

Konstruktion eines industriellen 6-DOF-Roboterarms

Vladimir Morozov
Gymnasium Bäumlhof
Begleitperson: Dominik Rohner

13. Oktober 2025

Vorwort

Ich möchte mich herzlich bei allen Mitwirkenden bedanken, die mich bei diesem Projekt unterstützt haben.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	2
1. Einleitung	5
1.1. Zielsetzung	5
1.2. Automatisierung durch Roboter	6
2. Aufbau eines industriellen 6-DOF-Roboterarms	7
3. Mechanische Umsetzung	11
3.1. CAD-Software	11
3.2. Material	11
3.3. Aufbau	11
3.4. Oberarm (2. Glied)	11
3.5. Unterarm (3. Glied)	11
3.6. Schluter und Halterung (1. Glied)	11
3.7. Handgelenk Teil 1 (4. Glied)	11
3.8. Handgelenk Teil 2 und 3 (5. und 6. Glied)	11
3.9. Komplette Montage	11
4. Elektrische Aktoren	12
4.1. Motoren	12
4.2. Sensoren	12
5. Elektronik und Systemsteuerung	13
5.1. Mikrokontroller	13
5.2. Motortreiber	13
5.3. PCB	13
5.4. Code für Mikrokontroller	13
5.5. Kontrolle über PC	13
6. Robotik	14
6.1. Direkte Kinematik	14
6.1.1. FK im 2-dimensionalen Raum	14
6.1.2. FK im 3-dimensionalen Raum	16

6.2.	Inverse Kinematik	19
6.2.1.	1R-Manipulator	19
6.2.2.	2R-Manipulator	19
6.2.3.	3R-Manipulator	22
6.2.4.	6R-Manipulator	23
6.3.	Theoretische Umsetzung eines 6R-Manipulatoren mit IK	27
6.4.	Praktische Umsetzung eines 6R-Manipulatoren mit IK	28
7.	Resultate und Diskussion	29
7.1.	Komplette Konstruktion	29
7.2.	Auswertung	29
7.2.1.	Geschwindigkeit	29
7.2.2.	Genauigkeit und Wiederholbarkeit	29
7.2.3.	Stromverbrauch	29
8.	Zusammenfassung und Ausblicke	30
8.1.	Zukünftige Ergänzungen	30
8.1.1.	Zusätzliche Funktionalitäten	30
8.1.2.	Interpolation	30
8.1.3.	FPGA	30
8.1.4.	Einbettung von KI	30
8.2.	Reflexion	30
9.	Quellenverzeichnis	31
10.	Redlichkeitserklärung	32
A.	Anhang	33

1. Einleitung

1.1. Zielsetzung

Das Ziel dieser Arbeit ist, einen funktionstüchtigen industriellen Roboterarm mit 6 Freiheitsgraden, auf Englisch auch als die *"Degrees of Freedom"* oder auch mit der Abkürzung *"DOF"* bekannt, von Grund aus konstruieren zu können. Dies bedeutet, dass der Roboterarm einen beliebigen Punkt mit einer beliebigen Rotation in einem 3-dimensionalen Raum erreichen kann. Der Grund für die Auswahl stammt daraus, dass heutzutage die Automation von verschiedensten Aufgaben immer mehr wird und für diese jegliche Roboter eingesetzt werden. Dazu werden industrielle Roboterarme eingesetzt. Der konkrete Grund eines industriellen Roboterarms ist, dass heutzutage auch humane Roboterarme im Einsatz sind. Während humane Roboterarme gelähmte oder fehlende Arme ersetzen werden industrielle Roboterarme für **FINDE ETWAS** eingesetzt. Zusätzlich möchte ich unbedingt mich mit Themenbereichen auseinandersetzen, die mich interessieren oder ich in Zukunft gerne weiter erforschen würde.

Das Ziel ist jedoch nicht nur einen Roboterarm graphisch und theoretisch konstruieren zu können, sondern diesen auch physisch zusammensetzen und steuern zu können. Dazu gehören Einsätze von elektrischen Aktoren, hauptsächlich Motoren, eine Systemsteuerung von allen Aktoren und Sensoren mit einer entsprechenden Benutzeroberfläche, mit der man den Roboterarm steuern und bewegen kann. Deshalb werden in dieser Arbeit viele verschiedene Prinzipien aus diversen Themengebieten eingesetzt:

- | | |
|------------------|-----------------------------|
| - Elektronik | - Robotik |
| - Informatik | - Konstruktionsmodellierung |
| - Elektrotechnik | - Systemsteuerung |
| - Mechanik | - 3D-Druck |

Ein industrieller Roboterarm mit 6 Freiheitsgraden besteht dementsprechend aus 6 verschiedenen Gliedern. Die Rotationen dieser 6 Glieder bestimmen die Endposition und Endrotation der Spitze des Roboterarms, auch als der Endeffektor genannt. Durch das eine bestimmte Position und Rotation für den Endeffektor gesetzt wird, müssen die Konfigurationen jedes einzelnen Gliedes berechnet werden. Dieser Prozess wird als die *"Inverse Kinematik"*, ein

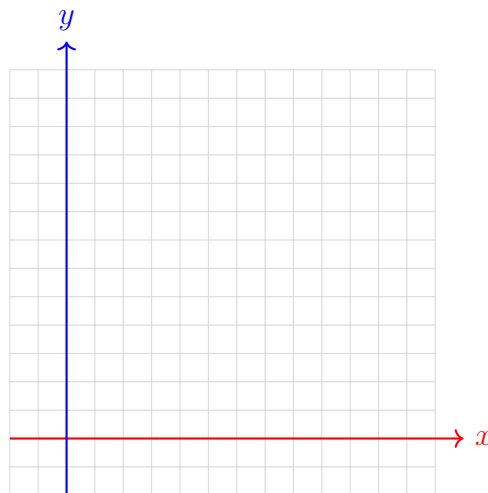
Begriff aus der Robotik, benannt und ist deshalb für das Erreichen einer Position im 3-dimensionalen Raum von entscheidender Bedeutung. Die Inverse Kinematik ist somit auch Teil dieser Arbeit.

1.2. Automatisierung durch Roboter

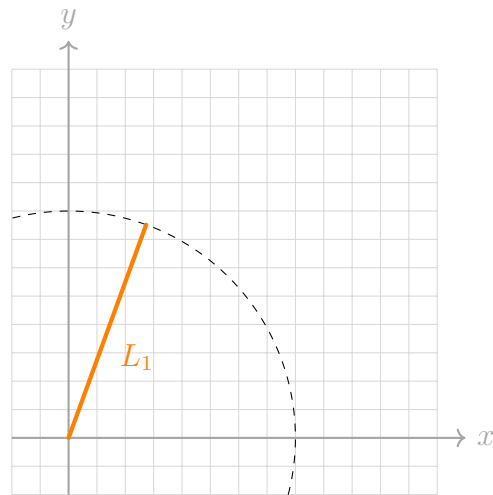
2. Aufbau eines industriellen 6-DOF-Roboterarms

Unter einem Roboterarm mit sechs Freiheitsgraden versteht man, dass dessen Endeffektor in einem 3-dimensionalen Raum in jede Richtung bewegen (in X -, Y - oder Z -Richtung) und beliebig rotiert werden kann (auch in X -, Y - oder Z -Richtung). Es können somit drei Positionsargumente (X, Y, Z) sowie drei Rotationsargumente (φ, θ, ψ) bestimmt werden, die dem Endeffektor entsprechend entsprechen müssen. Für eine Konstruktion eines 6-DOF-Roboterarms muss eine solche Konstruktion so gegliedert sein, dass der Endeffektor frei im 3-dimensionalen Raum bewegt und rotiert werden kann. Damit verständlich wird, welche Glieder gebraucht werden, damit der Endeffektor diese Bedingungen erfüllen kann, wird graphisch schrittweise vorgegangen.

Vorerst wird in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem gearbeitet.



Durch das jetzt schrittweise Glied nach Glied vorgegangen wird, wird das erste Glied so in das Koordinatensystem hinzugefügt, dass deren Anfang am Nullpunkt angesetzt wird und dort orthogonal zur X - und Y -Achse rotiert wird (an der imaginären Z -Achse). Anhand dieses Gliedes wird es möglich jeden Punkt auf einem Kreis erreichen zu können, deren Radius der Länge des Glieds entspricht.



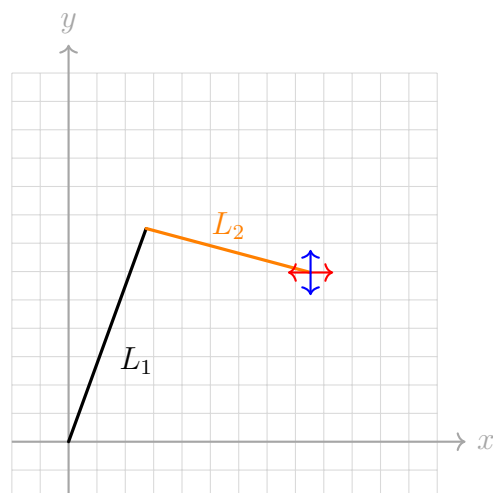
$$X_D = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$|X_D| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|X_D| = L_1$$

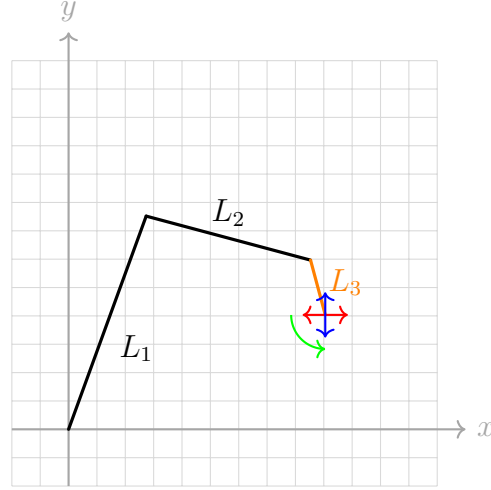
$$x^2 + y^2 = L_1^2$$

Damit ein Punkt erreicht werden kann, der nicht nur auf einem Kreis liegt, muss ein weiteres Glied am Ende des ersten Gliedes hinzugefügt werden, welches der Konstruktion erlaubt den Endeffektor an eine beliebige Position zu stellen, die nicht an einen Kreis gebunden ist. Der Endeffektor kann somit jeden Punkt in einem 2-dimensionalem System erreichen, solange sich dieser Punkt innerhalb eines Kreises mit dem Radius der beiden Längen der Glieder befindet. Gesprochen



$$|X_D| \leq L_1 + L_2$$

Jedoch ist diese Konstruktion darauf bedingt, dass der Endeffektor eine Position erreicht, deren Rotation von der Position X_D und der Längen L_1 und L_2 der zwei Glieder entspricht. Damit eine bestimmte Rotation erreicht werden kann, muss ein weiteres Glied hinzugefügt werden, welches einen Punkt mit einer bestimmten Rotation erreichen kann.



Anhand von nur drei Glieder und deren Rotationsachsen kann im einem 2-dimensionalen Raum ein beliebiger Punkt mit einer bestimmten Rotation erreicht werden, bedingt davon, ob dieser Punkt mit der Rotation innerhalb der Greifweite der Konstruktion liegt. Von hier aus wird es möglich das gleiche in einem 3-dimensionalen Raum umsetzen zu können. Um vorerst nur eine beliebige Position in einem 3-dimensionalen Raum erreichen zu können, wird die 2-gliedrige Konstruktion genommen und in die 3-dimensionale gestreckte, indem ein Glied am Anfang des ersten Gliedes befestigt die in Y-Richtung gestreckt wird und in die Y-Richtung rotiert wird. Dadurch wird Endposition des Endeffektors von der 2-dimensionalen in die 3-dimensionale gestreckt. Es kann dadurch jeder Punkt innerhalb einer Kugel erreicht werden, dessen Radius der Summer der Längen der letzten zwei Glieder entsprechen. Gesprochen

$$\begin{aligned}
 X_D &= \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\
 X_N &= \begin{bmatrix} x \\ y - L_1 \\ z \end{bmatrix} \\
 |X_N| &= \sqrt{x^2 + (y - L_1)^2 + z^2} \\
 |X_N| &= L_2 + L_3
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Durch dass das erste Glied die anderen zwei Glieder in die Y-Richtung versetzt, ist die

eigentliche Endposition $X_N = \begin{bmatrix} x \\ y - L_1 \\ z \end{bmatrix}$.

Damit ebenfalls eine beliebige Rotation erreicht werden kann, werden 3 weitere Glieder am Ende hinzugefügt, die es erlauben, eine Position mit einer bestimmten Rotation erreichen zu können. Dies kann auch graphisch veranschaulicht werden.

Zuerst wird ein Glied aufgebaut, die in die Y-Richtung gestreckt wird und in Y-Richtung rotiert wird. An das Ende des ersten Gliedes wird ein weiteres angesetzt, die auch in Y-Richtung gestreckt wird und in Z-Richtung rotiert wird. Somit wird das zweite Glied durch die Rotation des ersten Gliedes beeinflusst. Schlussendlich wird ein letztes Glied nochmals in Y-Richtung gestreckt und in Y-Richtung rotiert. Die ersten zwei Glieder sind somit dafür zuständig eine bestimmte Rotation zu erreichen und das Letzte nochmals für eine lokale Rotation. Diese drei Glieder werden somit an die ersten drei angesetzt und es wird ein industrieller Roboterarm mit sechs Freiheitsgraden (*6DOF*) erzeugt, der aus insgesamt sechs Gliedern besteht.

3. Mechanische Umsetzung

3.1. CAD-Software

3.2. Material

3.3. Aufbau

3.4. Oberarm (2. Glied)

3.5. Unterarm (3. Glied)

3.6. Schluter und Halterung (1. Glied)

3.7. Handgelenk Teil 1 (4. Glied)

3.8. Handgelenk Teil 2 und 3 (5. und 6. Glied)

3.9. Komplette Montage

4. Elektrische Aktoren

4.1. Motoren

4.2. Sensoren

5. Elektronik und Systemsteuerung

5.1. Mikrokontroller

5.2. Motortreiber

5.3. PCB

5.4. Code für Mikrokontroller

5.5. Kontrolle über PC

6. Robotik

6.1. Direkte Kinematik

Der Begriff "*Direkte Kinematik*", auch als "*Forward Kinematics*" oder "*FK*" bekannt, stammt aus der Robotik und ist dafür da, um aus Gelenkwinkeln der einzelnen Glieder einer gegliederten Konstruktion die Endposition in einem Koordinatensystem bestimmen zu können. Man spricht bei der Endposition des letzten Glieds von einem "*Endeffektor*".

6.1.1. FK im 2-dimensionalen Raum

Um zu verstehen, was man unter der direkten Kinematik erreichen möchte, wird ein 2-dimensionales XY -Koordinatensystem dargestellt. In dem Koordinatensystem befindet sich eine Konstruktion aus 2 Gliedern. Das erste Glied L_1 dreht sich mit dem Anfang um den Nullpunkt, während das zweite Glied L_2 sich am Schluss des ersten Glieds dreht.

Jedes von diesen Gliedern liegt unter einem Winkel relativ zur X -Achse. Der Winkel des ersten Gliedes wird als θ'_1 bezeichnet und dies des zweiten Gliedes mit θ'_2 . Es muss die Position des Endeffektors berechnet werden, wo

$$\theta'_1, \theta'_2 \longrightarrow x_{EE}, y_{EE}$$

das verallgemeinert werden kann zu

$$f(\theta'_1, \theta'_2) = X_D = \begin{bmatrix} x_{EE} \\ y_{EE} \end{bmatrix}$$

wo X_D die Endposition der Endeffektors entspricht.

Anstatt alles auf einmal zu berechnen, wird zuerst die Endposition des ersten Gliedes berechnet:

$$X_{D_1} = R(\theta'_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta'_1 & -\sin \theta'_1 \\ \sin \theta'_1 & \cos \theta'_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \cos \theta'_1 \\ L_1 \sin \theta'_1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} L_1 c_1 \\ L_1 s_1 \end{bmatrix}$$

Es wird die Rotationsmatrix $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ benützt, die in einem 2-dimensionalen Koordinatensystem verwendet wird.

Durch das die Endposition des Endes vom ersten Glied bekannt ist, wird diese eingesetzt, um die Endposition des Endes vom zweiten Glied herauszufinden:

$$X_D = R(\theta'_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta'_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 c_1 \\ L_1 s_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_2 c_2 \\ L_2 s_2 \end{bmatrix}$$

Jedoch ist der Fall nicht so, dass bewusst ist, unter welchem Winkel das zweite Glied relativ zur X -Achse steht, sondern nur relativ zu dem ersten Glied.

Dies ist so, da sich das Koordinatensystem für ein anhängendes Glied relativ zum treibenden Glied verändert. Die Rotation $R(\theta_1)$ des ersten Gliedes entspricht somit zum neuen Koordinatensystem des zweiten Gliedes. Dadurch werden die beiden Rotationen $R(\theta_1)$ und $R(\theta_2)$ multipliziert. Aufgrund der Multiplikationsregeln von Rotationen kann $R(\theta_1) \cdot R(\theta_2)$ als eine Addition von beiden Winkeln θ_1 und θ_2 umgeformt werden.

$$\begin{aligned} X_D &= R(\theta_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) \cdot \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_D &= R(\theta_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_1 + \theta_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Diese Multiplikation kann auch als eine rekursive Multiplikation-Formel umgeformt werden:

$$\begin{aligned} X_D &= R(\theta_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_1) \cdot R(\theta_2) \cdot \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_D &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ X_D &= \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ X_D &= R(\theta_1) \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

Durch diese Umformung kann für eine beliebige Anzahl Gliedern die Endposition des Endeffektors im 2-dimensionalen Raum berechnet werden. Hier noch ein Beispiel mit 3 Gliedern.

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3 \longrightarrow x_{EE}, y_{EE}$$

Es kann jetzt entweder die Verkettungsformel benützt werden, oder die Reihenformel benützen.

Mit der Reihenformel (explizit):

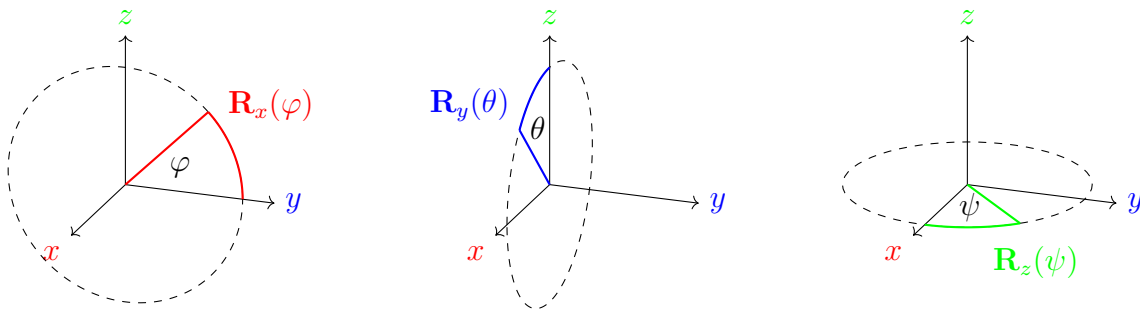
$$X_D = R(\theta_1) \begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_1 + \theta_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.1)$$

Oder mit der Verkettungsformel (rekursiv):

$$X_D = R(\theta_1) \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_2) \left(\begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_3) \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) \quad (6.2)$$

6.1.2. FK im 3-dimensionalen Raum

Dieses Vorgehen in der direkten Kinematik kann man auch in den 3-dimensionalen Raum umsetzen. Jedoch erscheinen durch das Hinzufügen von einer weiteren Achse zwei weitere Rotationsachsen. Somit sind neben den 3 verschiedenen Achsen entsprechend auch drei verschiedene Rotationsachsen vorhanden.



Jede von diesen Rotationsachsen verfügt über einer eigenen Winkelrotation.

X-Rotation: φ

Y-Rotation: θ

Z-Rotation: ψ

Dementsprechend verfügt jede Rotationsachse über eine Rotationsmatrix im 3-dimensionalen Raum.

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Um diese Rotationsmatrizen übersichtlich zu behalten, werden diese mit vereinfachten Begriffen geschrieben:

$$R_x(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x \\ 0 & s_x & c_x \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

$$R_y(\theta) = \begin{bmatrix} c_y & 0 & s_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

$$R_z(\psi) = \begin{bmatrix} c_z & -s_z & 0 \\ s_z & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

Diese drei Rotationsmatrizen können zu einer allgemeinen Rotationsmatrix zusammengesetzt werden.

$$R(\varphi, \theta, \psi) = R_z(\psi) \times R_y(\theta) \times R_x(\varphi) \quad (6.9)$$

$$= \begin{bmatrix} c_z & -s_z & 0 \\ s_z & c_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_y & 0 & s_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_y & 0 & c_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_x & -s_x \\ 0 & s_x & c_x \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$R(\varphi, \theta, \psi) = \begin{bmatrix} c_z c_y & c_z s_y s_x - s_z c_x & c_z s_y c_x + s_z s_x \\ s_z c_y & s_z s_y s_x + c_z c_x & s_z s_y c_x - c_z s_x \\ -s_y & c_y s_x & c_y c_x \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

Wichtig zu beachten ist, dass die Reihenfolge der Multiplikation der Rotationsmatrizen dementsprechend eine andere Rotation ergibt. Es können Phänomene wie «Gimble-Locking» entstehen.

Dementsprechend wirkt die Rotationmatrize auch anders, wenn eine andere Reihenfolge gewählt wird. In diesem Beispiel wird eine ZYX -Rotationsmatrize angewendet, welche ein anderes Resultat geben würde als eine XYZ -Rotationsmatrize.

Diese kann somit gleich angewendet werden wie bei einer 2-dimensionalen Konstruktion. In diesem Fall werden die Glieder nur an bestimmten Rotationsachsen gedreht. Als Beispiel nimmt man ein Glied, das parallel zur Y -Achse vom Nullpunkt ausgestreckt wird und um die Rotationsachse Y rotiert wird:

$$X_D = R(0, \theta_1, 0) \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{y_1} & 0 & s_{y_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{y_1} & 0 & c_{y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Da jetzt dieses Glied vom Nullpunkt auf der Y -Achse gestreckt wird, wirkt die Rotation in Y -Richtung nichts aus. Jedoch hat diese Rotation einen Einfluss auf die darauffolgenden angehängten Glieder. Um das besser zu visualisieren, wird ein zweites Glied genommen, das an der X -Achse angelegt wird und an das Ende des ersten Gliedes angesetzt wird. Die Rotation des zweiten Gliedes erfolgt anhand der Z -Achse.

$$X_D = R(0, \theta_1, 0) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(0, 0, \psi_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (6.13)$$

$$X_D = \begin{bmatrix} c_{y_1} & 0 & s_{y_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{y_1} & 0 & c_{y_1} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{z_2} & -s_{z_2} & 0 \\ s_{z_2} & c_{z_2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \quad (6.14)$$

$$X_D = \begin{bmatrix} c_{y_1} & 0 & s_{y_1} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{y_1} & 0 & c_{y_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s_{z_2} L_2 \\ c_{z_2} L_2 + L_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

$$X_D = \begin{bmatrix} -c_{y_1} s_{z_2} L_2 \\ c_{z_2} L_2 + L_1 \\ s_{y_1} s_{z_2} L_2 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

Somit beeinflusst wie bei einer 2-dimensionalen Konstruktion jede Rotation des vorherigen Gliedes diese der Folgenden.

$$X_D = R_x(\theta_1) \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\theta_2) \left(\begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\theta_3) \left(\begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\theta_4) \left(\begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\theta_5) \left(\begin{bmatrix} L_5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_z(\theta_6) \begin{bmatrix} L_6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right) \right) \right) \right) \right) \right) \quad (6.17)$$

Wichtig zu beachten ist, dass in dieser Darstellung ein Glied immer in X -Richtung ausgespannt wird. Grundsätzlich kann ein Glied nicht nur in X -Richtung ausgespannt werden, sondern auch in Y - oder Z -Richtung, sowie aus Kombination aus allen drei. Deshalb wäre folgende Darstellung eines Gliedes korrekter:

$$\begin{bmatrix} L_{n,x} \\ L_{n,y} \\ L_{n,z} \end{bmatrix}$$

wo n das entsprechende Glied ist. Aufgrund visueller Darstellung der Formeln, ist in der Erklärung jedes Glied in X -Richtung gestreckt worden.

6.2. Inverse Kinematik

Das Grundprinzip der inversen Kinematik, im Englischen auch bekannt als "Inverse Kinematics" oder "IK", besteht darin, dass wenn eine Position und Rotation vorgegeben wird, die vom Endeffektor erreicht werden muss, wodurch die verschiedenen Gelenkwinkel der einzelnen Glieder berechnet werden. Die inverse Kinematik ist deshalb sehr hilfreich, vor allem wenn man anhand einer Konstruktion einen Punkt A erreichen möchte und von diesem Punkt zu einem Punkt B bewegen möchte. Die Inverse Kinematik kann jedoch nicht nur auf Roboterarme limitiert werden, sondern werden auch in CAD-Softwares für die Simulation von verschiedenen Konstruktionen häufig benützt.

6.2.1. 1R-Manipulator

Um die Funktionsweise der inversen Kinematik richtig verstehen zu können, ist es am besten zuerst zu verstehen, wenn es nur ein Glied zu Verfügung hat, die um eine Rotationsachse rotiert wird. Bei einem 1R-Manipulatoren wird von einer Konstruktion aus einem Glied gesprochen, dass auf einer Achse rotiert wird. Für solch eine Konstruktion aus einem Glied in einem 2-dimensionalem, ist dies ziemlich einfach zu berechnen, indem die Rotation relativ zur Endposition $x_D = (x_D, y_D)$ zum Nullpunkt anhand des Pythagoras-Theorems berechnet wird.

$$\theta = \text{atan2}(y_D, x_D) = \tan^{-1} \frac{y_D}{x_D}$$

Dies führt zu einer einzigen Limitation, dass der Betrag der Endposition gleich zur Länge des Gliedes ist:

$$L_1 = |x_D| = \sqrt{x_D^2 + y_D^2}$$

Grundsätzlich gehört dieser Prozess nicht direkt zur inversen Kinematik, jedoch ist dies ein Grundsatz für jedes Problem in der inversen Kinematik.

6.2.2. 2R-Manipulator

Bei einem 2R-Manipulator wird über einer Konstruktion gesprochen, die aus 2 Gliedern besteht. Das erste Glied wird am Nullpunkt rotiert, während das zweite Glied um die Länge des zweiten Gliedes L_1 versetzt wird, wodurch der Endeffektor um die Länge des zweiten Gliedes L_2 versetzt wird. Es wird über einem 2R-Manipulator im 2-dimensionalem Raum gesprochen. Hingegen zum 1R-Manipulator sind 2 verschiedene Glieder vorhanden, die sich unabhängig voneinander drehen können. Somit verfügt das erste Glied über eine Rotation θ_1 und das zweite Glied über eine Rotation θ_2 . Durch das 2 einzelne Winkel vorhanden sind, ist deren Berechnung anhand einer gewünschten Position nicht mehr übersichtlich. Deshalb wird der Prozess der inversen Kinematik angewandt. Um die Winkel θ_1 und θ_2 berechnen zu können, wird zuerst von der Gleichung aus der direkten Kinematik

ausgegangen:

$$X_D = R(\theta_1) \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right).$$

Anstatt den Winkel der einzelnen Glieder auf einmal zu berechnen, wird schrittweise vorgegangen. Um dies zu verwirklichen, stellt man das erste Glied unter keinem Winkel, also $\theta_1 = 0$. Dadurch dass das erste Glied stationär ist, wird davon ausgegangen, dass das zweite Glied so positioniert werden sollte, dass sich der Endeffektor auf einem Kreis mit dem Radius der Länge des Betrags der Endposition befinden müsste. Sobald dies erfüllt wäre, könnte man das erste Glied entsprechend so rotieren, dass der Endeffektor die Endposition erreicht.

Somit entsteht eine neue Gleichung:

$$\begin{aligned} X_D &= R(0) \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + R(\theta_2) \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ X_D &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} L_1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \\ X_D &= \begin{bmatrix} c_2 L_2 + L_1 \\ s_2 L_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$c_n = \cos q_n$$

$$s_n = \sin q_n$$

Durch das jetzt den Winkel θ_1 berechnet werden muss, wird der Betrag von X_D genommen und nach θ_1 aufgelöst:

$$\begin{aligned} |X_D| &= \sqrt{(c_2 L_2 + L_1)^2 + (s_2 L_2)^2} \\ |X_D|^2 &= (c_2 L_2 + L_1)^2 + (s_2 L_2)^2 \\ |X_D|^2 &= c_2^2 L_2^2 + 2c_2 L_2 L_1 + L_1^2 + s_2^2 L_2^2 \end{aligned}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos (\alpha \pm \beta)$$

$$\Rightarrow \cos \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin \alpha = \cos (\alpha - \alpha) = 1$$

$$\begin{aligned}
|X_D|^2 &= L_2^2 (c_2^2 + s_2^2) + L_1^2 + 2c_2 L_2 L_1 \\
|X_D|^2 &= L_2^2 + L_1^2 + 2c_2 L_2 L_1 \\
2c_2 L_2 L_1 &= |X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2 \\
c_2 &= \frac{|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} \\
\theta_2 &= \pm \cos^{-1} \left(\frac{|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} \right)
\end{aligned}$$

Da durch die umgekehrte Kosinus-Funktion an zwei verschiedenen Stellen den gleichen Wert herausgegeben wird, werden auch zwei Werte für θ_2 erhalten

$$\begin{aligned}
q_{2,1} &= \cos^{-1} \left(\frac{|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} \right) \\
q_{2,2} &= -\cos^{-1} \left(\frac{|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} \right)
\end{aligned}$$

Durch das θ_2 bekannt ist, kann θ_1 dementsprechend auch berechnet werden, indem zuerst der Winkel vom Ursprung zum jetzigen Endeffektor berechnet wird und dieser vom Winkel vom Ursprung zur Endposition subtrahiert wird.

$$\begin{aligned}
\theta &= \text{atan2}(X_y, X_x) = \tan^{-1} \left(\frac{X_y}{X_x} \right) \\
\theta_k &= \text{atan2}(s_2 L_2, c_2 L_2 + L_1) = \tan^{-1} \left(\frac{s_2 L_2}{c_2 L_2 + L_1} \right) \\
q_{1,k} &= \theta - \theta_k
\end{aligned}$$

Da es zwei Lösungen für θ_2 gibt, entstehen zwei weitere Lösungen für θ_1 . Somit entstehen die Lösungspaare $\{q_{1,1}, q_{2,1}\}$ und $\{q_{1,2}, q_{2,2}\}$

Da es zwei verschiedene Lösungen gibt, kann die eine oder andere für den Lösungsansatz verwendet werden. Jedoch ist für den Prozess der inversen Kinematik die Berechnung aller möglichen Lösungen kritisch. Entsprechend ergeben sich Limitation für die Berechnung der Winkel θ_1 und θ_2 . Der erste Fall, in dem keine Lösung auffallen würde, wäre, wenn in der Berechnung von θ_2 die Berechnung $\frac{|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} > 1$ wäre, somit $|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2 > 2L_2 L_1$ oder anders gesagt:

$$|X_D|^2 > L_1^2 + 2L_2 L_1 + L_2^2 = (L_1 + L_2)^2$$

was bestimmt, dass der zu erreichende Punkt ausserhalb der Reichweite des Manipulators ist. Der zweite Fall wäre, wo die Berechnung von $\theta_2 < -1$ wäre, somit $|X_D|^2 - L_2^2 - L_1^2 < 2L_2 L_1$,

oder anders gesagt:

$$|X_D|^2 > L_1^2 - 2L_2L_1 + L_2^2 = (L_1 - L_2)^2$$

Damit dies möglich sein kann, müssen die Längen der beiden Glieder ungleich sein, wo der Endpunkt innerhalb eines Kreises mit einem Radius von $|L_1 - L_2|$ am Ursprungspunkt wäre.

6.2.3. 3R-Manipulator

Wenn man diesen Vorgang in die 3-dimensionale umsetzen würde, wäre der Prozess der indirekten Kinematik ähnlich zu der 2-dimensionalen. Um einen Punkt im 3-dimensionalen Raum erreichen zu können, bräuchte es mindestens ein weiteres Glied, das sich um die Y -Achse rotieren würde. Somit würde die optimale Konstruktion aus 3 Gliedern bestehen. Bei einem 3R Manipulatore wird das erste Glied um die Z -Achse rotiert, das zweite Glied um die Y -Achse rotiert mit einer Versetzung von L_1 in die Z -Richtung und das dritte Glied nochmals um die Y -Achse mit einer Versetzung von L_2 in die X -Richtung. Der Endeffektor wird vom dritten Glied über eine Distanz von L_3 in die X -Richtung versetzt. Mit dieser Definition können die Koordinaten des Endeffektors festgestellt werden:

$$x(q) = R_z(\theta_1) \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ L_1 \end{bmatrix} + R_y(\theta_2) \left(\begin{bmatrix} L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + R_y(\theta_3) \begin{bmatrix} L_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right)$$

$$x(q) = \begin{bmatrix} c_1(c_2(L_2 + c_3L_3) - s_2s_3L_3) \\ s_1(c_2(L_2 + c_3L_3) - s_2s_3L_3) \\ L_1 - s_2(L_2 + c_3L_3) - c_2s_3L_3 \end{bmatrix}$$

Ziel ist es diesen Endeffektor zu der Koordinate $X_D = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix}$ zu bringen.

Das Vorgehen bei einem Arm mit drei Rotationselementen ist sehr ähnlich, ausser, dass vorerst die Rotation des ersten Gliedes bestimmt werden muss. Anhand der Rotation des ersten Gliedes wird es möglich die Endposition auf eine Fläche projektieren zu können, die entlang zu der Rotation der Konstruktion verläuft. Somit ist die Rotation des ersten Gliedes

$$\theta_1 = \tan^{-1}\left(\frac{y_D}{x_D}\right)$$

Durch die Rotation des ersten Gliedes werden die zwei weiteren Glieder mitrotiert, wodurch die Endposition X_D relativ zum ersten Glied auch mitrotiert wird. Somit erfolgt eine neue

Endposition

$$R(0, 0, \theta_1) x_D = \begin{bmatrix} c_1 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 x_D \\ s_1 y_D \\ z_D \end{bmatrix}.$$

Anhand dieser neuen Endposition wird der Winkel der letzten zwei Glieder berechnen, genauso wie bei einem 2R Manipulator. Somit ist die Endposition X_G für die zwei Glieder auf einer 2-dimensionalen Ebene

$$X_G = \begin{bmatrix} \sqrt{(c_1 x_N)^2 + (s_1 y_N)^2} \\ z_N \end{bmatrix}$$

Diese neue Endposition wird in die folgende Formel einsetzen:

$$\theta_3 = \cos^{-1} \left(\frac{|X_G|^2 - L_2^2 - L_1^2}{2L_2 L_1} \right)$$

Dadurch wird dann auch der Winkel θ_2 berechnet:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{y_D - L_1}{\sqrt{x_D^2 + z_D^2}} \right)$$

$$\theta_k = \tan^{-1} \left(\frac{s_2 L_2}{c_2 L_2 + L_1} \right)$$

$$q_{2,k} = \theta - \theta_k$$

6.2.4. 6R-Manipulator

Die meisten industriellen 6R Manipulatoren sind aus einem Ellbogengelenk (Rotation um die Z-Achse), einer Schulter bestehend aus 2 sich orthogonal auftreffenden Achsen und einem Handgelenk mit weiteren 3 sich orthogonal auftreffenden Achsen. In dieser Ordnung ist die Konstruktion des Roboterarms in dieser Arbeit gegliedert

Der Endeffektor für einen industriellen Manipulatoren wird auch als ein Werkzeugmittelpunkt oder "Tool Center Point" genannt. Da der Ursprung des letzten Gliedes innerhalb des Handgelenks ist, wird von der Werkzeugmittelpunkt durch eine lokale Koordinate X_6 mit der entsprechenden Verstezung zum letzten Glied definiert. Dadurch wird es möglich die Weltkoordinaten vom Werkzeugmittelpunkt zu ermitteln

$$X_{tcp}(q) = T_6(q) X_6$$

wo X_{tcp} der Werkzeugmittelpunkt in den Weltkoordinaten ist und T_6 die entsprechende Rotation Versetzungen der verschiedenen Glieder sind. In diesem Fall wird verlangt, dass der Werkzeugmittelpunkt X_{tcp} zu der verlangten Position X_D gestellt wird und das letzte Glied über eine Rotation R_D verfügen sollte.

Von hier aus kann klargestellt werden, dass man mit der Rotation von allen sechs Gliedern schlussendlich die entsprechende Rotation erreichen muss

$$R_6(q) = R_D$$

Dadurch entsteht die Gleichung

$$X_D = X_{tcp}(q) = R_6(q) X_6 + T_6(q)$$

wo $T_6(q)$ die Position des Handgelenks ist. Somit also $T_6(q) = X_D - R_D X_6$.

Schlussendlich kann festgestellt werden, dass das Handgelenk nur durch die ersten drei Glieder und deren Rotationen beeinflusst wird: θ_1 , θ_2 und θ_3 . Dadurch wird ersichtlich, dass grundsätzlich nur ein 3R-IK problem gelöst wird und dann schlussendlich nach $x_D - R_D x_6$ gesucht wird. Es werden somit 4 Lösungen für $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ zusammengestellt. Entsprechend zu wie der Roboterarm aufgebaut wird, wird nur eine Lösungsvariante angewandt. Durch das jetzt die 3 Rotationen für die ersten drei Glieder vorhanden sind, wird die Rotation vom dritten Glied bestimmt

$$\begin{aligned} R_3 &= R_y(\theta_1) R_z(\theta_2) R_z(\theta_3) \\ &= \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & 0 & -s_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ s_3 & 0 & c_3 \end{bmatrix} \\ R_3 &= \begin{bmatrix} c_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3 & -c_1 c_2 s_3 - c_1 s_2 c_3 & -s_1 \\ s_2 c_3 + c_2 s_3 & -s_2 s_3 + c_2 c_3 & 0 \\ s_1 c_2 c_3 - s_1 s_2 s_3 & -s_1 c_2 s_3 - s_1 s_2 c_3 & c_1 \end{bmatrix} \\ R_6 &= R_3(\theta_1, \theta_2, \theta_3) R_x(\theta_4) R_y(\theta_5) R_x(\theta_6) = R_D \end{aligned}$$

Durch das, dass die Rotation von R_3 vorhanden, kann festgestellt werden, dass die Endrotation R_D durch das transponierte R_3^T zurückgedreht werden kann um dann die Rotation R_3^6 der letzten drei Glieder herausfinden zu können.

$$R_3^6 = R_x(\theta_4) R_y(\theta_5) R_x(\theta_6) = R_3^T(\theta_1, \theta_2, \theta_3) R_D$$

Somit entsteht eine XYX -Konversionsproblem der Eulerschen Winkel, da die Rotationen der letzten drei Winkel anhand der X -Achse, Y -Achse und nochmals der X -Achse erfolgen

$$R_3^6 = R_x(\theta_4) R_y(\theta_5) R_x(\theta_6)$$

Transponierte Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{m \times n}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \in K^{n \times m}$$

Transponierte Rotationsmatrizen

$$R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z^T(\theta) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_z^T(\theta) R_z(\theta) = \begin{bmatrix} c^2 + s^2 & cs - cs & 0 \\ cs - cs & c^2 + s^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

Durch die Vormultiplikation von R_3^6 wird eine folgende Rotationsmatrize geformt

$$R_3^6 = R_x(\theta_4) R_y(\theta_5) R_x(\theta_6)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_4 & -s_4 \\ 0 & s_4 & c_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_5 & 0 & c_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_6 & -s_6 \\ 0 & s_6 & c_6 \end{bmatrix}$$

$$R_3^6 = \begin{bmatrix} c_5 & s_5 s_6 & s_5 c_6 \\ s_4 s_5 & c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6 & -c_4 s_6 - s_4 c_5 c_6 \\ -c_4 s_5 & s_4 c_6 + c_4 c_5 s_6 & -s_4 s_6 + c_4 c_5 c_6 \end{bmatrix}$$

Zusätzlich wird die Rotationsmatrize der Endrotation folgenderweise bezeichnet

$$R_3^T(\theta_1, \theta_2, \theta_3) R_D = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

Durch das jetzt bewusst ist, wie die Rotation der letzten 3 Glieder aufgebaut werden sollte und wie die Rotationsmatrize der Endrotation mit der transponierten Rotationsmatrize der ersten drei Glieder aussieht, können diese gleichgesetzt werden

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_5 & s_5 s_6 & s_5 c_6 \\ s_4 s_5 & c_4 c_6 - s_4 c_5 s_6 & -c_4 s_6 - s_4 c_5 c_6 \\ -c_4 s_5 & s_4 c_6 + c_4 c_5 s_6 & -s_4 s_6 + c_4 c_5 c_6 \end{bmatrix}$$

Somit stellt sich heraus, dass der Winkel θ_5 durch $r_{11} = c_5$ bestimmt werden kann

$$\theta_5 = \pm \cos^{-1}(r_{11})$$

Mit einem bekannten Wert für θ_5 können zusätzlich θ_4 und θ_6 festgestellt werden

$$\begin{aligned} \theta_4 &= \text{atan2}(r_{21}, -r_{31}) = \tan^{-1}\left(\frac{r_{21}}{-r_{31}}\right) \\ \theta_6 &= \text{atan2}(r_{12}, r_{13}) = \tan^{-1}\left(\frac{r_{12}}{r_{13}}\right) \end{aligned}$$

Es gibt eine einzige Ausnahme in dieser Situation, die zu einer Singularität entspricht. Diese entsteht, wenn $r_{11} = 1$ entspricht. Da

$$r_{11} = 1 \Rightarrow \cos^{-1} 1 = 0 \Rightarrow \theta_5 = 0$$

Somit ist der Fall, dass die Winkel θ_4 und θ_6 nicht berechenbar sind, da

$$\sin \theta_5 = 0$$

Dadurch ergibt sich eine unendliche Anzahl Lösungen für

$$\theta_4 + \theta_6 = \tan^{-1} \frac{r_{23}}{r_{22}}$$

Durch das aber die Rotation θ_4 und θ_6 auf der X -Achse erfolgt, kann bestimmt werden, dass nur das letzte Glied rotiert wird, somit also $\theta_4 = 0$. Dadurch ergibt sich:

$$\theta_4 = 0$$

$$\theta_5 = 0$$

$$\theta_6 = \cos^{-1} r_{22}$$

6.3. Theoretische Umsetzung eines 6R-Manipulatorens mit IK

Durch das die Funktionsweise der Inversen Kinematik bekannt ist, wird es möglich den ganzen Prozess zur Berechnung der Gelenkwinkel eines 6R-Manipulatorens zu verallgemeinern. Für die Berechnung von $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}$ werden die Eingaben $\{x, y, z, \varphi, \theta, \psi, L_1, L_2, L_3, L_4\}$ wo L_1 die Länge der Schulter, L_2 die Länge des Oberarms, L_3 die gesamte Länge vom Anstzpunkt des Oberarms bis zu Handgelenk und L_4 die Länge des Handgelenks ist. Somit ist definiert:

Eingaben:

$$x, y, z, \varphi, \theta, \psi, L_1, L_2, L_3, L_4$$

Ausgaben:

$$\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$$

Durch die Eingaben wird zuerst eine zu erreichende Rotationsmatrix R_D geformt

$$R_D = R_z(\psi) R_y(\theta) R_x(\varphi)$$

Danach wird festgesetzt, was die Endposition X_D ist

$$X_D = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - R_D \begin{bmatrix} L_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dadurch können die jeglichen Berechnungen der Gelenkwinkel folgende Werte berechnet werden:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \tan^{-1} \left(\frac{y_D}{x_D} \right) = \text{atan2}(y_D, x_D) \\ \theta_2 &= \tan^{-1} \left(\frac{y_D - L_1}{\sqrt{x_D^2 + z_D^2}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{L_2 \sin \theta_2}{L_1 + L_2 \cos \theta_2} \right) \\ &= \text{atan2} \left(y_D - L_1, \sqrt{x_D^2 + z_D^2} \right) - \text{atan2} (L_2 \sin \theta_2, L_1 + L_2 \cos \theta_2) \\ \theta_3 &= \pm \cos^{-1} \left(\frac{(x_D^2 + z_D^2 + (z_D - L_1)^2) - L_1^2 - L_2^2}{2L_1 L_2} \right) \end{aligned}$$

$$R_3 = R_y(\theta_1) R_z(\theta_2) R_z(\theta_3)$$

$$R_3^T R_D = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(r_{21}, -r_{31}) = \tan^{-1} \frac{r_{21}}{-r_{31}}$$

$$\theta_5 = \pm \cos^{-1} r_{11}$$

$$\theta_6 = \text{atan2}(r_{12}, r_{13}) = \tan^{-1} \frac{r_{12}}{r_{13}}$$

Im Fall einer Singularität mit $r_{11} = 1$ bzw. $\theta_5 = 0$, dann

$$\theta_4 = 0$$

$$\theta_5 = 0$$

$$\theta_6 = \cos^{-1} r_{22}$$

6.4. Praktische Umsetzung eines 6R-Manipulatoren mit IK

7. Resultate und Diskussion

7.1. Komplette Konstruktion

7.2. Auswertung

7.2.1. Geschwindigkeit

7.2.2. Genauigkeit und Wiederholbarkeit

7.2.3. Stromverbrauch

8. Zusammenfassung und Ausblicke

8.1. Zukünftige Ergänzungen

8.1.1. Zusätzliche Funktionalitäten

8.1.2. Interpolation

8.1.3. FPGA

8.1.4. Einbettung von KI

8.2. Reflexion

9. Quellenverzeichnis

10. Redlichkeitserklärung

A. Anhang