AP3 de Cálculo I

Vinícius Menezes Monte

Maio de 2022

Questões

Calcule a derivada indicada: (4 escores cada)

1.

$$f(x) = x^2 + x \cdot \cos x + \pi, \quad f'(x)$$

2.

$$g(x) = \ln x - \frac{3^x}{\sin x} - \frac{1}{x}, \quad g'(x)$$

3.

$$\phi(\theta) = \cosh(\sin e^\theta) - \sinh(\cos e^\theta), \quad \phi'(\theta)$$

4.

$$y = x^{72} + \cos x + e^x, \quad \frac{d^{72}y}{dx^{72}}$$

5.

$$y - x^2y^2 - \cos(xy) = 4, \quad \frac{dy}{dx} \quad e \quad \frac{dx}{dy}$$

6. Encontre uma equação da reta tangente e uma equação da reta normal à curva $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 1$.

Soluções

1.

$$f(x) = x^2 + x \cdot \cos x + \pi, \quad f'(x)$$

A derivada da soma é a soma das derivadas:

$$f'(x) = \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(x \cos x)}{dx} + \frac{d(\pi)}{dx} \tag{1}$$

Portanto, voltemos nossa atenção para cada termo da soma.

A derivada de uma constante é zero. Como π é uma constante, a derivada de π é zero.

$$\frac{d(\pi)}{dx} = 0 \tag{2}$$

A derivada da função potencial $p(x) = x^n$ é $p'(x) = nx^{n-1}$. Desse modo

$$\frac{d(x^2)}{dx} = 2x \tag{3}$$

Para diferenciar o termo restante, utilizaremos a Regra do Produto.

A Regra do Produto diz que se

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

então

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

Ou ainda, usando a notação de Leibniz:

$$y = f(x)$$

$$u = g(x)$$

$$v = h(x)$$

$$y = u \cdot v \implies \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot v + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

Com isso em vista, analisemos a expressão

$$\frac{d(x \cos x)}{dx}$$

$$\frac{d(x \cos x)}{dx} = \frac{dx}{dx} \cdot \cos x + x \cdot \frac{d(\cos x)}{dx}$$

Pelas propriedades da função potencial

$$\frac{dx}{dx} = \frac{d(x^1)}{dx} = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

A derivada do cosseno é menos seno.

$$\frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$

Portanto

$$\begin{aligned}\frac{d(x\cos x)}{dx} &= 1 \cdot \cos x + x \cdot -\sin x \\ &= \cos x - x \cdot \sin x\end{aligned}$$

$$\frac{d(x\cos x)}{dx} = \cos x - x \cdot \sin x \tag{4}$$

De acordo com as expressões 1, 2, 3 e 4 temos que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d(x^2)}{dx} + \frac{d(x\cos x)}{dx} + \frac{d(\pi)}{dx} \\ &= 2x + \cos x - x \cdot \sin x + 0 \\ &= 2x + \cos x - x \cdot \sin x \\ &= \cos x - x(\sin x - 2)\end{aligned}$$

Finalmente:

$$f'(x) = \cos x - x(\sin x - 2)$$

2.

$$g(x) = \ln x - \frac{3^x}{\sin x} - \frac{1}{x}, \quad g'(x)$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, diferenciemos a soma termo a termo e fatoremos as constantes.

$$g'(x) = \frac{d(\ln x)}{dx} - \frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} - \frac{d(\frac{1}{x})}{dx} \tag{5}$$

Portanto, voltemos nossa atenção para cada termo da diferença.
É imediato que

$$\frac{d(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x} \tag{6}$$

Vamos reescrever a expressão $\frac{3^x}{\sin x}$

$$\frac{3^x}{\sin x} = 3^x \cdot \frac{1}{\sin x} = 3^x \cdot \csc x$$

Desse modo, temos que

$$\frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} = \frac{d(3^x \cdot \csc x)}{dx}$$

Apliquemos a Regra do Produto, descrita anteriormente:

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} &= \frac{d(3^x \cdot \csc x)}{dx} \\ &= \frac{d(3^x)}{dx} \cdot \csc x + 3^x \cdot \frac{d(\csc x)}{dx}\end{aligned}$$

Para continuarmos a aplicação da Regra do Produto, nos atentemos a algumas derivadas notáveis.

Seja a função exponencial $f_e(x) = a^x$. Sua derivada é $f_e'(x) = a^x \cdot \ln a$

Seja a função cossecante $f_c(x) = \csc x$. Sua derivada é $f_c'(x) = -\csc x \cdot \cot x$

Agora, continuemos a aplicação da Regra do Produto.

$$\begin{aligned}\frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} &= \frac{d(3^x)}{dx} \cdot \csc x + 3^x \cdot \frac{d(\csc x)}{dx} \\ &= (3^x \cdot \ln 3) \cdot \csc x + 3^x \cdot (-\csc x \cdot \cot x) \\ &= 3^x \cdot \ln 3 \cdot \csc x - 3^x \cdot \csc x \cdot \cot x \\ &= 3^x \cdot \csc x \cdot \ln 3 - 3^x \cdot \csc x \cdot \cot x \\ &= (3^x \cdot \csc x) \cdot \ln 3 - (3^x \cdot \csc x) \cdot \cot x \\ &= (3^x \cdot \csc x) \cdot (\ln 3 - \cot x)\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} = (3^x \cdot \csc x) \cdot (\ln 3 - \cot x) \tag{7}$$

Para diferenciar o termo restante, utilizaremos as propriedades da função potencial.

$$\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = \frac{d(x^{-1})}{dx} = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Ou seja

$$\frac{d(\frac{1}{x})}{dx} = -\frac{1}{x^2} \tag{8}$$

Das expressões 5, 6, 7 e 8 decorre que

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{d(\ln x)}{dx} - \frac{d(\frac{3^x}{\sin x})}{dx} - \frac{d(\frac{1}{x})}{dx} \\
&= \left(\frac{1}{x}\right) - ((3^x \cdot \csc x) \cdot (\ln 3 - \cot x)) - \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
&= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - ((3^x \cdot \csc x) \cdot (\ln 3 - \cot x)) \\
&= \frac{x+1}{x^2} - (3^x \cdot \csc x \cdot \ln 3 - 3^x \cdot \csc x \cdot \cot x) \\
&= \frac{x+1}{x^2} + 3^x \cdot \csc x \cdot \cot x - 3^x \cdot \csc x \cdot \ln 3
\end{aligned}
$$

Finalmente, temos que:

$$g'(x) = \frac{x+1}{x^2} + 3^x \cdot \csc x \cdot \cot x - 3^x \cdot \csc x \cdot \ln 3$$

3.

$$\phi(\theta) = \cosh(\sin e^\theta) - \sinh(\cos e^\theta), \quad \phi'(\theta)$$

Como a derivada da soma é a soma das derivadas, diferenciemos a soma termo a termo e fatoremos as constantes.

$$\phi'(\theta) = \frac{d(\cosh(\sin e^\theta))}{d\theta} - \frac{d(\sinh(\cos e^\theta))}{d\theta} \tag{9}$$

Portanto, voltemos nossa atenção para cada termo da diferença.

Analisemos o primeiro termo.

$$\frac{d(\cosh(\sin e^\theta))}{d\theta}$$

Vamos aplicar a Regra da Cadeia. Primeiro, analisemos o número de funções que figuram no primeiro termo.

Encontramos 3 funções:

- A função cosseno hiperbólico: cosh
- A função seno: sin
- A função exponencial de base e: e^θ

De acordo com essa análise, sabemos que usaremos a Regra da Cadeia na sua forma para três funções, que é a seguinte:

$$\frac{dy_1}{d\theta} = \frac{dy_1}{du_1} \cdot \frac{du_1}{dv_1} \cdot \frac{dv_1}{d\theta}$$

Façamos

- $y_1(u_1) = \cosh u_1$
- $u_1(v_1) = \sin v_1$
- $v_1(\theta) = e^\theta$

Desse modo

$$\frac{dy_1}{d\theta} = \frac{d(\cosh u_1)}{du_1} \cdot \frac{d(\sin v_1)}{dv_1} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta}$$

Para continuarmos a aplicação da Regra da Cadeia, nos atentemos a algumas derivadas notáveis.

- A derivada da função cosseno hiperbólico é a função seno hiperbólico:
$$(\cosh x)' = \sinh x$$
- A derivada da função seno é a função cosseno:
$$(\sin x)' = \cos x$$
- A derivada da função exponencial de base e é ela própria:
$$(e^x)' = e^x$$

Agora, continuemos a aplicação da Regra da Cadeia.

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{d\theta} &= \frac{d(\cosh u_1)}{du_1} \cdot \frac{d(\sin v_1)}{dv_1} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta} \\ &= (\sinh u_1) \cdot (\cos v_1) \cdot (e^\theta) \\ &= \sinh(\sin v_1) \cdot \cos v_1 \cdot e^\theta \\ &= \sinh(\sin e^\theta) \cdot \cos e^\theta \cdot e^\theta\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d(\cosh(\sin e^\theta))}{d\theta} = \sinh(\sin e^\theta) \cdot \cos e^\theta \cdot e^\theta \qquad (10)$$

Para o segundo termo, aplicamos procedimento análogo.
Analisemos o segundo termo.

$$\frac{d(\sinh(\cos e^\theta))}{d\theta}$$

Vamos aplicar a Regra da Cadeia. Primeiro, analisemos o número de funções que figuram no segundo termo.

Encontramos 3 funções:

- A função seno hiperbólico: sinh
- A função cosseno: cos
- A função exponencial de base e: e^θ

De acordo com essa análise, sabemos que usaremos a Regra da Cadeia na sua forma para três funções, que é a seguinte:

$$\frac{dy_2}{d\theta} = \frac{dy_2}{du_2} \cdot \frac{du_2}{dv_2} \cdot \frac{dv_2}{d\theta}$$

Façamos

- $y_2(u_2) = \sinh u_2$
- $u_2(v_2) = \cos v_2$
- $v_2(\theta) = e^\theta$

Desse modo

$$\frac{dy_2}{d\theta} = \frac{d(\sinh u_2)}{du_2} \cdot \frac{d(\cos v_2)}{dv_2} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta}$$

Para continuarmos a aplicação da Regra da Cadeia, nos atentemos a algumas derivadas notáveis.

- A derivada da função seno hiperbólico é a função cosseno hiperbólico:

$$(\sinh x)' = \cosh x$$

- A derivada da função cosseno é a função menos seno:

$$(\cos x)' = -\sin x$$

- Como já visto, a derivada da função exponencial de base e é ela própria:

$$(e^x)' = e^x$$

Agora, continuemos a aplicação da Regra da Cadeia.

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{d\theta} &= \frac{d(\sinh u_2)}{du_2} \cdot \frac{d(\cos v_2)}{dv_2} \cdot \frac{d(e^\theta)}{d\theta} \\ &= (\cosh u_2) \cdot (-\sin v_2) \cdot (e^\theta) \\ &= -\cosh(\cos v_2) \cdot \sin v_2 \cdot e^\theta \\ &= -\cosh(\cos e^\theta) \cdot \sin e^\theta \cdot e^\theta\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\frac{d(\sinh(\cos e^{\theta}))}{d\theta} = -\cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta} \cdot e^{\theta} \tag{11}$$

Das expressões 9, 10 e 11 decorre que

$$\begin{aligned}
\phi'(\theta) &= \frac{d(\cosh(\sin e^{\theta}))}{d\theta} - \frac{d(\sinh(\cos e^{\theta}))}{d\theta} \\
&= (\sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} \cdot e^{\theta}) - (-\cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta} \cdot e^{\theta}) \\
&= \sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} \cdot e^{\theta} + \cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta} \cdot e^{\theta} \\
&= e^{\theta} \cdot (\sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} + \cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta})
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\phi'(\theta) = e^{\theta} \cdot (\sinh(\sin e^{\theta}) \cdot \cos e^{\theta} + \cosh(\cos e^{\theta}) \cdot \sin e^{\theta})$$

4.

$$y = x^{72} + \cos x + e^{x}, \quad \frac{d^{72}y}{dx^{72}}$$

A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = \frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(e^{x})}{dx^{72}} \tag{12}$$

Portanto, voltemos nossa atenção para cada termo da soma.
Analisemos o termo $\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}}$.
Considere as seguintes derivadas:

$$\frac{d(x^{72})}{dx} = 72x^{71}$$
$$\frac{d^2(x^{72})}{dx^2} = 72 \cdot 71 \cdot x^{70}$$
$$\frac{d^3(x^{72})}{dx^3} = 72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot x^{69}$$
$$\frac{d^4(x^{72})}{dx^4} = 72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69 \cdot x^{68}$$
$$\frac{d^5(x^{72})}{dx^5} = 72 \cdot 71 \cdot 70 \cdot 69 \cdot 68 \cdot x^{67}$$
$$\dots$$
$$\frac{d^n(x^{72})}{dx^n} = \frac{72!}{(72-n)!} \cdot x^{72-n}$$
$$\dots$$
$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{(72-72)!} \cdot x^{72-72}$$
$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{(0)!} \cdot x^{0}$$
$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = \frac{72!}{1} \cdot 1$$
$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = 72!$$

Portanto:

$$\frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} = 72! \tag{13}$$

Analisemos o termo $\frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}}$.
Considere as seguintes derivadas:

$$\begin{aligned}
\frac{d(\cos x)}{dx} &= -\sin x \\
\frac{d^2(\cos x)}{dx^2} &= -\cos x \\
\frac{d^3(\cos x)}{dx^3} &= -(-\sin x) = \sin x \\
\frac{d^4(\cos x)}{dx^4} &= \cos x, \quad 4 = 4 \cdot 1 \\
\frac{d^5(\cos x)}{dx^5} &= -\sin x \\
\frac{d^6(\cos x)}{dx^6} &= -\cos x \\
\frac{d^7(\cos x)}{dx^7} &= \sin x \\
\frac{d^8(\cos x)}{dx^8} &= \cos x, \quad 8 = 4 \cdot 2 \\
\frac{d^9(\cos x)}{dx^9} &= -\sin x \\
\frac{d^{10}(\cos x)}{dx^{10}} &= -\cos x \\
\frac{d^{11}(\cos x)}{dx^{11}} &= \sin x \\
\frac{d^{12}(\cos x)}{dx^{12}} &= \cos x, \quad 12 = 4 \cdot 3 \\
&\dots \\
\frac{d^{4k}(\cos x)}{dx^{4k}} &= \cos x, \quad 4k = 4 \cdot k \\
&\dots \\
\frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} &= \cos x, \quad 72 = 4 \cdot 16 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Perceba que a derivada de 4k-ésima ordem, $k \in \mathbb{N}$, da função $\cos x$ é igual a $\cos x$. Como $72 = 4k$ com $k = 16$ e $16 \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} = \cos x \tag{14}$$

Analisemos o termo $\frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}}$.

Como a derivada da função exponencial de base e é a própria função exponencial de base e, ao calcular as derivadas de ordens superiores da função exponencial de base e, sempre obteremos ela própria. Desse modo

$$\frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}} = e^x \tag{15}$$

Das expressões 12, 13, 14 e 15 decorre que

$$\begin{aligned}\frac{d^{72}y}{dx^{72}} &= \frac{d^{72}(x^{72})}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(\cos x)}{dx^{72}} + \frac{d^{72}(e^x)}{dx^{72}} \\ &= (72!) + (\cos x) + (e^x) \\ &= 72! + \cos x + e^x\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\frac{d^{72}y}{dx^{72}} = \cos x + e^x + 72!$$

5.

$$y - x^2y^2 - \cos xy = 4, \quad \frac{dy}{dx} \quad e \quad \frac{dx}{dy}$$

Apliquemos a derivação implícita.

$$\frac{d(y - x^2y^2 - \cos xy)}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$$

Diferenciemos a soma termo a termo e fatoremos as constantes.

$$-\frac{d(\cos xy)}{dx} + \frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$$

Apliquemos a Regra da Cadeia

$$\frac{d(\cos xy)}{dx} = \frac{d(\cos u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \quad \text{onde} \quad u = xy \quad \text{e} \quad \frac{d(\cos u)}{du} = -\sin u \quad :$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} - \left(-\frac{d(xy)}{dx} \cdot \sin xy\right) = \frac{d(4)}{dx}$$

Simplifiquemos a expressão:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} + \frac{d(xy)}{dx} \cdot \sin xy = \frac{d(4)}{dx}$$

Apliquemos a Regra do Produto

$$\frac{d(uv)}{dx} = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}, \quad \text{onde} \quad u = x \quad \text{e} \quad v = y \quad :$$

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d(x^2y^2)}{dx} + \left(y \cdot \frac{dx}{dx} + x \cdot \frac{dy}{dx}\right) \cdot \sin xy = \frac{d(4)}{dx}$$

Organizemos a expressão

$$-\frac{d(x^2y^2)}{dx}+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Apliquemos a Regra do Produto

$$\frac{d(uv)}{dx}=v\cdot\frac{du}{dx}+u\cdot\frac{dv}{dx},\quad \text{onde}\quad u=x^2\quad \text{e}\quad v=y^2\quad :$$

$$-\left(x^2\cdot\frac{d(y^2)}{dx}+y^2\cdot\frac{d(x^2)}{dx}\right)+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Simplifiquemos a expressão:

$$-x^2\cdot\frac{d(y^2)}{dx}-\frac{d(x^2)}{dx}\cdot y^2+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Apliquemos a Regra da Cadeia

$$\frac{dy^2}{dx}=\frac{d(u^2)}{du}\cdot\frac{du}{dx},\quad \text{onde}\quad u=y\quad \text{e}\quad \frac{d(u^2)}{du}=2u\quad :$$

$$-x^2\cdot\left(2y\cdot\frac{dy}{dx}\right)-\frac{d(x^2)}{dx}\cdot y^2+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Simplifiquemos a expressão:

$$-2x^2\cdot\frac{dy}{dx}\cdot y-\frac{d(x^2)}{dx}\cdot y^2+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Organizemos a expressão

$$-\frac{d(x^2)}{dx}\cdot y^2+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}-2x^2\cdot y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Usemos as propriedades da função potencial.

$$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1},\quad \text{onde}\quad n=2\quad .\quad \frac{d(x^2)}{dx}=2x$$

$$-y^2\cdot 2x+\sin xy\cdot\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{dx}{dx}\cdot y\right)+\frac{dy}{dx}-2x^2\cdot y\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{d(4)}{dx}$$

Usemos as propriedades da função potencial.

$$\frac{d(x^n)}{dx} = nx^{n-1}, \quad \text{onde} \quad n = 1 \quad . \quad \frac{d(x)}{dx} = 1$$

$$-y^2 \cdot 2x + \sin xy \cdot \left(x \cdot \frac{dy}{dx} + 1 \cdot y \right) + \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d(4)}{dx}$$

A derivada da função constante é zero.

$$-2xy^2 + \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} + \sin xy \cdot \left(y + x \cdot \frac{dy}{dx} \right) = 0$$

Desenvolvemos a expressão

$$\sin(xy) \cdot y - 2xy^2 + \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

Subtraímos $y \cdot \sin(xy) - 2xy^2$ de ambos os lados da igualdade.

$$\begin{aligned} y \cdot \sin(xy) - y \cdot \sin(xy) - 2xy^2 + 2xy^2 + \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \\ (y \cdot \sin(xy) - y \cdot \sin(xy)) + (-2xy^2 + 2xy^2) + \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \\ (0) + (0) + \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \\ \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \end{aligned}$$

Fatoramos $\frac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} + x \cdot \sin(xy) \cdot \frac{dy}{dx} - 2x^2 \cdot y \cdot \frac{dy}{dx} &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \\ \frac{dy}{dx} \cdot (1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y) &= -y \cdot \sin(xy) + 2xy^2 \end{aligned}$$

Dividimos ambos os lados por $1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y}{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y} &= \frac{-y \cdot \sin(xy) + 2xy^2}{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y} \\ \frac{dy}{dx} \cdot 1 &= \frac{-y \cdot \sin(xy) + 2xy^2}{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{-y \cdot \sin(xy) + 2xy^2}{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y} \end{aligned}$$

Com isso, obtemos $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin(xy) \cdot y + 2xy^2}{1 + x \cdot \sin(xy) - 2x^2 \cdot y} \tag{16}$$

Para obter $\frac{dx}{dy}$, recorreremos à seguinte propriedade, que vale para as funções com inversa:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Desse modo

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \\
&= \frac{1}{\frac{-y\cdot\sin(xy)+2xy^2}{1+x\cdot\sin(xy)-2x^2\cdot y}} \\
&= 1 \cdot \frac{1 + x\cdot\sin(xy) - 2x^2\cdot y}{-y\cdot\sin(xy) + 2xy^2} \\
&= \frac{1 + x\cdot\sin(xy) - 2x^2\cdot y}{-y\cdot\sin(xy) + 2xy^2}
\end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1 + x\cdot\sin(xy) - 2x^2\cdot y}{-y\cdot\sin(xy) + 2xy^2} \tag{17}$$

6. Encontre uma equação da reta tangente e uma equação da reta normal à curva $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 1$.

Podemos obter uma equação de reta com base em um ponto que faz parte da reta e o coeficiente angular da reta.

A expressão que permite isso é conhecida como Equação Fundamental da Reta, e é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Em que

- y_0 é a ordenada de um ponto conhecido que faz parte da reta
- x_0 é a abscissa de um ponto conhecido que faz parte da reta
- m é o coeficiente angular da reta

Primeiro obteremos um ponto que faz parte da reta.

Com base na abscissa fornecida e na equação da curva, vamos obter o ponto em que a reta tangente tangencia a curva. Chamemos esse ponto de P.

$$\begin{aligned}
P(x_0, y_0) &= P\left(1, \sqrt{1} + \frac{1}{1^2}\right) \\
P(x_0, y_0) &= P\left(1, 1 + 1\right) \\
P(x_0, y_0) &= P(1, 2)
\end{aligned}$$

Portanto, P é o ponto de abscissa $x_0 = 1$ e de ordenada $y_0 = 2$.

Agora, precisamos de algum mecanismo que nos permita obter o coeficiente angular da reta tangente à curva.

Nos atentemos ao Significado Geométrico da Diferenciação:

$f'(x_0)$ representa o coeficiente angular da reta tangente à curva $f(x) = y$, no ponto $P(x_0, f(x_0))$.

De acordo com o Significado Geométrico da Diferenciação, temos que $y' = (\sqrt{x} + \frac{1}{x^2})'$ é uma expressão que fornece o coeficiente angular da reta tangente à curva no ponto de abcissa x.

Desse modo, devemos obter y', pois $y'(1)$ é o coeficiente angular m_t da reta tangente que desejamos escrever uma equação.

A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$y'(x) = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} + \frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx} \tag{18}$$

Voltemos nossa atenção para cada termo da soma.

Quanto ao termo $\frac{d(\sqrt{x})}{dx}$

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{d(x^{\frac{1}{2}})}{dx}$$

Exploremos as propriedades da função potencial.

$$\begin{aligned}
\frac{d(\sqrt{x})}{dx} &= \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \\
&= \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

Ou seja

$$\frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{19}$$

Quanto ao termo $\frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx}$

$$\frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx} = \frac{d(x^{-2})}{dx}$$

Novamente, exploremos as propriedades da função potencial.

$$\frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx} = -2x^{-3}$$
$$= -2 \cdot \frac{1}{x^3}$$
$$= -\frac{2}{x^3}$$

Ou seja

$$\frac{d(\frac{1}{x^2})}{dx} = -\frac{2}{x^3} \tag{20}$$

Das expressões 18, 19 e 20 decorre que

$$y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^3} \tag{21}$$

Agora podemos calcular m_t

$$m_t = y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} - \frac{2}{1^3} = \frac{1}{2} - 2 = -\frac{3}{2}$$

Ou seja

$$m_t = -\frac{3}{2} \tag{22}$$

A reta normal ao gráfico de uma função, em um ponto, é perpendicular à reta tangente, passando por esse ponto. É conhecido que o coeficiente angular da normal é o oposto do inverso do coeficiente angular da tangente.

Chamemos o coeficiente angular da normal m_n

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-\frac{3}{2}} = -1 \cdot -\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$m_n = \frac{2}{3} \tag{23}$$

Observe que ponto P também pertence à reta normal em questão.

Com isso, temos toda a informação necessária para escrever uma equação da reta tangente e da normal no ponto de abscissa $x = 1$.

Primeiro, obteremos uma equação da reta tangente.

$$
\begin{aligned}
y_t - y_0 &= m_t(x_t - x_0)\\
y_t - 2 &= -\frac{3}{2}(x_t - 1)\\
y_t &= -\frac{3}{2}(x_t - 1) + 2\\
y_t &= -\frac{3}{2}x_t + \frac{3}{2} + 2\\
y_t &= -\frac{3}{2}x_t + \frac{7}{2}
\end{aligned}
$$

Depois, obteremos uma equação da reta normal.

$$
\begin{aligned}
y_n - y_0 &= m_n(x_n - x_0)\\
y_n - 2 &= \frac{2}{3}(x_n - 1)\\
y_n &= \frac{2}{3}x_n - \frac{2}{3} + 2\\
y_n &= \frac{2}{3}x_n + \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

Finalmente:

Uma equação da reta tangente à curva $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 1$ é

$$y_t = -\frac{3}{2}x_t + \frac{7}{2}$$

Uma equação da reta normal à curva $y = \sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$ no ponto de abscissa $x = 1$ é

$$y_n = \frac{2}{3}x_n + \frac{4}{3}$$