Lista 1

1) $V = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R}\}$ $\oplus (x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, 0)$

$\otimes_a (x,y) = (ax, ay)$

$\oplus$

i) $(u+v)+w = u+(v+w)$

$((x,y)+(a,b))+(c,D)$	$(x,y)+((a,b)+(c,D))$
$(x+a,0)+(c,D)$	$(x,y)+(a+c,0)$
$(x+a+c,0)$	$(x+a+c,0)$

OK

ii) $u+v = v+u$

$(x,y)+(a,b)$	$(a,b)+(x,y)$
$(x+a,0)$	$(a+x,0)$

OK

iii) $\exists \vec{0} \in V / u+\vec{0} = u$

$(x,y)+(0,0)$

$(x,0)$

não é EV, falha na prop III
não existe vetor nulo.

2) Adição padrão / $\otimes$ $a(x,y) = (ax, 0)$

$\otimes$

V) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

$\alpha((x,y)+(a,b))$	$\alpha(x,y) + \alpha(a,b)$
$\alpha(x+a, y+b)$	$(\alpha x, 0) + (\alpha a, 0)$
$(\alpha(x+a), \alpha(\cancel{y+b}))$	$(\alpha x + \alpha a, 0)$
$((\alpha x + \alpha a), \cancel{(\alpha y + \alpha b)})$	
$(\alpha x + \alpha a, 0)$	OK

VI) $(a+b)u = au + bu$

$(a+b).(x,y)$	$a(x,y) + b(x,y)$
	$(ax,0) + (bx,0)$
$((a+b).x, 0)$	$(ax+bx, 0)$
	$(x(a+b), 0)$

OK

VII) $(a.b)u = a(b.u)$

$ab(x,y)$	$a(b.(x,y))$
$(abx, 0)$	$a.(bx, 0)$
	$(abx, 0)$

OK

VIII) $1u = u$

$1.(x,y) = (x,0)$ ✗

Não é EV, falha na prop $\underline{VIII}$, não existe elemento neutro.

3-) a) adição padrão / ⊗ $\alpha(x,y) = (x, \alpha y)$

⊗ V) $\alpha(u,v) = \alpha u + \alpha v$

$\alpha((x,y)+(a,b))$	$\alpha(x,y) + \alpha(a,b)$
$\alpha(x+a, y+b)$	$(x, \alpha y) + (a, \alpha b)$
$(\alpha(x+a), \alpha(y+b))$	OK
$((x+a), (\alpha y + \alpha b))$	
$(x, \alpha y) + (a, \alpha b)$	

$\underline{VI}$) $(a+b)u = a.u + b.u$

$(a+b)(x,y)$	$a(x,y) + b(x,y)$
$(x, (a+b)y)$	$(x, ay) + (x, by)$
✗	$(x+x, ay+by)$
Não é EV Erro na prop $\underline{VI}$ Distributiva	$(2x, y(a+b))$
≠	

VIII) $1 u = u$

$1 . (x, y) = (x, 0)$ ✗

Não é EV, falha na prop $\underline{VIII}$, não existe elemento neutro.

3-) a) adição padrão / ⊗ $a(x,y) = (x, ay)$

⊗ V) $\alpha (u, v) = \alpha u + \alpha v$

$\alpha ((x,y)+(a,b))$ $\alpha (x+a, y+b)$ $(\alpha(x+a), \alpha(y+b))$ $((x+a), (\alpha y + \alpha b))$ $(x, \alpha y) + (a, \alpha b)$	$\alpha (x,y) + \alpha (a,b)$ $(x, \alpha y) + (a, \alpha b)$ OK

$\underline{VI}$) $(a+b) u = a.u + b.u$

$(a+b)(x,y)$ $(x, (a+b) y)$ ✗ Não é EV Erro na prop $\underline{VI}$ Distributiva	$a(x,y) + b(x,y)$ $(x, ay) + (x, by)$ $(x+x, ay+by)$ $(2x, y(a+b))$

3-) b) $\oplus$ $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1, y_1)$ / multiplicação padrão

i) $(u+v)+w = u+(v+w)$

$((x,y)+(a,b)) + (c,d)$

$(x,y) + (c,d)$

(x,y)

$(x,y) + ((a,b)+(c,d))$

$(x,y) + (a,b)$

(x,y)

OK

ii) $u+v = v+u$

$(x,y)+(a,b)$

(x,y)

$(a,b)+(x,y)$

(a,b)

Não é EV ✗

erro na prop II

Comutativa

$u = (x_1, y_1, z_1) \quad v(x_2, y_2, z_2)$

4-) a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 0\}$

i) $\vec{0} = (\overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0}) = (\overset{x=0}{0}, 0, 0)$

ii) $(u + v)$

$u(x, y_1, z) = (0, y, z) +$

$v(x_2, y_2, z_2) = (0, y_2, z_2)$

$(0, y + y_2, z + z_2)$

iii) $\alpha(0, y, z) = (0, \alpha y, \alpha z)$ ✓

É um Subespaço V.

b) $W = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \in \mathbb{Z}$

i) $\vec{0} = (0, 0, 0)$ ✓

ii) $(u + v)$

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z + z_2)$ ✓

iii) αu

$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ ✗

Não pertence

$\alpha \in \mathbb{R}$ e x no $\mathbb{Z}$, não compatível

Não é Subespaço V.

c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - 3z = 0$

i) $\vec{0} = (0,0,0)$ $\quad (0 - 3.0 = 0)$

ii) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$

$$(x_1 + x_2) - 3.(z_1 + z_2) = 0$$
$$(x_1 + x_2) - (3z_1 + 3z_2) =$$
$$(x_1 + x_2) + (-3z_1 - 3z_2) = 0$$
$$\cancel{(x_1 - 3z_1)} + \cancel{(x_2 - 3z_2)} = 0$$

iii) $\alpha u \in W$

$$(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

$$\alpha x - 3\alpha z = 0$$
$$\alpha \cancel{(x - 3z)} = 0$$
$$\alpha = 0$$

É um subespaço

4)- a e c pertencem

5- a) $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 1 \}$

$$\overset{x=1}{}$$

i) $\vec{0}$ $(\overset{x}{0}, \overset{y}{0}, \overset{z}{0}) \to (1, 0, 0)$ X

não pertence, vetor nulo não existe

b) $u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y + z = 0$

i) $\vec{0} = (0, 0, 0) = / 0^2 + 0 + 0 = 0$ ✓

ii) $u + v = (\overset{x}{x_1 + x_2}, \overset{y}{y_1 + y_2}, \overset{z}{z_1 + z_2})$

$$(x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) = 0$$

$$(2x_1 . x_2 (x_1^2 + x_2^2) + (y_1 + y_2) + z_1 + z_2) = 0$$

$$(x_1^2 + 2x_1 . x_2 + x^2) + (y_1 + y_2) + (z_1 + z_2)$$

$$(2x . x_2) + (\cancel{x_1^2 + y_1 + z_1}) + (\cancel{x_2^2 + y_2 + z_2}) = 0$$

$$(2x . x_2) = 0$$

não pertence a u

c) $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x \leq y \leq z$

$\vec{0}$ $(0,0,0) = 0 \leq 0 \leq 0$ ✓

ii) $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2) / (x_1 + x_2) \leq (y_1 + y_2) \leq (z_1 + z_2)$

$\cancel{0}x_1$

III $(\alpha x, \alpha y, \alpha z) / \alpha x \leq \alpha_y \leq \alpha z$ X

erro, $\alpha \in \mathbb{R}$, não tem como garantir a condição