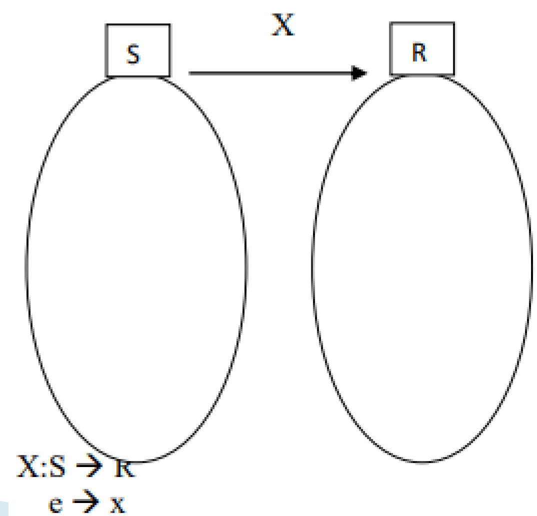
Peubah Acak

Masalah 1

- Suatu percobaan mengamati 3 alat elektronik dilakukan, untuk mengamati apakah alat-alat elektronik tersebut masih bagus atau sudah cacat. Tentukan ruang sampel percobaan tersebut
- Gambarkan fungsi yang menyatakan banyak alat elektronik yang cacat pada percobaan di atas.

Definisi

- Peubah acak X adalah fungsi yang memasangkan setiap anggota ruang sampel dengan tepat satu bilangan real, yaitu X(e) ϵ Ŕ untuk setiap e ϵ S
- Peubah acak X adalah fungsi bernilai riil dengan domain ruang sampel S



Contoh 1

Dari masalah 1 maka :

Ruang sampel S = {BBB, BBC, BCB, CBB, CCB, CBC, BCC, CCC}.

Misal X peubah acak yang menyatakan banyak peralatan yang cacat, maka nilai–nilai dari X, dituliskan x= 0, 1, 2, 3

Himpunan nilai nilai yang mungkin dari peubah acak X dinyatakan dengan

X(S) = {0, 1, 2, 3}

Contoh 2

- Percobaan memancing boneka
- Misal X peubah acak yang menyatakan banyak percobaan sampai berhasil
- Nilai-nilai X adalah : $x = 1, 2, 3, \ldots$
- Himpunan nilai-nilai X yang mungkin
- $X(S) = \{ 1, 2, 3, \ldots \}$

Contoh 3

Percobaan mengamati bayi lahir normal

Misal X menyatakan berat badan bayi lahir dalam kg.

Maka nilai X yang mungkin adalah (2 ; 4,5)

Peubah Acak Diskrit dan Kontinu

- Peubah acak dengan himpunan nilai yang mungkin merupakan himpunan terhitung (cauntable) baik berhingga maupun tak hingga disebut peubah acak diskrit (contoh 1, 2)
- Peubah acak dengan himpunan nilai yang mungkin merupakan himpunan tak terhitung (uncauntable) baik berhingga maupun tak hingga disebut peubah acak Kontinu (contoh 3)

Masalah 4

Pada percobaan mengamati 3 alat elektronik untuk mengamati apakah alat-alat elektronik tersebut masih bagus atau sudah cacat. Berapakah peluang bahwa:

1. terdapat satu alat cacat?
2. terdapat dua alat cacat?
3. tidak ada alat yang cacat?
4. terdapat 4 alat yang cacat?
5. Buatlah tabel nilai-nilai peluang untuk setiap nilai yang mungkin
6. Buatlah grafik nilai-nilai peluang pada no 5
7. Buatlah tabel nilai-nilai peluang kumulatif pada no 5.
8. Buatlah grafik nilai-nilai peluang kumulatif no 7

Peubah Acak Diskrit

- Definisi:

  Misal X peubah acak diskrit dengan nilai-nilai yang mungkin $x_1, x_2, ..., x_n$ atau, $x_1, x_2, \ldots$

  Fungsi $f(x) = P(X = x)$, untuk $x = x_1, x_2, ...$

  disebut fungsi padat peluang diskrit (pdf) dari peubah acak X

  Untuk selanjutnya $f(x)$ disebut fungsi peluang peubah acak X

Teorema

$f(x)$ merupakan fungsi peluang peubah acak diskrit X jika hanya jika

$$\forall x, f(x) \geq 0$$

$$\sum_x f(x) = 1$$

Fungsi Distribusi Kumulatif (CDF)

- **Definisi.** Fungsi distribusi kumulatif untuk peubah acak diskret X didefinisikan sebagai

$$F(x) = P(X \le x)$$

untuk sembarang x nilai peubah acak X

.

Teorema

Diketahui peubah acak diskret X dengan fungsi peluang $f(x)$, dan F(x) fungsi distribusi kumulatif dari X. Jika nilai-nilai dari peubah acak X dapat disusun dalam susunan yang meningkat yaitu

$x_1 < x_2 < x_3, \ldots,$ maka

$f(x_1) = F(x_1)$

dan untuk sembarang i > 1,

$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$

Selanjutnya, untuk $x < x_1$, maka $F(x) = 0$, serta untuk sembarang bilangan real x

$$F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$$

dengan $x_i \le x$.

Teorema:
Fungsi F(x) merupakan CDF dari peubah Acak X jhj memenuhi

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$$

$$a < b \text{ implies } F(a) \leqslant F(b)$$

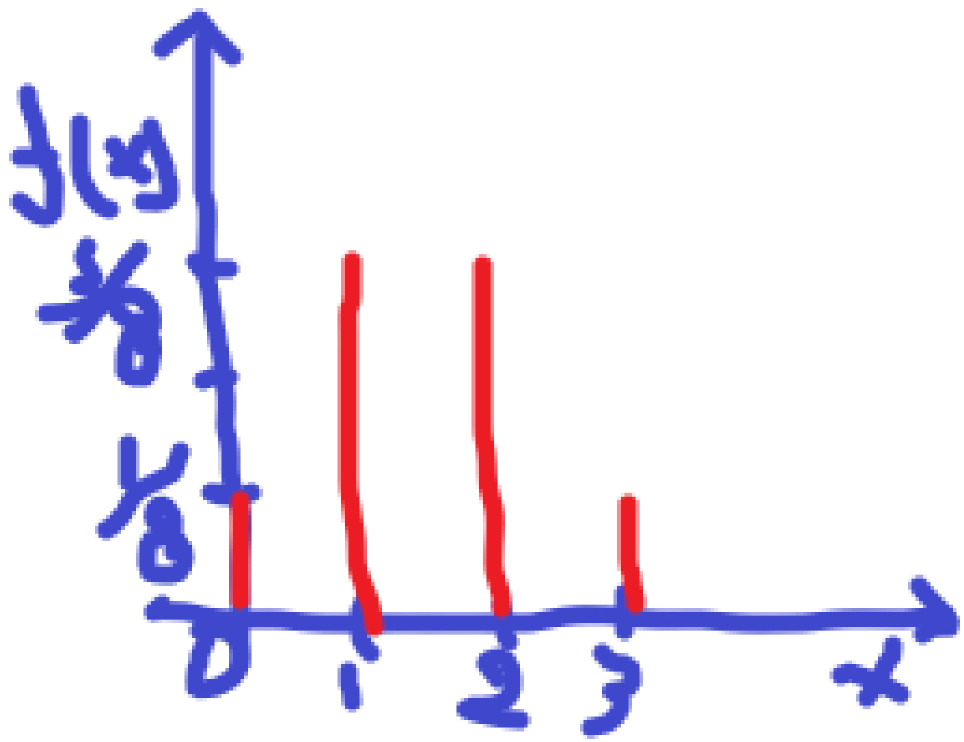
Jawaban masalah 4

- S = {BBB, BBC, BCB, CBB, CCB, CBC, BCC, CCC}.
- Peluang terdapat satu alat cacat $=\frac{3}{8}$
- Peluang terdapat dua alat cacat = ...
- Peluang tidak terdapat alat cacat = ...
- Peluang terdapat empat alat cacat = ...
- Jika p.a X: banyak alat yang cacat, maka nilai-nilai yang mungkin dari X dinyatakan dengan x = 0,1,2,3

- Tabel nilai peluang untuk setiap nilai yang mungkin

x	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

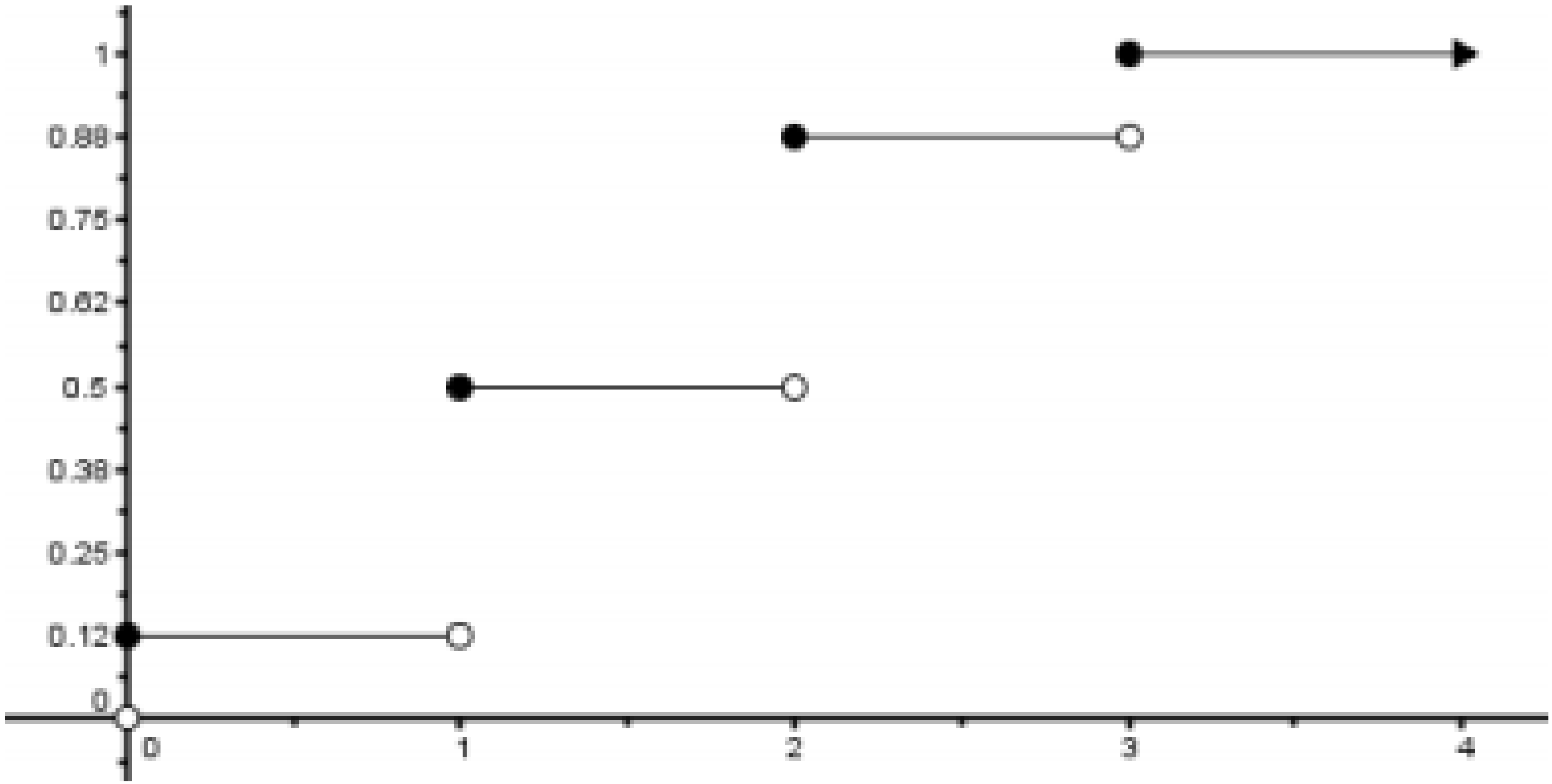
Grafik fungsi peluang



Tabel Fungsi distribusi Kumulatif

x	0	1	2	3
F(x)=P(X≤x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{8} = 1$

Grafik Fungsi Distribusi Kumulatif



Nilai Harapan

- Jika X peubah acak diskrit dengan fungsi peluang *f*(x), nilai harapan peubah acak diskrit X didefinisikan sebagai

$$E(X) = \sum_{x} x f(x)$$

Dari masalah 4, nilai harapan peubah acak X adalah

$$E(X) = \sum_{x} x.f(x)$$

$$= 0.f(0) + 1.f(1) + 2.f(2) + 3.f(3)$$

$$= 0 + \frac{3}{8} + 2.\frac{3}{8} + 3.\frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{12}{8}$$

Peubah Acak Kontinu

- **Definisi:**

  X disebut sebagai peubah acak kontinu, jika ada suatu fungsi $f(x)$ yaitu fungsi peluang dari X sehingga fungsi distribusi kumulatif F(x) dapat dinyatakan sebagai

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Dengan menggunakan kalkulus diperoleh

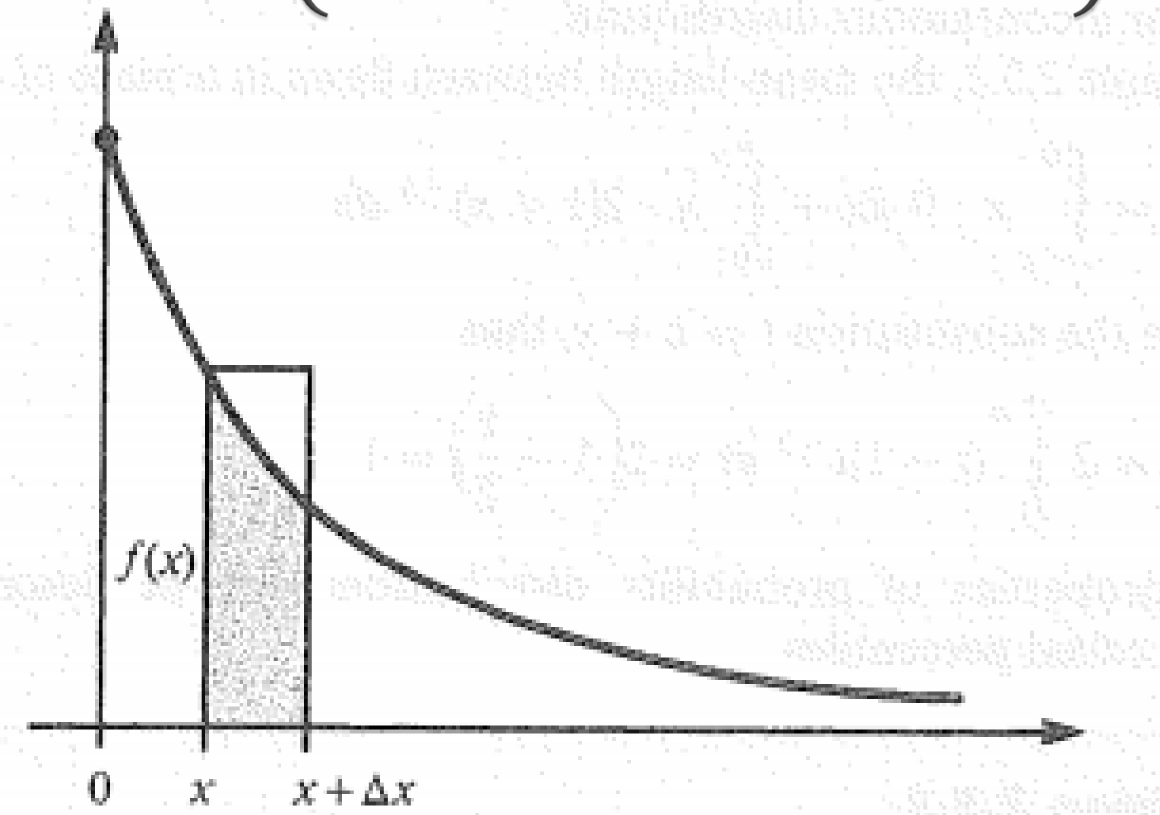
$$f(x) = \frac{d}{dx} F(x) = F'(x)$$

Demikian juga

$$P[a < X \leqslant b] = P[a \leqslant X < b] = P[a < X < b]$$
$$= P[a \leqslant X \leqslant b]$$

and each of these has the value $F(b) - F(a)$.

Gambar $P(x < X < x + \Delta x)$



$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Teorema

A function $f(x)$ is a pdf for some continuous random variable X if and only if it satisfies the properties

$$f(x) \geqslant 0 \tag{2.3.4}$$

for all real x, and

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \tag{2.3.5}$$

Nilai Harapan

If X is a continuous random variable with pdf $f(x)$, then the **expected value** of X is defined by

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx \tag{2.3.9}$$

if the integral in equation (2.3.9) is absolutely convergent. Otherwise we say that $E(X)$ does not exist.

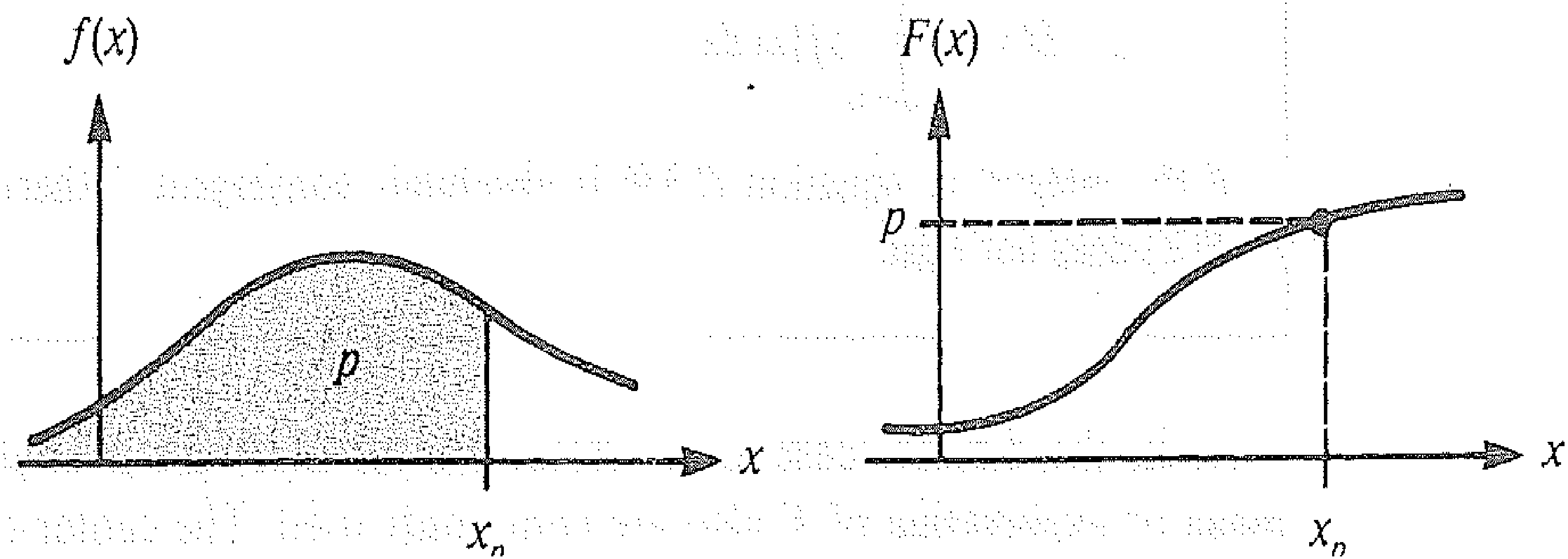
Persentil

Definition 2.3.3

If $0 < p < 1$, then a $100 \times p$th percentile of the distribution of a continuous random variable X is a solution x_p to the equation

$$F(x_p) = p \tag{2.3.10}$$

A 100 × pth percentile



Modus

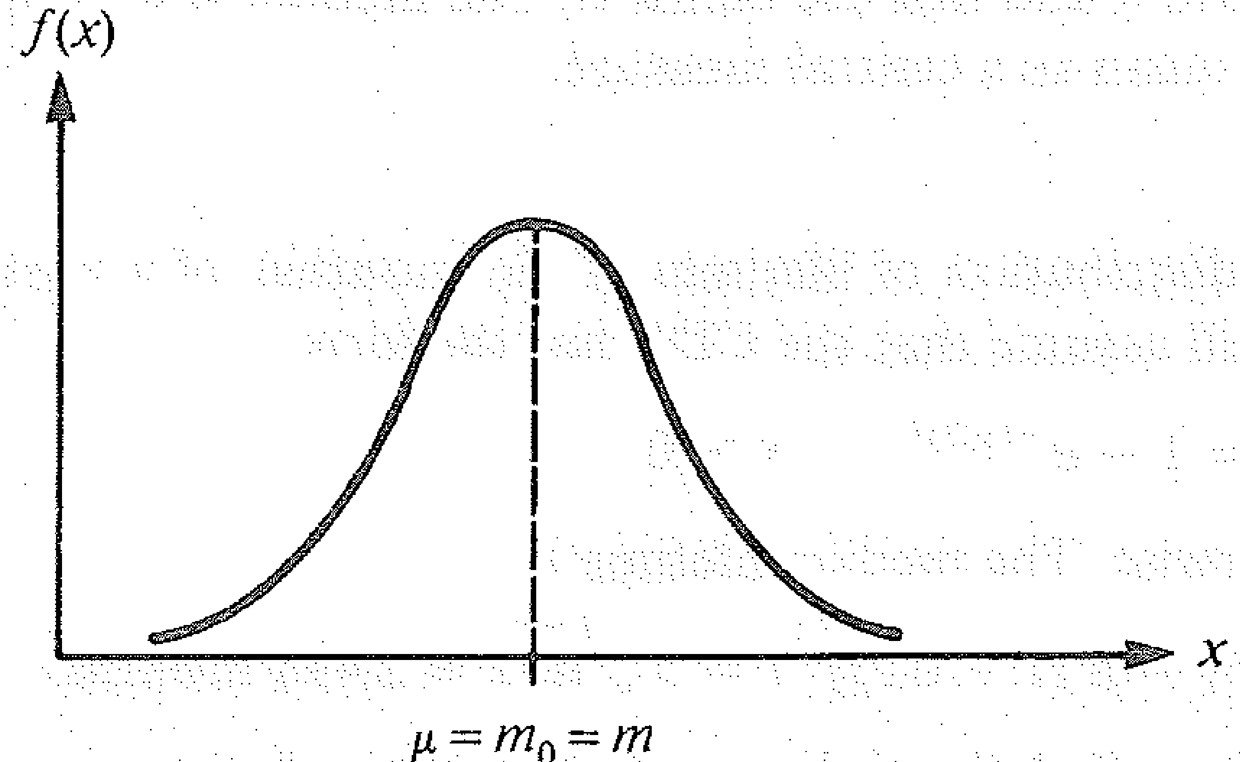
Definition 2.3.4

If the pdf has a unique maximum at $x = m_0$, say max $f(x) = f(m_0)$, then m_0 is called the mode of X.

Definition 2.3.5

A distribution with pdf $f(x)$ is said to be symmetric about c if $f(c - x) = f(c + x)$ for all x.

The pdf of a symmetric distribution



Contoh (Bain, hal 85)

A continuous random variable X has pdf given by $f(x) = c(1 - x)x^2$ if $0 < x < 1$ and zero otherwise.

(a) Find the constant c.

(b) Find $E(X)$.

Penyelesaian

12.
$$f(x) = \begin{cases} c\,(1-x)x^2, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{x yang lain} \end{cases}$$

a. $1 = \int_0^1 f(x)dx$

$$1 = \int_0^1 c(1-x)x^2 dx$$
$$1 = c\int_0^1 (x^2 - x^3)dx$$
$$1 = c\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^1$$
$$1 = c\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$1 = c\left(\frac{1}{12}\right)$$
$$c = 12$$

b. $E(X) = \int_0^1 x.f(x)dx$

$$= \int_0^1 x.c(1-x)x^2 dx$$
$$= \int_0^1 x.12(1-x)x^2 dx$$
$$= \int_0^1 (12x^3 - 12x^4)dx$$
$$= \left[3x^4 - \frac{12}{5}x^5\right]_0^1$$
$$= 3 - \frac{12}{5} = \frac{3}{5}$$

A continuous random variable X has a pdf of the form $f(x) = 2x/9$ for $0 < x < 3$, and zero otherwise.

(a) Find the CDF of X.

(b) Find $P[X \leqslant 2]$.

(c) Find $P[-1 < X < 1.5]$.

(d) Find a number m such that $P[X \leqslant m] = P[X \geqslant m]$.

(e) Find $E(X)$.

Penyelesaian

18\. a. $f(x) = \frac{2x}{9}, 0 < x < 3,\ f(x) = 0\ untuk\ x\ yang\ lain.$

CDF of X ,

Untuk $x < 0$ maka $F(x) = 0$

Untuk $0 < x < 3$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt$$

$$= \int_0^x \frac{2}{9} t\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{9} t^2\right]_0^x$$

$$= \frac{x^2}{9}$$

9

Untuk $x > 3$

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_{0}^{3} f(t)dt + \int_{3}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{0}^{3} \frac{2}{9} t \, dt + 0$$

$$= \left[\frac{t^2}{9}\right]_0^3$$

$$= 1$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{x^2}{9}, 0 < x < 3 \\ 1, x \geq 3 \end{cases}$$

b. $P[X \leq 2]$ =F(2) = $\frac{4}{9}$

c. **Cara 1**

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}[-1 < X < 1{,}5] &= \mathrm{P}[-1 < X < 0] + \mathrm{P}[0 < X < 1{,}5] \\
&= \int_{-1}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{1{,}5} \frac{2x}{9}\, dx \\
&= 0 + \left[\frac{x^2}{9}\right]_0^{1{,}5} \\
&= \frac{2{,}25}{9}
\end{aligned}
$$

Cara 2

$$
\begin{aligned}
P(-1 < X < 1{,}5) &= P(X < 1{,}5) - P(X < -1) \\
&= F(1{,}5) - F(-1) \\
&= \frac{1{,}5^2}{9} - 0 \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

d. $P[X \leq m] = P[X \geq m]$

$P[X \leq m] = 1 - P[X \leq m]$

Cara 1

$$P[X \leq m] = \frac{1}{2}$$

$$\int_{0}^{m} \left(\frac{2x}{9}\right) dx = \frac{1}{2}$$

$$\left[\frac{1}{9}x^2\right]_0^m = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9}m^2 = \frac{1}{2}$$

$$m^2 = \frac{9}{2}$$

$$m = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ atau $m = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (tidak memenuhi)

Sehingga, $m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Cara 2

$$P[X \leq m] = F(m) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{m^2}{9} = \frac{1}{2}$$

$$m^2 = \frac{9}{2}$$

$$m = \pm\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

$m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ atau $m = -\frac{3}{2}\sqrt{2}$ (tidak memenuhi)

Sehingga, $m = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

TERIMA KASIH