3. Возведение в степень. Пусть требуется возвести в квадрат комплексное число $\alpha = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Применив формулу (5) для произведения, получим:

$$\alpha^2 = r^2(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

Аналогично будем иметь:

$$\alpha^3 = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^3 = r^3(\cos 3\varphi + i\sin 3\varphi).$$

Вообще, если имеется n сомножителей, равных $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то применяя формулу (6), получаем:

$$\alpha^n = \left[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (8)$$

и следующее правило:

Модуль степени комплексного числа равен той же степени модуля комплексного числа, а аргумент степени равен аргументу комплексного числа, умноженному на показатель степени.

При $r = 1$, в частности, получаем формулу:

$$\alpha^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi,$$

называемую *формулой Муавра* по имени французского математика Муавра (1667–1754).

Пример 3.

а) Возвести в куб число $\alpha = 3(\cos 15^\circ + i\sin 15^\circ)$. Имеем:

$$\alpha^3 = 27(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) = \frac{27}{2}\left(\sqrt{2} + i\sqrt{2}\right) = \frac{27}{\sqrt{2}}(1+i).$$

б) Возвести в 10-ю степень число $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Сначала представим число α в тригонометрической форме. Имеем: $r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$, $\alpha = 1\cdot(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$. Отсюда используя формулу (8), получим:

$$\alpha^{10} = (\cos 600^\circ + i\sin 600^\circ) = \cos 240^\circ + i\sin 240^\circ = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

6. Возвести в степень:

а) $\left(3\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)\right)^5$; *г*) $\left(4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right)^4$;

б) $\left(\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^6$; *д*) $\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)^{10}$;

в) $\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)\right)^7$; *е*) $\left(\cos\frac{\pi}{22} + i\sin\frac{\pi}{22}\right)^{11}$.