§ 5. Формулы сложения

1. Формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов, называются *формулами сложения.*

Докажем, что для любых значений α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \quad (1)$$

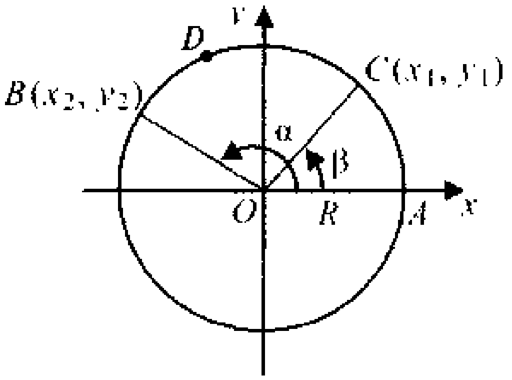

Рис. 16

Действительно, рассмотрим углы α и β как углы в тригонометрическом круге радиуса R (рис.16). Повернем радиус OA, равный R, около точки O на угол α, а затем на угол β. Получим соответственно радиусы OB и OC , где $C = C(x_1;\ y_1)$, $B = B(x_2;\ y_2)$. Тогда имеем

$$x_1 = R \cdot\cos\beta,\ y_1 = R \cdot \sin\beta,$$
$$x_2 = R \cdot \cos\alpha,\ y_2 = R \cdot \sin\alpha.$$

Согласно формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$|BC|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 =$$
$$= R^2(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + R^2(\sin\alpha - \sin\beta)^2. \quad (2)$$

Отсюда

$$|BC|^2 = R^2[\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2\beta - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)] =$$
$$= R^2[2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)].$$

Возьмем теперь на окружности точку $D(R\cos\gamma,\ R\sin\gamma)$, соответствующую углу $\gamma = \alpha - \beta$. Тогда $|AD|^2 = (R - R\cos\gamma)^2 + (0 - R\sin\gamma)^2 = R^2[2 - 2\cos\gamma]$. Так как $|AD| = |BC|$, то справедливо равенство

$$2 - 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 - 2\cos\gamma.$$

Заменяя γ на $\alpha - \beta$, получаем равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

справедливое для любых значений α и β.

Так как $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, то из формулы (1) вытекает, что

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta).$$

Отсюда в силу свойств четности косинуса и нечетности синуса получаем равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \qquad (3)$$

также справедливое для любых значений α и β.

Пример 1. Вычислить $\cos 105^\circ$.

Решение. По формуле (3) находим

$$\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Пример 2. Вычислить $\cos 15^\circ$.

Решение. Используя формулу (1), получаем

$$\cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ) = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пример 3. Доказать справедливость формул:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, имеем равенство

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta.$$

Отсюда, заменяя β на α, получаем первую из формул (4), т.е. равенство $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

Полагая теперь $\frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ в первой из формул (4), имеем $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Заменив β на α, получим $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Таким образом, при указанных значениях α и β справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

Замечая, что $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ и $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$ из формулы (7) получаем, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\quad \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z. \qquad (8)$$

Аналогично, для любых значений α и β, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha\pm\beta\neq\pi k,\quad \alpha\neq\pi k,\quad \beta\neq\pi k$$

имеет место формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (9)$$

Доказательство этой формулы предоставляем читателю.

Пример 6. Найти значение: а) $\operatorname{tg}225^\circ$; б) $\operatorname{ctg}75^\circ$.

Решение. а) Из формулы (7) находим

$$\operatorname{tg}225^\circ=\operatorname{tg}(180^\circ+45^\circ)=\frac{\operatorname{tg}180^\circ+\operatorname{tg}45^\circ}{1-\operatorname{tg}180^\circ\operatorname{tg}45^\circ}=1;$$

б) по формуле (9) получаем

$$\operatorname{ctg}75^\circ=\operatorname{ctg}(45^\circ+30^\circ)=\frac{\operatorname{ctg}45^\circ\operatorname{ctg}30^\circ-1}{\operatorname{ctg}45^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ}=2-\sqrt{3}.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};\quad \alpha,\beta,\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$$

2. (96-3-111) Найдите $tg\alpha$, если $tg(\frac{\pi}{4}-\alpha)=2$.
$A)3$ $B)-3$ $C)\frac{1}{3}$ $D)-\frac{1}{3}$ $E)\frac{1}{2}$

3. (96-7-54) Упростите выражение

$$\frac{cos18^0\cdot cos28^0+cos108^0\cdot sin208^0}{sin34^0\cdot sin146^0+sin236^0\cdot sin304^0}$$

$A)1$ $B)cos10^0$ $C)sin46^0$ $D)-sin10^0$ $E)2$

4. (96-9-45) Найдите $ctg\alpha$, если $tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2$.
$A)3$ $B)\frac{1}{3}$ $C)-\frac{1}{3}$ $D)-4$ $E)-3$

5. (96-12-87) Найдите $tg\alpha$, если $tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)=2$.
$A)-\frac{1}{3}$ $B)\frac{1}{2}$ $C)\frac{1}{3}$ $D)-\frac{1}{2}$ $E)\frac{1}{4}$

6. (97-1-59) Найти $tg2x$ если $tg(x+y)=3$ и $tg(x-y)=2$.
$A)5$ $B)2,5$ $C)1$ $D)-1$ $E)-5$

7. (97-1-65) Найти x из условия, что

$$tg\alpha=\frac{5+\sqrt{x}}{2},\quad tg\beta=\frac{5-\sqrt{x}}{2}$$

и $\alpha+\beta=45^0$
$A)41$ $B)40$ $C)5$ $D)42$
$E)$ правильный ответ не указан

8. (97-6-60) Найти $tg2\beta$ если $\begin{cases} tg(\alpha+\beta)=5,\\ tg(\alpha-\beta)=3\end{cases}$
$A)15$ $B)8$ $C)\frac{1}{8}$ $D)1$ $E)2$

9. (97-6-68) Найти x из условия, что

$$tg\alpha=\frac{3+\sqrt{x}}{2},\quad tg\beta=\frac{3-\sqrt{x}}{2},\quad \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$$

$A)\frac{\pi}{3}$ $B)-17$ $C)-\frac{\pi}{6}+\pi k\in Z$ $D)17$
E) правильный ответ не указан

10. (97-7-54) Упростите выражение

$$\frac{sin56^0\cdot sin124^0-sin34^0\cdot cos236^0}{cos28^0\cdot sin88^0+sin178^0\cdot cos242^0}$$

$A)\frac{1}{sin26^0}$ $B)tg28^0$ $C)-\frac{\sqrt{3}}{2}$ $D)\frac{2}{\sqrt{3}}$ $E)1$

11. (97-10-54) Упростите выражение

$$\frac{cos18^0\cdot cos28^0+cos108^0\cdot sin208^0}{sin18^0\cdot sin78^0+sin108^0\cdot sin168^0}$$

$A)2cos10^0$ $B)\frac{1}{2}sin10^0$ $C)2$
$D)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $E)cos46^0$

12. (97-12-61) Упростите выражение

$$\frac{sin56^0\cdot sin124^0-sin34^0\cdot cos236^0}{cos28^0\cdot cos88^0+cos178^0\cdot sin208^0}$$

$A)\frac{2}{\sqrt{3}}$ $B)tg28^0$ $C)2$ $D)\frac{1}{sin26^0}$ $E)-2$

13. (98-6-48) Найдите tgy, если $tg(x+y)=5$ и $tgx=3$.
$A)2$ $B)\frac{1}{8}$ $C)8$ $D)\frac{1}{2}$ $E)-\frac{4}{7}$

14. (98-7-55) Выразите $cos(70^0+\alpha)$ через b, если $b=sin(40^0+\alpha)$ и $0^0<\alpha<45^0$
$A)-\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3(1-b^2)}+b)$ $B)\frac{1}{2}\cdot(b-\sqrt{3(1-b^2)})$
$C)\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3(1-b^2)}-b)$ $D)\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3(1-b^2)}+b)$
$E)\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3(1-b^2)})$

15. (98-10-33) Известно, что $\alpha=46^0$ и $\beta=16^0$. Исходя из этого установите, на сколько меньше

$$sin(\alpha+\beta)-2sin\beta\cdot cos\alpha,$$

чем 21,5.
$A)$ на 22 $B)$ на 20 $C)$ на 20,5 $D)$ на 19,5 $E)$ на 21

16. (98-11-73) Найдите $tg(\alpha+\beta)$, если $tg\alpha$ и $tg\beta$ корни уравнения

$$5x^2-3x-1=0.$$

$A)\frac{3}{2}$ $B)1$ $C)3$ $D)\frac{1}{2}$ $E)5$

17. (98-12-111) Найдите $sin(\alpha-\beta)$, если $sin\alpha=\frac{3}{5}, sin\beta=\frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$
$A)-\frac{16}{65}$ $B)\frac{16}{65}$ $C)\frac{56}{65}$ $D)-\frac{56}{65}$ $E)-\frac{2}{13}$

18. (99-1-42) Какие из следующих равенств неверны?
$A)cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(cos\alpha-sin\alpha)$
$B)sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=cos\alpha$
$C)cos(\alpha-30^0)=\frac{\sqrt{3}}{2}cos\alpha+\frac{1}{2}sin\alpha$
$D)tg(\frac{\pi}{4}+\alpha)=\frac{1+tg\alpha}{1-tg\alpha}$
$E)cos75^0=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

19. (99-5-25) Известно, что $(tg\alpha+1)\cdot(tg\beta+1)=2$ и $\alpha,\beta\in(0;\frac{\pi}{2})$.
Найдите значение

$$3,2\cdot(\frac{a+b}{\pi})^2$$

$A)0,5$ $B)0,2$ $C)0,3$ $D)0,4$ $E)0,6$

20. (99-10-30) Найдите $tg\beta$, если $tg(\alpha-\beta)=5$ и $\alpha=45^0$
$A)\frac{1}{3}$ $B)-\frac{3}{4}$ $C)\frac{2}{3}$ $D)-\frac{1}{2}$ $E)-\frac{2}{3}$

21. (00-1-29) Чему равно $cos(\alpha+\beta)+2sin\alpha sin\beta$, если $\alpha=-45^\circ$ и $\beta=15^\circ$
A) $-1/2$ B) $\sqrt{3}/2$ C) $-\sqrt{3}/2$ D) $\sqrt{2}/2$ E) $1/2$

1. Вычислить:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$; в) $\sin 15^\circ$; г) $\cos 75^\circ$.

2. Найти значение выражения:

а) $\cos 109^\circ \cos 19^\circ + \sin 109^\circ \sin 19^\circ$;

б) $\cos 46^\circ \cos 14^\circ - \sin 46^\circ \sin 14^\circ$;

в) $\sin 61^\circ \cos 29^\circ + \cos 61^\circ \sin 29^\circ$;

г) $\sin 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 53^\circ \sin 23^\circ$.

3. Вычислить:

а) $\operatorname{tg} 135^\circ$; б) $\operatorname{tg} 75^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 225^\circ$; г) $\operatorname{ctg} 120^\circ$.

4. Вычислить:

а) $\dfrac{\operatorname{tg} 41^\circ + \operatorname{tg} 19^\circ}{1 - \operatorname{tg} 41^\circ \operatorname{tg} 19^\circ}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{9\pi}{16} - \operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}}{1 + \operatorname{tg}\frac{9\pi}{16}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{16}}$.

5. Упростить выражение:

а) $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right)$.

6. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta) - \sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta) + \sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta) - 2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}$.

7. Упростить выражение:

а) $\dfrac{3}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$; б) $(1 - \operatorname{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha$; в) $\dfrac{\left(\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}\right)(\cos\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)}{(\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)\left(\operatorname{tg}\alpha - \frac{1}{\cos\alpha}\right)}$.

8. Найти значение выражения:

а) $\cos 810^\circ + \sin 1500^\circ - \operatorname{tg} 1125^\circ$;

б) $\operatorname{tg} 1620^\circ - \sin 405^\circ + \cos 945^\circ$;

в) $\sin(-5\pi) + 2\cos\frac{32\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{11\pi}{4}$;

г) $\cos(-7\pi) + 2\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right) - \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.