О п р е д е л е н и е 1 . *Комплексным числом* называется любая упорядоченная пара $(a; b)$ действительных чисел.

Множество всех комплексных чисел будем обозначать через C.

О п р е д е л е н и е 2 . Два комплексных числа $(a_1; b_1)$ и $(a_2; b_2)$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В этом случае пишут $(a_1; b_1) = (a_2; b_2)$.

Комплексные числа будем обозначать буквами α, β, γ, ...

О п р е д е л е н и е 3 . Сумма двух комплексных чисел $\alpha = (a_1; b_1)$ и $\beta = (a_2; b_2)$ определяется равенством $\alpha + \beta = (a_1 + a_2; b_1 + b_2)$, разность определяется равенством $\alpha - \beta = (a_1 - a_2; b_1 - b_2)$, произведение определяется равенством $\alpha \cdot \beta = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1)$, а частное от деления α на β определяется равенством $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}; \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$ при условии, что $\beta = (a_2; b_2) \neq (0; 0)$.

Например:

$$(-4; 3) + (3; -1) = (-1; 2),$$
$$(-4; 3) \cdot (3; -1) = (-4 \cdot 3 - 3 \cdot (-1); -4 \cdot (-1) + 3 \cdot 3) = (-9; 13),$$
$$(0; 2) \cdot (0; 2) = (-4; 0).$$

Основные свойства арифметических действий остаются справедливыми и для комплексных чисел.

1^0. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ — коммутативность сложения;
2^0. $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ — коммутативность умножения;
3^0. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — ассоциативность сложения;
4^0. $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ — ассоциативность умножения;
5^0. $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

Покажем, например, справедливость свойства 5^0.

Пусть $\alpha = (a_1; b_1)$, $\beta = (a_2; b_2)$, $\gamma = (a_3; b_3)$. Тогда

$$\alpha(\beta + \gamma) = (a_1; b_1)(a_2 + a_3; b_2 + b_3) = (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3);$$
$$a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3;$$
$$a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3).$$

Для правой части 5^0 имеем:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (a_1a_2 - b_1b_2; a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3; a_1b_3 + a_3b_1) =$$
$$= (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3; a_1b_2 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_1).$$

Сравнивая результаты двух вычислений, убеждаемся в справедливости равенства $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Рассмотрим теперь множество C^*, состоящее из комплексных чисел вида $(a; 0)$. Очевидно, что C^* является подмножеством множества C, т. е. $C^* \subset C$.

Если действительному числу a сопоставить комплексное число $(a; 0)$, т. е. $a \to (a; 0)$, то получим соответствие между множеством действительных чисел R и множеством C^*. Очевидно, что это соответствие является взаимно однозначным.

Если отождествить действительное число a с комплексным числом $(a; 0)$, то множество действительных чисел R окажется подмножеством множества комплексных чисел C. В этом смысле говорят, что множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

2. Алгебраическая форма комплексного числа. Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0; 1)$, которое обозначают буквой i.

При умножении комплексных чисел $(b; 0)$ и $(0; 1)$ имеем:

$$(b; 0) \cdot (0; 1) = (0; b),$$

где b — любое действительное число. Тогда число $(a; b)$ можно записать в виде:

$$(a; b) = (a; 0) + (0; b) = (a; 0) + (b; 0) \cdot (0; 1) = (a; 0) + (b; 0)i.$$

Так как $(a; 0) \to a$, а $(b; 0) \to b$, то получим $(a; b) = a + bi$.

Таким образом, мы пришли к представлению комплексного числа $(a; b)$ в виде $a + bi$, которое называется *алгебраической формой комплексного числа*. Именно это представление комплексных чисел приводит к (нестрогому) построению комплексных чисел. Тем не менее, запись комплексных чисел в этом виде очень удобна для арифметических действий сложения, умножения и деления комплексных чисел. Для возведения в степень, извлечения корня и умножения нескольких комплексных чисел более удобна другая форма, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

Пусть α и β — два комплексных числа, т. е. $\alpha = a + bi$; $\beta = c + di$. Тогда суммой $\alpha + \beta$ является число, задаваемое формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Разностью $\alpha - \beta$ является комплексное число, задаваемое формулой: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Произведением $\alpha \cdot \beta$ является комплексное число, задаваемое формулой $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$. Комплексное число $a + 0i$ будем записывать как a, а комплексное число $0+ bi$ — как bi. В частности,

$$i=0+1i,\ \ i^2=i\cdot i=(0+1i)\cdot(0+1i)=-1+0i=-1.$$

О п р е д е л е н и е 4. Если задано комплексное число $\alpha = a+bi$, то число a называется *действительной частью* числа α, а число b называется *мнимой частью* числа α.

Действительную часть числа α обозначают $\mathrm{Re}(\alpha)$ (от *франц.* reele — действительный), а мнимую часть обозначают через $\mathrm{Im}(\alpha)$ (от *франц.* imaginare — мнимый). Например, $\mathrm{Re}(2+5i)=2$, $\mathrm{Im}(2+5i)=5$. Если $\mathrm{Im}(\alpha)=0$, то число α — действительное; если $\mathrm{Re}(\alpha)=0$, то число α имеет вид bi и называется чисто мнимым.

3. Сопряженное число.

О п р е д е л е н и е 5. Число $a-bi$, отличающееся от $\alpha = a+bi$ лишь знаком при мнимой части, называется *сопряженным* числу α и обозначается $\overline{\alpha}$, т. е. $\overline{\alpha}=a-bi$.

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами. Действительно,

$$\alpha+\overline{\alpha} = (a+bi)+(a-bi)=(a+a)+(b-b)i=2a,$$

$$\alpha\cdot\overline{\alpha} = (a+bi)\cdot(a-bi)=(a^2+b^2)+(ab-ab)i=a^2+b^2.$$

Рассмотрим деление комплексных чисел. Пусть $\alpha=a+bi$ и $\beta=c+di$ — два комплексных числа, причем $(c, d) \neq (0, 0)$. Результатом деления числа α на число β является комплексное число $\frac{\alpha}{\beta}$, задаваемое формулой $\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$. На практике для нахождения частного $\frac{\alpha}{\beta}$ обычно пользуются следующим правилом:

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\overline{\beta}}{\overline{\beta}}=\frac{\alpha\cdot\overline{\beta}}{\beta\cdot\overline{\beta}}=\frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di}=\frac{ac-bdi^2+bci-adi}{c^2-(di)^2}=$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

П р и м е р: $\frac{2+i}{4+3i}=\frac{(2+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)}=\frac{8+3+4i-6i}{4^2+3^2}=\frac{11}{25}-\frac{2}{25}i.$

З а м е ч а н и е. В отношении комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше».