

Restauration des images

Saïd Ladjal (said.ladjal@telecom-paris.fr)

Position du problème

- Les images acquises subissent des dégradations.
- Ces dégradations sont dues, d'une part au capteur et d'autre part aux conditions de prise de vue.

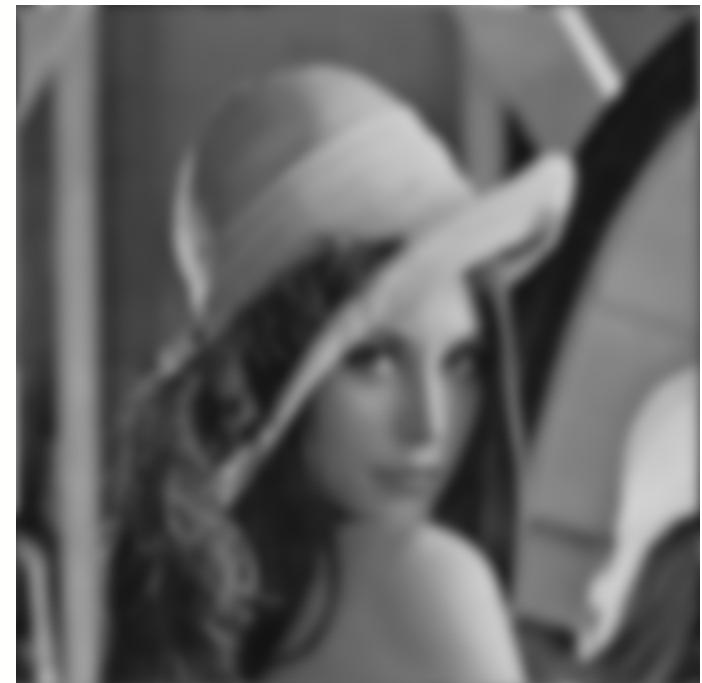
Les défauts: Le bruit

- Le bruit est une erreur de mesure pour chaque pixel.
- Il a différentes sources (essentiellement):
 - Bruit de lecture (uniforme)
 - Bruit photonique (dépend de la luminosité)



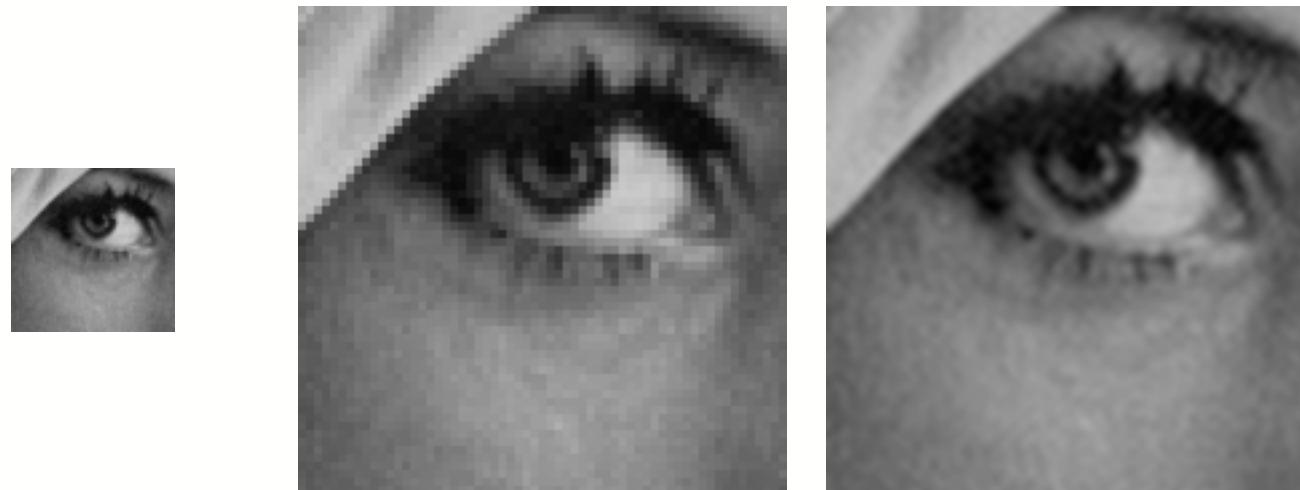
Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:
 - Optique (mise au point)
 - Turbulence atmosphérique
 - Mouvement
 - Diffraction



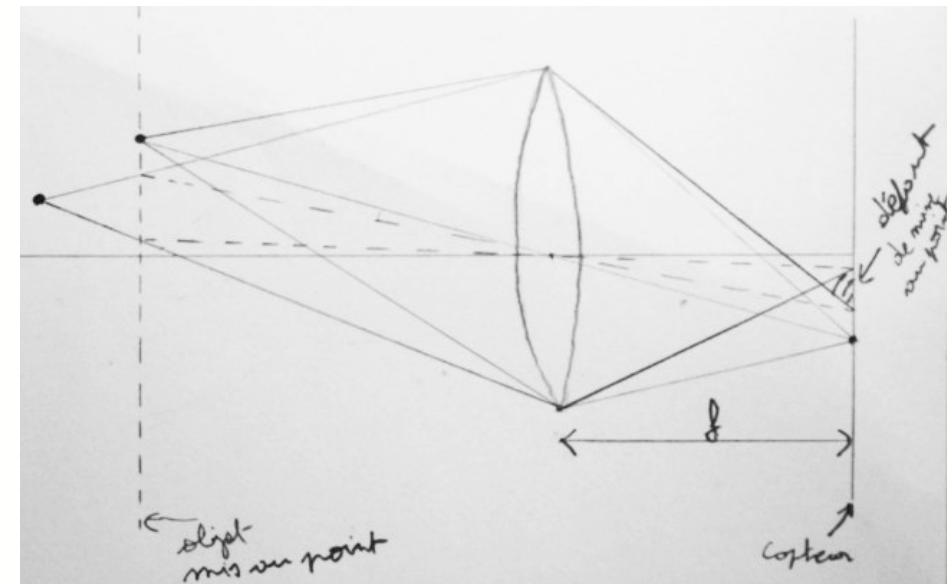
Les défauts: Le flou

Il y a toujours un flou minimal de la taille du pixel



Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:
 - Optique (mise au point)
 - Turbulence atmosphérique
 - Mouvement
 - Diffraction



Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)

- **Turbulence atmosphérique:** modèle: $G(x, y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}}$

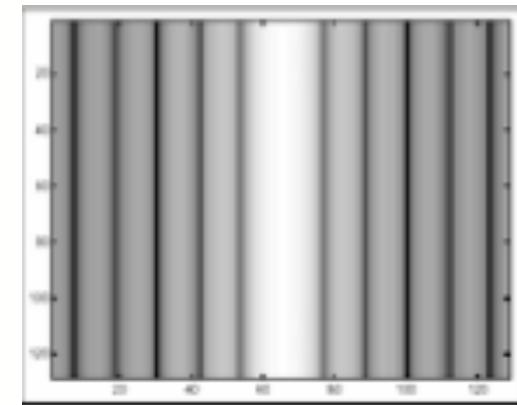
- Mouvement

- Diffraction

Les défauts: Le flou

- Le flou a plusieurs sources:

- Optique (mise au point)
- Turbulence atmosphérique
- Mouvement
- Diffraction



Les défauts: Le flou

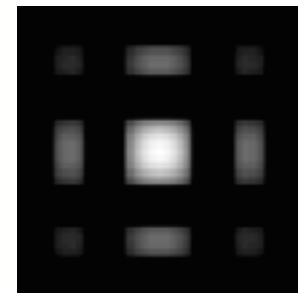
- Le flou a plusieurs sources:
 - Optique (mise au point)
 - Turbulence atmosphérique
 - Mouvement
- Diffraction

$$\theta \approx 1,12 \frac{\lambda}{D}$$

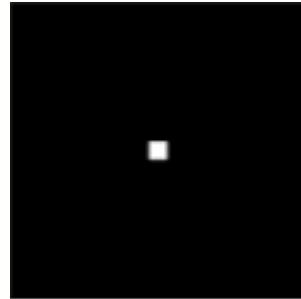
D : Ouverture

λ : Longueur d'onde

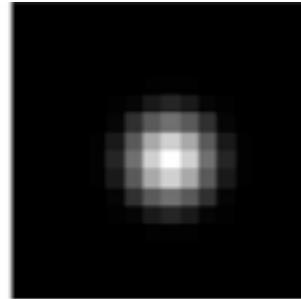
θ : Angle de diffraction



Exemples



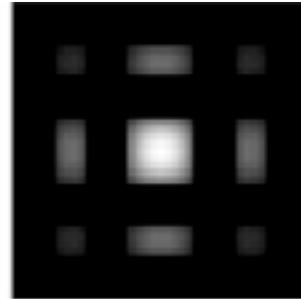
Ponctuel



Gauss



Bougé



Diffraction



Originale



Gaussien



Bougé

10

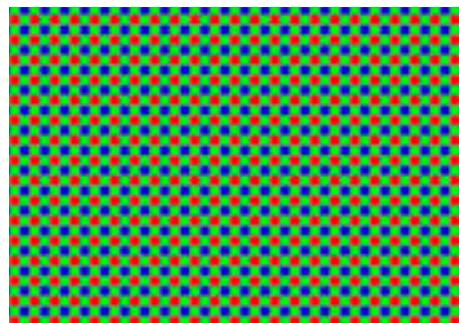
Les défauts: Aberrations géométriques

- La géométrie de la photographie ne correspond pas à une projection sur un plan.
- Il suffit de déformer l'image en utilisant une bonne interpolation.



Les défauts: Mauvais échantillonnage

- Il se compare à la capacité de l'optique qui est limitée par la diffraction.



La matrice de Bayer induit naturellement un sous-échantillonnage.

- En général tous les défauts sont présents:
 - Le flou (au moins le pixel et la diffraction).
 - Un flou souvent variable sur l'image.
 - Le bruit surtout en cas de mauvaise illumination.
 - Sous-échantillonnage (sauf si le flou est fort).

Le défaut est-il uniforme?



Modélisation pour la suite

$$g = f * K + b$$

f : image parfaite

g : observation

K : Noyau de flou

b : bruit, supposé uniforme et indépendant du signal

Qu'est-ce que l'image parfaite?

Modélisation pour la suite: Continu/discret

- Le théorème de Shannon de bon échantillonnage permet un passage sans perte du discret au continu.
- Le caractère fini des images traitées implique de faire une hypothèse sur la continuation des images hors de leur support connu: **On fera l'hypothèse de périodicité pour simplifier la présentation.**

Modélisation pour la suite: Continu/discret

On peut donc, en négligeant le sous-échantillonnage,
dire que le problème se présente comme:

$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien

L'hypothèse de périodicité implique que la matrice A est circulante et diagonalisable dans la base de Fourier

Résolution: Inverser A?



$$A \longrightarrow$$

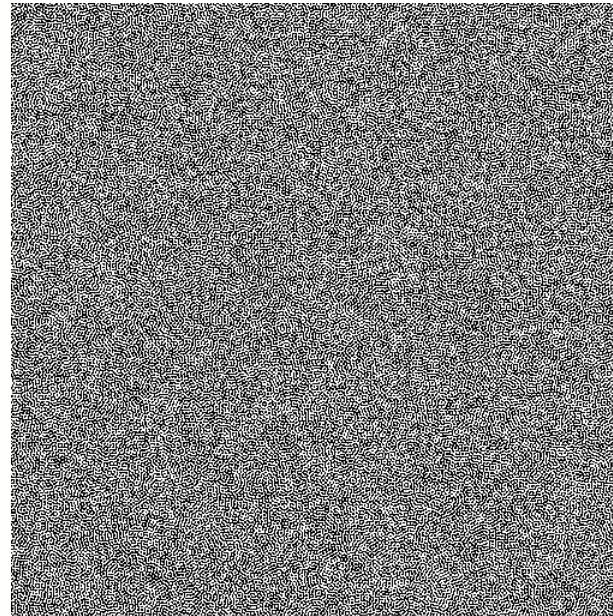
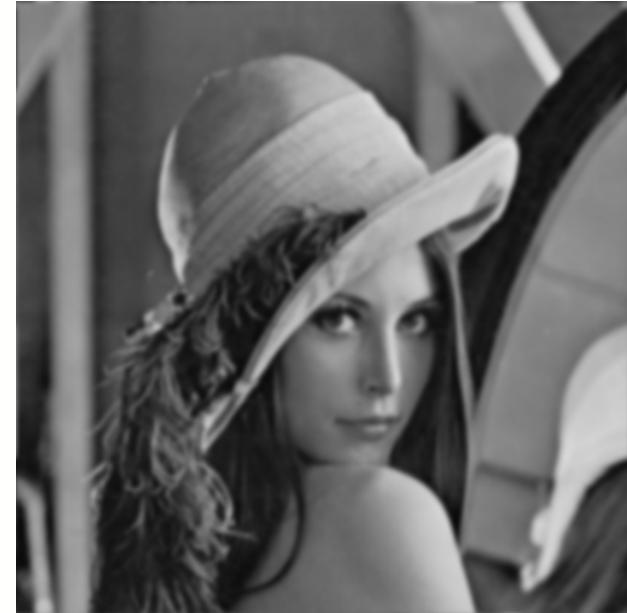


$$\longleftarrow A^{-1}$$

Résolution: Inverser A?



$$\xrightarrow{\quad Af + b \quad}$$
$$\sigma_b = 0.1$$



$$\xrightarrow{A^{-1}}$$

Résolution: Wiener

- Il faut introduire une connaissance a priori sur le signal.
- Dans un premier temps nous adoptons une approche probabiliste
- Exemple avec une seule variable observée:

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$$

$$B \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$$

$$Y = \alpha X + B$$

touver $\tilde{X} = \beta Y$ t.q.
 $E(|\tilde{X} - X|^2)$ soit minimal

Résolution: Wiener

- Il faut introduire une connaissance a priori sur le signal.
- Dans un premier temps nous adoptons une approche probabiliste
- Exemple avec une seule variable observée:

$$X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_s^2)$$

$$B \sim \mathcal{N}(0, \sigma_b^2)$$

$$Y = \alpha X + B$$

trouver $\tilde{X} = \beta X$ t.q.

$$E(|\tilde{X} - X|^2) \text{ soit minimal}$$

$$\beta = \frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2}}$$

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

maximiser $e^{-\frac{1}{2} \tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\|A\tilde{X} - Y\|^2}{\sigma_b^2}}$
i.e. minimiser $\frac{1}{\sigma_b^2} \|A\tilde{X} - Y\|^2 + \tilde{X}^T C^{-1} \tilde{X}$

Résolution: Wiener

- Remarque de calcul: Si $Q(X) = X^T S X + H^T X + cst.$
Alors le minimiseur de Q est aussi le minimiseur de

$$E(Z) = \int_X \|Z - X\|^2 e^{-Q(X)}$$

C'est aussi la moyenne de la gaussienne de loi proportionnelle à $e^{-Q(X)}$

Résolution: Wiener

- Le signal est supposé être un vecteur gaussien:

$$X \text{ v.a. } \in \mathbb{R}^N$$

$$\mathbb{P}(X) \sim e^{-\frac{1}{2} X^T C^{-1} X}$$

$C = E(X^T X)$ matrice de covariance déf. pos.

$$\mathbb{P}(B) \sim e^{-\frac{1}{2} \frac{\|B\|^2}{\sigma_b^2}}$$

$$Y = AX + B$$

trouver $\tilde{X} = DY$ t.q.

$E(\|\tilde{X} - X\|^2)$ soit minimale

$$\tilde{X} = \underbrace{(A^T A + \sigma_b^2 C^{-1})^{-1}}_D \underbrace{A^T Y}_D$$

Résolution: Wiener

- Pour les images, une base de décomposition naturelle: Fourier
- La densité spectrale de puissance:
 - On peut l'imposer comme a priori.
 - Utiliser celle de l'image dégradée.

$$\tilde{X} = \underbrace{(A^T A + \sigma_b^2 C^{-1})^{-1}}_D \underbrace{A^T Y}$$



$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien



$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2(\omega)}} \hat{g}(\omega)$$

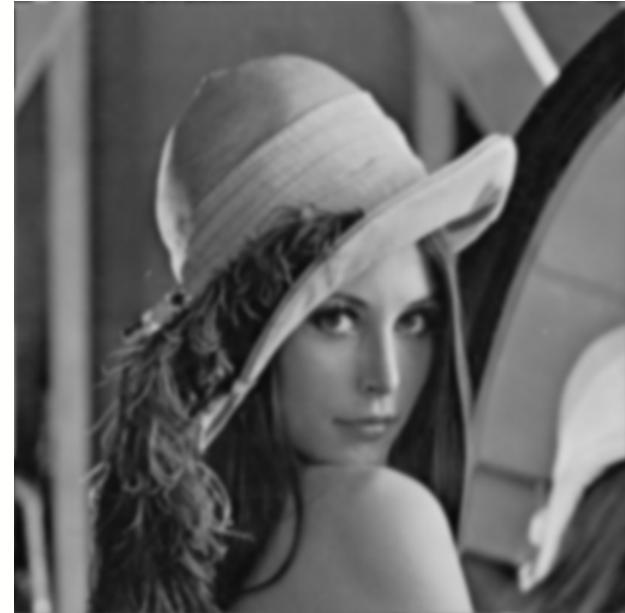
ω parcourt les fréquences de Fourier

$\sigma_s^2(\omega)$ puiss. du signal à la fréq. ω

Résolution: Wiener



$$\xrightarrow{\quad Af + b \quad}$$
$$\sigma_b = 2$$



Wiener

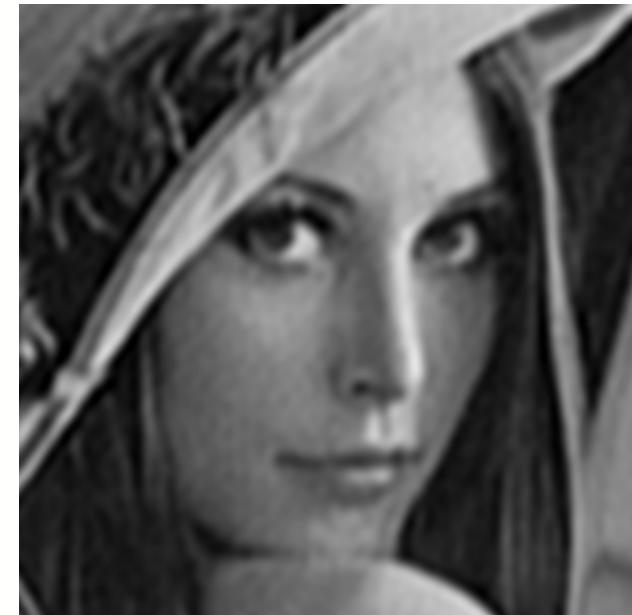
Wiener: erreurs d'estimation



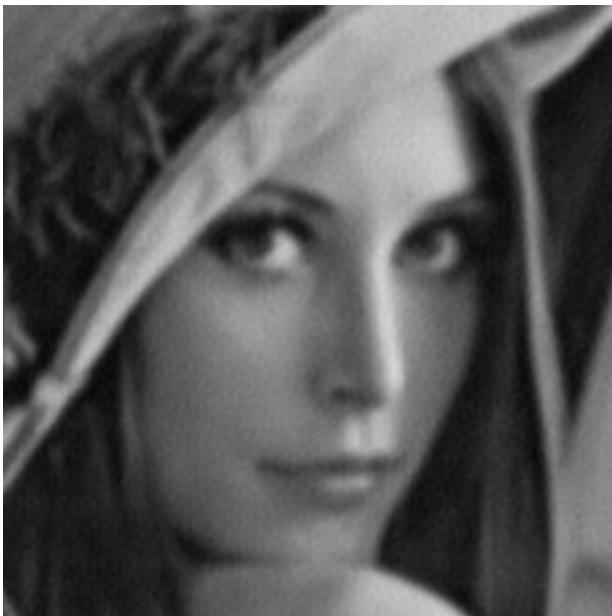
Bonne



Bruit sous-estimé



Bruit sur-estimé



Mauvaises estimations du flous



Approche par minimisation d'énergie

$$g = Af + b$$

$f \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ inconnue

$g \in \mathbb{R}^{N^2}$: image de taille $N \times N$ connue

A : matrice de convolution carrée de taille $N^2 \times N^2$

$b \in \mathbb{R}^{N^2}$: réalisation d'un bruit gaussien

- L'image recherchée doit expliquer l'observation:
Attache aux données.
- Elle doit aussi être régulière.

$$E(\tilde{f}) = \underbrace{\|A\tilde{f} - g\|^2}_{\text{attache aux données}} + \lambda R(\tilde{f})$$

$R(\tilde{f})$: régularité. Par exemple $\int \|\nabla \tilde{f}\|^2$

λ : paramètre de régularisation

Approche par minimisation d'énergie

$$E(\tilde{f}) = \underbrace{\|A\tilde{f} - g\|^2}_{\text{attaché aux données}} + \lambda \int \|\nabla \tilde{f}\|^2$$

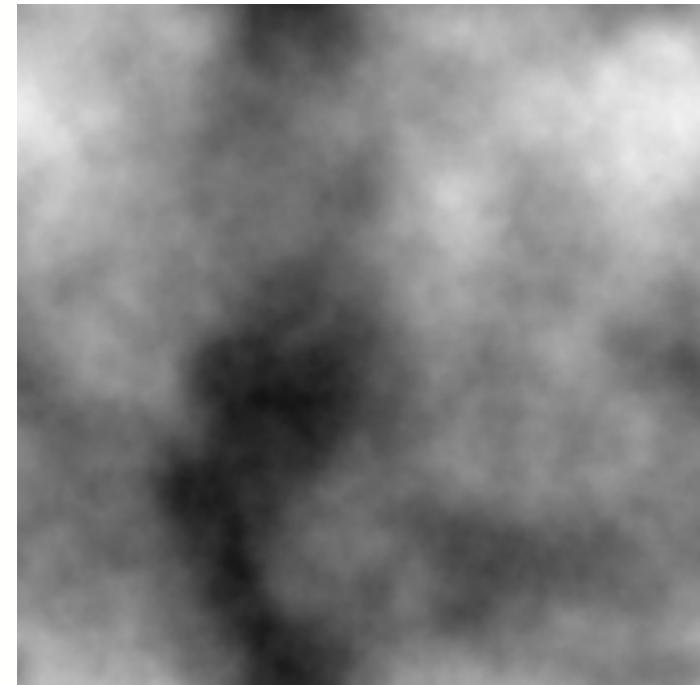
donne $\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \lambda\omega^2} \hat{g}(\omega)$

Comparer à Wiener

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{\overline{\hat{K}(\omega)}}{|\hat{K}(\omega)|^2 + \frac{\sigma_b^2}{\sigma_s^2(\omega)}} \hat{g}(\omega)$$

Remarques sur le modèle

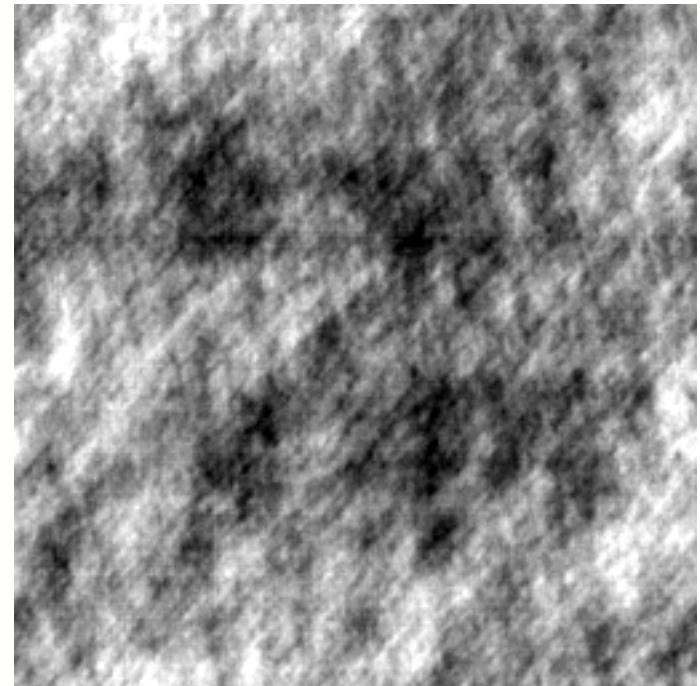
- Le modèle de minimisation d'énergie nous conduit à restaurer l'image comme elle était un tirage aléatoire d'une loi dont un exemple typique est:



Densité spectrale de puissance en $1/\omega^2$

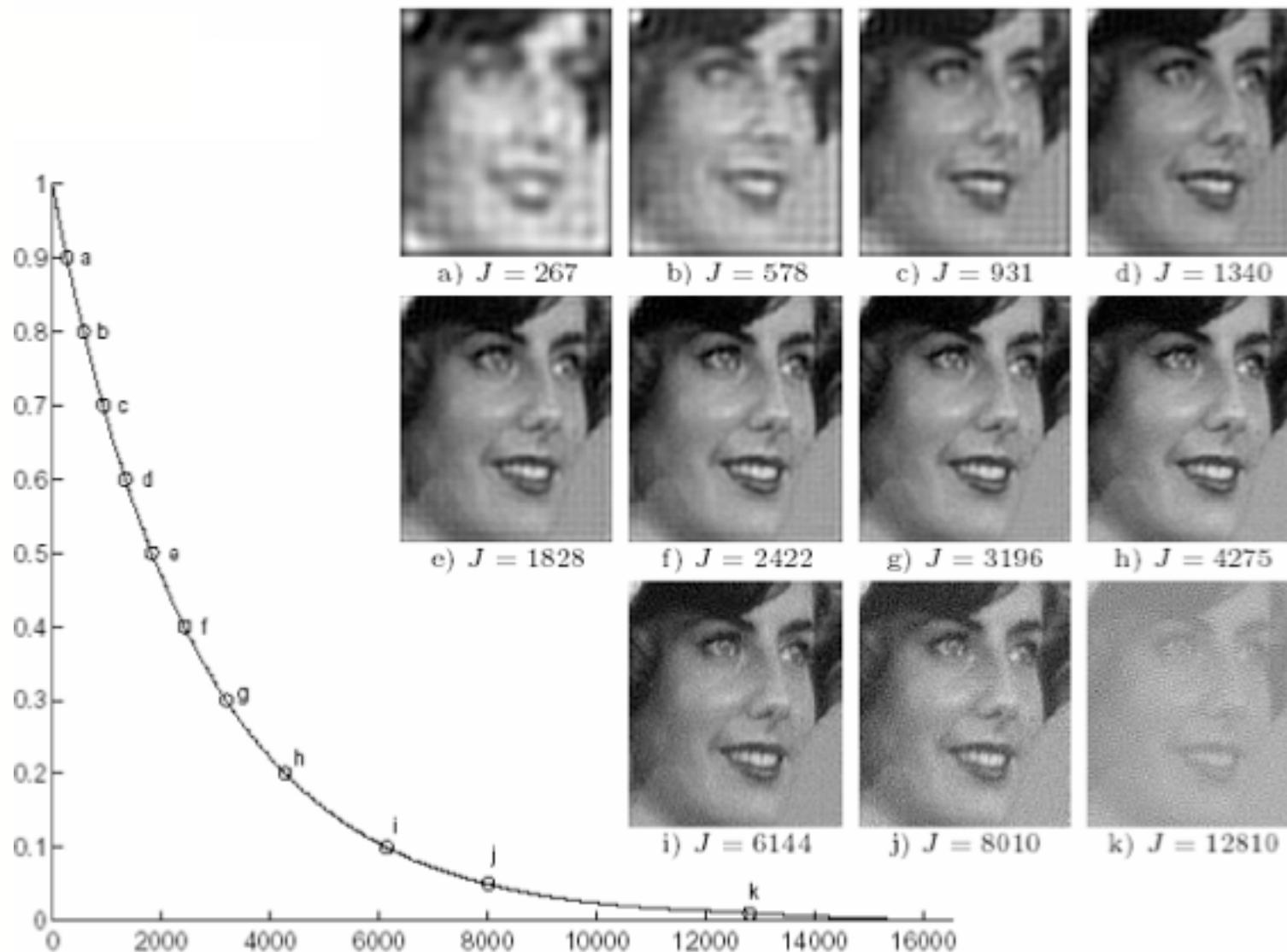
Remarques sur le modèle

- Si on utilise l'image de lena comme DSP et que l'on fait un tirage aleatoire suivant cette DSP



DSP lena

Approche par inversions/annulation

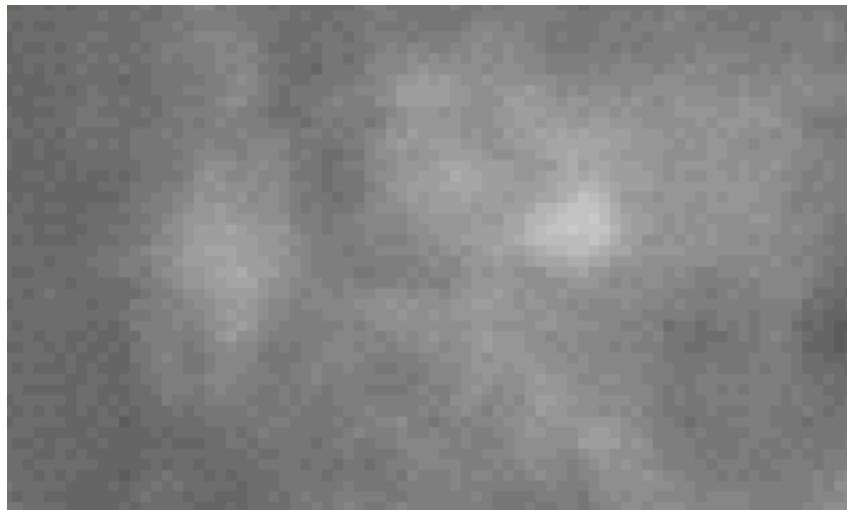


L'opérateur d'observation est A et ses valeurs propres sont dans le graphe ci-dessus

Super-résolution



Résultats obtenus en mélangeant différentes images



Appliquer l'approche variationnelle à un problème: Super-résolution

$$I_i = A_i X + B_i \text{ Avec } i = 1 \dots N$$

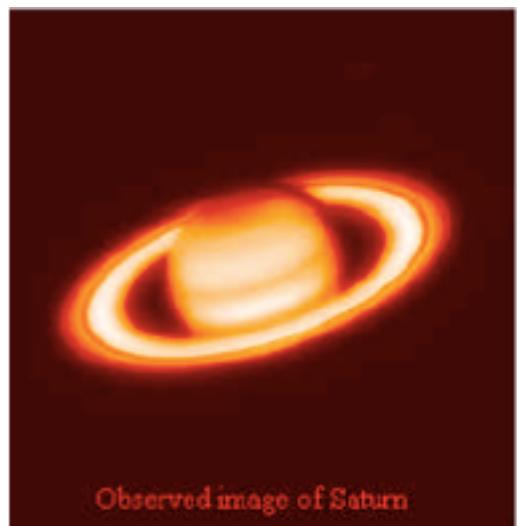
En super-résolution, il est très difficile de trouver les A_i

$$E(\tilde{X}) = \sum_i \|A_i \tilde{X} - Y_i\|^2 + \lambda R(\tilde{X})$$

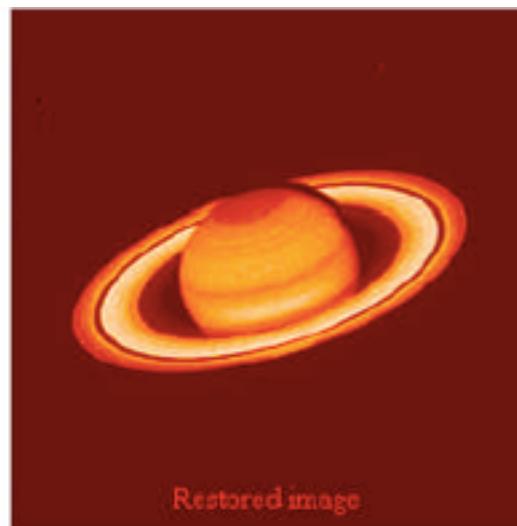
Exemples réels



Spot 5



Observed image of Saturn



Restored image