Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

Estudaremos, nesta aula, uma introdução ao assunto de polinômios. Veremos que, assim como as outras funções, eles possuem diversas propriedades. Preste muita atenção aos conceitos de divisão envolvendo polinômios, pois esses são tópicos que costumam cair em prova.

Tente resolver todas as questões da aula e, sempre que tiver dúvidas, volte para a teoria e reveja o conteúdo que você está com dificuldade. Todas as questões estão resolvidas. Se você tiver dificuldades em resolver alguma, basta consultar a resolução e verificar o passo que faltou para completar a questão.

Qualquer dificuldade, procure-nos no fórum de dúvidas. Estamos aqui para auxiliá-lo.

Bons estudos.

FALE COMIGO

/victorso   /profvictorso   /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Função Polinomial

1.1. Definição

A função polinomial ou polinômio é uma função de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, isto é, $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Ela é da forma:

$$\boxed{f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n}$$

Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são constantes complexas e são denominados coeficientes do polinômio e os expoentes de x são todos números naturais. As parcelas $a_0, a_1 x, a_2 x^2, \ldots, a_n x^n$ do polinômio são chamados de termos da função polinomial.

Vejamos alguns exemplos de polinômios:

1.1.a) $f(x) = 2x \rightarrow monômio$
1.1.b) $g(x) = x^3 + 2ix + 3 - 4i$

1.2. Grau do Polinômio

O **grau do polinômio** é definido pelo **maior expoente** da variável do polinômio. Podemos representar o grau do polinômio P pelos símbolos ∂P ou grP.

Em termos matemáticos:

$$\partial P = grP = n \Leftrightarrow \begin{cases} a_n \neq 0 \\ a_i = 0, \forall i > n \end{cases}$$

Polinômio	Grau
$2x + 5 \rightarrow 2x^1 + 5$	1
$3 \rightarrow 3x^0$	0

1.3. Valor numérico

Dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, chamamos de valor numérico do polinômio o valor que P retorna a um determinado número $\alpha \in \mathbb{C}$. Ou seja:

$$P(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n$$

Por exemplo, tomando-se $P(x) = 1 + x + x^2 + x^3$, podemos ter os seguintes valores numéricos:

1.3.a) $x = 1 \Rightarrow P(1) = 1 + 1 + 1^2 + 1^3 = 5$
1.3.b) $x = 2 \Rightarrow P(2) = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 = 15$
1.3.c) $x = i \Rightarrow P(i) = 1 + i + i^2 + i^3 = 0$

Note que, no caso $x = i$ encontramos $P(i) = 0$, nesse caso, dizemos que i é raiz do polinômio.

Logo, dado $\alpha \in \mathbb{C}$, dizemos que α é raiz do polinômio P quando $P(\alpha) = 0$.

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha \text{ é raiz de } P}$$

2. Identidade de Polinômios

Podemos entender o termo identidade como uma igualdade. Dizemos que dois polinômios de variável x são idênticos quando eles assumem valores numéricos iguais para qualquer valor de x.

Dados os polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

P_1 e P_2 são idênticos se, e somente se, $P_1(x) = P_2(x), \forall x \in \mathbb{C}$.

Usamos o símbolo $\equiv$ para indicar a identidade de polinômios.

$$\boxed{P_1 \equiv P_2 \Leftrightarrow P_1(x) = P_2(x), \forall x \in \mathbb{C}}$$

2.1. Teorema

Dois polinômios são idênticos quando todos os coeficientes correspondentes são iguais, ou seja, dados os polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

Se $P_1 \equiv P_2$, então $a_i = b_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$.

2.2. Polinômio nulo

Um polinômio é identicamente nulo quando todos os seus coeficientes forem nulos.

$$\boxed{P \equiv 0 \Leftrightarrow P(x) = 0, \forall x \in \mathbb{C}}$$

Assim, usando o teorema anterior, temos

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \equiv 0$$

Se, e somente se, $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.

3. Operações Fundamentais

3.1. Adição e Subtração

Podemos somar e subtrair polinômios simplesmente relacionando seus termos de mesma potência. Dados dois polinômios

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$P_2(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$

Se $P = P_1 \pm P_2$, então:

$$\boxed{P(x) = (P_1 \pm P_2)(x) = (a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)x + \cdots + (a_n \pm b_n)x^n = \sum_{i=0}^{n} (a_i \pm b_i)x^i}$$

3.1.1. Grau da soma e subtração

Somando-se ou subtraindo-se dois polinômios, o grau do polinômio resultante será igual ao maior grau dentre os polinômios envolvidos. Dessa forma:

$$\boxed{\partial(P_1 \pm P_2) \leq máx\{\partial P_1, \partial P_2\}}$$

No exemplo anterior, vimos que o grau do polinômio resultante é igual ao grau do polinômio P_1.

3.2. Multiplicação

Para multiplicar dois polinômios, usamos a propriedade distributiva. Assim, tomemos os polinômios

$$P_1(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$$
$$P_2(x) = x^2 - 3x + 5$$

E façamos a multiplicação

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (2x^4 - 5x^3 + 6) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

Aplicando a distributiva, temos:

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = (2x^4 - 5x^3 + 6) \cdot (x^2 - 3x + 5)$$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = \begin{cases} 2x^4 \cdot x^2 + 2x^4 \cdot (-3x) + 2x^4 \cdot 5 \\ -5x^3 \cdot x^2 - 5x^3 \cdot (-3x) - 5x^3 \cdot 5 \\ +6 \cdot x^2 + 6 \cdot (-3x) + 6 \cdot 5 \end{cases}$$

$$P_1(x) \cdot P_2(x) = \begin{cases} 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 \\ -5x^5 + 15x^4 - 25x^3 \\ +6x^2 + 18x + 30 \end{cases}$$

Nesse ponto, fazemos como na soma ou na subtração, agrupamos os termos de mesma ordem.

$$P_1(x)\cdot P_2(x) = 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 5x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$
$$P_1(x)\cdot P_2(x) = 2x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 5x^5 + 15x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$
$$P_1(x)\cdot P_2(x) = 2x^6 - 11x^5 + 25x^4 - 25x^3 + 6x^2 + 18x + 30$$

Esse é o polinômio resultante.

Note que $\partial(P_1 \cdot P_2) = \partial P_1 + \partial P_2 = 4 + 2 = 6$. Assim, temos a seguinte propriedade.

3.2.1. Grau da multiplicação

O grau do polinômio resultante da multiplicação de dois polinômios não nulos P_1 e P_2 é dado por

$$\boxed{\partial(P_1 \cdot P_2) = \partial P_1 + \partial P_2}$$

3.3. Divisão euclidiana

Sejam P e D dois polinômios tais que D é não nulo. Dividir $P(x)$ por $D(x)$ significa obter dois outros polinômios $Q(x)$ e $R(x)$ tais que satisfaçam as seguintes condições:

I. $\underbrace{P(x)}_{dividendo} \equiv \underbrace{D(x)}_{divisor} \cdot \underbrace{Q(x)}_{quociente} + \underbrace{R(x)}_{resto}$

II. $\partial R < \partial D\ (ou\ R \equiv 0, no\ caso\ de\ ocorrer\ uma\ divisão\ exata)$

Esse algoritmo é conhecido como divisão euclidiana.

É a mesma ideia usada para valores numéricos, por exemplo, na divisão de 17 por 5, pela divisão euclidiana, temos:

$$\underbrace{17}_{dividendo} = \underbrace{5}_{divisor} \cdot \underbrace{3}_{quociente} + \underbrace{2}_{resto}$$

A diferença é que quando trabalhamos com valores numéricos, usamos a condição do resto ser $0 \leq resto < divisor$. E quando operamos com polinômios, analisamos o grau do polinômio do resto e o grau do polinômio do divisor. Então, das condições da divisão euclidiana para polinômios, temos:

$$P(x) \equiv D(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

Calculemos o grau dos polinômios envolvidos:

$$\partial P = \partial(D\cdot Q + R)$$

Pela propriedade do grau da soma, temos:

$$\partial P \leq máx\{\partial(D\cdot Q), \partial R\}$$

Pela propriedade do grau da multiplicação:

$$\partial P \leq máx\{\partial D + \partial Q, \partial R\}$$

Como a condição da divisão é $\partial R < \partial D$, temos:

$$máx\{\partial D + \partial Q, \partial R\} = \partial D + \partial Q$$

Portanto $\partial P = \partial D + \partial Q$.

4. Divisão

4.1. Método de Descartes

Esse método é consequência da definição da divisão euclidiana e é conhecido como **método dos coeficientes a determinar**.

Das condições da divisão euclidiana, devemos ter na divisão de um polinômio P por um polinômio D:

I. $P(x) \equiv D(x)\cdot Q(x) + R(x)$

II. $\partial R < \partial D\ (ou\ R \equiv 0)$

Vimos que da condição I, $\partial P = \partial D + \partial Q$, logo $\partial Q = \partial P - \partial D$.

Da condição II, devemos ter $\partial R < \partial D$.

Vejamos na prática como aplicamos esse método.

4.1.a) Faça a divisão de $P(x) = 5x^4 + 3x^3 + 2x + 1$ por $D(x) = x^2 + 3x + 2$.

i) O primeiro passo é determinar o grau do polinômio Q (quociente):

$$\partial Q = \partial P - \partial D$$

Como $\partial P = 4$ e $\partial D = 2$, temos:

$$\partial Q = 4 - 2 = 2$$

Assim, o polinômio Q é de segundo grau:

$$\partial Q = ax^2 + bx + c$$

ii) O segundo passo é determinar o grau do polinômio R (resto):

$$\partial R < \partial D \Rightarrow \partial R < 2 \Rightarrow \partial R \leq 1$$

Encontramos que o resto é um polinômio cujo grau é menor ou igual a 1. Devemos supor o maior grau possível, logo, ele pode ser do primeiro grau:

$$R(x) = dx + e$$

iii) O terceiro passo é escrever a relação $P(x) \equiv D(x) \cdot Q(x) + R(x)$ e encontrar os coeficientes:

$$5x^4 + 3x^3 + 2x + 1 \equiv (x^2 + 3x + 2)(ax^2 + bx + c) + dx + e$$

Desenvolvendo a expressão do membro à direita:

$$5x^4 + 3x^3 + 0x^2 + 2x + 1 \equiv ax^4 + (3a + b)x^3 + (2a + 3b + c)x^2 + (2b + 3c + d)x + 2c + e$$

Igualando os coeficientes, encontramos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 5 = a \\ 3 = 3a + b \\ 0 = 2a + 3b + c \\ 2 = 2b + 3c + d \\ 1 = 2c + e \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\begin{cases} a = 5 \\ b = -12 \\ c = 26 \\ d = -52 \\ e = -51 \end{cases}$$

Portanto, os polinômios são:

$$Q(x) = 5x^2 - 12x + 26$$
$$R(x) = -52x - 51$$

4.2. Método das chaves

Na divisão pelo método das chaves, podemos usar o mesmo método quando calculamos a divisão usando valores numéricos. Relembremos.

Dividamos, por exemplo, 16 por 3.

Primeiro, montamos nosso algoritmo.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \hline \end{array}$$

No lugar do quociente, colocamos o menor inteiro possível que, ao ser multiplicado por 3, não supere 16. Nesse caso, 5.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} & 5 \end{array}$$

Multiplicamos o quociente (5) pelo divisor (3) e colocamos o resultado (15) logo abaixo do dividendo (16).

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} 15 & 5 \end{array}$$

Como temos que subtrair (15) do dividendo (16), vamos simbolizar essa operação alternando o sinal do (15) para (-15).

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \end{array}$$

E, agora, fazemos a subtração.

$$\begin{array}{r|l} 16 & 3 \\ \cline{2-2} -15 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Assim, dizemos que 16 dividido por 3 dá 5 com resto 1.

Alternativamente, podemos escrever a igualdade:

$$16 = 5 \cdot 3 + 1$$

Para a divisão de polinômios, vamos utilizar a mesma ordem de operações da divisão numérica.

Acompanhe um exemplo prático.

Dados os polinômios

$$P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$$
$$D(x) = x^2 - 3x + 5$$

Façamos a divisão

$$\frac{P(x)}{D(x)}.$$

De modo análogo ao que fazemos com os números, montemos nosso algoritmo.

$$\begin{array}{r|l} P(x) & D(x) \\ \cline{2-2} \end{array}$$

Que é o mesmo que

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} \end{array}$$

Agora, dividimos o primeiro termo do dividendo $(2x^4)$ pelo primeiro termo do divisor (x^2).

$$2x^4 \div x^2 \rightarrow +2x^2$$

Colocamos, então, esse resultado no lugar do quociente na divisão.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} & & & 2x^2 \end{array}$$

Multiplicamos o quociente $(2x^2)$ por todo o divisor $(x^2 - 3x + 5)$ e colocamos o resultado $(2x^4 - 6x^3 + 10x^2)$ logo abaixo do dividendo $(2x^4 - 5x^3 + 6)$.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} 2x^4 & -6x^3 & +10x^2 & 2x^2 \end{array}$$

Como fizemos com a parte numérica, precisamos fazer a subtração dessa linha recém escrita. Para simbolizar essa subtração, vamos mudar o sinal de todos seus termos.

$$\begin{array}{rrr|l} 2x^4 & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} -2x^4 & +6x^3 & -10x^2 & 2x^2 \end{array}$$

E, finalmente, somamos essas duas linhas.

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{2x^4} & -5x^3 & +6 & x^2 - 3x + 5 \\ \cline{4-4} -\cancel{2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & 2x^2 \\ \cline{1-3} & x^3 & -10x^2 \quad +6 & \end{array}$$

Nesse momento, é como se tivéssemos um novo dividendo $(x^3 - 10x^2 + 6)$.

Continuaremos esse processo até que o novo dividendo tenha grau menor que o grau do divisor.

Como o grau do nosso novo dividendo é 3 e nosso divisor tem grau 2, continuamos no processo de divisão.

Dividimos o termo de maior grau do novo dividendo pelo termo de maior grau do divisor e escrevemos no quociente.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x \\ \cline{1-3}
& x^3 & -10x^2 & & +6 &
\end{array}$$

Multiplicamos o resultado $(+x)$ por todo o divisor (x^2-3x+5) e anotamos o resultado dessa multiplicação logo abaixo do novo quociente.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x \\ \cline{1-3}
& x^3 & -10x^2 & & +6 & \\
& x^3 & -3x^2 & +5x & &
\end{array}$$

Para simbolizar a subtração, mudamos o sinal de toda a linha recém escrita.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x \\ \cline{1-3}
& x^3 & -10x^2 & & +6 & \\
& -x^3 & +3x^2 & -5x & &
\end{array}$$

E somamos as duas linhas.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x \\ \cline{1-3}
& \cancel{x^3} & -10x^2 & & +6 & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \cline{1-5}
& & -7x^2 & -5x & +6 &
\end{array}$$

Perceba que nosso novo dividendo ainda não tem grau menor que o grau do divisor, portanto, continuamos com nosso algoritmo. Dividindo o termo de maior grau do novo dividendo $(-7x^2)$ pelo termo de maior grau do divisor (x^2) e colocando o resultado no quociente.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x-7 \\ \cline{1-3}
& \cancel{x^3} & -10x^2 & & +6 & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \cline{1-5}
& & -7x^2 & -5x & +6 &
\end{array}$$

Multiplicamos (-7) pelo divisor (x^2-3x+5) e escrevemos o resultado logo abaixo do novo dividendo $(-7x^2-5x+6)$.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x-7 \\ \cline{1-3}
& \cancel{x^3} & -10x^2 & & +6 & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & \\ \cline{1-5}
& & -7x^2 & -5x & +6 & \\
& & -7x^2 & +21x & -35 &
\end{array}$$

Mudamos o sinal de toda a última linha.

$$\begin{array}{ccccc|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & & +6 & x^2-3x+5 \\ \cline{6-6}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & 2x^2+x-7 \\ \cline{1-3}
& \cancel{x^3} & -10x^2 & & +6 &
\end{array}$$

$$
\begin{array}{rrr}
\cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x \\
\hline
-7x^2 & -5x & +6 \\
+7x^2 & -21x & +35
\end{array}
$$

E somamos as duas últimas linhas.

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
\cancel{2x^4} & -5x^3 & & +6 & & & x^2-3x+5 \\
\cline{7-7}
\cancel{-2x^4} & +6x^3 & -10x^2 & & & & 2x^2+x-7 \\
\cline{1-3}
& \cancel{x^3} & -10x^2 & +6 & & & \\
& \cancel{-x^3} & +3x^2 & -5x & & & \\
\cline{1-4}
& & \cancel{-7x^2} & -5x & +6 & & \\
& & \cancel{+7x^2} & -21x & +35 & & \\
\cline{1-5}
& & & -26x & +41 & &
\end{array}
$$

Agora sim, nosso novo dividendo tem grau menor que grau do divisor, então, esse dividendo restante passa a ser considerado como o resto da divisão.

Assim, podemos dizer que a divisão de $P(x) = 2x^4 - 5x^3 + 6$ por $D(x) = x^2 - 3x + 5$ tem quociente $Q(x) = 2x^2 + x - 7$ e resto $R(x) = -26x + 41$.

Podemos, alternativamente, dizer que:

$$2x^4 - 5x^3 + 6 = (2x^2 + x - 7) \cdot (x^2 - 3x + 5) + (-26x + 41)$$

Ou seja,

$$P(x) = Q(x) \cdot D(x) + R(x).$$

4.3. Algoritmo de Briot-Ruffini

O algoritmo de Briot-Ruffini é útil quando queremos dividir um polinômio $P(x)$ por um divisor da forma $x - \alpha$. Quando α é raiz do polinômio, temos que o polinômio resto será identicamente nulo e, dessa forma, poderemos escrever:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x)$$

O grau de Q será igual ao grau de P reduzido em uma unidade. Por isso, esse algoritmo também é conhecido como **algoritmo de redução de ordem do polinômio**.

Se α não for raiz do polinômio, teremos:

$$P(x) \equiv (x - \alpha) \cdot Q(x) + R(x)$$

Como o divisor possui grau 1, temos que o resto ou é nulo ou tem grau 0, ou seja, ele é um polinômio constante e não depende de x. Por isso, denotaremos $R(x)$ simplesmente por R.

Vejamos na prática como aplicamos o algoritmo, ou melhor, o **dispositivo prático de Briot-Ruffini**.

Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^3 + 2x^2 + 5$ por $x - 3$.

Passo 1: Representamos o dispositivo pela seguinte figura:

Passo 2: Tomamos a raiz do divisor e inserimos no dispositivo, nesse exemplo, temos como raiz $x = 3$.

3				

Passo 3: Inserimos os coeficientes do dividendo seguindo a ordem do maior expoente ao menor expoente. Note que o coeficiente de x é nulo, logo:

$$P(x) = 1x^3 + 2x^2 + 0x + 5$$

3	1	2	0	5

Passo 4: Repetimos o primeiro coeficiente de P na linha abaixo dela.

3	1	2	0	5
	$\downarrow$ 1			

Agora, estamos prontos para iniciar a divisão pelo dispositivo prático. Chamaremos a linha dos coeficientes de L1 e a linha abaixo dela de L2.

Passo 5: Repetimos o processo conforme o diagrama abaixo até chegar à última coluna.

multiplicar o último coeficiente da segunda linha pela raiz → somar o resultado da multiplicação ao coeficiente da coluna ao lado → escrever o resultado na linha abaixo do coeficiente somado

3	1	2	0	5
	1	$1 \cdot 3 + 2 = 5$		

$\times$ $+$

3	1	2	0	5
	1	5	$5 \cdot 3 + 0 = 15$	

$\times$ $+$

3	1	2	0	5

$\times$

	1	5	15	$15 \cdot 3 + 5 = 50$

3	1	2	0	5
	1	5	15	50

Esse é o resultado do algoritmo. Cada elemento da segunda linha representa um termo do quociente da divisão de $P(x)$ por $x-3$. Como nosso polinômio P tem grau 3, nosso quociente começa com um grau a menos, ou seja, grau 2. O último elemento da segunda linha representa o resto da divisão. Dessa forma, temos:

3	1	2	0	5
	1 $\downarrow$ $1 \cdot x^2$	5 $\downarrow$ $5 \cdot x^1$	15 $\downarrow$ $15 \cdot x^0$	50 $\downarrow$ $resto$

$$Q(x) = x^2 + 5x + 15$$
$$R = 50$$
$$\therefore x^3 + 2x^2 + 5 \equiv (x-3)(x^2+5x+15) + 50$$

O dispositivo prático de Briot-Ruffini é muito útil quando queremos encontrar as raízes de um polinômio de grau $n \geq 3$. Pois, conhecendo uma das raízes, podemos usar o algoritmo para reduzir a ordem do polinômio em uma unidade. Isso, normalmente, resultará em uma equação conhecida como a equação quadrática. Vejamos um exemplo.

4.4.a) Encontre as raízes do polinômio $P(x) = x^3 + 4x^2 - 305x + 300$.

Para encontrar as raízes de P, podemos usar o algoritmo de Briot-Ruffini. Note que $x = 1$ é raiz:

$$P(1) = 1^3 + 4(1)^2 - 305 \cdot 1 + 300 = 0$$

Logo, podemos dividir o polinômio P por $x - 1$ usando Briot-Ruffini:

1	1	4	-305	300
	1	5	-300	0

Com isso, obtemos:

$$P(x) = (x-1)(x^2+5x-300)$$

Agora, basta resolver a equação quadrática $x^2 + 5x - 300 = 0$ e encontrar as outras raízes.

$$x^2 + 5x - 300 = 0$$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{1225}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2} \Rightarrow x = 15 \; ou \; x = -20$$

Portanto, as raízes de P são:

$$x_1 = 1; x_2 = 15; x_3 = -20$$

4.3.1. Divisor da forma $ax + b$

Como dividimos um polinômio $P(x)$ por um divisor da forma $ax + b$? Nesse caso, podemos proceder da seguinte maneira:

$$P(x) \equiv (ax+b)Q(x)+R$$

Colocamos o coeficiente a do divisor em evidência:

$$P(x) \equiv a\left(x+\frac{b}{a}\right)Q(x)+R$$

$$P(x) \equiv \left(x+\frac{b}{a}\right)\underbrace{[a \cdot Q(x)]}_{Q'(x)}+R$$

$$Q'(x) = a \cdot Q(x)$$

Assim, voltamos a um caso já conhecido. Podemos usar o dispositivo prático de Briot-Ruffini para calcular $Q'(x)$ e R, fazendo a divisão de $P(x)$ por $x+b/a$ e usando como raiz o número $-b/a$. Para encontrar $Q(x)$, basta fazer

$$Q(x) = \frac{Q'(x)}{a}$$

4.3.2. Divisões sucessivas

Podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini sucessivas vezes e dividir o mesmo polinômio por vários divisores da forma $x-\alpha$. Para isso, dado um polinômio $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, se queremos dividir esse polinômio pelos divisores $x-\alpha, x-\beta$ e $x-\gamma$, procedemos da seguinte forma:

Usamos o algoritmo de Briot-Ruffini e dividimos $P(x)$ pelo fator $x-\alpha$.

$$P(x) \equiv (x-\alpha)Q_1(x)+R_1(x)$$

Encontraremos um polinômio $Q_1(x)$ de grau $\partial P - 1$. Aplicamos novamente o algoritmo, mas dividimos $Q_1(x)$ pelo fator $x-\beta$.

$$Q_1(x) \equiv (x-\beta)Q_2(x)+R_2(x)$$

Repetimos o processo e dividimos $Q_2(x)$ pelo fator $x-\gamma$.

$$Q_2(x) \equiv (x-\gamma)Q_3(x)+R_3(x)$$

Assim, usando todas essas identidades, encontramos o seguinte resultado:

$$P(x) \equiv (x-\alpha)Q_1(x)+R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)[(x-\beta)Q_2(x)+R_2(x)]+R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)Q_2(x)+(x-\alpha)R_2(x)+R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)[(x-\gamma)Q_3(x)+R_3(x)]+(x-\alpha)R_2(x)+R_1(x)$$

$$P(x) \equiv (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)Q_3(x)+\underbrace{(x-\alpha)(x-\beta)R_3(x)+(x-\alpha)R_2(x)+R_1(x)}_{R(x)}$$

Esse é o resultado obtido da divisão sucessiva por três fatores. Perceba que R_1, R_2, R_3 são polinômios constantes e, por isso, o grau de R é 2. Isso condiz com a condição do grau do resto ser menor que o grau do divisor, no caso $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$.

Vejamos um exemplo de aplicação:

Vamos dividir o polinômio $P(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ pelos fatores $x-2, x-3$ e $x+5$.

Usaremos o algoritmo de Briot-Ruffini sucessivas vezes. Iniciemos pelo fator $x-2$.

2	1	4	3	5	-1
	1				

Aplicando o algoritmo na primeira divisão, encontramos:

2	1	4	3	5	-1
	1	6	15	35	69

Agora, repetimos o processo e dividimos o quociente por outro fator. No caso, temos $Q_1(x) = x^3 + 6x^2 + 15x + 35$ e $R_1(x) = 69$. Vamos dividir $Q_1(x)$ por $x-3$:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
	1				

Aplicando o algoritmo na segunda divisão, obtemos:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
	1	9	42	161	

Temos $Q_2(x) = x^2 + 9x + 42$ e $R_2(x) = 161$. Vamos proceder à última etapa e dividir Q_2 pelo último fator $x + 5$.

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1				

Fazendo as contas, encontramos:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1	4	22		

Logo, $Q_3(x) = x + 4$ e $R_3(x) = 22$.

Com esse diagrama, podemos escrever a identidade do polinômio inicial. Analisaremos da seguinte forma:

2	1	4	3	5	-1
3	1	6	15	35	69
-5	1	9	42	161	
	1	4	22		

Tomamos a segunda linha e escrevemos conforme aprendemos:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x^3 + 6x^2 + 15x + 35) + 69$$

Agora, tomamos a terceira linha e escrevemos a divisão do polinômio $(x^3 + 6x^2 + 15x + 35)$ pelo fator $x - 3$:

$$(x^3 + 6x^2 + 15x + 35) \equiv (x - 3)(x^2 + 9x + 42) + 161$$

Por fim, tomamos a quarta linha e escrevemos a divisão do polinômio $(x^2 + 9x + 42)$ por $x + 5$:

$$(x^2 + 9x + 42) \equiv (x + 5)(x + 4) + 22$$

Assim, podemos escrever o polinômio $P(x)$ usando essas identidades:

$$P(x) \equiv (x - 2)(x^3 + 6x^2 + 15x + 35) + 69$$
$$P(x) \equiv (x - 2)[(x - 3)(x^2 + 9x + 42) + 161] + 69$$
$$P(x) \equiv (x - 2)\{(x - 3)[(x + 5)(x + 4) + 22] + 161\} + 69$$
$$P(x) \equiv (x - 2)[(x - 3)(x + 5)(x + 4) + 22(x - 3) + 161] + 69$$
$$\therefore P(x) \equiv (x - 2)(x - 3)(x + 5)\underbrace{(x + 4)}_{Q(x)} + \underbrace{22(x - 2)(x - 3) + 161(x - 2) + 69}_{R(x)}$$

Esse é o resultado da divisão de $P(x)$ por $(x - 2)(x - 3)(x + 5)$.

4.3.3. Teorema

Se $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k$ são números complexos e distintos entre si com $k \leq n$, então o polinômio P de grau n é divisível separadamente por $x - \alpha_1, x - \alpha_2, x - \alpha_3, \dots, x - \alpha_k$ se, e somente se, for divisível pelo produto $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \dots (x - \alpha_k)$.

4.5. Teorema do resto

O resto da divisão de um polinômio $P(x)$ por $x - a$ é igual ao valor numérico de $P(a)$.

Exemplo

4.5.a) Encontre o resto da divisão de $2x^4 + 3x^3 + 10x^2 - x - 9$ por $x - 1$.

Para resolver essa questão, podemos aplicar diretamente o teorema do resto. Sabendo que a raiz de $x - 1$ é 1, temos:

$$P(x) = (x - 1) \cdot Q(x) + R$$
$$P(1) = R \Rightarrow R = 2(1)^4 + 3(1)^3 + 10(1)^2 - (1) - 9$$
$$R = 2 + 3 + 10 - 1 - 9 = 5$$
$$\therefore R = 5$$

4.6. Teorema de D'Alembert

Um polinômio $P(x)$ é divisível por $x - a$ se, e somente se, $P(a) = 0$.

Exemplo

4.6.a) Determine o valor de p para que o polinômio $P(x) = 5x^3 + px^2 + x + 10$ seja divisível por $x + 1$.

Pelo teorema de D'Alembert, sendo -1 a raiz de $x + 1$, temos que $P(x)$ será divisível por $x + 1$ se $P(-1) = 0$, logo:

$$P(-1) = 5(-1)^3 + p(-1)^2 + (-1) + 10$$
$$P(-1) = -5 + p - 1 + 10 = p + 4$$
$$P(-1) = 0 \Rightarrow p + 4 = 0 \Rightarrow p = -4$$

Portanto, para $P(x)$ ser divisível por $x+1$, devemos ter $p=-4$.

5. Lista de Questões

Questões ITA

1. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x)=x^3-mx^2+x+5+n$, sendo m,n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z=a+bi$, com $a,b\in\mathbb{R}$, da equação $p(z)=0$ satisfaz a igualdade $a=mb^2+nb-1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z)=0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

2. (ITA/2020)

Seja $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por x^2-4;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1)=-\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

3. (ITA/2020)

Considere a função $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^6-10x^4-4x^3+25x^2+20x+28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

4. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

5. (ITA/2018)

As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

6. (ITA/2017)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - \left(1 + 2\sqrt{3}\right)x^3 + \left(3 + 2\sqrt{3}\right)x^2 - \left(1 + 4\sqrt{3}\right)x + 2$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

7. (ITA/2016)

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

8. (ITA/2015)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1, \dots ,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

9. (ITA/2015)

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

10. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

11. (ITA/2014)

Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

a) $-3i, -1, 1$.

b) $-i, i, 1$.

c) $-i, i, -1$.

d) $-2i, -1, 1$.

e) $-2i, -i, i$.

12. (ITA/2012)

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5(5 - 2\sqrt{3})$.

b) $15(5 - 2\sqrt{3})$.

c) $30(5 - 2\sqrt{3})$.

d) $45(5 - 2\sqrt{3})$.

e) $50(5-2\sqrt{3})$.

13. (ITA/2010).

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15} a_n x^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+ia_{n-1}$, $n=1,2,\dots,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin\mathbb{R}$,

II. $|p(x)|\le 4(4+\sqrt{2}+\sqrt{5})$, $\forall x\in[-1,1]$,

III. $a_8=a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

14. (ITA/2008)

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

e) 38

15. (ITA/2008)

Considere o polinômio $p(x)=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2-a_1$, em que uma das raízes é $x=-1$. Sabendo-se que $a_1,a_2,a_3,a_4\ e\ a_5$ são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4=\frac{1}{2}$, então $p(-2)$ é igual a

a) -25

b) -27

c) -36

d) -39

e) -40

16. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3 x^3 + \pi^2 x^2 + \pi x - 2 = 0$.

b) $\pi^2 x^3 + \pi^3 x^2 + x + 1 = 0$.

c) $\pi^3 x^3 - \pi^2 x^2 + \pi x + 2 = 0$.

d) $\pi x^3 - \pi^2 x^2 + 2\pi x - 1 = 0$.

e) $x^3 - 2\pi^2 x^2 + \pi x - 1 = 0$.

17. (ITA/2007)

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2 - 63x + c$, numa diferença de dois cubos$(x+a)^3 - (x+b)^3$.

Neste caso, $|a + |b| - c|$ é igual a

a) 104.

b) 114.

c) 124.

d) 134.

e) 144.

18. (ITA/2007)

Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo $z^3 + z^2 + z + 1$ um fator de $Q(z)$, $Q(0) = 2$ e $Q(1) = 8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

a) 9.

b) 7.

c) 5.

d) 3.

e) 1.

19. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

e) $\mathbb{N}$.

20. (ITA/2005)

No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$.

21. (ITA/2003)

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) -6.

b) -4.

c) 4.

d) 7.

e) 9.

22. (ITA/2003)

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \ldots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $(n^2 - q^3)/q^4$ é igual a:

a) $5/4$.

b) $3/2$.

c) $7/4$.

d) $11/6$.

e) $15/8$.

23. (ITA/2002)

A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x - 1)(x - 2)$ tem resto $x + 1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x - 1$ e $x - 2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale:

a) 13.

b) 5.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

24. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, temos que o número de arranjos sem repetição de n elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80.

b) 90.

c) 70.

d) 100.

e) 60.

25. (ITA/2000)

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por x^2+x, obtêm-se o quociente $Q(x)=x^2-3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4)=10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

a) $-5.$

b) $-3.$

c) $-1.$

d) $1.$

e) $3.$

Questões IME

26. (IME/2020)

Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x-2$, $x-3$ e $x-5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$ é:

a) 1

b) x

c) 30

d) $x-1$

e) $x-30$

27. (IME/2019)

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

a) 2

b) $13/6$

c) $1/3$

d) $5/2$

e) $8/3$

28. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) 48

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

29. (IME/2019)

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

30. (IME/2018)

Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4 + 3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2} - 2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6$.

b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$.

c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$.

d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$.

e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

31. (IME/2015)

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

a) $x^2 + x - 2$

b) $6x^2 - 4x + 3$

c) $3x - 9$

d) $6x^2 - 17x - 3$

e) $6x + 1$

32. (IME/2012)

Considere o polinômio $5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode se afirmar que:

a) $1 \leq n < 5$

b) $6 \leq n < 10$

c) $10 \leq n < 15$

d) $15 \leq n < 20$

e) $20 \leq n < 30$

33. (IME/2011)

Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p(\frac{1}{x})$. Sabendo que $p(3) = 28$, o valor de $p(4)$ é:

a) 10

b) 30

c) 45

d) 55

e) 65

34. (IME/2011)

Sejam o polinômio e conjunto $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2$ e os conjuntos $A = \{p(k)/k \in \mathbb{N}\ e\ k \leq 1999\}$, $B = \{r^2 + 1\ /r \in \mathbb{N}\}$ e $C = \{q^2 + 2/q \in \mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y = n(A \cap B) - n(A \cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é *o conjunto dos números naturais.*

35. (IME/2001)

Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2, -11)$, $P_2(-1{,}0)$, $P_3(1{,}4)$ e $P_4(2{,}9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

36. (IME/2001)

Determine todos os números inteiros $m\ e\ n$ para os quais o polinômio $2x^m + a^{3n}x^{m-3n} - a^m$ é divisível por $x + a$.

37. (IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

38. (IME/1999)

Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$.

Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

39. (IME/1998)

Determine $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

40. (IME/1997)

Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\phi + xsen\ \phi)^n$ por (x^2+1), onde n é um número natural.

41. (IME/1995)

Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

42. (IME/1987)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.

b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

43. (IME/1984)

Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Tal que $p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

44. (IME/1976)

Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

6. Gabarito

Gabarito das Questões ITA

1. b
2. d
3. a) $\boldsymbol{\alpha = -2}$ e $\boldsymbol{\beta = 24}$ b) $\boldsymbol{f_{mín}(x) = 24}$ c) $\boldsymbol{-2; 1+\sqrt{2}; 1-\sqrt{2}}$
4. $\boldsymbol{S = \{2; 3; 4; 5; 6\}}$
5. d
6. a) $\boldsymbol{a = -2\sqrt{3}; b = -1}$ b) $\boldsymbol{S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}}$.
7. $\boldsymbol{781}$
8. b
9. a) $\boldsymbol{\beta \in \{0, \pm 15\}}$ b) Soluções $\boldsymbol{= \left\{0, \pm\frac{5}{6}, \frac{1}{6}(5 \pm i\sqrt{11}), \frac{1}{6}(-5 \pm i\sqrt{11}), \pm\sqrt{\frac{7}{18}}\right\}}$
10. a) 10 ; b) $\boldsymbol{A = \{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}}$
11. a
12. c
13. e
14. b
15. a
16. d
17. b
18. b
19. d
20. a
21. e
22. c
23. a
24. b
25. c

Gabarito das Questões IME

26. b
27. b
28. c
29. $\boldsymbol{S = \{1;\ 3;\ 2-\sqrt{17}; 2+\sqrt{17}\}}$

30. a
31. d
32. c
33. e
34. $\boldsymbol{y = 0.}$
35. Item a) $\boldsymbol{a = 1; b = -1; c = 1\ e\ d = 3}$ Item b) $\{-1, 1 \pm \sqrt{2}i\}$
36. $\boldsymbol{m = 3n + 1}$, com $\boldsymbol{n}$ inteiro ímpar positivo, se $\boldsymbol{a \neq 0}$ e $\boldsymbol{m \geq 0\ e\ m \geq 3n}$ se $\boldsymbol{a = 0}$.
37. $\boldsymbol{\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n).}$
38. $\boldsymbol{R(x) = x + 1, se\ n}$ é $\boldsymbol{par; R(x) = 0, se\ n}$ é $\boldsymbol{ímpar.}$
39. $\boldsymbol{\alpha = 15; \beta = -16; \gamma = 15.}$
40. $\boldsymbol{sen(n\phi)x + \cos(n\phi).}$
41. Demonstração.
42. Demonstração.
43. $\boldsymbol{p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x\ .}$
44. $\boldsymbol{p = -6\ e\ q = 1.}$

7. Lista de Questões Resolvidas e Comentadas

Questões ITA Comentadas

1. (ITA/2020)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5 + n$, sendo m, n números reais fixados. Sabe-se que toda raiz $z = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, da equação $p(z) = 0$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$. Então, a soma dos quadrados das raízes de $p(z) = 0$ é igual a

a) 6.

b) 7.

c) 8.

d) 9.

e) 10.

Comentários

Pelo teorema fundamental da álgebra, o polinômio possui 3 raízes. Além disso, como os coeficientes do polinômio são reais, se tivermos uma raiz complexa, pelo teorema da raiz complexa conjugada, podemos afirmar que o conjugado dessa raiz também é raiz. Assim, temos as seguintes possibilidades:

I) duas raízes complexas e uma real

II) três raízes reais

Para o caso II de apenas raízes reais, temos da condição do enunciado, que toda raiz $z = a + bi$ satisfaz a igualdade $a = mb^2 + nb - 1$, ou seja, as raízes reais implicam $b = 0$. Logo, todas as raízes são:

$$z = a = m(0)^2 + n(0) - 1 \Rightarrow z_1 = z_2 = z_3 = -1$$

Aplicando a relação de Girard para a soma do produto dois a dois:

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1$$

Mas, como $z_1 = z_2 = z_3 = -1$:

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = (-1)(-1) + (-1)(-1) + (-1)(-1) = 3$$

Portanto, chegamos a um absurdo!

A única possibilidade é a I, duas raízes complexas conjugadas e uma real. Então, sejam as raízes, para $p, q, r \in \mathbb{R}$:

$$z_1 = p + qi$$
$$z_2 = p - qi$$
$$z_3 = r$$

Da condição do enunciado:

$$a = mb^2 + nb - 1$$
$$z_1 \Rightarrow p = mq^2 + nq - 1 \ \ (eq. I)$$
$$z_2 \Rightarrow p = mq^2 - nq - 1 \ \ (eq. II)$$

Da $eq. I$ e $eq. II$, temos $nq = 0$, logo:

$$p = mq^2 - 1$$
$$nq = 0$$

Se $q = 0$, teremos raízes reais, portanto, $n = 0$.

Como $z_3 = r$, temos $r = -1 \therefore z_3 = -1$.

O polinômio é:

$$p(x) = x^3 - mx^2 + x + 5$$

Aplicando Girard:

$$z_1 + z_2 + z_3 = m \Rightarrow p + qi + p - qi - 1 = m \Rightarrow \boxed{2p = m + 1\ (eq. III)}$$
$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = 1 \Rightarrow (p + qi)(p - qi) + (-1)(p + qi + p - qi) = 1$$
$$\Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 1 + 2p\ (eq. IV)}$$
$$z_1z_2z_3 = -5 \Rightarrow (p + qi)(p - qi)(-1) = -5 \Rightarrow \boxed{p^2 + q^2 = 5\ (eq. V)}$$

Usando a $eq. V$ na $eq. IV$:

$$5 = 1 + 2p \Rightarrow 2p = 4 \therefore p = 2$$

Substituindo $p = 2$ na $eq. IV$:

$$4 + q^2 = 1 + 4 \Rightarrow q = \pm 1$$

Assim, a soma dos quadrados das raízes é:

$$S = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = (p + qi)^2 + (p - qi)^2 + (-1)^2$$
$$S = p^2 + 2pqi - q^2 + p^2 - 2pqi - q^2 + 1 = 2p^2 - 2q^2 + 1 = 2(2)^2 - 2(-1)^2 + 1$$
$$S = 7$$

Gabarito: "b".

---

2. (ITA/2020)

Seja $p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ um polinômio com coeficientes reais. Sabendo que:

I. $p(x)$ é divisível por $x^2 - 4$;

II. a soma das raízes de $p(x)$ é igual a 1;

III. o produto das raízes de $p(x)$ é igual a 3;

IV. $p(-1) = -\frac{15}{4}$;

então, $p(1)$ é igual a

a) $-\frac{17}{2}$.

b) $-\frac{19}{4}$.

c) $-\frac{3}{2}$.

d) $\frac{9}{4}$.

e) $\frac{9}{2}$.

Comentários

De cada afirmação, temos:

I) Como $p(x)$ é divisível por x^2-4, temos:

$$p(x)=q(x)(x^2-4)$$

As raízes do polinômio x^2-4 são $x^2-4=0\Rightarrow x=\pm 2$, desse modo:

$$p(2)=16a+8b+4c+2d+e=0$$
$$p(-2)=16a-8b+4c-2d+e=0$$

II) Por Girard:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=-\frac{b}{a}=1\Rightarrow b=-a$$

III) Por Girard:

$$x_1x_2x_3x_4=\frac{e}{a}=3\Rightarrow e=3a$$

IV) Substituindo $x=-1$ no polinômio:

$$p(-1)=a-b+c-d+e=-\frac{15}{4}$$

Para $b=-a$ e $e=3$, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases}16a+8b+4c+2d+e=0\\16a-8b+4c-2d+e=0\\a-b+c-d+e=-\frac{15}{4}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}16a-8a+4c+2d+3a=0\\16a+8a+4c-2d+3a=0\\a+a+c-d+3a=-\frac{15}{4}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}11a+4c+2d=0\\27a+4c-2d=0\\5a+c-d=-\frac{15}{4}\end{cases}$$

Multiplicando a última equação por 2:

$$\begin{cases}11a+4c+2d=0\\27a+4c-2d=0\\10a+2c-2d=-\frac{15}{2}\end{cases}$$

Somando a primeira equação com a segunda e a primeira com a terceira:

$$\begin{cases}38a+8c=0\\21a+6c=-\frac{15}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}19a+4c=0\\7a+2c=-\frac{5}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}19a+4c=0\\-14a-4c=5\end{cases}\Rightarrow 5a=a\therefore a=1$$

$$\therefore b=-1 \text{ e } e=3$$

$$19a+4c=0\Rightarrow 19+4c=0\therefore c=-\frac{19}{4}$$

$$11a+4c+2d=0\Rightarrow 11+4\left(-\frac{19}{4}\right)+2d=0\Rightarrow -8+2d=0\therefore d=4$$

Queremos $p(1)$, logo:

$$p(1)=a+b+c+d+e=1-1-\frac{19}{4}+4+3=-\frac{19}{4}+7=\frac{-19+28}{4}=\frac{9}{4}$$

Gabarito: “d”.

3. (ITA/2020)

Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 10x^4 - 4x^3 + 25x^2 + 20x + 28$.

a) Determine dois números reais α e β de modo que f possa ser reescrita como $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$.

b) Determine o valor mínimo de f.

c) Determine o(s) ponto(s) $x \in \mathbb{R}$ onde f assume seu valor mínimo.

Comentários

a) $f(x) = (x^3 - 5x + \alpha)^2 + \beta$

$$f(x) = x^6 + 25x^2 + \alpha^2 + 2\alpha x^3 - 10\alpha x - 10x^4 + \beta$$
$$f(x) = x^6 - 10x^4 + 2\alpha x^3 + 25x^2 - 10\alpha x + \alpha^2 + \beta$$

Comparando a equação encontrada com a equação da função dada:

$$2\alpha x^3 = -4x^3 \therefore \alpha = -2 \text{ ou } -10\alpha x = 20x \therefore \alpha = -2$$
$$\&$$
$$\alpha^2 + \beta = 28 \therefore 4 + \beta = 28 \therefore \beta = 24$$

b) Substituindo os valores encontrados:

$$f(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 + 24$$
$$f(x) = q(x) + 24$$

Como $q(x) \geq 0$, $f(x)mín = 24$

c) $q(x) = (x^3 - 5x - 2)^2 = 0$

Por verificação, percebe-se que -2 é raiz.

Então: $q(x) = (x + 2)(x^2 - 2x - 1)$

Resolvendo a equação de segundo grau: as raízes obtidas são: $1 + \sqrt{2}$ e $1 - \sqrt{2}$

Logo, as raízes de $q(x)$ são -2, $(1 + \sqrt{2})$ e $(1 - \sqrt{2})$.

Gabarito: a) $\alpha = -2$ e $\beta = 24$ b) $f_{mín}(x) = 24$ c) $-2; 1 + \sqrt{2}; 1 - \sqrt{2}$

---

4. (ITA/2020)

Determine todos os números inteiros k entre 0 e 200 para os quais o polinômio $p_k(x) = x^3 - x^2 - k$ possui uma única raiz inteira. Para cada um desses valores de k, determine a raiz inteira correspondente.

Comentários

Suponha que $\alpha \in \mathbb{Z}$ seja a raiz inteira do polinômio. Aplicando-se o dispositivo prático de Briot-Ruffini, temos:

α	1	-1	0	$-k$
	1	$\alpha - 1$	$\alpha^2 - \alpha$	$\alpha^3 - \alpha^2 - k$

Assim, podemos escrever:

$$p_k(x) = (x - \alpha)[x^2 + (\alpha - 1)x + \alpha^2 - \alpha]$$
$$Resto = \alpha^3 - \alpha^2 - k = 0$$

Do resto, temos:

$$\alpha^3 - \alpha^2 - k = 0 \Rightarrow \alpha^2(\alpha - 1) = k$$

Como $k \in [0, 200]$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$, temos que $\alpha^2 \geq 0$, logo $\alpha - 1 \geq 0$, ou seja, $\alpha \geq 1$. Sendo k um número natural, temos que $\alpha^2(\alpha - 1)$ também deve ser um número natural. Para isso, devemos ter $\alpha \in \mathbb{N}$. Testando as possibilidades:

$$\alpha = 1 \Rightarrow 1^2(1 - 1) = 0 = k$$
$$\alpha = 2 \Rightarrow 2^2(2 - 1) = 4 = k$$
$$\alpha = 3 \Rightarrow 3^2(3 - 1) = 18 = k$$

$$\alpha = 4 \Rightarrow 4^2(4-1) = 48 = k$$
$$\alpha = 5 \Rightarrow 5^2(5-1) = 100 = k$$
$$\alpha = 6 \Rightarrow 6^2(6-1) = 180 = k$$
$$\alpha = 7 \Rightarrow 7^2(7-1) = 294 > 200$$

Portanto, as possíveis raízes inteiras são: $\alpha \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$. Devemos provar que essas raízes são as únicas inteiras.

Vamos analisar o polinômio quadrático e verificar se há outra raiz inteira.

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha]$$
$$q(x) = x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha$$

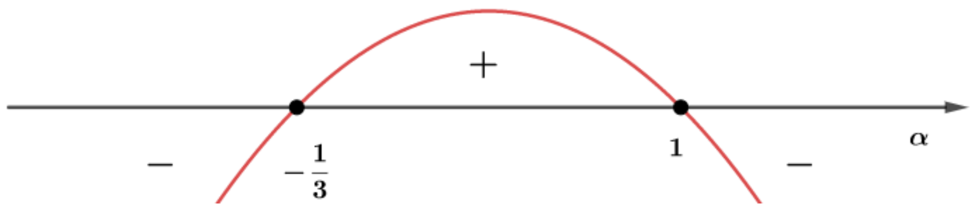
Analisando o discriminante:

$$\Delta = (\alpha-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\alpha^2 - \alpha) = \alpha^2 - 2\alpha + 1 - 4\alpha^2 + 4\alpha$$
$$\Delta = -3\alpha^2 + 2\alpha + 1$$

Encontrando as raízes, temos:

$$\alpha = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot (-3) \cdot 1}}{-6} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-6} = 1 \; ou \; -\frac{1}{3}$$

Fazendo o estudo do sinal para Δ:



Note que para $\alpha > 1$, o discriminante sempre será negativo e isso implica que as outras raízes são complexas. Vamos analisar a raiz $\alpha = 1$:

$$p_k(x) = (x-\alpha)[x^2 + (\alpha-1)x + \alpha^2 - \alpha] \Rightarrow p_0(x) = (x-1)x^2$$

Nesse caso, temos uma raiz 0 com multiplicidade 2 e uma raiz 1 e isso não satisfaz a condição do enunciado. Portanto, as únicas raízes são:

$$S = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

Gabarito: $S = \{2; 3; 4; 5; 6\}$

5. (ITA/2018)

As raízes do polinômio $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7$, quando representadas no plano complexo, formam os vértices de um polígono convexo cuja área é

a) $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$

c) $\sqrt{2}$

d) $\frac{3\sqrt{2}+1}{2}$

e) $3\sqrt{2}$

Comentários

Se você parar para observar, o polinômio apresentado pode ser encarado como uma soma de P.G. de primeiro termo 1 e razão z. Seja então a equação abaixo:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = 0$$

Vamos ver se $z = 1$ é raiz dessa equação:

$$1 + 1 + 1^2 + 1^3 + 1^4 + 1^5 + 1^6 + 1^7 = 6 \neq 0$$

Dado que $z = 1$ não é raiz da equação, podemos escrever a equação dada como sendo:

$$1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^7 = \frac{z^8 - 1}{z - 1} = 0$$

Da soma de P.G.

Ou seja:

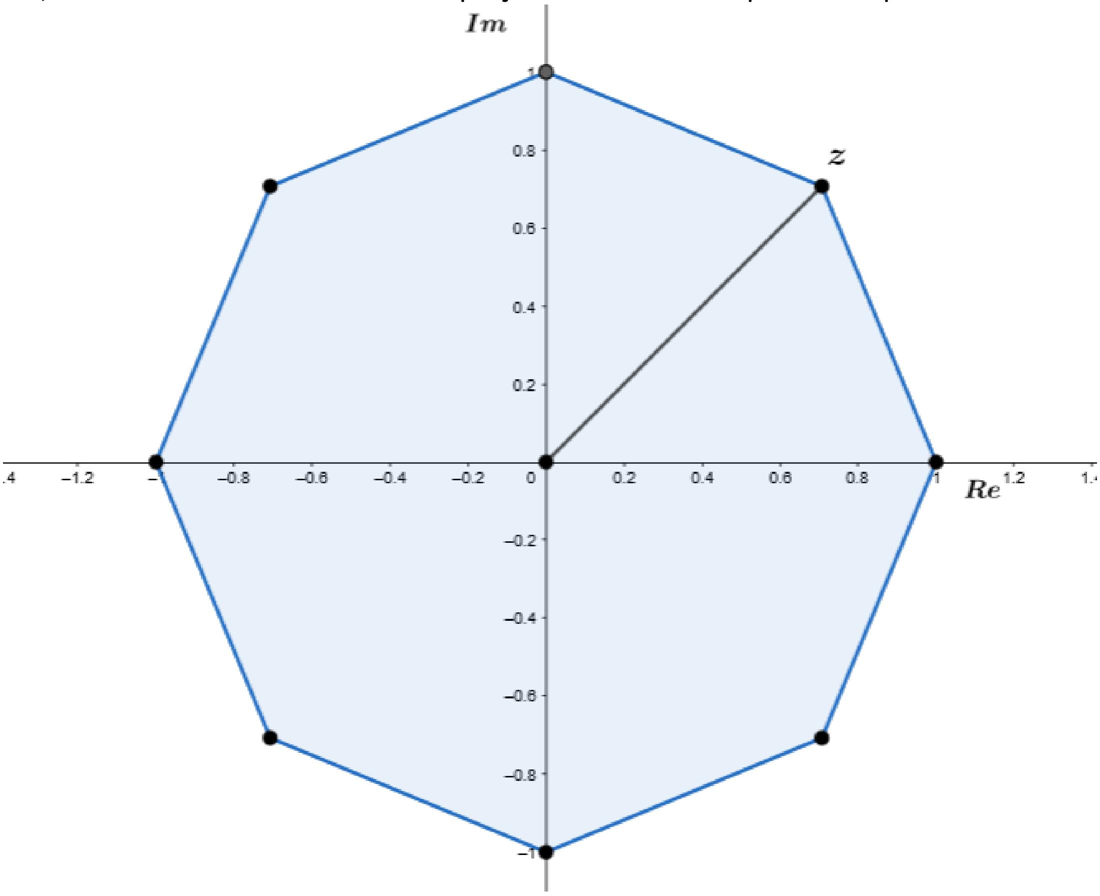
$$z^8 - 1 = 0$$

Do estudo dos números complexos, conhecemos bem essa equação: são as raízes oitavas da unidade. De maneira mais geral, sabe-se que as raízes da equação:

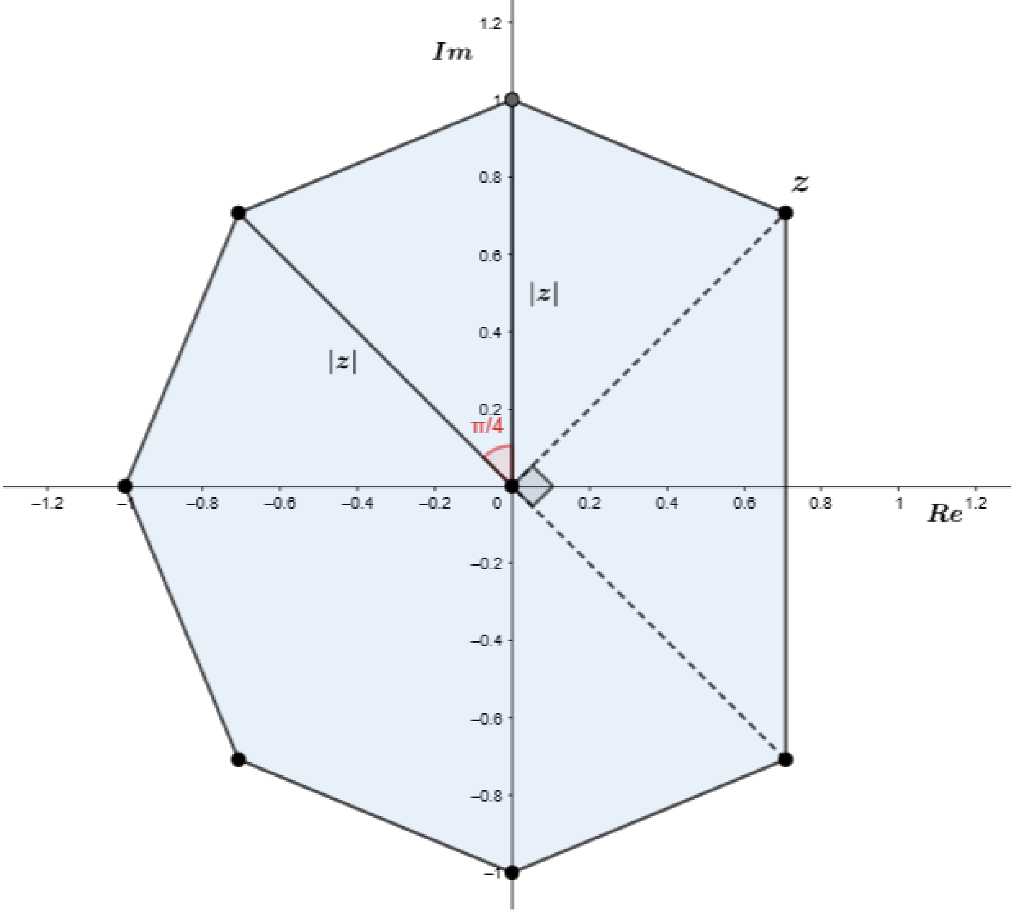
$$z^n - 1 = 0$$

Formam um polígono regular de n lados.

Então, vamos desenhar as raízes da equação $z^8 - 1 = 0$ no plano complexo:



Mas devemos lembrar que $z = 1$ não é raiz dessa equação, do que segue que o polígono convexo formado pelas raízes do polinômio é dado pela figura abaixo:



O polígono regular é formado por 8 triângulos com o ângulo mais interno dado por:

$$\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$$

A área de cada triângulo é dada por:

$$A_{triângulo} = |z| \cdot |z| \cdot \frac{sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}$$

Mas lembre-se de que:

$$z^8 - 1 = 0 \Rightarrow |z|^8 = 1 \Rightarrow |z| = 1, pois\ |z| \in \mathbb{R}$$

Ou seja:

$$A_{triângulo} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Na figura acima, temos 6 triângulos, ou seja:

$$6 \cdot A_{triângulo} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

O triângulo restante é retângulo de área:

$$A = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Do que segue que a área total é:

$$A_{total} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$$

Gabarito: "d".

---

6. (ITA/2017)

Considere o polinômio

$$p(x) = x^4 - (1 + 2\sqrt{3})x^3 + (3 + 2\sqrt{3})x^2 - (1 + 4\sqrt{3})x + 2$$

a) Determine os números reais a e b tais que $p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$.

b) Determine as raízes de $p(x)$.

Comentários

O primeiro conceito que deve ser relembrado é a igualdade de polinômios. Dois polinômios são iguais se e somente se os coeficientes correspondentes aos termos de mesmo grau, isto é, x^n, forem iguais.

Item a:

O primeiro passo é desenvolver a expressão fornecida para $p(x)$:

$$p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2) = x^4 + bx^3 + 2x^2 + ax^3 + abx^2 + 2ax + x^2 + bx + 2$$

$$p(x) = x^4 + (a + b)x^3 + (3 + ab)x^2 + (2a + b)x + 2$$

Utilizando a igualdade de polinômios, temos que:

$$\begin{cases} a + b = -1 - 2\sqrt{3} \\ 3 + ab = 3 + 2\sqrt{3} \\ 2a + b = -1 - 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, temos:

$$a = -2\sqrt{3} \; e \; b = -1$$

Item b:

Vamos utilizar o resultado o item a. Dele, temos:

$$p(x) = (x^2 + ax + 1)(x^2 + bx + 2)$$

Ou ainda:

$$p(x) = (x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 2)$$

Para achar suas raízes, devemos fazer $p(x) = 0$. Logo:

$$(x^2 - 2\sqrt{3}x + 1)(x^2 - x + 2) = 0$$

Ou seja:

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + 1 = 0 \; eq.01$$

Ou

$$x^2 - x + 2 = 0 \; eq.02$$

Resolvendo a $eq.01$ para x:

$$x_1 = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$
$$x_2 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Resolvendo a $eq.02$ para x:

$$x_1 = \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{7})$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{7})$$

Logo, seu conjunto solução é:

$$S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}$$

Gabarito: a) $a = -2\sqrt{3}$; $b = -1$ b) $S = \{\sqrt{3} \pm \sqrt{2}, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{7})\}$.

---

7. (ITA/2016)

Determine o termo constante do resto da divisão do polinômio $(1 + x + x^2)^{40}$ por $(1 + x)^3$.

Comentários

Primeiramente, observe que:

$$x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$$

Por que fizemos isso? A ideia é trabalhar com um polinômio de grau mais baixo possível, de forma que possamos obter as informações mais facilmente e, se possível, de maneira direta.

Nesse caso, é útil tentar evidenciar o termo $(x+1)$, pois ele compõe o polinômio divisor.

Usando o binômio de Newton, temos que:

$$[x(x+1)+1]^{40} = \binom{40}{0}[x(x+1)]^0 + \binom{40}{1}[x(x+1)]^1 + \cdots + \binom{40}{40}[x(x+1)]^{40}$$

Ou seja, a partir do expoente 3 dos termos do binômio, podemos colocar em evidência $(x+1)^3$, veja:

$$(x+1)^3\left[\binom{40}{40}x^{40}(x+1)^{37} + \cdots + \binom{40}{3}x^3\right] + \binom{40}{2}x^2(x+1)^2 + \binom{40}{1}x(x+1) + \binom{40}{0}$$

Dessa forma, temos que $(1+x+x^2)^{40}$ possui o mesmo resto que

$$h(x) = \binom{40}{2}x^2(x+1)^2 + \binom{40}{1}x(x+1) + \binom{40}{0} = 780x^2(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Na divisão por $(x+1)^3$.

Vamos usar a mesma ideia para tentar simplificar ainda mais o polinômio obtido. Antes de continuar, veja que:

$$(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$$

No polinômio $h(x)$, obtido acima, temos que a única parcela candidata a possuir algum fator $(x+1)^3$ é $780x^2(x+1)^2$. Vamos tentar evidenciar esse fator. Veja:

$$x^2(x+1)^2 = x(x^3+2x^2+x) = x(x^3+3x^2+3x+1-x^2-2x-1) = x(x+1)^3 - (x^3+2x+x)$$
$$= x(x+1)^3 - (x+1)^3 + (x+1)^2$$

Dessa forma, em nossa análise do resto da divisão, podemos desprezar as parcelas $x(x+1)^3 - (x+1)^3$, de modo que restará apenas o polinômio:

$$780(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Esse polinômio possui grau 2, de modo que não é mais possível evidenciar um fator $(x+1)^3$, pois ele é do terceiro grau. Disso, concluímos que esse polinômio é o próprio resto.

$$r(x) = 780(x+1)^2 + 40x(x+1) + 1$$

Lembre-se que o termo constante de um polinômio é obtido fazendo $x=0$, logo:

$$r(0) = 780 + 1 = 781$$

Gabarito: 781.

---

8. (ITA/2015)

Seja p o polinômio dado por $p(x) = \sum_{j=0}^{15} a_j x^j$, com $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0,1,\ldots,15$, e $a_{15} \neq 0$. Sabendo-se que i é uma raiz de p e que $p(2) = 1$, então o resto da divisão de p pelo polinômio q, dado por $q(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, é igual a

a) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{1}{5}$.

b) $\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

c) $\frac{2}{5}x^2 + \frac{2}{5}$.

d) $\frac{3}{5}x^2 - \frac{3}{5}$.

e) $\frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{5}$.

Comentários

Em questões que envolvem a divisão de polinômios é sempre útil escrever a seguinte relação:

$$p(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

Do estudo dos polinômios, sabemos que o grau de $r(x)$ é no máximo 2, pois $q(x)$ tem grau 3.

Além disso, como $p(x)$ possui coeficientes reais, temos que se i é tal que $p(i) = 0$, então $p(-i) = 0$.

Ele nos fornece $p(2)$, então é conveniente verificar o valor de $q(2)$:

$$q(2) = 8 - 8 + 2 - 2 = 0$$

Ou seja, 2 é raiz de $q(x)$.

Vamos usar Briot-Ruffini para fatorar $q(x)$:

2	1	−2	1	−2
	1	0	1	0

Ou seja:

$$q(x) = (x-2)(x^2+1)$$

Dessa forma, podemos ver que $\pm i$ também são raízes de $q(x)$.

Em resumo, possuímos três informações:

1- $p(2) = g(2)q(2) + r(2) = 0 \Rightarrow r(2) = 1$;
2- $p(i) = g(i)q(i) + r(i) = 0 \Rightarrow r(i) = 0$;
3- $p(-i) = g(-i)q(-i) + r(-i) = 0 \Rightarrow r(-i) = 0$.

Das informações acima, temos que $\pm i$ são raízes de $r(x)$. Como ele possui grau no máximo 2, elas são todas as suas raízes. Assim, podemos escrever:

$$r(x) = a(x+i)(x-i) = a(x^2+1)$$

Da informação 1, temos:

$$r(2) = a(2^2+1) = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{5}$$

Por fim, temos:

$$r(x) = \frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}$$

Gabarito: "b".

---

9. (ITA/2015)

Considere o polinômio p dado por $p(z) = 18z^3 + \beta z^2 - 7z - \beta$, em que β é um número real.

a) Determine todos os valores de β sabendo-se que p tem uma raiz de módulo igual a 1 e parte imaginária não nula.

b) Para cada um dos valores de β obtidos em a), determine todas as raízes do polinômio p.

Comentários

Item a:

Sejam $z, \bar{z}$ e x_R suas raízes, em que x_R é real e z e $\bar{z}$ são complexas conjugadas. Das relações de Girard, podemos escrever que:

$$-\left(-\frac{\beta}{18}\right) = x_R z\bar{z}$$

Mas uma de suas raízes complexas não reais possui módulo 1. Do estudo dos complexos, temos que:

$$z\bar{z} = z^2 = |z|^2 = 1^2 = 1$$

Ou seja:

$$\frac{\beta}{18} = x_R$$

Como $p(x_R) = 0$, temos:

$$18\left(\frac{\beta}{18}\right)^3+\beta\left(\frac{\beta}{18}\right)^2-7\left(\frac{\beta}{18}\right)-\beta=0$$
$$\frac{\beta^3}{162}-\frac{25\beta}{18}=0\Leftrightarrow\beta\left(\frac{\beta^2}{162}-\frac{25}{18}\right)=0$$

Resolvendo para β, temos:

$$\beta=0\ ou\ \beta=15\ ou\ \beta=-15$$

Item b:

Para $\beta=0$:

$$p(z)=18z^3-7z=0\Leftrightarrow z(18z^2-7)=0$$
$$z=0\ ou\ z=\pm\sqrt{\frac{7}{18}}$$

Para $\beta=15$:

$$p(z)=18z^3+15z^2-7z-15$$

Do item anterior, temos que uma de suas raízes é $x_R=\frac{15}{18}=\frac{5}{6}$.

Usando Briot-Ruffini:

$\frac{5}{6}$	18	15	-7	-15
	18	30	18	0

Ou seja:

$$p(z)=\left(z-\frac{5}{6}\right)(18z^2+30z+18)$$

As raízes de $18z^2+30z+18=0$, usando Bháskara, são:

$$z=\frac{1}{6}\left(-5+i\sqrt{11}\right)\ ou\ z=-\frac{1}{6}\left(5+i\sqrt{11}\right)$$

Para $\beta=-15$:

$$p(z)=18z^3-15z^2-7z+15$$

Do item anterior, temos que uma de suas raízes é $x_R=\frac{-15}{18}=-\frac{5}{6}$.

Usando Briot-Ruffini:

$-5/6$	18	-15	-7	15
	18	-30	18	0

Ou seja:

$$p(z)=\left(z+\frac{5}{6}\right)(18z^2-30z+18)$$

As raízes de $18z^2-30z+18=0$, usando Bháskara, são:

$$z=\frac{1}{6}\left(5+i\sqrt{11}\right)\ ou\ z=\frac{1}{6}\left(5-i\sqrt{11}\right)$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{\beta}\in\{0,\pm15\}$ b) Soluções $=\left\{0,\pm\frac{5}{6},\frac{1}{6}\left(5\pm i\sqrt{11}\right),\frac{1}{6}\left(-5\pm i\sqrt{11}\right),\pm\sqrt{\frac{7}{18}}\right\}$

10. (ITA/2015)

Seja S o conjunto de todos os polinômios de grau 4 que têm três dos seus coeficientes iguais a 2 e os outros dois iguais a 1.

a) Determine o número de elementos de S.

b) Determine o subconjunto de S formado pelos polinômios que têm -1 como uma de suas raízes.

Comentários

Item a:

Primeiramente, temos um problema de análise combinatória. Observe que um polinômio de grau 4 possui 5 coeficientes. Desses, três devem ser 2 e dois devem ser 1.

Assim, basta escolher dois lugares para colocar os números “1” e, automaticamente, os outros três serão ocupados por números “2”. De quantas formas podemos escolher 2 lugares dentre 5? Do estudo das técnicas de contagem, sabemos que é:

$$\binom{5}{2} = 10$$

Item b:

Seja $p(x)$ um polinômio conforme o enunciado. Podemos escrevê-lo, de maneira mais geral, como sendo:

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Se -1 é uma de suas raízes, devemos ter:

$$p(-1) = a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 = 0$$

Ou seja:

$$a_4 + a_2 + a_0 = a_3 + a_1$$

Suponha que os números “1” estejam separados, um de cada lado da igualdade acima.

Teríamos, por exemplo:

$$1 + 2 + 2 = 1 + 2$$

Que é absurdo. Logo, os números “1” devem estar do mesmo lado da igualdade.

Suponha que eles estejam do lado direito.

Teríamos, necessariamente:

$$2 + 2 + 2 = 1 + 1$$

Que é absurdo. Ou seja, eles devem estar juntos no lado esquerdo da igualdade. Para que isso aconteça, temos 3 possibilidades, veja:

$$1 + 1 + 2 = 2 + 2$$
$$1 + 2 + 1 = 2 + 2$$
$$2 + 1 + 1 = 2 + 2$$

Dessa forma, temos os polinômios:

$$p_1(x) = x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2$$
$$p_2(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$p_3(x) = 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1$$

Gabarito: a) 10 ; b) $\boldsymbol{A = \{x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 2, x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1, 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x + 1\}}$

---

11. (ITA/2014)

Considere o polinômio complexo $p(z) = z^4 + az^3 + 5z^2 - iz - 6$, em que a é uma constante complexa. Sabendo que $2i$ é uma das raízes de $p(z) = 0$, as outras três raízes são

a) $-3i, -1, 1$.

b) $-i, i, 1$.

c) $-i, i, -1$.

d) $-2i, -1, 1$.

e) $-2i, -i, i$.

Comentário

Se $2i$ é uma raiz do polinômio, então:

$$p(2i) = 0 \Rightarrow (2i)^4 + a(2i)^3 + 5(2i)^2 - i(2i) - 6 = 0$$

Resolvendo, temos:

$$a = i$$

Assim, o polinômio fica:

$$p(z) = z^4 + iz^3 + 5z^2 - iz - 6$$

Cuidado! Os coeficientes de $p(z)$ não são reais, então, não podemos garantir de início que $-2i$ também é raiz. Verifique que não é.

Além disso, observe que:

$$p(1) = 1 + i + 5 - i - 6 = 0$$

Ou seja, 1 é raiz de $p(z)$. Vamos usar Briot-Ruffini:

1	1	i	5	$-i$	-6
	1	$1+i$	$6+i$	6	0

Usando novamente, agora para $2i$:

$2i$	1	$1+i$	$6+i$	6
	1	$1+3i$	$3i$	0

Assim, $p(z)$ fica:

$$p(z) = (z - 2i)(z - 1)(z^2 + (1 + 3i)z + 3i)$$

Olhando para o fator $z^2 + (1 + 3i)z + 3i$, temos que as raízes são:

$$z^2 + (1 + 3i)z + 3i = 0$$

$$z = \frac{-(1 + 3i) \pm \sqrt{(1 - 3i)^2}}{2} = \frac{-1 - 3i \pm (1 - 3i)}{2} \Rightarrow z = -1 \; ou \; z = -3i$$

Gabarito: "a".

12. (ITA/2012)

Considere um polinômio $p(x)$, de grau 5, com coeficientes reais. Sabe-se que $-2i$ e $i - \sqrt{3}$ são duas de suas raízes. Sabe-se, ainda, que dividindo-se $p(x)$ pelo polinômio $q(x) = x - 5$ obtém-se resto zero e que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$. Então, $p(-1)$ é igual a

a) $5(5 - 2\sqrt{3})$.

b) $15(5 - 2\sqrt{3})$.

c) $30(5 - 2\sqrt{3})$.

d) $45(5 - 2\sqrt{3})$.

e) $50(5 - 2\sqrt{3})$.

Comentários

O enunciado coloca de maneira desorganizada, mas já temos todas as raízes do polinômio, pois, se ele possui coeficientes reais, então $2i$ e $-i - \sqrt{3}$ também são raízes de $p(x)$, uma vez que eles são os conjugados complexos de $-2i$ e $i - \sqrt{3}$, respectivamente.

Além disso, $q(x)$ divide $p(x)$, ou seja:

$$p(x) = g(x)(x - 5) \Rightarrow p(5) = g(5) \cdot 0 = 0$$

Portanto, 5 também é raiz de $p(x)$.

Como ele possui grau 5, temos todas as suas raízes. Assim, podemos escrever:

$$p(x) = a(x - 5)(x - 2i)(x + 2i)(x + (-i - \sqrt{3}))(x + (i - \sqrt{3}))$$

Ou ainda:

$$p(x) = a(x - 5)(x^2 + 4)(x^2 + 2\sqrt{3}x + 4)$$

Do enunciado, temos que $p(1) = 20(5 + 2\sqrt{3})$, do que segue:

$$20\left(5+2\sqrt{3}\right)=a(1-5)(1^2+4)\left(1^2+2\sqrt{3}+4\right)\Rightarrow a=-1$$

Assim, o polinômio fica:

$$p(x)=-(x-5)(x^2+4)(x^2+2\sqrt{3}x+4)$$

Por fim:

$$p(-1)=-(-1-5)((-1)^2+4)((-1)^2-2\sqrt{3}+4)$$
$$\therefore p(-1)=30(5-2\sqrt{3})$$

Gabarito: "c".

---

13. (ITA/2010).

Considere o polinômio $p(x)=\sum_{n=0}^{15}a_nx^n$ com coeficientes $a_0=-1$ e $a_n=1+ia_{n-1}$, $n=1,2,\ldots,15$. Das afirmações:

I. $p(-1)\notin\mathbb{R}$,

II. $|p(x)|\leq 4\left(4+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$, $\forall x\in[-1,1]$,

III. $a_8=a_4$,

é (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) III.

d) I e II.

e) II e III.

Comentários

Primeiramente, vamos tentar conhecer melhor o polinômio fornecido. Para isso, vamos calcular seus coeficientes de índices mais baixos usando a_0 que foi fornecido:

$$a_1=1+ia_0=1-i$$
$$a_2=1+i(1-i)=2+i$$
$$a_3=1+i(2+i)=2i$$
$$a_4=1+i(2i)=-1$$

Perceba que $a_4=a_0$. Disso, temos que os coeficientes começam a se repetir de quatro em quatro vezes, pois a lei de recorrência nos garante isso.

Disso, temos que o polinômio pode ser escrito da seguinte forma:

$$p(x)=-(1+x^4+x^8+x^{12})+(1-i)(x+x^5+x^9+x^{13})$$
$$+(2+i)(x^2+x^6+x^{10}+x^{14})+2i(x^3+x^7+x^{11}+x^{15})$$

Vamos julgar os itens:

Item I:

Vamos calcular $p(-1)$:

$p(-1)=-(4)+(1-i)(-4)+(2+i)(4)+2i(-4)=4(-1-1+i+2+i-2i)=0$

Ou seja:

$$p(-1)=0\in\mathbb{R}$$

Portanto, é falso.

Item II:

O primeiro fato para o qual devemos atentar é que $x\in[-1,1]$. Que informação útil isso nos traz? Observe que a questão fala sobre módulo. Podemos então afirmar que:

$$|x|\leq 1$$

Além disso, do estudo dos números complexos, sabemos que, se temos n números complexos, podemos afirmar que:

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$$

Podemos escrever $p(x)$ como sendo:

$$p(x) = (1 + x^4 + x^8 + x^{12})(-1 + (1+i)x + (2+i)x^2 + 2ix^3)$$

Do que temos:

$$|p(x)| = |1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \cdot | -1 + (1+i)x + (2+i)x^2 + 2ix^3|$$

Usando a desigualdade acima, temos que:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 1 + |x^4| + |x^8| + |x^{12}|$$

E ainda:

$$|-1 + (1+i)x + (2+i)x^2 + 2ix^3| \leq |-1| + |(1+i)x| + |(2+i)x^2| + |2ix^3|$$

Observe que $|x| \leq 1 \Rightarrow |x^n| = |x|^n \leq 1$, pois $0 \leq |x|$. Prove isso por indução.

Dessa forma, temos que:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \leq 1 + |x^4| + |x^8| + |x^{12}| \leq 1 + 1 + 1 + 1 = 4$$

E ainda:

$$|-1 + (1+i)x + (2+i)x^2 + 2ix^3| \leq |-1| + |(1+i)x| + |(2+i)x^2| + |2ix^3|$$
$$\leq 1 + |1+i| + |2+i| + |2i| \leq 1 + \sqrt{2} + \sqrt{5} + 2 \leq 3 + \sqrt{2} + \sqrt{5} \leq 4 + \sqrt{2} + \sqrt{5}$$

Multiplicando as desigualdades, temos:

$$|1 + x^4 + x^8 + x^{12}| \cdot |-1 + (1+i)x + (2+i)x^2 + 2ix^3| \leq 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

Ou seja:

$$|p(x)| \leq 4(4 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$$

Portanto o item é verdadeiro.

Item III:

Como os coeficientes se repetem de quatro em quatro, podemos dizer que $a_4 = a_8$.

Verdadeira.

Gabarito: "e".

---

14. (ITA/2008)

Um polinômio P é dado pelo produto de 5 polinômios cujos graus formam uma progressão geométrica. Se o polinômio de menor grau tem grau igual a 2 e o grau de P é 62, então o de maior grau tem grau igual a

a) 30

b) 32

c) 34

d) 36

e) 38

Comentários

O fato básico que resolve essa questão é lembrar que o grau do polinômio resultante do produto de n outros polinômios é a soma dos graus desses polinômios. Dessa forma, se q é a razão dessa progressão, podemos representar os graus por:

$$(2, 2q, 2q^2, 2q^3, 2q^4)$$

Usando o fato básico, temos:

$$2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 = 62 \Rightarrow q^4 + q^3 + q^2 + q = 30$$

Observe que, como os graus de polinômios são números naturais, q também é natural. Dessa maneira, o polinômio $q^4 + q^3 + q^2 + q$ é crescente à medida que q cresce, pois é a soma de números positivos.

Vamos calcular o valor desse polinômio para $q = 3$:

$$3^4 + 3^3 + 3^2 + 3 = 120 \geq 30$$

Ou seja, para todo q natural acima de 3, temos que a soma é maior que 30, do que segue que a solução para essa equação, no domínio dos naturais deve ser 1 ou 2.

Vamos verificar:

$$q = 1 \Rightarrow 1^4 + 1^3 + 1^2 + 1 = 4 \neq 30$$
$$q = 2 \Rightarrow 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2 = 30$$

Portanto, $q = 2$ é a única solução e o maior termo dessa sequência é 32.

Gabarito: "b".

15. (ITA/2008)

Considere o polinômio $p(x) = a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 - a_1$, em que uma das raízes é $x = -1$. Sabendo-se que $a_1, a_2, a_3, a_4\ e\ a_5$ são reais e formam, nesta ordem, uma progressão aritmética com $a_4 = \frac{1}{2}$, então $p(-2)$ é igual a

a) -25

b) -27

c) -36

d) -39

e) -40

Comentários

Se $x = -1$ é raiz do polinômio, então, temos que:

$$p(-1) = -a_5 + a_4 - a_3 + a_2 - a_1 = 0$$

Além disso, como os coeficientes formam uma P.A., temos que os termos da sequência são:

$$(a_3 - 2r, a_3 - r, a_3, a_3 + r, a_3 + 2r)$$

Do que temos que:

$$p(-1) = -(a_3 + 2r) + (a_3 + r) - a_3 + a_3 - r - a_3 + 2r = 0 \Rightarrow a_3 = 0$$

Assim, a sequência fica:

$$(-2r, -r, 0, r, 2r)$$

Do enunciado, temos que:

$$a_4 = \frac{1}{2} = r$$

Assim, os coeficientes do polinômio são:

$$a_1 = -1; a_2 = -\frac{1}{2}; a_3 = 0; a_4 = \frac{1}{2}; a_5 = 1$$

Logo, o polinômio é:

$$p(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1$$

Por fim:

$$p(-2) = (-2)^5 + \frac{1}{2}(-2)^4 - \frac{1}{2}(-2)^2 + 1 = -25$$

Gabarito: "a".

16. (ITA/2007)

Um retângulo cujos lados medem B e H, um triângulo isósceles em que a base e a altura medem, respectivamente, B e H, e o círculo inscrito neste triângulo. Se as áreas do retângulo, do triângulo e do círculo, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, então B/H é uma raiz do polinômio

a) $\pi^3x^3 + \pi^2x^2 + \pi x - 2 = 0$.

b) $\pi^2x^3 + \pi^3x^2 + x + 1 = 0$.

c) $\pi^3x^3 - \pi^2x^2 + \pi x + 2 = 0$.

d) $\pi x^3 - \pi^2x^2 + 2\pi x - 1 = 0$.

e) $x^3 - 2\pi^2x^2 + \pi x - 1 = 0$.

Comentários

Primeiramente, vamos estabelecer os termos da progressão geométrica. Sejam eles:

$$(A_1, A_2, A_3)$$

Do enunciado, temos que:

$$A_1 = BH$$
$$A_2 = \frac{BH}{2}$$

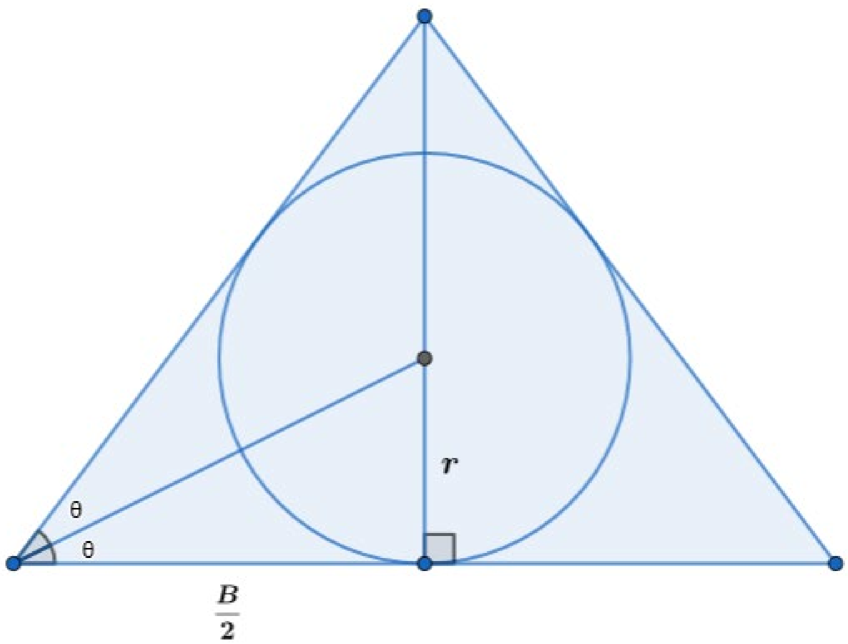
Disso, observamos que a razão da progressão é $\frac{1}{2}$, do que segue que:

$$A_3 = \frac{BH}{4}$$

Seja r o raio da circunferência inscrita no triângulo. Disso, temos que:

$$\pi r^2 = \frac{BH}{4} \Rightarrow r^2 = \frac{BH}{4\pi}$$

Observe a seguinte figura:



Dela, podemos escrever que:

$$tg(\theta) = \frac{2r}{B}\ e\ tg(2\theta) = \frac{2H}{B}$$

Da trigonometria, temos que:

$$tg(2\theta) = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2(\theta)}$$

Ou seja:

$$\frac{2H}{B}=\frac{\frac{4r}{B}}{1-\frac{4r^2}{B^2}}\Rightarrow 2H=\frac{2rB^2}{B^2-4r^2}\Rightarrow H(B^2-4r^2)=2rB^2$$

Substituindo r^2 na equação acima, para simplificar, temos:

$$H\left(B^2-\frac{4BH}{4\pi}\right)=2rB^2\Rightarrow H\left(\frac{B}{H}-\frac{1}{\pi}\right)=2r\left(\frac{B}{H}\right)$$

Elevando ao quadrado, membro a membro, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2-2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)=4r^2\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Substituindo r^2 novamente, temos:

$$H^2\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2-2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)=4\left(\frac{BH}{4\pi}\right)\left(\frac{B}{H}\right)^2$$

Logo:

$$\left(\left(\frac{B}{H}\right)^2-2\left(\frac{B}{H}\right)\cdot\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{B}{H}\right)^3$$

Faça $\frac{B}{H}=x$, logo:

$$x^2-\frac{2x}{\pi}+\frac{1}{\pi^2}=\frac{1}{\pi}x^3$$

Ou ainda:

$$\pi x^3-\pi^2x^2+2\pi x-1=0$$

Gabarito: “d”.

---

17. (ITA/2007)

Sendo c um número real a ser determinado, decomponha o polinômio $9x^2-63x+c$, numa diferença de dois cubos$(x+a)^3-(x+b)^3$.

Neste caso, $|a+|b|-c|$ é igual a

a) 104.

b) 114.

c) 124.

d) 134.

e) 144.

Comentários

Primeiramente, vamos fatorar a diferença de cubos fornecida. Veja:

$$(x+a)^3-(x+b)^3=(a-b)[(x+a)^2+(x+a)(x+b)+(x+b)^2]$$

Para fatorar a diferença de cubos, usamos a seguinte identidade:

$$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)$$

Continuando o desenvolvimento da diferença de cubos, temos:

$$(a-b)[(x+a)^2+(x+a)(x+b)+(x+b)^2]=$$
$$(a-b)(x^2+2ax+a^2+x^2+(a+b)x+ab+x^2+2bx+b^2)=$$
$$3(a-b)x^2+(a-b)(3a+3b)x+(a-b)(a^2+ab+b^2)=$$
$$3(a-b)x^2+(a-b)(3a+3b)x+a^3-b^3$$

Ou seja:

$$3(a-b)=9\Rightarrow a-b=3$$

E:

$$(a-b)(3a+3b)=3(a-b)(a+b)=-63 \Rightarrow (a-b)(a+b)=-21$$

Mas $a-b=3$, logo:

$$3(a+b)=-21 \Rightarrow a+b=-7$$

Resolvendo para a e b:

$$a=-2 \; e \; b=-5$$

Por fim, segue que:

$$c=a^3-b^3=(-2)^3-(-5)^3 \Rightarrow c=117$$

Calculando o que se pede:

$$|a+|b|-c|=|-2+5-117|=114$$

Gabarito: "b".

---

18. (ITA/2007)

Seja $Q(z)$ um polinômio do quinto grau, definido sobre o conjunto dos números complexos, cujo coeficiente de z^5 é igual a 1. Sendo z^3+z^2+z+1 um fator de $Q(z)$, $Q(0)=2$ e $Q(1)=8$, então, podemos afirmar que a soma dos quadrados dos módulos das raízes de $Q(z)$ é igual a

a) 9.

b) 7.

c) 5.

d) 3.

e) 1.

Comentários

Primeiramente, sabemos que se z^3+z^2+z+1 é um fator de $Q(z)$, podemos escrever a seguinte igualdade:

$$Q(z)=q(z)(z^3+z^2+z+1)$$

Em que $q(z)$ é um polinômio do segundo grau, pois $Q(z)$ é um polinômio do quinto grau.

Vamos usar as informações fornecidas:

$$Q(0)=2 \Rightarrow q(0)(0^3+0^2+0+1)=2 \Rightarrow q(0)=2$$
$$Q(1)=q(1)(1^3+1^2+1+1)=8 \Rightarrow q(1)=2$$

Como $q(0)=q(1)=2$, podemos afirmar que 1 e 0 são raízes de:

$$p(z)=q(z)-2$$

Ou seja:

$$p(z)=a(z-1)z=q(z)-2 \Rightarrow q(z)=a(z-1)z+2$$

Se $q(z)$ é de grau 2, logo, $p(z)$ também será.

Substituindo em $Q(z)$, vem:

$$Q(z)=[a(z-1)z+2](z^3+z^2+z+1)$$

Dessa forma, observe que a será o coeficiente de z^5. Portanto, $a=1$.

Ou seja:

$$Q(z)=(z^2-z+2)(z^3+z^2+z+1)$$

Queremos $Q(z)=0$, o que implica

$$z^2-z+2=0$$

Que, resolvendo para z, resulta em

$$z=\frac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$$

Em que z tem o quadrado de seu módulo dado por $|z|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2=\frac{1+7}{4}=2$. Além disso, ambas possuem o mesmo módulo pois são conjugadas.

Ou:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$$

Note que $z \neq 1$ nesse caso. Perceba que temos uma progressão geométrica de primeiro termo 1 e razão z e, como $z \neq 1$, podemos escrever:

$$z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{z^4 - 1}{z - 1} = 0 \Rightarrow z^4 = 1$$

Não estamos interessados em saber quais são as raízes dessa equação, apenas no quadrado do seu módulo. Então:

$$z^4 = 1 \Rightarrow |z|^4 = 1 \Rightarrow |z|^2 = \pm 1$$

Mas $|z|^2 \geq 0$. Do que segue que:

$$|z|^2 = 1$$

Ou seja, suas três raízes obedecem à relação acima.

Queremos a soma dos quadrados dos módulos. Temos então:

$$Soma\ dos\ quadrados\ dos\ módulos = 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 7$$

Gabarito: “b”.

19. (ITA/2006)

Considere o polinômio $p(x) = x^3 - (a+1)x + a$, onde $a \in \mathbb{Z}$. O conjunto de todos os valores de a, para os quais o polinômio $p(x)$ só admite raízes inteiras, é

a) $\{2n, n \in \mathbb{N}\}$.

b) $\{4n^2, n \in \mathbb{N}\}$.

c) $\{6n^2 - 4n, n \in \mathbb{N}\}$.

d) $\{n(n+1), n \in \mathbb{N}\}$.

e) $\mathbb{N}$.

Comentários

Um passo fundamental para a resolução dessa questão é perceber que $p(1) = 0$, veja:

$$p(1) = 1^3 - (a+1) \cdot 1 + a = 1 + a - (1 + a) = 0$$

De posse de uma das raízes, que é inteira, podemos utilizar o dispositivo de Briot-Ruffini para dividir o polinômio por $x - 1$:

1	1	0	$-a-1$	a
	1	1	$-a$	0

Logo, podemos escrever:

$$p(x) = (x-1)(x^2 + x - a)$$

Sabemos que uma das raízes de $p(x)$ é inteira. Para que todas sejam, seu fator $x^2 + x - a$ deve zerar para algum $n \in \mathbb{Z}$, isto é:

$$n^2 + n - a = 0$$

Essa equação possui solução geral:

$$n = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4a}}{2}$$

Ou seja:

$$2n + 1 = \pm\sqrt{1 + 4a} \Rightarrow (2n+1)^2 - 1 = 4a \Rightarrow 2n(2n+2) = 4a \Rightarrow a = n(n+1)$$

Portanto, concluímos que se tomarmos $a = n(n+1)$, com $n \in \mathbb{Z}$, atendemos as condições do enunciado.

Gabarito: “d”.

20. (ITA/2005)

No desenvolvimento de $(ax^2 - 2bx + c + 1)^5$ obtém-se um polinômio $p(x)$ cujos coeficientes somam 32. Se 0 e -1 são raízes de $p(x)$, então a soma $a + b + c$ é igual a

a) $-\frac{1}{2}$.

b) $-\frac{1}{4}$.

c) $\frac{1}{2}$.

d) 1.

e) $\frac{3}{2}$.

Comentários

Vamos usar, sucessivamente, as condições que ele nos impôs.

Condição 1: 0 é raiz de $p(x)$.

$$p(0) = (c + 1)^5 = 0 \Rightarrow c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$$

Condição 2: -1 é raiz de $p(x)$.

$$p(-1) = (a + 2b)^5 = 0 \Rightarrow a + 2b = 0 \Rightarrow a = -2b$$

Dessa forma, o polinômio pode ser escrito como:

$$p(x) = (-2bx^2 - 2bx)^5 = (-2b)^5(x^2 + x)^5$$

Antes de fazer o desenvolvimento de $p(x)$, observe que, dado um polinômio $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, temos que:

$$g(1) = a_n(1)^n + \cdots + a_1(1) + a_0 = a_n + \cdots + a_1 + a_0$$

Ou seja, para calcular a soma dos coeficientes de um polinômio qualquer, basta calcular seu valor para $x = 1$.

Condição 3: Os coeficientes de $p(x)$, no desenvolvimento, somam 32.

Conforme visto acima, temos:

$$p(1) = (-2b)^5(1^2 + 1)^5 = 32 \Rightarrow (-2b)^5 = 1$$

Como $b \in \mathbb{R}$, vem:

$$-2b = 1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

Por fim:

$$a + b + c = -2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Gabarito: “a”.

---

21. (ITA/2003)

Dividindo-se o polinômio $P(x) = x^5 + ax^4 + bx^2 + cx + 1$ por $(x - 1)$, obtém-se resto igual a 2. Dividindo-se $P(x)$ por $(x + 1)$, obtém-se resto igual a 3. Sabendo que $P(x)$ é divisível por $(x - 2)$, tem-se que o valor de $\frac{ab}{c}$ é igual a:

a) -6.

b) -4.

c) 4.

d) 7.

e) 9.

Comentários

Do estudo da divisão de polinômios, podemos escrever as seguintes equações:

$$P(x) = q_1(x)(x-1) + 2$$
$$P(x) = q_2(x)(x+1) + 3$$
$$P(x) = q_3(x)(x-2)$$

Perceba que:

$$P(1) = q_1(1)(1-1) + 2 = 2$$
$$P(-1) = q_2(-1)(-1+1) + 3 = 3$$
$$P(2) = q_3(2)(2-2) = 0$$

Ou seja:

$$P(1) = 1 + a + b + c + 1 = 2 \Rightarrow a + b + c = 0$$
$$P(-1) = -1 + a + b - c + 1 = 3 \Rightarrow a + b - c = 3$$
$$P(2) = 32 + 16a + 4b + 2c + 1 = 0 \Rightarrow 16a + 4b + 2c = -33$$

Obtemos, então, o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + b - c = 3 \\ 16a + 4b + 2c = -33 \end{cases}$$

Da primeira equação, temos:

$$a + b = -c$$

Substituindo na segunda:

$$-c - c = 3 \Rightarrow c = -\frac{3}{2}$$

Substituindo c na terceira equação:

$$16a + 4b - 3 = -33 \Rightarrow 8a + 2b = -15 \Rightarrow b = \frac{-15 - 8a}{2}$$

Ou seja:

$$a + \frac{-15 - 8a}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2a - 15 - 8a = 3 \Rightarrow -6a = 18 \Rightarrow a = -3$$

Por fim:

$$b = \frac{-15 - 8 \cdot (-3)}{2} = \frac{9}{2}$$

Queremos:

$$\frac{ab}{c} = \frac{-3 \cdot \frac{9}{2}}{-\frac{3}{2}} = 9$$

Gabarito: "e".

---

22. (ITA/2003)

Considere o polinômio $P(x) = 2x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, cujos coeficientes $2, a_2, \dots, a_n$ formam, nesta ordem, uma progressão geométrica com razão $q > 0$. Sabendo que $-\frac{1}{2}$ é uma raiz de P e que $P(2) = 5460$, tem-se que o valor de $(n^2 - q^3)/q^4$ é igual a:

a) $5/4$.

b) $3/2$.

c) $7/4$.

d) $11/6$.

e) $15/8$.

Comentários

Se $2, a_2, \dots, a_n$ formam uma P.G., nesta ordem, podemos escrever a n-upla ordenada dos coeficientes:

$$(2, 2q, \dots, 2q^{n-1})$$

Substituindo no polinômio:

$$P(x) = 2x + 2qx^2 + \cdots + 2q^{n-1}x^n$$

Temos que $x = -\frac{1}{2}$ é raiz de $P(x)$, ou seja:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 2q\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + 2q^{n-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Vamos pegar um termo qualquer de coeficiente de índice i de $P\left(-\frac{1}{2}\right)$:

$$2q^{i-1}\left(-\frac{1}{2}\right)^i = (-1)^i q^{i-1}\left(\frac{1}{2^{i-1}}\right) = (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^{i-1}$$

Seja, então, a progressão geométrica de termos b_i definidos por:

$$b_i = (-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^{i-1}$$

Note que:

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{b_{n+1} - b_1}{-\frac{q}{2} - 1} = 0 \Rightarrow b_{n+1} = b_1$$

Isto é:

$$(-1)\left(-\frac{q}{2}\right)^n = -1 \Rightarrow \left(-\frac{q}{2}\right)^n = 1 \; eq.01$$

Note que $q > 0$, pois o enunciado assim restringe.

Essa equação é do tipo:

$$z^m = 1$$

Que do estudo dos números complexos, sabemos que somente admite 1 ou -1 como raízes reais. Além disso, $z = -1$ é raiz quando m é par.

Olhando para a equação 01, a única forma de satisfazer o enunciado é termos

$$-\frac{q}{2} = -1 \Rightarrow q = 2$$

Do que segue que n deve ser par.

Por outro lado:

$$P(2) = 2(2) + 2q(2)^2 + \cdots + 2q^{n-1}(2)^n = 4 + 4(2q) + \cdots + 4(2q)^{n-1}$$

Seja então a P.G. de termos

$$c_i = 4(2q)^{i-1}$$

Sua soma:

$$P(2) = c_1 + \cdots c_n = \frac{c_{n+1} - c_1}{2q - 1} = 5460 \Rightarrow \frac{4(2\cdot 2)^n - 4}{2\cdot 2 - 1} = 5460 \Rightarrow 2^{2n} = 4096 = 2^{12}$$

Ou seja:

$$2^{2n} = 2^{12} \Rightarrow 2n = 12 \Rightarrow n = 6$$

Note que n é, de fato, par.

Por fim:

$$\frac{n^2 - q^3}{q^4} = \frac{6^2 - 2^3}{2^4} = \frac{7}{4}$$

Gabarito: "c".

---

23. (ITA/2002)

A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$. Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b, então $a^2 + b^2$ vale:

a) 13.

b) 5.

c) 2.

d) 1.

e) 0.

Comentários

Essa questão requer apenas que escrevamos o que está sendo dito. Veja:

“A divisão de um polinômio $f(x)$ por $(x-1)(x-2)$ tem resto $x+1$”, significa:

$$f(x) = q(x)(x-1)(x-2) + x + 1$$

“Se os restos das divisões de $f(x)$ por $x-1$ e $x-2$ são, respectivamente, os números a e b”, significa:

$$f(x) = q_1(x)(x-1) + a$$
$$f(x) = q_2(x-2) + b$$

Mas, da primeira relação, temos que:

$$f(2) = q(2)(2-1)(2-2) + 2 + 1 = 3 \Rightarrow f(2) = 3$$
$$f(1) = q(1)(1-1)(1-2) + 1 + 1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$$

Ou seja:

$$f(1) = q_1(1)(1-1) + a \Rightarrow f(1) = a \Rightarrow a = 2$$
$$f(2) = q_2(2)(2-2) + b \Rightarrow f(2) = b \Rightarrow b = 3$$

Por fim, temos:

$$a^2 + b^2 = 2^2 + 3^2 = 13$$

Gabarito: “a”.

---

24. (ITA/2001)

Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x+y)^n$, temos que o número de arranjos sem repetição de n elementos, tomados 2 a 2, é:

a) 80.

b) 90.

c) 70.

d) 100.

e) 60.

Comentários

O enunciado fala sobre soma de coeficientes.

Antes de sair usando o binômio de Newton, lembre-se que um polinômio $P(x,y)$, obtido pelo desenvolvimento de $(x+y)^n$, é da forma:

$$P(x,y) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_0 y^n$$

Assim, observe que:

$$P(1,1) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$$

Ou seja, se $p(x,y) = (x+y)^n$, a soma de seus coeficientes é dada por:

$$p(1,1) = (1+1)^n = 2^n$$

Do enunciado, temos que:

$$2^n = 1024 = 2^{10} \Rightarrow n = 10$$

Queremos:

$$A(n,p) = \frac{n!}{(n-p)!} = \frac{10!}{(10-2)!} = 10 \cdot 9 = 90$$

Gabarito: "b".

25. (ITA/2000)

Seja $P(x)$ um polinômio divisível por $x-1$. Dividindo-o por x^2+x, obtêm-se o quociente $Q(x) = x^2 - 3$ e o resto $R(x)$. Se $R(4) = 10$, então o coeficiente do termo de grau 1 de $P(x)$ é igual a

a) -5.

b) -3.

c) -1.

d) 1.

e) 3.

Comentários

Se $P(x)$ é divisível por $x-1$, podemos escrever:

$$P(x) = H(x)(x-1)$$

Do que temos que:

$$P(1) = H(1)(1-1) = 0 \Rightarrow P(1) = 0$$

Além disso, seja $G(x) = x^2 + x$, temos que:

$$P(x) = Q(x)G(x) + R(x)$$

Do estudo dos polinômios, sabemos que o grau do resto, $R(x)$, é menor que o grau de $G(x)$, ou seja:

$$\partial R(x) < 2$$

Do que segue que $R(x)$ é do tipo:

$$R(x) = ax + b$$

Pois seu grau é, no máximo, 1.

Sabemos que 1 é raiz de $P(x)$, isso nos fornece:

$$P(1) = 0 = Q(1)G(1) + R(1) \Rightarrow (1^2 - 3)(1^2 + 1) + R(1) \Rightarrow R(1) = 4$$

Do enunciado, temos que $R(4) = 10$. Assim, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 4a + b = 10 \\ a + b = 4 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema para a e b, vem:

$$a = 2 \ e \ b = 2$$

Do que temos:

$$P(x) = (x^2 - 3)(x^2 + x) + 2x + 2 \Rightarrow P(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - x + 2$$

Gabarito: "c".

Questões IME Comentadas

26. (IME/2020)

Um polinômio $P(x)$ de grau maior que 3 quando dividido por $x-2$, $x-3$ e $x-5$ deixa restos 2, 3 e 5, respectivamente. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$ é:

a) 1

b) x

c) 30

d) $x - 1$

e) $x - 30$

Comentários

A divisão de um polinômio $P(x)$ por um divisor $D(x)$ é:

$$P(x) = D(x) \cdot Q(x) + R(x)$$

Do enunciado:

$$P(x) = (x-2) \cdot Q_1(x) + 2 \Rightarrow P(2) = 2$$
$$P(x) = (x-3) \cdot Q_2(x) + 3 \Rightarrow P(3) = 3$$
$$P(x) = (x-5) \cdot Q_3(x) + 5 \Rightarrow P(5) = 5$$

Queremos saber o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-2)(x-3)(x-5)$, logo:

$$P(x) = \underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{grau\ 3} Q(x) + R(x)$$

Como nosso divisor tem grau 3, o grau do resto deve ser menor ou igual a 2. Vamos supor que o grau do resto seja 2:

$$R(x) = ax^2 + bx + c$$
$$P(x) = \underbrace{(x-2)(x-3)(x-5)}_{raízes\ 2,3\ e\ 5} Q(x) + ax^2 + bx + c$$

Fazendo $x = 2; 3; 5$, obtemos:

$$P(2) = 4a + 2b + c = 2$$
$$P(3) = 9a + 3b + c = 3$$
$$P(5) = 25a + 5b + c = 5$$

Agora, basta resolver o sistema linear:

$$\begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \ \ (I) \\ 9a + 3b + c = 3 \ \ (II) \\ 25a + 5b + c = 5 \ \ (III) \end{cases}$$

Fazendo $(II) - (I)$ e $(III) - (II)$, encontramos:

$$\begin{cases} 5a + b = 1 \\ 16a + 2b = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10a + 2b = 2 \\ 16a + 2b = 2 \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação desse sistema com a primeira:

$$6a = 0 \Rightarrow a = 0$$
$$a = 0 \Rightarrow 5a + b = 1 \Rightarrow b = 1$$
$$a = 0, b = 1 \Rightarrow 4a + 2b + c = 2 \Rightarrow c = 0$$

Portanto, o resto é dado por:

$$\boxed{R(x) = x}$$

Gabarito: "b".

---

27. (IME/2019)

Seja a inequação:

$$6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x < 0$$

Seja (a, b) um intervalo contido no conjunto solução dessa inequação. O maior valor possível para $b - a$ é:

a) 2

b) $13/6$

c) $1/3$

d) 5/2

e) 8/3

Comentários

Inicialmente, devemos fatorar a expressão do polinômio:

$$p(x) = 6x^4 - 5x^3 - 29x^2 + 10x = x(6x^3 - 5x^2 - 29x + 10)$$

Para simplificar a expressão do terceiro grau podemos aplicar o teorema das raízes racionais. Os números divisores do coeficiente $a_0 = 10$ são $\{\pm 1; \pm 2; \pm 5; \pm 10\}$, vamos verificar se há alguma raiz inteira:

Para $x = 1$:

$$6(1)^3 - 5(1)^2 - 29(1) + 10 = 6 - 5 - 29 + 10 = -18$$

Para $x = -1$:

$$6(-1)^3 - 5(-1)^2 - 29(-1) + 10 = -6 - 5 + 29 + 10 = 28$$

Para $x = 2$:

$$6(2)^3 - 5(2)^2 - 29(2) + 10 = 48 - 20 - 58 + 10 = -20$$

Para $x = -2$:

$$6(-2)^3 - 5(-2)^2 - 29(-2) + 10 = -48 - 20 + 58 + 10 = 0$$

Portanto, $x = -2$ é raiz. Podemos aplicar o algoritmo de Briot-Ruffini:

-2	6	-5	-29	10
	6	-17	5	0

Assim, encontramos:

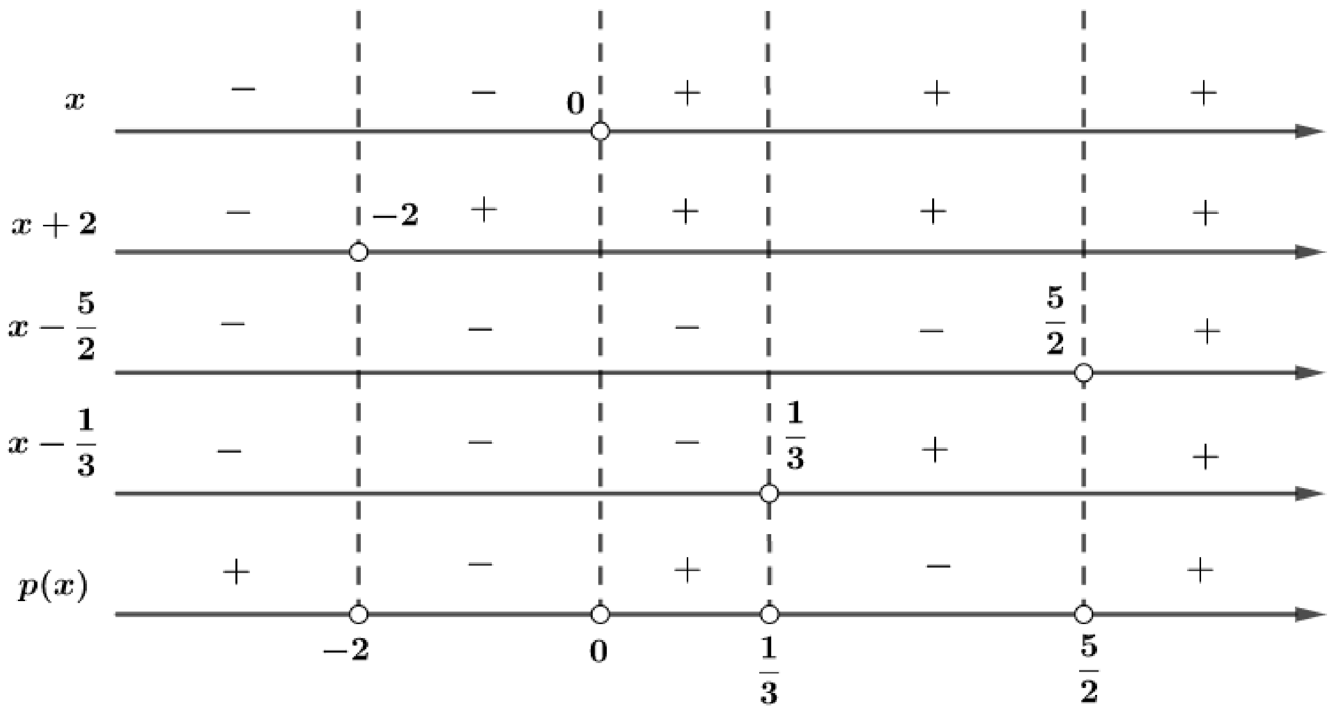
$$p(x) = x(x + 2)(6x^2 - 17x + 5)$$

Para simplificar a expressão do segundo grau, basta encontrar suas raízes:

$$6x^2 - 17x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{17 \pm \sqrt{169}}{12} = \frac{17 \pm 13}{12} = \frac{5}{2} \text{ ou } \frac{1}{3}$$

$$\boxed{p(x) = x(x + 2)\left(x - \frac{5}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right)}$$

Vamos fazer o estudo do sinal:



Desse modo, para $p(x) < 0$, devemos ter:

$$\boxed{x \in (-2, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)}$$

Como (a, b) está contido no conjunto solução e queremos que $b - a$ seja máximo, então:

Se $(a, b) = (-2, 0)$:

$$b - a = 0 - (-2) = 2$$

Se $(a, b) = \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{2}\right)$:

$$b - a = \frac{5}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6} > 2$$

Portanto:

$$\boxed{b - a = \frac{13}{6}}$$

Gabarito: "b".

28. (IME/2019)

Sejam x_1, x_2 e x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Sendo a um número real, o valor de $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ é igual a:

a) $32 - a$

b) $48 - 2a$

c) 48

d) $48 + 2a$

e) $32 + a$

Comentários

A questão pede para calcular o valor da expressão $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$, sendo x_1, x_2, x_3 raízes da equação $x^3 - ax - 16 = 0$. Notando a presença do termo cúbico na equação, podemos substituir as raízes nessa equação e encontrar:

$$x_1^3 - ax_1 - 16 = 0$$
$$x_2^3 - ax_2 - 16 = 0$$
$$x_3^3 - ax_3 - 16 = 0$$

Somando as equações:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - a(x_1 + x_2 + x_3) - 48 = 0$$
$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a(x_1 + x_2 + x_3) + 48}$$

Pelas relações de Girard, obtemos:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = a\underbrace{(x_1 + x_2 + x_3)}_{0} + 48$$

Portanto:

$$\boxed{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 48}$$

Gabarito: "c".

29. (IME/2019)

Seja o polinômio $q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$ que possui valor mínimo igual a -64, onde k é uma constante real. Determine as raízes de $q(x)$.

Comentários

Antes de encontrarmos as raízes de $q(x)$, devemos calcular o valor de k tal que o mínimo de q seja -64. Podemos resolver essa questão de vários modos. Veja:

Método 1) Derivada

Derivando o polinômio e igualando a zero:

$$q'(x) = 4x^3 - 24x^2 + 12x + 40 = 0$$
$$\Rightarrow q'(x) = 4(x^3 - 6x^2 + 3x + 10) = 0$$

As soluções dessa equação são os pontos de máximos e/ou mínimos locais do polinômio. Note que $x = 2$ satisfaz a equação:

$$q'(2) = (2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) + 10 = 0$$

Aplicando o algoritmo de Briot-Ruffini em $q'(x)$, obtemos:

2	1	−6	3	10
	1	−4	−5	0

$$q'(x) = 4(x-2)(x^2 - 4x - 5)$$

Fatorando $q'(x)$:

$$\boxed{q'(x) = 4(x-2)(x-5)(x+1)}$$

Logo, $x = -1$ e $x = 5$ também são raízes. Substituindo esses valores em $q(x)$, temos:

$$q(-1) = (-1)^4 - 8(-1)^3 + 6(-1)^2 + 40(-1) + 25 + k$$
$$\boxed{q(-1) = k}$$
$$q(2) = (2)^4 - 8(2)^3 + 6(2)^2 + 40(2) + 25 + k$$
$$\boxed{q(2) = k + 81}$$
$$q(5) = (5)^4 - 8(5)^3 + 6(5)^2 + 40(5) + 25 + k$$
$$\boxed{q(5) = k}$$

Como $q(2) > q(-1) = q(5)$, temos que $q(-1)$ e $q(5)$ são os mínimos do polinômio. Assim, temos:

$$q(-1) = q(5) = \boxed{k = -64}$$

Precisamos calcular as raízes do seguinte polinômio:

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x + 25 + k$$
$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 40x - 39$$

Perceba que $x = 1$ e $x = 3$ são raízes de $q(x)$. Logo, podemos aplicar Briot-Ruffini:

1	1	−8	6	40	−39
3	1	−7	−1	39	0
	1	−4	−13	0	

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = (x-1)(x-3)(x^2 - 4x - 13)}$$

Solucionando a equação quadrática, encontramos:

$$x^2 - 4x - 13 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-13)}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{17}}{2}$$
$$\Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{17}$$

Portanto, as raízes o polinômio $q(x)$ são dadas por:

$$S = \{1;\ 3;\ 2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17}\}$$

Método 2) Fatoração

Sabendo que $(x-2)^4 = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$, podemos usar essa relação para fatorar $q(x)$. Completando-se os quadrados e fatorando $q(x)$, obtemos:

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + \underbrace{6x^2}_{24x^2 - 18x^2} + \underbrace{40x}_{-32x + 72x} + \underbrace{25}_{16 + 9} + k$$

$$q(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 - 18x^2 + 72x + \underbrace{9}_{-72+81} + k$$

$$q(x) = (x-2)^4 - 18\underbrace{(x^2 - 4x + 4)}_{(x-2)^2} + 81 + k$$

$$q(x) = \underbrace{(x-2)^4 - 18(x-2)^2 + 81}_{[(x-2)^2-9]^2} + k$$

$$q(x) = [\underbrace{(x-2)^2 - 9}_{(x-2-3)(x-2+3)}]^2 + k$$

Assim, encontramos a forma simplificada de $q(x)$:

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = [(x-5)(x+1)]^2 + k}$$

Dado que $[(x-5)(x+1)]^2 \geq 0$, temos:

$$[(x-5)(x+1)]^2 \geq 0 \overset{+k}{\Rightarrow} [(x-5)(x+1)]^2 + k \geq k$$

$$\Rightarrow q(x) \geq k$$

Como $q_{min}(x) = -64$, devemos ter $k = -64$. Logo:

$$q(x) = [(x-5)(x+1)]^2 - 64$$

Fatorando $q(x)$:

$$q(x) = [(x-5)(x+1) - 8][(x-5)(x+1) + 8]$$

$$q(x) = (x^2 - 4x - 13)(x^2 - 4x + 3)$$

$$\Rightarrow \boxed{q(x) = (x^2 - 4x - 13)(x-3)(x-1)}$$

Raízes:

$$S = \{1;\ 3;\ 2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17}\}$$

Gabarito: $S = \{1;\ 3;\ 2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17}\}$

30. (IME/2018)

Seja $P(x)$ o polinômio de menor grau que passa pelos pontos $A(2, -4 + 3\sqrt{3})$, $B(1, 3\sqrt{2} - 2)$, $C(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ e $D(\sqrt{3}, \sqrt{2})$. O resto da divisão de $P(x)$ por $(x - 3)$ é:

a) $8\sqrt{3} - 5\sqrt{2} - 6$.

b) $6\sqrt{3} - 4\sqrt{2} - 1$.

c) $9\sqrt{3} - 8\sqrt{2} - 2$.

d) $4\sqrt{3} - 10\sqrt{2} - 3$.

e) $4\sqrt{3} - \sqrt{2} - 2$.

Comentários

Essa questão requer uma técnica especial chamada de Polinômio Interpolador de Lagrange.

Queremos responder à seguinte pergunta:

Dados 4 pontos no plano, qual o polinômio de menor grau que passa por esses quatro pontos?

A resposta é o polinômio abaixo, dado por:

$$P(x) = p_A(x) + p_B(x) + p_C(x) + p_D(x)$$

A estratégia para montar esse polinômio é a seguinte:

Sabemos que $P(2) = -4 + 3\sqrt{3}$. Ou seja:

$$P(2) = p_A(2) + p_B(2) + p_C(2) + p_D(2) = -4 + 3\sqrt{3}$$

Vamos construir as parcelas de modo que $p_B(2) = p_C(2) = p_D(2) = 0$ e $p_A(2) = -4 + 3\sqrt{3}$. E de maneira análoga:

$$p_A(1) = p_C(1) = p_D(1) = 0 \ e \ p_B(1) = 3\sqrt{2} - 2$$

$$p_A(\sqrt{2}) = p_B(\sqrt{2}) = p_D(\sqrt{2}) = 0 \ e \ p_C(\sqrt{2}) = \sqrt{3}$$

$$p_A(\sqrt{3}) = p_B(\sqrt{3}) = p_C(\sqrt{3}) = 0\ e\ p_D(\sqrt{3}) = \sqrt{2}$$

Perceba que, por exemplo para $p_A(x)$, temos pelo menos três raízes:

$$1, \sqrt{2}\ e\ \sqrt{3}$$

Ou seja, seu grau é no mínimo 3. Veja que isso ocorre para as outras parcelas também.

Assim, sabemos, por exemplo, que $p_A(x) = a(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})$. Queremos ainda que:

$$p_A(2) = a(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3}) = -4 + 3\sqrt{3}$$

Ou seja:

$$a = \frac{-4 + 3\sqrt{3}}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

Do que temos:

$$p_A(x) = \frac{(-4 + 3\sqrt{3})(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$$

Seguindo o raciocínio que foi feito acima para as outras parcelas, temos que:

$$p_B(x) = \frac{(3\sqrt{2} - 2)(x-2)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})}{(1-2)(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})}$$

$$p_C(x) = \frac{(\sqrt{3})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$p_D(x) = \frac{(\sqrt{2})(x-2)(x-1)(x-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}$$

Queremos o resto da divisão de $P(x)$ por $(x-3)$. Como o grau de $x-3$ é 1, o grau do resto é zero, do que temos:

$$P(x) = q(x)(x-3) + r$$

Para calcular r, vamos calcular $P(3)$, veja:

$$P(3) = q(3)(3-3) + r = r$$

Já temos $P(x)$, basta calcularmos cada parcela para $x = 3$, veja:

$$p_A(3) = \frac{(-4 + 3\sqrt{3})(3-1)(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{(2-1)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})} = -3\sqrt{2} + 20\sqrt{3} + 5\sqrt{6} - 12$$

$$p_B(3) = \frac{(3\sqrt{2} - 2)(3-2)(3-\sqrt{2})(3-\sqrt{3})}{(1-2)(1-\sqrt{2})(1-\sqrt{3})} = \sqrt{6} - 10\sqrt{3}$$

$$p_C(3) = \frac{(\sqrt{3})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-2)(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-\sqrt{3})} = 15\sqrt{2} + 6\sqrt{3} + 3\sqrt{6} + 18$$

$$p_D(3) = \frac{(\sqrt{2})(3-2)(3-1)(3-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = -12 - 17\sqrt{2} - 8\sqrt{3} - 9\sqrt{6}$$

Dessa forma, temos que:

$$P(3) = p_A(3) + p_B(3) + p_C(3) + p_D(3) = -6 - 5\sqrt{2} + 8\sqrt{3}$$

Gabarito: "a".

31. (IME/2015)

Qual o resto da divisão do polinômio $x^{26} - x^{25} - 6x^{24} + 5x^4 - 16x^3 + 3x^2$ pelo polinômio $x^3 - 3x^2 - x + 3$?

a) $x^2 + x - 2$

b) $6x^2 - 4x + 3$

c) $3x-9$

d) $6x^2-17x-3$

e) $6x+1$

Comentários

Primeiramente, perceba que:

$$x^3-3x^2-x+3=x^2(x-3)-(x-3)=(x^2-1)(x-3)=(x-1)(x+1)(x-3)$$

Suas raízes são dadas por:

$$(x-1)(x+1)(x-3)=0$$

Ou seja:

$$x=1, x=-1\ ou\ x=3$$

Seja $p(x)=x^{26}-x^{25}-6x^{24}+5x^4-16x^3+3x^2$ e $g(x)=x^3-3x^2-x+3$. Do estudo da divisão de polinômios, vem:

$$p(x)=q(x)g(x)+r(x)\ \ eq.01$$

E ainda temos da análise do grau que:

$$\partial r<\partial g=3$$

Vamos supor então que $r(x)=ax^2+bx+c$.

Da $eq.01$, temos que:

$$p(1)=q(1)g(1)+r(1)=q(1)\cdot 0+r(1)=r(1)\Rightarrow p(1)=r(1)$$
$$p(-1)=q(-1)g(-1)+r(-1)=q(-1)\cdot 0+r(-1)=r(-1)\Rightarrow p(-1)=r(-1)$$
$$p(3)=q(3)g(3)+r(3)=q(3)\cdot 0+r(3)=r(3)\Rightarrow p(3)=r(3)$$

Vamos então calcular $p(1), p(-1)\ e\ p(3)$.

Mas antes disso, perceba que:

$$p(x)=x^{26}-x^{25}-6x^{24}+5x^4-16x^3+3x^2=x^{24}(x^2-x-6)+x^2(5x^2-16x+3)$$

Ou ainda:

$$p(x)=x^{24}(x+2)(x-3)+x^2(5x-1)(x-3)=x^2(x-3)[x^{22}(x+2)+5x-1]$$

Ou seja:

$$p(x)=x^2(x-3)[x^{22}(x+2)+5x-1]$$

Fica óbvio, então, que:

$$p(3)=0$$

Além disso, temos:

$$p(1)=1^2\cdot(1-3)\cdot[1^{22}(1+2)+5-1]=-14$$
$$p(-1)=(-1)^2(-1-3)[(-1)^{22}(-1+2)-5-1]=20$$

Assim, temos que:

$$p(3)=r(3)=0=a\cdot 3^2+b\cdot 3+c\Rightarrow 9a+3b+c=0$$
$$p(1)=r(1)=-14=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c\Rightarrow a+b+c=-14$$
$$p(-1)=20=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c\Rightarrow a-b+c=20$$

Que resulta no sistema:

$$\begin{cases}9a+3b+c=0\\ a+b+c=-14\\ a-b+c=20\end{cases}$$

Somando a segunda e a terceira equação, vem:

$$2a+2c=6\Rightarrow a+c=3$$

Substituindo $a+c$ na segunda equação, temos:

$$3+b=-14\Rightarrow b=-17$$

Subtraindo a primeira da terceira equação, vem:

$$a-b+c-(9a+3b+c)=20-0\Rightarrow -8a-4b=20\Rightarrow -5-b=2a$$

Ou seja:

$$-5-(-17)=2a\Rightarrow a=6$$

Por fim:

$$a + c = 3 \Rightarrow 6 + c = 3 \Rightarrow c = -3$$

Dessa maneira, obtemos:

$$r(x) = 6x^2 - 17x - 3$$

Gabarito: "d".

---

32. (IME/2012)

Considere o polinômio $5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0$. Sabendo que ele admite uma solução da forma $\sqrt{n}$, onde n é um número natural, pode se afirmar que:

a) $1 \leq n < 5$

b) $6 \leq n < 10$

c) $10 \leq n < 15$

d) $15 \leq n < 20$

e) $20 \leq n < 30$

Comentários

Vamos fatorar o polinômio. Perceba que:

$$5x^3 - 3x^2 - 60x + 36 = 0 \Rightarrow x^2(5x - 3) - 12(5x - 3) = 0$$

Ou seja:

$$(5x - 3)(x^2 - 12) = 0$$

Disso, temos que:

$$5x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{5}$$

Ou:

$$x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{12}$$

Note que, das raízes encontradas, a única da forma $\sqrt{n}$, com $n \in \mathbb{N}$ é $x = \sqrt{12}$.

Ou seja, $n = 12$.

Observação: Que lição podemos aprender com essa questão? Podemos aprender que, quando se é questionado acerca das raízes de uma equação, às vezes, pode ser frutífero tentar fatorar o polinômio. Por isso, treine bastante fatoração.

Gabarito: "c".

---

33. (IME/2011)

Seja $p(x)$ uma função polinomial satisfazendo a relação $p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p(\frac{1}{x})$. Sabendo que $p(3) = 28$, o valor de $p(4)$ é:

a) 10

b) 30

c) 45

d) 55

e) 65

Comentários

Primeiramente, vamos escrever a relação dada de outra forma:

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) = p(x) + p\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow p(x)p\left(\frac{1}{x}\right) - p(x) - p\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Ou ainda:

$$p(x)p\left(\frac{1}{x}\right)-p(x)-p\left(\frac{1}{x}\right)+1=1\Rightarrow p(x)\left[p\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]-\left[p\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]=0$$

Do que temos:

$$[p(x)-1]\left[p\left(\frac{1}{x}\right)-1\right]=1\ \ eq.01$$

Faça $p(x)-1=g(x)$, do que temos, da equação 01:

$$g(x)g\left(\frac{1}{x}\right)=1$$

Seja $g(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$. Temos então:

$$g\left(\frac{1}{x}\right)=a_n\left(\frac{1}{x^n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0$$

Substituindo na equação 01:

$$[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0]\left[a_n\left(\frac{1}{x^n}\right)+a_{n-1}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)+\cdots+a_1\left(\frac{1}{x}\right)+a_0\right]=1$$

Multiplicando ambos os lados por x^n:

$$[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0][a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}+a_0x^n]=x^n$$

Note que o termo independente, pelo lado esquerdo, é dado por:

$$a_0a_n$$

E do lado direito, todos os coeficientes são zero, à exceção do coeficiente de x^n. Ou seja:

$$a_0a_n=0$$

Como se supõe $a_n\neq 0$, temos:

$$a_0=0$$

Do que resulta:

$$[a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x][a_n+a_{n-1}x+\cdots+a_1x^{n-1}]=x^n$$

Repetindo o processo, vemos que o coeficiente do termo x, pelo lado esquerdo, é:

$$a_1a_n=0$$

Ou seja:

$$a_1=0$$

Repetindo esse processo, ordenadamente, obtemos:

$$a_nx^n\cdot a_n=x^n\Rightarrow a_n^2=1\Rightarrow a_n=\pm 1$$

Assim:

$$g(x)=\pm x^n\Rightarrow p(x)=\pm x^n+1$$

Do enunciado:

$$p(3)=28\Rightarrow \pm 3^n+1=28\Rightarrow \pm 3^n=27$$

Como $3>0$, devemos ter $3^n>0$, ou seja, devemos descartar a possiblidade $p(x)=-x^n+1$.
Além disso, veja que:

$$3^n=27=3^3$$

Como a função exponencial é injetora, devemos ter $n=3$ como única solução possível.
Por fim:

$$p(x)=x^3+1$$

Do que segue:

$$p(4)=4^3+1=65$$

Gabarito: "e".

34. (IME/2011)

Sejam o polinômio e conjunto $p(x)=2x^3-3x^2+2$ e os conjuntos $A=\{p(k)/k\in\mathbb{N}\ e\ k\leq 1999\}$, $B=\{r^2+1\,/r\in\mathbb{N}\}$ e $C=\{q^2+2/q\in\mathbb{N}\}$. Sabe-se que $y=n(A\cap B)-n(A\cap C)$, onde $n(E)$ é o número de elementos do conjunto E. Determine o valor de y.

Obs.: $\mathbb{N}$ é *o conjunto dos números naturais.*

Comentários

Vamos analisar cada conjunto separadamente.

Conjunto $A \cap B$:

$$2k^3 - 3k^2 + 2 = r^2 + 1 \Rightarrow 2k^3 - 3k^2 + 1 = r^2$$

Fatorando o lado esquerdo da equação, temos:

$$(k-1)^2(2k-1) = r^2$$

Como estamos tratando o conjunto dos números naturais, temos que ou $k = 1$, do que teríamos $k = 0$, ou $k \neq 1$ e $2k - 1$ um quadrado perfeito. Veja que $(k-1)^2$ é quadrado perfeito para todo valor de k, então, não precisamos nos preocupar em analisar esse fator.

Seja $2k - 1 = m^2$.

Do fato de $k \in A$, disso:

$$0 \leq k \leq 1999 \Rightarrow 0 \leq 2k - 1 \leq 3997 \Rightarrow 0 \leq m^2 \leq 3997$$

Lembre-se que $2k - 1$ é ímpar, então m^2 é um quadro de um ímpar. Como m^2 é um quadrado ímpar compreendido entre 0 e 3997, veja que:

$$r \leq 63$$

Pois:

$$63^2 = 3969$$

Logo, queremos os quadrados de $1,3, \dots, 63$. Temos, portanto, 32 elementos. Lembrando do caso $k = 1$, temos mais um caso. Logo:

$$n(A \cap B) = 32 + 1 = 33$$

Conjunto $A \cap C$:

$$2k^3 - 3k^2 + 2 = q^2 + 2 \Rightarrow k^2(2k - 3) = q^2$$

Note que k^2 é quadrado perfeito para todo valor de k, do que temos que analisar somente $2(k-1) - 1$ que é ímpar.

Seja $2(k-1) - 1 = n^2$.

Do fato de $k \in A$, temos:

$$0 \leq k \leq 1999 \Rightarrow 0 \leq 2k - 3 \leq 3995 \Rightarrow 0 \leq n^2 \leq 3995$$

Queremos então os quadrados ímpares entre 0 e 3995. Como no item acima, temos os quadrados de $1, 3, \dots, 63$.

Temos ainda o caso $k = 0$, que é quando $q = 0$. Logo:

$$n(A \cap C) = 32 + 1 = 33$$

Por fim:

$$y = n(A \cap B) - n(A \cap C) = 33 - 33 = 0$$

Gabarito: $y = 0$.

---

35. (IME/2001)

Considere o polinômio de grau mínimo, cuja representação gráfica passa pelos pontos $P_1(-2,-11)$, $P_2(-1,0)$, $P_3(1,4)$ e $P_4(2,9)$.

a) Determine os coeficientes do polinômio.

b) Calcule todas as raízes do polinômio.

Comentários

Item a:

Observe que, dado um polinômio $P(x)$, temos quatro equações dados quatro pontos. Isto é, ao substituir os pontos, teremos um sistema linear com quatro equações e $n + 1$ incógnitas $(a_0, \dots, a_n)$, onde n é o grau de $P(x)$.

Do nosso estudo de sistemas de equações, sabemos que, para que esse sistema seja candidato a ser possível, seu número de incógnitas deve ser, no máximo, igual ao número de equações disponíveis.

Disso, temos que:

$$n+1 \leq 4 \Rightarrow n \leq 3$$

Suponha então:

$$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$

Calculando $P(x)$ nos pontos dados, temos:

$$P(-2)=-11=-8a+4b-2c+d$$
$$P(-1)=0=-a+b-c+d$$
$$P(1)=4=a+b+c+d$$
$$P(2)=9=8a+4b+2c+d$$

Disso, temos o sistema linear:

$$\begin{cases} -8a+4b-2c+d=-11 \\ -a+b-c+d=0 \\ a+b+c+d=4 \\ 8a+4b+2c+d=9 \end{cases}$$

Somando a segunda e a terceira questão:

$$2b+2d=4 \Rightarrow b+d=2 \Rightarrow d=2-b$$

Somando a primeira e a quarta equação:

$$8b+2d=-2 \Rightarrow 4b+d=-1$$

Dessas equações, temos:

$$4b+2-b=-1 \Rightarrow 3b=-3 \Rightarrow b=-1$$

Do que resulta:

$$d=2-(-1)=3$$

Substituindo esses valores na segunda equação:

$$-a-1-c+3=0 \Rightarrow a+c=2 \Rightarrow c=2-a$$

Substituindo na quarta equação:

$$8a+4\cdot(-1)+2c+3=9 \Rightarrow 8a+2c=10 \Rightarrow 4a+c=5$$

Logo:

$$4a+2-a=5 \Rightarrow 3a=3 \Rightarrow a=1$$

Do que temos:

$$c=2-1=1$$

Logo, o polinômio possui grau no mínimo 3 e é dado por:

$$P(x)=x^3-x^2+x+3$$

Item b:

Note que, do enunciado, temos que -1 é uma de suas raízes. Usando Briot-Ruffini, vem:

$$\begin{array}{c|cccc} -1 & 1 & -1 & 1 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}$$

Ou seja:

$$P(x)=(x+1)(x^2-2x+3)$$

Resolvendo a equação:

$$x^2-2x+3=0$$

Temos:

$$x=1\pm\sqrt{2}i$$

Gabarito: Item a) $a=1; b=-1; c=1$ e $d=3$ Item b) $\{-1, 1\pm\sqrt{2}i\}$

36. (IME/2001)

Determine todos os números inteiros m e n para os quais o polinômio $2x^m+a^{3n}x^{m-3n}-a^m$ é divisível por $x+a$.

Comentários

Ser divisível por $x + a$ é equivalente a dizer que $-a$ é sua raiz. Disso, temos que:

$$2(-a)^m + a^{3n}(-a)^{m-3n} - a^m = 0$$

Ou ainda:

$$2(-1)^m a^m + a^{3n}(-1)^{m-3n}a^{m-3n} - a^m = 0$$

Se $a = 0$, isso é válido para todo m e n tais que:

$$m \geq 0$$

Pois os expoentes de um polinômio são positivos ou nulos e ainda:

$$m \geq 3n$$

Pelo mesmo motivo.

Se $a \neq 0$, temos que:

$$2(-1)^m a^m + a^{3n}(-1)^{m-3n}a^{m-3n} - a^m = 0 \Rightarrow 2(-1)^m + (-1)^{m-3n} = 1$$

Suponha que m é ímpar. Então:

$$(-1)^m = -1$$

Ou seja:

$$-2 + (-1)^{m-3n} = 1 \Rightarrow (-1)^{m-3n} = 3$$

O que é absurdo, pois o lado esquerdo da equação vale ± 1.

Suponha, então, m par. Logo:

$$(-1)^m = 1$$

Do que temos:

$$2 + (-1)^{m-3n} = 1 \Rightarrow (-1)^{m-3n} = (-1)^1$$

Ou seja:

$$m - 3n = 1 \Rightarrow m = 3n + 1$$

Note que, se n é par, m é ímpar. Logo, n é um inteiro ímpar qualquer e m é tal que:

$$m = 3n + 1$$

Perceba, ainda, que $m \geq 0$, pois os expoentes de um polinômio são sempre positivos ou nulos. Disso:

$$m \geq 0 \Rightarrow 3n + 1 \geq 0 \Rightarrow n \geq -\frac{1}{3}$$

Mas n é inteiro, logo:

$$n \geq 0$$

Por fim:

$$m = 3n + 1$$

Com n inteiro ímpar positivo.

Gabarito: $m = 3n + 1$, com n inteiro ímpar positivo, se $a \neq 0$ e $m \geq 0$ e $m \geq 3n$ se $a = 0$.

37. (IME/2000)

Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2$$

Comentários

Para você aumentar sua caixa de ferramentas em soluções de questões, vamos apresentar uma técnica chamada "perturbação de somatório".

Vamos olhar para o seguinte somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3$$

Desenvolvendo o termo $(k+1)^3$, temos:

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$$

Ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1)$$

Das propriedades de somatório, temos que:

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}} = \sum_{k=1}^{n}(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}} + 3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

A grande sacada dessa técnica é perceber que:

$$\sum_{k=1}^{n}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})^{\mathbf{3}} = \sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{k}^{\mathbf{3}} = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}} + (n+1)^3 - 1$$

Ou seja:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}} + (n+1)^3 = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^{\mathbf{3}} + 3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

Logo:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2 + 3\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1$$

Do nosso estudo de P.A., temos:

$$3\sum_{k=1}^{n}k = 3\frac{n(n+1)}{2}$$

E ainda:

$$\sum_{k=1}^{n}1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$$

Logo:

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2 + 3\frac{n(n+1)}{2} + n$$

Resolvendo para $\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2$:

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{k}^2 = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$$

Que é um polinômio com no máximo quatro termos.

Gabarito: $\frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$.

---

38. (IME/1999)

Seja o polinômio $P(x)$ de grau $(2n+1)$ com todos os seus coeficientes positivos e unitários. Dividindo-se $P(x)$ por $D(x)$, de grau 3, obtém-se o resto $R(x)$.

Determine $R(x)$, sabendo-se que as raízes de $D(x)$ são raízes de $A(x) = x^4 - 1$ e que $D(1) \neq 0$.

Comentários

Antes de tudo, observe que:

$$A(x) = x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

Como $D(1) \neq 0$, devemos ter, necessariamente:

$$D(x) = a(x+1)(x^2+1) \Rightarrow D(x) = a(x^3+x^2+x+1)$$

Veja que o coeficiente líder de $D(x)$, a, é irrelevante para o estudo da divisão desses dois polinômios, do que vamos assumir, sem perda de generalidade:

$$a = 1$$

E $D(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

Veja que, como os coeficientes de $P(x)$ são unitários positivos, devemos ter:

$$P(x) = x^{2n+1} + x^{2n} + \cdots + x + 1$$

Perceba que, da esquerda para a direita, sempre podemos formar blocos de quatro termos da seguinte maneira:

$$x^m(x^3 + x^2 + x + 1)$$

Note que $P(x)$ é formado por $2n + 1 + 1 = 2(n+1)$ monômios. Devemos, então, analisar a divisibilidade de $2(n+1)$ por 4, pois a ideia é sempre formar blocos de 4 monômios de $P(x)$.

Um número par pode deixar resto 0 ou resto 2 na divisão por quatro. Verifique!

Disso, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade: $2(n+1)$ deixa resto zero na divisão por quatro, isto é, $n+1$ é par e, portanto n e ímpar. Nesse caso, conseguimos formar blocos de quatro monômios, do que segue que $R(x) \equiv 0$.

2ª possibilidade: $2(n+1)$ deixa resto 2 na divisão por quatro, isto é, $n+1$ é ímpar e, portanto n é par. Nesse caso, não conseguimos formar blocos com quatro monômios pois sobram os últimos 2 termos de $P(x)$, $x+1$.

Do que segue que $R(x) = x + 1$.

Gabarito: $R(x) = x + 1, se\ n$ é par; $R(x) = 0, se\ n$ é $ímpar$.

39. (IME/1998)

Determine $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ de modo que o polinômio, $\alpha x^{\gamma+1} + \beta x^{\gamma} + 1$, racional inteiro em x, seja divisível por $(x-1)^2$ e que o valor numérico do quociente seja igual a 120 para $x = 1$.

Comentários

Se $(x-1)^2$ divide o polinômio dado, temos que $x - 1$ divide o polinômio duas vezes. Usando Briot-Ruffini:

1	α	β	0	...	0	1
1	α	$\beta + \alpha$	$\beta + \alpha$	...	$\beta + \alpha$	$\beta + \alpha + 1$
	α	$2\alpha + \beta$	$3\alpha + 2\beta$	...	$(\gamma + 1)\alpha + \gamma\beta$	

Disso, devemos ter:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 1 = 0 \\ (\gamma + 1)\alpha + \gamma\beta = 0 \end{cases}$$

Pela divisão exata.

Resolvendo para β e γ, vem:

$$\beta = -1 - \alpha$$
$$\gamma = \alpha$$

Da divisão realizada acima, temos que:

$$q(x) = \alpha x^{\gamma-1} + (2\alpha + \beta)x^{\gamma-1} + \cdots + [(\gamma)\alpha + (\gamma - 1)\beta]$$

Substituindo os valores de $\gamma\ e\ \beta$, vem:

$$q(x) = \alpha x^{\alpha-1} + (\alpha - 1)x^{\alpha-2} + \cdots + 1$$

Do enunciado, temos que:

$$q(1) = \alpha + (\alpha - 1) + \cdots + 1 = 120$$

Note que temos uma P.A. de α termos e razão 1, do que segue que:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}=120 \Rightarrow \alpha^2+\alpha-240=0$$

Resolvendo para α, temos $\alpha = 15\ ou\ \alpha = -16$. Como $\alpha > 0$, segue que $\alpha = 15$.

Por fim:

$$\beta = -1 - 15 = -16$$
$$\gamma = 15$$

Gabarito: $\alpha = 15; \beta = -16; \gamma = 15$.

40. (IME/1997)

Determine o resto da divisão do polinômio $(\cos\phi + x sen\ \phi)^n$ por (x^2+1), onde n é um número natural.

Comentários

O primeiro passo é escrever a divisão do polinômio dado por x^2+1:

$$(cos\phi + xsen\phi)^n = q(x)(x^2+1) + r(x)$$

Do estudo da divisão de polinômios, sabemos que:

$$grau\big(r(x)\big) < grau\big((x^2+1)\big) = 2$$

Então, podemos dizer que:

$$r(x) = ax + b$$

Vamos encontrar as raízes de x^2+1, que nos ajudarão a retirar o termo $q(x)(x^2+1)$.

Logo:

$$x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x = \pm i$$

Para $x = i$:

$$(cos\phi + isen\phi)^n = q(i)(i^2+1) + r(i) \Rightarrow (cos\phi + isen\phi)^n = r(i)$$

Da primeira fórmula de Moivre:

$$(cos\phi + isen\phi)^n = \cos(n\phi) + isen(n\phi)$$

Para $x = -i$:

$$(cos\phi - isen\phi)^n = \cos(n\phi) - isen(n\phi) = q(-i)((-i)^2+1) + r(-i)$$

Ou seja:

$$\cos(n\phi) - isen(n\phi) = r(-i)$$

Mas sabemos que:

$$r(i) = ai + b\ e\ r(-i) = -ai + b$$

Somando $r(i)$ e $r(-i)$:

$$r(i) + r(-i) = 2b = 2\cos(n\phi) \Rightarrow b = \cos\,(n\phi)$$

Subtraindo $r(i)$ e $r(-i)$:

$$r(i) - r(-i) = 2isen(n\phi) = 2ai \Rightarrow a = sen(n\phi)$$

Portanto, temos que:

$$r(x) = sen(n\phi)x + \cos\,(n\phi)$$

Gabarito: $sen(n\phi)x + \cos\,(n\phi)$.

41. (IME/1995)

Prove que o polinômio $P(x) = x^{999} + x^{888} + x^{777} + \cdots + x^{111} + 1$ é divisível por $x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$.

Comentários

Para provar que $P(x)$ é divisível pelo polinômio dado, devemos mostrar que todas as raízes de $G(x) = x^9 + x^8 + x^7 + \cdots + x + 1$ são também raízes de $P(x)$.

Seja então ω qualquer de $G(x)$. Veja, antes de prosseguir, que:

$$G(1) = 1 + 1 + \cdots + 1 = 10 \neq 0$$

Ou seja, 1 não é raíz de $G(x)$, do que podemos afirmar, com certeza, que $\omega \neq 1$.
Continuando:

$$G(\omega) = \omega^9 + \cdots + 1 = \frac{\omega^{10} - 1}{\omega - 1} = 0$$

Veja que a expressão acima faz sentido, uma vez que $\omega \neq 1 \Rightarrow \omega - 1 \neq 0$.
Disso, devemos ter:

$$\omega^{10} - 1 = 0 \Rightarrow \omega^{10} = 1 \; eq.01$$

Achamos, então, uma relação que todas as raízes de $P(x)$ obedecem.
Vamos calcular $P(\omega)$.

$$P(\omega) = \omega^{999} + \omega^{888} + \omega^{777} + \cdots + \omega^{111} + 1$$

Note que todas as potências são múltiplos de 111, do que temos:

$$\omega^{111} = \omega^{110} \cdot \omega$$

Da equação 01, temos que:

$$(\omega^{10})^{11} \cdot \omega = 1^{11} \cdot \omega = \omega$$

Logo, em $P(\omega)$, podemos escrever:

$$P(\omega) = (\omega^{111})^9 + (\omega^{111})^8 + (\omega^{111})^7 + \cdots + \omega^{111} + 1 = \omega^9 + \cdots + 1$$

Ou seja, temos que:

$$P(\omega) = G(\omega) = 0$$

Para todas as raízes de $G(x)$. Dessa forma, concluímos que $G(x)$ divide $P(x)$.

Gabarito: Demonstração.

42. (IME/1987)

Seja $p(x)$ um polinômio de grau 16 e coeficientes inteiros.

a) Sabendo-se que $p(x)$ assume valores ímpares para $x = 0$ e $x = 1$, mostre que $p(x)$ não possui raízes inteiras.

b) Sabendo-se que $p(x) = 7$ para quatro valores de x, inteiros e diferentes, para quantos valores inteiros de x, $p(x)$ assume o valor 14?

Comentários

Item a:

Do enunciado, temos que:

$$p(0) = a_{16} \cdot 0^{16} + a_{15} \cdot 0^{15} + \cdots + a_0 = 2n + 1 \Rightarrow a_0 = 2n + 1$$
$$p(1) = a_{16} + a_{15} + \cdots + a_0 = 2m + 1$$

Suponha que exista uma raiz $x_0 \in \mathbb{Z}$. Vamos analisar dois casos:

Se x_0 for par:

$$p(x_0) = a_{16}x_0^{16} + a_{15}x_0^{15} + \cdots + a_1x_0 + a_0 = 0 \Rightarrow x_0(a_{16}x_0^{15} + a_{15}x_0^{14} + \cdots + a_1) = -(2n + 1)$$

Note o lado esquerdo da igualdade é par, pois x_0 é par. Porém, do outro lado, temos $-a_0 = -(2n + 1)$ que é ímpar. Absurdo!

Se x_0 for ímpar:

Note que se x_0 é ímpar, então, qualquer potência de x_0 também é. Dessa forma, veja que:

$$p(x_0) + p(1) = a_{16}(x_0^{16} + 1) + a_{15}(x_0^{15} + 1) + \cdots + a_1(x_0 + 1) + 2a_0 = 2m + 1$$

Mas cada parcela dessa soma é par, pois $x_0^m + 1$ é sempre par e $2a_0$ também é par. A soma delas está resultando em $2m + 1$, que é ímpar. Absurdo!

Logo, $p(x)$ não possui raízes inteiras.

Item b:

Suponha que a, b, c e d sejam quatro valores distintos para os quais $p(x) = 7$. Logo, podemos escrever que:

$$p(x) - 7 = g(x)(x - a)(x - b)(x - c)(x - d)$$

Ou seja:

$$p(x) = g(x)(x-a)(x-b)(x-c)(x-d) + 7$$

Suponha então que exista k inteiro tal que $p(k) = 14$. Disso, temos que:

$$p(k) = g(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d) + 7 = 14$$

Ou seja:

$$g(k)(k-a)(k-b)(k-c)(k-d) = 7$$

Sabemos que a, b, c e d são todos distintos, logo, os fatores $(k-a), (k-b), (k-c)$ e $(k-d)$ são todos distintos. Mas 7 não pode ser decomposto em quatro fatores inteiros distintos, pois ele é primo. Logo, não é possível que isso ocorra.

Conclusão: não existe k inteiro tal que $p(k) = 14$.

Gabarito: Demonstração.

---

43. (IME/1984)

Determine o polinômio

$$p(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Tal que $p(x) = p(1-x)$, $p(0) = 0$ e $p(-1) = 6$.

Comentários

Vamos começar pelas informações mais simples.

$$p(0) = 0 \Rightarrow p(0) = 0^2 + a(0)^3 + b(0)^2 + c(0) + d = 0 \Rightarrow d = 0$$

Além disso, temos que $p(1) = p(1-1) = p(0) = 0$.

$$p(1) = 1 + a + b + c = 0 \Rightarrow a + b + c = -1$$

De $p(-1) = 6$:

$$p(-1) = 1 - a + b - c = 6 \Rightarrow -a + b - c = 5$$

Também temos que $p(2) = p(1-2) = p(-1) = 6$. Logo:

$$p(2) = 16 + 8a + 4b + 2c = 6 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = -10$$

Do que temos o sistema:

$$\begin{cases} a + b + c = -1 \; eq.01 \\ -a + b - c = 5 \; eq.02 \\ 8a + 4b + 2c = -10 \; eq.03 \end{cases}$$

Somando $eq.01$ e $eq.02$, vem:

$$2b = 4 \Rightarrow b = 2$$

Da $eq.02$, temos:

$$-a - c = 3 \Rightarrow a = -3 - c$$

Substituindo isso na $eq.03$, vem:

$$8(-3-c) + 8 + 2c = -10 \Rightarrow c = -1$$

Por fim:

$$a = -2$$

Ou seja:

$$p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$$

Gabarito: $p(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x$.

---

44. (IME/1976)

Dado o polinômio $2x^4 + x^3 + px^2 + qx + 2$, determine p e q de modo que ele seja divisível por $(x-1)^2$.

Comentários

Vamos usar Briot-Ruffini duas vezes para dividir o polinômio por $x - 1$:

1	2	1	p	q	2

1	2	3	$p+3$	$p+q+3$	$p+q+5$
	2	5	$p+8$	$2p+q+11$	

Queremos que:

$$\begin{cases} p+q+5=0 \\ 2p+q+11=0 \end{cases}$$

Da segunda equação, temos que:

$$2p+q+11=0 \Rightarrow p+(p+q)+11=0 \Rightarrow p-5+11=0 \Rightarrow p=-6$$

Do que resulta:

$$q=-5+6=1$$

Gabarito: $p=-6$ e $q=1$.