UNIFAI – Centro Universitário de Adamantina
Disciplina: GEOMETRIA ANALíTICA E VETORES I
Professora: Simone

<u>Notas de Aula 1: MATRIZES</u>

1. <u>Introdução</u>

O crescente uso dos computadores tem feito com que a teoria das matrizes seja cada vez mais aplicada em áreas como Economia, Engenharia, Matemática, Física, dentre outras. Vejamos um exemplo. A tabela a seguir representa as notas de três alunos em uma etapa:

	Química	Inglês	Literatura	Espanhol
A	8	7	9	8
B	6	6	7	6
C	4	8	5	9

Se quisermos saber a nota do aluno **B** em Literatura, basta procurar o número que fica na segunda linha e na terceira coluna da tabela.

Vamos agora considerar uma tabela de números dispostos em linhas e colunas, como no exemplo acima, mas colocados entre parênteses ou colchetes:

$$\begin{array}{r} \text{linha} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \multicolumn{4}{c}{\boxed{8 \quad 7 \quad 9 \quad 8}} \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 8 & 7 & 9 & 8 \\ 6 & 6 & 7 & 6 \\ 4 & 8 & 5 & 9 \end{bmatrix} \\ \uparrow \\ \text{coluna} \end{array}$$

Em tabelas assim dispostas, os números são os elementos. As linhas são enumeradas *de cima para baixo* e as colunas, *da esquerda para direita:*

$$\begin{array}{r} 1^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow \\ 2^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow \\ 3^{\text{a}} \text{ linha} \rightarrow \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & \sqrt{3} & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ 1^{\text{a}} \text{ coluna} & 2^{\text{a}} \text{ coluna} & 3^{\text{a}} \text{ coluna} \end{array}$$

Tabelas com **m** linhas e **n** colunas (**m** e **n** números naturais diferentes de 0) são denominadas matrizes m x n. Na tabela anterior temos, portanto, uma matriz 3 x 3.

Veja mais alguns exemplos:

- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 30 & -3 & 17 \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 3
- $\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ é uma matriz do tipo 2 x 2

2. <u>Notação geral</u>

Costuma-se representar as matrizes por *letras maiúsculas* e seus elementos por *letras minúsculas*, acompanhadas por *dois índices* que indicam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa.

Assim, uma matriz **A** do tipo m x n é representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ou, abreviadamente, $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, em que **i** e **j** representam, respectivamente, a linha e a coluna que o elemento ocupa. Por exemplo, na matriz anterior, $\mathbf{a_{23}}$ é o elemento da 2ª linha e da 3ª coluna.

Na matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, temos:

$$\begin{cases} a_{11} = 2, a_{12} = -1 \text{ e } a_{13} = \\ a_{21} = 4, a_{22} = \frac{1}{2} \text{ e } a_{23} = \sqrt{2} \\ a_{31} = 0, a_{32} = 1 \text{ e } a_{33} = -2 \end{cases}$$

Ou na matriz B = [-1 0 2 5], temos: $a_{11} = -1$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 2$ e $a_{14} = 5$.

3. <u>Denominações especiais</u>

Algumas matrizes, por suas características, recebem denominações especiais.

- **Matriz linha**: matriz do tipo 1 x n, ou seja, com uma única linha. Por exemplo, a matriz

$A = [4\ 7\ -3\ 1]$, do tipo 1 x 4.

- **Matriz coluna**: matriz do tipo m x 1, ou seja, com uma única coluna. Por exemplo,

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$, do tipo 3 x 1

- **Matriz nula**: matriz em que todos os elementos são nulos; é representada por $0_{m \times n}$.

Por exemplo, $$0_{2x3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$.

- **Matriz transposta**: matriz A^t obtida a partir da matriz A trocando-se ordenadamente as linhas por colunas ou as colunas por linhas. Por exemplo:

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, então\ A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Note que a 1ª linha de **A** corresponde à 1ª coluna de $\mathbf{A^t}$ e a 2ª linha de A corresponde à 2ª coluna de $\mathbf{A^t}$.

Desse modo, se a matriz **A** é do tipo m x n, $\mathbf{A^t}$ é do tipo n x m, e se $A = (a_{ij})$ então $A^t = (b_{ij})$ com $b_{ij} = a_{ji}$ para todo i e todo j.

- **Matriz oposta**: matriz **-A** obtida a partir de **A** trocando-se o sinal de todos os elementos de **A**. Por exemplo, .

$$Se\ A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, então\ -A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Matriz quadrada:** matriz do tipo n x n, ou seja, com o mesmo número de linhas e colunas; dizemos que a matriz é de ordem **n**. Por exemplo, a matriz $C = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ é do tipo 2 x 2, isto é, quadrada de ordem 2.

Numa matriz quadrada definimos a *diagonal principal* e a *diagonal secundária*. A principal é formada pelos elementos $\mathbf{a_{ij}}$ tais que i = j. Na secundária, temos i + j = n + 1.

Veja:

Observe a matriz a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

diagonal principal $i = j$

diagonal secundária $i + j = n + 1$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -5 \\ 3 & 0 & -3 \\ 5 & 7 & -6 \end{bmatrix}$$

ordem da matriz

diagonal principal

diagonal secundária

$a_{11} = -1$ é elemento da diagonal principal, pois $i = j = 1$

$a_{31} = 5$ é elemento da diagonal secundária, pois $i + j = n + 1$ ($3 + 1 = 3 + 1$)

- **Traço de uma matriz:** Se $A = (a_{ij})_n$ é uma matriz quadrada de ordem n, definimos o *traço de* A , $tr\,A$, como sendo a soma dos elementos da diagonal principal de A, ou seja:

$$\text{Tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

- **Matriz diagonal**: matriz quadrada em que todos os elementos que não estão na diagonal principal são nulos. Por exemplo:

a) $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

- **Matriz Triangular Superior:** matriz quadrada cujos elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos. Ou seja, se $A = (a_{ij})$ é triangular superior, então $a_{ij} = 0$, para todo $i > j$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz Triangular Inferior:** matriz quadrada cujos elementos acima da diagonal principal são todos nulos. Ou seja, se A = (a_{ij}) é triangular superior, então $a_{ij} = 0$, para todo i < j.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Matriz identidade**: matriz quadrada em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos; é representada por **I_n,** sendo **n** a ordem da matriz. Por exemplo:

$$a)\ I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\ I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim, para uma matriz identidade . $I_n = [a_{ij}], \quad onde \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, se & i = j \\ 0, se & i \neq j \end{cases}$

- **Matriz simétrica**: matriz quadrada de ordem n tal que **A = A^t .** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

é simétrica, pois $a_{12} = a_{21} = 5$, $a_{13} = a_{31} = 6$, $a_{23} = a_{32} = 4$, ou seja, temos sempre $a_{ij} = a_{ji}$.

- **Matriz anti-simétrica:** matriz quadrada de ordem n tal que **(- A)= A^t .** Por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

é anti-simétrica, pois $a_{ij} = - a_{ji}$ para todo i e todo j.

4. Igualdade de matrizes

Duas matrizes, A e B, do mesmo tipo m x n, são iguais se, e somente se, todos os elementos que ocupam a mesma posição são iguais:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\, para \ \text{todo}\ 1 \leq i \leq m \ \text{e todo}\ 1 \leq j \leq n$$

$Se\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & b \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & c \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A = B$, então $c = 0$ e $b = 3$

5. Operações envolvendo matrizes

5.1 Adição

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de soma dessas matrizes a matriz $C = [C_{ij}]_{m \times n}$, tal que $C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para to $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$

$$\boxed{A + B = C}$$

Exemplos:

- $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 & 4+(-1) \\ 0+0 & 7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+1 & 0+1 \\ 0+1 & 1+(-1) & -1+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Observação: A + B existe se, e somente se, **A** e **B** forem do mesmo tipo.

Propriedades

Sendo **A**, **B** e **C** matrizes do mesmo tipo (m x n), temos as seguintes propriedades para a adição:

a) *comutativa*: A + B = B + A

b) *associativa*: (A + B) + C = A + (B + C)

c) *elemento neutro*: A + 0 = 0 + A = A, sendo 0 a matriz nula m x n

d) *elemento oposto:* A + (- A) = (-A) + A = 0

5.2 Subtração

Dadas as matrizes $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ e $B = [b_{ij}]_{m \times n}$, chamamos de diferença entre essas matrizes a soma de **A** com a matriz oposta de **B**:

$$\boxed{A - B = A + (-B)}$$

Observe:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -7 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 3+(-1) & 0+(-2) \\ 4+0 & -7+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

5.3 Multiplicação de um número real por uma matriz

Dados um número real **k** e uma matriz **A** do tipo m x n, o produto de **k** por **A** é uma matriz **B** do tipo m x n obtida pela multiplicação de cada elemento de **A** por **k**, ou seja, $b_{ij} = ka_{ij}$:

$$\boxed{B = k.A}$$

Observe o seguinte exemplo:

$$3.\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.2 & 3.7 \\ 3.(-1) & 3.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 21 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades

Sendo **A** e **B** matrizes do mesmo tipo (m x n) e **a** e **b** números reais quaisquer, valem as seguintes propriedades:

a) *associativa*: a . (bA) = (ab) . A

b) *distributiva de um número real em relação à adição de matrizes*: a . (A + B) = aA + aB

c) *distributiva de uma matriz em relação à adição de dois números reais*: (a + b) . A = aA = bA

d) *elemento neutro* : 1.A = A, para qualquer matriz A.

5.4 Multiplicação de matrizes

O produto de uma matriz por outra não é determinado por meio do produto dos seus respectivos elementos.

Assim, o produto das matrizes $A = (a_{ij})_{m \times p}$ e $B = (b_{ij})_{p \times n}$ é a matriz $C = (c_{ij})_{m \times n}$ em que cada elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido por meio da soma dos produtos dos elementos correspondentes da i-ésima linha de A pelos elementos da j-ésima coluna **B**.

Vamos multiplicar as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ para entender como se obtém cada $\mathbf{C_{ij}}$:

- 1ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4}} & \\ & \end{bmatrix}$$

- 1ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2} \\ 3 \quad 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & \overset{c_{12}}{\boxed{1 \cdot 3 + 2 \cdot 2}} \\ & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 1ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix}} & \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ \underset{c_{21}}{\boxed{3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4}} & \end{bmatrix}$$

- 2ª linha e 2ª coluna

$$A = \begin{bmatrix} 1 \quad 2 \\ \boxed{3 \quad 4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} -1 \\ 4 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 & \underset{c_{22}}{\boxed{3 \cdot 3 + 4 \cdot 2}} \end{bmatrix}$$

Assim, $A \cdot B = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 13 & 17 \end{bmatrix}$.

Observe que:

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} \boxed{-1 \quad 3} \\ \boxed{4 \quad 2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{(-1) \cdot 1 + 3 \cdot 3} & \boxed{(-1) \cdot 2 + 3 \cdot 4} \\ \boxed{4 \cdot 1 + 2 \cdot 3} & \boxed{4 \cdot 2 + 2 \cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 10 \\ 10 & 16 \end{bmatrix}$$

Portanto, $A.B \neq B.A$, ou seja, para a multiplicação de matrizes não vale a propriedade comutativa.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Vejamos outro exemplo com as matrizes :

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1+3(-2) & 2.2+3.0 & 2.3+3.4 \\ 0.1+1(-2) & 0.2+1.0 & 0.3+1.4 \\ -1.1+4(-2) & -1.2+4.0 & -1.3+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 18 \\ -2 & 0 & 4 \\ -9 & -2 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B.A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2+2.0+3(-1) & 1.3+2.1+3.4 \\ -2.2+0.0+4(-1) & -2.3+0.1+4.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 17 \\ -8 & 10 \end{bmatrix}$$

Da definição, temos que a matriz produto A . B só existe se o número de colunas de **A** for igual ao número de linhas de **B**:

$$A_{m\times p} \cdot B_{p\times n} = (A.B)_{m\times n}$$

A matriz produto terá o número de linhas de **A (m)** e o número de colunas de **B(n)**:

- Se $A_{3\times 2}$ e $B_{2\times 5}$, então $(A.B)_{3\times 5}$
- Se $A_{4\times 1}$ e $B_{2\times 3}$, então não existe o produto
- Se $A_{4\times 2}$ e $B_{2\times 1}$, então $(A.B)_{4\times 1}$

Propriedades

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, valem as seguintes propriedades:

a) *associativa*: (A . B) . C = A . (B . C)

b) *distributiva em relação à adição*: A . (B + C) = A . B + A . C ou (A + B) . C = A . C + B . C

c) *elemento neutro*: $A . I_n = I_n . A = A$, sendo $\mathbf{I_n}$ a matriz identidade de ordem **n**

Vimos que a propriedade comutativa, geralmente, não vale para a multiplicação de matrizes. Não vale também o anulamento do produto, ou seja: sendo $0_{m\times n}$ uma matriz nula, $A.B = 0_{m\times n}$ não implica, necessariamente, que $A = 0_{m\times n}$ ou $B = 0_{m\times n}$.

6. Exemplos de Aplicação

1º Exemplo: Uma loja A vende sapatos femininos de três marcas X, Y e Z e tamanhos de 35 a 40. A loja possui um estoque assim distribuído:

Tamanho	35	36	37	38	39	40
Qtd marca X	30	50	25	18	10	7
Qtd marca Y	8	7	9	28	10	8
Qtd marca Z	0	10	15	12	9	3

a) Escreva uma matriz A, onde as linhas representem as quantidades de pares de sapatos por marca e as colunas a quantidade de pares de sapato por tamanho, que descreva a situação acima.
b) Qual o tipo da matriz A?
c) Somando os elementos de cada uma das linhas o que representa a soma encontrada? E das colunas?
d) Se você somar os resultados das somas das 3 linhas e também somar os seis resultados das somas das colunas encontrará o mesmo valor. Por que?
e) Devido às dificuldades econômicas em que se encontram as pequenas empresas, o dono da loja A resolveu constituir sociedade com o dono de uma loja B, cujo estoque é representado pela matriz abaixo:

$$B = \begin{bmatrix} 20 & 30 & 15 & 11 & 4 & 23 \\ 12 & 40 & 32 & 30 & 7 & 18 \\ 10 & 15 & 12 & 7 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Imagine que os donos das lojas A e B tenham, antes da fusão, incrementado suas instalações de modo a poder dobrar o estoque. Qual será então o estoque da nova loja?

2º Exemplo: Ana e Beto estão planejando comprar frutas para a próxima semana. Cada um deles quer comprar algumas maçãs, tangerinas e laranjas, porém em quantidades diferentes. A tabela 1 mostra o que eles pretendem comprar. Nas proximidades existem duas bancas de frutas – a do Sam e a do Téo – cujos preços estão apresentados na tabela 2. Quanto gastarão Ana e Beto para fazer as compras em cada uma das duas bancas?

Tabela 1

	Maçãs	Tangerinas	Laranjas
Ana	*6*	*3*	*10*
Beto	*4*	*8*	*5*

Tabela 2 (em R$)

	Sam	Téo
Maçã	*0,10*	*0,15*
Tangerina	*0,40*	*0,30*
Laranja	*0,10*	*0,20*

SOLUÇÃO: Se Ana comprar na banca do Sam, gastará

$$6(0{,}10) + 3(0{,}40) + 10(0{,}10) = \text{R\$ } 2{,}80$$

Se ela comprar na banca do Téo, gastará

$$6(0{,}15) + 3(0{,}30) + 10(0{,}20) = \text{R\$ } 3{,}80$$

Beto gastará, na banca do Sam,

$$4(0{,}10) + 8(0{,}40) + 5(0{,}10) = \text{R\$ } 4{,}10$$

e, na banca do Téo,

$$4(0{,}15) + 8(0{,}30) + 5(0{,}20) = \text{R\$ } 4{,}00$$

(Provavelmente, Ana fará suas compras na banca do Sam e Beto fará suas compras na banca do Téo.)
Esses cálculos mostram que a multiplicação de matrizes funciona aqui. Se organizarmos as informações dadas em uma matriz demanda D e uma matriz de preços P, teremos

$$D = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}40 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}20 \end{bmatrix}$$

Esses cálculos são o equivalente a efetuar o produto

$$DP = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 10 \\ 4 & 8 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}10 & 0{,}15 \\ 0{,}40 & 0{,}30 \\ 0{,}10 & 0{,}20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}80 & 3{,}80 \\ 4{,}10 & 4{,}00 \end{bmatrix}$$

Tabela 3(em R$)

	Sam	Téo
Ana	2,80	3,80
Beto	4,10	4,00

Assim, o produto da matriz DP nos mostra quanto a compra de cada um em cada banca irá custar (Tabela 3).

EXERCÍCIOS

1. Uma fábrica produz três produtos (banheiras, pias e tanques) e os envia para armazenamento em dois depósitos. O número de unidades enviadas de cada produto para cada depósito é dado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} 200 & 75 \\ 150 & 100 \\ 100 & 125 \end{bmatrix}$$

   (em que a_{ij} é o número de unidades enviadas do produto i para o depósito j, e os produtos são colocados em ordem alfabética). O custo de remessa de uma unidade de cada produto, por caminhão, é R$ 1,50 por banheira, R$ 1,00 por pia e R$ 2,00 por tanque. Os custos unitários correspondentes ao envio por trem são: R$ 1,75, R$ 1,50 e R$ 1,00. Organize esses custos em uma matriz B e use essa matriz para mostrar como a fábrica pode comparar os custos de remessa – por caminhão e por trem – de seus produtos para cada um dos depósitos.

2. Em relação ao exercício anterior, suponha que o custo unitário de distribuição dos produtos para as lojas seja o mesmo para todos os produtos, mas que varie dependendo do depósito por causa das distâncias envolvidas. Custa R$ 0,75 para distribuir uma unidade do depósito 1 e R$ 1,00 para distribuir uma unidade do depósito 2. Organize esses custos em uma matriz C e use multiplicação de matrizes para calcular o custo total de distribuição de cada produto.

3. A matriz C fornece, em reais, o custo das porções de arroz, carne e salada usadas em um restaurante. A matriz P fornece o número de porções de arroz, carne e salada

usadas na composição dos pratos P_1, P_2 e P_3 desse restaurante. Calcule a matriz que fornece o custo da produção, em reais, dos pratos P_1, P_2 e P_3.

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} arroz \\ carne \\ salada \end{array} \qquad P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} arroz & carne & salada \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{array}$$

4. Cláudio anotou suas médias bimestrais de matemática, português, ciências e estudos sociais em uma tabela com 4 linhas e 4 colunas, formando uma matriz, como mostra abaixo:

$$\begin{array}{r} \text{Matemática} \\ \text{Português} \\ \text{Ciências} \\ \text{Estudos Sociais} \end{array} \begin{bmatrix} 5,0 & 4,5 & 6,2 & 5,9 \\ 8,4 & 6,5 & 7,1 & 6,6 \\ 9,0 & 7,8 & 6,8 & 8,6 \\ 7,7 & 5,9 & 5,6 & 6,2 \end{bmatrix}$$

Sabe-se que as notas de todos os bimestres têm o mesmo peso, isto é, para calcular a média anual do aluno em cada matéria basta fazer a média aritmética de suas médias bimestrais. Para gerar uma nova matriz cujos os elementos representem as médias anuais de Cláudio, na mesma ordem da matriz apresentada, bastará multiplicar essa matriz por qual matriz?

5. Uma nutricionista recomendou aos atletas de um time de futebol a ingestão de uma quantidade mínima de certos alimentos (frutas, leite e cereais) necessária para uma alimentação sadia. A matriz D fornece a quantidade diária mínima (em gramas) daqueles alimentos. A matriz M mostra a quantidade (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida por cada grama ingerida dos alimentos citados.

$$D = \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 600 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{fruta} \\ \text{leite} \\ \text{cereais} \end{array} \qquad M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{fruta} & \text{leite} & \text{cereais} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0,006 & 0,033 & 0,108 \\ 0,001 & 0,035 & 0,018 \\ 0,084 & 0,052 & 0,631 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \text{proteínas} \\ \text{gorduras} \\ \text{carboidratos} \end{array}$$

Determine a matriz que mostra a quantidade diária mínima (em gramas) de proteínas, gorduras e carboidratos fornecida pela ingestão desses alimentos.