CURSO INTENSIVO 2022

Física

ITA - 2022

Trabalho, potência e energia

Prof. Toni Burgatto

Sumário

Introdução

Nesta aula iniciaremos o estudo de trabalho, potência e energia mecânica. Esses conceitos são de extrema importância nos nossos vestibulares e caem com muita frequência.

Durante a aula, fizemos algumas demonstrações envolvendo integral, mas não se preocupe. Nosso objetivo não é você saber Cálculo a fundo, ele serve apenas para dar maior fundamento para nossas deduções.

Além disso, ao longo da teoria foram colocados inúmeros problemas clássicos e alguns um pouco diferente. Não deixe de conferir os exercícios resolvidos, pois eles ajudam muito nos seus estudos.

Faça todos os exercícios da lista e confira os comentários de cada questão. Você só aprende bem o tema dessa aula fazendo muitos exercícios.

Caso tenha alguma dúvida entre em contato conosco através do fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

1. Trabalho e potência

Primeiramente, vamos definir o trabalho de uma força constante. Seja um ponto material que, devido a ação de um sistema de forças, desloca-se descrevendo uma trajetória qualquer, da posição A para a posição B.

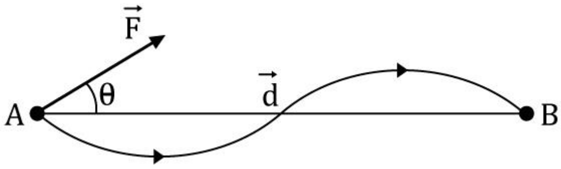


Figura 1: Trabalho da força $\vec{F}$ entre os pontos A e B.

Se indicarmos pode $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ o vetor deslocamento e por $\vec{F}$ a força constante dentre aquelas que atuam sobre o ponto material. Assim, o trabalho da força constante $\vec{F}$ ao longo do deslocamento $\vec{d}$ é definido por:

$$\boxed{\tau = \vec{F} \cdot \vec{d}}$$

Diante da definição apresentada, observe que o trabalho de uma força é uma grandeza escalar.

Podemos reescrever o produto escalar, para fins de cálculos, em função dos módulos dos vetores:

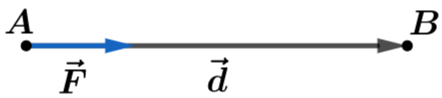
$$\boxed{\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta}$$

Assim, vemos que o ângulo θ é o ângulo formado entre o vetor $\vec{F}$ e o vetor $\vec{d}$.

Note que segundo essa definição, o trabalho depende apenas de $\vec{F}$, $\vec{d}$ e θ. Ou seja, o trabalho de uma força constante não depende da trajetória entre os pontos A e B.

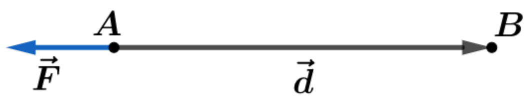
Notoriamente, vemos que:

a) Se $\vec{F}$ e $\vec{d}$ têm a mesma direção e sentido, então $\theta = 0$. Logo, $\cos\theta = \cos 0 = 1$, portanto:



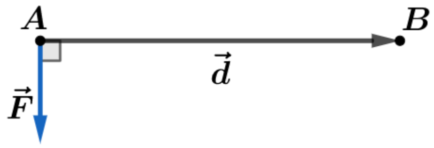
$$\boxed{\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}|}$$

b) Se $\vec{F}$ e $\vec{d}$ têm a mesma direção e sentidos opostos. Nesse caso, $\theta = 180°$ e $\cos 180° = -1$. Pela definição, temos:



$$\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 180° \Rightarrow \boxed{\tau = -|\vec{F}| \cdot |\vec{d}|}$$

c) Se $\vec{F}$ é perpendicular a $\vec{d}$, então $\theta = 90$ °, temos $\cos 90° = 0$. Portanto:



$$\tau = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos 90° = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot 0 \Rightarrow \boxed{\tau = 0}$$

1.1. Trabalho motor e resistente

Se $0 \leq \theta < 90°$, então $\cos\theta > 0$, portanto o trabalho da força $\vec{F}$ é positivo. Assim, dizemos que a força $\vec{F}$ realiza um ***trabalho motor***. Nesse caso, a força $\vec{F}$ favorece o deslocamento, como no exemplo de um jovem puxando uma caixa, na figura abaixo:

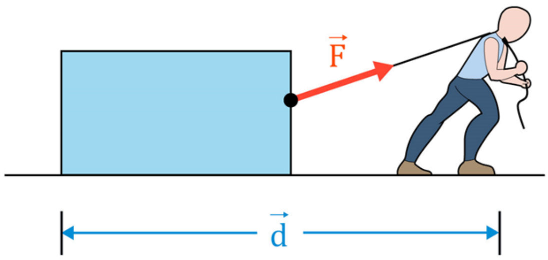


Figura 2: Homem puxando bloco, realizando um trabalho motor.

Por outro lado, se $90° < \theta \leq 180°$, então $\cos\theta < 0$ e o trabalho da força $\vec{F}$ é negativo. Nesse caso, o trabalho é denominado ***resistente***. Dizemos que a força $\vec{F}$ desfavorece o deslocamento, conforme mostra a figura abaixo:

Figura 3: Força $\vec{F}$ realizando o trabalho resistente.

De uma forma geral, podemos dizer que o trabalho de uma força é uma medida da energia transferida ou transformada em um processo.

A unidade de trabalho é definida pelo produto da unidade de força pela unidade de comprimento:

$$\mathrm{u(trabalho)} = \mathrm{u(Força)} \cdot \mathrm{u(distância)} \Rightarrow \mathrm{u(trabalho)} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

No SI, o produto $N \cdot m$ recebe o nome de joule (J):

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$$

1.2. O trabalho de uma força variável

Seja $\vec{F}$ uma força variável dentre outras que agem sobre o ponto material. Conforme vimos na definição de trabalho de uma força constante, o trabalho é o produto escalar da força pelo deslocamento.

Assim, para o cálculo do trabalho da força variável, ao longo do deslocamento AB, devemos dividir a trajetória em pequeninos trechos, de tal forma que possam ser considerados retilíneos e a força $\vec{F}$, em cada um desses trechos, possa ser considerada constante. Esquematicamente teríamos que:

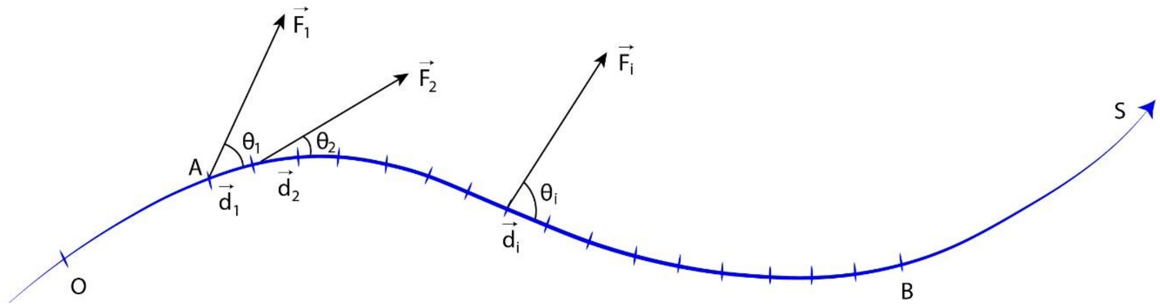


Figura 4: Trabalho de uma força variável é a soma de infinitos trabalhos menores, tomadas as forças para elementos de deslocamento tão pequenos quanto se queira.

Dessa forma, temos que:

$$\tau_{\vec{F}} = \tau_{\vec{F}_1} + \tau_{\vec{F}_2} + \cdots + \tau_{\vec{F}_i} + \cdots$$

$$\tau_{\vec{F}} = \vec{F}_1 \cdot \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \vec{r}_2 + \cdots + \vec{F}_i \cdot \vec{r}_{i1} + \cdots$$

$$\tau_{\vec{F}} = \left|\vec{F}_1\right| \cdot |\vec{r}_1| \cdot \cos\theta_1 + \left|\vec{F}_2\right| \cdot |\vec{r}_2| \cdot \cos\theta_2 + \cdots + \left|\vec{F}_i\right| \cdot |\vec{r}_i| \cdot \cos\theta_i + \cdots$$

Note que:

- $\left|\vec{F}_1\right| \cdot \cos\theta_1 = F_{tg_1}$ é a componente tangencial de $\vec{F}_1$
- $\left|\vec{F}_2\right| \cdot \cos\theta_2 = F_{tg_2}$ é a componente tangencial de $\vec{F}_2$
- $\left|\vec{F}_i\right| \cdot \cos\theta_i = F_{tg_i}$ é a componente tangencial de $\vec{F}_i$

Então, podemos dizer que:

$$\tau_{\vec{F}} = \left|F_{tg_1}\right| \cdot + F_{tg_2} + \cdots + F_{tg_i} + \cdots$$

Se construirmos um gráfico da componente tangencial de $\vec{F}$ em função do espaço, então teríamos que:

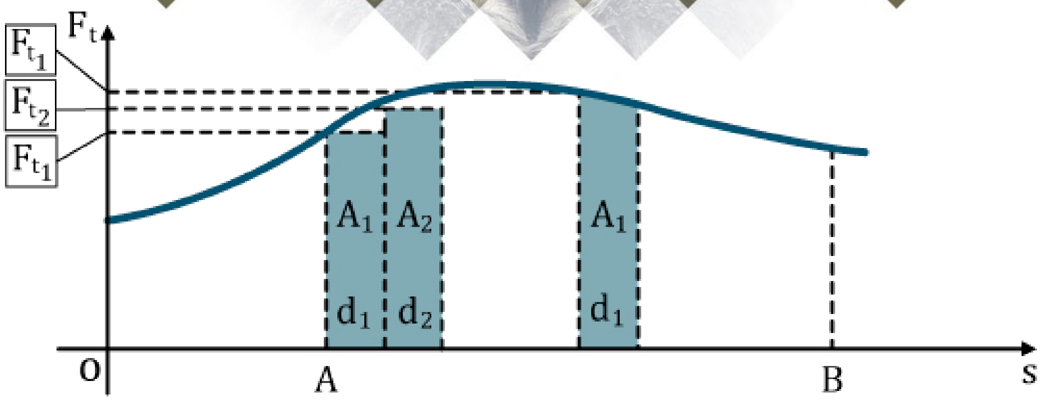


Figura 5: Gráfico da força projetada na direção do deslocamento (tangencial) em função do deslocamento.

Pelo gráfico, vemos que as áreas dos retângulos são $A_1 = \left|\vec{F}_{tg_1}\right| \cdot |\vec{r_1}|$, $A_2 = \left|\vec{F}_{tg_2}\right| \cdot |\vec{r_2}|$,..., $A_i = \left|\vec{F}_{tg_i}\right| \cdot |\vec{r_i}|$. Portanto:

$$\tau_{\vec{F}} = A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots$$

Cada vez que dividimos a trajetória em um número maior de pequenos de deslocamentos, ou seja, pegamos deslocamentos ainda menores, obteremos um valor mais exato para o trabalho da força $\vec{F}$.

Dessa forma, quando pegamos um número de deslocamentos tendendo ao infinito, o trabalho da força $\vec{F}$, entre as posições A e B, será, numericamente, igual à área da superfície entre a curva e o eixo do deslocamento.

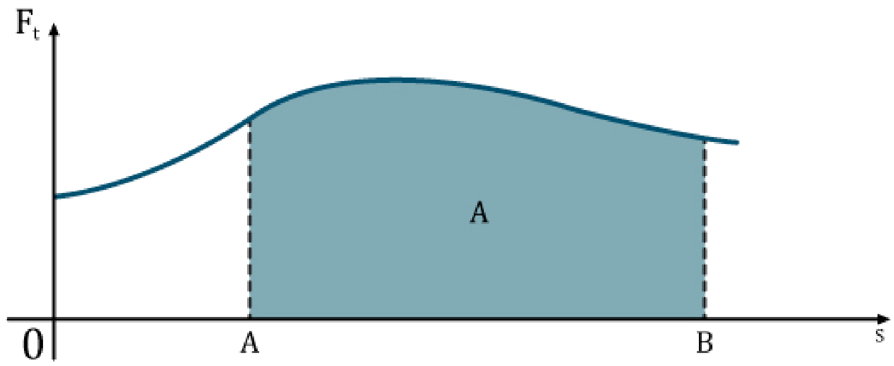


Figura 6: Área sombreada é numericamente igual ao trabalho da força $\vec{F}$.

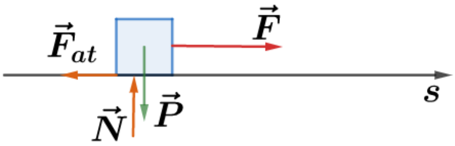
Matematicamente, podemos escrever que:

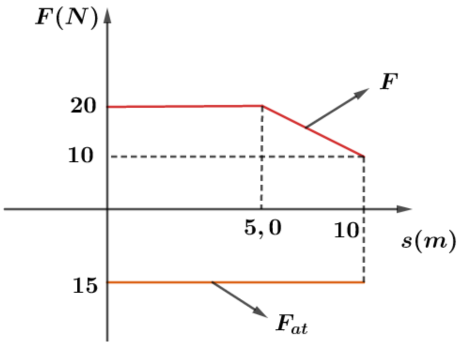
$$\boxed{\tau_{\vec{F}} = \int_{r_A}^{r_B} F_{tg} dr} \text{ ou } \boxed{\tau_{\vec{F}} = \int_{A}^{B} \vec{F} \cdot d\vec{r}}$$

1)

Considere um corpo em movimento em retilíneo ao longo do eixo Ox e as forças $\vec{F}$ e $\vec{F}_{at}$ atuam nele, conforme o esquema abaixo.

Os módulos das forças $\vec{F}$ e $\vec{F}_{at}$ estão representados no gráfico abaixo, em função de x.





Determine:

a) o trabalho da força $\vec{F}$ no deslocamento de 0 a 10 metros.

b) o trabalho da força $\vec{F}_{at}$ no deslocamento de 0 a 10 metros.

c) o trabalho da força resultante no deslocamento de 0 a 10 metros.

Comentários:

a) A área do gráfico é numericamente igual ao trabalho da força em questão. Portanto:

$$\tau_{\vec{F}} = 20 \cdot 5 + \left(\frac{20+10}{2}\right) \cdot (10-5) = 100 + 75 = 175 \text{ J}$$

Repare que o trabalho de $\vec{F}$ ao longo do deslocamento em questão é um trabalho motor.

b) Novamente, temos que:

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = (-15) \cdot 10 = -150 \text{ J}$$

Repare que o trabalho de $\vec{F}_{at}$ ao longo do deslocamento em questão é um trabalho resistente.

c) Para calcular o trabalho da força resultante, basta fazer a soma algébrica dos trabalhos de cada força:

$$\tau_{\vec{F}_R} = \tau_{\vec{F}} + \tau_{\vec{F}_{at}} = 175 + (-150) = 25 \text{ J}$$

Repare que o trabalho de $\vec{F}_R$ ao longo do deslocamento em questão é um trabalho motor.

1.3. Trabalho de um força normal à trajetória

No caso de uma força normal à trajetória, teremos sempre que o ângulo $\theta = 90°$, mesmo se dividirmos o deslocamento em trechos bem pequenos. Por isso, o trabalho de uma força normal à trajetória será sempre nulo:

$$d\tau_{Normal} = \left|\vec{F}_{normal}\right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos\theta \Rightarrow d\tau_{Normal} = \left|\vec{F}_{normal}\right| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos 90° \Rightarrow \boxed{d\tau_{Normal} = 0}$$

Um exemplo prático é o trabalho da força centrípeta. Ao longo de todo o deslocamento, em cada instante, a força centrípeta é sempre normal ao deslocamento. Logo, seu trabalho é nulo.

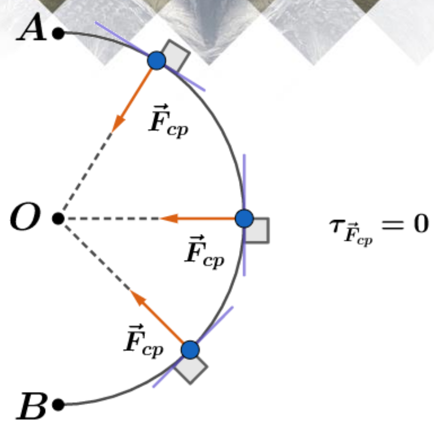


Figura 7: O trabalho da resultante centrípeta é nulo.

1.4. Trabalho realizado por uma mola que obedece à Lei de Hooke

Considere um bloco sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a uma mola, como mostra o esquema abaixo:

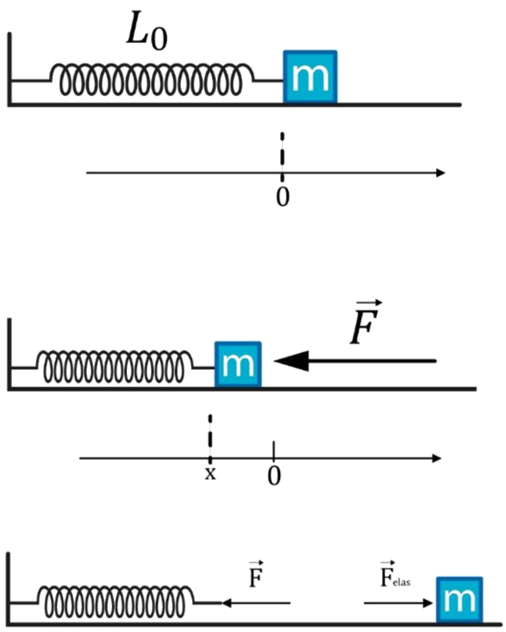


Figura 8: Quando a mola está relaxada, ela não exerce força sobre o bloco. Ao ser comprimida, de modo que x é negativo, ela exerce uma força de magnitude $-k \cdot x$, de modo que x é negativo, portanto, $-k \cdot x$ é positivo.

De acordo com a Lei de Hooke, a força exercida pela mola sobre o bloco é expressa por:

$$F_x = -kx$$

Em que k é a constante elástica da mola, uma constante positiva e x é a distensão da mola.

Note que orientamos o segmento x. Logo, se a mola é esticada, então x é positivo e a componente F_x da força exercida pela mola é negativa. Por outro lado, se a mola é comprimida, então x é negativo e a componente F_x da força exercida pela mola é positiva.

Note que no bloco ainda atua a força normal da mesa $\vec{N}$ e a força peso $\vec{P}$. Entretanto, essas forças são perpendiculares ao movimento e não realizam trabalho ao longo do deslocamento do bloco sobre a mesa.

Como a força elástica varia linearmente com x, então podemos fazer um gráfico da componente F_x em função do deslocamento.

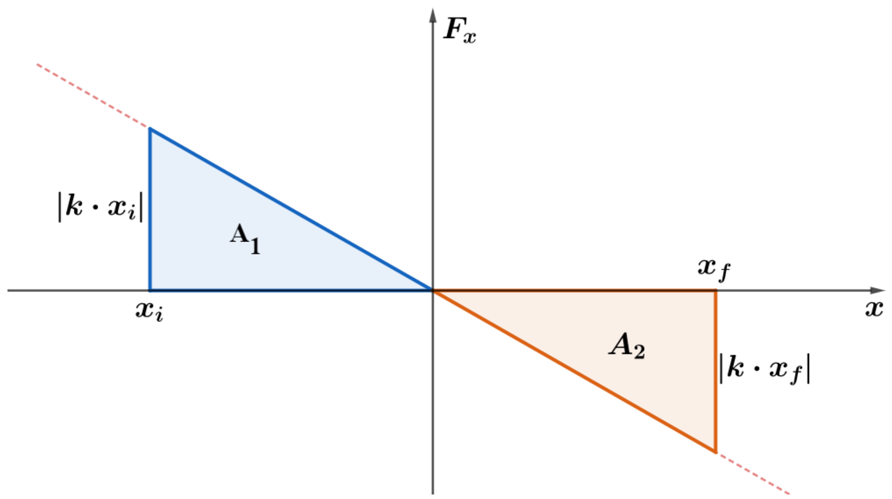


Figura 9: Gráfico do módulo da força elástica pela deformação.

Se desejarmos saber o trabalho pela mola ao longo da posição inicial até a posição final, basta calcular a soma algébrica das áreas do gráfico hachuradas:

$$\tau_{pela\ mola} = |A_1| - |A_2| = \frac{kx_i \cdot x_i}{2} - \frac{kx_f \cdot x_f}{2}$$

$$\boxed{\tau_{pela\ mola} = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2}$$

A força elástica é uma força do tipo conservativa (falaremos mais sobre o conceito de forças conservativas e não conservativas futuramente). Para forças conservativas, o trabalho não depende da trajetória. Por exemplo, podemos pegar um corpo de massa m, ligado a uma mola, desliza sobre uma guia circular conforme o esquema abaixo:

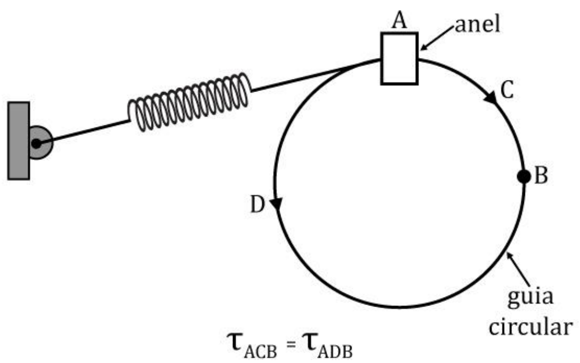


Figura 10: O trabalho da força elástica ao longo do caminho ACB é o mesmo se tomarmos o caminho ADB.

Diante disso, o trabalho da força elástica ao longo da trajetória ACB é igual ao trabalho ao longo de ADB.

$$\boxed{\left(\tau_{\vec{F}_{elas}}\right)_{ACB} = \left(\tau_{\vec{F}_{elas}}\right)_{ADB}}$$

1.5. Trabalho da força peso

Como vimos, o trabalho de uma força constante é dado por:

$$\tau_{\vec{F}} = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$$

Vamos considerar um corpo de massa m que parte da posição A e chega à posição B, de acordo com a figura abaixo:

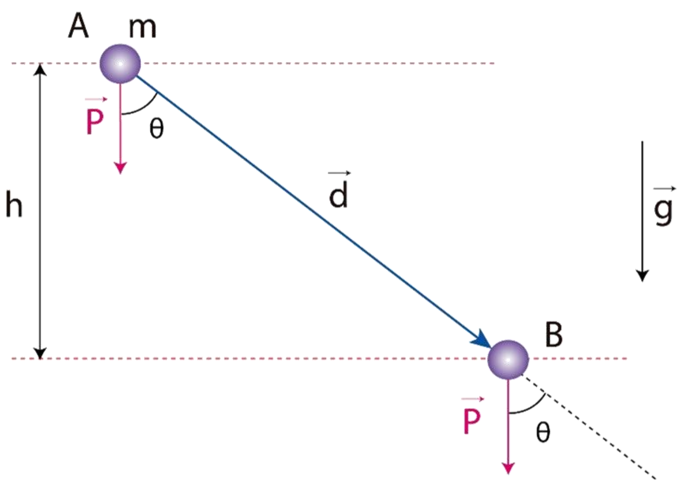


Figura 11: Trabalho da força peso do nível A para o nível B.

Se considerarmos que a aceleração da gravidade $\vec{g}$ é constante, então teremos que o peso é constante de $\vec{P} = m \cdot \vec{g}$. Seja $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$ o vetor deslocamento, θ o ângulo entre os vetores $\vec{P}$ e $\vec{d}$, e h é o desnível entre as posições A e B.

Utilizando a definição de trabalho de uma força constante, temos que:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta$$

Observando a geometria da figura, podemos dizer que:

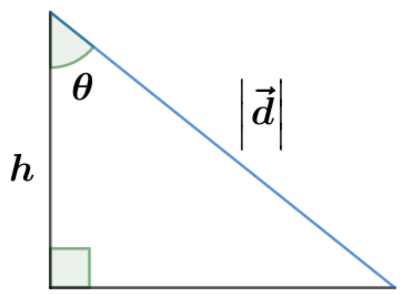


Figura 12: Relação geométrica entre altura dos desníveis e deslocamento do corpo.

$$h = |\vec{d}| \cdot \cos\theta$$

Portanto, podemos escrever o trabalho da força peso em função do desnível h:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| \cdot h$$

Chamando $|\vec{g}| = g$, finalmente:

$$\boxed{\tau_{\vec{P}} = m \cdot g \cdot h}$$

Esse resultado mostra que o trabalho da força peso não depende da trajetória. Poderíamos ter escolhido outro caminho ligando o ponto A ao B e o trabalho seria o mesmo.

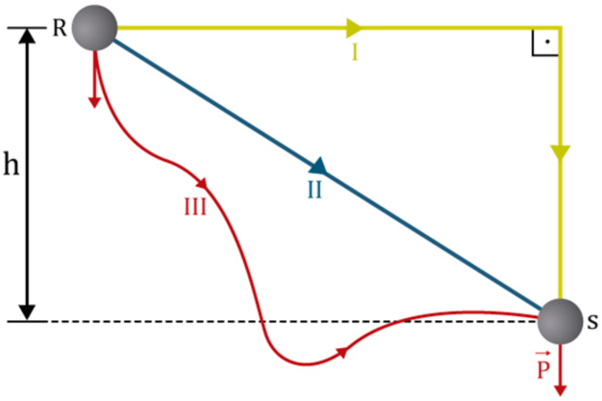


Figura 13: A força peso é uma força conservativa, por isso, seu trabalho independe da trajetória.

Em qualquer uma das trajetórias (I, II, III), o trabalho da força peso $\vec{P}$ vale $\tau_{\vec{P}} = m \cdot g \cdot h$.

Quando o trabalho da força não depende da trajetória, dizemos que a força é ***conservativa***. Definiremos o conceito de força conservativa no próximo capítulo.

Caso o corpo sofrer um deslocamento oposto, ou seja, ir de B para A, o trabalho da força peso seria expresso por:

$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(180° - \theta)$$

Da trigonometria, sabemos que $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$. Logo:

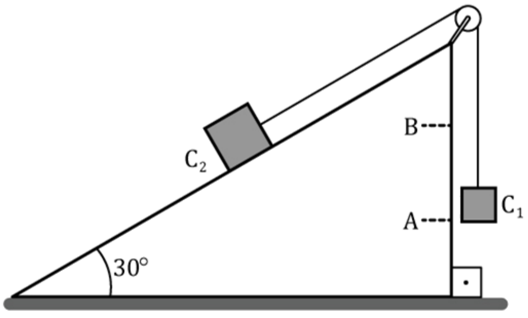
$$\tau_{\vec{P}} = |\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot (-\cos\theta)$$

$$\boxed{\tau_{\vec{P}} = -|\vec{P}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos\theta}$$

Importantíssimo: **o trabalho da força peso não depende da trajetória.**

2)

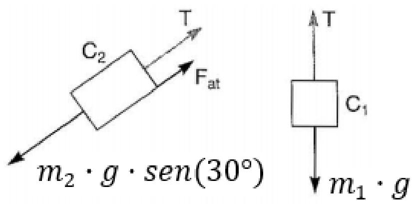
No sistema ao lado, de fio e polia ideais, o corpo C_1 de massa 5,0 kg sobe 50 cm, desde o ponto A até o ponto B, com velocidade constante. O trabalho realizado pela força de atrito existente entre o corpo C_2, de massa 20 kg, e o plano inclinado, neste intervalo foi:



a) -15 J b) 20 J c) -25 J d) 40 J e) -50 J

Comentário:

Para determinarmos o trabalho da força de atrito, utilizaremos a definição de trabalho como o produto da força pelo deslocamento. Portanto, é necessário conhecer o valor da força de atrito que age no corpo durante o deslocamento. Para isso, vamos fazer um diagrama de forças que atuam nos corpos C_1 e C_2:



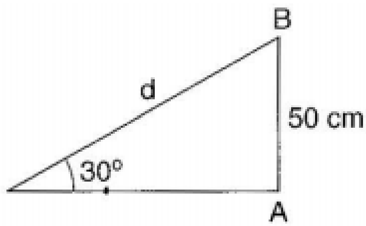
Como os blocos estão presos por fios inextensíveis e se movem com velocidade constante, a aceleração de cada bloco ao longo de seus deslocamentos é nula. Portanto, temos que:

$$\begin{cases} m_2 \cdot g \cdot sen(30°) = F_{at} + T \\ m_1 \cdot g = T \end{cases} \Rightarrow F_{at} = (m_2 \cdot sen(30°) - m_1) \cdot g$$

Substituindo valores, temos que:

$$F_{at} = \left(20 \cdot \frac{1}{2} - 5\right) \cdot 10 = 50 \text{ N}$$

Agora, precisamos saber o deslocamento do bloco C_2. Você poderia ser levado a usar uma relação trigonométrica para achar esse tamanho:



Mas cuidado! Isso está errado. Como o fio é inextensível, o bloco C_2 deslocará o mesmo que o fio C_1. Portanto, desloca de 0,50 m.

Note ainda que a força de atrito $\vec{F}_{at}$ tem sentido contrário ao deslocamento $\vec{d}$. Portanto:

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = F_{at} \cdot d \cdot \cos 180°$$

$$\tau_{\vec{F}_{at}} = 50 \cdot 0{,}50 \cdot (-1) \therefore \boxed{\tau_{\vec{F}_{at}} = -25\ \text{J}}$$

Gabarito C.

1.6. Potência de uma força

Como vimos, a definição de trabalho não relaciona nada quanto ao tempo que ele leva para ser realizado. Se você empurra um caixote ao longo de uma certa distância, demorando duas horas, você realizaria o mesmo trabalho caso empurrasse o mesmo caixote, ao longo da mesma distância, mas em uma hora. Afinal, o que mudou de uma situação para outra?

Na Física, a taxa (variação de alguma coisa no tempo) na qual uma força realiza trabalho é denominada de **potência** P. Observe que trabalho é uma medida da energia transferida por uma força e potência é a taxa de transferência de energia.

Considere um corpo se movendo com velocidade instantânea $\vec{v}$. Em um curto intervalo de tempo dt, a partícula sofrerá um deslocamento $d\vec{l} = \vec{v}dt$. Dessa forma, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ que atua sobre o corpo, durante o intervalo de tempo dt, é dado pelo produto escalar da força $\vec{F}$ e pelo vetor deslocamento $d\vec{l}$:

$$d\tau_F = \vec{F} \cdot d\vec{l} = \vec{F} \cdot \vec{v}dt$$

Então, a potência é definida como:

$$\boxed{P = \frac{d\tau_F}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}}$$

Pela definição de produto escalar, podemos reescrever a fórmula da potência da seguinte forma:

$$\boxed{P = \vec{F} \cdot \vec{v} = |\vec{F}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\theta}$$

Em que θ é o ângulo formado entre a força $\vec{F}$ e a velocidade vetorial instantânea $\vec{v}$.

Quando $\theta = 90°$, ou seja, $\vec{F}$ é normal a $\vec{v}$, o produto escalar $\vec{F} \cdot \vec{v}$ é nulo, já que $\cos 90° = 0$.

Verificamos este caso com a força centrípeta.

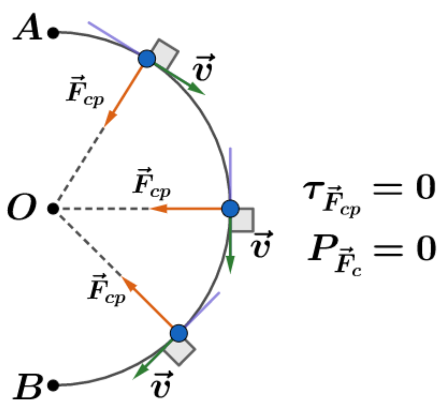


Figura 14: Propriedades importantes no movimento circular.

Para uma força centrípeta, a potência e o trabalho que ela realiza são nulos.

1.6.1. Potência média de uma força

Se uma força $\vec{F}$ realiza um trabalho no intervalo de tempo Δt. Definimos como potência média da força $\vec{F}$ no intervalo de tempo Δt a grandeza:

$$\boxed{P_m = \frac{\tau_F}{\Delta t}}$$

1.7. Gráfico da potência em função do tempo

Em um gráfico cartesiano da potência instantânea pelo tempo, a área A num determinado intervalo de tempo Δt considerado é numericamente igual ao trabalho realizado.

Representando graficamente a potência instantânea em função do tempo, temos que:

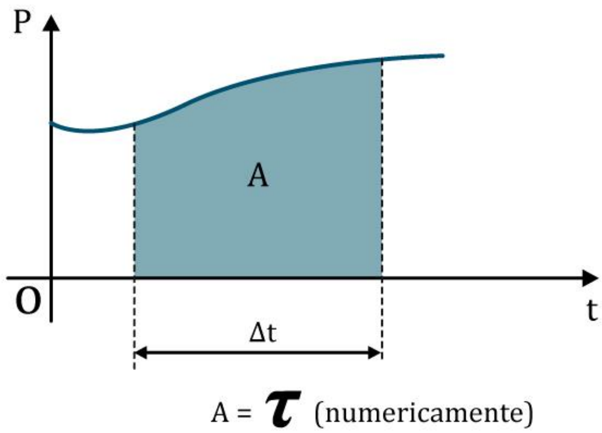


Figura 15: A área de um gráfico $P - t$ é numericamente igual ao trabalho da força.

$$\boxed{Trablho \overset{N}{=} Área}$$

1.8. Unidades

A unidade de potência é dada pela razão entre a unidade de trabalho e tempo:

$$u(potência) = \frac{u(trabalho)}{u(tempo)} = \mathrm{J/s}$$

No SI, a unidade de potência $\mathrm{J/s}$ recebe o nome de watt (W). Então:

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$$

$$1\ \text{quilowatt} = 1\ \mathrm{kW} = 10^3\ \mathrm{W}$$

Existe uma outra unidade para potência, que é bem conhecida, denominada de cavalo-vapor (cv) e o *horse-power* (HP) (não é apenas uma tradução de inglês para português, essas unidades são definidas de formas diferentes).

O cavalo-vapor é definido como a potência necessária para erguer de 1 m um corpo de massa $75\ kg$, em $1\ s$, em um local onde a aceleração da gravidade é de $9{,}8\ m/s^2$:

$$P_m = \frac{\tau_F}{\Delta t} = \frac{F \cdot d}{\Delta t} = \frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t}$$

$$1\ \text{cv} = \frac{(75\ kg)(9{,}8\ m/s^2)(1\ m)}{1\ s}$$

$$\boxed{1\ \text{cv} = 735\ \text{W}}$$

O *horse-power* pertence ao sistema técnico inglês e vale $746\ \text{W}$:

$$\boxed{1\ \text{HP} = 746\ \text{W}}$$

2. Energia

Trata-se de um dos conceitos mais importantes da ciência. Qualquer processo físico envolve energia.

O conceito de energia começa a se tornar mais compreensivo no século XIX, com os experimentos de James Prescott Joule sobre conversões de trabalho mecânico em calor e vice-versa, dando um norte para os conceitos atuais do princípio de conservação de energia.

Basicamente, dizemos que a energia se manifesta em diferentes formas:

- Energia térmica;
- Energia luminosa;
- Energia elétrica;
- Energia mecânica;
- Energia química;
- Energia nuclear, entre outras.

Um dos princípios mais amplos e fundamentais da Física é o da Conservação da Energia:

A energia total do Universo é **constante**, ou seja, durante os processos físicos podem apenas haver mudanças nas modalidades de energia.

Neste capítulo, vamos estudar algumas formas importantes de energia e o princípio da conservação e energia, temas de extrema importante para nossos vestibulares.

2.1. Energia Cinética

Nesse momento estudaremos apenas a energia cinética de translação.

Seja um carrinho de massa m com velocidade $\vec{v}_i$ no ponto A de uma superfície horizontal sem atrito. Aplicamos uma força $\vec{F}$ também horizontal e de módulo constante.

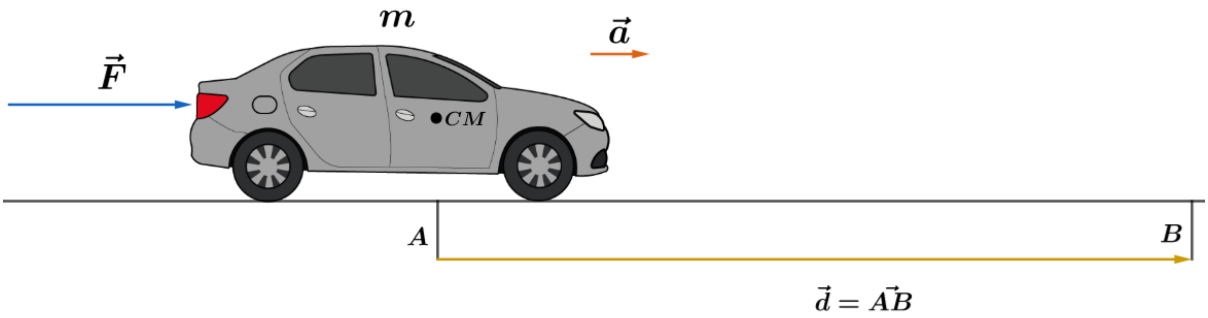


Figura 16: Carro sujeito a força $\vec{F}$ ao londo do deslocamento AB.

Devido à ação de $\vec{F}$, o carrinho terá uma aceleração $\vec{a}$, alterando a velocidade $\vec{v}_i$ para $\vec{v}_f$, quando chega no ponto B. O deslocamento AB é representado pelo vetor $\vec{d}$. Dizemos que o móvel variou sua energia cinética.

Essa variação de energia vem do trabalho realizado pela força resultante $\vec{F}$ ao longo do deslocamento $\vec{d}$. Dessa forma, temos que:

$$\tau_{\vec{F}} = \Delta E_C$$

$$\tau_{\vec{F}} = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos 0°$$

$$\boxed{\tau_{\vec{F}} = F \cdot d}\ (eq\ 2.1)$$

Como a força $\vec{F}$ é a resultante na direção horizontal, então, pela Segunda Lei de Newton temos que:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\boxed{F = m \cdot a}\ (eq\ 2.2)$$

Diante desse resultado, vemos que o móvel realiza um movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV). Logo, aplicando a equação de Torricelli, temos:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2 \cdot a \cdot d \Rightarrow \boxed{d = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \cdot a}}$$

Logo, o trabalho pode ser reescrito como:

$$\tau_{\vec{F}} = F \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \cdot a} = m \cdot a \cdot \frac{v_f^2 - v_i^2}{2 \cdot a}$$

$$\boxed{\tau_{\vec{F}} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta E_C}$$

Esse resultado é conhecido como o Teorema da Energia Cinética para uma força resultante constante. Basicamente ele mostra que para variarmos a velocidade de um corpo é necessária a realização de trabalho da resultante das forças que agem nele.

A quantidade $\frac{1}{2}mv^2$ é uma grandeza escalar que nos informa a energia relacionada ao movimento do automóvel. Por isso, chamamos de energia cinética E_C de um corpo a quantidade $E_C = \frac{1}{2}mv^2$.

A dedução do teorema da energia cinética foi feita para o caso de a força resultante ser constante ao logo do deslocamento. Vamos agora deduzir esse teorema para uma força variável.

O trabalho de uma força resultante qualquer ao longo de um deslocamento é dado pela soma de todos os produtos escalares entre a força resultante $\vec{F}_{res}$ e os deslocamentos $d\vec{l}$:

$$\tau_{\vec{F}_{res}} = \int_1^2 \vec{F}_{res} \cdot d\vec{l}$$

Em que $d\vec{l} = \vec{v}dt$, logo:

$$\tau_{\vec{F}_{res}} = \int_1^2 \vec{F}_{res} \cdot \vec{v}dt$$

Repare que o termo $\vec{F}_{res} \cdot \vec{v}$ é a potência instantânea, definida como $\frac{dE_C}{dt}$ (variação da energia pelo tempo e, nesse caso, estamos trabalhando com energia cinética. Portanto:

$$\tau_{\vec{F}_{res}} = \int_1^2 \frac{dE_C}{dt} dt = \int_1^2 dE_C = \Delta E_C$$

$$\boxed{\tau_{\vec{F}_{res}} = \Delta E_C}$$

2.2. Trabalho no centro de massa

Para um sistema de partículas, podemos escrever que:

$$\vec{F}_{ext_{Res}} = \sum \vec{F}_{i_{ext}} = M\vec{a}_{CM}$$

Em que $M = \sum m_i$ representa a massa do sistema e $\vec{a}_{CM}$ é a aceleração do centro de massa.

Podemos multiplicar escalarmente a equação logo acima pela velocidade do centro de massa $\vec{v}_{CM}$:

$$\vec{F}_{ext_{Res}} \cdot \vec{v}_{CM} = M(\vec{a}_{CM} \cdot \vec{v}_{CM}) \ (eq\ 2.3)$$

Pela cinemática, podemos escrever que $d\vec{l}_{CM} = \vec{v}_{CM}dt$. Vamos obter o resultado matematicamente, não precisa ficar preso a isso. Não é o nosso objetivo. Queremos apenas o resultado.

$$\frac{d}{dt}(v^2)=\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=2\cdot\vec{a}\cdot\vec{v}$$

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v^2)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)}\ (eq\ 2.4)$$

Com a equação 2.4, podemos manipular a equação 2.3 da seguinte forma:

$$\vec{F}_{ext_{Res}}\cdot\vec{v}_{CM}=M(\vec{a}_{CM}\cdot\vec{v}_{CM})=M\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Mv^2\right)$$

Como $\frac{1}{2}Mv^2=E_C$, então:

$$\vec{F}_{ext_{Res}}\cdot\vec{v}_{CM}=\frac{d}{dt}(E_C)\Rightarrow\vec{F}_{ext_{Res}}\cdot\vec{v}_{CM}dt=d(E_C)\Rightarrow\vec{F}_{ext_{Res}}\cdot d\vec{l}_{CM}=d(E_C)$$

Portanto:

$$\boxed{\int_1^2\vec{F}_{ext_{Res}}\cdot d\vec{l}_{CM}=\tau_{\vec{F}_{ext_{Res}}}=\Delta E_{C_{trans}}}\ (eq\ 2.5)$$

A equação 2.5 relaciona o trabalho da força resultante no centro de massa e a energia cinética de translação do sistema. Podemos dizer que:

O trabalho no centro de massa realizado pela força resultante externa sobre um sistema é igual à variação da energia cinética de translação desse sistema.

Olhando a equação 2.5 ingenuamente, somos levados a acreditar que ela é igual ao teorema da energia cinética apresentado anteriormente. Entretanto, há algumas diferenças importantes.

Note que a equação 2.5 nos mostra como varia a rapidez do centro de massa de um sistema com o deslocamento. Portanto, quando usamos esta relação estamos desprezando o movimento de qualquer parte do sistema em relação ao referencial do centro de massa.

Observação: um referencial no centro de massa é um referencial não girante (que não gira em relação a um referencial inercial) que se move com o centro de massa.

Desta maneira, podemos calcular o movimento do sistema como um todo, sem a necessidade de conhecer cada detalhe das partes do sistema, apenas com as informações do centro de massa.

Quando um sistema se move com apenas uma partícula (todas as partes tendo a mesma velocidade), a relação do trabalho no centro de massa com a energia cinética de translação se reduz ao teorema da energia cinética.

Caso haja apenas uma força atuando no centro de massa, então podemos dizer que:

$$\boxed{\tau_{CM}=\int_1^2\vec{F}\cdot d\vec{l}_{CM}}$$

2.3. Energia potencial

Chamamos de energia potencial aquela cuja energia está associada a posição relativas das diferentes partes do sistema. Diferente da energia cinética que está associada ao movimento, energia potencial está relacionada com a configuração do sistema.

Vamos supor que você queira levantar um haltere de massa m até uma altura h. O haltere encontra-se em repouso no chão e termina em repouso, logo, sua variação efetiva de energia cinética é zero.

Nesse caso, podemos considerar o haltere como uma partícula e então aplicar o teorema da energia cinética. Como a variação da energia cinética é nula, logo o trabalho total realizado sobre ele é nulo. No altere, existem duas forças atuando enquanto ele é levantado: a força peso e a força do operador.

A força peso sobre o haltere é $m\vec{g}$ e o trabalho realizado por essa força, enquanto é erguido, é $-mgh$. Como o trabalho total realizado sobre o haltere é zero, então o trabalho realizado pelo operador é de $+mgh$.

Podemos considerar o haltere e o planeta Terra como um sistema de duas partículas. Não consideramos você como parte do sistema, já que não terá efeitos nas nossas contas. As forças externas que atuam sobre o sistema haltere-Terra são: força de contato das suas mãos sobre o altere, força de contato dos seus pés sobre o chão e força gravitacional que você exerce sobre a Terra.

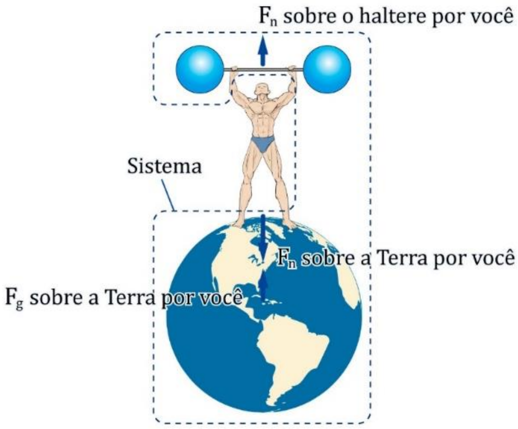


Figura 17: Representação do sistema formado pelo homem, terra e halteres. A representação não está em escala, já que a Terra é muito maior que os demais elementos da figura.

Evidentemente, a força gravitacional de você sobre a Terra é igual a oposta à força gravitacional da Terra sobre você, pois constituem um par ação-reação. As forças gravitacionais entre você e o haltere são desprezíveis.

Ao levantar o haltere, você desloca o corpo por cerca de 1 a dois metros. Assim, os deslocamentos do chão e do planeta Terra são insignificantemente pequenos, de tal forma que a força exercida sobre o haltere pelas suas mãos é a única das três forças externas que realiza trabalho sobre o sistema haltere-Terra.

Dessa forma, podemos dizer que o trabalho total realizado sobre o sistema pelas três forças externas é de $+mgh$, que corresponde ao trabalho realizado sobre o haltere por suas mãos.

Dizemos que a energia transferida ao sistema por este trabalho é armazenada como ***energia potencial gravitacional***, energia relacionada à posição do haltere em relação à Terra (está associada à altura do haltere em relação ao chão).

Outro sistema conhecido por armazenar energia é a mola. Quando você estica ou comprime uma mola, existe uma energia associada a perturbação sofrida pela mola denominada de ***energia potencial elástica***.

2.4. Forças conservativas e não conservativas

Anteriormente, vimos que o trabalho da força peso não dependia da trajetória. A força peso é apenas um tipo de força conservativa.

Definimos que:

Uma força é conservativa quando o trabalho realizado por ela independe do caminho percorrido pela partícula de um ponto a outro.

Em outras palavras:

Se uma força é conservativa, o trabalho que ela realiza sobre uma partícula é zero quando a partícula percorre qualquer caminho fechado, ou seja, retorna à posição inicial.

Tanto a ***força gravitacional*** sobre um corpo quanto a força exercida por uma ***mola*** de massa desprezível sobre um corpo são ***forças conservativas***. Sempre consideramos molas com massas desprezíveis.

Entretanto, nem todas as forças são conservativas. Por exemplo, a força de atrito. Se você empurra um objeto sobre uma superfície áspera, em linha reta, do ponto A para o ponto B, e em seguida retorna ao ponto A, o trabalho total realizado não é zero. A força de atrito é um exemplo de força não conservativa.

Outro exemplo clássico é o de um cavalo amarrado a um tronco de árvore, realizando um movimento circular. Enquanto o animal caminha com rapidez constante, a força $\vec{F}$ que ele exerce sobre o tronco enquanto ele o puxa em círculo está realizando trabalho de valor positivo. Embora o animal retorne ao ponto de início quando completa uma volta, o trabalho realizado pela força $\vec{F}$ não é igual a zero. Assim, dizemos que $\vec{F}$ não é uma força conservativa.

Para mostrar que a força é não conservativa, basta encontrarmos um único caminho fechado em que o trabalho realizado por ela é não nulo. Por outro lado, encontrar um único caminho fechado em que o trabalho realizado por uma força particular não é a garantia de que a força será conservativa. É necessário mostra que para qualquer caminho o trabalho realizado por esta força será nulo. Geralmente, utiliza-se técnicas matemáticas mais avançadas para determinar se uma força é conservativa ou não. Este não é nosso objetivo aqui.

2.5. Função Energia Potencial

Como definimos, o trabalho de uma força conservativa independe do caminho realizado por elas. Depende apenas dos pontos inicial e final. Diante disso, podemos associar a essa força conservativa uma propriedade chamada função energia potencial U.

Definimos a função energia potencial U de forma que o trabalho realizado por uma força conservativa é igual à diminuição da função energia potencial. Matematicamente, dizemos que:

$$\tau = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\Delta U$$

Ou ainda:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\tau$$

Vamos aplicar esse conceito a dois tipos de forças muito utilizadas na Física.

2.5.1. Energia potencial gravitacional

Aplicando a definição que acabamos de ver para a força peso $\vec{F} = -mg\hat{j}$, ao longo de um deslocamento $d\vec{l} = dx\hat{\imath} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$, temos que:

$$\Delta U = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} = -\int_1^2 -(mg\hat{j}) \cdot \left(dx\hat{\imath} + dy\hat{j} + dz\hat{k}\right) = \int_1^2 mgdy$$

$$\Delta U = mg(y_2 - y_1)$$

Em que usamos que o produto escalar dos vetores perpendiculares ($\hat{\imath} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k}$) são nulos e que $\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$.

Assim, como definimos a variação de energia potencial, não é importante o valor real de U, mas a sua variação. Por isso, definimos uma altura como referência e calculamos a variação de energia potencial a partir dessa referência.

Por exemplo, se você está no alto de uma colina, pronto para esquiar, você pode utilizar a base da colina para dizer que a energia potencial gravitacional é mgh, dado que você está a h metros acima da base da colina. Vamos considerar que nosso sistema é constituído apenas da Terra e do esquiador.

Você pode escolher onde deseja colocar como referência para calcular sua variação de energia potencial. Claro, é interessante colocar em um nível estratégico para que facilite sua vida na hora de resolver uma questão.

Quando você (esquiador) se desloca, consideramos o movimento da terra, e a energia potencial do sistema esquiador-Terra pode ser chamado apenas de energia potencial do esquiador.

A energia potencial gravitacional de um sistema de partículas, considerando o campo gravitacional uniforme, é aquela que seria se toda a massa do sistema estivesse concentrada em seu centro de massa. Quando falamos de sistema de partículas, sempre iremos trabalhar com o centro de massa. Nos próximos capítulos iremos trabalhar exaustivamente o conceito de centro de massa.

Neste sistema, considere h_i a altura de uma partícula acima de algum nível de referência. Então, dizemos que a energia potencial gravitacional do sistema é:

$$U_g = \sum_i m_i g h_i = g \sum_i m_i h_i$$

Por definição, a altura do centro de massa do sistema é expressa por:

$$M h_{cm} = \sum_i m_i h_i \text{ onde } M = \sum_i m_i$$

Portanto, podemos escrever que a energia potencial gravitacional de um sistema de partículas é expressa em função da altura do centro de massa, em relação ao nível de referência:

$$\boxed{U_g = M g h_{cm}}$$

2.5.2. Energia potencial elástica

Outro exemplo clássico de força conservativa é a força elástica de uma mola (esticada ou comprimida) de massa desprezível. Vamos supor que você puxou um bloco preso a uma mola, a partir de sua posição de equilíbrio (posição de comprimento natural da mola), até a posição $x = x_1$.

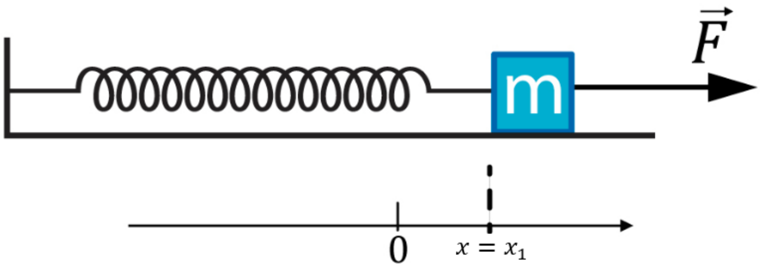


Figura 18: Força aplicada $\vec{F}$ puxa o bloco para a direita, esticando a mola de x_1.

Como vimos, o trabalho realizado pela mola sobre o bloco tem valor negativo, já que a força exercida pela mola sobre o bloco e o deslocamento têm sentidos opostos.

Quando você solta o bloco, a força da mola realiza trabalho positivo sobre o bloco, acelerando de volta para a sua posição inicial.

O trabalho total realizado sobre o bloco pela mola, enquanto o bloco se move de $x = 0$ até $x = x_1$, seguido volta até $x = 0$, é nulo. Este resultado independe do quanto que você distende a mola (desde que ela esteja na sua região elástica). Portanto, dizemos que a força exercida pela mola é do tipo conservativa. Então, podemos aplicar nosso conceito de função energia potencial a esta força:

$$dU = -\vec{F} \cdot d\vec{l} = -F_x dx = -(-kx)dx = (kx)dx$$

$$dU = (kx)dx$$

Integrando, temos que:

$$U = \int kxdx = \frac{1}{2}kx^2 + U_0$$

Em que U_0 é a energia potencial quando $x = 0$, ou seja, quando a mola está frouxa, no seu tamanho natural. Escolhendo U_0 igual a zero, temos que a energia potencial de uma mola é expressa por:

$$\boxed{U_{F_{elas}} = \frac{1}{2}kx^2}$$

Se o operador puxar a mola de $x = 0$ até $x = x_1$, ele deveria aplicar uma força sobre o bloco. Considerando que o corpo está inicialmente em repouso e atinge $x = x_1$ em repouso também, então a variação de sua energia cinética é zero.

Aplicando o teorema da energia cinética, teríamos que o trabalho total realizado sobre o bloco é zero. Portanto:

$$\tau_{operador} + \tau_{mola} = 0$$

$$\tau_{operador} = -\tau_{mola} = \Delta U_{mola} = \frac{1}{2}kx_1^2 - 0 = \frac{1}{2}kx_1^2$$

Concluímos então que a energia transferida do operador que puxa o bloco para o sistema bloco-mola é igual a $\tau_{operador}$ e é armazenada como energia potencial na mola.

2.6. A conservação da energia mecânica

A energia mecânica de um sistema é constituída da energia cinética mais as possíveis energias potenciais:

$$E_{Mecânica} = E_{Cinética} + E_{Potencial}$$

Vimos anteriormente que o trabalho total realizado sobre cada partícula de um sistema é igual à variação da energia cinética da partícula, ΔE_{C_i}, de tal maneira que o trabalho total realizado por todas as forças, τ_{total}, é igual à variação da energia cinética total do sistema:

$$\tau_{total} = \sum \Delta E_{C_i} = \Delta E_{C_{sis}}$$

Podemos separar as forças que agem sobre as partículas de um sistema em forças internas e forças externas. Cada força interna é ou conservativa, ou não conservativa.

Assim, dizemos que o trabalho total realizado por todas as forças é igual ao trabalho realizado pelas forças externas τ_{ext}, mais o trabalho realizado pelas forças internas não conservativas τ_{nc} mais o trabalho realizado pelas forças conservativas τ_C:

$$\tau_{total} = \tau_{ext} + \tau_{nc} + \tau_c$$

$$\tau_{ext} + \tau_{nc} = \tau_{total} - \tau_c$$

Como vimos, para forças conservativas temos a relação $\Delta U_{sis} = -\tau_c$. Assim, dizemos que:

$$\tau_{ext} + \tau_{nc} = \Delta E_{C_{sis}} + \Delta U_{sis}$$

O lado direito da equação logo acima pode ser simplificado por:

$$\Delta E_{C_{sis}} + \Delta U_{sis} = \Delta\left(E_{C_{sis}} + U_{sis}\right)$$

Como a energia mecânica é soma das energias potencial e cinética, então, podemos escrever que:

$$\boxed{\tau_{ext} = \Delta E_{Mec} - \tau_{nc}}$$

Quando o trabalho de total realizado pelas forças externas e por todas as forças internas não conservativas é nulo, dizemos que a energia mecânica de um sistema de partículas é conservada.

$$\Delta E_{Mec} = 0 \Rightarrow E_{Mec} = E_{C_{sis}} + U_{sis} = constante$$

Com esse resultado, vemos que se a energia mecânica de um sistema é conservada, podemos dizer que a energia mecânica final do sistema é igual a energia mecânica inicial do sistema, não é preciso considerar o movimento intermediário e o trabalho realizado pelas forças envolvidas.

Podemos dizer que trabalhar com conservação de energia é como se tirássemos fotos do sistema antes e depois. Assim, analisamos cada momento conforme desejado.

2.7. Aplicação da conservação da energia mecânica

2.7.1. Chute de uma bola

No alto de um prédio de altura h_0, um jogador chuta uma bola com velocidade inicial v_0 e ângulo θ da horizontal. Desprezando a resistência do ar, qual deve ser a altura máxima que a bola atinge, acima do telhado do prédio? Qual deve ser o módulo da velocidade da bola um instante antes de tocar o solo?

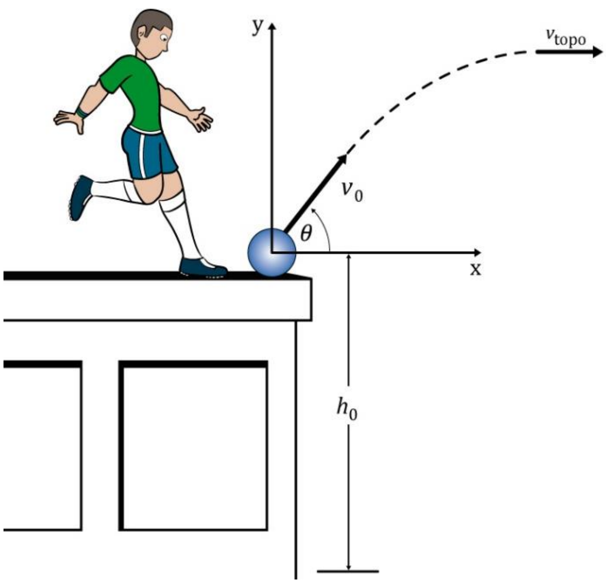


Figura 19: Garoto chutando uma bola no topo de um prédio.

Podemos escolher como sistema a bola e a Terra. Dessa forma, não existem forças externas realizando trabalho sobre o sistema, nem forças internas não conservativas realizando trabalho. Portanto, a energia mecânica do sistema é conservada.

Como vimos no lançamento obliquo, no topo da trajetória a bola tem velocidade apenas na direção horizontal. Vamos escolher como referência o telhado do prédio, portanto:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} - \tau_{nc}$$

$$0 = \Delta E_{mec} - 0 \therefore (E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

Vamos aplicar a conservação da energia mecânica entre o chute e o momento em que está no ponto mais alto, em relação ao nível do telhado:

$$(E_{mec})_{topo} = (E_{mec})_{inicial}$$

Note que a força gravitacional realiza trabalho sobre o sistema. Este trabalho é considerado na função energia potencial gravitacional mgy.

$$(E_{mec})_{topo} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$(E_{cinética})_{topo} + \left(E_{potencial}\right)_{topo} = (E_{cinética})_{inicial} + \left(E_{potencial}\right)_{inicial}$$

$$\frac{1}{2}mv_{topo}^2 + mgy_{topo} = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_i$$

No topo, temos apenas a componente horizontal da velocidade, isto é, $v_x = v_0 \cdot \cos\theta$. Portanto, a altura máxima é dada por:

$$y_{topo} = \frac{\left(v_0^2 - v_{topo}^2\right)}{2g} \Rightarrow y_{topo} = \frac{v_0^2(1 - \cos^2\theta)}{2g}$$

$$\boxed{y_{topo} = \frac{v_0^2 sen^2\theta}{2g}}$$

Para encontrarmos a velocidade da bola quando ela está quase tocando solo basta utilizar a conservação da energia mecânica:

$$(E_{mec})_{solo} = (E_{mec})_{topo} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$(E_{cinética})_{solo} + \left(E_{potencial}\right)_{solo} = (E_{cinética})_{inicial} + \left(E_{potencial}\right)_{inicial}$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mg(y_{solo}) = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_i$$

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + mg(-h_0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}}$$

2.7.2. Pêndulo simples

Considere um pêndulo simples constituído de uma massa m e um fio de tamanho L. A massa é puxada lateralmente até que o ângulo entre o fio e a vertical é θ. Nesse ponto, a massa é largada do repouso. Determine a velocidade e a tração no fio quando a massa passa pelo ponto mais baixo do arco. Despreze a resistência do ar.

Esquematicamente, temos a seguinte situação:

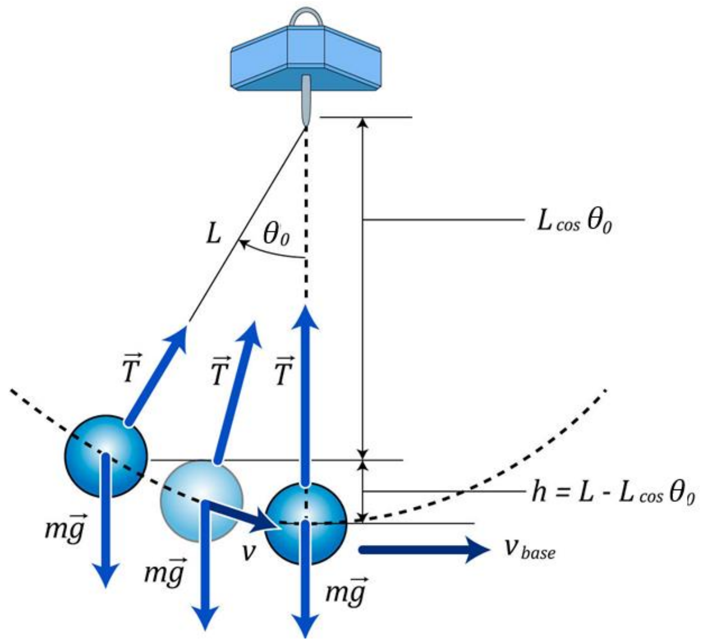


Figura 20: Força ao longo do deslocamento de um pêndulo simples.

Vamos considerar como sistema o pêndulo e a Terra. Assim, a força de tração $\vec{T}$ é uma força interna, não conservativa, atuando sobre a massa m. Ela taxa com que $\vec{T}$ realiza trabalho é $\vec{T} \cdot \vec{v} = P_{\vec{T}} = \frac{d\tau_{\vec{T}}}{dt}$. Note que $\vec{T} \perp \vec{v}$, logo, $\vec{T} \cdot \vec{v} = 0$. Portanto, $\tau_{\vec{T}} = 0$.

Além disso, a força gravitacional, $m\vec{g}$, que é uma força conservativa, também atua sobre a massa. Podemos utilizar o trabalho de total realizado pelas forças externas para calcular a velocidade no ponto mais baixo da trajetória e a tração no fio pode ser obtida pela segunda Lei de Newton.

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} - \tau_{nc}$$

$$\tau_{nc} = \int_1^2 \vec{T} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{T} \cdot \vec{v} dt = 0$$

$$0 = \Delta E_{mec} - 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow (E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$\frac{1}{2} m v_f^2 + m g y_f = \frac{1}{2} m v_i^2 + m g y_i$$

Considerando como altura de referência o ponto mais baixo e lembrando que a velocidade da massa é nula, temos que:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 + 0 = 0 + mgh \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

A altura de onde é lançada a massa do pêndulo, tomando como referência o ponto mais baixo é dada pela geometria do problema:

$$\cos\theta = \frac{L-h}{L} \Rightarrow h = L(1-\cos\theta)$$

Portanto, a velocidade é dada por:

$$\boxed{v_f = \sqrt{2gL(1-\cos\theta)}}$$

Para a determinação da tração no ponto mais baixo, podemos utilizar a segunda Lei de Newton:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$T - mg = ma_{cp} \Rightarrow T = mg + m\left(\frac{v_f^2}{R_{curvatura}}\right)$$

$$T = mg + m\left(\frac{v_f^2}{L}\right) \Rightarrow T = mg + m\left(\frac{2gL(1-\cos\theta)}{L}\right)$$

$$T = 3mg - 2mgcos\,\theta \therefore \boxed{T = (3 - 2\cos\theta)mg}$$

2.7.3. Massa e mola

Considere um bloco de massa m sobre uma superfície horizontal, perfeitamente lisa, sendo empurrado por uma mola de constante elástica igual a k, comprimida de x metros. O bloco é então liberado e a força da mola acelera o bloco à medida que a mola descomprime. Após abandonar a mola, o bloco sobe um plano inclinado de ângulo θ. Determine a distância que o bloco percorre até atingir a altura máxima.

Podemos ilustrar o problema da seguinte forma:

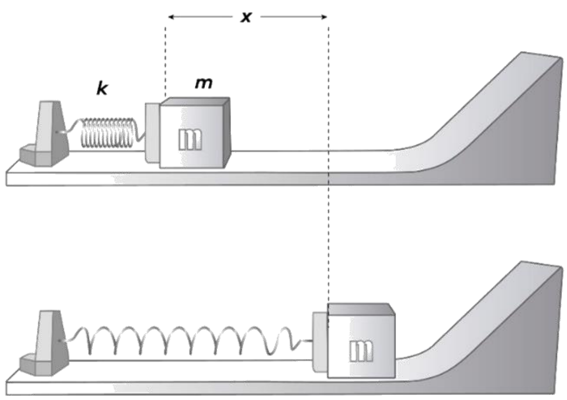


Figura 21: Mola sendo comprimida de x.

Para a resolução deste problema, vamos considerar que o sistema é constituído do bloco, da Terra, da mola, da superfície horizontal, da rampa e da parede na qual a mola está presa. Após ser liberado, não existem forças externas sobre o sistema. As únicas forças que realizam trabalhos são as forças exercidas pela mola sobre o bloco e a força gravitacional, ambas conservativas.

Dessa forma, a energia mecânica total do sistema é conservada. Portanto, podemos considerar dois momentos: o bloco deformado de x metros e o bloco na altura máxima (velocidade nula).

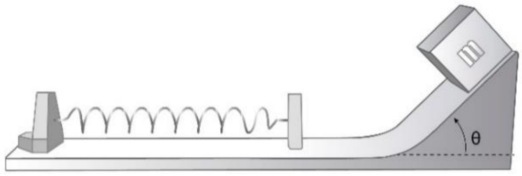


Figura 22: Altura alcançada pelo corpo após liberação da mola.

Portanto:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} - \tau_{nc} \Rightarrow 0 = \Delta E_{mec} - 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} = 0$$

$$(E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

$$(E_{cinética})_{final} + (E_{potencial})_{final} = (E_{cinética})_{inicial} + (E_{potencial})_{inicial}$$

$$0 + mgh = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \boxed{h = \frac{kx^2}{2mg}}$$

Podemos fazer a seguinte relação geométrica:

$$sen\theta = \frac{h}{s} \Rightarrow s = \frac{h}{sen\theta} \therefore \boxed{s = \frac{k \cdot x^2}{2 \cdot m \cdot g \cdot sen\theta}}$$

Nesse problema, a energia mecânica inicial do sistema é apenas a energia potencial da mola. Essa energia é transformada em energia cinética à medida que a mola é descomprimida, até o momento que o bloco está se desprendendo da mola. Neste instante, o bloco atinge a velocidade máxima. Em seguida, ele percorre o resto do plano horizontal com esta velocidade, até o momento em que chega ao pé do plano inclinado.

Aqui consideramos que quando ele chega no início do plano inclinado, sua velocidade não se altera. A partir deste momento, o bloco começa a perder energia cinética e começa a ganhar energia potencial gravitacional.

2.7.4. Bungee-jump

Imagine que você vai saltar de bungee-jump, na Nova Zelândia, de uma altura H. Após cair d, metros a corda do bungee-jump presa a seus tornozelos começa a se distender, percorrendo a distância x. Considerando que sua massa é m e a corda obedece a lei de Hooke (tem massa desprezível também), qual é a sua aceleração quando você está, momentaneamente em repouso no ponto mais baixo da trajetória? Para você não se machucar, vamos considerar que $H > d + x$.

Podemos representar o problema esquematicamente da seguinte forma:

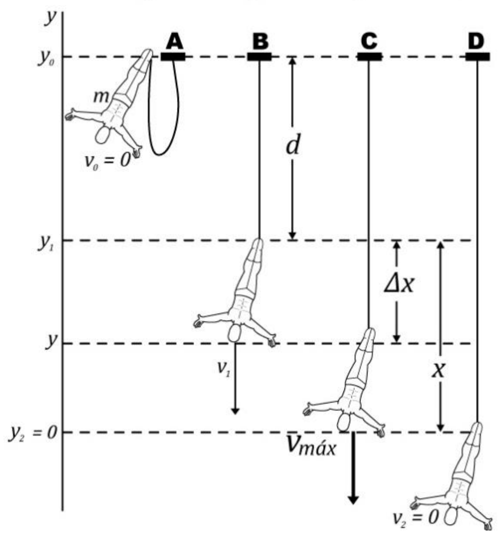


Figura 23: Velocidades e deslocamentos em um salto de bungee-jump.

Vamos considerar nosso sistema constituído por você, pela Terra e pela corda. Vamos considerar nossa referência no ponto mais baixo. Ou seja, a corda tem distensão máxima. Dessa forma, conhecendo a máxima distensão somos capazes de dizer qual é a aceleração máxima aplicando a segunda lei de Newton, junto com a lei de Hooke.

Em nosso sistema, não existe forças externas, nem forças internas não conservativas, realizando trabalho, portanto:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} - \tau_{nc} \Rightarrow 0 = \Delta E_{mec} - 0 \Rightarrow \Delta E_{mec} = 0$$

$$\therefore (E_{mec})_{final} = (E_{mec})_{inicial}$$

Vamos considerar dois instantes: o ponto inicial (salto) e o ponto final (distensão máxima da mola).

$$(E_{mec})_A = (E_{mec})_D$$

$$(E_{cinética})_A + \left(E_{potencial}\right)_A = (E_{cinética})_D + \left(E_{potencial}\right)_D$$

$$0 + mg(d + x) = 0 + \frac{1}{2}kx^2$$

Note que pelo enunciado, a mola tem comprimento natura d. Logo:

$$kx^2 - 2mgx - 2mgd = 0$$

$$x = \frac{2mg \pm \sqrt{4m^2g^2 - 4 \cdot k \cdot (-2mgd)}}{2 \cdot k}$$

$$x = \frac{2mg \pm 2\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{2 \cdot k}$$

$$x = \frac{mg}{k} \pm \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}$$

Observe que $\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d} > mg$, portanto:

$$\boxed{x = \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}}$$

Aplicando a segunda lei de Newton para o corpo no ponto mais baixo, temos que:

$$\sum F_y = ma_y$$

$$kx - mg = ma_{máx}$$

$$k\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}\right) - mg = ma_{máx}$$

$$a_{máx} = \frac{\sqrt{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{m} \Rightarrow a_{máx} = \sqrt{\frac{m^2g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}{m^2}}$$

$$\boxed{a_{máx} = \sqrt{g^2 + \frac{2 \cdot k \cdot g \cdot d}{m}}}$$

Mas, qual seria a máxima velocidade atingida por você durante a queda.

Ingenuamente, somos levados a pensar que a velocidade máxima é atingida no ponto onde a corda atingi o comprimento natural, pois a partir desse momento, começa a surgir a força elástica no sentido contrário ao movimento.

Entretanto, não é neste ponto que você atingiu a máxima velocidade. De fato, a partir do momento em que a mola começa a ser distendida, surge uma força elástica contrária ao movimento, mas ela ainda é menor que a força peso. Portanto, a resultante das forças que atuam em você é $mg - k\Delta x$. Logo, a aceleração resultante é $a = g - \frac{k}{m}\Delta x$.

Assim, vemos que a aceleração está diminuindo em módulo. Lembrando a cinemática, a velocidade é máxima quando a aceleração é nula, portanto:

$$a = 0$$

$$g - \frac{k}{m}\Delta x = 0 \therefore \boxed{\Delta x = \frac{mg}{k}}$$

Portanto, quando o bloco atingir a distensão $\frac{mg}{k}$ sua aceleração será nula e, com isso, sua velocidade será máxima. Esse instante foi representado pela configuração C do nosso esquema de bungee-jump. Portanto, podemos fazer a conservação da energia mecânica entre A e C:

$$(E_{mec})_A = (E_{mec})_C$$

$$(E_{cinética})_A + \left(E_{potencial}\right)_A = (E_{cinética})_C + \left(E_{potencial}\right)_C$$

$$0 + mg(d + \Delta x) = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 + mg(x - \Delta x) + \frac{1}{2} k \Delta x^2$$

$$mg\left(d + \frac{mg}{k}\right) = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 + mg\left(x - \frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

Mas $x = \frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2 g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}$, então:

$$mg\left(d + \frac{mg}{k}\right) = \frac{1}{2} m v_{máx}^2 + mg\left(\frac{mg}{k} + \frac{\sqrt{m^2 g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k} - \frac{mg}{k}\right) + \frac{1}{2} k \left(\frac{mg}{k}\right)^2$$

$$gd + \frac{mg^2}{k} = \frac{1}{2} v_{máx}^2 + \frac{g\sqrt{m^2 g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k} + \frac{mg^2}{2k}$$

$$v_{máx}^2 = 2gd + \frac{mg^2}{k} - \frac{2g\sqrt{m^2 g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}$$

$$\boxed{v_{máx} = \sqrt{2gd + \frac{mg^2}{k} - \frac{2g\sqrt{m^2 g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot d}}{k}}}$$

2.7.5. O problema da velocidade mínima para completar o looping

Imagine que você está no ponto mais alto de uma montanha russa, a uma altura H. O conjunto carrinho-você possui massa m. Qual deve ser a relação entre H e R para que o carrinho consiga dar uma volta completa, com a menor velocidade possível? Despreze todas as forças de atrito.

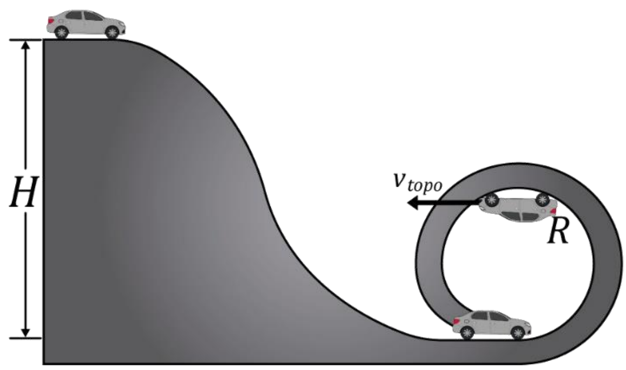


Figura 24: Carro realizando um looping com velocidade mínima no topo da circunferência de raio R.

Para a resolução deste problema, vamos tomar o sistema constituído pelo carrinho, seu conteúdo, o trilho (incluindo a laçada circular) e pela Terra. Assim, o carrinho (+ $você$) deve ter velocidade suficiente no topo da looping para não perder o contato com o trilho.

Vamos utilizar a conservação da energia mecânica direto para a determinação da velocidade no topo do looping. Note que não a forças externas atuando no sistema, assim como não existe forças internas não conservativas agindo.

Conhecendo a velocidade no topo, podemos utilizar a segunda lei de Newton para determinar a relação entre H e R. Vamos considerar o solo como nosso referencial.

Pela conservação de energia mecânica, temos:

$$(E_{mec})_{inicial} = (E_{mec})_{final}$$

$$(E_{cinética})_{inicial} + \left(E_{potencial}\right)_{inicial} = (E_{cinética})_{topo} + \left(E_{potencial}\right)_{topo}$$

$$0 + mgH = \frac{1}{2}mv_{topo}^2 + mgR$$

$$\boxed{v_{topo}^2 = 2g(H - R)}$$

Pela segunda lei de Newton, temos que:

$$F_{Res} = m \cdot g + N = m \cdot a_{cp}$$

$$m \cdot g + N = m \cdot \frac{v_{topo}^2}{R}$$

Para a condição de mínima velocidade, quando o carrinho chega no topo do looping, ele dever ter uma velocidade tal que está quase saindo dos trilhos, isto é, a força de contato é praticamente zero:

$$N \cong 0$$

$$m \cdot g + 0 = m \cdot \frac{v_{topo}^2}{R} \Rightarrow m \cdot g = m \cdot \frac{2g(H - R)}{R} \therefore \boxed{H = \frac{3}{2}R}$$

2.8. A conservação da energia

No nível macroscópico, as forças não conservativas dissipativas não podem ser desprezadas, como exemplo o atrito.

Tais forças tende a diminuir a energia mecânica de um sistema, dissipando-a. Contudo, quando ocorre uma diminuição da energia mecânica, temos um aumento corresponde da energia térmica.

Embora a energia mecânica total não seja conservada, nem a energia térmica, a energia total do sistema é conservada.

Outro tipo de força não conservativa está relacionado com reações químicas. Dessa forma, se incluímos a ocorrência de reações químicas no nosso sistema, então a soma da energia mecânica com a energia térmica não será conservada.

Além da energia química, ainda teríamos a parte da energia que um corpo irradia. Entretanto, ***qualquer acréscimo ou decréscimo da energia total de um sistema sempre pode ser associado a um aparecimento ou desaparecimento de energia fora do sistema***.

Este fato é expresso pela ***lei de conservação da energia***. Podemos dizer que a variação da energia de um sistema é dada pela diferença da energia que entra e a energia que sai do sistema. Matematicamente, temos:

$$\boxed{\Delta E_{sis} = E_{entra} - E_{sai}}$$

Assim, a lei da conservação da energia pode ser escrita como:

No universo, a energia total é constante. A energia nunca pode ser criada nem destruída, ela é apenas transformada de uma forma para outra ou transferida de uma parte para outra.

Podemos dizer que a energia de um sistema é constituída principalmente pelas seguintes partes:

$$\boxed{E_{sis} = E_{mec} + E_{térm} + E_{quím} + E_{outras}}$$

2.9. O teorema do Trabalho e Energia

Podemos transferir energia para dentro ou para fora de um sistema através da realização de trabalho sobre o sistema. Independentemente da situação, a lei da conservação da energia estabelece que:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{sis} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{outras}$$

Em que τ_{ext} é o trabalho realizado sobre o sistema por forças externas.

Este teorema nos permite estudar uma grande variedade de sistemas, trata-se de uma ferramenta muito poderosa. Tudo depende de como você vai definir o seu sistema.

Como já vimos anteriormente, podemos transferir energia na forma de calor de um sistema para outro. O calor é transferido, principalmente, por causa de uma diferença de temperatura. Nesta aula, vamos considerar a transferência de energia por calor desprezível.

Vamos estudar alguns problemas clássicos envolvendo o teorema do trabalho e energia. Novamente, não quero que você decore os resultados! Eu quero que você entenda como desenvolvemos cada problema.

2.9.1. Uma bola caindo

Considere uma bolinha de massa de modelar, com massa m, solta a partir do repousa a uma altura h, em relação ao solo. Vamos aplicar a lei de conservação da energia para o sistema constituído exclusivamente pela bolinha e para o sistema constituído pela Terra, pelo piso e pela bolinha.

Durante a queda, apenas a força da gravidade atua na bolinha. Ao tocar o solo, existe uma força de contato entre o piso e a massa de modelar, mas como o chão não se move, o trabalho realizado por ele deve ser nulo.

Além disso, podemos desprezar as variações de energia química ou de outras formas de energia, logo, $\Delta E_{quím} = \Delta E_{outras} = 0$. Portanto, a única energia transferida para ou da bola é devido ao trabalho realizado pela força da gravidade.

Pelo teorema do trabalho e energia, podemos escrever para a bolinha de massa de modelar a seguinte equação:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím} + \Delta E_{outras}$$

$$\tau_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

Como mencionamos, o piso não se move, logo, não realiza trabalho sobre a bolinha. Portanto, o único trabalho das forças externas é devido a força da gravidade:

$$\tau_{ext} = mgh$$

Primeiramente, vamos considerar que apenas a bolinha é todo o sistema. Assim, a única energia mecânica é a cinética, que é nula no início e no fim. Dessa forma, a variação da energia mecânica é nula:

$$\Delta E_{mec} = 0$$

Assim, pelo teorema do trabalho e energia, temos que a variação da energia térmica é dada por:

$$\boxed{\Delta E_{térm} = mgh}$$

Observação: caso o solo não fosse perfeitamente rígido, haveria um aumento da energia térmica compartilhada entre o piso e a bolinha, já que o trabalho realizado pelo piso não seria nulo.

Agora, vamos considerar que nosso sistema seja formado pela Terra, pelo piso e pela bolinha.

Neste caso, não existem forças externas atuando sobre o sistema bolinha-piso-Terra (note que agora a força da gravidade e a força do solo são internas ao sistema). Logo, $\tau_{ext} = 0$.

Pelo teorema do trabalho e energia, temos que:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{sist} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

$$\Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = 0$$

Para o sistema bolinha-piso-Terra, inicialmente a energia mecânica é apenas a energia potencial gravitacional. No final, a energia mecânica é nula. Portanto:

$$\Delta E_{térm} = -\Delta E_{mec}$$

$$\Delta E_{mec} = 0 - mgh \therefore \Delta E_{térm} = -(-mgh)$$

$$\boxed{\Delta E_{térm} - mgh}$$

Note que nenhuma energia é transferida ao sistema bolinha-piso-Terra. Além disso, neste sistema, a energia potencial gravitacional inicial é convertida em energia cinética antes da bolinha tocar o solo e, em seguida, transformada em energia térmica.

2.9.2. Atrito cinético

No mundo real, sabemos que por mais polida que seja as superfícies, sempre haverá atrito quando um corpo desliza sobre outro. Nesse caso, parte da energia mecânica do sistema é transferida em energia térmica.

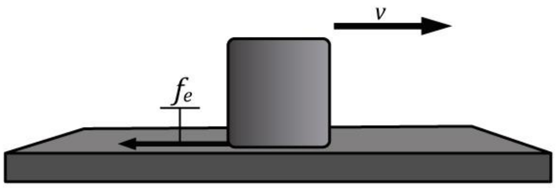


Figura 25: Representação da força de atrito contrária ao movimento do corpo.

Vamos considerar um bloquinho deslizando sobre uma prancha com velocidade inicial v_i. A prancha está sobre uma superfície sem atrito. Inicialmente, a prancha está em repouso. Se considerarmos o sistema constituído pelo bloco e pela prancha, então $\Delta E_{quím} = \Delta E_{outras} = 0$.

Note que a força gravitacional é perpendicular ao deslocamento, logo, não realiza trabalho. Dessa forma, não existe trabalho externo sendo realizado sobre nosso sistema. Pelo teorema do trabalho e energia, temos que:

$$0 = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

A variação da energia mecânica é dada pela variação da energia cinética do bloco e da prancha:

$$\Delta E_{mec} = (\Delta E_C)_{bloco} + (\Delta E_C)_{prancha} = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) + \left(\frac{1}{2}MV_f^2 - 0\right)$$

Pela segunda lei de Newton, podemos dizer que a força de atrito entre o bloco e a prancha é dada por:

$$-f_{at} = ma_x$$

Em f_{at} é intensidade da força de atrito cinético e a_x é a aceleração do bloco na direção x. Multiplicando os lados da equação logo acima por Δx (deslocamento do bloco), obtemos que:

$$-f_{at}\Delta x = ma_x\Delta x$$

Pela equação de Torricelli, podemos dizer que $2a_x\Delta x = v_f^2 - v_i^2$. Portanto:

$$-f_{at}\Delta x = ma_x\Delta x = m\left(\frac{1}{2}\left(v_f^2 - v_i^2\right)\right) = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \ (eq\ 2.9\ a)$$

Esta equação mostra a relação entre o trabalho no centro de massa e a energia cinética de translação no bloco. Podemos aplicar a mesma relação para a prancha:

$$f_{at}\Delta X = MA_x\Delta X = M\left(\frac{1}{2}\left(V_f^2 - V_i^2\right)\right) = \frac{1}{2}MV_f^2 - 0 \ (eq\ 2.9\ b)$$

Em que ΔX é o deslocamento da prancha e A_x é a aceleração da prancha.

Note que na prancha, a força de atrito está no sentido de deslocamento (por ação e reação, tem sentido contrário a força de atrito no bloco). Logo, a relação fornecida pela segunda lei de Newton é $f_{at} = MA_x$.

Quando somamos as equações 2.9 a e 2.9 b, encontramos que:

$$-f_{at}(\Delta x - \Delta X) = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) + \frac{1}{2}MV_f^2$$

Observe que $\Delta x - \Delta X$ representa a distância relativa entre o bloco e a prancha, d_{rel}, e que o lado direito é a variação da energia mecânica do sistema bloco-prancha. Portanto:

$$\boxed{-f_{at}d_{rel} = \Delta E_{mec}}$$

Devido à presença do atrito entre o bloco e a prancha, a diminuição da energia mecânica do sistema bloco-prancha implica aumento da energia térmica do sistema. Assim, a energia dissipada pelo atrito cinético é dada por:

$$\boxed{\Delta E_{térm} = f_{at}d_{rel}}$$

Como d_{rel} é a mesma em todos os sistemas de referência, a equação logo acima é valida para qualquer sistema de referência, inercial ou não. Logo, temos o teorema de trabalho e energia com atrito.

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = \Delta E_{mec} + f_{at}d_{rel}$$

2.9.3. Empurrando uma caixa sobre uma mesa

Considere uma caixa de massa m repousado sobre uma mesa horizontal. Você empurra a mesa com uma força $\vec{F}$, ao longo de um deslocamento d. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a mesa é μ_k. Qual é o trabalho externo realizado sobre o sistema bloco-mesa? Qual é a energia dissipada pelo atrito? Qual é a velocidade final da caixa?

Primeiramente, note que você é externo ao sistema bloco-mesa. Além disso, vamos desconsiderar qualquer variação na energia química. Assim, a energia do sistema é aumentada pelo trabalho da força externa. Aplicando o teorema do trabalho e energia com atrito, podemos escrever que:

$$\sum \tau_{ext} = \tau_{por\ você\ sobre\ o\ bloco} + \tau_{forças\ normais} + \tau_{forças\ gravitacionais}$$

$$\sum \tau_{ext} = F\Delta x + 0 + 0 \Rightarrow \boxed{\sum \tau_{ext} = Fd}$$

A energia dissipada pelo atrito é dada por:

$$\Delta E_{térm} = f_{at}\Delta x \therefore \boxed{\Delta E_{térm} = \mu_k mgd}$$

Pelo teorema do trabalho e energia, podemos encontrar a velocidade final do bloco:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

$$\Delta E_{mec} = \Delta U + \Delta E_C$$

$$\Delta E_{mec} = 0 + \left(\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2\right) \therefore \boxed{\Delta E_{mec} = \frac{1}{2}mv_f^2}$$

Portanto:

$$Fd = \frac{1}{2}mv_f^2 + \mu_k mgd \therefore \boxed{v_f = \sqrt{\frac{2d}{m}(F - \mu_k mg)}}$$

2.9.4. Trenó em movimento

Considere um trenó deslizando sobre uma superfície horizontal de gelo, com velocidade inicial v_i. O coeficiente de atrito cinético entre o trenó e o gelo é μ_k. Determine a distância que o trenó percorre até parar.

Podemos representar a situação em questão pelo seguinte desenho:

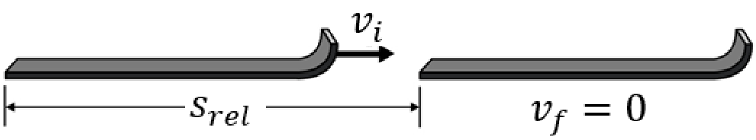


Figura 26: Deslizamento de um trenó até que ele pare.

Vamos tomar como nosso sistema o gelo e o trenó, para aplicar o teorema do trabalho e energia.

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

Como não forças externas realizando trabalho sobre o sistema, nem forças internas conservativas realizando trabalho. Podemos dizer que:

$\tau_{ext} = 0$ e $\Delta E_{potencial} = 0$

Pela segunda lei de Newton na direção vertical, temos que:

$$f_N = m \cdot g \Rightarrow f_{at} = \mu_k \cdot f_N \Rightarrow \boxed{f_{at} = \mu_k \cdot m \cdot g}$$

Portanto:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm}$$

$$\tau_{ext} = \Delta E_C + \Delta E_{potencial} + \Delta E_{térm}$$

$$0 = 0 + \Delta E_{cinética} + f_{at} \cdot d_{rel}$$

$$(E_C)_{final} - (E_C)_{inicial} = -f_{at} \cdot d_{rel}$$

$$0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu_k \cdot m \cdot g \cdot d_{rel} \therefore \boxed{d_{rel} = \frac{v^2}{2\mu_k g}}$$

2.9.5. Criança em um escorregador

Suponha uma criança de massa m, descendo por um escorregador de d metros de comprimento, inclinação de θ graus com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre a criança e o brinquedo é μ_k. Se a criança parte do repouso do topo do escorregado, qual será sua velocidade ao chegar à base do escorregador?

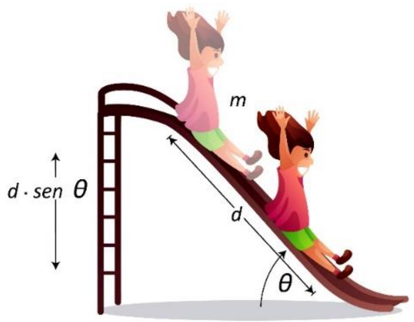


Figura 27: Criança deslizando em um escorregador.

Enquanto a criança desce o escorregador, ela transforma parte de sua energia potencial gravitacional em energia cinética e, por causa do atrito, uma porção de energia é convertida em energia térmica.

Neste problema, vamos tomar como nosso sistema o conjunto criança-escorregador-Terra. Aplicando o teorema da conservação de energia, temos que:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = \Delta E_{potencial} + \Delta E_C + f_{at} \cdot d_{rel}$$

Note que não há forças externas atuando sobre o sistema. Neste problema, a variação da energia potencial gravitacional é dada pela variação de altura Δh (que é negativa).

$\tau_{ext} = 0$ e $\Delta E_{mec} = m \cdot g \cdot \Delta h$

Pela segunda lei de Newton, temos que:

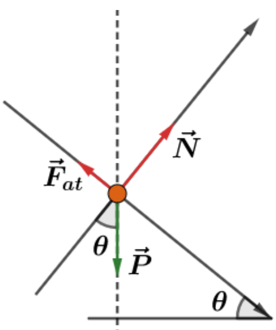


Figura 28: Diagrama de forças que atuam na criança.

$$F_N = m \cdot g \cdot cos\ \theta \ \ e \ \ f_{at,cinético} = \mu_k \cdot F_N = \mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta$$

Note que pela geometria da questão, escrevemos que:

$$|\Delta h| = d \cdot sen\theta$$

Lembrando que a variação de altura da criança é negativa.

Então, pelo teorema do trabalho e energia, encontramos a velocidade final da criança ao chegar a base:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{potencial} + \Delta E_C + f_{at} \cdot d_{rel}$$

$$0 = m \cdot g \cdot \Delta h + \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 + (\mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta) \cdot d$$

$$0 = m \cdot g \cdot (-d \cdot sen\,\theta) + \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 - 0 + (\mu_k \cdot m \cdot g \cdot \cos\theta) \cdot d$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{2 \cdot g \cdot d(sen\,\theta - \mu_k \cdot \cos\theta)}}$$

2.9.6. Dois blocos ligados por um fio e uma polia

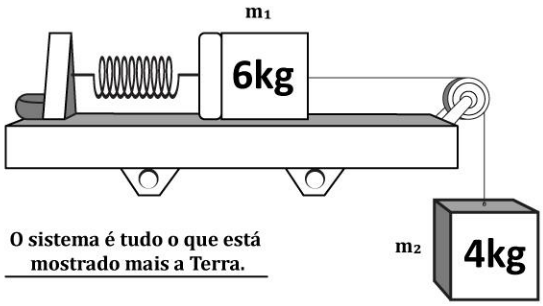


Figura 29: Representação de dois blocos ligados por um fio, com movimentos na horizontal e na vertical devido ao emprego de uma polia.

No esquema figura acima, um bloco de massa m_2 está pendurado, preso a um fio que passa por uma roldana de massa desprezível, ligando a outro bloco de massa m_1 sobre uma superfície fixa horizontal. O coeficiente de atrito cinético é de μ_k. O bloco de massa m_1 é empurrado contra a mola de constante elástica k, deformando-a de Δx. Determine a velocidade de cada bloco, após o bloco de massa m_2 ter descido Δs.

Nesse problema, vamos considerar que nosso sistema é composto pela Terra e todo conjunto mostrado na figura. Podemos esquematizar o que acontece no problema pela figura logo abaixo:

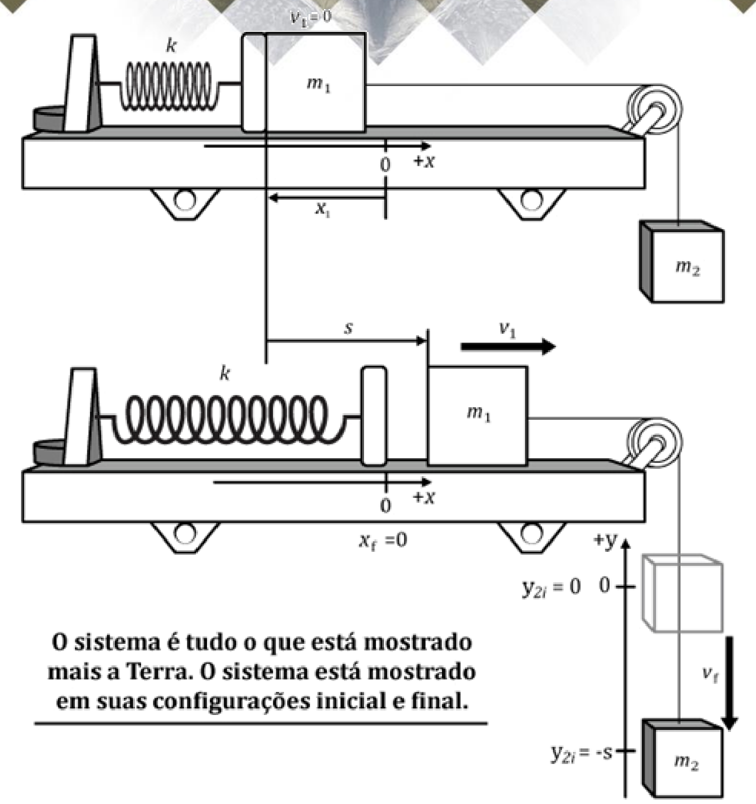


Figura 30: Deslocamentos e velocidades para nosso sistema.

Escrevendo o teorema do trabalho e energia, temos que:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} = \Delta E_{pot\ grav} + \Delta E_{pot\ elás} + \Delta E_C + f_{at} \cdot d_{rel}$$

Não há forças externa agindo sobre nosso sistema, portanto $\tau_{ext} = 0$. Além disso, a variação da energia potencial elástica na mola é dada por:

$$\Delta E_{pot\ elás} = \frac{1}{2} k \cdot \Delta x^2$$

E a variação da energia potencial gravitacional é dada pela variação da altura no eixo y (que é negativa)

$$\Delta E_{pot\ grav} = m \cdot g \cdot (-d) = -m \cdot g \cdot d$$

Se o bloco de massa m_2 desloca-se de d metros, então, pelo vínculo geométrico, o bloco de massa m_1 também se deslocará d. Assim, os blocos terão as mesmas velocidades: o bloco 1 tem velocidade na direção horizontal, enquanto o bloco 2 tem a velocidade com mesmo módulo, mas na direção vertical.

A força de atrito entre o bloco 1 e a superfície horizontal é dada por:

$$f_{at} = \mu_k \cdot m_1 \cdot g$$

Aplicando o teorema:

$$0 = \left(0 - \frac{1}{2} k \Delta x^2\right) + (-m \cdot g \cdot d) + \left(\frac{1}{2} m_1 v_f^2 + \frac{1}{2} m_2 v_f^2\right) + \mu_k \cdot m_1 \cdot g \cdot d$$

$$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{k\Delta x^2 + 2(m_2 - \mu_k m_1)gd}{m_1 + m_2}}}$$

2.9.7. Carro subindo a ladeira

Você está subindo uma ladeira com inclinação de 10% (significa que a estrada se eleva de 1 metro para cada 10 de distância horizontal, ou seja, o ângulo de inclinação θ tal que $tg\theta = 0{,}100$). Para isso, você está com velocidade constante de $30\ m/s$ e o carro juntamente com os passageiros tem massa de $1000\ kg$. Se a eficiência (fração da energia química consumida que se manifesta como energia mecânica) é de 15%, qual a taxa de variação da energia química do sistema carro-Terra-atmosfera? Qual é a taxa de produção de energia térmica?

Este problema tem mais o estilo do IME. Nele, uma parte da energia química é apenas para aumentar a energia potencial gravitacional do carro durante a subida. Além disso, outra parte da energia é utilizada para aumentar a energia térmica, sendo a maior parte desta expelida pelo sistema de exaustão do carro.

Vamos tomar como sistema, o conjunto formado pela Terra, pelo automóvel, pela ladeira e pela atmosfera. Primeiramente, devemos encontrar qual a taxa de perda de energia química. Para isso, vamos definir primeiramente o que é taxa de perda de energia química. Na Física, sempre que mencionamos taxa de alguma coisa nos referimos a variação desta grandeza pelo tempo.

Dessa forma, a taxa de perda de energia química pode ser definida como:

$$\frac{|\Delta E_{quím}|}{\Delta t}$$

Segundo enunciado, ocorre um aumento de 15% da energia mecânica da diminuição da energia química:

$$\Delta E_{mec} = 0{,}150|\Delta E_{quím}|$$

Com isso, podemos dizer que a taxa de perda da energia química é:

$$\frac{|\Delta E_{quím}|}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}150}\frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t}$$

O automóvel está se movendo com velocidade constante, portanto, a variação da energia cinética é nula ($\Delta E_C = 0$). Logo, a variação da energia mecânica é exclusivamente devido a variação da energia potencial gravitacional ($\Delta E_{mec} = \Delta E_{pot}$).

Logo:

$$\Delta E_{mec} = \Delta E_{pot} = m \cdot g \cdot \Delta h$$

Dessa forma, a taxa de perda da energia química é expressa por:

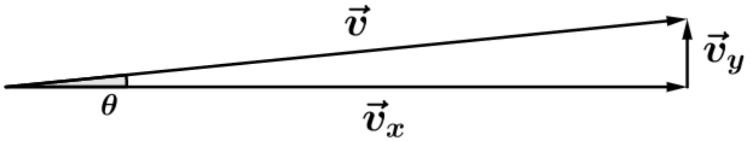
$$\frac{|\Delta E_{quím}|}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}150}\frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t}$$

$$\frac{|\Delta E_{quím}|}{\Delta t} = \frac{1}{0{,}150}\frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t}$$

Como a perda na energia química, ao tirarmos o módulo devemos compensar com um sinal de menos:

$$\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t}$$

Note que $\frac{\Delta h}{\Delta t}$ representa a velocidade v_y do automóvel que se relaciona com v de acordo com o vínculo geométrico:



$$v_y = v \cdot sen\ \theta$$

Como o ângulo é muito pequeno, podemos dizer que a tangente do ângulo é aproximadamente o seno dele (aproximação feita com ângulo em radianos).

$$sen\ \theta \cong tg\ \theta = 0{,}100$$

Substituindo valores, podemos encontrar a taxa de perda da energia química:

$$\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150}\frac{m \cdot g \cdot \Delta h}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150} \cdot m \cdot g \cdot v_y$$

$$\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150} \cdot m \cdot g \cdot v \cdot sen\ \theta$$

$$\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} = -\frac{1}{0{,}150} \cdot (1000\ kg) \cdot \left(9{,}81\frac{m}{s^2}\right) \cdot \left(30\frac{m}{s}\right) \cdot 0{,}100$$

$$\boxed{-\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} \cong 196\ \text{kW}}$$

Pelo teorema do trabalho e energia, temos que:

$$\tau_{ext} = \Delta E_{mec} + \Delta E_{térm} + \Delta E_{quím}$$

Para nosso sistema, o trabalho das forças externas é nulo. Assim, dividindo a equação logo acima por Δt, temos que:

$$0 = \frac{\Delta E_{mec}}{\Delta t} + \frac{\Delta E_{térm}}{\Delta t} + \frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta E_{térm}}{\Delta t} = 0{,}15\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t} - \frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t}$$

$$\frac{\Delta E_{térm}}{\Delta t} = -0{,}85\frac{\Delta E_{quím}}{\Delta t}$$

$$\boxed{-\frac{\Delta E_{térm}}{\Delta t} = 167 \text{ kW}}$$

3. Lista de questões

1. (ITA – 1993)

O módulo v_1 da velocidade de um projétil no seu ponto de altura máxima é $\sqrt{\frac{6}{7}}$ do valor da velocidade v_2 no ponto onde a altura é metade da altura máxima. Obtenha o cosseno do ângulo de lançamento com relação a horizontal.

a) Os dados fornecidos sâo insuficientes

b) $\sqrt{3}/2$

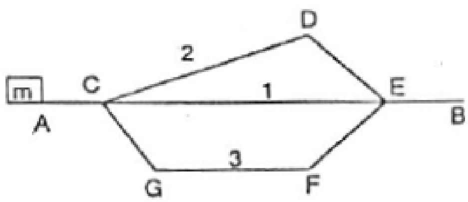
c) $1/2$

d) $\sqrt{2}/2$

e) $\sqrt{3}/3$

2. (ITA – 1994)

Na figura, o objeto de massa m quando lançado horizontalmente do ponto A com velocidade v_A atinge o ponto B após percorrer quaisquer dos três caminhos contidos num plano vertical ($ACEB$, $ACDEB$, $ACGFEB$). Sendo g a aceleração gravltacional e μ o coeficionte do atrito em qualquor trecho; τ_1, τ_2 , τ_3 e v_{B_1}, v_{B_2}, v_{B_3} os trabalhos realizados pela força do atrito e as velocidades no ponto B, correspondentes aos caminhos 1, 2 e 3 podemos afirmar que:



a) $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ e $v_{B_3} < v_{B_2} < v_{B_1}$

b) $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ e $v_{B_3} = v_{B_2} = v_{B_1}$

c) $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1$ e $v_{B_3} < v_{B_2} < v_{B_1}$

d) $\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ e $v_{B_3} > v_{B_2} > v_{B_1}$

e) $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1$ e $v_{B_3} = v_{B_2} = v_{B_1}$

3. (ITA – 1995)

Um pingo de chuva de massa $5{,}0 \cdot 10^{-5}\ kg$ cai com velocidade constante de uma altitude de $120\ m$, sem que a sua massa vane, num local onde a aceleração da gravidade g é $10\ m/s^2$. Nestas condições, a força de atrito F_a do ar sobre a gota e a energia E_a, dissipada durante a queda são respectivamente:

a) $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ N; 5{,}0 \cdot 10^{-4}\ J$

b) $1{,}0 \cdot 10^{-3}\ N; 1{,}0 \cdot 10^{-1}\ J$

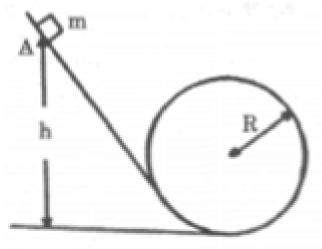
c) $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ N; 5{,}0 \cdot 10^{-2}\ J$

d) $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ N; 6{,}0 \cdot 10^{-2}\ J$

e) $5{,}0 \cdot 10^{-4}\ N; E_a = 0\ J$

4. (ITA – 1995)

A figura ilustra um carrinho de massa m percorrendo um trecho de uma montanha russa. Desprezando-se todos os atritos que agem sobre ele e supondo que o carrinho seja abandonado em A, o menor valor de h para que o carrinho efetue a trajetória completa é:



a) $3R/2$

b) $5R/2$

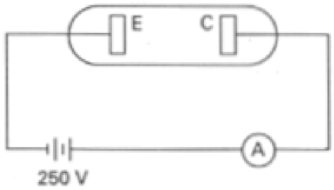
c) $2R$

d) $\sqrt{(5gR)/2}$

e) $3R$

5. (ITA – 1996)

Um feixe de elétrons é formado com a aplicação de uma diferença de potencial de $250\ V$ entre duas placas metálicas, uma emissora e outra coletora, colocadas em uma ampola na qual se fez vácuo. A corrente medida em um amperimetrv devidamente ligado é de $5{,}0\ mA$ Se os elétrons podem ser considerados como emitidos com veloctdade nula, então:



E = placa emissora
C = placa coletora

a) a velocidade dos elétrons ao atingirem a placa coletora é a mesma dos elétrons no fio externo à ampola.

b) se quisermos saber a velocidade dos elétrons é necessário conhecermos a distância entre as placas.

c) a energia fornecida pela fonte aos elétrons coletados é proporcional ao quadrado da diferença de potencial.

d) a velocidade dos elétrons ao atingirem a placa coletora é de aproximadamente $1{,}0 \cdot 10^7\ m/s$.

e) depois de algum tempo a corrente vai se tomar nula, pois a placa coletora vai ficando cada irz mais negativa pela absorção dos elétrons que nela chegam

6. (ITA – 1996)

Uma roda d'água converte, em eletricidade com uma eficiência de 30%, a energia de 200 litros de água por segundo caindo de uma altura de 5,0 metros. A eletricidade gerada é utilizada pa- ra esquentar 50 litros de água de 15°C a 65°C. O tempo aproximado que leva a água para esquentar até a temperatura desejada é:

a) 15 minutos.

b) meia hora.

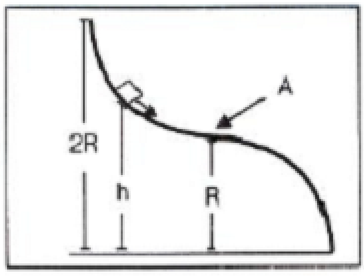
c) uma hora.

d) uma hora e meia.

e) duas horas.

7. (ITA – 1997)

Um pequeno bloco, solto com velocidade nula a uma altura h, move-se sob o efeito da gravidade e sem atrito sobre um trilho em torma de dois quartos de círculo de raio R que se tangenciam, como mostra a figura. A mínima altura inicial h que acarreta a saída do bloco, do trilho, após o ponto A é:



a) $4\ R/3$

b) $5\ R/4$

c) $3\ R/2$

d) $5\ R/3$

e) $2R$

8. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm. b) 8.2 cm. c) 8.8 cm. d) 9.2 cm. e) 9.6 cm.

9. (ITA – 1998)

O módulo da velocidade das águas de um no é de 10 m/s pouco antes de uma queda de água. Ao pé da queda existe um remanso onde a velocidade das águas ó praticamente nula. Observa-se que a temperatura da água no remanso ô 0,1 ®C maior do que a da água antes da queda. Conclui-se que a altura da queda de água é:

a) 2,0 m. b) 25 m. c) 37 m. d) 42 m. e) 50 m.

10. (ITA – 2001)

Uma partícula esta submetida a uma força com as seguintes características: seu módulo é proporcional ao módulo da velocidade da partícula e atua numa direção perpendicular àquela do vetor velocidade. Nestas condições, a energia cinética da partícula deve

a) crescer linearmente com o tempo

b) crescer quadratlcamente com o tempo

c) diminuir linearmente com o tempo

d) diminuir quadratlcamente com o tempo

e) permanecer Inalterada.

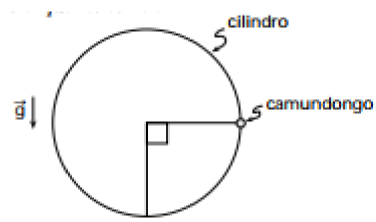
11. (ITA – 2001)

Um bloco com massa de $0{,}20kg$ inicialmente em repouso, é derrubado de uma altura de $h = 1{,}20\ m$ sobre uma mola cuja constante de foiça e $k = 19{,}6\ N/m$. Desprezando a massa da mola. a distância máxima que a mola será comprimida é

a) 0,24 m b) 0,32 m c) 0,48 m d) 0,54 m e) 0,60 m

12. (ITA – 2002)

Um pequeno camundongo de massa M corre num plano vertical no interior de um cilindro de massa m e eixo horizontal Suponha-se que o ratinho alcance a posição indicada na figura imediatamente no início de sua corrida nela permanecendo devido ao movimento giratório de reação do cilindro, suposto ocorrer sem resistência de qualquer natureza. A energia despendida pelo ratinho durante um intervalo de tempo T para se manter na mesma posição enquanto corre é



a) $E = \frac{M^2}{2m} g^2 T^2$

b) $E = M g^2 T^2$

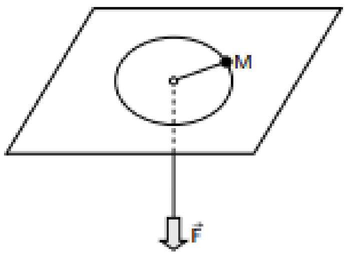
c) $E = \frac{m^2}{M} g^2 T^2$

d) $E = m g^2 T^2$

e) n.d.a.

13. (ITA – 2002)

Um corpo de massa M, mostrado na figura, é preso a um fio leve, inextenslvel, que passa através de um orifício central de uma mesa lisa. Considere que inicialmente o corpo se move ao longo de uma circunferência, sem atrito. O fio é, então, puxado para baixo, aplicando-se uma força $\vec{F}$, constante, a sua extremidade livre. Podemos afirmar que:



a) o corpo permanecerá ao longo da mesma circunferência.

b) a força $\vec{F}$ não realiza trabalha pois é perpendicular à trajetória.

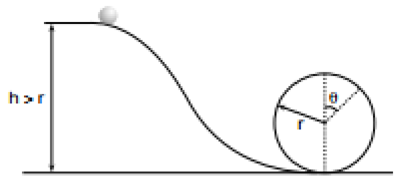
c) a potência instantânea de $\vec{F}$ é nula.

d) o trabalho de $\vec{F}$ é igual à variação da energia cinética do corpo.

e) o corpo descreverá uma trajetória elíptica sobre a mesa.

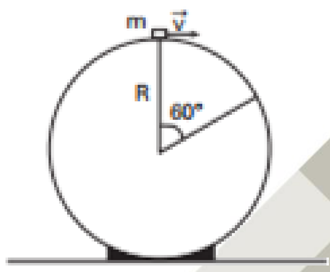
14. (ITA – 2002)

Uma massa é liberada a partir do repouso de uma altura h acima do nlvel do solo e desliza sem atrito em uma pista que termina em um “loop” de ralo r, conforme Indicado na figura. Determine o angulo θ relativo a vertical e ao ponto em que a massa perde o contato com a pista. Expresse sua tesposta como função da altura h, do raio R e da aceleração da gravidade g.



15. (ITA – 2005)

Um objeto pontual de massa m desliza com velocidade inicial v, horizontal, do topo de uma esfera em repouso, de raio R. Ao escorregar pela superfície, o objeto sofre uma força de atrito de módulo constante dado por $f = 7mg/4\pi$. Para que o objeto se desprenda da superfície esférica após percorrer um arco de 60° (veja figura), sua velocidade inicial deve ter o módulo de



a) $\sqrt{2gR/3}$

b) $\sqrt{3gR}/2$

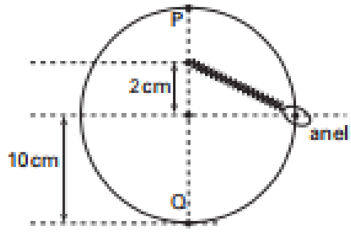
c) $\sqrt{6gR}/2$

d) $3\sqrt{gR/2}$

e) $3\sqrt{gR}$

16. (ITA – 2006)

Um anel de peso $30N$ está preso a uma mola e desliza sem atrito num fio circular situado num plano vertical, conforme mostrado na figura.



Considerando que a mola não se deforma quando o anel se encontra na posição P e que a velocidade do anel seja a mesma nas posições P e Q, a constante elástica da mola deve ser de

a) $3{,}0 \cdot 10^3\ N/m$ b) $4{,}5 \cdot 10^3\ N/m$ c) $7{,}5 \cdot 10^3\ N/m$

d) $1.2 \cdot 10^4\ N/m$ e) $3{,}0 \cdot 10^4\ N/m$

17. (ITA – 2007)

Projetado para subir com velocidade média constante a uma altura de $32\ m$ em $40\ s$, um elevador consome a potência de $8{,}5\ kW$ de seu motor. Considere seja $370\ kg$ a massa do elevador vazio e a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$. Nessas condições, o número máximo de passageiros, de $70kg$ cada um, a ser transportado pelo elevador é

a) 7. b) 8. c) 9. d) 10. e)11.

18. (ITA – 2007)

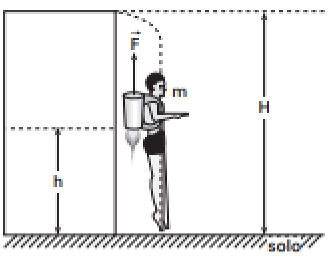
A água de um rio encontra-se a uma velocidade inicial V constante, quando despenca de uma altura de $80\ m$, convertendo toda a sua energia mecânica em calor. Este calor é integralmente absorvido pela água, resultando em um aumento de $1\ K$ de sua temperatura. Considerando $1\ cal \cong 4\ J$, aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$ e calor específico da água $c = 1{,}0\ cal \cdot g^{-1} {}^\circ C^{-1}$ calcula-se que a velocidade inicial da água V é de

a) $10\sqrt{2}\ m/s.$ b) $20\ m/s.$ c) $50\ m/s$

d) $10\sqrt{32}\ m/s.$ e) $80\ m/s.$

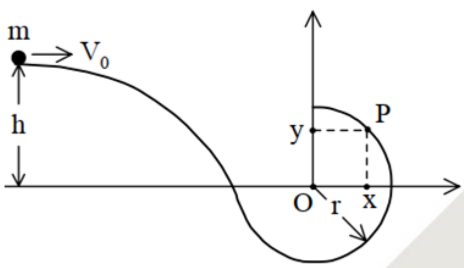
19. (ITA – 2007)

Equipado com um dispositivo a jato, o homem-foguete da figura cai livremente do alto de um edifício até uma altura h, onde o dispositivo a jato é acionado. Considere que o dispositivo forneça uma força vertical para cima de intensidade constante F. Determine a altura h para que o homem pouse no solo com velocidade nula. Expresse sua resposta como função da altura H, da força F, da massa m do sistema homem-foguete e da aceleração da gravidade g, desprezando a resistência do ar e a alteração da massa m no acionamento do dispositivo.



20. (ITA – 2007)

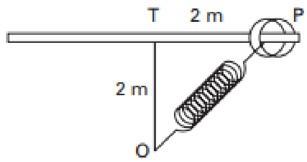
Um corpo de massa m e velocidade v_0 a uma altura h desliza sem atrito sobre uma pista que termina em forma de semicircunferência de raio r, conforme indicado na figura.



Determine a razão entre as coordenadas x e y do ponto P na semicircunferência, onde o corpo perde o contato com a pista. Considere a aceleração da gravidade g.

21. (ITA – 2008)

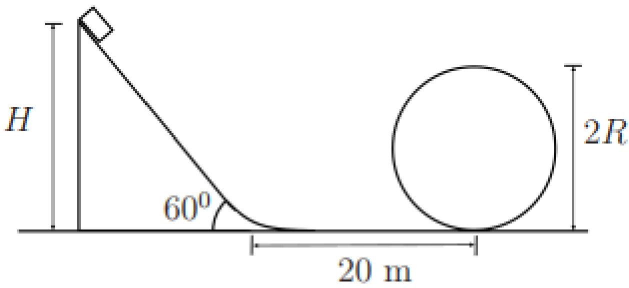
Um aro de $1\,kg$ de massa encontra-se preso a uma mola de massa desprezível, constante elástica $k = 10\ N/m$ e comprimento inicial $L_0 = 1\ m$ quando não distendida, afixada no ponto O. A figura mostra o aro numa posição P em uma barra horizontal fixa ao longo da qual o aro pode deslizar sem atrito. Soltando o aro do ponto P, qual deve ser sua velocidade, em m/s, ao alcançar o ponto T, a $2\ m$ de distância?



a) $\sqrt{30{,}0}$ b) $\sqrt{40{,}0}$ c) $\sqrt{23{,}4}$ d) $\sqrt{69{,}5}$ e) $\sqrt{8{,}2}$

22. (ITA – 2009)

A partir do repouso, um carrinho de montanha russa desliza de uma altura $H = 20\sqrt{3}\ m$ sobre uma rampa de $60°$ de inclinação e cone $20\ m$ num trecho horizontal antes de chegar em um loop circular, de pista sem atrito. Sabendo que o coeficiente de atrito da rampa e do plano horizontal é $1/2$, assinale o valor do raio máximo que pode ter esse loop paia que o carrinho faça todo o percurso sem perdei- o contato com a sua pista.



a) $R = 8\sqrt{3}\ m$

b) $R = 4(\sqrt{3} - 1)\ m$

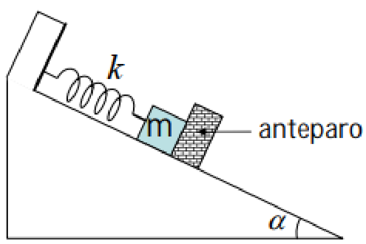
c) $R = 8(\sqrt{3} - 1)\ m$

d) $R = 40(\sqrt{3} - 1)/3\ m$

e) $R = 4(2\sqrt{3} - 1)\ m$

23. (ITA – 2010)

No plano inclinado, o corpo de massa m é preso a uma mola de constante elástica k, sendo barrado à frente por um anteparo. Com a mola no seu comprimento natural, o anteparo, de alguma forma, inicia seu movimento de descida com uma aceleração constante a. Durante parte dessa descida, o anteparo mantém contato com o corpo, dele se separando somente após um certo tempo. Desconsiderando quaisquer atritos, podemos afirmar que a variação máxima do comprimento da mola é dada por



a) $\left[m \cdot g \cdot sen\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot sen\ \alpha + a)}\right]/k.$

b) $\left[m \cdot g \cdot cos\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot cos\ \alpha + a)}\right]/k.$

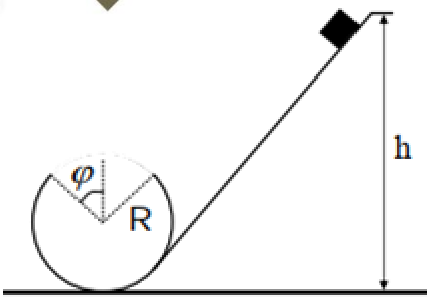
c) $\left[m \cdot g \cdot sen\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot sen\ \alpha - a)}\right]/k$

d) $m \cdot (g \cdot sen\ \alpha - a)/k.$

e) $m \cdot g \cdot sen\ \alpha/k.$

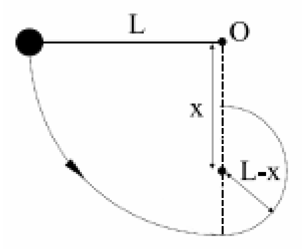
24. (ITA – 2010)

Um pequeno bloco desliza sobre uma rampa e logo em seguida por um “loop" circular de raio R, onde há um rasgo de comprimento de arco $2 \cdot R \cdot \varphi$, como ilustrado na figura. Sendo g a aceleração da gravidade e desconsiderando qualquer atrito, obtenha a expressão para a altura inicial em que o bloco deve ser solto de forma a vencer o rasgo e continuai' em contato com o restante da pista.



25. (ITA – 2011)

Um pêndulo, composto de uma massa M fixada na extremidade de um fio inextensível de comprimento L, é solto de uma posição horizontal. Em dado momento do movimento circular, o fio é interceptado por uma barra metálica de diâmetro desprezível, que se encontra a uma distância x na vertical abaixo do ponto O. Em consequência, a massa M passa a se movimentar num círculo de raio $L — x$, conforme mostra a figura. Determine a faixa de valores de x para os quais a massa do pêndulo alcance o ponto mais alto deste novo círculo.



26. (ITA – 2012)

Um corpo movimenta-se numa superfície horizontal sem atrito, a partir do repouso, devido à ação continua de um dispositivo que lhe fornece uma potência mecânica constante. Sendo v sua velocidade após certo tempo t, pode-se afirmar que

a) a aceleração do corpo é constante.

b) a distância percorrida é proporcional a v^2.

c) o quadrado da velocidade é proporcional a t.

d) a força que atua sobre o corpo é proporcional a $\sqrt{t}$.

e) a taxa de variação temporal da energia cinética nào é constante.

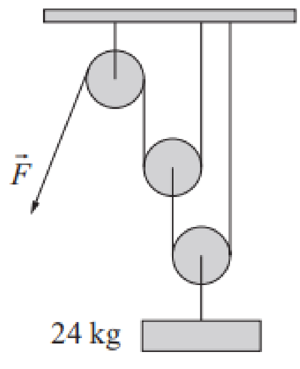
27. (ITA – 2012)

O arranjo de polias da figura é preso ao teto paia erguer nina massa de $24\ kg$, sendo os fios inextensíveis, e desprezíveis as massas das polias e dos fios. Desprezando os atritos, determine:

1. O valor do módulo da força $\vec{F}$ necessário para equilibrar o sistema.

2. O valor do módulo da força $\vec{F}$ necessário para erguer a massa com velocidade constante.

3. A força ($\vec{F}$ ou peso?) que realiza maior trabalho, em módulo, durante o tempo T em que a massa está sendo erguida com velocidade constante.



28. (ITA – 2015)

Uma massa puntiforme é abandonada com impulso inicial desprezível do topo de um hemisfério maciço em repouso sobre uma superfície horizontal. Ao descolar-se da superfície do hemisfério, a massa terá percorrido um ângulo θ em relação à vertical. Este experimento é realizado nas três condições seguintes, I, II e III, quando são medidos os respectivos ângulos θ_I; θ_{II} e θ_{III}:

I. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal e não há atrito entre a massa e o hemisfério.

II. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal, mas há atrito entre a massa e o hemisfério.

III. O hemisfério e a massa podem deslizar livremente pelas respectivas superfícies.

Nestas condições, podc-sc afirmar que

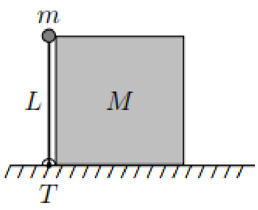
a) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$ b) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$

c) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$ d) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$

e) $\theta_I = \theta_{III}$

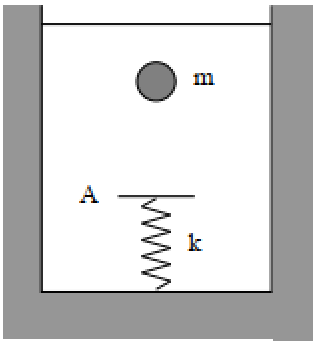
29. (ITA – 2018)

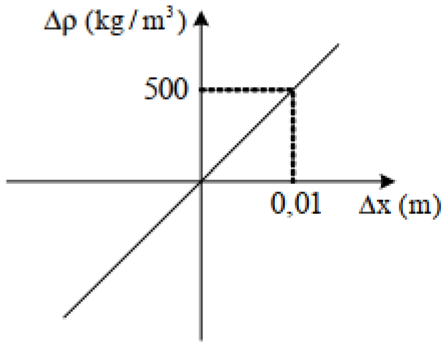
Uma haste vertical de comprimento L, sem peso, é presa a uma articulação T e dispõe em sua extremidade de uma pequena massa m que, conforme a figura, toca levemente a quina de um bloco de massa M. Após uma pequena perturbação, o sistema movimenta-se para a direita. A massa m perde o contato com M no momento cm que a haste perfaz um ângulo de $\pi/6$ rad com a horizontal. Desconsiderando atritos, assinale a velocidade final do bloco.



a) $\sqrt{\frac{mgL}{M}}$ b) $\sqrt{\frac{mgL}{M+4m}}$ c) $\sqrt{\frac{mgL}{M+4L/3}}$ d) $\sqrt{\frac{2mgL}{M}}$ e) $\sqrt{gL}$

30. (IME – 2005)





Um corpo de massa m e volume $V = 1\ m^3$ imerso em um líquido de massa específica ρ_0, é solto, inicia o movimento vertical, atinge o anteparo A e provoca uma deformação máxima x na mola de constante elástica k. Em seguida, o procedimento é repetido, porém com líquidos de massa específica ρ_1 diferente de ρ_0. O gráfico abaixo mostra a relação entre a variação da massa específica do líquido $\Delta\rho$ e a variação da deformação máxima da mola Δx.

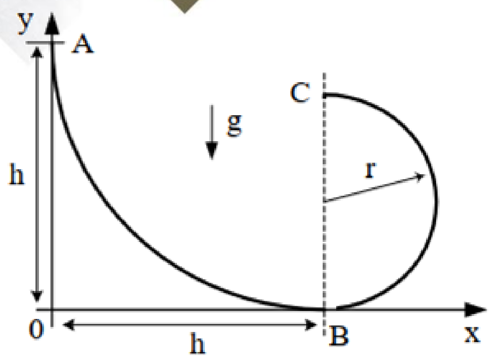
a. Construa o gráfico da deformação máxima da mola x em função da diferença entre as massas específicas do corpo e do líquido $\Delta\rho_{CL}$.

b. Determine o valor de x para $\Delta\rho_{CL} = 1.000\ kg/m^3$.

Dado: aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

31. (IME – 2006)

Uma partícula parte do repouso no ponto A e percorre toda a extensào da rampa ABC, mostrada na figura abaixo. A equação que descreve a rampa entre os pontos A de coordenadas $(0, h)$ e B, de coordenadas $(h, 0)$, é



$$y = \frac{x^2}{h} - 2x + h$$

enquanto entre os pontos B e C, de coordenadas $(h, 2r)$, a rampa é descrita por uma circunferência de raio r com centro no ponto de coordenadas (k, r). Sabe-se que a altura h é a mínima necessária para que a partícula abandone a rampa no ponto C e venha a colidir com ela em um ponto entre A e B. Determine o ponto de colisão da partícula com a rampa no sistema de coordenadas da figura como função apenas do comprimento r.

Dado: aceleração da gravidade $= g$.

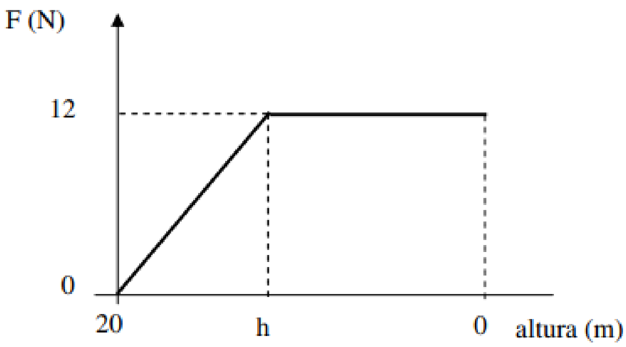
OBS: despreze as forças de atrito e a resistência do ar.

32. (IME – 2008)

Um bloco de massa $m = 4\ kg$ parte de um plano horizontal sem atrito e sobe um plano inclinado com velocidade inicial de $6\ m/s$. Quando o bloco atinge a altura de $1\ m$, sua velocidade se anula; em seguida, o bloco escorrega de volta, passando pela posição inicial. Admitindo que a aceleração da gravidade seja igual a $10\ m/s^2$ e que o atrito do plano inclinado produza a mesma perda de energia mecânica no movimento de volta, a velocidade do bloco, ao passar pela posição inicial, é

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

33. (IME – 2009)



Um objeto com massa de $1\ kg$ é largado de uma altura de $20\ m$ e atinge o solo com velocidade de $10\ m/s$. Sabe-se que a força F de resistência do ar que atua sobre o objeto varia com a altura, conforme o gráfico acima. Considerando que $g = 10\ m/s^2$, a altura h, em metros, em que a força de resistência do ar passa a ser constante é

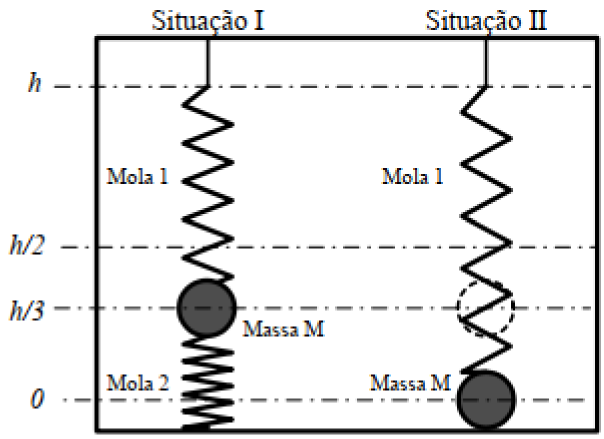
a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

34. (IME – 2010)

Um bloco de $4\ kg$ e velocidade inicial de $2\ m/s$ percorre $70\ cm$ em uma superfície horizontal rugosa até atingir uma mola de constante elástica $200\ N/m$. A aceleração da gravidade é $10\ m/s^2$ e o bloco comprime $10\ cm$ da mola até que sua velocidade se anule. Admitindo que durante o processo de compressão da mola o bloco desliza sem atrito, o valor do coeficiente de atrito da superfície rugosa é:

a) 0,15 b) 0,20 c) 0,25 d) 0,30 e) 0,35

35. (IME – 2010)



Na Situação I da figura, em equilíbrio estático, a massa M, presa a molas idênticas, está a uma altura $h/3$. Na Situação II, a mola inferior é subitamente retirada. As molas, em repouso, têm comprimento $h/2$. O módulo da velocidade da massa M na iminência de tocar o solo na situação II é:

Observação:

g: aceleração da gravidade

a) $4gh/[2\sqrt{2}]$ b) $3gh/[2\sqrt{2}]$ c) $2gh/[2\sqrt{2}]$

d) $gh/[2\sqrt{2}]$ e) 0

36. (IME – 2010)

A figura mostra o perfil de um par de espelhos planos articulado no ponto O e, inicialmente, na vertical. Ao centro do espelho OB é colado um pequeno corpo, cuja massa é muito maior que a do espelho. O espelho OA encontra-se fixo e, frente ao mesmo, é colocado um objeto P. Em um dado instante, é aplicado um impulso no espelho OB, conferindo a extremidade B uma velocidade inicial v_0, no sentido de fechar os espelhos face contra face. Tomando como referência o eixo x, determine:

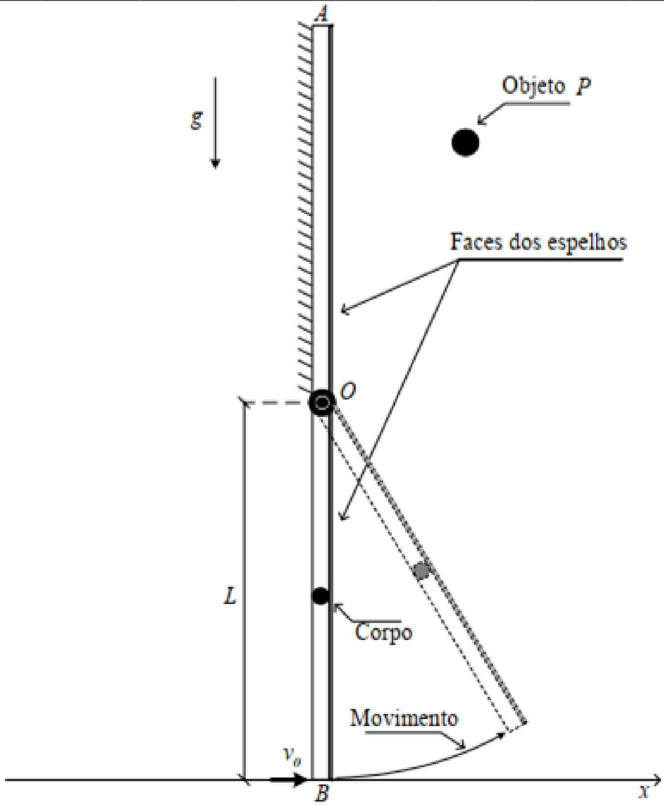
a) a altura máxima atingida pela extremidade B.

b) os módulos dos vetores velocidade da extremidade B, para cada instante em que uma imagem adicional do objeto P é formada, até que B atinja sua altura máxima.

Dados:

- $L = 90\ cm$
- $v_0 = 7\ m/s$
- $g = 10\ m/s^2$

α	36º	40º	45º	51,4º	60º	72º	90º	120º	180º
cos α	0,81	0,77	0,71	0,62	0,5	0,31	0	- 0,5	-1



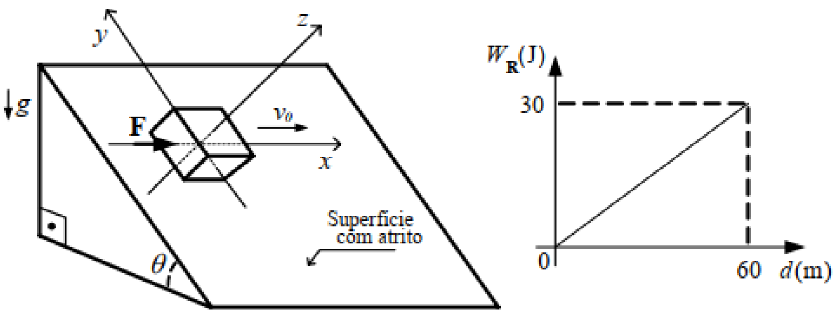
37. (IME – 2010)

A figura ilustra um plano inclinado com ângulo $\theta = 30°$ cuja superfície apresenta atrito. Um bloco de massa $m = 1\,kg$, carregado eletricamente com a carga negativa $q = 10^{-2}\,C$, apresenta velocidade inicial $v_0 = 2\,m/s$ e realiza um movimento retilíneo sobre o eixo x (paralelo ao plano horizontal) a partir do instante $t = 0$. Além disso, este bloco se encontra submetido à força constante $F = 4{,}5\,N$ na direção x e a um campo magnético $B = 100\,T$ normal à superfície (direção z). Considerando que o gráfico ilustra o trabalho da força resultante R que age sobre o bloco em função da distância percorrida, determine:

a) o tempo gasto e a velocidade do bloco após percorrer $60\,m$;

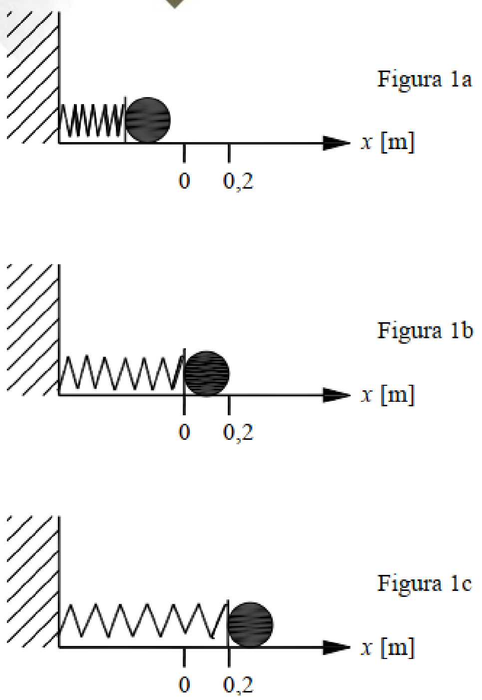
b) os gráficos das componentes da força de atrito (direções x e y) em função do tempo até o bloco percorrer $60\,m$.

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\,m/s^2$



38. (IME – 2011)

Um corpo está sobre um plano horizontal e ligado a uma mola. Ele começa a ser observado quando a mola tem máxima compressão (Figura 1a). Durante a observação, verificou-se que, para a deformação nula da mola (em $x = 0$), sua velocidade é $5\ m/s$ (Figura 1 b). Para $x = 0{,}2\ m$ (Figura 1c), o corpo é liberado da mola a partir dessa posição e fica submetido a uma força de atrito até parar. Faça um gráfico da aceleração a do corpo em função da posição x, registrando os valores de a e de x quando:



a) a observação se inicia;

b) a velocidade é máxima;

c) o corpo é liberado da mola;

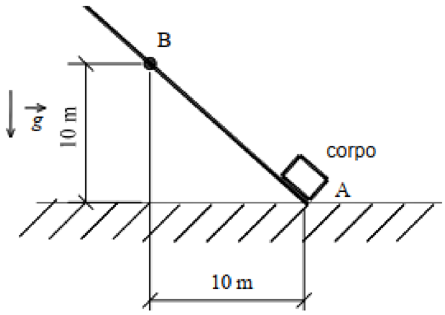
d) o corpo para.

Dados:

- massa do corpo: $500\ g$;
- constante elástica da mola: $50\ N/m$;
- coeficiente de atrito entre o plano e o corpo: 0,3.

39. (IME – 2012)

Um corpo com velocidade v parte do ponto A, sobe a rampa AB e atinge o repouso no ponto B. Sabe-se que existe atrito entre o corpo e a rampa e que a metade da energia dissipada pelo atrito é transferida ao corpo sob a forma de calor. Determine a variação volumétrica do corpo devido à sua dilatação.



Dados:

- aceleração da gravidade: $g = 10\ m \cdot s^{-2}$;
- volume inicial do corpo: $V_i = 0{,}001\ m^3$;
- coeficiente de dilatação térmica linear do corpo: $\alpha = 0{,}00001\ K^{-1}$;
- calor específico do corpo: $c = 400\ J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

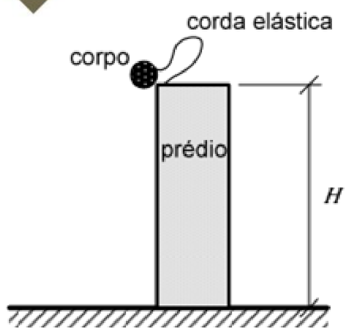
Observações:

- o coeficiente de atrito cinético é igual a 80% do coeficiente de atrito estático;
- o coeficiente de atrito estático é o menor valor para o qual o corpo permanece em repouso sobre a rampa no ponto B.

40. (IME – 2017)

Um corpo preso a uma corda elástica é abandonado em queda livre do topo de um edifício, conforme apresentado na figura acima. Ao atingir o solo, penetra numa distância x abaixo do nível do solo até atingir o repouso. Diante do exposto, a força de resistência média que o solo exerce sobre o corpo é:

Dados:



- aceleração gravitacional: g;
- constante elástica da corda: k;
- massa do corpo: M;
- altura do edifício em relação ao solo: H;
- comprimento da corda: L; e
- distância que o corpo penetra no solo até atingir o repouso: x.

Observação:

- a corda elástica relaxada apresenta comprimento menor que a altura do edifício.

a) $Mg + \frac{MgH + k(HL + Lx - Hx)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

b) $Mg + \frac{MgH + k(HL - Lx - Hx)}{2x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{x}$

c) $Mg + \frac{MgH - k(HL + Lx + Hx)}{2x} + \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{x}$

d) $Mg - \frac{MgH - k(HL - Lx - Hx)}{x} + \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

e) $Mg + \frac{MgH - k(HL + Lx - Hx)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

4. Gabarito

1) B
2) E
3) D
4) B
5) D
6) C
7) C
8) D
9) C
10) E
11) E
12) A
13) D
14) $\theta = arc\ cos\left(\frac{2(h-r)}{3r}\right)$
15) A
16) C
17) C
18) E
19) $h = \frac{mgh}{F}$

20) $\frac{x}{y} = \sqrt{\left(\frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}}\right)^2 - 1}$
21) C
22) C
23) C
24) $h = R\left[\frac{1}{2cos\varphi} + (1 + cos\varphi)\right]$
25) $\frac{3}{5}L \leq x < L$
26) C
27) 1) 60 N 2) 60 N 3) $|\tau_{Peso}| = |\tau_F|$
28) C
29) B
30) a) ver gráfico b) 0,02 m
31) $\left(\frac{15-4\sqrt{5}}{6}r, \frac{8}{9}r\right)$
32) B
33) B
34) C
35) E
36) a) 1,225 m b) $\sqrt{31}\ m/s$, $\sqrt{13}\ m/s$, $\sqrt{1{,}84}\ m/s$
37) a) 12 s e 8 m/s b) ver gráficos
38) ver gráfico
39) $3 \cdot 10^{-9} m^3$
40) A

5. Lista de questões Comentadas

1. (ITA – 1993)

O módulo v_1 da velocidade de um projétil no seu ponto de altura máxima é $\sqrt{\frac{6}{7}}$ do valor da velocidade v_2 no ponto onde a altura é metade da altura máxima. Obtenha o cosseno do ângulo de lançamento com relação a horizontal.

a) Os dados fornecidos são insuficientes b) $\sqrt{3}/2$

c) $1/2$ d) $\sqrt{2}/2$

e) $\sqrt{3}/3$

Comentários:

Conservação de energia mecânica entre o ponto onde a altura é a metade da máxima e quando é máxima:

$$\frac{m \cdot v_2^2}{2} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + \frac{m \cdot g \cdot l}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{7 \cdot g \cdot l} \Rightarrow v_1 = \sqrt{6 \cdot g \cdot l}$$

Como no ponto mais alto só temos velocidade horizontal, podemos dizer que a componente horizontal do lançamento v_x é igual a v_1.

Conservando a energia do ponto de lançamento até o ponto mais alto da trajetória e sendo v a velocidade total de lançamento, temos que:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} = \frac{m \cdot v_1^2}{2} + m \cdot g \cdot l \Rightarrow v = 2\sqrt{2 \cdot g \cdot l}$$

Assim, descobrimos o ângulo alfa:

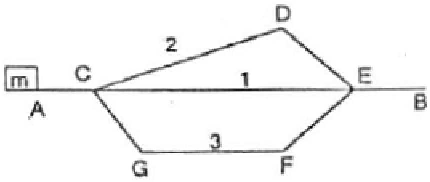
$$v \cdot cos(\alpha) = v_1 \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Gabarito: B

---

2. (ITA – 1994)

Na figura, o objeto de massa m quando lançado horizontalmente do ponto A com velocidade v_A atinge o ponto B após percorrer quaisquer dos três caminhos contidos num plano vertical ($ACEB$, $ACDEB$, $ACGFEB$). Sendo g a aceleração gravltacional e μ o coeficionte do atrito em qualquor trecho; τ_1, τ_2 , τ_3 e v_{B_1}, v_{B_2}, v_{B_3} os trabalhos realizados pela força do atrito e as velocidades no ponto B, correspondentes aos caminhos 1, 2 e 3 podemos afirmar que:



a) $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ e $v_{B_3} < v_{B_2} < v_{B_1}$

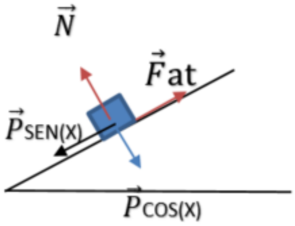
b) $\tau_3 > \tau_2 > \tau_1$ e $v_{B_3} = v_{B_2} = v_{B_1}$

c) $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1$ e $v_{B_3} < v_{B_2} < v_{B_1}$

d) $\tau_3 < \tau_2 < \tau_1$ e $v_{B_3} > v_{B_2} > v_{B_1}$

e) $\tau_3 = \tau_2 = \tau_1$ e $v_{B_3} = v_{B_2} = v_{B_1}$

Comentários:



Observe que, para um pequeno deslocamento "d", será dado por:

$$\mu \cdot P \cdot \cos(x) \cdot d = T$$

Observe que o produto "$\cos(x) \cdot d$" é a projeção horizontal de uma trajetória inclinada qualquer.

Assim, qualquer uma das trajetórias terão o mesmo trabalho resistivo, e, por conseguinte, pelo teorema da energia cinética, terão a mesma velocidade no final da trajetória.

Gabarito: E

3. (ITA – 1995)

Um pingo de chuva de massa $5,0 \cdot 10^{-5}\ kg$ cai com velocidade constante de uma altitude de $120\ m$, sem que a sua massa vane, num local onde a aceleração da gravidade g é $10\ m/s^2$. Nestas condições, a força de atrito F_a do ar sobre a gota e a energia E_a, dissipada durante a queda são respectivamente:

a) $5,0 \cdot 10^{-4}\ N$; $5,0 \cdot 10^{-4}\ J$

b) $1,0 \cdot 10^{-3}\ N$; $1,0 \cdot 10^{-1}\ J$

c) $5,0 \cdot 10^{-4}\ N$; $5,0 \cdot 10^{-2}\ J$

d) $5,0 \cdot 10^{-4}\ N$; $6,0 \cdot 10^{-2}\ J$

e) $5,0 \cdot 10^{-4}\ N$; $E_a = 0\ J$

Comentários:

Pelo teorema do trabalho das forças não conservativas, temos:

$$\Delta E_{mec} = \tau_{fnc}$$

$$m \cdot g \cdot h = T_{F_At} \Rightarrow T_{F_At} = 5 \cdot 10^{-5} \cdot 10 \cdot 120 = 6 \cdot 10^{-2} J$$

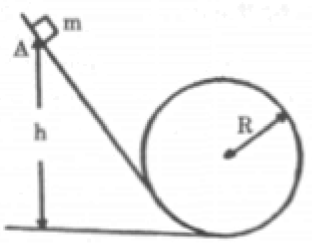
Cálculo da força de atrito por intermédio do trabalho realizado:

$$F_{at} \cdot d = 6 \cdot 10^{-2} \Rightarrow F_{at} = 5 \cdot 10^{-4}\ N$$

Gabarito: D

4. (ITA – 1995)

A figura ilustra um carrinho de massa m percorrendo um trecho de uma montanha russa. Desprezando-se todos os atritos que agem sobre ele e supondo que o carrinho seja abandonado em A, o menor valor de h para que o carrinho efetue a trajetória completa é:



a) $3R/2$

b) $5R/2$

c) $2R$

d) $\sqrt{(5gR)/2}$

e) $3R$

Comentários:

Para que o carrinho efetue a trajetória completa, ele não pode perder contato com o chão em nenhum momento. Para garantir que isso aconteça, basta garantir que ele não perca o contato no ponto mais alto da circunferência. Ou seja, a normal naquele ponto deve ser maior que zero.

$$F_{cp} = P + N \Rightarrow N = F_{cp} - P$$

$$N > 0 \Rightarrow F_{cp} - P > 0 \Rightarrow F_{cp} > P$$

Sabemos que:

$$F_{cp} = \frac{mv^2}{R}$$

Assim, $mv^2 > mgR$. Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$E_0 = E_f \Rightarrow mgh = \frac{mv^2}{2} + mg(2R) \Rightarrow v^2 = 2gh - 4gR$$

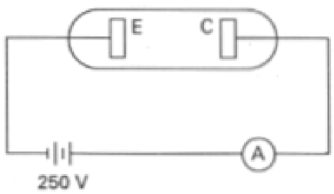
Substituindo na inequação, temos:

$$2gh - 4gR > gR \therefore \boxed{h > \frac{5R}{2}}$$

Gabarito: B

5. (ITA – 1996)

Um feixe de elétrons é formado com a aplicação de uma diferença de potencial de $250\,V$ entre duas placas metálicas, uma emissora e outra coletora, colocadas em uma ampola na qual se fez vácuo. A corrente medida em um amperimetrv devidamente ligado é de $5{,}0\,mA$ Se os elétrons podem ser considerados como emitidos com veloctdade nula, então:



E = placa emissora
C = placa coletora

a) a velocidade dos elétrons ao atingirem a placa coletora é a mesma dos elétrons no fio externo à ampola.

b) se quisermos saber a velocidade dos elétrons é necessário conhecermos a distância entre as placas.

c) a energia fornecida pela fonte aos elétrons coletados é proporcional ao quadrado da diferença de potencial.

d) a velocidade dos elétrons ao atingirem a placa coletora é de aproximadamente $1{,}0 \cdot 10^7\ m/s$.

e) depois de algum tempo a corrente vai se tomar nula, pois a placa coletora vai ficando cada irz mais negativa pela absorção dos elétrons que nela chegam

Comentários:

Temos pelo teorema da energia cinética:

$$\tau_{F_R} = \Delta E_{cin}$$

O trabalho elétrico é dado por:

$$\tau_{F_{ele}} = q \cdot U$$

Portanto, temos:

$$q \cdot U = \frac{mv^2}{2}, \qquad onde\ \frac{q}{m} = 1{,}17 \cdot 10^{11}$$

$$\therefore\ v = \sqrt{2 \cdot 1{,}17 \cdot 10^{11} \cdot 250}$$

Assim temos que v é da ordem de $1 \times 10^7 m/s$

Gabarito: D

6. (ITA – 1996)

Uma roda d'água converte, em eletricidade com uma eficiência de 30%, a energia de 200 litros de água por segundo caindo de uma altura de 5,0 metros. A eletricidade gerada é utilizada pa- ra esquentar 50 litros de água de 15°C a 65°C. O tempo aproximado que leva a água para esquentar até a temperatura desejada é:

a) 15 minutos.
b) meia hora.
c) uma hora.
d) uma hora e meia.
e) duas horas.

Comentários:

Energia gerada pela queda da água por segundo:

$$E = m \cdot g \cdot h = 200 \cdot 10 \cdot 5 = 10^4 J/s$$

Energia efetivamente utilizada por segundo:

$$E \cdot 0{,}3 = 3 \cdot 10^3 J/s$$

Calor necessário para esquentar a água:

$$Q = m \cdot c \cdot \Delta\theta = 50 \cdot 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 50 = 105 \cdot 10^5 J$$

Logo, podemos determinar o tempo para aquecer tal quantia de água:

$$t = \frac{Q}{E} = 3500s$$

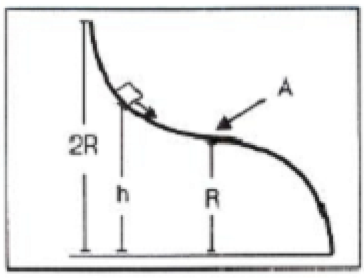
Transformando para hora, vemos que 3500 segundos é aproximadamente 1 hora.

Gabarito: C

7. (ITA – 1997)

Um pequeno bloco, solto com velocidade nula a uma altura h, move-se sob o efeito da gravidade e sem atrito sobre um trilho em torma de dois quartos de círculo de raio R que se tangenciam, como mostra a figura. A mínima altura inicial h que acarreta a saída do bloco, do trilho, após o ponto A é:

a) $4\ R/3$
b) $5\ R/4$
c) $3\ R/2$
d) $5\ R/3$
e) $2R$



Comentários:

Para que a velocidade do corpo seja mínima o suficiente para que o corpo escape da trajetória, devemos ter que a normal no ponto A deve ser nula, assim:

$$\frac{m \cdot v_A^2}{R} = m \cdot g \Rightarrow \frac{m \cdot v_A^2}{2} = \frac{m \cdot g \cdot R}{2}$$

Conservação de energia entre o ponto inicial e o ponto A:

$$m \cdot g \cdot (h - R) = \frac{m \cdot v_A^2}{2} \Rightarrow h = \frac{3R}{2}$$

Gabarito: C

---

8. (ITA – 1998)

Uma bala de massa 10 g é atirada horizontalmente contra um bloco de madeira de 100 g que está fixo, penetrando nele 10 cm até parar. Depois, o bloco é suspenso de tal forma que se possa mover livremente e uma bala idêntica à primeira é atirada contra ele. Considerando a força de atrito entre a bala e a madeira em ambos os casos como sendo a mesma, conclui-se que a segunda bala penetra no bloco a uma profundidade de aproximadamente:

a) 8.0 cm. b) 8.2 cm. c) 8.8 cm. d) 9.2 cm. e) 9.6 cm.

Comentários:

No primeiro tiro, o trabalho da força resistiva é igual a variação da energia cinética:

$$W_{F_{res}} = F_{res} \cdot d = \Delta E_{cin} \Rightarrow F_{res} \cdot 0{,}1 = \frac{0{,}01 \cdot v_0^2}{2}$$

$$F_{res} = 0{,}05 v_0^2$$

No segundo tiro, as velocidades finais podem ser encontradas pela conservação da quantidade de movimento:

$$0{,}01 \cdot v_0 = (0{,}11 + 0{,}01)v` \Rightarrow v` = \frac{1}{12} v_0$$

Para o bloco:

$$F_{res} \cdot d_1 = \Delta E_{cin} \Rightarrow 0{,}05 v_0^2 \cdot d_1 = \frac{0{,}11}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - 0 \therefore d_1 = \frac{1{,}1}{144}\, m$$

Para o projétil:

$$F_{res} \cdot d_2 = \Delta E_{cin} \Rightarrow 0{,}05 v_0^2 \cdot d_2 = \frac{0{,}01}{2} \cdot \left(\frac{1}{12} v_0\right)^2 - \frac{0{,}01}{2} \cdot (v_0)^2 \therefore d_2 = \frac{14{,}3}{144}\, m$$

A distância que a bala penetrou é dada por:

$$D = d_2 - d_1 \cong 9{,}2\, cm$$

Gabarito: D

---

9. (ITA – 1998)

O módulo da velocidade das águas de um no é de 10 m/s pouco antes de uma queda de água. Ao pé da queda existe um remanso onde a velocidade das águas ó praticamente nula. Observa-se que a temperatura da água no remanso ô 0,1 ®C maior do que a da água antes da queda. Conclui-se que a altura da queda de água é:

a) 2,0 m. b) 25 m. c) 37 m. d) 42 m. e) 50 m.

Comentários:

Pela conservação da energia, temos:

$$E_0 = E_f$$

$$\frac{mv^2}{2} + mgH = mc\Delta t \Rightarrow 50 + 10 \cdot H = 4{,}2 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1 \therefore\ H = 37\,m$$

Gabarito: C

---

10. (ITA – 2001)

Uma partícula esta submetida a uma força com as seguintes características: seu módulo é proporcional ao módulo da velocidade da partícula e atua numa direção perpendicular àquela do vetor velocidade. Nestas condições, a energia cinética da partícula deve

a) crescer linearmente com o tempo

b) crescer quadratlcamente com o tempo

c) diminuir linearmente com o tempo

d) diminuir quadratlcamente com o tempo

e) permanecer Inalterada.

Comentários:

A força é sempre perpendicular à direção do vetor velocidade, por isso, não altera o seu módulo. Por consequência, a energia cinética também permanece inalterada.

Gabarito: E

---

11. (ITA – 2001)

Um bloco com massa de $0{,}20kg$ inicialmente em repouso, é derrubado de uma altura de $h = 1{,}20\ m$ sobre uma mola cuja constante de foiça e $k = 19{,}6\ N/m$. Desprezando a massa da mola. a distância máxima que a mola será comprimida é

a) 0,24 m b) 0,32 m c) 0,48 m d) 0,54 m e) 0,60 m

Comentários:

Conservação de energia entre o ponto mais alto da trajetória, e o ponto onde a velocidade dele passa a ser zero:

$$m \cdot g \cdot (h + x) = \frac{k \cdot x^2}{2} \Rightarrow \frac{k \cdot x^2}{2} - m \cdot g \cdot x - m \cdot g \cdot h$$

$$\Delta = m^2 \cdot g^2 + 4 \cdot \frac{k}{2} \cdot m \cdot g \cdot h$$

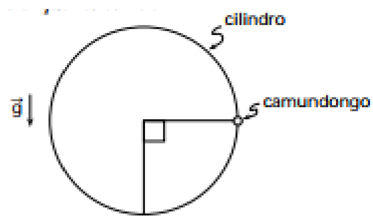
$$\frac{m \cdot g + \sqrt{m^2 \cdot g^2 + 2 \cdot k \cdot m \cdot g \cdot h}}{k}$$

Substituindo os valores, encontramos $x = 0{,}6\, m$.

Gabarito: E

12. (ITA – 2002)

Um pequeno camundongo de massa M corre num plano vertical no interior de um cilindro de massa m e eixo horizontal Suponha-se que o ratinho alcance a posição indicada na figura imediatamente no início de sua corrida nela permanecendo devido ao movimento giratório de reação do cilindro, suposto ocorrer sem resistência de qualquer natureza. A energia despendida pelo ratinho durante um intervalo de tempo T para se manter na mesma posição enquanto corre é



a) $E = \frac{M^2}{2m} g^2 T^2$

b) $E = M g^2 T^2$

c) $E = \frac{m^2}{M} g^2 T^2$

d) $E = m g^2 T^2$

e) n.d.a.

Comentários:

Aplicando a segunda lei de Newton para o cilindro, temos:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow Mg = ma \Rightarrow a = \frac{Mg}{m}$$

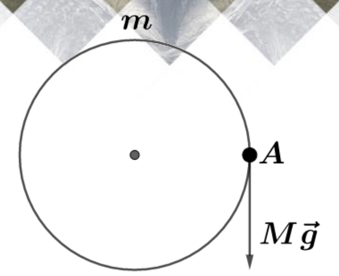
Em que a é a aceleração linear do cilindro no ponto A. Admitindo que o cilindro esteja em repouso imediatamente antes do início da corrida do camundongo, a velocidade linear do cilindro o ponto A, após um tempo T, é de:

$$v = v_0 + a \cdot T \Rightarrow \boxed{v = \frac{Mg}{m} \cdot T}$$

Logo, a potência instantânea é expressa por:

$$P = F \cdot v \Rightarrow P = Mg \cdot \frac{Mg}{m} \cdot T \Rightarrow \boxed{P = \frac{M^2 g^2}{m} \cdot T}$$

Note que a potência instantânea varia linearmente com o tempo. Assim, o gráfico da potência pelo tempo é:



A área do gráfico $P \times t$ é numericamente igual à energia. Portanto:

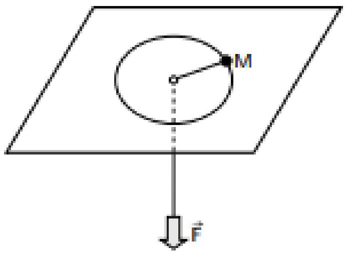
$$E = \frac{\left(\frac{M^2 g^2}{m} \cdot T\right) \cdot T}{2} \Rightarrow \boxed{E = \frac{M^2 g^2 T^2}{2m}}$$

Gabarito: A

---

13. (ITA – 2002)

Um corpo de massa M, mostrado na figura, é preso a um fio leve, inextenslvel, que passa através de um orifício central de uma mesa lisa. Considere que inicialmente o corpo se move ao longo de uma circunferência, sem atrito. O fio é, então, puxado para baixo, aplicando-se uma força $\vec{F}$, constante, a sua extremidade livre. Podemos afirmar que:



a) o corpo permanecerá ao longo da mesma circunferência.

b) a força $\vec{F}$ não realiza trabalha pois é perpendicular à trajetória.

c) a potência instantânea de $\vec{F}$ é nula.

d) o trabalho de $\vec{F}$ é igual à variação da energia cinética do corpo.

e) o corpo descreverá uma trajetória elíptica sobre a mesa.

Comentários:

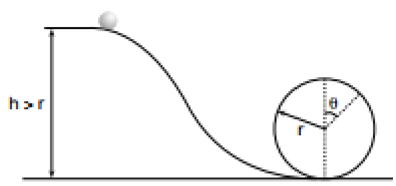
A força $\vec{F}$ será transmitida pelo fio e causará um deslocamento radial, diminuindo o raio da circunferência descrita pelo corpo (o que invalida a opção A). Dessa forma, $\vec{F}$ não será perpendicular a trajetória, exercendo trabalho. E pelo teorema da energia cinética, temos que o trabalho da força resultante é igual a variação da energia cinética do corpo. Portanto, a alternativa D é a correta.

Gabarito: D

---

14. (ITA – 2002)

Uma massa é liberada a partir do repouso de uma altura h acima do nlvel do solo e desliza sem atrito em uma pista que termina em um "loop" de ralo r, conforme Indicado na figura. Determine o angulo θ relativo a vertical e ao ponto em que a massa perde o contato com a pista. Expresse sua tesposta como função da altura h, do raio R e da aceleração da gravidade g.



Comentários:

Durante o loop, apenas a Normal e o Peso agem sobre a esfera. Para um θ qualquer, temos que:

$$R_{cp} = N + Pcos\theta \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = N + mgcos\theta$$

A perda de contato ocorre quando $N = 0$. Assim:

$$N = 0 \ \Rightarrow v^2 = rgcos\theta$$

Pela conservação da energia, temos:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mgr(1 + cos\theta)$$

Substituindo v^2:

$$2gh = rgcos\theta + 2rg(1 + cos\theta)$$

$$2h = 3rcos\theta + 2r \Rightarrow cos\theta = \frac{2(h - r)}{3r}$$

$$\therefore \theta = arc\cos\left(\frac{2(h - r)}{3r}\right)$$

Gabarito: $\boldsymbol{\theta = arc\ cos\left(\frac{2(h-r)}{3r}\right)}$

15. (ITA – 2005)

Um objeto pontual de massa m desliza com velocidade inicial v, horizontal, do topo de uma esfera em repouso, de raio R. Ao escorregar pela superfície, o objeto sofre uma força de atrito de módulo constante dado por $f = 7mg/4\pi$. Para que o objeto se desprenda da superfície esférica após percorrer um arco de 60° (veja figura), sua velocidade inicial deve ter o módulo de

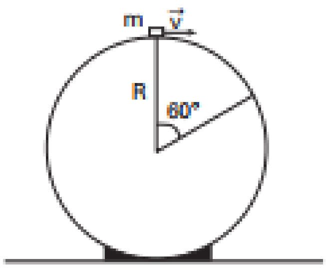
a) $\sqrt{2gR/3}$

b) $\sqrt{3gR}/2$

c) $\sqrt{6gR}/2$

d) $3\sqrt{gR/2}$

e) $3\sqrt{gR}$



Comentários:

Pelo teorema do trabalho das forças não conservativas e energia mecânica, temos:

$$\tau_{fnc} = \Delta E_{mec} = E_{mec}^{B} - E_{mec}^{A}$$

Em que:

$$\tau_{fnc} = \tau_{fat} = -f_{at} \cdot \Delta s$$

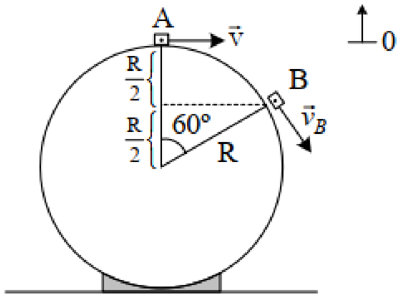
Note que o deslocamento Δs corresponde ao arco $\widehat{AB}$. Logo:

$$\Delta s = R \cdot \Delta\alpha \Rightarrow \Delta s = R \cdot \frac{\pi}{3}$$

Logo:

$$\tau_{fnc} = \tau_{fat} = -f_{at} \cdot \Delta s = -\frac{7mg}{4\pi} \cdot R \cdot \frac{\pi}{3} \Rightarrow \boxed{\tau_{fnc} = \tau_{fat} = -\frac{7mgR}{12}}$$

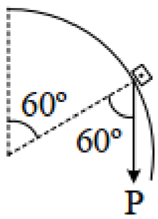
Esquematicamente, temos:



Então:

$$-\frac{7mgR}{12} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2 + m \cdot g \cdot \frac{R}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\right)\ (eq. 1)$$

Quando o objeto se desprende em B, a normal vai a zero neste ponto, portanto:



$$R_{cp} = m \cdot a_{cp} \Rightarrow m \cdot g \cdot \cos 60° = m \cdot \frac{v_B^2}{R} \Rightarrow v_B^2 = \frac{Rg}{2}\ (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1), temos que:

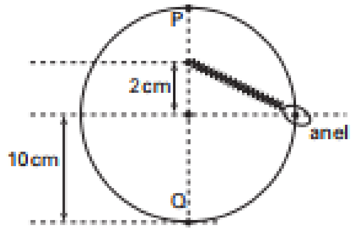
$$-\frac{7mgR}{12} = \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{Rg}{2} + m \cdot g \cdot \frac{R}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2\right)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = m \cdot R \cdot g \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{7}{12}\right) \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2 \cdot R \cdot g}{3}}}$$

Gabarito: A

16. (ITA – 2006)

Um anel de peso $30N$ está preso a uma mola e desliza sem atrito num fio circular situado num plano vertical, conforme mostrado na figura.



Considerando que a mola não se deforma quando o anel se encontra na posição P e que a velocidade do anel seja a mesma nas posições P e Q, a constante elástica da mola deve ser de

a) $3{,}0 \cdot 10^3\ N/m$ b) $4{,}5 \cdot 10^3\ N/m$ c) $7{,}5 \cdot 10^3\ N/m$

d) $1.2 \cdot 10^4\ N/m$ e) $3{,}0 \cdot 10^4\ N/m$

Comentários:

A energia se conserva entre o ponto P e Q, logo:

$$E_P = E_Q$$

$$mg2R = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow 3 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 0{,}1 \cdot 2 = k \cdot (0{,}04) \cdot (0{,}04) \therefore k = 7500\ N/m$$

Gabarito: C

---

17. (ITA – 2007)

Projetado para subir com velocidade média constante a uma altura de $32\ m$ em $40\ s$, um elevador consome a potência de $8{,}5\ kW$ de seu motor. Considere seja $370\ kg$ a massa do elevador vazio e a aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$. Nessas condições, o número máximo de passageiros, de $70kg$ cada um, a ser transportado pelo elevador é

a) 7. b) 8. c) 9. d) 10. e)11.

Comentários:

A velocidade média constante do elevador pode dada por:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{32}{40} = 0{,}8\ m/s$$

Dessa forma, a potência exigida é de:

$$Pot = F \cdot v \Rightarrow F_{máx} = \frac{8500}{0{,}8} = 10625\ N$$

O peso do elevador com n pessoas é de:

$$P = (370 + 70 \cdot n) \cdot g$$

Em que n é o número de passageiros. A força peso deve ser menor que $10625\ N$, portanto:

$$3700 + 700n < 10625$$

$$n < 9{,}89$$

Portanto, o número máximo de passageiros é de 9.

Gabarito: C

18. (ITA – 2007)

A água de um rio encontra-se a uma velocidade inicial V constante, quando despenca de uma altura de $80\ m$, convertendo toda a sua energia mecânica em calor. Este calor é integralmente absorvido pela água, resultando em um aumento de $1\ K$ de sua temperatura. Considerando $1\ cal \cong 4\ J$, aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$ e calor específico da água $c = 1{,}0\ cal \cdot g^{-1} °C^{-1}$ calcula-se que a velocidade inicial da água V é de

a) $10\sqrt{2}\ m/s$.
b) $20\ m/s$.
c) $50\ m/s$
d) $10\sqrt{32}\ m/s$.
e) $80\ m/s$.

Comentários:

Inicialmente, a energia mecânica pode ser expressa por:

$$E_M = \frac{mv^2}{2} + mgH$$

A energia mecânica se converte em calor e este é absorvido para aumentar a temperatura da água:

$$Q = E_M = mc\Delta T$$

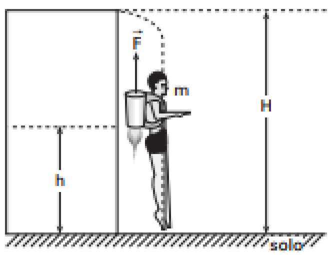
Igualando as equações e substituindo os dados, temos:

$$v^2 + 2 \cdot 10 \cdot 80 = 2 \cdot 4000 \cdot 1 \therefore \boxed{v = 80\ m/s}$$

Gabarito: E

19. (ITA – 2007)

Equipado com um dispositivo a jato, o homem-foguete da figura cai livremente do alto de um edifício até uma altura h, onde o dispositivo a jato é acionado. Considere que o dispositivo forneça uma força vertical para cima de intensidade constante F. Determine a altura h para que o homem pouse no solo com velocidade nula. Expresse sua resposta como função da altura H, da força F, da massa m do sistema homem-foguete e da aceleração da gravidade g, desprezando a resistência do ar e a alteração da massa m no acionamento do dispositivo.



Comentários:

Para que o homem chegue no solo com velocidade nula, o dispositivo tem que realizar um trabalho para diminuir sua velocidade.

$$E_0 = mgH$$

Trabalho realizado pelo dispositivo:

$$T = -F \cdot h$$

Pelo balanço energético, temos que:

$$E_0 - Fh = 0 = E_f \therefore h = \frac{mgH}{F}$$

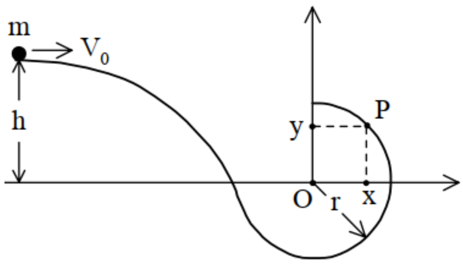
Gabarito: $\boldsymbol{h = \frac{mgh}{F}}$

---

20. (ITA – 2007)

Um corpo de massa m e velocidade v_0 a uma altura h desliza sem atrito sobre uma pista que termina em forma de semicircunferência de raio r, conforme indicado na figura.

Determine a razão entre as coordenadas x e y do ponto P na semicircunferência, onde o corpo perde o contato com a pista. Considere a aceleração da gravidade g.

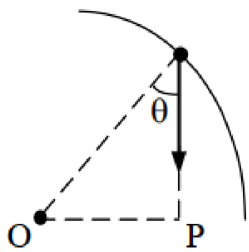


Comentários:

Aplicando a conservação da energia mecânica entre o ponto inicial e o ponto P, temos:

$$m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = m \cdot g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_P^2 \; (eq. 1)$$

Quando o corpo perde contato em P, a normal de contato da pista com o corpo deixa de existir. Logo:



$$R_{cp} = m \cdot a_{cp} \Rightarrow m \cdot g \cdot \cos\theta = m \cdot \frac{v_P^2}{r} \Rightarrow v_p^2 = r \cdot g \cdot \cos\theta = r \cdot g \cdot \frac{y}{r} \Rightarrow \boxed{v_P^2 = g \cdot y} \; (eq. 2)$$

Substituindo (2) em (1):

$$g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot v_0^2 = g \cdot y + \frac{1}{2} \cdot g \cdot y \therefore \boxed{y = \frac{2h}{3} + \frac{v_0^2}{3g}}$$

Fazendo $\frac{x}{y}$, temos:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sqrt{r^2 - y^2}}{y} = \sqrt{\frac{r^2}{y^2} - 1} = \sqrt{\left(\frac{r}{\frac{2h}{3} + \frac{v_0^2}{3g}}\right)^2 - 1} \therefore \boxed{\frac{x}{y} = \sqrt{\left(\frac{r}{\frac{2h}{3} + \frac{v_0^2}{3g}}\right)^2 - 1}}$$

Para que exista o ponto P sobre a pista, devemos ter que:

$$\left(\frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}}\right)^2 - 1 > 0 \Rightarrow -1 < \frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}} < 1$$

Mas $h > 0$, então:

$$\frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}} < 1 \Rightarrow 3gr > 2gh + v_0^2 \Rightarrow \boxed{h < \frac{3r}{2} - \frac{v_0^2}{2g}}$$

Note que $\frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}} > -1$ pois r, h, g e v_0^2 são todas grandezas positivas. Então a outra restrição deve-se apenas ao fato de $h > 0$. Portanto:

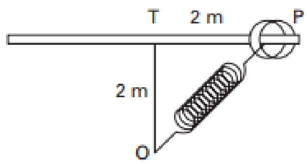
$$\boxed{0 < h < \frac{3r}{2} - \frac{v_0^2}{2g}}$$

Gabarito: $\frac{x}{y} = \sqrt{\left(\frac{r}{\frac{2h}{3}+\frac{v_0^2}{3g}}\right)^2 - 1}$

---

21. (ITA – 2008)

Um aro de $1\,kg$ de massa encontra-se preso a uma mola de massa desprezível, constante elástica $k = 10\,N/m$ e comprimento inicial $L_0 = 1\,m$ quando não distendida, afixada no ponto O. A figura mostra o aro numa posição P em uma barra horizontal fixa ao longo da qual o aro pode deslizar sem atrito. Soltando o aro do ponto P, qual deve ser sua velocidade, em m/s, ao alcançar o ponto T, a $2\,m$ de distância?



a) $\sqrt{30{,}0}$ b) $\sqrt{40{,}0}$ c) $\sqrt{23{,}4}$ d) $\sqrt{69{,}5}$ e) $\sqrt{8{,}2}$

Comentários:

Pela conservação da energia mecânica, temos:

$$E_P = E_T$$

$$\frac{k\Delta x_P^2}{2} = \frac{k\Delta x_T^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Pela geometria podemos facilmente encontrar que $\Delta x_P = 2\sqrt{2} - 1\,m$ e $\Delta x_T = 1\,m$. Substituindo na equação, temos:

$$10 \cdot \left(2\sqrt{2} - 1\right)^2 = 10 \cdot 1 + 1 \cdot v^2 \Rightarrow v \cong \sqrt{23{,}4}\,m/s$$

Gabarito: C

Trabalho, potência e energia.

22. (ITA – 2009)

A partir do repouso, um carrinho de montanha russa desliza de uma altura $H = 20\sqrt{3}\,m$ sobre uma rampa de $60°$ de inclinação e cone $20\ m$ num trecho horizontal antes de chegar em um loop circular, de pista sem atrito. Sabendo que o coeficiente de atrito da rampa e do plano horizontal é $1/2$, assinale o valor do raio máximo que pode ter esse loop paia que o carrinho faça todo o percurso sem perdei- o contato com a sua pista.

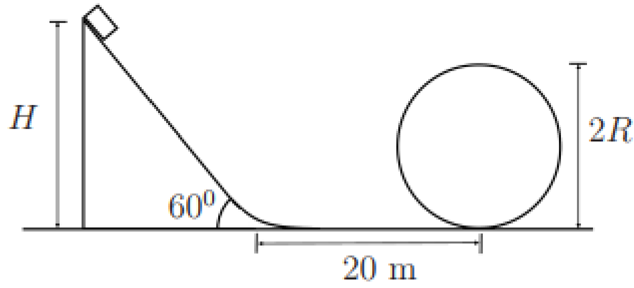
a) $R = 8\sqrt{3}\,m$

b) $R = 4(\sqrt{3} - 1)\,m$

c) $R = 8(\sqrt{3} - 1)\,m$

d) $R = 40(\sqrt{3} - 1)/3\,m$

e) $R = 4(2\sqrt{3} - 1)\,m$



Comentários:

Entre o ponto inicial e o ponto mais alto do loop, temos:

$$\tau_{fnc} = \tau_{fat} = \Delta E_{mec} = E_f - E_0\ (1)$$

Encontraremos τ_{fat} :

$$\tau_{fat} = -Fat_1 \cdot d_1 - Fat_2 \cdot d_2$$

$$\tau_{fat} = -\mu \cdot mg \cdot cos60° \cdot \frac{H}{sen60°} - \mu \cdot mg \cdot d_2$$

Substituindo os valores, vem:

$$\tau_{fat} = -20mg$$

Agora, as energias final e inicial são dadas por:

$$E_f = mg2R + \frac{mv_f^2}{2}\ (2)$$

$$E_0 = mgh = 20\sqrt{3}mg\ (3)$$

Substituindo (2) e (3) em (1), temos:

$$-20mg = mg2R + \frac{mv_f^2}{2} - 20\sqrt{3}mg\ (4)$$

O raio máximo é dado pelo caso limite no qual a normal no ponto mais alto é zero. Então:

$$R_{cp} = P + N$$

$$N = 0 \Rightarrow R_{cp} = P \therefore v_f^2 = Rg$$

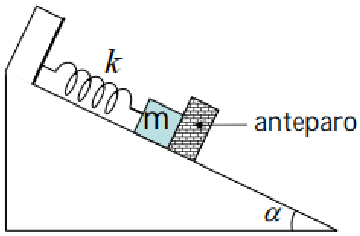
Substituindo v_f^2 na equação (4), vem:

$$40mg(\sqrt{3}-1) = 4mgR + mgR \therefore \boxed{R = 8(\sqrt{3}-1)\ m}$$

Gabarito: C

23. (ITA – 2010)

No plano inclinado, o corpo de massa m é preso a uma mola de constante elástica k, sendo barrado à frente por um anteparo. Com a mola no seu comprimento natural, o anteparo, de alguma forma, inicia seu movimento de descida com uma aceleração constante a. Durante parte dessa descida, o anteparo mantém contato com o corpo, dele se separando somente após um certo tempo. Desconsiderando quaisquer atritos, podemos afirmar que a variação máxima do comprimento da mola é dada por



a) $[m \cdot g \cdot sen\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot sen\ \alpha + a)}]/k.$

b) $[m \cdot g \cdot cos\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot cos\ \alpha + a)}]/k.$

c) $[m \cdot g \cdot sen\ \alpha + m \cdot \sqrt{a \cdot (2 \cdot g \cdot sen\ \alpha - a)}]/k$

d) $m \cdot (g \cdot sen\ \alpha - a)/k.$

e) $m \cdot g \cdot sen\ \alpha/k.$

Comentários:

Na iminência de perda de contato, temos:

$$mgsen\alpha - kx_1 = ma$$

Nesse ponto, sua velocidade é dada por:

$$v_1^2 = 2ax_1$$

No ponto em que sua velocidade se anula, temos a seguinte conservação de energia mecânica:

$$\frac{kx_1^2}{2} + \frac{mv_1^2}{2} + mgx_2sen\alpha = \frac{k(x_1+x_2)^2}{2}$$

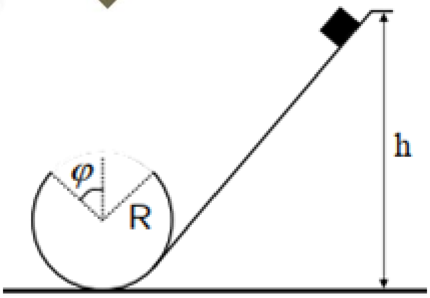
Substituindo v_1^2 na equação logo acima chegamos na deformação máxima da mola x:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{mgsen\alpha + \sqrt{a(2gsen\alpha - a}}{k}$$

Gabarito: C

24. (ITA – 2010)

Um pequeno bloco desliza sobre uma rampa e logo em seguida por um "loop" circular de raio R, onde há um rasgo de comprimento de arco $2 \cdot R \cdot \varphi$, como ilustrado na figura. Sendo g a aceleração da gravidade e desconsiderando qualquer atrito, obtenha a expressão para a altura inicial em que o bloco deve ser solto de forma a vencer o rasgo e continuai' em contato com o restante da pista.



Comentários:

O bloco desliza sobre a rampa e entra por um loop onde ocorre um lançamento oblíquo. Podemos conservar a energia mecânica do ponto inicial e do ponto do lançamento:

$$E_0 = E_L$$

$$mgh = mgR(1 + cos\varphi) + \frac{mv_L^2}{2}$$

$$v_L^2 = 2g(h - R(1 + cos\varphi))$$

Em L ocorre o lançamento. Pela geometria sabemos que φ é o ângulo de lançamento e velocidade inicial v_L.

Para o bloco vencer o rasgo e continuar em contato com o restante da pista, o alcance do lançamento deve ser igual à distância horizontal do rasgo:

$$A = 2 \cdot R \cdot sen\ \varphi$$

Mas, temos que $A = \frac{v_L^2 sen2\varphi}{g}$. Assim:

$$\frac{v_L^2 sen2\varphi}{g} = 2Rsen\varphi$$

$$2\big(h - R(1 + cos\varphi)\big)sen2\varphi = 2Rsen\varphi$$

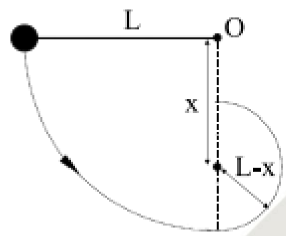
$$2\big(h - R(1 + cos\varphi)\big)cos\varphi = R$$

$$h = R\left[\frac{1}{2cos\varphi} + (1 + cos\varphi)\right]$$

Gabarito: $\boldsymbol{h = R\left[\frac{1}{2cos\varphi} + (1 + cos\varphi)\right]}$

25. (ITA – 2011)

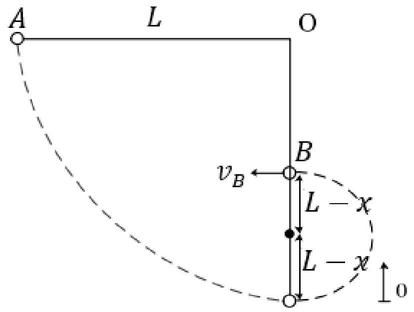
Um pêndulo, composto de uma massa M fixada na extremidade de um fio inextensível de comprimento L, é solto de uma posição horizontal. Em dado momento do movimento circular, o fio é interceptado por uma barra metálica de diâmetro desprezível, que se encontra a uma distância x na vertical abaixo do ponto O. Em consequência, a massa M passa a se movimentar num círculo de raio $L — x$, conforme mostra a figura.



Determine a faixa de valores de x para os quais a massa do pêndulo alcance o ponto mais alto deste novo círculo.

Comentários:

Esquematicamente, temos:



Considerando que não há forças dissipativas, então podemos conservar a energia mecânica entre A e B:

$$E_{mec}^{A} = E_{mec}^{B} \Rightarrow M \cdot g \cdot L = M \cdot g \cdot 2(L-x) + \frac{M \cdot v_B^2}{2} \Rightarrow \boxed{2 \cdot g \cdot x = g \cdot L + \frac{v_B^2}{2}}\ (eq.1)$$

Ao chegar em B, para a condição limite ocorre quando a tração no fio for praticamente nula, estando sujeito apenas ao peso:

$$R_{cp} = P \Rightarrow M \cdot a_{cp} = M \cdot g \Rightarrow \frac{v_{min}^2}{L-x} = g \Rightarrow \boxed{v_{min}^2 = g \cdot (L-x)}\ (eq.2)$$

No caso crítico (menor velocidade possível no ponto B), temos:

$$v_{min} = v_B$$

$$2 \cdot g \cdot x = g \cdot L + \frac{v_{min}^2}{2} \Rightarrow 2 \cdot g \cdot x = g \cdot L + \frac{g \cdot (L-x)}{2}$$

$$4 \cdot x = 2 \cdot L + L - x \Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{5}L}$$

Para valores maiores de x, observe que a velocidade do ponto mais alto do novo círculo ($v_{B'}$), como mostra a equação 1, é sempre maior que a velocidade mínima. Mas x deve ser menor que L, portanto:

$$\boxed{\frac{3}{5}L \leq x < L}$$

Gabarito: $\frac{3}{5}L \leq x < L$

---

26. (ITA – 2012)

Um corpo movimenta-se numa superfície horizontal sem atrito, a partir do repouso, devido à ação continua de um dispositivo que lhe fornece uma potência mecânica constante. Sendo v sua velocidade após certo tempo t, pode-se afirmar que

a) a aceleração do corpo é constante.

b) a distância percorrida é proporcional a v^2.

c) o quadrado da velocidade é proporcional a t.

d) a força que atua sobre o corpo é proporcional a $\sqrt{t}$.

e) a taxa de variação temporal da energia cinética nào é constante.

Comentários:

Pelo teorema da energia cinética, temos:

$$W_F = \Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - 0$$

Como a potência é constante, podemos escrever que:

$$W_F = P \cdot t$$

Assim:

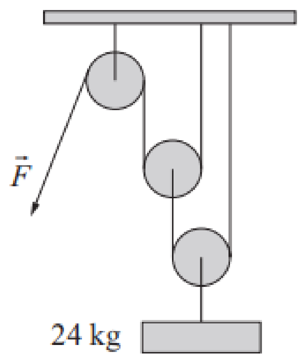
$$P \cdot t = \frac{mv^2}{2}$$

O que mostra que o quadrado da velocidade (v^2) é proporcional a t, conforme a letra C.

Gabarito: C

27. (ITA – 2012)

O arranjo de polias da figura é preso ao teto paia erguer nina massa de $24\ kg$, sendo os fios inextensíveis, e desprezíveis as massas das polias e dos fios. Desprezando os atritos, determine:



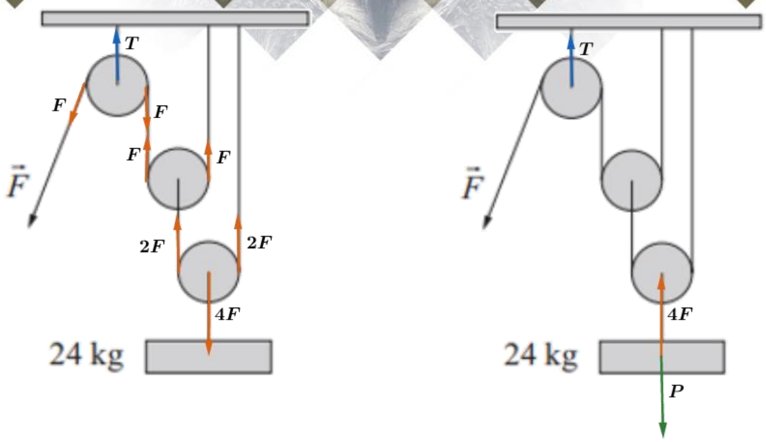
1. O valor do módulo da força $\vec{F}$ necessário para equilibrar o sistema.

2. O valor do módulo da força $\vec{F}$ necessário para erguer a massa com velocidade constante.

3. A força ($\vec{F}$ ou peso?) que realiza maior trabalho, em módulo, durante o tempo T em que a massa está sendo erguida com velocidade constante.

Comentários:

Os fios são ideais, portanto, a força $\vec{F}$ se propaga integralmente por eles. Podemos isolar cada polia e a massa, da seguinte forma:



1. Se a massa se encontra em repouso, então:

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \Rightarrow 4F = P \Rightarrow F = \frac{24 \cdot 10}{4} \Rightarrow \boxed{F = 60\ N}$$

2. Se a massa sobe com velocidade constante, então:

$$\vec{F}_{res} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{F = 60\ N}$$

3. Se a velocidade do corpo é constante, então para o sistema ($polias + massa + fio$), temos:

$$\tau_{F_{res}} = \Delta E_c$$

Mas a velocidade é constante, isto é, $\Delta E_c = 0$. Portanto:

$$\tau_{F_{res}} = 0 \Rightarrow \tau_{Peso} + \tau_F = 0 \Rightarrow \boxed{|\tau_{Peso}| = |\tau_F|}$$

Gabarito: 1) 60 N 2) 60 N 3) $|\boldsymbol{\tau_{Peso}}| = |\boldsymbol{\tau_F}|$

28. (ITA – 2015)

Uma massa puntiforme é abandonada com impulso inicial desprezível do topo de um hemisfério maciço em repouso sobre uma superfície horizontal. Ao descolar-se da superfície do hemisfério, a massa terá percorrido um ângulo θ em relação à vertical. Este experimento é realizado nas três condições seguintes, I, II e III, quando são medidos os respectivos ângulos θ_I; θ_{II} e θ_{III}:

I. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal e não há atrito entre a massa e o hemisfério.

II. O hemisfério é mantido preso à superfície horizontal, mas há atrito entre a massa e o hemisfério.

III. O hemisfério e a massa podem deslizar livremente pelas respectivas superfícies.

Nestas condições, podc-sc afirmar que

a) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$

b) $\theta_{II} < \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$

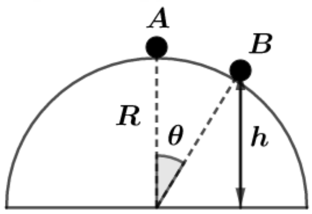
c) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} < \theta_I$

d) $\theta_{II} > \theta_I$ e $\theta_{III} > \theta_I$

e) $\theta_I = \theta_{III}$

Comentários:

Podemos representar a situação física em questão pelo esquema:



Quando o corpo perde contato em B, temos:

$$R_{cp} = P \cdot \cos\theta \Rightarrow \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot g \cdot \cos\theta \Rightarrow \boxed{v^2 = R \cdot g \cdot \cos\theta}$$

Pela geometria, a altura do ponto B é expressa por:

$$h = R \cdot \cos\theta$$

Para a situação proposta na primeira assertiva, podemos aplicar a conservação da energia mecânica:

$$E_{mec}^A = E_{mec}^B \Rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot h \Rightarrow m \cdot g \cdot R = \frac{m \cdot R \cdot g \cdot \cos\theta_I}{2} + m \cdot g \cdot R \cdot \cos\theta_I$$

$$\boxed{\cos\theta_I = \frac{2}{3}}$$

Para a segunda assertiva, temos:

$$\tau_{fnc} = \Delta E_{mec} \Rightarrow \tau_{fnc} = E_{mec}^B - E_{mec}^A \Rightarrow \tau_{fat} = \frac{m \cdot v^2}{2} + m \cdot g \cdot h - m \cdot g \cdot R$$

$$\tau_{fat} = \frac{m \cdot R \cdot g \cdot \cos\theta_{II}}{2} + m \cdot g \cdot R \cdot \cos\theta_{II} - m \cdot g \cdot R$$

$$\boxed{\cos\theta_{II} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{\tau_{fat}}{m \cdot g \cdot R}\right)}$$

Como $\tau_{fat} < 0$, então $\cos\theta_{II} < \cos\theta_I$. Analisando $0 \leq \theta \leq \pi/2$, então podemos afirmar que:

$$\boxed{\theta_{II} > \theta_I}$$

Para a terceira assertiva, vemos que a velocidade de deslocamento da massa em relação ao hemisfério deve ser de:

$$v_{rel}^2 = R \cdot g \cdot \cos\theta$$

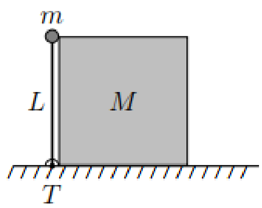
Dessa forma, podemos considerar uma força fictícia para a direita nesse referencial, tal que ela aumenta a aceleração tangencial da massa, ou seja, a massa atingirá a velocidade para descolar do hemisfério em um tempo menor. Assim, podemos dizer que o ângulo varrido na terceira situação é menor que na primeira. Em outras palavras:

$$\boxed{\theta_{III} < \theta_I}$$

Gabarito: C

29. (ITA – 2018)

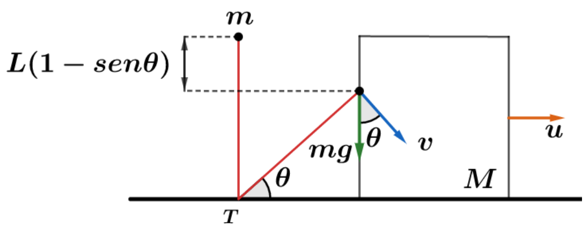
Uma haste vertical de comprimento L, sem peso, é presa a uma articulação T e dispõe em sua extremidade de uma pequena massa m que, conforme a figura, toca levemente a quina de um bloco de massa M. Após uma pequena perturbação, o sistema movimenta-se para a direita. A massa m perde o contato com M no momento cm que a haste perfaz um ângulo de $\pi/6$ rad com a horizontal. Desconsiderando atritos, assinale a velocidade final do bloco.



a) $\sqrt{\frac{mgL}{M}}$ b) $\sqrt{\frac{mgL}{M+4m}}$ c) $\sqrt{\frac{mgL}{M+4L/3}}$ d) $\sqrt{\frac{2mgL}{M}}$ e) $\sqrt{gL}$

Comentários:

Durante a queda do corpo de massa m, enquanto houver contato entre m e M, a velocidade de M é igual à componente horizontal da velocidade de m. Na iminência da perda de contato, temos a seguinte configuração:



Do vínculo geométrico da figura logo acima, temos:

$$u = v \cdot sen\,\theta \Rightarrow u = v \cdot sen\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \boxed{u = \frac{v}{2}}\ (eq.1)$$

Pela conservação da energia mecânica, tomando como referência para o cálculo da energia potencial gravitacional o solo, temos:

$$E_{mec}^{inicial} = E_{mec}^{final}$$

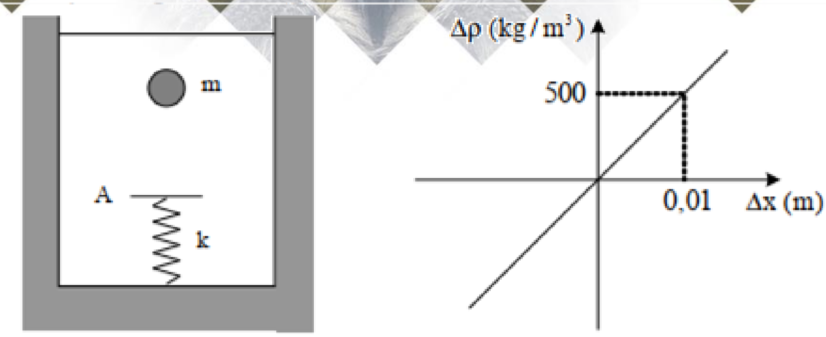
$$m \cdot g \cdot L = m \cdot g \cdot L \cdot sen\frac{\pi}{6} + \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{M \cdot u^2}{2} \Rightarrow \boxed{m \cdot g \cdot L = m \cdot v^2 + M \cdot u^2}\ (eq.2)$$

Substituindo (1) em (2), temos que:

$$m \cdot g \cdot L = m \cdot (2u)^2 + M \cdot u^2 \Rightarrow \boxed{u = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot L}{M + 4m}}}$$

Gabarito: B

30. (IME – 2005)



Um corpo de massa m e volume $V = 1\ m^3$ imerso em um líquido de massa específica ρ_0, é solto, inicia o movimento vertical, atinge o anteparo A e provoca uma deformação máxima x na mola de constante elástica k. Em seguida, o procedimento é repetido, porém com líquidos de massa específica ρ_1 diferente de ρ_0. O gráfico abaixo mostra a relação entre a variação da massa específica do líquido $\Delta\rho$ e a variação da deformação máxima da mola Δx.

a. Construa o gráfico da deformação máxima da mola x em função da diferença entre as massas específicas do corpo e do líquido $\Delta\rho_{CL}$.

b. Determine o valor de x para $\Delta\rho_{CL} = 1.000\ kg/m^3$.

Dado: aceleração da gravidade $g = 10\ m/s^2$.

Comentários:

a) Temos que levar em conta o trabalho realizado pelo empuxo, que se dá pela fórmula:

$$T_{Empuxo} = \rho_L \cdot V \cdot g \cdot \Delta y$$

Considerando o referencial de energia potencial nula no ponto de máxima compressão da mola, podemos escrever a expressão da conservação da energia mecânica da seguinte maneira:

$$mg(h + x) - \rho_L \cdot V \cdot g \cdot (h + x) = \frac{kx^2}{2}$$

Em que $m = \rho_C \cdot V$. Assim, podemos reescrever a equação anterior:

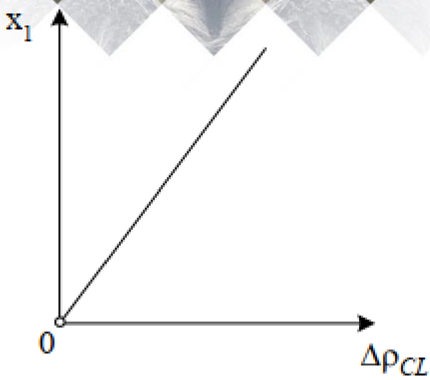
$$(h + x) \cdot V \cdot g \cdot (\rho_C - \rho_L) = \frac{kx^2}{2}$$

$$\Delta\rho_{CL} = \frac{k}{2Vg} \cdot x \cdot (1 - \frac{h}{x})^{-1}$$

Para x muito grande, a expressão de $\Delta\rho_{CL}$ se reduz a:

$$\Delta\rho_{CL} = \frac{k}{2Vg} \cdot x$$

Assim, temos o gráfico de x em função de $\Delta\rho_{CL}$.



b) Para $\Delta\rho_{CL} = 1000\ kg/m^3$, temos:

$$\Delta\rho_{CL} = \frac{k}{2Vg} \cdot x \Rightarrow 1000 = \frac{k}{2Vg} \cdot x$$

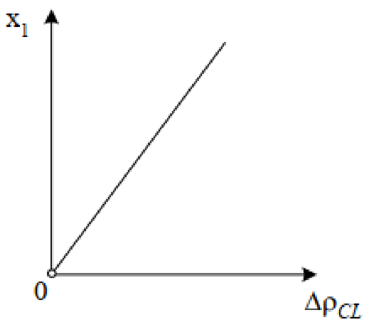
Quando $\Delta\rho_{CL} = 500\ kg/m^3$, $\Delta x = 0{,}01$. Portanto:

$$500 = \frac{k}{2Vg} \cdot 0{,}01 \Rightarrow \frac{k}{2Vg} = \frac{500}{0{,}01}$$

Logo:

$$1000 = \frac{k}{2Vg} \cdot x \Rightarrow 1000 = \frac{500}{0{,}01} \cdot x \Rightarrow \boxed{x = 0{,}02\ m}$$

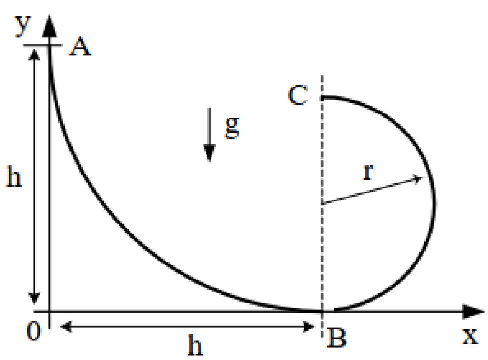
Gabarito: a)



b) 0,02 m

31. (IME – 2006)

Uma partícula parte do repouso no ponto A e percorre toda a extensào da rampa ABC, mostrada na figura abaixo. A equação que descreve a rampa entre os pontos A de coordenadas $(0, h)$ e B, de coordenadas $(h, 0)$, é



$$y = \frac{x^2}{h} - 2x + h$$

enquanto entre os pontos B e C, de coordenadas $(h, 2r)$, a rampa é descrita por uma circunferência de raio r com centro no ponto de coordenadas (k, r). Sabe-se que a altura h é a mínima necessária para que a partícula abandone a rampa no ponto C e venha a colidir com ela em um ponto entre A e B. Determine o ponto de colisão da partícula com a rampa no sistema de coordenadas da figura como função apenas do comprimento r.

Dado: aceleração da gravidade $= g$.

OBS: despreze as forças de atrito e a resistência do ar.

Comentários:

Utilizando a conservação da energia mecânica, temos:

$$E_A = E_C \Rightarrow mgh = mg2r + \frac{mv^2}{2}$$

Como h é a altura mínima para que a partícula abandone a rampa no ponto C, temos que, em C, a $N = 0$. Assim:

$$R_{cp} = P \Rightarrow \frac{mv^2}{r} = mg$$

Substituindo na equação da energia, encontramos:

$$\boxed{h = \frac{5r}{2}}$$

No ponto C, ocorre um lançamento horizontal de velocidade inicial v, então:

- No eixo x: $x = h - \sqrt{rg} \cdot t$
- No eixo y: $y = 2r - \frac{1}{2}gt^2$

Isolando t em x e substituindo em y, temos:

$$y = 2r - \frac{(x-h)^2}{2r}$$

Fazendo a intersecção com a curva da rampa, encontramos:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{h} - 2x + h \\ y = 2r - \dfrac{(x-h)^2}{2r} \end{cases} \Rightarrow x = \left(\frac{5}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) r$$

Como a intersecção ocorre entre A e B:

$$x = \left(\frac{5}{2} - \frac{2\sqrt{5}}{3}\right) r \Rightarrow y = \frac{8r}{9}$$

Gabarito: $\left(\frac{15-4\sqrt{5}}{6}r, \frac{8}{9}r\right)$

---

32. (IME – 2008)

Um bloco de massa $m = 4\ kg$ parte de um plano horizontal sem atrito e sobe um plano inclinado com velocidade inicial de $6\ m/s$. Quando o bloco atinge a altura de $1\ m$, sua velocidade se anula;

em seguida, o bloco escorrega de volta, passando pela posição inicial. Admitindo que a aceleração da gravidade seja igual a $10\ m/s^2$ e que o atrito do plano inclinado produza a mesma perda de energia mecânica no movimento de volta, a velocidade do bloco, ao passar pela posição inicial, é

a) 1 m/s b) 2 m/s c) 3 m/s d) 4 m/s e) 5 m/s

Comentários:

Energia do bloco ao começar a subida:

$$E_1 = \frac{mv^2}{2} = 72\ J$$

Energia do bloco quando atinge altura de 1 m:

$$E_2 = mgh = 40\ J$$

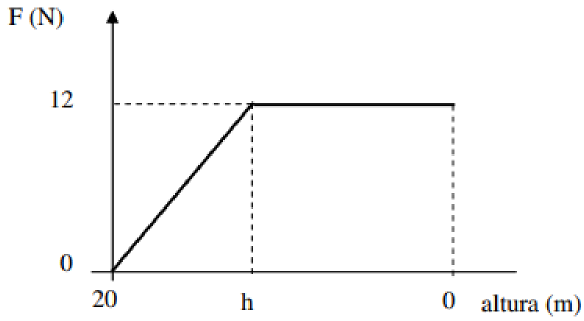
Portanto, o atrito dissipou 32 J de energia na subida do bloco. Admitindo a mesma perda de energia na descida, o corpo chega na base da rampa com energia igual a 8 J. Então, sua velocidade é de:

$$E_3 = 8\ J = \frac{mv^2}{2} \therefore \boxed{v_f = 2\ m/s}$$

Gabarito: B

---

33. (IME – 2009)



Um objeto com massa de $1\ kg$ é largado de uma altura de $20\ m$ e atinge o solo com velocidade de $10\ m/s$. Sabe-se que a força F de resistência do ar que atua sobre o objeto varia com a altura, conforme o gráfico acima. Considerando que $g = 10\ m/s^2$, a altura h, em metros, em que a força de resistência do ar passa a ser constante é

a) 4 b) 5 c) 6 d) 8 e) 10

Comentários:

A força de resistência do ar é não conservativa. Por isso, para a queda do objeto podemos escrever que:

$$\tau_{fnc} = \Delta E_{mec} \Rightarrow \tau_{R_{ar}} = \Delta E_{pot} + \Delta E_c = m \cdot g \cdot \Delta h + \left(\frac{mv^2}{2} - 0\right)$$

O trabalho da força de resistência do ar pode ser determinado pela área do gráfico em questão:

$$-\frac{20+h}{2}\cdot 12 = 1\cdot 10\cdot(-20)+\frac{1\cdot 10^2}{2} \Rightarrow \boxed{h = 5\,m}$$

Gabarito: B

34. (IME – 2010)

Um bloco de $4\ kg$ e velocidade inicial de $2\ m/s$ percorre $70\ cm$ em uma superfície horizontal rugosa até atingir uma mola de constante elástica $200\ N/m$. A aceleração da gravidade é $10\ m/s^2$ e o bloco comprime $10\ cm$ da mola até que sua velocidade se anule. Admitindo que durante o processo de compressão da mola o bloco desliza sem atrito, o valor do coeficiente de atrito da superfície rugosa é:

a) 0,15 b) 0,20 c) 0,25 d) 0,30 e) 0,35

Comentários:

Pelo teorema do trabalho das forças não conservativas, podemos escrever que:

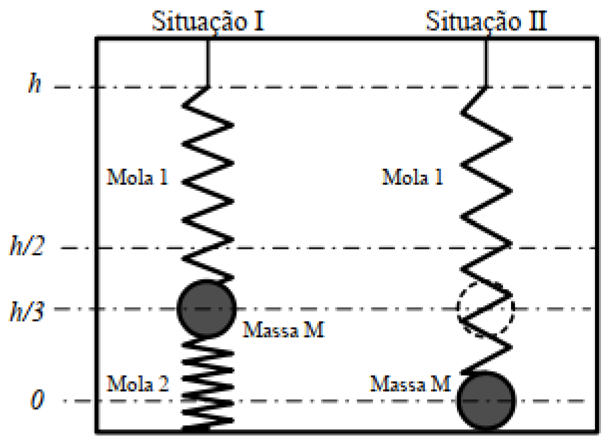
$$\tau_{fnc} = \Delta E_{mec} \Rightarrow -F_{at}\cdot d = \frac{k\cdot x^2}{2} - \frac{m\cdot v_0^2}{2}$$

$$-\mu\cdot 4\cdot 10\cdot 0{,}7 = \frac{200\cdot 0{,}1^2}{2} - \frac{4\cdot 2^2}{2}$$

$$\boxed{\mu = 0{,}25}$$

Gabarito: C

35. (IME – 2010)



Na Situação I da figura, em equilíbrio estático, a massa M, presa a molas idênticas, está a uma altura $h/3$. Na Situação II, a mola inferior é subitamente retirada. As molas, em repouso, têm comprimento $h/2$. O módulo da velocidade da massa M na iminência de tocar o solo na situação II é:

Observação:

g: aceleração da gravidade

a) $4gh/[2\sqrt{2}]$ b) $3gh/[2\sqrt{2}]$ c) $2gh/[2\sqrt{2}]$

d) $gh/[2\sqrt{2}]$ e) 0

Comentários:

A questão poderia ser facilmente solucionada observando a dimensão das alternativas, a única alternativa cuja dimensão está "correta" é a alternativa E.

Deformações das molas:

$$x_1 = \frac{2h}{3} - l_0$$

$$x_2 = -\frac{h}{3} + l_0$$

Para que o corpo esteja em equilíbrio, vamos ter as duas forças elásticas apontando verticalmente para cima equilibrando à força peso. Assim:

$$k \cdot x_1 + k \cdot x_2 = m \cdot g \Rightarrow \boxed{k = \frac{3m \cdot g}{h}}$$

Imediatamente após a mola inferior sumir, podemos calcular a energia total do corpo e igualá-la à energia que o corpo terá no ponto mais baixo da trajetória.

$$\frac{k \cdot x_1^2}{2} + m \cdot g\,\frac{h}{3} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Em que $x = h - l_0$ e $l_0 = \frac{h}{2}$. Portanto:

$$\frac{\frac{3m \cdot g}{h} \cdot \left(\frac{h}{6}\right)^2}{2} + m \cdot g\,\frac{h}{3} = \frac{m \cdot v^2}{2} + \frac{\frac{3m \cdot g}{h} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}{2}$$

$$\boxed{v = 0}$$

Gabarito: E

36. (IME – 2010)

A figura mostra o perfil de um par de espelhos planos articulado no ponto O e, inicialmente, na vertical. Ao centro do espelho OB é colado um pequeno corpo, cuja massa é muito maior que a do espelho. O espelho OA encontra-se fixo e, frente ao mesmo, é colocado um objeto P. Em um dado instante, é aplicado um impulso no espelho OB, conferindo a extremidade B uma velocidade inicial v_0, no sentido de fechar os espelhos face contra face. Tomando como referência o eixo x, determine:

a) a altura máxima atingida pela extremidade B.

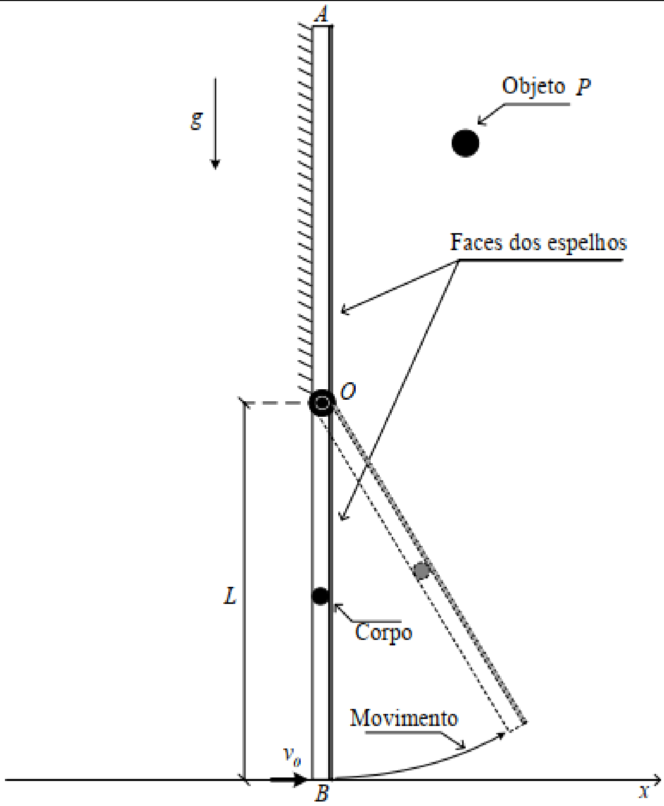
b) os módulos dos vetores velocidade da extremidade B, para cada instante em que uma imagem adicional do objeto P é formada, até que B atinja sua altura máxima.

Dados:

- $L = 90\ cm$
- $v_0 = 7\ m/s$

• $g = 10\ m/s^2$

α	36º	40º	45º	51,4º	60º	72º	90º	120º	180º
cos α	0,81	0,77	0,71	0,62	0,5	0,31	0	- 0,5	-1



Comentários:

a) Podemos usar a expressão da conservação da energia:

$$E_i = E_f$$

Adotaremos como nível de referência o ponto O. Além disso, devemos notar que, para todo instante, a velocidade do ponto C (onde está o corpo) é metade da velocidade do ponto B.

Assim:

$$-mg\frac{L}{2} + \frac{mv_0^2}{8} = mg\frac{L}{2}cos\alpha + \frac{mv_c^2}{2}$$

Para a altura máxima, temos $v_c = 0$. Portanto:

$$cos\alpha = \frac{13}{36} \Rightarrow h_{max} = L(1 + cos\alpha) = 1{,}225\ m$$

b) O número de imagens do objeto é dado por:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

Quando se forma a segunda imagem:

$$n = 2 \Rightarrow \alpha = 120°$$

Usando a expressão da energia, temos:

$$v_B = \sqrt{31}\, m/s$$

Quando se forma a terceira imagem:

$$n = 3 \Rightarrow \alpha = 90° \therefore v_B = \sqrt{13}\, m/s$$

Quando se forma a quarta imagem:

$$n = 4 \Rightarrow \alpha = 72° \therefore v_B = \sqrt{1{,}84}\, m/s$$

Gabarito: a) 1,225 m b) $\sqrt{31}\ m/s$, $\sqrt{13}\ m/s$, $\sqrt{1{,}84}\ m/s$

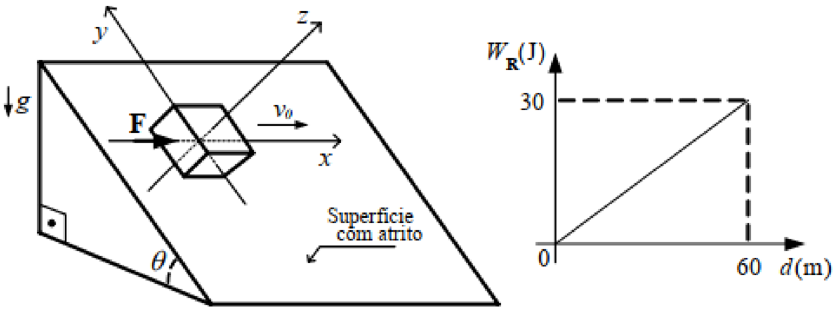
37. (IME – 2010)

A figura ilustra um plano inclinado com ângulo $\theta = 30°$ cuja superfície apresenta atrito. Um bloco de massa $m = 1\,kg$, carregado eletricamente com a carga negativa $q = 10^{-2}\,C$, apresenta velocidade inicial $v_0 = 2\,m/s$ e realiza um movimento retilíneo sobre o eixo x (paralelo ao plano horizontal) a partir do instante $t = 0$. Além disso, este bloco se encontra submetido à força constante $F = 4{,}5\,N$ na direção x e a um campo magnético $B = 100\,T$ normal à superfície (direção z). Considerando que o gráfico ilustra o trabalho da força resultante R que age sobre o bloco em função da distância percorrida, determine:

a) o tempo gasto e a velocidade do bloco após percorrer $60\,m$;

b) os gráficos das componentes da força de atrito (direções x e y) em função do tempo até o bloco percorrer $60\,m$.

Dado: aceleração da gravidade: $g = 10\,m/s^2$



Comentários:

a) A resultante R está em x. Pelo gráfico do trabalho, temos:

$$W_R = R \cdot d \Rightarrow R = 0{,}5N \therefore a = 0{,}5\frac{m}{s^2}$$

Pela função horária da posição, temos o tempo gasto:

$$X = v_0 t + \frac{at^2}{2} \Rightarrow 60 = 2t + \frac{t^2}{4} \therefore t = 12s$$

A velocidade é:

$$v = v_0 + at \Rightarrow v = 8\,m/s$$

b) No eixo x:

$$R = F + fat_x \Rightarrow fat_x = -4\,N$$

No eixo y:

$$fat_y = Psen30° - F_{mag}$$

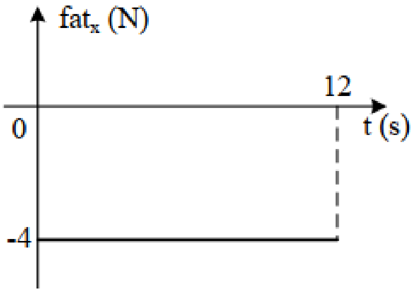
A força magnética tem sua intensidade dada por:

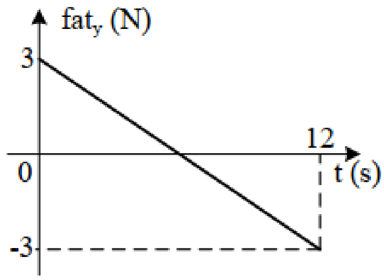
$$F_{mag} = q \cdot v \cdot B \Rightarrow F_{mag} = v$$

Assim:

$$fat_y = 5 - v = 5 - (2 + 0{,}5t) = 3 - 0{,}5t$$

Assim podemos construir os gráficos:





Gabarito: a) 12 s e 8 m/s b) ver gráficos

38. (IME – 2011)

Um corpo está sobre um plano horizontal e ligado a uma mola. Ele começa a ser observado quando a mola tem máxima compressão (Figura 1a). Durante a observação, verificou-se que, para a deformação nula da mola (em $x = 0$), sua velocidade é $5\,m/s$ (Figura 1 b). Para $x = 0{,}2\,m$ (Figura 1c), o corpo é liberado da mola a partir dessa posição e fica submetido a uma força de atrito até parar. Faça um gráfico da aceleração a do corpo em função da posição x, registrando os valores de a e de x quando:

a) a observação se inicia;

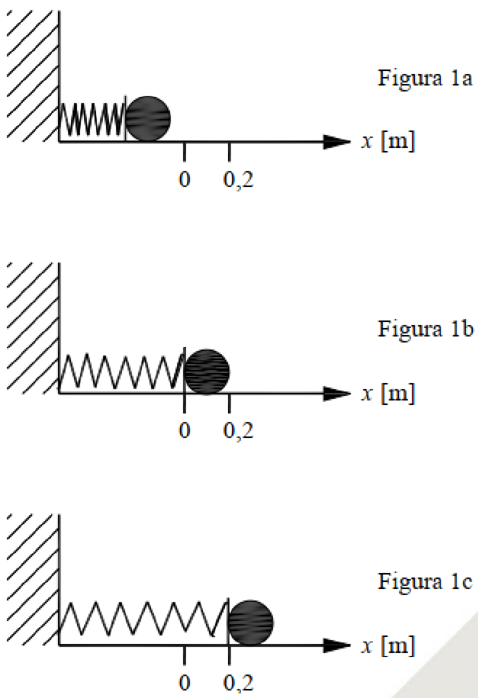
b) a velocidade é máxima;

c) o corpo é liberado da mola;

d) o corpo para.

Dados:

• massa do corpo: $500\,g$;



- constante elástica da mola: 50 N/m;
- coeficiente de atrito entre o plano e o corpo: 0,3.

Comentários:

Entre o momento que a mola está sob máxima compressão e o momento em que a compressão é nula podemos conservar a energia:

$$\frac{kA^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \Rightarrow A = 0{,}5m$$

No ponto de compressão máxima:

$$F_R = F_{elas} \Rightarrow a = \frac{k \cdot A}{m} = 50\,\frac{m}{s^2}$$

No ponto em que o corpo é liberado:

$$F_R = F_{elas} \Rightarrow a = \frac{k \cdot 0{,}2}{m} = -20\,\frac{m}{s^2}$$

Para encontrarmos a velocidade do corpo quando é liberado, usamos a conservação da energia.

$$v' = \sqrt{21}\, m/s$$

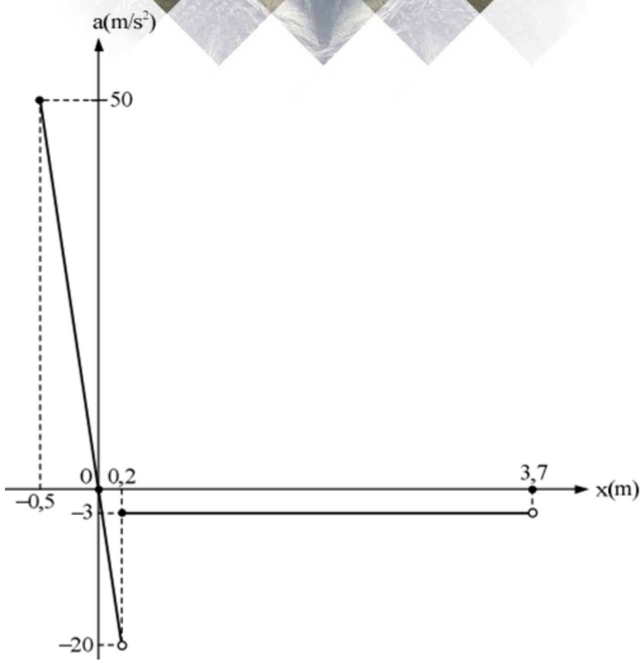
Após esse ponto, o atrito começa a atuar:

$$F_R = F_{fat} \Rightarrow a = -3\,\frac{m}{s^2}$$

O corpo para quando sua energia for igual a 0:

$$W_{fat} = \Delta E_{cin} = 0 - \frac{mv'^2}{2} \Rightarrow \mu \cdot m \cdot g \cdot d = \frac{mv'^2}{2} \Rightarrow d = 3{,}5\, m$$

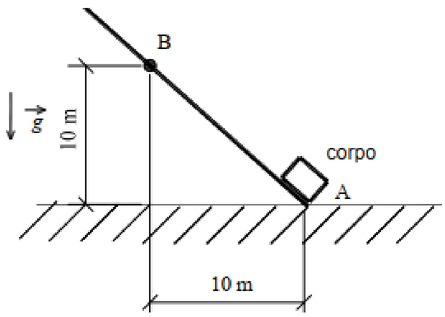
Com isso podemos montar o gráfico da aceleração do corpo em função da posição:



Gabarito: ver gráfico

39. (IME – 2012)

Um corpo com velocidade v parte do ponto A, sobe a rampa AB e atinge o repouso no ponto B. Sabe-se que existe atrito entre o corpo e a rampa e que a metade da energia dissipada pelo atrito é transferida ao corpo sob a forma de calor. Determine a variação volumétrica do corpo devido à sua dilatação.



Dados:

- aceleração da gravidade: $g = 10\, m \cdot s^{-2}$;
- volume inicial do corpo: $V_i = 0{,}001\, m^3$;
- coeficiente de dilatação térmica linear do corpo: $\alpha = 0{,}00001\, K^{-1}$;
- calor específico do corpo: $c = 400\, J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$.

Observações:

- o coeficiente de atrito cinético é igual a 80% do coeficiente de atrito estático;
- o coeficiente de atrito estático é o menor valor para o qual o corpo permanece em repouso sobre a rampa no ponto B.

Comentários:

O corpo fica parado no ponto B:

$$m \cdot gsen(45°) = \mu_{est} mg \cdot cos(45°)$$

$$\mu_{est} = tg(45°) = 1 \Rightarrow \mu_{din} = 0{,}8$$

A energia dissipada entre A e B é devido ao atrito:

$$E_{dis} = -\tau_{fat} = F_{at} \cdot AB = 0{,}8 \cdot m \cdot 10 \cdot \cos 45° \cdot 10\sqrt{2} = 80 \cdot m$$

Do enunciado, sabemos que:

$$Q = \frac{1}{2} \cdot E_{dis}$$

$$m \cdot c \cdot \Delta\theta = \frac{1}{2} \cdot 80 \cdot m \Rightarrow 400 \cdot \Delta\theta = 40 \Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 0{,}1\ K}$$

Pela lei da dilatação volumétrica linear, temos:

$$\Delta V = V_i \cdot \gamma \cdot \Delta\theta = V_i \cdot 3\alpha \cdot \Delta\theta$$

$$\Delta V = 10^{-3} \cdot (3 \cdot 10^{-5}) \cdot 10^{-1} \Rightarrow \boxed{\Delta V = 3 \cdot 10^{-9} m^3}$$

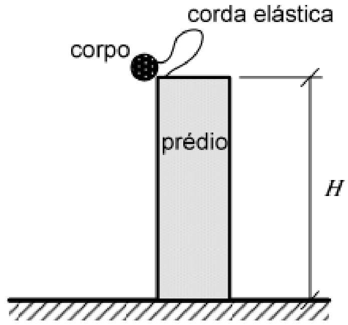
Gabarito: $3 \cdot 10^{-9} m^3$

40. (IME – 2017)

Um corpo preso a uma corda elástica é abandonado em queda livre do topo de um edifício, conforme apresentado na figura acima. Ao atingir o solo, penetra numa distância x abaixo do nível do solo até atingir o repouso. Diante do exposto, a força de resistência média que o solo exerce sobre o corpo é:

Dados:

- aceleração gravitacional: g;
- constante elástica da corda: k;
- massa do corpo: M;
- altura do edifício em relação ao solo: H;
- comprimento da corda: L; e
- distância que o corpo penetra no solo até atingir o repouso: x.



Observação:

- a corda elástica relaxada apresenta comprimento menor que a altura do edifício.

a) $Mg + \frac{MgH + k(HL + Lx - Hx)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

b) $Mg + \frac{MgH + k(HL - Lx - Hx)}{2x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{x}$

c) $Mg + \frac{MgH - k(HL + Lx + Hx)}{2x} + \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{x}$

d) $Mg - \frac{MgH - k(HL - Lx - Hx)}{x} + \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

e) $Mg + \frac{MgH - k(HL + Lx - Hx)}{x} - \frac{k(H^2 + x^2 + L^2)}{2x}$

Comentários:

Vamos escrever a expressão do balanço energético:

$$E_0 = E_F + \tau_{chão}$$

$$MgH = -Mgx + \frac{k(H+x-L)^2}{2} + Fx$$

$$F = Mg + \frac{MgH + k(HL + Lx - Hx)}{x} - k\frac{H^2 + x^2 + L^2}{2x}$$

Gabarito: A

6. Considerações finais da aula

Chegamos ao final da nossa aula. Relembre os principais conceitos estudados nessa aula e tenha no sangue os teoremas da conservação de energia e o trabalho das forças não conservativas.

Na próxima, estudaremos impulso e quantidade de movimento. Frequentemente, as questões abordadas nos nossos vestibulares adoram mesclar os dois conteúdos, criando questões de elevado grau de dificuldade.

Conte comigo nessa jornada. Quaisquer dúvidas, críticas ou sugestões entre em contato pelo fórum de dúvidas do Estratégia ou se preferir:

@proftoniburgatto

7. Referências bibliográficas

[1] Calçada, Caio Sérgio. Física Clássica. 2. Ed. Saraiva Didáticos, 2012. 576p.

[2] Bukhovtsev, B.B. Krivtchenkov, V.D. Miakishev, G.Ya. Saraeva, I. M. Problemas Selecionados de Física Elementar. 1 ed. MIR, 1977.518p.

[3] Brito, Renato. Fundamentos de Mecânica. 2 ed. VestSeller, 2010. 496p.

[4] Newton, Gualter, Helou. Tópicos de Física. 11ª ed. Saraiva, 1993. 303p.

[5] Toledo, Nicolau, Ramalho. Os Fundamentos da Física 1. 9ª ed. Moderna. 490p.

[6] Resnick, Halliday. Fundamentos de Física. 8ª ed. LTC. 349p. Versão

8. Versão de aula

Versão da aula	Data de atualização
1.0	15/07/2021