

3. Формулы двойного и половинного аргументов. Воспользуемся следующими формулами сложения:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta.$$

Заменяя в этих формулах β на α , имеем тождества

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha, \quad (10)$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. \quad (11)$$

Используя формулы (10), (11), можно получить следующие тождества:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \left(2\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (2\alpha \neq \pi k). \quad (12)$$

Тождества (10)–(12) называются *формулами двойного аргумента*.

Сделаем теперь замену $\alpha = \beta/2$. Тогда формулы (10)–(12) примут вид:

$$\sin \beta = 2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}, \quad (10')$$

$$\cos \beta = \cos^2 \frac{\beta}{2} - \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad (11')$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \beta = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{\beta}{2} - 1}{2\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}. \quad (12')$$

Полученные тождества называют *формулами половинного аргумента*.

Имеем

$$\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha.$$

Отсюда, используя формулы (10) и (11), получим

$$\begin{aligned} \sin 3\alpha &= 2\sin\alpha \cos^2\alpha + \cos^2\alpha \sin\alpha - \sin^3\alpha = \\ &= 3\sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = \\ &= 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место формула

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \quad (13)$$

Аналогично получим, что

$$\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha \cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \quad (14)$$

Из тождеств (13) и (14) получаем, что

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \left(3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right).$$

Таким образом, справедлива формула

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} \left(3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \right). \quad (15)$$

$$\operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^3 \alpha - 3\operatorname{ctg} \alpha}{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} \quad (3\alpha \neq \pi k; \alpha \neq \pi k). \quad (16)$$

25. (99-5-21) Какое наименьшее значение может принимать выражение $\sin^6 x + \cos^6 x$?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

26. (99-6-12) Вычислите

$$\frac{2\operatorname{tg}(240^\circ)}{1 - \operatorname{tg}^2(240^\circ)}$$

A) $-\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ E) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

27. (99-6-15) Вычислите

$$14\sqrt{2} \left(\sin^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) - \cos^4 \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right)$$

A) 14 B) 7 C) $-14\sqrt{2}$ D) -14 E) $7\sqrt{2}$

28. (99-6-23) Упростите

$$1 + \frac{\operatorname{tg}^2(-\alpha) - 1}{\sin(0,5\pi + 2\alpha)}$$

A) $-\operatorname{tg}^2 \alpha$ B) $\operatorname{tg}^2 \alpha$ C) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$
D) $-\operatorname{ctg}^2 \alpha$ E) $\sin^2 \alpha$

29. (99-6-51) Упростите

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha.$$

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 4

30. (99-9-29) На сколько $\sin 150^\circ$ больше $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 80^\circ$?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{3}{8}$ C) $\frac{5}{8}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{4}$

31. (99-9-31) Вычислите $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4$.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{3}{4}$

32. (99-9-32) Упростите выражение

$$\frac{\sqrt{3}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha}$$

A) $2\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$ B) $\frac{1}{2}\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$
C) $2\cos(\alpha - \frac{\pi}{3})$ D) $\frac{1}{2}\sin(\alpha + \frac{\pi}{6})$
E) $2\cos(\alpha + \frac{\pi}{6})$

33. (99-10-28) Найдите наименьшее значение выражения

$$(1 + \cos^2 2\alpha) \cdot (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + 4\sin^2 \alpha.$$

A) 2,5 B) 1,5 C) 2 D) 3 E) 3,5

34. (99-10-29) Какому числу равно

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ}?$$

A) 4 B) 6 C) 3 D) 5 E) 2

35. (99-10-31) Упростите выражение

$$\frac{2\cos^2 \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

A) $-\sin 2\alpha$ B) $\cos 2\alpha$ C) $\sin 2\alpha$
D) $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ E) $-\frac{1}{2}\cos 2\alpha$

36. (00-1-27) Упростите выражение

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha} + 1$$

A) $\cos^{-2} \alpha$ B) $\sin^{-2} \alpha$ C) $\sin^2 \alpha$ D) $\cos^2 \alpha$
E) $-\cos^2 \alpha$

37. (00-2-48) Упростите

$$(\cos 3x + \cos x)^2 + (\sin 3x + \sin x)^2$$

A) $4\cos^2 x$ B) $2\cos^2 x$ C) $3\sin^2 x$
D) $4\sin^2 x$ E) $4\cos^2 x + 1$

38. (00-4-40) Вычислите

$$\frac{2 - 5\cos 2\alpha}{6 + 10\sin 2\alpha} - \frac{13 + 3\operatorname{tg} 2\alpha}{10\cos 2\alpha - 15\sin 2\alpha}$$

если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{1}{3}$ C) $\frac{6}{7}$ D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{8}{9}$

39. (00-7-29) Упростите выражения

$$\frac{1 + \cos 2\alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha}$$

A) $3\operatorname{ctg}^2 \alpha$ B) $3\operatorname{tg}^2 \alpha$ C) $1,5\operatorname{ctg}^2 \alpha$
D) $1,5\operatorname{tg}^2 \alpha$ E) $\operatorname{ctg}^2 \alpha$

40. (00-8-56) Вычислите

$$\log_2 \cos 20^\circ + \log_2 \cos 40^\circ + \log_2 \cos 80^\circ + \log_2 \cos 80^\circ$$

A) -4 B) -3 C) $\frac{1}{2}$ D) 1 E) 0

41. (00-8-61) Вычислите

$$\cos 50^\circ \cdot \cos 40^\circ - 2\cos 20^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 20^\circ$$

A) 0 B) 1 C) -1 D) $\cos 20^\circ$ E) $\sin 40^\circ$

42. (00-10-13) Вычислите

$$\cos \frac{\pi}{5} \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{8}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{3}{4}$

43. (01-1-43) Найдите $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

A) 0,96 B) $-0,96$ C) 0,25 D) $-0,5$ E) 0,5

44. (01-1-50) Вычислите

$$1 - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 40^\circ + \frac{1}{\cos 20^\circ}.$$

A) $\sin 20^\circ$ B) $\frac{1}{2}$ C) 0 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\cos 20^\circ$

45. (01-3-35) Найдите наибольшее значение выражения

$$\sin \frac{x}{2} \cdot \cos^3 \frac{x}{2} - \sin^3 \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}.$$

A) 1 B) $\frac{1}{2}$ C) 2 D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{8}$

46. (01-7-38) Найдите острый угол для которого $\operatorname{tg} \alpha = 2 - \sqrt{3}$

A) $\frac{\pi}{8}$ B) $\frac{\pi}{12}$ C) $\frac{5}{12}\pi$ D) $\frac{3}{8}\pi$ E) $\frac{5}{24}\pi$

47. (01-8-54) Если $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$, то чему равно выражение $\frac{2}{3+4\cos 2\alpha}$?

A) $\frac{52}{199}$ B) $\frac{52}{87}$ C) $\frac{26}{87}$ D) $\frac{26}{199}$ E) $\frac{13}{174}$

48. (01-9-21) Упростите

$$\sin^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos^2 \alpha \operatorname{ctg} \alpha + \sin 2\alpha$$

A) $\frac{2}{\sin 2\alpha}$ B) $\frac{2}{\sin \alpha \cos \alpha}$ C) 1 D) $\sin^2 \alpha$ E) $\frac{2}{\cos 2\alpha}$

49. (02-3-65) Вычислите

$$8 \sin^2 \frac{7\pi}{8} \cdot \cos^2 \frac{9\pi}{8}$$

A) 0 B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1 D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{1}{4}$

50. (02-3-67) Упростите

$$\sqrt{\sin^4 \alpha + \cos 2\alpha} + \sqrt{\cos^4 \alpha - \cos 2\alpha}.$$

A) 1 B) $\sin^2 \alpha$ C) 2 D) $\cos 2\alpha$ E) $\cos^2 \alpha$

51. (02-7-10) Вычислите $\sin^4 105^\circ \cdot \cos^4 75^\circ$

A) $\frac{1}{256}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{1}{128}$ D) $\frac{\sqrt{6}}{4}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

52. (02-7-38) Упростите

$$(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 - 2.$$

A) 0 B) 4 C) $2 \sin 2\alpha$ D) 1 E) $1 + 2 \sin 2\alpha$

53. (02-8-54) Упростите $\cos(\pi + 2\alpha) + \sin(\pi - 2\alpha) \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha)$.

A) 1 B) 2 C) $\sin \alpha$ D) $\cos \alpha$ E) $\operatorname{tg} \alpha$

54. (02-10-59) Вычислить $\operatorname{tg}(2\alpha)$, если $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ и $90^\circ < \alpha < 180^\circ$

A) $-\frac{4\sqrt{2}}{7}$ B) $-\frac{4\sqrt{3}}{7}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

55. (02-11-41) Упростите

$$\frac{1 + \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

A) $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$ B) $\cos \frac{\alpha}{2}$ C) $-\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{4}$ D) $\sin \frac{\alpha}{4}$ E) $-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{4}$

56. (03-1-39) Вычислите

$$\operatorname{ctg} 35^\circ - \operatorname{tg} 35^\circ - 2 \operatorname{tg} 20^\circ$$

A) $\frac{1}{2}$ B) 0 C) 1 D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\sqrt{3}$

57. (03-1-42) Найдите $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha \in (\frac{\pi}{2}; \pi)$

A) $\frac{\sqrt{6}}{48}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{23}$ C) $-\frac{4\sqrt{6}}{23}$ D) $\frac{2\sqrt{6}}{23}$ E) $\frac{4\sqrt{6}}{23}$

58. (03-2-38) Упростите

$$\cos \alpha \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{4} \cdot \cos \frac{\alpha}{8} \dots \cos \frac{\alpha}{128}.$$

A) $\frac{1}{128} \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{128}}$ B) $\frac{1}{256} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{2\alpha}{128}}$

C) $\frac{1}{128} \frac{\sin 2\alpha}{\sin \frac{2\alpha}{256}}$ D) $\frac{1}{256} \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{128}}$ E) $\frac{1}{64} \frac{\sin \alpha}{\sin \frac{\alpha}{64}}$

59. (03-4-24) Упростите

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

A) $\sin^2 2\alpha$ B) $\frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$ C) $\cos^2 2\alpha$

D) $\frac{1}{2} \cos^2 2\alpha$ E) $\frac{1}{2} \sin^2 \alpha$

60. (03-5-46) Вычислите

$$4 \cos 20^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 20^\circ$$

A) -1 B) 1 C) $-\frac{1}{2}$ D) $\frac{1}{2}$ E) $2\sqrt{3}$

61. (03-7-25) Если $\sin 37^\circ = a$, то выразите $\sin 16^\circ$ через a .

A) $a^2 - 1$ B) $a - 1$ C) $2a^2 - 1$ D) $1 - 2a^2$
E) определить нельзя

62. (03-7-34) Вычислите $\cos \alpha$, если

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B) $2 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ C) $2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

63. (03-8-1) Найдите $\sin 16^\circ$, если $\cos 37^\circ = a$.

A) $a^2 - 1$ B) $a - 1$ C) $2a^2 - 1$ D) $1 - 2a^2$
E) определить нельзя

64. (03-8-46) Вычислите

$$\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \operatorname{ctg} \frac{9\pi}{8}$$

A) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) -1