§ 7. Обратные тригонометрические функции

1. Как известно, тригонометрические функции, будучи периодическими, не обладают свойством монотонности во всей области определения. Поэтому формально построенные соответствующие обратные функции (определение обратной функции см. в главе VII, часть I) не будут однозначными. Чтобы получить однозначные ветви обратных функций, следует рассматривать те промежутки из области определения тригонометрических функций, на которых они являются монотонными.

Исследуем обратные функции для каждой из тригонометрических функций.

а) Арксинус. Функция $y = \sin x$ является монотонной на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом промежутке функция возрастает и принимает значения от -1 до 1. Согласно общей теории, в этом случае существует обратная к $y = \sin x$ функция. Обратная функция определена на отрезке $[-1; 1]$ и монотонно возрастает, принимая значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта функция обозначается символом $x = \arcsin y$, $y \in [-1; 1]$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \arcsin x, \ x \in [-1; 1].$$

График функции $y = \arcsin x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 17). Перечислим некоторые свойства функции $y = \arcsin x$:

1) функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$;

2) функция монотонно возрастает на отрезке $[-1; 1]$;

3) функция является нечетной;

4) областью значений функции является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

5) для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin x) = x, \ -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}.$$

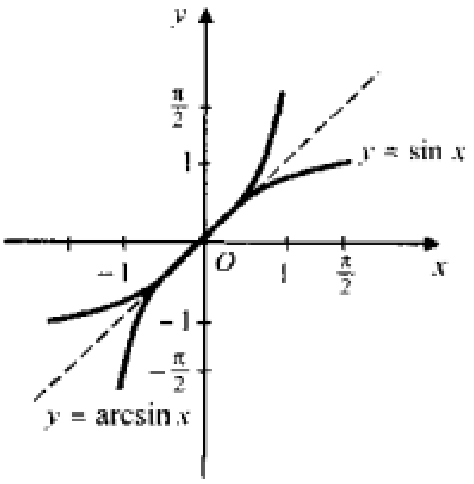


Рис. 17

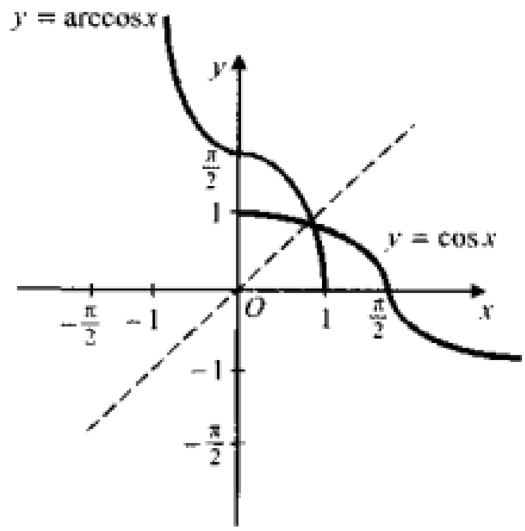


Рис. 18

Пример 1. Найти $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

Пример 2. Найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Решение. Имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

б) Арккосинус. Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$. На этом промежутке функция монотонно убывает, принимая значения от 1 до -1. Следовательно, существует обратная функция, определенная и монотонно убывающая на отрезке $[-1; 1]$. Обратная функция обозначается $x = \arccos y$, $y\in[-1; 1]$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \arccos x,\ x\in[-1; 1].$$

График функции $y = \arccos x$ можно получить из графика функции $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 18).

Перечислим свойства функции $y = \arccos x$:

1) функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$;

2) функция монотонно убывает на $[-1; 1]$;

3) функция не является четной и не является нечетной;
4) областью значений функции является отрезок $[0; \pi]$;
5) для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos x) = x,\ 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Пример 3. Найти $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$, то $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Пример 4. Найти $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

в) Арктангенс и арккотангенс.

А) Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Она монотонно возрастает на этом интервале, принимая все действительные значения. Следовательно, существует обратная функция, которая определена на всей числовой оси. Обратная функция монотонно возрастает, принимая значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ее обозначают символом $x = \operatorname{arctg} y$, $y \in (-\infty; +\infty)$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \operatorname{arctg} x,\quad x \in (-\infty; +\infty).$$

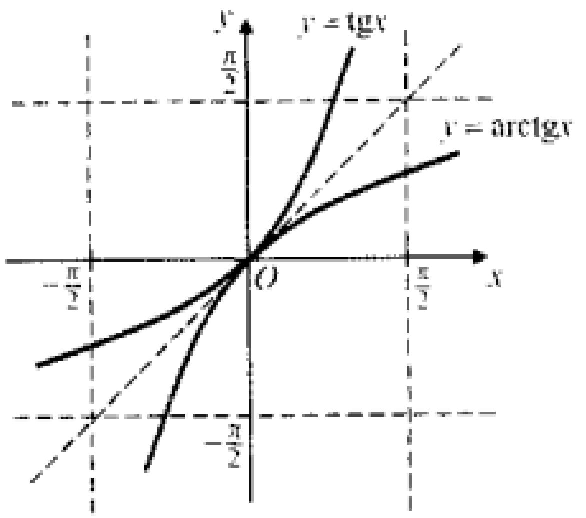


Рис. 19

График функции (рис. 19) может быть получен зеркальным отражением относительно биссектрисы I и III координатных углов ветки тангенсоиды, соответствующей интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Перечислим некоторые свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) функция определена и непрерывна на всем интервале $(-\infty;\ +\infty)$;

2) функция монотонно возрастает на $(-\infty;\ +\infty)$;

3) функция является нечетной;

4) областью значений функции является интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ для любого действительного значения x, а $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при условии $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Пример 5.

а) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Б) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает на интервале $(0;\ \pi)$, принимая все действительные значения. Следовательно, существует обратная к ней функция, определенная на всей числовой оси. Обратная функция монотонно убывает, принимая значения из интервала $(0;\ \pi)$. Ее обозначают символом $x = \operatorname{arcctg} y$, $y \in (-\infty;\ +\infty)$ или, в обычных обозначениях,

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in (-\infty;\ +\infty).$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 20. Перечислим некоторые ее свойства:

1) функция определена и непрерывна на всем интервале $(-\infty;\ +\infty)$;

2) функция монотонно убывает на $(-\infty;\ +\infty)$;

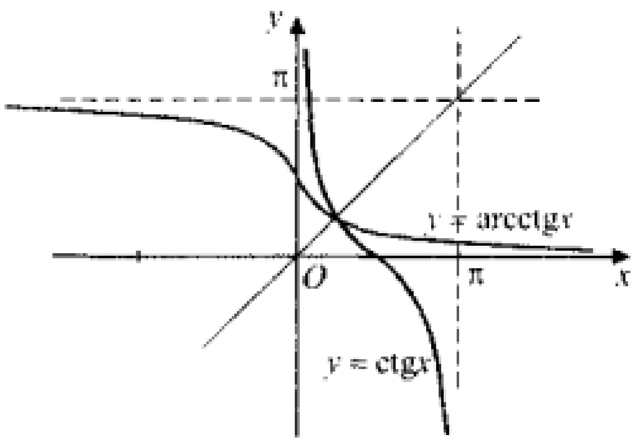


Рис. 20

3) функция не является четной и не является нечетной;

4) областью значений функции является интервал $(0; \pi)$;

5) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого значения x, а $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ при условии $0 < x < \pi$.

Пример 6. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$;

$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$.

2. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. При преобразовании выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, полезно использовать следующие соотношения:

$$\left.\begin{array}{ll} \arcsin(-x) = -\arcsin x, & -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \\ \arccos(-x) = \pi - \arccos x, & 0 \le \arccos x \le \pi, \\ \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, & -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}, \\ \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, & 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi, \end{array}\right\} \tag{1}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3}$$

Докажем одно из них, например, (2). Достаточно показать, что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Для этого вычислим значения синусов от обеих частей последнего равенства. Имеем

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Так как значения синусов равны, то остается показать, что значения $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y = \sin x$. Имеем

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Отсюда $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$, т.е. $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 7. Упростить выражение:

а) $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \le x \le 1$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Решение. а) Положим, $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Известно, что $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Значит, $\cos^2 y = 1 - x^2$. Так как $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos y \ge 0$. Поэтому

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \text{ или } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } -1 \le x \le 1.$$

б) Положим, $\operatorname{arctg} x = y$. Тогда $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Найдем $\sin y$. Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Отсюда $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$. Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$. Поэтому $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 y}}$ или $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$. Следовательно,

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Пример 8. Найти область определения функции:

а) $y = \arcsin \frac{2x}{x-1}$; б) $y = \sqrt{\pi - 4 \arccos \frac{x}{2}}$.

Решение. а) Арксинус определен для всех значений аргумента, не превосходящих по абсолютной величине единицы. Следовательно, $-1 \le \frac{2x}{x-1} \le 1$. Решая эти неравенства, находим $-1 \le x \le \frac{1}{3}$. Следовательно, область определения функции $y = \arcsin \frac{2x}{x-1}$ есть отрезок $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

б) Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ и $\pi - 4\arccos\frac{x}{2} \ge 0$. Поэтому $|x| \le 2$ и $\arccos\frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, имеем $\arccos\frac{x}{2} \le \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как функция $y = \arccos x$ монотонно убывает в своей области определения, то имеем $1 \ge \frac{x}{2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\sqrt{2} \le x \le 2$. Полученное множество содержится в отрезке $[-2;\ 2]$. Поэтому областью определения $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$ является отрезок $[\sqrt{2};\ 2]$.

Пример 9. Вычислить: а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)$; б) $\arccos[\sin(-3)]$.

Решение. а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) = x$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$. Используя свойство периодичности, имеем $\operatorname{tg}6 = \operatorname{tg}(6 - 2\pi)$, причем $-\frac{\pi}{2} < 6 - 2\pi < 0$. Поэтому $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(6 - 2\pi)] = 6 - 2\pi$.

б) $\arccos(\cos x) = x$ при $0 \le x \le \pi$. Имеет место равенство $\sin(-3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\right)$. Но $\frac{\pi}{2} + 3 > \pi$. Поэтому используем формулу $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$. Имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3 - \pi\right) = -\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right),\text{ причем } 0 < 3 - \frac{\pi}{2} < \pi.$$

Отсюда

$$\arccos[\sin(-3)] = \arccos\left[-\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi - \arccos\left[\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= \pi - \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 3.$$

Пример 10. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$; б) $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3$.

Решение. а) Обозначив $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, имеем $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом, задача свелась к отысканию $\operatorname{tg}2\alpha$ при условиях $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Имеем

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{-2\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}}{1-\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)} = \frac{-2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}.$$

Перед радикалом взят знак минус, поскольку $\operatorname{tg}\alpha < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 4\sqrt{5}.$$

б) Обозначим искомую величину через A, т.е. $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 = A$. Тогда

$$\operatorname{tg}A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)} = \frac{2+3}{1-2\cdot3} = -1.$$

Так как $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}2 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}3 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 < \pi$, т.е. $\frac{\pi}{2} < A < \pi$. Отсюда и из равенства $\operatorname{tg}A = -1$ вытекает, что $A = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 = \frac{3\pi}{4}$.

При преобразовании выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, бывает полезной следующая таблица:

	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$
sin	x	$\pm\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\pm\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

Пример 11. Найти значение выражения:

а) $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Решение. а) Используя формулу синуса двойного угла и таблицу, получаем

$$\sin\left(2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=2\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)\cdot\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

б) Используя формулу косинуса двойного угла и таблицу, получаем

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)-\sin^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\right)^2-\left(\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\right)^2=\frac{9}{10}-\frac{9}{9\cdot 10}=\frac{4}{5}.$$

Пример 12. Проверить равенства:

а) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{9\pi}{14}$; б) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)=-\frac{\pi}{10}$.

Решение. а) Рассматривая обе части как аргументы функции $y=\cos x$ и используя свойства этой функции, имеем слева: $\cos\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}$.

Справа также имеем $\cos\frac{9\pi}{14}$. Следовательно, равенство а) является справедливым.

б) Рассматривая обе части как аргументы функции $y=\sin x$ и используя свойства этой функции, имеем слева:

$$\sin\left(\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)\right)=\cos\frac{33\pi}{5}=\cos\left(\frac{30\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Справа также имеем $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$. Значит, равенство б) является верным.

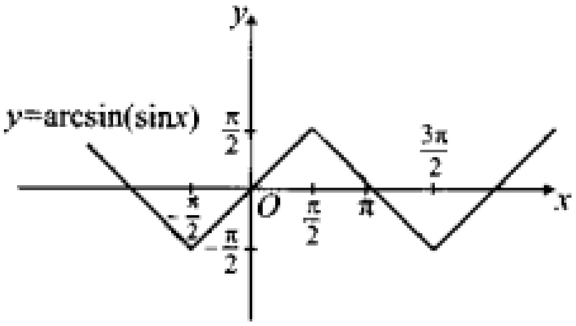


Рис. 21

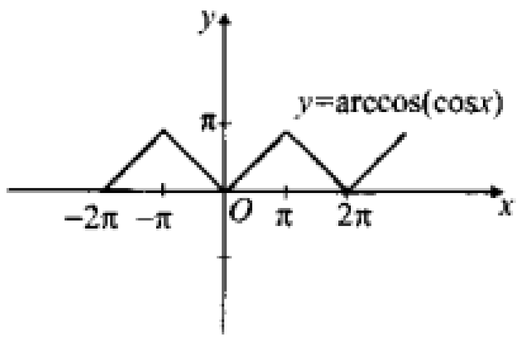
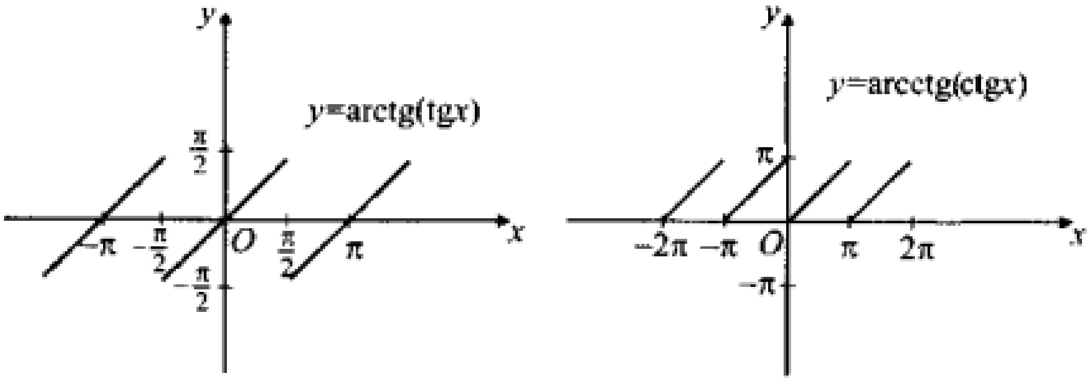


Рис. 22



а *б*

Рис. 23

В заключение приведем графики функций $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Графики функций $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$ изображены на рисунках 21, 22.

Графики функций $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ изображены на рисунках 23, *а, б*.

Упражнения

Вычислить (**1–6**):

1. а) $\arcsin 0$; в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin 1$.

2. а) $\arccos 0$; в) $\arccos\frac{1}{2}$; д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\arccos 1$.

3. а) $\operatorname{arctg} 1$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; д) $\operatorname{arcctg} 0$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

4. а) $\arcsin 1 + \arcsin(-1)$; в) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\arcsin\frac{1}{2}$;

б) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. а) $2\arccos 1 + 3\arccos 0$; в) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $2\arccos(-1) - 3\arccos 0$; г) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. а) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 3\arccos\frac{1}{2}$; в) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $2\operatorname{arcctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Выяснить, имеют ли смысл выражения:

а) $\arccos(\sqrt{8} - 3)$; г) $\arcsin(2 - \sqrt{15})$;

б) $\arccos(3 - \sqrt{18})$; д) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arcsin(\sqrt{6} - 2)$; е) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

8. Используя равенство $\cos(\arccos a) = a$ при $-1 \le a \le 1$, вычислить:

а) $\cos(\arccos 0{,}3)$;

б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)$.

9. Используя равенство $\sin(\arcsin a) = a$ при $-1 \le a \le 1$, вычислить:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

в) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

---

10. Используя равенство $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$ при любом a, вычислить:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3{,}5)$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}5))$;

в) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg} 5)$;

г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 7\right)$.

11. Найти значение выражения:

а) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right)$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

12. Найти значение выражения:

а) $\operatorname{tg} 2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$;

в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$;

г) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$.

13. Проверить равенство:

а) $\arcsin\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{5} = \operatorname{arctg}\frac{27}{11}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.