1. Непрерывные функции. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D \subseteq R$ и $a \in D$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если она определена в этой точке и предел функции при $x \to a$ равен значению функции в точке a.

Отметим, что при определении предела функции в точке не требовалось, чтобы эта точка принадлежала области определения функции.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва функции.*

Пример 1. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. В точке $x = 1$ функция не определена. Поэтому о непрерывности в этой точке не может быть и речи. Значит, данная функция имеет разрыв в точке $x = 1$. В остальных точках функция непрерывна.

Пример 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2, \\ 0, & x = 2, \\ 1, & x = -2. \end{cases}$

Эта функция непрерывна во всех точках множества действительных чисел, кроме $x = 2$ и $x = -2$. Действительно, если $a \neq 2$ и $a \neq -2$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-1}{x^2-4} = \dfrac{a-1}{a^2-4} = f(a)$. Если же $a = 2$ или $a = -2$, то не существует конечного предела выражения $\dfrac{x-1}{x^2-4}$ при $x \to a$. Значит, $a = 2$ и $a = -2$ — точки разрыва данной функции.

Разрыв возникает и в тех случаях, когда для функции, заданной различными выражениями (формулами) слева и справа от рассматриваемой точки, пределы справа и слева существуют, но не совпадают. Например, функция $f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0, \\ 1, x < 0 \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, потому что

$$f(0+0) = 0 \neq f(0-0) = 1.$$

В остальных точках функция является непрерывной.

Теорема 1. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда

1°. Функция $y = f(x) + g(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

2°. Функция $y = f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

3°. Если $g(a) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x = a$.

4°. Если α — действительное число, то функция $y = \alpha \cdot f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

5°. Функция $y = (f(x))^n$, $n \in N$ непрерывна в точке $x = a$.

6°. Сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$ (если они существуют) непрерывны в точке $x = a$.

Доказательство всех утверждений теоремы следует из свойств предела функции в точке. Докажем, например, утверждение 3° теоремы 1. Так как $g(a) \neq 0$, используя свойства предела функции, имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Отсюда по определению следует непрерывность функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ в точке $x = a$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то вблизи точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) > 0$. По определению для любого $\varepsilon > 0$, в частности, если $0 < \varepsilon < f(a)$, существует число $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Предположим, что в некоторой точке x_0 из указанной окрестности точки a выполняется неравенство $f(x_0) \leq 0$. Тогда имеем $\varepsilon > |f(x_0) - f(a)| \geq f(a)$. Это противоречит условию $f(a) > \varepsilon$. Следовательно, для всех $x \in D$, взятых из окрестности $(a - \delta;\ a + \delta)$ точки a выполняется неравенство $f(x) > 0$, т. е. знак функции вблизи точки a совпадает со знаком числа $f(a)$.

Аналогично доказывается случай, когда $f(a) < 0$.

Предоставляем читателю самостоятельно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, причем существует $\delta > 0$ такое, что $g(x) \neq 0$ при условии $0 < |x - a| < \delta$. Тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

Пример 3. Покажем, что $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2+1}{x^2-6x+8} = \infty$. Имеем

$$\lim_{x \to 4}(x^2+1) = 17, \lim_{x \to 4}(x^2-6x+8) = \lim_{x \to 4}(x-2)(x-4) = 0.$$

Используя теорему 3, получаем требуемое равенство.

2. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке [a; b] функции.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X, то она называется *непрерывной на множестве* X.

Рассмотрим свойства функции, непрерывной на отрезке [a; b].

Пусть значения функции $y = f(x)$ в точках a и b имеют различные знаки. Тогда точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции располагаются по разным сторонам относительно оси абсцисс. В этом случае график непрерывной функции $y = f(x)$ будет пересекать ось OX в некоторой ее точке, т.е. существует такое значение $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков. Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Следствие 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке любое значение y_0, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ и $f(a) < y_0 < f(b)$. Рассмотрим функцию $y = f(x) - y_0$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$. На концах отрезка функция принимает значения разных знаков. Поэтому по теореме 4 существует $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) - y_0 = 0$. Тогда имеем $f(x_0) = y_0$.

Следствие 2. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и не обращается в нуль внутри отрезка. Тогда для всех $x \in (a, b)$ функция $y = f(x)$ имеет один и тот же знак.

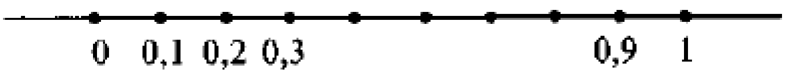
Доказательство. Докажем от противного. Пусть существуют $x_1, x_2 \in (a, b)$ такие, что $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1)$ и

$f(x_2)$ имеют разные знаки. Тогда по теореме 4 существует точка $x_0 \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(x_0) = 0$. Это противоречит условию следствия 2.

Отметим также, что если в условиях теоремы 4 функция $y = f(x)$ монотонна, то она на отрезке $[a, b]$ принимает значение нуль только один раз.

Пример 4. Найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение. Функция $x^3 - 3x + 1$ является непрерывной. Легко проверить, что $f(0) = 1 > 0$ и $f(1) = -1 < 0$. Значит, корень данного уравнения лежит на отрезке $[0, 1]$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на десять равных частей:



Вычислим теперь значения функции во всех точках деления. Так как $f(0{,}3) = 0{,}127$ и $f(0{,}4) = -0{,}136$, то корень уравнения лежит на отрезке $[0{,}3;\ 0{,}4]$. Поэтому в качестве приближенного значения корня можно взять, например, число $x = \frac{0{,}3+0{,}4}{2} = 0{,}35$.

3. Замечательные пределы.

Теорема 5 (первый замечательный предел). Имеет место равенство

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

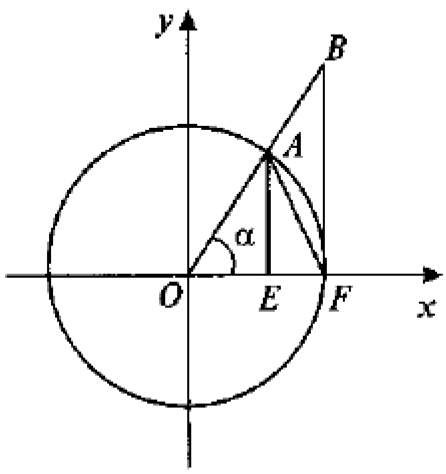


Рис. 42

Доказательство. Рассмотрим единичный круг. Предположим, что угол α, выраженный в радианах, лежит на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 42).

Из рисунка видно, что площадь сектора OAF больше площади треугольника OAF и меньше площади треугольника OBF, т. е. $S_{\Delta OAF} < S_{\text{сек}\,OAF} < S_{\Delta OBF}$. Поскольку

$S_{\Delta OAF} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OF \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$, $S_{\text{сек}OAF} = \frac{1}{2}\alpha$, $S_{\Delta OBF} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

то $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{1}{2}\cdot\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, или $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$. Следовательно,

$\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$, используя свойства предела функции и тригонометрических функций, имеем $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha \le \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1$. Откуда $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Случай $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ рассматривается аналогичным образом.

Теорема 6 (второй замечательный предел).

Последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ сходится при $n \to \infty$.

Доказательство проведем в двух этапах:

а) Докажем, что последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ монотонно возрастает.

б) Докажем, что эта последовательность ограниченна сверху.

По формуле бинома Ньютона имеем

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$
$$+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

При вычислении следующего члена a_{n+1} каждый множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменяется большим множителем вида $1-\frac{s}{n+1}$. Поэтому $a_{n+1} > a_n$. Этим доказано утверждение а).

Покажем, что для любого натурального n справедливо неравенство $a_n < 3$.

В последней части формулы, полученной для a_n, все множители, заключенные в скобки, меньше 1. Поэтому $a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. Тогда, применяя неравенства $\frac{1}{2!} < \frac{1}{2}, \frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, получим $a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$. Сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ представляет собой сумму геометрической прогрессии и она равна $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Поэтому $a_n < 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$.

Следовательно, $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}, n \in N$, является монотонно возрастающей и ограниченной сверху последовательностью. Значит, она имеет предел.

Предел этой последовательности является иррациональным числом и обозначается через e ($e = 2{,}71828\ldots$).

Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

В заключение отметим, что такой же предел имеет функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.