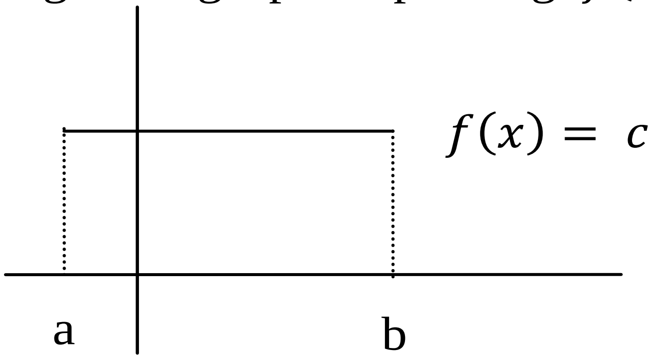
Distribusi Peubah Acak Khusus Kontinu

Distribusi Seragam *(Uniform)*

Misal X peubah acak dengan fungsi padat peluang $f(x) = c, a < x < b$



maka

$$\int_a^b f(x)\,dx = 1$$

$$\int_a^b c\,dx = 1$$

$$[cx]_a^b = 1$$

$$c(b-a) = 1$$

$$c = \frac{1}{b-a}$$

Sehingga fungsi padat peluang dari X

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\,,\quad a < x < b$$

Peubah acak X yang demikian dikatakan X berdistribusi seragam, dinotasikan $X \sim UNIF\ (a, b)$

Fungsi distribusi kumulatif dari peubah acak $X \sim UNIF\ (a, b)$

- Untuk $x \le a \rightarrow F(x) = 0$
- Untuk $a < x < b \rightarrow F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$

$$= \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \frac{x-a}{b-a}$$

- Untuk $x \ge b$

$$F(x) = \int_a^b f(t)\, dt + \int_b^x f(t)\, dt$$

$$= 1 + 0$$

$$= 1$$

Sehingga :

$$F(x; a, b) = \begin{cases} 0 & , x \le a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a < x < b \\ 1 & , x \ge b \end{cases}$$

Nilai harapan dari peubah acak X

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2(b-a)}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Dengan cara yang sama diperoleh :

- $E(X^2) = \frac{\left(b^2+ab+a^2\right)}{3}$

$$Var\,(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribusi Gamma

Fungsi Gamma dinotasikan dengan

$\Gamma(\kappa)\,, \kappa > 0$ didefinisikan sebagai: $\Gamma(\kappa) = \int_0^{\infty} t^{\kappa-1} e^{-t}\, dt$

Untuk $\kappa = 1$ maka :

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-t}\, dt = \lim_{a\to\infty} [-e^{-t}]_0^a = -\lim_{a\to\infty}\left(\frac{1}{e^a} - e^0\right) = 1$$

Jadi, $\Gamma(1) = 1$

Teorema 3.3.1

- $\Gamma(\kappa) = (\kappa - 1)\Gamma(\kappa - 1)\ ,\ \ \kappa > 1$

  Bukti:

$$\Gamma(\kappa) = \int_0^\infty t^{\kappa-1} e^{-t}\, dt$$

Misal : $u = t^{\kappa-1}$ $\qquad dv = e^{-t}\, dt$

$du = (\kappa - 1)t^{\kappa-2}\, dt$ $\qquad v = -e^{-t}$

$$\begin{aligned}
\Gamma(\kappa) &= \int_0^\infty t^{\kappa-1} e^{-t}\, dt \\
&= uv - \int v\, du \\
&= \left[t^{\kappa-1}e^{-t} + \int e^{-t}(\kappa-1)t^{\kappa-2}\, dt\right]_0^\infty \\
&= [-t^{\kappa-1}e^{-t}]_0^\infty + (\kappa-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{\kappa-2}\, dt \\
&= 0 + (\kappa-1)\int_0^\infty e^{-t}t^{(\kappa-1)-1}\, dt \\
&= (\kappa-1)\Gamma(\kappa-1)
\end{aligned}$$

- $\Gamma(n) = (n-1)!\ ,\ \ n = 1,2,\ldots$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Gamma dengan parameter $\theta > 0, \kappa > 0$ jika mempunyai fungsi padat peluang

$$f(x;\theta,\kappa) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Peubah acak X berdistribusi Gamma dengan parameter $\theta > 0, \kappa > 0$ dinotasikan dengan $X \sim GAM(\theta, \kappa)$

Teorema 3.3.2

Jika $X \sim GAM\,(\theta, n)$ dimana n adalah bilangan bulat positif,

$$F(x;\ \theta, n) = 1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\left(\frac{x}{\theta}\right)^{t}}{i!}\ e^{-\frac{x}{\theta}}$$

- $E(X) = \ \kappa\theta$
- $E(X^2) = \ \theta^2\kappa(1+\kappa)$
- $Var\,(X) = \theta^2\kappa(1+\kappa) - (\kappa\theta)^2 = \kappa\theta^2$
- MGF dari $X \sim GAM\,(\theta, \kappa)$

$$M_X(t) = \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} \int_0^{\infty} x^{\kappa-1} e^{\left(t-\frac{1}{\theta}\right)x}\ dx$$

Substitusi $u = \ -\left(t - \frac{1}{\vartheta}\right)x$ diperoleh $M_X(t) = (1-\theta t)^{-\kappa}$, $t < \frac{1}{\theta}$

- Turunan ke-r pada kasus ini adalah:

$$M^{(r)}{}_X(t) = \frac{\Gamma(\kappa + r)}{\Gamma(\kappa)}\theta^r(1-\theta t)^{-\kappa-r}$$

$$M^{(r)}{}_X(0) = E(X^r)$$

$$= \frac{\Gamma(\kappa + r)}{\Gamma(\kappa)}\theta^r$$

Distribusi Eksponensial

Jika X berdistribusi gamma dengan $\kappa = 1$, maka fungsi padat peluangnya adalah

$$f(x;\,\theta,\kappa) = \frac{1}{\theta^{\kappa}\Gamma(\kappa)} x^{\kappa-1} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

$$\kappa = 1\,,\, sehingga\; f(x;\,\theta,1) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}$$

Peubah acak X yang berdistribusi Gamma dengan $\kappa = 1$ yang demikian disebut berdistribusi Eksponensial dengan parameter $\theta > 0$ dinotasikan dengan $X \sim EXP\,(\theta)$

Fungsi padat peluang dari $X \sim EXP(\theta)$ adalah

$$f(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} & , x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatif dari $X \sim EXP\ (\theta)$

$F(X;\ \theta) = \ 1 - e^{-\frac{x}{\theta}},\ x > 0$ (tunjukkan!)

Peubah Acak kontinu, $X \sim EXP\ (\theta)$ jika dan hanya jika:

$P[X > a + t|X > a] = P[X > t]$, untuk semua $a > 0$ dan $t > 0$ (buktikan!)

- $E(X) = \theta$
- $Var\ (X) = \theta^2$
- MGF dari $X \sim EXP\ (\theta)$:

$$M_x(t) = \frac{1}{1 - \theta t}$$

Teorema 3.3.3

Peubah Acak kontinu, $X \sim EXP\ (\theta)$ jika dan hanya jika:

$P[X > a + t | X > a] = P[X > t]$, untuk semua $a > 0$ dan $t > 0$

(buktikan!)

- $E(X) = \theta$
- $Var\ (X) = \theta^2$
- MGF dari $X \sim EXP\ (\theta)$:

$$M_x(t) = \frac{1}{1 - \theta t}$$

Distribusi Weibull

Peubah Acak X dikatakan berdistribusi Weibull dengan parameter $\beta > 0$ dan $\theta > 0$, dinotasikan sebagai $X \sim WEI\,(\theta, \beta)$

Fungsi padat peluang dari $\sim WEI\,(\theta, \beta)$:

$$f(x;\, \theta, \beta) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} x^{\beta - 1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \quad ; x > 0$$

Fungsi distribusi kumulatif dari $X \sim WEI\,(\theta, \beta)$:

$$F(x;\, \theta, \beta) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} \;;\, x > 0$$

Jika $\beta = 2$ disebut Distribusi Rayleigh.

Nilai harapan dari $X \sim WEI\ (\theta, \beta)$:

$$E(X) = \frac{\beta}{\theta^{\beta}} \int_0^{\infty} x^{1+\beta-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}} dx$$

Substitusi $t = \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\beta}$ diperoleh $E(X) = \theta\Gamma\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$

- $E(X^2) = \theta^2\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$
- $Var\ (X) = \theta^2\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{\beta}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]$
- Persentil ke-p

$$x_p = \theta[-\ln(1-p)]^{\frac{1}{\beta}}$$

Distribusi Pareto

Notasi $X \sim PAR\ (\theta, \kappa)$

Fungsi padat peluang dari $X \sim PAR\ (\theta, \kappa)$:

$$f(x;\ \theta,\kappa) = \begin{cases} \dfrac{\kappa}{\theta}\left(1+\dfrac{x}{\theta}\right)^{-(\kappa+1)} & , x > 0 \\ 0 & , x \text{ yang lain} \end{cases}$$

Fungsi distribusi kumulatif (CDF) dari $X \sim PAR\ (\theta, \kappa)$

$$F(x;\ \theta,\kappa) = 1 - \left(1+\frac{x}{\theta}\right)^{-\kappa}; \qquad x > 0$$

- $E(X) = \dfrac{\theta}{\kappa - 1}$
- $Var\,(X) = \dfrac{\theta^2 \kappa}{[(\kappa-2)(\kappa-1)^2]}$
- Persentil ke-p :

  $$Xp = \theta\left[(1-p)^{-\frac{1}{\kappa}} - 1\right]$$

Distribusi Normal

Notasi $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Fungsi padat peluang dari $X \sim N(\mu, \sigma^2)$:

$$f(x;\ \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}}$$

Untuk $-\infty < x < \infty$ dimana $-\infty < \mu < \infty$ dan $0 < \sigma < \infty$

- $E(X) = \mu$
- $E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2$
- $Var\,(X) = E(X^2) - \mu^2$

$$= (\mu^2 + \sigma^2) - \mu^2$$

$$Var\,(X) = \sigma^2$$

Teorema 3.3.4

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, maka:

1. $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$
2. $F_x(X) = \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$

Teorema 3.3.5

Jika $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, Maka:

$$M_X(t) = e^{\frac{\mu t + \sigma^2 t^2}{2}}$$

$$E(X-\mu)^{2r} = \frac{(2r)!\,\sigma^{2r}}{r!\,2^r} \qquad ,r = 1,2,\ldots$$

$$E(X-\mu)^{2r-t} = 0 \qquad ,r = 1,2,\ldots$$

Latihan

- Kerjakan soal latihan hal 132 – 134 (Bain) No: 40,51, 55

TERIMA KASIH