AP1 de Cálculo I

Vinícius Menezes Monte

Março de 2022

Questões

Calcule, se existir: (4 escores cada)

1.

$$lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1}\right)$$

2.

$$lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}}$$

3.

$$lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$$

4.

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}$$

5.

$$lim_{x\to -\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

6. Encontre as assíntotas vertical e horizontal de, se essas existirem, de

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-9}$$

Soluções

1.

$$lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1}\right)$$

O limite da soma é a soma dos limites.

$$lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}+\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^3-1} \tag{1}$$

Calculemos primeiro $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}$. Vamos começar testando x_0.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}=\frac{(1)^2-1}{(1)-2}=\frac{1-1}{1-2}=\frac{0}{-1}=0$$

Ou seja,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}=0 \tag{2}$$

Calculemos, então $\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^3-1}$. Vamos começar testando x_0.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^3-1}=\frac{(1)^9-1}{(1)^3-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\ (indet.)$$

Ao testar x_0 chegamos em uma indeterminação.

Chamemos $\frac{x^9-1}{x^3-1}$ de f.

Procuremos uma função g tal que $\lim_{x\to 1} g\ = \lim_{x\to 1} f$, mas que não nos leve a uma indeterminação. Para tanto, vamos manipular a expressão de f.

$$\begin{aligned}\frac{x^9-1}{x^3-1}&=\frac{\cancel{(x-1)}(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}\\&=\frac{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}\end{aligned}$$

$$g(x)=\frac{x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^2+x+1}$$

Vamos testar x_0.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} g(x)\\
&= \frac{(1)^8+(1)^7+(1)^6+(1)^5+(1)^4+(1)^3+(1)^2+(1)+1}{(1)^2+(1)+1}\\
&= \frac{1+1+1+1+1+1+1+1+1}{1+1+1}\\
&= \frac{9}{3}\\
&= 3
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to 1} \frac{x^9-1}{x^3-1} = 3 \tag{3}
$$

De acordo com as expressões 1, 2 e 3 podemos concluir que

$$
lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2} + \lim_{x\to 1}\frac{x^9-1}{x^3-1} = 0+3 = 3
$$

Ou seja,

$$
lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}+\frac{x^9-1}{x^3-1} = 3
$$

2.

$$
lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}}
$$

Vamos começar testando x_0.

$$
lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}} = \frac{\sqrt[6]{1}-1}{1-\sqrt[5]{1}} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\ (indet.)
$$

Ao testar x_0 chegamos em uma indeterminação.

Chamemos $\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}}$ de $f(x)$.

Procuremos uma função g tal que $\lim_{x\to 1} g\ = \lim_{x\to 1} f$, mas que não nos leve a uma indeterminação. Para tanto, vamos manipular a expressão de f.

Façamos $x = y^{30}$. Perceba que se $x = 1 \implies y = 1$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[6]{x}-1}{1-\sqrt[5]{x}} &= \frac{\sqrt[6]{y^{30}}-1}{1-\sqrt[5]{y^{30}}}\\
&= \frac{y^5-1}{1-y^6}\\
&= \frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(1^3)^2-(y^3)^2}\\
&= \frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(1^3+y^3)(1^3-y^3)}\\
&= \frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(1+y^3)(1-y^3)}\\
&= \frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(1+y^3)(-1)(-1+y^3)}\\
&= -\frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(1+y^3)(y^3-1)}\\
&= -\frac{(y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(y^3+1)(y^3-1)}\\
&= -\frac{\cancel{(y-1)}(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(y^3+1)\cancel{(y-1)}(y^2+y+1)}\\
&= -\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(y^3+1)(y^2+y+1)}
\end{aligned}
$$

$$
g(x) = -\frac{(y^4+y^3+y^2+y+1)}{(y^3+1)(y^2+y+1)} \tag{4}
$$

Vamos testar x_0.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1} g(x)\\
&= -\frac{((1)^4+(1)^3+(1)^2+(1)+1)}{((1)^3+1)((1)^2+(1)+1)}\\
&= -\frac{(1+1+1+1+1)}{(1+1)(1+1+1)}\\
&= -\frac{(5)}{(2)(3)}\\
&= -\frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[6]{x} - 1}{1 - \sqrt[5]{x}} = -\frac{5}{6}$$

3.

$$lim_{x \to 5} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

Vamos começar testando x_0.

$$lim_{x \to 5} \frac{|x - 5|}{x - 5} = \frac{|5 - 5|}{5 - 5} = \frac{|0|}{0} = \frac{0}{0} \ (indet.)$$

Ao testar x_0 chegamos em uma indeterminação.

Afim de estudar a existência e valor desse limite, vamos fazer a análise dos limites laterais.

Antes de tudo, vamos nos recordar a definição de $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{5}$$

Agora, vamos estudar quando x se aproxima de x_0 pela esquerda.

$$lim_{x \to 5^-} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

Quando x se aproxima de x_0 pela esquerda assume valores estritamente menores que 5. Portanto, $x - 5$ é um número negativo de módulo muito próximo de zero. Nessas condições, pela definição de módulo (expressão 5):

$$|x - 5| = -(x - 5)$$

Com isso, podemos calcular o limite lateral quando x se aproxima de x_0 pela esquerda.

$$lim_{x \to 5^-} \frac{|x - 5|}{x - 5} = \frac{-(x - 5)}{(x - 5)} = -1$$

$$lim_{x \to 5^-} \frac{|x - 5|}{x - 5} = -1 \tag{6}$$

Agora, vamos estudar quando x se aproxima de x_0 pela direita.

$$lim_{x \to 5^+} \frac{|x - 5|}{x - 5}$$

Quando x se aproxima de x_0 pela direita assume valores estritamente maiores que 5. Portanto, $x - 5$ é um número positivo de módulo muito próximo de zero. Nessas condições, pela definição de módulo(expressão 5):

$$|x - 5| = x - 5$$

Com isso, podemos calcular o limite lateral quando x se aproxima de x_0 pela direita.

$$lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}=\frac{x-5}{x-5}=1$$

$$lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}=1 \tag{7}$$

Observe que, de acordo com 6 e 7, os limites laterais são diferentes. Logo, $lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5}$ não existe.

$$lim_{x\to 5}\frac{|x-5|}{x-5} \text{ não existe, pois } lim_{x\to 5^-}\frac{|x-5|}{x-5}\neq lim_{x\to 5^+}\frac{|x-5|}{x-5}$$

4.

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}$$

Vamos começar testando x_0.

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}=\frac{(4)^2-1}{(4)^2-7(4)+12}=\frac{16-1}{16-28+12}=\frac{15}{0}\ (indet.)$$

Ao testar x_0 chegamos em uma indeterminação.

Vamos começar aplicando propriedades dos limites para tornar o problema mais simples.

$$\begin{aligned}lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}&=\left(lim_{x\to 4^-}x^2-1\right)\left(lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x^2-7x+12}\right)\\&=\left(4^2-1\right)\left(lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x^2-7x+12}\right)\\&=15\left(lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x^2-7x+12}\right)\end{aligned}$$

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12}=15\left(lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x^2-7x+12}\right) \tag{8}$$

Analisemos a expressão $x^2-7x+12$ com mais cuidado.

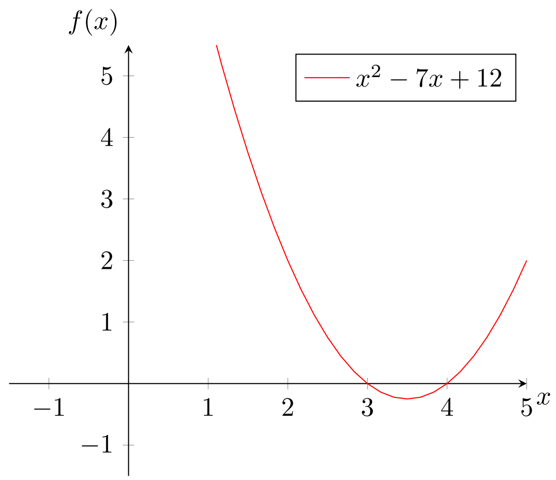
Se trata de uma função do segundo grau, cujo gráfico é uma parábola com a concavidade para cima e uma de suas raízes é $x'=4$. Obtenhamos a segunda raiz da equação do segundo grau.

Chamemos a segunda raiz de x''

Como a soma das raizes de uma função quadrática é igual a $\frac{-b}{a}$, temos que

$$
\begin{aligned}
x' + x'' &= \frac{-b}{a} \\
4 + x'' &= \frac{-(-7)}{(1)} \\
4 + x'' &= 7 \\
4 - 4 + x'' &= 7 - 4 \\
0 + x'' &= 3 \\
x'' &= 3
\end{aligned}
$$

Agora podemos desenhar o gráfico de $f(x) = x^2 - 7x + 12$.



Observamos que os valores à direita de $x = 3$ e à esquerda de $x = 4$ são negativos. Ou seja, os valores na vizinhança de $lim_{x \to 4^-} x^2 - 7x + 12 = 0$ à esquerda de $x = 4$ são negativos.

Desse modo, temos que em $g(x) = \frac{1}{x^2-7x+12}$, os valores na vizinhança associada a $lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x^2-7x+12}$ e à esquerda de $x = 4$ são resultados de divisões do número 1 por números negativos de módulo muito próximo a zero. Além disso, $x = 4$ é assíntota vertical de $g(x) = \frac{1}{x^2-7x+12}$.

Nessas condições, temos condições de afirmar o seguinte limite:

$$lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x^2 - 7x + 12} = -\infty \tag{9}$$

Agora, com base nas expressões 8 e 9 temos que:

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12} = 15\left(lim_{x\to 4^-}\frac{1}{x^2-7x+12}\right)$$
$$= 15(-\infty)$$
$$= -\infty$$

A solução, portanto, é:

$$lim_{x\to 4^-}\frac{x^2-1}{x^2-7x+12} = -\infty$$

5.

$$lim_{x\to -\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}$$

$$lim_{x\to -\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} = lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}\right)$$
$$= lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot(\sqrt{x^2+x}+x)}$$
$$= lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x^2+x-x^2}$$
$$= lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{x}$$
$$= lim_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x})}+x}{x}$$
$$= lim_{x\to -\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x}$$

Como x é negativo, $|x| = -x$

$$
\begin{aligned}
lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x} &= lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x}\\
&= lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}{x}\\
&= lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\sqrt{1+\frac{1}{x}}-(-x)}{x}\\
&= lim_{x\to-\infty}\frac{(-x)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)}{x}\\
&= lim_{x\to-\infty}-\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\\
&= -lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\\
&= -\left(lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-lim_{x\to-\infty}1\right)\\
&= -\left(lim_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x}}-1\right)\\
&= -\left(\sqrt{lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)}-1\right)\\
&= -\left(\sqrt{\left(lim_{x\to-\infty}1+lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\right)}-1\right)\\
&= -(\sqrt{1+0}-1)\\
&= -(\sqrt{1}-1)\\
&= -(1-1)\\
&= -(0)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ou seja,

$$lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+x}-x}=0$$

6. Encontre as assíntotas vertical e horizontal de, se essas existirem, de

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

O gráfico da função f admite assíntota vertical se

$$lim_{x \to x_0} = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad f(x_0) = \frac{k}{0},\, k \neq 0$$

Além disso, nessas condições, a assíntota vertical é $x = x_0$.

Para verificar se $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-9}$ admite assíntota vertical, vamos zerar excolher x_0 que zere o denominador da expressão. Portanto, $x_0 = 3$

Com efeito,

$$f(3) = \frac{(3)^2 + 2(3) - 3}{(3)^2 - 9} = \frac{9 + 6 - 3}{9 - 9} = \frac{12}{0} = \frac{k}{0} \quad \text{com} \quad k = 12 \neq 0$$

Ou seja, a função f admite assíntota vertical e essa reta é $x = 3$.

$$\text{A Assíntota Vertical de} \quad f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9} \quad \text{é} \quad x = 3$$

Por outro lado, o gráfico da função f admite assíntota horizontal se

$$lim_{x \to \pm\infty} f = L$$

Para verificar se $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2-9}$ admite assíntota horizontal, calculemos o seguinte limite:

$$lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 9}$$

$$\begin{aligned}
lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} &= lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+2x-3}{x^2}}{\frac{x^2-9}{x^2}}\\
&= lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}+\frac{-3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{-9}{x^2}}\\
&= lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{2}{x}+\frac{-3}{x^2}}{1+\frac{-9}{x^2}}\\
&= \frac{lim_{x\to+\infty}(1)+lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{x})+(lim_{x\to+\infty}(\frac{-3}{x^2}))}{lim_{x\to+\infty}1+lim_{x\to+\infty}(\frac{-9}{x^2})}\\
&= \frac{lim_{x\to+\infty}(1)+lim_{x\to+\infty}(\frac{2}{\infty})+(lim_{x\to+\infty}(\frac{-3}{(\infty)^2}))}{lim_{x\to+\infty}1+lim_{x\to+\infty}(\frac{-9}{(\infty)^2})}\\
&= \frac{1+0+0}{1+0}\\
&= \frac{1}{1}\\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja

$$lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} = 1$$

Ou seja, a função f admite assíntota horizontal e essa reta é $y=1$.

$$\text{A Assíntota Horizontal de} \quad f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-9} \quad \text{é} \quad y=1$$