

Формулы суммы и разности

Преобразуем теперь сумму и разность тригонометрических функций в произведение функций. Чтобы представить в виде произведения сумму $\sin\alpha + \sin\beta$, положим $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ и воспользуемся формулами синуса суммы и синуса разности углов. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta &= \sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y + \\ &+ \sin x \cos y - \cos x \sin y = 2 \sin x \cos y.\end{aligned}$$

Из равенств $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ находим, что $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Поэтому

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (4)$$

Полученная формула носит название *формулы суммы синусов двух углов*.

Аналогично выводятся *формулы разности синусов, суммы и разности косинусов двух углов*:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad (5)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}, \quad (6)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}. \quad (7)$$

Далее имеем $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \quad (8)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha \cos\beta}, \quad \text{где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad (9)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}, \quad \text{где } \alpha \neq \pi k \text{ и } \beta \neq \pi k. \quad (10)$$

1. (96-6-35) Упростите выражение

$$\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{\sin\alpha}$$

- A) $-2\cos 2\alpha$ B) $2\cos 2\alpha$ C) $\sin 2\alpha$
 D) $-2\sin 2\alpha$ E) $2\sin 2\alpha$

2. (97-2-35) Какому из указанных выражений может равняться

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}?$$

- A) $-\frac{1}{2\sin 2\alpha}$ B) $\frac{1}{2\cos 2\alpha}$ C) $\frac{1}{\sin 2\alpha}$
 D) $-\frac{1}{\sin 2\alpha}$ E) $\frac{1}{2\sin 2\alpha}$

3. (97-8-34) Чему может равняться $\frac{\cos 4\alpha}{\sin 5\alpha - \sin 3\alpha}$

- A) $\frac{1}{2\cos\alpha}$ B) $\frac{1}{\sin\alpha}$ C) $\frac{1}{\cos\alpha}$ D) $\frac{\cos 4\alpha}{\sin 2\alpha}$ E) $\frac{1}{2\sin\alpha}$

4. (97-12-34) Упростите:

$$\frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\sin 5\alpha}$$

- A) $2\sin\alpha$ B) $2\cos\alpha$ C) $-\cos 2\alpha$
 D) $-\sin\alpha$ E) $-2\sin\alpha$

5. (98-6-54) Вычислите

$$\cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D) 0 E) 1

6. (98-8-57) Упростите выражение:

$$\frac{1 - \sin\alpha - \cos 2\alpha + \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha + 2\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}$$

- A) $2\operatorname{ctg}\alpha$ B) $\operatorname{tg}\alpha$ C) $2\sin\alpha$
 D) $\operatorname{ctg}\alpha$ E) $-\operatorname{ctg}\alpha$

7. (98-10-35) Упростите:

$$\frac{\sin 4\alpha - \sin 6\alpha}{\cos 5\alpha}$$

- A) $\sin 2\alpha$ B) $2\sin\alpha$ C) $-\cos 2\alpha$
 D) $-2\sin\alpha$ E) $2\cos\alpha$

8. (98-12-110) Вычислите:

$$\sin 75^\circ - \sin 15^\circ$$

- A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $\sqrt{2}$ D) $-\sqrt{2}$ E) $-\frac{2}{\sqrt{2}}$

9. (99-5-54) Вычислите

$$\sqrt[3]{8 + \left(\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} \right)^3}$$

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 2,5

10. (00-1-28) Вычислите $\frac{\sin 35^\circ + \cos 65^\circ}{2\cos 5^\circ}$

- A) 0,25 B) 0,75 C) 0,5 D) 0,6 E) 0,3

11. (00-9-49) Вычислите

$$\frac{2\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}}{3\cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7}}$$

- A) 1 B) 2 C) $\frac{2}{3}$ D) $\frac{4}{9}$ E) 3

12. (00-9-56) $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ и
 $(\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}) \cdot (\operatorname{tg}\beta + \sqrt{3}) = 4$.

Вычислите $9 \cdot \left(\frac{\alpha + \beta}{\pi}\right)^2$

- A) 0,25 B) 0,5 C) 0,36 D) 0,64 E) 0,16

13. (00-10-52) Вычислите

$$\cos 24^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ + \sin 42^\circ$$

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

14. (01-6-27) Вычислите

$$\cos 15^\circ + \sqrt{3} \sin 15^\circ$$

- A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

15. (01-7-40) Упростите

$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha - \sin(\pi + 3\alpha)}{2\cos\alpha + 1}$$

- A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $\sin 2\alpha$ D) $\cos 2\alpha$ E) $1 + \sin\alpha$

16. (01-10-40)

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4}, \\ \operatorname{ctg}x \cdot \operatorname{ctg}y = 3 \end{cases}$$

$$\cos(x - y) - ?$$

- A) 0 B) 0,5 C) 1 D) $-0,5$ E) -1

17. (01-11-21) Чему равно

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}?$$

- A) 3,5 B) 2,5 C) 3 D) 4 E) 4,5

18. (02-2-72) Вычислите

$$\left(\frac{\sin 100^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 50^\circ} \right)^2$$

- A) 3 B) $\frac{3}{4}$ C) $\frac{3}{2}$ D) 1 E) $\frac{1}{4}$

19. (02-3-68) Вычислите

$$\sin \frac{\pi}{9} - \cos \frac{7\pi}{18}$$

- A) 0 B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $-\frac{1}{2}$

20. (02-5-42) Упростите

$$\frac{\sin\alpha + \sin 2\alpha - \sin(\pi + 3\alpha)}{1 + 2\cos\alpha}$$

- A) $\sin\alpha$ B) $\cos\alpha$ C) $1 + \cos\alpha$
 D) $1 + \sin\alpha$ E) $\sin 2\alpha$

21. (03-7-42) Упростите

$$\sin 87^\circ - \sin 59^\circ - \sin 93^\circ + \sin 61^\circ$$

- A) $\sqrt{3}\sin 1^\circ$ B) $\sin 1^\circ$ C) $-\sqrt{2}\sin 1^\circ$
 D) 0 E) $\sin 2^\circ$

22. (03-9-44) Найдите значение выражения $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$, если $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

- A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) 1 E) 2