AP4 de Cálculo I

Vinícius Menezes Monte

Junho de 2022

Questões

1. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m de cerca.

2. Suponha que a diminuição na pressão sanguínea de uma pessoa dependa de determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se $x \quad mg$ da droga forem tomados , a queda da pressão será uma função de x. Seja $f(x)$ essa função e $f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x)$ onde x está em $[0, k]$, k constante. Calcule o valor de x que causa o maior decréscimo da pressão.

3. Analise a função $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x^3 + 3x^2 + 2$, destacando os pontos críticos ; os intervalos onde f cresce e onde f decresce; intervalos onde a concavidade é positiva e intervalos onde essa concavidade é negativa; pontos de inflexão e assíntotas verticais e horizontais se essas existirem.

Soluções

1. Ache as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m cerca.

O maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 m cerca é aquele possui a maior área dentre os demais.

A fim de encontrar as dimensões de tal jardim, analisaremos inicialmente o perímetro do jardim.

Como o jardim é retangular, temos que lados opostos do jardim possuem o mesmo comprimento. Chamamos o comprimento do primeiro par de lados opostos x e o segundo par de lados opostos y, de acordo com a figura:

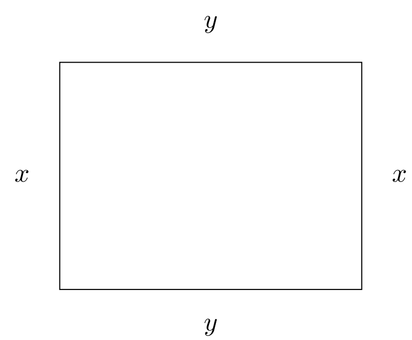

Figure 1: O jardim é representado por um retângulo de lados x e y

Como dispomos de 100 metros de cerca, temos que 100 é o perímetro do retângulo procurado. Desse modo:

$$2x + 2y = 100 \tag{1}$$

Ou ainda,

$$x + y = 50 \tag{2}$$

Agora, vamos analisar a área do jardim.

A área de um retângulo, A, é dada pelo produto do comprimento da base pelo comprimento da altura. Com os símbolos que escolhemos, temos que:

$$A = xy \tag{3}$$

A partir de 2, podemos obter uma expressão que nos dá x a partir de y.

$$y = 50 - x \tag{4}$$

Substituindo 4 em 2, temos:

$$\begin{aligned} A &= xy \\ A &= x(50 - x) \\ A &= -x^2 + 50x \end{aligned}$$

Agora temos uma função que associa valores de x a valores de A.

$$A(x) = -x^2 + 50x \tag{5}$$

Perceba que, como não existe área negativa, o domínio da função área está restrito ao intervalo $[0, 50]$. Isso também pode ser visualizado em um esboço do gráfico dessa função, que é uma parábola com a concavidade para baixo, já que o coeficiente angular é negativo.

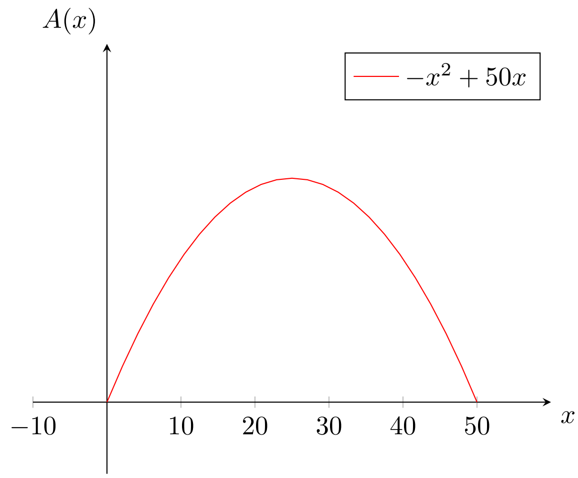

Figure 2: Esboço do gráfico da função A

Agora, para estudar os máximos da função, procuremos os números críticos da função 5.

Calculemos A', a derivada primeira de A.

A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$A'(x) = (-x^2)' + (50x)'$$

A Regra do Múltiplo Constante diz que a derivada de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pela derivada da função.

$$A'(x) = -(x^2)' + (50x)'$$

A derivada da função potencial $p(x) = x^n$ é $p'(x) = nx^{n-1}$. Desse modo:

$$\begin{aligned} A'(x) &= -(2x^{2-1}) + (50x^{1-1}) \\ &= -(2x^1) + (50x^0) \\ &= -(2x^1) + (50x^0) \\ &= -(2x) + (50 \cdot 1) \\ &= -2x + 50 \end{aligned}$$

Desse modo, temos A'

$$A'(x) = -2x + 50 \tag{6}$$

Agora, procuremos os valores de x que fazem $A'(x) = 0$. Esses valores serão números críticos, candidatos a gerarem máximos e mínimos.

$$\begin{aligned} A'(x) &= 0 \\ -2x + 50 &= 0 \\ 2x &= 50 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

Ou seja, temos que 25 é um número crítico.

Para encontrar os máximos e mínimos de A testamos os números críticos e os extremos do intervalo.

- $A(0) = -(0)^2 + 50(0) = 0 + 0 = 0$
- $A(25) = -25^2 + 50(25) = -625 + 1250 = 625$
- $A(50) = -(50)^2 + 50(50) = -2500 + 2500 = 0$

Ou seja, $x = 25$ gera área máxima.

$$x_{max} = 25 \tag{7}$$

Através das expressões 4 e 7, obtemos y_{max}.

$$y_{max} = 50 - x_{max} = 50 - 25 = 25$$

Ou seja, o valor de y para a maior área é 25.

$$y_{max} = 25 \tag{8}$$

Finalmente, as dimensões do maior jardim retangular que pode ser fechado com 100 metros de cerca são 25×25. Ou seja, tal jardim é quadrado.

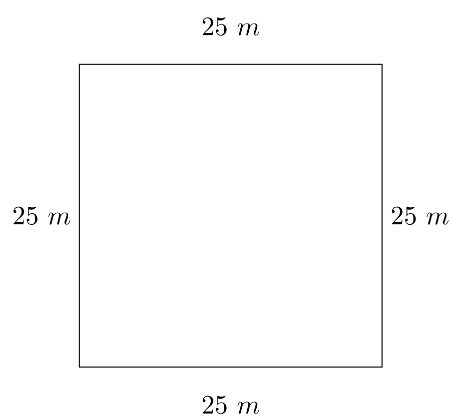

Figure 3: O jardim é quadrado

2. Suponha que a diminuição na pressão sanguínea de uma pessoa dependa de determinada droga que ela deverá tomar. Assim, se x mg da droga forem tomados , a queda da pressão será uma função de x. Seja $f(x)$ essa função e $f(x) = \frac{1}{2}x^2(k - x)$ onde x está em $[0, k]$, k constante. Calcule o valor de x que causa o maior decréscimo da pressão.

Inicialmente, vamos trabalhar a expressão de f de modo a achar $g = f$ que torne o estudo mais simples.

$$\frac{1}{2}x^2(k - x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3$$

Desse modo:

$$g(x) = \frac{k}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 \tag{9}$$

Agora, obtenhamos g', a derivada primeira de g.
A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$g'(x) = \left(\frac{k}{2}x^2\right)' + \left(-\frac{1}{2}x^3\right)'$$

A Regra do Múltiplo Constante diz que a derivada de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pela derivada da função.

$$g'(x) = \frac{k}{2}(x^2)' - \frac{1}{2}(x^3)'$$

A derivada da função potencial $p(x) = x^n$ é $p'(x) = nx^{n-1}$. Desse modo:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= \frac{k}{2}(x^2)' - \frac{1}{2}(x^3)' \\
&= \frac{k}{2}(2x^{2-1}) - \frac{1}{2}(3x^{3-1}) \\
&= \frac{k}{2}(2x^1) - \frac{1}{2}(3x^2) \\
&= \frac{k}{\cancel{2}}(\cancel{2}x) - \frac{3}{2}(x^2) \\
&= kx - \frac{3}{2}x^2
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$g'(x) = kx - \frac{3}{2}x^2 \tag{10}$$

Agora, procuremos os valores de x que fazem $g'(x) = 0$. Esses valores serão números críticos, candidatos a gerarem máximos e mínimos.

$$\begin{aligned} g'(x) &= 0 \\ kx - \frac{3}{2}x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Percebemos que a expressão dos valores de x que fazem $g'(x) = 0$ é uma equação do segundo grau do tipo $ax^2 + bx = 0$. Podemos obter as raízes de tal equação através do processo de fatoração:

$$\begin{aligned} kx - \frac{3}{2}x^2 &= 0 \\ x\left(k - \frac{3}{2}x\right) &= 0 \end{aligned}$$

É imediato que a equação possui uma raiz nula $x_1 = 0$. Podemos obter a segunda raiz através da solução da seguinte equação:

$$k - \frac{3}{2}x_2 = 0$$

Resolvemos a equação, de acordo:

$$\begin{aligned} k - \frac{3}{2}x_2 &= 0 \\ -\frac{3}{2}x_2 &= -k \\ \frac{3}{2}x_2 &= k \\ x_2 &= \frac{2}{3}k \end{aligned}$$

Com isso, obtemos a segunda raiz $x_2 = \frac{2}{3}k$.

Para encontrar os máximos e mínimos de $f = g$ testamos os números críticos e os extremos do intervalo.

- Início do intervalo $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2(k - 0) = 0k = 0$$

- Crítico: $x = 0$

$$f(0) = \frac{1}{2}0^2(k - 0) = 0k = 0$$

- Crítico: $x = \frac{2}{3}k$

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{2}{3}k\right) &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}k\right)^2\left[k - \left(\frac{2}{3}k\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}k^2\right)\left(k - \frac{2}{3}k\right) \\
&= \frac{4}{18}k^2\left(k - \frac{2}{3}k\right) \\
&= \frac{2}{9}k^2\left(k - \frac{2}{3}k\right) \\
&= \frac{2}{9}k^3 - \frac{4}{27}k^3 \\
&= \frac{6}{27}k^3 - \frac{4}{27}k^3 \\
&= \frac{2}{27}k^3
\end{aligned}
$$

- Fim do intervalo $x = k$

$$f(k) = \frac{1}{2}k^2(k-k) = \frac{1}{2}k^2(0) = 0$$

Segue que o valor de x que causa o maior decréscimo de pressão é:

$$x_{max} = \frac{2}{27}k^3$$

3. Analise a função $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2$, destacando os pontos críticos ; os intervalos onde f cresce e onde f decresce; intervalos onde a concavidade é positiva e intervalos onde essa concavidade é negativa; pontos de inflexão e assíntotas verticais e horizontais se essas existirem.

Começamos derivando f.

A derivada da soma é a soma das derivadas.

$$f'(x) = \left(\frac{1}{4}x^4\right)' + (-2x^3)' + (3x^2)' + (2)'$$

A Regra do Múltiplo Constante diz que a derivada de uma constante multiplicada por uma função é a constante multiplicada pela derivada da função.

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^4)' - 2(x^3)' + 3(x^2)' + (2)'$$

A derivada da constante é zero.

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^4)' - 2(x^3)' + 3(x^2)' + 0 = \frac{1}{4}(x^4)' - 2(x^3)' + 3(x^2)'$$

A derivada da função potencial $p(x) = x^n$ é $p'(x) = nx^{n-1}$. Desse modo:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{4}(x^4)' - 2(x^3)' + 3(x^2)' \\
&= \frac{1}{4}(4x^{4-1}) - 2(3x^{3-1}) + 3(2x^{2-1}) \\
&= \frac{1}{4}(4x^3) - 2(3x^2) + 3(2x^1) \\
&= \frac{1}{\cancel{4}}(\cancel{4}x^3) - 2(3x^2) + 3(2x) \\
&= x^3 - 6x^2 + 6x
\end{aligned}$$

Portanto:

$$f'(x) = x^3 - 6x^2 + 6x \tag{11}$$

Temos interesse nos pontos críticos de f. Os pontos críticos de f são valores no domínio de f para os quais f não é diferenciável ou sua derivada é 0.

Uma vez que f é polinomial, temos que f é derivável em todos os seus pontos. Desse modo, os pontos críticos de f são apenas os valores no domínio de f para os quais a sua derivada é 0.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 0 \\
x^3 - 6x^2 + 6x &= 0
\end{aligned}$$

Ou seja, os pontos críticos de f são as raízes da equação:

$$x^3 - 6x^2 + 6x = 0$$

Começemos o processo de resolução dessa equação, então.

$$\begin{aligned}
x^3 - 6x^2 + 6x &= 0 \\
x(x^2 - 6x + 6) &= 0
\end{aligned}$$

É imediato que a equação possui uma raiz nula $x_1 = 0$. Podemos obter a segunda raiz através da solução da seguinte equação:

$$x^2 - 6x + 6 = 0$$

Resolvemos essa equação, então. Primeiro, adicionamos 3 em ambos os lados.

$$x^2 - 6x + 9 = 3$$

Escrevemos o lado esquerdo como um quadrado.

$$(x-3)^2 = 3$$

Aplicamos a raiz quadrada em ambos os lados.

$$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{3}$$

Por definição, a raiz quadrada do quadrado de x é o módulo de x.

$$|x-3| = \sqrt{3}$$

Vamos nos recordar a definição de $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases} \tag{12}$$

Desse modo:

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{se } x-3 \geq 0 \\ -(x-3) & \text{se } x-3 < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Vamos obter, então, a raiz correspondente a cada caso:

- $|x-3| = x-3$

$$\begin{aligned} |x-3| &= \sqrt{3} \\ x-3 &= \sqrt{3} \\ x &= 3+\sqrt{3} \end{aligned}$$

- $|x-3| = -(x-3)$

$$\begin{aligned}|x-3| &= \sqrt{3}\\ -(x-3) &= \sqrt{3}\\ -x+3 &= \sqrt{3}\\ x-3 &= -\sqrt{3}\\ x &= 3-\sqrt{3}\end{aligned}$$

Com isso, obtivemos os pontos críticos de f. Eles são:

- $x_0' = 0$
- $x_0'' = 3+\sqrt{3}$
- $x_0''' = 3-\sqrt{3}$

Agora, vamos analisar os intervalos nos quais f cresce e decresce.

O Teorema do Fator diz que se $x = c$ é uma raiz de um polinômio, então $(x-c)$ é um fator desse polinômio.

Podemos aplicar isso à expressão de f' a fim de obter uma fatoração que nos permita estudar o final de f'.

- Se 0 é raiz do polinômio, então $x-0 = x$ é fator do polinômio
- Se $3+\sqrt{3}$ é raiz do polinômio, então $x-(3+\sqrt{3}) = x-3-\sqrt{3}$ é fator do polinômio
- Se $3-\sqrt{3}$ é raiz do polinômio, então $x-(3-\sqrt{3}) = x-3+\sqrt{3}$ é fator do polinômio

Desse modo, temos que:

$$x^3-6x^2+6x = x(x-3-\sqrt{3})(x-3+\sqrt{3}) \tag{14}$$

Agora, vamos desenhar um esquema para estudar o comportamento da função:

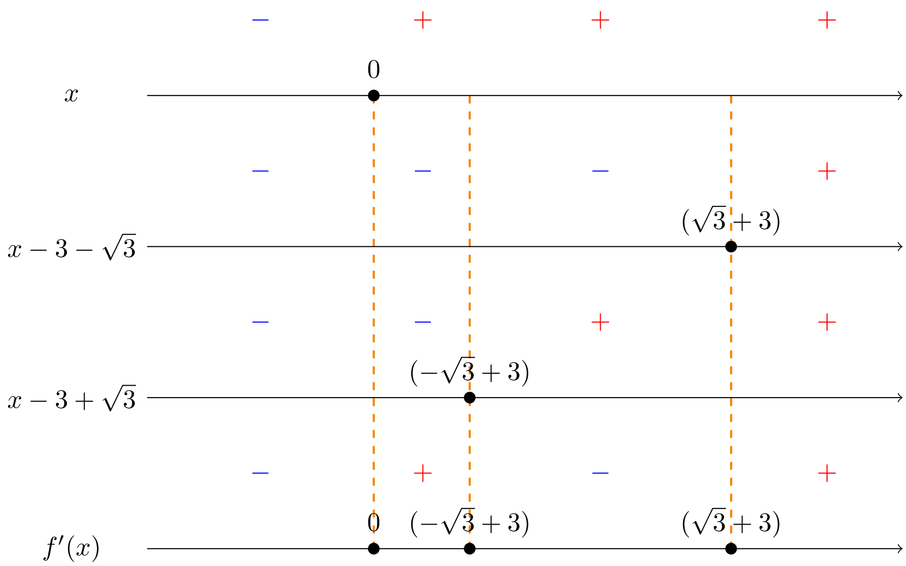

Figure 4: Intervalos nos quais f cresce e decresce.

Como se pode ver, a função cresce no intervalo $(0,-\sqrt{3}+3)\cup(\sqrt{3}+3,+\infty)$ e descresce no intervalo $(-\infty,0)\cup(-\sqrt{3}+3,\sqrt{3}+3)$.

Agora, investiguemos os intervalos onde a concavidade é positiva e onde a concavidade é negativa. A concavidade da função f é positiva quando $f''(x)>0$ e negativa quando $f''(x)<0$.

Que obtenhamos f''.

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f(x)')' \\ &= (x^3-6x^2+6x)' \\ &= 3x^2-12x+6 \end{aligned}$$

Portanto,

$$f''(x) = 3x^2-12x+6 \tag{15}$$

Vamos estudar o sinal de f'' para descobrir o sinal da concavidade em cada intervalo.

Primeiro, obtemos as raízes de f'', resolvendo a seguinte equação:

$$3x^2-12x+6=0$$

Dividimos ambos os lados por 3.

$$x^2-4x+2=0$$

Adicionamos 2 em ambos os lados da equação.

$$x^2 - 4x + 4 = 2$$

Escrevemos o lado esquerdo da equação como um quadrado.

$$(x-2)^2 = 2$$

Aplicamos raiz quadrada em ambos os lados da equação.

$$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{2}$$

Por definição, temos que:

$$|x-2| = \sqrt{2}$$

Os valores do lado esquerdo da equação seguem a definição de módulo, divididos em casos.

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{se } x-2 \geq 0 \\ -(x-2) & \text{se } x-2 < 0 \end{cases} \tag{16}$$

Vamos obter, então, a raiz correspondente a cada caso:

- $|x-2| = x-2$

$$\begin{aligned} |x-2| &= \sqrt{2} \\ x-2 &= \sqrt{2} \\ x &= 2+\sqrt{2} \end{aligned}$$

- $|x-2| = -(x-2)$

$$\begin{aligned} |x-2| &= \sqrt{2} \\ -(x-2) &= \sqrt{2} \\ -x+2 &= \sqrt{2} \\ x-2 &= -\sqrt{2} \\ x &= 2-\sqrt{2} \end{aligned}$$

Ou seja, as raízes de $3x^2 - 12x + 6$ são $x_1 = 2-\sqrt{2}$ e $x_2 = 2+\sqrt{2}$. Utilizemos o Teorema do Fator para fatorar o polinômio.

- Se $2+\sqrt{2}$ é raiz do polinômio, então $x-(2+\sqrt{2}) = x-2-\sqrt{2}$ é fator do polinômio

- Se $2-\sqrt{2}$ é raiz do polinômio, então $x-(2-\sqrt{2}) = x-2+\sqrt{2}$ é fator do polinômio

Desse modo, temos que:

$$3x^2 - 12x + 6 = 3(x-2-\sqrt{2})(x-2+\sqrt{2}) \tag{17}$$

Agora, vamos desenhar um esquema para estudar o comportamento da função:

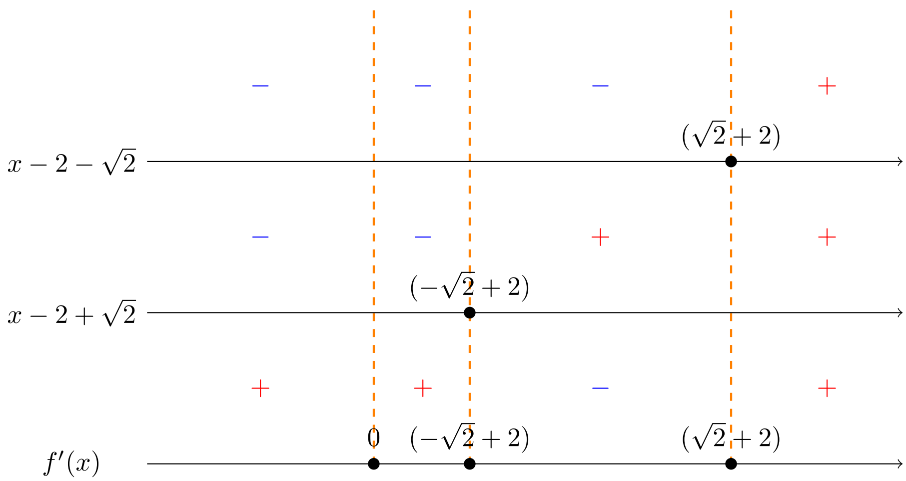

Figure 5: Intervalos nos quais f cresce e decresce.

Como se pode ver, a concavidade é positiva no intervalo $(-\infty, -\sqrt{2}+2) \cup (\sqrt{2}+2, +\infty)$ e negativa no intervalo $(-\sqrt{2}+2, \sqrt{2}+2)$.

Na posse do esquema 5, também é possível obter facilmente os pontos de inflexão. Pontos de Inflexão de f são os pontos em f em que a curvatura(a derivada de segunda ordem) muda de sinal. Portanto, os pontos de inflexão de f são:

- $A(-\sqrt{2}+2, f(-\sqrt{2}+2)) = A(-\sqrt{2}+2, 4\sqrt{2}-3)$
- $B(\sqrt{2}+2, f(\sqrt{2}+2)) = B(\sqrt{2}+2, -3-4\sqrt{2})$

Agora, verifiquemos se a função admite assíntotas.

O gráfico da função f admite assíntota vertical se

$$\lim_{x\to x_0} = \pm\infty \qquad \text{e} \qquad f(x_0) = \frac{k}{0},\, k \neq 0$$

Além disso, nessas condições, a assíntota vertical é $x = x_0$.

É imediato que f **não** admite assíntota vertical, pois f é polinomial, seu domínio é $\mathbb{R}$, e ela é contínua em todos os pontos, jamais ocorrendo saltos ou buracos. Outro argumento é que a expressão não possui denominador que pudesse ser zerado, tal que a condição $f(x_0) = \frac{k}{0}$, $k \neq 0$ fosse satisfeita.

Por outro lado, o gráfico da função f admite assíntota horizontal se

$$\lim_{x \to \pm\infty} f = L$$

em que L é uma constante real.

Verifiquemos se f admite assíntota horizontal. Para isso, calculamos o limite mencionado.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2 &= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4}x^4 \\ &= \lim_{x \to \pm\infty} x^4\end{aligned}$$

Como quadrados são sempre números positivos, segue que

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 2 = +\infty \tag{18}$$

Portanto, f **não** admite assíntota horizontal.

Finalmente, podemos resumir as informações desejadas.

Pontos Críticos:

- $x_0' = 0$
- $x_0'' = 3 + \sqrt{3}$
- $x_0''' = 3 - \sqrt{3}$

Intervalos onde f cresce e decresce:

- cresce no intervalo $(0, -\sqrt{3} + 3) \cup (\sqrt{3} + 3, +\infty)$
- descresce no intervalo $(-\infty, 0) \cup (-\sqrt{3} + 3, \sqrt{3} + 3)$

Intervalos onde a concavidade é positiva ou é negativa:

- positiva no intervalo $(-\infty, -\sqrt{2} + 2) \cup (\sqrt{2} + 2, +\infty)$
- negativa no intervalo $(-\sqrt{2} + 2, \sqrt{2} + 2)$

Pontos de Inflexão:

- $A(-\sqrt{2} + 2, 4\sqrt{2} - 3)$
- $B(\sqrt{2} + 2, -3 - 4\sqrt{2})$

Sobre assíntotas verticais e horizontais:

- f **não** admite assíntota vertical
- f **não** admite assíntota horizontal