órbita tangencia a superfície da Terra é T_0?

GABARITO

9. Gabarito sem comentários

1. E
2. D
3. B
4. C
5. C
6. C
7. A
8. D
9. B
10. E
11. A
12. B
13. B
14. A
15. A
16. E
17. D
18. $2\pi d\sqrt{\frac{d}{3GM}}, \sqrt{\frac{Gm}{3d}}$ e $+\frac{G\cdot m^2}{d}$
19. D
20. E
21. B
22. C
23. E
24. C
25. C
26. B
27. $\frac{R^2\cdot {V_0}^2}{2GM-R\cdot {V_0}^2}$
28. E
29. C
30. $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$
31. $x = R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$
32. E
33. $h = 3{,}6\ m$
34. $3{,}0\ m$
35. $T_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right)$

ESCLARECENDO!

10. Lista de exercícios comentada

1. (ITA)

Sabendo-se que a massa da Terra é aproximadamente 80 vezes a da Lua e que seu raio é aproximadamente 4 vezes maior, um astronauta descendo na superfície da Lua faz oscilar um pêndulo simples de comprimento L e mede seu período T_L. Comparando com o período T_T desse mesmo pêndulo medido na Terra ele observa que:

a) $T_T = 80T_L$ b) $T_L = 80T_T$ c) $T_L = 16T_T$

d) $T_T = 16T_L$ e) $T_T = 0{,}4T_L$

Comentários:

Sabe-se que o período de um pêndulo, para pequenas oscilações, está de acordo com a fórmula:

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Portanto, a relação entre os períodos pode ser encontrada a partir da relação entre as gravidades locais de acordo com a equação abaixo:

$$\frac{T_L}{T_T} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_L}}}{\cancel{2} \cdot \cancel{\pi} \cdot \sqrt{\frac{\cancel{L}}{g_T}}} = \sqrt{\frac{g_T}{g_L}}$$

Agora, resta encontrar a relação entre as gravidades locais. A gravidade local pode ser calculada com a fórmula abaixo:

$$g = \frac{G \cdot M}{R^2}$$

Em que: $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\, m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$, M é a massa do planeta e R é o raio do planeta.

Substituindo a equação na relação anterior, temos:

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{G} \cdot M_T}{{R_T}^2}}{\frac{\cancel{G} \cdot M_L}{{R_L}^2}}} = \sqrt{\frac{M_T \cdot {R_L}^2}{M_L \cdot {R_T}^2}}$$

Como:

$$M_T = 80 \cdot M_L \text{ e } R_T = 4 \cdot R_L$$

Tem-se:

$$\frac{T_L}{T_T} = \sqrt{\frac{80 \cdot \cancel{M_L} \cdot \cancel{R_L^2}}{\cancel{M_L} \cdot 4^2 \cdot \cancel{R_L^2}}} = \sqrt{5}$$

$$T_T = \frac{T_L}{\sqrt{5}} \approx 0{,}4 \cdot T_L$$

Gabarito: E

2. (ITA)

Os satélites de comunicação (chamados síncronos) permanecem praticamente estacionários sobre determinados pontos do equador terrestre. Com referência a esse fato, ignorando o movimento de translação da terra:

a) Um observador terrestre que esteja sob o satélite diz que ele não cai porque está fora da atração da gravidade.

b) Outro dirá que ele não cai devido ao campo magnético que envolve a terra.

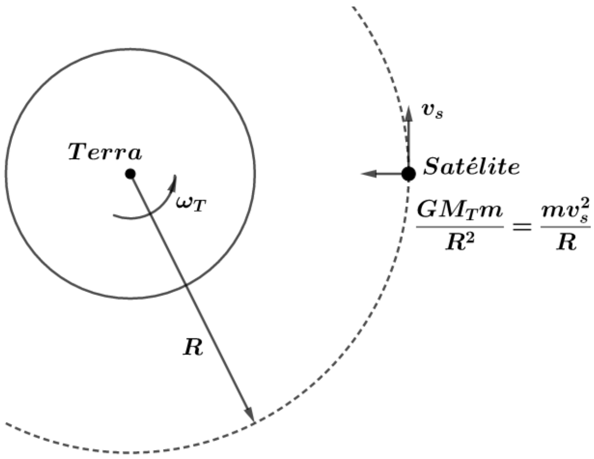
c) Um terceiro invoca a terceira lei de Newton e explica que existe uma reação igual e oposta à atração da gravidade.

d) Um observador que estivesse no sol explicaria o fenômeno como um movimento circular uniforme sob a ação de uma força única, centrípeta.

e) Nenhuma das afirmações acima é correta.

Comentários:

A letra a e b estão erradas pois não condizem com a dinâmica da situação, exposta pela figura mais abaixo. A letra c não é falsa, existe uma reação igual e oposta, mas como diz a terceira lei de Newton, ela atua em um corpo distinto, portanto não pode explicar o equilíbrio do satélite. Finalmente a letra d explicita exatamente a situação observada na figura abaixo.



Gabarito: D

3. (ITA)

Uma das conclusões expressas nas famosas leis de Kepler foi sobre o movimento dos planetas em órbitas elípticas das quais o Sol ocupa um dos focos.

a) esta conclusão foi uma consequência, e, portanto, posterior, do enunciado das leis da Mecânica de Newton.

b) coube a Sir Isaac Newton interpretar teoricamente estas conclusões com base na lei de gravitação universal e nos princípios de Mecânica Clássica que ele próprio havia proposto.

c) esta conclusão não apresenta nenhuma relação com o movimento dos engenhos conhecidos como satélites artificiais da Terra.

d) o movimento da Lua em torno da Terra é de natureza diferente daquele descrito por Kepler.

e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

Comentários:

As leis de Kepler foram observações feitas empiricamente, não deduzidas matematicamente. A comprovação matemática veio apenas com a união entre as três leis de Newton, base de mecânica clássica, e a Teoria da Gravitação Universal, também da autoria de Newton.

As Leis de Kepler apesar de deduzidas para a terra em torno do Sol, foram posteriormente provadas matematicamente por Newton como válidas para quaisquer dois corpos celestes onde um apresente massa muito maior que o outro.

Gabarito: B

---

4. (ITA)

A relação $E = \frac{G \cdot M}{R^2}$ entre o valor da aceleração da gravidade na superfície da Terra e os valores da constante de gravitação universal, massa e raio da Terra:

a) é resultado de uma fórmula empírica elaborada pelos astrônomos e válida para qualquer planeta de forma esférica.

b) dá o valor correto da aceleração da gravidade em qualquer ponto da Terra desde o polo até o equador.

c) pode ser obtida teoricamente, tanto no caso da Terra como no caso de um planeta qualquer de forma esférica, homogêneo e que não esteja em rotação em torno de um eixo relativamente a um sistema de referência inercial.

d) dá o valor correto de g mesmo para pontos internos à superfície da Terra desde que R seja interpretado como a distância entre este ponto e o centro da Terra.

e) Nenhuma das afirmações acima é verdadeira.

Comentários:

A dedução dessa relação consiste em considerar o planeta como puntiforme, ou seja, concentrar toda sua massa em um ponto só. No entanto, isto é possível apenas para o caso de um planeta que atenda às condições da afirmativa C.

Caso não seja homogêneo, a distribuição das diferentes densidades afetará o campo gravitacional resultante, portanto a letra A está errada.

A letra B está errada pois a relação apresenta um resultado de campo gravitacional médio para a Terra de acordo com as condições da afirmativa C, na realidade, como a Terra não é nem homogênea, nem perfeitamente circular, sua gravidade varia de acordo com a latitude.

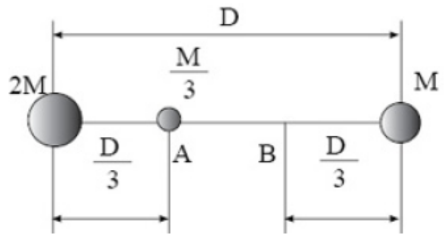
A letra D está errada devido ao fato de que para pontos internos, a massa interna será menor, portanto não poderia utilizar-se M que refere-se à toda a massa do planeta.

Gabarito: C

---

5. (ITA)

O trabalho necessário para levar a partícula de massa M/3 do ponto “A” até o ponto “B”, em função da constante universal de gravitação “G”, quando essa partícula se encontra sob a ação de 2 massas, “M” e “2M”, conforme figura abaixo, será dado por:



a) $+9GM^2/2D$

b) $-9\ GM^2/2D$

c) $+GM^2/2D$

d) $-GM^2/2D$

e) Nenhum dos valores acima.

Comentários:

Trabalho é definido como a variação de energia mecânica. Portanto, considerando-se nula a energia cinética tanto na posição A, quanto na posição B, tem-se que o trabalho neste caso será a variação de energia potencial gravitacional. Assim:

$$W = \Delta E_m = \Delta E_p = E_{p,b} - E_{p,a}$$

$$E_{p,a} = -\frac{G\cdot\left(\frac{M}{\cancel{3}}\right)\cdot 2M}{\frac{D}{\cancel{3}}} - \frac{G\cdot\left(\frac{M}{\cancel{3}}\right)\cdot M}{\frac{2D}{\cancel{3}}} = -\frac{5\cdot G\cdot M^2}{2\cdot D}$$

$$E_{p,b} = -\frac{G\cdot\left(\frac{M}{\cancel{3}}\right)\cdot 2M}{\frac{2D}{\cancel{3}}} - \frac{G\cdot\left(\frac{M}{\cancel{3}}\right)\cdot M}{\frac{D}{\cancel{3}}} = -\frac{4\cdot G\cdot M^2}{2\cdot D}$$

$$W = -\frac{4\cdot G\cdot M^2}{2\cdot D} - \left(-\frac{5\cdot G\cdot M^2}{2\cdot D}\right) = \frac{G\cdot M^2}{2\cdot D}$$

Gabarito: C

---

6. (ITA)

Deseja-se colocar em órbita da Terra um satélite ST e, em órbita da Lua um satélite SL, de modo que ambos tenham o mesmo período de revolução.

Dados: $Raio\ da\ terra: 6{,}37 \cdot 10^6\ m,\quad Raio\ da\ Lua: 1{,}74 \cdot 10^6\ m,\quad Massa\ da\ Terra: 5{,}98 \cdot 10^{24}\ Kg.\ Massa\ da\ Lua: 7{,}34 \cdot 10^{22}\ Kg$

Nestas condições, pode-se afirmar que:

a) isto não é fisicamente possível

b) se r_L é a distância entre os centros de SL e da Lua e r_T a distância entre os centros de ST e da Terra, então, $r_L = r_T$.

c) a distância de ST à superfície da Terra será maior do que 1,1 x 10^6 m

d) os segmentos que unem SL ao centro da Lua e ST ao centro da Terra descrevem áreas iguais em tempos iguais.

e) a distância de ST à superfície da Terra deve ser igual à distância de SL à superfície da Lua.

Comentários:

Utilizando a Terceira Lei de Kepler para a Lua:

$$T_L{}^2 = \frac{r_L{}^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_L}$$

Em que: T_L é o período de órbita em torno da lua; r_L é o raio da órbita em torno da lua; G é a constante gravitacional; e M_L é a massa da lua.

Analogamente para a Terra (com variáveis iguais em relação à terra):

$$T_T{}^2 = \frac{r_T{}^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M_T} \Rightarrow T_L = T_T$$

$$\frac{r_L{}^3 \cdot \cancel{4 \cdot \pi^2}}{\cancel{G} \cdot M_L} = \frac{r_T{}^3 \cdot \cancel{4 \cdot \pi^2}}{\cancel{G} \cdot M_T} \Rightarrow \frac{r_L{}^3}{M_L} = \frac{r_T{}^3}{M_T}$$

A relação acima deve ser cumprida para que tenham mesmo período de revolução.

$$\frac{r_L{}^3}{r_T{}^3} = \frac{M_L}{M_T} = \frac{7{,}34 \cdot 10^{22}}{5{,}98 \cdot 10^{24}} \approx \frac{1}{81} \therefore \frac{r_T}{r_L} \approx 4{,}33$$

O valor mínimo de r_L é o próprio raio da lua. Portanto, o valor mínimo de r_T seria:

$$r_T \geq 4{,}33 \cdot r_L = 7{,}54 \cdot 10^6$$

Como o raio da terra é $6{,}37 \cdot 10^6$, a distância mínima que o satélite terá até a superfície da Terra será:

$$d_{min} = 7{,}54 \cdot 10^6 - 6{,}37 \cdot 10^6 = 1{,}17 \cdot 10^6$$

Gabarito: C

---

7. (ITA)

Um foguete lançado verticalmente, da superfície da Terra, atinge uma altitude máxima igual a três vezes o raio R da Terra. Calcular a velocidade inicial do foguete. M é a massa da Terra e G constante gravitacional.

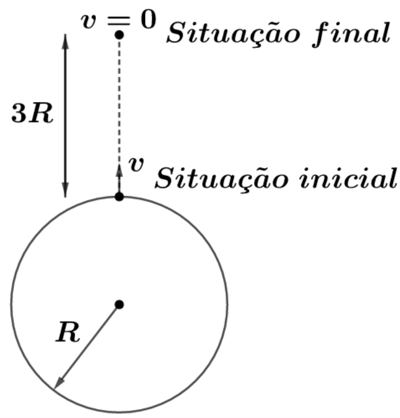
a) $v = \sqrt{\frac{3GM}{2R}}$ b) $v = \sqrt{\frac{4GM}{3R}}$ c) $v = \sqrt{\frac{2GM}{3R}}$

d) $v = \sqrt{\frac{3GM}{4R}}$ e) $v = \sqrt{\frac{GM}{R}}$

Comentários:

Considerando-se que houve conservação de energia no problema, a energia mecânica (cinética mais potencial) no lançamento é igual à do ponto mais alto de sua trajetória. No lançamento, o foguete possui velocidade v e uma energia potencial gravitacional conhecida.

No ponto mais alto de sua trajetória o foguete possui velocidade nula e energia potencial gravitacional também conhecida. Ambas as situações estão representadas na figura a seguir:



Pela conservação da energia mecânica:

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$-\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R} + \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{2} = -\frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{4 \cdot R}$$

Em que: m é a massa do foguete; M é a massa da Terra; G é a constante gravitacional; e R é o raio da Terra.

$$\frac{v^2}{2} = \frac{4 \cdot G \cdot M}{4 \cdot R} - \frac{G \cdot M}{4 \cdot R} = \frac{3 \cdot G \cdot M}{4 \cdot R} \therefore v = \sqrt{\frac{3 \cdot G \cdot M}{2 \cdot R}}$$

Gabarito: A

8. (ITA)

Um satélite artificial de dimensões desprezíveis gira em torno da Terra em órbita circular de raio R. Sua massa é m e a massa da Terra é M (muito maior que m). Considerando a Terra como uma esfera homogênea e indicando a constante de gravitação universal por G, podemos afirmar que:

a) A aceleração normal do satélite é dirigida para o centro da Terra e sua aceleração tangencial vale GMR^{-2}.

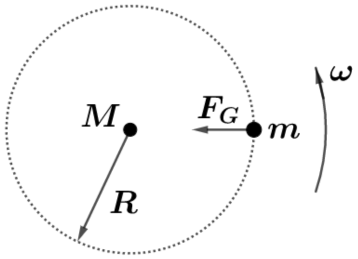
b) Se a atração gravitacional pudesse ser substituída pela ação de um cabo de massa desprezível, ligando o satélite ao centro da Terra, a tensão nesse cabo seria dada por $GmM\ /\ (2R^2)$.

c) Em relação ao satélite, a Terra percorre uma circunferência de raio mR/M.

d)O período de rotação do satélite é $2\pi\sqrt{R^3}/\sqrt{GM}$

e) A Terra é atraída pelo satélite com uma força de intensidade m/M vezes menor que a força com a qual o satélite é atraído pela Terra.

Comentários:



$$R_{cp} = F_G$$

$$\cancel{m} \cdot \omega^2 \cdot R = \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{R^2} \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{G \cdot M}{R^3}$$

$$T^2 = \frac{R^3 \cdot 4 \cdot \pi^2}{G \cdot M} \therefore T = \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{R^3}}{\sqrt{G \cdot M}}$$

A letra a é inconsistente por afirmar que o satélite apresenta aceleração tangencial, apesar deste não apresentar força nessa direção, como representado na figura.

A letra b está errada, pois o valor da tensão deveria ser igual à resultante centrípeta que apresenta módulo igual à força gravitacional.

A letra c está errada, pois a questão afirma ser a massa m muito menor que a massa M.

A letra e está errada, pois desobedece a Terceira Lei de Newton.

Gabarito: D

---

9. (ITA)

Sendo R o raio da Terra, suposta esférica, G a constante da gravitação universal, g_1 a aceleração de queda livre de um corpo no Equador, g_2 a aceleração de queda livre no pólo Norte, M a massa da Terra, podemos afirmar que:

a) $g_1 = G\ M/R^2$

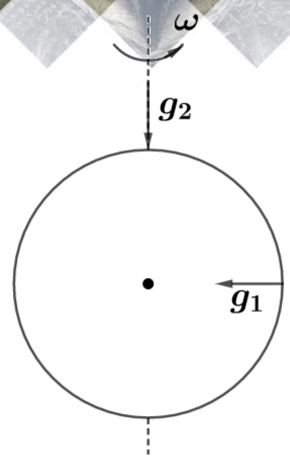
b) $M = \frac{R^2 \cdot g_2}{G}$

c) g_2 é nula

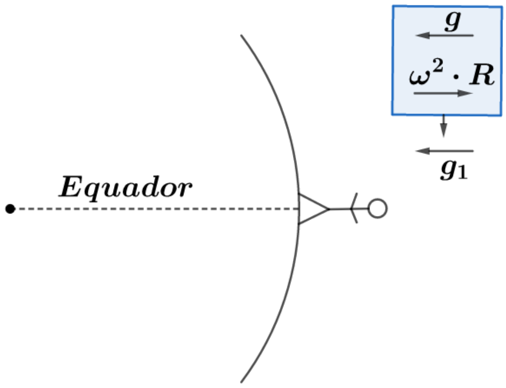
d) g_1 é nula

e) $\frac{GM}{R^2} = \frac{g_1 + g_2}{2}$

Comentários:



A situação está representada na figura acima. A gravidade local varia de acordo com a latitude da seguinte forma (adotou-se um referencial não inercial exposto na figura abaixo):



$$g_1 = g - \omega^2 \cdot R$$

Em que $g = \frac{G \cdot M}{R^2}$. Como g é aceleração gravitacional sem aceleração centrífuga, $g = g_2$, pois nos polos o raio de rotação é nulo, sendo assim, a aceleração centrífuga do referencial não inercial é nula. Portanto, tem-se:

$$g_2 = \frac{G \cdot M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{g_2 \cdot R^2}{G}$$

Gabarito: B

---

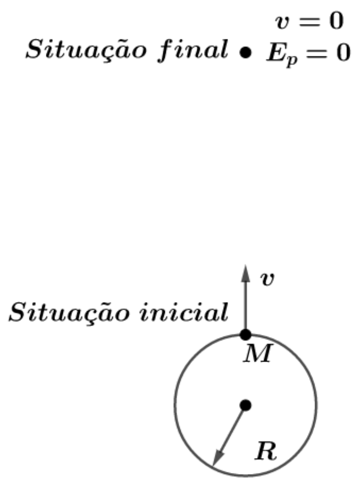
10. (ITA)

Sabendo-se que a energia potencial gravitacional de um corpo de massa M (em kg) a uma distância r (em metros) do centro da Terra é $E_P = -4 \cdot 10^{14} \frac{M}{r}$, qual será a velocidade de lançamento que o corpo deve receber na superfície da Terra para chegar a uma distância infinita, com velocidade nula? (Ignore o atrito com a atmosfera e considere o raio da Terra como $6{,}4 \cdot 10^6\ m$).

a) 1,25 x 104 m/s
b) 5,56 x 104 m/s
c) 22 km/s
d) 19,5 x 103 m/s
e) 1,12 x 104 m/s

Comentários:

Como é desconsiderado o atrito, supõe-se que não haja nenhuma perda de energia mecânica. Portanto, a energia mecânica inicial é igual à energia mecânica final. A condição inicial e final estão representadas na figura a seguir.



Na situação final, a energia potencial e cinética são ambas nulas.

$$E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$-\frac{4 \cdot 10^{14} \cdot \cancel{M}}{R} + \frac{\cancel{M} \cdot v^2}{2} = 0$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{4 \cdot 10^{14}}{6{,}4 \cdot 10^6}$$

$$v = \sqrt{\frac{5}{4} \cdot 10^8} = 1{,}118 \cdot 10^4 \frac{m}{s} \approx 1{,}12 \cdot 10^4\ m/s$$

Gabarito: E

---

11. (ITA)

Uma espaçonave de massa 2000 kg está a $3 \cdot 10^8\ m$ da terra ($6 \cdot 10^{24} Kg$). A terra, espaçonave, Lua ($7{,}4 \cdot 10^{22} Kg$) e o sol ($2 \cdot 10^{30} Kg$) estão alinhados, com a Lua entre a Terra e o sol. A distância da terra a lua é de $4 \cdot 10^8 m$, a distância da terra ao sol é de $1{,}5 \cdot 10^{11} m$. A força resultante sobre a espaçonave é:

a) 4,0 N no sentido da espaçonave ao sol

b) 4,0 N no sentido da espaçonave a terra

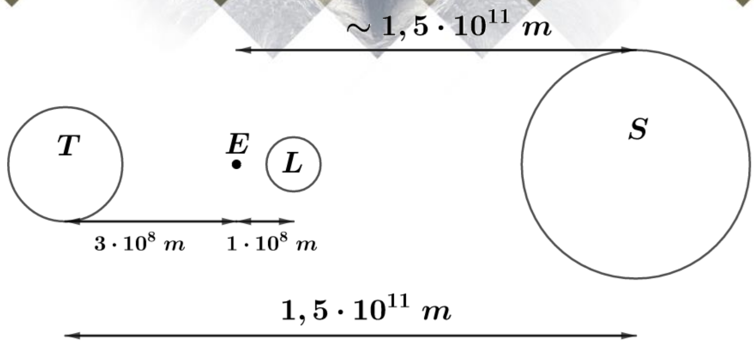
c) 3,0 N no sentindo da espaçonave ao sol

d) 4000 N no sentido da espaçonave ao sol

e) 3000 N no sentido da espaçonave a terra

Comentários:

A situação descrita pelo problema está representada na figura abaixo:



Na figura, T representa Terra, E, Espaçonave, L, Lua e S, Sol. A distância entre a espaçonave e o sol foi tomada como aproximadamente $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. Sendo assim, a força resultante será (adotando a direção espaçonave-terra como positiva):

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{{d_T}^2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{{d_L}^2} - \frac{G \cdot M_S \cdot m}{{d_S}^2} = F_R$$

Em que: m é a massa da espaçonave; G é a constante gravitacional; d_T, d_S e d_L são as distâncias da espaçonave à Terra, ao Sol e à Lua respectivamente; M_T, M_L e M_S são as massas da Terra, do Sol e da Lua respectivamente; e F_R representa força resultante.

$$G \cdot m \cdot \left(\frac{M_T}{{d_T}^2} - \frac{M_L}{{d_L}^2} - \frac{M_S}{{d_S}^2}\right) = F_R$$

$$F_R = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{6 \cdot 10^{24}}{9 \cdot 10^{16}} - \frac{7{,}4 \cdot 10^{22}}{10^{16}} - \frac{2 \cdot 10^{30}}{2{,}25 \cdot 10^{22}}\right)$$

$$F_R = -3{,}951\ N$$

Lembrando a convenção de sinais adotada, portanto a força é de aproximadamente 4 N na direção espaçonave sol.

Gabarito: A

---

12. (ITA)

Um corpo A, inicialmente em repouso, explode sob a ação exclusiva de forças internas, dividindo-se em duas partes, uma de massa m e outra de massa m'. Após a explosão, a única força que atua sobre cada uma das partes é a força gravitacional exercida pela outra parte. Quando a massa m está a uma distância r da posição originalmente ocupada pelo corpo A, a intensidade da aceleração de m é igual a:

a) $a = \frac{Gm}{r^2\left(1+\frac{m}{m'}\right)^2}$

b) $a = \frac{Gm'}{r^2\left(1+\frac{m}{m'}\right)^2}$

c) $a = \frac{Gm}{r^2\left(1+\frac{m'}{n}\right)^2}$

d) $a = \frac{Gm}{r^2}$

e) $a = \frac{Gm'}{r^2}$

Comentários:

Como a explosão foi ação exclusiva de forças internas, não há deslocamento do centro de massa nem variação de energia mecânica, pois forças internas não realizam trabalho.

Como a posição do centro de massa não variou:

$$m \cdot r = x \cdot m'$$

$$x = \frac{m}{m'} \cdot r$$

Portanto, a distância entre os dois corpos é:

$$d = x + r = r\left(1 + \frac{m}{m'}\right)$$

Assim, a força gravitacional sobre m’ é:

$$F = \frac{G \cdot m \cdot m'}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$$

Como esta é a única força atuando sobre o corpo:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{G \cdot m'}{r^2 \cdot \left(1 + \frac{m}{m'}\right)^2}$$

Gabarito: B

---

13. (ITA)

Um planeta descreve uma órbita elíptica em torno de uma estrela cuja massa é muito maior que a massa do planeta. Seja r a distância entre a estrela e o planeta, num ponto genérico da órbita, e a velocidade do planeta no mesmo ponto. Sabendo-se que a e b são, respectivamente, os valores mínimo e máximo de r e v_1 o valor mínimo de v, pode-se afirmar que o produto $v \cdot r$ satisfaz a relação:

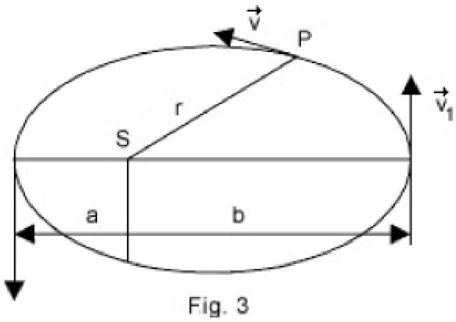


Fig. 3

a) $v \cdot r \ \leq v_1 \cdot b$

b) $v \cdot r \ \geq v_1 \cdot b$

c) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{a}$

d) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{a^2}{b}$

e) $v \cdot r = v_1 \cdot \frac{b^2}{2a}$

Comentários:

Pensando na conservação do momento angular, temos que $\vec{v}\, x\, \vec{r}$ é constante. Quando a partícula está no afélio (distância b da estrela), o produto vetorial terá módulo $v_1 \cdot b$.

No entanto, em um instante qualquer, o produto vetorial terá módulo $v \cdot r \cdot \sin\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\vec{v}$ e $\vec{r}$. Como o módulo de $\sin\theta$ é sempre menor ou igual a 1, temos que:

$$|\vec{v}\ x\ \vec{r}| = v_1 \cdot b = v \cdot r \cdot \sin\theta \leq v \cdot r$$

Portanto:

$$v \cdot r \geq v_1 \cdot b$$

Gabarito: B

---

14. (ITA)

Na questão anterior, designando por M a massa da estrela ($M >> m$) e por E a energia mecânica total, pode-se afirmar que:

a) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r}\right)$
b) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r}\right)$
c) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r^2}\right)$
d) $v^2 = 2\left(\frac{E}{m} - \frac{G \cdot M}{r^2}\right)$
e) $v = \left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r}\right)$

Comentários:

Para um corpo em órbita, sabe-se que sua energia mecânica total (E) é a soma da energia potencial com a cinética. Assim, para nosso problema:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

$$\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r} = \frac{v^2}{2} \therefore v^2 = 2 \cdot \left(\frac{E}{m} + \frac{G \cdot M}{r}\right)$$

Gabarito: A

---

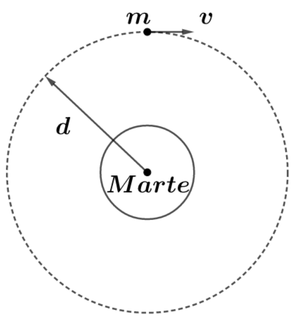
15. (ITA)

Se colocarmos um satélite artificial de massa "m" girando ao redor de Marte ($6{,}37 \cdot 10^{23}\ kg$) numa órbita circular, a relação entre a sua energia cinética (T) e a potencial gravitacional (U) será:

a) $T = -U/2$
b) $T = -1/2U$
c) $T = U/2m$
d) $T = m \cdot U$
e) $T = U$

Comentários:

A representação do problema está abaixo:



Como trata-se de um movimento circular uniforme, podemos escrever a resultante centrípeta como:

$$R_{cp} = \frac{G \cdot M \cdot m}{d^{\cancel{2}}} = \frac{mv^2}{\cancel{d}}$$

Então, podemos rearranjar de forma que:

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot d} = \frac{mv^2}{2}$$

Ou seja:

$$-\frac{U}{2} = T$$

Gabarito: A

---

16. (ITA)

A respeito da lei da gravitação universal podemos afirmar que:

a) Exprime-se pela fórmula $P = mg$.

b) Pode ser deduzida das leis de Kepler do movimento planetário.

c) Evidencia a esfericidade da Terra.

d) Implica em que todos os movimentos planetários sejam circulares.

e) É compatível com as leis de Kepler do movimento planetário.

Comentários:

A letra a está errada, pois essa é apenas uma adaptação da lei da gravitação universal para uma região.

A letra b está errada, pois as leis de Kepler foram confirmadas pela lei da gravitação universal, mas não derivadas dela, assim como a lei da gravitação também não foi derivada das leis de Kepler.

A letra c está errada, pois além da Terra não ser uma esfera, a lei da gravitação universal independe do corpo ser esférico ou não.

A letra d está errada, a lei de gravitação universal foi utilizada para confirmar as leis de Kepler que inclusive afirmam que as órbitas são elípticas.

A letra e está correta.

Gabarito: E

---

17. (ITA)

Considere a Terra como um corpo homogêneo, isotrópico e esférico de raio R, girando em torno do seu eixo com frequência v (número de voltas por unidade de tempo), sendo g a aceleração da gravidade medida no equador. Seja v' a freqüência com que a Terra deveria girar para que o peso dos corpos no equador fosse nulo. Podemos afirmar que:

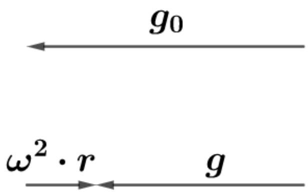
a) $v' = 4v$ **b)** $v' = 2v$

c) não existe v' que satisfaça às condições do problema.

d) $v' = \sqrt{\left(v^2 + \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$ **e)** $v' = \sqrt{\left(v^2 - \frac{g}{4\pi^2 R}\right)}$

Comentários:

Adotando um referencial não inercial, tem-se:



Em que: g_0 é a gravidade real; g é a gravidade medida; e $\omega^2 \cdot r$ é a aceleração centrífuga.

$$g = g_0 - \omega^2 \cdot r$$

Neste problema existem duas situações. A primeira é a usual, com frequência de rotação v. Como:

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot v$$

Então:

$$g = g_0 - 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r$$

Temos também a situação em que a gravidade medida seria 0. Isto é:

$$g' = g_0 - 4 \cdot \pi^2 \cdot {v'}^2 \cdot r = 0$$

$$g_0 = 4 \cdot \pi^2 \cdot v'^2 \cdot r$$

Substituindo g_0 na primeira equação, temos:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot v'^2 \cdot r - 4 \cdot \pi^2 \cdot v^2 \cdot r$$

$$\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} = {v'}^2 - v^2 \therefore v' = \sqrt{\frac{g}{4 \cdot \pi^2 \cdot r} + v^2}$$

Gabarito: D

---

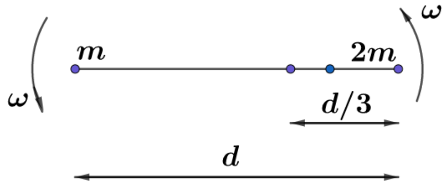
18. (ITA)

Duas estrelas de massa m e $2m$ respectivamente, separadas por uma distância d e bastante afastadas de qualquer outra massa considerável, executam movimentos circulares em torno do centro de massa comum. Nestas condições, determine o tempo T para uma revolução completa, a velocidade $v(2m)$ da estrela maior, bem como a energia mínima W para separar completamente as duas estrelas são:

Comentários:

As estrelas orbitam em torno de seu centro de massa. Para calcular o x_{cm}:

$$X_{CM} = \frac{X_m \cdot m + X_{2m} \cdot 2m}{3m} = \frac{\cancel{0 \cdot m} + d \cdot 2\cancel{m}}{3\cancel{m}} = \frac{2d}{3}$$



Cada corpo está sujeito a uma resultante centrípeta, neste caso, a atração gravitacional entre eles. Formulando a dinâmica para o corpo m:

$$R_{cp,m} = \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d^2}$$

$$\frac{\cancel{m} \cdot {v_m}^2}{\frac{2\cancel{d}}{3}} = \frac{G \cdot \cancel{m} \cdot 2m}{d^{\cancel{2}}} \Rightarrow \frac{{v_m}^2}{2} = \frac{G \cdot 2m}{3 \cdot d}$$

Como ambas as estrelas têm mesma velocidade angular (pois giram em torno do centro de massa com mesmo período), então:

$$\omega_m = \omega_{2m}$$

$$\frac{v_m}{r_m} = \frac{v_{2m}}{r_{2m}} \Rightarrow v_{2m} = v_m \cdot \frac{r_{2m}}{r_m} = v_m \cdot \frac{\frac{d}{3}}{\frac{2d}{3}} = \frac{v_m}{2}$$

$$\frac{{v_{2m}}^2}{2} = \frac{G \cdot m}{6 \cdot d}$$

Portanto, a velocidade da estrela 2m é:

$$v_{2m} = \sqrt{\frac{G \cdot m}{3 \cdot d}}$$

E, o período é dado por:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi \cdot r_{2m}}{v_{2m}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \frac{d}{3}}{\sqrt{\frac{G \cdot m}{3 \cdot d}}} = 2 \cdot \pi \cdot d \cdot \sqrt{\frac{d}{3 \cdot G \cdot m}}$$

Com isto, agora calcula-se a energia mecânica inicial ($E_{m,i}$):

$$E_{m,i} = \frac{m \cdot {v_m}^2}{2} + \frac{2m \cdot {v_{2m}}^2}{2} - \frac{G \cdot m \cdot 2m}{d} = \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{3 \cdot d} + \frac{2m \cdot G \cdot m}{6 \cdot d} - \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{d} = \frac{-G \cdot m^2}{d}$$

Sabendo a energia mecânica inicial e final, pode-se calcular a energia necessária a ser fornecida.

$$E_{m,f} - E_{m,i} = \Delta E$$

$$\Delta E = W = 0 - \left(\frac{-G \cdot m^2}{d}\right) = +\frac{G \cdot m^2}{d}$$

Gabarito: $2\pi d\sqrt{\frac{d}{3GM}}$, $\sqrt{\frac{Gm}{3d}}$ e $+\frac{G\cdot m^2}{d}$

---

19. (ITA)

Comentando as leis de Kepler para o movimento planetário, um estudante escreveu:

I- Os planetas do sistema solar descrevem elipses em torno do Sol que ocupa o centro dessas elipses.

II- Como o dia (do nascer ao pôr-do-Sol) é mais curto no inverno e mais longo no verão, conclui-se que o vetor posição da Terra (linha que une esta ao Sol) varre uma área do espaço menor no inverno do que no verão para o mesmo período de 24 horas.

III- Como a distância média da Terra ao Sol é de 1,50.10^8 km e a de Urano ao Sol é de 3,00.10^9 km, pela 3a lei de Kepler conclui-se que o "ano" de Urano é igual a 20 vezes o ano da Terra.

IV- As leis de Kepler não fazem referência à força de interação entre o Sol e os planetas.

Verifique quais as afirmações que estão corretas e assinale a opção correspondente.

a) I e IV estão corretas.
b) Só a I está correta.
c) II e IV estão corretas.
d) Só a IV está correta.
e) II e III estão corretas.

Comentários:

A I está incorreta, as Leis de Kepler afirmam que o Sol ocupa um dos focos da elipse, não seu centro.

A II está incorreta, pois contraria a Segunda Lei de Kepler.

Aqui já se conclui que a única alternativa possível é a letra D. No entanto, prova-se que a III está incorreta através da Terceira Lei de Kepler como mostra-se abaixo:

$$T_T^{\ 2} = \frac{r_T^{\ 3}\cdot 4\cdot \pi^2}{G\cdot M} \text{ e } T_U^{\ 2} = \frac{r_U^{\ 3}\cdot 4\cdot \pi^2}{G\cdot M}$$

$$\frac{T_T}{T_U} = \frac{r_T^{\ 3}}{r_U^{\ 3}} = \frac{1,5\cdot 10^8}{30\cdot 10^8} = 20$$

Portanto, o período da Terra dura 20 vezes o período de Urano, ou seja, o ano de Urano dura 20 vezes menos que o ano na Terra.

A IV está correta, as Leis de Kepler foram deduzidas empiricamente, somente depois foi-se formulada a Lei da Gravitação Universal que tratou das forças entre o Sol e os planetas.

Gabarito: D

---

20. (ITA)

Um astronauta faz experiências dentro do seu satélite esférico, que está em órbita circular ao redor da Terra. Colocando com cuidado um objeto de massa m bem no centro do satélite o astronauta observa que objeto mantém sua posição ao longo tempo. Baseado na 2ª lei de

Newton, um observador no Sol tenta explicar esse fato com as hipóteses abaixo. Qual delas é correta?

a) Não existem forças atuando sobre o objeto (o próprio astronauta sente-se imponderável).

b) Se a força de gravidade da Terra $F_G = G\frac{M_T m_o}{r^2}$ está atuando sobre o objeto e este fica imóvel é porque existe uma força centrífuga oposta que a equilibra.

c) A carcaça do satélite serve de blindagem contra qualquer força externa.

d) As forças aplicadas pelo Sol e pela Lua equilibram a atração da Terra.

e) A força que age sobre o satélite é de gravitação, mas a velocidade tangencial v do satélite deve ser tal que $\frac{mv^2}{r} = G\frac{M_T m_o}{r^2}$.

Comentários:

A letra A está incorreta, pois sentir-se imponderável está relacionada à ausência de normal, não à ausência de peso.

A letra B está incorreta, pois a força centrifuga é uma força "imaginária" adotada ao mudar-se para um sistema não inercial, ela é incapaz de equilibrar outra força.

A letra C está incorreta, a gravidade não é barrada pela carcaça do satélite.

A letra D é falsa, pois o corpo em órbita apresenta aceleração (centrípeta), portanto, sua resultante não pode ser nula, ou seja, o corpo não está em equilíbrio.

A letra E está correta, pois iguala a resultante centrípeta à força gravitacional. Se não o for assim, o corpo irá aproximar-se gradualmente do planeta que o atrai.

Gabarito: E

---

21. (ITA)

Considere um planeta cuja massa é o triplo da massa da Terra e seu raio, o dobro do raio da Terra. Determine a relação entre a velocidade de escape deste planeta e a da Terra (v_P/v_T) e a relação entre a aceleração gravitacional na superfície do planeta e da Terra (g_P/g_T).

a) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{4}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

b) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

c) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{2}$

d) $\frac{V_P}{V_T} = \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{g_P}{g_T} = \frac{3}{4}$

e) Nenhuma das anteriores

Comentários:

A velocidade de escape (v) de um objeto de massa m, para um planeta de raio r e massa M pode ser calculado como:

$$-\frac{GM\cancel{m}}{r} + \frac{\cancel{m}v^2}{2} = 0$$

Isto é, fornece-se energia cinética suficiente para que o corpo chegue ao infinito (energia potencial nula) e sem velocidade (energia cinética nula).

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Portanto, comparando as velocidades de escape, tem-se:

$$\frac{v_P}{v_T} = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{2G}M_P}{r_P}}{\frac{\cancel{2G}M_T}{r_T}}} = \sqrt{\frac{M_P}{M_T}\cdot\frac{r_T}{r_P}} = \sqrt{\frac{3}{1}\cdot\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

A gravidade na superfície é calculada por:

$$g = \frac{GM}{r^2}$$

Portanto, a relação entre as gravidades na superfície é dada por:

$$\frac{g_p}{g_T} = \frac{\frac{\cancel{G}M_P}{{r_P}^2}}{\frac{\cancel{G}M_T}{{r_T}^2}} = \frac{M_P{r_T}^2}{M_T{r_P}^2} = \frac{3\cdot 1}{1\cdot 4} = \frac{3}{4}$$

Gabarito: B

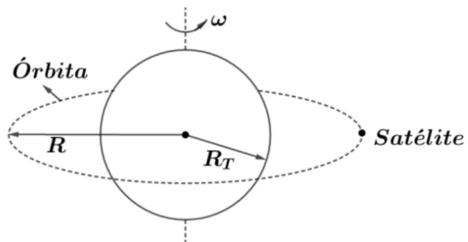
---

22. (ITA)

Um satélite artificial geoestacionário permanece acima de um mesmo ponto da superfície da Terra em uma órbita de raio R. Usando um valor de $R_T = 6400\ Km$ para o raio da Terra. A razão R/R_T é aproximadamente igual a:

a) 290
b) 66
c) 6,6
d) 11,2
e) Indeterminada pois a massa do satélite não é conhecida.

Comentários:



Para o satélite ser geoestacionário, sua velocidade angular deve ser igual à da Terra. Portanto, sua velocidade pode ser relacionada com seu raio:

$$v = \omega R$$

Sua resultante centrípeta:

$$\cancel{m}\omega^2 R = \frac{GMm}{R^2} = \frac{GMm}{{R_T}^2} \cdot \frac{{R_T}^2}{R^2} = g\cancel{m} \cdot \frac{{R_T}^2}{R^2}$$

$$\omega^2 R = g\frac{{R_T}^2}{R^2} \Rightarrow R = \sqrt[3]{g \cdot \frac{{R_T}^2}{\omega^2}}$$

Em que: $g = 9{,}8\frac{m}{s^2}$; $R = 6{,}4 \cdot 10^6\ m$; e $\omega = \frac{2\pi}{T}$, com T sendo o período da Terra, isto é, 86400 s. $\omega = \frac{2\pi}{86400}$.

Substituindo os valores:

$$R = \sqrt[3]{9{,}8 \cdot \frac{(6{,}4 \cdot 10^6)^2}{\left(\frac{2\pi}{86400}\right)^2}} = 42{,}34 \cdot 10^6 \approx 6{,}6 \cdot R_T$$

Gabarito: C

---

23. (ITA)

Na 3ª lei de Kepler, a constante de proporcionalidade entre cubo do semieixo maior da elipse (a) descrita por um planeta e o quadrado do período (P) de translação do planeta, pode ser deduzida do caso particular do movimento circular. Sendo G a constante da gravitação universal, M a massa do Sol, R o raio do Sol temos:

a) $\frac{a^2}{P^2} = \frac{GMR}{4\pi^2}$

b) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{4\pi^2}$

c) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{2\pi^2}$

d) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GR}{2\pi^2}$

e) $\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$

Comentários:

Para deduzir a Terceira Lei de Kepler para um movimento circular, iguala-se a resultante centrípeta à força gravitacional, assim:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

Mas, sabe-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{P} \Rightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} \cdot r^3 = GM$$

Reescrevendo:

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

No caso da elipse, basta substituir r por a, obtendo-se então:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Gabarito: E

---

24. (ITA)

Qual seria o período (T) de rotação da Terra em torno do seu eixo, para que um objeto apoiado sobre a superfície da Terra no equador ficasse desprovido de peso?

Dados: raio da Terra: $6{,}4 \cdot 10^3\ Km$; massa da terra: $6 \cdot 10^{24}\ Kg$.

a) $T = 48\ h$
b) $T = 12\ h$
c) $T = 1{,}4\ h$
d) $T = 2{,}8\ h$
e) $T = 0$

Comentários:

A gravidade medida no Equador pode ser calculada com auxílio de um referencial não inercial. Assim:

$$g = g_0 - \omega^2 \cdot r$$

Em que: g é a gravidade medida; g_0 é a gravidade real; e $\omega^2 r$ é a aceleração centrífuga do referencial não inercial. Para que a gravidade seja nula:

$$g = 0 = 9{,}8 - \omega^2 \cdot 6{,}4 \cdot 10^6 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{9{,}8}{6{,}4}} \cdot 10^{-3} = 1{,}237 \cdot 10^{-3}$$

E sabe-se que o período está relacionado à frequência angular por:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{1{,}237} \cdot 10^3 = 5080\ s \therefore T = \frac{5080}{3600}\ h = 1{,}41\ h$$

Gabarito: C

---

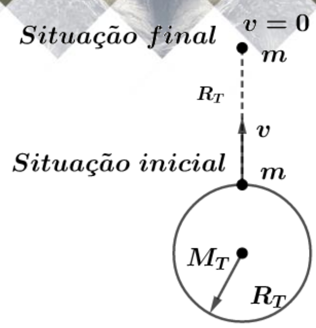
25. (ITA)

Considere que MT é a massa da Terra, RT o seu raio, g a aceleração da gravidade e G a constante de gravitação universal. Da superfície terrestre e verticalmente para cima, desejamos lançar um corpo de massa m para que, desprezando a resistência do ar ele se eleve a uma altura acima da superfície igual ao raio da Terra. A velocidade inicial V do corpo neste caso deverá ser de:

a) $v = \sqrt{\frac{2G \cdot M_T}{R_T}}$
b) $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{3R_T}}$
c) $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T}}$
d) $v = \sqrt{\frac{3G \cdot M_T}{R_T}}$
e) $v = \sqrt{\frac{\frac{g \cdot G \cdot M_T}{m \cdot}}{R_T}}$

Comentários:

Existem duas situações bem definidas representadas na figura a seguir.



Portanto, na situação inicial existe energia potencial e cinética, enquanto na situação final, somente energia potencial. Como as perdas de energia são desprezadas, podemos fazer a conservação da energia mecânica.

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$-\frac{GM_T\cancel{m}}{R_T} + \frac{\cancel{m}v^2}{2} = -\frac{GM_T\cancel{m}}{2R_T} \Rightarrow \frac{v^2}{\cancel{2}} = \frac{GM_T}{\cancel{2}R_T}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T}}$$

Gabarito: C

---

26. (ITA)

Numa certa data, a posição relativa dos corpos celestes do Sistema Solar era, para um observador fora do Sistema, a seguinte: ME = Mercúrio; VE = Vênus; TE = Terra; MA = Marte; JU = Júpiter

O sentido de rotação da Terra está indicado na figura. A figura não está em escala. Do diagrama apresentado, para um observador terrestre não muito distante do equador, pode-se afirmar que:

I - Marte e Júpiter eram visíveis à meia-noite.

II - Mercúrio e Vênus eram visíveis à meia-noite.

III - Marte era visível a oeste ao entardecer.

IV - Júpiter era visível à meia-noite.

Das afirmativas feitas pode-se dizer que:

a) Somente a IV é verdadeira.

b) III e IV são verdadeiras.

c) Todas são verdadeiras.

d) I e IV são verdadeiras.

e) Nada se pode afirmar com os dados fornecidos.

Comentários:

A I é falsa, pois embora Júpiter seja visível à meia noite, marte seria visível ao entardecer.

A II é falsa, Mercúrio e Vênus sequer seriam visíveis devido ao brilho do sol que ofuscaria o brilho de ambas.

A III é verdadeira. O vetor que indica o sentido de rotação da Terra está indo de Oeste a Leste (basta conferir que de meio dia para meia noite o deslocamento relativo do sol para o espectador foi em direção à origem do vetor). Portanto, no entardecer, Marte estaria a oeste na visão do espectador.

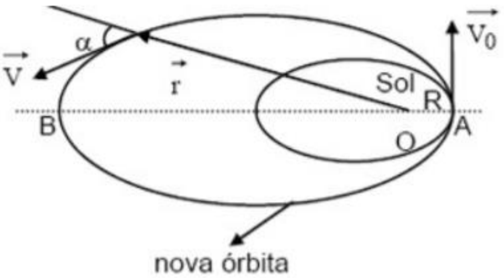
A IV é verdadeira, o espectador só estaria virado para Júpiter próximo da meia noite.

Gabarito: B

---

27. (ITA)

Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo V_0 seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo. O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima (distância AO = R na figura). Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como a única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, e designe por M a massa do Sol e por G a constante de gravitação universal. Considere ainda que o momento angular da Terra seja conservado, isto é, a quantidade de módulo $m \cdot v \cdot r \cdot sen\alpha$ permanece constante ao longo da nova trajetória elíptica da Terra em torno do sol (nessa expressão, m é a massa da Terra, r é o módulo do vetor posição da Terra em relação ao Sol, o módulo da velocidade da Terra e o ângulo α entre r e v). Determine a distância (OB), do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.



Comentários:

Primeiro, façamos a conservação do momento angular entre o afélio (posição B) e o periélio (ponto A). Temos:

$$\cancel{m}V_0R = \cancel{m}V_br_b \Rightarrow V_b = \frac{V_0R}{r_b}$$

No entanto, não se sabe r_b. Entretanto, ainda com os dados da questão pode se fazer a conservação da energia mecânica entre os pontos A e B, visto que a energia se conserva ao longo de toda a órbita.

$$\Delta E_m = 0 \Rightarrow E_{m,i} = E_{m,f}$$

$$\frac{\cancel{m}V_0^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{R} = \frac{\cancel{m}V_b^2}{2} - \frac{GM\cancel{m}}{r_b}$$

Tem-se duas incógnitas (V_b e r_b)e duas equações. Substituindo o V_b obtido na primeira equação na segunda, tem-se:

$$\frac{V_0^2}{2}-\frac{GM}{R}=\frac{V_0^2R^2}{2r_b^2}-\frac{GM}{r_b}$$

Visto que $r_b=0$ não é solução, multiplicando toda a expressão por $2r_b^2$ tem-se:

$$\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)r_b^2+2GMr_b-V_0^2R^2=0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em r_b:

$$r_b=\frac{-2GM\pm\sqrt{4G^2M^2-4\cdot\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)\cdot(-V_0^2R^2)}}{2\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)}$$

Trabalhando a raiz do numerador:

$$\Rightarrow\sqrt{4G^2M^2-4\cdot\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)\cdot(-V_0^2R^2)}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(2GM)^2+4V_0^4R^2-8GMV_0^2R}$$

$$\Rightarrow\sqrt{(2GM)^2-2(2GM)(2V_0^2R)+(2V_0^2R)^2}\Rightarrow 2(GM-V_0^2R)$$

Substituindo de volta:

$$r_b=\frac{-\cancel{2}GM\pm\cancel{2}(GM-V_0^2R)}{\cancel{2}\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)}$$

As duas soluções são:

$$r_{b,1}=\frac{-V_0^2R}{\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)}=\frac{V_0^2R^2}{2GM-RV_0^2}$$

$$r_{b,2}=\frac{-2GM+V_0^2R}{\left(V_0^2-\frac{2GM}{R}\right)}=R$$

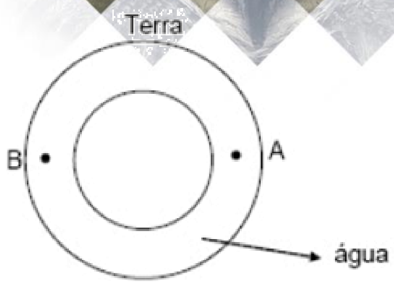
Note que $\boldsymbol{r_{b,2}}$ é o próprio afélio. Portanto a resposta é somente a primeira raíz obtida.

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{R^2\cdot V_0{}^2}{2GM-R\cdot V_0{}^2}}$

---

28. (ITA)

Sabe-se que a atração gravitacional da lua sobre a camada de água é a principal responsável pelo aparecimento de marés oceânicas na Terra, supostamente esférica, homogeneamente recoberta por uma camada de água.



Nessas condições, considere as seguintes afirmativas:

I. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés altas simultaneamente.

II. As massas de água próximas das regiões A e B experimentam marés opostas, isto é, quando A tem maré alta, B tem maré baixa e vice-versa.

III. Durante o intervalo de tempo de um dia ocorrem duas marés altas e duas marés baixas.

Então está(ão) correta(s), apenas:

a) a afirmativa I b) a afirmativa II c) a afirmativa III

d) as afirmativas I e II e) as afirmativas I e III

Comentários:

Analisemos a influência da lua sobre a água nas regiões A e B, e sobre a Terra nas regiões A e B.

Em A, a água está mais próxima da Lua, portanto a atração da Lua sobre a água é maior do que sobre a Terra. Portanto, a água é mais atraída do que a Terra, criando uma maré alta.

Em B ocorre o oposto. A água sentirá menor atração, por conta da atração gravitacional da Lua, em relação à Terra. Assim, a Terra, sendo mais atraída que a água, sofre um deslocamento maior, causando também um fenômeno de maré alta.

Entre as regiões A e B a interferência da Lua não afeta muito, portanto a maré fica mais baixa, relativamente a A e B, caracterizando o fenômeno conhecido como maré baixa.

Portanto, ocorrem marés altas em A e B e marés baixas nos pontos intermediários. Agora, analisando as afirmações.

A I está correta, a II é falsa e a III está correta.

Gabarito: E

---

29. (ITA)

Numa dada balança, a leitura é baseada na deformação de uma mola quando um objeto é colocado sobre sua plataforma. Considerando a Terra como uma esfera homogênea, assinale a opção que indica uma posição da balança sobre a superfície terrestre onde o objeto terá a maior leitura.

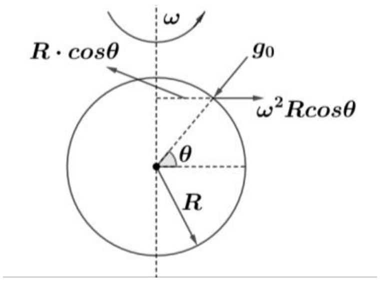
a) Latitude de 45°. b) Latitude de 60°. c) Latitude de 90°.

d) Em qualquer ponto do Equador.

e) A leitura independe da localização da balança já que a massa do objeto é invariável.

Comentários:

A maior leitura será feita onde a gravidade medida for maior. A gravidade medida pode ser calculada em função da latitude como mostrado abaixo:



A gravidade medida será a soma da gravidade real g_0 com a aceleração centrífuga $\omega^2 R\cos\theta$, visto que a medição é feita em um referencial não inercial. A contribuição da aceleração centrífuga depende de $\cos\theta$, sendo θ a latitude. Portanto, quando $\cos\theta$ for 0, a gravidade medida será máxima, ou seja, isso ocorre para a latitude 90°.

Gabarito: C

---

30. (ITA – 2012)

Derive a 3ª Lei de Kepler do movimento planetário a partir da Lei da Gravitação Universal de Newton considerando órbitas circulares.

Comentários:

Para deduzir a Terceira Lei de Kepler para um movimento circular, iguala-se a resultante centrípeta à força gravitacional, assim:

$$\omega^2 r = \frac{GM}{r^2}$$

Mas, sabe-se que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Assim:

$$\frac{4\pi^2}{T^2} \cdot r^3 = GM$$

Reescrevendo:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Gabarito: $\boldsymbol{\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}}$

---

31. (Solved Problems in Physics)

Qual a profundidade da cratera que devemos fazer num planeta de raio R para que, lançando um projétil do fundo da mesma com a velocidade de escape do planeta, sua altura máxima alcançada seja igual a 3R?

Comentários:

Utilizando a fórmula já apresentada da energia potencial para um ponto interno a um corpo da questão anterior, novamente exposta abaixo:

$$E_p = -\frac{GMm}{R} - \frac{GMmx}{2R^2}\left(2 - \frac{x}{R}\right)$$

Agora, faz-se a conservação da energia mecânica. O corpo é lançado de uma profundidade x, com velocidade de escape da superfície e chega à uma altura de $3R$ em relação à superfície, sem velocidade.

$$\cancel{-\frac{GMm}{R}} - \frac{\cancel{GMm}x}{2R^{\cancel{2}}}\left(2 - \frac{x}{R}\right) + \frac{\cancel{m}\sqrt{\frac{\cancel{2GM}}{\cancel{R}}}^{\cancel{2}}}{\cancel{2}} = -\frac{\cancel{GMm}}{4\cancel{R}}$$

$$-\frac{x}{2R}\left(2 - \frac{x}{R}\right) = -\frac{1}{4}$$

Rearranjando:

$$x^2 - 2xR + \frac{R^2}{2} = 0$$

$$x = \frac{2R \pm \sqrt{4R^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(\frac{R^2}{2}\right)}}{2} \Rightarrow x = \frac{2R \pm \sqrt{2R^2}}{2} = R \cdot \left(1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

As soluções são pontos simétricos em relação ao centro do planeta. Qualquer um serviria para o pedido pelo exercício, mas considerando somente aquele que não atravessa o centro do planeta, seria:

$$R \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{x = R\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)}$

---

32. (OBF)

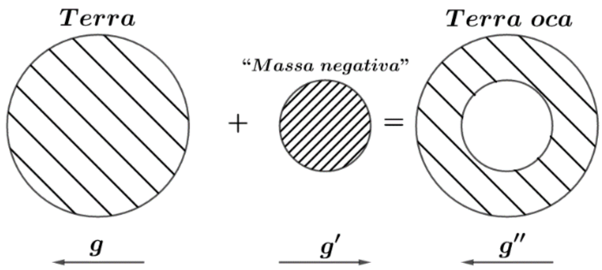
Em seu trabalho sobre gravitação universal, Newton demonstrou que uma distribuição esférica homogênea de massa surte o mesmo efeito que uma massa concentrada no centro de distribuição. Se no centro da Terra fosse recortado um espaço oco esférico com metade do raio da Terra, o módulo da aceleração na superfície terrestre diminuiria para (**g** é o módulo da aceleração da gravidade na superfície terrestre sem a cavidade):

a) $6g/8$ b) $3g/8$ c) $5g/8$

d) $g/8$ e) $7g/8$

Comentários:

Uma forma de resolver o problema é considerando a aplicação de um corpo com “massa negativa”, isto é, o seu campo gravitacional tem sentido contrário. Fazemos a superposição da Terra com este corpo de massa negativa, de mesma densidade que a Terra, com metade do raio. O efeito de seu campo irá cancelar o campo da mesma quantidade da Terra, ou seja, será como se houvesse um espaço oco no centro da esfera. Essa solução encontra-se explicada na figura abaixo:



O g representado na figura é conhecido. Resta calcular g'. Para tal, utilizemos a lei da gravitação universal (lembrando que g' está sendo calculado na superfície da Terra, não na superfície da massa negativa):

$$g' = \frac{GM_n}{R_T^2}$$

Em que: G é a constante gravitacional; M_n é a massa negativa; e R_T é o raio da Terra.

Mas, como definido anteriormente, a massa negativa possui mesma densidade que a terra, portanto:

$$M_n = \frac{4\pi {R_n}^3}{3} \cdot \rho_T$$

Em que: ρ_T é a densidade da Terra; e R_n é o raio da massa negativa. E, também se sabe que:

$$R_n = \frac{R_T}{2}$$

Substituindo tudo na equação de g' tem-se:

$$g' = \frac{G \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\frac{R_T}{2}\right)^3 \cdot \rho_T}{{R_T}^2} = \frac{\pi}{6} G R_T \rho_T$$

Reescrevendo g em função das variáveis de g':

$$g = \frac{GM}{{R_T}^2} = \frac{G \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot {R_T}^3 \cdot \rho_T}{{R_T}^2} = \frac{4}{3}\pi G R_T \rho_T$$

E:

$$\frac{g''}{g} = \frac{g - g'}{g} = \frac{\frac{4}{3}\cancel{\pi G R_T \rho_T} - \frac{\cancel{\pi}}{6}\cancel{G R_T \rho_T}}{\frac{4}{3}\cancel{\pi G R_T \rho_T}} = \frac{\frac{7}{6}}{\frac{4}{3}} = \frac{7}{8}$$

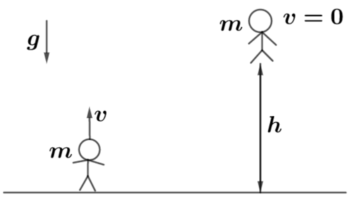
Portanto, o campo resultante g'' é igual a $\frac{7}{8}g$.

Gabarito: E

33. (IME)

Um astronauta equipado, utilizando o esforço máximo, salta 0,60 m de altura na superfície terrestre. Calcular o quanto saltaria na superfície lunar, nas mesmas condições. Considerar o diâmetro e a densidade da lua como 1/4 e 2/3 dos da Terra, respectivamente.

Comentários:



De forma genérica, uma pessoa de massa m, em um campo gravitacional g, pulando com todo seu esforço (velocidade inicial do pulo v), atinge uma altura h. Equacionando a conservação da energia mecânica, tem-se:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{2} = \cancel{m}gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Portanto, se encontrar a relação entre a gravidade local da Lua e da Terra, encontra-se a relação entre as alturas atingidas. Isto é valido, pois supõe-se que apesar das diferentes condições, o astronauta consegue fornecer a mesma quantidade de energia no seu impulso inicial, portanto, mesma velocidade inicial. Para calcular a gravidade local utiliza-se a equação abaixo:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aplicando essa equação, pode-se estabelecer a relação entre ambas as gravidades locais da seguinte forma:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{\cancel{G}M_L}{{R_L}^2}}{\frac{\cancel{G}M_T}{{R_T}^2}} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2}$$

A relação entre os raios é conhecida pois é igual à dos diâmetros. Para achar a relação entre as massas:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_L^3 \rho_L}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_T^3 \rho_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T}$$

Substituindo isso na relação anterior, temos:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{R_L}{R_T} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

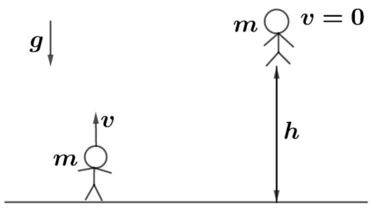
Como a gravidade da Lua é um sexto da gravidade da Terra, a altura atingida pelo salto será seis vezes maior (grandezas inversamente proporcionais). Portanto, a altura atingida foi de 3,6m.

Gabarito: $\boldsymbol{h = 3,6\ m}$

34. (IME)

Um astronauta em traje especial e completamente equipado pode dar pulos verticais de 0,5m na Terra. Determine a altura máxima que o astronauta poderá pular em um outro planeta, sabendo-se que o seu diâmetro é um quarto do da Terra e sua massa específica dois terços da terrestre. Considere que o astronauta salte em ambos os planetas com a mesma velocidade inicial.

Comentários:



De forma genérica, uma pessoa de massa m, em um campo gravitacional g, pulando com todo seu esforço (velocidade inicial do pulo v), atinge uma altura h. Equacionando a conservação da energia mecânica, tem-se:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{2} = \cancel{m}gh \Rightarrow h = \frac{v^2}{2g}$$

Portanto, se encontrar a relação entre a gravidade local da Lua e da Terra, encontra-se a relação entre as alturas atingidas. Isto é valido, pois supõe-se que apesar das diferentes condições, o astronauta consegue fornecer a mesma quantidade de energia no seu impulso inicial, portanto, mesma velocidade inicial. Para calcular a gravidade local utiliza-se a equação abaixo:

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aplicando essa equação, pode-se estabelecer a relação entre ambas as gravidades locais da seguinte forma:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{\frac{\cancel{G}M_L}{{R_L}^2}}{\frac{\cancel{G}M_T}{{R_T}^2}} = \frac{M_L}{M_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2}$$

A relação entre os raios é conhecida pois é igual à dos diâmetros. Para achar a relação entre as massas:

$$\frac{M_L}{M_T} = \frac{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_L^3 \rho_L}{\cancel{\frac{4}{3}\pi} R_T^3 \rho_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T}$$

Substituindo isso na relação anterior, temos:

$$\frac{g_L}{g_T} = \frac{R_L^3}{R_T^3} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} \cdot \frac{R_T^2}{R_L^2} = \frac{R_L}{R_T} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_T} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

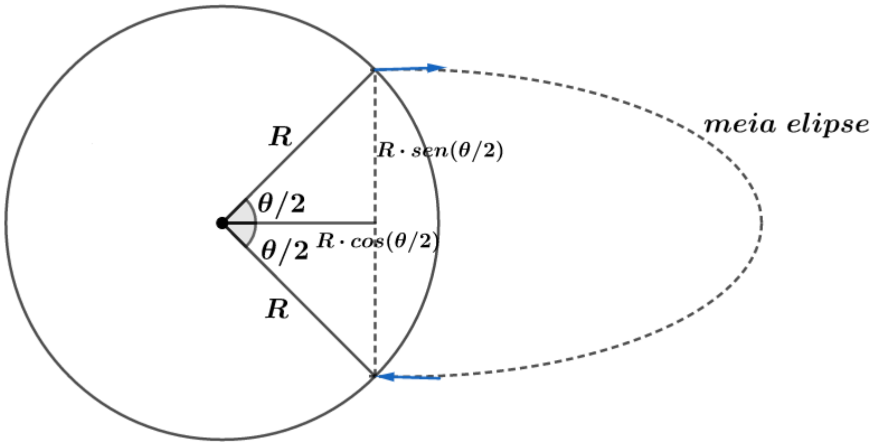
Como a gravidade da Lua é um sexto da gravidade da Terra, a altura atingida pelo salto será seis vezes maior (grandezas inversamente proporcionais). Portanto, a altura atingida foi de 3,0m.

Gabarito: $\mathbf{3,0\ m}$

35.

Um foguete é lançado de um planeta e retorna ao mesmo planeta, de raio R, de tal forma que o vetor velocidade no retorno é paralelo ao vetor velocidade no lançamento. A separação angular no centro do planeta entre o ponto de lançamento e o de retorno é θ. Quanto tempo dura o voo do foguete, se o período de um satélite cuja órbita tangencia a superfície da Terra é T_0?

Comentários:



Como os vetores velocidade são paralelas, isso significa que o foguete realizou meia órbita (somente posições opostas têm vetor velocidade paralelo). O centro da Terra é um dos focos da órbita elíptica (Leis de Kepler). Com os dados apresentados, pode-se utilizar a Segunda Lei de Kepler (Lei das áreas). Para a órbita elíptica representada:

$$\begin{cases} a = R \\ b = R\sin\dfrac{\theta}{2} \\ c = R\cos\dfrac{\theta}{2} \end{cases}$$

Em que: a é o semi-eixo maior; b é o semi-eixo menor; e c é a distância focal.

A área varrida pela meia órbita realizada foi metade a área da elipse mais a área do triângulo isósceles de lado R e ângulo θ (consultar a figura). A área de uma elipse é dada por:

$$A = \pi ab$$

Portanto, a área percorrida pelo vetor foi de:

$$A_{triângulo} + A_{\frac{1}{2}elipse} = \frac{R^2\sin\theta}{2} + \frac{\pi R^2 \sin\frac{\theta}{2}}{2} = \frac{R^2\sin\frac{\theta}{2}}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \pi\right)$$

Caso fosse percorrida toda a elipse, a área percorrida seria:

$$A_{elipse} = \pi R^2 \sin\frac{\theta}{2}$$

Pela Segunda Lei de Kepler:

$$\frac{A_{elipse}}{T_0} = \frac{A_{triângulo} + A_{\frac{1}{2}elipse}}{t}$$

Em que t é o tempo que se deseja encontrar.

$$t = T_0 \cdot \frac{\frac{R^2 \sin\frac{\theta}{2}}{2}\left(2\cos\frac{\theta}{2} + \pi\right)}{\pi R^2 \sin\frac{\theta}{2}} = T_0 \cdot \frac{2\cos\frac{\theta}{2} + \pi}{2\pi} = T_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{T_0 \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \cos\frac{\theta}{2}\right)}$

---

11. Considerações finais

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue as leis de Kepler e os conceitos de energia e trajetória.

Estude com calma os tópicos que não são vistos em ensino médio comum e anote alguns resultados no seu caderno de resumo.

É muito importante chegar na prova com alguns resultados prontos para ganhar tempo. As demonstrações utilizando Cálculo serve apenas para dar sustentação de como chegamos aos resultados. Não se preocupe em decorar essas passagens matemáticas.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

12. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[4] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[5] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão

13. Versão de aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	**21/08/2021**