3. Решение тригонометрических систем уравнений. При решении систем тригонометрических уравнений обычно используют метод сведения к одному уравнению с одним неизвестным, либо систему сводят к алгебраической системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Пример 22. Решить систему $\begin{cases} 2\sin x = \sin y, \\ 2\cos x = 1 - \cos y. \end{cases}$

Решение. Данную систему можно записать в виде $\begin{cases} 2\sin x = \sin y, \\ 1 - 2\cos x = \cos y. \end{cases}$ Возведем в квадрат каждую часть обоих уравнений системы, а затем полученные равенства почленно сложим:

$4\sin^2 x + 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow 4 - 4\cos x = 0$, или $\cos x = 1$.

Отсюда имеем $x = 2\pi n$, $y = (2k + 1)\pi$, $n, k \in Z$.

Пример 23. Решить систему $\begin{cases} \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = \frac{1}{3}, \\ x + y = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$

1-й способ. Сведем данную систему к одному уравнению, подставляя в первое уравнение $y = \frac{\pi}{3} - x$. Тогда имеем $\operatorname{tg}x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{3}$. Это уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg}x \frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg}x}{1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}x} = \frac{1}{3}, \text{ или } (\sqrt{3}\operatorname{tg}x - 1)^2 = 0,$$

(знаменатель $1 + \sqrt{3}\operatorname{tg}x \neq 0$). Отсюда получаем $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{6} - \pi n$, $n \in Z$.

2-й способ. Так как $x + y = \frac{\pi}{3}$, то $\operatorname{tg}(x + y) = \sqrt{3}$. Отсюда

$$\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y} = \sqrt{3} \Rightarrow \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{tg}y$ являются корнями уравнения

$$z^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}z + \frac{1}{3} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Откуда $x = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \frac{\pi}{6} - \pi n$, $n \in Z$.

Пример 24. Решить систему $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

Решение. Заметим, что множество допустимых значений переменных составляют все действительные числа, не равные $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Второе уравнение системы дает $\sin y \cos x = \frac{3}{4}$ и тогда система принимает вид $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin y \cos x = \frac{3}{4}. \end{cases}$ Складывая, а затем вычитая почленно полученные равенства, имеем соответственно: $\sin(x + y) = 1$, $\sin(x - y) = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n, \end{cases} \quad \text{где } k,\ n \in Z.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}(-1)^n + \pi\left(k + \frac{n}{2}\right),\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}(-1)^n + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right), \text{ где } k,\ n \in Z.$$

2.2.46. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sin^2 x - \sin y = \frac{7}{4} \\ \cos^2 x + \sqrt{3}\cos y = \frac{1}{4} \end{cases}$;   б) $\begin{cases} \sin^2 y + \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos^2 y - \cos x = \frac{3}{2} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \sin^2 x - \sqrt{3}\cos y = -1 \\ \cos^2 x + \sin y = 1 \end{cases}$;   г) $\begin{cases} \sin^2 y + \cos x = 1 \\ \cos^2 y + \sin x = 1 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \sin^2 x + \sqrt{3}\sin y = -\sqrt{3} \\ \cos^2 x - \cos y = 1 \end{cases}$.

25. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x - \cos y = 1, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \dfrac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 0,25; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - y = \dfrac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

8.494. $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$

8.495. $\begin{cases} 3\operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}^3 y, \\ \cos x = \sin 2y. \end{cases}$

8.496. $\begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{x}{2} + \operatorname{tg}\dfrac{y}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2\sqrt{3}. \end{cases}$

8.497. $\begin{cases} \cos x - \cos y = \sin(x + y), \\ |x| + |y| = \dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$

8.498. $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\sin\left(y - \dfrac{3\pi}{4}\right), \\ \operatorname{tg} y + \operatorname{ctg} y = 2\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$

8.499. $\begin{cases} 2\cos x = 3\operatorname{tg} y, \\ 2\cos y = 3\operatorname{tg} z, \\ 2\cos z = 3\operatorname{tg} x. \end{cases}$