

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И
НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ЕЛАБУЖСКИЙ ИНСТИТУТ
КАЗАНСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

Ганеева А.Р.

Тригонометрия

Курс лекций

Елабуга
2014

Элементарная математика (Тригонометрия)

**Елабужский институт КФУ. Физико-математический факультет.
Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии**

Направление подготовки: 051000.62 «Педагогическое образование», профиль «Математика и информатика» (бакалавриат, 3 курс, очное обучение)

Дисциплина: «Элементарная математика».

Количество часов: 94 ч. (в том числе: лекции – 4, практические занятия – 22, самостоятельная работа – 32, экзамен - 36)

Количество часов, обеспеченных ЭОР: 26 часов (в т.ч.: – лекции, – практические занятия, – самостоятельная работа).

Форма контроля: экзамен (6 сем.)

Аннотация:

Темы:

Глава 1.

1. Тригонометрическая окружность. 2. Радианная мера угла. 3. Определение тригонометрических функций. 4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения. 5. Теоремы сложения для тригонометрических функций. Тригонометрические функции кратных аргументов. Формулы половинных аргументов. 6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.

Глава 2.

1. Аркфункции; их определения, свойства и графики. 2. Тригонометрические операции над аркфункциями. 3. Соотношения между арк-

функциями. 4. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями.

Ключевые слова: *тригонометрия, тригонометрическая окружность, радианная мера угла, тригонометрические функции, аркфункции, обратные тригонометрические функции.*

Преподаватель, автор курса: Ганеева Айгуль Рифовна, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии Елабужского института КФУ, кандидат педагогических наук, e-mail: aigul_ganeeva@mail.ru

Дата начала эксплуатации: 15 февраля 2014 г.

Для этого курса имеется электронная версия –
<http://tulpar.kpfu.ru/course/view.php?id=764>

Содержание

Глоссарий	5
§1. Тригонометрическая окружность.....	7
§2. Радианная мера угла	8
§3. Определение тригонометрических функций	9
§4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения	14
§5. Теоремы сложения для тригонометрических функций.	
Тригонометрические функции кратных аргументов. Формулы половинных аргументов.....	18
Теоремы сложения для тригонометрических функций	18
§6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение	21
§7. Аркфункции; их определения, свойства и графики	23
§8. Тригонометрические операции над аркфункциями	32
§9. Соотношения между аркфункциями.....	35
§10. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями	40
Литература.....	54

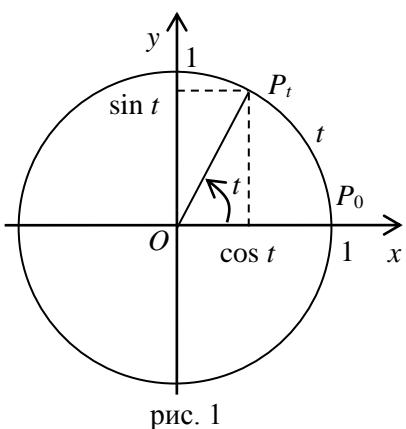
Глоссарий

Выражение	Определение
Абсцисса	Одна из декартовых координат точки, обычно первая, обозначаемая буквой x .
Арккосинус числа t	Число из отрезка $[0; \pi]$, косинус которого равен t .
Арксинус числа t	Число из отрезка $[-\pi/2; \pi/2]$, синус которого равен t .
Арккотангенс числа t	Число из отрезка $(0; \pi)$, котангенс которого равен t .
Арктангенс числа t	Число из отрезка $(-\pi/2; \pi/2)$, тангенс которого равен t .
График функции	Множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты значениям функции.
Корень уравнения	Значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.
Косинус угла α	Отношение абсциссы точки на окружности с центром в начале координат к длине радиуса.
Косинус числа t	Абсцисса точки M числовой окружности
Котангенс угла α	Отношение абсциссы точки на окружности с центром в начале координат к ее ординате.
Котангенс числа t	Отношение косинуса числа t к синусу того же числа.
Ордината	Одна из декартовых координат точки, обычно вторая, обозначаемая буквой y .
Равносильные уравнения	Уравнения, множества корней которых совпадают.
Радиан	Угол в 1 радиан – это такой централь-

	ный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности. Радианная и градусная меры связаны зависимостью $180^\circ = \pi$ радиан.
Радианная мера угла	Отношение длины соответствующей дуги к радиусу окружности.
Радиус	Отрезок, соединяющий центр окружности с любой точкой, лежащей на окружности, а также длина этого отрезка.
Синус угла α	Отношение ординаты точки на окружности с центром в начале координат к длине радиуса.
Синус числа t	Ордината точки M числовой окружности.
Тангенс угла α	Отношение ординаты точки на окружности с центром в начале координат к ее абсциссе.
Тангенс числа t	Отношение синуса числа t к косинусу того же числа.
Тригонометрические функции	Вид элементарных функций. Обычно к ним относят синус ($\sin x$), косинус ($\cos x$), тангенс ($\operatorname{tg} x$), котангенс ($\operatorname{ctg} x$), секанс ($\sec x$) и косеканс ($\operatorname{cosec} x$), последняя пара функций в настоящее время сравнительно малоупотребительна.
Тригонометрия	Раздел математики, в котором изучаются зависимости между величинами углов и длинами сторон треугольников, а также алгебраические тождества тригонометрических функций.
Тригонометрическая окружность	Окружность, радиус которой равен 1.
Нечетная функция	Функция f , для которой выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$ для любого x из ее области определения. График

	нечетной функции симметричен относительно начала координат.
Уравнение	Равенство, содержащее переменную. Решить уравнение означает найти множество всех его решений (корней) или доказать, что корней нет.
Функция	Зависимость одной переменной величины от другой, при которой каждому значению независимой переменной (аргумента) соответствует единственное значение зависимой переменной (функции).
Четная функция	Функция f , для которой выполняется равенство $f(-x)=f(x)$ для любого x из ее области определения. График четной функции симметричен относительно оси ординат.

§1. Тригонометрическая окружность



Тригонометрической окружностью называют окружность единичного радиуса с центром в начале O системы координат xOy . Будем обозначать тригонометрическую окружность буквой ω (омега).

Установим отображение множества \mathbb{R} действительных чисел на тригонометрическую окружность ω следующим образом (рис. 1):

- 1) числу $t=0$ на числовой оси сопоставляется точка P_0 с координатами $(1;0)$;

2) числу $t \neq 0$ ставится в соответствие точка $P_t \in \omega$ такая, что длина дуги P_0P_t равна $|t|$ и дуга P_0P_t откладывается в положительном направлении (против часовой стрелки), если $t > 0$, и в отрицательном направлении (по часовой стрелке), если $t < 0$.

Смысль построенного отображения f состоит в том, что положительная полуось «наматывается» на ω в положительном направлении, а отрицательная – в отрицательном. Поэтому в дальнейшем будем называть его отображением наматывания. Итак, отображение наматывания $f : R \rightarrow \omega$ ставит в соответствие каждому действительному числу t единственную точку P_t тригонометрической окружности ω . Обратное соответствие неоднозначно: точке P_t соответствуют все действительные числа вида $t + 2\pi k (k \in Z)$.

§2. Радианная мера угла

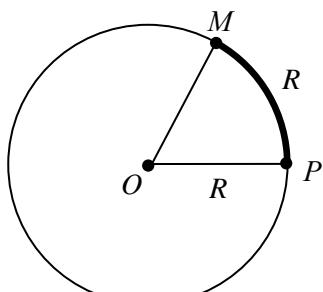


рис. 2

Рассмотрим окружность произвольного радиуса R и отметим на ней дугу PM , длина которой равна R , и угол POM (рис. 2).

Центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

Найдем градусную меру угла в 1 рад.

Т.к. дуга длиной πR (полуокружность) стягивает центральный угол в 180° , то дуга длиной R стягивает угол, в π раз меньший, т.е.

$$1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \right)^\circ.$$

Так как $\pi \approx 3,14$, то $1 \text{ rad} \approx 57,3^\circ$.

Если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi} \alpha \right)^\circ.$$

Найдем радианную меру угла в 1° . Так как угол 180° равен π рад, то

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ рад.}$$

Если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha^\circ = \frac{\pi}{180} \alpha \text{ рад.}$$

Приведем таблицу наиболее часто встречающихся углов в градусной и в радианной мере.

Градусы	0	30	45	60	90	180
Радианы	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π

Обычно при обозначении меры угла в радианах наименование «рад» опускают.

§3. Определение тригонометрических функций

Определение. Синусом числа t называется ордината точки P_t , косинусом числа t называется абсцисса точки P_t , где P_t получается поворотом начальной точки P_0 единичной окружности на угол t .

Если обозначить координаты точки P_t через x и y , то мы получим $x = \cos t$, $y = \sin t$ или $P_t(\cos t, \sin t)$.

Свойства функции $y = \sin x$

1. Область определения $D_y = (-\infty; \infty)$.
2. Область значений $E_y = [-1; 1]$.
3. Функция $y = \sin x$ нечётная: $\sin(-x) = -\sin x$.
4. Функция периодическая с основным периодом 2π .

5. Функция $y = \sin x$

- возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$,
- убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z}$.

$$y = \sin x$$

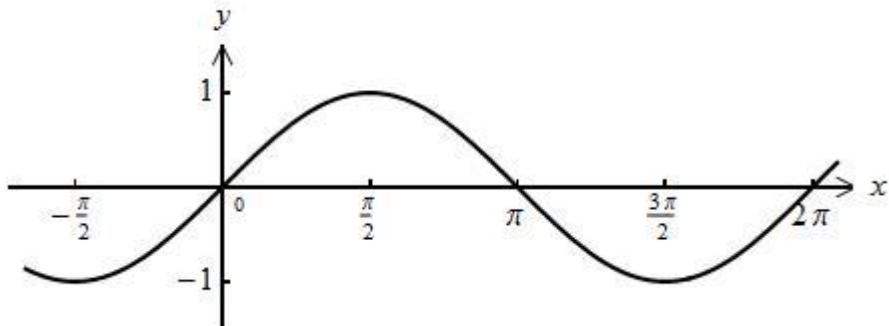


Рис. 3

Свойства функции $y = \cos x$

1. Область определения $D_y = (-\infty; \infty)$.
2. Область значений $E_y = [-1; 1]$.
3. Функция $y = \cos x$ чётная: $\cos(-x) = \cos x$.
4. Функция периодическая с основным периодом 2π .
5. Функция $y = \cos x$
 - возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$,
 - убывает на промежутках $[2\pi k; \pi + 2\pi k], k \in \mathbb{Z}$.

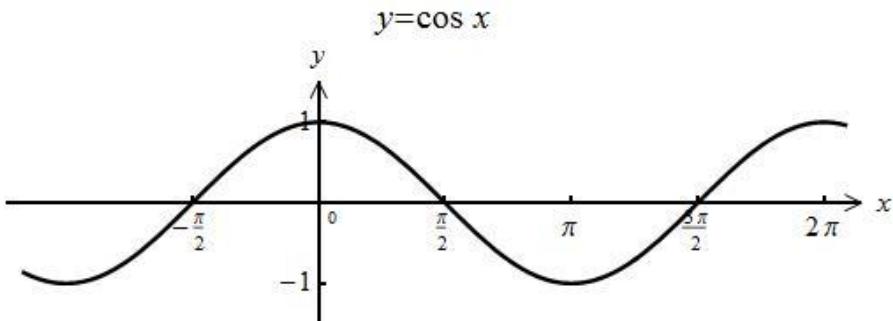


Рис. 4

Определение. Тангенсом числа t называется отношение синуса числа t к его косинусу, т.е. по определению

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t}.$$

Определение. Котангенсом числа t называется отношение косинуса числа t к его синусу, т.е. по определению

$$\operatorname{ctg} t = \frac{\cos t}{\sin t}.$$

Тангенс числа t определен для тех значений t , для которых $\cos t \neq 0$. Котангенс числа t определен для тех значений t , для которых $\sin t \neq 0$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$

Свойства функции $y = \operatorname{tg} x$

1. Областью определения функции $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ является

множество всех действительных чисел, за исключением тех, в которых косинус обращается в нуль. Мы запишем это множество следующим образом: $D_y = \left\{ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \right\}$. Т.е. прямые

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ являются асимптотами графика функции $y = \operatorname{tg} x$.

2. Область значений $E_y = (-\infty; \infty)$.

3. Функция $y = \operatorname{tg} x$ нечётная: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.
4. Функция $y = \operatorname{tg} x$ периодическая с основным периодом π .
5. Функция $y = \operatorname{tg} x$ возрастает на промежутках

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z}.$$

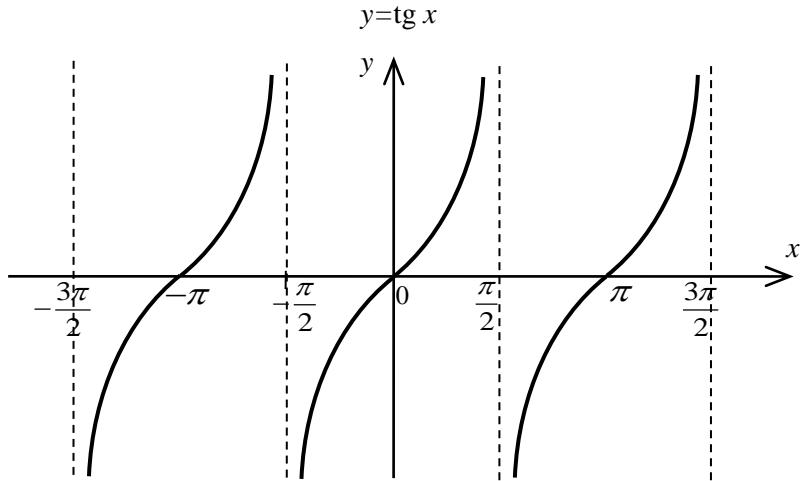


Рис.5

Функция $y = \operatorname{ctg} x$

Свойства функции $y = \operatorname{ctg} x$

1. Областью определения функции $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ является множество всех действительных чисел, за исключением тех, в которых синус обращается в нуль. Мы запишем это множество следующим образом: $D_y = \{x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}\}$. Т.е. прямые $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ являются асимптотами графика функции $y = \operatorname{ctg} x$.
2. Область значений $E_y = (-\infty; \infty)$.
3. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ нечётная: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.
4. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ периодическая с основным периодом π .

5. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ убывает на промежутках $(\pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

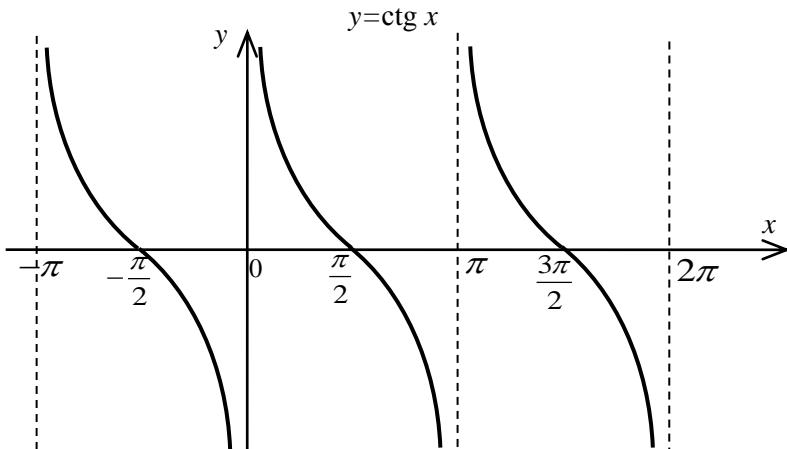


Рис.6

Составим таблицу знаков синуса, косинуса, тангенса и котангенса по четвертям тригонометрической окружности:

Четверть	I	II	III	IV
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{ctg} x$	+	-	+	-

Запишем в виде таблице основные свойства тригонометрических функций

Функция	Область определения	Множество значений	Четность	Основной период	Интервалы монотонности ($n \in \mathbb{Z}$)
$\sin x$	R	$[-1; 1]$	нечетная	2π	$\uparrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $\downarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$.
$\cos x$	R	$[-1; 1]$	четная	2π	$\uparrow x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$, $\downarrow x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n)$.

$\operatorname{tg} x$	$R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}$	R	нечет- ная	π	$\uparrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n \right),$
$\operatorname{ctg} x$	$R \setminus \{\pi n\}$	R	нечет- ная	π	$\downarrow x \in (\pi n; \pi + \pi n).$

§4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента. Формулы приведения

По известному значению одной из тригонометрических функций некоторого фиксированного значения аргумента могут быть найдены значения остальных тригонометрических функций. При этом применяются основные тригонометрические тождества:

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1; \quad (1)$$

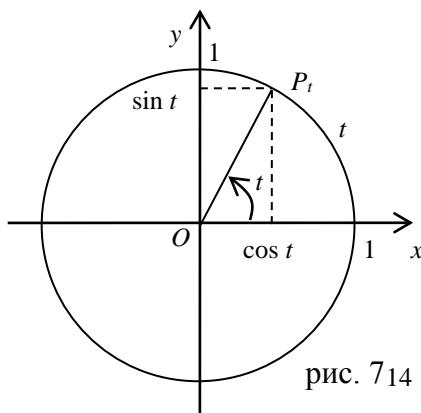
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z; \quad (2)$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq k\pi, \quad k \in Z; \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \neq \frac{m\pi}{2}, \quad m \in Z; \quad (4)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + l\pi, \quad l \in Z; \quad (5)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq s\pi, \quad s \in Z. \quad (6)$$



Тождество (1) следует из того, что $\cos x$ и $\sin x$ являются абсциссой и ординатой точки P_t тригонометрической окружности (см. [7] и рис. 7). Действительно, так как радиус этой окружности равен 1, то

сумма квадратов координат точки P_t равна 1.

Тождества (2) и (3) выражают определения тангенса и котангенса. Тождество (4) получается из (2) и (3) при их почленном перемножении.

Докажем тождество (5), при этом будем использовать тождества (2) и (1):

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Тождество (6) доказывается аналогично.

Пример. Известно, что $\cos x = -\frac{12}{13}$, причём $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$.

Найти $\sin x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$.

Решение. Так как аргумент принадлежит промежутку $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ (третьей четверти, если воспользоваться тригонометрической окружностью), то из (1) получим:

$$\sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \frac{144}{169}} = -\frac{5}{13}$$

тогда из (2) и (3)

$$\operatorname{tg} x = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{12}{5}.$$

Формулы приведения

Формулами приведения называют такие формулы, которые служат для упрощения тригонометрических функций от аргументов вида $k\frac{\pi}{2} + \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$.

Все формулы приведения можно получить, применяя теоремы сложения для тригонометрических функций, или по свойствам периодичности этих функций.

Перечислим формулы приведения для синуса, беря $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{array}{ll} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; & \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; \\ \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; & \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \\ \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos \alpha; & \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -\cos \alpha; \\ \sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha; & \sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha. \end{array}$$

Докажем, например, третью из этих формул. Для этого используем одну из теорем сложения:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \pi \cos \alpha - \cos \pi \sin \alpha = 0 \cdot \cos \alpha - (-1) \sin \alpha = \sin \alpha$$

Оставшиеся семь формул доказываются аналогично (при доказательстве седьмой и восьмой можно использовать, что 2π – период синуса). Все остальные формулы приведения для синуса сводятся к этим восьми, при этом используется свойство периодичности синуса. Например,

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

Аналогично обстоит дело с формулами приведения для косинуса, тангенса и котангенса. Приведём основные из них:

$$\begin{array}{ll} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, & \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha, & \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha, \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin \alpha, & \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha, \\ \cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha, & \cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha; \\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \neq \pi k, \\ \operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{tg}(\pi + \alpha) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \end{array}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) &= \operatorname{tg} \alpha, & \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) &= -\operatorname{tg} \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; \\ \operatorname{ctg}(\pi-\alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha, & \operatorname{ctg}(\pi+\alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, \quad \alpha \neq \pi k. \end{aligned}$$

Чтобы составить любую из формул приведения, нужно иметь в виду, что упрощаемая тригонометрическая функция $f\left(k \frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ приводится к тригонометрической функции от α , перед которой ставится знак + или знак - ; нужно лишь знать, каким будет название функции и какой знак перед ней поставить. Это определяется при помощи mnemonicского правила, которое состоит в следующем:

1) если k четно, то название функции не меняется, если же k нечетно, то название функции меняется на сходное (т. е. "синус" на "косинус" и наоборот, "тангенс" – на "котангенс" и наоборот);

2) в предположении, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, определяют, в какой четверти лежит точка $P_{k \frac{\pi}{2} + \alpha}$, выясняют, какой знак имеет упрощаемая функция f в этой четверти, и ставят этот знак перед полученным результатом.

Пример. Упростить выражение $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right)$.

Решение. Так как $k = 9$ – нечетное, то название функции меняется на сходное, т.е. с "косинуса" на "синус". А так как число $\frac{9\pi}{2} + \alpha$ переходит при отображении наматывания в точку, лежащую во второй координатной четверти (в предположении, что $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), причём знак косинуса во второй четверти отрицательный, то перед полученным результатом нужно поставить знак "минус". Итак, $\cos\left(\frac{9\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha$.

Ответ: $-\sin \alpha$.

§5. Теоремы сложения для тригонометрических функций. Тригонометрические функции кратных аргументов. Формулы половинных аргументов.

Теоремы сложения для тригонометрических функций

Основными теоремами сложения являются следующие:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (1)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \quad (2)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (3)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \quad (4)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (5)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad (6)$$

Докажем формулу (2). Рассмотрим точки $P_\alpha, P_\beta, P_{\alpha-\beta}, P_0$ на тригонометрической окружности, соответствующие при отображении наматывания (см. [7]) числам $\alpha, \beta, \alpha - \beta$ и 0 ; их координаты: $P_\alpha(\cos \alpha, \sin \alpha), P_\beta(\cos \beta, \sin \beta), P_{\alpha-\beta}(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)), P_0(1, 0)$.

Дуги $P_0P_{\alpha-\beta}$ и $P_\beta P_\alpha$ равны, поэтому равны и стягивающие их хорды.

Выразив квадраты расстояний между точками P_0 и $P_{\alpha-\beta}, P_\beta$ и P_α и приравняв их, получим:

$$(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = (\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2.$$

Отсюда имеем (после раскрытия скобок и применения тождества $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$) равенство

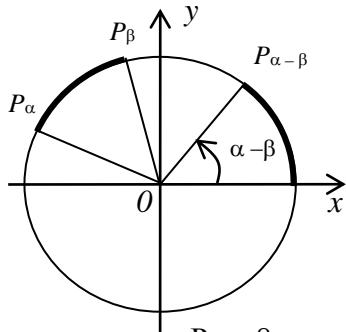


Рис. 8

$2 - 2 \cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2 \sin \alpha \cdot \sin \beta$, из которого и получаем соотношение (2):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Формулу (2) называют формулой косинуса разности.

С помощью формулы (2) легко получить соотношение (1) – формулу косинуса суммы, учитывая четность косинуса и нечетность синуса:

$$\begin{aligned}\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta.\end{aligned}$$

Для вывода формулы (3) используем соотношение (2) и формулы приведения:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.\end{aligned}$$

Из формулы (3) получим формулу (4):

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta\end{aligned}$$

Применяя формулы (1) и (3), выведем формулу (5):

$$\begin{aligned}tg(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{tg \alpha + tg \beta}{1 - tg \alpha \cdot tg \beta}.\end{aligned}$$

Аналогично получается и формула (6) (она также может быть получена из формулы (5) заменой β на $-\beta$). Заметим, что для формул (5) и (6)

$$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \beta \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + m\pi, \quad k, n, m \in \mathbb{Z}.$$

Тригонометрические функции кратных аргументов
В формулах (1), (3), (5) положим $\alpha = \beta$, получим:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \quad (7)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha; \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (9)$$

Формулы половинных аргументов

Основными формулами являются:

$$\left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \quad (10)$$

$$\left| \cos \frac{\alpha}{2} \right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \quad (11)$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (12)$$

Чтобы вывести эти формулы, воспользуемся уже известными равенствами

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \cos \alpha.$$

Складывая и вычитая, получим соответственно:

$$2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \cos \alpha, \quad 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \cos \alpha,$$

откуда и получаются формулы (10) и (11).

Выведем формулы (12) для $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

§6. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

Формулами первого типа являются

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)), \quad (1)$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)), \quad (2)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)) \quad (3)$$

Выведем эти формулы. Складывая почленно равенства

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha + \beta),$$

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta = \sin(\alpha - \beta),$$

получим:

$$2 \sin \alpha \cdot \cos \beta = (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)),$$

откуда следует (1).

Складывая и вычитая почленно равенства

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha - \beta),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta = \cos(\alpha + \beta)$$

и деля полученные результаты на 2, получим соответственно (2) и (3).

Основными формулами преобразования сумм и разностей тригонометрических функций в произведения являются

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (4)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (5)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (6)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad (7)$$

Вывод этих формул также основан на применении теорем сложения.

Складывая и вычитая почленно равенства

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y,$$

$$\sin(x-y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y,$$

получим соответственно:

$$\sin(x+y) + \sin(x-y) = 2 \sin x \cdot \cos y,$$

$$\sin(x+y) - \sin(x-y) = 2 \cos x \cdot \sin y.$$

Положим $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$, тогда

$$x = \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad y = \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

При этих обозначениях получим формулы (4) и (5).

Далее, складывая и вычитая почленно равенства

$$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y,$$

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

и изменяя обозначения ($x+y=\alpha$, $x-y=\beta$), получим соответственно (6) и (7).

Выведенные формулы справедливы при любых значениях α и β , так как, каковы бы ни были числа α и β , можно подобрать такие x и y , чтобы соблюдались соотношения

$$\begin{cases} x+y=\alpha, \\ x-y=\beta, \end{cases}$$

в чём легко убедиться, разрешив эту систему относительно x и y . Сумма тангенсов

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \beta}{\cos \beta} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta},$$

откуда, используя формулу синуса суммы, получим:

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Аналогично выводится формула разности тангенсов

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

§7. Аркфункции; их определения, свойства и графики

Функция $y = \arcsin x$ (арксинус)

Для тригонометрической функции $y = \sin x$, рассматривающей на всей области определения $(-\infty, +\infty)$, переход к обратной функции невозможен, так как она не является монотонной (принимает всякое значение $y \in [-1; 1]$ на бесконечном множестве значений аргумента). Переход к обратной функции станет возможным, если рассмотреть $y = \sin x$ на каком-либо промежутке монотонности, на котором $\sin x$ принимает все свои значения. Известно, что функция $y = \sin x$ монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ ($n \in \mathbb{Z}$) и монотонно убывает от 1 до -1 на любом из промежутков $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$ ($n \in \mathbb{Z}$). На каждом из промежутков монотонности функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию. Остается зафиксировать какой-либо из этих отрезков. В качестве такого промежутка принято брать $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Функцию, обратную синусу, взятому на указанном промежутке монотонности, называют арксинусом и обозначают \arcsin .

Определение 1. Арксинусом называется функция, обратная функции $y = \sin x$ на промежутке $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

По общему правилу построения обратной функции разрешим равенство $y = \sin x$ относительно x : $x = \arcsin y$, затем меняем местами обозначения аргумента x и функции y , получаем:

$$y = \arcsin x \quad (1)$$

График обратной функции симметричен графику основной функции (для которой построена обратная) относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов.

На рис. 9 изображены графики функций.

$$y = \sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \text{ и обратной ей } y = \arcsin x.$$

Свойства функции $y = \arcsin x$

1. Область определения $D_y = [-1; 1]$ (совпадает с областью значений синуса).

2. Область значений $E_y = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ (совпадает с выбранным

промежутком области определения исходной функции – синуса).

3. Функция $y = \arcsin x$ нечётная: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ (так как синус – нечётная функция).

4. Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает (так как монотонно возрастающей на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ является исходная функция $y = \sin x$).

5. График пересекает оси (Ox) и (Oy) в точке $O(0; 0)$.

6. $\arcsin x \geq 0$ при $0 \leq x \leq 1$, $\arcsin x < 0$, $\arcsin x < 0$ при $-1 \leq x < 0$.

Все свойства функции $y = \arcsin x$ вытекают из свойств функции $y = \sin x$ на промежутке $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

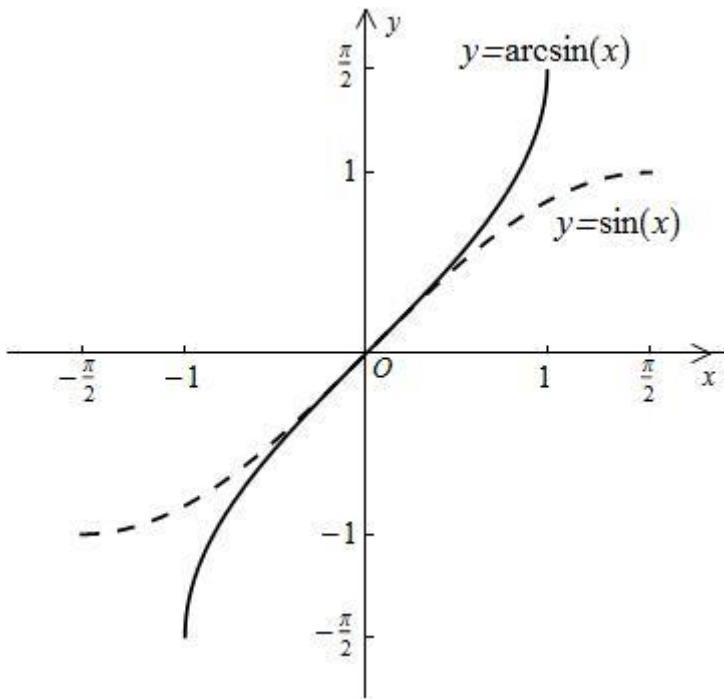


Рис. 9

Функция $y = \arccos x$ (арккосинус)

Тригонометрическая функция $y = \cos x$, рассматриваемая на всей области определения $(-\infty, +\infty)$, не является монотонной (принимает всякое значение $y \in [-1; 1]$ на бесконечном множестве значений аргумента), поэтому переход к обратной функции невозможен. Этот переход станет возможным, если рассмотреть $y = \cos x$ на каком-либо промежутке монотонности, на котором $\cos x$ принимает все свои значения. Функция $y = \cos x$ монотонно возрастает от -1 до 1 на каждом из промежутков $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$, ($n \in \mathbb{Z}$) и монотонно убывает от 1 до -1 на любом из промежутков $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, ($n \in \mathbb{Z}$). На любом из промежутков монотонности функция $y = \cos x$ имеет обратную

функцию. В качестве промежутка, на котором рассматривается функция $y = \cos x$ и строится обратная к ней функция, обычно берут $[0; \pi]$. Функцию, обратную косинусу, взятому на указанном промежутке монотонности, называют арккосинусом и обозначают \arccos .

Определение 2. Арккосинусом называется функция, обратная функции $y = \cos x$ на промежутке $0 \leq x \leq \pi$.

Разрешив равенство $y = \cos x$ относительно $x: x = \arccos y$, затем меняя местами обозначения аргумента x и функции y , получаем:

$$y = \arccos x \quad (2)$$

График функции $y = \arccos x$ симметричен графику функции $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Эти графики изображены на рис. 10.

Свойства функции $y = \arccos x$

1. Область определения $D_y = [-1:1]$ (совпадает с областью значений косинуса).
2. Область значений $E_y = [0;\pi]$ (совпадает с выбранным промежутком области определения исходной функции – косинуса).
3. Функция $y = \arccos x$ ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x \quad (3)$$

4. Функция $y = \arccos x$ монотонно убывающая.
 5. График пересекает ось (Ox) в точке $(1;0)$, а ось (Oy) – в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
 6. $\arccos x \geq 0$ на всём отрезке $-1 \leq x \leq 1$.
- Свойства функции $y = \arccos x$ выводятся из свойств функции $y = \cos x$, взятой на промежутке $[0; \pi]$.

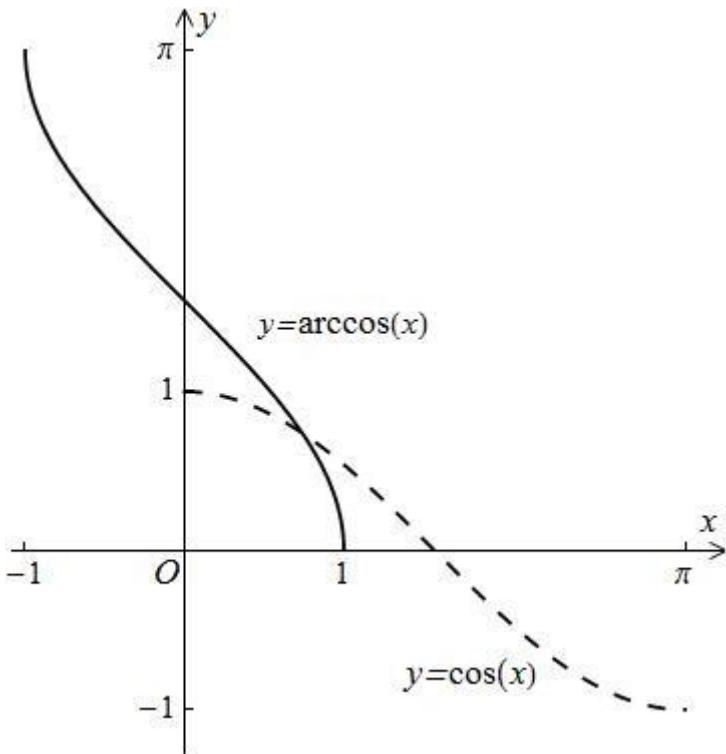


Рис. 10

Функция $y = \operatorname{arctg} x$ (арктангенс)

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$. Областью определения этой функции является множество действительных чисел, за исключением $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, область значений – множество действительных чисел R . Функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ на любом интервале вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$$

Для того чтобы получить функцию, обратную тангенсу, рассматривают функцию $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке монотонности

$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, на котором она монотонно возрастает, принимая все

значения от $-\infty$ до $+\infty$. Функцию, обратную тангенсу, взятому на указанном промежутке монотонности, называют арктангенсом и обозначают arctg .

Определение 3. Арктангенсом называется функция, обратная функции $y = \operatorname{tg} x$ на промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Разрешив равенство $y = \operatorname{tg} x$ относительно x : $x = \operatorname{arctg} y$, затем меняя взаимно обозначения x и y получаем:

$$y = \operatorname{arctg} x \quad (4)$$

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{tg} x$ (где $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$) относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Эти графики изображены на рис. 11.

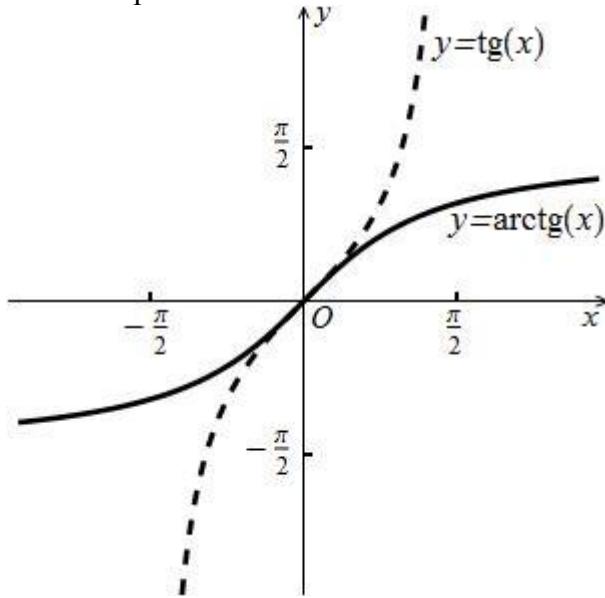


Рис. 11

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$

1. Область определения $D_y = R$ (совпадает с областью значений тангенса).
2. Область значений $E_y = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (совпадает с выбранным промежутком области определения исходной функции – тангенса).
3. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ нечётная (так как нечётной является исходная функция – тангенс): $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
4. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ монотонно возрастающая.
5. График пересекает оси (Ox) и (Oy) в точке $O(0; 0)$.
6. $\operatorname{arctg} x \geq 0$ при $0 \leq x < +\infty$ и $\operatorname{arctg} x < 0$ при $-\infty < x < 0$.
7. Прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ горизонтальные асимптоты графика функции $y = \operatorname{arctg} x$.

Свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$ вытекают из свойств функции $y = \operatorname{tg} x$, взятой на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ (арккотангенс)

Функция $y = \operatorname{ctg} x$, рассматриваемая на всей области определения $(-\infty, +\infty), x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$ не является монотонной и принимает всякое значение $y \in R$ на бесконечном множестве значений аргумента, поэтому переход к обратной функции невозможен. Построить обратную функцию станет возможным, если рассмотреть $y = \operatorname{ctg} x$ на каком-либо промежутке монотонности на котором $\operatorname{ctg} x$ принимает все свои значения. Функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает от $-\infty$ до $+\infty$ на каждом из про-

межутков $(\pi n; \pi + \pi n)$ ($n \in \mathbb{Z}$). На любом из промежутков монотонности функция $y = \operatorname{ctg} x$ имеет обратную функцию.

В качестве промежутка, на котором рассматривается функция $y = \operatorname{ctg} x$ и строится обратная к ней функция, обычно берут $(0; \pi)$ ¹. Функцию, обратную котангенсу, взятому на указанном промежутке монотонности, называют арккотангенсом и обозначают arcctg .

Определение 4. Арккотангенсом называется функция, обратная функции $y = \operatorname{ctg} x$ на промежутке $0 < x < \pi$.

Разрешая равенство $y = \operatorname{ctg} x$; относительно x : $x = \operatorname{arcctg} y$, затем меняя местами обозначения аргумента x и функции y , получаем:

$$y = \operatorname{arcctg} x \quad (5)$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ симметричен графику функции $y = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x < \pi$) относительно прямой, содержащей биссектрисы первого и третьего координатных углов. Эти графики изображены на рис. 12.

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$

1. Область определения $D_y = \mathbb{R}$ (совпадает с областью значений котангенса).
2. Область значений $E_y = (0; \pi)$ (совпадает с выбранным промежутком области определения исходной функции — ко-

¹ В некоторых старых учебниках и даже в новейших компьютерных математических системах, таких как *Mathematica*, рекомендуется для построения функции, обратной котангенсу, брать его на промежутке $(-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2]$. Это мотивируется тем, что на данном промежутке котангенс принимает любое заданное значение; кроме того, промежуток симметричен относительно нуля, а поскольку котангенс – нечётная функция, то нечётной будет и обратная к ней. Однако такой выбор был бы неудобен, так как в точке 0 котангенс неопределён, поэтому обратная функция имела бы разрыв. К тому же существует традиция российской математической школы, согласно которой при построении обратной функции котангенс рассматривается на промежутке $(0; \pi)$.

тангенса).

3. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ ни чётная, ни нечётная. Для неё выполняется тождество

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x \quad (6)$$

4. Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ монотонно убывающая.

5. График пересекает ось (Oy) в точке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а ось (Ox) не пересекает.

6. $\operatorname{arcctg} x > 0$ на всём интервале $-\infty < x < +\infty$.

7. Прямые $y = 0$ и $y = \pi$ являются горизонтальными асимптотами графика.

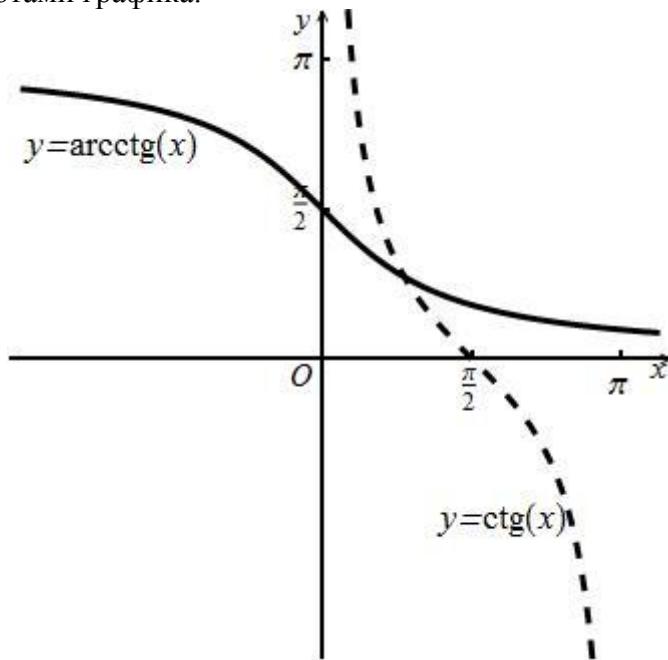


Рис. 12

Свойства функции $y = \operatorname{arcctg} x$ выводятся из свойств функции $y = \operatorname{ctg} x$, взятой на промежутке $(0; \pi)$.

§8. Тригонометрические операции над аркфункциями

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определения аркфункций

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad (1)$$

$$\cos(\arccos x) = x, \quad (-1 \leq x \leq 1); \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad (-\infty < x < +\infty); \quad (3)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad (-\infty < x < +\infty). \quad (4)$$

Равенства (1) и (2) не являются справедливыми при всех действительных значениях x . Так, при $|x| > 1$ выражение $\arcsin x$, а следовательно, и $\sin(\arcsin x)$, теряет смысл. Равенства (3) и (4) справедливы при всех действительных значениях x .

Каждое из равенств (1) и (2) является тождеством в том смысле, что оно справедливо при всех значениях x , содержащихся в области определения как правой, так и левой частей.

Ниже приведены всевозможные случаи выполнения тригонометрических операций над аркфункциями.

1) Положив в формуле $|\cos \varphi| = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$ (выражающей косинус через синус) $\varphi = \arcsin x$, получим:

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Модуль убираем, т.к. $\varphi = \arcsin x$ принадлежит промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, на котором косинус неотрицателен.

Итак, имеем:

$$1) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } x \in [-1; 1]. \quad (5)$$

Аналогично

$$2) \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } x \in [-1; 1]. \quad (6)$$

3) Из тождества $\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg} \varphi}$ следует:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{x}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \text{ где } x \neq 0. \quad (7)$$

Аналогично

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \text{ где } x \neq 0 \quad (8)$$

4) Применяя определение тангенса, формулы (1) и (5), получим:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{\sin(\operatorname{arcsin} x)}{\cos(\operatorname{arcsin} x)} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ где } x \in (-1;1). \quad (9)$$

Аналогично выводятся формулы

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ где } x \in [-1;0) \cup (0;1], \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \text{ где } x \in [-1;0) \cup (0;1], \quad (11)$$

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arccos} x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ где } x \in (-1;1). \quad (12)$$

5) Выведем формулу для $\cos(\operatorname{arctg} x)$. При этом используем тождество $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ и формулу (3); кроме того, учтём, что поскольку $\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos(\operatorname{arctg} x) > 0$. Получим:

$$\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (13)$$

Аналогично получается

$$\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (14)$$

Учитывая, что $\sin \varphi = \operatorname{tg} \varphi \cdot \cos \varphi$ и применяя формулы (3) и (13), получим формулу

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (15)$$

Наконец, подобным же образом получится формула

$$\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad (16)$$

Пример. Преобразовать выражения

$$\sin(2 \arcsin x), \cos(2 \arccos x), \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x).$$

Решение. Применив формулу $\sin 2\varphi = 2\sin \varphi \cdot \cos \varphi$, а затем формулы (1) и (5), получим:

$$\sin(2 \arcsin x) = 2 \sin(\arcsin x) \cos(\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Подобным же образом получаем тождества

$$\cos(2 \arccos x) = 2 \cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1;$$

$$\operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} x) = \frac{2 \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)}{1 - \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{2x}{1-x^2}.$$

Пользуясь теоремами сложения для тригонометрических функций и применяя формулы (1) - (16), можно доказать следующие тождества:

$$\sin(\arcsin x \pm \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2};$$

$$\cos(\arccos x \pm \arccos y) = xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2};$$

$$\sin(\arcsin x \pm \arccos y) = xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2};$$

$$\cos(\arcsin x \pm \arccos y) = \sqrt{1-x^2} \cdot y \mp x\sqrt{1-y^2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x \pm \operatorname{arctg} y) = \frac{x \pm y}{1 \mp xy};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arcsin} x \pm \operatorname{arcsin} y) = \frac{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \mp xy}.$$

Теоремы сложения тригонометрии и формулы (1) – (16) служат основой и для вывода других подобных формул. Естественно, нужно иметь в виду, что каждая из этих формул рассматривается на пересечении областей определения её левой и правой частей.

§9. Соотношения между аркфункциями

Теорема. При всех допустимых значениях x имеют место тождества:

$$\operatorname{arcsin} x + \operatorname{arccos} x = \frac{\pi}{2}; \quad (1)$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}. \quad (2)$$

Доказательство. Перенося $\operatorname{arccos} x$ из левой части равенства (1) в правую, получим равносильное равенству (1) соотношение

$$\operatorname{arcsin} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} x. \quad (1')$$

Докажем, что оно верно при всех $x \in [-1; 1]$. Оценим промежутки изменения левой и правой частей этого равенства.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \operatorname{arcsin} x \leq \frac{\pi}{2} \text{ (по определению арксинуса); } 0 \leq \operatorname{arccos} x \leq \pi$$

$$\text{(по определению арккосинуса), откуда } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccos} x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Итак, и левая, и правая части равенства (1') принадлежат одному и тому же промежутку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Так как этот промежуток явля-

ется промежутком монотонности синуса, то из равенства синусов от левой и правой частей можно будет сделать вывод о равенстве этих выражений. Таким образом, остаётся взять синус от обеих частей равенства (1') и убедиться, что они равны:

$$\sin(\arcsin x) = x, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x. \quad \text{Тождество}$$

(1) доказано.

Аналогично доказывается тождество (2).

Ниже приведены формулы преобразования одних аркфункций в другие, значения которых принадлежат одному и тому же промежутку длиной π (одной и той же полуокружности тригонометрической окружности).

1) Выражение $\arcsin x$ через арктангенс.

Поставим задачу выразить $\arcsin x$ ($x \in (-1;1)$) через арктангенс: $\arcsin x = \operatorname{arctg}(f(x))$. Найдём $f(x)$.

Обе части предыдущего равенства при $x \in (-1;1)$ принадлежат промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому, беря от обеих частей одну и ту же тригонометрическую функцию, монотонную на этом промежутке (синус или тангенс), получим равенство, равносильное предыдущему (при $x \neq \pm 1$), из которого выразим $f(x)$ через x . В нашем случае целесообразно взять тангенс от обеих частей. Получим:

$$f(x) = \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Итак,

$$\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1) \tag{3}$$

2) Выражение $\operatorname{arctg} x$ через арксинус. Так как

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \text{ то}$$

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in (-\infty; +\infty) \quad (4)$$

3) Выражение $\arccos x$ через арккотангенс. Аналогично соотношению (3), из равенства $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ следует

$$\arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1) \quad (5)$$

Далее будем рассматривать пары аркфункций, области изменения которых являются несовпадающими промежутками (например, арксинус и арккосинус, арккосинус и арктангенс). Их можно выразить одна через другую на пересечении областей изменения. Если аргумент какой-либо аркфункций (то есть значение тригонометрической функции) положителен, то значения этой аркфункции заключены в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Отсюда следует, что каждая из аркфункций от положительного аргумента может быть выражена через любую другую аркфункцию. Так, например,

$$\frac{\pi}{3} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \arccos \frac{1}{2} = \operatorname{arcctg} \sqrt{3} = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Значение какой-либо аркфункций от отрицательного аргумента принадлежит либо промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, либо $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ и не может быть представлено в виде аркфункций, значение которой принадлежит другому (из этих двух) промежутку. Так, например,

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} = \pi - \arcsin \frac{1}{2}.$$

Ниже приведены формулы преобразований одних аркфункций в другие, значения которых выбираются в раз-

личных промежутках (полуокружностях тригонометрической окружности).

4) Выражение арксинуса через арккосинус. Пусть $y = \arcsin x$. Если $0 \leq x \leq 1$, то $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Поскольку $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$, то $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$. Если же $-1 \leq x < 0$, то $0 < x \leq 1$, тогда

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = -\arccos \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом, имеем окончательно:

$$\arcsin x = \begin{cases} \arccos \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arccos \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Это соотношение можно переписать следующим образом:

$$\arcsin \sqrt{1 - x^2} = \begin{cases} \arcsin x, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ -\arcsin x, & \text{если } -1 \leq x \leq 0. \end{cases}$$

5) Выражение арккосинуса через арксинус. Аналогично устанавливается, что при $0 \leq x \leq 1$ $\arccos x = \arcsin \sqrt{1 - x^2}$, если же $-1 \leq x < 0$, то

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}.$$

Таким образом,

$$\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ \pi - \arcsin \sqrt{1 - x^2}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (7)$$

6) Выражение арктангенса через арккосинус.

Из соотношения $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ при $x \geq 0$ получим:

$$\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если же $x < 0$, то $\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\text{Итак, } \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \geq 0, \\ -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x \leq 0. \end{cases} \quad (8)$$

7) Выражение арккосинуса через арктангенс.

Если $0 < x \leq 1$, то из соотношения $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ получим $\arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

При $-1 \leq x < 0$ имеем:

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \pi - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{-x} = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\text{Итак, } \arccos x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Аналогично, следуя методу, применённому в предыдущих четырёх пунктах, можно установить справедливость следующих равенств:

$$8) \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (10)$$

$$9) \operatorname{arcsin} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0 < x \leq 1, \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & \text{если } -1 \leq x < 0. \end{cases} \quad (11)$$

$$10) \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x > 0, \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (12)$$

$$11) \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{если } x < 0. \end{cases} \quad (13)$$

§10. Выполнение обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями

При взятии обратных тригонометрических функций от тригонометрических функций, то есть при преобразовании выражений вида $\arcsin(\sin x), \arccos(\cos x), \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x), \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ нужно учитывать, в какой четверти находится аргумент x (если мыслить его дугой тригонометрической окружности) и в каком промежутке находится значение данной аркфункции.

Рассмотрим результат взятия функции \arcsin от синуса, то есть функцию $y = \arcsin(\sin x)$.

По определению арксинуса, y есть число из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (или дуга правой полуокружности), синус которого

равен $\sin x$: $\sin y = \sin x$, $\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

Областью определения функции $\arcsin(\sin x)$ является интервал $-\infty < x < +\infty$, так как при всех действительных значениях x значение промежуточного аргумента $u = \sin x$ содержится на сегменте $-1 \leq u \leq 1$. При произвольном действительном x значение y (в общем случае) отлично от значения x . Так, например,

при $x = \frac{\pi}{3}$ имеем: $y = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} = x$;

но при $x = \frac{2\pi}{3}$ имеем: $y = \arcsin\left(\sin \frac{2\pi}{3}\right) = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} \neq x$.

Так как синус – периодическая функция, то $\arcsin(\sin x)$ также является периодической функцией с периодом 2π , поэтому достаточно исследовать ее на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ длиной 2π .

Если $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $y = x$; таким образом, на этом сегменте график функции является отрезком биссектрисы первого и третьего координатных углов.

Если $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, то $(\pi - x) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, а так как $\sin(\pi - x) = \sin x$, то $y = \pi - x$.

Далее пользуясь периодичностью, в общем случае получаем:
для $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ (то есть когда $(x - 2\pi n) \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$)

$$y = x - 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

Итак, имеем:

$$\arcsin(\sin x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } x \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \\ -x + (2n+1)\pi, & \text{если } x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]. \end{cases}$$

График функции $y = \arcsin(\sin x)$ изображён на рисунке 13:

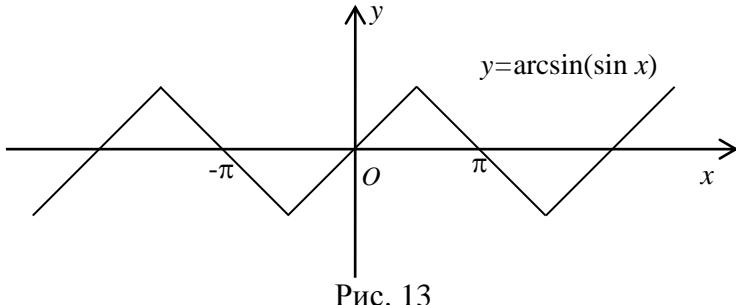


Рис. 13

Рассмотрим функцию $y = \arccos(\cos x)$.

Областью определения этой функции является R – множество всех действительных чисел. Функция периодическая с периодом 2π . Функция чётная (так как чётной является функция $\cos x$). Поэтому достаточно исследовать её на промежутке длиной π .

Если $x \in [0; \pi]$, то, поскольку $\cos y = \cos x$ и $0 \leq y \leq \pi$, получим: $y = x$. При $x \in [-\pi; 0]$ (то есть когда $-x \in [0; \pi]$) будем иметь: $y = -x$.

Вообще, при $x \in [2\pi n; \pi + 2\pi n]$ (то есть при $0 \leq x - 2\pi n \leq \pi$) по предыдущему получим: $y = x - 2\pi n$, $n \in Z$.

Если же $x \in [-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ (а значит $-\pi \leq x - 2\pi n \leq 0$), то $y = -x + 2\pi n$, $n \in Z$.

Итак,

$$\arccos(\cos x) = \begin{cases} x - 2\pi n, & \text{если } x \in [2\pi n; (2n+1)\pi], \\ -x + 2\pi n, & \text{если } x \in [(2n-1)\pi; 2\pi n]. \end{cases}$$

Графиком функции $y = \arccos(\cos x)$ является ломаная, изображённая на рис. 14

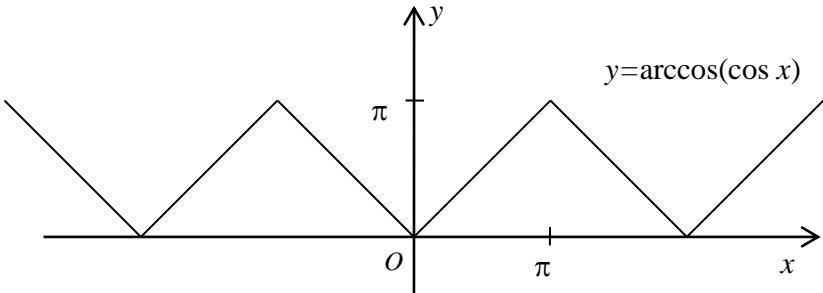


Рис. 14

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$

Согласно определению арктангенса $\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x$, где $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Выражение $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ имеет смысл при всех действительных значениях, за исключением $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, областью определения данной функции является объединение интервалов ... $\left(-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)...$

Данная функция периодическая с периодом π , нечётная. При $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ в силу равенства тангенсов от y и от x получаем: $y = x$. Вообще, для $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$ (то есть при $(x - \pi n) \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$) получим: $y = x - \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Итак:

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi n, \quad \text{если } -\frac{\pi}{2} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}.$$

График функции $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ состоит из бесконечного множества параллельных между собой отрезков (см. рис. 15).

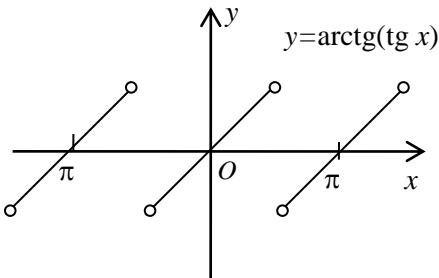


Рис. 15

Точки $\frac{\pi}{2} + k\pi$ являются точками разрыва первого рода функции $y = \text{arctg}(\text{tg } x)$, так как в этих точках предел функции не существует, но существуют различные между собой правые и левые пределы.

Так, в точке $\frac{\pi}{2}$ левый предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\text{arctg}(\text{tg } x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} x = \frac{\pi}{2}$, а

правый предел $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (\text{arctg}(\text{tg } x)) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (x - \pi) = -\frac{\pi}{2}$.

Рассмотрим функцию $y = \text{arcctg}(\text{ctg } x)$.

Согласно определению арккотангенса $\text{ctg } x = \text{ctg } y$, где $0 < y < \pi$. Аналогично предыдущей функции имеем: $\text{arcctg}(\text{ctg } x) = x - \pi n$, если $\pi n < x < \pi + \pi n$; $n \in \mathbb{Z}$

Точки $k\pi$ (где $k \in \mathbb{Z}$) являются точками разрыва первого рода функции $y = \text{arcctg}(\text{ctg } x)$. Её график изображён на рис. 16.

Исследование функций $y = \text{arccos}(\sin x)$, $y = \text{arcsin}(\cos x)$, $y = \text{arctg}(\text{ctg } x)$, $y = \text{arcctg}(\text{tg } y)$ не представляет затруднений.

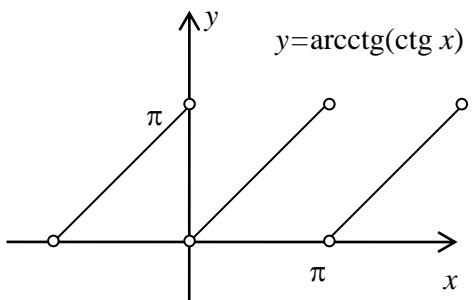
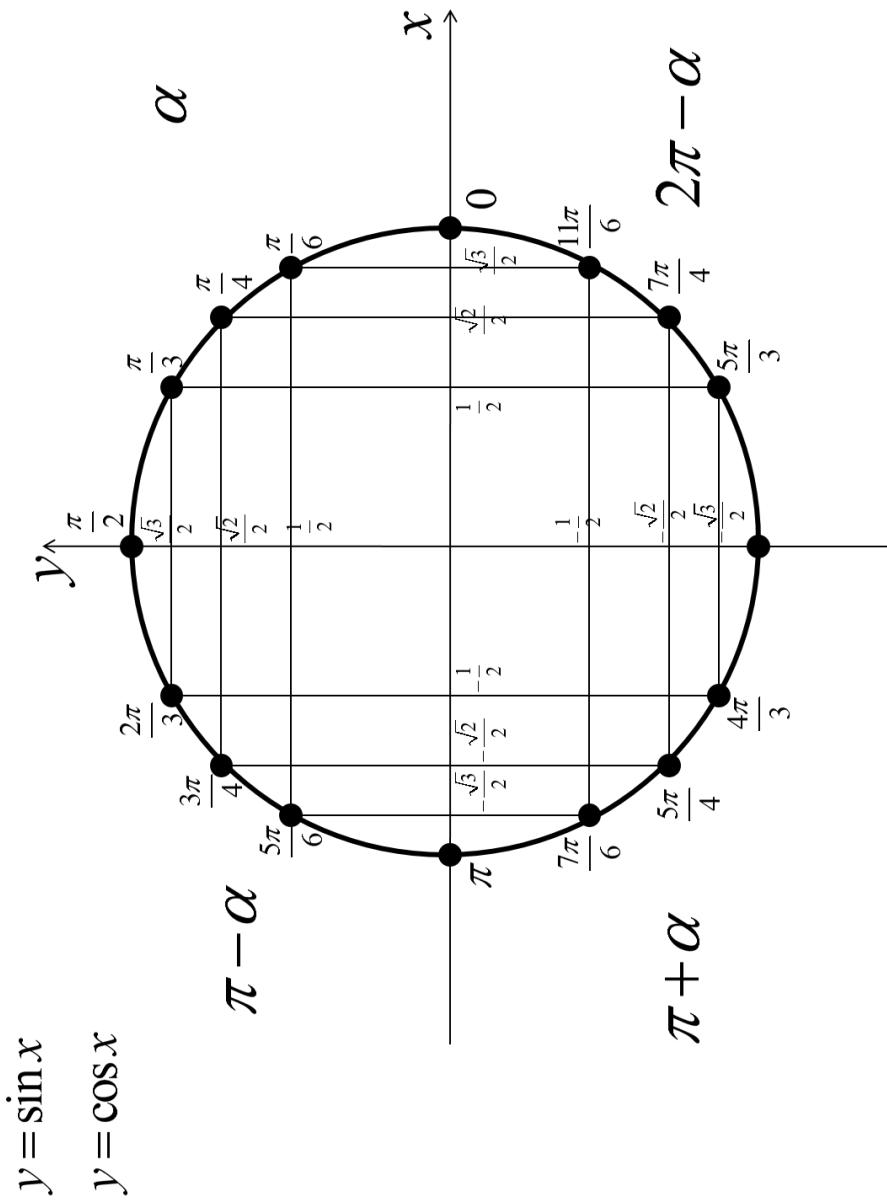
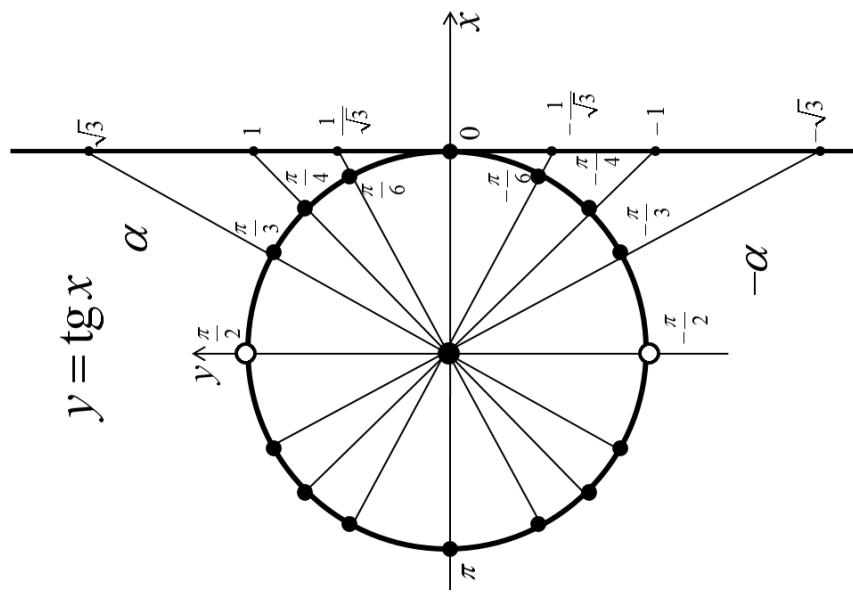
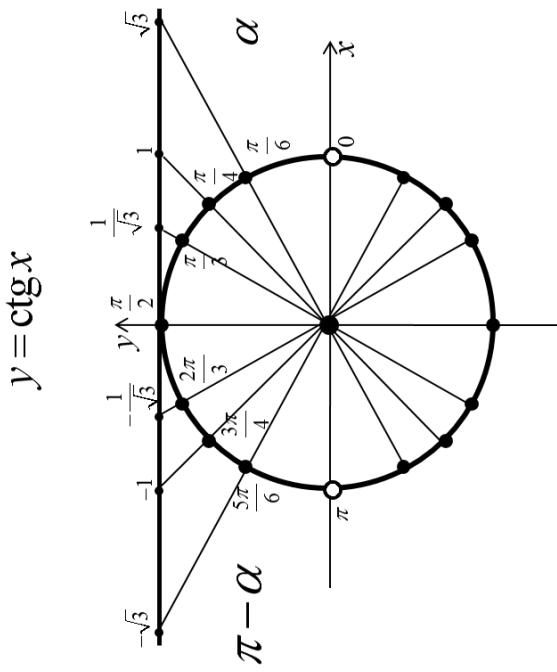


Рис. 16

Приложение 1





Приложение 2

Функция	Область определения	Множество значений	Четность	Основной период	Интервалы монотонности ($n \in \mathbf{Z}$)
$\sin x$	R	$[-1; 1]$	нечетная	2π	$\uparrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$ $\downarrow x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right).$
$\cos x$	R	$[-1; 1]$	четная	2π	$\uparrow x \in (\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n),$ $\downarrow x \in (2\pi n; \pi + 2\pi n).$
$\operatorname{tg} x$	$R \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \right\}$	R	нечетная	π	$\uparrow x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$
ctgx	$R \setminus \{\pi n\}$	R	нечетная	π	$\downarrow x \in (\pi n; \pi + \pi n).$

Функция	Область определения	Множество значений	Четность	Интервалы монотонности ($n \in \mathbf{Z}$)
$\arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	нечетная	возрастающая
$\arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	ни четная, ни нечетная	убывающая
$\operatorname{arctg} x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	нечетная	возрастающая
$\operatorname{arcctgx}$	R	$(0; \pi)$	ни четная, ни нечетная	убывающая

Вначале перечислим наиболее употребляемые тождества и формулы.

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z}; .$
3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z}; .$
4. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, x \neq \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z};$
5. $\sec x = \frac{1}{\cos x}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z};$

$$6. \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}, \quad x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z};$$

$$7. \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbf{Z};$$

$$8. \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi, n \in \mathbf{Z};$$

$$9. \quad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta.$$

$$10. \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

$$11. \quad \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

$$12. \quad \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$13. \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$14. \quad \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$15. \quad \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$16. \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$17. \quad \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$18. \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$19. \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

$$20. \quad \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha;$$

$$21. \quad \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha;$$

$$22. \sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha \mp \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}.$$

$$23. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$24. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$25. \operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}.$$

$$26. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$27. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)).$$

$$28. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)).$$

Формулы приведения.

	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin x$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos x$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} x$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-

ctgx	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	-	0
-----------------------	---	------------	---	----------------------	---	---	---

29. $\sin(\arcsin x) = x, \quad (-1 \leq x \leq 1);$

30. $\cos(\arccos x) = x, \quad (-1 \leq x \leq 1);$

31. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctgx}) = x, \quad (-\infty \leq x \leq \infty);$

32. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctgx}) = x, \quad (-\infty \leq x \leq \infty);$

33. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad (-1 \leq x \leq 1);$

34. $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad (-1 \leq x \leq 1);$

35. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctgx}) = \frac{1}{x}, \quad (-\infty \leq x \leq \infty);$

36. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctgx}) = \frac{1}{x}, \quad (-\infty \leq x \leq \infty);$

37. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (-1 < x < 1);$

38. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1];$

39. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 0) \cup (0; 1];$

40. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1);$

41. $\cos(\operatorname{arctgx}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$

42. $\sin(\operatorname{arcctgx}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

43. $\cos(\operatorname{arcctgx}) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}};$

$$44. \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$45. \arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \leq 1;$$

$$46. \arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \leq 1;$$

$$47. \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x;$$

$$48. \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x;$$

$$49. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2};$$

$$50. \operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Литература

1. 3000 конкурсных задач по математике / Куланин [и др.] – 9-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2006.
2. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М: Наука, 1974.
3. Ганеев Р.М. Обзорные лекции по элементарной математике. Алгебра и тригонометрия – Елабуга.: Изд-во Елабужского гос. пед. уни-та, 2004.
4. ЕГЭ-13.Математика: типовые экзаменационные варианты: 30 вариантов / под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: Национальное образование, 2012. – 192 с.
5. ЕГЭ-2013:Математика: самое полное издание типовых вариантов заданий / авт.-сост. И.В. Ященко, И.Р. Высоцкий; под ред. А.Л. Семенова, И.В. Ященко. – М.: АСТ: Астрель, 2013. – 94 с.
6. Зайцев В.В., Рыжков В.В., Сканави М.И. Элементарная математика. – М.: Наука, 1967.
7. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по решению задач школьной математики. Практикум по тригонометрии. – М.: «Просвещение», 1977.
8. Новосёлов С.И. Специальный курс тригонометрии. – М.: Изд-во «Высшая школа», 1967.
9. Попырин А.В., Савина Л.Н. Задачи по элементарной математике. Алгебра и тригонометрия – Елабуга.: Изд-во Елабужского гос. пед. уни-та, 2005.
10. Пособие по математике для поступающих в вузы (под редакцией М.Ф. Гильмуллина) – Елабуга.: Изд-во Елабужского гос. пед. ини-та, 1999.

