Interpolation et transformations géométriques. Filtrage et débruitage

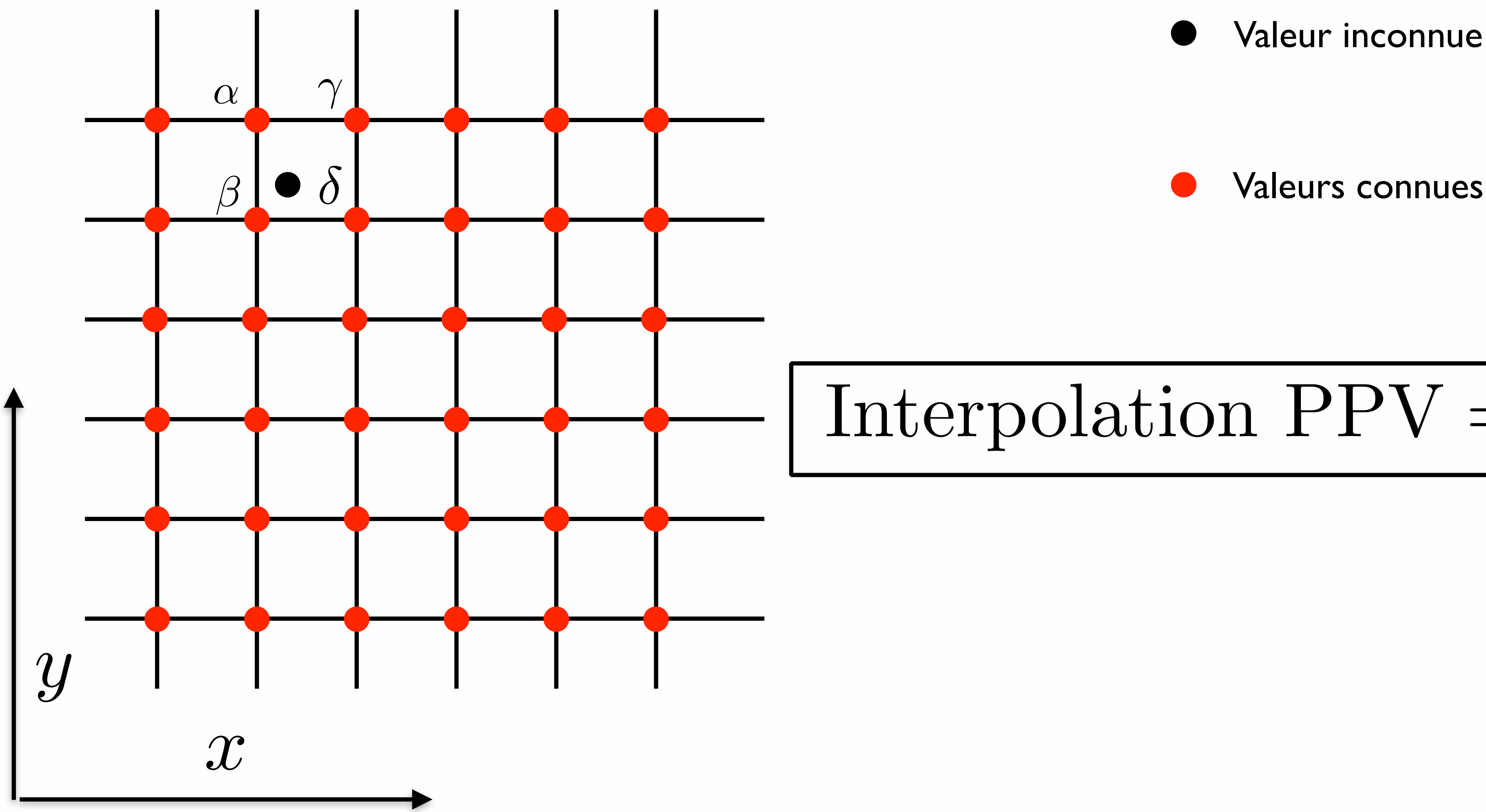
Saïd Ladjal

Interpolation

- Il s'agit de calculer la valeur de l'image en un point qui ne fait pas partie de la grille d'origine.
- On fait sur l'image, définie sur le domaine continu, une hypothèse de régularité (constante par morceaux, continue, deux fois dérivable)

- Suivant l’hypothèse faite, on obtient des interpolations différentes.
- Constante par morceaux = plus proche voisin.
- Continue = bi-linéaire
- Polynomiale de degré 3 = bi-cubique
- À bande limitée = Interpolation de Fourier.

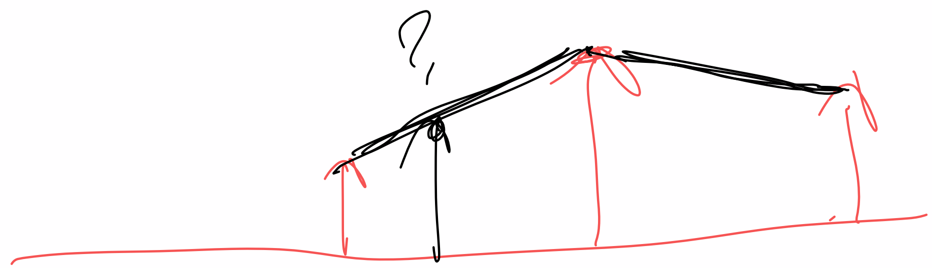
Exemple du plus proche voisin (PPV):



$$\boxed{\text{Interpolation PPV} = \beta}$$

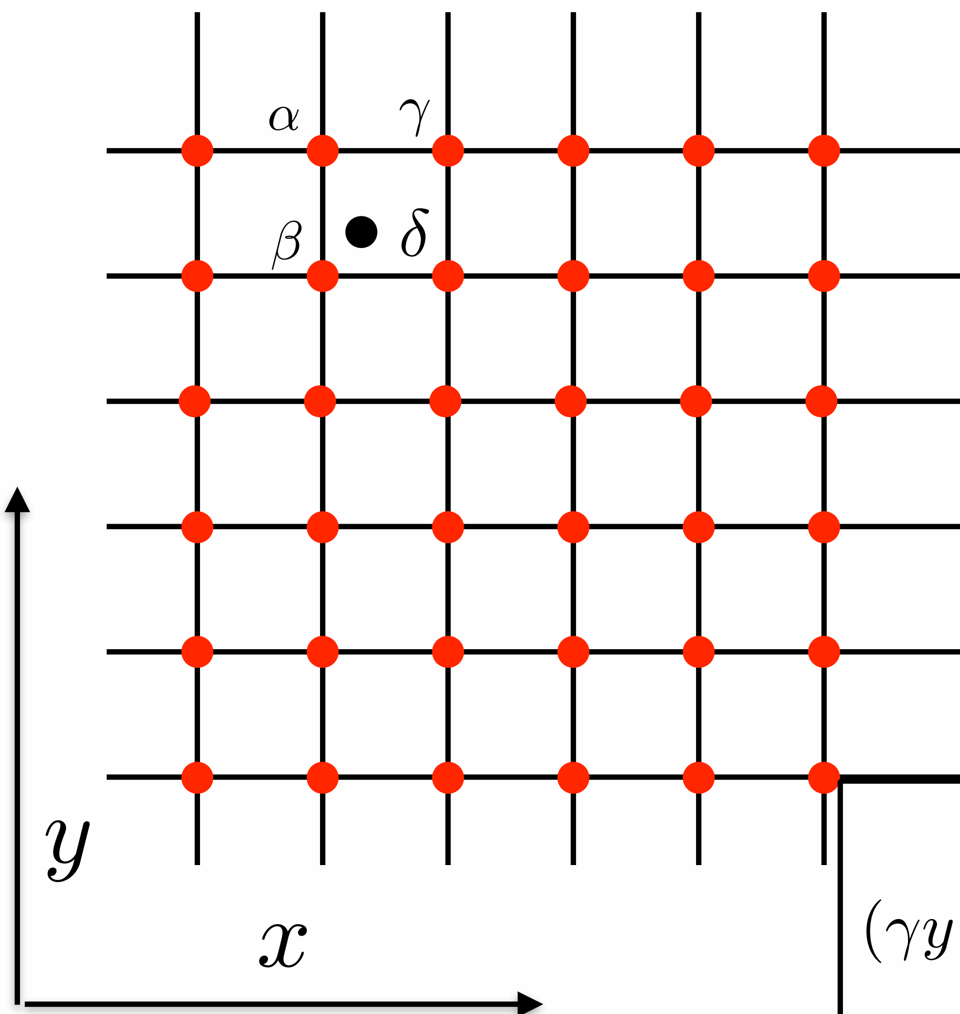
Zoom par PPV (3X)

Interpolation (bi)-linéaire



- Le bi-linéaire s'obtient par interpolation linéaire dans chaque dimension successivement.

Interpolation bi-linéaire:



● Valeur inconnue

● Valeurs connues

$$\text{Interpolation bi-lin} = (\gamma y + \delta(1-y))x + (\alpha y + \beta(1-y))(1-x)$$

γ

$$x\gamma + (1-x)\alpha = \alpha_1$$

$$y\alpha_1 + (1-y)\alpha_2$$

δ

$$x\delta + (1-x)\beta = \alpha_2$$

$$xy\gamma + (1-x)(1-y)\beta + x(1-y)\delta + y(1-x)\alpha$$

Zoom par bi-lin (3X)

Interpolation cubique (une dimension)

- On cherche une fonction g, polynomiale par morceaux, de degré 3 et deux fois continûment dérivable.
- Et on veut: g(n)=f(n) (aux points entiers)
- Pourquoi ne pas demander 3 fois continûment dérivable?

Interpolation cubique (une dimension)

- On cherche g sous la forme:

$\beta^3(-2) = \beta^3(2) = 0 \quad \beta^3(-1) = \frac{1}{6} \quad \beta^3(0) = \frac{2}{3}$

$\beta^3(1) = \frac{1}{6}$

$$g(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c(k)\beta^3(t-k)$$

$$\beta^3(\cancel{t}\,x) = \begin{cases} 2/3 - |x|^2 + |x|^3/2 & |x| \leq 1 \\ (2-|x|)^3/6 & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & 2 \leq |x| \end{cases}$$

Tous les choix de c(k) donnent une fonction polynomiale par morceaux et deux fois dérivable.

$$g(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\, \beta^3(t-k)$$

$c(k)$?

connus

$$\forall n \quad g(n) = f(n)$$

$$\forall n : \quad \frac{1}{6} c(n-1) + \frac{2}{3} c(n) + \frac{1}{6} c(n+1) = f(n)$$

$$C(z) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c(k)\, z^{-k} \qquad F(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n)\, z^{-n}$$

$$C(z) \cdot \left(\frac{1}{6} z^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} z\right) = F(z)$$

$$C(z) = \frac{F(z)}{\left(\frac{1}{6} z^{-1} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} z\right)}$$

$$g(x,y) = \sum_{k,l} \beta^3(x-k) \cdot \beta^3(y-l) \, c(k,l)$$

$$\frac{1}{6}c(n-1)+\frac{2}{3}c(n)+\frac{1}{6}c(n+1)=f(n)$$

$$\Rightarrow\quad c(n+1)=6\left(f(n)-\frac{2}{3}c(n)-\frac{1}{6}c(n-1)\right)$$

$$\frac{1}{6}3+\frac{2}{3}+\frac{1}{\cancel{6}}3^{\cancel{1}\,1}$$

Interpolation cubique (une dimension)

- Comment choisir les c(k)?
  - Il faut écrire les équations f(n)=g(n). Cela se traduit par:

inconnu

$b_{-1} = \frac{1}{6}$ $b_0 = \frac{2}{3}$ $b_1 = \frac{1}{6}$

$$f_n = c * b$$

$$B(z) = \frac{z^{-1}+4+z}{6} = \frac{1}{-6z_1}(1 - z_1 z^{-}1)(1 - z_1 z)$$

$$z_1 = -2 + \sqrt{3} \quad |z_1| < 1$$

Interpolation cubique (une dimension)

- On applique deux filtres récursifs: l'un causal et l'autre non causal pour obtenir les c(k) au prix de quelques opérations par échantillon.

Interpolation cubique (deux dimensions)

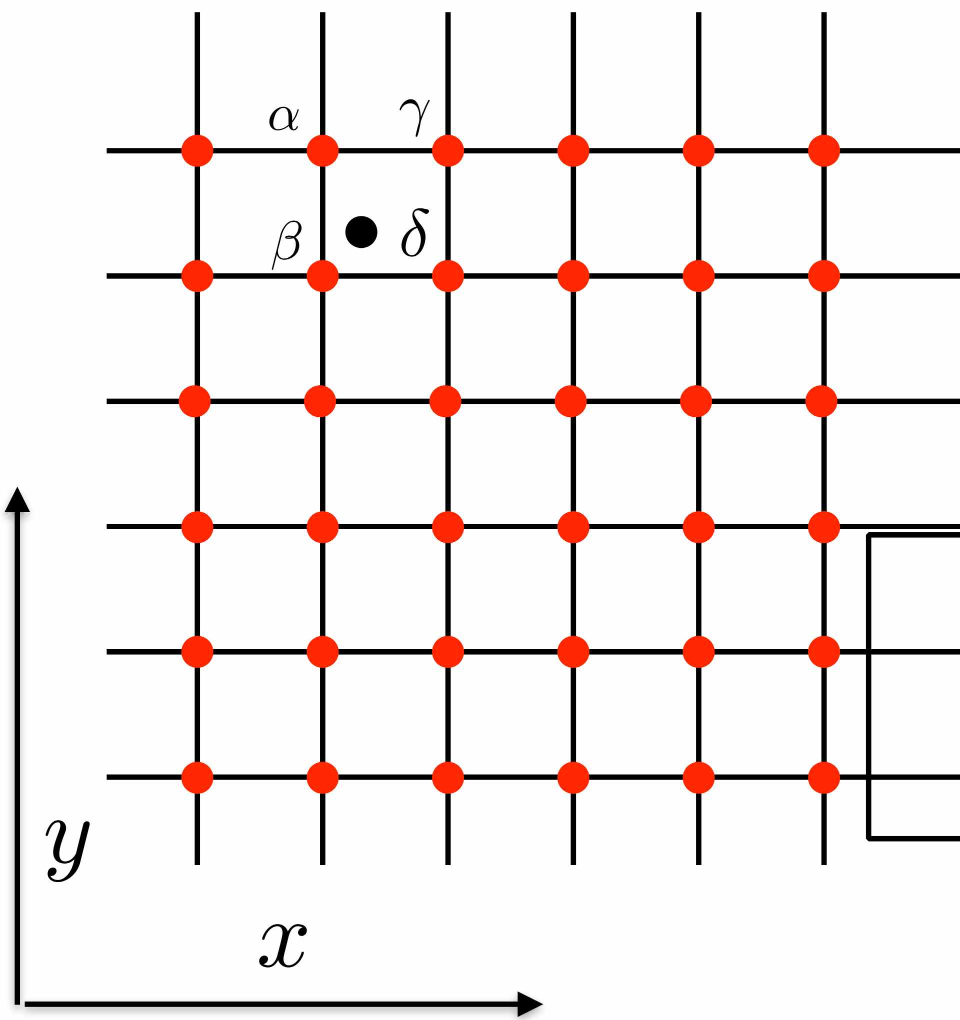
- Dans le cas bi-dimensionnel on cherche g sous la forme

$$g(x,y) = \sum_{k,l} c(k,l)\beta^3(x-k)\beta^3(y-l)$$

Les c(k,l) sont obtenus de manière séparable:
On les calcule pour chaque ligne suivant le procédé mono-dim.
Puis on applique le processus mono-dim le long des colonnes du résultat.

Zoom par bi-cubique (3X)

Interpolation Shannon:



Valeur inconnue

Valeurs connues

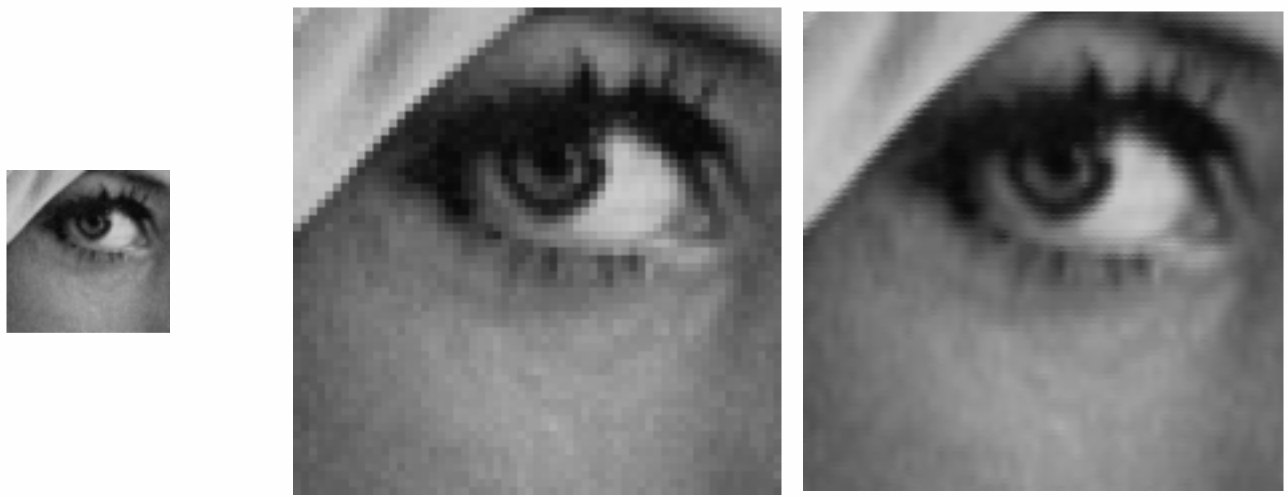
$$\text{Interpolation Shannon} = \frac{1}{N^2}\sum_{k,l} \hat{f}_{k,l} e^{+2i\pi\left(\frac{k}{N}x + \frac{l}{N}y\right)}$$

$\hat{f}_{k,l} =$ coefficient de Fourier

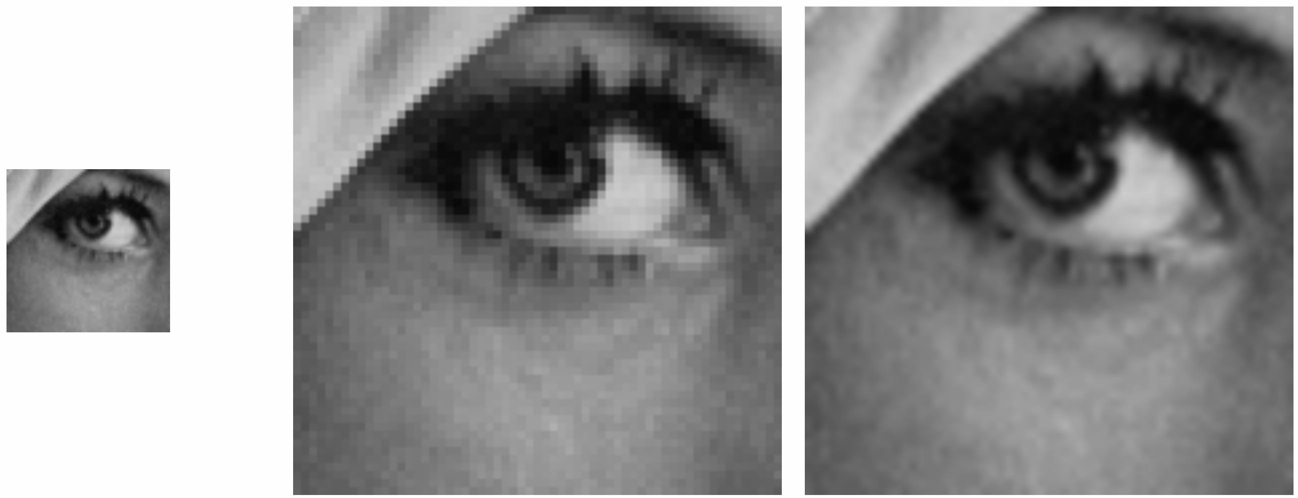
Zoom par Shannon (3X)

Zoom par PPV (3X)

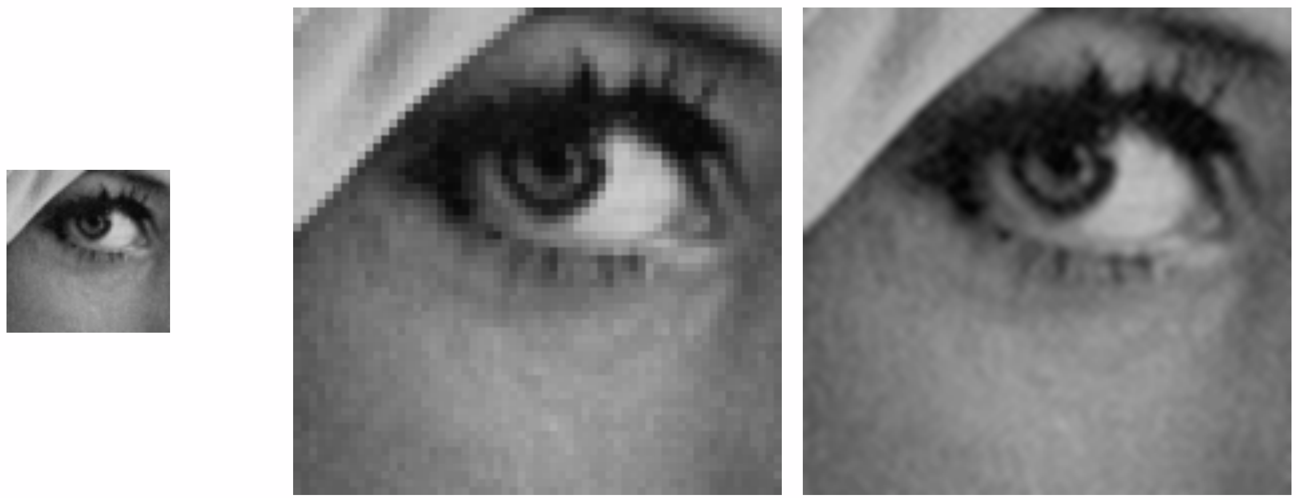
Zoom par bi-lin (3X)



Zoom par bi-cubique (3X)

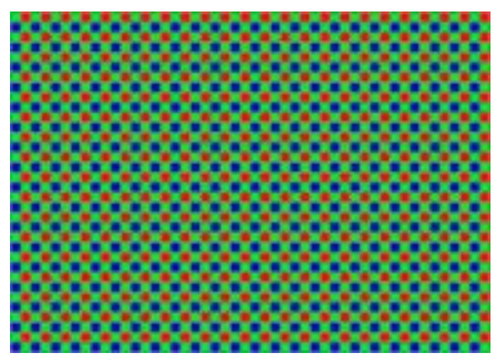


Zoom par Shannon (3X)



Interpolation pour le démosaicage

- Contrairement au scanner, l'appareil photo doit prendre une photographie instantanée. Il ne peut donc pas photographier séquentiellement le rouge, vert et bleu.
- On a recours à une matrice CCD de Bayer



Nécessité d'un algorithme pour calculer les composantes RVB en tout point (démosaicage).

$\boxed{B = 10\rho}$

$\boxed{B = 10^{\rho}}$

$\boxed{O}$

$B = ?$

$\boxed{B = 10^{\rho}}$

8

$\boxed{B = 0}$

$\boxed{D}$

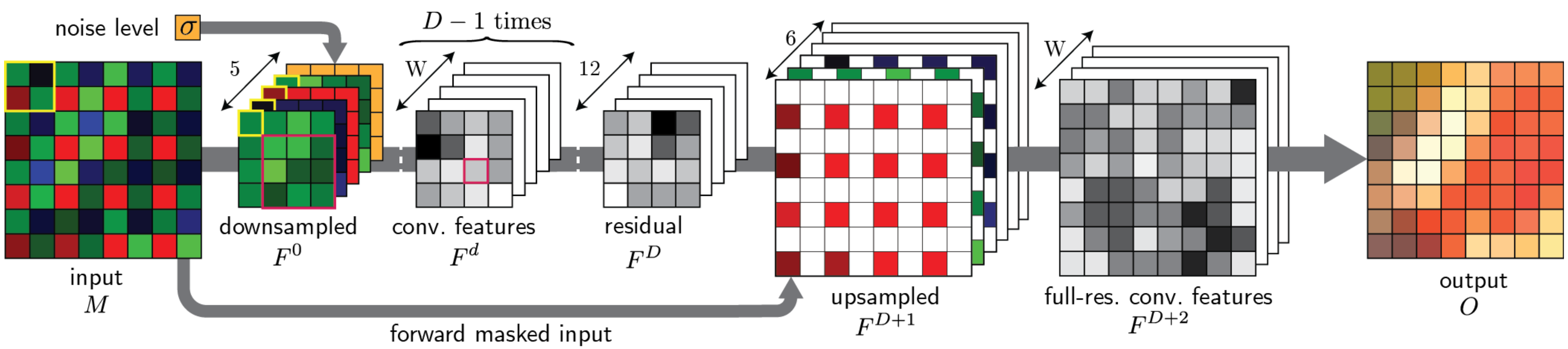
Image parfaite

Bayer suivi d’une interpolation bi-linéaire

Demosaicage:

Interpolation pour le démosaicage

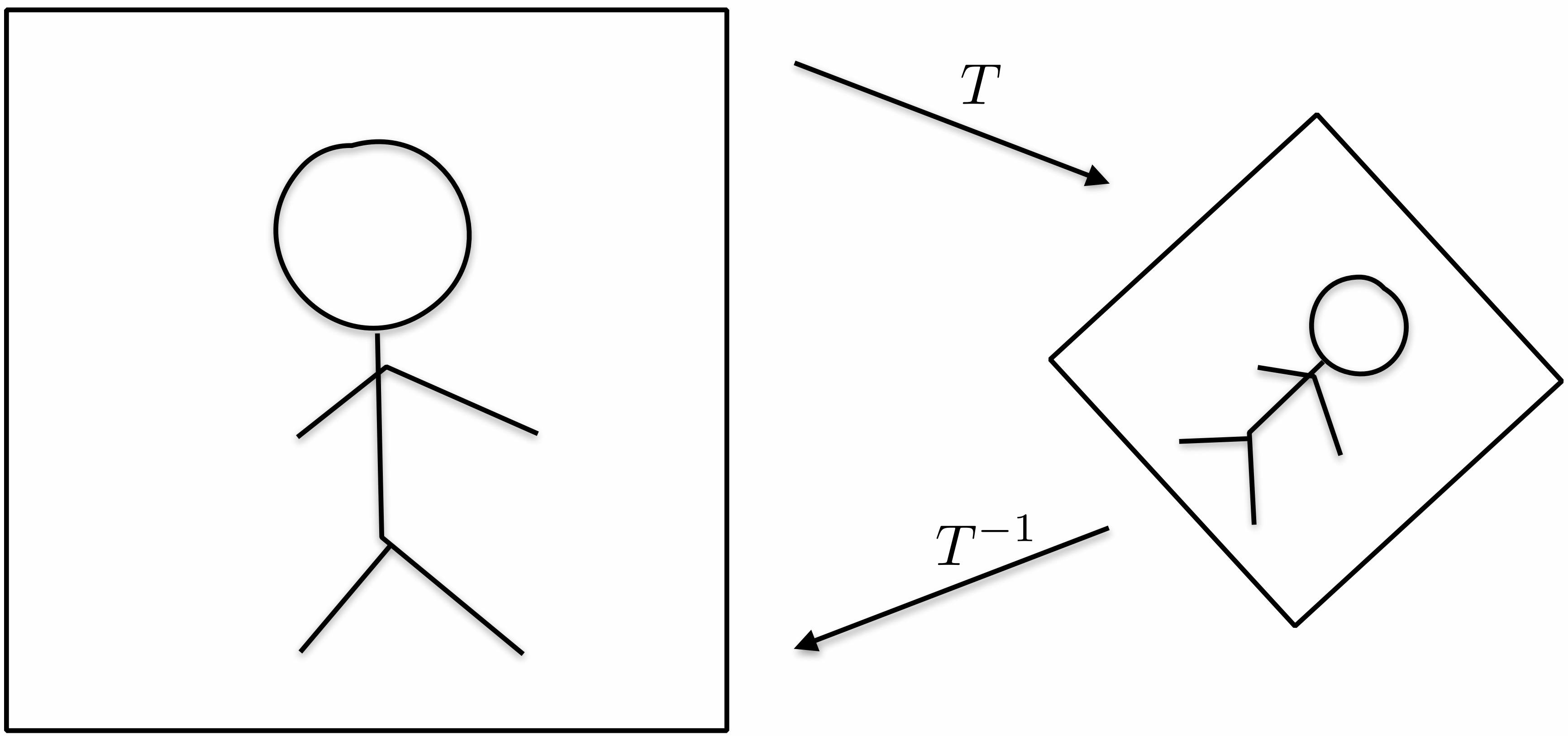
- Les méthodes classiques proposés sont basées sur du filtrage anisotropique.
- Récemment des méthodes utilisant des réseaux de neurones ont été également proposées.



Le temps de calcul est trop long pour un appareil portatif (extrait de « Deep Joint Demosaicking and Denoising » (Gharbi et al.))

Transformations géométriques

- Pour différentes raisons, on veut faire subir à l'image une transformation géométrique.
- Pour obtenir la valeur de la nouvelle image en un pixel (i,j), on applique l'inverse de la transformation géométrique pour trouver la position dans l'image d'origine.
- Les coordonnées trouvées ne sont pas entières d'où l'importance de l'interpolation.

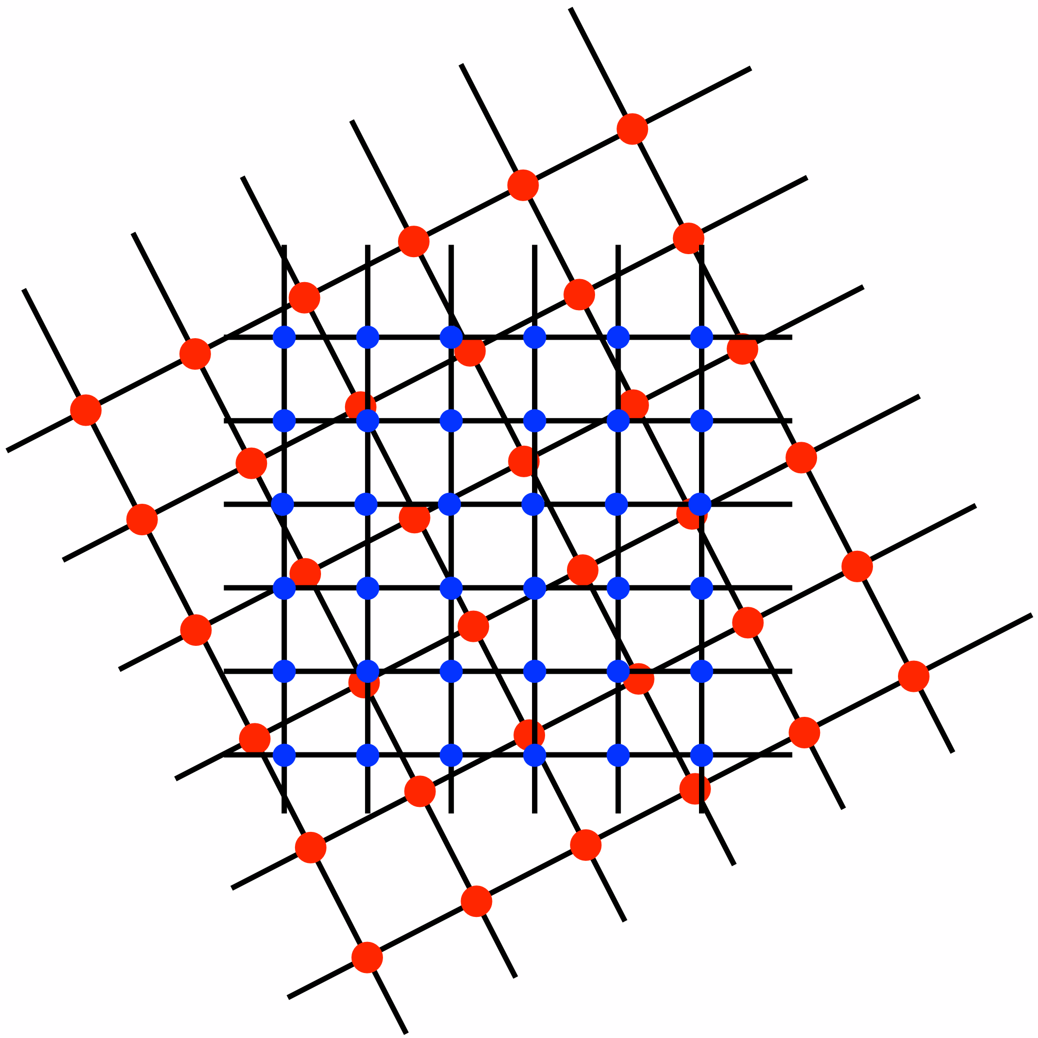


T
T^{-1}

Inconnue

Connue

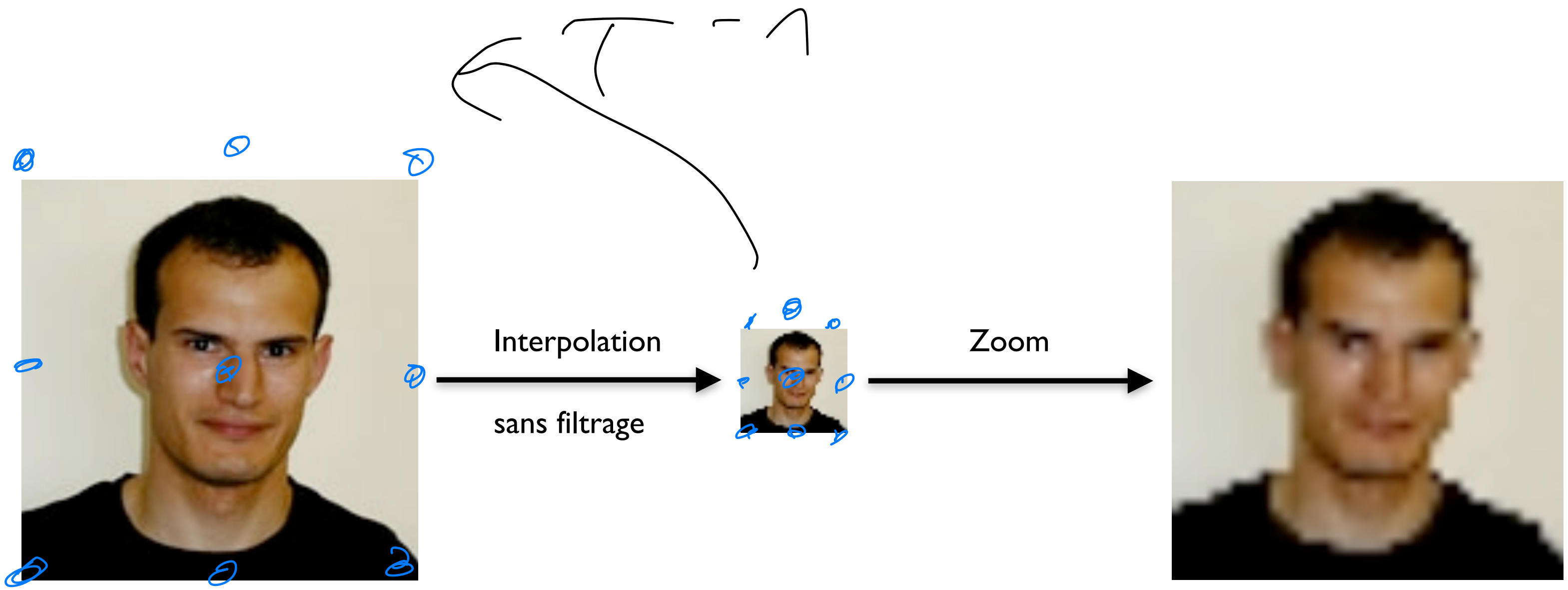
Dans le repère de l’image rouge (connue), les points entiers de l’image bleue (inconnue), ne sont pas entiers.



Est-ce un zoom ou un dézoom?

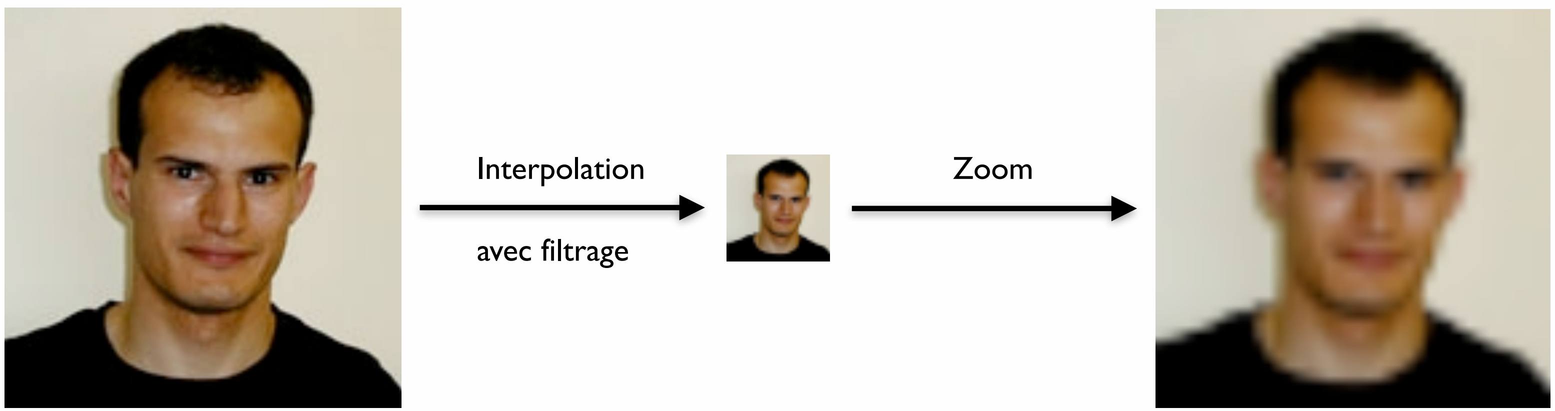
Cas d’une diminution de taille:

Il faut appliquer un filtre passe-bas!



Cas d’une diminution de taille:

Il faut appliquer un filtre passe-bas!



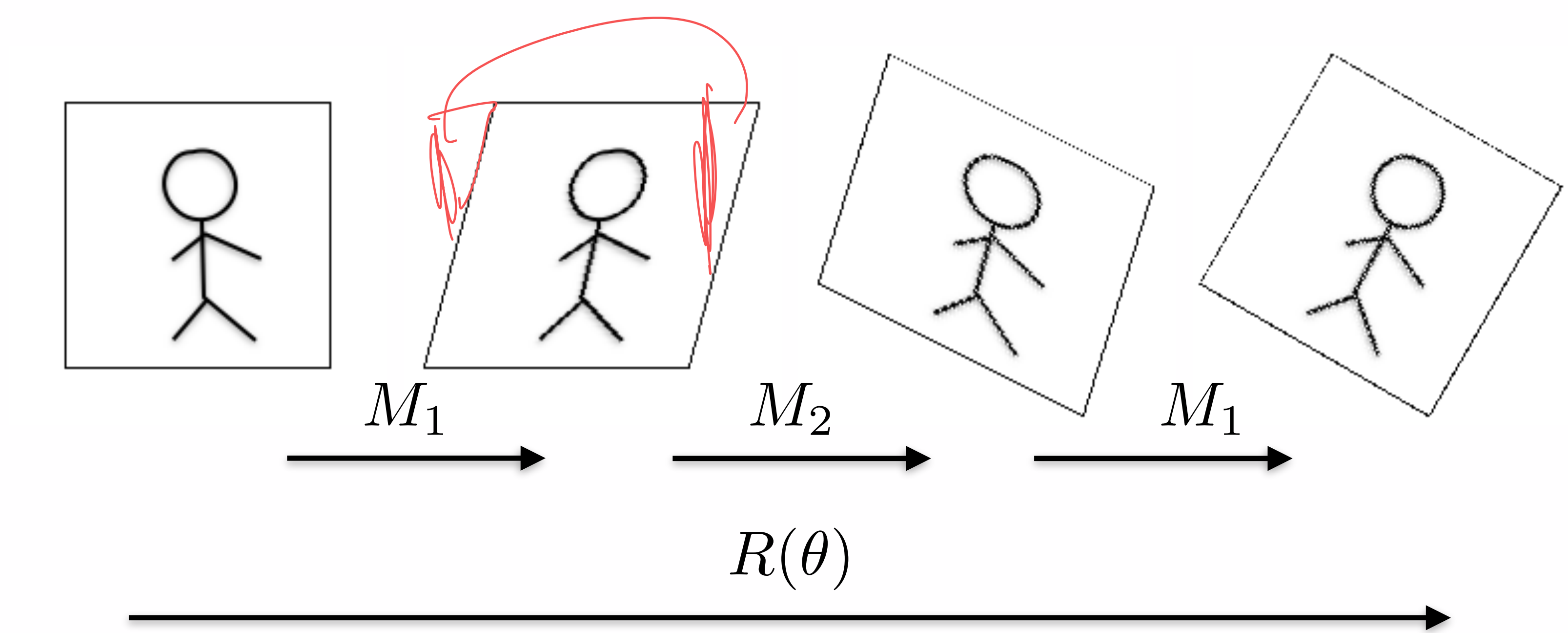
 

Exemple de répétition d’une transformation géométrique avec différentes interpolations.

Principe de la rotation précédente:

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin\theta & 1 \end{bmatrix}}_{M_2} \times \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\tan\frac{\theta}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{M_1}$$



Le filtrage

- Le filtrage est une opération qui transforme une image en une autre image de même taille.
- Pour chaque pixel de la nouvelle image on décide d’une valeur à partir des anciennes valeurs de l’image.

Filtrage linéaire

- Filtrage linéaire (invariant par translation): Il revient à une convolution par un masque.
- Suivant la taille du masque et de ses valeurs on obtient des filtrages différents.
- Filtre moyenne=masque constant.
- Filtre gaussien=masque gaussien.
- Filtre (-1,1)= Dérivée, gradient

$$f * \begin{bmatrix} \frac{1}{N^2} & \cdots & \frac{1}{N^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{N^2} & \cdots & \frac{1}{N^2} \end{bmatrix}$$

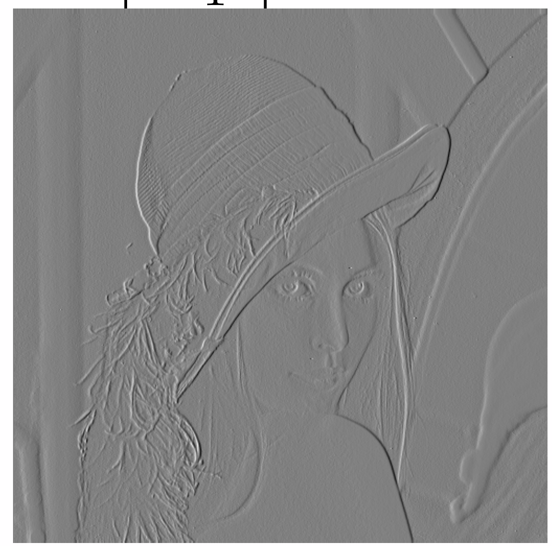
N est la taille du filtre

Exemple de filtrage moyenne (avec accroissement de la taille du masque)

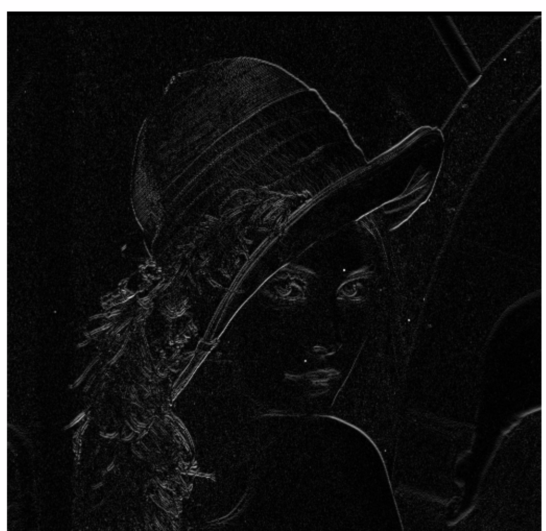
Filtrage linéaire:
Passe haut: exemple du gradient

$$g_x(i,j) = f(i,j) - f(i-1,j) = f * [1, -1]$$

$$g_y(i,j) = f(i,j) - f(i,j-1) = f * \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$



g_x



g_y

Les filtres pour le débruitage:
I) Filtre moyenne

Un effet de flou est introduit. Il est dû au fait que différentes valeurs sont moyennées au travers des transitions de l'image.

Plus généralement, on a moyenné des valeurs qui ne sont pas de même nature que le pixel central.

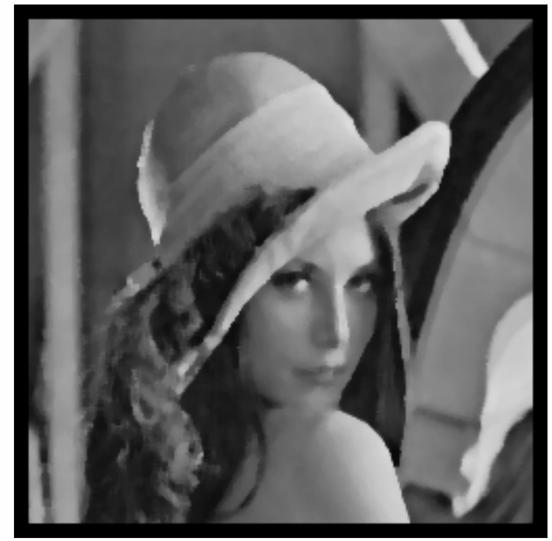
Les filtres pour le débruitage:
II) Filtre médian

Remplacer la valeur moyenne dans un voisinage par la valeur médiane.
Il est particulièrement efficace pour le bruit impulsionnel.

10% des pixels perdus

Médian 3x3

Moyenne 3x3



Médian 5x5

Moyenne 5x5

Les filtres pour le débruitage:
III) Filtre bilateral

$$g(i,j) = \frac{1}{K}\sum_{k,l} f(k,l)w(k,l)$$

$$w(k,l) = S(k-i, l-j)I(f(k,l) - f(i,j))$$

$$I(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma_I^2}}$$

$$S(x,y) = e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_S^2}}$$

$$K = \sum_{k,l} w(k,l)$$

Idée: Prendre plus en compte dans la moyenne les pixels qui sont proches spatialement et en niveau de gris.

Les filtres pour le débruitage:
III) Filtre bilateral

Respecte bien les bords, mais floute encore les zones de texture.

Les filtres pour le débruitage: IV) Moyennes non locales

- Au lieu de faire une moyenne locale de l'image afin d'atténuer le bruit, on moyenne les valeurs de pixels dont l'entourage ressemble à celui du pixel traité:

$$nouveau(p) = \sum_q ancien(q) \frac{D(V(p), V(q))}{\sum_q D(V(q), V(p))}$$

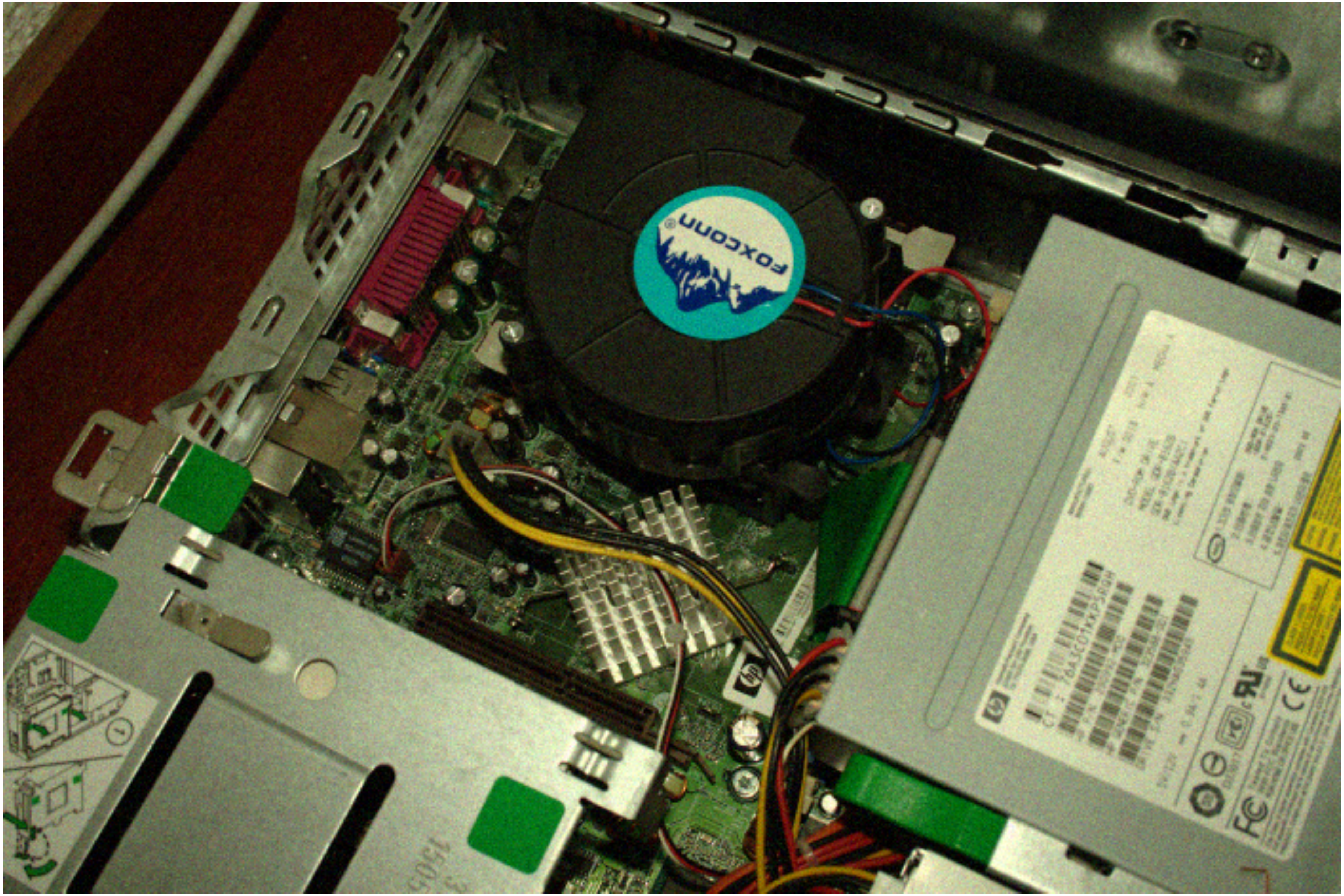
$V(n)$ voisinage du pixel n

$$D(V1, V2) = e^{-\frac{\|V1 - V2\|_2^2}{h^2}}$$

Les filtres pour le débruitage:
IV) Moyennes non locales

https://www.ipol.im/pub/art/2011/bcm_nlm/


foxconn


foxconn


foxconn