UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL - UFMS
INSTITUTO DE FÍSICA – INFI
LABORATÓRIOS DIDÁTICOS DE ENSINO

# Aula

## Precisão, incertezas e erros em medidas

# Sumário

# 1. Introdução

Em vários momentos nos referimos a alguns ramos do conhecimento (física, química, engenharias, etc.) como ciências exatas. Esta é uma grande ilusão. Nenhuma medida está isenta de erro, por mais preciso que seja a aparelhagem usada. Assim é preciso saber lidar com os erros provenientes de medições.

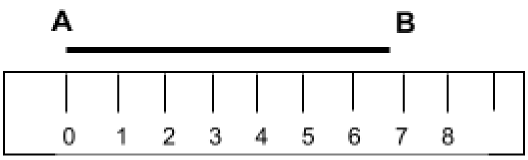
O resultado de uma medida deve então ser apresentado da seguinte forma:

**MEDIDA** = [VALOR NUMÉRICO] ± [ERRO] (UNIDADE)

Por exemplo, suponhamos que o resultado de uma experiência para medir a velocidade do som foi $v_s = 342,1 \pm 0,5\,\frac{m}{s}$. Isto significa que o valor da grandeza medida se encontra entre $341,6$ e $342,6\,m/s$.

## Algarismos significativos

Quando nos referimos a algarismos significativos em uma medida, estamos nos referindo a todos os algarismos de que temos certeza, mais um duvidoso.




Na figura acima, temos uma régua graduada em centímetros, e podemos dizer que o comprimento do segmento $\overline{AB}$ é $6,8\ cm$.

O número possui dois algarismos significativos. O valor $6$ é garantido (certo), mas o número $8$ é o duvidoso, visto que o tamanho do segmento $\overline{AB}$ é quase $7$ mas não podemos precisar quanto.

Os algarismos de um número são contados da esquerda para a direita, a partir do primeiro número não nulo, e são ditos significativos todos os valores corretos mais o duvidoso.

Ao realizar operações matemáticas com grandezas que possuem números diferentes de algarismos significativos diferentes, o resultado final da operação deve conter um número de algarismos significativos igual ao de menor número de entre as grandezas envolvidas. Em alguns casos cabe um pouco de bom senso.

**Exemplos:**

## Erro de leitura.

Nas experiências em que **uma única medição é feita**, o erro que se comete na medida corresponde ao menor intervalo da escala (apresentado como ± [metade da menor escala]). Assim, ao se medir o comprimento de 75 mm usando uma régua milimetrada temos que a menor divisão é 1 mm e consequentemente seu erro. Dessa forma a medida deve ser apresentada da seguinte maneira:

$$L = (75,0 \pm 0,5)\,mm \text{ ou } L = (75,0 \pm 0,5) \times 10^{-3}\,m$$

## Erros sistemáticos

Os erros sistemáticos possuem causas possíveis de identificar, já que costumam ocorrer sempre do mesmo jeito. Conhecendo as causas destes então os mesmos podem ser eliminados. Podem ser erros de calibração ou erros do observador (devido à paralaxe).

## Erros aleatórios

Os erros aleatórios resultam do efeito de um grande número de pequenas perturbações que se manifestam de forma diferente de medida para medida. O resultado conjunto destas perturbações faz com que os valores das medições sejam diferentes do esperado. Esse tipo de erro nunca é totalmente eliminado e podemos apenas minimizar seus efeitos.

## Erro Absoluto e Erro Relativo

Quando expressamos o erro nas unidades da própria grandeza medida denominamos erro absoluto.

$$L = (75,0 \pm 0,5)\,mm$$

O erro absoluto não é adequado para comparar o rigor na medida de grandezas distintas. Para este efeito utiliza-se uma representação adimensional do erro dado pelo quociente entre o erro absoluto da grandeza e o valor numérico da medição. Retomando o exemplo anterior, teríamos um erro relativo de $\delta L = 0,5/75,0 = 0,06$, ou $6\%$ e a medição passa a ser representada como:

$$L = 75,0\,mm \pm 6\,\%$$

Poderíamos dizer que quanto menor a incerteza relativa maior a qualidade da medida.

## Análise Estatística de Erros

Quando obtemos valores diferentes ao medir repetidas vezes uma mesma grandeza, estamos lidando com erros acidentais ou aleatórios. Este tipo de erros ocorre, por exemplo, devido às simplificações que frequentemente são introduzidas no modelo, ou às limitações do equipamento ou mesmo à intervenção subjetiva do observador no processo de medição. Neste caso, podemos calcular uma média sobre os valores obtidos na medida e consequentemente, diminuir a incerteza das nossas medições. Assim, tendo a medida, um caráter aleatório, é de se esperar que se o número de medições tenderem para o infinito, a média sobre essas medições tende para um valor constante que é o mais próximo do valor correto.

Média simples: Suponhamos que temos um conjunto de N medições de uma mesma grandeza. Se as várias medidas tiverem a mesma precisão podemos fazer uma média simples:

$$\langle X\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} X_i$$

Cada um dos valores individuais apresentam um desvio em relação a média. O desvio padrão (σ) nos dá uma medida da dispersão das medidas individuais em torno da média.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left(X_i - \langle X\rangle\right)^2}$$

A média da amostra X é uma variável aleatória, tal como X. Assim sendo, também lhe podemos atribuir um desvio médio padrão que é dado por:

$$\Delta X = \sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}}$$

Assim, **<u>após uma série de medidas</u>** podemos descrever o valor da grandeza como:

$$X = (\langle X\rangle \pm \Delta X)\ (unidade)$$

## Propagação de erros

Até agora foi mostrado como calcular o erro de uma medida feita diretamente. Mas é muito comum calcular uma grandeza que depende de outras grandezas que são medidas.

Por exemplo, a velocidade pode ser obtida ao dividir a distância percorrida pelo tempo gasto. Neste exemplo, distância e tempo são duas grandezas a serem medidas e que possuem um erro associado.

Considere uma grandeza $Y$ que não pode ser medida diretamente e depende de $N$ variáveis de forma que $Y = f\left(x_1, x_2 \cdots x_N\right)$ e para cada grandeza $x_i$ seja associado um erro $\Delta x_i$. O valor da grandeza $Y$ é dado por

$$Y = f\left(x_1, x_2 \cdots x_N\right),$$

e o erro $\Delta Y$ associado a grandeza $Y$ é dado por:

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial Y}{\partial x_1}\right)^2\left(\Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_2}\right)^2\left(\Delta x_2\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial Y}{\partial x_N}\right)^2\left(\Delta x_N\right)^2}.$$

| $y = f\left(x_1, x_2 \cdots x_N\right)$ | $\Delta y$ |
| --- | --- |

| | |
|---|---|
| $y = ax_1 + bx_2 + \cdots$<br>$a$ e $b$ são constantes | $\Delta y = \sqrt{a^2(\Delta x_1)^2 + b^2(\Delta x_2)^2 + \cdots}$ |
| $y = ax_1^{\ k} \bullet x_2^{\ m} + \cdots$ | $\Delta y = \sqrt{\left(kax_1^{k-1}x_2^{m}\right)^2(\Delta x_1)^2 + \left(max_1^{k}x_2^{m-1}\right)^2(\Delta x_2)^2 + \cdots}$ |
| $y = a \bullet ln(x)$ | $\Delta y = a \cdot \frac{\Delta x}{x}$ |
| $y = a \bullet e^x$ | $\Delta y = a \cdot e^x \cdot \Delta x$ |

## 2. Roteiro Experimental para Aula

Dados de identificação do Aluno

Nome:__________________________________________________

E-mail:__________________________________________________

Turma:__________________________________________________

## 3. Objetivos

- Nesta aula vamos trabalhar com a medição de grandezas e avaliar os erros de medida associados. Vamos avaliar o erro de uma grandeza calculada indiretamente.

## 4. Materiais

- Trena, cronômetro (pode ser usado o cronômetro do celular do aluno), pequena esfera de borracha.


## 5. Procedime

Dentro do laboratório, escolha dois pontos alinhados verticalmente, de preferência distantes entre si mais de um metro. Certifique que a esfera de borracha solta do ponto mais alto atinge o ponto mais baixo. Faça a medida direta da altura entre estes dois pontos utilizando a trena milimetrada: $\left(h_0 \pm \Delta h_0\right) unidade = ?$

Utilizando o cronômetro meça o tempo de queda livre da esfera entre estes dois pontos. Repita esse procedimento por mais algumas vezes (totalizando 15 vezes). Realize estas medidas alternando as pessoas. Preencha a Tabela 1 com seus resultados e responda os itens abaixo.

**Tabela 1**

| Medida i | Tempo (s) t_i |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| ... | |
| N=15 | |

1) **Perguntas:**

a) Qual o valor médio das medidas de tempo de queda?

$$\langle t \rangle = \left( \frac{1}{N} \sum t_i \right) unidade = ?$$

b) Qual o desvio padrão?

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N} \left(t_i - \langle t \rangle\right)^2} \ unidade = ?$$

c) Qual o desvio médio padrão?

$$\Delta t = \sigma_m = \sqrt{\frac{\sigma^2}{N}} \ unidade = ?$$

d) Escreva o valor do tempo de queda do objeto: $(\langle t \rangle \pm \Delta t) \, unidade = ?$

e) Qual é o desvio relativo percentual? $\frac{\Delta t}{\langle t \rangle} . 100\% = ?$

Conhecendo a gravidade $g = \langle g \rangle \pm \Delta g = (9,81 \pm 0,01) m/s^2$ e o tempo de queda, é possível estimar a altura da queda: $\left(h \pm \Delta h\right) unidade$. A altura $h$ pode ser calculada através da relação: $h = \frac{1}{2} \langle g \rangle \bullet \langle t \rangle^2$. A imprecisão (erro) $\Delta h$ pode ser encontrada usando a seguinte fórmula de propagação de erro

$$y = a{x_1}^k \cdot {x_2}^m + \cdots \qquad \Delta y = \sqrt{\left(kax_1^{k-1}x_2^m\right)^2(\Delta x_1)^2 + \left(max_1^k x_2^{m-1}\right)^2(\Delta x_2)^2 + \cdots}$$

sendo $y = h$, $\Delta y = \Delta h$, $a = \frac{1}{2}$, $x_1 = \langle g \rangle$, $k = 1$, $\Delta x_1 = \Delta g$, $x_2 = \langle t \rangle$, $m = 2$, $\Delta x_2 = \Delta t$. Logo, basta calcular $\Delta y$ para determinar $\Delta h$. Preencha a Tabela 2

**Tabela 2**

| | |
|---|---|
| Altura medida diretamente | $\left(h_0 \pm \Delta h_0\right)$ $unidade = ?$ |
| Altura calculada através da medida do tempo de queda | $\left(h \pm \Delta h\right)$ $unidade = ?$ |

f) Qual o desvio relativo percentual entre a altura calculada e a medida com a trena: $\frac{|h-h_0|}{h}. 100\% = ?$

g) Comente os resultados: $h$ e $h_0$ estão próximos dentro das margens de erro ? Se não, qual a possível causa da diferença ?

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

______________________________________________________________________

## 6. Referências Bibliográficas

RESNICK, ROBERT; HALLIDAY, DAVID; KRANE, KENNETH S.Física 1. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC Ed., c2003. 368 p. ISBN 85-216-1352-0.

HALLIDAY, DAVID; RESNICK, ROBERT; WALKER, JEARL. Fundamentos de física, 1. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC Ed., 1996. ISBN 85-216-1069-6.