§ 3. Предел числовой последовательности

1. Определение предела числовой последовательности. Прежде чем дать определение предела числовой последовательности, рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n+1}{n}$. Тогда имеем

$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = \frac{7}{3},\ x_4 = \frac{9}{4},\ x_5 = \frac{11}{5},\ \ldots,\ x_n = \frac{2n+1}{n},\ \ldots$$

или $x_1 = 3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 2\frac{1}{3}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 2\frac{1}{5}$, ..., $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, ...

Видно, что с возрастанием номера члены последовательности приближаются к 2. Это будет отчетливее видно, если рассмотреть расстояния между числами x_n и 2. По определению расстояние между x_n и 2 равно абсолютной величине разности чисел x_n и 2, т. е. равно $|x_n - 2|$. Тогда имеем:

$$|x_1 - 2| = |3 - 2| = 1;$$

$$|x_2 - 2| = \left|2\frac{1}{2} - 2\right| = \frac{1}{2};$$

$$|x_3 - 2| = \left|2\frac{1}{3} - 2\right| = \frac{1}{3};$$

$$|x_4 - 2| = \left|2\frac{1}{4} - 2\right| = \frac{1}{4};$$

$$|x_5 - 2| = \left|2\frac{1}{5} - 2\right| = \frac{1}{5};$$

....

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}.$$

Отсюда ясно, что при возрастании номеров числовой последовательности расстояние $|x_n - 2|$ становится меньше любого фиксированного положительного числа. Иначе говоря, члены заданной последовательности при возрастании их номеров сколь угодно близко приближаются к 2. В таких случаях говорят, что *последовательность стремится* к 2.

Пример 2. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: $3,\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{5}, \ldots$

Сопоставляя члены этой последовательности и точки на числовой прямой, видим, что с ростом номера n точки a_n справа и слева приближаются к точке с абсциссой 2. Вычислим расстояния между точками a_n и 2. Имеем

$$|a_1 - 2| = |3 - 2| = 1, \qquad |a_2 - 2| = \left|1\frac{1}{2} - 2\right| = \frac{1}{2},$$

$$|a_3 - 2| = \left|2\frac{1}{3} - 2\right| = \frac{1}{3}, \qquad |a_4 - 2| = \left|1\frac{3}{4} - 2\right| = \frac{1}{4},$$

$$|a_5 - 2| = \left|2\frac{1}{5} - 2\right| = \frac{1}{5},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|a_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}.$$

Видно, что значения a_n приближаются к 2. В математическом смысле это означает, что каково бы ни было положительное число ε, можно указать такой номер n_0, начиная с которого расстояние между членами данной последовательности и числом 2 меньше ε. Действительно, если, например, $\varepsilon = 0{,}001$, то начиная с номера 1001 расстояние между членами числовой последовательности и числом 2 будет меньше 0,001:

$$|a_{1001} - 2| = \frac{1}{1001} < 0{,}001.$$

Определение 1. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для всех членов x_n числовой последовательности с номерами $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, то число a называется *пределом числовой последовательности* x_n *при* $n \to +\infty$.

Если a — предел числовой последовательности $\{x_n\}$, то этот факт записывается в виде

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что *последовательность сходится*.

Докажем, например, что последовательность из примера 1 сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$. Действительно, рассмотрим разность $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\left|\frac{1}{n}\right|$. Эта разность меньше ε при $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда, полагая $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, где символ $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, имеем: для любого $\varepsilon>0$ существует номер $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ такой, что для всех членов последовательности $x_n=\frac{2n+1}{n}$ с номерами $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-2|<\varepsilon$. По определению это означает, что последовательность $x_n=\frac{2n+1}{n}$, $n\in N$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$. В частности, если $\varepsilon=0{,}5$, то $n_0=3$ и для всех $n>3$ выполняется неравенство $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<0{,}5$; для $\varepsilon=2$ имеем $n_0=1$ и при всех $n>1$ выполняется неравенство $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<2$.

Теорема 1. Если последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$ сходится, то она имеет единственный предел.

Доказательство. Предположим, что последовательность имеет два предела:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a',\ \lim_{n\to\infty}a_n=a'',$$

где $a'\neq a''$. Положим, $\varepsilon=\frac{|a'-a''|}{4}$. Для этого ε по определению существуют номера k' и k'', что для всех $n>k'$ и $m>k''$ имеем $|a_n-a'|<\varepsilon$ и $|a_m-a''|<\varepsilon$. Пусть для определенности $k'>k''$. Тогда для всех $n>k'$ выполняются неравенства $|a_n-a'|<\varepsilon$, $|a_n-a''|<\varepsilon$. Откуда $|a_n-a'|+|a_n-a''|<2\varepsilon$.

В силу неравенства треугольника имеем

$$|a'-a''|=|a'-a_n+a_n-a''|\le|a'-a_n|+|a_n-a''|<2\varepsilon=2\cdot\frac{|a'-a''|}{4}=\frac{|a'-a''|}{2}.$$

Отсюда следует $0<|a'-a''|<\frac{|a'-a''|}{2}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что последовательность может иметь только один предел.