Sifat- sifat Nilai Harapan

Ingat Nilai Harapan

$$E(X) = \sum_x x.\,f(x), \text{ X diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\; dx, \text{ X kontinu}$$

Sifat-sifat nilai harapan :

1. Jika X peubah acak dengan pdf f(x), u(x) fungsi bernilai riil.

$$E(u(X)) = \sum_x u(x).f(x), \text{ X diskrit}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u(x).f(x)dx, \text{ X kontinu}$$

Misal X peubah acak dengan pdf

$$f(x) = \begin{cases} 12(1-x)x^2, 0 < x < 1 \\ 0, \text{ untuk x yang lain} \end{cases}$$

Tentukan $E(X^2)$

Jawab :

$u(x) = x^2$

$$E(u(X)) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

$$= \int_0^1 x^2 . 12(1-x)x^2 dx$$

$$= 12 \int_0^1 x^4 - x^5 dx$$

$$= \left[12 \left(\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6\right)\right]_0^1$$

$=12\left(\frac{1}{30}\right)$

$= \frac{2}{5}$

2. Jika X peubah acak dengan pdf f(x), a, b konstan, g(x) dan h(x) fungsi bernilai riil, maka :

$$E[a.g(X) + b.h(X)] = a.E[g(X)] + b.E[h(X)]$$

Bukti :

$$E[a.g(X) + b.h(X)] = \int \left(a\left(g(x)\right) + b\left(h(x)\right)\right) f(x)dx$$

$$= \int a\, g(x)f(x)dx + \int b.h(x)f(x)dx$$

$$= a \int g(x)f(x)dx + b \int h(x)f(x)dx$$

$$= a.E\left(g(X)\right) + b.E\left(h(X)\right)$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

Bukti :

$$E[aX + b] = \int_{-\infty}^{\infty} (ax + b) f(x) dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} axf(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} bf(x)dx$$

$$= a \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

$$= a\,E(X) + \ b$$

Jadi, terbukti.

A. Varians/Ragam

Misal X peubah acak, varians peubah acak X didefinisikan :

$$Var(X) = E(X - \mu)^2$$

$$\sigma_X{}^2 = E(X - \mu)^2$$

Teorema 2.4.3

$$\sigma_X{}^2 = E(X^2) - (E(X))^2 \text{ atau } E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$$

Bukti :

$$\sigma_x{}^2 = E(X - \mu)^2$$

$$= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2), E(X) = \mu_X$$

$$= E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2$$

$$= E(X^2) - \mu^2$$

$$\sigma_x{}^2 = E(X^2) - (E(X))^2$$

Jadi, terbukti.

Teorema 2.4.4

$$Var(aX + b) = a^2.Var(X)$$

Bukti :

$$Var(aX + b) = E((aX + b) - E(aX + b))^2$$

$$= E(aX + b - (a\mu + b))^2$$

$$= E(aX + b - a\mu - b)^2$$

$$= E\left(a(X - \mu)\right)^2$$

$$= a^2E(X - \mu)^2$$

$$Var(aX + b) = a^2.Var(X)$$

Jadi, terbukti.

B. Momen

Definisi

Momen ke-k terhadap titik asal (O) dari peubah acak X

$$\mu'_k = E(X^k)$$

Contoh :

$E(X)$ = momen pertama terhadap titik asal

$E(X^2)$ = momen kedua terhadap titik asal

Dan momen ke-k terhadap rataan (μ) dari peubah acak X

$$\mu_k = E(X-\mu)^k$$
$$= E(X-E(X))^k$$

Misal :

$\mu_1 = E(X-\mu) = E(X)-\mu = 0$

$\mu_2 = E(X-\mu)^2 = \sigma_X{}^2$

Jadi, $Var(X) = E(X-\mu)^2$ adalah momen kedua terhadap rataan

C. FUNGSI PEMBANGKIT MOMEN

Misal X peubah acak, fungsi pembangkit momen dari peubah acak X didefinisikan sebagai

$$M_X(t) \equiv E(e^{tX}), -h < t < h, h > 0$$

Sehingga,

$M_X(t) \equiv \sum_x e^{tx} f(x)$, X diskrit

$\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$, X kontinu

Hubungan momen dan Fungsi Pembangkit Momen

Misal X peubah acak diskrit

$$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$$

Jika fungsi pembangkit momen

$M_X(t) = \sum_x e^{tx} f(x)$ diturunkan terhadap t,

- $M'_X(t) = \sum_x e^{tx} x f(x)$

  $t = 0 \rightarrow\ M'_X(0) = \sum_x x f(x)$

  $= E(X) = \mu = \mu'$

- $M''_x(t) = \sum_x x^2 e^{tx} f(x)$

  $t = 0 \rightarrow\ M''_x(0) = \sum_x x^2 f(x)$

  $= E(X^2) = \mu'_2$

- $M'''_x(t) = \sum_x x^3 e^{tx} f(x)$

  $t = 0 \rightarrow\ M'''_x(0) = E(X^3) = \mu'_3$

Teorema 2.5.1

Jika MGF dari peubah acak X ada,

$E(X^r) = M_X{}^r(0)$, untuk r=1,2,3,...

Misal X peubah acak dengan MGF $M_X(t)$ ada

$Y = aX + b, M_Y(t)$=?

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= E(e^{tY}) \\
&= E(e^{t(aX+b)}) \\
&= E(e^{atX}.e^{bt}) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{taX+bt} f(x)dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_Y(t) &= e^{bt} \int_{-\infty}^{\infty} e^{atx} f(x)dx \\
&= e^{bt} E(e^{atX}) \\
&= e^{bt} M_X(at)
\end{aligned}
$$

Sifat Keunikan Fungsi Pembangkit Momen

Jika X_1, X_2 mempunyai CDF F_1, F_2 dan MGF $M_{X_1}(t), M_{X_2}(t)$ maka:

$$F_1 \equiv F_2 \Leftrightarrow M_{X_1}(t) \equiv M_{X_2}(t)$$

Exercise (Halaman 87)

24. Let X be continous with pdf $f(X) = 3x^2$ if $0 < x < 1$ dan zero otherwise.

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & ;\ 0 < x < 1 \\ 0 & ;\ \text{x yang lain} \end{cases}$$

Find:

a. $E(X) = \int_0^1 x\, f(x) dx$

$$= \int_0^1 x\ 3x^2\ dx = \int_0^1 3x^3\ dx = \left[\frac{3}{4} x^4\right]_0^1 = \frac{3}{4}$$

b. $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

$$= \int_0 x^2 . 3x^2 \, dx - \left(\frac{3}{4}\right)^2$$

$$= \int_0^1 3x^4 \, dx - \frac{9}{16}$$

$$= \left[\frac{3}{5} x^5\right]_0^1 - \frac{9}{16}$$

$$= \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{3}{80}$$

c. $E(X^r) = \int_0^1 x^r \, 3x^2 \, dx$

$$= \int_0^1 3x^{2+r} \, dx = 3 \int_0^1 x^{r+2} \, dx = 3 \left[\frac{1}{r+3} x^{r+3}\right]_0^1 = \frac{3}{r+3}$$

d. $E(3X - 5X^2 + 1) = \int_0^1 (3x - 5x^2 + 1)(3x^2) \, dx$

$$= \int_0^1 9x^3 - 15x^4 + 3x^2 \, dx = \left[\frac{9}{4}x^4 - 3x^5 + x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

Tugas

Kerjakan soal dari buku Bain hal 87 – 88 no 26,27,36

TERIMA KASIH