§ 2. Тригонометрическая форма комплексного числа и ее применение

Из курса средней школы известны элементы тригонометрии. Учитывая это, в настоящем параграфе мы приведем еще одну форму записи комплексного числа и рассмотрим ее применение.

1. Модуль и аргумент комплексного числа. Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Комплексное число $\alpha = a + bi$ в этой системе координат изображается точкой A с координатами a и b. Для точки A можно определить также новые координаты (полярные координаты) r и φ, где $r = |OA|$, а φ есть угол между положительным направлением оси Ox и вектором $\bar{O}A$ (рис. 19). Для того, чтобы соответствие между точками

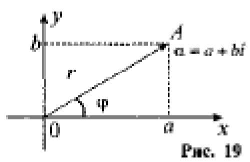

Рис. 19

плоскости и ее координатами было взаимно однозначным, на r и φ налагают ограничения, например, в виде $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$.

Очевидно, что

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \sin\varphi = \frac{b}{r}. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $\alpha = a + bi$ — отличное от нуля комплексное число. Действительное число r, определенное равенством (1), называется *модулем* комплексного числа α, а число φ, определяемое из (2) — *аргументом* числа α.

Модуль комплексного числа α обозначается $|\alpha|$, а аргумент — символом $\operatorname{Arg}\alpha$. Аргумент числа α имеет бесконечное множество значений, отличающихся друг от друга слагаемыми, кратными 2π. Значение аргумента, заключенное в промежутке $[0;\ 2\pi)$ называют *главным значением* и его обозначают через $\arg\alpha : 0 \le \arg\alpha < 2\pi$.

Формулы (1) и (2) позволяют для комплексного числа $\alpha = a + bi$ находить модуль r и аргумент φ. Обратно, если заданы два действительных числа r и φ, причем $r \ge 0$, то существует комплексное число $a + bi$, для которого r и φ являются соответственно модулем и аргументом. При этом число $a + bi$ находится с помощью равенств:

$$a = r\cos\varphi, \quad b = r\sin\varphi \tag{3}$$

Используя формулы (3), для комплексного числа $\alpha = a + bi$ получим следующее представление:

$$\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{4}$$

О п р е д е л е н и е 2. Представление комплексного числа α в виде (4), где $0 \le r < +\infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$, называется *тригонометрической формой комплексного числа*.

П р и м е р 1. Представить в тригонометрической форме комплексные числа: *а*) i; *б*) $-2i$; *в*) $-1-i$.

Р е ш е н и е.

а) Имеем $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

б) Здесь $r = 2$, $\varphi = \frac{3\pi}{2}$. Откуда $-2i = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$;

в) Здесь $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5\pi}{4}$, значит $-1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Умножение и деление комплексных чисел. Тригонометрическую форму комплексного числа удобно использовать при выполнении операций умножения и деления комплексных чисел.

Пусть $\alpha_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $\alpha_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ — комплексные числа, заданные в тригонометрической форме. Тогда

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 \cdot r_2(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Выполнив умножение, получим:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = r_1 \cdot r_2\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]. \tag{5}$$

Отсюда вытекает следующее правило умножения двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме: при умножении комплексных чисел α_1 и α_2, модули этих чисел умножаются, а аргументы складываются.

Формула (5) справедлива для любого числа n сомножителей:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n = r_1 \cdot r_2 \ldots r_n\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n)\right], \tag{6}$$

где r_i и φ_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ — соответственно модуль и аргумент числа α_i.

Рассмотрим теперь деление комплексных чисел. Пусть α_1 и α_2 заданы в тригонометрической форме, причем $r_1 \ne 0$ (т. е. $\alpha_1 \ne 0$). Тогда

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)} = \frac{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)}{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_1 - i\sin\varphi_1)} =$$

$$= \frac{r_2}{r_1}\frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\cos^2\varphi_1 - i^2\sin^2\varphi_1} = \frac{r_2}{r_1}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right].$$

Таким образом,

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{r_2}{r_1}\left[\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + i\sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right], \tag{7}$$

т. е. для нахождения частного $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ следует модуль числа α_2 разделить на модуль числа α_1, а из аргумента числа α_2 вычесть аргумент числа α_1.