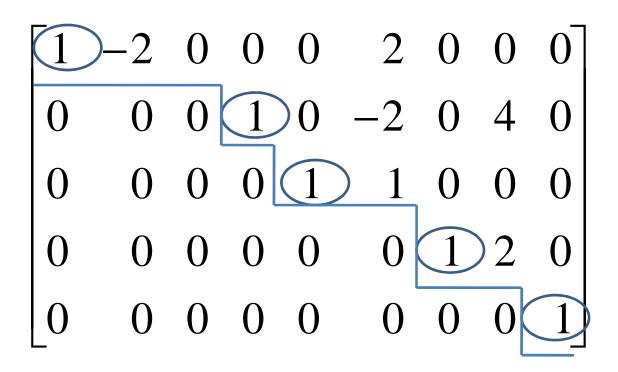
Álgebra Linear

Mais matrizes especiais

2^a aula

Matrizes escadas



Mas afinal como reconhecer se uma matriz está ou não em forma escalonada?

Definição: Matriz escada (ou em forma escalonada)

Diz-se que uma matriz $A_{m \times n}$ está em forma de escada se para toda a linha i = 1, ..., m acontecer:

- Se a linha i é nula todas as linhas abaixo de i são nulas;
- Se a linha i não é nula e a_{ik} é o seu primeiro elemento não nulo, todos os elementos da coluna k abaixo de a_{ik} são nulos assim como os elementos das colunas anteriores da linha k para baixo.
- Todos os pivôs são iguais a 1;

Definição: Matriz em forma de escada (usando notação matemática)

Diz-se que uma matriz $A_{m \times n}$ está em forma de escada se para toda a linha i = 1, ..., m acontecer:

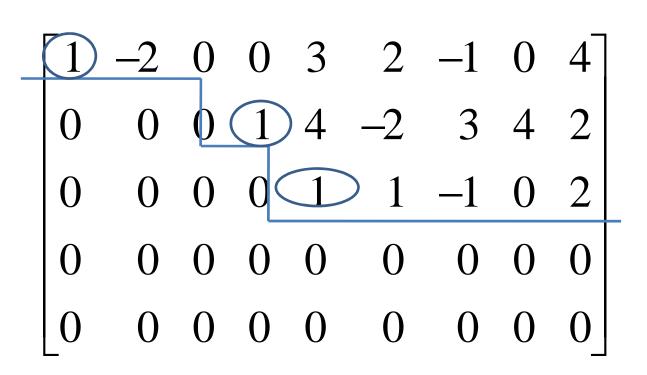
- Se a linha i é nula e p > i a linha p é nula;
- Se a linha i não é nula e a_{ik} é o seu primeiro elemento não nulo, então a_{ik} =1 e para p > i e q ≤ k, a_{pq} = 0.

Definição: pivô

Quando uma matriz está em forma de escalonada ao primeiro elemento não nulo de cada linha chama-se pivô.

(numa linha nula não há nenhum pivot) (em cada coluna há no máximo um pivot)

matriz em forma escalonada:



Algumas considerações:

- As linhas nulas ficam sempre na parte de baixo da matriz
- Pode haver colunas nulas em qualquer posição
- Qualquer linha tem sempre o pivô para a direita dos pivots das linhas acima dela

Definição: Matriz condensada (escalonada reduzida por linhas)

Diz-se que uma matriz A_{m×n} está na forma escada reduzida por linhas se

- Está na forma escalonada.
- Se a_{ik} é o pivot da linha i todos os elementos da coluna k acima de a_{ik} são nulos.

Exemplo de matriz condensada:

Exemplo de matriz condensada:

Qualquer matriz pode ser transformada numa matriz escada ou em uma matriz condensada

COMO?

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

```
\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}
```

Tipo I: Trocar duas linhas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \longleftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipo II: Multiplicar uma linha por um escalar não nulo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 0.5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -2 & 0.5 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tipo III: Somar a uma linha outra multiplicada por um escalar

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & \lfloor 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathsf{L}_2 \leftarrow \mathsf{L}_2 - 0.5\mathsf{L}_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2.5 & 5 & 5.5 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

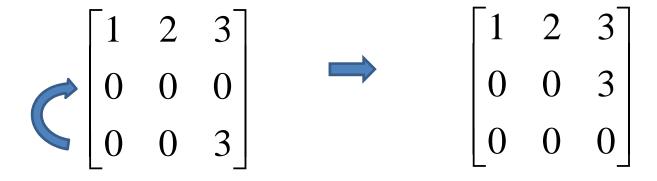
```
\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}
```

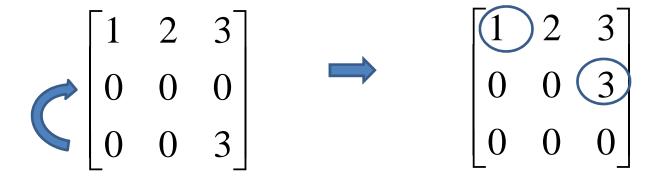
$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

```
\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
```





A partir de uma matriz podem-se obter várias matrizes em escada, mas uma única matriz condensada

Definição: Posto de uma matriz

- O posto de uma matriz $A_{m \times n}$ é igual ao número de linhas não nulas numa sua forma escada.
- (é também igual ao número de colunas que têm um pivô e é igual ao número de pivôs)
- Representa-se por posto(A_{m×n})

à variável de uma coluna onde não há um pivô cháma-se variável livre. á variável de uma coluna onde há um pivô cháma-se variável principal ou básica.

EXEMPLO: Determinar o posto de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3$$
 L_3 + (-1) L_1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3$$
 L_3 + (-1) L_1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3$$
 L_3 + (-1) L_1

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Determinar o posto de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & 11 & 10 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & 11 & 10 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 18 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & -3 & 2 & 10 \\
0 & 2 & -4 & 4 \\
0 & -3 & 5 & 0 \\
0 & -1 & -1 & 18
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & -2 & 8 \\
0 & 0 & 2 & -6 \\
0 & 0 & -2 & 16
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & -2 & 8 \\
0 & 0 & 2 & -6 \\
0 & 0 & -2 & 16
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 8
\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 8
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|cccc}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & 1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}
1 & -2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & -1 & -2 \\
0 & 0 & -1 & 4 \\
0 & 0 & 0 & 8 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

A matriz está em forma escalonada. Há 4 pivôs. O posto da matriz é 4.