ГЛАВА IV

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 1. Степень с натуральным показателем

В этой главе и далее мы будем рассматривать только действительные числа. Напомним необходимые определения.

Определение 1. *Степенью числа* a с натуральным показателем n, называется произведение n множителей, каждый из которых равен a.

По определению степени:

$$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ \ldots$$

Вообще, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ раз}}$.

Сформулируем основные свойства степени с натуральным показателем.

1) Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},$$

т. е. при умножении степеней с одинаковыми основаниями, основание оставляют прежним, а показатели степеней складывают.

Пример 1. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$; $y^2 \cdot y^{10} = y^{2+10} = y^{12}$; $a^2 \cdot a^5 \cdot a^4 = a^{2+5+4} = a^{11}$.

2) Для любого числа $a \neq 0$ и произвольных натуральных чисел m и n, $m>n$

$$a^m : a^n = a^{m-n},$$

т. е. при делении степеней с одинаковыми основаниями, основание остается прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Пример 2. $c^8 : c^6 = c^{8-6} = c^2$; $d^9 : d^6 = d^3$.

3) Так как $a^n : a^n = 1$, то полагают, что $a^0 = 1$ при $a \neq 0$.

4) Для любых a и b и произвольного натурального числа n

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n,$$

т. е. при возведении произведения чисел в n-ю степень умножаются n-е степени каждого из сомножителей.

Пример 3. $(2xy)^5 = 2^5x^5y^5 = 32x^5y^5$.

5) Для любых a и $b \neq 0$ и произвольного натурального числа m

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}.$$

6) Для любого числа a и произвольных натуральных чисел m и n

$$\left(a^m\right)^n = a^{mn},$$

т. е. при возведении степени в другую степень основание остается прежним, а показатели степеней умножаются.

Пример 4. $\left(b^5\right)^3 = b^{5 \cdot 3} = b^{15}$.

Определение 2. При $a \neq 0$ и m — натуральное число, положим

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}.$$

Определения 1 и 2 позволяют определить степень числа $a \neq 0$ с любым целым показателем.

Все свойства степени с натуральным показателем справедливы и для степени с любым целым показателем. А именно, для любых $a \neq 0, b \neq 0$ и любых целых m и n имеют место равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 4) $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$;

3) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$; 6) $a^0 = 1$.

Пример 5. $\left(\frac{a^{-2}}{3b}\right)^{-3} = \frac{a^{-2(-3)}}{3^{-3} \cdot b^{-3}} = \frac{3^3 \cdot a^6}{b^{-3}} = 27a^6b^3$.

Пример 6. Упростить выражение $a^4\left(a^{-1} - a^{-3}\right) \cdot \left(a^2 + a^3\right)^{-1}$.

Решение. $a^4\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}\right) \cdot \frac{1}{a^2 + a^3} = \frac{a^4\left(a^2 - 1\right)}{a^3 \cdot a^2(1+a)} = \frac{a-1}{a}$.

Вопросы и задания

1. Дать определение степени числа с натуральным показателем.
2. Какой знак имеет:

   а) степень положительного числа с целым показателем;

   б) степень отрицательного числа с четным показателем;

   в) степень отрицательного числа с нечетным показателем?

   Привести соответствующие примеры.
3. Сравнить квадрат произвольного числа с числом 0.
4. Сформулировать правила умножения и деления степеней с одинаковыми основаниями.
5. Сформулировать правила возведения в степень произведения чисел и возведения степени в степень.
6. Дать определение степени числа с отрицательным целым показателем.

Упражнения

1. Представить в виде степени произведение:

а) c^5c^4; *в*) x^3x^3; *д*) $b\,b^2b^3$; *ж*) $(-6)^3(-6)^6(-6)^9$.

б) a^2a^5; *г*) 5^55^4; *е*) $x^5x^4x^6$;

2. Представить в виде степени частное:

а) $x^8 : x^4$; *в*) $c^7 : c^2$; *д*) $2^{14} : 2^7$; *ж*) $(-0{,}5)^{15} : (-0{,}5)^7$.

б) $a^{10} : a^8$; *г*) $a^5 : a^5$; *е*) $(0{,}2)^{10} : (0{,}2)^6$;

3. Используя правила умножения и деления степеней, упростить выражение:

а) $x^3 \cdot x^8 : x^7$; *б*) $x^7 : x^5 : x$; *в*) $x^{15} : x^5 \cdot x$; *г*) $x^{10} : x^6 \cdot x^4$.

4. Найти значение выражения:

а) $\frac{10^{15} \cdot 10^8}{10^{19}}$; *г*) $\frac{(0{,}2)^8(0{,}2)^2}{(0{,}2)^4(0{,}2)^3}$; *ж*) $\frac{5^{16} \cdot 3^{16}}{15^{14}}$; *к*) $\frac{12^9}{2^3 \cdot 3^4} \cdot \frac{10}{2^6 \cdot 3^5 \cdot 4^6}$.

б) $\frac{7^8}{7 \cdot 7^5}$; *д*) $\frac{3^7 \cdot 27}{\left(3^4\right)^2}$; *з*) $\frac{12^5}{3^3 \cdot 4^4}$;

в) $\frac{(-3)^5(-3)^3}{(-3)^7}$; *е*) $\frac{27^2 \cdot 9^4}{81^2}$; *и*) $\frac{3^5 \cdot 11^{10}}{33^{10}} \cdot \frac{34^4 \cdot 3^{10}}{17^3 \cdot 6^5}$;

5. Возвести в степень произведение:

а) $(a \cdot b)^9$; *в*) $(2ac)^4$; *д*) $(-2a)^3$; *ж*) $(-3xy)^5$;

б) $(xyz)^5$; *г*) $\left(\frac{1}{3}xz\right)^3$; *е*) $(-0{,}4c)^2$; *з*) $\left(-\frac{2}{3}abc\right)^4$.

6. Указать ошибки в следующих преобразованиях:

а) $5 \cdot 5 \cdot 5 = 3^5$; *е*) $2^3 + 2^7 = 2^{10}$;

б) $(-3)^2 = -3 \cdot 3 = 9$; *ж*) $2^{30} : 2^{10} = 2^3$;

в) $0^0 = 1$; *з*) $(2x)^3 = 2x^3$;

г) $2^3 \cdot 2^7 = 2^{21}$; *и*) $\left(a^3\right)^2 = a^9$;

д) $2^3 \cdot 2^7 = 4^{10}$; *к*) $\left(a^2\right)^3 \cdot \left(a^4\right)^2 = \left(a^6\right)^5 = a^{30}$.

7. Записать без степеней с отрицательным показателем:

а) $(a+b)^{-1}$; *в*) $5a^{-3}c^4$; *д*) $a^{-2}b^3c^{-4}$;

б) $(x-y)^{-2}$; *г*) $4x^3y^{-3}$; *е*) $a^3b^{-2}e^{-5}$.

8. Возвести в степень:

а) $\left(a^2\right)^{-4}$; *в*) $\left(b^{-2}\right)^5$; *д*) $\left(xy^{-3}\right)^2$; *ж*) $\left(3a^2\right)^{-4}$;

б) $\left(x^{-3}\right)^{-2}$; *г*) $\left(c^5\right)^{-4}$; *е*) $\left(x^2y^{-4}\right)^{-2}$; *з*) $\left(4a^{-3}\right)^{-2}$.

9. Выполнить действия:

а) $\left(\frac{a^5}{b^3}\right)^{-3}$; *б*) $\left(\frac{x^{-3}}{y^{-4}}\right)^{-4}$; *в*) $\left(\frac{2a^5}{3b^{-3}}\right)^2$; *г*) $\left(\frac{-3x^{-3}y^2}{z^2}\right)^3$.

10. Упростить:

а) $\left(a^{-3} + b^{-3}\right) \cdot \left(a^{-2} - b^{-2}\right)^{-1} \cdot \left(a^{-2} - a^{-1} \cdot b^{-1} + b^{-2}\right)^{-1}$;

б) $\left(a^{-2}b - ab^{-2}\right) \cdot \left(a^{-2} + a^{-1}b^{-1} + b^{-2}\right)^{-1}$;

в) $\frac{\left(ab^{-5} - a^{-5}b\right)^{-1}\left(a^{-3} + b^{-3}\right)}{\left(a^{-1}b^{-4} - b^{-1}a^{-4}\right)^{-1}}$; *г*) $\frac{\left(ab^{-7} - a^{-7}b\right)^{-1}\left(a^{-3}b + ab^{-3}\right)}{\left(b^{-4} - a^{-4}\right)^{-1}}$.

11. Вычислить значение выражения:

а) $\left(b^{-2} + \frac{a^{-3}}{2^{-1}}\right)\left(\frac{1}{2^{-1}a^3} - b^{-2}\right)\left(b^{-4} + \frac{4}{a^6}\right)$, если $a = b = \sqrt{2}$;

б) $\left(\left(\frac{9^{-2}}{a^{-24}} - \frac{16}{b^{-8}}\right) : \left(\frac{a^{12}}{3^2} + \frac{b^4}{2^{-2}}\right)\right) : \left(\frac{3^{-1}}{a^{-6}} - \frac{1}{2^{-1}b^{-2}}\right)$, если $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$.