§ 3. Графики тригонометрических функций

Дальнейшие свойства тригонометрических функций можно получить при анализе их графиков.

1. $y = \sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса с центром в точке $(-1; 0)$ и разделим на m равных частей верхнюю полуокружность (рис. 11). Точки деления обозначим через $A_0, A_1, ..., A_m$. На оси абсцисс отрезок $[0; \pi]$ тоже разделим на m равных частей. Точки деления обозначим через $x_0 = 0$, $x_1, x_2, ..., x_m = \pi$. Проведя из точек деления $x_0, x_1, ..., x_m$ верти-

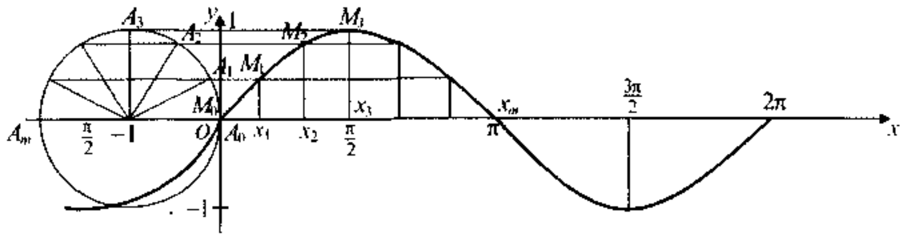

Рис. 11

кали, а из точек $A_0, A_1, ..., A_m$ горизонтали, мы получим ряд точек $M_0, M_1, ..., M_m$, лежащих на искомом графике. Соединив эти точки плавной кривой, получим график синуса на отрезке $[0; \pi]$. Используя свойство нечетности и периодичности синуса, построим его график сначала на отрезке $[-\pi; 0]$, а затем на всей числовой оси. Полученная кривая называется *синусоидой*.

Из графика видно, что функция $y = \sin x$:

1) монотонно возрастает, принимая значения от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$ и монотонно убывает, принимая значения от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right]$;

2) принимает наибольшее значение, равное 1, при $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$, и наименьшее значение, равное -1, при $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$;

3) обращается в нуль при $x = \pi k, k \in Z$.

2. $y = \cos x$. Так как $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ (будет показано ниже), то график функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ сдвигом последнего на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси OX. Полученная кривая называется *косинусоидой*. Она симметрична относительно оси OY (рис. 12). Из графика видно, что функция $y = \cos x$:

1) монотонно возрастает, принимая значения от -1 до 1 на промежутках $[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k]$, $k \in Z$ и монотонно убывает, принимая значения от 1 до -1 на промежутках $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$;

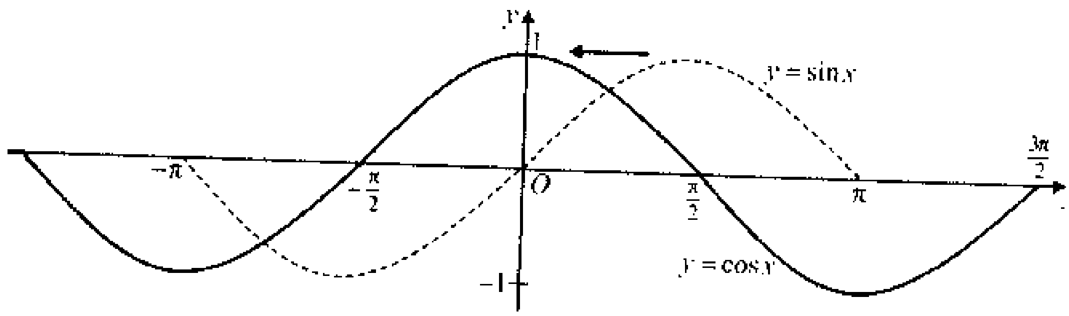

Рис. 12

2) принимает наибольшее значение, равное 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$ и наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;

3) обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

3. $y = \operatorname{tg} x$. Построим единичную окружность с центром в точке $(-1;\ 0)$ (рис. 13). Разделим дугу первой четверти на m равных частей точками $A_0 = 0$, A_1, ..., $A_m = \frac{\pi}{2}$. Проведем радиусы OA_1, OA_2, ..., OA_m и продолжим их до пересечения с осью ординат соответственно в точках C_1, C_2, ..., C_{m-1}. Разделим отрезок $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс на m равных частей точками

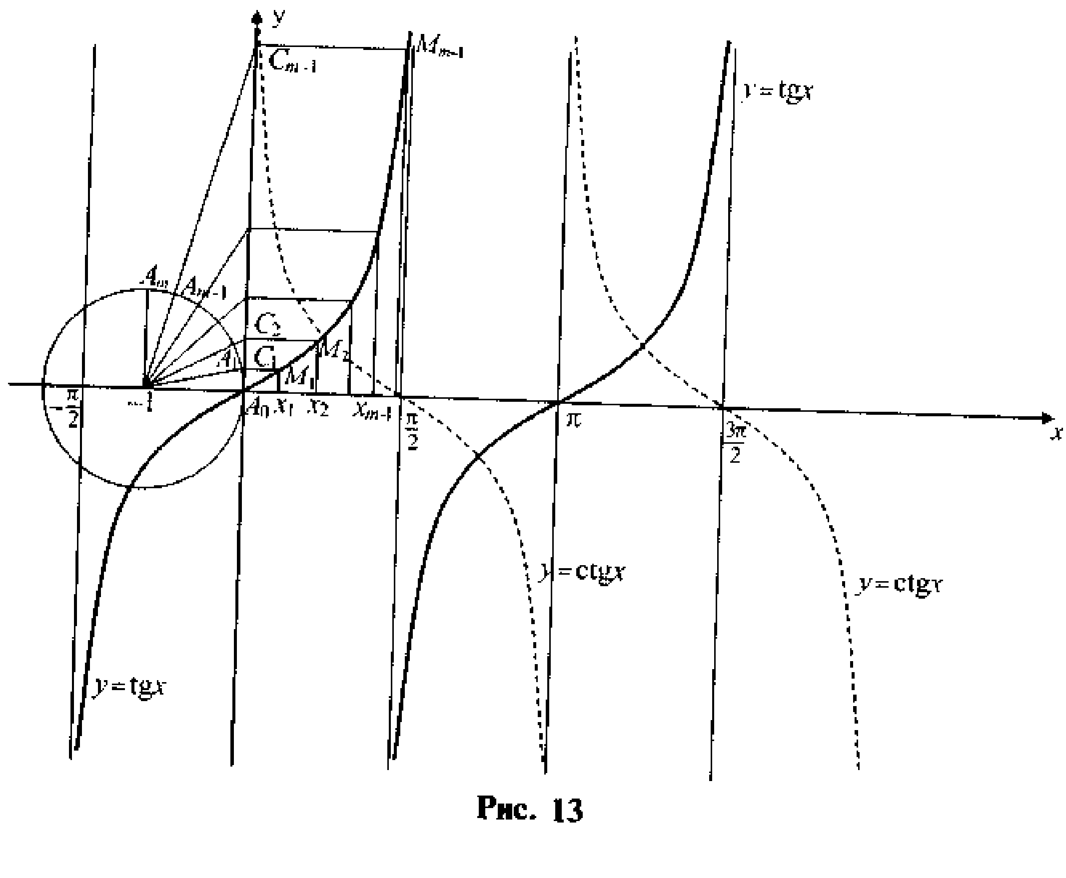

Рис. 13

B. **Четность.**

1. $y=\cos x$–четная функция, $y=\sin x$, $y=tgx$ и $y=ctgx$– нечетные функции.

C. **Промежутки возрастания и убывания.**

1. $y=\sin x$ возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

2. $y=\cos x$ убывает на $[0;\pi]$.

3. $y=tgx$ возрастает на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$

4. $y=tgx$ убывает на $(0;\pi)$

D. **Область значения**

1. Областью значений функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$– промежуток $[-1;1]$.

2. Областью значений функций $y=tgx$ и $y=ctgx$–промежуток $(-\infty;\infty)$.

E. **Неравенство** $-\sqrt{a^2+b^2}\le a\cos x+b\sin x\le\sqrt{a^2+b^2}$

F. **Обратные тригонометрические функции.**

1. Функция $y=\arcsin x$. Ее область определения– $[-1;1]$, а область значений– $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
$y=\arcsin x$ возрастает на $[-1;1]$

2. Функция $y=\arccos x$. Ее область определения– $[-1;1]$, а область значений– $[0;\pi]$
$y=\arccos x$ убывает на $[-1;1]$.

3. Функция $y=arctgx$. Ее область определения– $(-\infty;\infty)$, а область значений– $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$
$y=arctgx$ возрастает на $(-\infty;\infty)$

4. Функция $y=arcctgx$. Ее область определения– $(-\infty;\infty)$, а область значений– $(0;\pi)$
$y=arcctgx$ убывает на $(-\infty;\infty)$

5. $y=\arcsin x$ и $y=arctgx$ - нечетные функции, $y=\arccos x$ и $y=arcctgx$– не являются ни четной, ни нечетной.

1. (96-1-56) Найдите наибольшее значение функции $y=2sin3x+cos3x$.
$A)3$ $B)2$ $C)\sqrt{5}$ $D)4$ $E)1,5$

2. (96-3-113) Найдите наименьший период функции $y=tg3x+sinx+cos2x$.
$A)3\pi$ $B)4\pi$ $C)\pi$ $D)12\pi$ $E)2\pi$

3. (96-6-32) Чему равно наибольшее значение $2sin^2x+cos^2x$.
$A)1$ $B)1,5$ $C)2,6$ $D)2$ $E)2,5$

4. (96-6-41) Какая из следующих функций нечетная?
$A)f(x)=cosx+x^2$ $B)f(x)=sinx\cdot tgx$
$C)f(x)=ctgx+\frac{1}{x^2}$ $D)f(x)=sinx+\frac{x^3+1}{x^3-1}$
$E)f(x)=x^3-\frac{2}{x^3}$

5. (96-6-42) У какой из следующих функций наименьший период равен 2π ?
$A)y=\frac{2tgx}{1-tg^2x}$ $B)y=sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2}$ $C)y=1-cos^2x$
$D)y=sin^2x-cos^2x$ $E)y=ctg2x\cdot sin2x$

6. (96-7-30) Укажите наименьшее значение функции $y=5^{1-sinx}-e^{ln2}$.
$A)1-e^2$ $B)3$ $C)-1$ $D)-2,29$
E) определить нельзя

7. (96-7-57) Расставьте в порядке возрастания числа

$$x=cos\frac{11\pi}{12},\quad y=cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\quad z=sin\frac{11\pi}{12}.$$

$A)x<y<z$ $B)x<z<y$ $C)y<z<x$
$D)z<y<x$ $E)y<x<z$

8. (96-9-47) Найдите наименьший период функции $y=tg\frac{x}{3}-2sin\frac{x}{2}+3cos\frac{2}{3}x$.
$A)4\pi$ $B)6\pi$ $C)3\pi$ $D)12\pi$ $E)15\pi$

9. (96-9-103) Найдите наименьшее значение функции $y=5sin2x-12cos2x$.
$A)-7$ $B)4$ $C)-13$ $D)5\sqrt{2}$ $E)-5\sqrt{3}$

10. (96-10-29) Найдите наибольшее значение функции $y=2sinx+cosx$.
$A)3$ $B)\sqrt{5}$ $C)2$ $D)-1$ $E)5$

11. (96-12-96) Найдите наименьший период функции

$$y=tg\frac{x}{3}-2sinx+3cos2x.$$

$A)6\pi$ $B)3\pi$ $C)4\pi$ $D)9\pi$ $E)2\pi$

12. (96-13-14) Найдите наименьший период функции $y=ctg\frac{x}{3}+tg\frac{x}{2}$.
$A)6\pi$ $B)2\pi$ $C)3\pi$ $D)12\pi$ $E)5\pi$

13. (97-1-21)
Найдите наименьшее значение функции $y=1+cosx$ на отрезке $[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}]$.
$A)0$ $B)1$ $C)1\frac{1}{2}$ $D)1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ $E)\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. (97-2-32) Чему равно наименьшее значение $sin^2x+2cos^2x$?
$A)0,9$ $B)0,8$ $C)1,2$ $D)1$ $E)1,5$

15. (97-2-41) Какая из следующих функций чётная?
$A)f(x)=sinx+x^3$ $B)f(x)=cosxtgx$
$C)f(x)=x^2\cdot ctgx$ $D)f(x)=\frac{x^4+x^2}{cosx}$
$E)f(x)=x^3+\frac{3}{x^3}$

16. (97-2-42) Какая из следующих функций имеет наименьший период, равный $\frac{\pi}{2}$?
$A)y=cosxsinx$ $B)y=1+cos2x$
$C)y=2sin\frac{x}{2}\cdot cos\frac{x}{2}$ $D)y=\frac{1-tg^2x}{2tgx}$
$E)y=tgxcosx$