4. Геометрическая прогрессия. Последовательность отличных от нуля чисел $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ называется *геометрической прогрессией*, если ее члены удовлетворяют условию

$$b_k = b_{k-1} \cdot q,$$

где $k \geq 2$ и q — постоянное число, называемое *знаменателем геометрической прогрессии.*

Таким образом, по определению $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2$ и т. д. Предположим, что $b_{k-1} = b_1 \cdot q^{k-2}$.

Тогда $b_k = b_{k-1} \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-2}) \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1}$. Согласно методу математической индукции заключаем, что для всех натуральных значений k имеет место формула

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Полученная формула называется *формулой общего члена геометрической прогрессии*. Она выражает общий член прогрессии через его порядковый номер, первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

5. Свойства геометрической прогрессии.

1°. Для всех $k \geq 2$ справедливо равенство $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$.

Доказательство. Используя формулу общего члена, имеем

$$b_{k-1} \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-2} \cdot b_1 q^k = b_1^2 \cdot q^{2k-2} = (b_1 \cdot q^{k-1})^2 = b_k^2.$$

2°. Если $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

Доказательство. Действительно, имеют место равенства

$$b_k \cdot b_l = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{l-1} = b_1^2 \cdot q^{k+l-2} = b_1^2 \cdot q^{m+n-2} =$$
$$= b_1 \cdot q^{m-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_m \cdot b_n.$$

6. Сумма первых n членов геометрической прогрессии.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии обозначим S_n. Нетрудно проверить, что справедливо равенство

$$1 - q^n = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Откуда следует, что $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Используя формулу общего члена, получим

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} =$$
$$= b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Поэтому, для суммы первых n членов геометрической прогрессии имеет место формула

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Пример 3. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, для которой $b_3 = b_1 + 9$ и $b_2 = b_4 + 18$.

Решение. Имеем $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$ и $b_4 = b_1 \cdot q^3$.

Тогда $b_1 q^2 - b_1 = 9$ и $b_1 q - b_1 q^3 = 18$, или $\begin{cases} -b_1(1-q^2) = 9, \\ b_1 q(1-q^2) = 18. \end{cases}$ Откуда следует $q = -2$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $b_1 \cdot 3 = 9$, или $b_1 = 3$. Следовательно,

$$b_1 = 3,\ b_2 = -6,\ b_3 = 12,\ b_4 = -24.$$

Пример 4. В геометрической прогрессии знаменатель $q = 3$, а сумма первых шести членов равна 1820. Найти первый и пятый члены прогрессии.

Решение. Имеем $S_6 = b_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q}$. Тогда $1820 = b_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q}$, где $q = 3$. Отсюда $b_1 = 5$. Далее, используя формулу $b_5 = b_1 \cdot q^4$, получаем $b_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$.