

# Notas da disciplina MAT0264 - Anéis e Corps

Prof. Vinicius Rodrigues

10 de abril de 2025

# 1 Pré-Requisitos Conjuntistas

Antes de descrevermos grupos, precisamos de algumas definições e resultados básicos envolvendo noções básicas sobre conjuntos e funções. Para isso, utilizaremos a notação usual de conjuntos, como  $\mathcal{P}(X)$  para o conjunto das partes de  $X$ ,  $X^n$  para o produto cartesiano de  $n$  cópias de  $X$ , e assim por diante.

Não é objetivo deste texto desenvolver a parte inicial da Teoria dos Conjuntos. Apenas apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos que utilizaremos ao longo do texto.

## 1.1 Operações

**Definição 1.1** (Operações  $n$ -árias). Se  $X$  é um conjunto e  $n \in \mathbb{N}$ , uma operação  $n$ -ária em  $X$  é uma função  $f : X^n \rightarrow X$ .

Operações 2-árias e 1-árias são frequentemente chamadas de *binárias* e *unárias*, respectivamente.

Caso  $*$  seja uma operação binária, a notação  $x * y$  é frequentemente utilizada para denotar  $x * y$ .

Caso  $*$  seja uma operação unária, a notação  $*x$  é frequentemente utilizada para denotar  $*(x)$ .

## 1.2 Produto cartesiano de conjuntos generalizado

Famílias são funções com notação especial. Tal notação é utilizada quando pensamos em uma função como um “conjunto indexado de valores” ao invés de um “dispositivo de entrada/saída”.

Matematicamente, funções e famílias podem ser vistas como o mesmo objeto.

Conceito	Função	Família
Mapa	$u : I \rightarrow A$	$(u_i)_{i \in I} = (u_i : i \in I)$
Valor	$u(i)$	$u_i$
Imagem	$\text{ran } u$	$\{u_i : i \in I\}$
Intuição	objeto dinâmico	objeto estático
Inputs	domínio $I$	conjunto de índices $I$

Tabela 1: Comparativo de família e função

Exemplo: sequências. Uma sequência é uma família cujo conjunto de índices é  $\mathbb{N}$ . Compare a intuição que passa as notações:

- Considere a sequência  $u = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ...
- Considere a função  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $u(n) = \frac{1}{2^n}$ ...

Exemplo: sequências finitas. Se  $n \geq 1$ , identificamos  $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ . Assim:

- Uma família com  $n$  elementos é uma família  $(a_i)_{i < n} = (a_i)_{i \in n} = (a_0, \dots, a_{n-1})$ .

**Definição 1.2** (Produto cartesiano de conjuntos). Seja  $(A_i)_{i \in I}$  uma família de conjuntos. O produto cartesiano de conjuntos é o conjunto  $\prod_{i \in I} A_i$  definido como o conjunto de todas as famílias  $(a_i : i \in I)$  tais que para cada  $i \in I$ ,  $a_i \in A_i$ .

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I, a_i \in A_i\}.$$

**Definição 1.3** (Exponenciação de conjuntos). Sejam  $A, I$  conjuntos. O conjunto  $A^I$  é o conjunto de todas as funções de  $I$  em  $A$ . Ou seja,  $A^I = \{f : I \rightarrow A\}$ . Note que:

$$A^I = \prod_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I, a_i \in A\}.$$

Na notação anterior, se  $n \geq 1$

$$A^n = \{(a_i)_{i < n} : \forall i < n, a_i \in A\} = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) : a_0, \dots, a_{n-1} \in A\} \approx A \times \dots \times A \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

### 1.3 Produtos de anéis

**Definição 1.4** (Produto Direto de dois anéis). Sejam  $R, S$  anéis. O produto direto de  $R$  e  $S$  é o conjunto  $R \times S$  munido das operações “ponto à ponto”: dados  $a = (a_1, a_2) \in R \times S$  e  $b = (b_1, b_2) \in R \times S$ , temos:

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$a \cdot b = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

$$0 = (0_R, 0_S)$$

$$1 = (1_R, 1_S)$$

Exemplo: Seja  $R = \mathbb{Z}_3$  e  $S = \mathbb{Z}_4$ . Então  $(2, 2) \in R \times S$  e  $(1, 2) \in R \times S$ . Temos:

$$(2, 2) + (1, 2) = (2 + 1, 2 + 2) = (0, 0)$$

$$(2, 2) \cdot (2, 2) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 2) = (1, 0)$$

## 2 Noções de Grupos

### 2.1 Definição e Propriedades Básicas

**Definição 2.1.** Um grupo é uma quadrupla  $(G, \cdot, e)$ , tal que  $G$  é um conjunto,  $\cdot$  é uma operação binária em  $G$  e  $e \in G$ , e satisfazem:

- **(Propriedade associativa)**  $\forall a, b, c \in G, (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- **(Elemento neutro)**  $\forall a \in G, e \cdot a = a \cdot e = a$ .
- **(Elemento inverso)**  $\forall a \in G, \exists b \in G, a \cdot b = b \cdot a = e$ .

Se, adicionalmente, a seguinte propriedade é satisfeita, o grupo é chamado de *comutativo*, ou, mais comunmente, *abeliano*:

- **(Comutatividade)**  $\forall a, b \in G, a \cdot b = b \cdot a$ .

Algumas observações:

- Ao discursar sobre grupos, é comum omitir a operação e o elemento neutro, referindo-se apenas ao conjunto  $G$ .
- Caso o grupo seja abeliano, é comum que sua operação binária seja denotada por  $+$  ou outro símbolo similar. Nesse contexto, o elemento neutro é frequentemente denotado por  $0$ .

- Caso o grupo não seja abeliano, é comum que sua operação binária seja denotada por  $\cdot$  ou outro símbolo similar. Nesse contexto, o elemento neutro é frequentemente denotado por  $e$ , e a operação é frequentemente omitida, ou seja,  $a \cdot b$  é frequentemente escrito como  $ab$ .

Alguns exemplos:

- Com a soma usual,  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  são grupos abelianos.
- Com a multiplicação usual, o círculo unitário complexo  $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$  é um grupo abeliano com elemento neutro 1. De fato, o produto de complexos é comutativo, associativo e tem 1 como elemento neutro. Note que  $1 \in \mathbb{T}$  e  $0 \notin \mathbb{T}$ . Se  $x \in \mathbb{T}$ , o inverso multiplicativo de  $x$  é dado por  $\frac{\bar{x}}{|x|^2}$ , onde  $\bar{x}$  denota o conjugado de  $x$ . Como  $|\bar{x}| = |x| = 1$ , segue que  $\mathbb{T}$  tem todos os inversos de todos seus elementos.
- Os inteiros módulo  $n$  ( $n \geq 1$ ), dados por  $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$  com a soma dada pela aritmética módulo  $n$ , são grupos.

Agora iniciaremos a provar algumas propriedades básicas sobre grupos.

**Proposição 2.2** (Unicidade do elemento neutro). Seja  $(G, \cdot, e)$  um grupo. Então, o elemento neutro  $e$  é único. Isto é, se  $h \in G$  é tal que  $\forall a \in G \ h \cdot a = a \cdot h = a$ , então  $h = e$ .

*Demonstração.* Note que  $h = he$ , pois  $e$  é elemento neutro. Por outro lado,  $e = he$ , pois  $h$  é elemento neutro. Assim,  $h = he = e$ .  $\square$

**Proposição 2.3** (Unicidade dos inversos). Seja  $(G, \cdot, e)$  um grupo. Então todo  $a \in G$  possui um único elemento inverso, ou seja, para todo  $g \in G$ , é único. Isto é  $\forall a \in G \ \exists! b \in G \ a \cdot b = b \cdot a = e$ .

*Demonstração.* A existência do inverso é garantida pela definição de grupo. Para provar a unicidade, suponha que  $b, c$  são inversos de  $a$ , ou seja,  $a \cdot b = b \cdot a = e$  e  $a \cdot c = c \cdot a = e$ . Então, temos:

$$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c.$$

$\square$

A unicidade do elemento neutro e dos inversos nos permite definir a notação  $a^{-1}$  para o inverso de  $a$  em um grupo  $(G, \cdot, e)$ . Caso  $(G, +, 0)$  seja um grupo abeliano, a notação  $-a$  é frequentemente utilizada para denotar o inverso de  $a$ , e, nesse caso,  $-a$  é chamado de *oposto* de  $a$ .

Note que assim, ficam definidos operadores unários  $()^{-1} : G \rightarrow G$  (ou  $- : G \rightarrow G$ ). Para o segundo caso, define-se também que  $a - b = a + (-b)$ .

**Proposição 2.4** (Cancelamento). Seja  $(G, \cdot, e)$  um grupo. Então, se  $a, b, c \in G$  e  $a \cdot b = a \cdot c$ , então  $b = c$ . Analogamente, se  $b \cdot a = c \cdot a$ , então  $b = c$ .

*Demonstração.* Provaremos a primeira afirmação. A segunda é análoga e fica como exercício. Suponha que  $ba = ca$ . Então  $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$ . Assim,  $b = c$ .  $\square$

**Corolário 2.5** (Cancelamento II). Seja  $(G, \cdot, e)$  um grupo. Para todos  $a, b \in G$ , se  $ab = a$ , então  $b = e$ . Analogamente, se  $ba = a$ , então  $b = e$ .

*Demonstração.* Para a primeira afirmação, note que  $ab = ae$ , logo, pela proposição anterior,  $b = e$ . A segunda afirmação é análoga.  $\square$

**Proposição 2.6** (Regras de sinal). Seja  $G$  um grupo e  $a, b \in G$ . Então:

- a)  $((a)^{-1})^{-1} = a$  [na notação aditiva,  $-(-a) = a$ ].
- b)  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$  [na notação aditiva,  $-(a+b) = (-b) + (-a)$ ].
- c)  $e^{-1} = e$  [na notação aditiva,  $-0 = 0$ ].

*Demonstração.* a): Temos que  $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = e = aa^{-1}$ . Cancelando  $a^{-1}$ , segue.

b): Temos que  $(ab)^{-1}(ab) = e = (b^{-1}a^{-1})ab$ . Cancelando  $ab$ , segue que  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ . Analogamente,  $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ .

c): Temos que  $(e^{-1})e = e = ee$ . Cancelando  $e$  à direita, segue.

□

## 2.2 Somatórios

Nessa seção, formalizaremos somatórios.

**Definição 2.7** (Soma de sequência finita). Seja  $G$  um conjunto munido de uma operação  $+$  associativa, comutativa e com neutro  $0$ . Define-se, recursivamente para  $n \geq 0$ , o somatório de famílias  $(a_i : i \in F)$ , onde  $F$  é um conjunto de  $n$  índices e  $a_i \in G$  para todo  $i \in F$ , como se segue:

- **Notação:** se  $a = (a_i)_{i \in F}$  é uma sequência de elementos de  $G$ , então usamos as notações:

$$\sum a = \sum (a_i : i \in F) = \sum_{i \in F} a_i.$$

- Caso base  $n = 0$ : só existe uma família com 0 elementos, que é a família vazia  $a = () = \emptyset = (a_i : i \in \emptyset)$ . Definimos:

$$\sum a = 0$$

- Passo recursivo  $n \rightarrow n+1$ : considere uma família  $(a_i)_{i \in F}$ , onde  $|F| = n+1$ . Define-se:

$$\sum (a_i : i \in F) = \sum (a_i : i \in F \setminus \{j\}) + a_j,$$

onde  $j \in F$  é qualquer elemento.

É claro que, para mostrar que a definição acima é consistente, precisamos mostrar que a soma não depende da escolha de  $j$ .

**Lema 2.8.** Qualquer que seja o tamanho (finito) de  $F$ ,  $\sum (a_i)_{i \in F}$  está bem definido.

*Demonstração.* Seja  $F$  um conjunto finito. Se  $|F| = 0$ , então  $F = \emptyset$ , e a soma é 0. Se  $|F| = 1$ , então  $F = \{j\}$  – só há uma escolha para  $j$ , e a soma é  $a_j$ . Se  $|F| = n+1$  para  $n \geq 1$ , tome  $j, k \in F$ . Devemos ver que  $\left(\sum_{i \in F \setminus \{j\}} a_i\right) + a_j = \left(\sum_{i \in F \setminus \{k\}} a_i\right) + a_k$ . Com efeito:

$$\left(\sum_{i \in F \setminus \{j\}} a_i\right) + a_j = \left(\left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i\right) + a_k\right) + a_j = \left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i\right) + (a_k + a_j)$$

$$= \left( \sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + (a_j + a_k) = \left( \left( \sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + a_j \right) + a_k = \left( \sum_{i \in F \setminus \{k\}} a_i \right) + a_k.$$

□

**Proposição 2.9.** Seja  $G$  um conjunto munido de uma operação  $+$  associativa, comutativa e com neutro  $0$ . Seja  $(a_i : i \in I)$  uma família finita em  $G$  e  $\phi : J \rightarrow I$  uma função bijetora. Então:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\phi(j)}.$$

*Demonstração.* Novamente, procedemos por indução no tamanho de  $|I| = |J|$ . A base de tamanho  $0$  é trivial, já que ambos os lados da igualdade são  $0$ .

Para o passo indutivo em que  $|I| = |J| = n + 1$ , considere  $\phi : J \rightarrow I$  como no enunciado. Fixe  $k \in J$  qualquer e sejam  $I' = I \setminus \{\phi(k)\}$ ,  $J' = J \setminus \{k\}$  e  $\phi' = \phi|_{J'} : J' \rightarrow I'$ , que é bijetora. Como  $|J'| = |I'| = n$ , por hipótese indutiva temos que  $\sum_{j \in J'} a_{\phi(j)} = \sum_{i \in I'} a_i$ . Segue que:

$$\sum_{j \in J} a_{\phi(j)} = \left( \sum_{j \in J'} a_{\phi(j)} \right) + a_{\phi(k)} = \left( \sum_{i \in I'} a_i \right) + a_{\phi(k)} = \sum_{j \in I} a_j.$$

□

### 3 Anéis

Nesta seção, começaremos a discutir a noção matemática de anel, uma das principais estruturas que serão estudadas.

**Definição 3.1** (Anel). Um anel é uma 4-upla  $(A, +, \cdot, 0, 1)$  conjunto  $A$  com duas operações binárias, adição e multiplicação, denotadas por  $+$  e  $\cdot$ , tais que:

- $(A, +, 0)$  é um grupo abeliano.
- **(Associatividade)** Para todo  $a, b \in A$ , temos  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .
- **(Elemento identidade)**  $\forall a \in A$   $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ .
- **(Propriedades distributivas)** Para todos  $a, b, c \in A$ , temos:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ e}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Se, adicionalmente, a seguinte propriedade é satisfeita, o anel é chamado de *comutativo*.

- **(Comutatividade)**  $\forall a, b \in A$   $a \cdot b = b \cdot a$ .

Algumas observações:

- Como em grupos, ao discursar sobre anéis é comum omitir as operações, referindo-se apenas ao conjunto  $A$ .

- Ao discursar sobre anéis, e a exemplo do que foi feito ao enunciar as propriedades distributivas, são utilizadas as convenções usuais sobre precedência de operações envolvidas por parênteses. Assim,  $a + b \cdot c$  é interpretado como  $a + (b \cdot c)$ .
- Há textos que definem anéis sem incluir o elemento identidade 1. Nestes textos, a definição acima dá nome ao que chamam de *anéis com identidade*, ou *anéis com 1*. Nesse curso, não usaremos essa convenção, de modo que **todos nossos anéis possuem identidade**. De modo similar, alguns textos definem anéis como sendo comutativos. Também não adotaremos essa convenção. **Os nossos anéis podem ser não comutativos**.
- A definição de anel não exige que  $0 = 1$ .
- 0 é chamado de elemento nulo, e 1 de elemento identidade.

**Proposição 3.2** (Propriedade multiplicativa do 0). Seja  $A$  um anel. Então  $\forall a \in A \ 0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .

*Demonstração.* Provaremos a primeira afirmação. A segunda é análoga e fica como exercício.

Temos que  $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$ . Cancelando, segue que  $0 = 0 \cdot a$ .  $\square$

**Proposição 3.3** (Anel trivial). Seja  $A = x$  um conjunto qualquer. Defina  $x\hat{x} = x = x + x = 0 = 1$ . Então  $(A, +, \cdot, 0, 1)$  é um anel. Um anel dessa forma é chamado de *anel trivial*.

Além disso, se  $A$  é um anel tal que  $0 = 1$ , então  $A$  é um anel trivial.

*Demonstração.* A primeira afirmação (de que  $A$  como acima é um anel) fica como exercício.

Para a segunda afirmação, assumamos que  $A$  é um anel tal que  $0 = 1$ . Fixe  $a \in A$  qualquer. Então  $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$ , ou seja,  $a = 0$ . Assim,  $A$  é o conjunto unitário  $\{0\}$ , que é um anel trivial.  $\square$

**Proposição 3.4** (Regras de sinal II). Seja  $A$  um anel e  $a, b \in A$ . Então:

- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$ .
- $(-1)a = -a$ .

*Demonstração.* a): Temos que  $ab + (-a)b = (-a)b + ab = [-a + a]b = 0b = 0$ . Assim,  $(-a)b = -(ab)$ . Analogamente,  $a(-b) = -(ab)$ . b): Temos que  $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab$  pela regra anterior. c): Temos que  $(-1)a = -(1a) = -a$ .  $\square$

### 3.1 Elementos invertíveis

**Definição 3.5** (Elemento invertível). Seja  $A$  um anel. Um elemento  $a \in A$  é dito *invertível*, ou uma *unidade* se  $\exists b \in A$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ .

O conjunto de todas as unidades de  $A$  é denotado por  $A^*$ .

**Definição 3.6.** Seja  $A$  um anel. Então, se  $a \in A^*$ , existe um **único**  $b \in A$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ . Este elemento é denotado por  $a^{-1}$ , e é chamado de *inverso* de  $a$ .

Observação: para que a definição acima faça sentido, é necessário mostrar que se  $a$  é unidade, existe um **único**  $b \in A$  tal que  $a \cdot b = b \cdot a = 1$ . A existência é garantida pela definição de unidade, e a demonstração da unicidade é análoga à da unicidade do inverso em grupos (Proposição 2.3), ficando como exercício.

**Proposição 3.7.** Seja  $A$  um anel. Para todos  $a, b \in A^*$ , temos:

- a)  $ab \in A^U$  e  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .
- b)  $a^{-1} \in A^U$  e  $(a^{-1})^{-1} = a$ .
- c)  $1^{-1} = 1$ .

Além disso,  $A^*$  é, com a restrição da operação de multiplicação do anel, um grupo com identidade 1. Caso  $A$  seja abeliano,  $A^*$  é um grupo abeliano.

*Demonstração.* a): Sejam  $a, b \in A^*$ . Pela associatividade,  $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1 = (b^{-1}a^{-1})(ab)$ , logo, pela unicidade do inverso,  $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ .

b): Seja  $a \in A^*$ . Temos que  $a^{-1}a = 1 = a(a^{-1})$ , logo, pela unicidade do inverso,  $(a^{-1})^{-1} = a$ .

c): Note que  $1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$ , logo, pela unicidade do inverso,  $1^{-1} = 1$ .

A última afirmação é imediata e fica como exercício.  $\square$

**Definição 3.8.** Um anel de divisão é um anel não trivial para o qual todo elemento não nulo é invertível. Um corpo é um anel de divisão comutativo.

**Exercício 3.9.** Mostre que um anel  $A$  é um anel de divisão se, e somente se  $A^* = A \setminus \{0\}$ .

**Definição 3.10.** Um domínio de integridade é um anel comutativo não trivial  $A$  tal que  $\forall a, b \in A$ , se  $ab = 0$ , então  $a = 0$  ou  $b = 0$ .

**Proposição 3.11.** Seja  $K$  um corpo. Então  $K$  é um domínio de integridade.

*Demonstração.* Sabemos que  $K$  é um anel comutativo não trivial. Sejam  $a, b \in K$  tais que  $ab = 0$ . Se  $a = 0$ , então segue a tese. Caso contrário, como  $K$  é um corpo,  $a^{-1}$  existe. Assim, temos que  $b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = 0$ , logo,  $b = 0$ .  $\square$

## 3.2 Ideais

**Definição 3.12** (Ideal à esquerda). Seja  $A$  um anel. Um subconjunto  $I \subseteq A$  é dito *ideal à esquerda* se:

- $0 \in I$ .
- Para todos  $a, b \in I$ , temos  $a + b \in I$ .
- $\forall a \in A$  e  $\forall b \in I$ , temos  $ab \in I$ .

**Definição 3.13** (Ideal à direita). Seja  $A$  um anel. Um subconjunto  $I \subseteq A$  é dito *ideal à direita* se:

- $0 \in I$ .
- Para todos  $a, b \in I$ , temos  $a + b \in I$ .
- $\forall a \in I$  e  $\forall b \in A$ , temos  $ab \in I$ .

**Definição 3.14** (Ideal). Seja  $A$  um anel. Um subconjunto  $I \subseteq A$  é dito *ideal* se for um ideal à esquerda e um ideal à direita. Ou seja,  $I$  é um ideal se:

- $0 \in I$ .
- Para todos  $a, b \in I$ , temos  $a + b \in I$ .



- $\forall a \in A$  e  $\forall b \in I$ , temos  $ab \in I$ .
- $\forall a \in I$  e  $\forall b \in A$ , temos  $ab \in I$ .

**Proposição 3.15** (Ideal trivial). Seja  $A$  um anel. Então  $\{0\}$  e  $A$  são ideais de  $A$ . Estes ideais são chamados de *ideais principais*

*Demonstração.* Exercício. □

Note que se  $A$  é um anel comutativo, então  $I$  é um ideal à esquerda se, e somente se,  $I$  é um ideal à direita. Assim, em anéis comutativos, a noção de ideal é equivalente à de ideal à esquerda ou à de ideal à direita.

**Proposição 3.16** (Interseção de ideais). Seja  $A$  um anel e  $\mathcal{F}$  uma coleção não vazia de ideais à esquerda de  $A$ . Então  $\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \bigcap \mathcal{F}$  é um ideal de  $A$ . O mesmo vale para ideais à direita e ideais.

*Demonstração.* Provaremos para ideais à esquerda. A prova para ideais à direita é análoga e fica como exercício.

Seja  $I = \bigcap \mathcal{F}$ . Então  $0 \in I$ , pois  $0 \in I$  para todo  $I \in \mathcal{F}$ .

Sejam  $a, b \in I$ . Então, para todo  $I \in \mathcal{F}$ , temos que  $a, b \in I$ , logo,  $a + b \in I$ . Assim,  $a + b \in \bigcap \mathcal{F}$ .

Finalmente, seja  $a \in A$  e  $b \in I$ . Então, para todo  $I \in \mathcal{F}$ , temos que  $b \in I$ , logo,  $ab \in I$ . Assim,  $ab \in \bigcap \mathcal{F}$ . □

**Proposição 3.17** (Ideal gerado). Seja  $A$  um anel comutativo e  $B \subseteq A$  um conjunto não vazio. Então, o conjunto  $I = \{a_1b_1 + \dots + a_nb_n : n \geq 1, a_i \in A, b_i \in B\}$  é o menor ideal à esquerda  $A$  que contém  $B$  (ou seja, além de ser um ideal contendo  $B$ , se  $J$  é qualquer ideal contendo  $B$ , então  $I \subseteq J$ ). O ideal  $I$  é chamado de *ideal gerado por  $B$* , e denotado por  $\langle B \rangle$ .

Se  $B = \{x_0, \dots, x_n\}$ , então abreviamos  $\langle B \rangle$  como  $\langle x_0, \dots, x_n \rangle$ .

*Demonstração.* Primeiro, verificaremos que  $I$  é um ideal.

$0 \in I$ , pois  $0 = 0b$  para todo  $b \in B$ .

Sejam  $x, y \in I$ . Então existem  $n, m \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$ ,  $b_1, \dots, b_n \in B$ ,  $c_1, \dots, c_m \in A$  e  $d_1, \dots, d_m \in B$  tais que  $x = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$  e  $y = c_1d_1 + \dots + c_md_m$ . Assim,  $x + y = (a_1b_1 + \dots + a_nb_n) + (c_1d_1 + \dots + c_md_m) = (a_1b_1 + \dots + a_nb_n) + (c_1d_1 + \dots + c_md_m) \in I$ .

Finalmente, seja  $a \in A$  e  $b \in I$ . Então existem  $n \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_n \in A$  e  $b_1, \dots, b_n \in B$  tais que  $b = a_1b_1 + \dots + a_nb_n$ . Assim,  $ab = (a_1b_1 + \dots + a_nb_n)a = a_1(b_1a) + \dots + a_n(b_na) \in I$ .

Agora, seja  $J$  um ideal de  $A$  que contém  $B$ . Então, como  $J$  é um ideal de  $A$ , temos que  $\forall a_i \in A, \forall b_i \in B$ , temos que  $(a_ib_i) \in J$ . Logo,  $I \subseteq J$ . Portanto,  $I$  é o menor ideal de  $A$  que contém  $B$ . □

Observação: note que o menor ideal contendo  $B = \emptyset$  é o ideal nulo,  $\{0\}$ .

**Proposição 3.18** (Ideal principal). Seja  $A$  um anel. Para todo  $x \in A$ , o conjunto  $xA = \{xa : a \in A\}$  é um ideal à direita de  $A$ . O ideal  $xA$  é chamado de *ideal principal à direita gerado por  $x$* . Analogamente, o conjunto  $Ax = \{ax : a \in A\}$  é um ideal à esquerda de  $A$ , e é chamado de *ideal principal à esquerda gerado por  $x$* . Se  $A$  é comutativo, o ideal  $xA = Ax$  é chamado de *ideal principal gerado por  $x$* .

*Demonstração.* Mostraremos que  $xA$  é um ideal à direita. As demais afirmações ficam como exercício.

Note que  $0 \in xA$ , pois  $x0 = 0$ .

Sejam  $a, b \in xA$ . Então, existem  $a_1, a_2 \in A$  tais que  $a = xa_1$  e  $b = xa_2$ . Assim,  $a + b = xa_1 + xa_2 = x(a_1 + a_2) \in xA$ .

Finalmente, seja  $a \in A$  e  $b \in xA$ . Então, existe  $b_1 \in A$  tal que  $b = xb_1$ . Assim,  $ab = (xa)b_1 = x(ab_1) \in xA$ .  $\square$

**Definição 3.19** (Ideal principal). Seja  $A$  um anel. Para todo  $x \in A$ , o conjunto  $xA = \{xa : a \in A\}$  é um ideal à esquerda de  $A$ . O ideal  $xA$  é chamado de *ideal principal à esquerda gerado por  $x$* . Analogamente, o conjunto  $Ax = \{ax : a \in A\}$  é um ideal à direita de  $A$ , e é chamado de *ideal principal à direita gerado por  $x$* . Se  $A$  é comutativo, o ideal  $xA = Ax$  é chamado de *ideal principal gerado por  $x$* .

Observação: note que, comparando as definições, se  $A$  é um anel comutativo com unidade,  $xA = \langle x \rangle$ .

Notemos que ideais triviais são principais à esquerda e à direita, pois  $0A = \{0\} = A0$  e  $A1 = A = 1A$ .

**Definição 3.20** (Domínio de ideais principais). Um domínio de ideais principais (DIP), ou anel principal, é um domínio de integridade  $A$  tal que todo ideal de  $A$  é principal.

**Proposição 3.21** (Ideais de um corpo são triviais). Todo ideal de um corpo é trivial. Em particular, todo corpo é um DIP. Reciprocamente, se  $A$  é um anel comutativo não trivial cujo todo ideal é trivial, então  $A$  é um corpo.

*Demonstração.* Seja  $K$  um corpo e  $I$  um ideal de  $K$ . Se  $I = \{0\}$ , então  $I$  é trivial. Se  $I \neq \{0\}$ , então existe  $a \in I$  tal que  $a \neq 0$ . Daí  $1 = a^{-1}a \in I$ . Logo, para todo  $k \in K$ ,  $k = 1k \in I$ .

Para a recíproca, seja  $A$  um anel comutativo não trivial tal que todo ideal de  $A$  é trivial, e fixe  $x \in A \setminus \{0\}$ . Como  $Ax$  é um ideal trivial e  $0 \neq x \in Ax$ , temos que  $Ax = A$ . Logo, existe  $a \in A$  tal que  $ax = 1$ . Assim,  $x$  é invertível. Portanto,  $A$  é um corpo.  $\square$

**Proposição 3.22** ( $\mathbb{Z}$  é um DIP que não é um corpo). Seja  $I$  um ideal de  $\mathbb{Z}$ . Veremos que  $I$  é um ideal principal. Se  $I = \{0\}$ , então  $I$  é principal. Caso contrário,  $I$  contém ao menos um elemento positivo, já que, sendo  $x \in I \setminus \{0\}$ , temos que  $-x \in I$  e um dos  $x, -x$  é positivo.

Seja  $n$  o menor inteiro positivo de  $I$ . Afirmamos que  $I = n\mathbb{Z}$ . De fato, se  $x \in I$ , então escreva  $x = qn + r$ , onde  $q, r \in \mathbb{Z}$  e  $0 \leq r < n$ . Como  $x \in I$ , temos que  $r = x - qn \in I$ . Assim,  $r = 0$ , ou violaríamos a minimalidade de  $n$ . Logo,  $x = qn \in n\mathbb{Z}$ . Portanto,  $I \subseteq n\mathbb{Z}$ . Como  $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$  e  $n \in I$ , temos que  $n\mathbb{Z} \subseteq I$ , o que completa a prova.

## 4 Subanéis

**Definição 4.1** (Subanel). Seja  $A$  um anel. Um subanel de  $A$  é um conjunto  $B \subseteq A$ , com as operações de  $A$  restritas à  $B$  e com mesmo 0 e 1 de  $A$ , é um anel. Note que, para isso, é necessário e suficiente que:

- $1 \in B$
- $a - b \in B$  para todo  $a, b \in B$ .
- $ab \in B$  para todo  $a, b \in B$ .

## 5 Quocientes e homomorfismos

### 5.1 Homomorfismos

**Definição 5.1.** Sejam  $A, R$  anéis. Uma função  $f : A \rightarrow R$  é um *homomorfismo* se:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(-a) = -f(a)$  para todo  $a \in A$ .
- $f(0_A) = 0_R$
- $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(1_A) = 1_R$ .

**Proposição 5.2** (Propriedades de homomorfismos). Seja  $f : A \rightarrow R$  um homomorfismo de anéis. Então:

- a) Para todo  $a \in A^*$ , temos  $f(a) \in R^*$  e  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .
- b)  $\ker f$

## 6 Quocientes e homomorfismos

### 6.1 homomorfismos

**Definição 6.1.** Sejam  $A, R$  anéis. Uma função  $f : A \rightarrow R$  é um *homomorfismo* se:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(-a) = -f(a)$  para todo  $a \in A$ .
- $f(0_A) = 0_R$
- $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(1_A) = 1_R$ .

Caso  $f$  seja injetora, dizemos que  $f$  é um *monomorfismo*. Caso  $f$  seja sobrejetora, dizemos que  $f$  é um *epimorfismo*. Caso  $f$  seja bijetora, dizemos que  $f$  é um *isomorfismo*.

**Proposição 6.2** (Propriedades de homomorfismos). Seja  $f : A \rightarrow R$  um homomorfismo de anéis. Então:

- a) Para todo  $a \in A^*$ , temos  $f(a) \in R^*$  e  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ .
- b) O núcleo de  $f$ , definido como  $\ker f = f^{-1}(\{0_R\}) = \{a \in A : f(a) = 0_R\}$ , é um ideal de  $A$ .
- c) A imagem de  $f$ ,  $\text{ran } f = \{f(a) : a \in A\}$ , é um subanel de  $R$ . Se  $A$  é comutativo,  $\text{ran } f$  também é.
- d) Se  $f$  é injetora se, e somente se  $\ker f = \{0_A\}$ .

*Demonstração.* a) Se  $a \in A^*$ , então  $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = 1_R$  e  $f(a^{-1})f(a) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = 1_R$ . Assim,  $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$  e  $f(a) \in R^*$ .

b) Temos que  $0_A \in \ker f$ , pois  $f(0_A) = 0_R$ . Sejam  $a, b \in \ker f$ . Então  $f(a) = f(b) = 0_R$ , logo,  $f(a+b) = f(a) + f(b) = 0_R + 0_R = 0_R$ . Assim,  $a+b \in \ker f$ .

Se  $a \in \ker f$  e  $x \in A$ , vejamos que  $ax, xa \in \ker f$ :  $f(ax) = f(a)f(x) = 0_R f(x) = 0_R$  e  $f(xa) = f(x)f(a) = f(x)0_R = 0_R$ . Assim,  $ax, xa \in \ker f$ .

Portanto,  $\ker f$  é um ideal de  $A$ .

c) Seja  $a, b \in \text{ran } f$ . Então existem  $x, y \in A$  tais que  $a = f(x)$  e  $b = f(y)$ . Assim,  $a-b = f(x) - f(y) = f(x-y)$ . Logo,  $a-b \in \text{ran } f$ . Similarmente,  $ab = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{ran } f$ , e  $1_R = f(1_A) \in \text{ran } f$ .

Portanto,  $\text{ran } f$  é um subanel de  $R$ . Se  $A$  é comutativo,  $\text{ran}(f)$  também é comutativo, pois dados  $a, b \in \text{ran } f$ , existem  $x, y \in A$  tais que  $a = f(x)$  e  $b = f(y)$ . Assim,  $ab = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x) = ba$ .

d) Se  $f$  é injetora, então  $f(a) = 0_R = f(0_A)$  implica que  $a = 0_A$ , logo,  $\ker f = \{0_A\}$ . Reciprocamente, se  $\ker f = \{0_A\}$ , então  $f(a) = f(b)$  implica que  $f(a-b) = 0_R$ , logo,  $a-b = 0_A$ , ou seja,  $a = b$ . Assim,  $f$  é injetora.  $\square$

**Proposição 6.3** (Critério de homomorfismo). Seja  $f : A \rightarrow R$  um homomorfismo de anéis. Então,  $f$  é um homomorfismo se, e somente se:

- $f(a+b) = f(a) + f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(ab) = f(a)f(b)$  para todo  $a, b \in A$ .
- $f(1_A) = 1_R$ .

*Demonstração.* Se  $f$  é um homomorfismo, então as duas propriedades acima são satisfeitas. Reciprocamente, se as duas propriedades acima são satisfeitas, então:

- $f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A)$ . Cancelando, temos  $0_R = f(0_A)$ .
- $f(-a) + f(a) = f(0_A) = 0_R$ , logo,  $f(-a) = -f(a)$ .

$f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A) = 0_R$ , e  $f(-a) = f(0_A - a) = f(0_A) + f(-a) = 0_R - f(a) = -f(a)$  para todo  $a \in A$ . Assim,  $f$  é um homomorfismo.  $\square$

## 6.2 Quocientes

**Definição 6.4.** Seja  $A$  um anel. Uma relação de congruência em  $A$  é uma relação de equivalência  $\sim$  em  $A$  que “preserva operações”. Explicitamente, tal que para todos  $a, b, c, d \in A$ , se  $a \sim b$  e  $c \sim d$ , então  $a+c \sim b+d$  e  $ac \sim bd$ .

Quais são todas as relações de congruência em  $A$ ? A proposição abaixo classifica-as a partir dos ideais de  $A$ .

**Proposição 6.5** (Relações de congruência vs ideais). Seja  $A$  um anel,  $\mathcal{R}(A)$  o conjunto de todas as relações de congruência em  $A$  e  $\mathcal{I}(A)$  o conjunto de todos os ideais de  $A$ . Então, existe uma bijeção entre  $\mathcal{R}(A)$  e  $\mathcal{I}(A)$  dada por  $\sim \mapsto I_\sim = \{a \in A : a \sim 0\}$ , cuja inversa se dá por  $I \mapsto \sim_I = \{(a, b) \in A^2 : a - b \in I\}$ .

*Demonstração.* Primeiro, vejamos que se  $\sim$  é uma relação de congruência, então  $I_\sim$  é um ideal de  $A$ .

- $0 \in I_\sim$ , pois  $0 \sim 0$ .

- Se  $a, b \in I_\sim$ , então  $a \sim 0$  e  $b \sim 0$ , logo  $a + b \sim 0 + 0 = 0$ , portanto,  $a + b \in I_\sim$ .
- Se  $x \in A$  e  $a \in I_\sim$ , então  $a \sim 0$  e  $x \sim 0$ , logo  $ax \sim a0 = 0$  e  $xa = 0a = 0$ , portanto,  $ax, xa \in I_\sim$ .

Agora, vejamos que se  $I$  é um ideal, então  $\sim_I$  é uma relação de congruência. De fato, temos que, para todos  $a, b, c, d \in A$ :

- $a \sim_I a$  pois  $a - a = 0 \in I$ .
- Se  $a \sim_I b$ , então  $a - b \in I$ , logo  $(-1)(a - b) = b - a \in I$ , e, portanto,  $b \sim_I a$ .
- Se  $a \sim_I b$  e  $b \sim_I c$ , então  $a - b \in I$  e  $b - c \in I$ , logo,  $(a - b) + (b - c) = a - c \in I$ , portanto,  $a \sim_I c$ .
- Se  $a \sim_I b$  e  $c \sim_I d$ , então  $a - b \in I$  e  $c - d \in I$ , logo,  $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in I$ , portanto,  $a + c \sim_I b + d$ .
- Se  $a \sim_I b$  e  $c \sim_I d$ , então  $a - b \in I$  e  $c - d \in I$ , logo,  $(a - b)c = ac - bc \in I$  e  $b(c - d) = bc - bd \in I$ , logo  $(ac - bc) + (bc - bd) = ac - bd \in I$ , portanto,  $ac \sim_I bd$ .

Se  $I$  é ideal,  $I_{\sim_I} = I$ , pois, para todo  $a \in A$ :

$$a \in I_{\sim_I} \Leftrightarrow a \sim_I 0 \Leftrightarrow a - 0 \in I \Leftrightarrow a \in I.$$

Finalmente, se  $\sim$  é relação de congruência,  $\sim_{I_\sim} = \sim$ , pois, para todos  $a, b \in A$ :

$$a \sim_{I_\sim} b \Leftrightarrow a - b \in I_\sim \Leftrightarrow a - b \sim 0 \Leftrightarrow a \sim b.$$

Justificando a última equivalência: se  $a - b \sim 0$ , como  $b \sim b$ , temos que  $a - b + b \sim b$ , ou seja, que  $a \sim b$ . Reciprocamente, se  $a \sim b$ , como  $(-b) \sim (-b)$ , segue que  $a + (-b) \sim b + (-b)$ , ou seja, que  $a - b \sim 0$ .  $\square$

Como feito nos inteiros, podemos, ao invés de trabalhar com relações de congruência, encontrar anéis em que a congruência corresponda exatamente à igualdade.

**Definição 6.6.** Seja  $A$  um anel e  $\sim$  uma relação de congruência. Define-se que  $A/\sim$  é  $A/\sim = \{[a]_\sim : a \in A\}$ , onde  $[a]_\sim = \{b \in A : b \sim a\}$  é a classe de equivalência de  $a$  com relação a  $\sim$ .

Define-se que  $[a]_\sim + [b]_\sim = [a + b]_\sim$  e que  $[a]_\sim [b]_\sim = [ab]_\sim$ .

Se  $I$  é um ideal,  $A/I = A/\sim_I$ , e o mapa quociente de  $A$  em  $A/I$  se dá por  $q : A \rightarrow A/I$  dada por  $q(a) = [a]_{\sim_I}$ .

Pelas propriedades das relações de congruência, a soma e produto de  $A/\sim$  (ou  $A/I$ ) estão bem definidas. Além disso:

**Lema 6.7** (Propriedades do quociente). Na notação acima:

- $q$  é epimorfismo de anéis.
- $\ker q = I$ .
- $q(a) = a + I = \{a + x : x \in I\}$  para todo  $a \in A$ .
- Se  $A$  é anel comutativo,  $A/I$  também é.

*Demonstração.* a) Seja  $a, b, c, d \in A$ . Temos que  $q(a + b) = q(a) + q(b)$  e  $q(ab) = q(a)q(b)$  por definição da soma em  $A/I$ , e  $q$  é sobrejetora pela definição de  $q$ . Finalmente,  $q(1_A)$  é identidade pois para todo  $a \in A$ ,  $q(1_A)q(a) = q(1_A a) = q(a)$  e  $q(a)q(1_A) = q(a 1_A) = q(a)$ , logo,  $q(1_A) = 1_{A/I}$ .

b) Temos que  $\ker q = \{a \in A : q(a) = q(0)\} = \{a \in A : a \sim_I 0\} = \{a \in A : a \in I\} = I$ .

c) Temos que  $q(a) = [a]_{\sim_I} = \{b \in A : b \sim_I a\} = \{b \in A : b - a \in I\} = \{a + x : x \in I\}$  pois se  $b - a \in I$  se, e somente se  $a - b = x$  para algum  $x \in I$ .

d) Se  $A$  é comutativo, então  $A/I = \text{ran } q$  também é, pois  $q$  é homomorfismo de anéis.  $\square$

### 6.3 Teoremas do isomorfismo

**Teorema 6.8** (Teorema do homomorfismo). Seja  $f : A \rightarrow R$  um homomorfismo de anéis e  $J$  um ideal tal que  $J \subseteq \ker f$ . Então, existe um único homomorfismo de anéis  $g : A/J \rightarrow R$  tal que  $g \circ q = f$ , onde  $q : A \rightarrow A/J$  é o mapa quociente canônico dado por  $q(a) = a + J$ .

*Demonstração.* Definimos  $g : A/J \rightarrow R$  por  $g(a + J) = f(a)$ . Então,  $g$  é bem definido, pois se  $a + J = b + J$ , então  $a - b \in J \subseteq \ker f$ , logo,  $f(a - b) = 0_R$ , ou seja,  $f(a) = f(b)$ .

Agora, vejamos que  $g$  é um homomorfismo de anéis. De fato, para todo  $a', b' \in A/J$ , sendo  $a' = a + J$  e  $b' = b + J$ , temos que:

- $g(a' + b') = g((a + J) + (b + J)) = g((a + b) + J) = f(a + b) = f(a) + f(b) = g(a + J) + g(b + J)$ .
- $g(a'b') = g((a + J)(b + J)) = g(ab + J) = f(ab) = f(a)f(b) = g(a + J)g(b + J)$ .
- $g(1_{A/J}) = g(1_A + J) = f(1_A) = 1_R$ .

$\square$

**Teorema 6.9** (Primeiro Teorema do Isomorfismo). Seja  $f : A \rightarrow R$  um homomorfismo de anéis. Então, existe um único homomorfismo de anéis  $g : A/\ker f \rightarrow R$  tal que  $g \circ q = f$ , onde  $q : A \rightarrow A/\ker f$  é o mapa quociente canônico dado por  $q(a) = a + \ker f$ , e  $g : A/\ker f \rightarrow \text{ran } f$  é isomorfismo.

*Demonstração.* Pelo Teorema do homomorfismo com  $J = \ker f$ , existe um único homomorfismo de anéis  $g : A/\ker f \rightarrow \text{ran } f$  tal que  $g \circ q = f$ . Como  $g \circ q = f$  e  $q$  é sobrejetora, então  $\text{ran } g = \text{ran}(g \circ q) = \text{ran } f$ , logo,  $g$  é sobre  $\text{ran } f$ .

Resta ver que  $g$  é injetora. De fato, seja  $q(a) \in A/\ker f$  tal que  $g(q(a)) = 0_R$ . Então,  $f(a) = 0_R$ , logo,  $a \in \ker f = J$ . ou seja,  $a \sim_I 0$ , logo  $q(a) = q(0) = 0_{A/\ker f}$ . Assim,  $g$  é injetora.  $\square$

## 7 Produtos de anéis

**Definição 7.1** (Produtos de anéis). Seja  $(R_i)_{i \in I}$  uma família de anéis, onde cada  $R_i$  tem as operações  $+_i, \cdot_i$  e constantes  $0_i, 1_i$ .

O produto (direto) de  $(R_i)_{i \in I}$  é o conjunto  $\prod_{i \in I} R_i$  munido das operações “ponto à ponto”: dados  $a = (a_i : i \in I), b = (b_i : i \in I)$  em  $\prod_{i \in I} R_i$ :

$$\begin{aligned} a + b &= (a_i : i \in I) + (b_i : i \in I) = (a_i +_i b_i : i \in I) = (a_i +_i b_i)_{i \in I} \\ a \cdot b &= (a_i : i \in I) \cdot (b_i : i \in I) = (a_i \cdot_i b_i : i \in I) = (a_i \cdot_i b_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

**Lema 7.2** (O produto de anéis está bem definido). Seja  $(R_i)_{i \in I}$  uma família de anéis. Então seu produto direto  $\prod_{i \in I} R_i$  é um anel com  $0 = (0_i : i \in I)$  e  $1 = (1_i : i \in I)$ .

*Demonstração.* Sejam  $a = (a_i : i \in I), b = (b_i : i \in I)$  e  $c = (c_i : i \in I)$  em  $\prod_{i \in I} R_i$ .

- **Associatividade da soma:**  $(a + b) + c = (a_i +_i b_i)_{i \in I} + c = ((a_i +_i b_i) +_i c_i)_{i \in I} = (a_i +_i (b_i +_i c_i))_{i \in I} = a + (b + c)$
- **Associatividade do produto:** Análogo.
- **Comutatividade da soma:**  $a + b = (a_i +_i b_i)_{i \in I} = (b_i +_i a_i)_{i \in I} = b + a$
- **Neutro da soma:**  $a + 0 = (a_i +_i 0_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$
- **Inverso da soma:** Dado  $a = (a_i)_{i \in I}$ , considere  $-a = (-a_i)_{i \in I}$ . Então  $a + (-a) = (a_i +_i (-a_i))_{i \in I} = (0_i)_{i \in I} = 0$ .
- **Distributividade:**  $a \cdot (b + c) = (a_i \cdot_i (b_i +_i c_i))_{i \in I} = (a_i \cdot_i b_i + a_i \cdot_i c_i)_{i \in I} = a \cdot b + a \cdot c$ .
- **Distributividade II:**  $(a + b) \cdot c = ((a_i +_i b_i) \cdot_i c_i)_{i \in I} = (a_i \cdot_i c_i + b_i \cdot_i c_i)_{i \in I} = a \cdot c + b \cdot c$ .
- **Neutro do produto:**  $a \cdot 1 = (a_i \cdot_i 1_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$  e  $1 \cdot a = (1_i \cdot_i a_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$ .

□

**Definição 7.3** (Os mapas de projeção). Seja  $(R_i)_{i \in I}$  uma família de anéis e seja  $R = \prod_{i \in I} R_i$ . Para cada  $i \in I$ , o mapa de projeção  $\pi_i : R \rightarrow R_i$  é dado por  $\pi_i(a) = a_i$ .

Escrevendo de outra forma,  $\pi_i((a_j : j \in I)) = a_i$ .

**Lema 7.4** (Os mapas de projeção são homomorfismos). Seja  $(R_i)_{i \in I}$  uma família de anéis e seja  $R = \prod_{i \in I} R_i$ . Para cada  $i \in I$ , o mapa de projeção  $\pi_i : R \rightarrow R_i$  é um homomorfismo de anéis.

*Demonstração.* Sejam  $a = (a_j : j \in I), b = (b_j : j \in I)$  em  $R$ . Então:

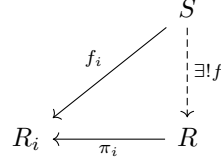
- $\pi_i(a + b) = \pi_i((a_j + b_j)_{j \in I}) = a_i + b_i = \pi_i(a) + \pi_i(b)$
- $\pi_i(a \cdot b) = \pi_i((a_j \cdot b_j)_{j \in I}) = a_i \cdot b_i = \pi_i(a) \cdot \pi_i(b)$
- $\pi_i(1_R) = \pi_i((1_j)_{j \in I}) = 1_i$

□

Notação: se  $R, S$  são anéis, o produto direto de  $(R, S)$  é denotado também como  $R \times S$ . Assim, se  $(r, s), (r', s') \in R \times S$  e

## 7.1 A propriedade universal do produto direto de anéis

**Teorema 7.5** (Propriedade universal do produto direto de anéis). Seja  $(R_i)_{i \in I}$  uma família de anéis e seja  $R = \prod_{i \in I} R_i$  seu produto direto. Então, para cada anel  $S$  e cada família de homomorfismos de anéis  $f_i : R_i \rightarrow S$ , existe um único homomorfismo de anéis  $f : R \rightarrow S$  tal que  $\pi_i \circ f = f_i$  para todo  $i \in I$ .



Além disso, se  $R'$  e  $(p_i : R' \rightarrow R)_{i \in I}$  é um anel e uma família de homomorfismos de anéis, respectivamente, tal que para cada anel  $S$  e cada família de homomorfismos de anéis  $f_i : R_i \rightarrow S$ , existe um único homomorfismo de anéis  $f : R' \rightarrow S$  tal que  $p_i \circ f = f_i$  para todo  $i \in I$ , então existe um único isomorfismo de anéis  $\phi : R \rightarrow R'$  tal que  $p_i \circ \phi = \pi_i$  para todo  $i \in I$ .

*Demonstração.* Seja  $R = \prod_{i \in I} R_i$  e seja  $S$  um anel comutativo. Para cada  $i \in I$ , considere  $f_i : S \rightarrow R_i$  um homomorfismo de anéis. Defina  $f : S \rightarrow R$  tal que, dado  $s \in S$ :

$$f(s) = (f_i(s))_{i \in I}.$$

Então, para cada  $i \in I$ ,  $\pi_i \circ f(s) = \pi_i(f_j(s) : j \in I) = f_i(s)$ , ou seja,  $\pi_i \circ f = f_i$ . Vejamos que  $f$  é homomorfismo de anéis. Dados  $s, t \in S$ , temos:

- $f(s + t) = (f_i(s + t))_{i \in I} = (f_i(s) + f_i(t))_{i \in I} = (f_i(s))_{i \in I} + (f_i(t))_{i \in I} = f(s) + f(t)$ .
- $f(s \cdot t) = (f_i(s \cdot t))_{i \in I} = (f_i(s) \cdot f_i(t))_{i \in I} = (f_i(s))_{i \in I} \cdot (f_i(t))_{i \in I} = f(s) \cdot f(t)$ .
- $f(1_S) = (f_i(1_S))_{i \in I} = (1_{R_i})_{i \in I} = 1_R$ .

Vejamos que  $f$  é único. Se  $g : R \rightarrow S$  é um homomorfismo de anéis tal que  $\pi_i \circ g = f_i$ , então, para cada  $s \in S$ , temos, que, para cada  $i \in I$ :

$$\pi_i(g(s)) = f_i(s).$$

Assim:

$$g(s) = (\pi_i(g(s)) : i \in I) = (f_i(s) : i \in I) = f(s).$$

Portanto,  $g = f$ .

Agora suponha que  $R'$  e  $(p_i : R' \rightarrow R)_{i \in I}$  são como no enunciado.

Aplicando a propriedade de  $R'$  para  $(\pi_i : i \in I)$ , existe um homomorfismo de anéis  $\phi : R' \rightarrow R$  tal que  $p_i \circ \phi = \pi_i$  para todo  $i \in I$ .



$$\begin{array}{ccc}
& R & \\
\pi_i \swarrow & & \searrow \exists! \phi \\
R_i & \xleftarrow{p_i} & R'
\end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que  $\phi$  é isomorfismo. Construiremos uma inversa.

Aplicando a propriedade de  $R$  para  $(\pi_i : i \in I)$ , existe um homomorfismo de anéis  $\psi : R' \rightarrow R$  tal que  $\pi_i \circ \psi = p_i$  para todo  $i \in I$ .

$$\begin{array}{ccc}
& R' & \\
p_i \swarrow & & \searrow \exists! \psi \\
R_i & \xleftarrow{\pi_i} & R
\end{array}$$

Tanto os mapas  $\phi \circ \psi$  quanto a identidade  $\text{id}_{R'} : R' \rightarrow R'$  são homomorfismos de anéis que satisfazem o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& R' & \\
p_i \swarrow & & \searrow \phi \circ \psi \quad \text{id}_{R'} \\
R_i & \xleftarrow{p_i} & R'
\end{array}$$

Pois  $p_i \circ \text{id}_{R'} = p_i$  e  $p_i \circ \phi \circ \psi = \pi_i \circ \psi = p_i$ . Assim, pela unicidade do homomorfismo de anéis,  $\phi \circ \psi = \text{id}_{R'}$ .

Analogamente, tanto os mapas  $\psi \circ \phi$  quanto a identidade  $\text{id}_R : R \rightarrow R$  são homomorfismos de anéis que satisfazem o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& R & \\
\pi_i \swarrow & & \searrow \psi \circ \phi \quad \text{id}_R \\
R_i & \xleftarrow{\pi_i} & R
\end{array}$$

Pois  $\pi_i \circ \text{id}_R = \pi_i$  e  $\pi_i \circ \psi \circ \phi = p_i \circ \phi = \pi_i$ . Assim, pela unicidade do homomorfismo de anéis,  $\psi \circ \phi = \text{id}_R$ . Assim,  $\psi$  e  $\phi$  são isomorfismos inversos.

A unicidade de  $\phi$  como isomorfismo vem de sua unicidade como homomorfismo.  $\square$

## 8 Polinômios

### 8.1 Séries Formais

Se  $R$  é um anel comutativo, intuitivamente uma série formal é um objeto que se escreve na forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

onde  $a_i \in R$ .

Que propriedades gostaríamos que esse objeto tivesse?

- **Igualdade:** igualdade de objetos desse tipo fosse determinada por uma condição de igualdade entre os coeficientes. Ou seja, que:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \Leftrightarrow \forall i \in \mathbb{N} \ a_i = b_i.$$

- **Soma:** que a soma de dois objetos desse tipo fosse dada por:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) + \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i \right)$$

- **Produto:** que o produto de dois objetos desse tipo fosse dada por:

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \cdot \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^i a_j b_{i-j} \right) x^i$$

- **Preservação:** que as operações do anel sejam preservadas.
- **Notação:**  $R[[x]]$  é o conjunto de todas as séries formais em  $R$ .

**Definição 8.1.** Seja  $R$  um anel comutativo. Definiremos  $R[[x]] = R^{\mathbb{N}}$ .

Um elemento de  $R[[x]]$  é da forma  $p = (p_0, p_1, \dots) = (p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (p(n))_{n \in \mathbb{N}} = (p(0), p(1), \dots)$  onde  $p_i = p(i) \in R$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ .

O suporte de  $p \in R[[x]]$  é o conjunto  $\text{supp}(p) = \{i \in \mathbb{N} : p_i \neq 0\}$ . O grau de  $p \in R[[x]]$  é o maior elemento de  $\text{supp}(p)$ , denotado por  $\deg(p)$ . Se  $p = 0$ , então  $\deg(p) = -\infty$ .

**Intuição:**  $p = (a_0, a_1, \dots)$  corresponderá à  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ .

**Operações:** Se  $p, q \in R[[x]]$ , define-se:

$$p + q = (p_0 + q_0, p_1 + q_1, \dots) = (p_i + q_i)_{i \in \mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$$

$$p \cdot q = (p_0q_0, p_1q_0 + p_0q_1, p_2q_0 + p_1q_1 + p_0q_2, \dots) = \left( \sum_{j=0}^i p_{i-j}q_j \right)_{i \in \mathbb{N}}$$

$$1_{R[[x]]} = (1, 0, 0, \dots)$$

$$0_{R[[x]]} = (0, 0, 0, \dots)$$

**Lema 8.2** (Séries formais formam anéis). Se  $R$  é um anel comutativo, então  $R[[x]]$  é um anel comutativo.

*Demonstração.* A operação de soma de  $\mathbb{R}[[x]]$  é a mesma de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , que já verificamos satisfazer as propriedades de grupo Abelian. Assim,  $R[[x]]$  é um grupo abeliano sob a soma.

• **Distributividade:**

$$\begin{aligned} p \cdot (q + r) &= p \cdot (q_i + r_i)_{i \in \mathbb{N}} = \left( \sum_{j=0}^i p_{i-j} (q_j + r_j) \right)_{i \in \mathbb{N}} \\ &= \left( \sum_{j=0}^i p_{i-j} q_j \right)_{i \in \mathbb{N}} + \left( \sum_{j=0}^i p_{i-j} r_j \right)_{i \in \mathbb{N}} = p \cdot q + p \cdot r. \end{aligned}$$

• **Elemento Neutro:**

$$p \cdot 1 = \left( \sum_{j=0}^i p_{i-j} \delta_{0j} \right)_{i \in \mathbb{N}} = (p_i)_{i \in \mathbb{N}}.$$

- **Comutatividade:** A  $i$ -ésima coordenada de  $p \cdot q$  é  $\sum_{j=0}^i p_{i-j} q_j = \sum (p_{i_j} q_j : j \in A_j)$ , onde  $A_j = \{0, \dots, i\}$ . A função  $\phi : A_j \rightarrow A_j$  dada por  $\phi(j) = i - j$  é bijetora, pois é injetora e  $A_j$  é finito. Assim:

$$\sum_{j=0}^i p_{i-j} q_j = \sum_{j=0}^i p_{i-\phi(j)} q_{\phi(j)} = \sum_{j=0}^i p_j q_{i-j} = \sum_{j=0}^i q_{i-j} p_j$$

E esta é a  $i$ -ésima coordenada de  $q \cdot p$ .

- **Associatividade:** Temos que a  $i$ -ésima coordenada de  $(p \cdot q) \cdot r$  é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_i((p \cdot q) \cdot r) &= \sum_{j=0}^i \pi_{i-j}(p \cdot q) \cdot q_j = \sum_{j=0}^i \left( \sum_{k=0}^{i-j} p_{i-j-k} q_k \right) \cdot q_j \\ &= \sum_{j=0}^i \sum_{k=0}^{i-j} p_{i-j-k} q_k q_j = \sum (p_{i-j-k} q_k r_j : (j, k) \in A) \end{aligned}$$

Onde  $A = \{(j, k) : 0 \leq j \leq i, 0 \leq k \leq i - j\}$ .

Temos que a  $i$ -ésima coordenada de  $p \cdot (q \cdot r)$  é dada por:

$$\begin{aligned} \pi_i(p \cdot (q \cdot r)) &= \sum_{s=0}^i p_{i-s} \pi_s(q \cdot r) = \sum_{s=0}^i p_{i-s} \left( \sum_{t=0}^s q_{s-t} r_t \right) \\ &= \sum_{s=0}^i \sum_{t=0}^s p_{i-s} q_{s-t} r_t = \sum (q_{i-s} q_{s-t} r_t : (s, t) \in B) \end{aligned}$$

onde  $B = \{(s, t) : 0 \leq t \leq s \leq i\}$ . A função  $\phi : A \rightarrow B$  dada por  $\phi(j, k) = (j + k, j)$  é bijetora: é em  $B$ , pois  $0 \leq j \leq j + k \leq j + (i - j) = i$ . É injetora, pois se  $(j + k, j) = (j' + k', j')$

então  $j = j'$  e, cancelando,  $k = k'$ . Finalmente, é sobrejetora, pois se  $0 \leq t \leq s \leq i$ , sendo  $j = t$  e  $k = s - t$ , temos que  $0 \leq j \leq i$ ,  $0 \leq k = s - t \leq i - t = i - j$  e  $j + k = s$ . Assim,  $\phi$  é bijetora. Portanto:

$$\begin{aligned} \sum (q_{i-s}q_{s-t}r_t : (s, t) \in B) &= \sum (q_{i-(j+k)}q_{(j+k)-j}r_j : (j, k) \in A) \\ &= \sum (q_{i-j-k}q_kr_j : (j, k) \in A). \end{aligned}$$

□

Dado  $p \in \mathbb{R}_x$ , utilizamos a notação

$$p = p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i x^i.$$

É importante observar que não há, de fato, uma “soma infinita” acontecendo aqui. É possível dar sentido à essa soma infinita utilizando a teoria de limites diretos de anéis, mas não faremos isso aqui. Por ora, isso é apenas uma notação especial para tratar desses objetos. Note que, ao menos por enquanto, a letra  $x$  é apenas parte da notação, e que não faz sentido, por enquanto, “substituir  $x$ ” por algo.

## 8.2 Anéis de Polinômios

Na subseção anterior, introduzimos o anel das séries formais de um anel comutativo dado. Vimos que tal anel é um anel comutativo.

Deste anel, podemos extrair o anel de polinômios.

**Definição 8.3.** Seja  $R$  um anel comutativo. O anel de polinômios  $R[x]$  é o subconjunto de  $R[[x]]$  dado por:

$$R[x] = \{p \in R[[x]] : \deg(p) < \infty\}$$

Note que uma série formal tem grau  $< \infty$  se, e somente se, todos os coeficientes, a partir de algum ponto, são nulos.

**Lema 8.4.** Seja  $R$  um anel comutativo. O anel de polinômios  $R[x]$  é um subanel de  $R[[x]]$ . Mais especificamente, dados  $p(x), q(x) \in R[[x]]$ , temos que, se  $\text{gr}(p(x)) < \infty$  e  $\text{gr}(q(x)) < \infty$ , então:

- a)  $\text{gr } p(x)q(x) \leq \text{gr } p(x) + \text{gr } q(x)$  caso ambos sejam não nulos, e a igualdade vale se  $R$  for um domínio de integridade.
- b)  $\text{gr } p(x) + q(x) \leq \max\{\text{gr } p(x), \text{gr } q(x)\}$ .

*Demonstração.* Para a primeira afirmação, sejam  $n, m$  os graus de  $p(x)$  e  $q(x)$ , respectivamente. Calculemos o coeficiente  $n + m$  de  $p(x)q(x)$ .

$$\pi_{n+m}(p(x)q(x)) = \sum_{j=0}^{n+m} p_{n+m-j}q_j.$$

Se  $0 \leq j < m$  temos que  $n + m - j > 0$ , e  $p_{n+m-j} = 0$ . Se  $j > m$ , temos que  $q_j = 0$ . Assim, o único termo não nulo da soma é quando  $j = m$ , e temos que  $p_{n+m-m}q_m = p_nq_m$ , que é não nulo se  $R$  for um domínio. Por outro lado, se  $l > n + m$  temos que:

$$\pi_l(p(x)q(x)) = \sum_{j=0}^l p_{l-j}q_j.$$

Se  $0 \leq j \leq m$  temos que  $l-j > m+n-m = n$ , e  $p_{l-j} = 0$ . Se  $j > m$ , temos que  $q_j = 0$ . Assim, todos os coeficientes da soma são 0.

Para a segunda afirmação, se  $l > \max\{\text{gr } p(x), \text{gr } q(x)\}$ , temos que o  $l$ -ésimo coeficiente de  $p(x) + q(x)$  é 0, pois este é  $p_l + q_l = 0 + 0$ .

Agora, para a afirmação principal, as duas afirmações itemizadas nos mostram que  $R[x]$  é fechado pela soma e produto de  $R[[x]]$ . Finalmente, note que o grau da série  $1 = (1, 0, 0, \dots)$  é 0, logo,  $1 \in R[x]$ .  $\square$

Agora vamos trabalhar um pouco mais nossa notação.

**Definição 8.5.** Seja  $R$  um anel comutativo. Em  $R[x]$ , seja  $x = (0, 1, 0, 0, \dots)$  e, para cada  $r \in R$ , seja  $\hat{r} = (r, 0, 0, \dots)$ .

**Lema 8.6.** Na notação anterior, para todo  $r \in R$  e  $n, i \geq 0$ :

$$\pi_i(\hat{r}x^n)(i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq n \\ r & \text{se } i = n. \end{cases}$$

Ou seja,  $\hat{r}x^n = (0, 0, \dots, r, 0, \dots)$  onde o  $r$  está na posição  $n$ .

*Demonstração.* Fixe  $r$ . Seguimos por indução. Para  $n = 0$ , temos que  $\hat{r}x^0 = \hat{r} = (r, 0, 0, \dots)$  e para  $n = 1$  temos que  $\hat{r}x^1 = x = (0, r, 0, \dots)$ .

Para o passo  $n + 1$ , onde  $n \geq 1$ , temos que, sendo  $i \geq 1$ :

$$\pi_i(\hat{r}x^{n+1}) = \pi_i((\hat{r}x^n) \cdot x) = \sum_{j=0}^i \pi_{i-j}(\hat{r}x^n) \cdot \pi_j(x) = \pi_{i-1}^{\hat{r}x^n}$$

Assim, se  $i = n + 1$ , temos que a coordenada é  $r$ , e 0 caso contrário. Resta apenas verificar que a coordenada 0 é 0. Ora, a coordenada 0 se dá por  $\pi_0(\hat{r}x^n)\pi_0(x) = 0$ .  $\square$

**Lema 8.7.** Na notação anterior, seja  $h : R \rightarrow R[x]$  dada por  $h(r) = \hat{r}$ . Então  $h$  é um homomorfismo injetor.

*Demonstração.* Sejam  $r, s \in R$ . Então:

- $h(r + s) = (r + s, 0, 0, \dots) = \hat{r} + \hat{s} = h(r) + h(s)$
- $h(rs) = (rs, 0, 0, \dots) = \hat{r} \cdot \hat{s} = h(r) \cdot h(s)$
- $h(1_R) = \hat{1} = (1_R, 0, 0, \dots) = 1_{R[x]} = 1_{R[x]}$ .

A injetividade é óbvia.  $\square$

**Proposição 8.8.** Na notação anterior, para todo  $p(x) \in R[x]$ , existem  $n \geq 0$  e  $r_0, r_1, \dots, r_n \in R$  tais que  $p(x) = \sum_{i=0}^n \hat{r}_i x^i$ .

*Demonstração.* Se  $p(x) = 0$ , seja  $n = 0$  e  $r_0 = 0$ . Caso contrário, seja  $n = \text{gr } p(x)$  e  $r_i = p_i$  para todo  $i \leq n$ . Então:

$$p(x) = (p_0, \dots, p_n, 0, \dots, 0) = (r_0, \dots, r_n, 0, \dots, 0) = \sum_{i=0}^n \hat{r}_i x^i$$

□

**Proposição 8.9.** Na notação anterior, se  $r_1, \dots, r_n$  e  $s_1, \dots, s_n$  são elementos de  $R$ , então:

$$\sum_{i=0}^n \hat{r}_i x^i = \sum_{i=0}^n \hat{s}_i x^i \text{ se, e somente se, } r_i = s_i \text{ para todo } i \leq n.$$

*Demonstração.* A recíproca é imediata. Para a implicação direta, note que a igualdade nos diz que  $(r_0, \dots, r_n, 0, 0, \dots) = (s_0, \dots, s_n, 0, 0, \dots)$ , ou seja,  $r_i = s_i$  para todo  $i \leq n$ . □

Notação: abandona-se  $\hat{r}$  em favor de  $r$ , mesmo havendo ambiguidade de notação.