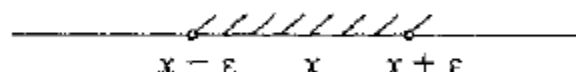


§ 1. Предел функции

1. Окрестность точки. Начнем изучение свойств функции вблизи некоторой точки. Для этого сначала введем понятие окрестности точки. Пусть $\varepsilon > 0$.

Определение 1. Окрестностью точки x на числовой оси называется произвольный интервал $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, содержащий эту точку. При этом число ε называют *радиусом окрестности*, а точку x — *центром окрестности*.



Каждая точка числовой оси имеет бесконечно много окрестностей. Легко понять, что пересечение и объединение двух окрестностей точки также является окрестностью этой точки.

$$\text{Пример 1. } (2 - 0,1; 2 + 0,1) \cap (2 - 0,01; 2 + 0,01) = \\ = (2 - 0,01; 2 + 0,01);$$

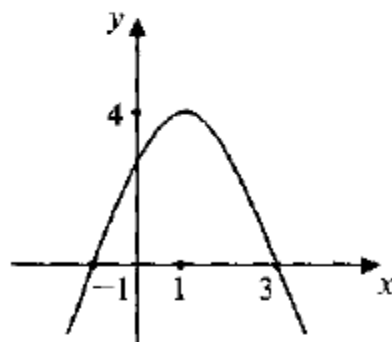
$$(2 - 0,1; 2 + 0,1) \cup (2 - 0,01; 2 + 0,01) = (2 - 0,1; 2 + 0,1).$$

Далее поясним на примере понятие «свойство функции вблизи некоторой точки».

Пример 2. Пусть дана функция $y = -(x - 1)^2 + 4$. Нарисуем ее график. По графику можно ска-

зать, что в окрестности $\left(1 - \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2}\right)$

точки $x = 1$ функция принимает положительные значения. В этой окрестности значения функции «близки» к $y = 4$.



Определение 2. Будем говорить, что некоторое свойство функции выполняется *вблизи точки a* , если существует такая окрестность этой точки, что указанное свойство справедливо для всех, отличных от a , точек из этой окрестности.

Например, пусть $f(x) > 0$ для всех $x \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$, $x \neq a$. Это означает, что вблизи точки $x = a$ функция $y = f(x)$ принимает положительные значения или, то же самое, функция положительна вблизи точки $x = a$.

2. Предел функции в точке. Дадим определение предела функции, когда ее аргументы приближаются к некоторой точке a (пишут $x \rightarrow a$). Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D .

Определение 3. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \epsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow a$, если для любого $\epsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \epsilon$.

В этом случае пишут: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

Пример 3. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3$.

Неравенство $|(4x - 1) - 3| < \epsilon$ выполняется, если $|4x - 4| < \epsilon$ или $|x - 1| < \frac{\epsilon}{4}$. Положим, $\delta = \frac{\epsilon}{4}$. Тогда получаем следующее:

для любого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (а именно, $\delta = \frac{\epsilon}{4}$), что из $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство $|(4x - 1) - 3| < \epsilon$. Это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 1} (4x - 1) = 3$.

Пример 4. Найти предел функции $y = x^2$ при $x \rightarrow 2$.

Решение. Покажем, что искомый предел равен 4. Действительно, $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2|$, где $0 < |x - 2| < \delta$. Отсюда $2 - \delta < x < 2 + \delta$ и $|x + 2| < 4 + \delta$. Значит, $|x^2 - 4| < \delta(4 + \delta)$. Поэтому неравенство $|x^2 - 4| < \epsilon$ будет выполняться, если $\delta(4 + \delta) = \epsilon$. Решив это уравнение относительно δ , получим $\delta = -2 + \sqrt{4 + \epsilon}$. Таким образом, для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (а именно, $\delta = -2 + \sqrt{4 + \epsilon}$), что из выполнения неравенств $0 < |x - 2| < \delta$ вытекает неравенство $|x^2 - 4| < \epsilon$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$.

3. Односторонние пределы. Если для любого $\epsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $|x - a| < \delta$,

$x > a$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$, то число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при стремлении x к a справа.

В этом случае пишут: $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ или $f(a+0) = b$.

Аналогично, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $|x - a| < \delta$, $x < a$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$, то число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при стремлении x к a слева.

В этом случае пишут: $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$ или $f(a-0) = b$. Пределы функции при $x \rightarrow a$ справа или слева называются *односторонними пределами*.

Отметим, что существуют функции, у которых односторонние пределы (левый и правый) не совпадают.

Пример 5. а) функция $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ при $x \rightarrow 0$ имеет следующие односторонние пределы: $f(0+0) = 0$, $f(0-0) = 1$;
б) функция $y = 3x$ при $x \rightarrow 2$ имеет односторонние пределы: $f(2+0) = 6$, $f(2-0) = 6$;

в) функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \rightarrow 0$ не имеет правостороннего предела ($f(0+0) = +\infty$). В то же время левосторонний предел равен нулю ($f(0-0) = 0$).

4. Предел функции на бесконечности.

Определение 4. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В таком случае пишут: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$.

Аналогично определяется предел функции при $x \rightarrow -\infty$.

Определение 5. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M < 0$ такое, что при всех $x < M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$.

Пример 6. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Неравенство $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$ выполняется, если $x > \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2$. Положим, $M = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2$. Тогда ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ (а именно, $M = \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^2$) такое, что при всех $x > M$ выполняется неравенство $\left| \frac{1}{\sqrt{x}} - 0 \right| < \varepsilon$. Значит, по определению имеем: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Определение 6. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \rightarrow \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В таком случае пишут: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

7. Свойства предела функции в точке. Рассмотрим теперь свойства предела функции в точке. Пусть $y = f(x)$ — заданная функция с областью определения D .

1) Функция $y = f(x)$ не может иметь два различных предела при $x \rightarrow a$.

Доказательство. Предположим, что $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ и $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, причем $b \neq c$. Тогда по определению, для $\varepsilon < \frac{|b-c|}{2}$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняются неравенства:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ и } |f(x) - c| = |c - f(x)| < \varepsilon.$$

Имеем $|b - c| = |f(x) - b + c - f(x)| \leq |f(x) - b| + |c - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon$.

Откуда следует $\frac{|b-c|}{2} < \varepsilon$. Полученное противоречие с неравенством $\varepsilon < \frac{|b-c|}{2}$ показывает, что предел функции должен быть единственным.

2) Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \rightarrow a$, то существует окрестность точки a , в которой функция $y = f(x)$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Отсюда имеем $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Значит, функция $y = f(x)$ ограничена в δ -окрестности точки a .

3) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, где $b \neq 0$. Тогда найдется окрестность точки a , в которой знак функции совпадает со знаком числа b .

Доказательство. Пусть для определенности $b > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, в частности, $0 < \varepsilon < b$, существует $\delta > 0$, что для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравен-

ство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предположим, что в некоторой точке x_0 из указанной окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \leq 0$. Тогда $|f(x_0) - b| \geq b$. Это противоречит выбору ε . Следовательно, для всех x , $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) > 0$, т. е. функция имеет тот же знак, что и число b .

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие свойства предела.

4) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ и существует окрестность точки a , в которой выполняются неравенства $f(x) \leq g(x) \leq b$ или $b \leq g(x) \leq f(x)$. Тогда $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$.

5) Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют пределы при $x \rightarrow a$. Тогда:

$$a) \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x);$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ в частности,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

6) Пусть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$, где $c \neq 0$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

