

Notas da disciplina MAT0264 - Anéis e Corpos

Prof. Vinicius Rodrigues

12 de abril de 2025, 15:13

Sumário

Prefácio	v
1 Pré-Requisitos Conjuntistas	1
1.1 Famílias e produtos cartesianos	1
1.2 Operações	2
2 Noções de Grupos	3
2.1 Definição e Propriedades Básicas	3
2.2 Somatórios	5
3 Anéis e subanéis	7
3.1 A definição de anel	7
3.2 Anéis de Matrizes	8
3.3 Domínios de Integridade	11
3.4 Elementos invertíveis	11
3.5 O anel dos números inteiros	12
3.6 Corpos e anéis de divisão	13
3.7 O corpo dos números reais	13
3.8 O Anel dos Quaternions	13
3.9 Subanéis	15
3.10 O centro de um anel	16
3.11 Exercícios	16
4 Homomorfismos e Ideais	19
4.1 Definição de homomorfismo	19
4.2 Propriedades elementares	20
4.3 Ideais	22
4.4 Ideais Principais	25
4.5 Ideais Primos e Maximais	26
4.6 Exercícios	26
5 Quocientes e Teoremas do Homomorfismo	29
5.1 Relações de congruência	29
5.2 Quocientes	31
5.3 Teoremas do isomorfismo	32
6 Domínios de Integridade	37
6.1 Relações entre corpos e domínios	37

7	Produtos de anéis	39
7.1	Produtos de dois anéis	39
7.2	Produtos de uma família de anéis	39
7.3	A propriedade universal do produto direto de anéis	40
7.4	Exercícios	42

Prefácio

Estas notas começaram a ser escritas durante o primeiro semestre de 2025, enquanto lecionava a disciplina MAT0264 - Anéis e Corpos, no Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo (IME-USP). No presente estado, elas estão em um formato de rascunho, e não são um material completo, nem revisado. O objetivo é que, ao longo do semestre, as notas sejam revisadas e completadas, de modo a se tornarem um material didático mais completo e acessível aos alunos da disciplina.

É assumido que o estudante já tem algum traquejo ao lidar com números inteiros e aritmética modular, tendo já estudado, formalmente, divisibilidade de inteiros, congruência módulo n e os anéis \mathbb{Z}_n . Será assumida a existência do anel dos números inteiros. Ao longo do texto, apresentaremos as construções de todos os outros anéis relevantes, porém alguns outros anéis importantes e conhecidos, como \mathbb{Q} , \mathbb{R} e \mathbb{C} , com o qual espera-se que o estudante já possua alguma familiaridade, serão utilizados em exemplos desde seu início, mesmo antes de que construções formais sejam apresentadas.

Ao final de cada seção serão apresentados exercícios. Recomenda-se que o estudante resolva-os para fixar o conteúdo apresentado.

O autor deste texto agradece ao Professor Ugo Bruzzo, que lecionou o primeiro terço dessa disciplina, e formulou uma porção considerável dos exercícios aqui expostos.

Capítulo 1

Pré-Requisitos Conjuntistas

Durante o texto, precisamos de algumas definições e resultados envolvendo noções básicas sobre conjuntos e funções.

Não é objetivo deste texto desenvolver a parte inicial da Teoria dos Conjuntos. Também não é o objetivo desta seção explicar toda a notação de conjuntos utilizada. Assumimos familiaridade do leitor com funções e com manipulação de conjuntos a nível básico. Apenas apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos que utilizaremos ao longo do texto.

1.1 Famílias e produtos cartesianos

Famílias são funções com notação especial. Muitas vezes, ao pensar em funções, pensamos em um “dispositivo de entrada/saída”. Quando, ao invés disso, estamos pensando apenas em um “conjunto indexado de valores”, a notação de família pode ser mais conveniente.

No quadro abaixo, apresentamos uma comparação entre as duas notações. Enfatizamos que, matematicamente, funções e famílias podem ser vistas como o mesmo objeto.

Conceito	Função	Família
Mapa	$u : I \rightarrow A$	$(u_i)_{i \in I} = (u_i : i \in I)$
Valor	$u(i)$	u_i
Imagem	$\text{ran } u$	$\{u_i : i \in I\}$
Intuição	objeto dinâmico	objeto estático
Inputs	domínio I	conjunto de índices I

Tabela 1.1: Comparativo de família e função

Como exemplos, consideremos sequências infinitas e finitas:

Exemplo 1.1 (Sequências). Uma sequência é uma família cujo conjunto de índices é \mathbb{N} . Compare a intuição que passa as notações:

- Considere a sequência $u = (\frac{1}{2^n})_{n \in \mathbb{N} \dots}$
- Considere a função $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $u(n) = \frac{1}{2^n} \dots$

□

Exemplo 1.2 (Sequências finitas). Se $n \geq 1$, identificamos $n = \{0, 1, \dots, n-1\}$. Assim:

- Uma família com n elementos é uma família $(a_i)_{i < n} = (a_i)_{i \in n} = (a_0, \dots, a_{n-1})$.

Essa notação é bastante funcional no sentido de que dá significado como conjunto aos números naturais, e corresponde à construção usual dos números naturais na Teoria dos Conjuntos. Como desvantagem, seus contadores se iniciam no 0, e não no 1, o que pode ser pouco intuitivo e não coincidir com a notação da maioria dos textos de matemática, apesar de ser muito adotada em textos mais próximos de Teoria dos Conjuntos. \square

Agora vamos seguir para a definição de produto cartesiano. Primeiro, vamos lembrar a definição de produto cartesiano de dois conjuntos.

Definição 1.3 (Produto cartesiano de dois conjuntos). Sejam A, B conjuntos. Então $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ é o *produto cartesiano de A e B* . Ou seja, o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) tais que $a \in A$ e $b \in B$. \square

Pares ordenados são conjuntos especiais que carregam duas coordenadas de modo a permitem distinguir a ordem dos elementos. Sua propriedade principal é a de se a, b, c, d são conjuntos, então $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se $a = c$ e $b = d$. Uma construção usual, chamada de par de Kuratowski, para a qual não é difícil provar que vale essa propriedade, é dada por $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$. Porém, isso não será importante neste texto.

Definição 1.4 (Produto cartesiano de conjuntos). Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de conjuntos. O produto cartesiano de conjuntos é o conjunto $\prod_{i \in I} A_i$ definido como o conjunto de todas as famílias $(a_i : i \in I)$ tais que para cada $i \in I$, $a_i \in A_i$.

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I, a_i \in A_i\}.$$

\square

Definição 1.5 (Exponenciação de conjuntos). Sejam A, I conjuntos. O conjunto A^I é o conjunto de todas as funções de I em A . Ou seja, $A^I = \{f : I \rightarrow A\}$. Note que:

$$A^I = \prod_{i \in I} A = \{(a_i)_{i \in I} : \forall i \in I, a_i \in A\}.$$

\square

Na notação anterior, se $n \geq 1$, então:

$$A^n = \{(a_i)_{i < n} : \forall i < n, a_i \in A\} = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) : a_0, \dots, a_{n-1} \in A\} \approx A \times \dots \times A \text{ (} n \text{ vezes)}.$$

1.2 Operações

Ao trabalharmos com estruturas algébricas necessitaremos da noção de operação, que se define como a seguir:

Definição 1.6 (Operações n -árias). Se X é um conjunto e $n \in \mathbb{N}$, uma operação n -ária em X é uma função $f : X^n \rightarrow X$. \square

Operações 2-árias e 1-árias são frequentemente chamadas de *binárias* e *unárias*, respectivamente.

Caso $*$ seja uma operação binária, a notação $x * y$ é frequentemente utilizada para denotar $x * y$.

Caso $*$ seja uma operação unária, a notação $*x$ é frequentemente utilizada para denotar $*(x)$.

Capítulo 2

Noções de Grupos

2.1 Definição e Propriedades Básicas

O principal objetivo deste texto é servir como texto para um estudo introdutório sobre anéis e corpos. A noção de grupo é mais simples do que ambas essas estruturas, porém, necessita de ferramentas especiais para seu tratamento completo que fogem do escopo deste texto. Assim, não é objetivo deste capítulo apresentar uma introdução ao estudo de grupos, mas sim apenas enunciar as principais definições e propriedades que utilizaremos ao longo do texto.

Definição 2.1. Um grupo é uma quadrupla (G, \cdot, e) , tal que G é um conjunto, \cdot é uma operação binária em G e $e \in G$, e satisfazem:

- (**Propriedade associativa**) $\forall a, b, c \in G \ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- (**Elemento neutro**) $\forall a \in G \ e \cdot a = a \cdot e = a$.
- (**Elemento inverso**) $\forall a \in G \ \exists b \in G \ a \cdot b = b \cdot a = e$.

Se, adicionalmente, a seguinte propriedade é satisfeita, o grupo é chamado de *comutativo*, ou, mais comunmente, *Abeliano*:

- (**Comutatividade**) $\forall a, b \in G \ a \cdot b = b \cdot a$.

□

Algumas observações importantes sobre a notação utilizada no estudo de grupos:

- Ao discursar sobre grupos, é comum omitir a operação e o elemento neutro, referindo-se apenas ao conjunto G .
- Caso o grupo seja Abeliano, é comum que sua operação binária seja denotada por $+$ ou outro símbolo similar. Nesse contexto, o elemento neutro é frequentemente denotado por 0 .
- Caso o grupo não seja Abeliano, é comum que sua operação binária seja denotada por \cdot ou outro símbolo similar. Nesse contexto, o elemento neutro é frequentemente denotado por e , e a operação é frequentemente omitida, ou seja, $a \cdot b$ é frequentemente escrito como ab .

Alguns exemplos:

- Com a soma usual, $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ são grupos Abelianos.
- Com a multiplicação usual, o círculo unitário complexo $\mathbb{T} = \{x \in \mathbb{C} : |x| = 1\}$ é um grupo Abeliano com elemento neutro 1. De fato, o produto de complexos é comutativo, associativo e tem 1 como elemento neutro. Note que $1 \in \mathbb{T}$ e $0 \notin \mathbb{T}$. Se $x \in \mathbb{T}$, o inverso multiplicativo de x é dado por $\frac{\bar{x}}{|x|^2}$, onde \bar{x} denota o conjugado de x . Como $|\bar{x}| = |x| = 1$, segue que \mathbb{T} tem todos os inversos de todos seus elementos.
- Os inteiros módulo n ($n \geq 1$), dados por $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n-1\}$ com a soma dada pela aritmética módulo n , são grupos.

Agora iniciaremos a provar algumas propriedades básicas sobre grupos.

Proposição 2.2 (Unicidade do elemento neutro). Seja (G, \cdot, e) um grupo. Então, o elemento neutro e é único. Isto é, se $h \in G$ é tal que $\forall a \in G \ h \cdot a = a \cdot h = a$, então $h = e$.

Demonstração. Note que $h = he$, pois e é elemento neutro. Por outro lado, $e = he$, pois h é elemento neutro. Assim, $h = he = e$. \square

Proposição 2.3 (Unicidade dos inversos). Seja (G, \cdot, e) um grupo. Então todo $a \in G$ possui um único elemento inverso, ou seja, para todo $a \in G$, $\exists!$ $b \in G$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = e$.

Demonstração. A existência do inverso é garantida pela definição de grupo. Para provar a unicidade, suponha que b, c são inversos de a , ou seja, $a \cdot b = b \cdot a = e$ e $a \cdot c = c \cdot a = e$. Então, temos:

$$b = be = b(ac) = (ba)c = ec = c.$$

\square

A unicidade do elemento neutro e dos inversos nos permite definir a notação a^{-1} para o inverso de a em um grupo (G, \cdot, e) . Caso $(G, +, 0)$ seja um grupo Abeliano, a notação $-a$ é frequentemente utilizada para denotar o inverso de a , e, nesse caso, $-a$ é chamado de *oposto* de a .

Note que assim, ficam definidos operadores unários $()^{-1} : G \rightarrow G$ (ou $- : G \rightarrow G$). Para o segundo caso, define-se também que $a - b = a + (-b)$.

Proposição 2.4 (Cancelamento). Seja (G, \cdot, e) um grupo. Então, se $a, b, c \in G$ e $a \cdot b = a \cdot c$, então $b = c$. Analogamente, se $b \cdot a = c \cdot a$, então $b = c$.

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação. A segunda é análoga e fica como exercício. Suponha que $ba = ca$. Então $b = be = b(aa^{-1}) = (ba)a^{-1} = (ca)a^{-1} = c(aa^{-1}) = ce = c$. Assim, $b = c$. \square

Corolário 2.5 (Cancelamento II). Seja (G, \cdot, e) um grupo. Para todos $a, b \in G$, se $ab = a$, então $b = e$. Analogamente, se $ba = a$, então $b = e$.

Demonstração. Para a primeira afirmação, note que $ab = ae$, logo, pela proposição anterior, $b = e$. A segunda afirmação é análoga. \square

Proposição 2.6 (Regras de sinal). Seja G um grupo e $a, b \in G$. Então:

- a) $((a)^{-1})^{-1} = a$ [na notação aditiva, $-(-a) = a$].

b) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ [na notação aditiva, $-(a+b) = (-b) + (-a)$].

c) $e^{-1} = e$ [na notação aditiva, $-0 = 0$].

Demonstração. a): Temos que $(a^{-1})^{-1}a^{-1} = e = aa^{-1}$. Cancelando a^{-1} , segue.

b): Temos que $(ab)^{-1}(ab) = e = (b^{-1}a^{-1})ab$. Cancelando ab , segue que $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$. Analogamente, $(ba)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

c): Temos que $(e^{-1})e = e = ee$. Cancelando e à direita, segue.

□

2.2 Somatórios

Nessa seção, formalizaremos a noção de somatório. É desejável que o leitor já possua familiaridade com alguma notação de somatório, mas aqui apresentaremos a notação e as técnicas de “substituição de variáveis” que serão utilizadas.

Definição 2.7 (Soma de sequência finita). Seja G um conjunto munido de uma operação $+$ associativa, comutativa e com neutro 0 . Define-se, recursivamente para $n \geq 0$, o somatório de famílias $(a_i : i \in F)$, onde F é um conjunto de n índices e $a_i \in G$ para todo $i \in F$, como se segue:

- **Notação:** se $a = (a_i)_{i \in F}$ é uma sequência de elementos de G , então usamos as notações:

$$\sum a = \sum (a_i : i \in F) = \sum_{i \in F} a_i.$$

- Caso base $n = 0$ (soma vazia): só existe uma família com 0 elementos, que é a família vazia $a = () = \emptyset = (a_i : i \in \emptyset)$. Definimos:

$$\sum a = \sum_{i \in \emptyset} a_i = 0$$

- Passo recursivo $n \rightarrow n+1$: considere uma família $(a_i)_{i \in F}$, onde $|F| = n+1$. Define-se:

$$\sum (a_i : i \in F) = \sum (a_i : i \in F \setminus \{j\}) + a_j,$$

onde $j \in F$ é qualquer elemento.

□

É claro que, para mostrar que a definição acima é consistente, precisamos mostrar que a soma não depende da escolha de j .

Lema 2.8. Qualquer que seja o tamanho (finito) de F , $\sum (a_i)_{i \in F}$ está bem definido.

Demonstração. Seja F um conjunto finito. Se $|F| = 0$, então $F = \emptyset$, e a soma é 0. Se $|F| = 1$, então $F = \{j\}$ – só há uma escolha para j , e a soma é a_j . Se $|F| = n+1$ para $n \geq 1$, tome $j, k \in F$. Devemos ver que $\left(\sum_{i \in F \setminus \{j\}} a_i\right) + a_j = \left(\sum_{i \in F \setminus \{k\}} a_i\right) + a_k$. Com efeito:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i \in F \setminus \{j\}} a_i \right) + a_j &= \left(\left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + a_k \right) + a_j = \left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + (a_k + a_j) \\
&= \left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + (a_j + a_k) = \left(\left(\sum_{i \in F \setminus \{j, k\}} a_i \right) + a_j \right) + a_k = \left(\sum_{i \in F \setminus \{k\}} a_i \right) + a_k.
\end{aligned}$$

□

Proposição 2.9. Seja G um conjunto munido de uma operação $+$ associativa, comutativa e com neutro 0 . Seja $(a_i : i \in I)$ uma família finita em G e $\phi : J \rightarrow I$ uma função bijetora. Então:

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{j \in J} a_{\phi(j)}.$$

Demonstração. Novamente, procedemos por indução no tamanho de $n = |I|$. A base de tamanho 0 é trivial, já que ambos os lados da igualdade são 0 .

Para o passo indutivo em que $|I| = |J| = n + 1$, considere $\phi : J \rightarrow I$ como no enunciado. Fixe $k \in J$ qualquer e sejam $I' = I \setminus \{\phi(k)\}$, $J' = J \setminus \{k\}$ e $\phi' = \phi|_{J'} : J' \rightarrow I'$, que é bijetora. Como $|J'| = |I'| = n$, por hipótese indutiva temos que $\sum_{j \in J'} a_{\phi(j)} = \sum_{i \in I'} a_i$. Segue que:

$$\sum_{j \in J} a_{\phi(j)} = \left(\sum_{j \in J'} a_{\phi(j)} \right) + a_{\phi(k)} = \left(\sum_{i \in I'} a_i \right) + a_{\phi(k)} = \sum_{j \in I} a_j.$$

□

Capítulo 3

Anéis e subanéis

Nesta seção, iniciaremos o estudo dos anéis e de estruturas relacionadas. Apresentaremos as definições dessas estruturas e suas propriedades mais elementares.

3.1 A definição de anel

No Capítulo 2, conhecemos, por alto, a definição de grupo. Um grupo é um conjunto munido de uma operação binária que satisfaz algumas propriedades. Ele pode ser Abelianos ou não Abelianos, e, quando é Abelianos, lembra-nos da adição de inteiros. Porém, estruturas como inteiros, racionais e reais não são apenas grupos Abelianos, pois possuem também outra operação binária – a multiplicação. Esta operação se relaciona com a soma através das propriedades distributivas.

A noção de anel visa capturar parte dessas ideias, de modo a generalizar o estudo das estruturas citadas acima.

Definição 3.1 (Anel). Um anel é uma 4-upla $(A, +, \cdot, 0, 1)$ conjunto A com duas operações binárias, adição e multiplicação, denotadas por $+$ e \cdot , tais que:

- $(A, +, 0)$ é um grupo abeliano.
- **(Associatividade)** Para todo $a, b \in A$, temos $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.
- **(Elemento identidade)** $\forall a \in A$ $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.
- **(Propriedades distributivas)** Para todos $a, b, c \in A$, temos:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \text{ e} \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Se, adicionalmente, a seguinte propriedade é satisfeita, o anel é chamado de *comutativo*.

- **(Comutatividade)** $\forall a, b \in A$ $a \cdot b = b \cdot a$.

□

Algumas observações:

- Como em grupos, ao discursar sobre anéis é comum omitir as operações, referindo-se apenas ao conjunto A .

- Ao discursar sobre anéis, e a exemplo do que foi feito ao enunciar as propriedades distributivas, são utilizadas as convenções usuais sobre precedência de operações envolvidas por parênteses. Assim, $a + b \cdot c$ é interpretado como $a + (b \cdot c)$.
- Há textos que definem anéis sem incluir o elemento identidade 1. Nestes textos, a definição acima dá nome ao que chamam de *anéis com identidade*, ou *anéis com 1*. Nesse curso, não usaremos essa convenção, de modo que **todos nossos anéis possuem identidade**. De modo similar, alguns textos definem anéis como sendo comutativos. Também não adotaremos essa convenção. **Os nossos anéis podem ser não comutativos**.
- A definição de anel não exige que $0 = 1$.
- 0 é chamado de elemento nulo, e 1 de elemento identidade.

Proposição 3.2 (Propriedade multiplicativa do 0). Seja A um anel. Então $\forall a \in A$ $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$.

Demonstração. Provaremos a primeira afirmação. A segunda é análoga e fica como exercício.

Temos que $0 \cdot a = (0 + 0) \cdot a = 0 \cdot a + 0 \cdot a$. Cancelando, segue que $0 = 0 \cdot a$. \square

Proposição 3.3 (Anel trivial). Seja $A = x$ um conjunto qualquer. Defina $x \cdot x = x = x + x = 0 = 1$. Então $(A, +, \cdot, 0, 1)$ é um anel. Um anel dessa forma é chamado de *anel trivial*.

Além disso, se A é um anel tal que $0 = 1$, então A é um anel trivial.

Demonstração. A primeira afirmação (de que A como acima é um anel) fica como exercício.

Para a segunda afirmação, assumamos que A é um anel tal que $0 = 1$. Fixe $a \in A$ qualquer. Então $a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0$, ou seja, $a = 0$. Assim, A é o conjunto unitário $\{0\}$, que é um anel trivial. \square

Todo anel satisfaz as conhecidas regras de sinais referentes à multiplicação e adição, como:

Proposição 3.4 (Regras de sinal II). Seja A um anel e $a, b \in A$. Então:

- $(-a)b = a(-b) = -(ab)$
- $(-a)(-b) = ab$.
- $(-1)a = -a$.

Demonstração. a): Temos que $ab + (-a)b = (-a)b + ab = [-a + a]b = 0b = 0$. Assim, $(-a)b = -(ab)$. Analogamente, $a(-b) = -(ab)$.

b): Temos que $(-a)(-b) = -[a(-b)] = -[-(ab)] = ab$ pela regra anterior.

c): Temos que $(-1)a = -(1a) = -a$. \square

3.2 Anéis de Matrizes

Dado qualquer anel A e $n, m \in \mathbb{N}$, podemos construir o conjunto das matrizes com coeficientes em A .

Definição 3.5. Seja A um anel e n, m inteiros positivos. O conjunto $M_{n \times m}(A)$ é o conjunto de matrizes $n \times m$ cujos coeficientes estão em A . Formalmente, $M_{n \times m}$ é o conjunto de todas as famílias $(a_{ij})_{i,j} = (a_{ij} : (i, j) \in \{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, m\})$. Quando conveniente, representamos a tal matriz de qualquer uma das duas formas a seguir:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Se $(a_{ij})_{i,j}$ e $(b_{ij})_{i,j}$ são matrizes $n \times m$ em $M_{n \times m}(A)$, definimos sua *soma* como $(a_{ij}) + (b_{ij})_{i,j} = (a_{ij} + b_{ij})_{i,j}$. Em outra notação:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

Se $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$ e $(b_{ij})_{i,j} \in M_{m \times p}(A)$, definimos o produto de matrizes como $(a_{ij})_{i,j} \cdot (b_{ij})_{i,j} = (c_{ij})_{i,j}$, onde $c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik}b_{kj}$. Em outra notação:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix}$$

A matriz nula de $M_{n \times m}(A)$ é a matriz cuja todas as entradas são $0 \in A$, e é denotada por $0_{n \times m}$, ou, simplesmente, 0.

Caso $n = m$, abreviamos $M_{n \times n}(A)$ como $M_n(A)$. □

Sobre a aditividade, independente de m, n , sempre temos um grupo Abelian:

Proposição 3.6. Seja A um anel e $n, m \in \mathbb{N}$. Então, o conjunto $M_{n \times m}(A)$, munido da operação de soma de matrizes, é um grupo abeliano.

Demonstração. Sejam $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j}, (c_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$. Mostraremos que $(M_{n \times m}(A), +)$ satisfaz as propriedades de um grupo abeliano:

1. **Fechamento:** Para todos $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, temos que $(a_{ij} + b_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, pois A é fechado sob adição.
2. **Associatividade:** para todos $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j}, (c_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, temos:

$$((a_{ij}) + (b_{ij})) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij}) + ((b_{ij}) + (c_{ij})).$$

3. **Elemento neutro:** A matriz nula é o elemento neutro. Com efeito, dado $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, temos:

$$(a_{ij}) + 0_{m \times n} = (a_{ij} + 0) = (a_{ij}).$$

4. **Elemento inverso:** Para cada $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, a matriz $(-a_{ij})_{i,j}$, é oposto aditivo, pois:

$$(a_{ij}) + (-a_{ij}) = (a_{ij} + (-a_{ij})) = 0$$

5. **Comutatividade:** A soma de matrizes é comutativa, pois, para todos $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, temos:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = (b_{ij}) + (a_{ij}).$$

Portanto, $(M_{n \times m}(A), +)$ é um grupo abeliano. \square

A multiplicação de matrizes é associativa e distributiva sobre a soma. Formalmente:

Proposição 3.7. Seja A um anel e $n, m, p, q \geq 1$. Então:

a) **(Associatividade)** Para todos $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, $(b_{jk})_{j,k} \in M_{m \times p}(A)$ e $(c_{kl})_{k,l} \in M_{p \times q}(A)$, temos:

$$((a_{ij}) \cdot (b_{jk})) \cdot (c_{kl}) = (a_{ij}) \cdot ((b_{jk}) \cdot (c_{kl})).$$

b) **(Distributividade)** Para todos $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, $(b_{jk})_{j,k}, (c_{jk})_{j,k} \in M_{m \times p}(A)$, temos:

$$(a_{ij}) \cdot ((b_{jk}) + (c_{jk})) = (a_{ij}) \cdot (b_{jk}) + (a_{ij}) \cdot (c_{jk}).$$

E, para todos $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$ e $(c_{jk})_{j,k} \in M_{m \times p}(A)$, temos:

$$((a_{ij}) + (b_{ij})) \cdot (c_{jk}) = (a_{ij}) \cdot (c_{jk}) + (b_{ij}) \cdot (c_{jk}).$$

Demonstração. **a)** Sejam $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, $(b_{jk})_{j,k} \in M_{m \times p}(A)$ e $(c_{kl})_{k,l} \in M_{p \times q}(A)$. Considere o elemento (i, l) da matriz resultante de $((a_{ij}) \cdot (b_{jk})) \cdot (c_{kl})$. Pela propriedade distributiva, temos:

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right) c_{kl} = \sum_{k=1}^p \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right).$$

Comutando os somatórios e novamente pela propriedade distributiva, isso é:

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{ij} b_{jk} c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^m a_{ij} \left(\sum_{k=1}^p b_{jk} c_{kl} \right),$$

que é exatamente o elemento (i, l) da matriz $(a_{ij}) \cdot ((b_{jk}) \cdot (c_{kl}))$. Assim, a associatividade é satisfeita.

b) Para a distributividade, considere $(a_{ij})_{i,j} \in M_{n \times m}(A)$, $(b_{jk})_{j,k}, (c_{jk})_{j,k} \in M_{m \times p}(A)$. O elemento (i, k) da matriz resultante de $(a_{ij}) \cdot ((b_{jk}) + (c_{jk}))$ é dado por:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} (b_{jk} + c_{jk}) = \sum_{j=1}^m (a_{ij} b_{jk} + a_{ij} c_{jk}) = \sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} + \sum_{j=1}^m a_{ij} c_{jk}$$

Isso corresponde ao elemento (i, k) da matriz $(a_{ij}) \cdot (b_{jk}) + (a_{ij}) \cdot (c_{jk})$. A outra distributividade é provada de forma análoga. \square

Como o produto de uma matriz de $M_{n \times m}(A)$ com uma matriz de $M_{m \times p}(A)$ é uma matriz de $M_{n \times p}(A)$, em geral, não há uma propriedade de fechamento para o produto de matrizes.

Lembremos que a matriz identidade de $M_{n \times n}(A)$ é a matriz cujos elementos da diagonal principal são 1 e os demais são 0. Utilizando a notação do delta de Kronecker, em que δ_{ij} é 1 caso $i = j$ e 0 caso contrário, a matriz identidade é a matriz $I_n = (\delta_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$.

Porém, tal fato acontece para matrizes quadradas. De fato, temos:

Proposição 3.8 (Anéis de matrizes). Seja A um anel e $n \geq 1$. Com as operações de soma e multiplicação definidas acima, e com a identidade I_n como a matriz identidade de $M_n(A)$, o conjunto $M_n(A)$ é um anel, denominado *anel das matrizes $n \times n$ de A* .

Se $n \geq 2$ e A é um anel não trivial, $M_n(A)$ não é comutativo.

Demonstração. Para a verificação das propriedades de anel, resta apenas ver que a matriz identidade I_n é uma identidade multiplicativa. Com efeito, dado $(a_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$, temos:

$$\begin{aligned} (a_{ij}) \cdot I_n &= \left(\sum_{k=1}^n a_{ik} \delta_{kj} \right)_{i,j} \\ &= (a_{ij})_{i,j}, \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} I_n \cdot (a_{ij}) &= \left(\sum_{k=1}^n \delta_{ik} a_{kj} \right)_{i,j} \\ &= (a_{ij})_{i,j}. \end{aligned}$$

Para a última afirmação, considere $(a_{ij})_{i,j}, (b_{ij})_{i,j} \in M_n(A)$ definidos por:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j = 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = 1, j = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos que o elemento $(1, n)$ da matriz $(a_{ij})(b_{ij})$ é dado por $\sum_{k=1}^n a_{1k} b_{kn} = 1$, enquanto o elemento $(1, n)$ da matriz $(b_{ij})(a_{ij})$ é dado por $\sum_{k=1}^n b_{1k} a_{kn} = 1$. \square

Assim, os anéis de matrizes nos dão uma ampla gama de anéis não comutativos.

3.3 Domínios de Integridade

O anel dos números inteiros, bem como o anel dos racionais reais, possuem a seguinte importante propriedade:

Definição 3.9. Seja A um anel comutativo. Dizemos que A é um *domínio de integridade* se, e somente se, $\forall a, b \in A$, se $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$. \square

Nem todos os anéis comutativos são domínios de integridade. Por exemplo, no anel dos inteiros módulo 4, \mathbb{Z}_4 , temos que $2 \cdot 2 = 4 = 0$, e $2 \neq 0$.

3.4 Elementos invertíveis

Um anel, com sua soma, é um grupo Abelian, e, portanto, possui opostos aditivos. Porém, não necessita possuir opostos multiplicativos. Os elementos de um anel que possuem inversos no anel são os chamados *elementos invertíveis* ou *unidades*.

Definição 3.10 (Elemento invertível). Seja A um anel. Um elemento $a \in A$ é dito *invertível*, ou uma *unidade* se $\exists b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

O conjunto de todas as unidades de A é denotado por A^* . \square

Definição 3.11. Seja A um anel. Então, se $a \in A^*$, existe um **único** $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. Este elemento é denotado por a^{-1} , e é chamado de *inverso* de a . \square

Observação: para que a definição acima faça sentido, é necessário mostrar que se a é unidade, existe um **único** $b \in A$ tal que $a \cdot b = b \cdot a = 1$. A existência é garantida pela definição de unidade, e a demonstração da unicidade é análoga à da unicidade do inverso em grupos (Proposição 2.3), ficando como exercício.

Proposição 3.12. Seja A um anel. Para todos $a, b \in A^*$, temos:

- a) $ab \in A^U$ e $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- b) $a^{-1} \in A^U$ e $(a^{-1})^{-1} = a$.
- c) $1^{-1} = 1$.

Além disso, A^* é, com a restrição da operação de multiplicação do anel, um grupo com identidade 1. Caso A é um anel comutativo, A^* é um grupo abeliano.

Demonstração. a): Sejam $a, b \in A^*$. Pela associatividade, $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = 1 = (b^{-1}a^{-1})(ab)$, logo, pela unicidade do inverso, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

b): Seja $a \in A^*$. Temos que $a^{-1}a = 1 = a(a^{-1})$, logo, pela unicidade do inverso, $(a^{-1})^{-1} = a$.

c): Note que $1 \cdot 1 = 1 = 1 \cdot 1$, logo, pela unicidade do inverso, $1^{-1} = 1$.

Se A é um anel comutativo, então A^* é um grupo abeliano, pois para todo $a, b \in A^*$, temos que $ab = ba$, logo $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$. \square

3.5 O anel dos números inteiros

Espera-se que o estudante já possua traquejo com o anel dos números inteiros, incluindo contato com a noção formal de divisibilidade, o teorema fundamental da aritmética e a noção de congruência módulo n .

Primeiramente, reconhecamos que \mathbb{Z} possui, além da estrutura de domínio de integridade, uma estrutura de ordem.

Definição 3.13. Um anel ordenado é uma tupla $(A, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ tal que $(A, +, \cdot, 0, 1)$ é um anel comutativo tal que \leq é uma relação de ordem total (também chamada de ordem linear) em A , ou seja, que satisfaça:

- (Propriedade reflexiva) $\forall a \in A, a \leq a$.
- (Propriedade antissimétrica) $\forall a, b \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$.
- (Propriedade transitiva) $\forall a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$.
- (Linearidade) $\forall a, b \in A, a \leq b$ ou $b \leq a$.

e tal que:

- (Compatibilidade da soma) $\forall a, b, c \in A$, se $a \leq b$, então $a + c \leq b + c$ e $ac \leq bc$.
- (Compatibilidade da multiplicação) $\forall a, b, c \in A$, se $a \leq b$ e $0 \leq c$, então $ac \leq bc$.

Nesse caso, dizemos que $a < b$ se $a \leq b$ e $a \neq b$.

Os elementos positivos de A são os elementos maiores do que 0.

Os negativos são os menores do que 0. \square

Assumiremos, sem demonstração (por fugir do escopo do texto), que existe uma estrutura $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ como abaixo:

Definição 3.14 (Inteiros, anel ordenado). $\mathbb{Z} = (\mathbb{Z}, +, \cdot, 0, 1, \leq)$ é um domínio de integridade ordenado cujos elementos positivos possuem a propriedade da boa ordenação:

Qualquer subconjunto não vazio de inteiros positivos possui elemento mínimo. \square

Assumiremos todos os fatos elementares sobre \mathbb{Z} que não foram provados, inclusive o fato de que $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

3.6 Corpos e anéis de divisão

Abaixo, segue a definição de anel de divisão e corpo. A noção de corpo será uma das noções mais importantes deste texto.

Definição 3.15 (Corpo e Anel de Divisão). Um *anel de divisão* é um anel não trivial para o qual todo elemento não nulo é invertível. Um *corpo* é um anel de divisão comutativo. \square

Todo corpo é um domínio de integridade. De fato:

Proposição 3.16. Seja K um corpo. Então K é um domínio de integridade.

Demonstração. Sabemos que K é um anel comutativo não trivial. Sejam $a, b \in K$ tais que $ab = 0$. Se $a = 0$, então segue a tese. Caso contrário, como K é um corpo, a^{-1} existe. Assim, temos que $b = (a^{-1}a)b = a^{-1}(ab) = 0$, logo, $b = 0$. \square

Porém, nem todo domínio de integridade é um corpo: por exemplo, \mathbb{Z} é um domínio que não é um corpo, pois 2 não possui inverso multiplicativo em \mathbb{Z} .

3.7 O corpo dos números reais

Assim como fizemos com \mathbb{Z} , assumiremos a existência do corpo dos números reais.

O corpo dos números reais é um corpo ordenado que satisfaz a propriedade de ser Dedekind-completo.

Formalmente:

Proposição 3.17. O corpo dos números reais \mathbb{R} é um corpo ordenado, e satisfaz a propriedade de ser Dedekind-completo. Ou seja, tal que para todo $A \subseteq \mathbb{R}$ não vazio, se A é limitado superiormente (ou seja, se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, x \leq a$), então A admite um supremo (um menor limitante superior, ou seja, existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in A, x \leq b$ e $\forall c \in \mathbb{R}$, se $x \leq c$ para todo $x \in A$, então $b \leq c$).

O estudo das propriedades dos números reais é um assunto central de um curso básico de Análise Real.

Nesse texto, detalharemos tais propriedades somente de acordo com nossa necessidade.

3.8 O Anel dos Quaternions

Discutimos as noções de corpo e de anel de divisão. Por definição, todo corpo é um anel de divisão. Um dos primeiros exemplos de um anel de divisão que não é um corpo é o anel dos quaternions \mathbb{H} , que descreveremos abaixo.

A ideia é que adiciona-se em \mathbb{R} três elementos distintos: i, j, k , para os quais valem as propriedades de que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, e $ij = k$, $jk = i$ e $ki = j$, e para o qual as demais propriedades operacionais de números reais são preservadas. Nesse anel, todo elemento se escreverá de forma única como $a + bi + cj + dk$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Apresentaremos uma construção a seguir. Antes disso, note que, como $k = ij$, multiplicando ambos os lados por i à esquerda, supondo que a propriedade associativa ainda valha, temos que $ik = -j$.

Multiplicando por j à direita, temos que $kj = -1$.

Além disso, multiplicando por $i = jk$ à esquerda por j , temos que $ji = -1$. Assim, temos que $ij = k$, $jk = i$, $ki = j$, $ji = -k$, $kj = -i$ e $ik = -j$.

Assumindo que $-i \neq i$, $-j \neq j$ e $-k \neq k$, temos que i, j, k vêm que a nossa estrutura deverá ser não comutativa.

Definição 3.18 (Quaternions). Definimos $\mathbb{H} = \mathbb{R}^4$.

Se $a \in \mathbb{R}$, seja $a = (a, 0, 0, 0)$, $i = (0, 1, 0, 0)$, $j = (0, 0, 1, 0)$ e $k = (0, 0, 0, 1)$.

Segue que, utilizando a linguagem de produto por escalar oriunda da álgebra linear, que para todo $x \in \mathbb{H}$, existem únicos $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tais que $x = a + bi + cj + dk$.

Em \mathbb{H} , definimos a soma coordenada-a-coordenada. Da Álgebra Linear, sabemos que isso nos dá um grupo abeliano.

Define-se também a multiplicação, inspirada pela discussão acima, como se segue: para $a, b, c, d, u, v, z, w \in \mathbb{R}$:

$$(a, b, c, d)(u, v, z, w) = (au - bv - cz - dw, av + bu + cw - dz, az + bw - cu + dv, aw + bz + cv - du).$$

Ou, em outra notação:

$$\begin{aligned} (a + bi + cj + dk)(u + vi + zj + kw) \\ = (au - bv - cz - dw) + (av + bu + cw - dz)i \\ + (az + bw - cu + dv)j + (aw + bz + cv - du)k. \end{aligned}$$

□

Note que, com isso, temos $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $jk = i$ e $ki = j$, além de $i \neq -i$, $j \neq -j$ e $k \neq -k$.

Porém, \mathbb{H} é um anel de divisão. Primeiro, provaremos que:

Proposição 3.19. \mathbb{H} é um domínio de integridade.

Demonstração. 1 é neutro multiplicativo: dado $a + bi + cj + dk = (a, b, c, d) \in \mathbb{H}$, pela definição, temos que $(1, 0, 0, 0)(a, b, c, d) = (a, b, c, d)$, pois as demais parcelas zeram. Analogamente, $(a, b, c, d)(1, 0, 0, 0) = (a, b, c, d)$.

A multiplicação é associativa: Para $x, y, z \in \mathbb{H}$, temos que $x = (a, b, c, d)$, $y = (u, v, z, w)$ e $z = (p, q, r, s)$. Temos que:

$$(xy)z = (au - bv - cz - dw, av + bu + cw - dz, az + bw - cu + dv, aw + bz + cv - du)(p, q, r, s)$$

e $x(yz)$ é dado por:

$$x(yz) = (a, b, c, d)(up - vq - zr - sw, uq + vp + zs - tw, ur + vq - pw + zt, us + vq + pw - qt)$$

Expandindo os últimos produtos e comparando-os, vê-se que são iguais. Os detalhes ficam a cargo do leitor.

De maneira igualmente trabalhosa, porém mecânica, verifica-se às duas propriedades distributivas. \square

Mais interessante é demonstrar que \mathbb{H} é um anel de divisão. Para isso, precisamos mostrar que todo elemento não nulo de \mathbb{H} é invertível.

Proposição 3.20. \mathbb{H} é um anel de divisão.

Demonstração. Fica a cargo do leitor. Para um guia, ver o Exercício 3.4 \square

3.9 Subanéis

Em Matemática, é comum que as estruturas estudadas possuam uma noção de subestrutura. Em geral, uma subestrutura de uma estrutura dada é um subconjunto desta que seja, de forma natural, uma estrutura da mesma natureza daquela.

Veremos que, quando tratamos de anéis, nem todo subconjunto pode ser visto como uma subestrutura.

Definição 3.21 (Subanel). Seja A um anel e $B \subseteq A$. Dizemos que B é subanel de A se, e somente se $(B, +|_{B^2}, \cdot|_{B^2}, 0_A, 1_A)$ é um anel, onde $+|_{B^2} : B^2 \rightarrow B$ e $\cdot|_{B^2} : B^2 \rightarrow B$ são as restrições das operações de A à B^2 . \square

Na definição acima, estamos pedindo que B seja um subconjunto de A que possua as mesmas operações que A , e que essas operações sejam restritas a B e satisfaçam todas as cláusulas da definição de anel. Aparentemente, na prática, provar que um dado subconjunto de A é um subanel pode parecer uma tarefa longa. Porém, a seguinte proposição encurta esta tarefa significativamente:

Definição 3.22 (Subanel). Seja A um anel e $B \subseteq A$. Então B é um subanel de A se, e somente se:

- $1_A \in B$
- Para todos $a, b \in B$, $a - b \in B$.
- Para todos $a, b \in B$, $ab \in B$

Além disso, caso B seja um subanel de A , os opostos aditivos de B são os mesmos que os de A , ou seja, que $-b \in B$ para todo $B \in B$. \square

Demonstração. Primeiro, notemos suponhamos que B seja um subanel de A . Então B é fechado por $+$, \cdot e $1_A \in B$. Resta apenas ver que para todos $a, b \in B$, $a - b \in B$. Como B é fechado por soma, basta provar a última afirmação: que para todo $b \in B$, $-b \in B$. Fixe $b \in B$. Como $(B, +|_B^2, 0_A)$ é um grupo abeliano, existe $x \in B$ tal que $b + x = 0_B$. Então, em a , segue que $b + x = x + b = 0_A$. Pela unicidade dos opostos em A , segue que $-b = x \in B$.

Reciprocamente, provaremos que se B possui 1_B como elemento e é fechado por diferença e por produto, então B é um subanel de A . Iniciaremos verificando que B é fechado por soma, por opostos e que tem 0_A como elemento.

Como 1_A é elemento de B , temos que $0_A = 1_A - 1_A \in B$. Assim, B possui 0_A como elemento. Agora, dado $b \in B$, $0_A - b = -b \in B$, o que mostra que B é fechado por opostos. Finalmente, dados $a, b \in B$, $a - (-b) = a + b \in B$, o que mostra que B é fechado para soma.

As propriedades associativas, comutativas, distributivas e de identidade valem em B , pois valem em A e as operações de B são as mesmas de A , restritas. Para finalizar, basta observar que dado $a \in B$, $(-a) \in B$, como já mostrado, e que $a + (-a) = (-a) + a = 0_A$, o que mostra que B possui opostos aditivos. \square

Exemplo 3.23. \mathbb{N} não é um subanel de \mathbb{Z} , pois $-1 \notin \mathbb{Z}$. Porém, note que \mathbb{N} tem 1 e é fechado por soma e produto, o que mostra que na proposição anterior, a expressão $a - b$ não pode ser substituída por $a + b$. \square

Exemplo 3.24 (Subanel trivial). Para todo A , temos que A é subanel de si mesmo. \square

Exemplo 3.25. O único subanel de \mathbb{Z} é \mathbb{Z} : se B é um subanel de \mathbb{Z} , então $0, 1 \in B$. Por indução, para todo $n \geq 1$ temos que $n \in B$: com efeito, $1 \in B$, e, se $n \in B$, $n + 1 \in B$, logo vale o passo indutivo. Finalmente, $-n \in B$ para todo $n \geq 1$. Como $\mathbb{Z} = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} \cup \{-n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\}$, temos que $B = \mathbb{Z}$. \square

Como as operações de um subanel são as mesmas de um anel, um subanel de um anel comutativo é comutativo.

Proposição 3.26. Subanéis de anéis comutativos são comutativos.

Demonstração. Seja A um anel comutativo e B um subanel de A . Para todos $a, b \in B$, temos que o produto $a \cdot b$ em B é dado pelo produto (comutativo) $a \cdot b$ em A , logo $a \cdot b = b \cdot a$. \square

3.10 O centro de um anel

Apesar de nem todo anel ser comutativo, todos os anéis possuem elementos que comutam com qualquer outro elemento – ao menos o elemento 1.

O centro do anel é o conjunto de tais elementos.

Definição 3.27 (Centro de um anel). Seja A um anel.

O *centro* de A , denotado por $Z(A)$, é o conjunto dos elementos de A que comutam com todos os outros elementos de A .

Formalmente, $Z(A) = \{a \in A : \forall b \in A, ab = ba\}$. \square

O centro de um anel sempre é um subanel.

Proposição 3.28. Para todo anel A , o conjunto $Z(A)$ é um subanel de A .

Demonstração. Temos que $1 \in Z(A)$ pois para todo $b \in A$, $1a = a1 = a$.

Se $a, a' \in A$, temos que $aa' \in Z(A)$ pois para todo $b \in A$, $(aa')b = a(a'b) = a(ba') = (ab)a' = (ba)a' = b(a'a)$.

Finalmente, se $a, a' \in A$, temos que $a - a' \in Z(A)$, pois para todo $b \in A$, $(a - a')b = ab - a'b = ba - ba' = b(a - a')$. \square

3.11 Exercícios

Exercício 3.1. Seja R um anel com identidade e seja S um subanel de R que contém a identidade de R . Prove que se u é uma unidade em S , então u é uma unidade em R . Apresente um exemplo que demonstre que a recíproca é falsa.

Exercício 3.2. Seja A um anel. Mostre que um anel A é um anel de divisão se, e somente se $A^* = A \setminus \{0\}$.

Exercício 3.3. No anel dos quaternions \mathbb{H} , identifique $x \in \mathbb{R}$ com $(x, 0, 0, 0) = x + 0i + 0j + 0k$.

Mostre que $\mathbb{R} = Z(\mathbb{H})$.

(Dica: após mostrar que $\mathbb{R} \subseteq Z(\mathbb{H})$, tome um elemento arbitrário de $Z(\mathbb{H})$ e estude sua multiplicação por i , j e k .)

Exercício 3.4. No anel dos quaternions, dado $q \in \mathbb{H}$, seu conjugado é definido como $\bar{q} = a + bi + cj + dk$.

a) Calcule $q\bar{q}$ e $\bar{q}q$.

b) Prove que, se $q \neq 0$, $\bar{q}(q\bar{q})^{-1}$ é inverso multiplicativo de q . Conclua que \mathbb{H} é anel de divisão.

Exercício 3.5. Seja A um anel. Prove que se $q \in Z(A)$ e q é uma unidade, então $q^{-1} \in Z(A)$. Utilize esse fato para provar que o centro de qualquer anel de divisão é um corpo.

Capítulo 4

Homomorfismos e Ideais

Em matemática, boa parte das coleções de estruturas estudadas possui uma classe de funções que preservam, em algum sentido, suas propriedades. O estudo generalizado destas estruturas é o que chamamos de *teoria de categorias*, tema que não será tratado neste texto. Na classe dos anéis, estas funções são o que chamamos de *homomorfismos*.

4.1 Definição de homomorfismo

Homomorfismos são funções que preservam a estrutura de anéis. Formalmente:

Definição 4.1. Sejam A, R anéis. Uma função $f : A \rightarrow R$ é um *homomorfismo* se:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in A$.
- $f(-a) = -f(a)$ para todo $a \in A$.
- $f(0_A) = 0_R$
- $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$.
- $f(1_A) = 1_R$.

Caso f seja injetora, dizemos que f é um *monomorfismo*. Caso f seja sobrejetora, dizemos que f é um *epimorfismo*. Caso f seja bijetora, dizemos que f é um *isomorfismo*. \square

A noção de isomorfismo é extremamente importante na Teoria de Anéis. Muitas vezes, temos dois anéis que “deveriam ser a mesma coisa”, mas, como objetos matemáticos, não são iguais. A noção de isomorfismo entra em campo para dizer que, mesmo que dois anéis não sejam o mesmo objeto, eles possuem exatamente as mesmas propriedades algébricas e operacionais. Para darmos um exemplo concreto:

Exemplo 4.2. Seja $A = \{0, 1\}$ e $R = \{Z, U\}$, onde Z, U são objetos diferentes, e diferentes de $0, 1$. Defina em A as operações \cdot e $+$ dadas pelas seguintes tabelas:

Em A :

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Em R :

+	Z	U
Z	Z	U
U	U	Z

·	Z	U
Z	Z	Z
U	Z	U

Intuitivamente, A e R correspondem a duas apresentações de uma mesma estrutura algébrica, porém, como $A \cap R = \emptyset$, estes dois anéis não são o mesmo anel. Como formalizar este fato? Ora, há uma relação biunívoca (uma bijeção) entre A e R que preserva suas operações, e ela é dada por $\phi(0) = Z$ e $\phi(1) = U$. Tal ϕ é um isomorfismo. \square

Para todos os fins que interessam à Álgebra, anéis isomorfos tem exatamente as mesmas propriedades, e, assim, são considerados como sendo, em algum sentido, a mesma estrutura.

A definição de homomorfismo, por possuir várias cláusulas, pode parecer de longa verificação. A proposição abaixo encurta esta verificação substancialmente.

Proposição 4.3. Sejam A, R anéis e $f : A \rightarrow R$ uma função. Então f é um homomorfismo se, e somente se:

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$ para todo $a, b \in A$.
- $f(ab) = f(a)f(b)$ para todo $a, b \in A$.
- $f(1_A) = 1_R$.

Demonstração. Provaremos o lado que não é imediatamente trivial. Começaremos mostrando que $f(0_A) = 0_R$. Temos que $f(0_A) = f(0_A + 0_A) = f(0_A) + f(0_A)$, logo, cancelando, $f(0_A) = 0_R$.

Agora, vejamos que $f(-a) = -f(a)$ para todo $a \in A$. Temos que $f(a) + f(-a) = f(a + (-a)) = f(0_A) = 0_R$, logo, $f(-a) = -f(a)$.

Assim, f é um homomorfismo. \square

4.2 Propriedades elementares

Lema 4.4. Sejam $f : A \rightarrow R$ e $g : R \rightarrow S$ homomorfismos de anéis. Então a composição $g \circ f : A \rightarrow S$ é um homomorfismo de anéis.

Demonstração. Sejam $a, b \in A$. Então:

- $g \circ f(a + b) = g(f(a + b)) = g(f(a) + f(b)) = g(f(a)) + g(f(b)) = (g \circ f)(a) + (g \circ f)(b)$.
- $g \circ f(ab) = g(f(ab)) = g(f(a)f(b)) = g(f(a))g(f(b)) = (g \circ f)(a)(g \circ f)(b)$.
- $g \circ f(1_A) = g(f(1_A)) = g(1_R) = 1_S$.

Assim, $g \circ f$ é um homomorfismo de anéis. \square

Proposição 4.5 (Propriedades de homomorfismos). Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Então:

- a) Para todo $a \in A^*$, temos $f(a) \in R^*$ e $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.

b) A imagem de f , $\text{ran } f = \{f(a) : a \in A\}$, é um subanel de R . Se A é comutativo, $\text{ran } f$ também é.

c) Se f é injetora, a imagem de f é um subanel de R isomorfo a A .

Demonstração. a) Se $a \in A^*$, então $f(a)f(a^{-1}) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = 1_R$ e $f(a^{-1})f(a) = f(aa^{-1}) = f(1_A) = 1_R$. Assim, $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$ e $f(a) \in R^*$.

b) Seja $a, b \in \text{ran } f$. Então existem $x, y \in A$ tais que $a = f(x)$ e $b = f(y)$. Assim, $a - b = f(x) - f(y) = f(x - y)$. Logo, $a - b \in \text{ran } f$. Similarmente, $ab = f(x)f(y) = f(xy) \in \text{ran } f$, e $1_R = f(1_A) \in \text{ran } f$.

Portanto, $\text{ran } f$ é um subanel de R . Se A é comutativo, $\text{ran}(f)$ também é comutativo, pois dados $a, b \in \text{ran } f$, existem $x, y \in A$ tais que $a = f(x)$ e $b = f(y)$. Assim, $ab = f(x)f(y) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x) = ba$.

c) Se f é injetora, então f é bijetora entre A e $\text{ran } f$. Assim, f é um isomorfismo entre A e $\text{ran } f$, dado que é um homomorfismo. \square

A noção de isomorfismo é uma relação de equivalência na classe dos anéis.

Proposição 4.6 (Propriedades de isomorfismo). Sejam A, R, S anéis e $f : A \rightarrow R$ e $g : R \rightarrow S$ isomorfismos de anéis. Então:

- a) $g \circ f$ é um isomorfismo de anéis.
- b) $f^{-1} : R \rightarrow A$ é um isomorfismo de anéis.
- c) $\text{id}_A : A \rightarrow A$ é um isomorfismo de anéis.

Demonstração. a) A composição de funções bijetoras é bijetora, e a composição de homomorfismos é homomorfismo. Como um isomorfismo é um homomorfismo bijetor, segue que a composição de dois isomorfismos é um isomorfismo.

b) Como f é um isomorfismo, f é bijetora, assim, $f^{-1} : R \rightarrow A$ está bem definida e é bijetora. Verificaremos que f^{-1} é um homomorfismo. Dados $r, s \in R$, sejam $a, b \in A$ tais que $f(a) = r$ e $f(b) = s$. Temos que:

- $f^{-1}(r + s) = f^{-1}(f(a) + f(b)) = f^{-1}(f(a + b)) = a + b = f^{-1}(r) + f^{-1}(s)$.
- $f^{-1}(rs) = f^{-1}(f(a)f(b)) = f^{-1}(f(ab)) = a \cdot b = f^{-1}(r)f^{-1}(s)$.
- $f^{-1}(1_R) = f^{-1}(f(1_A)) = 1_A$.

c) A função identidade id_A é claramente bijetora, e é um homomorfismo, pois, para todos $a, b \in A$:

- $\text{id}_A(a + b) = a + b = \text{id}_A(a) + \text{id}_A(b)$.
- $\text{id}_A(ab) = ab = \text{id}_A(a) \text{id}_A(b)$.
- $\text{id}_A(1_A) = 1_A$.

\square

Agora introduziremos o núcleo de um homomorfismo.

Definição 4.7. Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Definimos o *núcleo* de f , também chamado de *kernel* de f , como sendo o conjunto dos zeros de f . Em símbolos:

$$\ker f = \{a \in A : f(a) = 0_R\}.$$

□

Uma importante relação entre o homomorfismo e seu núcleo é dado como se segue:

Proposição 4.8. Sejam A, R anéis e $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo. Então $f : A \rightarrow R$ é injetor (um monomorfismo) se, e somente se $\ker f = \{0_A\}$.

Demonstração. Primeiro, suponha que f é um monomorfismo. Sabemos que $f(0_A) = 0_R$, pois f é homomorfismo, e, portanto, $\{0_A\} \subseteq \ker f$. Reciprocamente, seja $a \in \ker f$. Temos que $f(a) = 0_R = f(0_A)$. Pela injetividade de f segue que $a = 0_A \in \{0_A\}$.

Agora suponha que $\ker f = \{0_A\}$. Veremos que f é injetora. Para tanto, sejam $a, b \in A$ e suponha que $f(a) = f(b)$. Temos que $f(a - b) = f(a) - f(b) = 0_R$, assim, $a - b \in \ker f = \{0_A\}$, o que implica em $a - b = 0_A$, e, portanto, $a = b$. □

4.3 Ideais

Ideais são as estruturas responsáveis pela noção de quociente em anéis, assunto que será estudado no próximo capítulo. Introduziremos a noção de ideal neste capítulo pois ela tem interações fundamentais com a noção de homomorfismo, porém, apenas no próximo capítulo ficará clara a sua enorme importância para esta teoria. Nesta seção, motivaremos, nesta seção, a noção de ideal, a partir do núcleo de homomorfismos.

Para começar, notemos algumas propriedades do núcleo.

Proposição 4.9. Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Seja $I = \ker f$. Então:

- a) $0_A \in I$.
- b) Para todos $a, b \in I$, $a + b \in I$.
- c) Para todos $a \in I$ e $x \in A$, $ax \in I$.
- d) Para todos $a \in I$ e $x \in A$, $xa \in I$.

Demonstração. a) $0_A \in I$ pois $f(0_A) = 0_R$.

b) Se $a, b \in I$, então $f(a) = 0_R$ e $f(b) = 0_R$. Assim, $f(a + b) = f(a) + f(b) = 0_R + 0_R = 0_R$, logo, $a + b \in I$.

c) Se $a \in I$ e $x \in A$, então $f(a) = 0_R$. Assim, $f(ax) = f(a)f(x) = 0_R f(x) = 0_R$, logo, $ax \in I$.

d) Se $a \in I$ e $x \in A$, então $f(a) = 0_R$. Assim, $f(xa) = f(x)f(a) = f(x)0_R = 0_R$, logo, $xa \in I$. □

É possível indagar se $\ker f$ é um subanel de A . Observemos que as propriedades c) e d) são mais fortes do que a propriedade exigida para produto para ser um subanel. Além disso, $\ker f$ é fechado por diferenças, pois se $a, b \in \ker f$, pela propriedade d), $(-1)b = -b \in \ker f$, e, portanto, $a - b \in \ker f$. Porém, 1_A raramente está em $\ker f$, como vemos a seguir:

Proposição 4.10. Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Se $1_A \in \ker f$, então R é o anel trivial, ou seja, $R = \{0_R\}$.

Demonstração. Se $1_A \in \ker f$, então $f(1_A) = 0_R$. Como f é um homomorfismo, temos que $f(1_A) = f(1_A \cdot 1_A) = f(1_A)f(1_A) = 0_R \cdot 0_R = 0_R$. Como $1_R = 0_R$, segue que $R = \{0_R\}$, pois dado $x \in R$ temos $x = x \cdot 1_R = x \cdot 0_R = 0_R$. \square

Como recíproca, notemos que um homomorfismo acima existe para qualquer anel A :

Proposição 4.11. Seja A um anel e $R = \{0_R\}$ um anel trivial.

Então $f : A \rightarrow R$ dado por $f(x) = 0_R$ para todo $x \in A$ é um homomorfismo de anéis, e $\ker f = A$.

Demonstração. Temos que f é um homomorfismo de anéis, já que dados $a, b \in R$, temos $f(a+b) = 0_R = 0_R + 0_R = f(a) + f(b)$, $f(ab) = 0_R = 0_R \cdot 0_R = f(a)f(b)$, $f(1_A) = 0_R = 1_R$. Como f é a função nula, $\ker f = A$. \square

Podemos ver $\ker f$, em algum sentido, como uma medida do quão longe um homomorfismo f está de ser injetor: temos que $\{0\} \subseteq \ker f \subseteq A$. Como vimos, f ser injetor é equivalente a $f = \{0\}$. No outro extremo, f ser constante significa que $\ker f = A$.

Vimos ainda que $\ker f$ não é um subanel, mas que possui propriedades especiais. Tais propriedades são a definição de ideal.

Definição 4.12 (Ideal). Seja A um anel. Um subconjunto $I \subseteq A$ é dito *ideal*, ou um *ideal bilateral* se:

- a) $0_A \in I$.
- b) Para todos $a, b \in I$, $a + b \in I$.
- c) Para todos $a \in I$ e $x \in A$, $ax \in I$.
- d) Para todos $a \in I$ e $x \in A$, $xa \in I$.

Caso I satisfaça todas as propriedades menos d), I é dito um ideal à direita. De forma similar, caso I satisfaça todas as propriedades menos c), I é dito um ideal à esquerda. \square

Note que se A é um anel comutativo, então I é um ideal à esquerda se, e somente se, I é um ideal à direita. Assim, em anéis comutativos, a noção de ideal é equivalente à de ideal à esquerda ou à de ideal à direita. Por simplicidade, neste texto, focaremos nosso estudo em ideais bilaterais. Porém, muitos resultados aqui expressados possuem versões para ideais à esquerda e à direita.

Da discussão anterior, temos:

Corolário 4.13. Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Então $\ker f$ é um ideal de A .

Então, todo núcleo é um ideal. No próximo capítulo, veremos que vale uma recíproca: todo ideal é um núcleo de algum homomorfismo.

Todo anel possui ao menos os ideais abaixo, chamados de ideais triviais:

Proposição 4.14 (Ideal trivial). Seja A um anel. Então $\{0\}$ e A são ideais de A . Estes ideais são chamados de *ideais principais*

Demonstração. Exercício. \square

Proposição 4.15 (Interseção de ideais). Seja A um anel e \mathcal{F} uma coleção não vazia de ideais de A . Então $\bigcap_{I \in \mathcal{F}} I = \bigcap \mathcal{F}$ é um ideal de A .

Ideais também são preservados por imagens inversas.

Proposição 4.16. $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis e J um ideal de R . Então $f^{-1}[J] = \{a \in A : f(a) \in J\}$ é um ideal de A .

Demonstração. Seja $I = f^{-1}[J]$. Temos que $J \neq \emptyset$ já que $0 \in \ker f \subseteq I$.

Sejam $a, b \in I$. Então $f(a), f(b) \in J$, logo, $f(a+b) = f(a) + f(b) \in J$, o que implica $a+b \in I$.

Agora seja $a \in A$ e $b \in I$. Temos que $f(ab) = f(a)f(b) \in J$ e $f(ba) = f(b)f(a) \in J$, pois $f(b) \in J$. Assim, $ab, ba \in I$. \square

Demonstração. Seja $I = \bigcap \mathcal{F}$.

Então $0 \in I$, pois $0 \in I$ para todo $I \in \mathcal{F}$.

Sejam $a, b \in I$. Então, para todo $I \in \mathcal{F}$, temos que $a, b \in I$, logo, $a+b \in I$. Assim, $a+b \in \bigcap \mathcal{F}$.

Seja $a \in A$ e $b \in I$. Então, para todo $I \in \mathcal{F}$, temos que $b \in I$, logo, $ab \in I$. Assim, $ab \in \bigcap \mathcal{F}$.

Analogamente, se $a \in I$ e $b \in A$, então $ba \in I$. \square

Proposição 4.17 (Ideal gerado). Seja A um anel e $B \subseteq A$ um conjunto não vazio. Então, o conjunto $I = \{a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n : n \geq 1, a_i, c_i \in A, b_i \in B\}$ é o menor ideal A que contém B (ou seja, além de ser um ideal contendo B , se J é qualquer ideal contendo B , então $I \subseteq J$).

Além disso, se $B \subseteq Z(R)$, onde $Z(R)$ denota o centro de R , então $I = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : n \geq 1, a_i \in A, b_i \in B\}$.

Demonstração. Primeiro, verificaremos que I é um ideal.

$0 \in I$, pois $0 = 0b0$ para todo $b \in B$.

Considere $x, y \in I$. Então existem $n, m \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in A$, $b_1, \dots, b_n \in B$, $a'_1, \dots, a'_m, c'_1, \dots, c'_m \in A$ e $b'_1, \dots, b'_m \in B$ tais que $x = a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n$ e $y = a'_1 b'_1 c'_1 + \dots + a'_m b'_m c'_m$. Assim, $x + y = (a_1 b_1 + \dots + a_n b_n) + (a'_1 b'_1 c'_1 + \dots + a'_m b'_m c'_m) = (a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n) + (a'_1 b'_1 c'_1 + \dots + a'_m b'_m c'_m) \in I$. Concatenando as sequências, vemos que $x + y \in I$.

Seja $x \in A$ e $b \in I$. Então existem $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $b = a_1 b_1 c_n + \dots + a_n b_n c_n$. Assim, $xb = (xa_1) b_1 c_1 + \dots + (xa_n) b_n c_n \in I$. Analogamente, $bx \in I$.

Agora, seja J um ideal de A que contém B . Fixe $x \in I$. Existem $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $x = a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n$. Como J é um ideal de A e $B \subseteq A$, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que $a_i b_i c_i \in J$. Somando, segue que $x \in J$.

Finalmente, provaremos a afirmação final para quando $B \subseteq Z(R)$. Seja $I' = \{a_1 b_1 + \dots + a_n b_n : n \geq 1, a_i \in A, b_i \in B\}$. Veremos que $I = I'$. Pondo $c_1 = \dots = c_n = 1$, vemos que $I' \subseteq I$.

Reciprocamente, se $x = a_1 b_1 c_1 + \dots + a_n b_n c_n \in I$ com $n \geq 1$, $a_1, \dots, a_n, c_1, \dots, c_n \in A$ e $b_1, \dots, b_n \in B \subseteq Z(A)$, temos que $x = (a_1 c_1) b_1 + \dots + (a_n c_n) b_n \in I'$. \square

Definição 4.18. Na notação da proposição acima, I é chamado de *ideal gerado por B* e denotamos por $\langle B \rangle$.

Caso $B = \{x_1, \dots, x_n\}$, denotamos o ideal gerado por B como $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$. Em particular, se $B = \{x\}$, denotamos o ideal gerado por B como $\langle x \rangle$.

Caso B seja a imagem de uma família $(x_i : i \in Z)$, denotamos o ideal gerado por B como $\langle x_i : i \in Z \rangle$.

Em qualquer um desses casos, B é dito um gerador do ideal. \square

Observação: note que o menor ideal contendo $B = \emptyset$ é o ideal nulo, $\{0\}$. Escrevemos $\langle \emptyset \rangle = \{0\}$.

Vimos que a interseção de ideais é um ideal. Porém, a união de ideais não precisa ser um ideal.

Exemplo 4.19. Considere, em \mathbb{Z} , os ideais $2\mathbb{Z}$ e $3\mathbb{Z}$. Temos que $2, 3 \in 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$, mas $5 = 2 + 3 \notin 2\mathbb{Z} \cup 3\mathbb{Z}$. \square

Qual seria, então, o menor ideal que contém a união de dois ideais?

Proposição 4.20. Seja A um anel e I, J ideais de A . Então $\langle I \cup J \rangle = I + J = \{a + b : a \in I, b \in J\}$

Demonstração. Como $0 \in I \cap J$, temos que $I \subseteq I + J$, já que para todo $a \in I$, $a + 0 \in I + J$. Similarmente, $J \subseteq I + J$.

Temos que $I + J$ é um ideal: se $a, b \in I + J$, então existem $x, y \in I$ e $u, v \in J$ tais que $a = x + u$ e $b = y + v$. Segue que $a + b = (x + y) + (u + v) \in I + J$. Agora, dado $a \in I + J$ e $x \in A$, temos que $a = i + j$ com $i \in I$ e $j \in J$. Segue que $xa = xi + xj \in I + J$, já que $xi \in I$ e $xj \in J$. Similarmente, $ax \in I + J$.

Concluimos que $I + J$ é um ideal de A que contém I e J . Vejamos que ele é o menor.

Se K é um ideal que contém I e J , vejamos que $I + J \subseteq K$. Seja $a + b \in I + J$, com $a \in I$ e $b \in J$. Como K é um ideal, $a \in K$ e $b \in K$, segue que $a + b \in K$. Assim, $I + J \subseteq K$. \square

4.4 Ideais Principais

Definição 4.21 (Ideal principal). Um *ideal principal* é um ideal gerado por um único elemento. \square

Notemos que ideais triviais são principais à esquerda e à direita, pois $0A = \{0\} = A0$ e $A1 = A = 1A$.

Definição 4.22 (Domínio de ideais principais). Um domínio de ideais principais (DIP), ou anel principal, é um domínio de integridade A tal que todo ideal de A é principal. \square

Em um anel comutativo A , como um domínio de integridade, pelo exposto acima, para todo $x \in A$, o conjunto $xA = \{xa : a \in A\}$ é o conjunto $\langle x \rangle$. Assim, um domínio de ideais principais é um domínio cujos ideais são exatamente os conjuntos da forma xA para algum $x \in A$. Note que os ideais principais são sempre triviais, pois $\langle 0 \rangle = \{0\}$ e $\langle 1 \rangle = A$.

Quais são exemplos de DIPs? Para começar, qualquer corpo é um DIP. Mais especificamente:

Proposição 4.23 (Ideais de um corpo são triviais). Os únicos ideais de qualquer corpo são os triviais. Em particular, todo corpo é um DIP. Reciprocamente, se A é um anel comutativo não trivial cujo todo ideal é trivial, então A é um corpo.

Demonstração. Seja K um corpo e I um ideal de K . Se $I = \{0\}$, então I é trivial. Se $I \neq \{0\}$, então existe $a \in I$ tal que $a \neq 0$. Daí $1 = a^{-1}a \in I$. Logo, para todo $k \in K$, $k = 1k \in I$.

Para a recíproca, seja A um anel comutativo não trivial tal que todo ideal de A é trivial, e fixe $x \in A \setminus \{0\}$. Como Ax é um ideal trivial e $0 \neq x \in Ax$, temos que $Ax = A$. Logo, existe $a \in A$ tal que $ax = 1$. Assim, x é invertível. Portanto, A é um corpo. \square

Porém, nem todo DIP é um corpo, como exemplificado pelo anel dos números inteiros.

Proposição 4.24 (Um DIP que não é um corpo). O anel dos inteiros \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais que não é um corpo.

Demonstração. Seja I um ideal de \mathbb{Z} . Veremos que I é um ideal principal. Se $I = \{0\}$, então I é principal. Caso contrário, I contém ao menos um elemento positivo, já que, sendo $x \in I \setminus \{0\}$, temos que $-x \in I$ e um dos $x, -x$ é positivo.

Seja n o menor inteiro positivo de I . Afirmamos que $I = n\mathbb{Z}$. De fato, se $x \in I$, então escreva $x = qn + r$, onde $q, r \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq r < n$. Como $x \in I$, temos que $r = x - qn \in I$. Assim, $r = 0$, ou violaríamos a minimalidade de n . Logo, $x = qn \in n\mathbb{Z}$. Portanto, $I \subseteq n\mathbb{Z}$. Como $n\mathbb{Z} = \langle n \rangle$ e $n \in I$, temos que $n\mathbb{Z} \subseteq I$, o que completa a prova. \square

4.5 Ideais Primos e Maximais

Dois outros importantes tipos de ideais são os ideais primos e maximais.

Definição 4.25. Seja A um anel. Um ideal I de A é dito *próprio* se $I \neq A$.

Um ideal próprio de A é dito *maximal* se ele não está contido propriamente em nenhum ideal próprio de A . Em símbolos:

Um ideal I de A é dito maximal se for próprio e, para todo ideal próprio J de A , se $I \subseteq J$ então $I = J$. \square

Por sua vez, os ideais primos se definem como a seguir:

Definição 4.26. Seja A um anel comutativo. Um ideal primo de A é um ideal próprio $I \subseteq A$ tal que, para todos $a, b \in A$, se $ab \in I$, então $a \in I$ ou $b \in I$. \square

Ideais primos podem ser generalizados para anéis não comutativos, mas este estudo não será realizado neste texto.

Em anéis comutativos, todo ideal maximal é primo:

Proposição 4.27. Seja A um anel comutativo e I um ideal maximal. Então I é primo.

Demonstração. Suponha que $a, b \in A$ são tais que $ab \in I$ e que $a \notin I$. Veremos que $b \in I$.

Como I é maximal, o ideal $I + \langle a \rangle$, por conter I propriamente, não é um ideal próprio, ou seja, $I + \langle a \rangle = A$.

Assim, existem $x \in I$ e $y \in A$ tais que $x + ya = 1$. Multiplicando ambos os lados por b , temos que $xb + yab = b$. Como $x \in I$, temos que $xb \in I$, e, como $ab \in I$, temos que $yab \in I$. Portanto, $b = xb + yab \in I$. \square

Porém, nem todo ideal primo é maximal. Por exemplo, $\{0\}$ é um ideal primo de \mathbb{Z} que não é maximal, já que $2\mathbb{Z}$ é um ideal próprio de \mathbb{Z} que o contém propriamente.

4.6 Exercícios

Exercício 4.1. Lembremos que, da Álgebra Linear, um espaço vetorial V sobre um corpo K é uma quadrupla $(V, +, 0, \cdot)$, onde $(V, +, 0)$ é um grupo Abelian e $\cdot : K \times V \rightarrow V$ é uma operação que satisfaz:

- Associatividade: para todos $\alpha, \beta \in K$ e para todo $v \in V$, $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$.
- Distributividade: para todo $x, y \in K$ e para todo $v \in V$, $(x + y)v = xv + yv$.
- Distributividade II: para todo $x \in K$ e para todo $u, v \in V$, $x(u + v) = xu + xv$.
- Identidade: $1v = v$ para todo $v \in V$.

Uma transformação linear $T : V \rightarrow W$ entre dois espaços vetoriais V e W sobre um mesmo corpo K é uma função que preserva a estrutura de espaço vetorial, ou seja, satisfaz:

- $T(v + u) = T(v) + T(u)$ para todo $v, u \in V$.
- $T(\alpha v) = \alpha T(v)$ para todo $\alpha \in K$ e para todo $v \in V$.

Dado um espaço vetorial V , o conjunto de todas as transformações lineares de V em V , também chamadas de endomorfismos de V , é denotado por $\text{End}(V)$. A função identidade $\text{id}_V : V \rightarrow V$ é um endomorfismo, bem como a função nula.

Assumindo todo o exposto acima, mostre que, com a soma usual de transformações lineares (que é efetuada ponto-a-ponto) e com operação de composição como produto, $\text{End}(V)$ é um anel.

Mostre com um exemplo que $\text{End}(V)$ pode não ser comutativo.

Exercício 4.2. Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K . Defina $\rho : K \rightarrow V^V$ da seguinte forma:

Para cada $\alpha \in K$, o mapa $\rho(\alpha) : V \rightarrow V$ é dado por $\rho(\alpha)(v) = \alpha v$ para todo $v \in V$.

Mostre que ρ é um homomorfismo de anéis, onde V^V é o anel dos endomorfismos de V .

(Dica: não se esqueça de verificar que ρ possui o contradomínio correto.)

Capítulo 5

Quocientes e Teoremas do Homomorfismo

Ao estudar o anel dos números inteiros, normalmente são estudadas as relações de congruência e, subsequentemente, os anéis quocientes $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Neste capítulo, estudaremos quocientes de anéis de forma generalizada, e suas relações com ideais, relações de congruência e homomorfismos de anéis.

5.1 Relações de congruência

As relações de congruência de anéis são relações que generalizam a noção de “congruência módulo n ” do anel dos inteiros.

Definição 5.1. Seja A um anel. Uma relação de congruência em A é uma relação de equivalência \sim em A que “preserva operações”. Explicitamente, tal que para todos $a, b, c, d \in A$, se $a \sim b$ e $c \sim d$, então $a + c \sim b + d$ e $ac \sim bd$. \square

Todo homomorfismo induz naturalmente uma relação de congruência. Explicitamente:

Proposição 5.2. Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Então $\sim_f = \{(a, b) \in A^2 : f(a) = f(b)\}$ é uma relação de congruência em A . De outro modo, a relação \sim_f em A^2 dada por $a \sim_f b$ se, e somente se $f(a) = f(b)$, é uma relação de congruência em A .

Demonstração. \sim_f é uma relação reflexiva, pois para todo $a \in A$, $f(a) = f(a)$, logo, $a \sim_f a$.

\sim_f é simétrica, pois se $a \sim_f b$, então $f(a) = f(b)$, e, portanto, $f(b) = f(a)$, o que implica em $b \sim_f a$.

\sim_f é transitiva, pois se $a \sim_f b$ e $b \sim_f c$, então $f(a) = f(b)$ e $f(b) = f(c)$, logo, $f(a) = f(c)$, o que implica em $a \sim_f c$.

\sim_f preserva soma, pois se $a \sim_f b$ e $c \sim_f d$, então $f(a) = f(b)$ e $f(c) = f(d)$, logo, $f(a + c) = f(a) + f(c) = f(b) + f(d) = f(b + d)$, o que implica em $a + c \sim_f b + d$.

\sim_f preserva produto, pois se $a \sim_f b$ e $c \sim_f d$, então $f(a) = f(b)$ e $f(c) = f(d)$, logo, $f(ac) = f(a)f(c) = f(b)f(d) = f(bd)$, o que implica em $ac \sim_f bd$. \square

A proposição abaixo classifica todas as relações de congruência a partir dos ideais de um anel.

Proposição 5.3 (Relações de congruência vs ideais). Seja A um anel, $\mathcal{R}(A)$ o conjunto de todas as relações de congruência em A e $\mathcal{I}(A)$ o conjunto de todos os ideais de A . Então, existe uma bijeção entre $\mathcal{R}(A)$ e $\mathcal{I}(A)$ dada por $\sim \mapsto I_\sim = \{a \in A : a \sim 0\}$, cuja inversa se dá por $I \mapsto \sim_I = \{(a, b) \in A^2 : a - b \in I\}$.

Demonstração. Primeiro, vejamos que se \sim é uma relação de congruência, então I_\sim é um ideal de A .

- $0 \in I_\sim$, pois $0 \sim 0$.
- Se $a, b \in I_\sim$, então $a \sim 0$ e $b \sim 0$, logo $a + b \sim 0 + 0 = 0$, portanto, $a + b \in I_\sim$.
- Se $x \in A$ e $a \in I_\sim$, então $a \sim 0$ e $x \sim 0$, logo $ax \sim a0 = 0$ e $xa = 0a = 0$, portanto, $ax, xa \in I_\sim$.

Agora, vejamos que se I é um ideal, então \sim_I é uma relação de congruência. De fato, temos que, para todos $a, b, c, d \in A$:

- $a \sim_I a$ pois $a - a = 0 \in I$.
- Se $a \sim_I b$, então $a - b \in I$, logo $(-1)(a - b) = b - a \in I$, e, portanto, $b \sim_I a$.
- Se $a \sim_I b$ e $b \sim_I c$, então $a - b \in I$ e $b - c \in I$, logo, $(a - b) + (b - c) = a - c \in I$, portanto, $a \sim_I c$.
- Se $a \sim_I b$ e $c \sim_I d$, então $a - b \in I$ e $c - d \in I$, logo, $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in I$, portanto, $a + c \sim_I b + d$.
- Se $a \sim_I b$ e $c \sim_I d$, então $a - b \in I$ e $c - d \in I$, logo, $(a - b)c = ac - bc \in I$ e $b(c - d) = bc - bd \in I$, logo $(ac - bc) + (bc - bd) = ac - bd \in I$, portanto, $ac \sim_I bd$.

Se I é ideal, $I_{\sim_I} = I$, pois, para todo $a \in A$:

$$a \in I_{\sim_I} \Leftrightarrow a \sim_I 0 \Leftrightarrow a - 0 \in I \Leftrightarrow a \in I.$$

Finalmente, se \sim é relação de congruência, $\sim_{I_\sim} = \sim$, pois, para todos $a, b \in A$:

$$a \sim_{I_\sim} b \Leftrightarrow a - b \in I_\sim \Leftrightarrow a - b \sim 0 \Leftrightarrow a \sim b.$$

Justificando a última equivalência: se $a - b \sim 0$, como $b \sim b$, temos que $a - b + b \sim b$, ou seja, que $a \sim b$. Reciprocamente, se $a \sim b$, como $(-b) \sim (-b)$, segue que $a + (-b) \sim b + (-b)$, ou seja, que $a - b \sim 0$. \square

Exemplo 5.4. Como vimos, \mathbb{Z} é um domínio de ideais principais. Assim, todo ideal de \mathbb{Z} é da forma $n\mathbb{Z}$. Como para todo n , $n\mathbb{Z} = (-n)\mathbb{Z}$, temos que $\{n\mathbb{Z} : n \geq 0\}$ é a coleção de todos os ideais de \mathbb{Z} .

Quais são todas as relações de congruência em \mathbb{Z} ? Denotemos por \sim_n a relação $\sim_{n\mathbb{Z}}$.

Temos que \sim_0 corresponde à relação de igualdade, pois $a \sim_0 b$ se, e somente se, $a - b = 0$, ou seja, $a = b$. Note que a relação de igualdade sempre é uma relação de congruência, em qualquer anel.

Se $n \geq 1$, \sim_n corresponde à relação de congruência módulo n , pois $a \sim_n b$ se, e somente se, $a - b \in n\mathbb{Z}$, ou seja, $a - b = kn$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. \square

5.2 Quocientes

Como feito nos inteiros, podemos, ao invés de trabalhar com relações de congruência, encontrar anéis em que a congruência corresponda exatamente à igualdade.

Definição 5.5. Seja A um anel e \sim uma relação de congruência.

Lembremos que o conjunto das classes de equivalência de \sim é denotado por A/\sim , e este corresponde, portanto, à $\{[a]_\sim : a \in A\}$, onde $[a]_\sim = \{b \in A : b \sim a\}$ é a classe de equivalência de a com relação a \sim .

Define-se que $[a]_\sim + [b]_\sim = [a + b]_\sim$ e que $[a]_\sim [b]_\sim = [ab]_\sim$. Com essas operações, $(A/\sim, +, \cdot, [0]_\sim, [1]_\sim)$ é chamado de *anel quociente* de A por \sim .

Se I é um ideal define-se $A/I = A/\sim_I$, e este é munido das operações anteriores. Com essas operações, $A/I = A/\sim_I$ como descrito acima é chamado de *anel quociente* de A por I .

Define-se o *mapa quociente* de A em A/I se dá por $q : A \longrightarrow A/I$ dada por $q(a) = [a]_{\sim_I}$. \square

É claro que precisamos mostrar que as operações acima estão bem definidas e torna estes, de fato, anéis.

Lema 5.6. As operações dos anéis quocientes estão bem definidas e os tornam anéis. Além disso, o mapa quociente é um epimorfismo (homomorfismo sobrejetor).

Demonstração. Como as relações de congruência estão em bijeção com os ideais, podemos tratar de um quociente arbitrário da forma A/\sim .

Primeiro, vejamos que as operações estão bem definidas, ou seja, que se $a \sim b$ e $c \sim d$, então $[ac]_\sim = [bd]_\sim$ e $[a + b]_\sim = [b + d]_\sim$.

De fato, como \sim é uma relação de congruência e $a \sim b$ e $c \sim d$, temos que $ac \sim bc$ e $a + c \sim b + d$, logo, $[ac]_\sim = [bc]_\sim$ e $[a + c]_\sim = [b + d]_\sim$. Note ainda que como $[a]_\sim = q(a)$ e $q(1_A) = [1_A]_\sim$, assim, segue que, caso A/\sim seja anel, q é homomorfismo sobrejetor.

Agora devemos ver que A/\sim é um anel. Temos que:

- Comutatividade da soma: $q(a) + q(b) = q(a + b) = q(b + a) = q(b) + q(a)$.
- Associatividade da soma: $(q(a) + q(b)) + q(c) = q(a + b) + q(c) = q((a + b) + c) = q(a + (b + c)) = q(a) + q(b + c) = q(a) + (q(b) + q(c))$.
- Neutro da soma: $q(0) + q(a) = q(0 + a) = q(a)$.
- Opostos: $q(a) + q(-a) = q(a + (-a)) = q(0) = 0$.
- Associatividade do produto: $(q(a)q(b))q(c) = q(ab)q(c) = q((ab)c) = q(a(bc)) = q(a)q(bc) = q(a)(q(b)q(c))$.
- Neutro do produto: $q(1)q(a) = q(1a) = q(a)$, e $q(a)q(1) = q(a1) = q(a)$.
- Distributividade: $q(a)(q(b) + q(c)) = q(a)q(b + c) = q(a(b + c)) = q(ab + ac) = q(ab) + q(ac) = q(a)q(b) + q(a)q(c)$.
- Distributividade II: $(q(a) + q(b))q(c) = q(a + b)q(c) = q((a + b)c) = q(ac + bc) = q(ac) + q(bc) = q(a)q(c) + q(b)q(c)$.

\square

Algumas propriedades particulares do quociente:

Lema 5.7 (Propriedades do quociente). Na notação acima:

- a) $\ker q = I$.
- b) $q(a) = a + I = \{a + x : x \in I\}$ para todo $a \in A$.
- c) Se A é anel comutativo, A/I também é.

Demonstração. a) Temos que $\ker q = \{a \in A : q(a) = q(0)\} = \{a \in A : a \sim_I 0\} = \{a \in A : a \in I\} = I$.

b) Temos que $q(a) = [a]_{\sim_I} = \{b \in A : b \sim_I a\} = \{b \in A : b - a \in I\} = \{a + x : x \in I\}$ pois se $b - a \in I$ se, e somente se $a - b = x$ para algum $x \in I$.

c) Se A é comutativo, então $A/I = \text{ran } q$ também é, pois q é homomorfismo de anéis. \square

Em particular, temos:

Corolário 5.8. Todo ideal é o núcleo de algum homomorfismo.

5.3 Teoremas do isomorfismo

Os teoremas do homomorfismo dizem que certos homomorfismos “fatoram” para quocientes.

Teorema 5.9 (Teorema do homomorfismo). Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis e J um ideal tal que $J \subseteq \ker f$. Então, existe um único homomorfismo de anéis $\bar{f} : A/J \rightarrow R$ tal que $\bar{f} \circ q = f$, onde $q : A \rightarrow A/J$ é o mapa quociente canônico dado por $q(a) = a + J$.

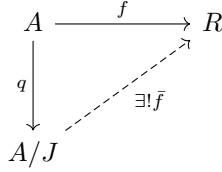


Figura 5.1: Teorema do homomorfismo.

Demonstração. Definimos $\bar{f} : A/J \rightarrow R$ por $\bar{f}(a + J) = f(a)$. Então, \bar{f} é bem definido, pois se $a + J = b + J$, então $a - b \in J \subseteq \ker f$, logo, $f(a - b) = 0_R$, ou seja, $f(a) = f(b)$.

Agora, vejamos que \bar{f} é um homomorfismo de anéis. De fato, para todo $a', b' \in A/J$, sendo $a' = a + J$ e $b' = b + J$, temos que:

- $\bar{f}(a' + b') = \bar{f}((a + J) + (b + J)) = \bar{f}((a + b) + J) = f(a + b) = f(a) + f(b) = \bar{f}(a + J) + \bar{f}(b + J)$.
- $\bar{f}(a'b') = \bar{f}((a + J)(b + J)) = \bar{f}(ab + J) = f(ab) = f(a)f(b) = \bar{f}(a + J)\bar{f}(b + J)$.
- $\bar{f}(1_{A/J}) = \bar{f}(1_A + J) = f(1_A) = 1_R$.

Temos que $\bar{f} \circ q = f$ por definição de \bar{f} . Para a unicidade, se $g : A/J \rightarrow R$ é um homomorfismo tal que $g \circ q = f$, fixe $a' \in A/J$. Fixe $a \in A$ tal que $a' = q(a)$. Então $g(a') = g(q(a)) = f(a) = \bar{f}(q(a)) = \bar{f}(a')$. Assim, $g = \bar{f}$. \square

Como consequência, temos o Primeiro Teorema do Isomorfismo:

Teorema 5.10 (Primeiro Teorema do Isomorfismo). Seja $f : A \rightarrow R$ um homomorfismo de anéis. Então, $A/\ker f$ é isomorfo a $\text{ran } f$. Mais especificamente, existe um único homomorfismo $\phi : A/\ker f \rightarrow R$ tal que $q \circ \phi = f$, onde q é o mapa quociente, e este homomorfismo é necessariamente um isomorfismo.

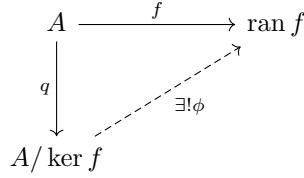


Figura 5.2: Primeiro Teorema do Isomorfismo.

Demonstração. Pelo Teorema do Homomorfismo, existe um único homomorfismo $\bar{\phi} : A/\ker f \rightarrow \text{ran } f$ tal que $\bar{\phi} \circ q = f$, onde $q : A \rightarrow A/\ker f$ é o mapa quociente canônico dado por $q(a) = a + \ker f$.

Temos que $\bar{\phi}$ é sobrejetor: dado $b \in \text{ran } f$, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Logo, $b = f(a) = \bar{\phi}(q(a))$, assim, $b \in \text{ran } \bar{\phi}$.

Agora vejamos que $\bar{\phi}$ é injetor. Suponha que $y \in A/\ker f$ é tal que $\bar{\phi}(y) = 0$. Como q é sobrejetor, tome $a \in A$ tal que $y = q(a)$. Assim, $0 = \bar{\phi}(y) = \bar{\phi} \circ q(a) = f(a)$, logo, $a \in \ker f$. Como $q : A \rightarrow A/\ker f$ é o mapa quociente e $a \in \ker f$, segue que $y = q(a) = 0_{A/\ker f}$. Logo, $\ker \bar{\phi} = \{0\}$, ou seja, $\bar{\phi}$ é injetor. \square

Do primeiro Teorema do Isomorfismo, decorre o segundo Teorema do Isomorfismo. Para enuncia-lo, lembremos que se B, C são subconjuntos de um grupo abeliano A , então $B + C = \{b + c : b \in B, c \in C\}$.

Lema 5.11. Se A é um anel, B um subanel de A e I um ideal de A contido em B , então para todo $b \in B$, a classe de equivalência $[b]_I$ é a mesma tomando como ambiente tanto o anel B como o anel A .

Assim, $B/I \subseteq A/I$.

Além disso, sendo $q : A \rightarrow A/I$ o mapa quociente e $q' : B \rightarrow B/I$ o mapa quociente, temos que $q' = q|_B$.

Demonstração. Fixe b . Devemos ver que $\{a \in A : a - b \in I\} = \{a \in B : a - b \in I\}$.

Assim, basta ver que se $a \in A$ e $a - b \in I$, então $a \in B$. Ora, $a = (a - b) + b$. Como $a - b \in I \subseteq B$ e $b \in B$, temos que $a \in B$.

Note que o lado esquerdo da igualdade é $q(b)$ e o direito é $q'(b)$, assim, segue a tese. \square

Teorema 5.12 (Segundo Teorema do Isomorfismo). Sejam A um anel, B um subanel de A e I um ideal de A . Então:

- a) $I \cap B$ é um ideal de B .
- b) $I + B$ é um subanel de A .
- c) $\frac{I + B}{I} \cong \frac{B}{I \cap B}$.

Demonstração. Primeiro, verifiquemos que $I + B$ é um subanel de A .

Temos que $1 = 0 + 1 \in I + B$.

Se $x, y \in I + B$, então $x = a_1 + b_1$ e $y = a_2 + b_2$, onde $a_1, a_2 \in I$ e $b_1, b_2 \in B$. Segue que $a_1 - a_2 \in I$ e $b_1 - b_2 \in B$, logo, $x - y = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) \in I + B$.

Além disso, $xy = (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2$. Temos que $a_1a_2 \in I$, $a_1b_2 \in I$, $b_1a_2 \in I$ e $b_1b_2 \in B$, logo, $xy \in I + B$. Assim, $I + B$ é um subanel de A .

Agora considere o mapa $q : I + B \rightarrow \frac{I+B}{I}$ dado por $q(x) = x + I$. Seja $f = q|_B : B \rightarrow \frac{I+B}{I}$ o homomorfismo restrito de q em B .

Pelo primeiro Teorema do Isomorfismo, $B/\ker f \cong \text{ran } f$. Veremos que $\text{ran } f = I + B/I$ e $\ker f = I \cap B$, o que completa a prova.

Temos que $\text{ran } f = \frac{I+B}{I}$ pelo lema anterior, pois $I \subseteq B \subseteq I + B$.

Calculemos $\ker f$. Ora, se $x \in B$, temos que $f(x) = 0$ se, e somente se, $q(x) = 0$ se, e somente se $x \in I$. Como $x \in B$, isso é equivalente à $x \in I \cap B$, o que completa a prova. \square

Finalmente, temos o Terceiro Teorema do Isomorfismo.

Teorema 5.13 (Terceiro Teorema do Isomorfismo). Sejam A um anel, B um subanel de A e $I \subseteq J \subseteq B$ ideais. Seja $q : A \rightarrow A/I$ a projeção natural. Então $J/I = \{q(a) : a \in J\}$ é um ideal de A/I , e:

$$(B/I)/(J/I) \cong B/J.$$

Demonstração. Seja $p : B \rightarrow B/J$ o mapa quociente dado por $p(b) = b + J$ para todo $b \in B$. Seja $q' = q|_B : B \rightarrow A/I$ o mapa quociente para B/I .

Temos que $\ker p = B \cap J = J$ e $I \subseteq J$. Assim, pelo Teorema do Homomorfismo, existe $\bar{p} : B \rightarrow B/J$ homomorfismo tal que $\bar{p} \circ q' = p$.

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{p} & B/J \\ q' \downarrow & \nearrow \bar{p} & \\ A/I & & \\ \downarrow & \nearrow \phi & \\ \frac{A/I}{\ker \bar{p}} & & \end{array}$$

Pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, $(B/J)/\ker \bar{p} \cong \text{ran } \bar{p}$. Calcularemos $\text{ran } \bar{p}$ e $\ker \bar{p}$, o que concluirá a prova.

Temos que, para $\bar{p} \circ q' = p$. Como q' e p são sobrejetoras, temos:

$$\text{ran } \bar{p} = \{p(x) : x \in A/I\} = \{\bar{p}(q(b)) : b \in B\} = \{p(b) : b \in B\} = \text{ran } p = B/J.$$

Agora calcularemos $\ker \bar{p}$. Fixe $x \in A/I$. Existe $b \in B$ tal que $x = q(b)$. Se $x \in \ker \bar{p}$, então $0 = \bar{p}(x) = \bar{p}(q(b)) = p(b) = b + J$, logo, $b \in J$, e, portanto, $x = q(b) \in J/I$. Reciprocamente, se $x \in J/I$, então $x = q(b)$ para algum $b \in J$, logo, $p(b) = 0$, e, portanto, $p(x) = \bar{p}(q'(b)) = p(b) = 0$. Assim, $x \in \ker \bar{p}$.

Assim, temos que $\ker \bar{p} = J/I$, e este último é um ideal, pois núcleos de homomorfismos são ideais. \square

No terceiro teorema do isomorfismo, vimos que se $I \subseteq J \subseteq A$, então J/I é um ideal de A/I . Quem são os ideais de um quociente? O teorema a seguir mostra que todos são dessa forma.

Teorema 5.14 (Teorema da correspondência). Seja A é um anel e I um ideal de A . Considere a função $\phi : \{J \subseteq A : I \subseteq J \text{ e } J \text{ é ideal de } A\} \rightarrow \{K \subseteq A/I : K \text{ é ideal de } A/I\}$ dada por:

$$\phi(J) = J/I.$$

Então ϕ é uma bijeção entre os ideais de A que contêm I e os ideais de A/I . Além disso, ϕ é um isomorfismo de ordem, ou seja, se J_1, J_2 são ideais e $I \subseteq J_1, I \subseteq J_2 \subseteq A$, então $\phi(J_1) \subseteq \phi(J_2)$ se, e somente se $J_1 \subseteq J_2$.

Demonstração. Pelo Terceiro Teorema do Isomorfismo, o contradomínio de ϕ está correto. Pela definição de J/I , é claro que ϕ é uma função crescente (se $J_1 \subseteq J_2$, então $J_1/I \subseteq J_2/I$).

Agora, seja $\psi : \{K \subseteq A/I : K \text{ é ideal de } A/I\} \rightarrow \{J \subseteq A : I \subseteq J \text{ e } J \text{ é ideal de } A\}$ dada por $\psi(K) = q^{-1}[K]$, onde $q : A \rightarrow A/I$ é o mapa quociente dado por $q(a) = a + I$.

Como q é um homomorfismo e ideais são preservados por imagens inversas de homomorfismos, segue que cada $\psi(K)$ é um ideal de A . Além disso, $\psi(K)$ contém I , já que $\ker q = q^{-1}(0) = I \subseteq \psi(K)$. Finalmente, pela definição de pré-imagem, ψ também preserva a ordem.

Agora veremos que ϕ, ψ são isomorfismos inversos, o que completará a prova.

Dado um ideal J de A que contém I , temos que $\psi(\phi(J)) = \psi(J/I) = \{a \in A : q(a) \in J/I\}$. Afirmamos que esse conjunto é J . Com efeito, se $a \in J$, temos que $a \in A$ e $q(a) \in J/I$. Reciprocamente, se $a \in A$ e $q(a) \in J/I$, existe $b \in J$ tal que $q(a) = q(b)$. Assim, $b \in J$ e $a - b \in I \subseteq J$, logo, $a = (a - b) + b \in J$.

Agora, fixe um ideal K de A/I .

Veremos que $\phi(\psi(K)) = K$.

Temos que $\phi(\psi(K)) = \phi(q^{-1}[K]) = \phi(\{a \in A : q(a) \in K\}) = \{q(a) : a \in A \text{ e } q(a) \in K\}$. É imediato que este último é K , o que completa a prova. \square

Capítulo 6

Domínios de Integridade

Neste capítulo, exploraremos com mais detalhes os domínios de integridade e a teoria que nasce deles.

6.1 Relações entre corpos e domínios

Conforme visto, todo corpo é um domínio de integridade, e a recíproca não é verdadeira (sendo \mathbb{Z} um contra-exemplo).

A seguir, apresentaremos algumas relações entre corpos e domínios.

Proposição 6.1. Todo domínio de integridade finito é um corpo.

Demonstração. Seja R um domínio de integridade finito. Fixe $a \in R \setminus \{0\}$. Veremos que a é invertível.

Considere $\phi : R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}$ dado por $\phi(x) = ax$.

Como R é um domínio, para todo $x \in R \setminus \{0\}$, temos $ax \neq 0$, logo, ϕ está bem definida.

ϕ é uma função injetora: se $\phi(x) = \phi(y)$, então $ax = ay$. Logo, $a(x - y) = 0$. Como $a \neq 0$ e R é um domínio, segue que $x - y = 0$, ou seja, $x = y$.

Como $R \setminus \{0\}$ é finito e $\phi : R \setminus \{0\} \rightarrow R \setminus \{0\}$ é injetora, segue que ϕ é sobrejetora. Em particular, existe $x \in R$ tal que $ax = \phi(x) = 1$. Logo, a é invertível. \square

Portanto, restrito aos anéis finitos, o estudo dos corpos e domínios colapsa em um único estudo.

Outra relação importante é a que segue:

Proposição 6.2. Seja R um anel comutativo e I um ideal próprio de R . São equivalentes:

- (i) R/I é um corpo;
- (ii) I é maximal.

Demonstração. Seja $q : R \rightarrow R/I$ o mapa quociente.

(i) \Rightarrow (ii): Suponha que R/I é um corpo.

I é um ideal próprio, caso contrário, teríamos que R/I é o anel trivial, que não é um corpo.

Agora suponha que J é um ideal que contém I propriamente. Veremos que $J = R$. Seja $a \in J \setminus I$. Como $a \notin I$, temos que $q(a) \neq 0$. Como R/I é um corpo, existe $b \in R$ tal que

$q(a)q(b) = 1$. Isso implica que existe $x \in I$ tal que $ab + x = 1$. Como $a \in J$ e $x \in I \subseteq J$, segue que $1 = ab + x \in J$, e, portanto, $J = R$.

(ii) \Rightarrow (i): Suponha que I é maximal. Vejamos que R/I é um corpo.

Seja $x \in R \setminus I$ não nulo. Tome $a \in R$ tal que $q(a) = x$. Temos que $a \notin I$. Como $I + \langle a \rangle$ é um ideal que contém I propriamente, segue que $I + \langle a \rangle = R$. Logo, existe $b \in R$ e $c \in I$ tais que $c + ba = 1$. Logo, $q(1) = q(c) + q(ba) = 0 + q(b)q(a) = q(b)x$. Portanto, x é invertível. \square

Será que podemos caracterizar, de forma análoga, ser um domínio? A resposta é positiva.

Proposição 6.3. Seja R um anel comutativo e I um ideal próprio de R . São equivalentes:

(i) R/I é um domínio.

(ii) I é primo.

Demonstração. Seja $q : R \rightarrow R/I$ o mapa quociente.

(i) \Rightarrow (ii): Suponha que R/I é um domínio.

I é um ideal próprio, caso contrário, teríamos que R/I é o anel trivial, que não é um domínio.

Suponha que $a, b \in R$ tais que $ab \in I$. Temos que $q(a)q(b) = q(ab) = 0$. Como R/I é um domínio, temos que $q(a) = 0$ ou $q(b) = 0$, ou seja, que $a \in I$ ou $b \in I$.

Logo, I é primo.

(ii) \Rightarrow (i): Suponha que I é primo. Vejamos que R/I é um domínio.

Sejam $x, y \in R$ tais que $q(x)q(y) = 0$. Devemos ver que $q(x) = 0$ ou $q(y) = 0$. Como $q(xy) = q(x)q(y) = 0$, segue que $xy \in I$. Então, $x \in I$ ou $y \in I$, ou seja, $q(x) = 0$ ou $q(y) = 0$. \square

Como consequência, temos:

Corolário 6.4. Seja R um anel comutativo finito e I um ideal de R . Então I é primo se, e somente se I é maximal.

Demonstração. Temos que R/I é finito, e, portanto, é um corpo se, e somente se for um domínio. Portanto:

$$I \text{ é primo} \Leftrightarrow R/I \text{ é um domínio} \Leftrightarrow R/I \text{ é um corpo} \Leftrightarrow I \text{ é maximal}$$

\square

Capítulo 7

Produtos de anéis

Neste capítulo, estudaremos o produto direto de anéis.

7.1 Produtos de dois anéis

Dados anéis R e S , é possível dar à $R \times S$ uma estrutura natural de anel.

Definição 7.1 (Produto Direto de dois anéis). Sejam R, S anéis. O produto direto de R e S é o conjunto $R \times S$ munido das operações “ponto à ponto”: dados $a = (a_1, a_2) \in R \times S$ e $b = (b_1, b_2) \in R \times S$, temos:

$$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$$

$$a \cdot b = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2)$$

$$0 = (0_R, 0_S)$$

$$1 = (1_R, 1_S)$$

□

Exemplo: Seja $R = \mathbb{Z}_3$ e $S = \mathbb{Z}_4$. Então $(2, 2) \in R \times S$ e $(1, 2) \in R \times S$. Temos:

$$(2, 2) + (1, 2) = (2 + 1, 2 + 2) = (0, 0).$$

$$(2, 2) \cdot (2, 2) = (2 \cdot 2, 2 \cdot 2) = (1, 0).$$

Com as operações explicitadas, o produto de dois anéis é, de fato, um anel.

Deixaremos a prova deste fato como exercício (ver Exercício 7.1), já que na seção seguinte provaremos um resultado mais geral.

7.2 Produtos de uma família de anéis

Definição 7.2 (Produtos de anéis). Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família de anéis, onde cada R_i tem as operações $+_i, \cdot_i$ e constantes $0_i, 1_i$.

O produto (direto) de $(R_i)_{i \in I}$ é o conjunto $\prod_{i \in I} R_i$ munido das operações “ponto à ponto”: dados $a = (a_i : i \in I), b = (b_i : i \in I)$ em $\prod_{i \in I} R_i$:

$$a + b = (a_i : i \in I) + (b_i : i \in I) = (a_i +_i b_i : i \in I) = (a_i +_i b_i)_{i \in I}$$

$$a \cdot b = (a_i : i \in I) \cdot (b_i : i \in I) = (a_i \cdot_i b_i : i \in I) = (a_i \cdot_i b_i)_{i \in I}$$

□

Lema 7.3 (O produto de anéis está bem definido). Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família de anéis. Então seu produto direto $\prod_{i \in I} R_i$ é um anel com $0 = (0_i : i \in I)$ e $1 = (1_i : i \in I)$.

Demonstração. Sejam $a = (a_i : i \in I)$, $b = (b_i : i \in I)$ e $c = (c_i : i \in I)$ em $\prod_{i \in I} R_i$.

- **Associatividade da soma:** $(a + b) + c = (a_i +_i b_i)_{i \in I} + c = ((a_i +_i b_i) +_i c_i)_{i \in I} = (a_i +_i (b_i +_i c_i))_{i \in I} = a + (b + c)$
- **Associatividade do produto:** Análogo.
- **Comutatividade da soma:** $a + b = (a_i +_i b_i)_{i \in I} = (b_i +_i a_i)_{i \in I} = b + a$
- **Neutro da soma:** $a + 0 = (a_i +_i 0_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$
- **Inverso da soma:** Dado $a = (a_i)_{i \in I}$, considere $-a = (-a_i)_{i \in I}$. Então $a + (-a) = (a_i +_i (-a_i))_{i \in I} = (0_i)_{i \in I} = 0$.
- **Distributividade:** $a \cdot (b + c) = (a_i \cdot_i (b_i +_i c_i))_{i \in I} = (a_i \cdot_i b_i + a_i \cdot_i c_i)_{i \in I} = a \cdot b + a \cdot c$.
- **Distributividade II:** $(a + b) \cdot c = ((a_i +_i b_i) \cdot_i c_i)_{i \in I} = (a_i \cdot_i c_i + b_i \cdot_i c_i)_{i \in I} = a \cdot c + b \cdot c$.
- **Neutro do produto:** $a \cdot 1 = (a_i \cdot_i 1_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$ e $1 \cdot a = (1_i \cdot_i a_i)_{i \in I} = (a_i)_{i \in I} = a$.

□

Definição 7.4 (Os mapas de projeção). Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família de anéis e seja $P = \prod_{i \in I} R_i$. Para cada $i \in I$, o mapa de projeção $\pi_i : P \rightarrow R_i$ é dado por $\pi_i(a) = a_i$.

Escrevendo de outra forma, $\pi_i((a_j : j \in I)) = a_i$.

□

Lema 7.5 (Os mapas de projeção são homomorfismos). Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família de anéis e seja $P = \prod_{i \in I} R_i$. Para cada $i \in I$, o mapa de projeção $\pi_i : P \rightarrow R_i$ é um homomorfismo de anéis.

Demonstração. Sejam $a = (a_j : j \in I)$, $b = (b_j : j \in I)$ em P . Então:

- $\pi_i(a + b) = \pi_i((a_j + b_j)_{j \in I}) = a_i + b_i = \pi_i(a) + \pi_i(b)$
- $\pi_i(a \cdot b) = \pi_i((a_j \cdot b_j)_{j \in I}) = a_i \cdot b_i = \pi_i(a) \cdot \pi_i(b)$
- $\pi_i(1_P) = \pi_i((1_j)_{j \in I}) = 1_i$

□

7.3 A propriedade universal do produto direto de anéis

Teorema 7.6 (Propriedade universal do produto direto de anéis). Seja $(R_i)_{i \in I}$ uma família de anéis e seja $P = \prod_{i \in I} R_i$ seu produto direto. Então, para cada anel S e cada família de homomorfismos de anéis $f_i : R_i \rightarrow S$, existe um único homomorfismo de anéis $g : P \rightarrow S$ tal que $\pi_i \circ g = f_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & S & \\
 f_i \swarrow & & \downarrow \exists! g \\
 R_i & \xleftarrow{\pi_i} & P
 \end{array}$$

Além disso, tal propriedade caracteriza o produto direto. Ou seja, para quaisquer que sejam um anel P' e uma família de homomorfismos $(p_i : P' \rightarrow R_i)_{i \in I}$, se para todo anel S e toda família de homomorfismos de anéis $f_i : R_i \rightarrow S$ existir um único homomorfismo de anéis $f : P' \rightarrow S$ tal que $p_i \circ f = f_i$ para todo $i \in I$, então existe um único isomorfismo de anéis $\phi : P' \rightarrow P$ tal que $\pi_i \circ \phi = p_i$ para todo $i \in I$.

Demonstração. Seja $P = \prod_{i \in I} R_i$ e seja S um anel comutativo. Para cada $i \in I$, considere $f_i : S \rightarrow R_i$ um homomorfismo de anéis. Defina $g : S \rightarrow P$ tal que, dado $s \in S$:

$$g(s) = (f_i(s))_{i \in I}.$$

Então, para cada $i \in I$, $\pi_i \circ g(s) = \pi_i(f_j(s))_{j \in I} = f_i(s)$, ou seja, $\pi_i \circ g = f_i$. Vejamos que g é homomorfismo de anéis. Dados $s, t \in S$, temos:

- $g(s + t) = (f_i(s + t))_{i \in I} = (f_i(s) + f_i(t))_{i \in I} = (f_i(s))_{i \in I} + (f_i(t))_{i \in I} = g(s) + g(t)$.
- $g(s \cdot t) = (f_i(s \cdot t))_{i \in I} = (f_i(s) \cdot f_i(t))_{i \in I} = (f_i(s))_{i \in I} \cdot (f_i(t))_{i \in I} = g(s) \cdot g(t)$.
- $g(1_S) = (f_i(1_S))_{i \in I} = (1_i)_{i \in I} = 1_P$.

Vejamos que g é único. Se $\bar{g} : S \rightarrow P$ é um homomorfismo de anéis tal que $\pi_i \circ \bar{g} = f_i$, fixe $s \in S$. Devemos ver que $\bar{g}(s) = g(s)$. Como $\bar{g}(s) \in P$, escreva $\bar{g}(s) = (b_i)_{i \in I}$, onde $b_i \in R_i$ para cada $i \in I$. Temos, que, para cada $j \in I$:

$$b_j = \pi_j((b_i)_{i \in I}) = \pi_j \circ \bar{g}(s) = f_j(s).$$

Assim, $f_j(s) = b_j$ para todo $j \in I$. Daí, $\bar{g}(s) = (b_j)_{j \in I} = (f_j(s))_{j \in I} = g(s)$. Portanto, $g = \bar{g}$.

Agora suponha que P' e $(p_i : P' \rightarrow R_i)_{i \in I}$ são como no enunciado.

Aplicando a propriedade de P para $(\pi_i : i \in I)$, existe um homomorfismo de anéis $\phi : P' \rightarrow P$ tal que $\pi_i \circ \phi = p_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
 & P' & \\
 p_i \swarrow & & \downarrow \exists! \phi \\
 R_i & \xleftarrow{\pi_i} & P
 \end{array}$$

Nosso objetivo é mostrar que ϕ é isomorfismo. Construiremos uma inversa. Como ele é o único homomorfismo tal que $\pi_i \circ \phi = p_i$ para todo $i \in I$, e como todo isomorfismo é homomorfismo, isso conclui a prova.

Aplicando a propriedade de P' para $(\pi_i : i \in I)$, existe um homomorfismo de anéis $\psi : P \rightarrow P'$ tal que $p_i \circ \psi = \pi_i$ para todo $i \in I$.

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
\pi_i \swarrow & & \downarrow \exists! \psi \\
R_i & \xleftarrow{p_i} & P'
\end{array}$$

Tanto os mapas $\psi \circ \phi$ quanto a identidade $\text{id}_{P'} : P' \rightarrow P'$ são homomorfismos de anéis que satisfazem o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc}
& P' & \\
p_i \swarrow & & \downarrow \psi \circ \phi, \text{id}_{P'} \\
R_i & \xleftarrow{p_i} & P'
\end{array}$$

Pois para todo $i \in I$, $p_i \circ \text{id}_{P'} = p_i$ e $p_i \circ \psi \circ \phi = \pi_i \circ \phi = p_i$. Como a propriedade de P' diz que existe um *único* homomorfismo que satisfaz esse diagrama, segue que $\psi \circ \phi = \text{id}_{P'}$.

Analogamente, tanto os mapas $\phi \circ \psi$ quanto a identidade $\text{id}_P : P \rightarrow P$ são homomorfismos de anéis que satisfazem o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
& P & \\
\pi_i \swarrow & & \downarrow \phi \circ \psi, \text{id}_P \\
R_i & \xleftarrow{\pi_i} & P
\end{array}$$

Pois $\pi_i \circ \text{id}_P = \pi_i$ e $\pi_i \circ \phi \circ \psi = p_i \circ \psi = \pi_i$. Como a propriedade de P diz que existe um *único* homomorfismo que satisfaz esse diagrama, segue que $\phi \circ \psi = \text{id}_P$.

Assim, ψ e ϕ são isomorfismos inversos. Em particular, ϕ é isomorfismo, o que completa a prova. \square

7.4 Exercícios

Exercício 7.1. Sejam A, B anéis. Prove diretamente que o produto direto $A \times B$ é um anel. A seguir, prova que as projeções $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ e $\pi_2 : A \times B \rightarrow B$ dadas por $\pi_1(a, b) = a$ e $\pi_2(a, b) = b$ são homomorfismos de anéis.

Exercício 7.2. Na notação do exercício anterior, prove diretamente que $A \times S$, com as projeções (π_1, π_2) satisfazem a propriedade universal do produto direto, ou seja, mostre que:

Para cada anel S e cada par de homomorfismos de anéis $h_1 : S \rightarrow A$ e $h_2 : S \rightarrow B$, existe um único homomorfismo de anéis $g : S \rightarrow A \times B$ tal que $\pi_1 \circ g = h_1$ e $\pi_2 \circ g = h_2$.

Exercício 7.3. Decida quais dos seguintes conjuntos são subanel do anel produto $\mathbb{R}^{[0,1]}$, onde $[0, 1]$ é o intervalo fechado dos números reais entre 0 e 1.

- O conjunto de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(q) = 0$ para todo $q \in [0, 1]$.
- O conjunto de todas as funções polinomiais $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- c) O conjunto de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem apenas um número finito de zeros, juntamente com a função zero.
- d) O conjunto de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ que possuem um número infinito de zeros.
- e) O conjunto de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
- f) O conjunto de todas as combinações lineares racionais das funções $\sin(nx)$ e $\cos(mx)$, onde m, n são inteiros não negativos.
- g) O conjunto de todas as funções $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $f(q) = 0$ para todo $q \in [0, 1]$ e $f(0) = 1$.

