Решение тригонометрических неравенств

2.1 Графический метод решения тригонометрических неравенств

На практике довольно часто оказывается полезным графический метод решения неравенств. Рассмотрим сущность метода на конкретных примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 0$.

Решение: При решении неравенств графическим методом необходимо как можно более точно построить графики функций. Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq 3x - 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ (рис.33).

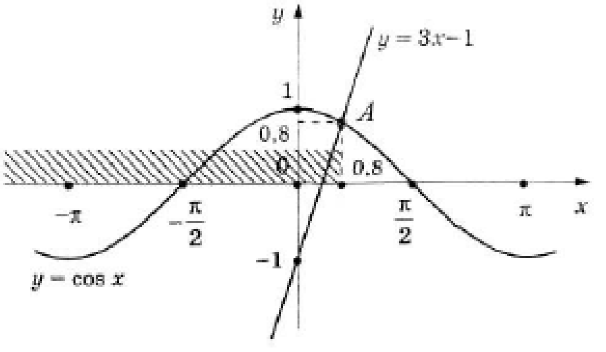

Рис.33

Графики функций пересекаются в точке A с координатами $x \approx 0,6$; $y \approx 0,8$. На промежутке $(-\infty; 0,6)$ точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. А при $x \approx 0,6$ значения функций совпадают. Поэтому $\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0,6$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0,6]$.

Пример 2. Решить неравенство: $\sin x < 2x - 1$.

Решение: Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = 2x - 1$ (рис.34).

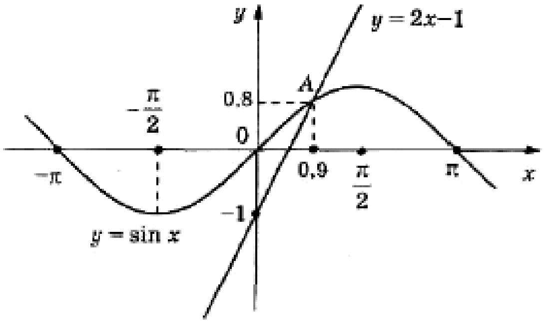

Рис.34

Графики функций пересекаются в точке $A(x \approx 0,9; y \approx 0,8)$. На промежутке $(0,9;\infty)$ точки графика $y = 2x - 1$ выше точек графика $y = \sin x$. Значит $\sin x < 2x - 1$ при $x > 0,9$.

Ответ: $x \in (0,9;+\infty)$.

Пример 3. Решить неравенство: $\cos x - x^2 - 2x - 1 \geq 0$.

Решение: Преобразуем данное неравенство к виду:

$$\cos x \geq x^2 + 2x + 1.$$

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = x^2 + 2x + 1$ (рис.35).

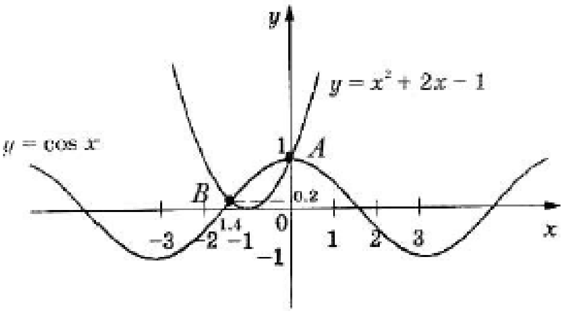

Рис.35

Графики функций пересекаются в точках $A(0;1)$ и $B(x \approx -1,4; y \approx 0,2)$. На промежутке $[-1,4; 0]$ точки графика функции $y = x^2 + 2x + 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. Значит, $\cos x \geq x^2 + 2x + 1$ при $-1,4 \leq x \leq 0$.

Ответ: $x \in [-1,4; 0]$.

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\sin 2x \le \cos x$
2. $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} > -\frac{1}{4}$
3. $\operatorname{tg} x < -x+1$, если $0 < x < \pi$
4. $\sqrt{1-\cos^2 x} + \sin x \le \frac{\pi}{2}$
5. $\sqrt{1-\sin^2 x} + \cos x \ge \frac{\pi}{2}$
6. $ctg\frac{x}{2}\cdot\sin x \ge 2\pi$
7. $\sin x - 5x + 3 \le 0$
8. $\sin^2\left(\sqrt{tgx}\right) + \cos^2\left(\sqrt{tgx}\right) > 2 - x$
9. $\sin x\sqrt{\cos^2 x} + \cos x\sqrt{\sin^2 x} \le x - 1$
10. $|\sin x + \cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

2.2 Метод подстановки

Довольно часто исходное тригонометрическое неравенство путем удачно выбранной подстановки удается свести к алгебраическому (рациональному или иррациональному) неравенству. Рассмотрим на конкретных примерах применение этого метода.

Пример 1. Решить неравенство: $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Решение: Так как $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$-4\sin^3 x + 2\sin^2 x + 2\sin x - 1 < 0.$$

Или, полагая $\sin x = t$, $|t| \le 1$, получим:

$4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2t^2(2t-1) - (2t-1) > 0 \Leftrightarrow (2t-1)(2t^2-1) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2t-1)(\sqrt{2}t-1)(\sqrt{2}t+1) > 0$. Решая это неравенство методом интервалов (рис.36), получим: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2} < t \le 1$.

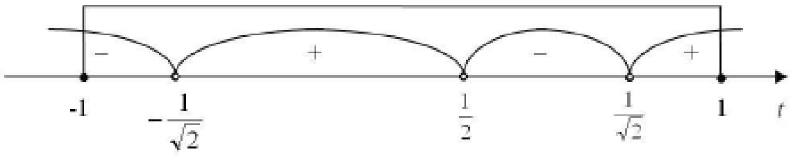

Рис.36

Следовательно, для отыскания x получаем совокупность неравенств (рис.37):

I. $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$;

II. $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

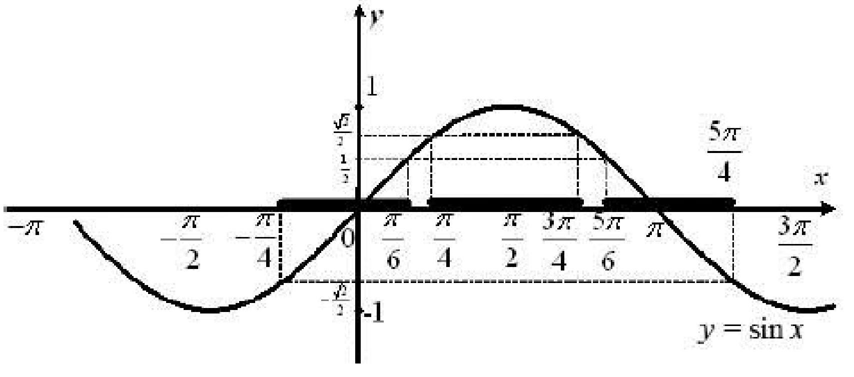

Рис.37

Ответ:

$$x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Пример 2. Решить неравенство: $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

Задачи для аудиторной работы:

Решить неравенство:

1. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x > \sqrt{2}$
2. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geq 3\operatorname{tg} x$
3. $-2 \leq \operatorname{tg} x < 1$
4. $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 > 0$
5. $\sin^4 x + \cos^4 x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
6. $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{ctg} x - 2 \leq 0$