Lista 02 - Vinicius Trindade - sem grupo

(1)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

posto = 2

$$C(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Coluna 2 e 3 são LI

$$R(A) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Linhas 1 e 2 são LI

$$N(A) = \left\{ x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$0x_1 + 1x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 1x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$
$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

$$\underbrace{x_1}_{\text{livre}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{x_2}_{0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \underbrace{x_3}_{0} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

(2)

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{bmatrix}_{3\times3}$$ $n=3$, $m=3$, $m=3$

$n=3$ pois são 3 linhas L1 e 3 colunas L1

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}_{2\times3}$$ $n=2$, $m=2$, $m=3$

$n=2$ pois são 2 linhas e 2 colunas L1

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$ $n=2$, $m=3$, $m=2$

$n=2$ pois são 2 colunas e 2 linhas L1

$$A_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$ $n=2$, $m=3$, $m=3$

$n=2$ pois são 2 linhas e 2 colunas L1

③ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$M = A - \lambda I$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

Autovalor $= 1$

$\det(M) = 0$

$(1-\lambda)^2 - 0 = 0$

$1 - 2\lambda + \lambda^2 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ → polinomio característico

$\lambda = 1$

$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$M = A - \lambda I$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

Autovalor $= 1$

$\det(M) = 0$

$(1-\lambda)^2 - 0 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ → polinomio característico

$\lambda = 1$

$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$M = AB - \lambda I$

$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix}$

Autovalores $= 2+\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$

$\det(M) = 0$

$\Delta = 16 - 4$

$(1-\lambda)(3-\lambda) - 2 = 0$

$\Delta = 12$

$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = 0$

polinomio característico → $\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0$

$\frac{4 \pm \sqrt{12}}{2}$

$\frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2}$ → $\lambda' = 2 + \sqrt{3}$

$\lambda'' = 2 - \sqrt{3}$

$$BA = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$M = BA - \lambda I$$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

autovalores: $2+\sqrt{3}$

$2-\sqrt{3}$

$\det(M) = 0$

$(3-\lambda)(1-\lambda) - 2 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \rightarrow$ polinomio característico

$\lambda' = 2+\sqrt{3}$

$\lambda'' = 2-\sqrt{3}$

a) Não

$\lambda A = 2$ $\lambda B = 1$ $\lambda AB = 2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$

$\lambda A \cdot \lambda B = 1$

$1 \neq 2+\sqrt{3}$ e $1 \neq 2-\sqrt{3}$

b) sim

$\lambda AB = 2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$

$\lambda BA = 2+\sqrt{3}$ e $2-\sqrt{3}$

$\lambda AB = \lambda BA$

④ Quando fazemos a transposta de A, a diagonal principal não se altera, ou seja, a diagonal principal de A é igual a diagonal principal de A^T. Com isso, o cálculo apresentado também não se altera, uma vez que a subtração de λI ocorre na diagonal de A e de A^T, e o cálculo do determinante também ocorre na diagonal. Como podemos observar no exemplo a seguir, onde A é uma matriz 2x2:

$$A = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad M = A - \lambda I = \begin{bmatrix} A-\lambda & B \\ C & D-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = (A-\lambda)(D-\lambda) - BC$$

$$A^T = \begin{bmatrix} A & C \\ B & D \end{bmatrix} \qquad M = A^T - \lambda I = \begin{bmatrix} A-\lambda & C \\ B & D-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\det(M) = (A-\lambda)(D-\lambda) - CB$$

Fonte: vídeos disponibilizados pelo professor