Основные тригонометрические тождества

Какое бы действительное число t ни взять, ему можно поставить в соответствие однозначно определенное число $\sin t$. Правда, правило соответствия довольно сложное и заключается в следующем.

Чтобы по числу t найти значение $\sin t$, нужно:

1) расположить числовую окружность на координатной плоскости так, чтобы центр окружности совпал с началом координат, а начальная точка A окружности попала в точку $(1; 0)$;

2) на окружности найти точку, соответствующую числу t;

3) найти ординату этой точки.

Эта ордината и есть $\sin t$.

Фактически речь идет о функции $s = \sin t$, где t — любое действительное число. Мы умеем вычислять некоторые значения этой функции (например, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ и т.д.), знаем некоторые ее свойства.

Точно так же мы можем считать, что уже получили некоторые представления еще о трех функциях: $s = \cos t$, $s = \operatorname{tg} t$, $s = \operatorname{ctg} t$. Все эти функции называют *тригонометрическими функциями числового аргумента t*.

Есть целый ряд соотношений, связывающих значения различных тригонометрических функций, некоторые из этих соотношений вы уже знаете:

$$\boxed{\sin^2 t + \cos^2 t = 1;}$$

$$\mathrm{tg}\ t = \frac{\sin t}{\cos t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$\mathrm{ctg}\ t = \frac{\cos t}{\sin t} \text{ при } t \neq \pi k.$$

Из двух последних формул легко получить соотношение, связывающее $\mathrm{tg}\ t$ и $\mathrm{ctg}\ t$:

$$\mathrm{tg}\ t \cdot \mathrm{ctg}\ t = 1 \text{ при } t \neq \frac{\pi k}{2}.$$

Пример 1. Упростить выражение: а) $1 + \mathrm{tg}^2\ t$; б) $1 + \mathrm{ctg}^2\ t$.

Решение. а) Имеем $1 + \mathrm{tg}^2\ t = 1 + \frac{\sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\cos^2 t} = \frac{1}{\cos^2 t}$.

б) $1 + \mathrm{ctg}^2\ t = 1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t} = \frac{1}{\sin^2 t}$.

Мы получили еще две важные формулы:

$$1 + \mathrm{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} \text{ при } t \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t} \text{ при } t \neq \pi k.$$

Все полученные формулы используются в тех случаях, когда при заданном значении какой-либо тригонометрической функции требуется вычислить значения остальных тригонометрических функций.

Пример 2. Известно, что $\sin t = \frac{3}{5}$ и $0 < t < \frac{\pi}{2}$. Найти соответствующие значения $\cos t$, $\mathrm{tg}\ t$, $\mathrm{ctg}\ t$.

Решение. Из соотношения $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ находим: $\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$.

По условию $\sin t = \frac{3}{5}$, значит, $\cos^2 t = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Из уравнения $\cos^2 t = \frac{16}{25}$ находим, что $\cos t = \frac{4}{5}$ или $\cos t = -\frac{4}{5}$.

По условию аргумент t принадлежит первой четверти числовой окружности, а в ней $\cos t > 0$. Значит, из двух найденных возможных решений выбираем первое: $\cos t = \frac{4}{5}$.

Зная значения $\sin t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\operatorname{tg} t$ и $\operatorname{ctg} t$:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{3}{5} : \frac{4}{5} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = \frac{4}{3}.$$

Ответ: $\cos t = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} t = \frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} t = \frac{4}{3}$.

Пример 3. Известно, что $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$ и $\frac{\pi}{2} < t < \pi$. Найти значения $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{ctg} t$.

Решение. Воспользуемся соотношением $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. По условию $\operatorname{tg} t = -\frac{5}{12}$, значит, $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = \frac{169}{144}$.

Отсюда находим, что $\cos^2 t = \frac{144}{169}$.

Из последнего уравнения находим, что $\cos t = \frac{12}{13}$ или $\cos t = -\frac{12}{13}$.

По условию аргумент t принадлежит второй четверти числовой окружности, а в ней $\cos t < 0$. Значит, из двух указанных выше возможностей выбираем вторую: $\cos t = -\frac{12}{13}$.

Зная значения $\operatorname{tg} t$ и $\cos t$, нетрудно вычислить соответствующие значения $\sin t$ и $\operatorname{ctg} t$: $\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}$, значит,

$$\sin t = \operatorname{tg} t \cdot \cos t = \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{5}{13}; \quad \operatorname{ctg} t = \frac{1}{\operatorname{tg} t} = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\cos t = -\frac{12}{13}$; $\sin t = \frac{5}{13}$; $\operatorname{ctg} t = -\frac{12}{5}$.

4. (97-11-46) Упростите выражение:

$$\frac{sin^2\alpha - cos^2\alpha + cos^4\alpha}{cos^2\alpha - sin^2\alpha + sin^4\alpha}$$

$A) tg^4\alpha$ $B) tg^2\alpha$ $C) ctg^4\alpha$ $D) \frac{tg^2\alpha}{2}$ $E) 2ctg^2\alpha$

5. (98-1-55) Упростите выражение

$$\frac{3sin^2\alpha + cos^4\alpha}{1 + sin^2\alpha + sin^4\alpha}$$

$A) 2sin\alpha$ $B) 2$ $C) ctg^2\alpha D) 1$ $E) 3$

6. (98-4-17) Вычислите

$$\frac{3sin\alpha}{5sin^3\alpha + 10cos^3\alpha},$$

если $tg\alpha = 3$.
$A) \frac{16}{39}$ $B) \frac{4}{9}$ $C) \frac{8}{15}$ $D) \frac{15}{32}$ $E) \frac{18}{29}$

7. (98-5-48) Вычислите $tg\alpha$ если $sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
$A) -\frac{4}{5}$ $B) -\frac{3}{4}$ $C) \frac{3}{4}$ $D) -\frac{3}{5}$ $E) \frac{3}{5}$

8. (98-5-52) Упростите выражение:

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha + ctg^2\alpha$$

$A) cos^2\frac{\alpha}{2}$ $B) \frac{cos2\alpha}{2}$ $C) tg\frac{\alpha}{2}$ $D) \frac{1}{sin^2\alpha}$ $E) \frac{1}{cos^2\alpha}$

9. (98-6-52) Найдите $\sqrt{1 - cos^2x} + \sqrt{1 + sin^2x}$, если $\sqrt{1 - cos^2x} - \sqrt{1 + sin^2x} = k$.
$A) 1,5k$ $B) 2k$ $C) \frac{2}{k}$ $D) -k$ $E) -\frac{1}{k}$

10. (98-7-56) Выразите $tg^3\alpha + ctg^3\alpha$ через p, если $tg\alpha + ctg\alpha = p$.
$A) -p^3 - 3p$ $B) p^3 - 3p$ $C) p^3 + 3p$ $D) 3p - p^3$ $E) 3p^3 - p$

11. (98-8-54) Упростите выражение

$$\frac{1 + cos^2\alpha + cos^4\alpha}{3cos^2\alpha + sin^4\alpha}.$$

$A) 3$ $B) 2$ $C) 1\frac{1}{2}$ $D) \frac{1}{3}$ $E) 1$

12. (98-11-97) Найдите $\sqrt{tg\alpha} + \sqrt{ctg\alpha}$, если $tg\alpha + ctg\alpha = a$ $(a > 0)$.
$A) \sqrt{a + 2}$ $B) a - 2$ $C) \sqrt{2} + \sqrt{a}$ $D) a + 2$ $E) \sqrt{a} - \sqrt{2}$

13. (98-11-101) Найдите

$$sin^2x + \frac{1}{sin^2x},$$

если $sinx - \dfrac{1}{sinx} = -3$.
$A) 7$ $B) 8$ $C) 9$ $D) 11$ $E) 6$

14. (98-12-54) Выразите $|sin\alpha - cos\alpha|$ через a, если $sin\alpha + cos\alpha = a$.
$A) \sqrt{2 - a^2}$ $B) -\sqrt{2 - a^2}$ $C) \sqrt{a^2 - 2}$ $D) \sqrt{2 - a}$ $E) 2 - a^2$

15. (98-12-55) Выразите $tg^2\alpha + ctg^2\alpha$ через p, если $tg\alpha + ctg\alpha = p$.
$A) p^2 - 2$ $B) -p^2 + 2$ $C) p^2 + 2$ $D) p^2 - 1$ $E) p^2 + 1$

16. (99-1-8) Вычислите значение выражения

$$\frac{|-1 + cos\alpha| + 2cos\alpha}{|\frac{tg\alpha}{\sqrt{3}} - 0,5|}$$

если $sin\alpha = \sqrt{3}/2$ и $\pi/2 < \alpha < \pi$
$A) \frac{1}{3}$ $B) 1$ $C) 3$ $D) -1$ $E) -3$

17. (99-6-21) Упростите

$$sin^2\alpha + sin^2\beta - sin^2\alpha \cdot sin^2\beta + cos^2\alpha \cdot cos^2\beta.$$

$A) 1$ $B) 0$ $C) -1$ $D) -2$ $E) 2$

18. (99-6-25) Упростите

$$\frac{sin^4\alpha + 2cos\alpha \cdot sin\alpha - cos^4\alpha}{2cos^2\alpha - 1}.$$

$A) tg2\alpha - 1$ $B) tg\alpha - 1$ $C) tg\alpha + 1$ $D) 1 - tg2\alpha$ $E) ctg2\alpha - 1$

19. (99-6-33)

$$\frac{2sinx - cosx}{2cosx + sinx} = 3 \quad tgx = ?$$

$A) 7$ $B) -3$ $C) 3$ $D) -7$ $E) 2$

20. (99-7-47) Вычислите значение $ctg\alpha$, если $sin\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.
$A) -4$ $B) -\sqrt{17}$ $C) -\frac{1}{\sqrt{15}}$ $D) -\sqrt{13}$ $E) -\sqrt{15}$

21. (99-8-2) Упростите выражение

$$\sin^2 x + \cos^2 x + tg^2x.$$

$A) -\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $B) -\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $C) \dfrac{1}{\sin^2 x}$ $D) \dfrac{1}{\cos x}$ $E) \dfrac{1}{\cos^2 x}$

22. (00-2-45) Вычислите

$$\frac{2cosa + sina}{cosa - 2sina}$$

если $ctg\alpha = \frac{13}{4}$.
$A) 6$ $B) 5$ $C) 6,2$ $D) 4,8$ $E) 6,4$

23. (00-10-16) $tg\alpha = \frac{4}{5}$ бўлса,

$$\frac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha}$$

$A) -3$ $B)3$ $C) -9$ $D)9$ $E)\frac{1}{3}$

24. (00-10-64) Вычислите

$$\frac{9}{sin^4\alpha + cos^4\alpha}$$

если $ctg\alpha = \sqrt{3}$.
A) 5 B) 4,5 C) 81 D) 4 E) 14,4

25. (01-1-46) Упростите

$$\frac{cos^2\alpha - ctg^2\alpha}{tg^2\alpha - sin^2\alpha}.$$

$A) -ctg^6\alpha$ $B)ctg^4\alpha$ $C)tg^4\alpha$
$D)ctg^4 2\alpha$ $E)ctg^6\alpha$

26. (01-1-69) Найдите $16(sin^3x+cos^3x)$, если $sinx+cosx = 0,5$
$A)8$ $B)14$ $C)11$ $D)16$ $E)12$

27. (01-6-28) Упростите

$$cos^6x + sin^6x - sin^2x \cdot cos^2x.$$

$A)sin^2 2x$ $B)sin4x$ $C)cos4x$ $D)cos^2 4x$ $E)cos^2 2x$

28. (01-7-36) Найдите $sin\alpha - cos\alpha$, если $tg\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
$A) -\frac{1}{5}$ $B)\frac{1}{5}$ $C)\frac{7}{5}$ $D) -\frac{7}{5}$ $E) -\frac{3}{5}$

29. (01-9-23) Вычислите

$$\frac{1 - sin^2\alpha + cos^2\alpha \cdot sin\alpha}{1 + sin\alpha}$$

при $cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
$A)\frac{3}{4}$ $B)1,5$ $C)1\frac{1}{3}$ $D)1$ $E)\frac{3}{5}$

30. (02-4-30) Упростите

$$(tgx + ctgx)^2 - (tgx - ctgx)^2.$$

$A)0$ $B) -4$ $C) -2$ $D)2$ $E)4$

31. (02-5-41) Найдите $\frac{2\sin\alpha + 3\cos\alpha}{5\sin\alpha - \cos\alpha}$, если $ctg(\alpha) = -2$.
$A)\frac{7}{4}$ $B) -\frac{7}{4}$ $C)\frac{1}{2}$ $D)\frac{4}{7}$ $E) -\frac{4}{7}$

32. (02-6-24) Найдите наибольшее значение выражения

$$\frac{5sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha}{4\cos^2\beta + 5\sin^2\beta}.$$

$A)1,25$ $B)1,5$ $C)2,25$ $D)2,5$ $E)2,75$

33. (03-2-33) Найдите $\cos^8 x - \sin^8 x$, если $tgx = 0,5$.
$A)0,52$ $B)0,408$ $C)0,392$ $D)0,416$ $E)0,625$

34. (03-3-1) Вычислите значения выражения

$$\frac{sin^2\alpha - 2cos^2\alpha}{3sin\alpha \cdot cos\alpha + cos^2\alpha},$$

если $ctg\alpha = 2$
$A) -0,7$ $B) -0,5$ $C)\frac{\sqrt{3}}{2}$ $D) -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $E) -\frac{2}{3}$

35. (03-8-47) Если $\cos\alpha - \sin\alpha = 0,2$, то вычислите $\cos^3\alpha - \sin^3\alpha$.
$A)0,296$ $B)0,3$ $C)0,04$ $D)0,324$ $E)0,008$

36. (03-8-48) Если $\cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$, то вычислите

$$(1 + tg^2x)(1 - \sin^2 x) - \sin^2 x.$$

$A)0,1$ $B)0,2$ $C)0,3$ $D)\frac{2}{\sqrt{10}}$ $E)\frac{\sqrt{10}}{10}$

37. (03-12-25) Упростите выражение

$$1 + \frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$A)tg^2\alpha$ $B)1 + tg^2\alpha$ $C)ctg^2\alpha$
$D)1 + ctg^2\alpha$ $E)tg^2\alpha + ctg^2\alpha$

1.15.3 Формулы приведения.

x	$\sin x$	$\cos x$	tgx	$ctgx$
$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$\pi - \alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$
$\pi + \alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$tg\alpha$	$ctg\alpha$
$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$ctg\alpha$	$tg\alpha$
$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$2\pi - \alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-tg\alpha$	$-ctg\alpha$

1. (96-1-54) Чему равно значение $2tg(-765^0)$?
$A) -\sqrt{2}$ $B)\frac{2}{\sqrt{3}}$ $C) -2$ $D)4$ $E) -2\sqrt{3}$

2. (96-6-34) Упростите выражение

$$\frac{sin(2\pi - \alpha)}{ctg(\frac{3\pi}{2} - \beta)}.$$