

# Lista 04 - Exercícios Teóricos Livro Alul - Sem grupo

## 1) 1ª Matriz centralizada $X_c$

- Média das colunas de  $X$ :

$$m = [67 \quad 81 \quad 69,8 \quad 75]$$

- Subtraímos  $m$  de cada linha de  $X$

$$X_c = \begin{bmatrix} 23 & -1 & -9,8 & 20 \\ -2 & -6 & 20,2 & -5 \\ -27 & 9 & -9,8 & -20 \\ 13 & -21 & -10,8 & 0 \\ -7 & 19 & 10,2 & 5 \end{bmatrix}$$

2ª Matriz de covariância de  $X$  é  $C = \frac{X_c^T X_c}{n-1}$  :

$$C = \begin{bmatrix} 370 & -165 & -53,25 & 243,75 \\ -165 & 230 & 55,25 & -18,75 \\ -53,25 & 55,25 & 205,2 & -12,5 \\ 243,75 & -18,75 & -12,5 & 212,5 \end{bmatrix}$$



②

Da SVD sabe-se que  $X_c = U \Sigma V^T$ , e da matriz de covariância usada na PCA sabe-se que  $C_x = \frac{X_c^T X_c}{n-1}$ .  
 Sabendo que  $C_x$  é simétrica, tem-se a decomposição espectral  $C_x = P D P^T$ , sendo  $P$  uma matriz ortogonal com os autovetores de  $C_x$  e  $D$  uma matriz diagonal com os autovalores de  $C_x$ . Assim, sabendo que  $U^T U = I$  e  $\Sigma^T = \Sigma$ , temos:

$$\begin{aligned} C_x &= \frac{X_c^T X_c}{n-1} \\ &= P D P^T \\ &= \frac{(U \Sigma V^T)^T U \Sigma V^T}{n-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P D P^T &= \frac{V \Sigma^T U^T U \Sigma V^T}{n-1} \\ &= V \Sigma^2 V^T \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

Sei que  $\frac{1}{n-1}$  é um escalar, podemos colocá-lo multiplicado em  $\Sigma^2$ :

$$P D P^T = V \Sigma^2 V^T$$

Nesta forma, temos uma relação entre a SVD e a PCA de  $X_c$  em que  $P = V$  e cada autovetor em  $D$  é equivalente a cada autovalor em  $\Sigma$  elevado ao 2 e dividido por  $n-1$ .



③ Para resolver o sistema  $AB = C$ , em que:

$$A = \begin{bmatrix} n & \sum_i x_i \\ \sum_i x_i & \sum_i x_i^2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} B_0 \\ B_1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \sum_i y_i \\ \sum_i x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$AB = C$$

$$A^{-1}AB = A^{-1}C$$

$$B = A^{-1}C$$

$$B_0 = 0.426$$

$$B_1 = 0.744$$

5. A regressão com  $P=8$  possui menor desvio

• A regressão com  $P=3$  possui menor desvio

•  $P=3$ , porque é uma regressão que representa melhor todos os pontos do gráfico, visto que a curva cresce monotonicamente com a nitrogênio, além de ser uma representação mais simples



(6)

V → Na questão 2 vimos que podemos obter os componentes principais de  $X$  utilizando os vetores singulares direitos de  $X$  obtidos com seu SVD. Para representar  $X$  com  $K$  dimensões, precisamos dos  $K$  primeiros vetores singulares direitos, correspondentes aos  $K$  maiores valores singulares de  $X$ . Nesta forma, precisamos apenas do SVD truncado de posto  $K$ .

F → A reta obtida pela regressão linear minimizante o erro médio quadrático (entre  $\hat{y}$  e  $y$ ), enquanto o PCA minimizante a distância ortogonal entre os dados e a reta (direção da PC1).