Estratégia Militares

CURSO INTENSIVO 2022

ITA - 2022
Matemática

Prof. Victor So

www.estrategiamilitares.com.br

Sumário

Apresentação

A geometria analítica nos permite transformar problemas geométricos em algébricos. Ele é como o próprio nome diz, analítico. Diversos problemas da geometria euclidiana podem ser resolvidos usando geometria analítica. Nessa aula, faremos o estudo no plano $\mathbb{R}^2$, mas saiba que também podemos estender esse conhecimento para o espaço $\mathbb{R}^3$.

Para essa aula, usaremos alguns conceitos da aula de matrizes e você verá que o determinante de matrizes pode ser uma ferramenta muito útil para descobrir algumas propriedades da geometria analítica.

Sem mais delongas, vamos iniciar a aula!

FALE COMIGO

/victorso /profvictorso /profvictorso

ESCLARECENDO!

Como se trata de um **curso intensivo**, o nosso objetivo é que você consiga estudar todas as principais questões que podem ser cobradas na prova e, por isso, teremos menos questões e nossa teoria será mais objetiva. Caso queira um material mais aprofundado e com mais questões, recomendo o nosso material do **curso extensivo**.

1. Conceitos Iniciais

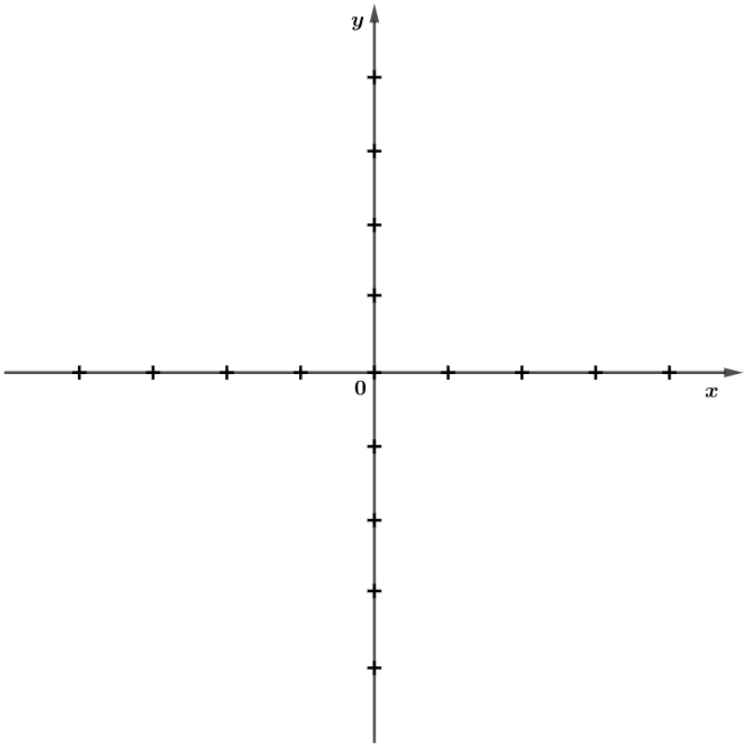
1.1. Lugar geométrico

A definição de **lugar geométrico** é a **figura formada pelos pontos que compartilham de uma mesma propriedade**. A circunferência, por exemplo, é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de determinado ponto (denominado centro da circunferência) e sua equação é da forma $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$, onde (x_0,y_0) é o centro da circunferência.

Nessa aula, aprenderemos os principais conceitos básicos da Geometria Analítica e veremos as equações das principais figuras geométricas e suas propriedades.

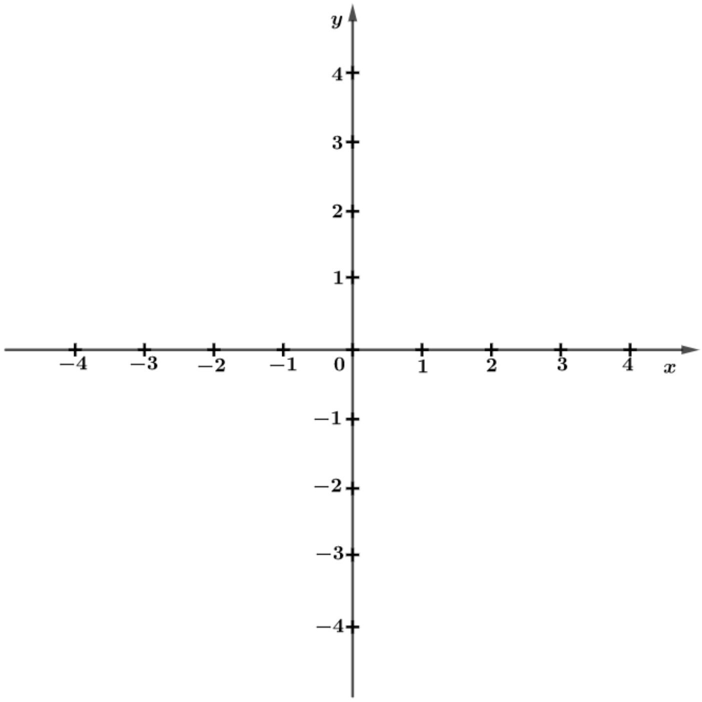
1.2. Plano cartesiano

Para começar o estudo da geometria analítica, vamos entender o que é o plano cartesiano. Esse plano é definido por dois eixos reais e, por isso, dizemos que ele é o plano $\mathbb{R}^2$. Denominamos o eixo horizontal como o eixo das abcissas (eixo Ox ou, simplesmente, eixo x) e o eixo vertical como o eixo das ordenadas (eixo Oy ou eixo y), eles são ortogonais entre si. Esses eixos se interceptam em um único ponto chamado de origem. A figura abaixo representa o plano cartesiano:

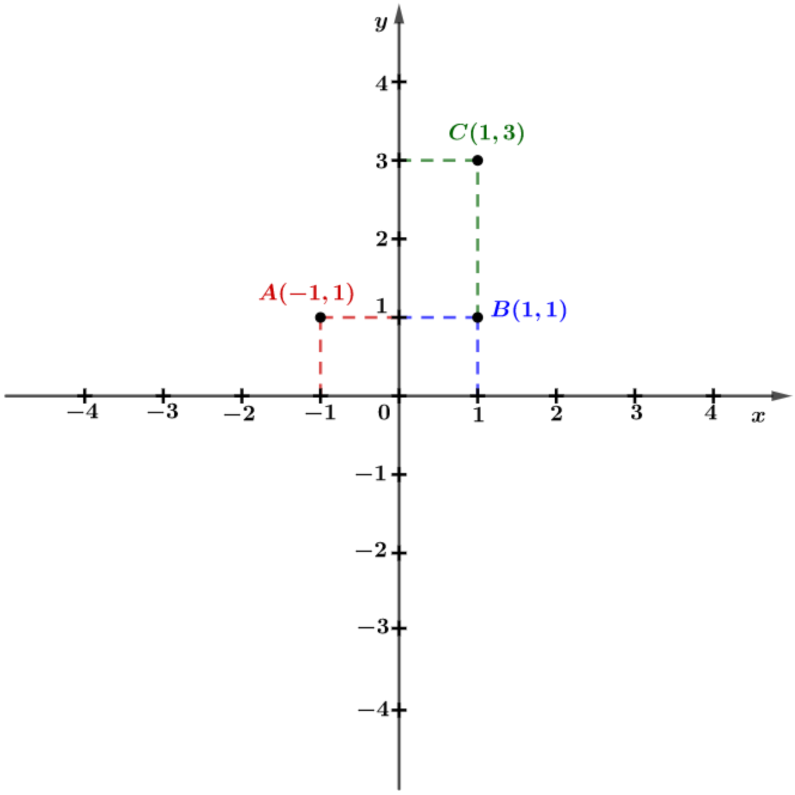


Note que o eixo x possui uma seta à extremidade direita e o eixo y possui uma seta para cima. Essas setas representam a ordenação dos números no eixo. Tomando a origem como referência, todos os pontos acima da origem possuem ordenada positiva (eixo y) e todos os pontos à direita da origem possuem abcissa positiva (eixo x). Desse modo, o sentido contrário àqueles serão os pontos que possuem ordenada e abcissa negativas.

Veja a ordenação dos números no diagrama abaixo:



Vamos representar alguns pontos no plano. Preliminarmente, devemos entender que pontos são pares ordenados no plano $\mathbb{R}^2$, também podemos entender esses pares ordenados como coordenadas. Sejam os pontos A, B, C tais que $A = (-1, 1), B = (1, 1)$ e $C = (1, 3)$. Para representar esses pontos no gráfico, devemos lembrar que o primeiro número do par ordenado é a abcissa do ponto e o segundo número é a sua ordenada. Então, para o ponto $A(-1, 1)$, temos $x_a = -1$ e $y_a = 1$. Como x_a é negativo, ele está à esquerda da origem e como y_a é positivo, ele está acima da origem. Assim, A, B, C estão localizados do seguinte modo:

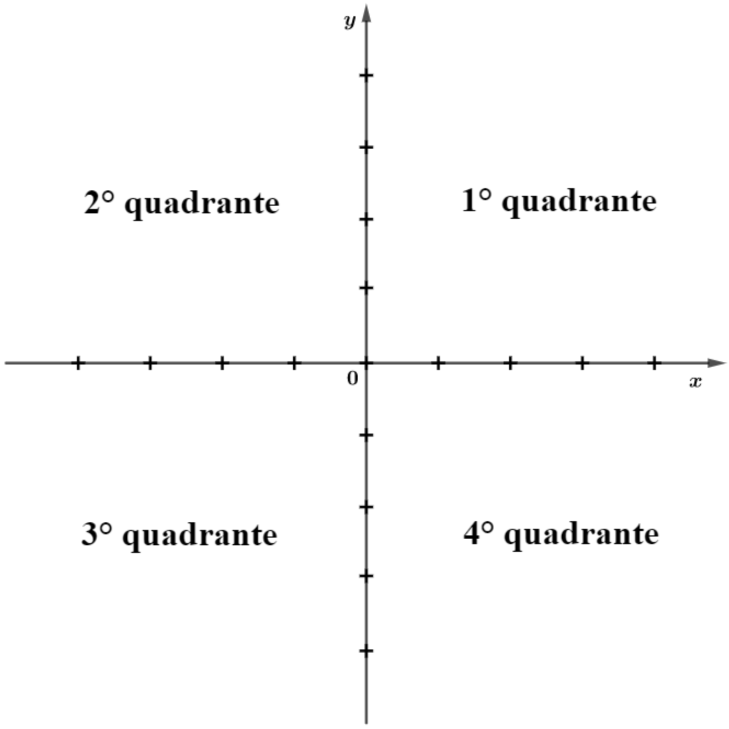


O plano pode ser dividido em quadrantes. Veja o diagrama ao lado:

Os quadrantes são definidos de acordo com o sinal das coordenadas.

$$1° \, quadrante \rightarrow x > 0 \; e \; y > 0$$
$$2° \, quadrante \rightarrow x < 0 \; e \; y > 0$$
$$3° \, quadrante \rightarrow x < 0 \; e \; y < 0$$
$$4° \, quadrante \rightarrow x > 0 \; e \; y < 0$$

Perceba que os pontos que estão localizados nos eixos coordenados não pertencem a nenhum quadrante. Por esse fato, dizemos que o plano cartesiano é formado pelos quatro quadrantes e pelos eixos coordenados.



ESCLARECENDO!

Alguns autores consideram que os eixos coordenados também pertencem aos quadrantes. Desse modo, os quadrantes receberiam a seguinte definição:

$$1° \, quadrante \rightarrow x \geq 0 \; e \; y \geq 0$$
$$2° \, quadrante \rightarrow x \leq 0 \; e \; y \geq 0$$
$$3° \, quadrante \rightarrow x \leq 0 \; e \; y \leq 0$$
$$4° \, quadrante \rightarrow x \geq 0 \; e \; y \leq 0$$

Nesse caso, o ponto $P(0, 2)$, localizado no sentido positivo do eixo y, estaria ao mesmo tempo no primeiro e no segundo quadrante.

Mas a maior vertente adota o fato de que os eixos coordenados não pertencem aos quadrantes e, por isso, pontos localizados nesses eixos não pertencem a nenhum quadrante. Para esse curso, usaremos essa definição.

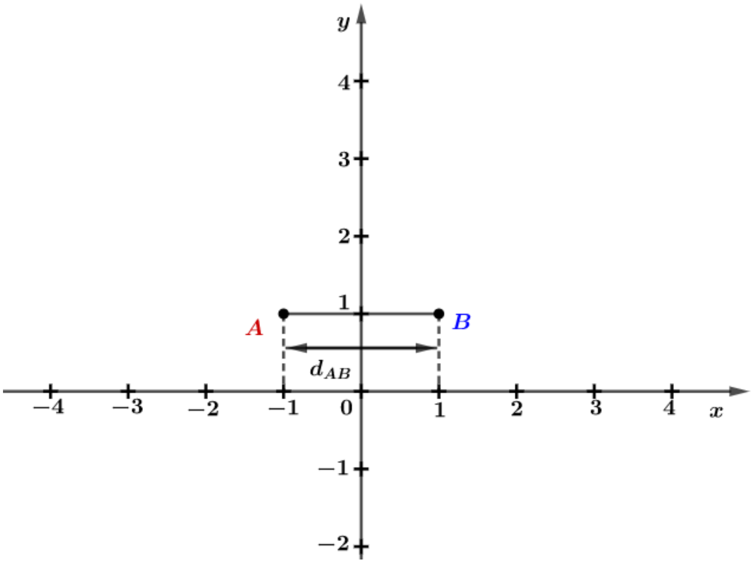
1.3. Distância entre dois pontos

Agora que entendemos o que é o plano cartesiano, podemos proceder ao cálculo da distância entre dois pontos. Vamos usar os mesmos pontos A, B, C do exemplo anterior.

$$A = (-1, 1), B = (1, 1) \text{ e } C = (1, 3)$$

Os pontos A e B possuem a mesma coordenada y. Assim, a distância entre eles é a diferença entre x_a e x_b:

$$\underbrace{d_{AB}}_{distância\ entre\ os\ pontos\ A\ e\ B} = |x_b - x_a|$$



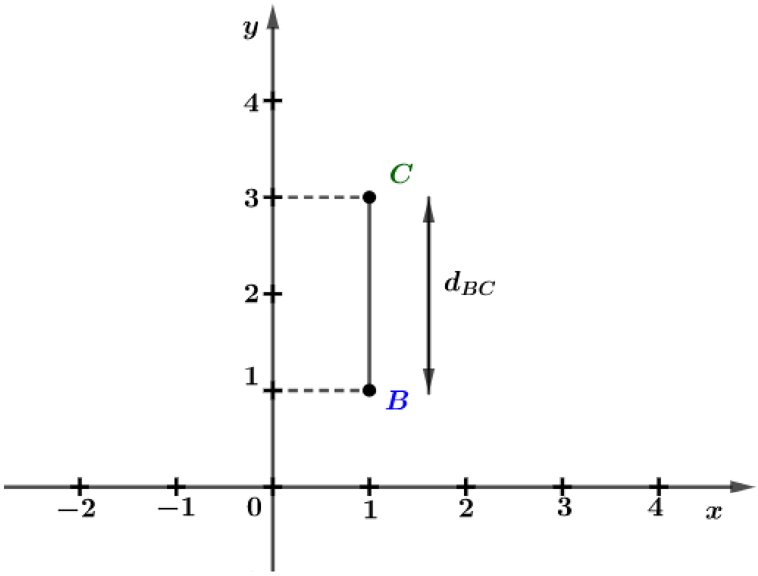
Devemos aplicar o módulo na diferença, pois a distância deve ser um número positivo.

Para $x_a = -1$ e $x_b = 1$:

$$d_{AB} = |-1 - 1| = |-2| = 2$$

Analogamente, a distância entre B e C é a diferença entre y_b e y_c:

$$d_{BC} = |y_c - y_b| = |3 - 1| = |2| = 2$$



E qual a distância entre os pontos A e C? Como esses pontos não possuem nenhuma coordenada em comum, devemos usar o teorema de Pitágoras para calcular a distância, veja o diagrama ao lado:

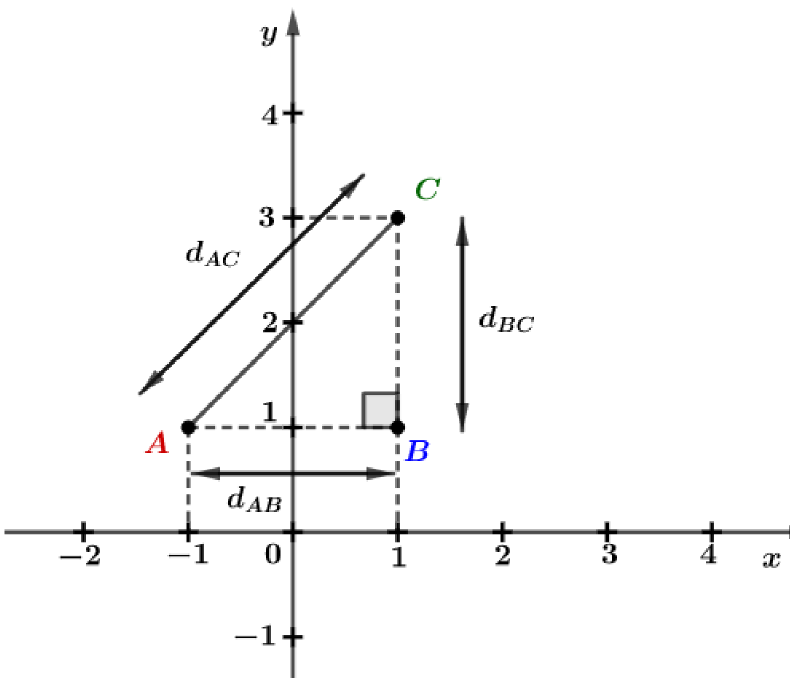
Assim, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ΔABC, obtemos

$$d_{AC}^2 = d_{BC}^2 + d_{AB}^2$$

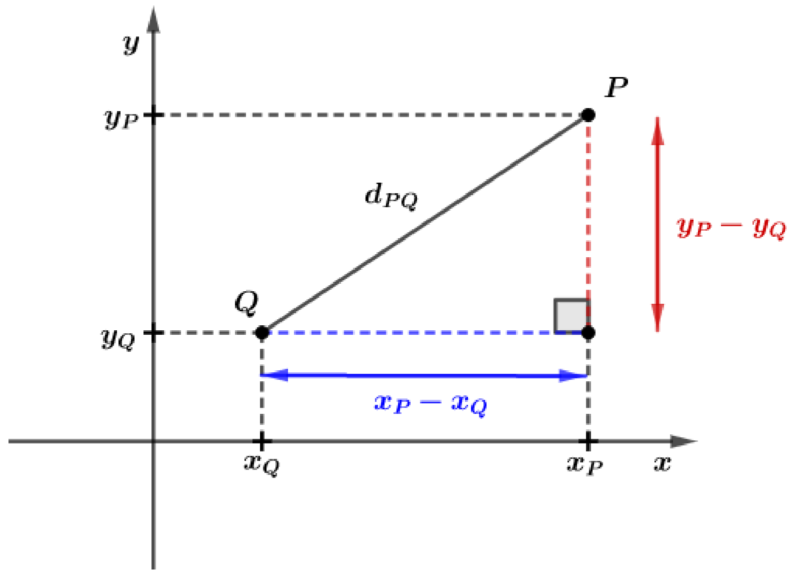
$$\Rightarrow d_{AC} = \sqrt{d_{BC}^2 + d_{AB}^2}$$

Substituindo os valores encontrados:

$$d_{AC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$



Esse foi apenas um exemplo para ilustrar como podemos calcular a distância entre dois pontos. Sendo assim, vamos generalizar o resultado. Sejam $P(x_p, y_p)$ e $Q(x_q, y_q)$ dois pontos quaisquer representados de acordo com a figura abaixo:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo ao lado, obtemos

$$d_{PQ}^2 = (x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2$$

$$\boxed{d_{PQ} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}}$$

Essa é a fórmula geral para calcular a distância entre dois pontos quaisquer no plano.

Como a ordem dos termos nas diferenças das abcissas e das ordenadas não alteram o resultado, também podemos escrever:

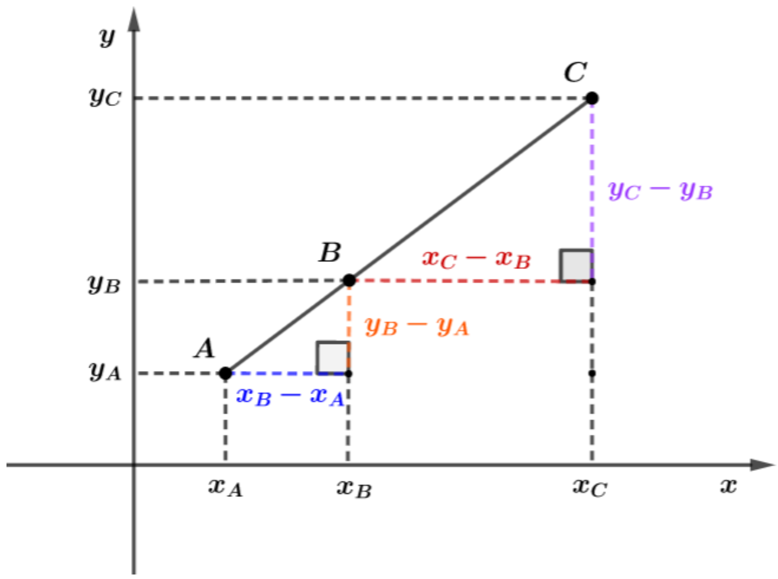
$$\boxed{d_{PQ} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Onde Δx e Δy podem ser:

$$\Delta x = x_p - x_q \; ou \; \Delta x = x_q - x_p$$
$$\Delta y = y_p - y_q \; ou \; \Delta y = y_q - y_p$$

1.4. Condição de alinhamento de pontos

Podemos usar o teorema de Tales, aprendido na aula de Geometria Plana, para encontrar um método algébrico e saber se três pontos são colineares, isto é, pertencem a uma mesma reta. Sejam três pontos A, B, C genéricos tais que esses pontos sejam colineares:



Sendo os pontos colineares, podemos aplicar o teorema de Tales e escrever:

$$\frac{y_c - y_b}{x_c - x_b} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}$$
$$\Rightarrow (y_c - y_b)(x_b - x_a) = (x_c - x_b)(y_b - y_a)$$
$$\Rightarrow y_c x_b - y_c x_a \cancel{- y_b x_b} + y_b x_a = x_c y_b - x_c y_a \cancel{- x_b y_b} + x_b y_a$$
$$\Rightarrow \boxed{x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_a y_c - x_b y_a - x_c y_b = 0}$$

Desse modo, se três pontos satisfazem a equação acima, então eles são colineares. Essa equação pode parecer difícil de ser memorizada, mas há um modo mais fácil. Vamos inserir as coordenadas dos pontos A, B, C em uma matriz e completar a última coluna com 1.

$$\begin{pmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{pmatrix}$$

Agora, calculamos o determinante dessa matriz e igualamos a zero:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \\ x_c & y_c & 1 \end{vmatrix} = 0}$$

$$x_a y_b + x_c y_a + x_b y_c - x_c y_b - x_a y_c - x_b y_a = 0$$
$$\Rightarrow x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_a y_c - x_b y_a - x_c y_b = 0$$

Essa é a equação que encontramos acima!

Portanto, para saber se **três pontos são colineares**, basta calcular o **determinante** de suas coordenadas e verificar se ele é **nulo**!

1.4.1. Método prático

Podemos também verificar a condição de alinhamento de outro modo. Vamos analisar a equação $x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_a y_c - x_b y_a - x_c y_b = 0$.

Organizando os termos, obtemos:

$$(x_a y_b - x_b y_a) + (x_b y_c - x_c y_b) + (x_c y_a - x_a y_c) = 0$$

Perceba que podemos reescrever a equação acima usando determinantes de ordem 2.

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = 0}$$

Agora, veja o bizu. Para facilitar a memorização, podemos representar essa soma de determinantes do seguinte modo:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix}$$

NÃO CONFUNDA!

$\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix}$ não é o determinante de uma matriz $4x2$, ele é apenas uma representação que usaremos para calcular a soma dos três determinantes de ordem 2. Lembre-se que só podemos calcular determinante de matrizes quadradas.

Assim, ao invés de calcularmos cada determinante, organizamos os termos em uma fileira, inserindo as coordenadas um embaixo do outro e repetindo o primeiro termo no final da sequência, e fazemos as contas do seguinte modo: multiplicamos os termos no sentido das setas, tornando o lado direito positivo e o lado esquerdo negativo, e por fim somamos os dois resultados. Veja:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} -x_b \cdot y_a & x_a \cdot y_b \\ -x_c \cdot y_b & x_b \cdot y_c \\ \underline{-x_a \cdot y_c} & \underline{x_c \cdot y_a} \\ -x_b y_a - x_c y_b - x_a y_c & x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a \end{array}$$

$$\Rightarrow -x_b y_a - x_c y_b - x_a y_c + x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a = 0$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_b y_a - x_c y_b - x_a y_c = 0}$$

Perceba que o mecanismo é o mesmo que calcular cada determinante isoladamente e somar os resultados. Mas essa representação é mais fácil de memorizar e, por isso, usaremos ela ao longo do curso. Grave esse método, pois veremos que ela será bastante útil no tópico de área de polígonos.

Vamos ver na prática como se aplica essa ferramenta. Colocamos todos os pontos um embaixo do outro e repetimos o primeiro termo no final. Considerando $A(1,2), B(2,3)$ e $C(3,4)$, vamos iniciar com o ponto A e seguir com B e C (tanto faz a ordem dos pontos, o importante é repetir o primeiro ponto e inseri-lo no final):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ & \\ & \\ & \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Agora, multiplicamos os termos no sentido das setas, lembrando que o lado direito é o lado positivo e o lado esquerdo é o lado negativo, e por fim somamos os dois resultados. Veja:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} -2 \cdot 2 & 1 \cdot 3 \\ -3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 \\ \underline{-4 \cdot 1} & \underline{3 \cdot 2} \\ -17 & 17 \end{array}$$

$$\Rightarrow -17 + 17 = 0$$

Portanto, verificamos que os pontos A, B e C são colineares!

Use as setas apenas para guiá-lo nas multiplicações, mas, com o tempo, acostume-se a fazer diretamente do seguinte modo:

$$\begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \\ x_c & y_c \\ x_a & y_a \end{vmatrix} = x_a y_b + x_b y_c + x_c y_a - x_b y_a - x_c y_b - x_a y_c$$

1.5. Razão de secção

Esse assunto possui baixa taxa de incidência na prova e já estudamos ela na aula de Geometria Plana I. O conceito é o mesmo, vamos apenas adaptá-lo à Geometria Analítica.

Dado um segmento $\overline{AB}$ de extremos $A(x_a, y_a)$ e $B(x_b, y_b)$, dizemos que $X(x_x, y_x)$ divide o segmento $\overline{AB}$ internamente na razão r quando

$$\boxed{\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} = r}$$

Ou

$$\boxed{\overline{AX} = r \cdot \overline{XB}}$$

A equação acima diz que o segmento $\overline{AX}$ é r vezes maior que o segmento $\overline{XC}$, no qual r é um número real.

Na Geometria Analítica, pelo fato de r poder assumir valores negativos, devemos considerar que os segmentos são orientados, isto é,

$$r < 0 \to \overrightarrow{AX}\ e\ \overrightarrow{XB}\ possuem\ sentidos\ opostos$$
$$r > 0 \to \overrightarrow{AX}\ e\ \overrightarrow{XB}\ possuem\ mesmo\ sentido$$

Segmentos orientados podem ser considerados como vetores. Vamos explorar o conceito de vetor na Geometria Analítica.

Os vetores $\overrightarrow{AX}$ e $\overrightarrow{XB}$ podem ser escritos como

$$\overrightarrow{AX} = \vec{X} - \vec{A}\ e\ \overrightarrow{XB} = \vec{B} - \vec{X}$$

Assim, se $\overline{AX} = r \cdot \overline{XB}$, temos

$$\vec{X} - \vec{A} = r \cdot (\vec{B} - \vec{X})$$

Isolando $\vec{X}$:

$$\vec{X} + r \cdot \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{B} \Rightarrow \vec{X} = \left(\frac{1}{1+r}\right)\vec{A} + \left(\frac{r}{1+r}\right)\vec{B}$$

Portanto, igualando-se as componentes dos vetores, obtemos:

$$\boxed{x_x = \left(\frac{1}{1+r}\right)x_a + \left(\frac{r}{1+r}\right)x_b}$$
$$\boxed{y_x = \left(\frac{1}{1+r}\right)y_a + \left(\frac{r}{1+r}\right)y_b}$$

Com essas fórmulas, podemos calcular as coordenadas de um ponto X interno ao segmento $\overline{AB}$ cuja razão de secção é r.

1.6. Ponto médio

Sejam A e B dois pontos localizados no plano cartesiano, se M é o **ponto médio** entre A e B, então

$$\overline{AM} = \overline{MB} \Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \underbrace{1}_{r}$$

Como vimos no tópico anterior, podemos substituir $r = 1$ na fórmula para obter as coordenadas do ponto médio M:

$$x_m = \left(\frac{1}{1+r}\right)x_a + \left(\frac{r}{1+r}\right)x_b \text{ e } y_m = \left(\frac{1}{1+r}\right)y_a + \left(\frac{r}{1+r}\right)y_b$$
$$r = 1 \Rightarrow x_m = \left(\frac{1}{1+1}\right)x_a + \left(\frac{1}{1+1}\right)x_b \text{ e } y_m = \left(\frac{1}{1+1}\right)y_a + \left(\frac{1}{1+1}\right)y_b$$
$$\boxed{x_m = \frac{x_a + x_b}{2}\ e\ y_b = \frac{y_a + y_b}{2}}$$

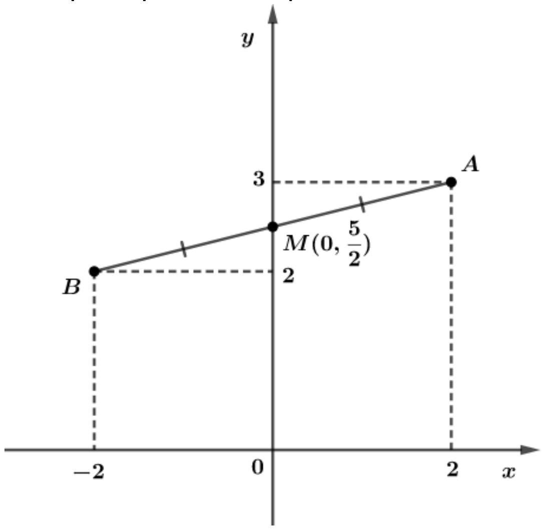
Observando a fórmula acima, podemos ver que para encontrar o ponto médio entre dois pontos, basta calcular a média aritmética entre as abcissas e as ordenadas dos pontos envolvidos.

Vejamos um exemplo:

Vamos calcular o ponto médio entre $A(2,3)$ e $B(-2,2)$. Aplicando diretamente a definição de ponto médio, temos:

$$x_m = \frac{x_a + x_b}{2} = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$
$$y_m = \frac{y_a + y_b}{2} = \frac{3 + 2}{2} = \frac{5}{2}$$

Graficamente, podemos ver que o ponto M equidista das extremidades A e B.



1.7. Baricentro de um triângulo

Também podemos calcular as coordenadas do baricentro de um triângulo diretamente. Sejam três pontos não colineares A, B, C, se G é o baricentro do triângulo ΔABC, então:

$$\boxed{x_g = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} \; e \; y_g = \frac{y_a + y_b + y_c}{3}}$$

Note que as coordenadas do baricentro são a média aritmética entre as respectivas coordenadas dos pontos envolvidos! Como são três pontos, dividimos por três!

Vejamos um exemplo de aplicação.

1) Calcule as coordenadas do baricentro do triângulo ABC, sabendo que $A = (1, 3), B = (-2, 4)$ e $C = (4, 6)$.

Resolução:

Como temos todas as coordenadas dos pontos do triângulo, podemos aplicar diretamente a fórmula para encontrar as coordenadas do seu baricentro. Desse modo, temos:

$$x_g = \frac{x_a + x_b + x_c}{3} = \frac{1 + (-2) + 4}{3} = 1$$
$$y_g = \frac{y_a + y_b + y_c}{3} = \frac{3 + 4 + 6}{3} = \frac{13}{3}$$

Portanto, as coordenadas do baricentro são

$$G = \left(1, \frac{13}{3}\right)$$

2. Equação da Reta

2.1. Formas da equação da reta

Podemos deduzir a equação da reta usando o método do determinante para pontos colineares. Sejam A e B pontos distintos. Esses pontos determinam uma reta, sendo assim, se $P(x, y)$ é um ponto dessa reta, temos que o determinante da matriz de suas coordenadas deve ser nulo:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_a & y_a & 1 \\ x_b & y_b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$xy_a + x_b y + x_a y_b - y_a x_b - x y_b - y x_a = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{(y_a - y_b)x + (x_b - x_a)y + (x_a y_b - y_a x_b) = 0}\ eq\ (I)$$

Fazendo $a = y_a - y_b, b = x_b - x_a$ e $c = x_a y_b - y_a x_b$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$, encontramos a **equação geral da reta:**

$$\boxed{ax + by + c = 0}\ \textit{equação geral da reta}$$

Note que ela é uma equação linear. Logo, qualquer par ordenado (x, y) que torna verdadeira a equação da reta acima é um ponto que pertence à reta.

Assim, se tivermos dois pontos e quisermos descobrir a equação da reta que passa por eles, basta usar o método do determinante e igualá-lo a zero. Vejamos um exemplo.

---

1) Encontre a equação da reta que passa por $A(2, 4)$ e $B(1, 3)$.

Resolução:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4x + y + 6 - 4 - 3x - 2y = 0$$

$$\therefore x - y + 2 = 0$$

Além dessa forma, se $b = x_b - x_a \neq 0$, podemos dividir a equação (I) por $(x_b - x_a)$ e isolar y:

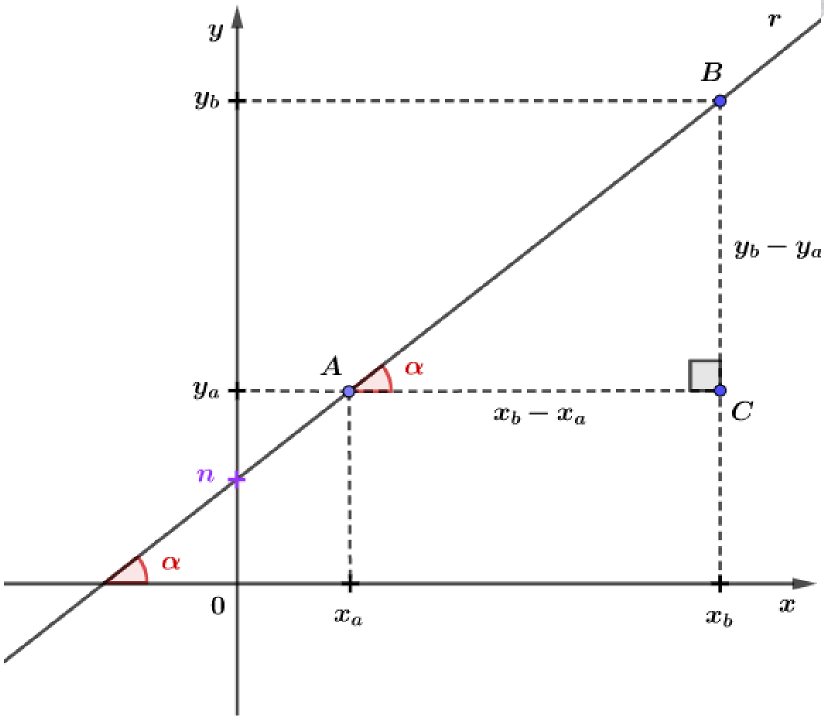
$$\frac{(y_a - y_b)}{(x_b - x_a)}x + \frac{(x_b - x_a)}{(x_b - x_a)}y + \frac{(x_a y_b - y_a x_b)}{(x_b - x_a)} = 0 \Rightarrow y = -\frac{(y_a - y_b)}{(x_b - x_a)}x - \frac{(x_a y_b - y_a x_b)}{(x_b - x_a)}$$

$$y = \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)x + \left(\frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_b - x_a}\right)$$

Fazendo $m = \left(\frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}\right)$ e $n = \frac{x_b y_a - x_a y_b}{x_b - x_a}$, obtemos a **equação reduzida da reta:**

$$\boxed{y = mx + n}\ \textit{equação reduzida da reta}$$

Denominamos m como o coeficiente angular da reta e n como o coeficiente linear. O motivo desses coeficientes receberem esses nomes não é por acaso. Vamos desenhar uma reta genérica r e analisar os pontos $A, B \in r$.



Podemos construir o triângulo retângulo ABC com o prolongamento dos segmentos que formam os pontos A e B. A reta r forma um ângulo α com o eixo das abcissas, pois $AC//Ox$ e $B\hat{A}C = \alpha$. Como podemos ver na figura ao lado, $y_b - y_a$ é o cateto oposto a α e $x_b - x_a$ é o cateto adjacente. Assim, podemos calcular a tangente de α:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = m}$$

Perceba que $tg\alpha$ é numericamente igual ao coeficiente m definido na equação reduzida da reta. Como α é o ângulo que a reta forma com o eixo horizontal, $\boldsymbol{m}$ recebeu o nome de **coeficiente angular da reta**.

Além disso, substituindo $x = 0$ na equação da reta reduzida, obtemos $y = n$, ou seja, $\boldsymbol{n}$ é o ponto em que a reta corta o eixo y e, por isso, é chamado de **coeficiente linear da reta**.

Desse modo, conhecendo-se o coeficiente angular da reta e um ponto $P(x_0, y_0)$ pertencente à reta, podemos deduzir sua equação da seguinte forma:

$$tg\alpha = m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow mx - mx_0 = y - y_0 \Rightarrow y = mx + y_0 - mx_0$$

Vamos ver na prática como aplicamos esse método.

---

2) Encontre a equação da reta cujo coeficiente angular é 2 e passa pelo ponto $P(1, 3)$.

Resolução:

O enunciado diz que $m = 2\ (coeficiente\ angular)$, desse modo:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow 2 = \frac{y - 3}{x - 1} \Rightarrow 2x - 2 = y - 3 \Rightarrow y = 2x + 1$$

A equação geral e a equação reduzida não são as únicas formas da reta, mas elas são as mais cobradas no vestibular. Além dessas, temos a **equação segmentária da reta**. Tomando-se a equação geral da reta e supondo $c \neq 0$, podemos deduzi-la:

$$ax + by + c = 0 \Rightarrow ax + by = -c$$

Dividindo a equação por $-c$, obtemos

$$\left(-\frac{a}{c}\right)x + \left(-\frac{b}{c}\right)y = 1$$

$$\frac{x}{\left(-\frac{c}{a}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{c}{b}\right)} = 1$$

Fazendo $p = -c/a$ e $q = -c/b$, obtemos a equação segmentária da reta.

$$\boxed{\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1}\ equação\ segmentária\ da\ reta$$

Por fim, temos a **forma paramétrica da reta.** As equações paramétricas dão as coordenadas (x, y) em função de uma terceira variável t chamada de parâmetro.

$$\boxed{\begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}} \text{ equações paramétricas}$$

Vejamos um exemplo:

3) Obtenha a equação reduzida da reta dada por:

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = -t + 1 \end{cases}$$

Resolução:

Para resolvermos esse problema, devemos isolar a variável t em uma das equações e substituí-la na outra. Da segunda equação, temos:

$$y = -t + 1 \Rightarrow t = 1 - y$$

Substituindo na primeira:

$$x = 2(1 - y) + 3 \Rightarrow x = 5 - 2y \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}$$

Essas são as principais formas que podem ser cobradas na prova. Veremos adiante que a forma reduzida resolve a maioria dos problemas dos vestibulares.

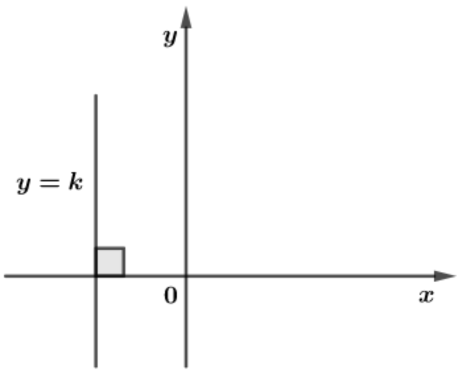
TOME NOTA!

Vamos analisar a equação reduzida da reta.

$$y = mx + n$$

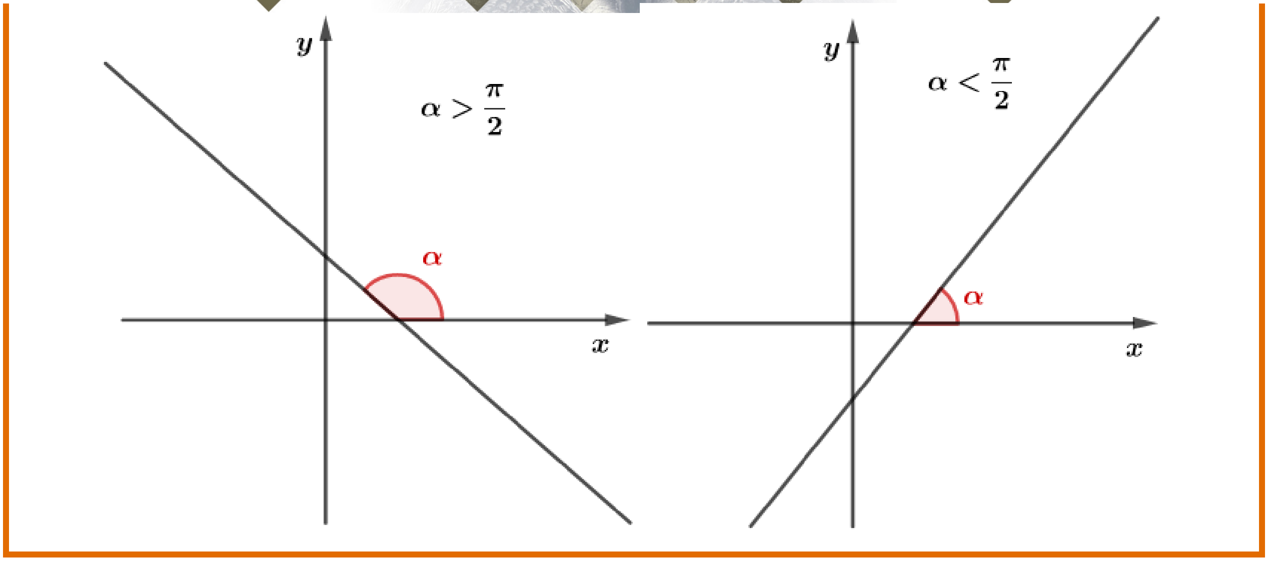
Note que nessa forma, não estão incluídas as retas que são perpendiculares ao eixo x, pois não existe a tangente de 90°. Nesse caso, essas retas são da seguinte forma:

$$x = k, k \in \mathbb{R}$$



Outro ponto a se notar é que se

$$m < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$
$$m \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$$



2.2. Esboço do gráfico da reta

Agora que aprendemos as formas da equação da reta, vamos ver como fazemos o esboço do seu gráfico. Ao longo do curso, estudaremos o diagrama de todas as equações de Geometria Analítica que podem ser cobradas na prova. Veremos que saber como construir o diagrama das equações pode nos ajudar a resolver diversas questões militares.

Para esboçar o esquema de uma equação de reta, precisamos conhecer as coordenadas de pelo menos dois pontos da reta e traçar uma reta que passa por eles. O modo mais simples é encontrar as coordenadas dos pontos $(x, 0)$ e $(0, y)$, ou seja, calcular os pontos em que a reta cruza o eixo x e o eixo y. Vejamos um exemplo.

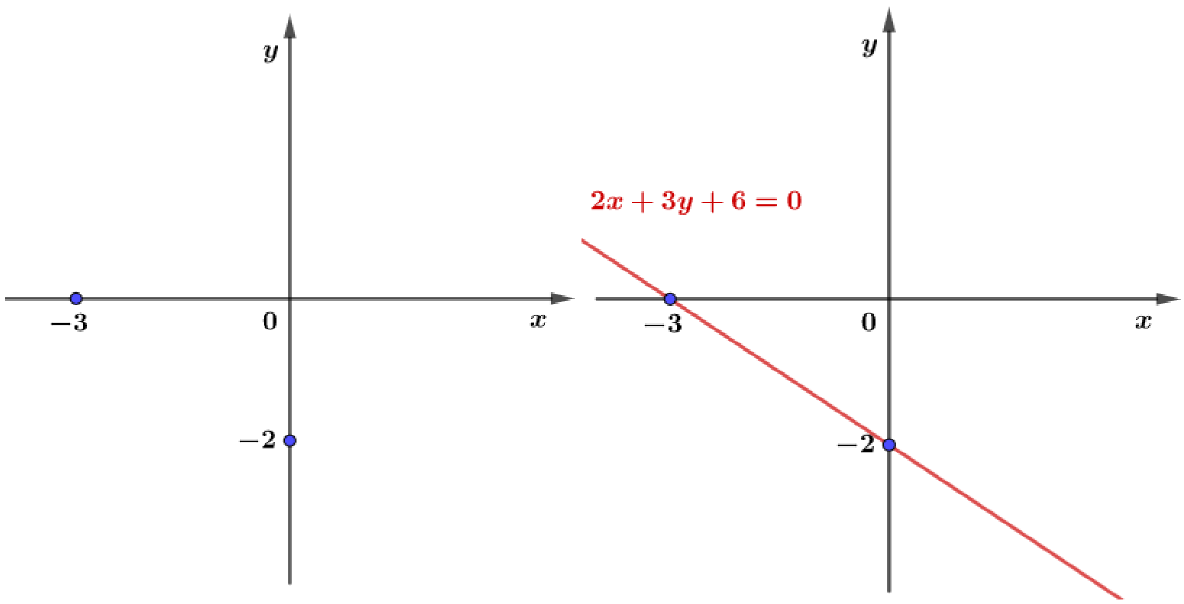
Vamos esboçar o gráfico da equação $2x + 3y + 6 = 0$, para isso, substituímos $y = 0$ para encontrar o ponto em que a reta cruza o eixo x:

$$y = 0 \Rightarrow 2x + 3 \cdot 0 + 6 = 0 \Rightarrow 2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$$

Agora, substituímos $x = 0$ para calcular o ponto em que a reta cruza o eixo y:

$$x = 0 \Rightarrow 2 \cdot 0 + 3y + 6 = 0 \Rightarrow 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -2$$

Assim, representamos os dois pontos encontrados no plano cartesiano e traçamos uma reta que passa por eles:



Esse é o esboço da equação $2x + 3y + 6$. Note que ela é a equação geral da reta, poderíamos ter isolado o y para analisar os coeficientes angular e linear da equação:

$$2x + 3y + 6 = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 2$$

Como o coeficiente angular da reta é negativo $(m = -2/3)$, a reta possui inclinação maior que $90°$ e como o coeficiente linear é -2, ele cruza o eixo y nesse ponto.

Vamos entender melhor o comportamento da equação da reta ao longo do plano cartesiano.

Seja a reta r tal que

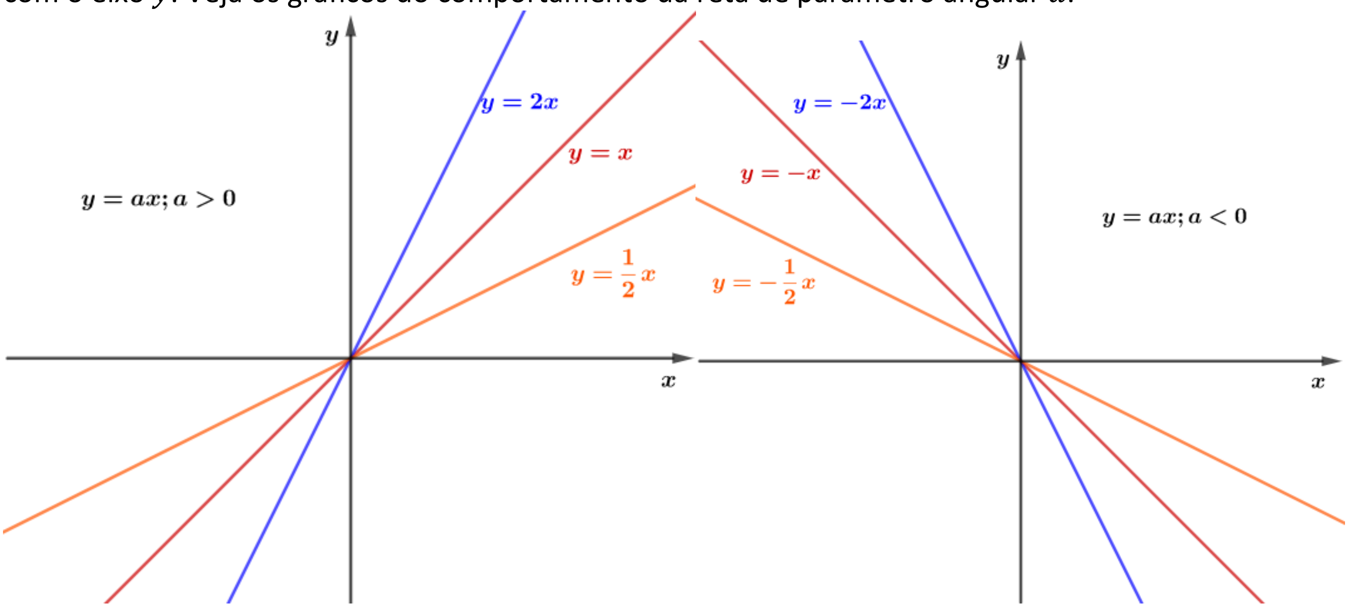
$$r: y = ax + b$$

a é o coeficiente angular da reta e b é o coeficiente linear da reta.

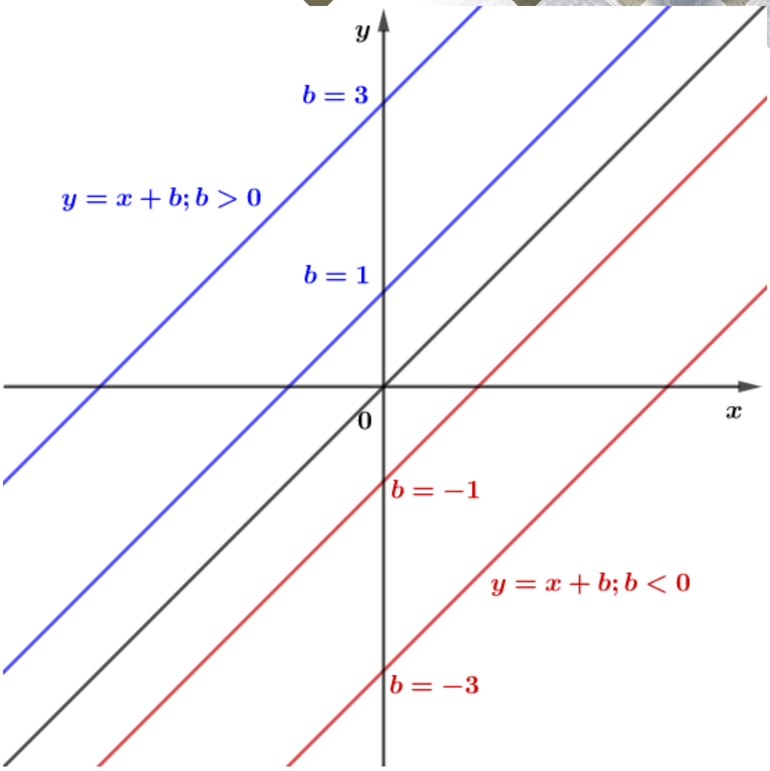
Inicialmente, vamos analisar a influência do coeficiente angular na reta fazendo $b = 0$.

$$y = ax$$

Nessa equação, como a é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo das abcissas, a influência do parâmetro a é rotacionar a reta ao longo do ponto que ele cruza o eixo y (nesse caso, a origem). Considerando que a seja um parâmetro real, se $a > 0$, a reta fica restrita ao primeiro e terceiro quadrante e quanto maior o valor de a, maior será sua inclinação em relação ao eixo x; se $a < 0$, a reta fica restrita ao segundo e quarto quadrante e quanto maior o módulo de a, maior será sua proximidade com o eixo y. Veja os gráficos do comportamento da reta de parâmetro angular a:



Agora, vamos analisar a influência do coeficiente linear na reta. Esse coeficiente translada a reta ao longo do eixo y. Considerando que b seja parâmetro e fixando $a = 1$, vamos fazer as comparações em relação à reta que passa pela origem e possui coeficiente linear nulo, isto é, $y = x$. Se $b > 0$, a reta translada no sentido positivo do eixo y e se $b < 0$, ela translada no sentido negativo do mesmo eixo. Veja o esquema abaixo:



Perceba que quanto maior o módulo de b, mais distante ele fica da origem.

2.3. Intersecção entre retas

Sabemos que duas retas não paralelas e nem coincidentes se interceptam uma única vez. Essas retas são ditas concorrentes. Para encontrar o ponto de intersecção das retas, devemos resolver um sistema linear com a equação das retas envolvidas. Vamos ver um exemplo.

Sejam as retas $r: 2x + 3y + 1 = 0$ e $s: x + 3y + 5 = 0$, o ponto comum às retas é a solução do sistema linear formado por essas retas:

$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases}$$

Como estudamos na aula de Sistemas Lineares, podemos resolver esse sistema de diversos modos. Vamos subtrair a primeira equação da segunda:

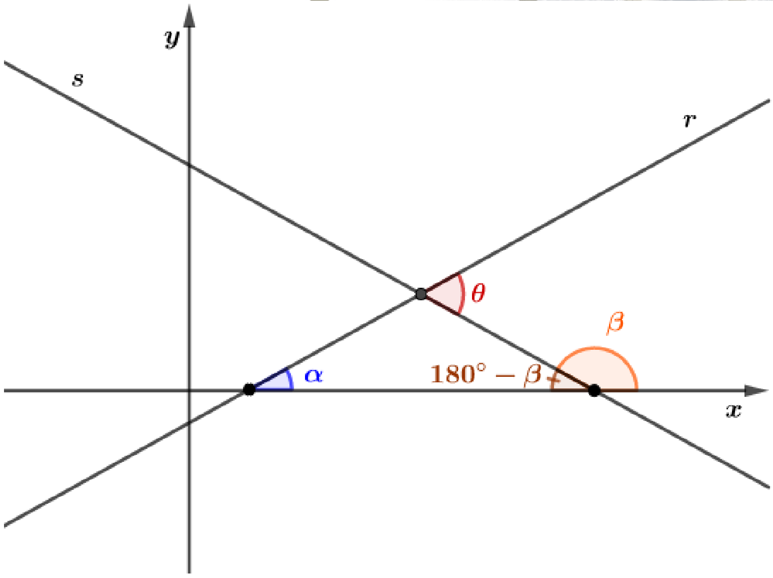
$$\begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ x + 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \{x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Substituindo o valor encontrado em qualquer uma das equações, obtemos $y = -3$.

Portanto, $(4, -3)$ é o ponto onde as retas r e s se interceptam.

2.5. Ângulo entre retas

Nesse tópico, vamos encontrar uma fórmula para calcular o menor ângulo formado entre duas retas concorrentes. Sejam as retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$ representadas de acordo com a figura abaixo:



α e β são os ângulos que as retas r e s formam com o eixo x, respectivamente. Desse modo, temos $m_r = tg\alpha$ e $m_s = tg\beta$.

Como podemos ver no gráfico ao lado, podemos escrever a seguinte relação angular:

$$\theta = \alpha + (180° - \beta)$$

Aplicando a tangente nos dois lados da equação, obtemos:

$$tg\theta = tg(\alpha + (180° - \beta))$$

$$\Rightarrow tg\theta = tg(180° + (\alpha - \beta))$$

Lembrando que $tg(A \pm B) = \frac{tgA \pm tgB}{1 \mp tgA \cdot tgB}$, temos:

$$\Rightarrow tg\theta = \frac{\overbrace{tg(180°)}^{0} + tg(\alpha - \beta)}{1 - \underbrace{tg(180°)}_{0} tg(\alpha - \beta)} = tg(\alpha - \beta) \Rightarrow tg\theta = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

Queremos o menor ângulo formado entre as retas, logo θ deve ser ângulo agudo e, consequentemente, $tg\theta > 0$. Assim, devemos aplicar o módulo na expressão encontrada:

$$tg\theta = \left|\frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}\right|$$

Portanto:

$$\boxed{tg\theta = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r \cdot m_s}\right|}$$

Essa é a fórmula para calcular o menor ângulo entre duas retas concorrentes.

2.5.1. Condição de perpendicularidade

Se as retas forem perpendiculares, temos $\theta = 90°$ e $tg(90°) \to \infty$. A única maneira disso ocorrer é o denominador da expressão encontrada ser nulo, desse modo:

$$r \perp s \Rightarrow 1 + m_r \cdot m_s = 0 \Rightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Assim, duas retas são perpendiculares se, e somente se,

$$\boxed{m_r \cdot m_s = -1}\ condição\ de\ perpendicularidade$$

Ou seja, se a reta s é perpendicular à reta r, então seu coeficiente angular é

$$\boxed{m_s = -\frac{1}{m_r}}$$

2.5.2. Condição de paralelismo

Sejam as retas $r: y = m_r x + n_r$ e $s: y = m_s x + n_s$, podemos afirmar que r e s são paralelas se, e somente se,

$$\boxed{m_r = m_s}\ condição\ de\ paralelismo$$

Isto é, a condição de paralelismo entre retas é ambas possuírem o mesmo coeficiente angular.

Exemplo:

$$r: y = 2x + 3$$
$$s: y = 2x + 5$$

r e s são paralelas entre si, pois $m_r = 2 = m_s$.

Se $n_r = n_s$, além de paralelas, as retas são coincidentes.

2.6. Posição relativa entre duas retas

Podemos analisar a posição relativa entre duas retas através da equação geral da reta. Nesse caso, devemos verificar a relação entre seus coeficientes. Sejam $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$, se

- $r \cap s = \emptyset$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow retas\ paralelas$$

- $r = s$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow retas\ coincidentes$$

- $r \cap s = P$

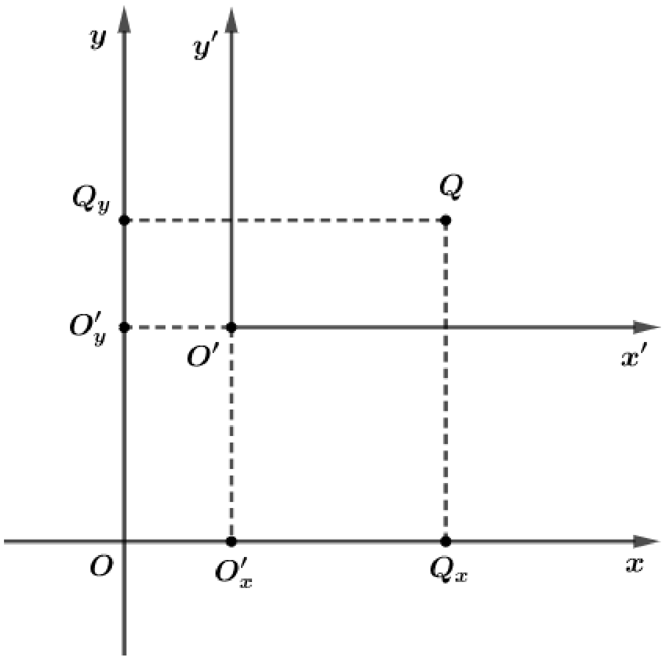
$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \Rightarrow retas\ concorrentes$$

2.7. Distância de ponto à reta

Dado um ponto $P(x_0, y_0)$ e uma reta $r: ax + by + c = 0$ tal que $P \notin r$, podemos deduzir uma fórmula para calcular a distância entre o ponto e a reta dada.

Preliminarmente, vamos entender como transladar o sistema cartesiano, isso facilitará as contas na hora de deduzir a fórmula da distância.

Tomando-se um ponto Q e um par de eixos auxiliares $x'O'y'$ tal que a origem desses eixos seja o ponto $O'(x_0, y_0)$, vamos encontrar uma relação entre o novo sistema $x'O'y'$ e o sistema original xOy:



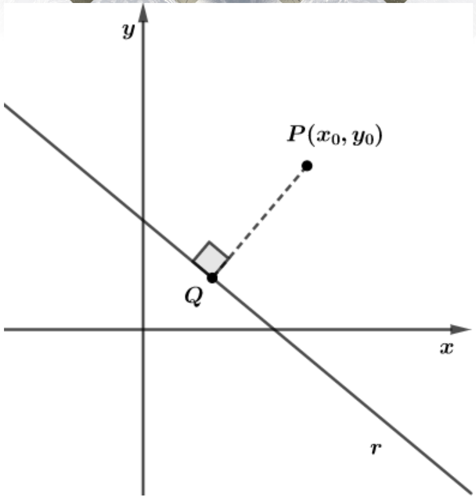
Observando a figura ao lado, vemos que

$$\overline{OQ_x} = \overline{OO'_x} + \overline{O'_xQ_x} \Rightarrow x = x_0 + x'$$
$$\overline{OQ_y} = \overline{OO'_y} + \overline{O'_yQ_y} \Rightarrow y = y_0 + y'$$

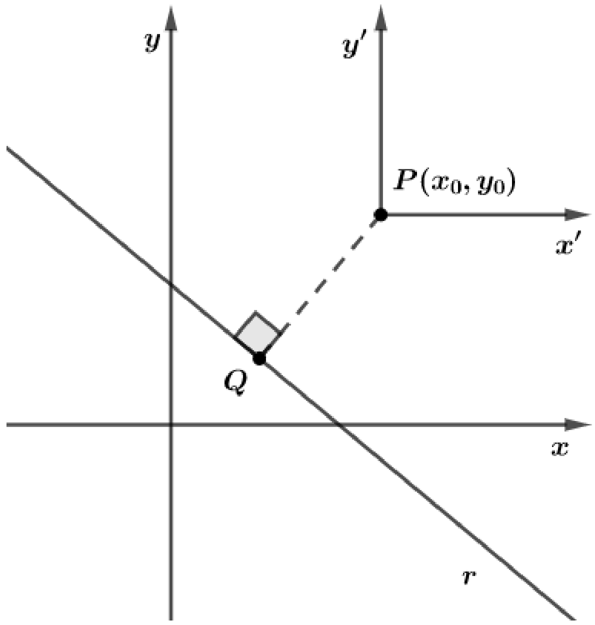
Assim, transladando o sistema xOy para o novo sistema $x'O'y'$, as novas coordenadas são dadas por

$$x' = x - x_0$$
$$y' = y - y_0$$

Agora, vamos proceder à dedução da fórmula. Sejam $r: ax + by + c = 0$ e $P(x_0, y_0)$ tal que $P \notin r$ representados de acordo com a figura abaixo.



Q é um ponto da reta r, para calcular a distância do ponto P à reta r, devemos calcular a distância de P a Q. Para simplificar os cálculos, vamos fazer uma translação do sistema tornando o ponto $P(x_0, y_0)$ a origem do novo sistema:



Agora, fazendo a transformação de coordenadas na reta r, obtemos:

$$r: a(x_0 + x') + b(y_0 + y') + c = 0$$

Isolando y' para obter a equação reduzida:

$$ax_0 + ax' + by_0 + by' + c = 0$$
$$\Rightarrow by' + ax' + (ax_0 + by_0 + c) = 0$$
$$\Rightarrow \boxed{r: y' = -\left(\frac{a}{b}\right)x' - \left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right)}$$

Assim, encontramos $m_r = -a/b$. Seja s a reta perpendicular à r, desse modo:

$$m_s \cdot m_r = -1 \Rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = \frac{b}{a}$$

Como em relação ao novo sistema, a reta s passa pela origem, temos:

$$s: y' = m_s x'$$
$$\Rightarrow \boxed{s: y' = \left(\frac{b}{a}\right)x'}$$

Fazendo a intersecção da reta r com a reta s, obtemos o ponto Q:

$$r \cap s \Rightarrow = -\left(\frac{a}{b}\right)x' - \left(\frac{ax_0 + by_0 + c}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)x'$$

Resolvendo a equação, encontramos

$$x' = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)a}{a^2 + b^2}$$

Substituindo x' na equação de s, encontramos

$$y' = \frac{-(ax_0 + by_0 + c)b}{a^2 + b^2}$$

Logo,

$$\boxed{Q = \left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)a}{a^2 + b^2}, \frac{-(ax_0 + by_0 + c)b}{a^2 + b^2}\right)}$$

Lembrando que a coordenada de Q encontrada é em relação ao novo sistema de coordenadas (ponto P como origem), temos que a distância entre P e Q é dada por:

$$d_{P,Q} = \sqrt{\left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)a}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left(\frac{-(ax_0 + by_0 + c)b}{a^2 + b^2}\right)^2}$$

$$d_{P,Q} = \sqrt{\frac{(ax_0 + by_0 + c)^2\cancel{(a^2 + b^2)}}{(a^2 + b^2)^{\cancel{2}}}}$$

$$\Rightarrow d_{P,Q} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Portanto, a distância do ponto P a r é dada pela seguinte expressão:

$$\boxed{d_{P,r} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Note que tomando o ponto P como a origem, temos:

$$d_{P,r} = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Qual a distância entre duas retas paralelas?

Para calcular a distância entre duas retas paralelas, basta tomar um ponto qualquer pertencente a uma das retas e aplicar diretamente a fórmula da distância de ponto à reta.

Sejam as retas $r: ax + by + c_r = 0$ e $s: ax + by + c_s = 0$. Se $P(x_0, y_0) \in r$, temos:

$$ax_0 + by_0 + c_r = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c_r$$

Usando a fórmula da distância de P à s, obtemos:

$$d_{P,s} = \left|\frac{ax_0 + by_0 + c_s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Substituindo $ax_0 + by_0 = -c_r$ na equação acima, obtemos a expressão para a distância de duas retas paralelas:

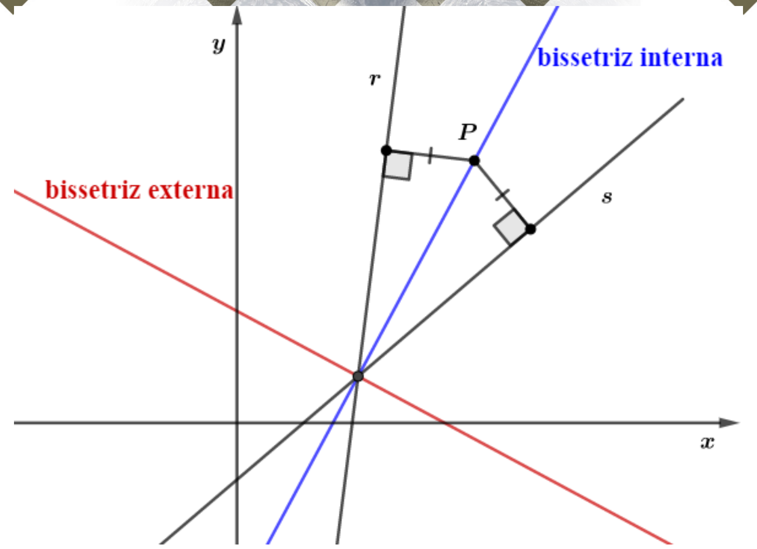
$$\boxed{d_{P,s} = \left|\frac{c_s - c_r}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|}$$

Note que se $c_s = c_r$, a distância é nula, o que confirma que as retas são coincidentes nesse caso.

2.8. Retas bissetrizes

Vimos na Geometria Plana que a bissetriz é a reta que divide um ângulo em duas partes iguais. Desse modo, duas retas concorrentes determinam duas bissetrizes, uma interna e outra externa. Podemos entender a bissetriz como o lugar geométrico dos pontos que equidistam das retas concorrentes que a formam. Tendo isso em mente, vamos aprender a determinar as equações das retas bissetrizes de duas retas concorrentes.

Sejam as retas concorrentes $r: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ e $s: a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Tomando-se um ponto $P(x, y)$ qualquer pertencente à reta bissetriz de r e s, temos:



$$d_{P,r} = d_{P,s}$$

$$\left|\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}\right| = \left|\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}\right|$$

Resolvendo essa equação, obtemos duas equações (uma é a bissetriz interna e a outra é a bissetriz externa):

$$\boxed{\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}}\ \textit{Equação das retas bissetrizes}$$

Vejamos um exemplo.

1) Determine as equações das retas bissetrizes às retas $r: x + y + 1 = 0$ e $s: 2x + 3y + 6 = 0$.

Resolução:

Vamos aplicar diretamente a fórmula das bissetrizes:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

Substituindo os coeficientes das retas r e s, obtemos:

$$\frac{x + y + 1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \pm\left(\frac{2x + 3y + 6}{\sqrt{2^2 + 3^2}}\right)$$

$$\sqrt{13}(x + y + 1) = \pm\sqrt{2}(2x + 3y + 6)$$

Logo, as equações das bissetrizes são dadas por t_1 e t_2:

$$\Rightarrow \sqrt{13}(x + y + 1) = \sqrt{2}(2x + 3y + 6)$$

$$\boxed{t_1: \left(\sqrt{13} - 2\sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{13} - 3\sqrt{2}\right) + \sqrt{13} - 6\sqrt{2} = 0}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}(x + y + 1) = -\sqrt{2}(2x + 3y + 6)$$

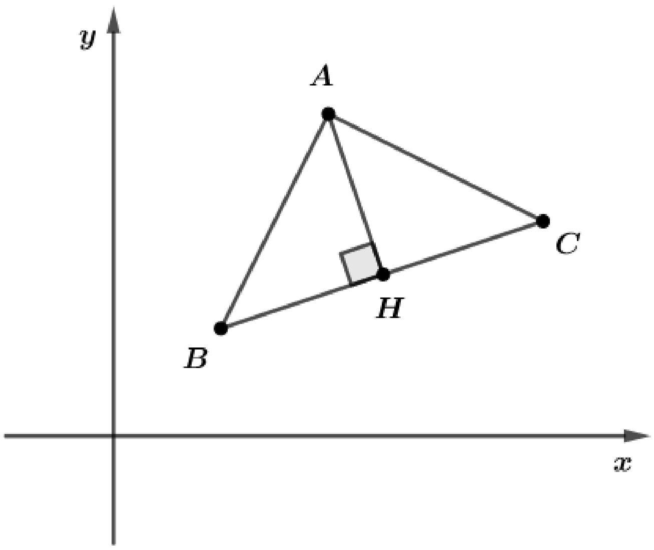
$$\boxed{t_2: \left(\sqrt{13} + 2\sqrt{2}\right)x + \left(\sqrt{13} + 3\sqrt{2}\right) + \sqrt{13} + 6\sqrt{2} = 0}$$

2.9. Área de triângulos

Vimos no tópico de condição de alinhamento de pontos que quando o determinante das coordenadas de três pontos for nulo, esses pontos estão alinhados. Mas o que acontece quando o determinante for não nulo? Nesse caso, podemos afirmar que esses pontos não estão alinhados e, portanto, esses pontos formam um triângulo. Além disso, a metade do módulo do determinante resultante é numericamente igual à área do triângulo formado por esses pontos.

Podemos demonstrar essa propriedade usando Geometria Plana.

Sejam três pontos $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ e $C(x_3, y_3)$ não colineares representados na figura abaixo:



Da Geometria Plana, sabemos que a área do triângulo é dada por

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AH \cdot BC)$$

O lado BC pode ser calculado usando a fórmula da distância entre pontos:

$$d_{BC} = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$

A altura AH pode ser calculada pela fórmula de distância de ponto à reta que contém B e C. Vamos encontrar a equação dessa reta pelo método do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow xy_2 + x_3y + x_2y_3 - x_3y_2 - xy_3 - x_2y = 0$$

$$\Rightarrow (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y + x_2y_3 - x_3y_2 = 0$$

Agora, vamos calcular a distância do ponto A à reta que contém B e C:

$$AH = \left|\frac{(y_2 - y_3)x_1 + (x_3 - x_2)y_1 + x_2y_3 - x_3y_2}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}\right| = \left|\frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}\right|$$

Fazendo $D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$, temos

$$\Rightarrow AH = \left|\frac{D_{ABC}}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}\right| = \frac{|D_{ABC}|}{\sqrt{(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2}}$$

Substituindo os valores encontrados na equação da área do triângulo, obtemos:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left(\frac{|D_{ABC}|}{\cancel{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}} \cdot \cancel{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}\right)$$

Portanto, a área do triângulo formado por esses pontos é

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|D_{ABC}|}$$

Interessante não? Esse é um método para calcular a área de um triângulo conhecendo-se as coordenadas dos três vértices que a formam. Além desse método, vimos no início da aula que podemos calcular D_{ABC} do seguinte modo:

$$D_{ABC} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Representando essa soma de outro modo, temos

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

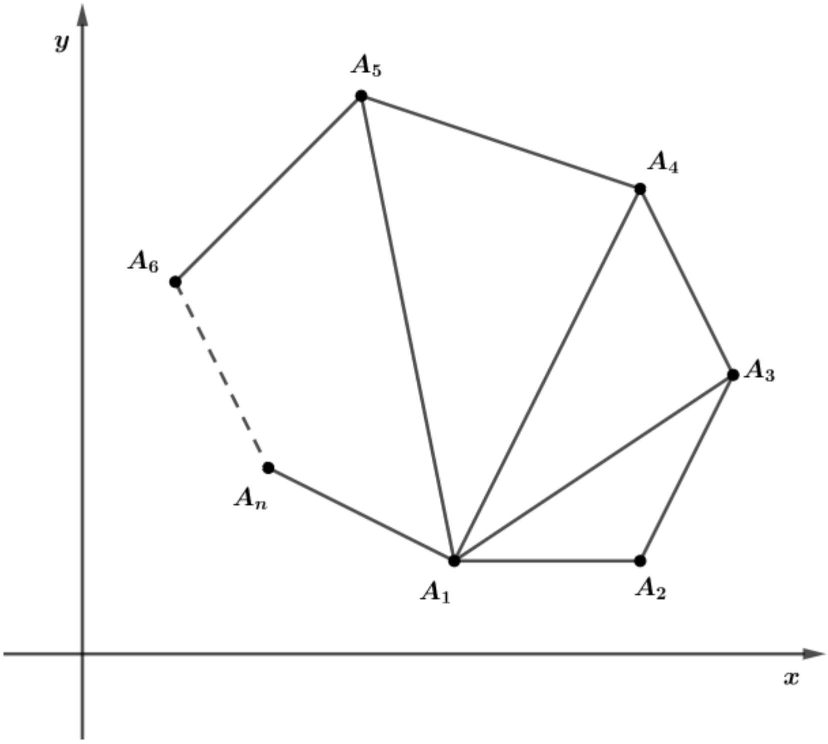
Portanto:

$$\boxed{S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{matrix}\right\|}$$

2.10. Área de polígonos

Para finalizar o capítulo de retas, vamos aprender a calcular área de polígonos.

Seja o polígono formado pelos pontos $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), \dots, A_n(x_n, y_n)$.



O polígono acima pode ser dividido em diversos triângulos internos. Usando o método do determinante para calcular a área de cada triângulo e somando os resultados, podemos provar que a área do polígono é dada por

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_5 & y_5 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|}$$

Aqui também podemos usar a outra representação, lembrando que devemos repetir o primeiro termo na última linha:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|}$$

Perceba que ao usar essa fórmula para calcular a área do polígono, devemos respeitar a ordem dos pontos. Escolhemos um ponto como ponto de partida e seguimos a sequência no sentido horário ou no sentido anti-horário. Seria como se estivéssemos desenhando o polígono e, por isso, finalizamos a sequência com o primeiro termo (fechando a figura). Partindo de A_1, temos:

$$Sentido\ anti-horário \rightarrow A_1A_2A_3 \dots A_nA_1$$
$$Sentido\ horário \rightarrow A_1A_nA_{n-1} \dots A_2A_1$$

Essa fórmula é válida para qualquer polígono.

Vamos ver na prática como usamos esse método.

Veja o exemplo abaixo.

1) Calcule a área do polígono $ABCDE$, sabendo que $A(1, 1), B(3, 2), C(4, 5), D(1, 6)$ e $E(0, 2)$.

Resolução:

Podemos resolver essa questão de dois modos:

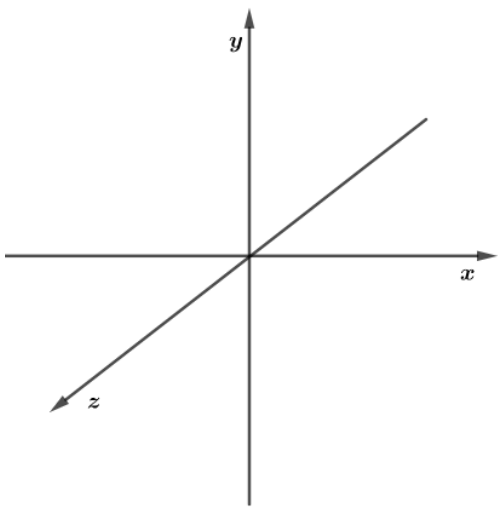
I) Podemos desenhar a figura representada pelos pontos e dividir a figura obtida em figuras geométricas conhecidas, e calculamos a área de cada figura e somamos os resultados.
II) Podemos usar o método do determinante e calcular diretamente a área.
Vamos usar o método mais simples, do determinante.
O primeiro passo é escolher um ponto para iniciar a sequência, vamos escolher o ponto A.
Agora, escolhemos o sentido em que listaremos os pontos, vamos seguir a sequência $ABCDEA$.
Desse modo, a área do polígono $ABCDE$ é dada por

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 1 & 6 \\ 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|2 + 15 + 24 + 2 + 0 - 3 - 8 - 5 - 0 - 2| = \frac{1}{2}|43 - 18| = \frac{25}{2}$$

A maioria das questões de Geometria Analítica de provas militares cobrarão questões envolvendo o plano cartesiano, isto é, no sistema cartesiano bidimensional (apenas as variáveis x e y). Mas pode ser que encontremos questões cobrando a interpretação geométrica da equação do plano e essa é definida apenas no $\mathbb{R}^3$. Esse é definido no sistema cartesiano tridimensional, nesse caso, temos três variáveis: x, y e z.

A principal diferença entre o plano $\mathbb{R}^2$ e o espaço $\mathbb{R}^3$ é a adição de uma dimensão, mas as propriedades provadas para o plano podem ser estendidas para o espaço. Não veremos esse tema a rigor, pois esse assunto raramente cai nos vestibulares. Assim, vejamos apenas os conceitos básicos do sistema cartesiano tridimensional.

O sistema tridimensional é, usualmente, representado desse modo:



Um ponto P é definido por três coordenadas, isto é, $P = (x, y, z)$.
A equação geral do plano é

$$ax + by + cz + d = 0$$

Nessa equação, a, b, c e d são constantes e a, b, c não podem ser simultaneamente nulos.
Veja alguns exemplos de equações de planos:

1) $2x + 3y + z + 1 = 0$
2) $x + y + z = 0$
3) $-x + 2y - 3z + 10 = 0$

Para a equação da reta no espaço, devemos lembrar que a intersecção de dois planos não paralelos gera uma reta, logo, um sistema de duas equações de plano não paralelos definem uma reta. Veja alguns exemplos de equações de reta no espaço tridimensional:

$$r: \begin{cases} 3x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} 10x - 5y + z + 1 = 0 \\ 3x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Escreva as seguintes equações gerais na forma reduzida.

a) $2x + 3y + 8 = 0$

b) $-4x + 2y - 6 = 0$

Resolução:

a) $2x + 3y + 8 = 0 \Rightarrow 3y = -2x - 8 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}}$

b) $-4x + 2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 4x + 6 \Rightarrow \boxed{y = 2x + 3}$

Gabarito: a) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{8}{3}$ b) $y = 2x + 3$

2. Determine a equação da reta que passa pelos seguintes pontos:

a) $A(1, -1)$ e $B(3, 0)$

b) $A(2, 5)$ e $B(1, -4)$

c) $A(-10, 2)$ e $B(3, 7)$

d) $A(3, 4)$ e $B(1, 1)$

Resolução:

Como vimos nesse capítulo, podemos encontrar a equação da reta de diversos modos, você deve escolher o que mais lhe agrada.

a) Pelo método do determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 3y + 3 - y = 0 \Rightarrow \boxed{-x + 2y + 3 = 0}$$

b) Pela forma reduzida, podemos substituir os pontos dados para encontrar um sistema linear:

$$y = mx + n \Rightarrow \begin{cases} 5 = 2m + n \ (ponto\ A) \\ -4 = m + n \ (ponto\ B) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, encontramos:

$$m = 9 \ e \ n = 13$$

$$\therefore \boxed{y = 9x + 13}$$

c) Pela forma $m = \frac{y-y_0}{x-x_0}$.

Para calcular m, podemos usar os dois pontos dados:

$$m = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{2-7}{-10-3} = \frac{-5}{-13} = \frac{5}{13}$$

Escolhendo-se o ponto A, temos:

$$m = \frac{y-y_a}{x-x_a} \Rightarrow \frac{5}{13} = \frac{y-2}{x-(-10)} \Rightarrow \boxed{5x - 13y + 76 = 0}$$

d) Pelo método prático:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \\ x & y \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 + y + 4x - 4 - x - 3y = 0 \Rightarrow \boxed{3x - 2y - 1 = 0}$$

Gabarito: a) $-x + 2y + 3 = 0$ **b)** $y = 9x + 13$ **c)** $5x - 13y + 76 = 0$ **d)** $3x - 2y - 1 = 0$

3. Sabendo que os vértices do triângulo ΔABC são $A(0,0), B(-1,5)$ e $C(-5,1)$, determine:

a) A equação da reta que passa pelo ponto médio da base $\overline{BC}$ e pelo ponto $P(2,0)$.

b) A medida da mediana relativa ao vértice B.

c) A equação da reta que passa pelo baricentro do triângulo e pelo vértice A.

d) A área do triângulo ΔABC.

Resolução:

a) O ponto médio da base $\overline{BC}$ é dado por M:

$$x_m = \frac{x_b + x_c}{2} = \frac{-1-5}{2} = -3$$

$$y_m = \frac{y_b + y_c}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$$

$$\therefore \boxed{M = (-3, 3)}$$

A equação da reta que passa por M e por P é dada por:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \\ x & y \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 3y - 3x - 2y = 0 \Rightarrow \boxed{-3x - 5y + 6 = 0}$$

b) A medida da mediana relativa ao vértice B é a dada pela distância de B até o ponto médio da base $\overline{AC}$. Assim, temos:

$$M_{AC} = \left(\frac{x_a+x_c}{2}, \frac{y_a+y_c}{2}\right) = \left(\frac{0+(-5)}{2}, \frac{0+1}{2}\right) = \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Aplicando a fórmula da distância entre dois pontos, encontramos o valor pedido:

$$M_b = \sqrt{\left(\left(-\frac{5}{2}\right) - (-1)\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - 5\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{81}{4}}$$

$$\boxed{M_b = \frac{3\sqrt{10}}{2}}$$

c) O baricentro é dado por:

$$G = \left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3}, \frac{y_a+y_b+y_c}{3}\right) = \left(\frac{0-1-5}{3}, \frac{0+5+1}{3}\right) = (-2, 2)$$

$$\boxed{G = (-2, 2)}$$

A equação da reta é

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 2 \\ x & y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x}$$

d) Usando o método prático para calcular a área, temos:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \\ -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|-1 + 25| = 12$$

$$\boxed{A = 12}$$

Gabarito: a) $M = (-3, 3)$ ***e*** $-3x - 5y + 6 = 0$ b) $M_b = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ c) $G = (-2, 2)$ e $y = -x$ d) $S = 12$

4. Dado o triângulo de vértices $A(1, 2), B(4, 0)$ e $C(3, 5)$, determine as coordenadas do ponto D, sobre $\overline{AB}$, tal que $\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = 1$.

Resolução:

Como $\frac{S_{ADC}}{S_{DBC}} = 1$, temos $S_{ADC} = S_{DBC}$ e, portanto, D divide o triângulo em duas regiões de mesma área. Vamos calcular a área de ABC:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|20 + 6 - 8 - 5| = \frac{1}{2}|13| = \frac{13}{2}$$

Assim, temos $S_{ADC} = S_{DBC} = \frac{13}{4}$.

Seja $D = (x_d, y_d)$, então:

$$S_{ADC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}1 & 2\\ x_d & y_d\\ 3 & 5\\ 1 & 2\end{vmatrix}\right\|\Rightarrow\frac{1}{2}|y_d+5x_d+6-2x_d-3y_d-5|=\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow\boxed{|3x_d-2y_d+1|=\frac{13}{2}\ \ (1)}$$

$$S_{DBC}=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}x_d & y_d\\ 4 & 0\\ 3 & 5\\ x_d & y_d\end{vmatrix}\right\|\Rightarrow\frac{1}{2}|20+3y_d-4y_d-5x_d|=\frac{13}{4}$$

$$\Rightarrow\boxed{|-5x_d-y_d+20|=\frac{13}{2}\ \ (2)}$$

Igualando (1) e (2):

$$|3x_d-2y_d+1|=|-5x_d-y_d+20|$$

$$3x_d-2y_d+1=\pm(-5x_d-y_d+20)$$

$$3x_d-2y_d+1=\mp5x_d\mp y_d\pm20$$

$$(3x_d\pm5x_d)+(-2y_d\pm y_d)+1\mp20=0$$

$$\Rightarrow 8x_d-y_d-19=0\Rightarrow\boxed{y_d=8x_d-19\ \ (3)}$$

$$ou$$

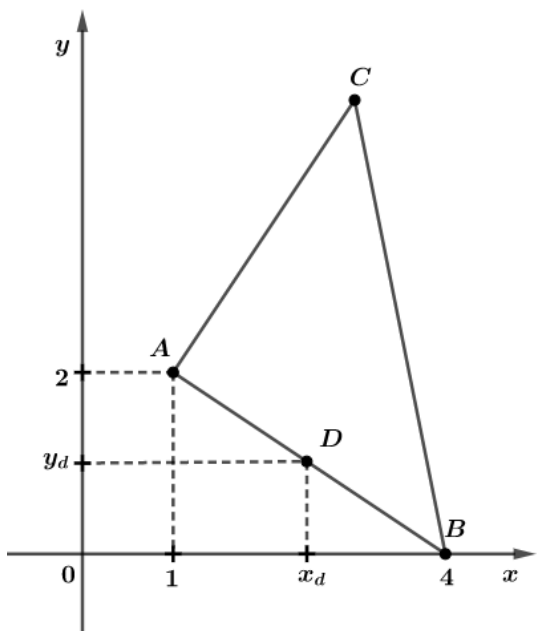
$$\Rightarrow -2x_d-3y_d+21=0\Rightarrow\boxed{y_d=-\frac{2}{3}x_d+7\ \ (4)}$$

Substituindo (3) em (2), temos:

$$|-5x_d-(8x_d-19)+20|=\frac{13}{2}$$

$$|-13x_d+39|=\frac{13}{2}\Rightarrow -x_d+3=\pm\frac{1}{2}\Rightarrow x_d=\frac{5}{2}\ ou\ x_d=\frac{7}{2}$$

Como D é um ponto sobre $\overline{AB}$, devemos ter $1<x_d<4$ e $0<y_d<2$.



Assim, vamos testar os valores.

Para $x_d = \frac{5}{2}$, temos:

$$y_d = 8x_d - 19 \Rightarrow y_d = 8\left(\frac{5}{2}\right) - 19 = 1$$

Como x_d e y_d satisfazem a condição, temos que $D = \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ é o ponto pedido.

Note que os outros valores não satisfazem a condição do intervalo de D.

Para $x_d = \frac{7}{2}$, temos:

$$y_d = 8x_d - 19 \Rightarrow y_d = 8\left(\frac{7}{2}\right) - 19 = 9 > 4\ (não\ convém)$$

Vamos usar a outra equação. Substituindo (4) em (2):

$$\left|-5x_d - \left(-\frac{2}{3}x_d + 7\ \right) + 20\right| = \frac{13}{2}$$

$$\left|-\frac{13x_d}{3} + 13\right| = \frac{13}{2} \Rightarrow \left|\frac{-13x_d + 13\cdot 3}{3}\right| = \frac{13}{2} \Rightarrow |-x_d + 3| = \frac{3}{2}$$

$$-x_d + 3 = \pm\frac{3}{2} \Rightarrow x_d = 3 \mp \frac{3}{2} \Rightarrow x_d = \frac{3}{2}\ ou\ x_d = \frac{9}{2}$$

Como $x_d = \frac{9}{2} > 4$, devemos ter $x_d = \frac{3}{2}$. Substituindo esse valor em (4):

$$y_d = -\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right) + 7 = -1 + 7 = 6\ (não\ convém)$$

Gabarito: $\boldsymbol{D = \left(\frac{5}{2}, 1\right)}$

5. Determine a equação da reta que passa pela origem e é perpendicular à reta que contém os pontos $A(0,5)$ e $B(4,0)$.

Resolução:

Para encontrar essa reta, devemos calcular o coeficiente angular da reta que contém A e B. Seja r essa reta, então:

$$m_r = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \frac{0-5}{4-0} = -\frac{5}{4}$$

Seja s a reta perpendicular à r que passa pela origem, assim, temos:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{-\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

A reta s é:

$$s: y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow s: y - 0 = \frac{4}{5}(x - 0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{5}x}$$

Gabarito: $\boldsymbol{y = \frac{4}{5}x}$

6. Classifique as retas abaixo em paralelas, coincidentes ou concorrentes. Caso sejam concorrentes, determine o ponto de intersecção.

a) $\begin{cases} r: x + y + 2 = 0 \\ s: 3x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} r: 2x + 5y + 4 = 0 \\ s: -2x + y + 6 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} r: x + 2y + 2 = 0 \\ s: 2x + 4y + 6 = 0 \end{cases}$

Resolução:

a) r e s são coincidentes, pois:

$$\begin{cases} r: 1x + 1y + 2 = 0 \\ s: 3x + 3y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$$

b) r e s são concorrentes, pois os coeficientes angulares das retas são diferentes:

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{5}{1}$$

Resolvendo-se o sistema, encontramos o ponto de intersecção das retas.

Somando a equação de r com a equação de s:

$$6y + 10 = 0 \Rightarrow y = -\frac{5}{3}$$

Usando a equação de s:

$$-2x + y + 6 = 0 \Rightarrow -2x - \frac{5}{3} + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{13}{6}$$

Portanto, o ponto de intersecção é $P = \left(\frac{13}{6}, -\frac{5}{3}\right)$.

c) r e s são paralelas, pois:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{2}{6}$$

Gabarito: a) coincidentes b) concorrentes, $\boldsymbol{P = \left(\frac{13}{6}, -\frac{5}{3}\right)}$ c) paralelas

7. Seja o triângulo formado pelos pontos $A(-2,0), B(1,2)$ e $C(-4,3)$, calcule:

a) A altura relativa à base $\overline{BC}$.

b) O ângulo interno relativo ao vértice A.

Resolução:

a) Calculemos a reta que contém a base $\overline{BC}$:

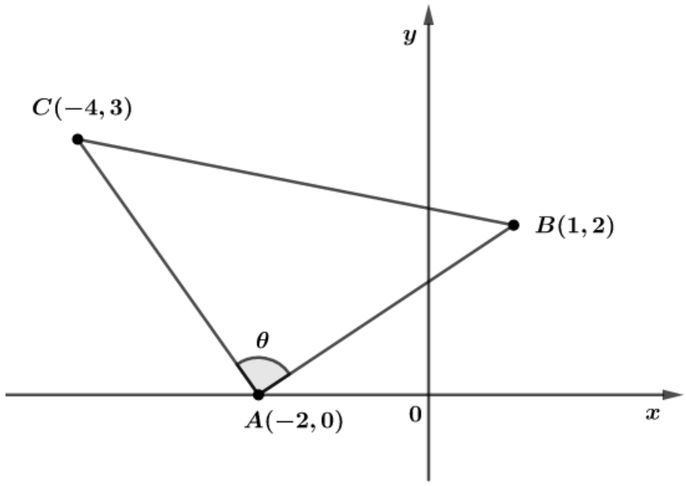
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \\ 1 & 2 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3 - 8 + y + 8 - 3 - 2x = 0 \Rightarrow \boxed{r: -2x + y = 0}$$

A altura relativa à base é dada pela distância do vértice A à reta r:

$$h_a = d_{A,r} = \left|\frac{-2x_a + y_a}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-2(-2) + 0}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{4}{\sqrt{5}}\right| = \frac{4\sqrt{5}}{5}$$

$$\boxed{h_a = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$$

b) Veja a figura:



Seja s e t as retas que contém os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente. Vamos calcular o coeficiente angular dessas retas:

$$m_s = \frac{y_a - y_b}{x_a - x_b} = \frac{0-2}{-2-1} = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{m_s = \frac{2}{3}}$$

$$m_t = \frac{y_a - y_c}{x_a - x_c} = \frac{0-3}{-2-(-4)} = -\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{m_t = -\frac{3}{2}}$$

Perceba que

$$m_s \cdot m_t = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1$$

Portanto, s e t são perpendiculares, logo, $\boxed{\theta = 90°}$.

Caso não fossem perpendiculares, poderíamos calcular θ pela fórmula:

$$tg\theta = \left|\frac{m_s - m_t}{1 + m_s \cdot m_t}\right|$$

Gabarito: a) $\boldsymbol{h_a = \frac{4\sqrt{5}}{5}}$ **b)** $\boldsymbol{\theta = 90°}$

8. Determine as equações das retas bissetrizes às seguintes retas:

$$\begin{cases} -2x + y + 3 = 0 \\ x + 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolução:

Para encontrar as retas bissetrizes, usamos a definição da reta bissetriz ser equidistante das retas que a formam:

$$\left|\frac{-2x+y+3}{\sqrt{(-2)^2+1^2}}\right| = \left|\frac{x+2y+1}{\sqrt{1^2+2^2}}\right|$$

$$\left|\frac{-2x+y+3}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{x+2y+1}{\sqrt{5}}\right|$$

$$-2x + y + 3 = \pm(x + 2y + 1)$$

Portanto, as retas bissetrizes são:

$$\boxed{b_1: -3x - y + 2 = 0}$$

$$\boxed{b_2: -x + 3y + 4 = 0}$$

Gabarito: $\boldsymbol{b_1: -3x - y + 2 = 0}$ **e** $\boldsymbol{b_2: -x + 3y + 4 = 0}$

9. Calcule a área do polígono formado pelos pontos $A(0,0), B(2,1), C(4,2), D(3,4), E(0,5)$ e $F(-2,3)$.

Resolução:

Aplicação direta do bizu, seguindo a ordem $A \to B \to C \to D \to E \to F \to A$:

$$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 5 \\ -2 & 3 \\ 0 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|4 + 16 + 15 - 4 - 6 + 10| = \frac{1}{2}|35| = \frac{35}{2}$$

$$\boxed{S = \frac{35}{2}}$$

Gabarito: $\boldsymbol{S = \frac{35}{2}}$

3. Questões de Provas Anteriores

ITA

10. (ITA/2020)

Duas curvas planas c_1 e c_2 são definidas pelas equações

$$c_1: 16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0,$$
$$c_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0.$$

Sejam P e Q os pontos de interseção de c_1 com o eixo x e R e S os pontos de interseção de c_2 com o eixo y. A área do quadrilátero convexo de vértices P, Q, R e S é igual a

a) $15 + 7\sqrt{3}$.

b) $15 - 7\sqrt{3}$.

c) $15 + 14\sqrt{3}$.

d) $15 - 14\sqrt{3}$.

e) $25 + 10\sqrt{3}$.

11. (ITA/2020)

Os pontos $B = \left(1, 1 + 6\sqrt{2}\right)$ e $C = \left(1 + 6\sqrt{2}, 1\right)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são

a) $\left(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$.

b) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

c) $\left(1 + 7\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}\right)$.

d) $\left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

e) $\left(1 + 6\sqrt{2}, 1 + 6\sqrt{2}\right)$.

12. (ITA/2018)

No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0), B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

13. (ITA/2017)

Considere as retas de equações $r: y = \sqrt{2}x + a$ e $s: y = bx + c$, em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0,1)$ e s, por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

14. (ITA/2017)

Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A = (3, 3)$ o vértice de um quadrado $ABCD$, cuja diagonal BD está contida em r. A área deste quadrado é

a) $9/5$

b) $12/5$

c) $18/5$

d) $21/5$

e) $24/5$

15. (ITA/2017)

Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\pi/16$.

- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $7/4$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

a) $\frac{\sqrt{123}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{129}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{131}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{135}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{137}}{2}$

16. (ITA/2016)

Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são $(0, 1), (2, 0), (4, 0)$ e (6, 4) em duas regiões da mesma área, então o valor de a é igual a

a) $2\sqrt{5} - 1.$

b) $2\sqrt{6} - 1.$

c) $3\sqrt{5} - 4.$

d) $2\sqrt{7} - 2.$

e) $3\sqrt{7} - 5.$

17. (ITA/2015)

Sabe-se que a equação $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + 8y - 6 = 0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

18. (ITA/2015)

Dados o ponto $A = \left(4, \frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x + 4y - 12 = 0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

a) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$

b) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$

c) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$

d) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$

e) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$

19. (ITA/2015)

Considere os pontos $A = (0, -1), B = (0, 5)$ e a reta $r: 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A, r) = d(B, r)$.

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (3\sqrt{3}, 2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) I e II.

d) I e III.

e) II e III.

20. (ITA/2015)

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r: 3x + 4y - 4 = 0$ e $s: 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

a) $\frac{5\pi}{7}$

b) $\frac{4\pi}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{8\pi}{3}$

e) $\frac{9\pi}{4}$

21. (ITA/2014)

Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1,4), B = (5,1)$ e $C = (5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

a) $\frac{15}{8}$

b) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$

c) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$

d) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$

e) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$

22. (ITA/2012)

Sejam $A = (0,0), B = (0,6)$ e $C = (4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

23. (ITA/2012)

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{19}{2}$

b) 10

c) $\frac{25}{2}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{29}{2}$

24. (ITA/2012)

Dados os pontos $A = (0, 0), B = (2, 0)$ e $C = (1,1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

a) $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4 + \sqrt{2}} = 0$

b) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

c) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10 + \sqrt{2}} = 0$

d) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm \sqrt{2 + 4\sqrt{2}} = 0$

e) $r_{1,2}: (\sqrt{2} + 1)y - x \pm 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = 0$

25. (ITA/2007)

Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y, x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

a) 15/2.

b) 13/4.

c) 11/6.

d) 9/4.

e) 7/2.

26. (ITA/2007)

Sejam $A:(a,0), B:(0,a)$ e $C:(a,a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas a seguir, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P:(x,y)$ cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2+y^2-2xy-2ax-2ay+3a^2=0$

b) $x^2+y^2+2xy+2ax+2ay+3a^2=0$

c) $x^2+y^2-2xy+2ax+2ay+3a^2=0$

d) $x^2+y^2-2xy-2ax-2ay-3a^2=0$

e) $x^2+y^2+2xy-2ax-2ay-3a^2=0$

27. (ITA/2002)

Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e 1/2, respectivamente, se interceptam na origem 0. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a $12x10^{-1}$, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

a) 8/5.

b) 4/5.

c) 2/5.

d) 1/5.

e) 1.

28. (ITA/2000)

A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A:(2,1)$ e $B:(3,-2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

a) $(-1/2,0)$ ou $(5,0)$.

b) $(-1/2,0)$ ou $(4,0)$.

c) $(-1/3,0)$ ou $(5,0)$.

d) $(-1/3,0)$ ou $(4,0)$.

e) $(-1/5,0)$ ou $(3,0)$.

29. (ITA/1998)

Considere o paralelogramo $ABCD$ onde $A=(0,0), B=(-1,2)$ e $C=(-3,-4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

a) $\pi/4, 3\pi/4$ e $D=(-2,-5)$

b) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D=(-1,-5)$

c) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D=(-2,-6)$

d) $\pi/4, 3\pi/4$ e $D=(-2,-6)$

e) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D=(-2,-5)$

30. (ITA/1998)

As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

a) 36/5

b) 27/4

c) 44/3

d) 48/3

e) 48/5

31. (ITA/1997)

Considere os pontos $A: (0, 0), B: (2, 0)$ e $C: (0, 3)$

Seja $P: (x, y)$ o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual

a) $\frac{12}{5+\sqrt{13}}$

b) $\frac{8}{2+\sqrt{11}}$

c) $\frac{10}{6+\sqrt{13}}$

d) 5

e) 2

32. (ITA/1995)

Três pontos de coordenadas, respectivamente, $(0, 0), (b, 2b)$ e $(5b, 0)$, com $b > 0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

a) $(-b, -b)$

b) $(2b, -b)$

c) $(4b, -2b)$

d) $(3b, -2b)$

e) $(2b, -2b)$

IME

33. (IME/2020)

Considere a função $f(x) = \sqrt{x - a}, x \geq a$, onde a é um número real positivo. Seja s a reta secante ao gráfico de f em $\left(2a, f(2a)\right)$ e $\left(5a, f(5a)\right)$ e t a reta tangente ao gráfico de f que é paralela à reta s. A área do quadrilátero formado pela reta s, a reta t, a reta $x = 2a$ e a reta $x = 5a$ é $\sqrt{2}$ unidades de área. O valor de a, em unidades de comprimento, é:

a) $2\sqrt{2}$

b) 4

c) 2

d) $3\sqrt{2}$

e) $2\sqrt[3]{4}$

34. (IME/2016)

O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes às retas de equações

$$4x + 3y - 2 = 0 \text{ e } 12x - 16y + 5 = 0$$

é

a) $4x + 28y + 13 = 0$

b) $8x - 7y - 13 = 0$

c) $28x - 4y - 3 = 0$

d) $56x^2 + 388y - 184x - 56y^2 - 16y + 19 = 0$

e) $112x^2 + 768xy - 376x - 112y^2 - 32y + 39 = 0$

35. (IME/2013)

Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

a) $49x^2 + 9y^2 - 280x + 120y - 441 = 0$

b) $49x^2 - 406x - 49y^2 + 441 = 0$

c) $9x^2 + 49y^2 - 441 = 0$

d) $9x^2 + 9y^2 + 120y - 441 = 0$

e) $9x^2 - 49y^2 - 441 = 0$

36. (IME/2012)

Considere uma reta r que passa pelo ponto $P(2,3)$. A reta r intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B.

Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$.

4. Gabarito

ITA

10. c
11. c
12. $N = \left(\frac{1+\sqrt{19}}{2}, 0\right)$
13. $Área = \frac{121\sqrt{2}}{12}$
14. c
15. b
16. d
17. $tg(\theta) = 7$
18. e
19. d
20. e
21. d
22. b
23. d
24. e
25. a
26. a
27. b
28. c
29. d
30. e
31. a
32. c

IME

33. e
34. e
35. c
36. Item a) um par de retas perpendiculares; Item b) $r: y = x + 1 \; ou \; r: y = 3 \; ou \; r: y = -x + 5 \; ou \; r: x = 2$.

5. Questões de Provas Anteriores Comentadas

QUESTÕES COMENTADAS

ITA

10. (ITA/2020)

Duas curvas planas c_1 e c_2 são definidas pelas equações

$$c_1: 16x^2 + 9y^2 - 224x - 72y + 640 = 0,$$
$$c_2: x^2 + y^2 + 4x - 10y + 13 = 0.$$

Sejam P e Q os pontos de interseção de c_1 com o eixo x e R e S os pontos de interseção de c_2 com o eixo y. A área do quadrilátero convexo de vértices P, Q, R e S é igual a

a) $15 + 7\sqrt{3}$.

b) $15 - 7\sqrt{3}$.

c) $15 + 14\sqrt{3}$.

d) $15 - 14\sqrt{3}$.

e) $25 + 10\sqrt{3}$.

Comentários

Inicialmente, devemos encontrar as coordenadas dos pontos P, Q, R, S. Como P e Q são os pontos de interseção de c_1 com o eixo x, temos:

$$P = (x_p, 0) \text{ e } Q = (x_q, 0)$$

Fazendo $y = 0$ na equação de c_1:

$$16x^2 - 224x + 640 = 0$$
$$\Rightarrow x^2 - 14x + 40 = 0$$
$$\Rightarrow (x - 10)(x - 4) = 0$$

Portanto, as raízes são $x = 10$ ou $x = 4$.

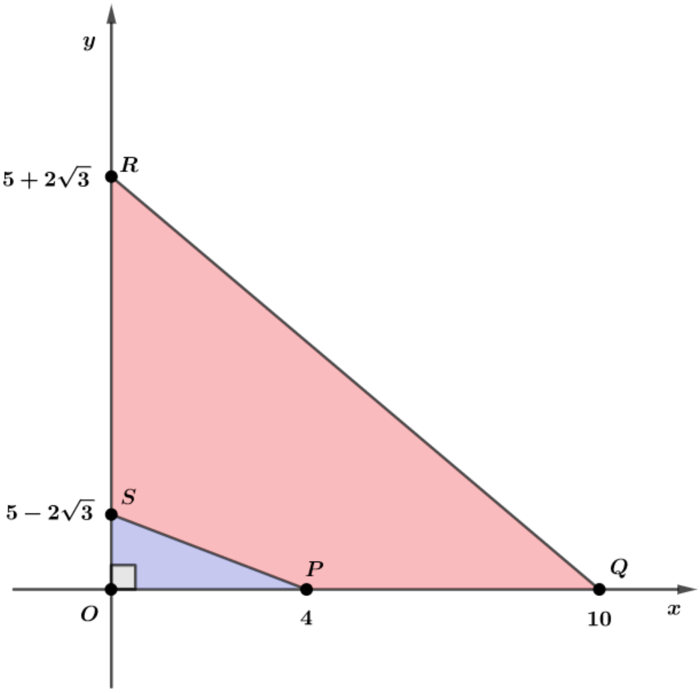
Assim, temos os pontos $P(4, 0)$ e $Q(10, 0)$.

Resta encontrar R e S. Como esses pontos são a interseção de c_2 com o eixo y, temos $R = (0, y_R)$ e $S = (0, y_S)$. Fazendo $x = 0$ em c_2:

$$y^2 - 10y + 13 = 0$$
$$\Rightarrow y = \frac{10 \pm \sqrt{48}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{3}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{3}$$

Assim, temos $R = (0, 5 + 2\sqrt{3})$ e $S = (0, 5 - 2\sqrt{3})$.

Esboçando os pontos no plano cartesiano, temos a seguinte figura:



A área pedida é dada por:

$$[PQRS] = [QRO] - [PSO] = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(5 + 2\sqrt{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left(5 - 2\sqrt{3}\right)$$

$$[PQRS] = 25 + 10\sqrt{3} - 10 + 4\sqrt{3} = 15 + 14\sqrt{3}$$

Gabarito: "c".

11. (ITA/2020)

Os pontos $B = \left(1, 1 + 6\sqrt{2}\right)$ e $C = \left(1 + 6\sqrt{2}, 1\right)$ são vértices do triângulo isósceles ABC de base BC, contido no primeiro quadrante. Se o raio da circunferência inscrita no triângulo mede 3, então as coordenadas do vértice A são

a) $\left(7\sqrt{2}, 7\sqrt{2}\right)$.

b) $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

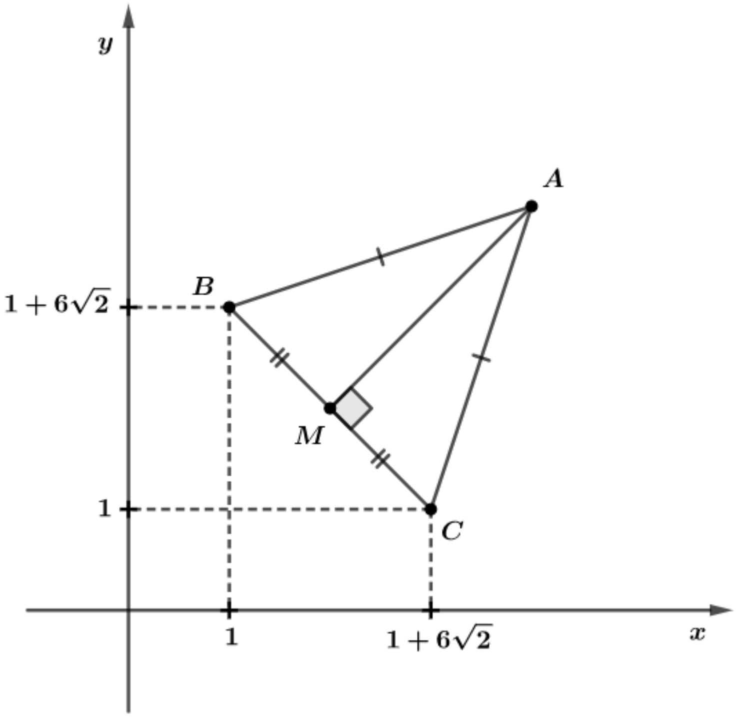
c) $\left(1 + 7\sqrt{2}, 1 + 7\sqrt{2}\right)$.

d) $\left(1 + \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$.

e) $\left(1 + 6\sqrt{2}, 1 + 6\sqrt{2}\right)$.

Comentários

Como ABC é um triângulo isósceles, então sua altura em relação ao vértice A também é mediatriz em relação à base BC. Temos a seguinte figura:



M é ponto médio de BC, logo:

$$M = \frac{B+C}{2} \Rightarrow M = \left(\frac{1+1+6\sqrt{2}}{2}; \frac{1+1+6\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow M = \left(1+3\sqrt{2}; 1+3\sqrt{2}\right)$$

Como $\overline{AM}$ é mediatriz, temos que ela é perpendicular à reta $\overline{BC}$, vamos encontrar seu coeficiente angular:

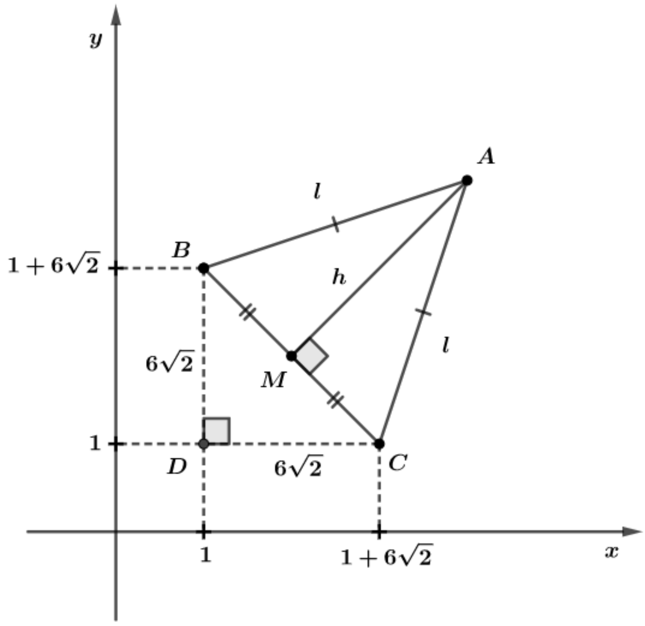
$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{1+6\sqrt{2}-1}{1-\left(1+6\sqrt{2}\right)} = \frac{6\sqrt{2}}{-6\sqrt{2}} = -1$$

$$m_{BC} \cdot m_{AC} = -1 \Rightarrow (-1) \cdot m_{AC} = -1 \therefore m_{AC} = 1$$

Como $x_M = y_M$ e $m_{AC} = 1$, temos que a reta que passa por M e A é $y = x$, ou seja, as coordenadas de A são da forma:

$$A = (a, a)$$

Vamos resolver o problema por geometria plana. Sabemos que $r = 3$ é o raio da circunferência inscrita ao triângulo. Consideremos a seguinte figura:



Do triângulo retângulo BCD:

$$BC^2 = \left(6\sqrt{2}\right)^2 + \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 72 + 72 = 144 \therefore BC = 12$$

Podemos calcular a área do ΔABC de duas formas:

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h = p \cdot r \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h = \frac{(l + l + 12)}{2} \cdot 3 \Rightarrow 4h = 2l + 12 \Rightarrow \boxed{2h = l + 6}$$

Veja que pelo teorema de Pitágoras no ΔABM:

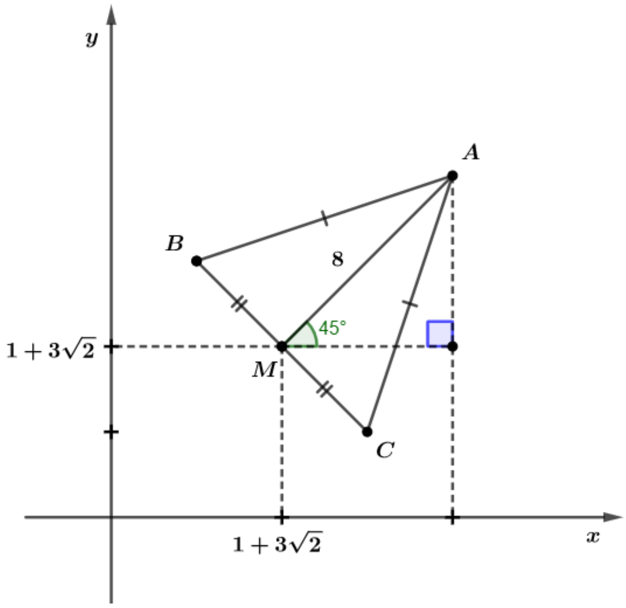
$$l^2 = h^2 + 6^2$$

Usando $2h = l + 6 \Rightarrow l = 2h - 6$:

$$(2h - 6)^2 = h^2 + 6^2 \Rightarrow 4h^2 - 24h + 36 = h^2 + 36 \Rightarrow 3h^2 - 24h = 0$$

$$3h(h - 8) = 0 \therefore h = 8$$

Podemos usar a seguinte figura para calcular as coordenadas de A:



$$a = 1 + 3\sqrt{2} + 8sen\ 45° = 1 + 3\sqrt{2} + \frac{8\sqrt{2}}{2} = 1 + 7\sqrt{2}$$

$$\therefore A = \left(1 + 7\sqrt{2}; 1 + 7\sqrt{2}\right)$$

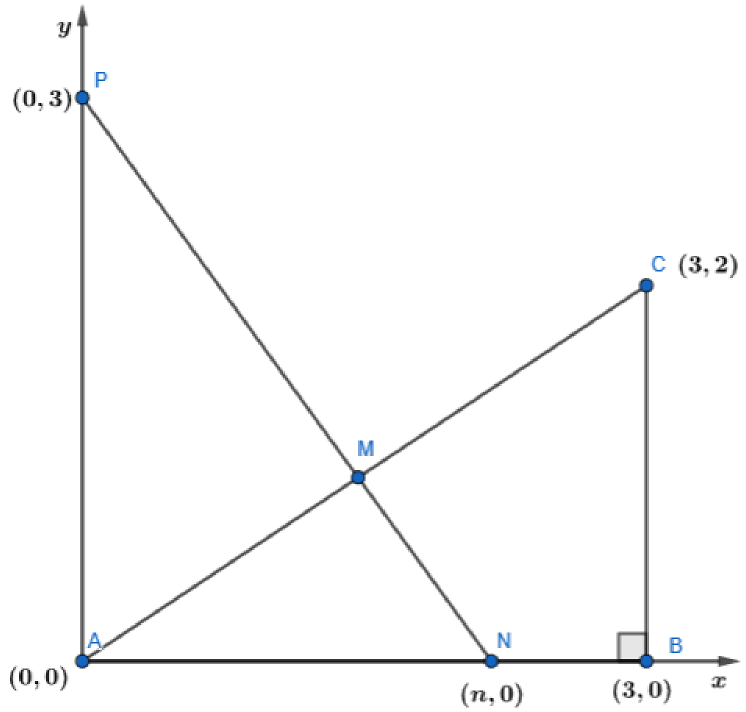
Gabarito: "c".

12. (ITA/2018)

No plano cartesiano são dados o ponto $P = (0, 3)$ e o triângulo de vértices $A = (0, 0), B = (3, 0)$ e $C = (3, 2)$. Determine um ponto N sobre o eixo dos x de modo que a reta que passa por P e N divida o triângulo ABC em duas regiões de mesma área.

Comentários

Para visualizarmos a situação, é conveniente fazermos um esboço:



O triângulo ΔABC é retângulo, como é possível ver na figura. Dessa forma, sua área é dada por:

$$\acute{A}rea\ do\ \Delta ABC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC}}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$$

Seja N da forma $N = (n, 0)$. A reta suporte de PN tem coeficiente angular:

$$m_{PN} = \frac{3-0}{0-n} = -\frac{3}{n}$$

Ou seja:

$$r_{PN}: -\frac{3}{n} = \frac{y-3}{x-0}$$

$$\Rightarrow r_{PN}: y = -\frac{3}{n}x + 3$$

A reta suporte de AC tem coeficiente angular:

$$m_{AC} = \frac{2-0}{3-0} = \frac{2}{3}$$

Ou seja:

$$r_{AC}: \frac{2}{3} = \frac{y-0}{x-0} \Rightarrow r_{AC}: y = \frac{2}{3}x$$

Como $M = (x_M, y_M) = r_{PN} \cap r_{AC}$, temos da equação de r_{PN}:

$$\frac{2}{3}x_M = -\frac{3}{n}x_M + 3 \Rightarrow x_M = \frac{3}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}}$$

Do que segue de r_{AC}:

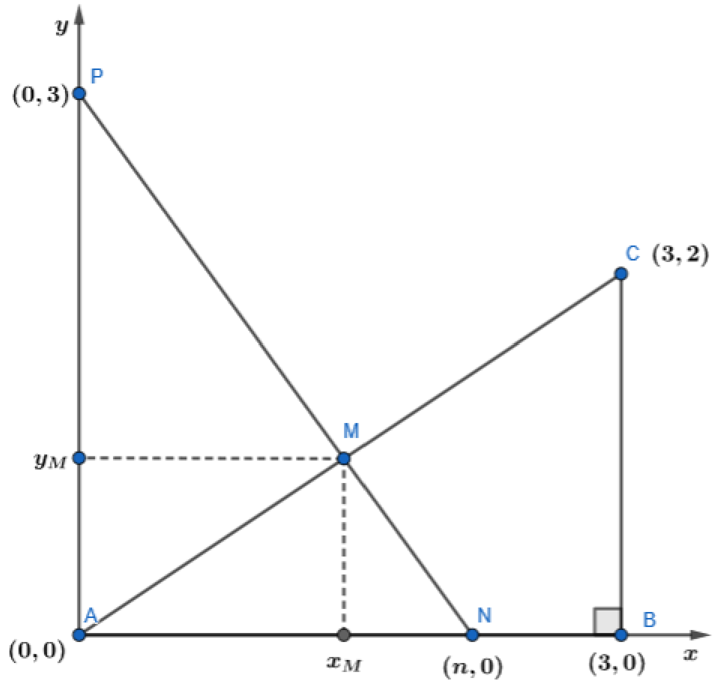
$$y_M = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}} = \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}}$$

Assim:

$$M = \left(\frac{3}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}}, \frac{2}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}}\right)$$

Pela condição do enunciado:

$$\grave{A}rea\ do\ \Delta AMN = \frac{1}{2}\left(\acute{A}rea\ do\ \Delta ABC\right) = \frac{3}{2}$$



Mas, observe que:

$$\acute{A}rea\ de\ APN = \frac{n \cdot 3}{2} = \acute{A}rea\ de\ AMP + \acute{A}rea\ de\ AMN = \frac{x_M \cdot 3}{2} + \frac{3}{2}$$

Ou seja

$$\frac{3n}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{\frac{2}{3} + \frac{3}{n}} + \frac{3}{2} \Leftrightarrow 2n^2 - 2n - 9 = 0$$

Resolvendo para n, temos

$$n = \frac{1+\sqrt{19}}{2} \text{ ou } n = \frac{1-\sqrt{19}}{2}$$

Mas $n > 0$, do que segue:

$$N = \left(\frac{1+\sqrt{19}}{2}, 0\right)$$

Gabarito: $N = \left(\frac{1+\sqrt{19}}{2}, 0\right)$

---

13. (ITA/2017)

Considere as retas de equações $r: y = \sqrt{2}x + a$ e $s: y = bx + c$, em que a, b, c são reais. Sabendo que r e s são perpendiculares entre si, com r passando por $(0,1)$ e s, por $(\sqrt{2}, 4)$, determine a área do triângulo formado pelas retas r, s e o eixo x.

Comentários

Para essa questão, o primeiro passo é determinar as retas. Para isso, vamos usar as duas informações fornecidas:

1ª informação: r e s são perpendiculares.

Note que o coeficiente angular de r é $m_r = \sqrt{2}$ e de s é $m_s = b$. Se são perpendiculares, então:

$$m_r m_s = -1 \Rightarrow \sqrt{2}b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2ª informação: r passa por $(0,1)$ e s passa por $(\sqrt{2}, 4)$.

Como r passa por $(0,1)$, devemos ter:

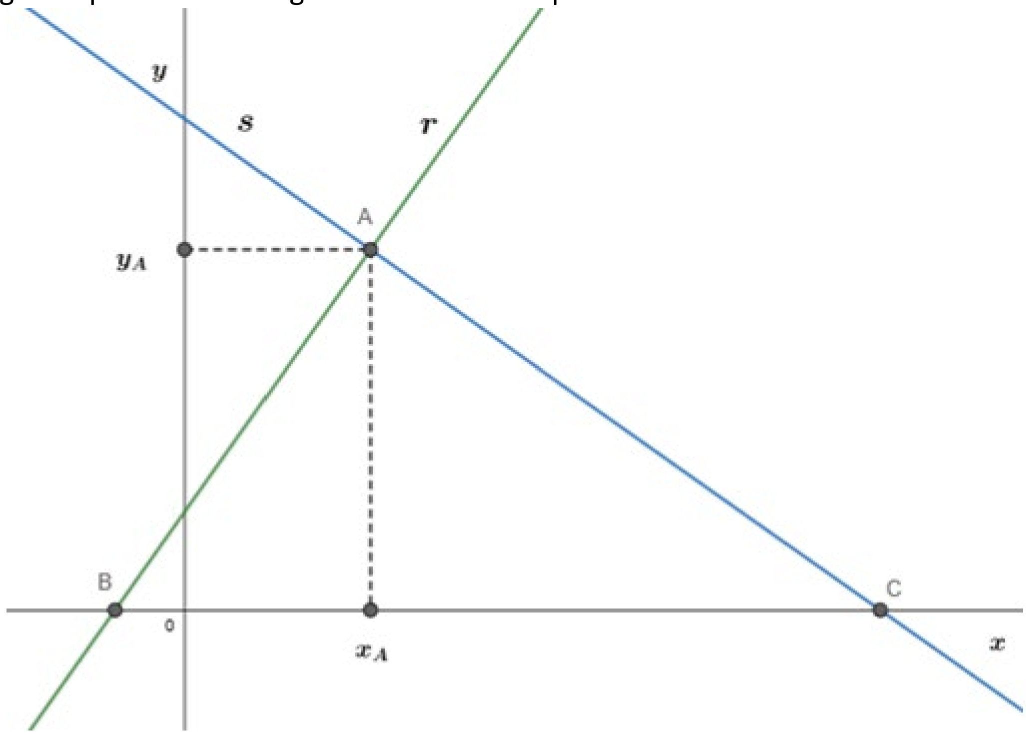
$$1 = \sqrt{2} \cdot (0) + a \Rightarrow a = 1$$

Como s passa por $(\sqrt{2}, 4)$, devemos ter:

$$4 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2}) + c \Rightarrow c = 5$$

Portanto, as retas são: r: $y = \sqrt{2}x + 1$ e s: $y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 5$.

O segundo passo é fazer o gráfico das retas no plano cartesiano:



O terceiro passo é encontrar a coordenada y do ponto de intersecção das retas, pois se você observar, ela será a altura do triângulo em questão. Para isso, vamos isolar o x na equação das retas e então achar y.

Da reta r:

$$y = \sqrt{2}x + 1 \ \Rightarrow x = \frac{y-1}{\sqrt{2}} \ (eq.01)$$

Da reta s:

$$y = -\frac{1}{\sqrt{2}}x + 3 \Rightarrow x = \sqrt{2}(5 - y) \ (eq.02)$$

Igualando a $eq.01$ à $eq.02$, vem:

$$y = \frac{11}{3}$$

A base do triângulo ABC é a diferença entre as coordenadas x dos pontos B e C, que são os pontos de intersecção das retas r e s com o eixo x, respectivamente. Fazendo $y = 0$ na $eq.01$ e na $eq.02$, temos:

$$x_B = \frac{-1}{\sqrt{2}} \ \ e \ x_C = 5\sqrt{2}$$

Do que segue que o seguimento $BC = x_C - x_B = \frac{11\sqrt{2}}{2}$. Portanto, a área pedida é dada por:

$$\acute{A}rea = \frac{BC \cdot y}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{11\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{11}{3} = \frac{121\sqrt{2}}{12}$$

Gabarito: $\acute{A}rea = \frac{121\sqrt{2}}{12}$

14. (ITA/2017)

Considere a reta $r: y = 2x$. Seja $A = (3, 3)$ o vértice de um quadrado $ABCD$, cuja diagonal BD está contida em r. A área deste quadrado é

a) $9/5$

b) $12/5$

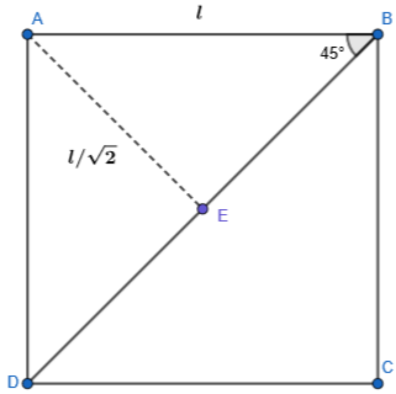
c) $18/5$

d) $21/5$

e) $24/5$

Comentários

O primeiro passo é fazer um diagrama inicial da situação proposta. Observe:



Note que, da figura acima, a distância de A à reta $y = 2x$, sobre a qual está a diagonal BD, corresponde a $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Então, o próximo passo é encontrar essa distância.

Da geometria analítica, temos que a distância de um ponto $P = (x_P, y_P)$ a uma reta $r: ay + bx + c = 0$ é dada por:

$$d_{(P,r)} = \left|\frac{ax_P + by_P + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

Aplicando à nossa situação, teremos:

$$r: y - 2x = 0$$

$$d_{(A,r)} = \left|\frac{3 - 2 \cdot 3 + 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

E finalmente:

$$\frac{l}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}} \Rightarrow l = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$

Do que temos que a área do quadrado $ABCD$ é dada por:

$$\acute{A}rea\ do\ quadrado\ ABCD = l^2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{18}{5}$$

Gabarito: "c".

15. (ITA/2017)

Considere dois círculos no primeiro quadrante:

- C_1 com centro (x_1, y_1), raio r_1 e área $\pi/16$.
- C_2 com centro (x_2, y_2), raio r_2 e área 144π.

Sabendo que (x_1, y_1, r_1) e (x_2, y_2, r_2) são duas progressões geométricas com somas dos termos iguais a $7/4$ e 21, respectivamente, então a distância entre os centros de C_1 e C_2 é igual a

a) $\frac{\sqrt{123}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{129}}{2}$

c) $\frac{\sqrt{131}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{135}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{137}}{2}$

Comentários

O primeiro passo nessa questão é buscar determinar as grandezas mais simples. Nesse caso, como nos foi dada a área das circunferências, podemos de imediato determinar seus raios. Da geometria plana, temos que a área de uma circunferência é dada, em função de seu raio, por:

$$A = \pi r^2$$

Do enunciado, temos:

$$A_1 = \pi r_1^2 = \frac{\pi}{16} \Rightarrow r_1 = \frac{1}{4}$$
$$A_2 = \pi r_2^2 = 144\pi \Rightarrow r_2 = 12$$

De posse dos raios, podemos utilizar as outras informações fornecidas para determinar as coordenadas dos centros.

Para C_1:

Seja q_1 a razão da progressão, temos que $x_1 = \frac{r_1}{q_1^2} = \frac{1}{4q_1^2}$ e $y_1 = \frac{r_1}{q_1} = \frac{1}{4q_1}$. A soma dessa P.G. é dada por:

$$x_1 + y_1 + r_1 = \frac{7}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{4q_1^2} + \frac{1}{4q_1} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

Resolvendo para q_1, obtemos $q_1 = \frac{1}{2}$ ou $q_1 = -\frac{1}{3}$. Como C_1 está no primeiro quadrante, $q_1 > 0$, do que segue que $q_1 = \frac{1}{2}$. E por fim: $x_1 = 1$ e $y_1 = \frac{1}{2}$.

Para C_2:

Seja q_2 a razão da progressão, temos que $x_2 = \frac{r_2}{q_2^2} = \frac{12}{q_2^2}$ e $y_2 = \frac{r_2}{q_2} = \frac{12}{q_2}$. A soma dessa P.G. é dada por:

$$x_2 + y_2 + r_2 = 21 \Leftrightarrow \frac{12}{q_2^2} + \frac{12}{q_2} + 12 = 21$$

Resolvendo para q_2, obtemos $q_2 = -\frac{2}{3}$ ou $q_2 = 2$. Como C_2 está no primeiro quadrante, $q_2 > 0$, do que segue que $q_2 = 2$. E por fim: $x_2 = 3$ e $y_2 = 6$.

Dessa forma, só nos resta determinar a distância entre C_1 e C_2. Da geometria analítica, sabemos que a distância entre dois pontos é dada por:

$$d_{(C_1,C_2)} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + \left(\frac{1}{2} - 6\right)^2} = \frac{\sqrt{129}}{2}$$

Gabarito: "b".

16. (ITA/2016)

Se a reta de equação $x = a$ divide o quadrilátero cujos vértices são $(0,1), (2,0), (4,0)$ e $(6,4)$ em duas regiões da mesma área, então o valor de a é igual a

a) $2\sqrt{5} - 1$.

b) $2\sqrt{6} - 1$.

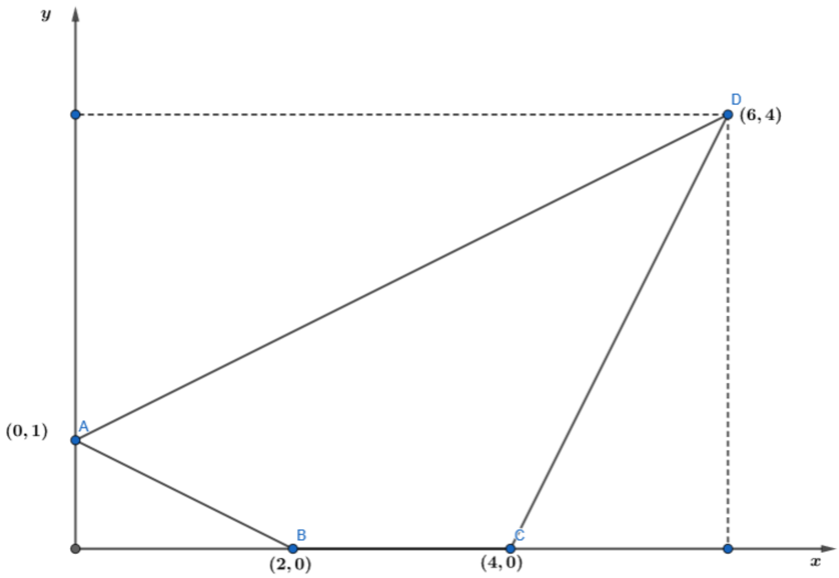
c) $3\sqrt{5} - 4$.

d) $2\sqrt{7} - 2$.

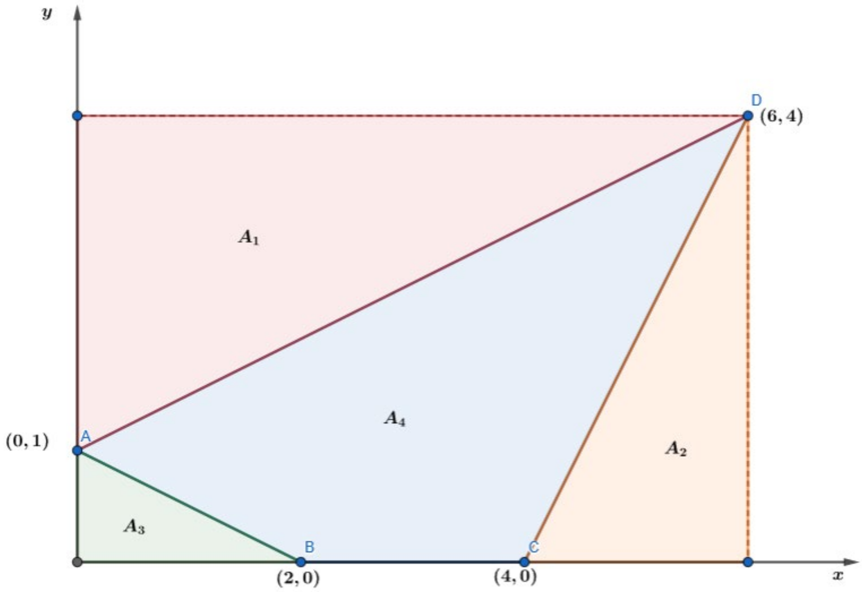
e) $3\sqrt{7} - 5$.

Comentários

Primeiramente, façamos um diagrama para visualizar o quadrilátero:



Antes de tudo, vamos calcular a área desse quadrilátero. Para isso, observe o diagrama abaixo, que define as regiões contidas no diagrama acima:



Pela figura acima, temos que:

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 6 \cdot 4 = 24$$

As áreas correspondentes a A_1, A_2 e A_3 são de triângulos retângulos, do que temos:

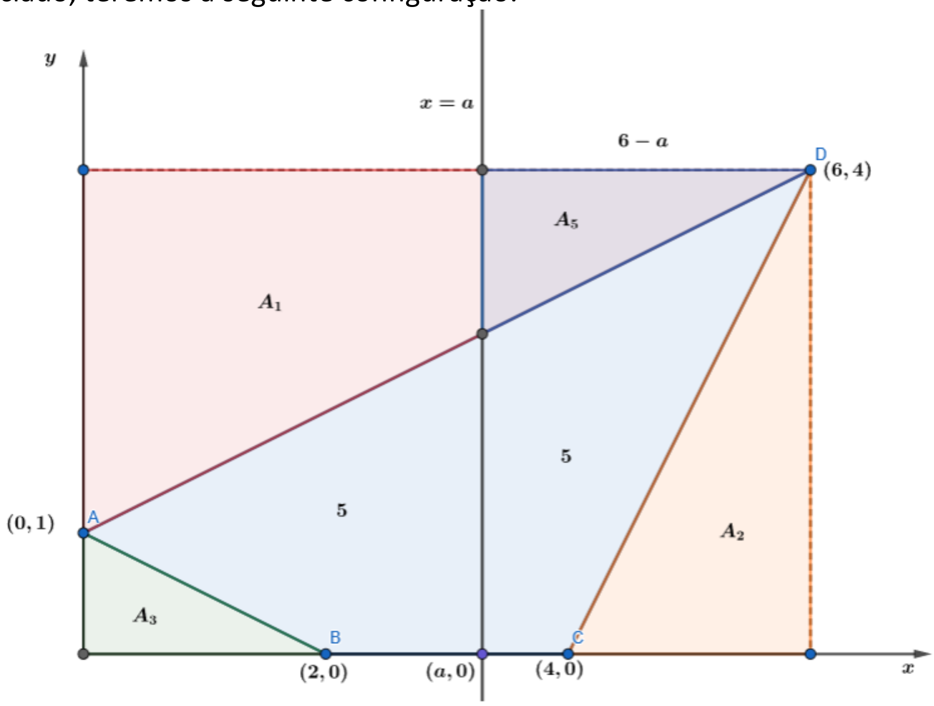
$$A_1 = \frac{3 \cdot 6}{2} = 9$$

$$A_2 = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4$$

$$A_3 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1$$

Logo: $9 + 4 + 1 + A_4 = 24 \Rightarrow A_4 = 10$.

Do enunciado, teremos a seguinte configuração:



Matematicamente:

$$A_2 + 5 + A_5 = (6 - a) \cdot 4 = 24 - 4a \ (eq. 01)$$

Observe que as regiões A_1 e A_5 correspondem a triângulos retângulos semelhantes. Da geometria plana, sabemos que a razão entre as áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados dos triângulos semelhantes. Ou seja:

$$\frac{A_5}{A_1}=\left(\frac{6-a}{6}\right)^2\Rightarrow\frac{A_5}{9}=\frac{(6-a)^2}{36}\Rightarrow A_5=\frac{(6-a)^2}{4}$$

Substituindo na $eq.01$, vem:

$$4+5+\frac{(6-a)^2}{4}=24-4a\Rightarrow\frac{36-12a+a^2}{4}=15-4a\Rightarrow 36-12a+a^2=60-16a$$

$$\Rightarrow a^2+4a-24=0$$

Resolvendo para a, temos $a=-2\left(\sqrt{7}+1\right)$ ou $a=2(\sqrt{7}-1)$. Como $a>0$, então:

$$a=2(\sqrt{7}-1)$$

Gabarito: "d".

---

17. (ITA/2015)

Sabe-se que a equação $3x^2+5xy-2y^2-3x+8y-6=0$ representa a reunião de duas retas concorrentes, r e s, formando um ângulo agudo θ. Determine a tangente de θ.

Comentários

Se ela representa duas retas, então podemos fatorar essa equação como produto de duas equações de retas do tipo $r: ax+by+c=0$ e $s: dx+ef+g=0$. Uma boa estratégia para isso é escolher uma das variáveis $(x \text{ ou } y)$ e resolver a equação de 2º grau nessa variável. Vamos escolher x. Reorganizando, vem:

$$3x^2+(5y-3)x-2y^2+8y-6=0$$

Raízes:

$$x=\frac{-(5y-3)\pm\sqrt{(5y-3)^2-4\cdot 3\cdot(-2y^2+8y-6)}}{6}$$

$$x=\frac{-5y+3\pm\sqrt{25y^2-30y+9+24y^2-96y+72}}{6}$$

$$x=\frac{-5y+3\pm\sqrt{49y^2-126y+81}}{6}=\frac{-5y+3\pm(7y-9)}{6}$$

Resolvendo em x, encontramos $x=2-2y$ ou $x=\frac{y}{3}-1$, do que segue:

$$r: x+2y-2=0 \text{ e } s: 3x-y+3=0$$

Observando as equações:

$$m_r=-\frac{1}{2} \text{ e } m_s=3$$

Do estudo da geometria analítica:

$$tg(\theta)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_rm_s}\right|$$

$$tg(\theta)=\left|\frac{-\frac{1}{2}-3}{1+(-\frac{1}{2})\cdot 3}\right|=7$$

Gabarito: $tg(\theta)=7$.

---

18. (ITA/2015)

Dados o ponto $A=\left(4,\frac{25}{6}\right)$ e a reta $r: 3x+4y-12=0$, considere o triângulo de vértices ABC, cuja base $\overline{BC}$ está contida em r e a medida dos lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ é igual a $\frac{25}{6}$. Então, a área e o perímetro desse triângulo são, respectivamente, iguais a

a) $\frac{22}{3}$ e $\frac{40}{3}$

b) $\frac{23}{3}$ e $\frac{40}{3}$

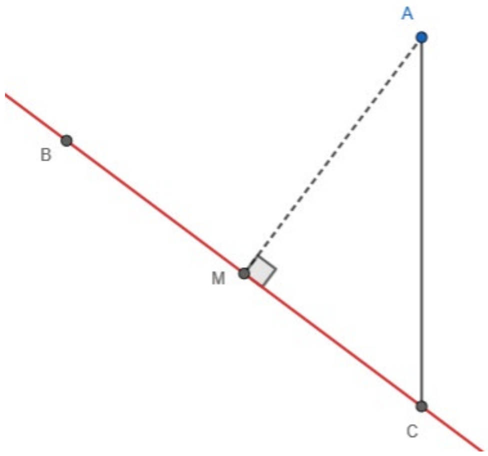
c) $\frac{25}{3}$ e $\frac{31}{3}$

d) $\frac{25}{3}$ e $\frac{35}{3}$

e) $\frac{25}{3}$ e $\frac{40}{3}$

Comentários

Como $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ são iguais, A está na mediatriz do segmento $\overline{BC}$. Precisamos encontrar a medida de $\overline{BC}$, para isso, observe a seguinte figura:



Podemos encontrar $\overline{AM}$ através da distância de A à reta r. Da geometria analítica:

$$d(A,r) = \left|\frac{3\cdot 4 + 4\cdot\frac{25}{6} - 12}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = \frac{10}{3}$$

Por Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 \Rightarrow \left(\frac{25}{6}\right)^2 = \left(\frac{10}{3}\right)^2 + \overline{MC}^2$$

Assim, $\overline{MC} = \frac{5}{2}$. Disso, segue que $\overline{BC} = 2\overline{MC} = 5$. Logo:

$$Perímetro = 2\cdot\frac{25}{6} + 5 = \frac{40}{3}$$

$$Área = \frac{1}{2}\cdot\overline{AM}\cdot\overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot 5 = \frac{25}{3}$$

Gabarito: “e”.

19. (ITA/2015)

Considere os pontos $A = (0,-1), B = (0,5)$ e a reta $r: 2x - 3y + 6 = 0$. Das afirmações a seguir:

I. $d(A,r) = d(B,r)$.

II. B é simétrico de A em relação à reta r.

III. $\overline{AB}$ é base de um triângulo equilátero ABC, de vértice $C = (-3\sqrt{3},2)$ ou $C = (3\sqrt{3},2)$.

É (são) verdadeira(s) apenas

a) I.

b) II.

c) I e II.

d) I e III.

e) II e III.

Comentários

Vamos analisar cada afirmação.

Afirmação I:

$$d(A,r)=\left|\frac{2\cdot 0-3\cdot(-1)+6}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right|=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

$$d(B,r)=\left|\frac{2\cdot 0-3\cdot 5+6}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}\right|=\left|-\frac{9}{\sqrt{13}}\right|=\frac{9}{\sqrt{13}}$$

Logo, do exposto acima, $d(A,r)=d(B,r)$. O item é **verdadeiro**.

Afirmação II:

Primeiramente, devemos lembrar que ser simétrico em relação à reta significa que os pontos estão a uma mesma distância dela e que a reta formada por eles deve ser perpendicular à reta r. Sendo assim, vamos verificar se isso ocorre.

Da geometria analítica, sabemos que uma reta s perpendicular a uma reta r dada obedece:

$$m_s\cdot m_r=-1$$

Temos que $m_r=\frac{2}{3}$. Assim:

$$\frac{2}{3}\cdot m_r=-1\Rightarrow m_r=-\frac{3}{2}$$

Se A e B pertencem a uma mesma reta de coeficiente angular m_s, que pela condição anterior é finito e tem seu valor conhecido, da geometria analítica deveríamos ter:

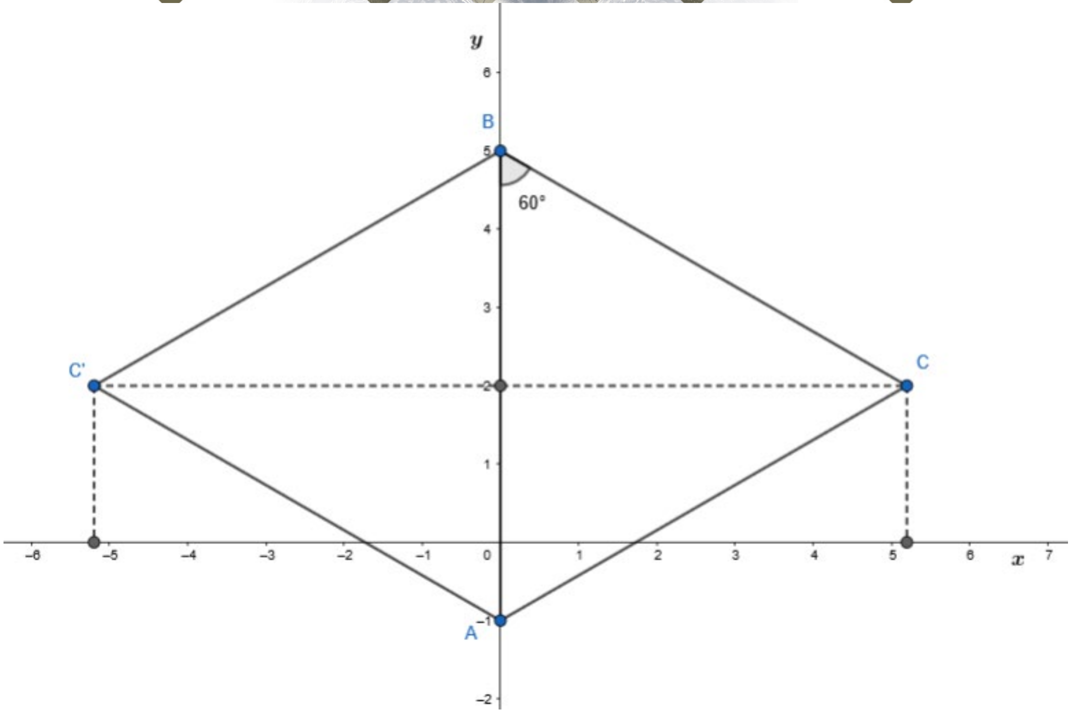
$$m_s=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}\Rightarrow m_s(x_A-x_B)=(y_A-y_B)$$

Note que $x_A-x_B=0$ implica que $(-\frac{3}{2})\cdot 0=y_A-y_B\Rightarrow 0=y_A-y_B$. Mas $y_A-y_B=\ -1-5=-6\neq 0$. Disso, concluímos que A e B não podem pertencer a uma reta de coeficiente angular finito.

O item é falso.

Afirmação III:

Observe a figura abaixo:



O seguimento $\overline{AB}$ é vertical, então é fácil encontrar as coordenadas dos possíveis pontos $C = (x_C, y_C)$ que satisfazem o enunciado. Note que a coordenada y_C é a mesma em ambos os casos e vale $y_C = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+5}{2} = 2$. Note também que $|x_C|$ é igual à altura do triângulo ΔABC ($\Delta ABC'$) e é dada por:

$$|x_C| = \frac{\overline{BC}}{2} tg(60°) = \frac{\overline{AB}}{2} tg(60°) = 2 \cdot \sqrt{3} \Rightarrow x_C = \pm 2\sqrt{3}$$

Logo, $C = (2\sqrt{3}, 2)$ ou $C = (-2\sqrt{3}, 2)$ e o item é verdadeiro.

Gabarito: "d".

---

20. (ITA/2015)

Seja C uma circunferência tangente simultaneamente às retas $r: 3x + 4y - 4 = 0$ e $s: 3x + 4y - 19 = 0$. A área do círculo determinado por C é igual a

a) $\frac{5\pi}{7}$

b) $\frac{4\pi}{5}$

c) $\frac{3\pi}{2}$

d) $\frac{8\pi}{3}$

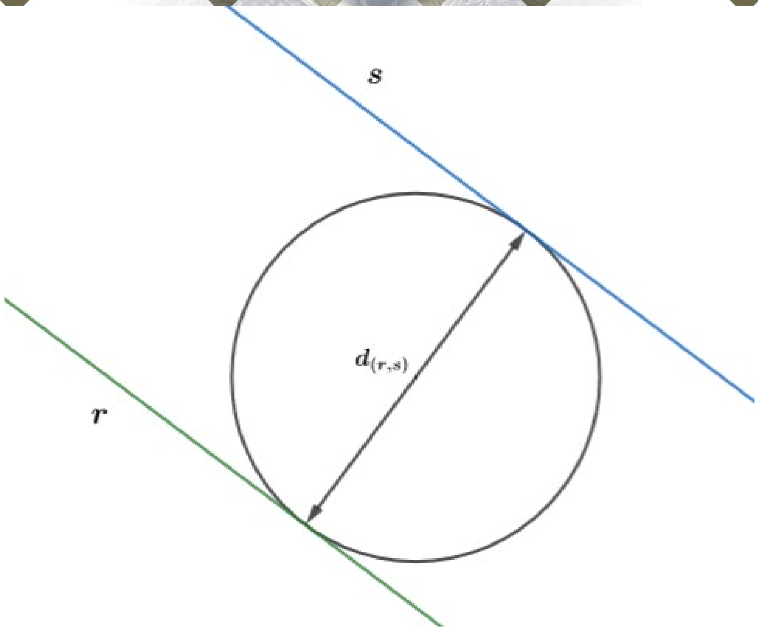
e) $\frac{9\pi}{4}$

Comentários

O primeiro passo nessa questão é fazer um desenho e perceber que, caso essas retas sejam concorrentes, existem infinitas circunferências, com raios distintos, tangentes às duas ao mesmo tempo. Isso nos leva a pensar que a única forma de esse problema ser possível é que elas sejam paralelas.

Em termos de geometria analítica, isso significa que elas possuem o mesmo coeficiente angular. Veja que isso ocorre, pois, por inspeção, temos que $m_r = -\frac{3}{4}$ e $m_s = -\frac{3}{4}$.

Logo em seguida, é natural que se faça um esboço da situação, como segue:



Percebe-se, portanto, que a distância entre as duas retas corresponde ao diâmetro da circunferência. Dessa forma, devemos encontrar a distância entre elas. Para isso, vamos proceder da seguinte forma:

Pegue um ponto em uma das retas. Pode ser, por exemplo $x = 0$ em r. Disso, vem que $3 \cdot 0 + 4y - 4 = 0 \Rightarrow y = 1$. Logo, temos o ponto $A = (0,1)$. Façamos, agora, a distância desse ponto à reta s. Da geometria analítica:

$$d(A,r) = \left|\frac{3 \cdot 0 + 4 \cdot 1 - 19}{\sqrt{3^2 + 4^2}}\right| = 3$$

Logo, pela discussão anterior, o diâmetro do círculo é $d = 3$ e o seu raio $r = \frac{3}{2}$. Da geometria plana, temos que:

$$Área\ do\ círculo = \frac{9\pi}{4}$$

Gabarito: "e".

---

21. (ITA/2014)

Seja ABC um triângulo de vértices $A = (1,4), B = (5,1)$ e $C = (5,5)$. O raio da circunferência circunscrita ao triângulo mede, em unidades de comprimento,

a) $\frac{15}{8}$

b) $\frac{5\sqrt{17}}{4}$

c) $\frac{3\sqrt{17}}{5}$

d) $\frac{5\sqrt{17}}{8}$

e) $\frac{17\sqrt{5}}{8}$

Comentários

Da geometria plana, sabemos que a área de um triângulo é dada, em função de seus lados e do raio da circunferência circunscrita, por:

$$Área = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot \overline{CA}}{4R}$$

Podemos encontrar os lados usando distância de pontos. Observe:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1-5)^2 + (4-1)^2} = 5$$
$$\overline{BC} = \sqrt{(5-5)^2 + (1-5)^2} = 4$$
$$\overline{CA} = \sqrt{(5-1)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{17}$$

Além disso, podemos encontrar sua área usando a fórmula para a área de um triângulo dado seus vértices $A, B\ e\ C$:

$$Área = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}\right\| = 8$$

Logo, combinando as informações, temos que:

$$8 = \frac{5 \cdot 4 \cdot \sqrt{17}}{4R} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{17}}{8}$$

Gabarito: "d".

---

22. (ITA/2012)

Sejam $A = (0,0), B = (0,6)$ e $C = (4,3)$ vértices de um triângulo. A distância do baricentro deste triângulo ao vértice A, em unidades de distância, é igual a

a) $\frac{5}{3}$

b) $\frac{\sqrt{97}}{3}$

c) $\frac{\sqrt{109}}{3}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

e) $\frac{10}{3}$

Comentários

Da geometria analítica, sabemos que as coordenadas do baricentro de um triângulo, dados seus vértices $A, B\ e\ C$ são dadas por:

$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Assim, aplicando à questão, temos:

$$G = \left(\frac{0+0+4}{3}, \frac{0+6+3}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}, 3\right)$$

Queremos $\overline{AG}$, logo:

$$\overline{AG} = \sqrt{\left(0 - \frac{4}{3}\right)^2 + (0-3)^2} = \frac{\sqrt{97}}{3}$$

Gabarito: "b".

---

23. (ITA/2012)

A área do quadrilátero definido pelos eixos coordenados e as retas $r: x - 3y + 3 = 0$ e $s: 3x + y - 21 = 0$, em unidades de área, é igual a

a) $\frac{19}{2}$

b) 10

c) $\frac{25}{2}$

d) $\frac{27}{2}$

e) $\frac{29}{2}$

Comentários

Primeiramente vamos encontrar a intersecção entre as retas. Isolando x na reta r, temos:

$$x = 3y - 3$$

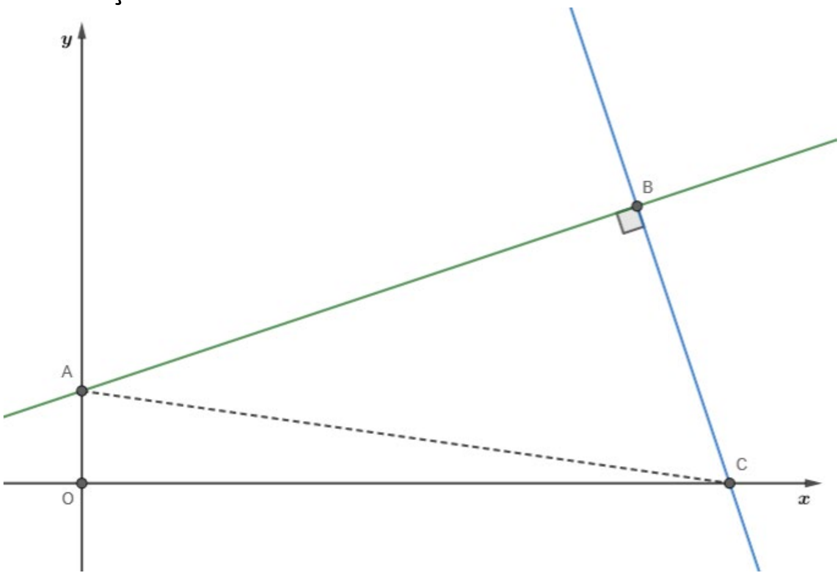
Substituindo na reta s, vem:

$$3 \cdot (3y - 3) + y - 21 = 0 \Leftrightarrow 10y - 30 = 0 \Leftrightarrow y = 3$$

Sabendo o valor de y, encontramos o valor de x:

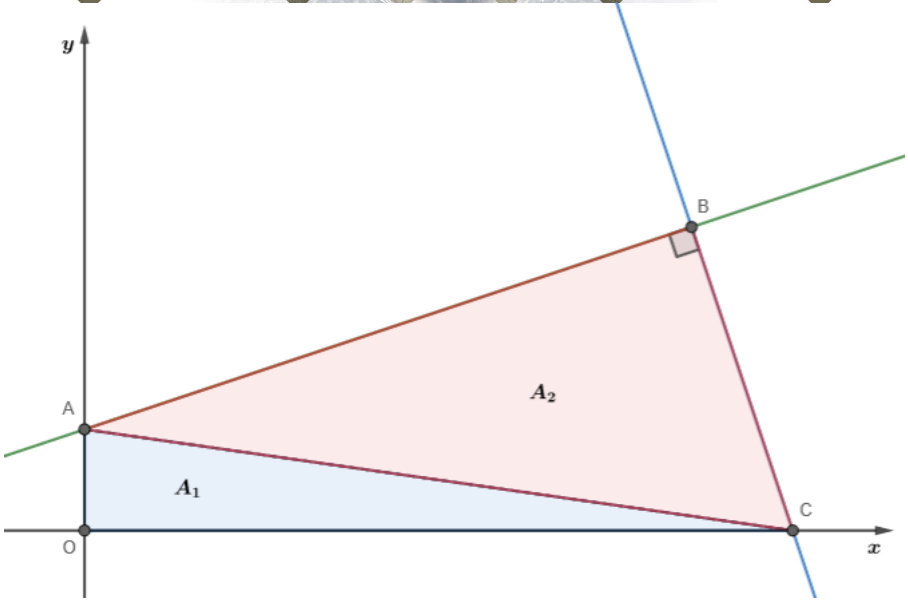
$$x = 3 \cdot 3 - 3 = 6$$

Assim, o ponto de intersecção das retas, que chamaremos de B, é dado por $B = (6,3)$. Façamos, então, um diagrama da situação:



Disso, temos que o ponto A é dado fazendo $x = 0$ na equação de y, do que temos $0 - 3y + 3 = 0 \Rightarrow y = 1$. E temos que o ponto C é obtido fazendo $y = 0$ na equação de s, do que temos $3x - 21 = 0 \Rightarrow x = 7$.Logo, $A = (0,1)\ e\ C = (7,0)$.

Queremos a área do quadrilátero $OABC$ (ver figura acima). Tudo fica mais fácil se percebemos que $r\ e\ s$ são perpendiculares, pois $m_r = \frac{1}{3}$ e $m_s = -3$, ou seja, $m_s m_r = -1$. Logo, o triângulo ΔABC é retângulo e temos, desde o início, que o triângulo ΔOAC também é retângulo. Para facilitar, vamos definir as regiões A_1 e A_2, como na figura abaixo.



Para calcular A_1, temos:

$$A_1 = \frac{OA \cdot OC}{2} = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}$$

Para calcular A_2, primeiro temos que calcular AB e BC. Da geometria analítica:

$$AB = \sqrt{(0-6)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{40}$$
$$BC = \sqrt{(6-7)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$

Como ΔABC é retângulo, temos que:

$$A_2 = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{\sqrt{400}}{2} = 10$$

Assim, a área pedida é $A_1 + A_2 = \frac{7}{2} + 10 = \frac{27}{2}$.

Gabarito: "d".

24. (ITA/2012)

Dados os pontos $A = (0,0), B = (2,0)$ e $C = (1,1)$, o lugar geométrico dos pontos que se encontram a uma distância $d = 2$ da bissetriz interna, por A, do triângulo ABC é um par de retas definidas por

a) $r_{1,2}: \sqrt{2}y - x \pm 2\sqrt{4+\sqrt{2}} = 0$

b) $r_{1,2}: \frac{\sqrt{2}}{2}y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0$

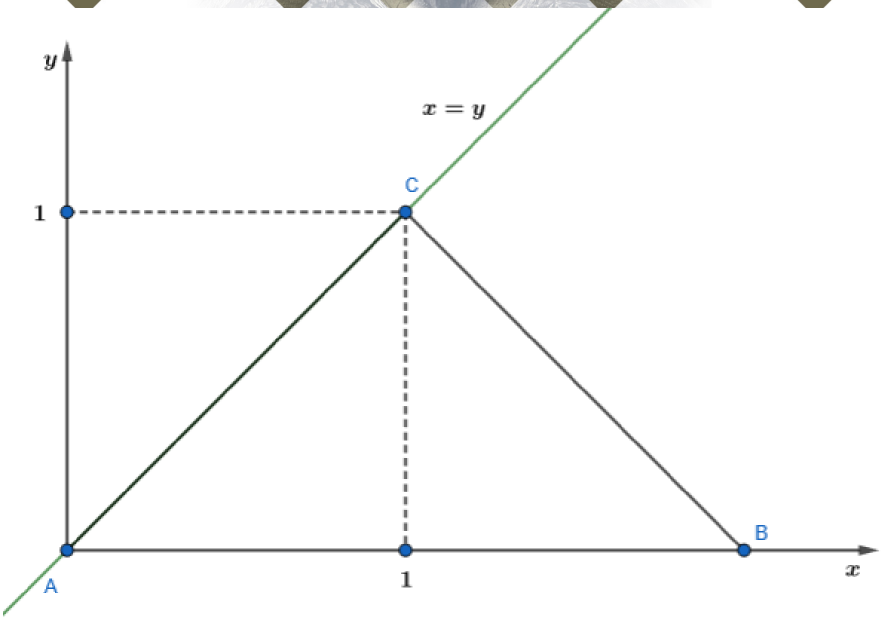
c) $r_{1,2}: 2y - x \pm 2\sqrt{10+\sqrt{2}} = 0$

d) $r_{1,2}: \left(\sqrt{2}+1\right)y - x \pm \sqrt{2+4\sqrt{2}} = 0$

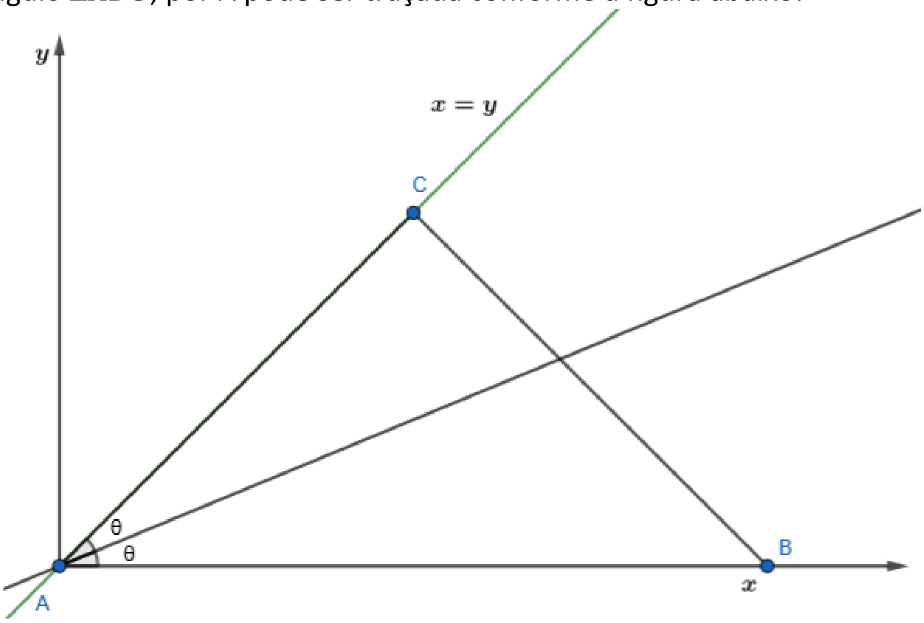
e) $r_{1,2}: (\sqrt{2}+1)y - x \pm 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0$

Comentários

Para facilitar, faça um diagrama inicial da situação e perceba que a reta AC é dada por $r: y = x$. Observe:



A bissetriz do triângulo ΔABC, por A pode ser traçada conforme a figura abaixo:



Note que o ângulo que a bissetriz faz com o eixo x é a metade do ângulo que a reta r faz com o mesmo eixo, do que temos, da trigonometria, que:

$$tg(2\theta) = \frac{2tg(\theta)}{1 - tg^2(\theta)} = tg(45°) = 1 \Rightarrow tg^2(\theta) + 2tg(\theta) - 1 = 0$$

Resolvendo a equação do segundo grau em $tg(\theta)$, temos que $tg(\theta) = -1 + \sqrt{2}$ ou $tg(\theta) = -1 - \sqrt{2}$. Mas θ pertence ao primeiro quadrante, do que temos que $tg\theta > 0$. Ou seja, $tg(\theta) = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Sendo θ o ângulo que a bissetriz faz com o eixo x, seu coeficiente angular é $tg(\theta)$, assim como o de qualquer reta paralela a essa bissetriz. Além disso, seja s: $y = mx + b$ uma reta paralela à bissetriz com distância 2 da mesma. Como $A = (0,0)$ pertence à bissetriz, devemos ter, da geometria analítica, que:

$$d(A,s) = \left|\frac{m \cdot 0 - 0 + b}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| = 2 \Rightarrow b = \pm 2\sqrt{m^2 + 1}$$

Mas $m = tg(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$. Logo, $b = \pm\frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1}$. Por fim, as retas paralelas à bissetriz com distância 2 da mesma são:

$$s_1: y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x + \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})y - x - 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0$$
$$s_2: y = \frac{1}{\sqrt{2}+1}x - \frac{2\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+1} \Leftrightarrow (1+\sqrt{2})y - x + 2\sqrt{4+2\sqrt{2}} = 0$$

Gabarito: "e".

25. (ITA/2007)

Considere no plano cartesiano xy o triângulo delimitado pelas retas $2x = y, x = 2y$ e $x = -2y + 10$. A área desse triângulo mede

a) 15/2.

b) 13/4.

c) 11/6.

d) 9/4.

e) 7/2.

Comentários

Para organizar as contas, vamos nomear as retas:

$$r: 2x = y$$
$$s: x = 2y$$
$$t: x = -2y + 10$$

Encontrando a intersecção entre r e s, ponto A:

$$2x = y \Rightarrow x = 2\cdot(2x) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2\cdot 0 = 0$$
$$\therefore A = (0,0)$$

Encontrando a intersecção entre r e t, ponto B:

$$2x = y \Rightarrow x = -2\cdot(2x) + 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = 2$$
$$2\cdot 2 = y \Rightarrow y = 4$$
$$\therefore B = (2,4)$$

Encontrando a intersecção entre s e t, ponto C:

$$x = 2y \Rightarrow 2y = -2y + 10 \Rightarrow 4y = 10 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$$
$$x = 2\cdot\frac{5}{2} = 5$$
$$\therefore C = (5,\frac{5}{2})$$

Da geometria analítica, a área de um triângulo, dado seus vértices:

$$Área = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & \frac{5}{2} & 1 \end{vmatrix}\right\| = \frac{15}{2}$$

Gabarito: "a".

26. (ITA/2007)

Sejam $A: (a, 0), B: (0, a)$ e $C: (a, a)$, pontos do plano cartesiano, em que a é um número real não nulo. Nas alternativas a seguir, assinale a equação do lugar geométrico dos pontos $P: (x, y)$ cuja distância à reta que passa por A e B, é igual à distância de P ao ponto C.

a) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

c) $x^2 + y^2 - 2xy + 2ax + 2ay + 3a^2 = 0$

d) $x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 2xy - 2ax - 2ay - 3a^2 = 0$

Comentários

Façamos os seguintes passos:

Passo 01: Se ele falar da reta AB, devemos encontrá-la. Da geometria analítica, uma reta que passa por dois pontos dados é tal que:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a^2 - ax - ay = 0$$

Passo 02: Calcular a distância de Pà reta AB:

$$d(P, AB) = \left| \frac{a^2 - ax - ay}{\sqrt{(-a)^2 + (-a)^2}} \right| = \left| \frac{a^2 - ax - ay}{\sqrt{2a^2}} \right|$$

Note que ele não fala nada sobre a ser positivo ou negativo, por isso não simplificamos o denominador de $d(P, AB)$.

Passo 03: Calcular a distância de P a C:

$$d(P, C) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2}$$

Passo 04: Igualamos as distâncias:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} = \left| \frac{a^2 - ax - ay}{\sqrt{2a^2}} \right| \Rightarrow \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-a)^2} \right)^2 = \left(\left| \frac{a^2 - ax - ay}{\sqrt{2a^2}} \right| \right)^2$$

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = \frac{(a^2 - ax - ay)^2}{2a^2}$$

Simplificando a expressão acima, obtemos:

$$x^2 + y^2 - 2xy - 2ax - 2ay + 3a^2 = 0$$

Gabarito: "a".

---

27. (ITA/2002)

Num sistema de coordenadas cartesianas, duas retas r e s, com coeficientes angulares 2 e 1/2, respectivamente, se interceptam na origem 0. Se $B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r e a área do triângulo OBC é igual a $12x10^{-1}$, então a distância de B ao eixo das ordenadas vale

a) 8/5.

b) 4/5.

c) 2/5.

d) 1/5.

e) 1.

Comentários

Vamos, incialmente, organizar as informações, lembrando que queremos a coordenada x de B:

$$m_r = 2 \text{ e } m_s = \frac{1}{2};$$

$(0,0) \in r \cap s \Rightarrow r: y = m_r x \ e \ s: y = m_s x$ ou ainda $r: y = 2x \ e \ s: y = \frac{1}{2}x$;

$B \in r$ e $C \in s$ são dois pontos no primeiro quadrante tais que o segmento $\overline{BC}$ é perpendicular a r

Usando as informações acima, construímos o seguinte diagrama:

Como o triângulo ΔOBC é retângulo, de catetos OB e BC, temos que sua área é dada por:

$$1{,}2 = \frac{6}{5} = \frac{OB \cdot BC}{2} \Rightarrow OB \cdot BC = \frac{12}{5} \ (eq. 01)$$

O ângulo $B\hat{O}C$, entre as retas $r \ e \ s$, tem sua tangente dada por:

$$tg(B\hat{O}C) = \left| \frac{2 - \frac{1}{2}}{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} \right| = \frac{3}{4}$$

Além disso, note também que $tg(B\hat{O}C) = \frac{3}{4} = \frac{BC}{OB} \Rightarrow BC = \frac{3}{4}OB$. Da $eq. 01$, temos:

$$OB \cdot \frac{3}{4}OB = \frac{12}{5} \Rightarrow OB^2 = \frac{16}{5}$$

Por outro lado, temos que $y_B = 2x_B$, poise $B \in r$ e, da distância de pontos:

$$OB^2 = (0 - x_B)^2 + (0 - 2x_B)^2 = 5x_B^2$$

Portanto:

$$5x_B^2 = \frac{16}{5} \Rightarrow x_B = \frac{4}{5}$$

Gabarito: “b”.

---

28. (ITA/2000)

A área de um triângulo é de 4 unidades de superfície, sendo dois de seus vértices os pontos $A: (2,1)$ e $B: (3, -2)$. Sabendo que o terceiro vértice encontra-se sobre o eixo das abcissas, pode-se afirmar que suas coordenadas são

a) $(-1/2, 0)$ ou $(5,0)$.

b) $(-1/2, 0)$ ou $(4, 0)$.

c) $(-1/3, 0)$ ou $(5, 0)$.

d) $(-1/3, 0)$ ou $(4, 0)$.

e) $(-1/5, 0)$ ou $(3,0)$.

Comentários

Seja C o terceiro vértice. Do enunciado, ele é do tipo:

$$C = (a, 0)$$

A área do triângulo, dado seus vértices, é dada por:

$$Área = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} a & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{matrix} \right\| = 4$$

$$\pm 8 = a - 4 - 3 + 2a \Rightarrow 3a - 7 = \pm 8$$

Temos duas possibilidades:

$$3a - 7 = 8 \Rightarrow a = \frac{15}{3} = 5$$

Ou:

$$3a - 7 = -8 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Logo, $C = (5,0)$ ou $C = (-\frac{1}{3}, 0)$.

Gabarito: "c".

---

29. (ITA/1998)

Considere o paralelogramo $ABCD$ onde $A = (0,0), B = (-1,2)$ e $C = (-3,-4)$. Os ângulos internos distintos e o vértice D deste paralelogramo são, respectivamente:

a) $\pi/4, 3\pi/4$ e $D = (-2,-5)$

b) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D = (-1,-5)$

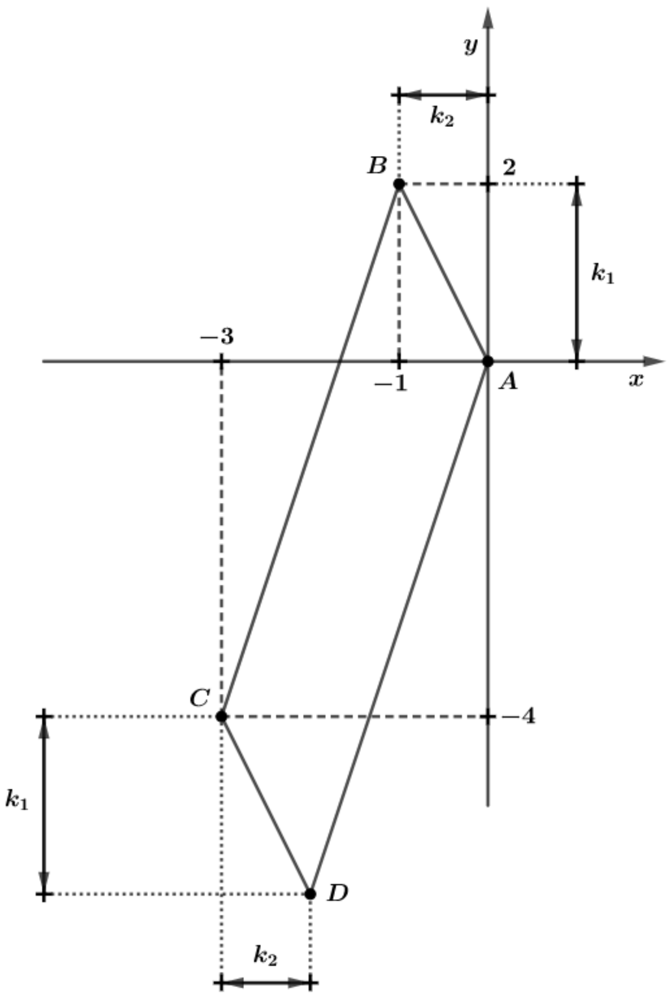
c) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D = (-2,-6)$

d) $\pi/4, 3\pi/4$ e $D = (-2,-6)$

e) $\pi/3, 2\pi/3$ e $D = (-2,-5)$

Comentários

Vamos resolver essa questão usando o gráfico. Representando os pontos no plano, temos:



Sabendo que os lados opostos do paralelogramo devem ser iguais, temos as seguintes relações:

$$k_1 = |y_c - y_d| = |y_b - y_a|$$
$$k_2 = |x_c - x_d| = |x_b - x_a|$$

Substituindo os valores:

$$|-4 - y_d| = |2 - 0| \Rightarrow |-4 - y_d| = 2$$
$$-4 - y_d = \pm 2 \Rightarrow y_d = -2 \text{ ou } y_d = -6$$

Pela figura, podemos ver que $y_d = -6$, pois D é um ponto acima do C.

$$|-3 - x_d| = |-1 - 0| \Rightarrow |-3 - x_d| = 1$$
$$-3 - x_d = \pm 1 \Rightarrow x_d = -2 \text{ ou } x_d = -4$$

Como D está à esquerda do C, devemos ter $x_d = -2$.

$$\therefore \boxed{D = (-2,-6)}$$

Para calcular o ângulo entre os lados AB e AD, vamos primeiramente encontrar o coeficiente angular dessas retas:

Reta AB:

$$m_{AB} = \frac{2-0}{-1-0} = -2$$

Reta AD:

$$m_{AD} = \frac{-6-0}{-2-0} = 3$$

Tangente do ângulo entre as retas (θ):

$$tg(\theta) = \left|\frac{-2-3}{1+(-2)\cdot 3}\right| = \left|\frac{-5}{-5}\right| = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Ou seja, o ângulo entre essas retas é de $\frac{\pi}{4}$. Como $ABCD$ é um paralelogramo, seu outro ângulo é $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$.

Gabarito: “d”.

30. (ITA/1998)

As retas $y = 0$ e $4x + 3y + 7 = 0$ são retas suportes das diagonais de um paralelogramo. Sabendo que estas diagonais medem 4 cm e 6 cm, então, a área deste paralelogramo, em cm^2, vale:

a) 36/5

b) 27/4

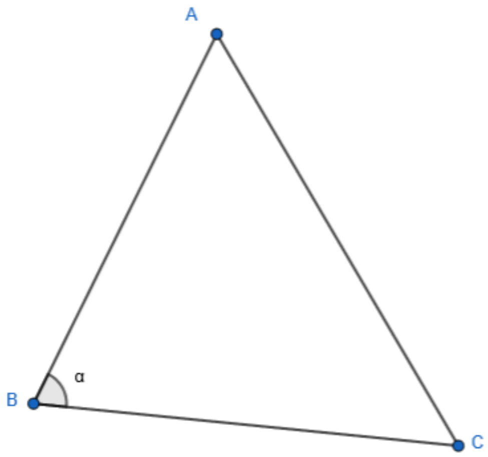
c) 44/3

d) 48/3

e) 48/5

Comentários

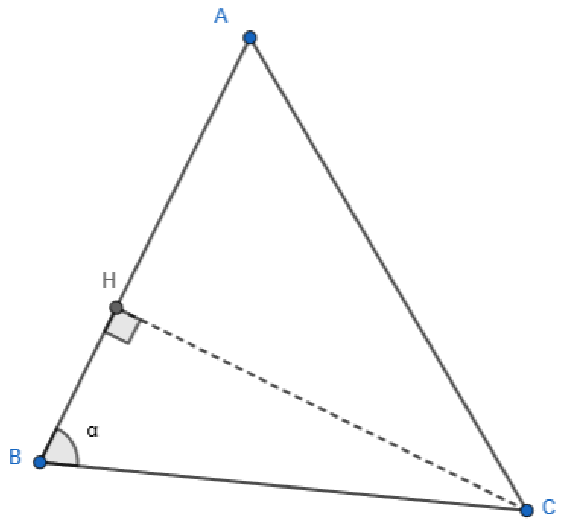
Para resolver essa questão, vamos contar com a ajuda da trigonometria.
Primeiro resultado:
Seja o triângulo ΔABC abaixo, tal que o ângulo entre AB e BC seja α.



Sua área é dada por:

$$Área = \frac{AB \cdot BC}{2} sen(\alpha)$$

Prova:

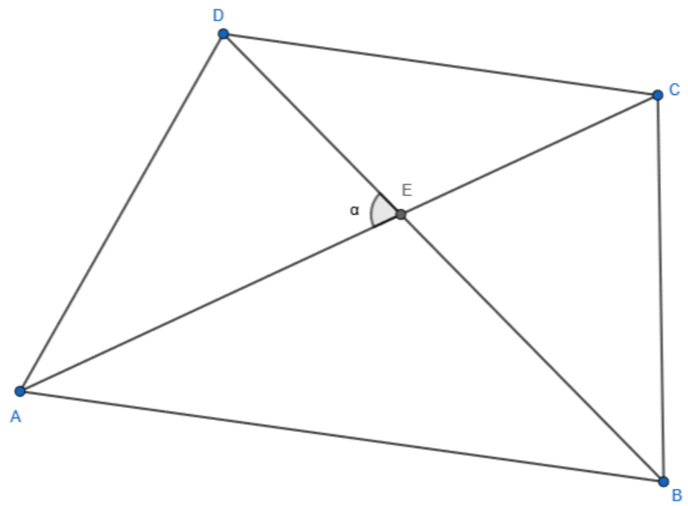


Basta traçar a altura relativa ao lado AB, CH. Olhe para o triângulo ΔBCH e veja que $sen(\alpha) = \frac{CH}{BC} \Rightarrow CH = BCsen(\alpha)$. Disso, temos que a área do triângulo ΔABC é dada por:

$$\frac{CH \cdot AB}{2} = \frac{BCsen(\alpha) \cdot AB}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} sen(\alpha) \quad c.q.d.$$

Segundo resultado:

Seja o quadrilátero convexo $ABCD$ abaixo de diagonais AC e BD. Seja E o ponto de intersecção das diagonais. Do primeiro resultado acima, podemos calcular a área de $ABCD$ como sendo a soma das áreas dos triângulos $\Delta AED, \Delta DEC, \Delta CEB\ e\ \Delta BEA$.



Ou seja:

$$\text{Área de } ABCD = $$
$$= \frac{AE \cdot ED}{2} sen(\alpha) + \frac{DE \cdot EC}{2} sen(180° - \alpha) + \frac{CE \cdot EB}{2} sen(\alpha) + \frac{BE \cdot EA}{2} sen(180° - \alpha)$$

Mas $sen(\alpha) = sen(180° - \alpha)$, do que temos que:

$$\text{Área de } ABCD = \frac{AE \cdot ED}{2} sen(\alpha) + \frac{DE \cdot EC}{2} sen(\alpha) + \frac{CE \cdot EB}{2} sen(\alpha) + \frac{BE \cdot EA}{2} sen(\alpha)$$

Agrupando os termos, temos:

$$\text{Área de } ABCD = \frac{AE \cdot ED}{2} sen(\alpha) + \frac{DE \cdot EC}{2} sen(\alpha) + \frac{CE \cdot EB}{2} sen(\alpha) + \frac{BE \cdot EA}{2} sen(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \text{Área de } ABCD = \frac{(AE + CE) \cdot DE}{2} sen(\alpha) + \frac{(CE + EA) \cdot EB}{2} sen(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \acute{A}rea\ de\ ABCD = \frac{(CE + EA) \cdot (EB + DE)}{2} sen(\alpha)$$

Ou seja:

$$\acute{A}rea\ de\ ABCD = \frac{AC \cdot BD}{2} sen(\alpha)$$

Na nossa questão, já temos as diagonais, precisamos do ângulo entre elas. Isso é fácil, pois uma das diagonais está sobre o eixo x , isto é, o coeficiente angular da outra reta nos fornece a tangente do ângulo entre as diagonais.

Nesse caso, então, temos: $tg(\alpha) = -\frac{4}{3} \Rightarrow sen(\alpha) = \frac{4}{5}$. Temos ainda: $AC = 4$ e $BD = 6$. Por fim:

$$\acute{A}rea\ de\ ABCD = \frac{4 \cdot 6}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{48}{5}$$

Observação: É bastante útil memorizar as expressões demonstradas na resolução dessa questão!

Gabarito: "e".

---

31. (ITA/1997)

Considere os pontos $A: (0, 0), B: (2, 0)$ e $C: (0, 3)$.

Seja $P: (x, y)$ o ponto de intersecção das bissetrizes internas do triângulo ABC. Então $x + y$ é igual

a) $\frac{12}{5+\sqrt{13}}$

b) $\frac{8}{2+\sqrt{11}}$

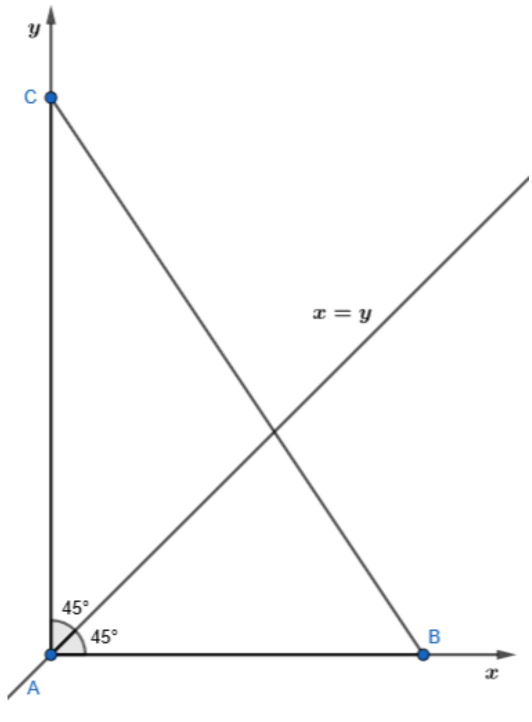
c) $\frac{10}{6+\sqrt{13}}$

d) 5

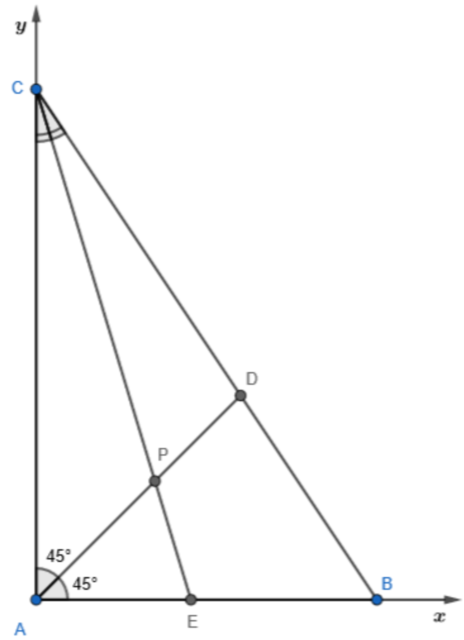
e) 2

Comentários

Façamos inicialmente o diagrama para visualizar o triângulo ΔABC:



Note que a bissetriz de $C\hat{A}B$ está sobre a reta $x = y$, pois ela faz um ângulo de $\frac{90°}{2} = 45°$ com o eixo x e passa por $A = (0,0)$. Disso, temos que P é do tipo $P = (x, x)$. Agora, vamos traçar as bissetrizes internas CE e AD, conforme a figura:



Pelo Teorema da Bissetriz Interna, temos:

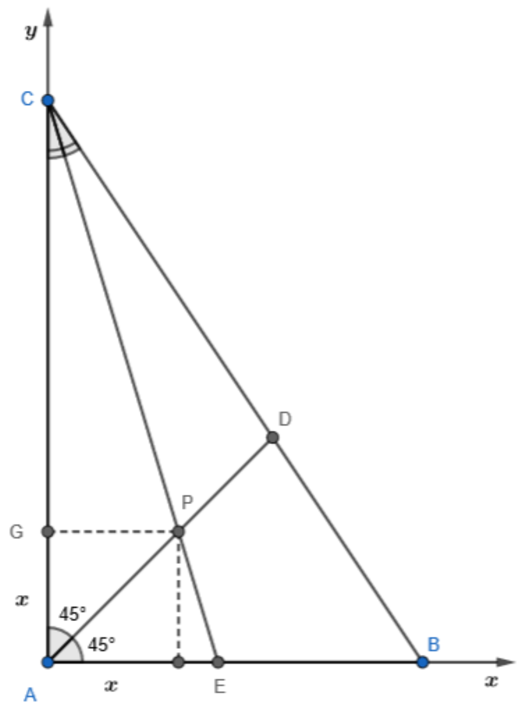
$$\frac{CA}{AE} = \frac{CB}{EB}$$

Mas $CA = 3$ e $CB = \sqrt{(3-0)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{13}$. Ou seja:

$$\frac{3}{AE} = \frac{\sqrt{13}}{EB} \Rightarrow EB = \frac{\sqrt{13}}{3} AE$$

Note ainda que $AE + EB = AB = 2$, logo, $AE + \frac{\sqrt{13}}{3} AE = 2 \Rightarrow AE = \frac{6}{3+\sqrt{13}}$.

Observe a figura abaixo:



O triângulo ΔCAE é semelhante ao triângulo ΔCGP pelo caso AA. Disso, podemos escrever que:

$$\frac{CG}{GP}=\frac{AC}{AE}\Leftrightarrow\frac{3-x}{x}=\frac{3}{\frac{6}{3+\sqrt{13}}}\Leftrightarrow x=\frac{6}{5+\sqrt{13}}$$

Por fim, temos que $y+x=x+x=2x=\frac{12}{5+\sqrt{13}}$.

Gabarito: "a".

32. (ITA/1995)

Três pontos de coordenadas, respectivamente, $(0,0),(b,2b)$ e $(5b,0)$, com $b>0$, são vértices de um retângulo. As coordenadas do quarto vértice são dadas por:

a) $(-b,-b)$

b) $(2b,-b)$

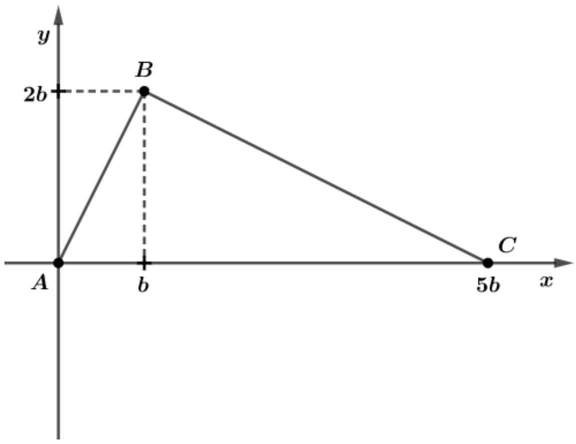
c) $(4b,-2b)$

d) $(3b,-2b)$

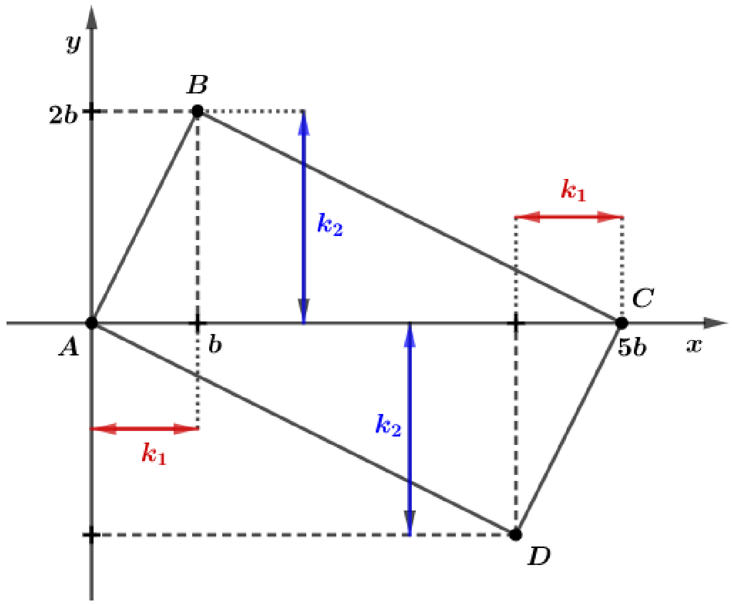
e) $(2b,-2b)$

Comentários

Podemos resolver essa questão sem encontrar as retas que contém os pontos do retângulo. Inicialmente, veja a representação dos pontos no plano cartesiano:



Perceba que o quarto vértice deve estar localizado, necessariamente, no quarto quadrante. Assim, temos a seguinte figura:



O bizu nessa questão é notar a simetria do retângulo. Conforme podemos ver pela figura ao lado, temos:

$$k_2 = y_b - y_a = y_a - y_d$$
$$k_1 = x_b - x_a = x_c - x_d$$

Substituindo os valores, temos:

$$k_2 \Rightarrow 2b - 0 = 0 - y_d \Rightarrow y_d = -2b$$
$$k_1 \Rightarrow b - 0 = 5b - x_d \Rightarrow x_d = 4b$$
$$\therefore \boxed{D = (4b, -2b)}$$

Gabarito: "c".

IME

33. (IME/2020)

Considere a função $f(x) = \sqrt{x-a}, x \geq a$, onde a é um número real positivo. Seja s a reta secante ao gráfico de f em $(2a, f(2a))$ e $(5a, f(5a))$ e t a reta tangente ao gráfico de f que é paralela à reta s. A área do quadrilátero formado pela reta s, a reta t, a reta $x = 2a$ e a reta $x = 5a$ é $\sqrt{2}$ unidades de área. O valor de a, em unidades de comprimento, é:

a) $2\sqrt{2}$

b) 4

c) 2

d) $3\sqrt{2}$

e) $2\sqrt[3]{4}$

Comentários

Antes de resolvermos a questão, devemos perceber que o quadrilátero é um paralelogramo, pois as retas que possuem seus pontos (r e t) são paralelas entre si e as outras retas que formam o paralelogramo também são paralelas entre si.

Vamos calcular o coeficiente angular da reta s. Sabemos que ela passa pelos pontos $(2a, f(2a))$ e $(5a, f(5a))$:

$$f(2a) = \sqrt{a} \text{ e } f(5a) = 2\sqrt{a}$$

Pontos de s:

$$(2a, \sqrt{a}) \text{ e } (5a, 2\sqrt{a})$$

O coeficiente angular de s é:

$$m_s = \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt{a})}{5a - 2a} \Rightarrow \boxed{m_s = \frac{\sqrt{a}}{3a}}$$

Sendo t paralela à r, temos que seu coeficiente angular é:

$$m_t = m_s = \frac{\sqrt{a}}{3a}$$

Logo, t pode ser escrito como:

$$t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}x + c$$

Onde c é seu coeficiente linear.
Como t tangencia f, ao substituir t em f, devemos encontrar apenas uma solução:

$$f(x) = y = \sqrt{x-a}$$
$$\frac{\sqrt{a}}{3a}x + c = \sqrt{x-a}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros da equação:

$$\frac{a}{9a^2}x^2 + \frac{2\sqrt{a}c}{3a}x + c^2 = x - a$$
$$\frac{x^2}{9a} + \left(\frac{2\sqrt{a}c}{3a} - 1\right)x + c^2 + a = 0$$

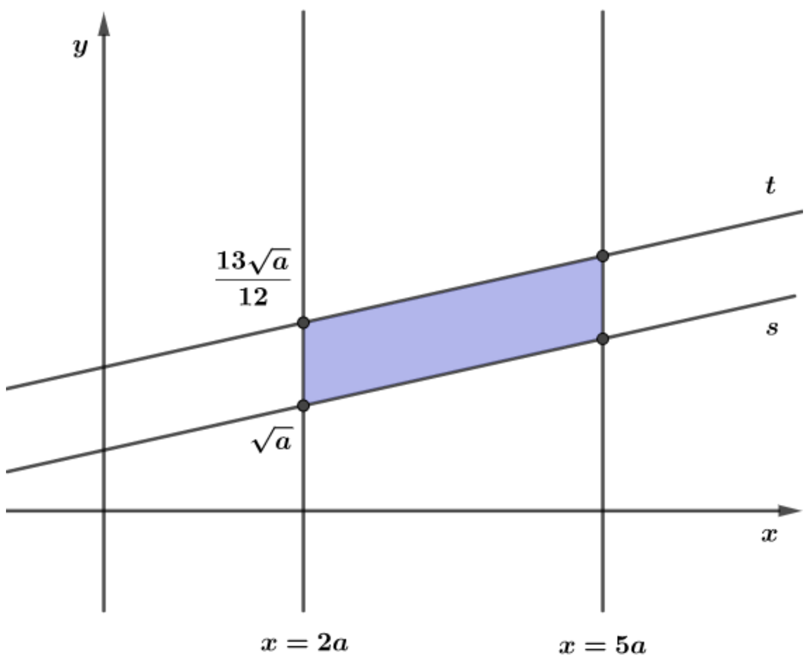
Encontrando o discriminante e igualando a zero:

$$\Delta = \left(\frac{2\sqrt{a}c}{3a} - 1\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{9a} \cdot (c^2 + a) = 0$$
$$\frac{4ac^2}{9a^2} - \frac{4\sqrt{a}c}{3a} + 1 - \frac{4c^2}{9a} - \frac{4}{9} = 0$$
$$-\frac{4\sqrt{a}c}{3a} + \frac{5}{9} = 0$$
$$\frac{c}{\sqrt{a}} = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{c = \frac{5\sqrt{a}}{12}}$$
$$\Rightarrow t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}x + \frac{5\sqrt{a}}{12}$$

Para $x = 2a$:

$$t: y = \frac{\sqrt{a}}{3a}2a + \frac{5\sqrt{a}}{12} = \frac{13\sqrt{a}}{12}$$

Fazendo o esboço do gráfico:



A área do paralelogramo é dado por:

$$A = (5a - 2a)\left(\frac{13\sqrt{a}}{12} - \sqrt{a}\right) = 3a\left(\frac{\sqrt{a}}{12}\right) = \frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}$$

Como $A = \sqrt{2}$, temos:

$$A=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}=\sqrt{2}\Rightarrow a^{\frac{3}{2}}=4\sqrt{2}\Rightarrow a^3=2^5\therefore \boxed{a=2\sqrt[3]{4}}$$

Gabarito: "e".

34. (IME/2016)

O lugar geométrico dos pontos em $\mathbb{R}^2$ equidistantes às retas de equações

$$4x+3y-2=0 \text{ e } 12x-16y+5=0$$

é

a) $4x+28y+13=0$

b) $8x-7y-13=0$

c) $28x-4y-3=0$

d) $56x^2+388y-184x-56y^2-16y+19=0$

e) $112x^2+768xy-376x-112y^2-32y+39=0$

Comentários

Seja $P=(x,y)$. Queremos:

$$\left|\frac{4x+3y-2}{\sqrt{4^2+3^2}}\right|=\left|\frac{12x-16y+5}{\sqrt{12^2+(-16)^2}}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{4x+3y-2}{5}\right|=\left|\frac{12x-16y+5}{20}\right|$$

Disso, temos duas possibilidades:

1ª possibilidade:

$$\frac{4x+3y-2}{5}=\frac{12x-16y+5}{20}\Leftrightarrow 28y+4x-13=0$$

2ª possibilidade:

$$\frac{4x+3y-2}{5}=-\frac{12x-16y+5}{20}\Leftrightarrow 28x-4y-3=0$$

Uma forma de representar, com uma só equação, o conjunto de pontos pertencentes a duas retas é multiplicando as equações das retas. Nesse caso:

$$(28y+4x-13)(28x-4y-3)=0\Leftrightarrow 112x^2+768xy-376x-112y^2-32y+39=0$$

Gabarito: "e".

35. (IME/2013)

Considere uma haste AB de comprimento 10 m. Seja um ponto P localizado nesta haste a 7 m da extremidade A. A posição inicial desta haste é horizontal sobre o semieixo x positivo, com a extremidade A localizada na origem do plano cartesiano. A haste se desloca de forma que a extremidade A percorra o eixo y, no sentido positivo, e a extremidade B percorra o eixo x, no sentido negativo, até que a extremidade B esteja sobre a origem do plano cartesiano. A equação do lugar geométrico, no primeiro quadrante, traçado pelo ponto P ao ocorrer o deslocamento descrito é

a) $49x^2+9y^2-280x+120y-441=0$

b) $49x^2-406x-49y^2+441=0$

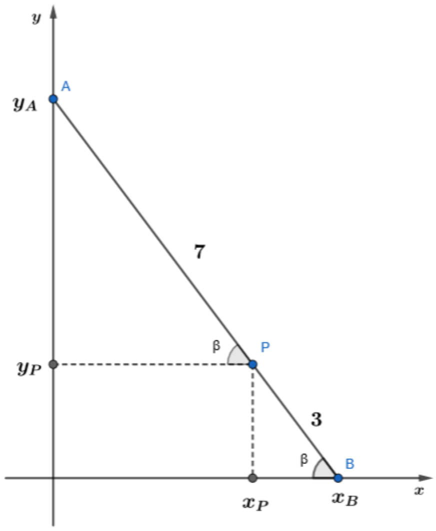
c) $9x^2+49y^2-441=0$

d) $9x^2+9y^2+120y-441=0$

e) $9x^2-49y^2-441=0$

Comentários

Observe a figura:



Nela, podemos observar:

$y_A^2 + x_B^2 = 100;$

$sen(\beta) = \frac{y_P}{3} = \frac{y_A}{10} \Rightarrow y_A = \frac{10}{3}y_P;$

$cos(\beta) = \frac{x_P}{7} = \frac{x_B}{10} \Rightarrow x_B = \frac{10}{7}x_P.$

Assim, temos que:

$$\left(\frac{10}{3}y_P\right)^2 + \left(\frac{10}{7}x_P\right)^2 = 100 \Leftrightarrow 9x_P^2 + 49y_P^2 = 441$$

Gabarito: "c".

36. (IME/2012)

Considere uma reta r que passa pelo ponto $P(2,3)$. A reta r intercepta a curva $x^2 - 2xy - y^2 = 0$ nos pontos A e B.

Determine:

a) o lugar geométrico definido pela curva;

b) a(s) possível(is) equação(ões) da reta r, sabendo que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = 17$.

Comentários

Item a:

Observe a seguinte manipulação algébrica:

$$x^2 - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 - y^2 - y^2 = 0$$

Ou seja:

$$(x-y)^2 - 2y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - y - \sqrt{2}y\right)\left(x - y + \sqrt{2}y\right) = 0$$

Do que temos:

$$x - (1+\sqrt{2})y = 0$$

Coeficiente angular: $m_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

Ou:

$$x + (\sqrt{2}-1)y = 0$$

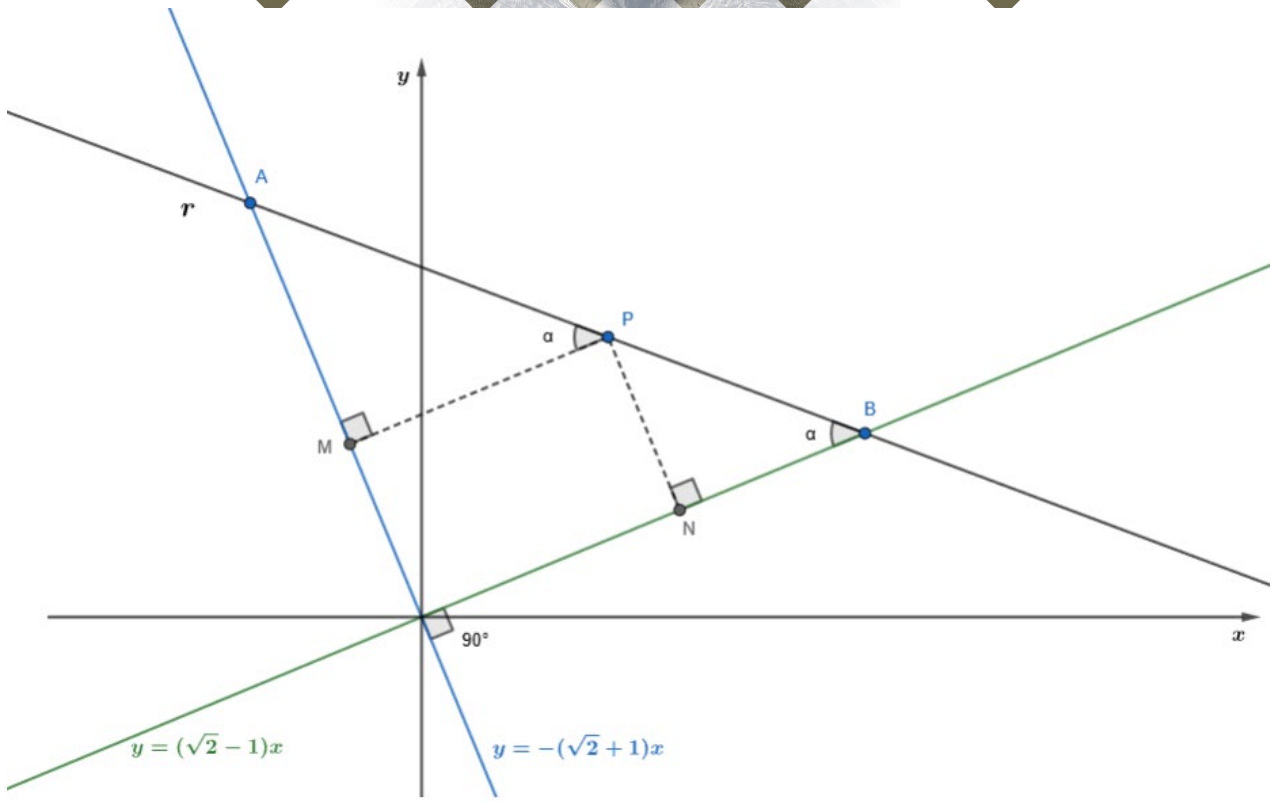
Coeficiente angular: $m_2 = \frac{1}{1-\sqrt{2}}$

Note que $m_1 m_2 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \frac{1}{1-(\sqrt{2})^2} = -1.$

Portanto, a curva define um par de retas perpendiculares.

Item b:

Nesse item, é importante fazermos um desenho. Veja:



Primeiro, perceba que o ângulo entre a reta r e a reta $y = (\sqrt{2}-1)x$ é α.
Além disso, temos que PM é a distância do ponto $P = (2,3)$ à reta $y + (\sqrt{2}+1)x = 0$, ou seja:

$$PM = \left|\frac{2(\sqrt{2}+1)+3}{\sqrt{1^2+(\sqrt{2}+1)^2}}\right| = \frac{5+2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}$$

Analogamente, temos que PN é a distância de P à reta $y - (\sqrt{2}-1)x = 0$, ou seja:

$$PN = \left|\frac{-2(\sqrt{2}-1)+3}{\sqrt{1^2+(-\sqrt{2}+1)^2}}\right| = \frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

Precisamos fazer aparecer o produto $\overline{PA}\cdot\overline{PB}$. Para isso, olhando a figura, perceba que:

$$\cos(\alpha) = \frac{PM}{PA}$$

$$sen(\alpha) = \frac{PN}{PB}$$

Ou seja:

$$sen(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{PM}{PA}\cdot\frac{PN}{PB} = \frac{PM\cdot PN}{PA\cdot PB}$$

Mas

$$\overline{PM}\cdot\overline{PN} = \left(\frac{5+2\sqrt{2}}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)\cdot\left(\frac{5-2\sqrt{2}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right) = \frac{(5+2\sqrt{2})(5-2\sqrt{2})}{\sqrt{(4+2\sqrt{2})(4-2\sqrt{2})}} = \frac{25-8}{\sqrt{16-8}} = \frac{17}{2\sqrt{2}}$$

Dessa forma

$$sen(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{17}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{17} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 2sen(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore sen(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Estamos interessados apenas no valor de $tg\alpha$, pois com ele determinaremos os possíveis coeficientes angulares da reta s. Sendo assim, lembre-se, da trigonometria:

$$\frac{sen(2\alpha)}{1+\cos(\alpha)} = \frac{2sen(\alpha)\cos(\alpha)}{2\cos^2(\alpha)} = tg(\alpha)$$

Como $sen(2\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, temos que:

$$\cos(2\alpha) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Assim, temos duas possibilidades para $tg(\alpha)$:

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1+\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

Ou

$$tg(\alpha) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$$

Como dito anteriormente, o ângulo entre a reta r e a reta $y = (\sqrt{2}-1)x$ é α. Seja m_r o coeficiente angular de r. Da geometria analítica, temos as seguintes possibilidades:

Possibilidade 1:

$$tg(\alpha) = \sqrt{2}-1 = \left|\frac{m_r-(\sqrt{2}-1)}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}\right|$$

Que implica:

$$\pm(\sqrt{2}-1) = \frac{m_r-(\sqrt{2}-1)}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}$$

Resolvendo para m_r, temos:

$$m_r = 1 \; ou \; m_r = 0$$

Para $m_r = 1$, obtemos a reta:

$$r: 1 = \frac{y-3}{x-2} \Rightarrow r: y = x+1$$

Para $m_r = 0$ obtermos uma reta horizontal. Ou seja:

$$r: y = 3$$

Possibilidade 2:

$$tg(\alpha) = \sqrt{2}+1 = \left|\frac{m_r-(\sqrt{2}-1)}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}\right|$$

Que implica

$$\pm(\sqrt{2}+1) = \frac{m_r-(\sqrt{2}-1)}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}$$

Para a igualdade acima com $-(\sqrt{2}+1)$, obtemos $m_r = -1$.

E a reta r:

$$r: -1 = \frac{y-3}{x-2} \Rightarrow r: y = -x+5$$

Para $(\sqrt{2}+1)$, temos:

$$\left(\sqrt{2}+1\right)=\frac{m_r-(\sqrt{2}-1)}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}\Rightarrow 0=\frac{-2\sqrt{2}}{1+m_r(\sqrt{2}-1)}$$

Ou seja, somente é satisfeita quando $m_r \longrightarrow \infty$, isto é, a reta r é vertical e, portanto, deve ser:

$$r: x = 2$$

As possíveis retas r são:

$$r: y = x + 1$$
$$r: y = 3$$
$$r: y = -x + 5$$
$$r: x = 2$$

Gabarito: Item a) um par de retas perpendiculares; Item b) $\boldsymbol{r: y = x + 1\ ou\ r: y = 3\ ou\ r: y = -x + 5\ ou\ r: x = 2.}$