AP2 de Cálculo I

Vinícius Menezes Monte

Abril de 2022

Questões

Calcule: (4 escores cada)

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 10x}$$

3.

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}}$$

4.

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right)$$

5.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-6^x}{10^x-20^x}$$

6. Analise a continuidade de

$$f(x) = \begin{cases} x+x^2 & \text{se } x<1 \\ 3x^4-1 & \text{se } x\geq 1 \end{cases} \tag{1}$$

Soluções

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{4} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} \\
&= \frac{1}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{3}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3x}{x} \right) \\
&= \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x} \\
&= \frac{3}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3x}
\end{aligned}$$

Façamos t = 3x. Perceba que se $3x = 0 \implies t = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} \tag{2}$$

Agora, vamos nos recordar da definição do limite trigonométrico fundamental:

$$\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1 \tag{3}$$

Com base nas expressões 2 e 3 podemos dizer que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4} \cdot \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{4x} = \frac{3}{4}$$

2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos 10x}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 10x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos 10x}\cdot\frac{1+\cos 10x}{1+\cos 10x}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)(1+\cos 10x)}{(1-\cos 10x)(1+\cos 10x)}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)(1+\cos 10x)}{1-\cos^2 10x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(x^2)(1+\cos 10x)}{\sin^2 10x}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 10x}\cdot(1+\cos 10x)\right)
\end{aligned}
$$

O limite do produto é o produto dos limites:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos 10x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 10x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos 10x) \tag{4}
$$

Calculemos primeiro $\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 10x}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 10x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin 10x}\right)^2\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{\sin 10x}{x}\right)^{-1}\right)^2\\
&= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 10x}{x}\right)^{-2}\\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}\right)^{-2}\\
&= \left(10\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}\right)^{-2}
\end{aligned}
$$

Façamos $t = 10x$. Perceba que se $10x = 0 \implies t = 0$

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 10x} = \left(10\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}\right)^{-2} = \left(10\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^{-2} \tag{5}
$$

Com base nas expressões 5 e 3 podemos dizer que:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 10x} = \left(10\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^{-2} = (10\cdot 1)^{-2} = (10)^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}
$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 10x} = \frac{1}{100} \tag{6}$$

Agora, calculemos $\lim_{x\to 0}(1+\cos 10x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1+\cos 10x) &= \lim_{x\to 0} 1 + \lim_{x\to 0} \cos 10x \\
&= 1 + \lim_{x\to 0} \cos 10(0) \\
&= 1 + \lim_{x\to 0} \cos 0 \\
&= 1 + \lim_{x\to 0} 1 \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to 0}(1+\cos 10x) = 2 \tag{7}$$

A partir das expressões 4, 6 e 7 podemos afirmar que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 10x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 10x} \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos 10x) = \frac{1}{100} \cdot 2 = \frac{1}{50}$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 10x} = \frac{1}{50}$$

3.

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}}$$

Podemos escrever a expressão como:

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}} = 3^{\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}} \tag{8}$$

Agora, podemos focar em obter o valor do limite que aparece no expoente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\cos^2(20x)}}{\frac{1}{\cos^2(10x)}-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{1}{1-\sin^2(10x)}-1}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}-\frac{1}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{1}{1-\sin^2(10x)}-\frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin^2(20x)-1}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{1-(1-\sin^2(10x))}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1-\sin^2(20x)-1}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{1-1+\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin^2(20x)+(1-1)}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{(1-1)+\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}}{\frac{\sin^2(10x)}{1-\sin^2(10x)}}\\
&= \lim_{x\to 0}\left(-\frac{\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}\cdot\frac{1-\sin^2(10x)}{\sin^2(10x)}\right)\\
&= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(20x)}{1-\sin^2(20x)}\cdot\frac{1-\sin^2(10x)}{\sin^2(10x)}\right)\\
&= -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)}\cdot\frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)}\right)
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1} = -\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)}\cdot\frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)}\right) \tag{9}
$$

O limite do produto é o produto dos limites:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)}\cdot\frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)} \tag{10}$$

Calculemos primeiro $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(20x)}{\sin(10x)}\right)^2 \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(20x)}{\sin(10x)}\right)^2 \\
&= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(20x)}{x}}{\frac{\sin(10x)}{x}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(20x)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(10x)}{x}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim_{x\to 0}20\frac{\sin(20x)}{20x}}{\lim_{x\to 0}10\frac{\sin(10x)}{10x}}\right)^2
\end{aligned}$$

Façamos $20x = t$ e $10x = u$. Perceba que se $20x = 0 \implies t = 0$, e que se $10x = 0 \implies u = 0$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)} &= \left(\frac{\lim_{x\to 0}20\frac{\sin(20x)}{20x}}{\lim_{x\to 0}10\frac{\sin(10x)}{10x}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim_{x\to 0}20\frac{\sin(t)}{t}}{\lim_{x\to 0}10\frac{\sin(u)}{u}}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim_{x\to 0}20\cdot 1}{\lim_{x\to 0}10\cdot 1}\right)^2 \\
&= \left(\frac{\lim_{x\to 0}20}{\lim_{x\to 0}10}\right)^2 \\
&= \left(\frac{20}{10}\right)^2 \\
&= 2^2 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)} = 4 \tag{11}$$

Agora, calculemos $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)} &= \lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2(10\cdot 0)}{1-\sin^2(20\cdot 0)} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2 0}{1-\sin^2 0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1-(\sin 0)^2}{1-(\sin 0)^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1-0^2}{1-0^2} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1-0}{1-0} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{1}{1} \\
&= \lim_{x \to 0} 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)} = 1 \tag{12}$$

Partindo das expressões 9 , 10 , 11 e 12, temos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1} &= -\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(20x)}{\sin^2(10x)} \cdot \lim_{x \to 0} \frac{1-\sin^2(10x)}{1-\sin^2(20x)} \\
&= -4 \cdot 1 \\
&= -4
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1} = -4 \tag{13}$$

De 8 e 13, temos:

$$\lim_{x \to 0} 3^{\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}} = 3^{\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}} = 3^{-4} = \frac{1}{81}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to 0} 3^{\frac{1-\sec^2(20x)}{\sec^2(10x)-1}} = \frac{1}{81}$$

4.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right)$$

Façamos $\frac{3}{5x} = \frac{1}{t}$. Perceba que

$$\frac{3}{5x} = \frac{1}{t} \implies 5x = 3t \implies x = \frac{3t}{5}$$

Perceba também que $x \to +\infty \implies t \to +\infty$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right) &= \ln\left(\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right)\\
&= \ln\left(\lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2\cdot\frac{3t}{5}}\right)\\
&= \ln\left(\lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{6t}{5}}\right)\\
&= \ln\left(\lim_{t\to +\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6}{5}}\right)\\
&= \ln\left(\left(\lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6}{5}}\right)
\end{aligned}$$

Ou seja:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right) = \ln\left(\left(\lim_{t\to +\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6}{5}}\right) \tag{14}$$

Lembremos que podemos obter o número neperiano e através do seguinte limite:

$$e = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \tag{15}$$

Das expressões 14 e 15, temos:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right) &= \ln\left(\left(\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{\frac{6}{5}}\right)\\
&= \ln(e^{\frac{6}{5}})\\
&= \ln e^{\frac{6}{5}}\\
&= \frac{6}{5}\cdot\ln e\\
&= \frac{6}{5}\cdot 1\\
&= \frac{6}{5}
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{3}{5x}\right)^{2x}\right) = \frac{6}{5}$$

5.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-6^x}{10^x-20^x}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2^x-6^x}{10^x-20^x} &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-6^x}{x}}{\frac{10^x-20^x}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{2^x-6^x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{10^x-20^x}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1-6^x+1}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{10^x-1-20^x+1}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)-(6^x-1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{(10^x-1)-(20^x-1)}{x}} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{(2^x-1)}{x}-\frac{(6^x-1)}{x}\right)}{\lim_{x\to 0}\left(\frac{(10^x-1)}{x}-\frac{(20^x-1)}{x}\right)} \\
&= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(6^x-1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{(10^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(20^x-1)}{x}}
\end{aligned}
$$

Ou seja:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{2^x-6^x}{10^x-20^x} = \frac{\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(6^x-1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{(10^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(20^x-1)}{x}} \tag{16}
$$

Lembremos do seguinte limite especial:

$$
\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \tag{17}
$$

Das expressões 16 e 17, temos:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{2^x-6^x}{10^x-20^x} &= \frac{\lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(6^x-1)}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{(10^x-1)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(20^x-1)}{x}} \\
&= \frac{\ln 2-\ln 6}{\ln 10-\ln 20} \\
&= \frac{\ln\frac{2}{6}}{\ln\frac{10}{20}} \\
&= \frac{\ln\frac{1}{3}}{\ln\frac{1}{2}} \\
&= \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

6. Analise a continuidade de

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 3x^4 - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \tag{18}$$

Sejam:

$$g(x) = x + x^2$$

$$h(x) = 3x^4 - 1$$

Primeiro de tudo, vamos nos lembrar da seguinte propriedade da continuidade das funções: **toda função polinomial é contínua.**

Pela propriedade, temos que:

- g é contínua, pois é uma função polinomial.
- h é contínua, pois é uma função polinomial.
- $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } x < 1 \\ h(x) & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$

Com isso, sabemos que f é contínua em $x < 1$ e em $x > 1$.

Para concluirmos a análise da continuidade de f, analisemos se

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 & \text{se } x < 1 \\ 3x^4 - 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{é contínua em } x = 1$$

f é contínua no ponto $x_0 = 1$, se, e somente se:

I. $f(x_0)$ for definido

II. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existir

III. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Vamos verificar essas condições.

I. $f(x_0)$ for definido

$$f(x_0) = f(1) = 3 \cdot (1)^4 - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$f(x_0) = f(1) = 2$$

Verifica-se que a primeira condição é verdadeira, pois $f(x_0) = 2$ é definido.

II. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existir

Para $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existir, os limites laterais devem ser iguais. Vamos verificar se esse é o caso.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x + x^2) = \lim_{x \to 1^-} (1 + 1^2) = \lim_{x \to 1^-} (2) = 2$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} 3x^4 - 1 = \lim_{x \to 1^+} 3(1)^4 - 1 = \lim_{x \to 1^+} 3 - 1 = \lim_{x \to 1^+} 2$$

Ou seja:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$$

Portanto, $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe, pois os limites laterais são iguais.

$$\text{III. } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Do item II. sabemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 2$$

Do item I. sabemos que

$$f(x_0) = 2$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 2$$

Sendo assim, a terceira condição é verdadeira.

Com as 3 condições sendo verdadeira, concluímos f é contínua no ponto $x = 1$.

Acrescentando isso à análise dos pontos que não são $x = 1$, concluímos que **f é contínua em todos os seus pontos**.