ГЛАВА III

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§ 1. Алгебраическая форма комплексного числа

При решении некоторых квадратных уравнений типа $x^2 + a = 0$ ($a > 0$), мы сталкиваемся с извлечением квадратного корня или вообще, корня четной степени из отрицательного числа. На множестве рассмотренных нами действительных чисел это действие невыполнимо.

Поэтому возникает необходимость введения нового, более широкого множества чисел. Этим множеством является множество комплексных чисел. На множестве комплексных чисел любое квадратное уравнение имеет корни.

1. Определение комплексного числа. Пусть дано квадратное уравнение

$$x^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

Будем считать, что уравнение (1) разрешимо, но его корень является не действительным числом, а представляет собой новое число. Это число обозначим символом i. Таким образом, помимо действительных чисел, которые мы обозначали a, b, c и т. д., имеем новое число i.

Умножение действительного числа b на число i приводит к числам вида bi, а сложение действительного числа a с числами вида bi — к числам $a + bi$, где $a \in R$, $b \in R$.

Таким путем и вводились первоначально комплексные числа. При таком способе определения комплексных чисел возникает много вопросов: что же представляет собой число i, можно ли распространять на него законы арифметики, законно ли рассматривать выражения, содержащие вместе действительные числа и число i и т. д. Если не ответить на эти вопросы, то теория комплексных чисел — это плод чистого воображения. Таким образом, необходимо точное определение комплексных чисел.

Строгое обоснование комплексных чисел важно потому, что эти числа используются в ряде приложений математики. Теория функций комплексной переменной является мощным инструментом в физике (механике, электро- и радиотехнике, гидродинамике и т. д.).

Первоначальная запись комплексного числа в виде $a + bi$ приводит к мысли о задании комплексного числа упорядоченной парой (a; b) действительных чисел.

Определение 1. *Комплексным числом* называется любая упорядоченная пара $(a;\, b)$ действительных чисел.

Множество всех комплексных чисел будем обозначать через C.

Определение 2. Два комплексных числа $(a_1;\, b_1)$ и $(a_2;\, b_2)$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В этом случае пишут $(a_1;\, b_1) = (a_2;\, b_2)$.

Комплексные числа будем обозначать буквами $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$

Определение 3. Сумма двух комплексных чисел $\alpha = (a_1;\, b_1)$ и $\beta = (a_2;\, b_2)$ определяется равенством $\alpha + \beta = (a_1 + a_2;\, b_1 + b_2)$, разность определяется равенством $\alpha - \beta = (a_1 - a_2;\, b_1 - b_2)$, произведение определяется равенством $\alpha \cdot \beta = (a_1a_2 - b_1b_2;\, a_1b_2 + a_2b_1)$, а частное от деления α на β определяется равенством $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2};\, \frac{b_1a_2 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right)$ при условии, что $\beta = (a_2;\, b_2) \neq (0;\, 0)$.

Например:

$(-4;\, 3) + (3;\, -1) = (-1;\, 2)$,

$(-4;\, 3)\cdot(3;\, -1) = (-4\cdot 3 - 3\cdot(-1);\, -4\cdot(-1) + 3\cdot 3) = (-9;\, 13)$,

$(0;\, 2)\cdot(0;\, 2) = (-4;\, 0)$.

Основные свойства арифметических действий остаются справедливыми и для комплексных чисел.

1^0. $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ — коммутативность сложения;

2^0. $\alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$ — коммутативность умножения;

3^0. $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ — ассоциативность сложения;

4^0. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$ — ассоциативность умножения;

5^0. $\alpha\cdot(\beta + \gamma) = \alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\gamma$ — дистрибутивность умножения относительно сложения.

Покажем, например, справедливость свойства 5^0.

Пусть $\alpha = (a_1;\, b_1)$, $\beta = (a_2;\, b_2)$, $\gamma = (a_3;\, b_3)$. Тогда

$$\alpha(\beta + \gamma) = (a_1;\, b_1)(a_2 + a_3;\, b_2 + b_3) = (a_1(a_2 + a_3) - b_1(b_2 + b_3);\; a_1(b_2 + b_3) + b_1(a_2 + a_3)) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3;\; a_1b_2 + a_1b_3 + b_1a_2 + b_1a_3).$$

Для правой части 5^0 имеем:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma = (a_1a_2 - b_1b_2;\, a_1b_2 + a_2b_1) + (a_1a_3 - b_1b_3;\, a_1b_3 + a_3b_1) = (a_1a_2 + a_1a_3 - b_1b_2 - b_1b_3;\; a_1b_2 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_1).$$

Сравнивая результаты двух вычислений, убеждаемся в справедливости равенства $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Рассмотрим теперь множество $\boldsymbol{C^*}$, состоящее из комплексных чисел вида $(a;\, 0)$. Очевидно, что C^* является подмножеством множества C, т. е. $C^* \subset C$.

Если действительному числу a сопоставить комплексное число $(a; 0)$, т. е. $a \to (a; 0)$, то получим соответствие между множеством действительных чисел $\boldsymbol{R}$ и множеством C^*. Очевидно, что это соответствие является взаимно однозначным.

Если отождествить действительное число a с комплексным числом $(a;\, 0)$, то множество действительных чисел $\boldsymbol{R}$ окажется подмножеством множества комплексных чисел $\boldsymbol{C}$. В этом смысле говорят, что множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел.

2. Алгебраическая форма комплексного числа. Среди комплексных чисел особую роль играет число $(0\,;1)$, которое обозначают буквой i.

При умножении комплексных чисел $(b\,;0)$ и $(0\,;1)$ имеем:

$$(b\,;0)\cdot(0\,;1) = (0\,;b),$$

где b — любое действительное число. Тогда число $(a\,;b)$ можно записать в виде:

$$(a\,;b) = (a\,;0) + (0\,;b) = (a\,;0) + (b\,;0)\cdot(0\,;1) = (a\,;0) + (b\,;0)i.$$

Так как $(a; 0) \to a$, а $(b; 0) \to b$, то получим $(a\,;b) = a + bi$.

Таким образом, мы пришли к представлению комплексного числа $(a\,;b)$ в виде $a + bi$, которое называется *алгебраической формой комплексного числа.* Именно это представление комплексных чисел приводит к (нестрогому) построению комплексных чисел. Тем не менее, запись комплексных чисел в этом виде очень удобна для арифметических действий сложения, умножения и деления комплексных чисел. Для возведения в степень, извлечения корня и умножения нескольких комплексных чисел более удобна другая форма, которую мы рассмотрим в следующем параграфе.

Пусть α и β — два комплексных числа, т. е. $\alpha = a + bi$; $\beta = c + di$. Тогда суммой $\alpha + \beta$ является число, задаваемое формулой:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Разностью $\alpha - \beta$ является комплексное число, задаваемое формулой: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Произведением $\alpha\cdot\beta$ является комплексное число, задаваемое формулой $(a + bi)\cdot(c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$. Комплексное число $a + 0i$ будем записывать как a, а комплексное число $0 + bi$ — как bi. В частности,

$$i = 0 + 1i, \quad i^2 = i\cdot i = (0 + 1i)\cdot(0 + 1i) = -1 + 0i = -1.$$

Определение 4. Если задано комплексное число $\alpha = a + bi$, то число a называется *действительной частью* числа α, а число b называется *мнимой частью* числа α.

Действительную часть числа α обозначают $\mathrm{Re}(\alpha)$ (от *франц.* reele — действительный), а мнимую часть обозначают через $\mathrm{Im}(\alpha)$ (от *франц.* imaginare — мнимый). Например, $\mathrm{Re}(2 + 5i) = 2$, $\mathrm{Im}(2 + 5i) = 5$. Если $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, то число α — действительное; если $\mathrm{Re}(\alpha) = 0$, то число α имеет вид bi и называется чисто мнимым.

3. Сопряженное число.

Определение 5. Число $a - bi$, отличающееся от $\alpha = a + bi$ лишь знаком при мнимой части, называется *сопряженным* числу α и обозначается $\bar{\alpha}$, т. е. $\bar{\alpha} = a - bi$.

Сумма и произведение сопряженных комплексных чисел являются действительными числами. Действительно,

$$\alpha + \bar{\alpha} = (a + bi) + (a - bi) = (a + a) + (b - b)i = 2a,$$

$$\alpha\cdot\bar{\alpha} = (a + bi)\cdot(a - bi) = (a^2 + b^2) + (ab - ab)i = a^2 + b^2.$$

Рассмотрим деление комплексных чисел. Пусть $\alpha = a + bi$ и $\beta = c + di$ — два комплексных числа, причем $(c, d) \neq (0, 0)$. Результатом деления числа α на число β является комплексное число $\frac{\alpha}{\beta}$, задаваемое формулой $\frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$. На практике для нахождения частного $\frac{\alpha}{\beta}$ обычно пользуются следующим правилом:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{\bar{\beta}}{\bar{\beta}} = \frac{\alpha\cdot\bar{\beta}}{\beta\cdot\bar{\beta}} = \frac{a + bi}{c + di}\cdot\frac{c - di}{c - di} = \frac{ac - bdi^2 + bci - adi}{c^2 - (di)^2} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i.$$

Пример: $\frac{2 + i}{4 + 3i} = \frac{(2 + i)(4 - 3i)}{(4 + 3i)(4 - 3i)} = \frac{8 + 3 + 4i - 6i}{4^2 + 3^2} = \frac{11}{25} - \frac{2}{25}i$.

Замечание. В отношении комплексных чисел не вводится понятие «больше» или «меньше».

4. Геометрическое изображение комплексных чисел. Пусть на плоскости задана прямоугольная декартова система координат с осями x и y. Тогда комплексному числу $\alpha = a + bi$ на плоскости соответствует точка с координатами a, b. Эту точку будем обозначать той же буквой α.

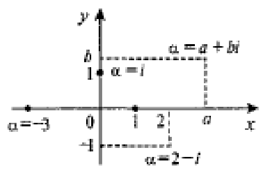

Рис. 16

При таком способе изображения комплексных чисел действительному числу a, т. е. числу вида $a + 0i$ будет соответствовать точка $(a;\, 0)$, которая лежит на оси x. Поэтому ось x называют *действительной осью*. Числу же вида $0 + bi$ будет соответствовать точка $(0;\, b)$ на оси y. Поэтому ось y называют *мнимой осью* (рис. 16).

Наряду с изображением комплексных чисел точками на плоскости применяется способ изображения с помощью векторов на плоскости (рис.17). Числу $a + bi$ ставится в соответствие вектор с координатами a и b, причем этот вектор считается отложенным от начала координат. При таком способе изображения комплексных чисел их сложение осуществляется по правилу параллелограмма (рис. 18).

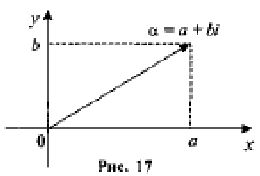

Рис. 17

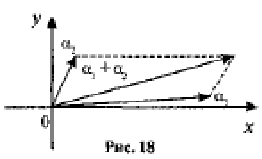

Рис. 18

Вопросы и задания

1. Объяснить необходимость введения комплексных чисел.
2. Как вводятся комплексные числа ?
3. Какие два комплексных числа называются равными ?
4. Как определяется сумма двух комплексных чисел и произведение ?
5. По какому правилу складываются и вычитаются комплексные числа?
6. Как определяется сопряженное число ?
7. По какому правилу производится деление комплексных чисел ?
8. Как изображается комплевсное число в прямоугольной системе координат?
9. Как можно сложить комплексные числа в прямоугольной системе координат?