Решение тригонометрических уравнений

з) *Уравнение* $a\sin x \pm b\cos x = c$ $(c \neq 0)$. Такое уравнение решается с помощью формулы (14) (см. § 6).

Пример 16. Решить уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$.

Решение. Применяя формулу (14) из § 6, получаем

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

и) *Уравнение* $p(\sin x \pm \cos x, \sin x\cos x) = 0$. Данное уравнение решается с помощью замены $\sin x \pm \cos x = t$.

Пример 17. Решить уравнение

$$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0.$$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 = 0.$$

Теперь сделаем замену $\sin x + \cos x = t$. Тогда имеем $t^2 + 2t = 0$. Решая последнее уравнение, получим $t_1 = 0$, $t_2 = -2$. Отсюда

1) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) уравнение $\sin x + \cos x = -2$ не имеет корней.

Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$x = \frac{-\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

к) *Уравнение* $R(\sin x; \cos x) = 0$ с помощью формул

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

и замены $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ приводится к рациональному уравнению

$R\left(\frac{2z}{1+z^2}; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) = 0$.

Пример 18. Решить уравнение $4\sin x - 7\cos x = 7$.

Решение. Сделаем замены: $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}, \cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, где $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда имеем

$$4\frac{2z}{1+z^2}-7\frac{1-z^2}{1+z^2}-7=0 \Rightarrow 8z-7+7z^2-7-7z^2=0$$

или $8z = 14$. Откуда $z=\frac{7}{4}$.

Подставляя вместо z найденное значение, имеем уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$. Решив его, находим $x=2\operatorname{arctg}\frac{7}{4}+2\pi n$.

Решим еще несколько уравнений, не относящихся к рассмотренным выше типам.

Пример 19. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 6$.

Решение. Так как $\frac{6}{\sqrt{3^2+4^2}}>1$, то данное уравнение не имеет решения.

Пример 20. Решить уравнение $\cos 3x + \cos 4x + \cos x = 3$.

Решение. Так как $|\cos kx| \le 1$, то в заданном уравнении левая часть равна 3 только в случае $\cos x = 1$, $\cos 3x = 1$ и $\cos 4x = 1$. Указанные равенства могут быть выполнены одновременно только при $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 21. Решить уравнение $1 - \cos^2 x + \sin^2 3x = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^2 x + \sin^2 3x = 0$. Сумма квадратов чисел равна нулю только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю: $\sin x = 0$, $\sin 3x = 0$. Отсюда $x_1 = \pi k$ и $x_2=\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. Общее решение уравнения можно записать как $x = \pi k$, $k \in Z$.

85. (00-2-49) При каких значениях a уравнение

$$sin^4x + cos^4x = a$$

разрешимо?
$A)\frac{1}{2} \le a \le 1$ $B)0 \le a \le \frac{1}{2}$ $C)a \ge \frac{1}{2}$
$D)a \le 1$ $E)0 \le a \le 1$

86. (00-3-49) Решите уравнение

$$4sin^2 2x = 3$$

$A)(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z$
$B)(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z$
$C) \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z$
$D)(-1)^n \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}, \ n \in Z$
$E) \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{3}, \ n \in Z$

87. (00-3-50) Найдите разность между наибольшим и наименьшим корнями уравнения

$$cos^2 x - \frac{1}{2} sin2x = 0,$$

на отрезке $[0; 2\pi]$.
$A)\frac{\pi}{2}$ $B)\frac{3\pi}{4}$ $C)\pi$ $D)\frac{5\pi}{4}$ $E)\frac{3\pi}{2}$

88. (00-4-42) Найдите сумму корней уравнения

$$\sqrt{1 - cosx} = sinx \quad (x \in [\pi; 3\pi])$$

$A)2\pi$ $B)5\pi$ $C)6\pi$ $D)3,5\pi$ $E)4,5\pi$

89. (00-5-41) Решите уравнение

$$cos2x - 5sinx - 3 = 0$$

$A)(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z$
$B)(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z$
$C)(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$
$D)(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$
$E)(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$

90. (00-5-42) Решите уравнение

$$sin5x - 3 \cdot cos2x = 4$$

$A) -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$ $B)\frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$
$C)\pi + \pi n, \ n \in Z$ $D)\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in Z$
$E)2\pi n, \ n \in Z$

91. (00-8-14) Вычислите сумму корней уравнения

$$sin(3x - 45^0) = sin14^0 \cdot sin76^0 -$$

$$-cos12^0 \cdot sin16^0 + \frac{1}{2} cos86^0$$

на отрезке $[0^0; 180^0]$.
$A)135^0$ $B)150^0$ $C)210^0$ $D)215^0$ $E)225^0$

92. (00-8-62) Решите уравнение

$$|tgx + ctgx| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$A) \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}; \ k \in Z$
$B)\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \ k \in Z$
$C)(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \ k \in Z$
$D) \pm \frac{\pi}{3} + \pi k; \ k \in Z$
$E)\frac{2\pi}{3} + \pi k; \ k \in Z$

93. (00-9-24) Сколько корней на промежутке $[-2\pi; 3\pi]$ имеет уравнение

$$3sin4x - 2cosx = 5?$$

$A)\emptyset$ $B)1$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

94. (00-9-27) Укажите все значения параметра a, для которых уравнение

$$a \cdot (sin^6 x + cos^6 x) = sin^4 x + cos^4 x$$

имеет решение.
A) [-1; 1] B) [0; 1] C) [1; 2] D) [1; 1,5] E) [1; 2,5]

95. (00-9-28) Сколько корней имеет уравнение

$$cos(\frac{\sqrt{3}\pi}{12}x) = 13 + 4\sqrt{3}x + x^2$$

на интервале? $[-2\pi; 2\pi]$?
$A)\emptyset$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

96. (00-9-29) Решите уравнение

$$\sqrt{2 + cos^2 2x} = sinx - cosx$$

$A)\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$ $B) -\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$
$C)\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$ $D) -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in Z$
$E)\frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$

97. (00-9-50) Сколько корней на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ имеет уравнение

$$cos^4 x + sin^3 x = 1$$

A) 4 B) 8 C) 6 D) 7 E) 5

98. (00-10-57) Сколько корней имеет уравнение

$$sin2x + sin4x = 0$$

на промежутке $[0; 2\pi]$?
$A)\emptyset$ $B)7$ $C)4$ $D)8$ $E)9$

99. (01-1-48) Решите уравнение

$$4sin^2 x(1 + cos2x) = 1 - cos2x.$$

$A)\pi n, \ ninZ$
$B)\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$
$C) \pm \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$
$D)\pi n; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$
$E)\pi n; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$

100. (01-2-26) Найдите сумму всех корней уравнения

$$7cos2x - 6 = cos4x,$$

принадлежащих отрезку [0; 628].
$A)200\pi$ $B)199\pi$ $C)20100\pi$ $D)1990\pi$ $E)19900\pi$

101. (01-2-27) Сколько существует таких целых чисел b, для которых уравнение

$$sinx = \frac{2b-3}{4-b}$$

имеет решения?
$A)\emptyset$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

102. (01-2-29) Решите уравнение

$$3cosx - 4sinx = -3.$$

$A)arctg\frac{3}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$
$B)2arctg\frac{3}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
$C)\pi + 2\pi n, n \in Z$
$D)\pi + 2\pi n, arctg\frac{3}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$
$E)\pi + 2\pi n, 2arctg\frac{3}{4} + 2\pi n, n \in Z$

103. (01-2-37) На отрезке $[-3\pi, \pi]$ найдите сумму всех корней уравнения

$$\sqrt{sinx} + \sqrt{cosx} = 1$$

$A) - 3\pi$ $B) - 2\pi$ $C) - \pi$ $D)\frac{3}{2}\pi$ $E)3\pi$

104. (01-2-82) Решите уравнение

$$log_{sinx}cosx = 1.$$

$A)\frac{\pi}{4}$ $B)\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$
$C) - \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$
$D)\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
$E) - \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

105. (01-2-84) Решите уравнение

$$\frac{cos3x}{sin3x - 2sinx} = tgx.$$

$A)\frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$
$B)\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
$C)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z$
$D)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}n,\ \ n \in Z$
$E)\frac{\pi}{3} + \pi n,\ \ n \in Z$

106. (01-5-17) Сколько корней имеет уравнение

$$sin\frac{\pi}{x} = 1$$

на отрезке $[0,05; 0,1]$?
$A)5$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

107. (01-6-30) Найдите сумму корней уравнения

$$tg^2x - \frac{2}{cosx} + 1 = 0$$

на $[0; 4\pi]$
$A)7\pi$ $B)7\frac{2}{3}\pi$ $C)8\pi$ $D)7\frac{1}{3}\pi$ $E)8\frac{1}{3}\pi$

108. (01-7-39) Найдите сумму корней уравнения

$$sinx + sin2x + sin3x + sin4x = 0,$$

принадлежащих отрезку $[0^0; 180^0]$.
$A)360^0$ $B)450^0$ $C)144^0$ $D)486^0$ $E)524^0$

109. (01-7-42) Решите уравнение

$$tgx + tg2x = tg3x$$

$A)\frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$ $B)\frac{\pi n}{3},\ \ n \in Z$
$C)\pi n,\ \ n \in Z$ $D)\frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
E) среди приведенных ответов нет правильного

110. (01-7-43) Сколько корней имеет уравнение

$$2x + tgx = 0$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
$A)0$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

111. (01-8-53) Сколько корней уравнения

$$sin3x + sin5x = sin4x$$

удовлетворяет неравенству $|x| \le \frac{\pi}{2}$?
$A)2$ $B)3$ $C)4$ $D)5$ $E)7$

112. (01-10-36) Сколько корней имеет уравнение

$$3sin2x + 5sin4x = 8$$

на отрезке $[-2\pi; 2\pi]$?
$A)\emptyset$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

113. (01-10-37) Найдите количество корней уравнения

$$cos4x + \frac{10tgx}{1 + tg^2x} = 3$$

на отрезке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
$A)\emptyset$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

114. (01-11-24) Решите уравнение

$$tgxtg3x = -1.$$

$A)\frac{\pi}{2}k,\ \ k \in Z$
$B)\pi k,\ \ k \in Z$
$C)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ \ k \in Z$
$D)\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$E)\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z$