ГЛАВА XI

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛ

§ 1. Числовые последовательности

1. Числовая последовательность. Способы задания числовых последовательностей.

Определение 1. Любая функция $y = f(n)$, заданная на множестве N всех натуральных чисел, называется *бесконечной числовой последовательностью.*

Из данного определения следует, что упорядоченное множество чисел (возможно повторяющихся) $f(1), f(2), ..., f(n), ...,$ где $n \in N$, является бесконечной числовой последовательностью. Для удобства обычно каждое значение $f(n)$ функции обозначают с помощью одной буквы (например, a_n) снабженной индексом, указывающим, какому натуральному числу соответствует взятое значение функции.

Пример 1. Пусть дана последовательность 2, 5, 8, ... В этой последовательности $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$ и т. д.

Пример 2. Рассмотрим последовательность 2, 4, 8, 16, ..., полученную с помощью натуральных степеней числа 2 в порядке возрастания. Тогда натуральному числу $n = 1$ соответствует значение $f(1) = 2$, натуральному числу $n = 2$ соответствует $f(2) = 4$, натуральному числу 3 соответствует 8 и т. д. Таким образом, каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $f(n) = 2^n$.

Пусть дана некоторая числовая последовательность

$$a_1, a_2, ..., a_n, ... \qquad (1)$$

Числа, которые образуют последовательность, называются *членами последовательности*. В частности, a_1 называется первым членом последовательности, a_2 — вторым членом и т. д., a_n — называется n-м членом последовательности (1).

В случае когда запись (1) является конечной, ее называют *конечной числовой последовательностью.*

Пример 3. Набор чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, состоящий из всех цифр, является конечной числовой последовательностью.

Числовую последовательность можно задавать по-разному. Чтобы задать числовую последовательность, необходимо указать способ, позволяющий найти любой член данной последовательности.

Рассмотрим несколько способов задания последовательностей.

1-й способ. Наиболее часто встречающийся способ состоит в задании формулы общего члена числовой последовательности, т. е. формулы, выражающей каждый член числовой последовательности через его порядковый номер.

Пример 4. Пусть общий член последовательности задан формулой $a_n = n^3$. Несколько первых членов этой последовательности таковы: 1, 8, 27, 64, ...

Пример 5. Пусть общий член последовательности задан формулой $b_n = \frac{n}{n+2}$. Члены этой последовательности таковы: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \ldots$.

2-й способ. Последовательность задается посредством описания всех ее членов.

Пример 6. Запишем последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{3}$, взятых с недостатком. Первые члены такой последовательности таковы: 1; 1,7; 1,71; ... .

3-й способ. Задаются несколько первых членов последовательности, а остальные члены с помощью рекуррентного соотношения выражаются через предыдущие.

Пример 7. Пусть последовательность задана соотношениями

$$a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ при } n > 3.$$

Тогда последовательность имеет следующий вид: 2, 2, 2, 4, 6, 10, 16, ...

4-й способ. Если последовательность конечная, то такую последовательность можно задать указанием всех ее членов.

Пример 8. Запишем последовательность всех двузначных чисел, кратных 5:

10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,
55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.

2. Монотонные последовательности. Числовая последовательность (1) обычно обозначается коротко символом $\{a_n\}$, $n \in N$.

Определение 2. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *монотонно возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} > a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 9. Пусть дана последовательность:

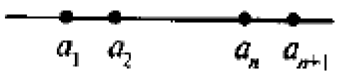
$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots .$$

Эта последовательность является монотонно возрастающей. Действительно, имеем

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Сравним числители полученных дробей. Так как $n(n + 2) = n^2 + 2n$, а $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, то $a_{n+1} > a_n$ при всех натуральных значениях n.

Если члены монотонно возрастающей последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$ изображать точками на числовой прямой, то a_{n+1} будет находиться правее a_n:



Определение 3. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *монотонно убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} < a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 10. Пусть дана последовательность с общим членом $a_n = \frac{n+2}{2n}$. Сравним a_{n+1} с a_n. Имеем $a_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+1)}$. Отсюда $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{(n+3)\cdot n}{2(n+1)\cdot n}$. Преобразуя числители дробей, получим $(n + 2)(n + 1) = n^2 + 3n + 2$ для a_n и $(n + 3)n = n^2 + 3n$ для a_{n+1}. Следовательно, $a_{n+1} < a_n$, и поэтому данная последовательность является монотонно убывающей.

Если члены монотонно убывающей последовательности изображать точками на числовой прямой, то, начиная со второго члена, каждый член последовательности будет находиться левее предыдущего:

Кроме вышеизложенных последовательностей, на практике встречаются последовательности, называемые *монотонно неубывающими* и *монотонно невозрастающими*.

Поясним эти понятия на примерах.

Пример 11. Рассмотрим последовательность: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

Эта последовательность является монотонно неубывающей последовательностью. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 12. Пусть дана последовательность

$$1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots .$$

Для этой последовательности, начиная со второго члена, выполняется соотношение $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in N$. Такая последовательность является монотонно невозрастающей последовательностью.

Монотонно возрастающие, монотонно убывающие, монотонно неубывающие и монотонно невозрастающие последовательности называют *монотонными последовательностями*.

Следует отметить, что не все последовательности являются монотонными.

Пример 13. Последовательность, определенная формулой $a_n = (-1)^n \cdot 2$ при $n \in N$, не является монотонной последовательностью.

Действительно, так как $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -2$, $a_4 = 2$, ..., то общий член этой последовательности не удовлетворяет ни одному из указанных в определениях условий.

3. Ограниченная последовательность

Определение 4. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *ограниченной сверху*, если существует число a такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \leq a$.

Пример 14. Рассмотрим последовательность, составленную из десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, взятых с недостатком: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

В данной последовательности $a_n < 2$ для всех $n \in N$, т.е. последовательность ограничена сверху.

Кроме вышеизложенных последовательностей, на практике встречаются последовательности, называемые *монотонно неубывающими* и *монотонно невозрастающими.*

Поясним эти понятия на примерах.

Пример 11. Рассмотрим последовательность: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

Эта последовательность является монотонно неубывающей последовательностью. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 12. Пусть дана последовательность

$$1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots .$$

Для этой последовательности, начиная со второго члена, выполняется соотношение $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in N$. Такая последовательность является монотонно невозрастающей последовательностью.

Монотонно возрастающие, монотонно убывающие, монотонно неубывающие и монотонно невозрастающие последовательности называют *монотонными последовательностями.*

Следует отметить, что не все последовательности являются монотонными.

Пример 13. Последовательность, определенная формулой $a_n = (-1)^n \cdot 2$ при $n \in N$, не является монотонной последовательностью.

Действительно, так как $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -2$, $a_4 = 2$, ..., то общий член этой последовательности не удовлетворяет ни одному из указанных в определениях условий.

3. Ограниченная последовательность

Определение 4. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *ограниченной сверху*, если существует число a такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \leq a$.

Пример 14. Рассмотрим последовательность, составленную из десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, взятых с недостатком: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

В данной последовательности $a_n < 2$ для всех $n \in N$, т.е. последовательность ограничена сверху.

Определение 5. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *ограниченной снизу*, если существует число b такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \geq b$.

Пример 15. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Очевидно, что каждый член этой последовательности больше нуля, т.е. для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Следовательно, данная последовательность является ограниченной снизу.

Пример 16. Рассмотрим последовательность, общий член которой определяется формулой $a_n = (-1)^n n$. Эта последовательность не является ограниченной снизу и не является ограниченной сверху. Действительно, для любого числа $a > 0$ существует четное натуральное число $2k$ такое, что $a_{2k} > a$, т.е. $a_{2k} = (-1)^{2k} 2k = 2k > a$. Это означает, что заданная последовательность не является ограниченной сверху. Далее, для любого $b < 0$ существует нечетное натуральное число $2m + 1$ такое, что выполняется неравенство $|a_{2m+1}| > |b|$. Тогда $a_{2m+1} = (-1)^{2m+1}(2m + 1) = -(2m + 1) < -|b| = b$. Отсюда следует, что последовательность не является ограниченной снизу.

Ограниченная снизу и сверху числовая последовательность называется *ограниченной последовательностью.* Таким образом, последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ является ограниченной, если существуют действительные числа a и b такие, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $a \leq a_n \leq b$.

Геометрически ограниченная последовательность означает, что все ее члены содержатся в некотором отрезке $[a; b]$.

Последовательность, которая не является ограниченной снизу или сверху, называется *неограниченной последовательностью.*

Пример 17. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = \frac{n}{n+1}$. Эта последовательность является ограниченной, поскольку для всех натуральных значений n выполняются неравенства $0 < \frac{n}{n+1} < 1$.

Пример 18. Последовательность, состоящая из четных натуральных чисел, является неограниченной последовательностью, так как она не ограничена сверху.

Утверждение. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ была ограниченной, необходимо и достаточно существование неотрицательного числа m такого, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $|a_n| \le m$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ ограниченная. Тогда существуют действительные числа a и b такие, что для любого члена последовательности выполняются неравенства $a \le a_n \le b$.

Если $|b| \ge |a|$, полагая $m = |b|$, для всех $n \in N$ имеем $|a_n| \le m$. Если же $|b| \le |a|$, следует положить $m = |a|$. Необходимость доказана.

Достаточность условия $|a_n| \le m$ является очевидной, так как это неравенство означает, что $-m \le a_n \le m$.

В случае когда $m = 0$, последовательность состоит из одних нулей. Действительно, если $m = 0$, то из $|a_n| \le 0$ следует $a_n = 0$ для всех $n \in N$.