Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Olá. Seja bem-vindo!

Sou Victor So, professor de Matemática do **Estratégia Vestibulares**! Fui aprovado em terceiro lugar no ranking geral do IME no vestibular de 2012 e sou graduado em engenharia da computação pelo ITA. Faço parte de uma equipe composta por professores de todo o país, reunida com o objetivo de ajudar estudantes como você, que buscam êxito no vestibular do **ITA**!

Diante de tantas opções de cursos preparatórios para vestibulares no mercado, o que faz do nosso material uma boa opção? Primeiramente, fazemos parte do **Estratégia Concursos**, que desde 2011 se tornou referência pela qualidade de seus cursos preparatórios para concursos públicos, o que garantiu milhares de aprovados.

Para a elaboração de nosso material, partimos da mesma fórmula de sucesso adotada no ramo de concursos, da qual podemos destacar os seguintes pontos:

- **Aulas exclusivas e voltadas para o seu edital.** O nosso curso é cuidadosamente customizado para o vestibular da sua instituição.
- **Valorizar o aluno.** Como o nosso objetivo é garantir a sua aprovação em uma das melhores instituições de ensino do país, acreditamos que são necessárias metodologias diversas de aprendizado para que isso seja possível.
- **Valorizar o professor.** Somos uma equipe composta por integrantes com vasta experiência em ensino e pesquisa, totalmente voltada para a produção de um curso completo e atualizado.

Um dos diferenciais do Estratégia Vestibulares é a disponibilização de comentários de cada uma das questões, a fim de que não reste nenhuma dúvida sobre o gabarito ou sobre o conteúdo.

FALE COMIGO

/profvictorso

Metodologia do Curso

Este curso apresentará toda a base da matemática para que você consiga resolver a integralidade das questões do **ITA**. Ao longo do curso, resolveremos diversos exercícios e com isso você será capaz de aprender como as questões são cobradas no vestibular. Você terá que se dedicar se quiser passar nesses vestibulares, então estude bastante e treine a maior quantidade de exercícios possível!

Para os alunos que já possuem uma base sobre a matéria, vocês podem pular direto para a lista de questões. Surgindo alguma dúvida, vocês poderão ver a resolução do exercício e/ou consultar a teoria para sanar suas dúvidas.

Ao longo da teoria resolveremos alguns exercícios para fixação e veremos na prática como o assunto pode ser cobrado na prova.

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

Análise de Vestibulares Anteriores

O vestibular do ITA 2019 teve uma mudança em relação às provas dos anos anteriores. Antigamente, as provas ocorriam durante quatro dias seguidos divididos em Física, Português, Inglês, Matemática e Química em apenas 1 fase. As provas de Física, Química e Matemática possuíam 20 questões objetivas e 10 questões dissertativas cada uma e as provas de Português e Inglês possuíam 20 questões objetivas e também uma redação na prova de Português. Um detalhe, a prova de Inglês não contabilizava pontos na média, e até hoje essa regra se mantém. Outra novidade que ocorreu no vestibular de 2019 foi a inclusão do sistema de cotas em seu processo seletivo. Nesse ano, as provas foram divididas em 2 fases. A primeira fase consistiu em 60 questões objetivas envolvendo todas as matérias, sendo classificatória e eliminatória para a próxima fase com duração de 4 horas (12 questões de cada disciplina). A segunda fase ocorreu em 2 dias, o primeiro dia foi a prova de Matemática e Química com 10 questões dissertativas de cada matéria para serem realizadas em 4 horas. O segundo dia foi a prova de Física e Redação composta de 10 questões de Física e 1 Redação para serem realizadas também em 4 horas.

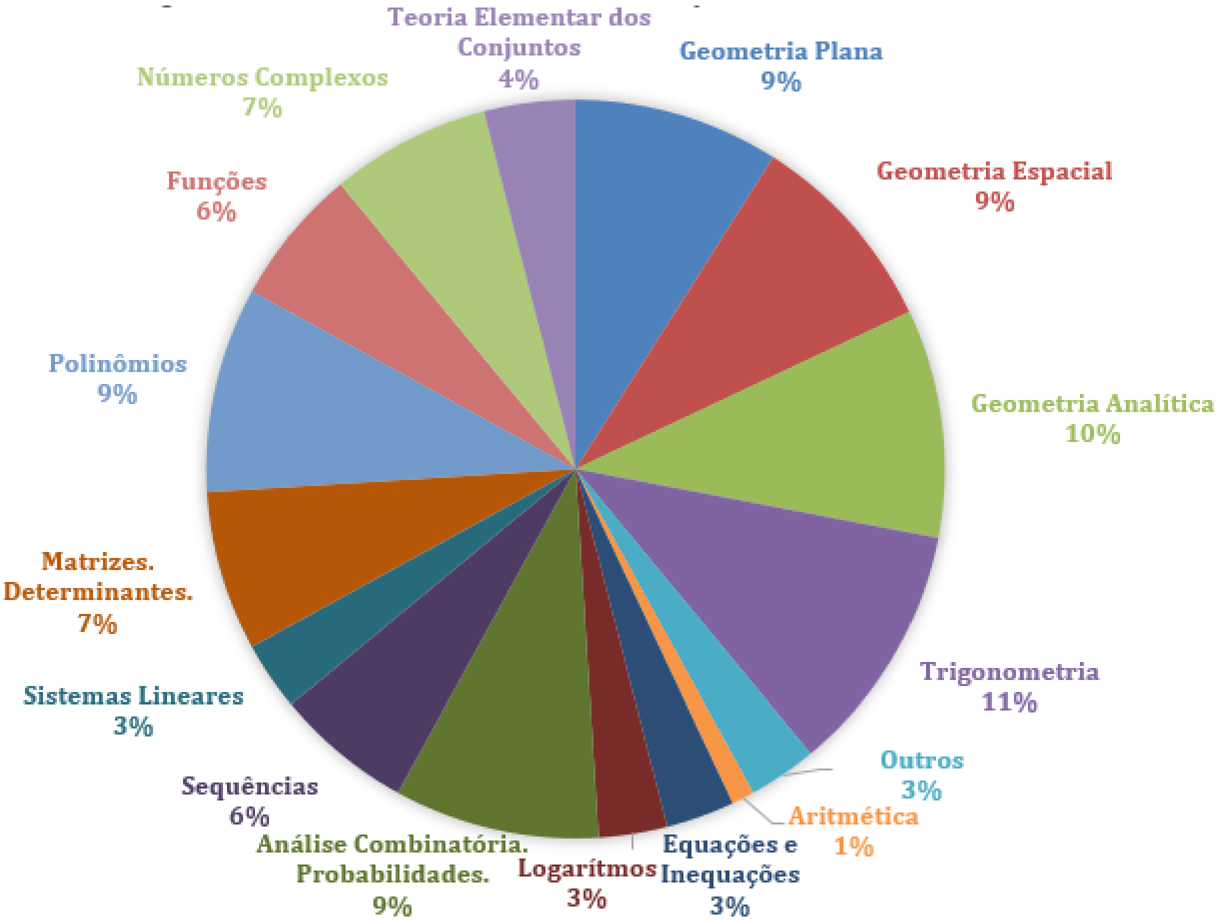
Vejamos a composição da média final das provas do último vestibular:

Fase	Matéria	Percentual
1ª Fase	Prova Objetiva	20%
2ª Fase	Matemática	20%
	Química	20%
	Física	20%
	Redação	20%
Média Final		100%

Não há idade mínima para o ingresso no ITA, desde que você tenha concluído ou esteja concluindo o ensino médio no ano da inscrição. A idade máxima para esse vestibular é 23 anos de idade até o último dia do ano do concurso.

Estatística de Vestibulares Anteriores

O diagrama abaixo representa a distribuição de assuntos da prova de Matemática do ITA dos últimos 20 anos.



Observando-se o diagrama, podemos notar que no vestibular do ITA há uma alta taxa de incidência nos seguintes assuntos:

- Trigonometria
- Geometria Analítica
- Geometria Espacial
- Geometria Plana
- Polinômios

Podemos perceber também que os assuntos das questões dessa prova, excluindo os temas acima, é bem distribuído.

É muito provável que na sua prova você encontre questões sobre os temas citados acima, então tente resolver o máximo de questões possível das aulas desses assuntos para garantir preciosos pontos no vestibular!

Introdução

A primeira aula desse curso será sobre Teoria dos Conjuntos. Precisamos aprender a ler as notações usadas nas questões antes de aprender a resolvê-las.

Antes de iniciar o estudo sobre a Teoria dos Conjuntos, vamos estudar Noções de Lógica. Ela é um pré-requisito para uma boa base no estudo da Teoria dos Conjuntos.

Nesse curso, tentei deixar os comentários das questões bem detalhados, então, se você for um aluno avançado ou intermediário, apenas confira o gabarito e tente resolver todas as questões dessa aula. Lembre-se! O importante é ganhar velocidade na hora da prova, então, tente resolver a maior quantidade de exercícios possível e não perca tempo verificando questões que você já sabe! Caso você seja um aluno iniciante, você pode conferir o passo a passo das resoluções e aprender com elas. Sem mais delongas, vamos começar!

1. Noções de Lógica

1.1. Proposição Simples

1.1.1. Definição

Uma proposição simples ou sentença é uma oração declarativa que expressa um sentido completo e pode ser classificada em apenas um dos dois valores lógicos possíveis: **verdadeiro** ou **falso**.

Frases exclamativa, interrogativa, imperativa e sentenças abertas não são proposições, pois não são classificáveis como verdadeiras ou falsas.

Uma sentença aberta pode se tornar uma proposição mediante o uso de quantificadores!

Exemplo:

1) $\exists x \in \mathbb{R} | 5x + 2 = 0$

O símbolo $\exists$ representa o quantificador existencial. Essa frase é lida como:

"Existe x pertencente ao conjunto dos reais, tal que $5x + 2 = 0$."

Essa é uma proposição verdadeira, pois resolvendo essa equação encontramos algum x que satisfaz o problema.

Três exemplos de quantificadores são:

a) Universal: $\forall$ significa "para todo"
b) Existencial: $\exists$ significa "existe"
c) Não existencial: $\nexists$ significa "não existe"

Assim, para termos uma proposição temos que satisfazer as seguintes condições:

I. A oração deve possuir sentido completo.
II. Deve ser declarativa (não pode ser sentença aberta, frase exclamativa, frase interrogativa e frase imperativa).
III. Somente assume um dos valores lógicos possíveis: verdadeiro (V) ou falso (F).

1.1.2. Princípio da Não-Contradição

O Princípio da Não-Contradição diz que uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo.

1.1.3. Princípio do Terceiro-Excluído

O Princípio do Terceiro-Excluído diz que uma proposição poderá ser verdadeira ou falsa, não existindo uma terceira possibilidade.

1.2. Negação

Toda proposição pode ser negada. No estudo da lógica, o símbolo que representa a negação de uma proposição é $\neg$ ou $\sim$. Vamos usar o símbolo $\neg$.

As proposições são nomeadas com letras minúsculas. Usamos normalmente as letras p, q e r. Quando encontramos $\neg p$, estamos negando a proposição p. Então se p for verdadeira, $\neg p$ será falsa ou se p for falsa, $\neg p$ será verdadeira.

Por exemplo:

$$q: 9 > 3 \text{ (V)}$$
$$\neg q: 9 \leq 3 \text{ (F)}$$

Observe que na proposição q, a sua negação foi escrita como $\leq$ e não apenas $<$. Caso escrevêssemos $<$ no lugar de $\leq$, tornaríamos a negação incompleta, já que $9 = 3$ também é falsa. Então, toda vez que você encontrar uma desigualdade, lembre-se de incluir todas as possibilidades da sua negação!

1.3. Proposição Composta

Podemos criar novas proposições a partir de proposições simples. Para isso, usamos alguns operadores lógicos (conectivos) que serão apresentados a seguir:

1.3.1. Conjunção (∧)

O operador lógico conjunção é mais conhecido como "e" e pode ser representada pelo símbolo "∧". Esse tipo de operador combina duas proposições com o conectivo "e". Por exemplo:

p: Hoje é sexta-feira.

q: Amanhã vai chover.

$p \wedge q$: Hoje é sexta-feira e amanhã vai chover.

Proposições com o conectivo "e" somente serão verdadeiras se ambas as proposições simples forem verdadeiras.

Vamos representar todas as possibilidades por meio da tabela-verdade. Observe:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

ESCLARECENDO!

O que é a tabela-verdade?

Ela é uma tabela matemática que mostra todos os resultados possíveis de todas as combinações lógicas de uma proposição composta.

Como montar a tabela-verdade?

Preliminarmente, devemos escrever todas as possíveis combinações das proposições simples na tabela. E como vamos saber quantas linhas da tabela-verdade devemos escrever?

No caso de 2 proposições, teremos 4 linhas. As 4 linhas são resultado de todas as combinações possíveis: 2 possibilidades para p (V ou F) e 2 possibilidades para q (V ou F). Essas possibilidades são multiplicadas: $2 \cdot 2 = 4$.

Veja o passo-a-passo:

1) Escrevemos as proposições simples (p e q) e também a proposição composta logo a direita:

p	q	$p \wedge q$

2) Completamos a coluna p da seguinte forma:

p	q	$p \wedge q$
V		
V		
F		
F		

3) Completamos a coluna q da seguinte forma:

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Agora, basta analisar os valores lógicos de cada proposição e completar a tabela:

Sabemos que $p \wedge q$ será verdadeiro somente se p e q forem verdadeiros. Se qualquer dessas proposições forem falsas, o resultado de $p \wedge q$ também será falso! Então a presença de apenas 1 falso já torna o resultado falso! Vamos agora verificar cada linha e preencher o valor lógico. Na primeira linha, temos p é V e q é V, então $p \wedge q$ é V:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	
F	V	
F	F	

Na segunda linha, p é V e q é F, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	
F	F	

Na terceira linha, p é F e q é V, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	

Na última linha, p é F e q é F, $p \wedge q$ é F:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.3.2. Disjunção Inclusiva ($\vee$)

O operador lógico disjunção inclusiva é mais conhecido como "ou" e pode ser representado pelo símbolo $\vee$. Quando usamos o operador lógico "ou", dizemos que a nossa proposição será verdadeira quando qualquer uma das proposições simples forem verdadeiras.

A tabela-verdade da disjunção é a seguinte:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.3. Disjunção Exclusiva ($\oplus$)

A disjunção exclusiva é conhecida como "Ou p ou q" e pode ser representada por $\oplus$. A diferença entre a disjunção exclusiva da disjunção inclusiva é que caso as **duas proposições sejam verdadeiras** ao mesmo tempo, a proposição com **disjunção exclusiva torna-se falsa**.

Veja a tabela-verdade:

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

1.3.4. Negação ($\neg$)

A negação de uma proposição p pode ser escrita como $\neg p$. Ele é lido como "não p". A negação de p sempre receberá o valor lógico contrário ao de p.

Veja a tabela-verdade:

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.3.5. Condicional (→)

O condicional é conhecido como "Se p, então q" e pode ser representado por →. Esse caso só será falso quando p for verdadeiro e q for falso. Porque ela afirma que se p acontecer, q deve acontecer.

Desse modo, podemos criar a tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

1.3.6. Bicondicional (↔)

O bicondicional é conhecido como "se e somente se" e pode ser representado pelo símbolo (↔). Proposições com o conectivo bicondicional são verdadeiros quando ambos os eventos acontecem ou nenhum deles acontecem.

$p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando $p \to q$ e $q \to p$ forem verdadeiras. Assim, a proposição $p \leftrightarrow q$ é verdadeira somente quando $p, q = V$ ou $p, q = F$.

1.4. Classificação das Proposições Compostas

1.4.1. Tautologia

Uma proposição composta é classificada como tautologia quando todos os valores lógicos que ela assume são verdadeiros. Isto é, independente dos valores lógicos das proposições simples, ela será verdadeira.

1.4.2. Contradição

Uma proposição composta é classificada como contradição quando todos os seus valores lógicos são falsos.

1.4.3. Contingência

Uma proposição composta é classificada como contingência quando ela não puder ser classificada como tautologia ou contradição.

1.5. Relação de Equivalência

Duas proposições serão equivalentes quando possuírem tabela-verdades iguais. Vamos usar o símbolo ⇔ para indicar equivalência. Exemplo:

Vamos construir a tabela-verdade para $p \to q$ e $\neg p \vee q$:

p	$\neg p$	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V

Perceba que a tabela-verdade de $p \rightarrow q$ e $\neg p \vee q$ possuem os mesmos valores lógicos, logo eles são equivalentes! Então, podemos escrever:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Se elas são equivalentes, podemos escrever qualquer uma das formas para representar a mesma proposição!

1.5.1. Teorema Fundamental

Uma equivalência muito útil no estudo da lógica é a seguinte:

I. $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \Leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$

II. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

1. Mostre que as seguintes proposições são equivalentes.

a) $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$

Resolução:

a) $\neg(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q})$

Vamos construir a tabela-verdade:

Primeiro para $\neg(p \rightarrow q)$. Basta negar a tabela-verdade de $p \rightarrow q$.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \rightarrow q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	F

Agora, construímos a tabela-verdade de $p \wedge \neg q$, primeiro devemos negar q:

p	q	$\neg q$	$p \land \neg q$
V	V	F	
V	F	V	
F	V	F	
F	F	V	

O próximo passo é completar a tabela com o valor lógico:

p		$\neg q$	$p \land \neg q$
V		F	F
V		V	V
F		F	F
F		V	F

Por fim, juntamos as duas tabelas-verdades e comparamos:

p	q	$\neg q$	$p \land \neg q$	$p \to q$	$\neg(p \to q)$
V	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Note que ambas são iguais, logo, são equivalentes.

*Poderíamos ter construído essa última tabela diretamente e estaria provada a equivalência.

1.6. Negação das Proposições

1.6.1. Negação de uma proposição simples

Para negar uma proposição simples, basta inserir o símbolo de negação e trocar o valor lógico da proposição.

Negação de p: $\neg p$

p	$\neg p$
V	F
F	V

1.6.2. Negação de disjunção

$$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$$

Para negarmos proposições da forma p ou q, basta negar p e q e trocar o "ou" por "e".

1.6.3. Negação de conjunção

$$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

Para negarmos a proposição da forma p e q, trocamos o "e" por "ou" e negamos as proposições simples.

1.6.4. Negação da condicional

$$\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

A negação da condicional é mais bem compreendida quando representamos a condicional pela sua equivalente.

$$p \to q \Leftrightarrow \neg p \vee q$$

Vamos usar $\neg p \vee q$ no lugar de $p \to q$.

Então a negação da condicional será:

$$\neg(\neg p \vee q)$$

Já sabemos como é a negação da disjunção, vamos aplicar. Negamos as proposições e trocamos "ou" por "e".

$$\neg(\neg p \vee q) \Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q$$

O que será a negação da negação de p?

Quando negamos p, trocamos o seu valor lógico. Então, quando negamos $\neg p$, trocamos novamente seu valor lógico. Logo, a negação da negação de p será o próprio p.

Continuando:

$$\neg(\neg p) \wedge \neg q \Leftrightarrow p \wedge \neg q$$

Assim, provamos que $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$.

1.6.5. Negação da bicondicional

$$\neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

Vamos desenvolver $\neg(p \leftrightarrow q)$, para isso vamos usar a equivalência $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \to q) \wedge (q \to p)$.

$$i)\ \neg(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \neg[(p \to q) \wedge (q \to p)]$$

Vamos usar a negação da conjunção e aplicar na proposição acima:

*Negação da conjunção possui a forma: $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

$$ii)\ \neg[(p \to q) \wedge (q \to p)] \Leftrightarrow \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p)$$

Agora basta aplicar a negação da condicional em cada proposição:

*Negação da condicional é da forma: $\neg(p \to q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

$$iii)\ \neg(p \to q) \vee \neg(q \to p) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

1.6.6. Negação do quantificador ∀

$$\neg\big(\forall x, p(x)\big) \Leftrightarrow (\exists x, \neg p(x))$$

Para negar o quantificador "para todo", trocamos o quantificador ∀ pelo quantificador ∃ e negamos a proposição dada.

1.6.7. Negação do quantificador ∃

$$\neg\big(\exists x, p(x)\big) \Leftrightarrow (\forall x, \neg p(x))$$

Analogamente à situação acima, basta trocar o quantificador ∃ pelo quantificador ∀ e negarmos a proposição dada.

1.7. Propriedades Operatórias

Todas as seguintes propriedades podem ser provadas pela tabela-verdade. Escreva a tabela-verdade para cada propriedade para praticar. É importante que você as conheça, pois elas serão usadas para entender a Teoria dos Conjuntos.

1.7.1. Idempotência

a) $p \wedge p \Leftrightarrow p$
b) $p \vee p \Leftrightarrow p$

1.7.2. Comutativa

c) $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
d) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Comentário: perceba que a ordem das proposições não altera o seu valor lógico!

1.7.3. Associativa

e) $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
f) $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

Comentário: quando temos o mesmo operador envolvido (∧ ou ∨), podemos trocar os parênteses.

A tabela-verdade para 2 variáveis é:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Para 3 variáveis:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

1.7.4. Involução

g) $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$

Comentário: dupla negação de uma proposição p é o próprio p.

1.7.5. Distributiva

h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Comentário: quando encontramos 2 operadores lógicos diferentes, nessas situações podemos "distribuir" o operador entre as proposições. Veja:

$$\boldsymbol{p} \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (\boldsymbol{p} \vee q) \wedge (\boldsymbol{p} \vee r)$$

1.7.6. Absorção

j) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

1.7.7. Complementares

k) $\neg p \vee p \Leftrightarrow T$ (tautologia)
l) $\neg p \wedge p \Leftrightarrow C$ (contradição)

1.7.8. Identidades

m) $p \vee T \Leftrightarrow T$
n) $p \wedge T \Leftrightarrow p$
o) $p \vee C \Leftrightarrow p$
p) $p \wedge C \Leftrightarrow C$
T representa o conjunto tautologia e C representa o conjunto contradição.

1.7.9. Teorema de De Morgan

q) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
r) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Comentário: o teorema de De Morgan é muito útil no estudo da teoria dos conjuntos. Perceba que a propriedade diz que podemos “distribuir” o operador $\neg$ entre as proposições e trocamos o operador lógico envolvido (negação de “ou” é “e” e negação de “e” é “ou”).

2. Simplifique as seguintes expressões:
a) $\neg(p \vee \neg q)$
b) $\neg[\neg p \wedge (p \vee \neg q)] \wedge q$

Resolução:
a) $\neg(p \vee \neg q)$
Aplicando De Morgan:
$$\neg(p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q)$$
Involução:
$$\neg p \wedge \neg(\neg q) \Leftrightarrow \neg p \wedge q$$

b) $\neg[\neg p \wedge (p \vee \neg q)] \wedge q$
De Morgan:
$$[\neg(\neg p) \vee \neg(p \vee \neg q)] \wedge q$$
Involução:
$$[p \vee \neg(p \vee \neg q)] \wedge q$$
De Morgan:
$$[p \vee (\neg p \wedge \neg(\neg q)] \wedge q$$
Involução:
$$[p \vee (\neg p \wedge q)] \wedge q$$
Distributiva:

$$[(p \vee \neg p) \wedge (p \vee q)] \wedge q$$
$$[T \wedge (p \vee q)] \wedge q$$
$$(p \vee q) \wedge q$$

Absorção:

$$q$$

3. Demonstre as seguintes implicações e equivalências sem usar tabela-verdade:

a) $(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$

Resolução:

a) O símbolo $\Rightarrow$ representa "implica". Para demonstrar essa implicação, devemos trocar $\Rightarrow$ por $\to$ e encontrar uma tautologia.

$$(p \to q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$$
$$(p \to q) \wedge \neg q \to \neg p$$
$$\neg[(p \to q) \wedge \neg q] \vee \neg p$$
$$[\neg(p \to q) \vee q] \vee \neg p$$
$$[\neg(\neg p \vee q) \vee q] \vee \neg p$$
$$[(p \wedge \neg q) \vee q] \vee \neg p$$
$$[(p \vee q) \wedge (\neg q \vee q)] \vee \neg p$$
$$[(p \vee q) \wedge T] \vee \neg p$$
$$(p \vee q) \vee \neg p$$
$$(p \vee \neg p) \vee q$$
$$T \vee q$$
$$T$$

2. Teoria Elementar dos Conjuntos

Estudamos Noções de Lógica para prepará-los para o estudo da Teoria dos Conjuntos. Preliminarmente, devemos entender o que é um conjunto, um elemento e como relacioná-los.

2.1. Conjunto, elemento e relação de pertinência

2.1.1. Conjunto

Conjunto pode ser entendido como um grupo de elementos com uma mesma característica.

Usualmente, os conjuntos são representados por letras maiúsculas (A, B, C, D...)

2.1.2. Elemento

Elemento é a parte que compõe o conjunto. Cada membro do conjunto é classificado como elemento. Por exemplo:

1) Os elementos do conjunto dos mamíferos podem ser: cachorro, gato, coelho, baleia...
2) Conjunto das vogais: a, e, i, o, u.

Os elementos são representados por letras minúsculas (a, b, c, d...)

2.1.3. Relação de pertinência

Como relacionar um elemento a um conjunto?

Podemos relacionar um elemento a um conjunto usando o símbolo $\in$. Vejamos no exemplo (1):

1) Chamando cachorro de c e mamíferos de M. Temos: $c \in M$. Isso significa que cachorro (c) é elemento do conjunto de mamíferos (M). ($\in$ significa pertence ou é elemento de)

Também podemos usar o símbolo $\notin$ para representar que um elemento não pertence a um conjunto. No exemplo (1):

1) Chamando peixe de p e mamíferos de M. Temos: $p \notin M$. Isso é lido como: peixe (p) não é elemento do conjunto de mamíferos (M). ($\notin$ significa não pertence ou não é elemento de)

2.2. Representação

2.2.1. Listagem ou enumeração

Imagine que João, Maria, Roberto e Luisa estejam matriculados em Matemática. Podemos representar o conjunto de estudantes de Matemática colocando todos os elementos do conjunto entre chaves (“{ }”), então ele será escrito da seguinte forma:

{João, Maria, Roberto, Luisa}

Esse caso serve para conjuntos finitos.

Para conjuntos infinitos, a única diferença é incluir “...” no último elemento do conjunto, isso indicará que a sequência segue infinitamente, por exemplo:

Conjunto dos números pares positivos: {2, 4, 6, 8, ...}

Também podemos incluir “...” no meio do conjunto, isso indicará que o conjunto segue um padrão. Exemplo:

Conjunto dos números inteiros de 0 a 100:

{0, 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100}

*Também estará correto se você colocar “;” separando os elementos do conjunto: $\{1; 2; 3; 4\}$.

Podemos também escrever um conjunto de outras maneiras. Veja:

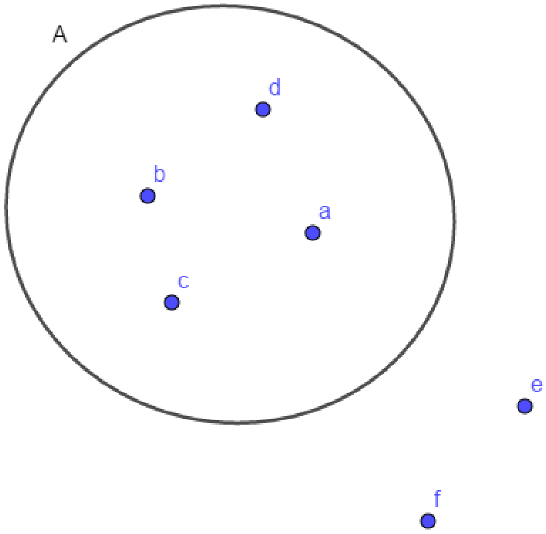
$$A = \{1, 2, 3, 4\} = \{1, 3, 4, 2\} = \{1, 1, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4\}$$

O fato de mudar a ordem dos elementos e repetir elementos dentro do conjunto não o torna diferente!

Cuidado! $\{1, \{1\}\} \neq \{1, 1\}$, veremos mais adiante a explicação no tópico de subconjuntos!

2.2.2. Diagrama de Venn-Euler

Os conjuntos também podem ser representados por diagramas. Esse diagrama ajuda bastante na resolução de questões. Ela será útil no estudo das operações com conjuntos. Veja um exemplo do diagrama:



Temos um conjunto A e elementos a, b, c, d, e, f. Todos os elementos que estão dentro do círculo pertencem ao conjunto $A = \{a, b, c, d\}$ e todos que estão fora do círculo não pertencem ao conjunto A. Podemos denotar que $e \notin A$ e $f \notin A$.

2.2.3. Compreensão

Durante a resolução de exercícios do vestibular, você encontrará questões que envolvem a descrição de um conjunto sem a enumeração de seus elementos. Veja a questão do ITA:

(2017/ITA) Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

Repare que ele descreve o conjunto C como $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, isso é lido como:

"C é o conjunto dos elementos xy tal que x é elemento de A e y é elemento de B".

Note que o ITA usa ":" para dizer "tal que". Outra maneira de escrever "tal que" seria usando "|", ficaria da seguinte forma:

$$C = \{xy | x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Quando encontrarmos algum exercício com a definição de um conjunto na forma $A = \{x | P(x)\}$, devemos entender que x representa os elementos de A e $P(x)$ é a propriedade dos elementos de A.

2.3. Conjunto unitário, conjunto vazio e conjunto universo

2.3.1. Conjunto unitário

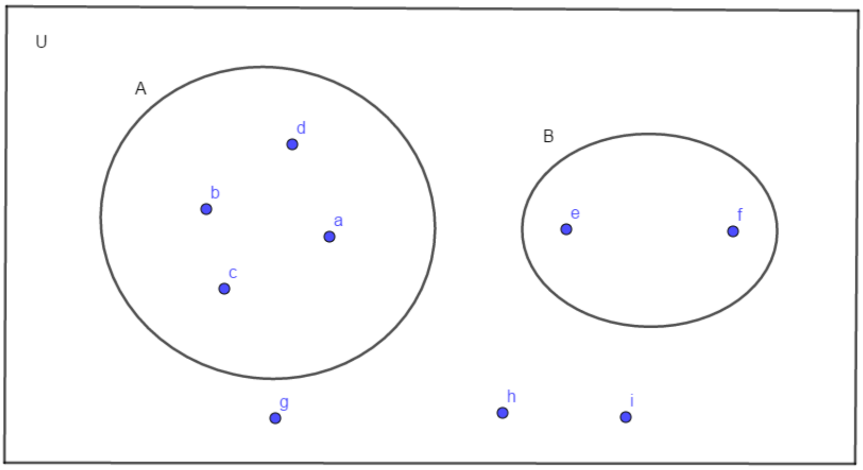
Um conjunto é chamado de unitário quando ele possuir apenas um elemento.

2.3.2. Conjunto vazio

Um conjunto é chamado de vazio quando ele não possuir nenhum elemento. O símbolo do vazio na Matemática é representado por $\emptyset$. O conjunto vazio também pode ser escrito como $\{\ \}$. Usualmente, usamos o $\emptyset$ para mostrar que dado problema não possui solução.

2.3.3. Conjunto universo

O conjunto universo é representado pelo símbolo U. Ela pode ser vista como um conjunto com todos os valores possíveis que uma variável pode assumir. Vejamos um exemplo de Diagrama de Venn-Euler:



Veja que nesse caso o conjunto universo é $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$.

2.4. Subconjunto

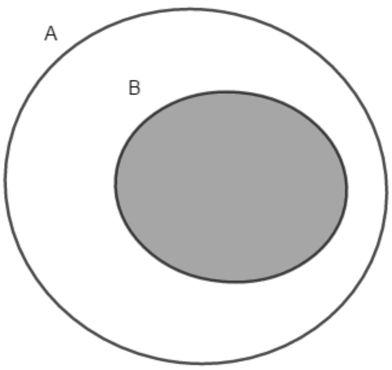
Um subconjunto pode ser visto como um conjunto dentro de um conjunto maior. A definição de subconjunto é:

Dados os conjuntos A e B, B é subconjunto de A se todos os elementos de B também são elementos de A.

Ela é representada desse modo:

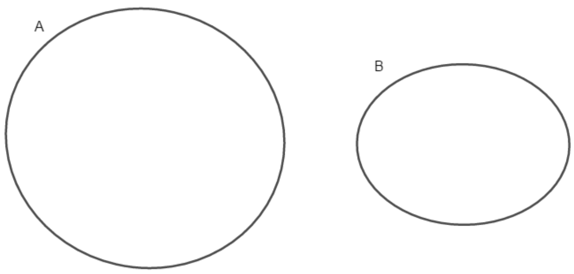
$$B \subset A \Leftrightarrow (\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A)$$

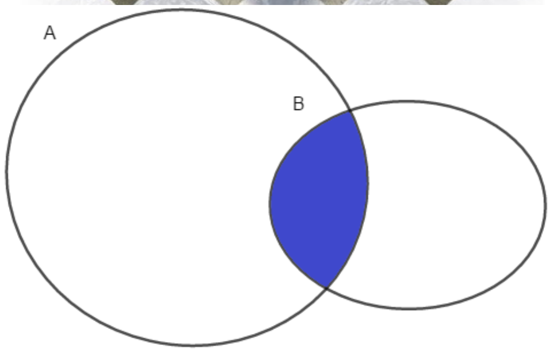
Usando o Diagrama de Venn-Euler para representar que $B \subset A$:



*Se o conjunto B for diferente do conjunto A, dizemos que B é subconjunto próprio de A.

Há também o símbolo $\not\subset$ que representa “não está contido”. Veja:





Ambas as figuras podem representar: $B \not\subset A$.
A área em azul representa os elementos em comum entre os conjuntos, veremos mais adiante.

É comum encontrarmos nas questões o símbolo $\supset$ no lugar de $\subset$. O símbolo $\supset$ representa "contém". Então, se $A \supset B$ (A contém B) então vale $B \subset A$ (B está contido em A). Uma forma de memorizar é lembrar que o "$\subset$" sempre aponta para o conjunto maior!

2.4.1. Propriedades

I. Reflexiva $(A \subset A)$
II. Transitiva $(A \subset B \land B \subset C) \Rightarrow (A \subset C)$
III. Antissimétrica $(A \subset B \land B \subset A) \Leftrightarrow (A = B)$
IV. $\emptyset \subset A, \forall A$

2.4.2. Família de conjuntos

Seja o conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$

Quais são os elementos de A?

Os elementos de A são: $1, \{1\}, 2, \{1, 2\}$ e $\emptyset$.

Quando colocamos o número 1 entre "{ }", ele é considerado como um novo elemento e por isso não será igual ao elemento 1. Assim, o elemento $\{1\} \neq 1$.

Veja que $\emptyset$ é elemento de A, pois está enumerado no conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$. Sabemos que o conjunto $\emptyset$ sempre estará contido em qualquer conjunto pela propriedade do subconjunto. Logo $\emptyset$ é elemento e subconjunto de A.

Agora, vamos analisar os subconjuntos de A.

$\{1, 2\}$ é subconjunto de A?

Sim. Pois, 1 e 2 estão listados no conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{1,2\}, \emptyset\}$.

Não confunda com o elemento $\{1,2\}$! Se quiséssemos colocar esse elemento como subconjunto, deveríamos lista-lo desse modo: $\{\{1,2\}\} \subset A$. Note a presença das duas chaves!

4. Seja $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$. Complete com V (verdadeiro) ou F (falso) as afirmações.

a) $1 \in A$
b) $\{3,5\} \notin A$
c) $\emptyset \subset A$
d) $\emptyset \in A$
e) $\{\{2\}\} \subset A$

Resolução:

a) V. 1 está listado em $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
b) F. {3, 5} está listado em $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.
c) V. O conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
d) F. ∅ não está listado em A.
e) F. $\{2\}$ é elemento do conjunto $\{\{2\}\}$ mas não é elemento do conjunto $A = \{1, \{1\}, 2, \{3,5\}\}$.

2.4.3. Conjunto potência ou conjunto das partes

O conjunto das partes é denotado por $P(A)$. Ela contém todos os subconjuntos de A. A sua definição é dada por:

$$P(A) = \{X | X \subset A\}$$

Traduzindo:

$P(A)$ é o conjunto formado pelo subconjunto X, tal que X está contido em A. Isto é, X é todo subconjunto que pode ser formado pelos elementos de A.

Exemplo:

a) $A = \{0, 1, 2\}$

Os subconjuntos em A são: $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$ e $\{0, 1, 2\}$.

Logo: $P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$.

5. Escreva o conjunto das partes para o conjunto A:

a) $A = \{2, -2, 1\}$

Resolução:

a) Vamos identificar todos os subconjuntos de A. Já podemos incluir o $\emptyset$, pois ele sempre será subconjunto de qualquer conjunto.

Agora, encontrando os subconjuntos unitários: $\{2\}, \{-2\}, \{1\}$.
Subconjuntos com 2 elementos: $\{2, -2\}, \{2, 1\}\ e\ \{-2, 1\}$.
Subconjunto com 3 elementos: $\{2, -2, 1\}$.
Portanto: $P(A) = \{\emptyset, \{2\}, \{-2\}, \{1\}, \{2, -2\}, \{2, 1\}, \{-2, 1\}, \{2, -2, 1\}\}$

2.5. Operações entre conjuntos

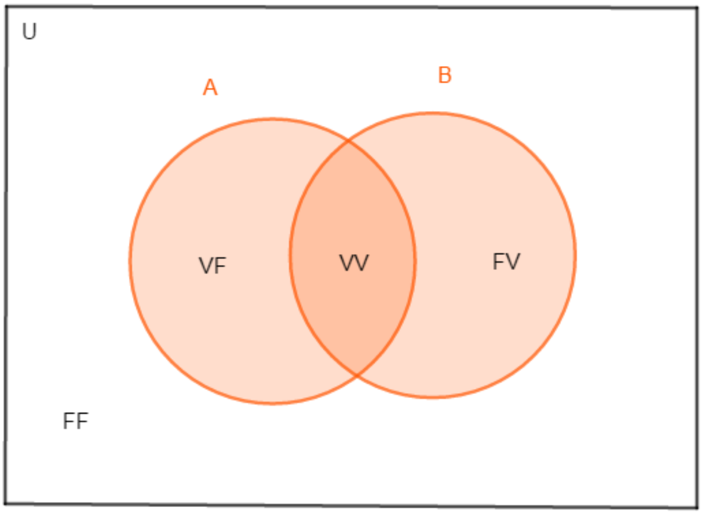
2.5.1. União (∪)

Considere os conjuntos A e B, a definição do operador união é dado por:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

Na união de dois conjuntos, juntamos todos os elementos de A com todos os elementos de B e formamos um único conjunto. Perceba que a definição $x \in A \vee x \in B$ pode ser vista como $p \vee q$. Chamando p de $(x \in A)$ e q de $(x \in B)$. $p \vee q$ será $(x \in (A \cup B))$.

Usando o Diagrama de Venn-Euler, vamos representar $A \cup B$:



Repare que temos na figura os termos VV, VF, FV e FF. Elas representam os valores lógicos de p e q nessa ordem. Por exemplo, VF significa que p é V e q é F.

A região sombreada é a região dos elementos em comum entre os conjuntos.

Propriedades da União

a) $A \cup A = A$
b) $A \cup \emptyset = A$
c) $A \cup U = U$
d) $A \cup B = B \cup A$
e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
f) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

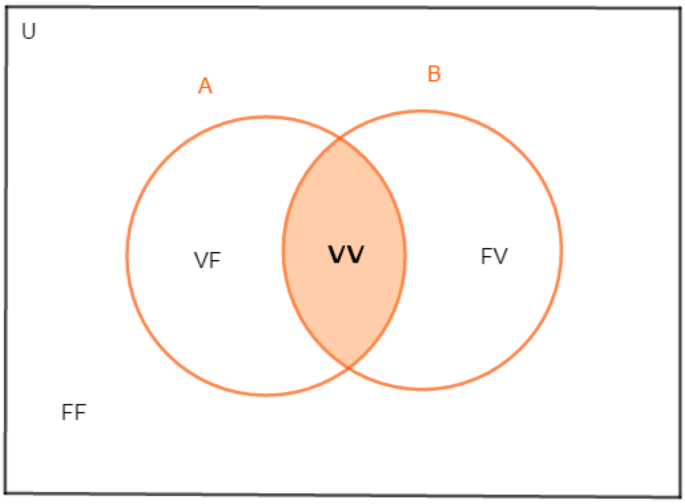
*Todas essas propriedades podem ser provadas pela Lógica das Proposições.

2.5.2. Intersecção (∩)

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

O conjunto formado pela intersecção é o conjunto dos elementos em comum entre os conjuntos A e B. Assim, o elemento x deverá estar presente tanto no conjunto A quanto no conjunto B, isso acontece quando $x \in A$ for verdade e $x \in B$ for verdade.

Diagrama de Venn-Euler:



Exemplo:

$$A = \{1, 2, 3\}$$
$$B = \{3, 5, 6, 7\}$$

Quais os elementos de $A \cap B$?

Os elementos de $A \cap B$ serão os elementos em comum, no caso apenas o 3:

$$A \cap B = \{3\}$$

Propriedades da Intersecção

a) $A \cap A = A$
b) $A \cap U = A$
c) $A \cap \emptyset = \emptyset$
d) $A \cap B = B \cap A$
e) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
f) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
g) $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A\ e\ B\ são\ disjuntos$

*Todas essas propriedades podem ser provadas pela Lógica das Proposições.

2.5.3. Propriedades do inter-relacionamento da união e da intersecção

a) $A \cap (A \cup B) = A$
b) $A \cup (A \cap B) = A$
c) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributiva da união em relação à intersecção)
d) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributiva da intersecção em relação à união)

As propriedades (c) e (d) são muito úteis na hora de resolver questões do ITA.

Um jeito de memorizar é raciocinar da seguinte maneira:

Vamos usar $A \cup (B \cap C)$ como exemplo.

Primeiro, escolhemos o que queremos distribuir (no caso $A \cup$). Vemos qual o operador dentro do conjunto entre parênteses $\left(A \cup (B \cap C)\right)$ e escrevemos:

$$\ldots \cap \ldots$$

Agora, fazemos a primeira distribuição $\left(A \cup (B \cap C)\right)$:

$$(A \cup B) \cap \ldots$$

Por último, fazemos a segunda distribuição $\left(A \cup (B \cap C)\right)$:

$$(A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Resumindo:

$$A \cup (B \cap C)$$

E se fosse $(A \cap B) \cup (A \cap C)$?

Usamos a mesma ideia. Podemos escolher qualquer um dos dois conjuntos, já que ambos estão dentro de parênteses.

Observe, vamos distribuir o segundo conjunto $(A \cap C)$:

$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$
$$1°) \ldots \cap \ldots$$
$$2°) [A \cup (A \cap C)] \cap \ldots$$
$$3°) [A \cup (A \cap C)] \cap [B \cup (A \cap C)]$$
$$(A \cap B) \cup (A \cap C) = [A \cup (A \cap C)] \cap [B \cup (A \cap C)]$$

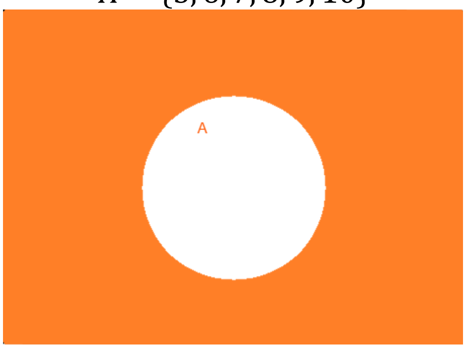
$$(A \cap B) \cup (A \cap C)$$

2.5.4. Complementar

O complementar de um conjunto A é denotado por $\bar{A}$. Ele representa todos os elementos que não são elementos de A. Ele também pode ser representado por A^C.

Exemplo:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$\bar{A} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$



A área em laranja representa a região de todos os elementos de $\bar{A}$.

2.5.5. Teorema de De Morgan

1) $\overline{\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cap \overline{\boldsymbol{B}}$
2) $\overline{\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} \cup \overline{\boldsymbol{B}}$

O Teorema acima é análogo ao Teorema de De Morgan visto na parte de Noções de Lógica.

Também poderíamos escrever:

1) $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
2) $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

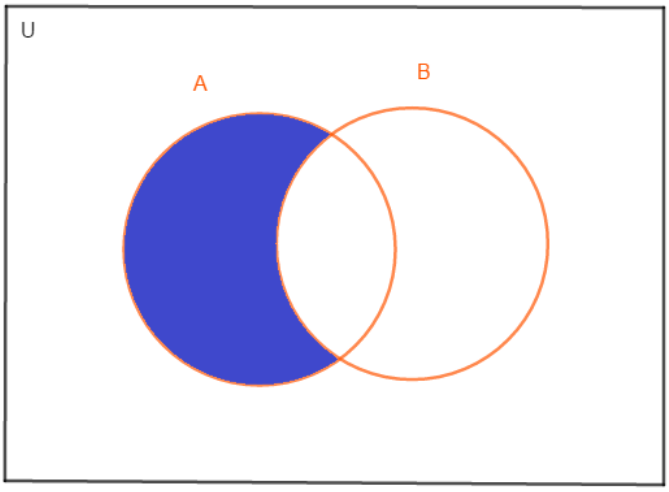
O caso (1) é semelhante a: $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

Para o caso (2): $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

2.5.6. Diferença entre conjuntos

$$A - B = A \backslash B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

Os elementos do conjunto formado pela diferença entre A e B serão os elementos que pertencem a A e não pertencem a B. Veja o diagrama de Venn-Euler:



Na diferença, removemos do conjunto A todos os elementos em comum entre A e B.
Também podemos escrever $A - B$ de outro modo.
Veja a definição:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} = \{x | x \in A \wedge x \in \bar{B}\} = A \cap \bar{B}$$

$$A - B = A \cap \bar{B}$$

Podemos escrever:

$$A - B = C_A^B \Leftrightarrow B \subset A$$

C_A^B chama-se complementar de B em relação a A.

6. Dados os conjuntos $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{2,5,6,7\}$ e o conjunto universo $U = \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Determine os conjuntos:

a) $A \cup C$

b) $\overline{A \cap \bar{A}}$

Resolução:

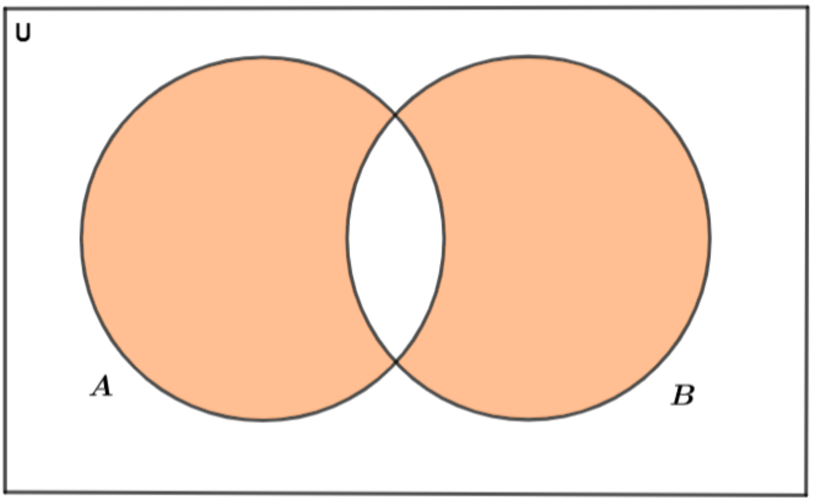
a) $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{2, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $\overline{A \cap \bar{A}}$

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$\bar{A} = \{6, 7\}$$
$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$
$$\overline{A \cap \bar{A}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = U$$

2.5.7. Diferença Simétrica

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$



Chama-se diferença simétrica a definição acima.
Podemos escrever de outro modo:

$$A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

7. (IME/1987) Dados dois conjuntos A e B, define-se

$$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z

$$X \cap (Y\Delta Z) = (X \cap Y)\Delta(X \cap Z)$$

Resolução:

Para resolver questões desse tipo, podemos escolher um dos lados da equação e tentar chegar à igualdade do outro lado.

Vamos escolher o lado direito, então, pela definição de diferença simétrica, temos:

$$(X \cap Y)\Delta(X \cap Z) = [(X \cap Y) - (X \cap Z)] \cup [(X \cap Z) - (X \cap Y)]$$

Escrevendo a diferença dos conjuntos na forma de intersecção:

$$\left[(X \cap Y) \cap \overline{(X \cap Z)}\right] \cup \left[(X \cap Z) \cap \overline{(X \cap Y)}\right]$$

Aplicando De Morgan:

$$[(X \cap Y) \cap (\bar{X} \cup \bar{Z})] \cup [(X \cap Z) \cap (\bar{X} \cup \bar{Y})]$$

Distributiva:

$$\{[(X \cap Y) \cap \bar{X}] \cup [(X \cap Y) \cap \bar{Z}]\} \cup \{[(X \cap Z) \cap \bar{X}] \cup [(X \cap Z) \cap \bar{Y}]\}$$

Associativa:

$$\left\{\left[\underbrace{(X \cap \bar{X})}_{\emptyset} \cap Y\right] \cup [X \cap (Y \cap \bar{Z})]\right\} \cup \left\{\left[\underbrace{(X \cap \bar{X})}_{\emptyset} \cap Z\right] \cup [X \cap (Z \cap \bar{Y})]\right\}$$

$$\left\{\underbrace{[\emptyset \cap Y]}_{\emptyset} \cup \underbrace{[X \cap (Y \cap \bar{Z})]}_{X \cap (Y-Z)}\right\} \cup \left\{\underbrace{[\emptyset \cap Z]}_{\emptyset} \cup \underbrace{[X \cap (Z \cap \bar{Y})]}_{X \cap (Z-Y)}\right\}$$

$$[X \cap (Y - Z)] \cup [X \cap (Z - Y)]$$

Agora, como $X \cap$ está presente em ambos os conjuntos, podemos colocá-lo em evidência para obter:

$$X \cap [(Y - Z) \cup (Z - Y)]$$

Essa expressão é a definição da seguinte diferença simétrica:

$$X \cap (Y \Delta Z)$$

Portanto:

$$(X \cap Y)\Delta(X \cap Z) = X \cap (Y \Delta Z)$$

*Nesse tipo de questão, eu acho mais fácil simplificar o lado da maior expressão. Se escolhêssemos o lado mais simplificado, teríamos que fazer o caminho inverso da resolução acima.

2.6. Cardinalidade dos Conjuntos

A cardinalidade dos conjuntos é representada pela notação $n(A)$ para um conjunto A e representa o número de elementos de A.

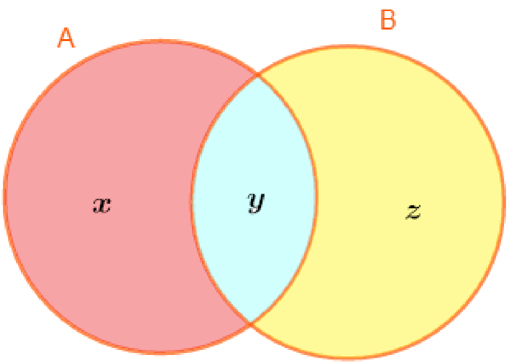
Veja o exemplo:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Quantos elementos o conjunto A possui?

$n(A) = 6$, pois há 6 diferentes elementos no conjunto.

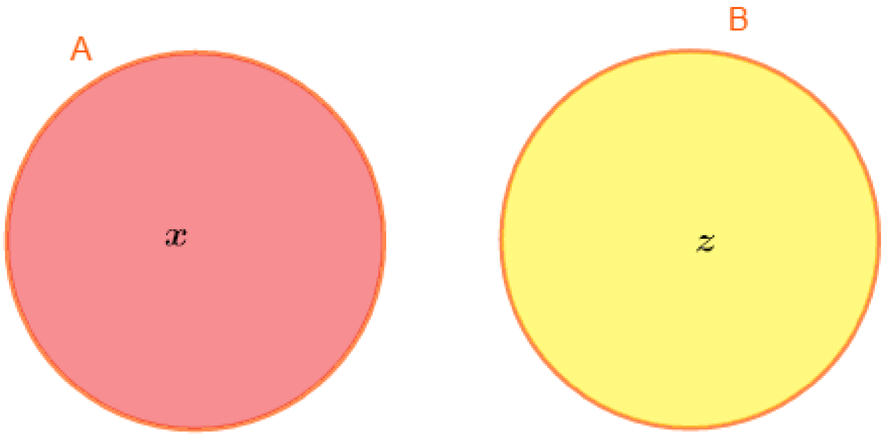
2.6.1. Princípio da Inclusão e Exclusão



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Esta é a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão.

Para conjuntos disjuntos:



Como não há elementos em comum, $n(A \cap B) = 0$. Assim, para conjuntos disjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Essa fórmula serve para dois conjuntos, podemos usá-la para encontrar a fórmula para três conjuntos.

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

Para quatro conjuntos, a fórmula é dada por:

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C \cup D) &= [n(A) + n(B) + n(C) + n(D)] \\ &- [n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(A \cap D) + n(B \cap C) + n(B \cap D) + n(C \cap D)] \\ &+ [n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D)] \\ &- [n(A \cap B \cap C \cap D)] \end{aligned}$$

Cardinalidade do conjunto das partes

Seja $P(A)$, o conjunto das partes de A, sendo A um conjunto finito com $n(A)$ elementos. Sua cardinalidade é dada por:

$$n(P(A)) = 2^{n(A)}$$

A prova para essa fórmula poderá ser feita pelo Princípio Fundamental da Contagem que será aprendida na aula de Análise Combinatória.

2.7. Conjuntos Numéricos

Antes de finalizarmos, vamos estudar um breve conceito sobre conjuntos numéricos e como eles podem ser organizados.

Os números podem ser divididos em conjuntos. Vamos estudar o primeiro deles.

2.7.1 Conjunto dos Números Naturais ($\mathbb{N}$)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

O conjunto dos números naturais é definido por todos os números não-negativos e inteiros. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{N}$. Eles vão do intervalo de 0 até o infinito e foram criados para contar e ordenar.

2.7.2. Conjunto dos Números Inteiros ($\mathbb{Z}$)

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

O conjunto dos números inteiros é a união do conjunto dos números naturais com os números inteiros negativos. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Z}$. Eles são a extensão do conjunto dos números naturais. Podemos afirmar $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2.7.3. Conjunto dos Números Racionais ($\mathbb{Q}$)

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle| a, b \in \mathbb{Z}\right\}$$

O conjunto dos números racionais inclui os números inteiros e os números fracionários. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{Q}$. Números fracionários são números que não podem ser escritos como um valor inteiro, por exemplo:

$$\frac{3}{2} = 1{,}5$$

Esse número é considerado um número fracionário.

Podemos afirmar $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.7.4. Conjunto dos Números Irracionais ($\mathbb{I}$)

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$$

O conjunto dos números irracionais é definido pelos números que não podem ser definidos. Esse conjunto é representado pelo símbolo $\mathbb{I}$. Exemplo:

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562373\dots$$
$$\sqrt{3} = 1{,}732050807568\dots$$

Perceba que esses números não possuem um padrão nos números após a vírgula, não sabemos quanto eles valem exatamente.

2.7.5. Conjunto dos Números Reais ($\mathbb{R}$)

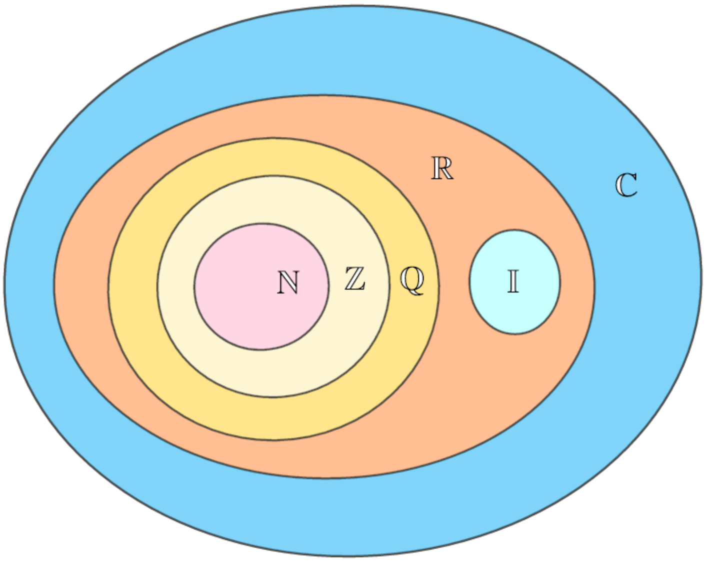
$$\mathbb{R} = \mathbb{I} \cup \mathbb{Q}$$

O conjunto dos números reais é representado pelo símbolo $\mathbb{R}$. Ele é a união do conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais.

2.7.6. Conjunto dos Números Complexos ($\mathbb{C}$)

O conjunto dos números complexos é formado pelos números reais e, também, pelos números que não podem ser representados pelo conjunto dos números reais. Estes são considerados como números imaginários. Podemos entendê-lo como a extensão dos números reais. Veremos mais adiante o estudo detalhado dos números complexos.

Pelo que vimos até aqui, podemos representar os conjuntos numéricos pelo Diagrama de Venn-Euler abaixo:



2.7.7. Notações úteis

Podemos restringir um conjunto numérico usando alguns símbolos em sua nomenclatura. Vamos tomar o conjunto dos números inteiros como exemplo.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

Quando colocamos o asterisco "*" no conjunto dos números inteiros, excluímos desse conjunto o valor nulo ou número 0. Esse conjunto é chamado de inteiros não-nulos.

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros positivos.

O símbolo + escrito no símbolo $\mathbb{Z}$ indica que queremos apenas os números não negativos.

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Conjunto dos números inteiros positivos não-nulos.

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

Conjunto dos números inteiros negativos.

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -3, -2, -1\}$$

Conjunto dos números inteiros negativos não-nulos.

4. Questões de Provas Anteriores

8. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy : x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

9. (ITA/2013)

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A\backslash(B \cap C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$,

II. $(A \cap C)\backslash B = A \cap B^C \cap C$,

III. $(A\backslash B) \cap (B\backslash C) = (A\backslash B)\backslash C$,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas I e II.

d) Apenas I e III.

e) Todas.

10. (ITA/2012)

Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

11. (ITA/2012)

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) Um único valor.

b) Apenas dois valores distintos.

c) Apenas três valores distintos.

d) Apenas quatro valores distintos.

e) Mais do que quatro valores distintos.

12. (ITA/2012)

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A\backslash B^C)\backslash C^C = A \cap (B \cup C)$,

II. $(A\backslash B^C)\backslash C = A \cup (B \cap C^C)^C$,

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

É (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e III.

13. (ITA/2011)

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = A$.

14. (ITA/2011)

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C: C \subset B\backslash A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único,

II. $n(B) + n(A) \leq 128$,

III. A dupla ordenada $\left(n(A), n(B)\right)$ é única,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) Nenhuma.

15. (ITA/2010/Modificada)

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B, n(B\backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B), n(A \cup B) = 22$ e $[n(A)]^2 = n(B).n(C)$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n\left(P(B\backslash C)\right)$.

16. (ITA/2010)

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = (A \cup B)\backslash(A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Nenhuma.

17. (ITA/2009)

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C \backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

e) 8.

18. (ITA/2008)

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$.

Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$

c) $\{1, 3, 7, 8\}$

d) $\{1, 3\}$

e) $\{7, 8\}$

19. (ITA/2007/Modificada)

Se A, B, C forem conjuntos tais que

$$n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10,$$

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$,

Encontre os valores de $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$.

20. (ITA/2006)

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}

b) $n/2$, se n for par, e $(n+1)/2$ se n for ímpar

c) $n+1$

d) $2^n - 1$

e) $2^{n-1}+1$

21. ITA/2005/Modificada)

Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}, T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

22. (ITA/2004)

Seja o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \; e \frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) I

e) II

23. (ITA/2004)

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I e III.

b) Apenas II e IV.

c) Apenas II e III.

d) Apenas IV.

e) Todas as afirmações.

24. (ITA/2003)

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U, B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

25. (ITA/2002)

Sejam *A* um conjunto com 8 elementos e *B* um conjunto tal que $A \, U \, B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A) \, U \, P(\emptyset)$ é igual a

a) 8.

b) 16.

c) 20.

d) 17.

e) 9.

26. (ITA/2001)

Sejam $X, Y \, e \, Z$ subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I) $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$

II) Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$

III) Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$

Temos que:

a) Apenas (I) é verdadeira.

b) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.

c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) Todas são verdadeiras.

27. (ITA/2000)

Denotamos por $n(x)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam $A, B \, e \, C$ conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8, n(A \cup C) = 9, n(B \cup C) = 10, n(A \cup B \cup C) = 11 \, e \, n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11.

b) 14.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

28. (ITA/1996)

Analise as afirmações:

I) $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$

II) $(A - B^C)^C = B - A^C$

III) $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

29. (ITA/1987)

Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.

b) Se $F \cap G = \emptyset$, então necessariamente $G \subset F$.

c) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.

d) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.

e) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$

30. (ITA/1985/Modificada)

Sejam X um conjunto não vazio e A e B dois subconjuntos. Analise as afirmações:

I. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$

II. $A - \emptyset = A \; e \; A - B = A - (A \cap B)$

III. $A - B \neq A \cap \bar{B}$

31. (IME/2016)

Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G - H$ é igual ao conjunto:

a) $(G \cup F) - (F - H)$

b) $(G \cup H) - (H - F)$

c) $\left(G \cup (H - F)\right) \cap \bar{H}$

d) $\bar{G} \cup (H \cap F)$

e) $(\bar{H} \cap G) \cap (G - F)$

32. (IME/2010)

Sejam os conjuntos P_1, P_2, S_1 e S_2 tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1, (P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

33. (IME/2009)

Sejam dois conjuntos, X e Y, e a operação Δ, definida por $X\Delta\, Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Pode-se afirmar que

a) $(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$

b) $(X\Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$

c) $(X\Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$

d) $(X\Delta Y) \cup (X - Y) = X$

e) $(X\Delta Y) \cup (Y - X) = X$

5. Gabarito

GABARITO

8. e
9. c
10. $\nexists n$ que satisfaça as condições do problema.
11. a
12. c
13. Não existem conjuntos não-vazios que satisfaçam a relação.
14. a
15. a) $n(C) = 4$ b) $n\big(P(B\backslash C)\big) = 4096$
16. e
17. c
18. c
19. $n(A) = 11, n(A \cup C) = 21\ e\ n(A \cup B \cup C) = 31.$
20. c
21. Ambas são falsas.
22. d
23. c
24. Demonstração
25. b
26. b
27. d
28. I) V II) F III) F
29. d
30. I) V II) V III) F
31. c
32. Prova
33. a

6. Lista de Questões Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

8. (ITA/2017)

Sejam $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$. Se $C = \{xy: x \in A \text{ e } y \in B\}$, então o número de elementos de C é

a) 10.

b) 11.

c) 12.

d) 13.

e) 14.

Comentários

A questão pede o número de elementos de C que é definido por $\{xy: x \in A\ e\ y \in B\}$.

Os elementos do conjunto C serão os elementos formados pela multiplicação dos elementos de A com os elementos de B. Então, vamos encontrar os elementos de C que são todos os diferentes valores obtidos pela combinação dos elementos de A com os elementos de B.

Para $x = 1$:

$$C_1 = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$$

Para $x = 2$:

$$C_2 = \{-2, -4, -6, -8, -10\}$$

Para $x = 3$:

$$C_3 = \{-3, -6, -9, -12, -15\}$$

Para $x = 4$:

$$C_4 = \{-4, -8, -12, -16, -20\}$$

Para $x = 5$:

$$C_5 = \{-5, -10, -15, -20, -25\}$$

Agora, juntando todos os elementos diferentes para obter o conjunto C:

$$C = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -8, -9, -10, -12, -15, -16, -20, -25\}$$

Portanto, $n(C) = 14$.

Gabarito: "e".

---

9. (ITA/2013)

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,

II. $(A \cap C) \setminus B = A \cap B^C \cap C$,

III. $(A \setminus B) \cap (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas I e II.

d) Apenas I e III.

e) Todas.

Comentários

I. Verdadeira.

$$A\backslash(B \cap C) = A \cap (B \cap C)^C$$

Usando o Teorema de De Morgan:

$$A \cap (B \cap C)^C = A \cap (B^C \cup C^C)$$

Aplicando distributiva:

$$(A \cap B^C) \cup (A \cap C^C) = (A\backslash B) \cup (A\backslash C)$$

II. Verdadeira.

$$(A \cap C)\backslash B = (A \cap C) \cap B^C$$

III. Falsa.

$$(A\backslash B) \cap (B\backslash C) = (A \cap B^C) \cap (B \cap C^C)$$

Como o operador é igual entre cada conjunto, podemos usar a propriedade da associativa:

$$(A \cap B^C) \cap (B \cap C^C) = A \cap (B^C \cap B) \cap C^C = A \cap \emptyset \cap C^C = \emptyset$$

Gabarito: "c".

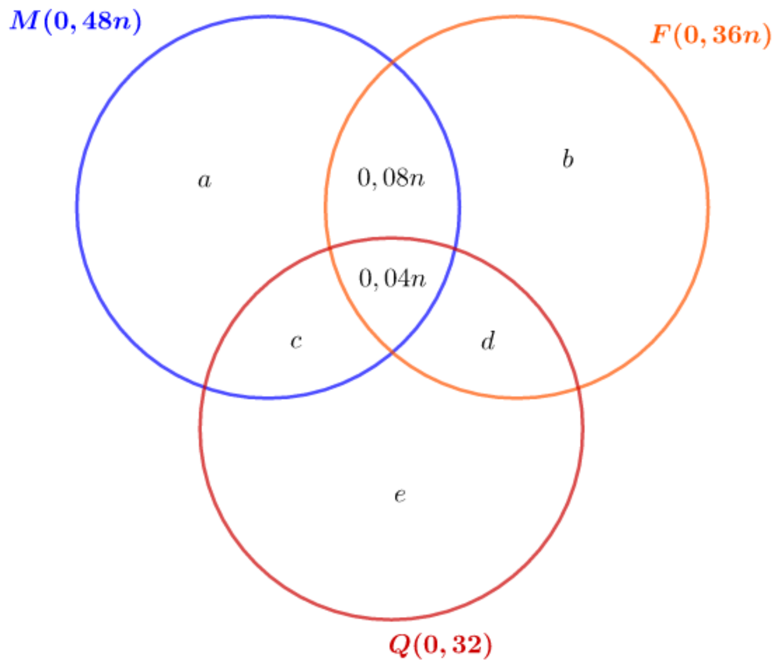
---

10. (ITA/2012)

Dos n alunos de um colégio, cada um estuda pelo menos uma das três matérias: Matemática, Física e Química. Sabe-se que 48% dos alunos estudam Matemática, 32% estudam Química e 36% estudam Física. Sabe-se, ainda, que 8% dos alunos estudam apenas Física e Matemática, enquanto 4% estudam todas as três matérias. Os alunos que estudam apenas Química e Física mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química totalizam 63 estudantes. Determine n.

Comentários

Das informações do enunciado, podemos criar o seguinte Diagrama de Venn-Euler:



Legenda:
M – Matemática
F – Física
Q – Química
n é a quantidade de elementos no conjunto
$0{,}04n$ representa os 4% dos alunos que estudam todas as três matérias

Lembrando: 4% pode ser escrito como $\frac{4}{100}$ (forma fracionária).

Quando calculamos a porcentagem de um número, multiplicamos o valor da porcentagem pelo número. Por exemplo:

Pedro recebe $R\$1.000{,}00$ de salário por mês. Quanto vale 50% do seu salário?

Primeiro transformamos o número 50% na forma fracionária $\frac{50}{100}$ e podemos ainda resolver essa fração e encontrar $\frac{50}{100} = 0{,}5$. Agora, multiplicamos esse número pelo valor do salário: $0{,}5 \cdot 1000 = 50 \cdot 10 = 500$. Esse é o valor que representa 50% do salário de Pedro.

Voltando à questão, 4% será escrito na forma fracionária $\frac{4}{100} = 0{,}04$. n é o valor que representa a quantidade de todos os alunos do colégio. Assim, 4% dos alunos pode ser escrito como $0{,}04n$.

$0{,}08n$ representa os 8% dos alunos que estudam apenas Física e Matemática
$0{,}48n$ representa o total de alunos que estudam Matemática
$0{,}32n$ representa o total de alunos que estudam Química
$0{,}36n$ representa o total de alunos que estudam Física
Usando os dados do diagrama, podemos criar as seguintes equações:

$$\begin{cases} a + c + 0{,}04n + 0{,}08n = 0{,}48n \\ b + d + 0{,}04n + 0{,}08n = 0{,}36n \\ c + d + e + 0{,}04n = 0{,}32n \end{cases}$$

Simplificando:

$$\begin{cases} a + c + 0{,}12n = 0{,}48n \\ b + d + 0{,}12n = 0{,}36n \\ c + d + e + 0{,}04n = 0{,}32n \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + c = 0{,}36n \\ b + d = 0{,}24n \\ c + d + e = 0{,}28n \end{cases}$$

O enunciado afirma que os alunos que estudam apenas Química e Física (d) mais aqueles que estudam apenas Matemática e Química (c) totalizam 63 estudantes. Assim:

$$c + d = 63$$

Somando todas as equações, obtemos:

$$(a + c) + (b + d) + (c + d + e) = 0{,}36n + 0{,}24n + 0{,}28n$$

Reorganizando os termos e fazendo $c + d = 63$:

$$a + b + e + 2(c + d) = 0{,}88n$$
$$a + b + e = 0{,}88n - 2 \cdot 63 = 0{,}88n - 126$$
$$I)\ a + b + e = 0{,}88n - 126$$

Agora vamos somar os elementos usando os dados do diagrama de Venn-Euler:

$$a + b + c + d + e + 0{,}04n + 0{,}08n = n$$

Substituindo $c + d = 63$:

$$a + b + e + 63 + 0{,}12n = n$$
$$II)\ a + b + e = 0{,}88n - 63$$

Veja que a equação (I) e (II) possuem as mesmas variáveis, porém diferentes resultados.

Portanto, não existe n que satisfaz o problema.

Gabarito: $\nexists n$ que satisfaça as condições do problema.

---

11. (ITA/2012)

Sejam A e B dois conjuntos disjuntos, ambos finitos e não vazios, tais que $n\big(P(A) \cup P(B)\big) + 1 = n\big(P(A \cup B)\big)$. Então, a diferença $n(A) - n(B)$ pode assumir

a) Um único valor.

b) Apenas dois valores distintos.

c) Apenas três valores distintos.

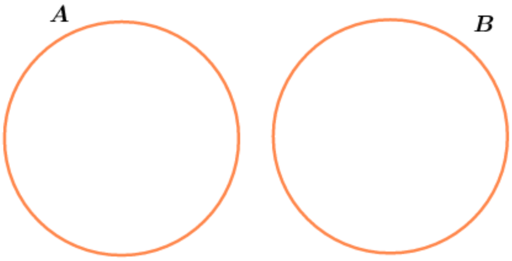
d) Apenas quatro valores distintos.

e) Mais do que quatro valores distintos.

Comentários

A e B são conjuntos disjuntos, logo $A \cap B = \emptyset$.

Temos a seguinte situação:



Considere que A tem x elementos e B tem y elementos.

Temos que calcular $n(A) - n(B)$.

Vamos usar $n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$ da questão.

Sabemos que $n(P(A)) = 2^x$ e $n(P(B)) = 2^y$

Veja que $P(A) \cup P(B)$ é a união do conjunto das partes de 2 subconjuntos. Perceba que $\emptyset$ é elemento de $P(A)$ e de $P(B)$ ao mesmo tempo. Então:

$$n(P(A) \cup P(B)) = 2^x + 2^y - 1$$

Subtraímos 1 da equação acima porque o elemento $\emptyset$ está presente em $P(A)$ e $P(B)$.

O número de elementos de $A \cup B$ é $x + y$ já que eles são disjuntos. Logo:

$$n(P(A \cup B)) = 2^{x+y}$$
$$n(P(A) \cup P(B)) + 1 = n(P(A \cup B))$$
$$2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y}$$

*Não se preocupe se você não souber calcular essa equação por enquanto, vamos aprender a resolvê-la na aula de exponencial.

Vamos simplificar a equação:

$$2^x + 2^y - 1 + 1 = 2^{x+y}$$
$$1 = 2^{x+y} - 2^x - 2^y + 1$$
$$1 = 2^{x+y} - 2^x - 2^y + 1$$
$$1 = 2^x(2^y - 1) - (2^y - 1)$$
$$1 = (2^x - 1)(2^y - 1)$$

Como $x, y \geq 0$, a única solução possível para essa equação é $x = 1\ e\ y = 1$.

Logo, $n(A) - n(B) = 1 - 1 = 0$.

Gabarito: “a”.

---

12. (ITA/2012)

Sejam A, B e C subconjuntos de um conjunto universo U. Das afirmações:

I. $(A \backslash B^C) \backslash C^C = A \cap (B \cup C)$,

II. $(A \backslash B^C) \backslash C = A \cup (B \cap C^C)^C$,

III. $B^C \cup C^C = (B \cap C)^C$,

É (são) sempre verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e III.

e) II e III.

Comentários

I. Falsa.

Vamos simplificar $(A\backslash B^C)\backslash C^C$:

$$(A\backslash B^C)\backslash C^C = (A \cap (B^C)^C \cap (C^C)^C) = (A \cap B \cap C) \neq A \cap (B \cup C)$$

II. Falsa.
Vamos aplicar o Teorema de De Morgan $(B \cap C^C)^C$:

$$A \cup (B \cap C^C)^C = A \cup (B^C \cup (C^C)^C) = A \cup (B^C \cup C) = A \cup B^C \cup C$$

III. Verdadeira.
Aplicando o Teorema de De Morgan:

$$(B \cap C)^C = B^C \cup C^C$$

Gabarito: "c".

---

13. (ITA/2011)

Analise a existência de conjuntos A e B, ambos não-vazios, tais que $(A\backslash B) \cup (B\backslash A) = A$.

Comentários

$$(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

$$\Leftrightarrow (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C) \xLeftrightarrow[Distributiva]{} [(A \cap B^C) \cup B] \cap [(A \cap B^C) \cup A^C]$$

$$\xLeftrightarrow[Distributiva]{} [(A \cup B) \cap (B^C \cup B)] \cap [(A \cup A^C) \cap (B^C \cup A^C)]$$

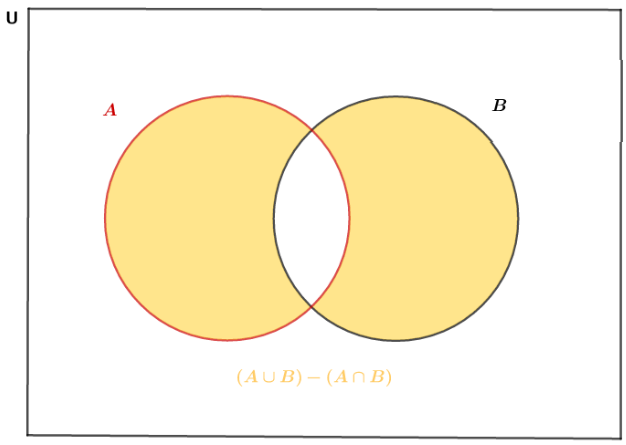
$$\Leftrightarrow [(A \cup B) \cap T] \cap [T \cap (B^C \cup A^C)]$$

$$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap (B^C \cup A^C) \xLeftrightarrow[De\ Morgan]{} (A \cup B) \cap (B \cap A)^C \Leftrightarrow (A \cup B) - (B \cap A)$$

A questão pede conjuntos não vazios A, B tal que $(A \cup B) - (A \cap B) = A$.

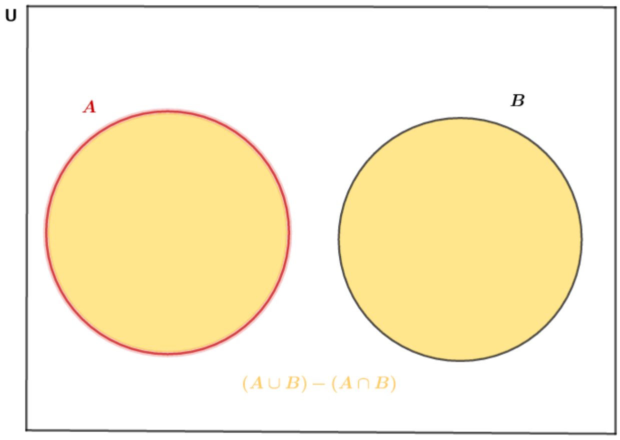
Vamos usar o Diagrama de Venn para representar todos os casos possíveis para $(A \cup B) - (A \cap B)$.

1) A e B não são disjuntos.



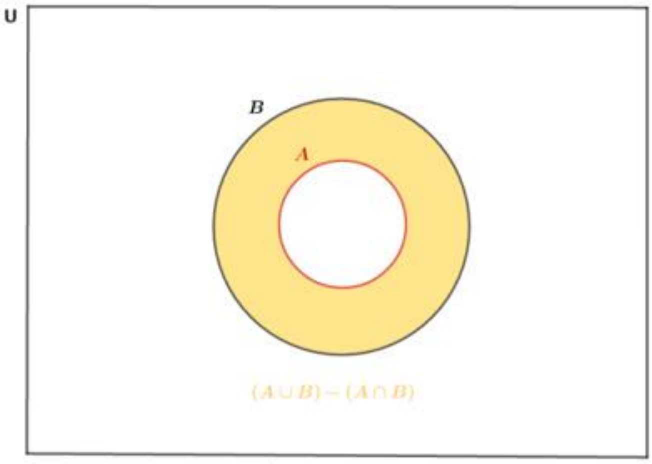
A região em amarelo representa $(A \cup B) - (A \cap B)$. Veja que ela não satisfaz a condição $(A \cup B) - (A \cap B) = A$, já que B é não vazio. Logo, nesse caso não temos solução.

2) A e B são disjuntos.



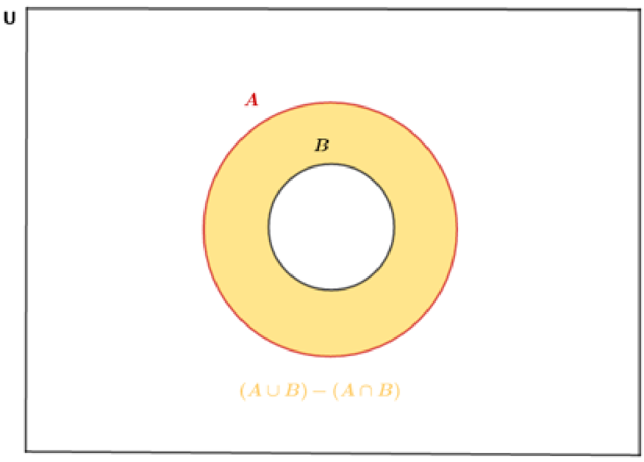
Esse caso também não satisfaz a condição já que B é um conjunto não vazio. Logo, não tem solução.

3) $A \subset B$.



B é um conjunto não vazio⇒não temos solução.

4) $B \subset A$.



B é um conjunto não vazio⇒não temos solução.

Gabarito: Não existem conjuntos não vazios que satisfaçam a relação.

14. (ITA/2011)

Sejam A e B conjuntos finitos e não vazios tais que $A \subset B$ e $n(\{C: C \subset B \backslash A\}) = 128$. Então, das afirmações abaixo:

I. $n(B) - n(A)$ é único,

II. $n(B) + n(A) \leq 128$,

III. A dupla ordenada $(n(A), n(B))$ é única,

É (são) verdadeira(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e II.

e) Nenhuma.

Comentários

Para analisar as afirmações precisamos traduzir o enunciado.

Vamos traduzir $n(\{C: C \subset B \backslash A\}) = 128$

Ele diz que o número de elementos do conjunto $\{C: C \subset B \backslash A\}$ vale 128.

O que é o conjunto $\{C: C \subset B \backslash A\}$?

Ele diz que os elementos desse conjunto são os subconjuntos C tal que C está contido em $B \backslash A$. Então, ele representa o conjunto das partes de $B \backslash A$. Desse modo: $\{C: C \subset B \backslash A\} = P(B \backslash A)$

Logo, $n[P(B \backslash A)] = 128$

Mas 128 pode ser escrito como 2^7.

$$n[P(B \backslash A)] = 2^7 = 2^{n(B \backslash A)} \Rightarrow n(B \backslash A) = 7$$

O enunciado diz que $A \subset B$. Assim, quando fazemos $B \backslash A = B - A$, devemos remover todos os elementos de A presentes em B. Desse modo, podemos escrever:

$$n(B \backslash A) = n(B) - n(A) = 7$$

I. Verdadeira.

Conforme analisado acima, a afirmação é verdadeira já que $n(B) - n(A)$ possui um único valor.

II. Falsa.

A única condição do enunciado é $n(B) - n(A) = 7$. Então, se tomarmos $n(B) = 87$ e $n(A) = 80$, encontramos $n(B) + n(A) = 167 > 128$.

III. Falsa.

Podemos ter uma infinidade de duplas ordenadas que satisfazem as condições do problema $n(B) - n(A) = 7$.

Gabarito: "a".

---

15. (ITA/2010/Modificada)

Sejam A, B e C conjuntos tais que $C \subset B, n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B), n(A \cup B) = 22$ e $[n(A)]^2 = n(B) \cdot n(C)$.

a) Determine $n(C)$.

b) Determine $n\big(P(B \backslash C)\big)$.

Comentários

a) Pelo enunciado, como $C \subset B$ temos: $n(B \cap C) = n(C)$.

Sabemos que $n(B \backslash C) = n(B) - n(B \cap C)$. Substituindo na equação $n(B \cap C) = n(C)$:

$$n(B \backslash C) = n(B) - n(C)$$

Mas $n(B \backslash C) = 3n(B \cap C) = 6n(A \cap B) \Rightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) = 6n(A \cap B)$

$$\Rightarrow n(B) - n(C) = 3n(C) \Rightarrow n(B) = 4n(C)$$

$$\Rightarrow 3n(C) = 6n(A \cap B) \Rightarrow n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$$

Só falta descobrir o valor de $n(A)$ usando $[n(A)]^2 = n(B) \cdot n(C)$.
Substituindo $n(B) = 4n(C)$:

$$[n(A)]^2 = 4n(C) \cdot n(C) \Rightarrow [n(A)]^2 = 4[n(C)]^2$$

Aplicando a raiz quadrada nos dois lados:

$$\Rightarrow n(A) = 2n(C)$$

Vamos chamar $n(C)$ de x e usar a fórmula dos conjuntos $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.
Substituindo os valores de $n(A \cup B) = 22, n(A) = 2n(C), n(B) = 4n(C), n(A \cap B) = \frac{n(C)}{2}$ e $n(C) = x$ na fórmula:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

$$22 = 2x + 4x - \frac{x}{2} \Rightarrow 22 = \frac{11x}{2} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow n(C) = 4$$

b) Usando a fórmula de cardinalidade para o conjunto das partes:

$$n\big(P(B \backslash C)\big) = 2^{n(B \backslash C)}$$

$$n(B \backslash C) = 6n(A \cap B) = 3n(C) = 3 \cdot 4 = 12$$

Portanto:

$$n\big(P(B \backslash C)\big) = 2^{n(B \backslash C)} = 2^{12} = 4096$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{n(C) = 4}$ b) $\boldsymbol{n\big(P(B \backslash C)\big) = 4096}$.

---

16. (ITA/2010)

Considere as afirmações abaixo relativas a conjuntos A, B e C quaisquer:

I. A negação de $x \in A \cap B$ é: $x \notin A$ ou $x \notin B$.

II. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

III. $(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.

Destas, é (são) falsa(s)

a) Apenas I.

b) Apenas II.

c) Apenas III.

d) Apenas I e III.

e) Nenhuma.

Comentários

I. Verdadeira.
A negação é dada por: $x \notin A \cap B$
Isso é equivalente a: $x \in \overline{A \cap B}$
Podemos aplicar o Teorema de De Morgan no conjunto $\overline{A \cap B}$.

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

Desse modo $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Isso significa que $x \in \bar{A}\ ou\ x \in \bar{B} \Leftrightarrow x \notin A\ ou\ x \notin B$.
II. Verdadeira.
Basta aplicar a propriedade da distributiva dos conjuntos.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

III. Verdadeira.

$$(A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$$

Vamos desenvolver o conjunto $(A \cup B)\backslash(A \cap B)$ e tentar chegar ao conjunto $(A\backslash B) \cup (B\backslash A)$.

Lembrando que para o operador diferença temos: $A - B = A\backslash B = A \cap \bar{B}$. Usando essa igualdade para desenvolver o conjunto:

$$(A \cup B)\backslash(A \cap B) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)}$$

Aplicando o Teorema de De Morgan:

$$(A \cup B) \cap (\overline{A \cap B}) = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$$

Usando a distributiva:

$$(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = [(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}]$$

Usando novamente a distributiva:

$$[(A \cup B) \cap \bar{A}] \cup [(A \cup B) \cap \bar{B}] = [(A \cap \bar{A}) \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup (B \cap \bar{B})]$$

$$= [\emptyset \cup (B \cap \bar{A})] \cup [(A \cap \bar{B}) \cup \emptyset] = (B \cap \bar{A}) \cup (A \cap \bar{B}) = (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$$

Gabarito: "e".

---

17. (ITA/2009)

Sejam A e B subconjuntos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Sabendo que $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$, $B^C \cap A = \{a, b\}$ e $A^C\backslash B = \{d, e\}$, então, $n(P(A \cap B))$ é igual a

a) 0.

b) 1.

c) 2.

d) 4.

e) 8.

Comentários

Vamos usar as informações do enunciado para encontrar alguma relação.

Primeiro, usando $(B^C \cup A)^C = \{f, g, h\}$:

Simplificando $(B^C \cup A)^C$ usando as propriedades dos conjuntos:

$$(B^C \cup A)^C = (B^C)^C \cap A^C = B \cap A^C$$

$$\Rightarrow (B \cap A^C) = \{f, g, h\}$$

Agora para $B^C \cap A = \{a, b\}$:

Sabemos pelas propriedades que $B^C \cap A = A \cap B^C$

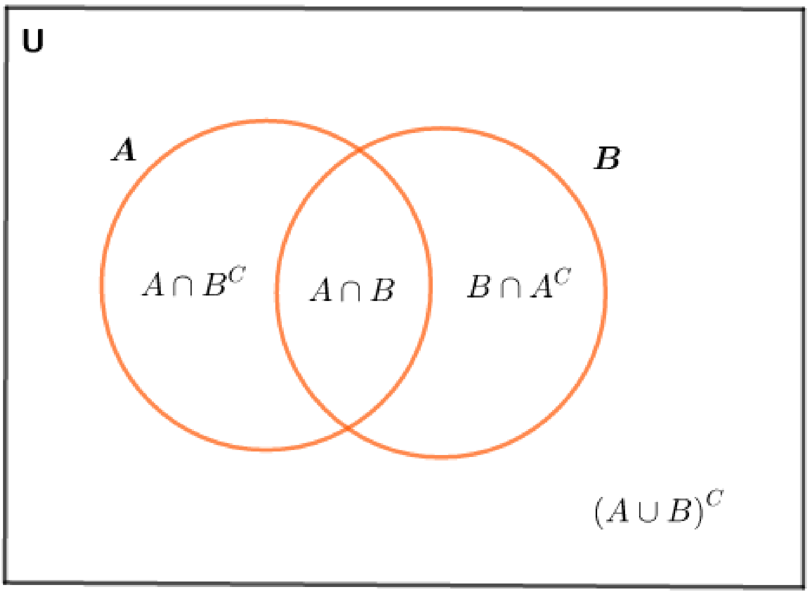
$$\Rightarrow A \cap B^C = \{a, b\}$$

Por último, vamos analisar $A^C\backslash B = \{d, e\}$. Vamos simplificar $A^C\backslash B$ usando as propriedades dos conjuntos:

$$A^C\backslash B = A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$$

$$\Rightarrow (A \cup B)^C = \{d, e\}$$

Vamos usar o Diagrama de Venn-Euler para ilustrar a situação:



Perceba que não sabemos quais os elementos de $A \cap B$. Porém, conhecemos os elementos do conjunto universo $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$. Usando as informações do diagrama, temos a seguinte relação:

$$U = (A \cap B^C) \cup (A \cap B) \cup (B \cap A^C) \cup (A \cup B)^C$$

Agora, usando as informações que encontramos:

$$\Rightarrow (B \cap A^C) = \{f, g, h\}$$
$$\Rightarrow (A \cap B^C) = \{a, b\}$$
$$\Rightarrow (A \cup B)^C = \{d, e\}$$

Substituindo na relação, obtemos:

$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{a, b\} \cup (A \cap B) \cup \{f, g, h\} \cup \{d, e\} = \{a, b, d, e, f, g, h\} \cup (A \cap B)$

Veja:

$$\{a, b, c, d, e, f, g, h\} = \{a, b, d, e, f, g, h\} \cup (A \cap B)$$

O único elemento que falta em $\{a, b, d, e, f, g, h\}$ é c. Portanto $(A \cap B) = \{c\}$.

A questão pede o número de elementos do conjunto das partes de $A \cap B$. Sabemos que esse valor é dado por $n\big(P(A \cap B)\big) = 2^{n(A \cap B)}$

Portanto:

$$n\big(P(A \cap B)\big) = 2^1 = 2$$

Gabarito: "c".

---

18. (ITA/2008)

Sejam X, Y, Z, W subconjuntos de $\mathbb{N}$ tais que $(X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{5, 6\}$, $Z \cap Y = \emptyset$, $W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$, $X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$.

Então o conjunto $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$ é igual a

a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

b) $\{1, 2, 3, 4, 7\}$

c) $\{1, 3, 7, 8\}$

d) $\{1, 3\}$

e) $\{7, 8\}$

Comentários

Primeiramente, vamos escrever as informações do exercício:

$$i)\ (X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$ii)\ Y = \{5, 6\}$$
$$iii)\ Z \cap Y = \emptyset$$
$$iv)\ W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$$
$$v)\ X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$$

A questão pede $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$, vamos encontrar o valor de cada conjunto X, Y, Z, W usando os dados do problema.

Já sabemos que de (ii) que $Y = \{5, 6\}$.

Vamos analisar o conjunto (i):

$$i)\ (X - Y) \cap Z = \{1, 2, 3, 4\}$$

O conjunto acima nos permite descobrir os elementos que pertencem a X e Z.

Vamos separar em duas partes: $(X - Y)\ e\ Z$

Veja a intersecção $\cap Z$, isso nos permite afirmar que os elementos de (i) estão no conjunto Z:

$$\{1, 2, 3, 4\} \subset Z$$

A primeira parte $(X - Y)$ nos permite dizer que os elementos de X que não estão em Y é:

$$\{1, 2, 3, 4\} \subset X$$

Agora, vamos analisar $(iii)\ Z \cap Y = \emptyset$:

Ela diz que Z não possui elementos em comum com Y, assim $\{5, 6\}$ não pertence a Z.

Usando $(iv)\ W \cap (X - Z) = \{7, 8\}$:

Situação análoga a (i). Podemos separar em duas partes e encontrar os elementos de cada um:

Assim, $\{7, 8\} \subset W$

$$W \cap (X - Z) \Rightarrow \{7, 8\} \subset X \Rightarrow \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} \subset X$$

Usando a última informação $(v)\ X \cap W \cap Z = \{2, 4\}$:

Isso nos permite afirmar $\{2, 4\} \subset X, Z, W$:

$$X = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$
$$Y = \{5, 6\}$$
$$Z = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$W = \{2, 4, 7, 8\}$$

A questão pede $[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)]$:

$$(Z \cup W) = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$
$$X \cap (Z \cup W) = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$$
$$(Y \cup Z) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$W \cap (Y \cup Z) = \{2, 4\}$$
$$[X \cap (Z \cup W)] - [W \cap (Y \cup Z)] = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\} - \{2, 4\} = \{1, 3, 7, 8\}$$

Esse modo de resolver seria o modo como eu resolveria durante a prova. Já que é uma questão de múltipla escolha, não devemos perder tempo com formalidades.

Gabarito: "c".

---

19. (ITA/2007/Modificada)

Se A, B, C forem conjuntos tais que

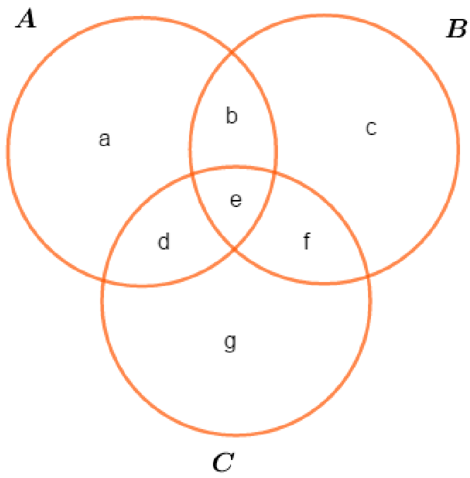
$$n(A \cup B) = 23, n(B - A) = 12, n(C - A) = 10,$$

$n(B \cap C) = 6$ e $n(A \cap B \cap C) = 4$,

Encontre os valores de $n(A), n(A \cup C), n(A \cup B \cup C)$.

Comentários

Vamos resolver usando o Diagrama de Venn-Euler:

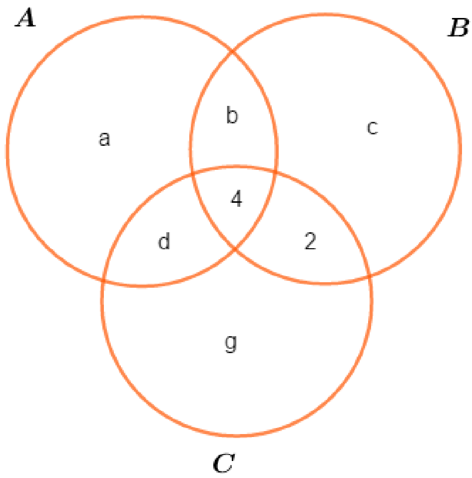


Nomeamos cada região do círculo com letras minúsculas.
Pelo enunciado, vamos descobrir os valores de cada região:

$$n(A \cap B \cap C) = 4 = e$$

$$n(B \cap C) = 6 = e + f \Rightarrow f = 2$$

Agora nosso diagrama fica assim:



Usando as outras informações, temos:

$$n(B - A) = 12$$

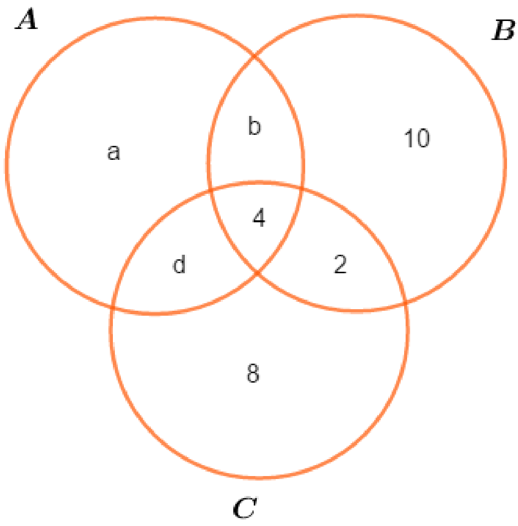
Veja que $n(B - A)$ é igual a $c + 2$ que é a região de elementos de B menos os elementos de A.

$$n(B - A) = c + 2 = 12 \Rightarrow c = 10$$

Agora para $n(C - A) = 10$ usando o mesmo raciocínio:

$$g + 2 = 10 \Rightarrow g = 8$$

Atualizando nosso diagrama:



Falta usar $n(A \cup B) = 23$.

Pela figura:

$$n(A \cup B) = a + b + d + 4 + 10 + 2 = 23$$

Devemos encontrar os valores de $n(A), n(A \cup C)$ e $n(A \cup B \cup C)$.

Note que $a + b + d + 4 = n(A)$. Assim, substituindo $n(A)$ na equação, conseguimos descobrir o valor de $n(A)$.

$$n(A) + 10 + 2 = 23$$
$$n(A) + 12 = 23$$
$$n(A) = 11$$

Vamos encontrar $n(A \cup C)$. Usando o diagrama:

$$n(A \cup C) = a + b + d + 4 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 = n(A) + 10 = 11 + 10 = 21$$
$$\Rightarrow n(A \cup C) = 21$$

Agora o último termo:

$$n(A \cup B \cup C) = a + b + d + 4 + 10 + 2 + 8 = (a + b + d + 4) + 10 + 2 + 8 = n(A) + 20 = 31$$
$$\Rightarrow n(A \cup B \cup C) = 31$$

Gabarito: $\boldsymbol{n(A) = 11, n(A \cup C) = 21}$ *e* $\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = 31}$.

---

20. (ITA/2006)

Seja U um conjunto não vazio com n elementos, $n \geq 1$. Seja S um subconjunto de $P(U)$ com a seguinte propriedade:

Se $A, B \in S$, então $A \subset B$ ou $B \subset A$.

Então, o número máximo de elementos que S pode ter é:

a) 2^{n-1}

b) $n/2$, se n for par, e $(n+1)/2$ se n for ímpar

c) $n + 1$

d) $2^n - 1$

e) $2^{n-1} + 1$

Comentários

Seja $U = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, um conjunto não vazio com n elementos e $n \geq 1$.

Vamos escrever o conjunto das partes de U:

$$P(U) = \{\emptyset, \{a_1\}, \{a_2\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\}$$

S é subconjunto de $P(U)$, isto é, S pode possuir quaisquer elementos de $P(U)$ e deve satisfazer a condição:

Sendo A e B, elementos de S, então A está contido em B ou B está contido em A.

Isto é, se tomarmos, por exemplo:

$A = \{a_1\}$ e $B = \{a_1, a_2\}$, eles são subconjuntos de $P(U)$ e $A \subset B$, pois $\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\}$, logo satisfazem a condição.

Mas, se tomarmos $A = \{a_1\}$ e $B = \{a_2\}$, eles são elementos de $P(U)$ e não satisfazem a condição!

Pois, $\{a_1\} \not\subset \{a_2\}$ *e* $\{a_2\} \not\subset \{a_1\}$.

A condição diz que tomando dois elementos de S, devemos ter que A é subconjunto de B ou B é subconjunto de A.

Essa condição é satisfeita quando os elementos de S sempre possuírem elementos em comum, desse modo:

$$S = \left\{\emptyset, \{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2, a_3\}, \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, \dots, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}\right\}$$

Veja que o elemento $\emptyset$ foi incluído para aumentar o número de elementos de S e maximizar esse valor.

Assim, perceba que o número de elementos será $n + 1$ que é a quantidade de elementos de não vazios somado com o elemento vazio.

Portanto $n(S) = n + 1$.

Gabarito: "c".

---

21. (ITA/2005/Modificada)

Considere os conjuntos $S = \{0, 2, 4, 6\}, T = \{1, 3, 5\}$ e $U = \{0, 1\}$ e as afirmações:

I. $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \emptyset$.

II. $\{2\} \subset S \backslash U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

Comentários

I. Falsa.

A afirmação diz que $\{0\}$ é elemento de S. Isso não é verdade. Quando colocamos 0 entre "{ }", estamos dizendo que o subconjunto $\{0\}$ é elemento de S, o que não é verdade.

A segunda parte pede os elementos em comum entre S e U. Vemos que o único elemento em comum é o 0.

$$S = \{0, 2, 4, 6\}$$
$$U = \{0, 1\}$$

Portanto, $S \cap U = \{0\} \neq \emptyset$

II. Falsa.

$\{2\} \subset S \backslash U$, isso quer dizer que $\{2\}$ é subconjunto do conjunto formado por $S \backslash U$.

Vamos encontrar $S \backslash U$. Essa operação é a diferença $S \backslash U = S - U$.

O único elemento em comum entre S e U é 0, logo devemos remover esse elemento de S:

$$S \backslash U = \{2, 4, 6\}$$

Portanto, $\{2\} \subset \{2, 4, 6\} = S \backslash U$.

Agora, vamos verificar $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.

$S \cap T \cap U$ é a intersecção entre os três conjuntos, então devemos encontrar os elementos presentes nos três conjuntos. Não temos nenhum elemento que satisfaz essa condição, desse modo:

$$S \cap T \cap U = \emptyset$$

Gabarito: Ambas são falsas.

---

22. (ITA/2004)

Seja o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$, sobre o qual são feitas as seguintes afirmações:

I. $\frac{5}{4} \in S \; e \frac{7}{5} \in S$.

II. $\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \emptyset$.

III. $\sqrt{2} \in S$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s) apenas

a) I e II

b) I e III

c) II e III

d) I

e) II

Comentários

Vamos decifrar o conjunto $S = \{r \in Q: r \geq 0 \; e \; r^2 \leq 2\}$.

Ele diz que os elementos de S são representados por r e estes são números racionais (da forma p/q)

A primeira parte da propriedade diz que $r \geq 0$, assim, r é um número positivo.

A segunda parte diz que $r^2 \leq 2$.

Ainda não vimos radiciação, mas não se preocupe, veremos detalhadamente na aula de radiciação.

$$r^2 \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{2} \leq r \leq \sqrt{2}$$

Assim, juntando as duas condições, obtemos:

$$0 \leq r \leq \sqrt{2}$$

I. Verdadeiro.

Precisamos saber se esses elementos estão no intervalo definido por S.

Vamos deixar esses números dentro de uma raiz, pois assim será mais fácil analisá-lo.

Primeiro para $\frac{5}{4}$:

Elevando esse número ao quadrado e jogando dentro de uma raiz, encontramos: $\sqrt{\frac{25}{16}}$

Agora, dividindo 25 por 16:

$$\sqrt{\frac{25}{16}} \sim \sqrt{1{,}5} < \sqrt{2}$$

Lembre-se que não precisamos saber o valor exato do número, basta encontrar um valor que nos permita fazer a comparação. Então não perca tempo com isso!

Agora, fazendo a mesma coisa para $\frac{7}{5}$:

$$\frac{7}{5} = \sqrt{\frac{49}{25}} \sim \sqrt{1{,}9} < \sqrt{2}$$

Logo, os dois números são elementos de S.

II. Falso.

$$\{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap S = \{x \in R: 0 \leq x \leq \sqrt{2}\} \cap \{r \in Q: 0 \leq r \leq \sqrt{2}\} = S$$

A única diferença entre o conjunto dessa afirmação e o conjunto da questão é que os elementos daquela são números reais e estas são números racionais.

III. Falso.

$\sqrt{2}$ é um número irracional, logo ele não pertence ao conjunto S.

Gabarito: "d".

---

23. (ITA/2004)

Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:

I. $\emptyset \in U$ e $n(U) = 10$.

II. $\emptyset \subset U$ e $n(U) = 10$.

III. $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.

IV. $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$.

Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s)

a) Apenas I e III.

b) Apenas II e IV.

c) Apenas II e III.

d) Apenas IV.

e) Todas as afirmações.

Comentários

I. Falsa.

O conjunto U possui 10 elementos, logo $n(U) = 10$.

Atenção! $\emptyset$ não é elemento de U, pois ele não está listado no conjunto!

Assim, $\emptyset \notin U$.

II. Verdadeira.

Pelas propriedades vistas no tópico de subconjuntos, sabemos que $\emptyset$ sempre será subconjunto de qualquer conjunto. Portanto: $\emptyset \subset U$.

III. Verdadeira.

$5 \in U$, pois 5 está enumerado no conjunto U.

$\{5\}$ é subconjunto de U, porque 5 é um dos elementos de U. (Lembre-se que quando colocamos elementos entre chaves "{ }", elas se tornam conjuntos)

IV. Falsa.

Pegadinha! Perceba que faltou colocar chaves "{ }" no elemento 5 no outro lado da igualdade. O correto seria:

$$\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = \{5\}$$

Gabarito: "c".

---

24. (ITA/2003)

Sejam U um conjunto não-vazio e $A \subset U, B \subset U$. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, intersecção e complementar, prove que:

I. Se $A \cap B = \emptyset$, então $B \subset A^C$.

II. $B \backslash A^C = B \cap A$.

Comentários

I. Pela definição de $A \cap B = \emptyset$:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \notin A$$

Podemos escrever $x \notin A$ de outro modo:

$$x \notin A \Leftrightarrow x \in A^C$$

Isto é, se x não é elemento de A, então x é elemento do complemento de A (A^C).

Desse modo:

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \in A^C \Leftrightarrow B \subset A^C \text{ (definição de subconjunto)}$$

II. Pela definição de $B \backslash A^C$:

$$B \backslash A^C = \{x | x \in B \wedge x \notin A^C\}$$

Usando a mesma ideia da (I):

$$x \notin A^C \Leftrightarrow x \in A$$

Logo:

$$B \backslash A^C = \{x | x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

Gabarito: Demonstração

---

25. (ITA/2002)

Sejam A um conjunto com 8 elementos e B um conjunto tal que $A \cup B$ contenha 12 elementos. Então, o número de elementos de $P(B \backslash A) \cup P(\emptyset)$ é igual a

a) 8.

b) 16.

c) 20.

d) 17.

e) 9.

Comentários

A questão diz que $n(A) = 8$ e $n(A \cup B) = 12$. Vamos usar a fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

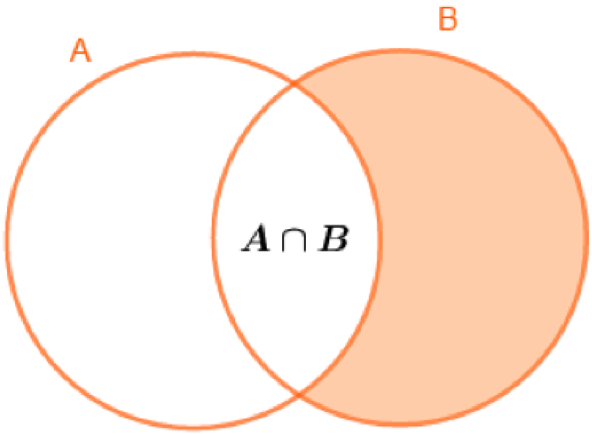
Substituindo os valores na equação:

$$12 = 8 + n(B) - n(A \cap B)$$

Passando o 8 para o outro lado:

$$12 - 8 = n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(B) - n(A \cap B) = 4$$

Perceba que $n(B) - n(A \cap B)$ é $n(B \cap A^C)$:



Mas $(B \cap A^C) = (B \backslash A)$. Logo: $n(B \backslash A) = 4$

Temos que achar $n\big(P(B \backslash A) \cup P(\emptyset)\big)$:

Aplicando a fórmula da cardinalidade para dois conjuntos e substituindo $B \backslash A$ por $B \cap A^C$:

$$n\big(P(B \cap A^C) \cup P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n\big(P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)\big)$$

Vamos simplificar $P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)$.

Isso pode ser feito analisando $P(\emptyset)$. O único subconjunto do conjunto vazio é o próprio $\emptyset$. Logo, a intersecção de $P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset) = P(\emptyset)$, pois pelas propriedades do subconjunto o $\emptyset$ está presente em ambos conjuntos.

Desse modo:

$$n\big(P(B \cap A^C) \cup P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n\big(P(B \cap A^C) \cap P(\emptyset)\big)$$
$$= n\big(P(B \cap A^C)\big) + n\big(P(\emptyset)\big) - n(\big(P(\emptyset)\big) = n\big(P(B \cap A^C)\big) = n\big(P(B \backslash A)\big)$$

Substituindo $n(B \backslash A) = 4$ e usando a fórmula $n\big(P(B \backslash A)\big) = 2^{n(B \backslash A)}$, encontramos:

$$n\big(P(B \backslash A)\big) = 2^4 = 16$$

Gabarito: "b".

---

26. (ITA/2001)

Sejam $X, Y\ e\ Z$ subconjuntos próprios de $\mathbb{R}$, não-vazios. Com respeito às afirmações:

I. $X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$

II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y$

III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$

Temos que:

a) Apenas (I) é verdadeira.

b) Apenas (I) e (II) são verdadeiras.

c) Apenas (I) e (III) são verdadeiras.

d) Apenas (II) e (III) são verdadeiras.

e) Todas são verdadeiras.

Comentários

I) Vamos simplificar a expressão e ver se chegamos à igualdade.

$$X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\}$$
$$X \cap \{[Y \cap (X^C \cap Y^C)] \cup [X \cup ((X^C)^C \cup (Y^C)^C)]\}$$
$$X \cap \{[Y \cap (Y^C \cap X^C)] \cup [X \cup (X \cup Y)]\}$$

$$X \cap \{[(Y \cap Y^C) \cap X^C] \cup (X \cup Y)\}$$
$$X \cap \{[\emptyset \cap X^C] \cup (X \cup Y)\}$$
$$X \cap \{\emptyset \cup (X \cup Y)\}$$
$$X \cap \{X \cup Y\}$$
$$X$$
$$\therefore\ X \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup (X^C \cap Y^C)^C]\} = X$$

Verdadeiro.

II) Vamos simplificar $(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)]$, usando $Z \subset X$:

$$(Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)]$$
$$(Z \cup Y) \cup [(X \cup Z^C) \cap (X \cup Y)]$$

Vamos analisar as propriedades que surgem com $Z \subset X$.
Sabemos que $Z \cup Z^C = \mathbb{R}$.
Como $Z \subset X \Rightarrow X \cup Z^C = \mathbb{R}$.

$$(Z \cup Y) \cup [\mathbb{R} \cap (X \cup Y)]$$
$$(Z \cup Y) \cup (X \cup Y)$$
$$Z \cup Y \cup X \cup Y$$
$$Z \cup Y \cup X$$
$$Z \cup X \cup Y$$
$$Z \subset X \Rightarrow Z \cup X \cup Y = X \cup Y$$
$$\therefore (Z \cup Y) \cup [X \cup (Z^C \cap Y)] = X \cup Y.$$

Verdadeiro.

III) Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$?

Analisando $(X \cup Y)^C \subset Z \Leftrightarrow X^C \cap Y^C \subset Z$. Veja que podemos negar essa afirmação com um exemplo:

Considere $X = \{a\}, Y = \{b\}\ e\ Z = \mathbb{R} - \{a, b\}$.

$$(X \cup Y)^C = \{a, b\}^C = \mathbb{R} - \{a, b\} \subset Z$$

Encontrando Z^C:

$$Z^C = \{a, b\}$$
$$\{a, b\} \not\subset \{a\} = X$$
$$Z^C \not\subset X$$

$\therefore$Falsa.

Gabarito: "b".

---

27. (ITA/2000)

Denotamos por $n(x)$ o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam $A, B\ e\ C$ conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8, n(A \cup C) = 9, n(B \cup C) = 10, n(A \cup B \cup C) = 11\ e\ n(A \cap B \cap C) = 2$. Então, $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a

a) 11.

b) 14.

c) 15.

d) 18.

e) 25.

Comentários

Pela fórmula do Princípio da Inclusão e Exclusão, temos para 3 conjuntos:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)\ \ (i)$$

O enunciado da questão nos dá os valores de $n(A \cup B \cup C)$ e $n(A \cap B \cap C)$ e pede para encontrar $n(A) + n(B) + n(C)$.

Precisamos encontrar uma relação para $n(A \cap B), n(A \cap C)\ e\ n(B \cap C)$.

Vamos usar a fórmula para 2 conjuntos:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Isolando $n(A \cap B)$:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$

Do enunciado $n(A \cup B) = 8$:

$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - 8\ \ (ii)$$

Usando a mesma ideia para $n(A \cup C)\ e\ n(B \cup C)$:

$$n(A \cup C) = n(A) + n(C) - n(A \cap C)$$
$$n(A \cap C) = n(A) + n(C) - n(A \cup C)$$
$$n(A \cup C) = 9$$
$$n(A \cap C) = n(A) + n(C) - 9\ \ (iii)$$
$$n(B \cup C) = n(B) + n(C) - n(B \cap C)$$
$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - n(B \cup C)$$
$$n(B \cup C) = 10$$
$$n(B \cap C) = n(B) + n(C) - 10\ \ (iv)$$

Juntando (ii), (iii), (iv) em (i) e usando $n(A \cup B \cup C) = 11\ e\ n(A \cap B \cap C) = 2$:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$
$$11 = n(A) + n(B) + n(C) - [n(A) + n(B) - 8] - [n(A) + n(C) - 9] - [n(B) + n(C) - 10] + 2$$
$$11 = n(A) + n(B) + n(C) - n(A) - n(B) + 8 - n(A) - n(C) + 9 - n(B) - n(C) + 10 + 2$$
$$11 = 29 - n(A) - n(B) - n(C)$$
$$n(A) + n(B) + n(C) = 29 - 11 = 18$$

Gabarito: "d".

---

28. (ITA/1996)

Analise as afirmações:

I. $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \emptyset$

II. $(A - B^C)^C = B - A^C$

III. $[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = A$

Comentários

I. V.

$$(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = (A \cap B^C)^C \cap (B^C \cap A) = (A^C \cup B) \cap (B^C \cap A) = [(A^C \cup B) \cap B^C] \cap A$$
$$= [(A^C \cap B^C) \cup (B \cap B^C)] \cap A = [(A^C \cap B^C) \cup \emptyset] \cap A = (A^C \cap B^C) \cap A$$
$$= A \cap (A^C \cap B^C) = (A \cap A^C) \cap B^C = \emptyset \cap B^C = \emptyset$$

II. F.

$$(A - B^C)^C = [(A \cap (B^C)^C]^C = (A \cap B)^C$$
$$B - A^C = B \cap (A^C)^C = B \cap A = A \cap B$$
$$(A - B^C)^C = (A \cap B)^C \neq A \cap B = B - A^C$$

III. F.

$$[(A^C - B) \cap (B - A)]^C = (A^C - B)^C \cup (B - A)^C = (A^C \cap B^C)^C \cup (B \cap A^C)^C$$
$$= [(A^C)^C \cup (B^C)^C] \cup [B^C \cup (A^C)^C] = (A \cup B) \cup (B^C \cup A) = A \cup B \cup B^C \cup A$$
$$= A \cup B \cup B^C = A \cup (B \cup B^C) = A \cup U = U$$

Gabarito: I) V II) F III) F

---

29. (ITA/1987)

Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$. Assinale a alternativa correta.

a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.

b) Se $F \cap G = \emptyset$, então necessariamente $G \subset F$.

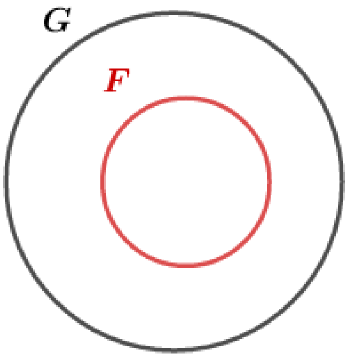
c) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.

d) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.

e) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$

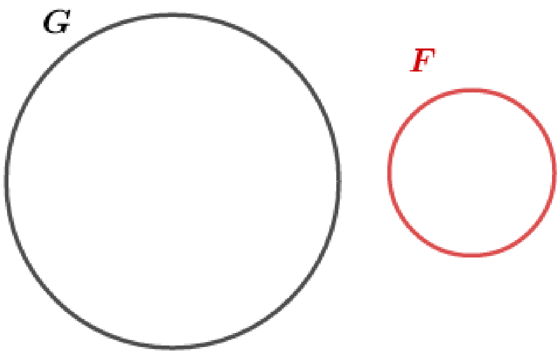
Comentários

a) Errado. Veja o diagrama de Venn-Euler:



A figura representa $F \subset G\ e\ G \neq F$. Note que $F = F \cap G \neq F \cup G$

b) Errado.

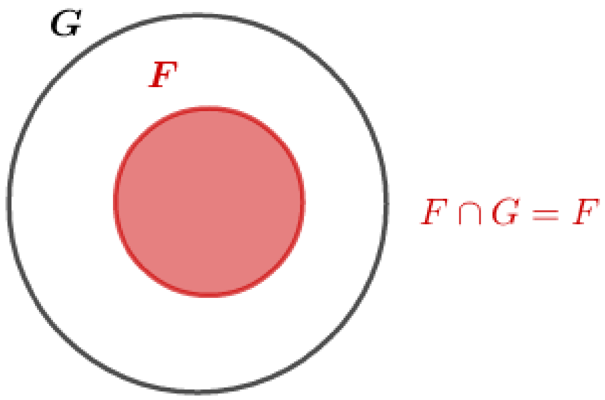


$F \cap G = \emptyset$ implica que F e G não possuem elementos em comum, logo é impossível que $G \subset F$.

c) Errado.

$$F \cap G = F \Rightarrow F \subset G$$

Veja o diagrama:

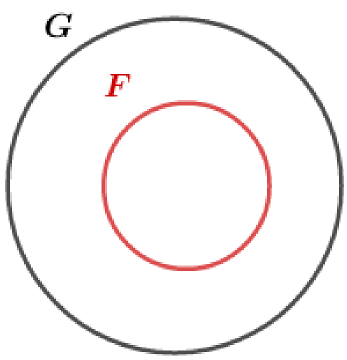


d) Certo.

$$F \subset G \wedge G \subset F \Rightarrow F = G$$

Assim, $F \cap G = F$ e $F \cup G = F$

e) Errado.



A figura representa $F \subset G\ e\ G \neq F$.

Conforme o diagrama, temos:

$$F \cap G = F \Rightarrow (F \cap G) \cup G = F \cup G = G$$

Gabarito: "d".

---

30. (ITA/1985/Modificada)

Sejam X um conjunto não vazio e A e B dois subconjuntos. Analise as afirmações:

I. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}$

II. $A - \emptyset = A\ e\ A - B = A - (A \cap B)$

III. $A - B \neq A \cap \bar{B}$

Comentários

I. V.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in A\ e\ x \notin B \Leftrightarrow \forall x, x \in A\ e\ x \in \bar{B} \Rightarrow A \subset \bar{B}$$

*Se $x \notin B$, x não é elemento de B então x será elemento de seu complementar $\bar{B}$. Logo, $x \in \bar{B}$.

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \notin A \Leftrightarrow \forall x, x \in B\ e\ x \in \bar{A} \Rightarrow B \subset \bar{A}$$

II. V.

$$A - \emptyset = A \cap \emptyset^C = A \cap U = A$$
$$\therefore A - \emptyset = A$$

$$A-(A\cap B)=A\cap(A\cap B)^C=A\cap(A^C\cup B^C)=(A\cap A^C)\cup(A\cap B^C)=\emptyset\cup(A\cap B^C)=A\cap B^C$$
$$=A-B$$
$$\therefore A-B=A-(A\cap B)$$

III. F.

Sabemos que podemos escrever $A-B=A\cap\bar{B}$.

Gabarito: I) V II) V III) F

---

31. (IME/2016)

Dados três conjuntos quaisquer F, G e H. O conjunto $G-H$ é igual ao conjunto:

a) $(G\cup F)-(F-H)$

b) $(G\cup H)-(H-F)$

c) $\left(G\cup(H-F)\right)\cap\bar{H}$

d) $\bar{G}\cup(H\cap F)$

e) $(\bar{H}\cap G)\cap(G-F)$

Comentários

A questão pede para encontrar um conjunto que seja a identidade de $G-H$.

Vamos analisar cada alternativa.

a) $(G\cup F)-(F-H)$

$$(G\cup F)\cap\left(\overline{F\cap\bar{H}}\right)=$$
$$(G\cup F)\cap(\bar{F}\cup H)$$

Procuramos $G-H=G\cap\bar{H}$. Perceba a ausência de $\bar{H}$ no conjunto acima. Logo, esse não é o conjunto que procuramos.

b) $(G\cup H)-(H-F)$

$$(G\cup H)\cap\left(\overline{H\cap\bar{F}}\right)=$$
$$(G\cup H)\cap(\bar{H}\cup F)=$$
$$[(G\cup H)\cap\bar{H}]\cup[(G\cup H)\cap F]=$$
$$[(G\cap\bar{H})\cup(H\cap\bar{H})]\cup[(G\cup H)\cap F]=$$
$$[(G\cap\bar{H})\cup\emptyset]\cup[(G\cup H)\cap F]=$$
$$(G\cap\bar{H})\cup[(G\cup H)\cap F]$$

Encontramos $G\cap\bar{H}$ no conjunto acima, porém ela possui a união do conjunto $(G\cup H)\cap F$. Logo, não é o conjunto que procuramos.

c) $\left(G\cup(H-F)\right)\cap\bar{H}$

$$\left(G\cup(H\cap\bar{F})\right)\cap\bar{H}=$$
$$(G\cap\bar{H})\cup[(H\cap\bar{F})\cap\bar{H}]=$$
$$(G\cap\bar{H})\cup[\bar{F}\cap H\cap\bar{H}]=$$
$$(G\cap\bar{H})\cup[\bar{F}\cap\emptyset]=$$
$$(G\cap\bar{H})\cup\emptyset=G\cap\bar{H}=G-H$$

Essa é a resposta.

d) $\bar{G}\cup(H\cap F)$

Essa alternativa não possui $\bar{H}$ nem G.

e) $(\bar{H}\cap G)\cap(G-F)$

$$(G\cap\bar{H})\cap(G\cap\bar{F})=$$
$$G\cap\bar{H}\cap G\cap\bar{F}=$$

$$G \cap \overline{H} \cap \overline{F}$$

Gabarito: “c”.

32. (IME/2010)

Sejam os conjuntos $P_1, P_2, S_1 \text{ e } S_2$ tais que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1, (P_1 \cap S_2) \subset P_2$ e $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$. Demonstre que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$.

Comentários

Para demonstrar que $(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$, devemos mostrar que:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$$

Vamos analisar $x \in (S_1 \cap S_2)$. Pela definição do conjunto intersecção, temos:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in S_1 \wedge x \in S_2$$

Mas, do enunciado:

$$(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cup P_2)$$

Dessa forma, temos:

$$x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cup P_2)$$

E pela definição do conjunto união, temos que $x \in (P_1 \cup P_2)$ implica $x \in P_1$ ou $x \in P_2$.

Devemos analisar cada caso.

I) Suponha $x \in P_1$.

Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} x \in S_1 \\ x \in S_2 \\ x \in P_1 \end{cases}$$

Como o enunciado afirma que $(P_1 \cap S_2) \subset P_2$, então:

$$x \in P_1 \wedge x \in S_2 \Rightarrow x \in (P_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in P_2$$

Assim, concluímos que $x \in P_1$ e $x \in P_2$, logo $x \in (P_1 \cap P_2)$.

II) Suponha $x \in P_2$.

Nesse caso, temos:

$$\begin{cases} x \in S_1 \\ x \in S_2 \\ x \in P_2 \end{cases}$$

Como o enunciado afirma que $(P_2 \cap S_1) \subset P_1$, então:

$$x \in P_2 \wedge x \in S_1 \Rightarrow x \in (P_2 \cap S_1) \Rightarrow x \in P_1$$

Assim, concluímos que $x \in P_1$ e $x \in P_2$, logo $x \in (P_1 \cap P_2)$.

Portanto, mostramos que, em qualquer um dos casos, $x \in (S_1 \cap S_2)$ implica $x \in (P_1 \cap P_2)$, ou seja, $x \in (S_1 \cap S_2) \Rightarrow x \in (P_1 \cap P_2)$.

Ou, podemos escrever:

$$(S_1 \cap S_2) \subset (P_1 \cap P_2)$$

Gabarito: Prova

33. (IME/2009)

Sejam dois conjuntos, $X \text{ e } Y$, e a operação Δ, definida por $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$. Pode-se afirmar que

a) $(X \Delta Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$

b) $(X \Delta Y) \cap (X - Y) = \emptyset$

c) $(X \Delta Y) \cap (Y - X) = \emptyset$

d) $(X \Delta Y) \cup (X - Y) = X$

e) $(X\Delta Y) \cup (Y - X) = X$

Comentários

a) Temos que:

$$(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X \cap Y)$$
$$(X\Delta Y) \cap (X \cap Y) = [(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)]$$

Contudo, $(X - Y) \cap (X \cap Y) = \emptyset$, pois $(X - Y)$ é o conjunto X menos todos os elementos de Y, então, não são incluídos os elementos de $X \cap Y$. Daí:

$$[(X - Y) \cap (X \cap Y)] \cup [(Y - X) \cap (X \cap Y)] = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$$

Portanto, o item é verdadeiro.

b) Temos:

$$(X\Delta Y) \cap (X - Y) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (X - Y) =$$
$$[(X - Y) \cap (X - Y)] \cup [(Y - X) \cap (X - Y)] = (X - Y) \cup \emptyset = (X - Y)$$

Portanto, o item é falso.

c) Temos:

$$(X\Delta Y) \cap (Y - X) = [(X - Y) \cup (Y - X)] \cap (Y - X) =$$
$$[(X - Y) \cap (Y - X)] \cup [(Y - X) \cap (Y - X)] = \emptyset \cup (Y - X) = (Y - X)$$

d) Temos:

$$(X\Delta Y) \cup (X - Y) = (X - Y) \cup (Y - X) \cup (X - Y) = (X - Y) \cup (Y - X) = (X\Delta Y)$$

Portanto, o item é falso.

e) Temos:

$$(X\Delta Y) \cup (Y - X) = (X - Y) \cup (Y - X) \cup (Y - X) = (X - Y) \cup (Y - X) = (X\Delta Y)$$

Portanto, o item é falso.

Gabarito: “a”