Решение тригонометрических уравнений

е) *Однородное уравнение.* Тригонометрическое уравнение $R(\sin x;\ \cos x) = 0$ называется *однородным*, если $R(\lambda\sin x;\ \lambda\cos x) = \lambda^n R(\sin x;\ \cos x)$ для некоторого $n \in N$. Такое уравнение делением на $\cos^n x$ или $\sin^n x$ сводится к уравнению вида $R(\mathrm{tg}x) = 0$ или $R(\mathrm{ctg}x) = 0$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Решение. Заданное уравнение является однородным ($n = 2$). Если в этом уравнении $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно. Поэтому $\cos x \neq 0$. Разделив все члены уравнения на $\cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}x$:

$$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0.$$

Решив его, имеем:

а) $\mathrm{tg}x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}x = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \mathrm{arctg}(-3) + \pi n = -\mathrm{arctg}3 + \pi n,\ \ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\mathrm{arctg}3 + \pi n$, где $n \in Z$.

Пример 14. Решить уравнение

$$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 2.$$

Решение. Приведем заданное уравнение к однородному виду. Для этого умножим правую часть уравнения на тригонометрическую единицу. Тогда получим

$$5\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 4\cos^2 x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x.$$

После преобразований получаем однородное уравнение

$$3\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 6\cos^2 x = 0,$$

которое делением на $3\cos^2 x \neq 0$ сводится к виду $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 2 = 0$. Решая последнее, получим:

а) $\mathrm{tg}x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\mathrm{arctg}2 + \pi n,\ \ n \in Z$.

ж) *Уравнение, содержащее аргументы* $2x$, $3x$ и т. д. Для решения указанного уравнения следует применять формулы двойного, тройного и т. д. аргументов.

Пример 15. Решить уравнение

$$2\sin 2x\cos x - \sin 3x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Решение. Используя формулы $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, заданное уравнение сведем к виду

$$2 \cdot 2(1 - \sin^2 x)\sin x - 3\sin x + 4\sin^3 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Откуда $4\sin x - 2 = 0$. Следовательно, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

55. (98-2-26) Решите уравнение:

$$2cos^2x - 1 = -\frac{1}{2}$$

$A)(-1)^k\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k;\ \ k \in Z$
$B)(-1)^{(k+1)}\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ k \in Z$
$C) \pm\frac{\pi}{6} + \pi k;\ \ k \in Z$
$D) \pm\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \ k \in Z$
$E) \pm\frac{2\pi}{3} + \pi k;\ \ k \in Z$

56. (98-2-27) Найдите значение b, при которых уравнение

$$cosx + cos\left(120^0 - x\right) = b$$

имеет решения.
$A)0 \le b \le 1\ \ B) - 1 \le b \le 1$
$C) - 1 \le b < 1\ \ D)b \le 1$
$E)0 < b < 1$

57. (98-5-50) Решите уравнение:

$$4^{cos^2x+2cosx} = 1.$$

$A)\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
$B)\frac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in Z$
$C)\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$
$D)\frac{\pi}{2} + \pi n; 2\pi n, n \in Z$
$E)\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

58. (98-5-53) Сколько корней на отрезке $[0; 4\pi]$, имеет уравнение

$$\frac{cos2x}{\frac{\sqrt{2}}{2} + sinx} = 0?$$

$A)8\ \ B)6\ \ C)4\ \ D)2\ \ E)12$

59. (98-5-54) Сколько корней на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет уравнение

$$sin2x = (cosx - sinx)^2?$$

A) 4 B) 8 C) 2 D) 1 E) 3

60. (98-6-50) Решите уравнение

$$4cos^22x - 1 = cos4x.$$

$A)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z\ \ B)\frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
$C)\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z\ \ D)\frac{\pi}{3} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
$E)\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$

61. (98-8-55) Решите уравнение:

$$\frac{sin2x}{1 + ctgx} = 0.$$

$A)\frac{\pi}{2} + \pi k,\ \ k \in Z\ \ B)\pi k,\ \ k \in Z$
$C)\frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z\ \ D)\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$E)\pi + 2\pi k,\ \ k \in Z$

62. (98-8-58) Сколько корней имеет уравнение

$$cosx \cdot cos2x = cos3x.$$

на промежутке $[0; 2\pi]$?
$A)5\ \ B)4\ \ C)3\ \ D)2\ \ E)1$

63. (98-9-25) При каких значениях k уравнение

$$sin(60^0 + x) - sin(60^0 - x) = k$$

имеет решения?
$A)k \in (-1; 1)\ \ B)k \in [-1; 1]\ \ C)k \le 1$
$D)k \le -1\ \ E)k > 1$

64. (98-9-26) Решите уравнение:

$$\frac{1}{cos^2x} = 2tg^2x.$$

$A) \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in Z\ \ B) \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$C) \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ \ k \in Z\ \ D) \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in Z$
$E) \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ \ k \in Z$

65. (98-10-105) Сколько корней, принадлежащих $[0; 2\pi]$, имеет уравнение

$$\frac{1 + cosx}{sinx} = cos\frac{x}{2}?$$

$A)\emptyset\ \ B)1\ \ C)2\ \ D)3\ \ E)4$

66. (98-11-99) Решите уравнение:

$$2cos^2\frac{x}{2} = 1 + cosx + cos2x.$$

$A)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z\ \ B)\frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in Z$
$C)\frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z\ \ D)\pi k,\ \ k \in Z$
$E)\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2},\ \ k \in Z.$

67 (98-11-102) Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$tg\pi x^2 = tg(\pi x^2 + 2\pi x).$$

$A)\frac{1}{2}\ \ B)\frac{1}{3}\ \ C)1\ \ D)\frac{3}{4}\ \ E)\frac{\sqrt{2}}{2}$

68. (98-12-58) Решите уравнение:

$$2sin2x = -1.$$

$A)(-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
$B)(-1)^n\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
$C)(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in Z$
$D)(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ \ n \in Z$
$E)(-1)^n\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

69. (98-12-75) Сколько существует целых значений a, при которых уравнение

$$1 + a \cdot cosx = (a+1)^2$$

имеет хотя бы одно решение?
$A)4$ $B)3$ $C)5$ $D)2$ $E)1$

70. (99-1-44) Найдите корень уравнения, $ctg(x+1) \cdot tg(2x-3) = 1$ принадлежащий промежутку $(\pi; 2\pi)$.
$A)4$ $B)2$ $C)3$ $D)5$ $E)\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

71. (99-2-28) Решите уравнение

$$\frac{1}{1+tg^2x} = \frac{1}{1+ctg^2x}.$$

$A)\pi + 2\pi k,\ k \in Z$ $B)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$
$C)2\pi k,\ k \in Z$ $D)\emptyset$ $E)\pi k,\ k \in Z$

72. (99-2-37) При каких значениях a уравнение $log_a sinx = 1$ имеет решение?
$A)a \in [-1;1]$ $B)a \in (-1;1)$ $C)a \in (0;1]$
$D)a \in (0;1)$ $E)a \in [0;1)$

73. (99-3-35) Найдите модуль разности корней уравнения

$$\frac{1 - tg\frac{x}{2}}{1 - ctg\frac{x}{2}} = 2sin\frac{x}{2},$$

принадлежащих интервалу $(180°; 540°)$.
$A)120°$ $B)135°$ $C)240°$ $D)180°$ $E)360°$

74. (99-3-37) Решите уравнение

$$sin^2x + sin^2 2x = 1.$$

$A)\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$
$B)\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}k,\ k \in Z$
$C)\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z,$
$D)\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k,\ k \in Z$
$E)\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

75. (99-4-54) Сколько корней на промежутке $[-2\pi; 2\pi]$ имеет уравнение

$$1 + tg^4x = cos^2 2x?$$

$A)6$ $B)5$ $C)4$ $D)2$ $E)1$

76. (99-4-58) Найдите x из уравнения

$$2^{-1+\sin x - \sin^2 x + \dots} = \frac{1}{4}.$$

$A)(-1)^n \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$
$B)(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$
$C)(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$
$D)(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$
$E)(-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

77. (99-5-27) Сколько корней имеет уравнение

$$5sin2x + 8cosx = 13$$

на промежутке $[-\pi; 2\pi]$?
$A)\emptyset$ $B)1$ $C)2$ $D)3$ $E)4$

78. (99-5-29) Укажите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$sin^4x + cos^4x = asinx \cdot cosx$$

имеет решения.
$A)[1;\infty)$ $B)[-1;1]$ $C)[1;5]$
$D)(-\infty;-1] \cup [1;\infty)$ $E)[-3;-1] \cup [1;3]$

79. (99-5-32) Решите уравнение

$$tg(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}\pi}{4} \cdot cos2x) = 1$$

$A) \pm \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ $B) \pm \frac{3\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z$
$C) \pm \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$ $D) \pm \frac{3\pi}{8} + 2\pi n,\ n \in Z$
$E) \pm \frac{\pi}{8} + \pi n,\ n \in Z$

80. (99-5-55) Сколько корней на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение

$$cos^3x + sin^4x = 1?$$

$A)1$ $B)2$ $C)3$ $D)4$ $E)5$

81. (99-7-48) Решите уравнение

$$5 \cdot 5^{sin^2x + cos2x} = \frac{1}{25}$$

$A)\emptyset$ $B)\pi n, n \in Z$ $C)\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$
$D)2\pi n,\ n \in Z$ $E)\frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$

82. (99-9-34) Решите уравнение

$$tgx - tg\frac{\pi}{3} - tgx \cdot tg\frac{\pi}{3} = 1$$

$A)\frac{7\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$ $B)\frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z$
$C)\frac{7\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in Z$ $D)\frac{7\pi}{12} + \pi k,\ k \in Z$
$E)\frac{5\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z$

83. (99-10-34) Решите уравнение

$$(1 + cosx)tg\frac{x}{2} = 0.$$

$A)\pi k,\ k \in Z$ $B)\pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$C)2\pi k,\ k \in Z$ $D)\pi + \pi k,\ k \in Z$
$E)\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

84. (00-2-47) Если $|a| = 1$, то сколько решений имеет уравнение

$$a \cdot ctgx - 1 = cos2x$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?
$A)4$ $B)2$ $C)3$ $D)5$ $E)6$