

## § 11. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

### 1. Уравнения, содержащие знак модуля.

**Определение 1.** Если в заданном уравнении неизвестное содержится под знаком модуля, то такое уравнение называется *уравнением, содержащим знак модуля*.

Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$  — выражения от  $x$ , определенные на некотором числовом множестве. Рассмотрим несколько типов уравнений, содержащих знак модуля.

#### 1) Уравнения вида

$$|f(x)| = g(x). \quad (1)$$

Из определения модуля ясно, что уравнение (1) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

169

**Пример 1.** Решить уравнение  $|2x-5|=x$ .

**Решение.**

$$|2x-5|=x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5 \geq 0 \\ 2x-5=x \\ 2x-5 < 0 \\ 5-2x=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ 2x \geq 5 \\ 3x=5 \\ 2x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=\frac{5}{3} \\ x=\frac{5}{3} \\ x=\frac{5}{3} \end{cases}.$$

Ответ:  $\left\{1\frac{2}{3}; 5\right\}$ .

2) Уравнения вида  $|f(x)| = |g(x)|$ . Пусть  $f(x) = g(x)$ . Тогда  $|f(x)| = |g(x)|$ . Если же  $f(x) = -g(x)$ , то снова  $|f(x)| = |g(x)|$ . Поэтому, если  $f(x) = g(x)$  или  $f(x) = -g(x)$ , то  $|f(x)| = |g(x)|$ .

Обратно, пусть  $|f(x)| = |g(x)|$  и  $g(x) \geq 0$ . Тогда  $|f(x)| = g(x)$ . Отсюда получаем  $f(x) = g(x)$  или  $f(x) = -g(x)$ .

Остается рассмотреть случай  $|f(x)| = |g(x)|$  и  $g(x) < 0$ . Имеем  $|f(x)| = -g(x)$ . Отсюда получаем  $f(x) = -g(x)$  или  $f(x) = g(x)$ .

Таким образом, уравнение  $|f(x)| = |g(x)|$  равносильно совокупности

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}.$$

**Пример 2.** Решить уравнение  $|x-3| = |2x+5|$ .

**Решение.**  $|x-3| = |2x+5| \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2x+5 \\ x-3 = -2x-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2x = 5+3 \\ x+2x = -3-5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x = 8 \\ 3x = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = -\frac{8}{3} \end{cases}. \text{ Ответ: } \left\{-8; -\frac{8}{3}\right\}.$$

3) Уравнения вида  $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ . Рассмотрим несколько случаев. Пусть  $f(x) > 0$ . Тогда при  $g(x) > 0$  верны равенства  $|f(x) + g(x)| = f(x) + g(x) = |f(x)| + |g(x)|$ .

Если же  $g(x) < 0$ , то  $|f(x) + g(x)| \neq f(x) - g(x)$ , т. е.  $|f(x) + g(x)| \neq |f(x)| + |g(x)|$ . Пусть  $f(x) < 0$ . Если  $g(x) < 0$ , то  $|f(x) + g(x)| < 0$ . Отсюда имеем  $|f(x) + g(x)| = -(f(x) + g(x)) = -f(x) - g(x) = |f(x)| + |g(x)|$ . Если же  $g(x) > 0$ , то  $|f(x) + g(x)| \neq -f(x) + g(x)$ , т. е.  $|f(x) + g(x)| \neq |f(x)| + |g(x)|$ . Наконец, пусть  $f(x) = 0$ . Тогда  $|f(x) + g(x)| = |g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ .

Из симметричности уравнения относительно  $f(x)$  и  $g(x)$  следует, что аналогичные результаты будут справедливыми, если рассмотреть вместо  $f(x)$  случаи с  $g(x)$  ( $>$ ,  $=$ ,  $< 0$ ).

Таким образом, при всех  $x$ , удовлетворяющих условию  $f(x) \cdot g(x) \geq 0$ , верно равенство  $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ . Так как при  $f(x) \cdot g(x) < 0$  равенство  $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$  не имеет места, то  $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0$ .

**Пример 3.** Решить уравнение  $|x^4 - 6x + 2| = x^4 + 6|x| + 2$ .

**Решение.**  $|x^4 - 6x + 2| = x^4 + 6|x| + 2 \Leftrightarrow |x^4 - 6x + 2| = |x^4 + 2| + |-6x| \Leftrightarrow -6x(x^4 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; 0]$ . Ответ:  $(-\infty; 0]$ .

**Пример 4.** Решить уравнение  $|x-2| + |x+3| + |x| = 7$ .

**Решение.**  $|x-2| + |x+3| + |x| = 7 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -x+2-x-3-x=7 & \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ -x+2+x+3-x=7 & \text{при } x \in (-3; 0] \\ -x+2+x+3+x=7 & \text{при } x \in (0; 2] \\ x-2+x+3+x=7 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x=8 & \text{при } \\ -x=2 & \text{при } \\ x=2 & \text{при } \\ 3x=6 & \text{при } \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x \in (-\infty; -3] \\ x \in (-3; 0] \\ x \in (0; 2] \\ x \in (2; +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = -\frac{8}{3} \\ x = -2 \\ x = 2 \\ x = 2 \end{matrix} \begin{matrix} \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ \text{при } x \in (-3; 0] \\ \text{при } x \in (0; 2] \\ \text{при } x \in (2; +\infty) \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x = -2 \\ x = 2 \\ \emptyset \end{cases}.$$

Ответ:  $\{-2; 2\}$ .

## 2. Неравенства, содержащие знак модуля.

**Определение 2.** Если в неравенстве неизвестное содержится под знаком модуля, то такое неравенство называется *неравенством, содержащим знак модуля*.

Рассмотрим несколько типов неравенств, содержащих знак модуля.

### 1) Неравенства вида

$$|f(x)| \geq g(x). \quad (2)$$

Из определения модуля ясно, что неравенство (2) равносильно совокупности систем неравенств  $\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$  и  $\begin{cases} -f(x) \geq g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$ .

**Пример 5.** Решить неравенство  $|3x-6| \geq x$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |3x-6| \geq x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-6 \geq 0 \\ 3x-6 \geq x \\ 3x-6 < 0 \\ -3x+6 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 6 \\ 2x \geq 6 \\ 3x < 6 \\ 6 \geq 4x \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \\ x < 2 \\ 1,5 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1,5 \end{cases}. \end{aligned}$$

Ответ:  $(-\infty; 1,5] \cup [3; +\infty)$ .

2) Неравенства вида  $|f(x)| \geq |g(x)|$  (или  $|f(x)| \leq |g(x)|$ ).

**Пример 6.** Решить неравенство  $|2x-6| \leq |x|$ .

**Решение. 1-й способ:**  $|2x-6| \leq |x| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6 \leq -x & \text{при } x \in (-\infty; 0] \\ -2x+6 \leq x & \text{при } x \in (0; 3] \\ 2x-6 \leq x & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -6 & \text{при } x \in (-\infty; 0] \\ -3x \leq -6 & \text{при } x \in (0; 3] \\ x \leq 6 & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 & \text{при } x \in (-\infty; 0] \\ x \geq 2 & \text{при } x \in (0; 3] \\ x \leq 6 & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x \in [2; 3] \\ x \in [3; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 6]. \end{aligned}$$

Ответ:  $[2; 6]$ .

$$\begin{aligned} \text{2-й способ: } |2x-6| \leq |x| &\Leftrightarrow (2x-6)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 \leq x^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-6) \leq 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ x-6 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \\ x-6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 6 \\ x \leq 2 \\ x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ:  $[2; 6]$ .



## Вопросы и задания

1. Какое уравнение называется уравнением, содержащим знак модуля?
2. Как решаются уравнения вида  $|f(x)| = g(x)$ ?
3. Как решаются уравнения вида  $|f(x)| = |g(x)|$ ?
4. Какое неравенство называется неравенством, содержащим знак модуля?
5. Как решаются неравенства вида  $|f(x)| \geq g(x)$ ?

## Упражнения

### 1. Решить уравнение:

- |                  |                      |                              |
|------------------|----------------------|------------------------------|
| a) $ x-2 =5$ ;   | б) $ x-5 = x+4 $ ;   | в) $ 3x-5 = 2x $ ;           |
| г) $ 2x+3 =-8$ ; | д) $ 6x+7 = 7x+9 $ ; | е) $ 2x+7 = 8x-1 + x $ ;     |
| ж) $ 2x-5 =0$ ;  | з) $ 6x-1 = 2x+3 $ ; | и) $ x-5 + 3x+8 = x+4 $ ;    |
| к) $ 3x+8 =2$ ;  | л) $ 2x+1 =x-3$ ;    | м) $ x^2-3x+5 =x^2+3 x +5$ . |

### 2. Решить неравенство:

- |                     |                          |                          |
|---------------------|--------------------------|--------------------------|
| a) $ x-2  \leq 5$ ; | б) $ 5x-4  \geq 2$ ;     | в) $ 2x+1  <  x-1 $ ;    |
| г) $ x+3  > 6$ ;    | д) $ 2x-1  \geq  x $ ;   | е) $ x+1 + x-1  >  x $ . |
| ж) $ 2x+3  < -3$ ;  | з) $ 2x+3  \geq  x -3$ ; |                          |
| и) $ 4x-1  > -2$ ;  | к) $ 5x-2  > x+3- x $ ;  |                          |