

# TP de méthodes variationnelles

Felipe Vicentin

January 28, 2025

## 1 Débruitage par régularisation quadratique

### Question 1

Comment utiliser l'outil `resoud_quad_fourier` pour trouver le minimiseur de cette énergie (voir le programme `minimisation_quadratique`)?

**Answer** The python function `resoud_quad_fourier` takes as arguments  $(K, V)$ , where  $K$  is a vector of  $n$  kernels and  $V$  is a vector of  $n$  images. Then, it returns

$$U = \arg \min_u \sum_{i=1}^n \|K_i * u - V_i\|^2$$

We can make use of `resoud_quad_fourier` to find the image that minimizes the energy by rewriting the quadratic energy function as the function above. Particularly,

$$\begin{aligned} \lambda \|\nabla u\|^2 &= \lambda \|\partial_x u\|^2 + \lambda \|\partial_y u\|^2 \\ &= \|\sqrt{\lambda} D_x * u\|^2 + \|\sqrt{\lambda} D_y * u\|^2 \\ &= \|\sqrt{\lambda} D_x * u - 0\|^2 + \|\sqrt{\lambda} D_y * u - 0\|^2 \end{aligned}$$

where

$$D_x = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad D_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Moreover,  $\|u - v\|^2 = \|\delta * u - v\|^2$ , where  $\delta = (1)$ .

$D_x$  and  $D_y$  are precisely the kernels that differentiate the image. So, we can use the function `resoud_quad_fourier` with parameters  $(\sqrt{\lambda} D_x, \sqrt{\lambda} D_y, \delta)$  and  $(0, 0, \text{img})$  to find the minimizer.

### Question 2

Décrire le résultat de ce débruitage lorsque  $\lambda$  est très grand ou très petit.

**Answer** If  $\lambda$  is very small, then the regularization has no effect, making the minimizer equal to the observed image:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \|u - v\|^2 + \lambda \|\nabla u\|^2 = \|u - v\|^2 \implies \arg \min_u E_1(u) = v.$$

If  $\lambda$  is too big, then the data attachment term loses importance, making the image too regular (the gradient tends to 0). The result is a single-colored image, since there is no variation ( $\nabla u = 0$ ).

### Question 3

Après avoir ajouté un bruit d'écart type  $\sigma = 5$  à l'image de lena, trouver (par dichotomie) le paramètre  $\lambda$  pour lequel  $\|\tilde{u} - v\|^2 \sim \|u - v\|^2$ . C'est-à-dire le paramètre pour lequel l'image reconstruite  $\tilde{u}$  est à la même distance de l'image dégradée  $v$  que ne l'est l'image parfaite. (on respecte la norme du bruit: La norme du bruit est connue même quand on ne connaît pas l'image parfaite)

**Answer** The parameter found was  $\lambda \approx 0.33081$ .

### Question 4

Ecrire un algorithme pour trouver le paramètre  $\lambda$  tel que  $\|\tilde{u} - u\|^2$  soit minimale. (dans le cadre de ce TP on connaît l'image parfaite  $u$ , on général on ne la connaît pas). Commentaires?

**Answer** The parameter found was  $\lambda \approx 0.11677$ . The obtained  $\lambda$  is about half of the result from question 3. This might be because the original image has a lot of contours, and so the minimization of the error difference may not reflect the actual best restoration.

## 2 Débruitage par variation totale

### Question 5

Utiliser le programme `minimise_TV_gradient` pour différentes valeurs du pas de descente. Atteignez-vous toujours le même minimum d'énergie? (le programme renvoie l'évolution de l'énergie).

**Answer** Not all step sizes get to the same energy minimum. This happens because a step size too large may make the function diverge in the gradient descent algorithm.

### Question 6

Le programme `vartotale.Chambolle` applique la méthode de **Chambolle** (expliquée dans le polycopié) au même problème posé par  $E_2$ . Utilisez ce programme et que constatez-vous quant à la vitesse de cette algorithm et sa précision (minimisation effective de  $E_2$ ) par rapport à la descente de gradient.

**Answer** The function `vartotale.Chambolle` returns the restored image almost instantly, while the gradient descent algorithm depends on the choice of the step size and the number of iterations.

## 3 Comparaison

### Question 7

Après avoir fixé une image bruitée par un bruit de 25. Trouver pour chacune des deux méthodes (TV et quadratique) le meilleur paramètre  $\lambda$  et comparez qualitativement le résultat obtenu par les deux méthodes pour le débruitage.

**Answer** The best parameters for quadratic and TV regularization were  $\lambda_{\text{quad}} \approx 1.17457$  and  $\lambda_{\text{TV}} \approx 41.42943$ . Using the norm of the difference between the result of the restoration and the perfect image  $u$ , we obtain the following values:  $\|u - \tilde{u}_{\text{quad}}\| \approx 5318$  and  $\|u - \tilde{u}_{\text{TV}}\| \approx 4428$ . In conclusion, the TV regularization appears to yield better results.