LÓGICA MATEMÁTICA

NOÇÕES DE LÓGICA

PROF. UJEVERSON TAVARES

Lógica

Palavra derivada do vocábulo grego "logos", que significa "ideia", "razão" e "regularidade".

Emprega-se para:

- Designar o conjunto de regras que representa o processo de pensar.

É a ciência das regras de raciocínio e de suas formas.

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

É qualquer frase afirmativa da qual se pode decidir verdade ou falso, mas não ambos. As proposições simples são denotadas p , q , r ,...

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

a) Brasilia é a capital do Brasil.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

b) Brasil e Chile são países limítrofes.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

c) O cubo de 2 é impar.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

d) Todo número inteiro é múltiplo de 1.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

e) Algum número inteiro é divisor de 2.

EXEMPLOS:

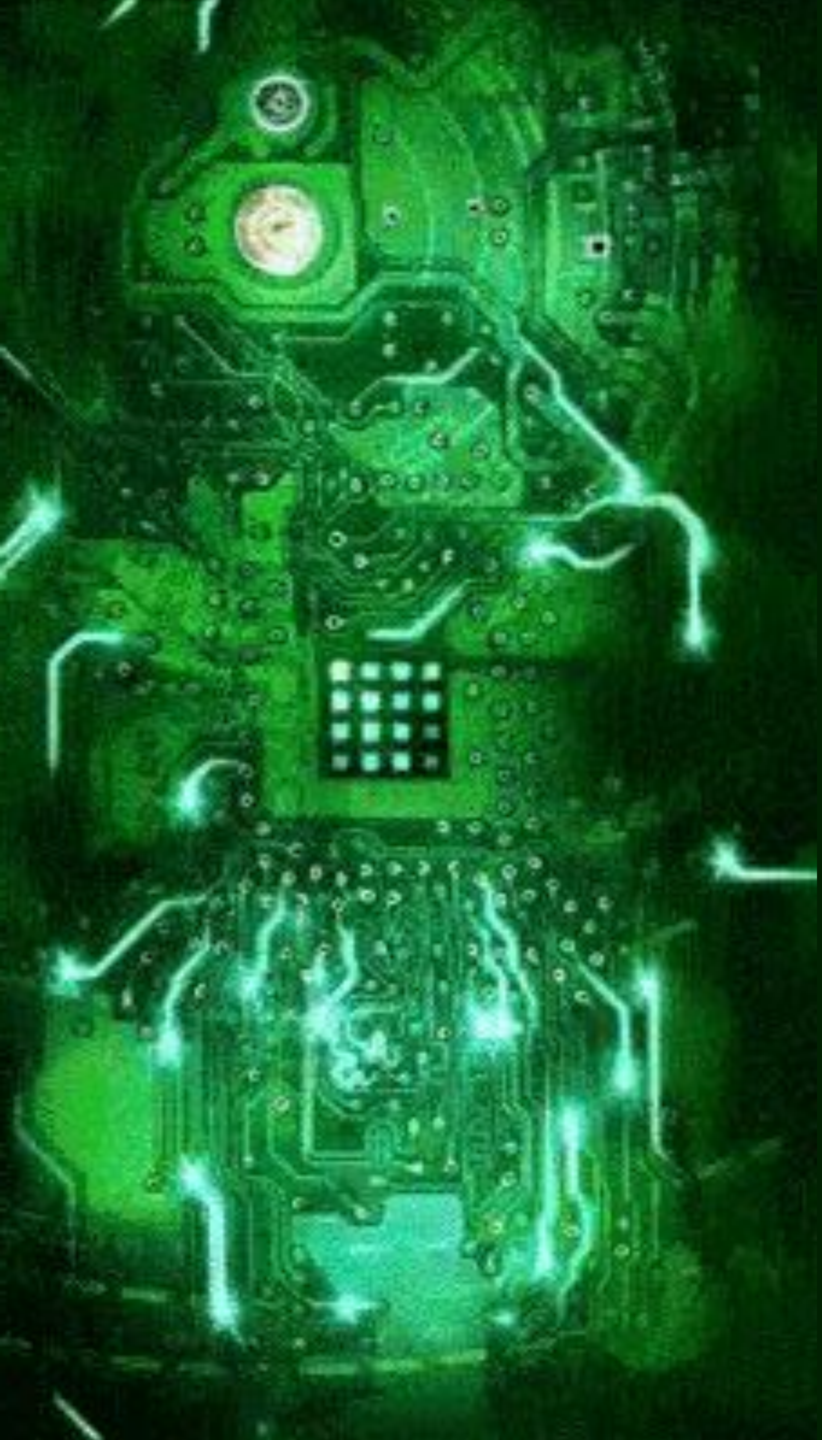
Ujeverson Tavares
Professor

Proposição

f) Para qualquer par de números reais x , y , vale sempre que $2x + y = 2y + x$.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor



Conectivos Lógicos

Os conectivos lógicos geram proposições compostas, aquelas que são combinações de proposições simples.

Ujeverson Tavares
Professor

Conectivos Lógicos

- NEGAÇÃO

¬p ou ~p

Toma o valor de verdade contrário de p.

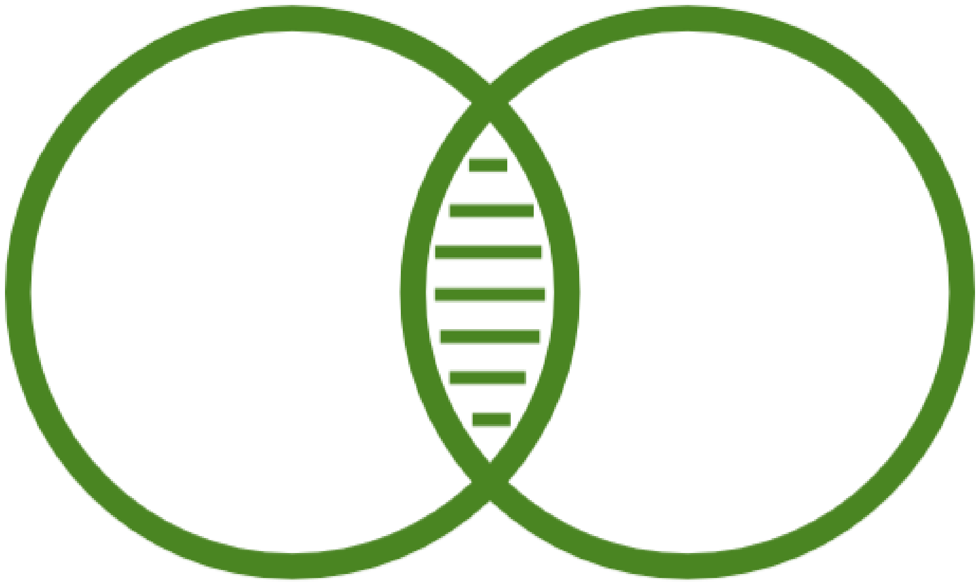
p	~p
V	F
F	V

Tabela verdade

Conectivos Lógicos

- CONJUNÇÃO

p ∧ q (lê-se "p e q")



É verdade somente no caso em que p e q sejam verdadeiros.

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

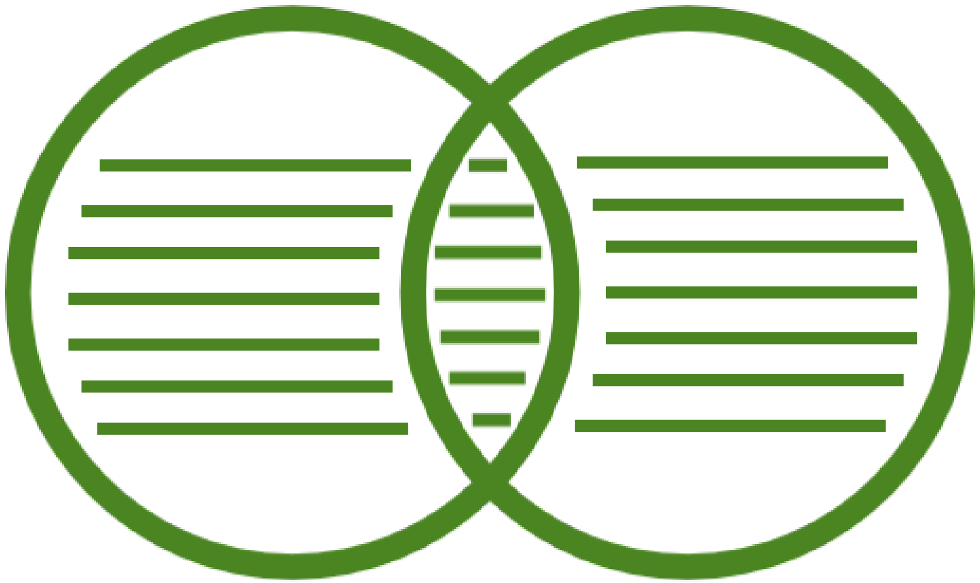
Conectivos Lógicos

- DISJUNÇÃO

$p \lor q$ (lê-se "p ou q")

É falso somente no caso em que p e q sejam falsos.

p	q	$p \lor q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F



Ujeverson Tavares
Professor

Conectivos Lógicos

- DISJUNÇÃO (ou exclusivo)

$p \underline{\vee} q$ (lê-se “p ou q”)

É falso somente no caso em que p e q tenham valores iguais.

p	q	$p \underline{\vee} q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ujeverson Tavares
Professor

DISJUNÇÃO (ou exclusivo)

– Imagine uma criança pedindo sorvete e bolo. O pai dá uma das duas alternativas. Se usarmos o conectivo ou exclusivo, a criança somente poderia escolher um dos dois. Se ela dissesse “os dois”, o pai diria não.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

– Usar matéria prima nacional ou importada.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

–Na escolha do cálculo de duas rotas.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

–Ujeverson é goianiense ou soteropolitano.

EXEMPLOS:

Ujeverson Tavares
Professor

Conectivos Lógicos

CONDIÇÃO OU CONDICIONAL

$p \rightarrow q$ (lê-se "se p então q")

É falso somente no caso em que p seja verdadeiro e q seja falso

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ujeverson Tavares
Professor

Conectivos Lógicos

BICONDIÇÃO OU BICONDICIONAL

$p \leftrightarrow q$ (lê-se "p se e somente se q")

É verdadeiro se p e q tem os mesmos valores verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ujeverson Tavares
Professor

LINGUAGEM E ALFABETO

FÓRMULAS.

Fórmula é uma proposição gerada pela concatenação de símbolos pertencentes ao alfabeto da lógica proposicional, definido inicialmente.

Ujeverson Tavares
Professor

LINGUAGEM E ALFABETO

Este alfabeto é infinito, constituído por:

- Símbolos verdade: V e F;
- Símbolos proposicionais: p, q, r, s, p1, p2, p3, etc;

Ujeverson Tavares
Professor

LINGUAGEM e ALFABETO

- Conectivos proposicionais: $\neg$ (não), $\vee$ (ou inclusivo), $\wedge$ (e), $\rightarrow$ (implica ou "se, então") e $\leftrightarrow$ (equivalência, bi-implicação ou "se e somente se"); e

- Símbolos de pontuação: "(" e ")".

Ujeverson Tavares
Professor

LINGUAGEM e ALFABETO

As fórmulas proposicionais são construídas, a partir do alfabeto proposicional, de acordo com as seguintes regras:

LINGUAGEM e ALFABETO

1. Todo símbolo verdade é uma fórmula;

2.Todo símbolo proposicional é uma fórmula;

3.Se P é uma fórmula, então a sua negação (¬P) também é uma fórmula;

LINGUAGEM e ALFABETO

4. Se P e Q são fórmulas, então:

   4.1. A disjunção de p e q ($p \vee q$) também é uma fórmula;

   4.2. A conjunção de p e q ($p \wedge q$) também é uma fórmula;

   4.3. A implicação de p em q ($p \rightarrow q$) também é uma fórmula;

LINGUAGEM e ALFABETO

Fórmulas Válidas

- $(p \vee q)$
- $((\neg r) \rightarrow x)$
- $((p \leftrightarrow (\neg y)) \vee (q \rightarrow (r \wedge v)))$

EXEMPLOS:

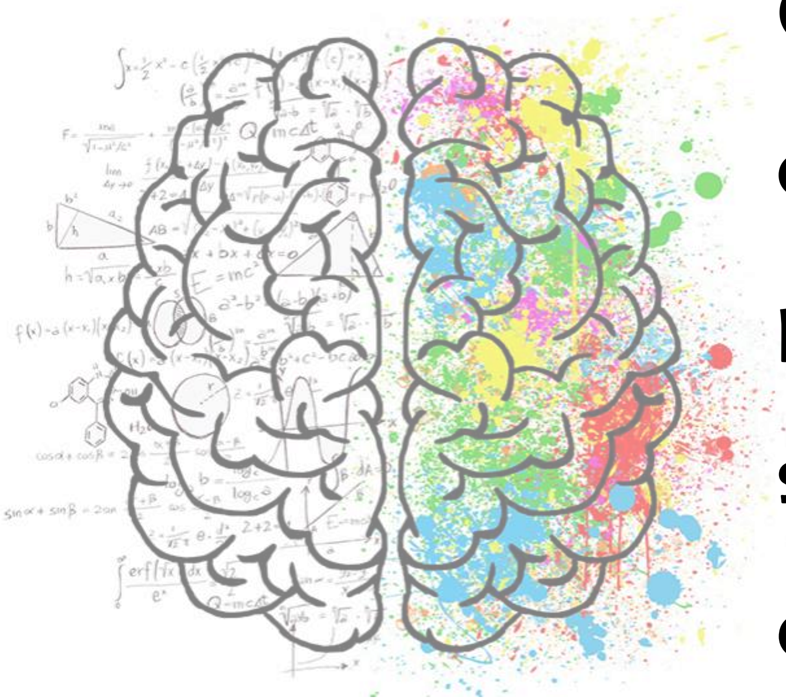
LINGUAGEM e ALFABETO

Fórmulas Inválidas

- pqr
- (r ∨ →)
- (F ∨∧ (↔ q p))

EXEMPLOS:

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS



Os símbolos de pontuação (parênteses), assim como na aritmética, são empregados para priorizar um “cálculo proposicional”. Esses símbolos podem ser omitidos quando isto não altera o significado da fórmula proposicional.

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

$((\neg(\neg p)) \rightarrow q) \equiv \neg\neg p \rightarrow q$

($\equiv$ símbolo de equivalente)

A fórmula $\neg(x \wedge y)$ não pode ser escrita sem parênteses: $\neg(x \wedge y) \neq \neg x \wedge y$.

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVO

Se em uma fórmula, os parênteses não são usados, o cálculo proposicional deve seguir a seguinte ordem de prioridade:

¬ (maior precedência)

∨ e ∧ (precedência intermediária)

→ e ↔ (menor precedência)

1º: ~

2º: ∧

3º: ∨

4º: →

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

$$p \vee q \rightarrow r \equiv (p \vee q) \rightarrow r$$

$$\neg p \wedge q \leftrightarrow r \equiv ((\neg p) \wedge q) \leftrightarrow r$$

EXEMPLOS:

EXERCÍCIOS

Usando logica proposicional, formalize as sentenças a seguir:

(1) Se o time joga bem, ganha o campeonato.

(2) Se o time não joga bem, o técnico é culpado.

(3) Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes.

EXERCÍCIOS

(4) Os torcedores não estão contentes.

(5) Logo, o técnico é culpado.

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

Primeiro, associamos a cada proposição um símbolo proposicional distinto:

p : “o time joga bem"

q : “o time ganha o campeonato"

r : “o técnico é culpado"

s : “os torcedores ficam contentes"

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

Em seguida, usando esses símbolos proposicionais, escrevemos as fórmulas correspondentes às sentenças do argumento:

(1) Se o time joga bem, ganha o campeonato. $p \rightarrow q$

(2) Se o time não joga bem, o técnico é culpado. $\sim p \rightarrow r$

PRECEDÊNCIA DOS CONECTIVOS

(3) Se o time ganha o campeonato, os torcedores ficam contentes. $q \rightarrow s$

(4) Os torcedores não estão contentes. $\sim s$

(5) Logo, o técnico é culpado. r

EXERCÍCIOS

Exercício 2: Ache o valor verdade das seguintes fórmulas para a valoração $v(A) = V$, $v(B) = F$, $v(C) = F$:

$$(A \rightarrow (B \vee \sim C))$$

Tautologias, Contradições e Equivalência.

Existem fórmulas onde todas as linhas da Tabela Verdade dão verdade. Elas são verdadeiras não importando os valores verdade que atribuímos aos seus símbolos proposicionais. Estas fórmulas são chamadas TAUTOLOGIAS.

Da mesma forma, existem fórmulas que são sempre falsas, independente dos valores verdade atribuídos aos seus símbolos proposicionais. Estas são chamadas CONTRADIÇÕES.

Existem fórmulas que, embora diferentes, têm tabelas verdade que coincidem linha a linha. Tais fórmulas são ditas EQUIVALENTES.

Exemplos:

a) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

b) $A \land \neg(A \lor B)$

c) $\neg(A \land B)$

d) $\neg A \lor \neg B$

Relação de implicação: Sejam p e q duas fórmulas. Então p *implica* q, denotado por:

$$p \Rightarrow q$$

se e somente se:

$p \to q$ é uma tautologia.

H e *G* apresentam o mesmo valor para qualquer interpretação então, **elas são equivalentes**.

A tabela abaixo apresenta algumas das equivalências clássicas encontradas na literatura:

Tabela 1 - Equivalências Clássicas ($H \Leftrightarrow G$)

Identificação	*Fórmula H*	*Fórmula G*
Dupla Negativa	$\neg(\neg E)$	E
Propriedades de Identidade	$E \vee False$	E
	$E \wedge True$	E
Propriedades Complementares	$E \vee \neg E$	$True$
	$E \wedge \neg E$	$False$
Leis de Morgan	$\neg(E \wedge R)$	$\neg E \vee \neg R$
	$\neg(E \vee R)$	$\neg E \wedge \neg R$
Contraposição	$E \rightarrow R$	$\neg R \rightarrow \neg E$

Propriedades de Substituição	$E \rightarrow R$	$\neg E \vee R$
	$E \leftrightarrow R$	$(E \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow E)$
Propriedades Comutativas	$E \vee R$	$R \vee E$
	$E \wedge R$	$R \wedge E$
Propriedades Associativas	$E \vee (R \vee S)$	$(E \vee R) \vee S$
	$E \wedge (R \wedge S)$	$(E \wedge R) \wedge S$
Propriedades Distributivas	$E \vee (R \wedge S)$	$(E \vee R) \wedge (E \vee S)$
	$E \wedge (R \vee S)$	$(E \wedge R) \vee (E \wedge S)$
Prova Condicional	$E \rightarrow (R \rightarrow S)$	$(E \wedge R) \rightarrow S$