

# Schaltungstechnik 2

## Reaktive Netzwerkelemente

### Kapazität



### Induktivität



### Allgemein

$$[C] = \frac{As}{V} = F$$

$$[L] = \frac{Vs}{A} = H$$

$$\text{Ladung } q : [q] = As = C$$

$$\text{Fluss } \Phi : [\Phi] = Vs = Wb$$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \dot{q}(t)$$

$$u(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt} = \dot{\Phi}(t)$$

$$q(t) = q_0 + \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau$$

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \int_{t_0}^t u(\tau) d\tau$$

$$C = \frac{dq}{du}$$

$$L = \frac{d\Phi}{di}$$

### Lineare Reaktanz

$$q(t) = C \cdot u(t)$$

$$\Phi(t) = L \cdot i(t)$$

$$i(t) = C \cdot \dot{u}(t)$$

$$u(t) = L \cdot \dot{i}(t)$$

### Blindwiderstand

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$X_L = \omega L$$

## Zusammenschaltung reaktiver Eintore

### Kapazität

$$\text{Reihenschaltung: } \frac{1}{C_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{C_1} + \dots + \frac{1}{C_i}$$

$$\text{Parallelschaltung: } C_{\text{gesamt}} = C_1 + \dots + C_i$$

### Induktivität

$$\text{Reihenschaltung: } L_{\text{gesamt}} = L_1 + \dots + L_i$$

$$\text{Parallelschaltung: } \frac{1}{L_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{L_1} + \dots + \frac{1}{L_i}$$

## Dualität

$$(u, q) \in F \Leftrightarrow \left(\frac{u}{R_d}, R_d q\right) = (i, \Phi) \in F^d$$

$$(i, \Phi) \in F \Leftrightarrow (R_d i, \frac{\Phi}{R_d}) = (u, q) \in F^d$$

$$C = \frac{L}{R_d^2}; \quad L = C \cdot R_d^2$$

## Eigenschaften

### F ist...

- kapazitiv
- induktiv
- ungepolt
- spannungsgesteuert
- stromgesteuert
- ladungsgesteuert
- flussgesteuert
- streng linear

- linear
- stückweise linear
- verlustfrei

### Kennlinie von F...

- $\exists$  Beziehung zwischen  $q$  und  $u$
- $\exists$  Beziehung zwischen  $\Phi$  und  $i$
- ... ist punktsymmetrisch zu  $(0, 0)$
- $\exists$  Darstellung  $q = c(u)$
- $\exists$  Darstellung  $\Phi = l(i)$
- $\exists$  Darstellung  $u = c^{-1}(q)$
- $\exists$  Darstellung  $i = l^{-1}(\Phi)$
- ... ist Ursprungsgerade, Ursprung oder ganze  $u$ - $q$ - bzw.  $i$ - $\Phi$ -Ebene
- ... ist eine beliebige Gerade
- ... besteht aus Geradenstücken
- ... liegt vollständig auf den Achsen der  $u$ - $i$ - Ebene  $\forall t. p(t) = u(t)i(t) = 0$

## Netzwerkelemente mit Mehrfachcharakter

- Nullator, Norator, Leerlauf und Kurzschluss sind resistiv, kapazitiv, induktiv und memristiv
- Spannungsquellen sind resistiv und kapazitiv
- Stromquellen sind resistiv und induktiv

## Energie

Ideale Reaktanzen sind verlustlos, falls die Kennlinie keine geschlossenen Schleifen enthält.

### Kapazität

$$W_C = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot \frac{dq(t)}{dt} dt = \int_{q_1}^{q_2} u(q) dq$$

$$\text{Falls linear: } W_C = \frac{C}{2} \cdot u^2 = \frac{1}{2C} \cdot q^2$$

### Induktivität

$$W_L = \int_{t_1}^{t_2} u(t) \cdot i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} i(t) \cdot \frac{d\Phi(t)}{dt} dt = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} i(\Phi) d\Phi$$

$$\text{Falls linear: } W_L = \frac{L}{2} \cdot i^2 = \frac{1}{2L} \cdot \Phi^2$$

### Relaxationspunkte

Relaxationspunkte (=Ruhepunkte):  
Betriebspunkt, in dem die in einer Reaktanz gespeicherte Energie minimal ist.  
Um zu einem anderen Punkt zu gelangen, muss stets Energie aufgenommen werden.

### Kandidaten:

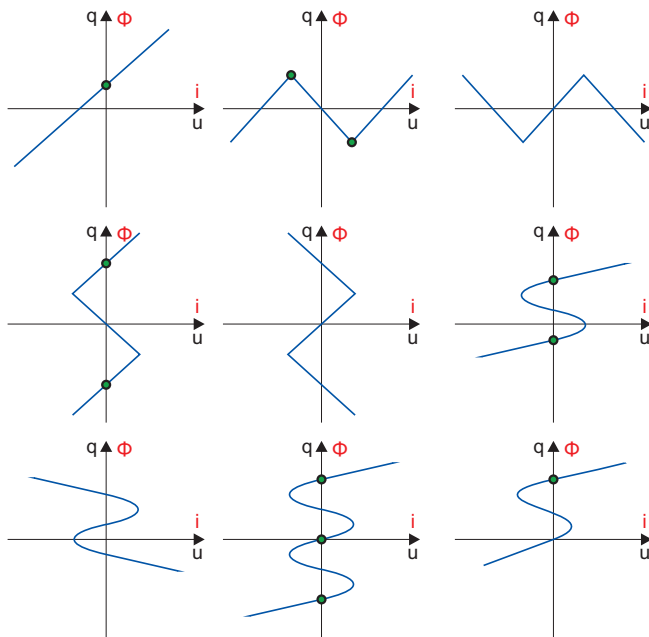
Extremwerte, Wendepunkte, Knicke, Schnittpunkte mit Achsen

### Energie steigt falls:

$u > 0 \wedge q$  steigt oder  $u < 0 \wedge q$  fällt.

bzw.

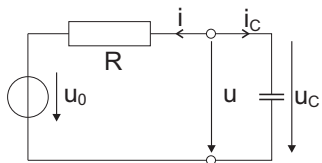
$i > 0 \wedge \Phi$  steigt oder  $i < 0 \wedge \Phi$  fällt.



## Schaltungen ersten Grades

### 1. Ersatzschaltbild erstellen

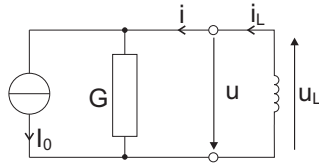
#### Kapazität



Helmholz / Thevenin

Zustandsgröße:  $u_c(t)$ Zeitkonstante:  $\tau = R \cdot C$ 

#### Induktivität



Mayer / Norton

Zustandsgröße:  $i_L(t)$ Zeitkonstante:  $\tau = G \cdot L$ 

### 2. Differentialgleichung aufstellen

$$i_C(t) = C \cdot \dot{u}_C(t)$$

$$u_L(t) = L \cdot \dot{i}_L(t)$$

$$i(t) = \frac{u_c - U_0}{R}$$

$$u(t) = \frac{i_L - I_0}{G}$$

$$C \cdot \dot{u}_C(t) = -\frac{u_c - U_0}{R}$$

$$L \cdot \dot{i}_L(t) = -\frac{i_L - I_0}{G}$$

$$\dot{u}_c = -\frac{1}{RC} \cdot u_c + \frac{1}{RC} \cdot U_0$$

$$\dot{i}_L = -\frac{1}{GL} \cdot i_L + \frac{1}{GL} \cdot I_0$$

### 3. Lösung der Differentialgleichung

#### Konstante Erregung

Kapazität:

$$u_C(t) = u_C(t_\infty) + [u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}$$

$$i_C(t) = -\frac{C}{\tau} [u_C(t_0) - u_C(t_\infty)] \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}$$

$$u_C(t_\infty) = U_0 \quad (\dot{u}_C \stackrel{!}{=} 0) \text{ Gleichgewichtszustand}$$

Induktivität:

$$i_L(t) = i_L(t_\infty) + [i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}$$

$$u_L(t) = -\frac{L}{\tau} [i_L(t_0) - i_L(t_\infty)] \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}$$

$$i_L(t_\infty) = I_0 \quad (\dot{i}_L \stackrel{!}{=} 0) \text{ Gleichgewichtszustand}$$

#### Abschnittsweise konstante Erregung

Vorgehensweise wie zuvor, jedoch muss die Berechnung in Intervalle aufgeteilt werden.

Für jedes Intervall muss der Startwert berechnet werden.

#### Allgemeine Erregung

$$u_C(t) = \underbrace{u_C(t_0) \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}}}_{\text{zero input response}} + \underbrace{\int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \cdot u_0(t') \cdot e^{-\frac{t'-t}{\tau}} dt'}_{\text{zero state response}} \quad \forall t \geq t_0$$

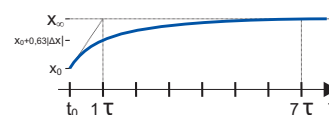
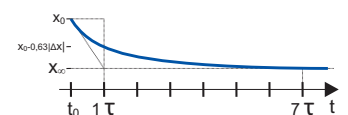
$$i_L(t) = i_L(t_0) \cdot e^{-\frac{t_0-t}{\tau}} + \int_{t_0}^t \frac{1}{\tau} \cdot i_0(t') \cdot e^{-\frac{t'-t}{\tau}} dt'$$

#### Kurvenverlauf

- Kapazität:  $u_C$  ist stetig;  $i_C$  kann springen
- Induktivität:  $i_L$  ist stetig;  $u_L$  kann springen

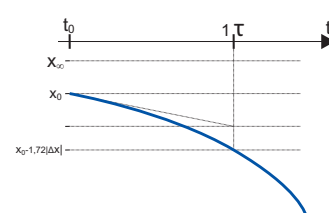
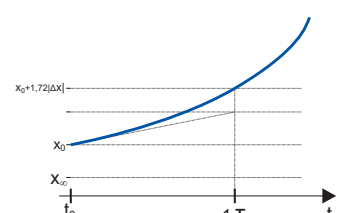
#### Stabiler Fall: $\tau > 0$

- Tangente an Kurve in  $(t_0, x_0)$  verläuft durch  $(t_0 + \tau, x_\infty)$
- Kurve hat sich nach  $1\tau$  um  $0,63 \cdot |x_0 - x_\infty|$  in Richtung  $x_\infty$  bewegt
- Nach  $7\tau$  ist  $x_\infty$  praktisch erreicht

 $x_\infty > x_0$  $x_\infty < x_0$ 

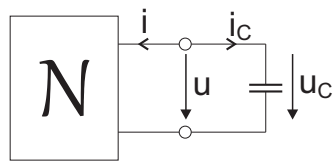
#### Instabiler Fall: $\tau < 0$

- Tangente an Kurve in  $(t_0, x_0)$  verläuft durch  $(t_0 + \tau, x_0 \pm |x_0 - x_\infty|)$  bzw. durch  $(t_0 - |\tau|, x_\infty)$
- Kurve hat sich nach  $1\tau$  um  $1,72 \cdot |x_0 - x_\infty|$  entgegen der Richtung  $x_\infty$  bewegt
- Kurve geht gegen  $\pm\infty$
- $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = x_\infty$
- Für eine negativ ablaufende Zeit wird  $x_\infty$  praktisch nach  $|7\tau|$  erreicht

 $x_\infty > x_0$  $x_\infty < x_0$ 

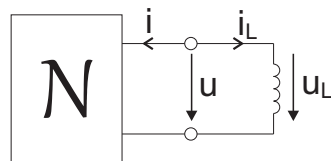
## Abschnittsweise lineare Schaltungen

Kapazitiv



$$i = -C \cdot \dot{u}$$

Induktiv



$$u = -L \cdot \dot{i}$$

**Dynamischer Pfad**Anfangspunkt entspricht  $u_C(t_0)$  bzw.  $i_L(t_0)$ Pfadverlauf (Richtung):

$$\frac{i}{u} < 0 \Rightarrow \dot{u} > 0$$

 $\Rightarrow u$  muss zunehmen

$$\frac{u}{i} < 0 \Rightarrow \dot{i} > 0$$

 $\Rightarrow i$  muss zunehmen

$$\frac{i}{u} > 0 \Rightarrow \dot{u} < 0$$

 $\Rightarrow u$  muss abnehmen

$$\frac{u}{i} > 0 \Rightarrow \dot{i} < 0$$

 $\Rightarrow i$  muss abnehmenGleichgewichtspunkt (GGP):

$$\dot{u}_C = 0 \Rightarrow i = 0$$

$$\dot{i}_L = 0 \Rightarrow u = 0$$

Bei stabilen RC-Schaltungen endet der dynamische Pfad stets auf der  $u$ -Achse ( $i_C = 0$ ), bei stabilen RL-Schaltungen stets auf der  $i$ -Achse ( $u_L = 0$ )

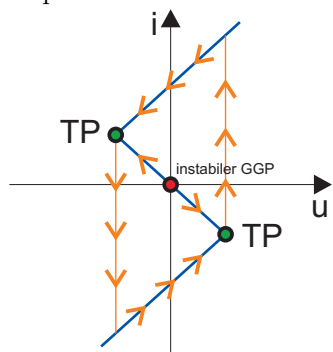
Tote Punkte:

= Punkte, die keine Gleichgewichtspunkte sind und an denen der Pfad nicht entlang der Kennlinie fortgesetzt werden kann ( $\Rightarrow$  Sprungphänomen)

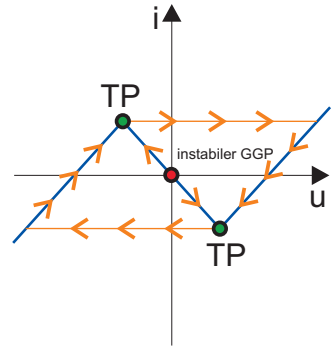
**Sprungphänomene**

Dauerhafte Sprungphänomene treten nur auf, falls der Gleichgewichtszustand nicht erreicht werden kann ( $\Rightarrow$  Relaxationsoszillator, astabiler Multivibrator)

Kapazitiv



Induktiv



Vertauscht man bei der astabilen Multivibratorschaltung die „+“ und „-“ Klemmen des Op-Amp-Eingangstores, so erhält man eine bistabile Kippstufe (Flip-Flop), die durch eine Strom- bzw. Spannungsquelle getriggert werden kann

## Lineare Schaltungen zweiten Grades

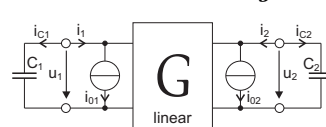
**Zustandsgleichung**

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A} \cdot \underline{x} + \mathbf{B} \cdot \underline{v}$$

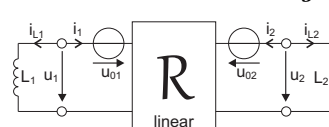
Zustandsvektor  $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ ; Zustandsmatrix  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ Einkoppelmatrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{2 \times k}$ ; Erregungsvektor  $\underline{v} \in \mathbb{R}^k$  $k$ : Anzahl der Erregungssignale**Ausgangsgleichung**

$$\underline{y} = \mathbf{C} \cdot \underline{x} + \mathbf{D} \cdot \underline{v}$$

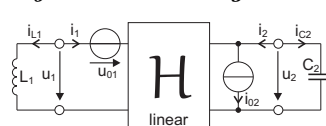
$\underline{y} \in \mathbb{R}^j$ ; Auskoppelmatrix  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{j \times 2}$ ; Durchgriff der Erregung  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{j \times k}$ ;  $j$ : Anzahl der Ausgangssignale

**1. ESB erstellen + Zweitorbeschreibung ermitteln****Leitwertsbeschreibung**

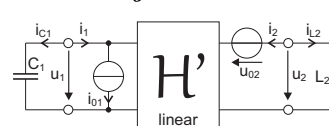
$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$

**Widerstandsbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

**Hybridbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{bmatrix} u_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}$$

**Inverse Hybridbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \mathbf{H}' \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}$$

**2. Differentialgleichung aufstellen****Leitwertsbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \cdot \dot{u}_1 \\ -C_2 \cdot \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}}$$

**Widerstandsbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot \dot{i}_1 \\ -L_2 \cdot \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & -L_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}}$$

**Hybridbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 \cdot \dot{i}_1 \\ -C_2 \cdot \dot{u}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}}$$

**Inverse Hybridbeschreibung**

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 \cdot \dot{u}_1 \\ -L_2 \cdot \dot{i}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -L_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\dot{\underline{x}}}$$

### 3. Gleichsetzen und Umformen

#### Leitwertsbeschreibung

$$\begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \mathbf{G} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T} \cdot \underline{v}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \cdot \underline{v}}$$

#### Widerstandsbeschreibung

$$\begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & -L_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \mathbf{R} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T} \cdot \underline{v}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \cdot \underline{v}}$$

#### Hybridbeschreibung

$$\begin{bmatrix} -L_1 & 0 \\ 0 & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \mathbf{H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} u_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T} \cdot \underline{v}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{L_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{01} \\ i_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \cdot \underline{v}}$$

#### Inverse Hybridbeschreibung

$$\begin{bmatrix} -C_1 & 0 \\ 0 & -L_2 \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \mathbf{H}' \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T} \cdot \underline{v}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix}}_{\underline{\dot{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ i_2 \end{bmatrix}}_{\underline{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{01} \\ u_{02} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B} \cdot \underline{v}}$$

## Lösen der Zustandsgleichung

### 1. Eigenwerte berechnen

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \text{Eigenwerte } \lambda_{1,2} = \frac{T}{2} \pm \sqrt{\frac{T^2}{4} - \Delta}$$

$$T = a_{11} + a_{22} = \text{tr}(\mathbf{A}); \quad \Delta = \det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Indizes so wählen, dass gilt:  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$

$\Rightarrow \lambda_1$  ist langsamer und  $\lambda_2$  ist schneller Eigenwert!

Falls EW konjugiert komplex:  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$

Falls  $\frac{T^2}{4} \geq \Delta \Rightarrow$  reelle Lösungen

Falls  $\frac{T^2}{4} \leq \Delta \Rightarrow$  konjugiert komplexe Lösungen

Ein System ist stabil, wenn für alle  $\lambda_i$  gilt:  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$

### 2. Eigenvektoren berechnen

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \underline{q} \stackrel{!}{=} \underline{0}$$

$$a_{12} \neq 0 : \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_1 \end{bmatrix}; \quad \underline{q}_2 = \begin{bmatrix} -a_{12} \\ a_{11} - \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} \neq 0 : \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_1 \\ -a_{21} \end{bmatrix}; \quad \underline{q}_2 = \begin{bmatrix} a_{22} - \lambda_2 \\ -a_{21} \end{bmatrix}$$

$$a_{12} = a_{21} = 0 : \Rightarrow \underline{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{q}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

#### Achtung:

Bei diesen Lösungsformeln stimmen die Einheiten nicht! Die Eigenvektoren besitzen die gleiche Einheit wie der Vektor  $\underline{x}$  (Eingangsvektor).

Alle Vielfachen dieser Lösungen sind ebenso Eigenvektoren!

Falls Eigenvektoren konjugiert komplex:

$$\underline{q}_r = \text{Re}(\underline{q}_1); \quad \underline{q}_i = \text{Im}(\underline{q}_1)$$

### 3. Lösung

#### Homogene Zustandsgleichung (ohne Erregung)

$$\underline{\dot{x}}(t) = \mathbf{A} \underline{x}(t)$$

1. Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\underline{x}_0 = c_1 \underline{q}_1 + c_2 \underline{q}_2$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{q}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{q}_2$$

2. Fall:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1 = x_{01}; \quad c_2 = x_{02}$$

$$\underline{x}(t) = e^{\lambda t} [\mathbf{1} + (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1})t] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

3. Fall:  $\lambda_1 = \overline{\lambda_2} = \lambda = \alpha \pm j\beta; \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C}$

$$\underline{x}_0 = c_1 \underline{q}_r + c_2 \underline{q}_i$$

$$\underline{x}(t) = c_1 \cdot \text{Re}(e^{\lambda t} \underline{q}) + c_2 \cdot \text{Im}(e^{\lambda t} \underline{q})$$

$$\underline{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} [\cos(\beta t) \underline{q}_r - \sin(\beta t) \underline{q}_i] +$$

$$c_2 e^{\alpha t} [\sin(\beta t) \underline{q}_r + \cos(\beta t) \underline{q}_i]$$

#### Alternativ: Transformation auf Normalform

= Zerlegen einer Schaltung zweiten Grades in zwei Schaltungen ersten Grades (=Entkopplung).

1. Fall:  $\lambda_1 \neq \lambda_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} \quad |\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\rightarrow \dot{\underline{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\underline{x} \quad |\underline{x} = \mathbf{Q}\underline{\xi}$$

$$\rightarrow \mathbf{Q}\dot{\underline{\xi}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\underline{\xi}$$

$$\Rightarrow \text{Normalform: } \dot{\underline{\xi}}(t) = \mathbf{\Lambda}\underline{\xi}(t)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}\underline{x}; \quad \underline{\xi}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\underline{x}_0;$$

$$\text{Lösung: } \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-t_0)}\xi_{01} \\ e^{\lambda_2(t-t_0)}\xi_{02} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rücktransformation: } \underline{x}(t) = \mathbf{Q}\underline{\xi}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \mathbf{q}_1 e^{\lambda_1(t-t_0)}\xi_{01} + \mathbf{q}_2 e^{\lambda_2(t-t_0)}\xi_{02}$$

$$\underline{2. \text{ Fall: }} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{und } \mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Problem:  $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}$  nicht invertierbar! (wg. Jordan Form)

$$\dot{\underline{x}} = \mathbf{A}\underline{x} \quad |\mathbf{A} = \mathbf{Q}'\mathbf{J}\mathbf{Q}'^{-1}$$

$$\rightarrow \dot{\underline{x}} = \mathbf{Q}'\mathbf{J}\mathbf{Q}'^{-1}\underline{x} \quad |\underline{x} = \mathbf{Q}'\underline{\xi}$$

$$\rightarrow \mathbf{Q}'\dot{\underline{\xi}} = \mathbf{Q}'\mathbf{J}\mathbf{Q}'^{-1}\mathbf{Q}'\underline{\xi}$$

$$\Rightarrow \text{Jordan-Normalform: } \dot{\underline{\xi}} = \mathbf{J} \cdot \underline{\xi}$$

$$a_{12} \neq 0: \Rightarrow \mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} -a_{12} & -a_{12} \\ \frac{a_{11}-a_{22}}{2} & \frac{a_{11}-a_{22}}{2} - 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}'^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}-a_{22}-2}{2a_{12}} & 1 \\ \frac{a_{22}-a_{11}}{2a_{12}} & -1 \end{bmatrix}$$

$$a_{21} \neq 0: \Rightarrow \mathbf{Q}' = \begin{bmatrix} \frac{a_{22}-a_{11}}{2} & \frac{a_{22}-a_{11}}{2} - 1 \\ -a_{21} & -a_{21} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q}'^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{22}-a_{11}-2}{2a_{21}} \\ -1 & \frac{a_{11}-a_{22}}{2a_{21}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad \underline{\xi}_0 = \mathbf{Q}'^{-1}\underline{x}_0;$$

$$\text{Lösung: } \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}(\xi_{01} + t\xi_{02}) \\ e^{\lambda t}\xi_{02} \end{bmatrix}$$

$$\text{Rücktransformation: } \underline{x}(t) = \mathbf{Q}'\underline{\xi}(t)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \mathbf{q}_1(e^{\lambda(t-t_0)}\xi'_{01} + (t-t_0)e^{\lambda(t-t_0)}\xi'_{02}) + \mathbf{q}_2 e^{\lambda(t-t_0)}\xi'_{02}$$

$$\underline{3. \text{ Fall: }} \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \quad (\lambda = \lambda^*) \quad \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} \text{ (reellwertige NF)}$$

Die reellwertige Normalform ( $\underline{\xi}'$ ) wird für eine zwei-dimensionale Darstellung des Phasenportraits benötigt.

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q & q^* \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q}_{reell} = \begin{bmatrix} q_r & -q_i \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \alpha + j\beta & 0 \\ 0 & \alpha - j\beta \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Lambda}_{reell} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Für  $\underline{\xi}$  siehe 1. Fall mit  $\lambda_1 = \alpha + j\beta$  und  $\lambda_2 = \alpha - j\beta$

$$\underline{\xi}_{reell} = \mathbf{Q}_{reell}^{-1}\underline{x}; \quad \underline{\xi}_{reell0} = \mathbf{Q}_{reell}^{-1}\underline{x}_0$$

$$\underline{\xi}_{reell} = \mathbf{Q}_{reell}^{-1}\mathbf{Q}\underline{\xi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -j & j \end{bmatrix}\underline{\xi} = \begin{bmatrix} 2\text{Re}(\xi_1) \\ 2\text{Im}(\xi_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\gamma \\ 2\delta \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\xi}_0 = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma + j\delta \\ \gamma - j\delta \end{bmatrix} \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R})$$

**Autonome Zustandsgleichung (konstante Erregung)**

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \underbrace{\mathbf{B}v_0}_{\nu}$$

Falls  $\mathbf{A}$  invertierbar:

Koordinatentransformation:

$$\underline{x}' = \underline{x} + \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}v_0}_{-x_\infty}; \quad \dot{\underline{x}}' = \dot{\underline{x}} \quad \underline{x}_\infty = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}v_0$$

$$\Rightarrow \text{homogene DGL: } \dot{\underline{x}}' = \mathbf{A}\underline{x}' \rightarrow \text{siehe oben}$$

$$\text{Rücktransformation: } \underline{x} = \underline{x}' - \underbrace{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}v_0}_{x_\infty} = \underline{x}' - \underline{x}_\infty$$

Graphisch: Verschiebung des Ursprungs in  $\underline{x}_\infty$

**Zustandsgleichung mit allgemeiner Erregung**

Falls  $\lambda_1 \neq \lambda_2; \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$

$$\dot{\underline{x}}(t) = \mathbf{A}\underline{x}(t) + \mathbf{B}v(t); \quad |\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\rightarrow \dot{\underline{x}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\underline{x} + \mathbf{B}v; \quad |\underline{x} = \mathbf{Q}\underline{\xi}$$

$$\rightarrow \mathbf{Q}\dot{\underline{\xi}} = \mathbf{Q}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{Q}\underline{\xi} + \mathbf{B}v$$

$$\Rightarrow \text{Transformation: } \dot{\underline{\xi}} = \mathbf{\Lambda}\underline{\xi} + \underbrace{\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}v}_{\nu'}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\xi} = \mathbf{Q}^{-1}\underline{x}; \quad \underline{\xi}_0 = \mathbf{Q}^{-1}\underline{x}_0$$

$$\text{Lösung: } \underline{\xi}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t}\xi_{01} + \int_{t_0}^t e^{\lambda_1(t-t')} \nu'_1(t') dt' \\ e^{\lambda_2 t}\xi_{02} + \int_{t_0}^t e^{\lambda_2(t-t')} \nu'_2(t') dt' \end{bmatrix}$$

$$\text{Rücktransformation: } \underline{x} = \mathbf{Q}\underline{\xi}$$

#### 4. Phasenportraits

→ siehe letzte Seite

Falls das Phasenportrait in der  $x_1/x_2$ -Ebene dargestellt werden soll, dann müssen zuerst die Eigenvektoren eingezeichnet werden, die ein gedachtes Koordinatensystem ( $\xi_1/\xi_2$ -Ebene) aufspannen.

Das resultierende Phasenportrait der  $x_1/x_2$ -Ebene ist ein verzerrtes Bild der  $\xi_1/\xi_2$ -Ebene.

**Def.** Es gelte:  $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ , die Eigenfrequenz  $|\lambda_1|$  ist dann niedrig (langsam) und  $|\lambda_2|$  hoch (schnell).

$\Rightarrow \lambda_1$  langsamer EW und  $\lambda_2$  schneller EW.

### Konjugiert komplexe Eigenwerte

Der Drehsinn der Trajektorie ist in der  $\xi'$ -Ebene immer im Gegenuhrzeigersinn!

In der  $x_1/x_2$ -Ebene muss der Drehsinn so gewählt werden, dass die Trajektorie von  $\underline{q}_r$  zu  $-\underline{q}_i$  (über den kleineren Winkel) läuft.

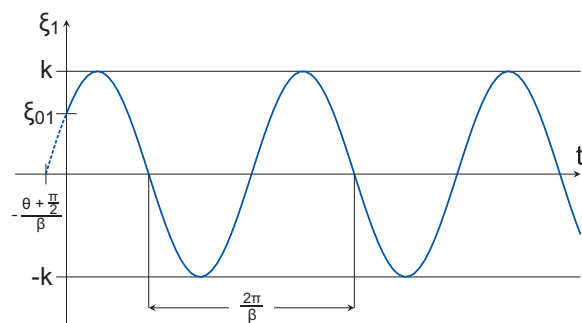
## 5. Zeitverlauf

Im Folgenden wird lediglich  $\xi_1$  betrachtet.

### Ungedämpfte Schwingung (ZV1)

Bei rein imaginären Eigenwerten  $\lambda_{1,2} = \pm j\beta$

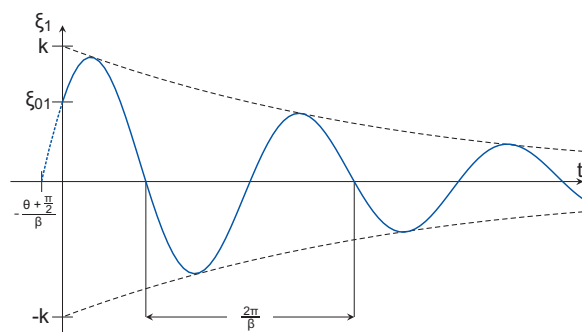
$$\xi_1(t) = k \cos(\beta t + \Theta); \quad \beta^2 = \omega_0^2 = \Delta$$



### Schwach gedämpfte Schwingung (ZV2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1(t) = 0$

Bei komplex konjugierten EW  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ;  $\alpha < 0$

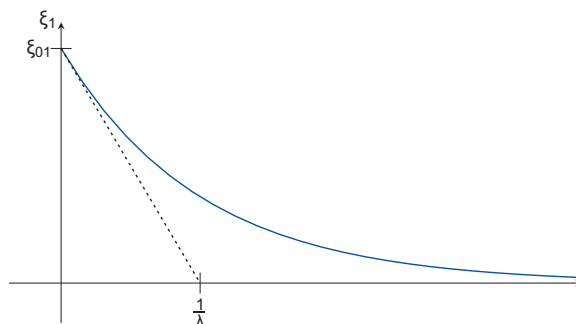
$$\xi_1(t) = k e^{\alpha t} \cos(\beta t + \Theta); \quad \beta = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}; \quad \alpha < 0$$



### Stark gedämpfte Schwingung (ZV3) $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1(t) = 0$

Bei rein reellen und unterschiedlichen Eigenwerten.

$$\xi_1(t) = \xi_{01} e^{\lambda t}; \quad \lambda < 0$$

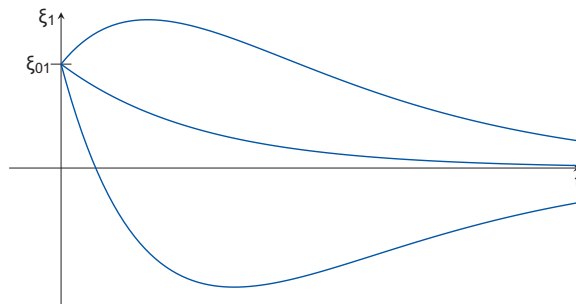


Da die Lösung für die Zustandsgrößen in der  $\underline{x}$ -Ebene eine Überlagerung von zwei Exponentialfunktionen ist, kann der Zeitverlauf dieser Zustandsgrößen jedoch Nulldurchgänge besitzen.

### Aperiodisch gedämpfte Schwingung (ZV4) $\lim_{t \rightarrow \infty} \xi_1(t) = 0$

Falls beide Eigenwerte identisch sind.

$$\xi_1(t) = (\xi_{01} + \xi_{02} t) e^{\lambda t}; \quad \lambda < 0$$



## Nichtlineare dyn. Schaltungen

### 1. Zustandsbeschreibung aufstellen

Zustandsgröße:

Kapazität:  $u_C$  (bzw.  $q$ ); Induktivität:  $i_L$  (bzw.  $\Phi$ )

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \underline{f}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} f_1(x_1; x_2) \\ f_2(x_1; x_2) \end{bmatrix}$$

Zustandsgleichung mittels KCL, KVL,  $i_C = C\dot{u}$  und  $u_L = L\dot{i}$  aufstellen.

### 2. Alle Gleichgewichtspunkte bestimmen

$$\dot{x}_1 = \dot{x}_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{nach } x_1 \text{ und } x_2 \text{ auflösen.}$$

Alternativ:

Direkt aus Schaltung bestimmen:  $C \rightarrow \text{LL}; L \rightarrow \text{KS}$

### 3. Linearisierung in allen Gleichgewichtspunkten

$$\text{Jacobi-Matrix aufstellen: } \mathbf{J}_{GPP_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \bigg|_{\underline{x}=GPP_i}$$

In  $P_i = GPP_i$  linearisierte Beschreibung:

$$\dot{x} = \underline{f}(x) \approx \underline{f}(\underline{P}_i) + \mathbf{J}_{\underline{P}_i} \cdot (x - \underline{P}_i); \quad \Delta \dot{x} \approx \mathbf{J}_{\underline{P}_i} \Delta x$$

#### 4. Eigenwerte / Eigenvektoren bestimmen

Für alle  $\mathbf{J}_{GGP_i}$  die Eigenwerte / Eigenvektoren bestimmen.

⇒ Phasenportrait in der Umgebung des GGP

#### 5. Prüfen, ob Satz von Hartmann gilt

Satz von Hartmann:

Linearisierung gültig  $\Leftrightarrow \forall \lambda_i$  von  $\mathbf{J}_{GGP_i}$  gilt:  $\operatorname{Re}(\lambda_i) \neq 0$

Ist der Realteil eines Eigenwertes null, so kann man keine Aussage über das Stabilitätsverhalten treffen (Ausnahme: stückweise lineare Systeme)

#### 6. Einzel-Phasenportraits zusammenfügen

Wenn alle Bauelemente der Schaltung ungepolt sind, so ist das Phasenportrait punktsymmetrisch zum Ursprung.

#### Konservative Schaltungen

(Jede verlustlose Schaltung ist konservativ, hinreichend genaue Modelle realer Schaltungen sind niemals konservativ!)

$$\text{Bedingung: } \dot{E} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial x_1} f_1 + \frac{\partial E}{\partial x_2} f_2 = 0$$

- nur Sattel- und Wirbelpunkte sind als Arten von Gleichgewichtspunkten möglich
- Trajektorien sind Äquipotentiallinien der Energiefunktion

$$\text{Gespeicherte Energie: } E = \frac{1}{2}(Cu_C^2 + Li_L^2)$$

$$\text{Scheitelwerte: } \hat{u}_C = \sqrt{\frac{2E}{C}}; \quad \hat{i}_L = \sqrt{\frac{2E}{L}}$$

$$\text{Dauer eine Umlaufes: } T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$u_C = \hat{u}_C \cos(\omega t - \Phi_0); \quad i_L = \hat{i}_L \sin(\omega t - \Phi_0)$$

Ergänzung zum Satz von Hartmann:

Ein GGP einer nichtlinearen dynamischen Schaltung ist genau dann ein Wirbelpunkt, wenn seine Jacobi-Matrix rein imaginäre Eigenwerte hat und das System in einer offenen Umgebung  $U$  des GGP konservativ ist.

#### Oszillatoren

Eine stabile Oszillation kann sich nur in einem nichtlinearen System einstellen.

- Phasenportrait ist stabiler Grenzyklus
- autonomes, dynamisches System zweiten Grades
- Es darf nur ein Gleichgewichtspunkt existieren und dieser muss instabil sein.
- Trajektorien müssen zu allen Anfangswerten aus Umgebung  $U$  beschränkt sein
- Zustandsgrößen müssen beschränkt sein (bei positiven, linearen  $C$ ,  $L$  und  $R$  immer der Fall)

#### Fast harmonischer Oszillator

- Frequenz abhängig von den Werten der Reaktanzen
- Amplitude abhängig von Nichtlinearität der Bauteile

$$\text{Resonanzfrequenz: } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

#### Relaxationsoszillator

Frequenz und Amplitude werden wesentlich von Nichtlinearität der Bauteile bestimmt

$$\omega_0 = \frac{\pi}{\ln(3)} \cdot \frac{1}{RC}; \quad 2\sqrt{\frac{L}{C}} \ll R$$

## Komplexe Wechselstromrechnung

#### Voraussetzungen

- lineares, zeitinvariantes, stabiles System mit periodischer Erregung.

Bei sinusförmiger Erregung mit der Kreisfrequenz  $\omega$  sind alle Signale in der Schaltung sinusförmig mit der gleichen Kreisfrequenz.

Es entstehen keine neuen Frequenzen!

#### Zeigerdarstellung

Zum reellen Signal  $x(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha)$  wird der Zeiger  $A = A_m e^{j\alpha}$  assoziiert. Mit der Amplitude  $A_m$  und Phase  $\alpha$ .

Es gilt:

$$x(t) = A_m \cos(\omega t + \alpha) = \operatorname{Re}(A_m e^{j(\omega t + \alpha)})$$

$$x(t) = \operatorname{Re}(A_m e^{j\alpha} e^{j\omega t}) = \operatorname{Re}(A e^{j\omega t})$$

#### Kapazität

#### Induktivität

$$I_C = j\omega C U_C; \quad U_C = \frac{1}{j\omega C} I_C \quad I_L = \frac{1}{j\omega L} U_L; \quad U_L = j\omega L I_L$$

#### Hilfssätze

##### Lemma 1: Eindeutigkeit

$$a(t) = b(t) \Leftrightarrow A = B; \quad \text{Signale gleich} \Leftrightarrow \text{Zeiger gleich}$$

##### Lemma 2: Linearität

$$\alpha a(t) + \beta b(t) = c(t) \Leftrightarrow \alpha A + \beta B = C$$

##### Lemma 3: Differentiation

$$b(t) = \frac{d}{dt} a(t) \Leftrightarrow B = j\omega A$$

#### Netzwerkfunktionen

##### Zweipolfunktionen

= Verhältnis von Zeigern des gleichen Tores (Immittanzen)

Impedanz (komplexer Widerstand, Scheinwiderstand):

$$Z = \frac{U}{I}; \quad Z_G = \frac{1}{G}; \quad Z_L = j\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{j\omega C}; \quad Z = R + jX$$

$Z$ : Impedanz (Scheinkomponente)

$R$ : Resistanz (Wirkkomponente)

$X$ : Reaktanz (Blindkomponente)

Admittanz (komplexer Leitwert, Scheinleitwert):

$$Y = \frac{I}{U}; \quad Y_R = \frac{1}{R}; \quad Y_L = \frac{1}{j\omega L}; \quad Y_C = j\omega C; \quad Y = G + jB$$

$Y$ : Admittanz (Scheinkomponente)

$G$ : Konduktanz (Wirkkomponente)

$B$ : Suszeptanz (Blindkomponente)

### Übertragungsfunktion

= Verhältnis von Zeigern unterschiedlicher Tore

$$\text{Allgemein: } H(j\omega) = \frac{OUTPUT}{INPUT}$$

Knotenspannungsanalyse:

$$\underline{U}_K = \mathbf{Y}_K^{-1}(j\omega) \underline{I}_q; \quad \underline{I}_q = (0, \dots, 0, I_n, 0, \dots, 0)^T$$

$$H(j\omega) = \frac{U_{Km}}{I_n} = \frac{(-1)^{n+m} \det \mathbf{Y}_{nm}(j\omega)}{\det \mathbf{Y}_K(j\omega)}$$

$\det \mathbf{Y}_{nm}(j\omega)$  ist die Unterdeterminante von  $\mathbf{Y}_K$ , die nach streichen der  $n$ -ten Zeile und  $m$ -ten Spalte entsteht.

Cramer'sche Regel:

$$U_{K_i} = \frac{\det \mathbf{Y}_{K_i}}{\det \mathbf{Y}_K}$$

$\det \mathbf{Y}_{K_i}$  entsteht durch Ersetzen der  $i$ -ten Spalte in  $\mathbf{Y}_K$  durch  $\underline{I}_q$

Eigenfrequenzen:

Substitution  $j\omega \rightarrow p$

Die Nullstellen des Nenner-Polynoms von  $H(p)$  entsprechen genau den Eigenfrequenzen des Systems (sofern sie nicht durch Nullstellen des Zähler-Polynoms herauskürzbar sind)

Das System ist stabil, wenn der Realteil aller Nullstellen des Nenners  $< 0$  ist.

## Darstellung des Frequenzgangs

### 1. Ortskurve

Die Ortskurve von  $H(j\omega)$  ist die Kurve, die der komplexe Zeiger  $H(j\omega)$  für  $\omega = 0$  bis  $\omega \rightarrow \infty$  durchläuft.

Die Ortskurve ist die Zusammenfassung des Amplituden- und Phasenverlaufs des Bodediagramms.

Dabei ist die Frequenzabhängigkeit nur mehr über Markierungen auf der Kurve darstellbar.

- 1) Aufteilen von  $H(j\omega)$  in  $Re()$  und  $Im()$
- 2) Werte für  $\omega = 0, \omega = \omega_0$  (Resonanzfrequenz) und  $\omega \rightarrow \infty$  bestimmen
- 3) Komplexe Ebene: Punkte für einzelne Werte einzeichnen. Die Verbindungslinie entspricht der Ortskurve

Anmerkung:

Komplexer Widerstand  $Z$  ist:

- in Widerstandsebene: Gerade

- in Leitwertsebene: Kreis

Komplexer Leitwert  $Y$  ist:

- in Widerstandsebene: Kreis

- in Leitwertsebene: Gerade

## 2. Bode-Diagramm

$$v(\omega) = 20 \lg \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right| [dB]; \quad \varphi(\omega) = \ln \left| \frac{H(j\omega)}{H(j\omega_0)} \right| [Np]$$

$$1Np \hat{=} \frac{20}{\ln(10)} dB \approx 8,686 dB; \quad 1dB \approx 0,115Np$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctan \frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))} & Re(H(j\omega)) \geq 0 \\ \arctan \frac{Im(H(j\omega))}{Re(H(j\omega))} + \pi & Re(H(j\omega)) < 0 \end{cases}$$

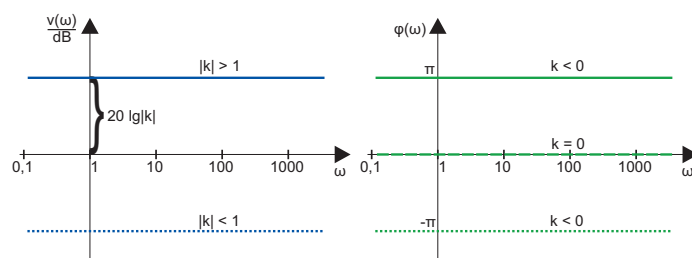
Rechenregeln:

$$v(H_1 H_2) = v(H_1) + v(H_2); \quad v\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = v(H_1) - v(H_2)$$

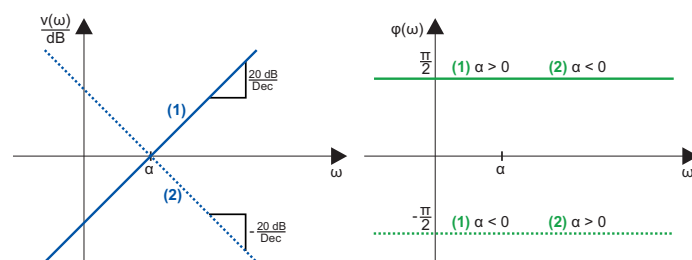
$$\varphi(H_1 H_2) = \varphi(H_1) + \varphi(H_2); \quad \varphi\left(\frac{H_1}{H_2}\right) = \varphi(H_1) - \varphi(H_2)$$

Beispiele:

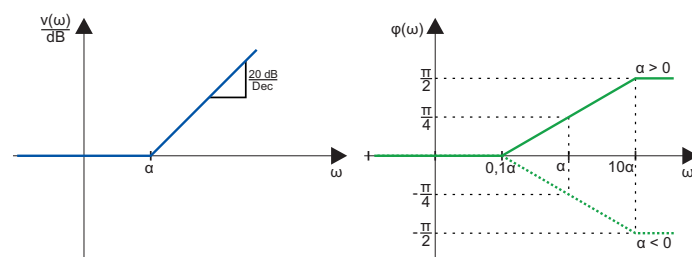
$$H(j\omega) = k = konst. \Rightarrow v(\omega) = 20 \lg |k|$$



$$(1) : H(j\omega) = \frac{j\omega}{\alpha}; \quad (2) : H(j\omega) = \frac{\alpha}{j\omega}$$

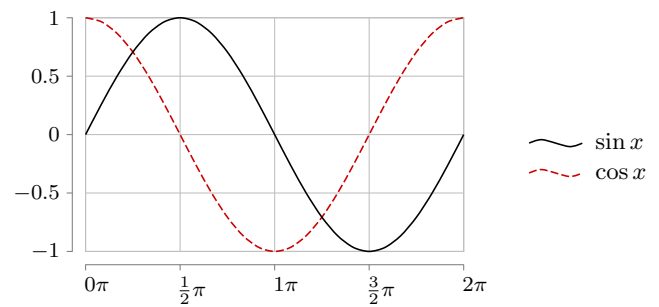
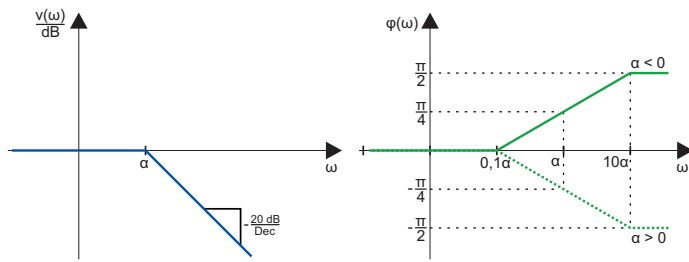


$$H(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{\alpha}$$

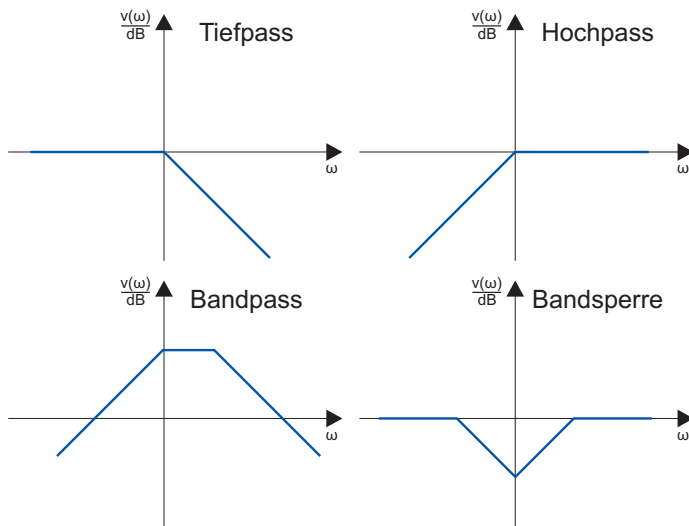


$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{j\omega}{\alpha}}$$





### Typische Übertragungsfunktionen:



### Matrix Invertieren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Lizenz: CC BY-NC-SA 3.0

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/de/>

### Komplexe Leistung

Scheinleistung:  $P_S = \frac{1}{2} \hat{U} \hat{I}^* = \frac{1}{2} |\hat{U}|^2 Y^* = P_W + jP_B$

Wirkleistung:  $P_W = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T u(t)i(t)dt = \operatorname{Re}(P_S)$

Blindleistung:  $P_B = \operatorname{Im}(P_S)$

### Sonstiges

#### Resonanzfrequenz

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

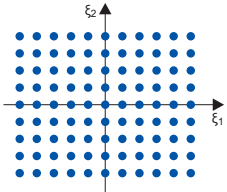
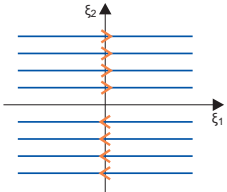
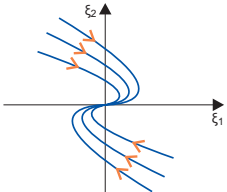
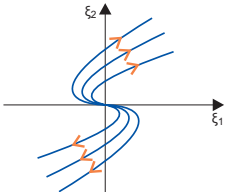
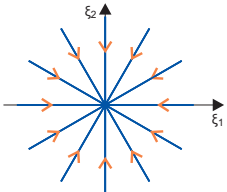
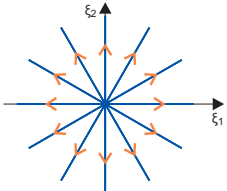
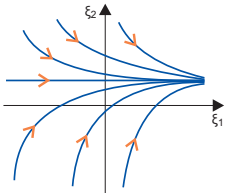
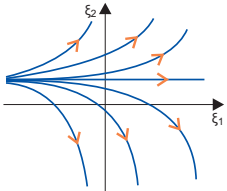
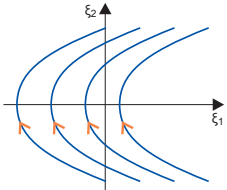
#### Grenzfrequenz (Grenzen der Bandbreite)

$$|\operatorname{Re}(Y)| = |\operatorname{Im}(Y)|; \quad |\operatorname{Re}(Z)| = |\operatorname{Im}(Z)|$$

$$f_g = \frac{R}{2\pi L}; \quad f_g = \frac{1}{2\pi RC}$$

#### Güte

$$Q = \frac{\omega_0 C}{G} = \frac{1}{\omega_0 LG} = \frac{1}{G} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

Ohne Erregung und ein reeller EW		Ohne Erregung und zwei reelle EW	
$\underline{\lambda} \equiv 0$ und Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ - stabil - Ebene von Ruhelagen		$\underline{\lambda}_2 < \underline{\lambda}_1 < 0$ neg. EW - asymptotisch stabil - Knoten 2. Art - Knotenpunkt	<b>ZV3</b>
$\underline{\lambda} \equiv 0$ und Matrix $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ - instabil		$0 < \underline{\lambda}_1 < \underline{\lambda}_2$ pos. EW - instabil - Knoten 2. Art - Knotenpunkt	<b>ZV3</b>
$\underline{\lambda} < 0$ und $\mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - asymptotisch stabil - Knoten 3. Art		$\underline{\lambda}_1 < 0 < \underline{\lambda}_2$ ungleiche Vorzeichen - instabil - Sattelpunkt - Hyperbelform	<b>ZV3</b>
$\underline{\lambda} > 0$ und $\mathbf{A} \neq \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - instabil - Knoten 3. Art		$\underline{\lambda}_2 < 0 < \underline{\lambda}_1$ - instabil - Sattelpunkt	<b>ZV3</b>
$\underline{\lambda} < 0$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - asymptotisch stabil - Knoten 1. Art		$\underline{\lambda}_2 < 0 = \underline{\lambda}_1$ - stabil	<b>ZV4</b>
$\underline{\lambda} > 0$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ - instabil - Knoten 1. Art		$\underline{\lambda}_1 = 0 < \underline{\lambda}_2$ - instabil	<b>ZV4</b>
Mit Erregung und reellen EW		Ohne Erregung und komplexen EW	
$\underline{\lambda}_2 < 0 = \underline{\lambda}_1$ - instabil		$\underline{\alpha} < 0; \underline{\beta} > 0$ $\underline{\lambda}_{1,2} = \underline{\alpha} \pm j\underline{\beta}$ - asymptotisch stabil - Strudelpunkt - Drehsinn in $x_1/x_2$ -Ebene evtl. anders!	<b>ZV2</b>
$\underline{\lambda}_1 = 0 < \underline{\lambda}_2$ - instabil		$\underline{\alpha} > 0; \underline{\beta} > 0$ - instabil - Strudelpunkt - Drehsinn in $x_1/x_2$ -Ebene evtl. anders!	<b>ZV2</b>
$\underline{\lambda}_1 = \underline{\lambda}_2 = 0$ und $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$ - instabil		$\underline{\alpha} = 0; \underline{\beta} > 0$ - stabil - Wirbelpunkt - Drehsinn in $x_1/x_2$ -Ebene evtl. anders!	<b>ZV1</b>