Notas de aula : Cálculo da inversa de uma matriz

Uma matriz X, quadrada de ordem n, é dita *inversível* se existir uma outra matriz, X^{-1}, também de ordem n, tal que

$$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = I_n ,$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n. A matriz X^{-1}, quando existe, é chamada *inversa* da matriz X.

Se X é inversível e X^{-1} é sua inversa, então det $(X \cdot X^{-1})$ = det I_n , o que implica, por uma propriedade de determinantes, que det X . det X^{-1} = 1. Logo temos:

$$\det X^{-1} = \frac{1}{\det X}$$

Sendo assim, uma matriz X será inversível desde que o seu determinante seja não nulo.

$$\boldsymbol{X = (x_{ij}) \text{ é inversível} \quad \Leftrightarrow \quad \det X \neq 0}$$

Teorema: Se X é uma matriz quadrada de ordem n e det X ≠ 0, então a inversa de X é:

$$X^{-1} = \frac{1}{\det X} \cdot (\overline{X})^T$$

onde $(\overline{X})^T$ é a matriz transposta da matriz dos cofatores de X .

Exemplos:

1. Determinar a inversa de A = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Temos: det A = 1.1 – 2.2 = - 3 .

Calculando os cofatores dos elementos de A, temos:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \det(1) = 1$ $\qquad$ $A_{12} = (-1)^{1+2} \det(2) = -2$

$A_{21} = (-1)^{2+1} \det(2) = -2$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^{2+2} \det(1) = 1$

Assim, a matriz cofatora de A é : $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *e a inversa de A:*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}(\overline{A})^T = \frac{1}{-3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Determinar A^{-1}, sendo A = $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Primeiramente, temos: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{matrix} = (2.2.3 + 1.2.2 + 3.4.5) - (3.2.2 + 2.2.5 + 1.4.3) = 32$

Calculando então todos os cofatores dos elementos de A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$ $\qquad$ $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(3 - 15) = 12$

$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = (-1).(12 - 4) = -8$ $\qquad$ $A_{22} + (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 4 = 16$ $\qquad$ $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-1).(10 - 2) = -8$

$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$ $\qquad$ $A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1).(4 - 12) = 8$ $\qquad$ $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$

Montando agora a matriz cofatora de A, $\overline{A} = \begin{pmatrix} -4 & -8 & 16 \\ 12 & 0 & -8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$, temos então:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\overline{A})^T = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & -8 & 16 \\ 12 & 0 & -8 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -4 & 12 & -4 \\ -8 & 0 & 8 \\ 16 & -8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$