DCC639: Álgebra Linear Computacional **(Prazo para submissão: 23/08/2021 23:55)**

Lista de Exercícios 05

Professores: Erickson e Fabricio

Política da Disciplina: Leia todas as instruções abaixo cuidadosamente antes de começar a resolver a lista, e antes de fazer a submissão.

- As questões podem ser discutidas entre até três alunos (conjuntos disjuntos). Os nomes dos colegas precisam ser incluídos na submissão.
- A submissão deve ser feita em formato PDF através do Moodle, mesmo que tenham sido resolvidas a mão e escaneadas.
- Todas as soluções devem ser justificadas.
- Todas as fontes de material precisam ser citadas. O código de conduta da UFMG será seguido à risca.

Problema 1: Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e sua inversa $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, calcule o número de condição de A com relação a cada uma das normas a seguir. Neste exercício, vamos assumir que uma matriz cujo número de condição é maior que 10^6 é mal condicionada.

(a) Norma-1. É bem condicionado?

(b) Norma-infinito. É bem condicionado?

Problema 2: Assinale V para verdadeiro ou F para falso e JUSTIFIQUE sua resposta

( ) O número de condição de uma matriz depende da norma escolhida.
( ) O uso da decomposição QR não reduz o número de condição do sistema a ser resolvido para encontrar a solução do problema de quadrados mínimos linear.
( ) Na decomposição QR de uma matriz não-singular A, o determinante de A é igual ao determinante de R.

Problema 3: Considerando a matriz A abaixo, encontre sua decomposição QR usando o processo de Gram-Schmidt e depois aplique a primeira iteração do algoritmo QR. Quais os autovalores encontrados? Para facilitar a realização dos cálculos, considere até a segunda casa decimal dos resultados.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Problema 4: Assinale V para verdadeiro ou F para falso e JUSTIFIQUE sua resposta

( ) A decomposição QR usa o algoritmo QR.
( ) Toda matriz converge para uma matriz triangular superior com o algoritmo QR.
( ) Na prática, deve-se evitar calcular $A^\top A$ para descobrir-se os valores singulares de A.
( ) A decomposição $A = QR$ é uma boa solução para o problema de se encontrar autovalores, pois com custo $\mathcal{O}(n^3)$, irá encontrar os autovalores de A na diagonal de R.

Problema 5: Na regressão linear, temos que se $X'X$ é inversível, os coeficientes são dados por $(X'X)^{-1}X'b$. Se $X'X$ não possui inversa, podemos usar a pseudo-inversa $V\Sigma^{-1}U'$. Prove que se $X'X$ possui inversa, ela e sua pseudo-inversa são iguais.

Problema 6: Podemos obter a decomposição de Cholesky a partir de um algoritmo iterativo, que em cada iteração encontra uma coluna de L seguindo os seguintes passos:

- Obtém o elemento $L_{i,i}$ como $\sqrt{A[i,i]}$.
- Obtém os outros elementos da coluna (abaixo de $L_{i,i}$) a partir de coluna correspondente de A e $L_{i,i}$.
- Usa o produto externo para cancelar o efeito dessa coluna de L na matriz total, e depois disso descobre uma submatriz de tamanho $(n-1xn-1)$

Descreva com suas palavras ou esboce um pseudo-código para esse algoritmo iterativo. (Dica: lembre-se de como fazemos a multiplicação de matrizes por produtos externos, e depois use essa abordagem para observar como fazemos a multiplicaçao da decomposição de Cholesky: $A = LL'$.)

Problema 7: Considere o sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ -3 & 9 & 1 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0.186 \\ 0.331 \\ -0.423 \end{bmatrix}.$$

Considerando como solução inicial $\hat{\mathbf{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top$:
(a) Resolva o sistema aplicando três iterações do método Gauss-Jacobi.
(b) Calcule qual o erro relativo e absoluto do método na última iteração.