4. Решение тригонометрических неравенств.

А) Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида $a_1 < \sin\alpha < b_1$, $a_2 < \cos\alpha < b_2$, $a_3 < \operatorname{tg}\alpha < b_3$, $a_4 < \operatorname{ctg}\alpha < b_4$, где a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 – заданные числа. При решении этих неравенств удобно пользоваться тригонометрическим кругом или графиком соответствующей тригонометрической функции.

Пример 25. Решить неравенство $\sin x \le 0{,}5$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

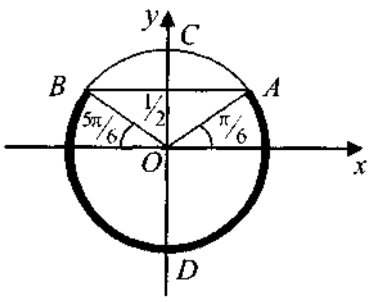

Рис. 28

Решение. Рассмотрим единичную окружность. Находим на ней точки, ординаты которых равны или меньше 0,5. Ясно, что этому условию удовлетворяют точки дуги BDA (рис. 28). Множеству точек этой дуги соответствует объединение двух числовых отрезков $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ и $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ из промежутка $[0; 2\pi]$. Поэтому решением неравенства является множество

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right].$$

Пример 26. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 29). Находим на ней точки, абсциссы которых больше $\frac{1}{2}$. Ясно, что этому условию удовлетворяют точки дуги ACB. Точке B соответствует число $\frac{\pi}{3}$, а точке A – число $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Внутренним точкам дуги ACB соответствует объединение числовых промежутков $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ из промежутка $[0; 2\pi]$. Следовательно, множество

$$\left[0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$$

и есть решение заданного неравенства.

Пример 27. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \le 1$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 30). Через точку B проведем прямую параллельно оси OY. На этой прямой отложим отрезок $AB = OB = 1$. Ясно, что условию

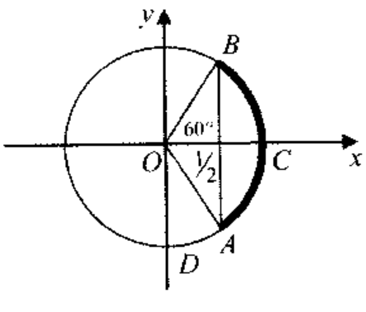

Рис. 29

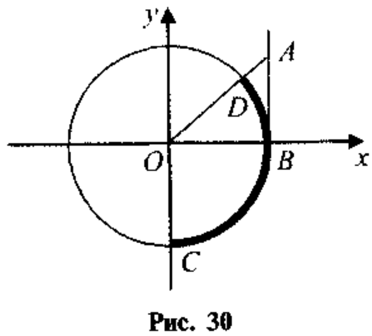

Рис. 30

примера удовлетворяют точки, лежащие внутри дуги DBC. Значит, искомые x должны удовлетворять неравенствам $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{4}$. Множество, являющееся решением этих неравенств, содержится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ – решение исходного неравенства.

Пример 28. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x \ge -\frac{1}{\sqrt{3}}$ на промежутке $(0; \pi)$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 31). Проведем через точку B прямую, параллельную оси OX и выберем точку $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$. Ясно, что условию примера удовлетворяют точки, лежащие на дуге DBC. Значит, искомые x должны удовлетворять неравенствам $0 < x \le \frac{2\pi}{3}$.

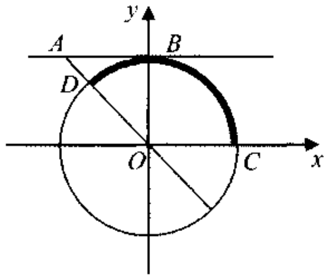

Рис. 31

Б) Рассмотрим теперь решение неравенств на множестве действительных чисел.

Пример 29. Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 32) и найдем корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0; 2\pi]$. Решением неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

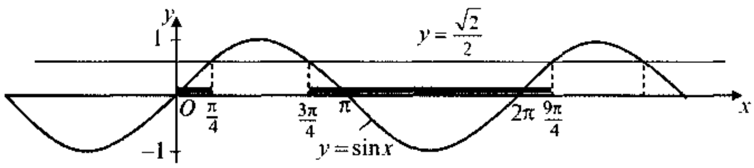

Рис. 32

на промежутке $[0; 2\pi]$ является множество, состоящее из промежутков и $\left(\frac{3\pi}{4}; 2\pi\right]$. Тогда на множестве всех действительных чисел решением заданного неравенства является объединение множеств

$$\left[2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right],\ n \in Z,$$ или, что то же, объединение множеств вида $\left(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{9\pi}{4} + 2\pi n\right),\ n \in Z$.

9. (96-13-26) При каких значениях $x (x \in [0; 2\pi])$ определена функция $y = \sqrt{1 + log_{\frac{1}{2}} sinx}$?
$A) \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$ $B) \left(0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$ $C) \left(0; \frac{\pi}{6}\right]$
$D)(0; \pi)$ $E) \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$

10. (96-13-34) При каких значениях $x (x \in [0; 2\pi])$ верно неравенство

$$cos^2 x - \frac{5}{2} cosx + 1 \leq 0?$$

$A)[0; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$ $B)[0; \frac{\pi}{3}]$ $C)[\frac{5\pi}{3}; 2\pi]$
$D)[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}]$ $E)[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$

11. (97-1-48) Укажите область определения функции $y = \sqrt{ctgx - 1}$
$A) \left[\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \ n \in Z$
$B) \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi + \pi n\right), \ n \in Z$
$C) \left(\pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \ n \in Z$
$D) \left(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z$
$E) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), \ n \in Z$

12. (97-4-41) Решите неравенство

$$cos^2 x < \frac{\sqrt{2}}{2} + sin^2 x.$$

$A) \frac{\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{8} + 2\pi n \ \ n \in Z$
$B) \frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{7\pi}{8} + \pi n \ \ n \in Z$
$C) -\frac{\pi}{8} + 2\pi n < x < \frac{\pi}{8} + 2\pi n \ \ n \in Z$
$D) \frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n \ \ n \in Z$
$E) -\frac{\pi}{8} + \pi n < x < \frac{\pi}{8} + \pi n \ \ n \in Z$

13. (97-6-47) Укажите область определения функции $y = \sqrt{2sinx - 1}$.
$A) \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in Z$
$B) \left[\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right], \ n \in Z$
$C) \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), \ n \in Z$
$D) \left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], \ n \in Z$
$E) \left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n\right], \ n \in Z$

14. (97-7-58) Решите уравнение:

$$3^{1 + log_3 ctgx} = \sqrt{3}$$

$A) \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in Z$ $B) \frac{\pi}{3} + \pi n, \ n \in Z$
$C) \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \ n \in Z$ $D) \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$
$E) \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$

15. (97-9-38) Найти область определения функции $y = log_5(5sinx)$.
$A)(-\pi + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), \ n \in Z$
$B)(2\pi n; \pi + 2\pi n), \ n \in Z$
$C)(-\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), \ n \in Z$
$D)(\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n), \ n \in Z$
$E)(\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n), \ n \in Z$

16. (97-9-101) Решить неравенство

$$sinx \cdot cosx > \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$A) \frac{\pi}{8} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{8} + 2\pi k, k \in Z$
$B) \frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$
$C) \frac{\pi}{8} + \pi k < x < \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in Z$
$D) \frac{\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k, k \in Z$
$E) \frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$

17. (97-11-47) Укажите область определения функции $y = \sqrt{tgx + 1}$
$A) \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], \ n \in Z$
$B) \left[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], \ n \in Z$
$C) \left[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), \ n \in Z$
$D) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi n\right], \ n \in Z$
$E) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right], \ n \in Z$

18. (98-1-60) Решите неравенство

$$1 - 2cos2x > sin^2 2x.$$

$A) \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), \ k \in Z$
$B) \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right), \ k \in Z$
$C) \left(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right), \ k \in Z$
$D) \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \ k \in Z$
$E) \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right), \ k \in Z$

19. (98-2-28) При каких значениях x из промежутка $(0; \pi)$ верно равенство:

$$|sinx + 1| > 1,5?$$

$A) \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ $B) \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
$C) \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ $D) \frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$
$E) 0 < x < \frac{\pi}{6}$

20. (98-5-51) Решите неравенство:

$$sin5x \cdot cos4x + cos5x \cdot sin4x > \frac{1}{2}$$

$A) \frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in Z$
$B) \frac{\pi}{54} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{54} + 2\pi n, \ n \in Z$
$C) \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9} < x < \frac{5\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9}, \ n \in Z$
$D) \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi n}{9} < x < \frac{5\pi}{54} + \frac{2\pi n}{9}, \ n \in Z$
$E) \frac{\pi}{54} + \frac{2\pi n}{9} < x < \frac{5\pi}{54} + \frac{2\pi n}{9}, \ n \in Z$

21. (98-5-55) При каких значениях x выполняется неравенство

$$sin^2 x - \frac{1}{2} sin2x - 2cos^2 x \geq 0,$$

если $(x \in [0; 2\pi])$?
$A)[arctg2; \frac{3\pi}{4}] \cup [\pi + arctg2; \frac{7\pi}{4}$ $B)[arctg2; \frac{3\pi}{4}]$
$C)[\pi + arctg2; \frac{7\pi}{4}]$ $D)[\frac{3\pi}{4}; \pi + arctg2]$ $E)[\frac{7\pi}{4}; 2\pi]$

22. (98-6-55) Найдите решение неравенства

$$cos2x \le -\frac{1}{2}$$

на отрезке $[0;\pi]$.
$A)\ \left[\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}\right]$ $B)\ \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ $C)\ \left[-\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$
$D)\ \left[\frac{4\pi}{3};2\pi\right]$ $E)\ \left[\frac{2\pi}{3};\frac{4\pi}{3}\right]$

23. (98-8-60) Решите неравенство:

$$1-2sin4x < cos^2 4x.$$

$A)(\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k),\quad k\in Z$
$B)(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k),\quad k\in Z$
$C)(\frac{\pi k}{2};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}),\quad k\in Z$
$D)(-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k),\quad k\in Z$
$E)(\frac{\pi}{8}+2\pi k;\frac{5\pi}{8}+2\pi k),\quad k\in Z$

24. (98-9-24) При каком x, взятом из промежутка $(-\pi;\pi)$, верно неравенство

$$|cosx+2,5|\ge 3?$$

$A)\ \left[-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$ $B)\ \left(-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right)$ $C)\ \left(-\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right)$
$D)\ \left[-\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ $E)\ \left[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}\right]$

25. (98-11-100) Решите неравенство:

$$(cosx+2)|x-5|(x-2)\le 0.$$

$A)(-\infty;2]\cup\{5\}$ $B)(-\infty;2]$
$C)[2;5]$ $D)\{5\}$ $E)\emptyset$

26. (98-12-59) Решите неравенство:

$$sin^2 3x - cos^2 3x \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A)\ \left[-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right],\ n\in Z$
$B)\ \left(-\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3};\frac{\pi}{36}+\frac{\pi n}{3}\right),\ n\in Z$
$C)\ \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$
$D)\ \left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\frac{\pi}{6}+2\pi n\right],\ n\in Z$
$E)\ \left[-\frac{\pi}{36};\frac{\pi}{36}\right],\ n\in Z$

27. (99-1-43) Решите неравенство $2sinx\ge\sqrt{2}$
$A)\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$
$B)-\frac{5\pi}{4}+2\pi n\le x\le\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$
$C)\frac{\pi}{4}+2\pi n\le x<\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$
$D)\frac{\pi}{4}+\pi n\le x\le\frac{3\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$
$E)-\frac{5\pi}{4}+\pi n\le x\le\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

28. (99-2-29) Найдите разность между наибольшим и наименьшим решениями неравенства $|1+sinx|\le\frac{1}{2}$ взятых из отрезка $[0;2\pi]$.
$A)\pi$ $B)1,5\pi$ $C)\frac{2\pi}{3}$ $D)1,2\pi$ $E)\frac{3\pi}{4}$

29. (99-3-38) Решите неравенство

$$4cos^2 x - 3\ge 0$$

$A)\ \left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi k\right],\ k\in Z$
$B)\ \left[-\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k\right],\ k\in Z$
$C)\ \left[-\frac{\pi}{6}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right],\ k\ Z$
$D)\ \left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{\pi}{6}+2\pi k\right],\ k\in Z$
$E)\ \left[-\frac{\pi}{12}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right],\ k\in Z$

30. (99-4-53) Решите неравенство

$$cos^2(x+1)\cdot log_4(3-2x-x^2)\ge 1$$

$A)[-1;0)$ $B)[-2;-1]$ $C)-2;-1$
$D)-1$ $E)(-3;0)\cup(0;1)$

31. (99-5-19) Найдите все решения неравенства

$$(\pi-e)^{ln(cos^4 x - sin^4 x)}\ge 1,$$

принадлежащие промежутку $[0;\pi]$.
$A)\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$ $B)\ \left[0;\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
$C)\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4};\pi\right]$ $D)\ \left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2};2\pi\right]$
$E)\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

32. (99-8-1) Решите неравенство

$$cos5x\cdot cos4x + sin5x\cdot sin4x < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$A)\frac{\pi}{3}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ n\in Z$
$B)\frac{\pi}{6}+2\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+2\pi n,\ n\in Z$
$C)\frac{\pi}{3}+\pi n<x<\frac{5\pi}{3}+\pi n, n\in Z$
$D)\frac{\pi}{6}+\pi n<x<\frac{11\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$
$E)\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{7\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

33. (99-9-33) Решите систему

$$\begin{cases} 0\le x\le\pi \\ 2cos^2 x - 1\ge\frac{1}{2} \end{cases}$$

$A)\ \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ $B)\ \left[0;\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6};\pi\right]$ $C)\ \left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$
$D)\ \left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$ $E)\ \left[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3};\pi\right]$

34. (99-10-33) Найдите разность между наибольшим и наименьшим решениями системы неравенств

$$\begin{cases} 0<x<\frac{\pi}{2} \\ 1\le tgx\le\sqrt{3} \end{cases}$$

$A)-\frac{\pi}{12}$ $B)\frac{\pi}{6}$ $C)-\frac{\pi}{6}$ $D)\frac{\pi}{8}$ $E)\frac{\pi}{12}$

35. (00-3-53) Сколько целых чисел из промежутка $[-\pi;\pi]$ являются решениями неравенства

$$-1-\frac{2}{\sqrt{3}}cosx>0$$

A) 4 B) 3 C) 6 D) 5 E) 2