

Решение тригонометрических неравенств

Пример 30. Решить неравенство $-2\cos x \geq 1$.

Решение. Сначала построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$. Затем найдем корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ на $[0; 2\pi]$. Это $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Тогда решением заданного неравенства является множество, состоящее из объединения промежутков $\left[\frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

Пример 31. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sqrt{3}$ (рис. 33). Находим корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ на $[0; \pi]$, где π — основной период функции $y = \operatorname{tg} x$. Этим корнем является $x = \frac{\pi}{3}$. На данном промежутке решением неравенства является полуинтервал $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда решением неравенства на множестве всех действительных

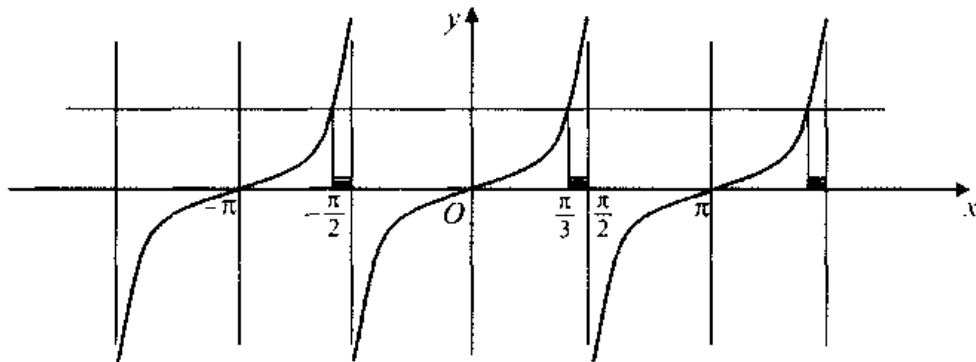


Рис. 33

чисел является множество, состоящее из объединения промежутков $\left[\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in Z$.

Рассмотрим теперь примеры сложных тригонометрических неравенств.

Пример 32. Решить неравенство

$$\cos^3 x \cdot \sin x + \sin^3 x \cos x > \frac{1}{4}.$$

Решение. Имеем

$$\sin x \cdot \cos x (\cos^2 x + \sin^2 x) > \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2x > \frac{1}{4},$$

$$\sin 2x > \frac{1}{2},$$

Откуда следует $x \in \left(\frac{\pi}{12} + \pi n; \frac{5\pi}{12} + \pi n\right), n \in Z$.

Пример 33. Решить неравенство $4\sin^4 x - 6\sin^2 x + 2 > 0$.

Решение. Преобразуем левую часть следующим образом:

$$(1 - \cos 2x)^2 - 3(1 - \cos 2x) + 2, \text{ или } \cos^2 2x + \cos 2x.$$

Получили равносильное неравенство $\cos^2 2x + \cos 2x > 0$, или $\cos 2x(\cos 2x + 1) > 0$. Тогда имеем две системы:

$$\text{а) } \begin{cases} \cos 2x > -1, \\ \cos 2x > 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \cos 2x < -1, \\ \cos 2x < 0. \end{cases}$$

Первое неравенство системы а) справедливо для всех x , кроме $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$. Из второго неравенства системы а) следует, что $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2} + 2\pi n$. Поэтому решением системы а) является множество, состоящее из промежутков $\left(-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in Z$. Это же множество является решением исходного неравенства, поскольку система б) не имеет решения.

36. (00-6-56) Решите неравенства

$$\cos x < \sin x$$

- A) $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 B) $(\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{5\pi}{4} + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 C) $(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 D) $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 E) $(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
37. (00-9-19) На интервале $[0; 2\pi]$ найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{e}{3}\right)^{\ln(2\cos x)} \geq 1$$

- A) $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}]$ B) $[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}]$ C) $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}]$
 D) $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}]$ E) $[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}] \cup (\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}]$
38. (01-1-51) Решите неравенство

$$\sin x > \cos x.$$

- A) $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $(\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{5\pi}{4} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{5\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 D) $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $(\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
39. (01-2-24) Сколько целых чисел из отрезка $[-13; 18]$ принадлежит области определения функции

$$y = \sqrt{|x| - x} + \sqrt{-\sin^2(2\pi x)}?$$

- A) 31 B) 32 C) 22 D) 63 E) 24
40. (01-10-39) Решите неравенство

$$\sin 2x < \cos 2x.$$

- A) $(-\frac{3\pi}{8} + 2\pi n; \frac{\pi}{8} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $(-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $(-\frac{\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 D) $(-\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{\pi}{4} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $(-\frac{3\pi}{8} + \pi n; \frac{\pi}{8} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
41. (01-11-25) Найдите сумму наибольшего и наименьшего решений неравенства

$$2^{1/2} \leq 2^{\sin x} \leq 2^{\sqrt{3}/2}$$

на промежутке $[0; 2\pi]$

- A) $\frac{2\pi}{3}$ B) π C) $\frac{4\pi}{5}$ D) $\frac{\pi}{2}$ E) $\frac{3\pi}{4}$
42. (02-6-38) Решите неравенство

$$\sin x > \sqrt{3} \cdot \cos x.$$

- A) $(\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{2\pi}{3} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{7\pi}{6} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 D) $(\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2})$, $n \in \mathbb{Z}$

43. (02-9-43) Решите неравенство

$$\log_{\frac{3}{5}} \frac{8 \sin(\pi + x)}{5} > 2.$$

- A) $(-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 B) $(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 C) $(-\pi + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k) \cup (-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 D) $(-\pi + 2\pi k; -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k) \cup (2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
 E) $(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$
44. (02-10-25) Найдите область определения функции $y = \sqrt{1 - 2\cos^2 x}$.

- A) $[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 D) $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{7\pi}{4} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
45. (02-10-62) Решите неравенство

$$\sqrt{\cos^2 x - \cos x} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{2}.$$

- A) $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n] \cup \{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n] \cup \{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n) \cup \{2\pi n\}$, $n \in \mathbb{Z}$
 D) $[\frac{2\pi}{3} + \pi n; \frac{7\pi}{6} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $[\frac{5\pi}{6} + 2\pi n; \frac{4\pi}{3} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
46. (02-12-22) Найдите разность между наибольшим и наименьшим решениями неравенства

$$\sqrt{\sin x} > \frac{\sqrt{2}}{2},$$

взятых из отрезка $[0; \pi]$.

- A) $\frac{5\pi}{6}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$ D) $\frac{2\pi}{5}$ E) $\frac{3\pi}{5}$
47. (03-2-19) Решите неравенство

$$\sin x < 1 + \frac{x^2}{4}$$

- A) \emptyset B) $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$
 C) $[-\pi; \pi]$ D) $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 E) $(-\infty; \infty)$
48. (03-2-35) Решите неравенство

$$\left(\cos x + \frac{\pi}{2}\right) \left(\sin x - \frac{\pi}{3}\right) \left(\lg^2 x - \frac{1}{3}\right) \geq 0.$$

- A) $[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$
 B) $[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$

- C) $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$
 D) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in Z$
 E) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$

49. (03-2-37) Решите неравенство

$$\frac{5x^2 - 5}{3 \sin x + 4 \cos x - 2\pi} \geq 0.$$

- A) $[-1; 1]$ B) $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$ C) $[-1; \pi]$
 D) $[0; \pi]$ E) $[1; \pi]$

50. (03-4-27) Найдите сумму наибольшего и наименьшего решений двойного неравенства

$$1 \leq \frac{\operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} x} \leq \sqrt{3},$$

которые находятся в промежутке $(0 < x < \pi)$.

- A) $\frac{\pi}{7}$ B) $\frac{43}{48}\pi$ C) $\frac{5\pi}{48}$ D) $\frac{7\pi}{48}$ E) $\frac{3\pi}{16}$

51. (03-10-44) Решите неравенство

$$|\sin x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- A) $\left[-\frac{\pi}{3} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right], n \in Z$
 B) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$
 C) $\left[-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right], n \in Z$
 D) $\left[-\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in Z$
 E) $\left[-\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2}\right], n \in Z$

52. (03-11-42) При каких значениях a неравенство

$$\sin x \leq \frac{3a - 6}{a + 1}$$

не имеет решения?

- A) $\left(-1; \frac{5}{4}\right)$ B) $(-1; 0)$ C) $(-1; 2)$
 D) $(-1; 5)$ E) $(0; \infty)$

53. (03-12-63) Решите неравенство

$$-2x^2 + 5x - 7) \cdot (3\operatorname{tg}^2 x - 1) \geq 0.$$

- A) нет решений
 B) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right], n \in Z$
 C) $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$
 D) $\left[-\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi n\right], n \in Z$
 E) $(-\infty; \infty)$

В № 2.3.1. — 2.3.7. решить системы неравенств.

$$\begin{array}{ll}
 2.3.1. \text{ а) } \begin{cases} 1 \leq \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) \leq \sqrt{3}, \\ 60^\circ < x < 80^\circ; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq \cos(2x + 40^\circ) \leq 0, \\ 200^\circ < x < 240^\circ; \end{cases} \\
 \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{2} \leq \sin(5x + 10^\circ) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ 60^\circ < x < 90^\circ; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \operatorname{ctg}(4x + 20^\circ) \leq \sqrt{3}, \\ 40^\circ < x < 60^\circ; \end{cases} \\
 \text{д) } \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \cos(3x + 18^\circ) \leq \frac{1}{2}, \\ 120^\circ < x < 170^\circ. \end{cases} & \\
 \\
 2.3.2. \text{ а) } \begin{cases} 2^{\operatorname{tg}(x+135^\circ)} \leq 2, \\ -30^\circ < x < 100^\circ; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} 3^{\sin(x+20^\circ)} \leq \sqrt{3}, \\ 100^\circ < x < 400^\circ; \end{cases} \\
 \text{в) } \begin{cases} 5^{\cos(x+30^\circ)} \leq 1, \\ -350^\circ < x < -100^\circ; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} 0,5^{\operatorname{ctg}(x+35^\circ)} \leq 2, \\ -40^\circ < x < 120^\circ; \end{cases} \\
 \text{д) } \begin{cases} 6^{\sin(x+40^\circ)} \leq \frac{1}{\sqrt{6}}, \\ -200^\circ < x < 0^\circ. \end{cases} & \\
 \\
 2.3.3. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1}{1 - \sin x} \geq 2, \\ 0^\circ \leq x \leq 160^\circ; \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{1}{\cos x + 1} \geq 1, \\ 60^\circ \leq x \leq 200^\circ; \end{cases} \\
 \text{в) } \begin{cases} \frac{1}{2 \cos x - 1} \leq -1, \\ -20^\circ \leq x \leq 100^\circ; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{3}{2 \sin x + 1} \geq 1, \\ 30^\circ \leq x \leq 270^\circ; \end{cases} \\
 \text{д) } \begin{cases} \frac{1}{\cos x + 1} \geq 2, \\ 90^\circ \leq x \leq 270^\circ. \end{cases} &
 \end{array}$$