**1. Решение простейших тригонометрических уравнений.** Выведем формулы для решения простейших тригонометрических уравнений, т.е. уравнений вида $T(x) = a$, где $T(x)$ — некоторая тригонометрическая функция.

А) Рассмотрим сначала уравнение $\sin x = a$, где $-1 \le a \le 1$. Используем график функции (рис. 24) и проведем прямую $y = a$. Если $|a| > 1$, то ввиду того, что $|\sin x| \le 1$, уравнение $\sin x = a$ не имеет решения, т.е. синусоида и прямая не имеют общих точек.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда на промежутке $[0; 2\pi]$ данное уравнение имеет два корня (см. рис. 24), т.е. синусоида $y = \sin x$ и прямая $y = a$ на $[0; 2\pi]$ имеют две точки пересечения с абсциссами $x_0$ и $x_1$, причем $x_1 = \pi - x_0$.

Из рассуждений, приведенных в § 7, следует, что $x_0 = \arcsin a$, а $x_1 = \pi - \arcsin a$. Объединяя эти корни в одну формулу, имеем

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n = 0,\ 1. \qquad (1)$$

Действительно, при $n = 0$ из формулы (1) получаем $x = \arcsin a$, а при $n = 1$ имеем $x = \pi - \arcsin a$.

В силу периодичности функции $y = \sin x$ для нахождения множества всех корней заданного уравнения, к каждому из найденных корней следует прибавить числа вида $2\pi k$, где $k \in Z$. Поэтому решение уравнения $\sin x = a$ можно записать в общем виде как

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \qquad (2)$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Согласно формуле (2) имеем решение

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

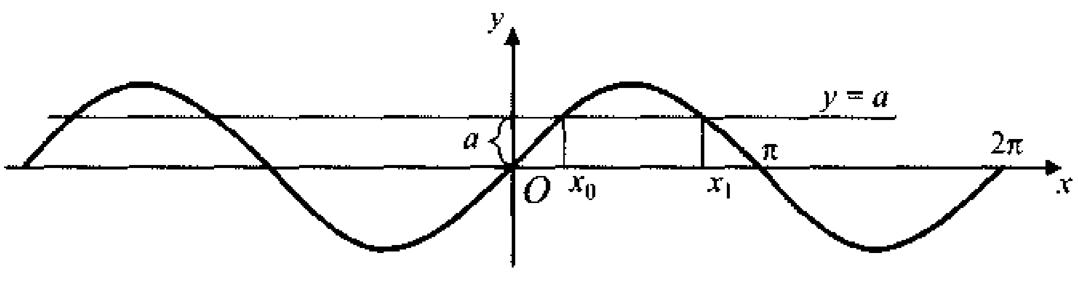


**Рис. 24**

Б) Рассмотрим уравнение $\cos x = a$. Если $|a| > 1$, уравнение $\cos x = a$ не имеет решения, поскольку $|\cos x| \le 1$ для любого $x$. Пусть $|a| \le 1$. Тогда на отрезке $[0; \pi]$ существует в точности один корень уравнения $\cos x = a$ — это число $\arccos a$.

Функция $y = \cos x$ является четной, и поэтому на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение $\cos x = a$ также имеет в точности один корень. Это $x = -\arccos a$. Таким образом, уравнение $\cos x = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной $2\pi$ имеет два корня: $x = \pm\arccos a$ (совпадающие при $a = 1$).

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом $2\pi$, все остальные корни будут отличаться от найденных на $2\pi k$ ($k \in Z$). Следовательно, формула решения уравнения $\cos x = a$ имеет вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z. \qquad (3)$$

Пример 4. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (3) находим $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Поскольку $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, приходим к результату $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Проиллюстрируем решение уравнения $\cos x = a$ на единичной окружности. По определению $\cos x$ — это абсцисса точки $A_x$ единичной окружности. Если $|a| < 1$, то таких точек на окружности две — $A_{x_1}$ и $A_{x_2}$ (рис. 26). Если же $a = 1$ или $a = -1$, то точка одна.

При $a = 1$ числа $\arccos a$ и $-\arccos a$ совпадают (они равны нулю), поэтому решение уравнения $\cos x = 1$ принято записывать в виде

$$x = 2\pi k,\ k \in Z.$$

Особая форма записи решения уравнения $\cos x = a$ принята также при $a = -1$ и $a = 0$:

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z;$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$$

| Уравнение | Формула решения | Примечания |
|---|---|---|
| $\sin x = a$ | $x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$ | $\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ \lvert a\rvert \le 1$ |
| $\cos x = a$ | $x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$ | $\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ \lvert a\rvert \le 1$ |
| $\mathrm{tg}\, x = a$ | $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$ | $\mathrm{arctg}(-a) = -\mathrm{arctg}\, a,\ a \in R$ |
| $\mathrm{ctg}\, x = a$ | $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$ | $\mathrm{arcctg}(-a) = \pi - \mathrm{arcctg}\, a,\ a \in R$ |

9. (96-7-58) Решите уравнение

$$5^{1+\log_5 \cos x} = 2,5.$$

$A)\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z$ $B)\pm\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \ n\in Z$
$C)\pm\ \ +2\pi n,\ \ n\in Z$ $D)\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$
$E)\pm\ \ +\pi n,\ \ n\in Z$

10. (96-7-59) Сколько корней имеет уравнение

$$\frac{tgx}{1-\cos x}=0$$

на промежутке $[-\pi;3\pi]$?
$A)$( $B)2$ $C)3$ $D)5$ $E)4$

11. (96-9-49) Сколько корней имеет уравнение

$$4\sin\frac{x}{2}-\cos x+1=0$$

на $[0;2\pi]$ ?
$A)0$ $B)2$ $C)3$ $D)1$ $E)4$

12. (96-9-50) Решить уравнение:

$$\log_{\cos x}\sin 2x-3+2\log_{\sin 2x}\cos x=0$$

$A)(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k; arcctg2+2\pi k,\ \ k\in Z$
$B)(-1)^k\frac{\pi}{3}+\pi k; arcctg2+\pi k,\ \ k\in Z$
$C)(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k; arctg2+2\pi k,\ \ k\in Z$
$D)(-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k; arctg2+2\pi k,\ \ k\in Z$
$E)\frac{\pi}{6}+2\pi k; arcctg2+2\pi k,\ \ k\in Z$

13. (96-9-110) Укажите корни уравнения:

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=0,5.$$

$A)\frac{\pi k}{2},\ \ k\in Z$ $B)\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ \ k\in Z$
$C)\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$ $D)\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$
$E)\pm\frac{\pi}{12}+\pi k,\ \ k\in Z$

14. (96-9-111) Найдите сумму корней уравнения

$$4\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x+3\sin^2 x=3,$$

если $90^0\le x\le 180^0$.
$A)150^0$ $B)225^0$ $C)210^0$
$D)135^0$ $E)310^0$

15. (96-10-16) Укажите корни уравнения

$$\sin 5x\cdot\cos 2x=\cos 5x\cdot\sin 2x-1.$$

$A)\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ \ k\in Z$ $B)\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi k}{3},\ \ k\in Z$
$C)-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi k}{3},\ \ k\in Z$ $D)\frac{\pi}{3}+\pi k,\ \ k\in Z$
$E)\frac{\pi}{6}+\pi k,\ \ k\in Z$

16. (96-11-58) Решите уравнение

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

$A)\frac{\pi}{3}n,\ \ n\in Z$ $B)\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}n,\ \ n\in Z$
$C)3\pi n,\ \ n\in Z$ $D)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}n,\ \ n\in Z$
$E)\frac{\pi}{6}n,\ \ n\in Z$

17. (96-11-59) Решите уравнение

$$6^{\log_6(\sqrt{3}\cos x)}+5^{\frac{1}{2}\log_5 6}=27^{\frac{1}{3}+\log_{27}\sin x}$$

$A)\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in Z$ $B)\frac{7\pi}{12}+2\pi n, n\in Z$
$C)\frac{5\pi}{12}+2\pi n, n\in Z$ $D)\frac{11\pi}{12}+2\pi n, n\in Z$
$E)\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z$

18. (96-11-60) Решите уравнение

$$\cos 2x\cdot\sin 3x+\sin 2x\cdot\cos 3x=\frac{1}{2}$$

$A)(-1)^n\frac{\pi}{5}+\frac{\pi}{5}n,\ \ n\in Z$
$B)(-1)^n\frac{\pi}{30}+\frac{\pi}{5}n,\ \ n\in Z$
$C)\frac{\pi}{30}n,\ \ n\in Z$
$D)\frac{\pi}{4}n,\ \ n\in Z$
$E)\frac{\pi}{8}n,\ \ n\in Z$

19. (96-12-11) Решите уравнение

$$\sin x\cdot\cos 3x+\cos x\ \ \sin 3x=1$$

$A)\frac{\pi}{2}n, n\in Z$ $B)\frac{\pi}{8}$ $C)\frac{\pi}{8}n, n\in Z$
$D)\frac{\pi}{4}n, n\in Z$ $E)\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$

20. (96-12-39) Найдите корни уравнения

$$\cos(2x-\frac{\pi}{2})=0$$

$A)\frac{\pi}{2}n,\ \ n\in Z$ $B)\frac{\pi}{2}$ $C)\pi n\ \ n\in Z$
$D)\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}n,\ \ n\in Z$ $E)\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\ \ n\in Z$

21. (96-12-53) Найдите корни уравнения

$$4^{\log_4(\sqrt{3}\cos x)}+5^{\log_5\sqrt{6}}=7^{\log_7(3\sin x)}$$

$A)\frac{5\pi}{12}+2\pi n,\ \ n\in Z$ $B)\frac{7\pi}{12}+2\pi n,\ \ n\in Z$
$C)\frac{11\pi}{12}+2\pi n,\ \ n\in Z$ $D)\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$
$E)\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$

22. (96-12-81) Сколько корнеи имеет уравнение

$$\sin\frac{x}{2}+\cos x-1=0$$

на $[0;2\pi]$?
$A)3$ $B)4$ $C)0$ $D)2$ $E)1$