Формулы произведения тригонометрических выражений

1. Преобразуем вначале произведение тригонометрических функций. Складывая и вычитая почленно равенства (1) и (3) из § 5, получаем тождества:

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)], \quad (1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)], \quad (2)$$

справедливые для любых значений α и β.

Аналогично, складывая почленно равенства (5) и (6) из § 5, получаем тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)], \quad (3)$$

также справедливое для любых значений α и β.

2.1.12. а) $A=\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha$, если $\sin 4\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0$;

б) $A=\cos\frac{\alpha}{8}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 3\sin\frac{\alpha}{8}\neq 0$;

в) $A=\cos 3\alpha\cdot\cos 6\alpha\cdot\cos 12\alpha$, если $\sin 24\alpha = 6\sin 3\alpha\neq 0$;

г) $A=\cos 2{,}5\alpha\cdot\cos 5\alpha\cdot\cos 10\alpha$, если $\sin 20\alpha = 7\sin 2{,}5\alpha\neq 0$;

д) $A=\cos\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\alpha$, если $5\sin 2\alpha = 4\sin\frac{\alpha}{4}\neq 0$.

2.1.13. а) $A=\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=0{,}2$;

б) $A=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=1{,}4$;

в) $A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=-\sqrt{2}$;

г) $A=8\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)$, если $\sin\alpha+\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $A=\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$, если $\cos\alpha-\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2.1.14. а) $A = \mathrm{tg}^2\,\alpha + \mathrm{ctg}^2\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 5$;

б) $A = \mathrm{tg}^3\,\alpha - \mathrm{ctg}^3\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\alpha = 1$;

в) $A = \mathrm{tg}^3\,\alpha + \mathrm{ctg}^3\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 6$;

г) $A = \mathrm{tg}^4\,\alpha + \mathrm{ctg}^4\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = 4$;

д) $A = \mathrm{tg}^6\,\alpha + \mathrm{ctg}^6\,\alpha$, если $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\alpha = -3$;

В задачах **8.241—8.250** вычислить:

8.241. $2\sin 3\alpha \sin 2\alpha + \cos 5\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,6}$

8.242. $2\cos 3\alpha \cos 4\alpha - \cos 7\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{0,8}$

8.243. $2\sin 5\alpha \cos 3\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{0,6}$

8.244. $2\cos 3\alpha \cos 2\alpha - \cos 5\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0,6$

8.245. $2\sin 5\alpha \sin 4\alpha + \cos 9\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} = 0,8$

8.246. $2\sin 7\alpha \cos 5\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,4$

8.247. $2\sin 5\alpha \cos 7\alpha - \sin 12\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 0,3$

8.248. $2\sin 3\alpha \cos 5\alpha - \sin 8\alpha$, если $\sin\alpha - \cos\alpha = 0,9$

8.249. $2\cos 5\alpha \cos 7\alpha - \cos 12\alpha$, если $\cos\alpha = 0,2$

8.250. $2\sin 6\alpha \sin 4\alpha + \cos 10\alpha$, если $\cos\alpha = 0,3$

8.283. $\sqrt{2}\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha \cos\beta = 1/2$; $\alpha + \beta = 5\pi/2$

8.284. $3\cos(\alpha + \beta)$, если $\cos\alpha \cos\beta = -1/2$; $\alpha - \beta = 7\pi/2$

8.285. $\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha \cos\beta = 1/4$; $\alpha + \beta = 9\pi/2$

8.286. $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha \cos\beta = -1/4$; $\alpha - \beta = -\pi/2$

8.287. $5\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha \cos\beta = 1/2$; $\alpha + \beta = \pi/3$

8.288. $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin\alpha \sin\beta = 1/5$; $\alpha - \beta = \pi/3$

8.289. $0,2\cos(\alpha - \beta)$, если $\cos\alpha \cos\beta = -1/4$; $\alpha + \beta = \pi/3$

8.290. $4\sin(\alpha - \beta)$, если $\sin\alpha \cos\beta = 1/4$; $\alpha + \beta = -\pi/6$