

Радианная мера угла. Определение синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

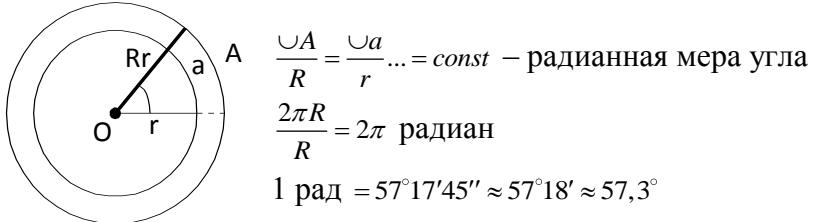
Любой угол измеряется либо в градусной мере измерения (единица измерения – градус) либо в радианной (единица измерения – радиан).

Один дуговой градус – это $\frac{1}{360}$ часть окружности.

Один угловой градус – это центральный угол, опирающийся на дуговой градус.

Радианская мера угла – это отношение длины дуги к радиусу этой дуги.

Радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, равную длине радиуса этой дуги.
Окружность содержит 2π радиан.



Для перехода от градусной меры измерения угла к радианной и наоборот можно пользоваться формулами:

$$360^\circ - 2\pi \Rightarrow A^\circ = \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}; \quad \alpha = \frac{A^\circ \cdot \pi}{180^\circ}$$

Например:

1) Дано: $\alpha = 2,1$ $A^\circ = \frac{180^\circ \cdot 2,1}{\pi} =$
Найти: $A^\circ - ?$

2) Дано: $A^\circ = 17^\circ 20'$ $\alpha = \frac{17^\circ 20' \cdot \pi}{180^\circ} =$
Найти: $\alpha - ?$

Самостоятельно:

Выразите в градусах:

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|---------------------------|
| 1) $\frac{\pi}{15}$; | 4) $\frac{\pi}{12}$; | 7) $\frac{\pi}{8}$; | 10) $\frac{7\pi}{9}$; |
| 2) $\frac{2\pi}{3}$; | 5) $\frac{11\pi}{6}$; | 8) $1,5\pi$; | 11) 3π ; |
| 3) $0,25\pi$; | 6) $\frac{21}{4}\pi$; | 9) $-\frac{31}{6}\pi$; | 12) $\frac{101}{12}\pi$. |

Переведите из радианной меры в градусную:

- | | | | |
|-----------------------|------------------------|-------------------------|------------------------|
| 1) $\frac{3\pi}{4}$; | 3) $\frac{11\pi}{3}$; | 5) $\frac{6\pi}{5}$; | 7) $\frac{46\pi}{9}$; |
| 2) $\frac{5\pi}{8}$; | 4) $\frac{7\pi}{12}$; | 6) $\frac{11\pi}{12}$; | 8) $\frac{47\pi}{9}$. |

Для произвольного угла

$$R = 1; \quad \cos \alpha = \frac{x}{R} = \frac{x}{1} = x$$

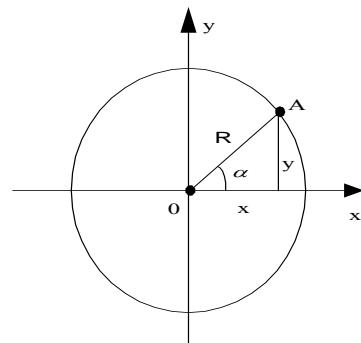
$$\sin \alpha = \frac{y}{R} = \frac{y}{1} = y$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}$$

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Основные

тригонометрические тождества



$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$	$\frac{1}{\cos \alpha} = \sec \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$	$\frac{1}{\sin \alpha} = \operatorname{cosec} \alpha$

Из определения:

$$|\sin \alpha| \leq 1$$

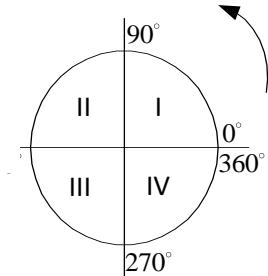
$$|\sec \alpha| \geq 1$$

$\operatorname{tg} \alpha$] любые
 $\operatorname{ctg} \alpha$] значения

$$|\cos \alpha| \leq 1$$

$$|\operatorname{cosec} \alpha| \geq 1$$

функции ограниченные



Самостоятельно:

В какой четверти находится угол:

- | | | |
|------------------|-------------------|-------------------|
| 1) 220° ; | 3) -160° ; | 5) 906° ; |
| 2) 285° ; | 4) -290° ; | 6) 4825° ? |

ЗОЛОТЫЕ УГЛЫ

Знаки функций по четвертям

	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
\sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
\cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
ctg	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0	-

	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} \alpha$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	+	-	+	-

Решить: 1) $\frac{4 - 2\operatorname{tg}^2 45^\circ + \operatorname{ctg}^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ - 4\cos^2 60^\circ + 4\operatorname{ctg}^2 45^\circ} = \frac{4 - 2 \cdot 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^4}{3 \cdot 1^3 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot 1^2} = \frac{4 - 2 + \frac{9}{81}}{3 - 1 + 4} = \frac{2 + \frac{1}{9}}{6} = \frac{19}{54}$

Самостоятельно:

Определить знак каждого из данных произведений:

- | | |
|---|--|
| 1) $\sin 100^\circ \cdot \sin 132^\circ$; | 5) $\operatorname{ctg} 300^\circ \cdot \sin 222^\circ$; |
| 2) $\cos 210^\circ \cdot \sin 115^\circ$; | 6) $\sin 118^\circ \cdot \cos 118^\circ \cdot \operatorname{tg} 118^\circ$; |
| 3) $\cos 285^\circ \cdot \cos 316^\circ$; | 7) $\sin 2,1 \cdot \operatorname{ctg} 2,1 \cdot \cos 2,1$; |
| 4) $\operatorname{tg} 112^\circ \cdot \sin 165^\circ$; | 8) $\cos 123^\circ \cdot \operatorname{tg} 123^\circ \cdot \sin 312^\circ$. |

Вычислите:

- | |
|---|
| 1) $2\sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{ctg} 30^\circ$; |
| 2) $\operatorname{tg} 60^\circ + 2\cos 45^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 45^\circ$; |
| 3) $6\cos 30^\circ - 3\operatorname{tg} 60^\circ + 2\sin 45^\circ$; |
| 4) $\sqrt{3} \operatorname{tg} 30^\circ + 4\sin 30^\circ - \sqrt{3} \operatorname{ctg} 30^\circ$; |
| 5) $\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3} - 2\cos \frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$; |

$$6) \frac{2 \left(\cos \frac{\pi}{3} \right)^3 - \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} \right)^3 + \left(\sin 0^\circ \right)^2}{\left(\cos \frac{\pi}{2} \right)^2 + 2 \sin \frac{\pi}{6} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4}}$$