FAI – Faculdades Adamantinenses Integradas
Disciplina: Geometria Analítica e Vetores I
Professora: Simone

Notas de aula 3: Cálculo da inversa de uma matriz

Uma matriz X, quadrada de ordem n, é dita *inversível* se existir uma outra matriz, X^{-1} , também de ordem n, tal que

$$X \,.\, X^{-1} = X^{-1} \,.\, X = I_n \,,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz X^{-1} , quando existe, é chamada *inversa* da matriz X.

Se X é inversível e X^{-1} é sua inversa, então det $(X \,.\, X^{-1})$ = det I_n , o que implica, por uma propriedade de determinantes, que det X . det X^{-1} = 1. Logo temos:

$$\det X^{-1} = \frac{1}{\det X}$$

Sendo assim, uma matriz X será inversível desde que o seu determinante seja não nulo.

$$\boldsymbol{X = (x_{ij}) \text{ é inversível} \quad \Leftrightarrow \quad \det X \neq 0}$$

Teorema: Se X é uma matriz quadrada de ordem n e det X ≠ 0, então a inversa de X é:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} . (\overline{X})^T$$

onde $(\overline{X})^T$ é a matriz transposta da matriz dos cofatores de X .

Exemplos:

1. Determinar a inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Temos: det A = 1.1 – 2.2 = - 3 .

Calculando os cofatores dos elementos de A, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(1) = 1$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \det(2) = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \det(2) = -2$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \det(1) = 1$

Assim, a matriz cofatora de A é : $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *e a inversa de A:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\overline{A})^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Determinar A^{-1}, sendo A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Primeiramente, temos: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} = (2.2.3 + 1.2.2 + 3.4.5) - (3.2.2 + 2.2.5 + 1.4.3) = 32$

Calculando então todos os cofatores dos elementos de A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(3-15) = 12$

$A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(12-4) = -8$

$A_{22}+(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 4 = 16$

$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1).(10-2) = -8$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$

$A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(4-12) = 8$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Montando agora a matriz cofatora de A, $\overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 16 \\ 12 & 0 & -8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, temos então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\overline{A})^T = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & -8 & 16 \\ 12 & 0 & -8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{32}\begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \\ 16 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

3ª Lista de Exercícios: Inversas

1 - As matrizes A e B , quadradas de ordem 3, são tais que $B = 2.A^t$, onde A^t é a matriz transposta de A. Se o determinante de B é igual a 40 , então o determinante da matriz inversa de A é igual a: a) 1/5 b) 5 c) 1/40 d) 1/20 e) 20

2 - Verifique se as matrizes são inversíveis e calcule a sua inversa se possível:

$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$ $(b) A = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ $(c) A = \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ $(d) A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$

$(e) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix}$ $(f) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $(g) A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ 2 & 7 & 6 \\ 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$

(h) $A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ *(i)* $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *(j)* $C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ *(l)* $D = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 6 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

(m) $E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ *(n)* $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3 - Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$

(a) Calcular A^{-1}, B^{-1} , C^{-1}
(b) Calcular $3(A + B).A^{-1}$
(c) Calcular $[(A - I_3)^{-1}.\ B]^{-1}$
(d) Calcular A^{-2}.

Respostas

1. item a)

2. (a) $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} -5/39 & 2/13 \\ 4/39 & 1/13 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{pmatrix}$ (f) $\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} 7/2 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ (c) , (e), (h), (l) Não inversíveis. (i) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 4/9 & -2/9 & 1/9 \\ -2/9 & 1/9 & 4/9 \end{pmatrix}$

(j) $C^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 2/5 \\ 3/10 & -1/10 \end{pmatrix}$ (m) $E^{-1} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 13 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \\ -3 & -1 & 6 \end{pmatrix}$ (n) $F^{-1} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 1/6 & 1/3 \end{pmatrix}$