§ 2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Определение арифметической прогрессии. Пусть d – некоторое действительное число и $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ – заданная числовая последовательность. Если для каждого члена этой последовательности, начиная со второго, выполняется равенство $a_k = a_{k-1} + d$, $k \geq 2$, то такая последовательность называется *арифметической прогрессией*. При этом число d называется *разностью арифметической прогрессии*.

Таким образом, по определению

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots,\ a_k = a_{k-1} + d,\ \ldots .$$

Далее имеем

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Предположим, что $a_{k-1} = a_1 + ((k-1) - 1)d$. Тогда

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k - 1 - 1)d + d = a_1 + (k - 1)d.$$

Значит, $a_k = a_1 + (k - 1)d$ для всех натуральных значений k.

Полученная формула называется *формулой общего члена арифметической прогрессии.* Она выражает общий член прогрессии через его порядковый номер, первый член и разность арифметической прогрессии.

2. Свойства арифметической прогрессии.

1°. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних членов.

Доказательство. Следует показать, что $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ при всех $k \geq 2$. Если $k = 2$, то $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$. Действительно, $\frac{a_1+a_3}{2} = \frac{a_1+a_1+2d}{2} = \frac{2a_1+2d}{2} = a_1 + d = a_2$. Если же $k \geq 3$, то

$$\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} = \frac{a_1+(k-2)d+a_1+((k+1)-1)d}{2} = a_1 + (k-1)d = a_k.$$

2°. Если $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

Доказательство. Имеем

$$a_k + a_l = a_1 + (k - 1)d + a_1 + (l - 1)d =$$
$$= 2a_1 + (k + l - 2)d = 2a_1 + (m + n - 2)d =$$
$$= a_1 + (m - 1)d + a_1 + (n - 1)d = a_m + a_n.$$

3. Сумма первых n членов арифметической прогрессии. Сумму первых n членов арифметической прогрессии обозначим S_n, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Так как

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \text{ и}$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1,$$

складывая почленно последние два равенства, имеем

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Тогда из свойства 2° вытекает, что

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n.$$

Учитывая, что $a_n = a_1 + (n - 1)d$, можно получить еще одну формулу для суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n.$$

П р и м е р 1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11-ти членов этой прогрессии.

Р е ш е н и е. Имеем формулу $S_{11} = \frac{a_1+a_{11}}{2} \cdot 11$. Согласно свойству 2°, верно равенство $a_1 + a_{11} = a_3 + a_9$. Поэтому $S_{11} = \frac{a_3+a_9}{2} \cdot 11 = \frac{8}{2} \cdot 11 = 44$.

П р и м е р 2. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $1\frac{5}{9}$. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. По условию примера имеем

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\frac{5}{9}. \end{cases}$$

Используя формулу $2a_2 = a_1 + a_3$(см. свойство 1°), из первого уравнения системы получаем $a_2 = \frac{2}{3}$. Тогда данная система преобразуется в следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1\frac{1}{3}, \\ a_1^2 + a_3^2 = 1\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}$ или $a_1 = \frac{1}{3}, a_3 = 1$.

Таким образом, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ или $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ – искомые числа.