1. Уравнения. Простейшим логарифмическим уравнением является уравнение вида

$$\log_a x = b,$$

где $a > 0,\ a \neq 1$, b — действительное число.

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ монотонна в своей области определения $(0;+\infty)$, а областью значений функции является множество всех действительных чисел. Поэтому указанное уравнение всегда имеет корень. Из определения логарифма числа вытекает, что число $x = a^b$ есть корень данного уравнения. Вследствие монотонности логарифмической функции, графики функций $y = \log_a x$ и $y = b$ могут пересекаться только в одной точке. Следовательно, число a^b является единственным корнем простейшего логарифмического уравнения.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\log_3 x = \frac{1}{2}$. Его корнем является число $x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$.

Пример 2. Решим уравнение $\log_x 16 = 2$.

Из определения логарифма получаем равенство $x^2 = 16$, откуда $x = \pm 4$. Поскольку основание логарифма есть положительное число, то единственным корнем исходного уравнения является число $x = 4$.

Пример 3. Решим уравнение $2^{3-x} = 5$.

Ранее уравнения подобного вида мы решали, представляя правую часть в виде соответствующей степени. С помощью логарифмов число 5 можно записать в виде степени с основанием 2. А именно, $5 = 2^{\log_2 5}$. Тогда уравнение примет вид $2^{3-x} = 2^{\log_2 5}$.

Отсюда $3 - x = \log_2 5$ или $x = 3 - \log_2 5$.

Пример 4. $\log_2(x^2 - 5x + 10) = 4$.

Данному уравнению удовлетворяют только те значения x, при которых выполняется равенство $x^2 - 5x + 10 = 2^4$.

Решая полученное квадратное уравнение, получим корни $x_1 = 6,\ x_2 = -1$. Таким образом, множество $\{6\ ;\ -1\}$ является решением исходного уравнения.

П р и м е р 5. $\lg(2x-3)=\lg(x-1)$.

Указанное уравнение определено только при тех значениях x, для которых выполняются неравенства $2x-3>0$ и $x-1>0$. Учитывая эти условия, можно записать равносильное уравнение $2x-3=x-1$, откуда $x=2$. Поскольку число 2 удовлетворяет обоим неравенствам, то множество $\{2\}$ является искомым решением исходного уравнения.

П р и м е р 6. $\log_x(x+2)=2$.

Данное уравнение определено для тех значений x, при которых выполняются условия $x>0$, $x\neq 1$ и $x+2>0$. При этих условиях можем записать равносильное уравнение $x+2=x^2$. Решая это квадратное уравнение, найдем два корня $x_1=-1$, $x_2=2$. Из них только $x=2$ удовлетворяет указанным условиям и поэтому является единственным корнем исходного уравнения.

П р и м е р 7. $\log_3^2 x-5\log_3 x+6=0$.

Сделаем замену переменной $t=\log_3 x$. Тогда получим квадратное уравнение $t^2-5t+6=0$. Корнями этого уравнения являются числа $t=2$ и $t=3$. Возвращаясь теперь к сделанной ранее замене переменных, получим два уравнения $\log_3 x=2$ и $\log_3 x=3$. Отсюда следует, что множество $\{9;\ 27\}$ — решение исходного уравнения.

П р и м е р 8. Решим систему уравнений $\begin{cases} x+y=11 \\ \lg x-\lg y=1. \end{cases}$

При решении данной системы уравнений надо учитывать, что второе уравнение системы определено только для значений $x>0$, $y>0$. Преобразуем это уравнение к виду $\lg\frac{x}{y}=1$, откуда $\frac{x}{y}=10$ или $x=10y$. Подставляя $x=10y$ в уравнение $x+y=11$, получим уравнение $10y+y=11$. Значит, $y=1$. Тогда $x=10$. Поскольку $x=10>0$, $y=1>0$, то система уравнений имеет решение: $\{(10;\ 1)\}$.

1.10.12. а) $9-\log_3^2 x=\sqrt{\log_3^4 x-18\log_3^2 x+81}$;

б) $1-4\log_9^2 x=\sqrt{16\log_9^4 x-8\log_9^2 x+1}$;

в) $1-9\log_8^2 x=\sqrt{81\log_8^4 x-18\log_8^2 x+1}$;

г) $16-\log_2^2 x=\sqrt{\log_2^4 x-32\log_2^2 x+256}$;

д) $4-\log_2^2 x=\sqrt{\log_2^4 x-8\log_2^2 x+16}$.

1.10.13. а) $|\log_x 4-2|+|\log_x 16-2|=2$;

б) $|\log_x 9-1|+|\log_x 81-3|=2$;

в) $|\log_x 16-2|+|\log_x 256-2|=2$;

г) $|\log_x 25-1|+|\log_x 625-3|=2$;

д) $|\log_x 36-2|+|\log_x 1296-2|=2$.

1.10.14. а) $x^{\log_2 x-3}=16$; б) $x^{\log_3 x-5}=\frac{1}{81}$; в) $x^{\log_2 x+1}=64$;

г) $x^{\log_5 x+2}=125$; д) $x^{\log_4 x-4}=\frac{1}{64}$.

1.10.15. а) $x^{\log_5 x^2}=5+4\cdot x^{\log_5 x}$; б) $x^{\log_3 x^2}=15-2\cdot x^{\log_3 x}$;

в) $x^{\log_2 x^2}=16+15\cdot x^{\log_2 x}$; г) $x^{\log_3 x^2}=81+80\cdot x^{\log_3 x}$;

д) $x^{\log_2 x^2}=10-3\cdot x^{\log_2 x}$.

1.10.21. а) $x^{\log_{5x}25}=\frac{25}{x}$; б) $x^{\log_{3x}27}=\frac{81}{x}$;

в) $x^{\log_{2x}16}=\frac{8}{x}$; г) $x^{\log_{6x}36}=\frac{36}{x}$;

д) $x^{\log_{9x}27}=\frac{9}{x}$.

1.10.22. а) $2^{\log_2\left(x^2-6\right)}=5^{\log_5(-5x)}$; б) $3^{\log_3\left(x^2-8\right)}=7^{\log_7 2x}$;

в) $6^{\log_6\left(x^2-12\right)}=2^{\log_2(-x)}$; г) $8^{\log_8\left(x^2-15\right)}=3^{\log_3 2x}$;

д) $7^{\log_7\left(x^2-7\right)}=4^{\log_4(-6x)}$.

1.10.23. а) $\log_7\left(x^2-2x-3\right)=\log_{1/7}\frac{x-3}{x+1}$;

б) $\log_8\left(x^2+5x-6\right)=\log_{1/8}\frac{x-1}{x+6}$;

в) $\log_5\left(x^2-2x-8\right)=\log_{1/5}\frac{x-4}{x+2}$;

г) $\log_6\left(x^2-2x-15\right)=\log_{1/6}\frac{x-5}{x+3}$;

д) $\log_3\left(x^2+x-12\right)=\log_{1/3}\frac{x-3}{x+4}$.

1.10.24. а) $\log_3\left(3-2x-x^2\right)=\log_3^2(x+3)+\log_3\frac{1-x}{x+3}$;

б) $\log_5\left(4+3x-x^2\right)=\log_5^2(x+1)+\log_5\frac{4-x}{x+1}$;

в) $\log_6\left(24+2x-x^2\right)=\log_6^2(x+4)+\log_6\frac{6-x}{x+4}$;

г) $\log_7\left(48-2x-x^2\right)=\log_7^2(x+8)+\log_7\frac{6-x}{x+8}$;

д) $\log_2\left(8x-x^2-15\right)=\log_2^2(x-3)+\log_2\frac{5-x}{x-3}$.

1.10.25. а) $\log_5(7-x)=\log_3\frac{x}{6}$; б) $\log_7(x+5)=\log_6\left(-\frac{x}{4}\right)$;

в) $\log_4(9-x)=\log_9\frac{x}{8}$; г) $\log_8(x+3)=\log_3\left(-\frac{x}{2}\right)$;

д) $\log_6(6-x)=\log_2\frac{x}{5}$.

1.10.26. а) $\log_5(x-9)\cdot\log_5(x-2)=\log_5\frac{5(x-9)}{x-2}$;

б) $\log_9(x-4)\cdot\log_9(x+4)=\log_3\frac{x^2-16}{81}$;

в) $\log_8(x-12)\cdot\log_8(x-3)=\log_8\frac{8(x-12)}{x-3}$;

г) $\log_4(x-6)\cdot\log_4(x+6)=\log_2\frac{x^2-36}{16}$;

д) $\lg(x-15)\cdot\lg(x-4)=\lg\frac{10(x-15)}{x-4}$.

1.10.27. а) $3^{\sqrt{\log_3 x}}+\sqrt{\log_x 3}=x^{\sqrt{\log_x 3}}+\sqrt{\log_3 x}-1{,}5$;

б) $16^{\sqrt{\log_{16} x}}+\sqrt{\log_x 16}=x^{\sqrt{\log_x 16}}+\sqrt{\log_{16} x}+1{,}5$;

в) $5^{\sqrt{\log_5 x}}+\sqrt{\log_x 5}=x^{\sqrt{\log_x 5}}+2\sqrt{\log_5 x}-1$;

г) $2^{\sqrt{\log_2 x}}+\sqrt{\log_x 2}=x^{\sqrt{\log_x 2}}+2\sqrt{\log_2 x}-3{,}5$;

д) $6^{\sqrt{\log_6 x}}+\sqrt{\log_x 6}=x^{\sqrt{\log_x 6}}+3\sqrt{\log_6 x}-2$.