FAI – Faculdades Adamantinenses Integradas
Disciplina: Geometria Analítica e Vetores I
Professora: Simone

Notas de Aula 2: Determinantes

Como já vimos, matriz quadrada é a que tem o mesmo número de linhas e de colunas (ou seja, é do tipo nxn).

A toda matriz quadrada está associado um número ao qual damos o nome de *determinante*.

Dentre as várias aplicações dos determinantes na Matemática, temos:

- resolução de alguns tipos de sistemas de equações lineares;
- cálculo da área de um triângulo situado no plano cartesiano, quando são conhecidas as coordenadas dos seus vértices;

Determinante de 1ª ordem

Dada uma matriz quadrada de 1ª ordem $M=[a_{11}]$, o seu determinante é o número real a_{11}:

$$\det M = |a_{11}| = a_{11}$$

Observação: Representamos o determinante de uma matriz entre duas barras verticais, que não têm o significado de módulo.

Por exemplo:

- $M = [5] \Rightarrow \det M = 5$ ou $|5| = 5$
- $M = [-3] \Rightarrow \det M = -3$ ou $|-3| = -3$

Determinante de 2ª ordem

Dada a matriz $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2, por definição o determinante associado a **M**, determinante de 2ª ordem, é dado por:

$$\det M = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{22}$$

Portanto, o determinante de uma matriz de ordem 2 é dado pela diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal e o produto dos elementos da diagonal secundária. Veja o exemplo a seguir.

Sendo $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, temos:

$$\det M = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - 4.3 = 10 - 12 \Rightarrow \det M = -2$$

Determinante de 3ª ordem: Regra de Sarrus

O cálculo do determinante de 3ª ordem pode ser feito por meio de um dispositivo prático, denominado *regra de Sarrus.*

Acompanhe como aplicamos essa regra para . $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

1º passo: Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da terceira: $\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right|$

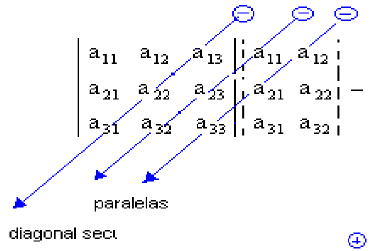
2º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal principal* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal positivo):

$$\begin{array}{ccc} \oplus & \oplus & \oplus & & \end{array}$$
$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right| + (a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32})$$

paralelas

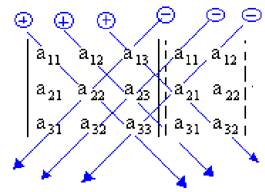
diagonal principal

3º passo: Encontramos a soma do produto dos elementos da *diagonal secundária* com os dois produtos obtidos pela multiplicação dos elementos das paralelas a essa diagonal (a soma deve ser precedida do sinal negativo):



$$-\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right)$$

Assim:



$$= -\left(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}\right) + \left(a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right)$$

Cofator

Seja A uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$ e seja a_{ij} um elemento de A.

Chama-se *cofator* de a_{ij} o número $\mathbf{A_{ij}}$ tal que $A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$, em que D_{ij} é o determinante da matriz que se obtém de A, eliminando sua i-ésima linha e sua j-ésima coluna.

Veja:

a) Dada $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, os cofatores relativos aos elementos $\mathbf{a_{11}}$ e $\mathbf{a_{12}}$ da matriz **M** são:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . \overbrace{a_{22}} = (-1)^2 a_{22} = +a_{22} \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} . \overbrace{a_{21}} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$$

b) Sendo $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, vamos calcular os cofatores $\mathbf{A_{22}}$, $\mathbf{A_{23}}$ e $\mathbf{A_{31}}$:

$$A_{22} = (-1)^{2+2} . \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}} = (+1)(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31})$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} . \overbrace{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}} = (-1)(a_{11}a_{32} - a_{12}a_{31})$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} . \overbrace{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}} = (+1)(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

Teorema de Laplace

O determinante de uma matriz quadrada $M = [a_{ij}]_m \quad (m \geq 2)$ pode ser obtido pela soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) da matriz **M** pelos respectivos cofatores.

Assim, fixando j ∈ N, tal que 1 ≤ j ≤ m, temos: $\det M = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$

Ou, fixando i ∈ N, tal que 1 ≤ i ≤ m, temos $\det M = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} A_{ij}$

Observações: **1)** Se desenvolvermos os determinantes de 2ª e 3ª ordens aplicando o Teorema de Laplace, encontraremos o mesmo número real que será encontrado com a regra prática em ambos os casos.

2) Vimos que a regra de Sarrus é válida para o cálculo do determinante de uma matriz de ordem 3. Quando a matriz é de ordem superior a 3, devemos empregar o Teorema de Laplace para chegar a determinantes de ordem 3 e depois aplicar a regra de Sarrus.

Propriedades dos determinantes

P_1) Quando todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) são nulos, o determinante dessa matriz é nulo.

Exemplo:

$$a)\begin{vmatrix} 4 & 9 & -8 & \sqrt{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ 18 & 12 & 9 & 3 \end{vmatrix} = 0 \qquad b)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

P_2) Se duas filas de uma matriz são iguais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{array}{c} L_1 \\ \\ L_3 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 9 & 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

P_3) Se duas filas paralelas de uma matriz são proporcionais, então seu determinante é nulo.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} \boxed{1} & 4 & \boxed{2} \\ \boxed{2} & 1 & \boxed{4} \\ \boxed{3} & 2 & \boxed{6} \end{vmatrix} = 0$$

$C_3 = 2C_1$

P_4) Se os elementos de uma fila de uma matriz são combinações lineares dos elementos correspondentes de filas paralelas, então seu determinante é nulo.

Exemplos:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$C_1 + C_2 = C_3$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 5 \end{vmatrix} = 0$

$2L_1 + L_2 = L_3$

P_5) **Teorema de Jacobi**: o determinante de uma matriz não se altera quando somamos aos elementos de uma fila uma combinação linear dos elementos correspondentes de filas paralelas.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

Substituindo a 1ª coluna pela soma dessa mesma coluna com o dobro da 2ª, temos:

$$\begin{vmatrix} 1+2.2 & 2 & 2 \\ 2+1.2 & 1 & 2 \\ 2+4.2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 10 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

P_6) O determinante de uma matriz e o de sua transposta são iguais.

Exemplo:

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 9$

$\det A^t = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 9$

P_7) Multiplicando por um número real todos os elementos de uma fila em uma matriz, o determinante dessa matriz fica multiplicado por esse número.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=-4 \quad \text{multiplicando} \quad C_1 \text{ por } 2: \begin{array}{c}2C_1\\ \begin{vmatrix}\boxed{\begin{matrix}2\\4\\6\end{matrix}}&\begin{matrix}2\\1\\2\end{matrix}&\begin{matrix}3\\-1\\1\end{matrix}\end{vmatrix}\end{array}=2(-4)=-8$$

$$b)\begin{vmatrix}5&-10&0\\3&7&4\\2&0&-1\end{vmatrix}=-145 \quad \text{Multiplicando} \quad L_1 \text{por } \frac{1}{5}: \begin{array}{c}\frac{1}{5}L_1\\ \begin{vmatrix}\boxed{1\ \ -2\ \ 0}\\3\ \ \ 7\ \ \ 4\\2\ \ \ 0\ \ -1\end{vmatrix}\end{array}=\frac{1}{5}(-145)=-29$$

P_8) Quando trocamos as posições de duas filas paralelas, o determinante de uma matriz muda de sinal.

Exemplo:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&-1\\3&2&1\end{vmatrix}=-4 \text{ Trocando as posições de } L_1 \text{ e } L_2: \begin{vmatrix}\boxed{2\ \ 1\ \ -1}\\\boxed{1\ \ 2\ \ 3}\\3\ \ 2\ \ 1\end{vmatrix}==+4$$

P_9) Quando, em uma matriz, os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são todos nulos, o determinante é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

Exemplos:

$$a)\begin{vmatrix}a&0&0\\d&b&0\\e&f&c\end{vmatrix}=a.b.c \qquad b)\begin{vmatrix}x&g&h\\0&y&i\\0&0&z\end{vmatrix}=x.y.z$$

P_{10}) Para **A** e **B** matrizes quadradas de mesma ordem **n**, $\boxed{\det(AB)=\det A \, . \det B}$. Como:

$$A \, . \, A^{-1}=I, \boxed{\det A^{-1}=\frac{1}{\det A}}$$

Exemplo:

$$\text{Se } A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} e \ A.B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 11 & 8 \end{bmatrix}, \text{então}:$$

$$\underbrace{\det(AB)}_{10} = \underbrace{\det A}_{5} . \underbrace{\det B}_{2}$$

P_{12}) Se $k \in R$ e A é uma matriz de ordem n, então det (k.A) = k^n . det A

Exemplo: $$\text{Sendo } K = 3, A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} e \ K.A = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 15 \end{bmatrix}, \text{temos}:$$

$$\underbrace{\det(K.A)}_{54} = \underbrace{K^n}_{3^2} . \underbrace{\det A}_{6}$$

Determinante de matrizes de ordem n ≥ 4 – Regra de Chió

Esta regra consiste em baixar a ordem do determinante. A matriz, neste caso, deve ter um elemento unitário (1), de preferência na 1ª linha e 1ª coluna.
A técnica consiste em eliminar a linha e a coluna do elemento unitário, transformando o determinante de ordem n em um determinante de ordem n - 1, subtraindo de cada elemento da nova matriz o produto dos elementos que pertenciam a sua linha e coluna e que foram retirados.
Exemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 14 & 30 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 8 \\ 2 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14-4.3 & 30-4.7 & 6-4.2 \\ 10-3.3 & 20-3.7 & 8-3.2 \\ 5-2.3 & 16-2.7 & 3-2.2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -10$$

Caso não tenhamos um elemento unitário, ou caso ele esteja em outra posição que não seja a 1ª linha e 1ª coluna devemos utilizar as propriedades dos determinantes para colocá-lo nesta posição.
Por exemplo:

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 7 & 2 \\ 12 & 14 & 30 & 6 \\ 9 & 10 & 20 & 8 \\ 6 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 3. \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 14 & 30 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 8 \\ 2 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix} = 3.(-10) = -30$$

ou

$$\begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 2 \\ 30 & 14 & 4 & 6 \\ 20 & 10 & 3 & 8 \\ 16 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 \\ 4 & 14 & 30 & 6 \\ 3 & 10 & 20 & 8 \\ 2 & 5 & 16 & 3 \end{vmatrix} = -(-10) = 10$$

2ª. Lista de Exercícios - DETERMINANTES

1. Calcular:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ (g) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 9 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 6 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ (j) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (l) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ (m) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

(n) $\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$ (o) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}$ (p) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$ (q) $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$

(r) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ (s) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -5 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

2. Calcular os cofatores de cada elemento da matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. Calcular o cofator do elemento x em : $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & x & 2 & 1 \end{pmatrix}$

4. Calcular det A desenvolvendo a fórmula para a 1ª coluna :

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ (b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

5. São dadas as matrizes A e B. Determine a matriz X tal que AX = B, nos seguintes casos:

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 18 \\ 31 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -9 \\ 34 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & -4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 13 \\ 28 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{pmatrix}$

   (a) Determine X tal que A X = B.
   (b) Determine X tal que X A = B.

7. Resolva as equações:

   (a) $\begin{vmatrix} x-2 & 4 & -1 \\ 4 & x & 2 \\ 6 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 5 & x \\ x & 5 \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} 3 & x+2 \\ x & x+4 \end{vmatrix} = 0$ (d) $\begin{vmatrix} x & 7 & 9 \\ 0 & x-1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$ (e) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 9 & x+5 & 0 \\ 7 & -4 & x \end{vmatrix} = 0$

8. Verifique se as matrizes são inversíveis :

   (a) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ (d) $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 6 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

   (e) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ (f) $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

9. Para que valores de *a* as matrizes são inversíveis?

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 2 & 6 & 0 \\ a & 7 & -7 \end{pmatrix}$ (b) $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ a & 9 \end{pmatrix}$ (c) $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -8 \end{pmatrix}$

Respostas:

1. (a) -4 (b) -2 (c) –3 (d) 2 (e) -8 (f) 24 (g) 0 (h) -2 (i) 0 (j) 0 (l) 0
(m) 6 (n) 18 (o) 0 (p) 0 (q) 1 (r) - 24 (s) 64

2. $A_{11} = -5$, $A_{12} = 4$, $A_{13} = -2$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = -1$, $A_{23} = 1$, $A_{31} = 3$, $A_{32} = -2$, $A_{33} = 1$.

3. $A_{42} = -6$

4. (a) det A = -2 (b) det A = 35

5. (a) $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ (c) $X = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ **7.** (a) $X = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -20 & -5 \end{pmatrix}$ (b) $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

7. (a) S = { 0 , 2} (b) S = { -5 , 5 } (c) S = { 4, -3 } (d) S = { 0, 1 } (e) S = { 0, -5 }

8. (a)Não (b) Sim (c) Sim (d) Não (e) Sim (f) Sim

9. (a) $a \neq -1$ (b) $a \neq 6$ (c) $a \neq 5$