Álgebra Linear

Mais matrizes especiais

2ª aula

Matrizes escadas

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mas afinal como reconhecer se uma matriz está ou não em forma escalonada?

Definição: Matriz escada (ou em forma escalonada)

Diz-se que uma matriz $A_{m \times n}$ está em forma de escada se para toda a linha $i = 1, \ldots, m$ acontecer:

- Se a linha i é nula todas as linhas abaixo de i são nulas;
- Se a linha i não é nula e a_{ik} é o seu primeiro elemento não nulo, todos os elementos da coluna k abaixo de a_{ik} são nulos assim como os elementos das colunas anteriores da linha k para baixo.
- Todos os pivôs são iguais a 1;

Definição: Matriz em forma de escada (usando notação matemática)

Diz-se que uma matriz $A_{m \times n}$ está em forma de escada se para toda a linha $i = 1, \dots, m$ acontecer:

- Se a linha i é nula e $p > i$ a linha p é nula;
- Se a linha i não é nula e a_{ik} é o seu primeiro elemento não nulo, então $a_{ik} = 1$ e para $p > i$ e $q \leq k$, $a_{pq} = 0$.

Definição: pivô

Quando uma matriz está em forma de escalonada ao primeiro elemento não nulo de cada linha chama-se pivô.

(numa linha nula não há nenhum pivot)

(em cada coluna há no máximo um pivot)

matriz em forma escalonada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 3 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Algumas considerações:

- As linhas nulas ficam sempre na parte de baixo da matriz
- Pode haver colunas nulas em qualquer posição
- Qualquer linha tem sempre o pivô para a direita dos pivots das linhas acima dela

Definição: Matriz condensada (escalonada reduzida por linhas)

Diz-se que uma matriz $A_{m \times n}$ está na forma escada reduzida por linhas se

- Está na forma escalonada.
- Se a_{ik} é o pivot da linha i todos os elementos da coluna k acima de a_{ik} são nulos.

Exemplo de matriz condensada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplo de matriz condensada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Qualquer matriz pode ser transformada numa matriz escada ou em uma matriz condensada

COMO?

Operações elementares sobre as linhas de uma matriz

Tipos de Operações Elementares

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tipos de Operações Elementares

Tipo I: Trocar duas linhas

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tipos de Operações Elementares

Tipo II: Multiplicar uma linha por um escalar não nulo

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow 0.5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1.5 & -2 & 0.5 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Tipos de Operações Elementares

Tipo III: Somar a uma linha outra multiplicada por um escalar

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 0.5L_1} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 2.5 & 5 & 5.5 & 7 \\ -9 & 0 & 6 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A partir de uma matriz podem-se obter várias matrizes em escada, mas uma única matriz condensada

Definição: Posto de uma matriz

O posto de uma matriz $A_{m \times n}$ é igual ao número de linhas não nulas numa sua forma escada.

(é também igual ao número de colunas que têm um pivô e é igual ao número de pivôs)

Representa-se por posto$(A_{m \times n})$

à variável de uma coluna onde não há um pivô cháma-se variável livre.

á variável de uma coluna onde há um pivô cháma-se variável principal ou básica.

EXEMPLO:

Determinar o posto de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + (-1)\, L_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 + (-1)\, L_1$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$L_3 \Leftarrow L_3 + (-1)\, L_1$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

A matriz está em forma de escada.

Há 3 pivôs $\Longrightarrow$ A matriz tem característica 3.

As colunas principais são as 3 primeiras e as duas últimas são as livres;

Determinar o posto de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & 11 & 10 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 18 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -9 & 11 & 10 \\ 4 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & -4 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 10 \\ 0 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & 16 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A matriz está em forma escalonada. Há 4 pivôs.
O posto da matriz é 4.