

§ 11. Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

1. Уравнения, содержащие знак модуля.

Определение 1. Если в заданном уравнении неизвестное содержится под знаком модуля, то такое уравнение называется *уравнением, содержащим знак модуля*.

Пусть $f(x)$, $g(x)$ — выражения от x , определенные на некотором числовом множестве. Рассмотрим несколько типов уравнений, содержащих знак модуля.

1) Уравнения вида

$$|f(x)| = g(x). \quad (1)$$

Из определения модуля ясно, что уравнение (1) равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -f(x) = g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}$$

169

Пример 1. Решить уравнение $|2x - 5| = x$.

Решение.

$$|2x - 5| = x \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 2x - 5 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2x \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 5 \\ \begin{cases} 2x - 5 < 0 \\ 2x - 5 = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 5 \\ 2x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ 2x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\frac{5}{3}; 5\right\}$.

2) Уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$. Пусть $f(x) = g(x)$. Тогда $|f(x)| = |g(x)|$. Если же $f(x) = -g(x)$, то снова $|f(x)| = |g(x)|$. Поэтому, если $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$, то $|f(x)| = |g(x)|$.

Обратно, пусть $|f(x)| = |g(x)|$ и $g(x) \geq 0$. Тогда $|f(x)| = g(x)$. Отсюда получаем $f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x)$.

Остается рассмотреть случай $|f(x)| = |g(x)|$ и $g(x) < 0$. Имеем $|f(x)| = -g(x)$. Отсюда получаем $f(x) = -g(x)$ или $f(x) = g(x)$.

Таким образом, уравнение $|f(x)| = |g(x)|$ равносильно совокупности

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{cases}$$

Пример 2. Решить уравнение $|x - 3| = |2x + 5|$.

$$\text{Решение. } |x - 3| = |2x + 5| \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = 2x + 5 \\ x - 3 = -2x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2x = 5 + 3 \\ x + 2x = 3 - 5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ 3x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ Ответ: } \left\{-\frac{2}{3}; -8\right\}.$$

3) Уравнения вида $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Рассмотрим несколько случаев. Пусть $f(x) > 0$. Тогда при $g(x) > 0$ верны равенства $|f(x) + g(x)| = f(x) + g(x) = |f(x)| + |g(x)|$.

Если же $g(x) < 0$, то $|f(x) + g(x)| \neq f(x) - g(x)$, т. е. $|f(x) + g(x)| \neq |f(x)| + |g(x)|$. Пусть $f(x) < 0$. Если $g(x) < 0$, то $f(x) + g(x) < 0$. Отсюда имеем $|f(x) + g(x)| = -(f(x) + g(x)) = -f(x) - g(x) = |f(x)| + |g(x)|$. Если же $g(x) > 0$, то $|f(x) + g(x)| \neq -f(x) + g(x)$, т. е. $|f(x) + g(x)| \neq |f(x)| + |g(x)|$. Наконец, пусть $f(x) = 0$. Тогда $|f(x) + g(x)| = |g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$.

Из симметричности уравнения относительно $f(x)$ и $g(x)$ следует, что аналогичные результаты будут справедливыми, если рассматривать вместо $f(x)$ случаи с $g(x) (>, =, < 0)$.

Таким образом, при всех x , удовлетворяющих условию $f(x) \cdot g(x) \geq 0$, верно равенство $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$. Так как при $f(x) \cdot g(x) < 0$ равенство $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)|$ не имеет места, то $|f(x) + g(x)| = |f(x)| + |g(x)| \Leftrightarrow f(x)g(x) \geq 0$.

Пример 3. Решить уравнение $|x^4 - 6x + 2| = x^4 + 6|x| + 2$.

$$\text{Решение. } |x^4 - 6x + 2| = x^4 + 6|x| + 2 \Leftrightarrow |x^4 - 6x + 2| = |x^4 + 6|x| + 2| \Leftrightarrow$$

$$= |x^4 + 2| + |-6x| \Leftrightarrow -6x(x^4 + 2) \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; 0]. \text{ Ответ: } (-\infty; 0].$$

Пример 4. Решить уравнение $|x - 2| + |x + 3| + |x| = 7$.

$$\text{Решение. } |x - 2| + |x + 3| + |x| = 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x + 2 - x - 3 - x = 7 & \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ -x + 2 + x + 3 - x = 7 & \text{при } x \in (-3; 0] \\ -x + 2 + x + 3 + x = 7 & \text{при } x \in (0; 2] \\ x - 2 + x + 3 + x = 7 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x = 8 & \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ -x = 2 & \text{при } x \in (-3; 0] \\ x = 2 & \text{при } x \in (0; 2] \\ 3x = 6 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} x \in (-\infty; -3] & \begin{cases} x = -\frac{8}{3} & \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ x \in (-3; 0] & \text{при } x \in (-3; 0] \\ x \in (0; 2] & \text{при } x \in (0; 2] \\ x \in (2; +\infty) & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \\ x \in (-3; 0] & \begin{cases} x = -2 & \text{при } x \in (-3; 0] \\ x = 2 & \text{при } x \in (0; 2] \\ x = 2 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \\ x \in (0; 2] & \begin{cases} x = 2 & \text{при } x \in (0; 2] \\ x = 2 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \\ x \in (2; +\infty) & \begin{cases} x = 2 & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset & \text{при } x \in (-\infty; -3] \\ x = -2 & \text{при } x \in (-3; 0] \\ x = 2 & \text{при } x \in (0; 2] \\ \emptyset & \text{при } x \in (2; +\infty) \end{cases}$$

Ответ: $\{-2; 2\}$.

2. Неравенства, содержащие знак модуля.

Определение 2. Если в неравенстве неизвестное содержится под знаком модуля, то такое неравенство называется *неравенством, содержащим знак модуля*.

Рассмотрим несколько типов неравенств, содержащих знак модуля.

1) Неравенства вида

$$|f(x)| \geq g(x). \quad (2)$$

Из определения модуля ясно, что неравенство (2) равносильно

$$\text{совокупности систем неравенств } \begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} -f(x) \geq g(x) \\ f(x) < 0 \end{cases}.$$

Пример 5. Решить неравенство $|3x - 6| \geq x$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } |3x - 6| \geq x &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 6 \geq 0 \\ 3x - 6 \geq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x \geq 6 \\ 2x \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ x \leq 1,5 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1,5 \geq x \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $(-\infty; 1,5] \cup [3; +\infty)$.

2) Неравенства вида $|f(x)| \geq |g(x)|$ (или $|f(x)| \leq |g(x)|$).

Пример 6. Решить неравенство $|2x - 6| \leq |x|$.

Решение. 1-й способ: $|2x - 6| \leq |x| \Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 6 \leq -x & \text{при } x \in (-\infty; 0) \\ -2x + 6 \leq x & \text{при } x \in (0; 3) \\ 2x - 6 \leq x & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x \leq -6 & \text{при } x \in (-\infty; 0) \\ -3x \leq -6 & \text{при } x \in (0; 3) \\ x \leq 6 & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 6 & \text{при } x \in (-\infty; 0) \\ x \geq 2 & \text{при } x \in (0; 3) \\ x \leq 6 & \text{при } x \in (3; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \emptyset \\ x \in [2; 3] \\ x \in (3; 6] \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 6]. \end{aligned}$$

Ответ: $[2; 6]$.

2-й способ: $|2x - 6| \leq |x| \Leftrightarrow (2x - 6)^2 \leq x^2 \Leftrightarrow 4x^2 - 24x + 36 \leq x^2 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 36 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 12 \leq 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 6) \leq 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ x - 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ \emptyset \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2; 6].$$

Ответ: $[2; 6]$.

Вопросы и задания

1. Какое уравнение называется уравнением, содержащим знак модуля?
2. Как решаются уравнения вида $|f(x)| = g(x)$?
3. Как решаются уравнения вида $|f(x)| = |g(x)|$?
4. Какое неравенство называется неравенством, содержащим знак модуля?
5. Как решаются неравенства вида $|f(x)| \geq g(x)$?

Упражнения

1. Решить уравнение:

- | | | |
|----------------------|----------------------------|--|
| a) $ x - 2 = 5$; | d) $ x - 5 = x + 4 $; | u) $ 3x - 5 = 2x $; |
| b) $ 2x + 3 = -8$; | e) $ 6x + 7 = 7x + 9 $; | k) $ 2x + 7 = 8x - 1 + x $; |
| f) $ 2x - 5 = 0$; | ж) $ 6x - 1 = 2x + 3 $; | л) $ x - 5 + 3x + 8 = x + 4 $; |
| z) $ 3x + 8 = 2$; | з) $ 2x + 1 = x - 3$; | м) $ x^2 - 3x + 5 = x^2 + 3 x + 5$. |

2. Решить неравенство:

- | | | |
|-----------------------|-------------------------------|--------------------------------|
| a) $ x - 2 \leq 5$; | d) $ 5x - 4 \geq 2$; | u) $ 2x + 1 < x - 1 $; |
| b) $ x + 3 > 6$; | e) $ 2x - 1 \geq x $; | к) $ x + 1 + x - 1 > x $; |
| ж) $ 2x + 3 < -3$; | ж) $ 2x + 3 \geq x - 3$; | |
| з) $ 4x - 1 > -2$; | з) $ 5x - 2 > x + 3 - x $; | |