Métodos quantitativos de apoio à decisão

Probabilidade: conceitos e teoremas fundamentais

Probabilidade

Bloco 1

Rafaela Rodrigues Oliveira Amaro

Vamos refletir?

Você sabia que a probabilidade surgiu na Idade Média, a partir da observação e análise do acaso e dos resultados incertos inerentes ao que, hoje, chamamos de jogos de azar?

Probabilidade

Experimento determinístico:

- Resultado é previsível.
- Se repetido, resultado é o mesmo.
- Exemplo: temperatura que a água ferve.

Fonte: Africa Studio/ adobe.stock.com.

Experimentos aleatórios:

- Resultado não pode ser previsto.
- Experimento pode ser repetido.
- À medida que aumenta o número de repetições surge uma certa regularidade, que torna possível a construção de um modelo matemático.
- Exemplo: lançamento de um dado.

Fonte: MAY/ adobe.stock.com.

Definição

$$P(Evento) = \frac{n(evento)}{n(espaço\ Amostral)}$$

Evento:

Subconjunto do espaço amostral.

Espaço amostral:

Conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento.

Eventos mutualmente exclusivos (regra da adição)

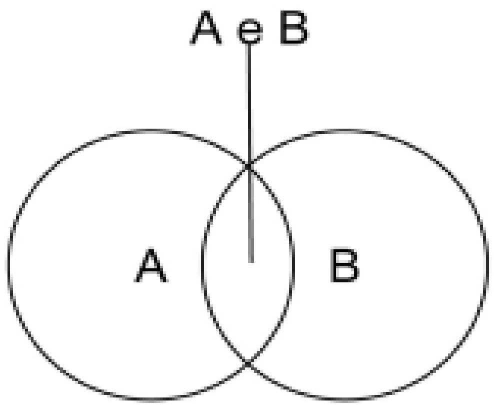
A probabilidade de um evento A ou B acontecer é dada por:

$$P(A\ ou\ B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ou

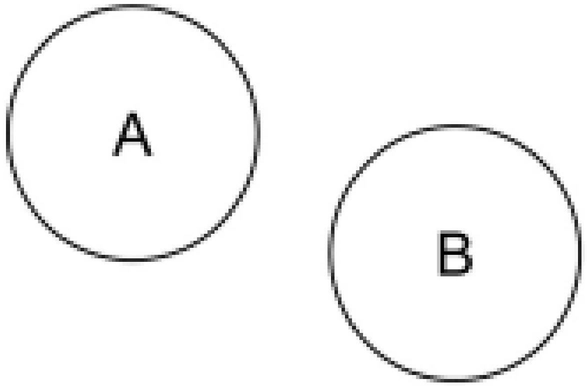
$$P(A\ ou\ B) = P(A) + P(B) - P(A\ e\ B)$$

Eventos não mutualmente exclusivos



Fonte: adaptada de Larson e Farber (2010).

Eventos mutualmente exclusivos



Fonte: adaptada de Larson e Farber (2010).

Eventos independentes (regra da multiplicação)

- Dois eventos são ditos independentes, quando a probabilidade de ocorrer um deles não depende do fato de os outros terem ou não terem ocorrido.
- A probabilidade de eventos independentes é dada por:

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \cdot P(B)$$

Lançamento de um dado e uma moeda

Fonte: MAY/ adobe.stock.com.

Probabilidade condicional

- É a probabilidade de ocorrer um evento, dado que um outro evento já ocorreu.
- Indicada como por $P(B|A)$ e lida como probabilidade de B, dado A.

Retirada de cartas de um baralho

Fonte: vie_art/ adobe.stock.com.

Para quaisquer dois eventos A e B com $P(B) > 0$, temos que:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Variável aleatória

Valor numérico associado a cada resultado de um experimento probabilístico.

Fonte: Félix Ándres/ adobe.stock.com.

Variável aleatória discreta: quando há um número finito ou contável de resultados possíveis que possam ser enumerados.

Fonte: Rafael Ramires/ adobe.stock.com.

Variável aleatória contínua: quando há um número incontável de resultados possíveis representados por um intervalo sobre o eixo do conjunto dos números reais.

Fonte: Addoro/ adobe.stock.com.

Probabilidade: conceitos e teoremas fundamentais

Distribuição de dados de variáveis discretas

Bloco 2

Rafaela Rodrigues Oliveira Amaro

Distribuição de dados de variável aleatória discreta

- Cada valor de uma variável aleatória discreta tem uma respectiva probabilidade.
- Ao enumerar cada valor da variável aleatória com sua probabilidade, forma-se uma distribuição de probabilidade, na qual:

i. A probabilidade de cada valor da variável está entre 0 e 1, ou seja, $0 \leq P(x) \leq 1$.

ii. Se sua soma equivale a $\sum P(x_i) = 1$.

Distribuição de probabilidade: grau de satisfação com uso de aplicativo

Fonte: Miroslav Jacimovic/Wirestock Creators / adobe.stock.com.

Construção

Para construir uma distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta, é necessário:

I. Determinar uma distribuição de frequência para os resultados possíveis.

II. Obter a soma de todas as frequências.

III. Calcular a probabilidade de cada resultado dividindo sua frequência pela soma das frequências.

Variável	Frequência

Probabilidade

Exemplo

Uma empresa adota o número de estrelas como critério de avaliação de seu novo aplicativo. Assim, um cliente muito satisfeito escolhe cinco estrelas e um insatisfeito opta por uma estrela.

Definindo a variável aleatória X: grau de satisfação, podemos dizer que $x = 1{,}2{,}3{,}4\ e\ 5$ estrelas construa uma distribuição de probabilidade. Os resultados da pesquisa estão no quadro a seguir:

Exemplo

Nota $(estrelas)$	Frequência $(f(x))$
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21
Total	150

Fonte: adaptado de Larson e Farber (2010).

Exemplo

Exemplo

Nota $(estrelas)$	Frequência $(f(x))$
1	24
2	33
3	42
4	30
5	21
Total	150

- $P(segunda\ Feira) = \frac{24}{150} = 0{,}16$
- $P(terça\ Feira) = \frac{33}{150} = 0{,}22$
- $P(quarta\ Feira) = \frac{42}{150} = 0{,}28$
- $P(quinta\ Feira) = \frac{30}{150} = 0{,}20$
- $P(sexta\ Feira) = \frac{21}{150} = 0{,}14$

x	$P(X = x)$
1	0,16
2	0,22
3	0,28
4	0,20
5	0,14
Total	1

Fonte: elaborada pela autora.

Média, variância e desvio padrão

- Média: $\mu = \sum xP(x)$
- Variância: $\sigma^2 = \sum(x-\mu)^2 \cdot P(x)$
- Desvio Padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$

Média, variância desvio padrão

x	$P(x)$	$xP(x)$	$(x-\mu)$	$(x-\mu)^2$	$(x-\mu)^2 \cdot P(x)$
1	0,16	0,16	$-1,94$	3,764	0,602
2	0,22	0,44	$-0,94$	0,884	0,194
3	0,28	0,84	0,06	0,004	0,001
4	0,20	0,80	1,06	1,124	0,225
5	0,14	0,70	2,06	4,244	0,594
		Média = 2,94			**Variância=1,616**
		Desvio Padrão: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} \rightarrow \sigma = \sqrt{1{,}616} \cong 1{,}27$			

Fonte: elaborado pela autora.

Probabilidade: conceitos e teoremas fundamentais

Distribuição de dados de variáveis contínuas

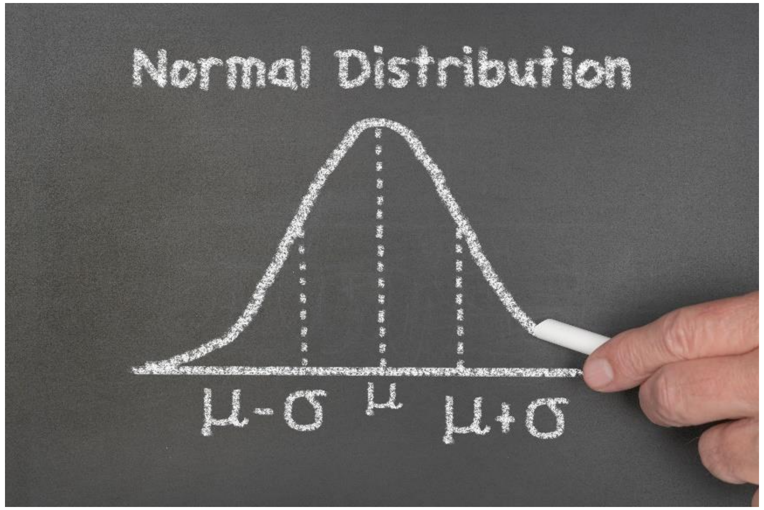
Bloco 3

Rafaela Rodrigues Oliveira Amaro

Definição

- A distribuição de dados de variáveis contínuas mais conhecida é a distribuição normal.
- Útil para modelar diversos problemas da natureza, pesquisas empresariais, análises financeiras, entre outras aplicações que apoiam na tomada de decisões.

Curva normal



Fonte: cherylvb/ adobe.stock.com.

Características

Segundo Larson e Farber (2010), as principais características de uma distribuição normal são:

1. Média, mediana e moda iguais.
2. A curva normal tem forma de sino e é simétrica em torno da média.
3. A área total sob a curva normal é igual a um, ou seja, a 100%.
4. A curva normal se aproxima mais do eixo x, à medida que se afasta da média em ambos os lados, mas nunca toca o eixo.
5. Os pontos nos quais a curva muda sua curvatura para cima ou para baixo são chamados de ponto de inflexão.
6. A curva normal é definida por dois parâmetros: a média μ (lê-se “mi”) e o desvio padrão σ (lê-se “sigma”).

Modelo matemático

A função de densidade da probabilidade da distribuição normal é:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi\sigma} e^{-\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)^2\right)}$$

Onde:

- $\sigma =$ desvio padrão.
- $\mu =$ média aritmética.
- $X =$ variável aleatória contínua.

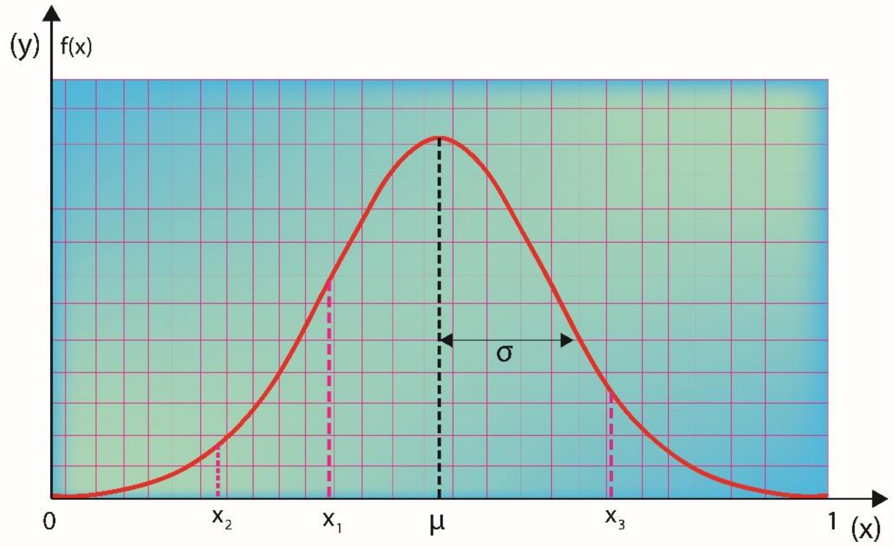
No entanto, essa fórmula não precisa ser constantemente utilizada, uma vez que podemos trabalhar com a padronização de dados, usando uma tabela.

Distribuição normal padronizada

Utilizando a fórmula de transformação, qualquer variável aleatória normal X é convertida em uma variável normal padronizada Z .

Gráfico

Distribuição Normal



$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$x =$ Variável aleatória contínua

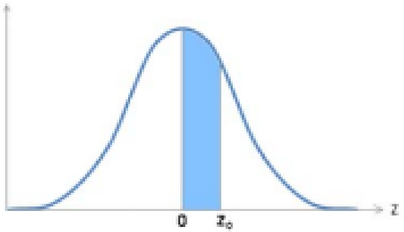
$\mu =$ Média aritmética

$\sigma =$ Desvio padrão

Fonte: KKT Madhusanka/ adobe.stock.com.

Tabela: área sob a curva distribuição normal

Tabela da distribuição normal padronizada – Valores $P(0 \leq Z \leq z_c)$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177

Fonte: Costa (2002. p. 247).

Como usar a tabela?

A probabilidade fornecida pela tabela anterior corresponde ao intervalo que vai de zero até um certo número z_c no eixo x.

Esquematicamente, a tabela da normal fornece a probabilidade correspondente à área a seguir:

Probabilidade na tabela de distribuição normal

<table>
<tr><td rowspan="2">Parte inteira e primeira casa decimal de z.</td><td>Segunda casa decimal de z.</td></tr>
<tr><td>PROBABILIDADE</td></tr>
</table>

Fonte: elaborado pela autora.

Probabilidade: conceitos e teoremas fundamentais

Teoria em prática

Bloco 4

Rafaela Rodrigues Oliveira Amaro

Reflita sobre a seguinte situação

Você foi contratado(a) para realizar uma auditoria sobre o tempo demandado em processos de produção de uma empresa de logística. Assim, foi verificado o envio dos produtos, considerando a chegada e saída do galpão é, em média, 129 minutos com um desvio padrão de 14 minutos.

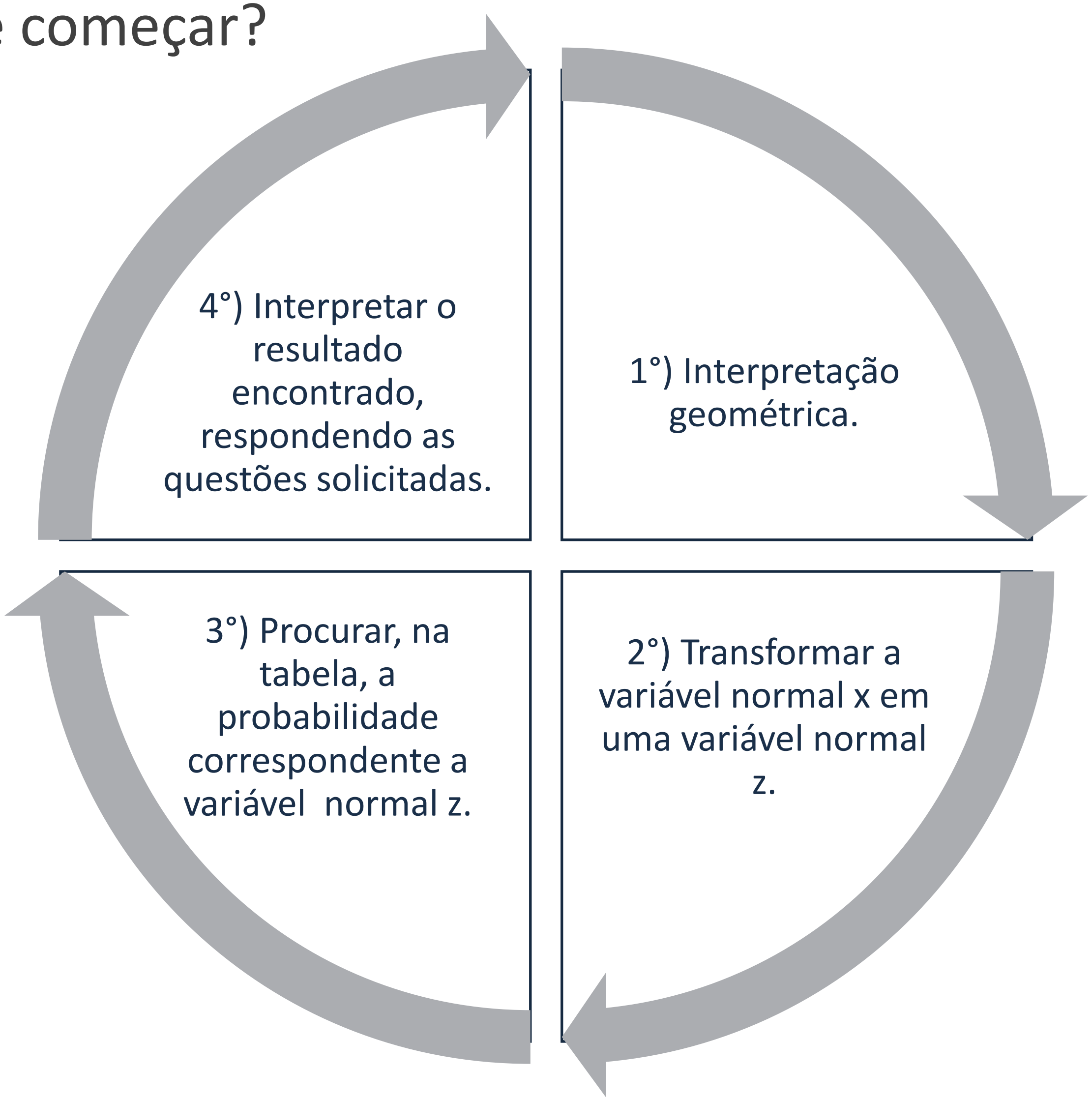
Partindo dessas considerações, caberá a você apresentar a diretoria a resposta quanto os seguintes questionamentos:

a) Qual é a probabilidade de que um produto seja despachado em menos de 100 minutos?

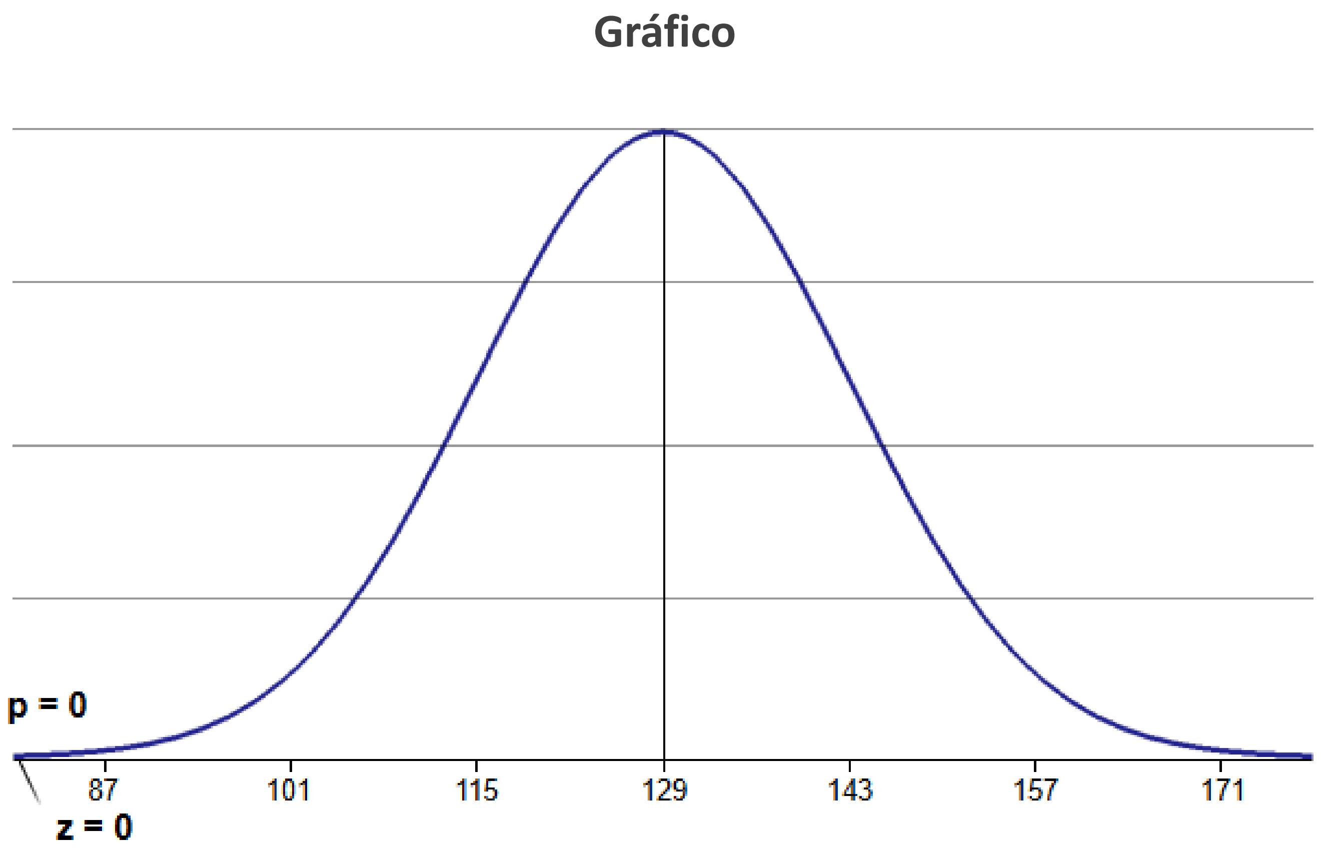
b) 17% corresponde a chance de que um produto seja despachado em quanto tempo?

Norte para a resolução

Por onde começar?



Interpretação geométrica – Parte 1



Fonte: https://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades2/normal/index.html.

Norte para a resolução

Dado que $\mu = 129$ e $\sigma = 14$, precisamos determinar **a probabilidade de que um produto seja despachado em menos de 140 minutos**, logo $x = 140$. Assim de acordo com os passos anteriores:

2°)Transformação: $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow \frac{140-129}{14} = \frac{11}{14} = 0{,}79.$

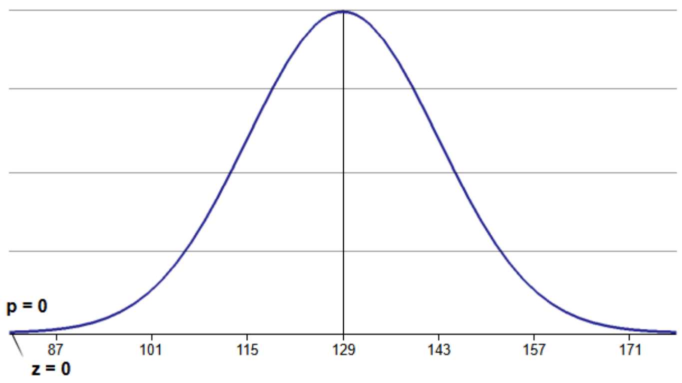
3°) Consulta tabela:

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852

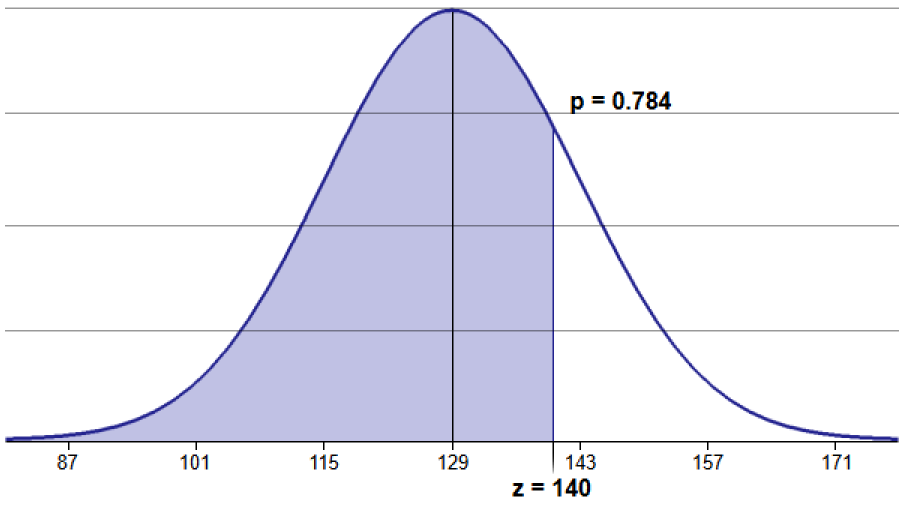
Fonte: elaborado pela autora.

4°) Interpretação: a probabilidade de que um produto seja despachado, em 140 minutos, é de 0,2852 + 0,5 = 0,7852 ou seja de 28,52%.

Interpretação geométrica – Parte 2



Gráficos



Fonte: https://www.bertolo.pro.br/FinEst/Estatistica/DistribuicaoProbabilidades2/normal/index.html.

Probabilidade: conceitos e teoremas fundamentais

Consolidando o aprendizado

Bloco 5

Rafaela Rodrigues Oliveira Amaro

Consolidando o aprendizado

- Probabilidade.
- Eventos mutualmente exclusivos (regra da adição).
- Eventos independentes (regra da multiplicação).
- Probabilidade condicional.
- Variáveis aleatórias versus variáveis contínuas.
- Distribuição de dados de variáveis aleatórias.
- Distribuição de dados de variáveis contínuas.

Quiz

A probabilidade pode ser aplicada em todas as áreas do conhecimento mediante diversas finalidades. Seja para decidir se levará um agasalho pela manhã ou para definir o local para criação de uma empresa, as chances de ocorrência de uma evento são informações que auxiliam na tomada de decisões. Nesse sentido, como você utiliza de tal temática em seu dia a dia?

Quiz – Resolução

O uso da concepção de probabilidade é pessoal e inerente à realidade de cada um. No entanto, ter tais informações pode oportunizar uma tomada de decisões mais assertiva, como na escolha por um período de viagem, onde se considera a previsão meteorológica ou ainda na determinação do valor a ser pago por um seguro automobilístico, devido às condições do condutor.

Leitura Fundamental

Prezado estudante, as indicações a seguir podem estar disponíveis em algum dos parceiros da nossa Biblioteca Virtual (faça o login por meio do seu AVA), e outras podem estar disponíveis em sites acadêmicos (como o SciELO), repositórios de instituições públicas, órgãos públicos, anais de eventos científicos ou periódicos científicos, todos acessíveis pela internet.

Isso não significa que o protagonismo da sua jornada de autodesenvolvimento deva mudar de foco. Reconhecemos que você é a autoridade máxima da sua própria vida e deve, portanto, assumir uma postura autônoma nos estudos e na construção da sua carreira profissional.

Por isso, nós o convidamos a explorar todas as possibilidades da nossa Biblioteca Virtual e além! Sucesso!

Indicação de leitura 1

Neste trabalho, as autoras apresentam aplicações da estatística e probabilidade, em especial quanto a distribuição normal nas pandemias ao longo da história, com ênfase para a COVID-19. Tal iniciativa explicita a pesquisa e as representações gráficas contribuem significativamente para a análise dos dados.

Referência:

RODRIGUES, A. R.; SILVA, B. C. Distribuição de probabilidade: curva normal e aplicação. **Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática**, [s. l.], v. 3, n. 1, 2023.

Indicação de leitura 2

Neste artigo, os autores apresentam uma aplicação da estatística com o uso de uma variável mista, ou seja, a utilização da variável aleatória junto da variável contínua. Assim, tal concepção é a base para modelar os dados dos pagamentos de provedor de Internet feitos pelos clientes de uma empresa de uma cidade da Paraíba.

Referência:

DA SILVA, S. O.; MAIA, D.; ESTEVES, G. H. Modelagem probabilística de dados de pagamentos de provedor de internet usando variável mista. **Sigmae**, [s. l.], v. 9, n. 2, p. 37-44, 2020.

Referências

COSTA NETO, P. L. de O. **Estatística**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.

COSTA, P. R. da. **Estatística**. Santa Catarina: Universidade Federal de Santa Catarina, 2011. Disponível em: https://www.ufsm.br/app/uploads/sites/413/2018/11/04_estatistica.pdf. Acesso em: 22 jul. 2024.

DA SILVA, S. O.; MAIA, D.; ESTEVES, G. H. Modelagem probabilística de dados de pagamentos de provedor de internet usando variável mista. **Sigmae**, [s. l.], v. 9, n. 2, p. 37-44, 2020.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e estatística:** para Engenharia e Ciências. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.

LARSON, R.; FARBER, B. **Estatística aplicada**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

PINHEIRO, J. I. D. *et al*. **Estatística básica:** a arte de trabalhar com dados. Rio de Janeiro: Elsevier Brasil, 2009.

RODRIGUES, A. R.; SILVA, B. C. Distribuição de probabilidade: curva normal e aplicação. **Revista Eletrônica do Curso de Licenciatura em Matemática**, [s. l.], v. 3, n. 1, 2023.

Bons estudos!