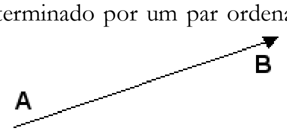
VETORES: Tratamento Geométrico

Existem dois tipos de grandezas: as escalares e as vetoriais. As *escalares* são aquelas que ficam completamente definidas por apenas um número real: comprimento, área, volume, massa, temperatura, densidade. As *vetoriais* são grandezas que não ficam completamente determinadas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número de unidades correspondente. Para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu módulo (ou comprimento, ou intensidade), sua direção e seu sentido. Força, velocidade, aceleração, são exemplos de grandezas vetoriais.

Antes de falarmos em direção e sentido precisamos relembrar alguns conceitos geométricos:

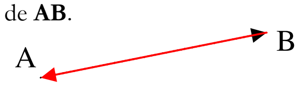
Segmento orientado

Um segmento orientado é determinado por um par ordenado de pontos, o primeiro chamado *origem* do segmento, o segundo chamado *extremidade*.



Quando a extremidade coincide com a origem chamamos o segmento de *nulo*.

Se **AB** é um segmento orientado, o segmento orientado **BA** é chamado *oposto* de **AB**.

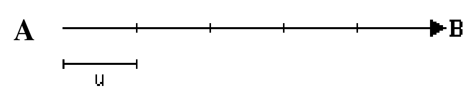


Medida de um Segmento

Fixada uma unidade de comprimento, a cada segmento orientado pode-se associar um número real, não negativo, que é a medida do segmento em relação aquela unidade. A medida do segmento orientado é o seu *comprimento* ou seu *módulo*. O comprimento do segmento **AB** é indicado por $|AB|$.

Assim, o comprimento do segmento **AB** representado na figura abaixo é de 5 unidades de comprimento:

$|AB| = 5$ u.c.

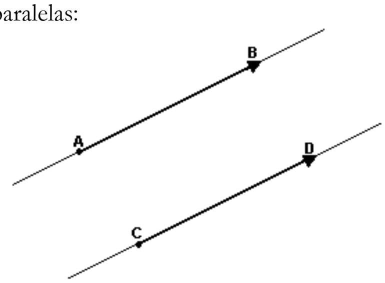


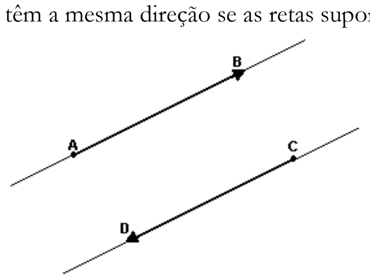
Observações

a. Os segmentos nulos têm comprimento igual a zero
b. $|AB| = |BA|$.

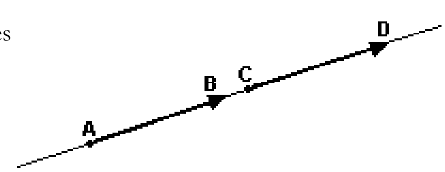
Direção e Sentido

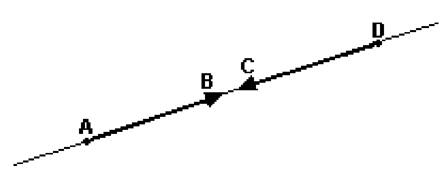
Dois segmentos orientados não nulos **AB** e **CD** têm a mesma direção se as retas suportes desses segmentos são paralelas:





ou coincidentes



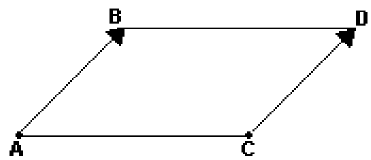


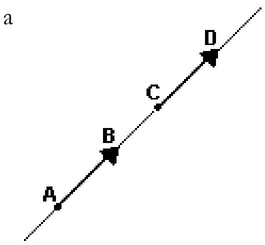
Observações

a. Só se pode comparar os sentidos de dois segmentos orientados se eles têm mesma direção.
b. Dois Segmentos orientados opostos têm sentidos contrários.

<u>Segmentos Eqüipolentes</u>

Dois segmentos orientados **AB** e **CD** são *eqüipolentes* quando têm a mesma direção, o mesmo sentido e o mesmo comprimento. Neste caso indicamos AB ~ CD ("AB eqüipolente a



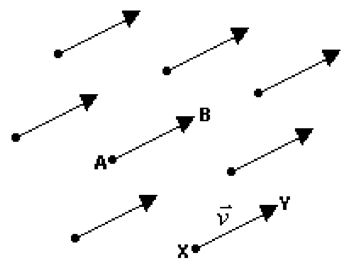


Observação: Dois segmentos nulos são sempre eqüipolentes.

<u>Vetor</u>

O *Vetor* determinado por um segmento orientado **AB** é o conjunto de todos os segmentos orientados eqüipolentes a **AB**. Se indicarmos com $\vec{v}$ este conjunto, simbolicamente poderemos escrever:

$\vec{v}$ = {**XY** / **XY** ~ **AB**} (conjunto dos segmentos XY tais que XY é eqüipolente a AB) onde **XY** é um segmento qualquer do conjunto.



O vetor determinado por **AB** é indicado por $\overrightarrow{AB}$ ou **B - A** ou $\vec{v}$.

As características de um vetor $\vec{v}$ são as mesmas de qualquer um de seus representantes, isto é: o *módulo*, a *direção* e o *sentido* do vetor são o módulo, direção e o sentido de qualquer um de seus representantes.

O módulo de $\vec{v}$ se indica por | $\vec{v}$ | .

Vetores iguais: Dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são iguais se, e somente se, **AB ~ CD**.

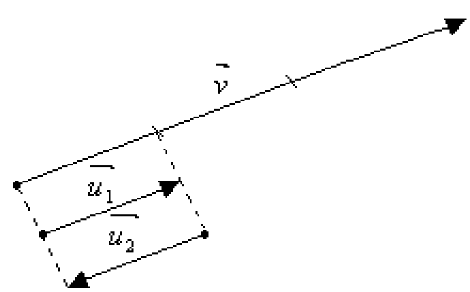
Vetor Nulo: Os segmentos nulos, por serem eqüipolentes entre si, determinam um único vetor, chamado vetor nulo ou vetor zero, e que é indicado por $\vec{0}$.

Vetores Opostos: Dado um vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, o vetor $\overrightarrow{BA}$ é o oposto de $\overrightarrow{AB}$ e se indica por - $\overrightarrow{AB}$ ou por -$\vec{v}$.

Vetor Unitário: Um vetor $\vec{v}$ é unitário se | $\vec{v}$ | = 1.

Versor: *Versor* de um vetor não nulo $\vec{v}$ é o vetor unitário de mesma direção e mesmo sentido de $\vec{v}$.

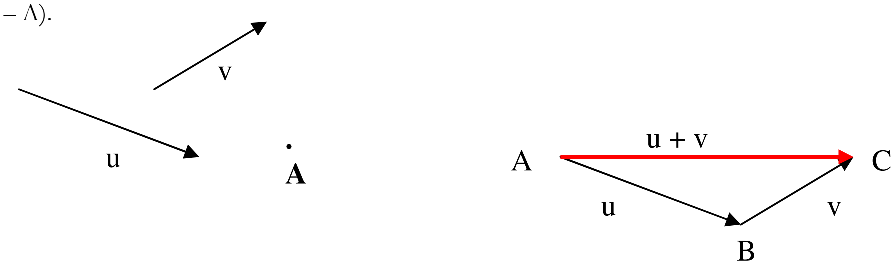
Por exemplo, tomemos um vetor $\vec{v}$ de módulo 3. Na figura, os vetores $\vec{u}_1$ e $\vec{u}_2$ são vetores unitários, porém apenas $\vec{u}_1$ é versor de $\vec{v}$.



__**Operações com Vetores**__

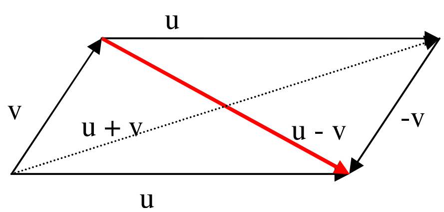
Adição

Consideremos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, cuja soma $\vec{u} + \vec{v}$ pretendemos determinar. Tomemos um ponto A qualquer e, com origem nele, tracemos um segmento orientado AB representante do vetor $\vec{u}$. Utilizemos a extremidade B para traçar o segmento orientado BC representante de $\vec{v}$. O vetor representado pelo segmento orientado de origem A e extremidade C é, por definição, a *soma* de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é, $\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ou (B – A) + (C – B) = (C – A).



Para o caso de determinar a soma de 3 vetores, o procedimento é análogo.

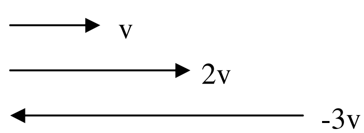
O vetor $\vec{u} - \vec{v}$ é a *diferença* entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e pode ser determinado fazendo a soma: $\vec{u} + (-\vec{v})$



Multiplicação de um número real por um vetor

Dado um vetor $\vec{v} \neq 0$ e um número real $k \neq 0$, o *produto do número real k pelo vetor* $\vec{v}$ é o vetor $k\vec{v}$ tal que:

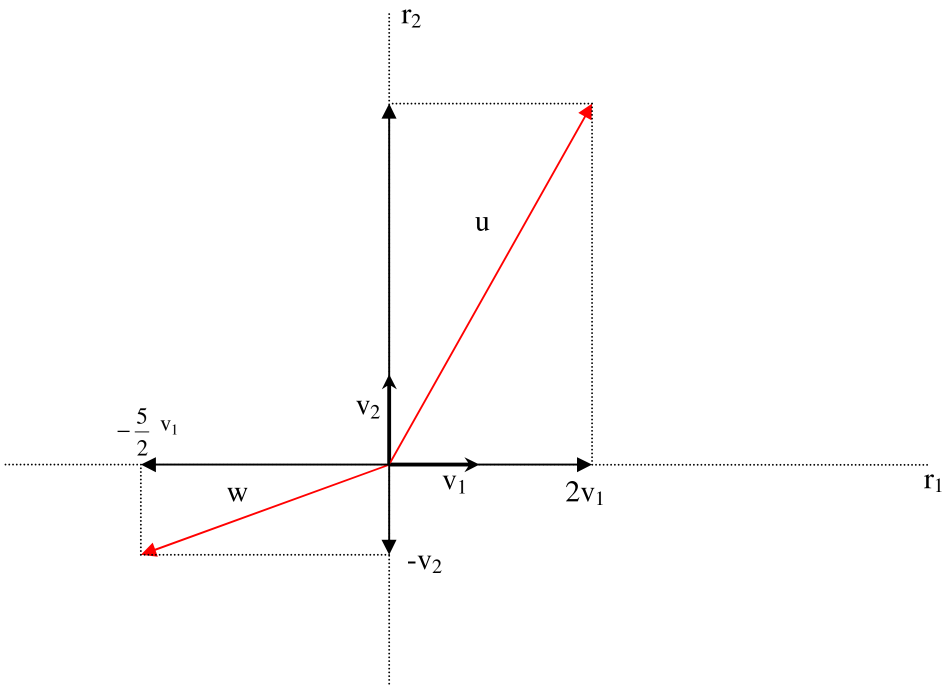
a) módulo: $| k\vec{v} | = | k | \; | \vec{v} |$
b) direção: $k\vec{v}$ é paralelo a $\vec{v}$
c) sentido: $k\vec{v}$ e $\vec{v}$ têm mesmo sentido se $k > 0$, e sentidos contrários se $k < 0$.



VETORES: Tratamento Algébrico

Decomposição no plano

Consideremos dois vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ na paralelos, representados com a mesma origem no ponto O, sendo r_1 e r_2 retas contendo estes representantes, respectivamente.



Os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, representados na figura, são expressos em função de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ por:

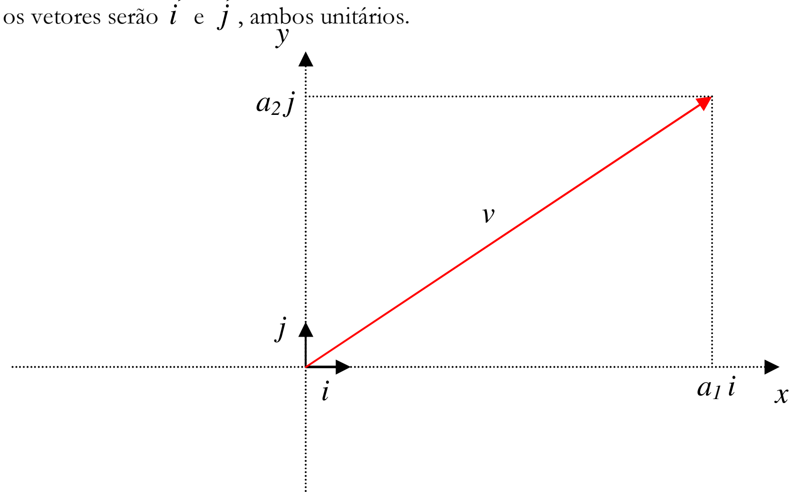
$\vec{u} = 2\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2$

$\vec{w} = -\frac{5}{2}\vec{v}_1 - \vec{v}_2$

De um modo geral, dados dois vetores quaisquer $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ não paralelos, para cada vetor $\vec{u}$ representado no mesmo plano de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, existe uma só dupla de números reais a_1 e a_2 tal que

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2$$

No sistema cartesiano ortogonal xOy os vetores serão $\vec{i}$ e $\vec{j}$, ambos unitários.



Então $\vec{v} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$.

O vetor $\vec{v} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$ também será representado por $\vec{v} = (a_1, a_2)$.

Sendo assim:

<u>Igualdade:</u> Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ temos $\vec{u} = \vec{v}$ se, e somente se, $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

Exemplo: O vetor $\vec{u} = (x+1,4)$ é igual ao vetor $\vec{v} = (5, 2y-6)$. Qual o valor de x e de y?

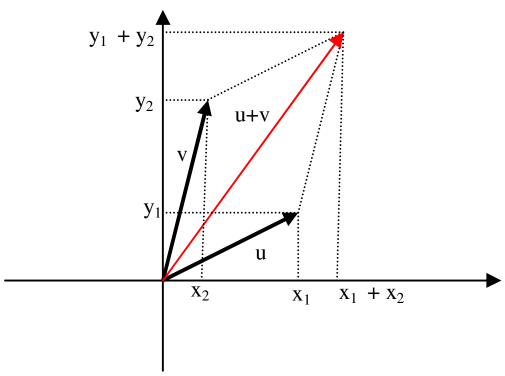
$\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow x+1 = 5$ e $4 = 2y-6 \Leftrightarrow x = 4$ e $y = 5$.

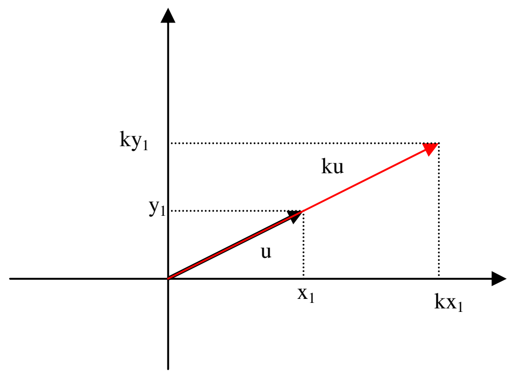
<u>Operações:</u> Sendo $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$ e k um número real:

$\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$

$\vec{u} - \vec{v} = (x_1 - x_2 , y_1 - y_2)$

$K\,\vec{u} = (k\,x_1, k\,y_1)$





<u>Módulo:</u> O módulo ou comprimento do vetor $\vec{v} = (x,y)$ é definido por $|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Por quê?

Exemplos: 1. Dados $\vec{u} = (2, -3)$ e $\vec{v} = (-1,4)$, determinar $3\,\vec{u} + 2\vec{v}$ e $3\,\vec{u} - 2\vec{v}$.

$3\,\vec{u} + 2\vec{v} = 3(2, -3) + 2(-1,4) = (6, -9) + (-2, 8) = (4,-1)$

$3\,\vec{u} - 2\vec{v} = 3(2, -3) - 2(-1,4) = (6, -9) - (-2, 8) = (8,-17)$

2. Determinar o vetor $\vec{x}$ na igualdade $3\,\vec{x} + 2\vec{u} = \frac{1}{2}\,\vec{v} + \vec{x}$, sendo dados $\vec{u} = (3,-1)$ e $\vec{v} = (-2,4)$.

Resposta: $\vec{x} = (-7/2, 2)$

3. Encontrar os números a e b tais que $\vec{v} = a\,\vec{v}_1 + b\,\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 = (3,5)$, $\vec{v}_2 = (-1,2)$ e $\vec{v} = (10,2)$.

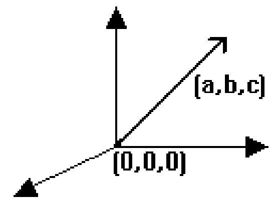
Resposta: a = 2 e b = -4.

<u>Vetores no Espaço</u>

Existe uma estreita relação entre vetores no espaço R^2 e no espaço R^3. Na verdade, o conceito de vetor geométrico nos espaços euclidianos é sempre realizado da mesma forma, o que diferencia são as aplicações mais ricas que existem em R^3.

Definição: Um vetor (geométrico) no espaço R^3 é uma classe de objetos matemáticos (segmentos de reta) que tem a mesma direção, mesmo sentido e mesmo tamanho. Esta classe de equivalência de objetos com as mesmas características é representada por um segmento de reta desta família (representante).

O representante escolhido, quase sempre é o vetor v cuja origem é (0,0,0) e extremidade é o terno ordenado (a,b,c) do espaço R^3, razão pela qual denotamos este vetor por: $\vec{v}$ = (a,b,c).



Se a origem do vetor não é a origem (0,0,0) do sistema R^3, realizamos a diferença entre a extremidade e a origem do vetor. Por exemplo, se um vetor $\vec{v}$ tem origem em (1,2,3) e extremidade em (7,12,15), ele é dado por $\vec{v}$ = (6,10,12), pois:

$$\vec{v} = (7,12,15) - (1,2,3) = (6,10,12)$$

Soma de vetores e suas propriedades

Se $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, definimos a soma de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, por:

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$$

Propriedades da soma de vetores

Fecho: Para quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de R^3, a soma $\vec{u} + \vec{v}$ está em R^3.

Comutativa: Para todos os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de R^3: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$.

Associativa: Para todos os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ de R^3: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Elemento neutro: Existe um vetor $\vec{0}$ = (0,0,0) em R^3 tal que para todo vetor $\vec{u}$ de R^3, se tem: $\vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Elemento oposto: Para cada vetor $\vec{v}$ de R^3, existe um vetor $-\vec{v}$ em R^3 tal que: $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$.

Diferença de Vetores

Se $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, definimos a diferença de $\vec{v}$ e $\vec{w}$, por:

$$\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$$

Exercício: Dados $\vec{v}$ = (1,3,4) e $\vec{w}$ = (1,8,12), construir os vetores $-\vec{v}$, $-\vec{w}$, $\vec{v} - \vec{w}$ e $\vec{v} + \vec{w}$.

Produto de Vetor por escalar

Se $\vec{v}$ = (a, b, c) e k é um número real, definimos a multiplicação de k por $\vec{v}$, como:

$$k\vec{v} = (ka,kb,kc)$$

Propriedades do produto de escalares por vetores

Quaisquer que sejam os escalares a, b e c e os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ teremos:

(E1) $1\ \vec{v} = \vec{v}$

(E2) $(a\ b)\ \vec{v} = a\ (b\ \vec{v}) = b\ (a\ \vec{v})$

(E3) $a\vec{v} = b\vec{v}$ e $\vec{v}$ é não nulo, então a = b.

(E4) $k\ (\vec{v} + \vec{w}) = k\ \vec{v} + k\ \vec{w}$

(E5) $(a + b)\ \vec{v} = a\ \vec{v} + b\ \vec{v}$

<u>Módulo de um vetor e vetores unitários</u>

O **módulo** ou comprimento do vetor $\vec{v}$=(x,y,z) é definido por:

$$|\ \vec{v}\ | = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Propriedades:

(PE1) $|\ \vec{u} + \vec{v}\ | < |\ \vec{u}\ | + |\ \vec{v}\ |$ (desigualdade triangular)

(PE2) $|k\ \vec{v}\ | = |k|\ |\ \vec{v}\ |$, k escalar não nulo

Um **vetor unitário** é o que tem o módulo (comprimento) igual a 1.

Existe um importante conjunto com três vetores unitários de R³.

$$\vec{i} = (1,0,0); \quad \vec{j} = (0,1,0); \quad \vec{k} = (0,0,1)$$

Estes três vetores formam a base canônica para o espaço R³, o que significa que qualquer vetor no espaço R³ pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, isto é, se $\vec{v}$=(a,b,c), então:

$$\vec{v} = (a,b,c) = a\vec{i} + b\,\vec{j} + c\,\vec{k}$$

Para obter um vetor unitário com a mesma direção e sentido que um vetor $\vec{v}$, basta dividir o vetor $\vec{v}$ pelo seu módulo, isto é:

$$\vec{u} = \vec{v}\ /\ |\ \vec{v}\ |$$

Para construir um vetor $\vec{w}$ paralelo a um vetor $\vec{v}$, basta tomar $\vec{v}$ multiplicado por um escalar, isto é:

$$\vec{w} = k\ \vec{v}$$

As três projeções ortogonais do vetor $\vec{v}$=(a,b,c) sobre os planos X=0, Y=0 e Z=0, são respectivamente, dadas por:

$$\vec{v}_x=(0,b,c); \quad \vec{v}_y=(a,0,c); \quad \vec{v}_z=(a,b,0)$$

Exercício: Quais são os vetores que representam as projeções ortogonais do vetor $\vec{v}$ = (3,4,12)? Quais são os módulos de todos estes vetores?

Produto Escalar

Dados os vetores $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$, definimos o produto escalar (produto interno) entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como o escalar real:

$$\vec{v} . \vec{w} = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$$

Exemplos: O produto escalar entre $\vec{v}=(1,2,5)$ e $\vec{w}=(2,-7,12)$ é:

$$\vec{v} . \vec{w} = 1.2 + 2.(-7) + 5.12 = 48$$

O produto escalar entre $\vec{v}=(2,5,8)$ e $\vec{w}=(-5,2,0)$ é:

$$\vec{v} . \vec{w} = 2.(-5) + 5.2 + 8.0 = 0$$

Propriedades do Produto Escalar

Quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e o escalar k:

(PE1) $\vec{v} . \vec{w} = \vec{w} . \vec{v}$

(PE2) $\vec{v} . \vec{v} = |\vec{v}| \, |\vec{v}| = |\vec{v}|^2$

(PE3) $\vec{u} .(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} . \vec{v} + \vec{u} . \vec{w}$

(PE4) $(k\vec{v}). \vec{w} = \vec{v}.(k\vec{w}) = k(\vec{v} . \vec{w})$

(PE5) $|\vec{u} . \vec{v}| < |\vec{u}| \, |\vec{v}|$ (desigualdade de Schwarz)

(PE6) $\vec{v} . \vec{w}=0$ se, e somente se, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são ortogonais

(PE7) $\vec{v} . \vec{w} = |\vec{v}| \, |\vec{w}| \cos(t)$, onde t é o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Observamos que este ângulo pode ser maior ou igual a zero, mas deve ser menor do que 180º (π radianos). Com esta última definição, podemos obter o ângulo t, através do cosseno de t.

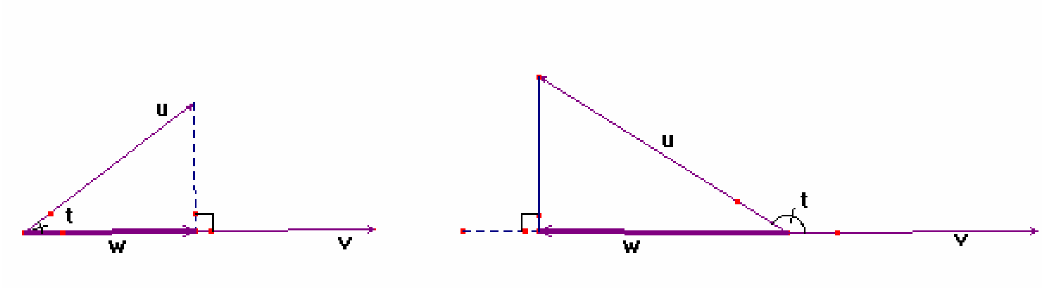
$$\cos(t) = (\vec{v} . \vec{w}) / (|\vec{v}| . |\vec{w}|)$$

Exercício: Determinar o ângulo entre os vetores $\vec{v}=(1,1,0)$ e $\vec{w}=(1,1,1)$.

Exercício: Dados os vetores $\vec{v}=(2,3,7)$ e $\vec{w}=(-1, -2,1)$, verifique se são ortogonais a $\vec{v}$.

Projeção de um Vetor

Sejam os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, e t o ângulo por eles formado. Queremos determinar o vetor $\vec{w}$ que representa a projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.



Do triângulo retângulo, vem:

$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\cos t| = |\vec{u}|\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}$$

Como $\vec{w}$ e $\vec{v}$ têm a mesma direção, segue que:

$\vec{w} = k\vec{v}$, $k \in R$. Então: $|\vec{w}| = |k|\,|\vec{v}|$, ou $|k| = |\vec{w}|\frac{1}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}\frac{1}{|\vec{v}|}$ $\quad\therefore k = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}$

Logo: $\vec{w} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|^2}\right)\vec{v}$

Portanto o vetor projeção de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ ($proj_{\vec{v}}\vec{u} = \vec{w}$) é:

$$\boxed{proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\vec{u}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}\right)\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} \quad ou \quad proj_{\vec{v}}\vec{u} = \left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\vec{v}\cdot\vec{v}}\right)\vec{v}}$$

Exemplo: Determinar o vetor projeção de $\vec{u} = (2,3,4)$ sobre $\vec{v} = (1,-1,0)$.

Produto Vetorial

Dados os vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ e $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$, definimos o produto vetorial (produto exterior) entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $\vec{v} \wedge \vec{w}$, como o vetor obtido pelo objeto matemático que não é um determinante mas que pode ser calculado como se fosse um determinante.

$$\boxed{\vec{v}\wedge\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Exemplo: Dados os vetores $\vec{v} = (1,2,3)$ e $\vec{w} = (4,5,6)$, o produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ é dado por $\vec{v} \wedge \vec{w} = -3\vec{i} + 6\vec{j} - 3\vec{k} = (-3,6,-3)$, obtido a partir do "determinante". Observamos que o produto vetorial é um vetor em R^3.

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = (-3,6,-3)$$

Propriedades do Produto Vetorial

(PV1) $\vec{v} \wedge \vec{w} = -\vec{w} \wedge \vec{v}$

(PV2) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$

(PV3) k $(\vec{v} \wedge \vec{w})$ = (k $\vec{v}$) $\wedge \vec{w} = \vec{v} \wedge$ (k $\vec{w}$)

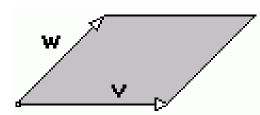
(PV4) Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são não nulos e $\vec{v} \wedge \vec{w} = 0$, então $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são paralelos

(PV5) $\vec{v} \wedge \vec{v} = 0$, para qualquer vetor $\vec{v}$

(PV6) $\vec{v} \wedge \vec{w} = |\vec{v}||\vec{w}|\,sen(t)$ onde t é o ângulo formado pelos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Isto significa que podemos obter o ângulo t entre dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, através de: $sent = \dfrac{|\vec{v} \wedge \vec{w}|}{|\vec{v}||\vec{w}|}$ sendo que t é um número real pertencente ao intervalo $[0,\pi]$.

Aplicações do Produto Vetorial



Área do paralelogramo: Se tomarmos dois vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ com um mesmo ponto inicial, de modo a formar um ângulo diferente de zero e também diferente de π radianos, o módulo do produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser interpretado como a área do paralelogramo que tem $\vec{v}$ e $\vec{w}$ como lados contíguos.

$$A_{\text{paralelogramo}} = |\vec{v} \wedge \vec{w}|$$

Área do triângulo: A metade do módulo do produto vetorial entre $\vec{v}$ e $\vec{w}$ pode ser interpretada como sendo a área do triângulo que tem dois lados como os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com origens no mesmo ponto, isto é:

$$A_{\text{triângulo}} = \tfrac{1}{2}\,|\vec{v} \wedge \vec{w}|$$

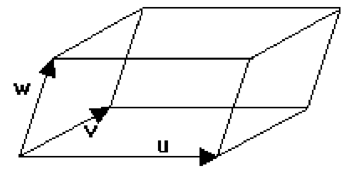
<u>Produto Misto</u>

Dados os vetores $\vec{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v} = (v_1,v_2,v_3)$ e $\vec{w} = (w_1,w_2,w_3)$, definimos o produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, denotado por $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ ou por $\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w})$, como o número real obtido a partir do determinante

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

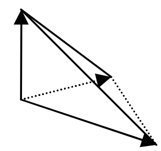
Aplicações do Produto Misto

Volume do paralelepípedo: O módulo do produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representa o volume do paralelepípedo que tem as 3 arestas próximas dadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo que estes vetores têm a mesma origem.



$$V_{\textbf{paralelepípedo}} = |\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\ |$$

Volume do tetraedro: Um sexto do módulo do produto misto entre $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ representa o volume do tetraedro (pirâmide com base triangular) que tem as 3 arestas próximas dadas pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, sendo que estes vetores têm a mesma origem.



$$V_{\textbf{tetraedro}} = (1/6)\ |\ [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\ |$$