

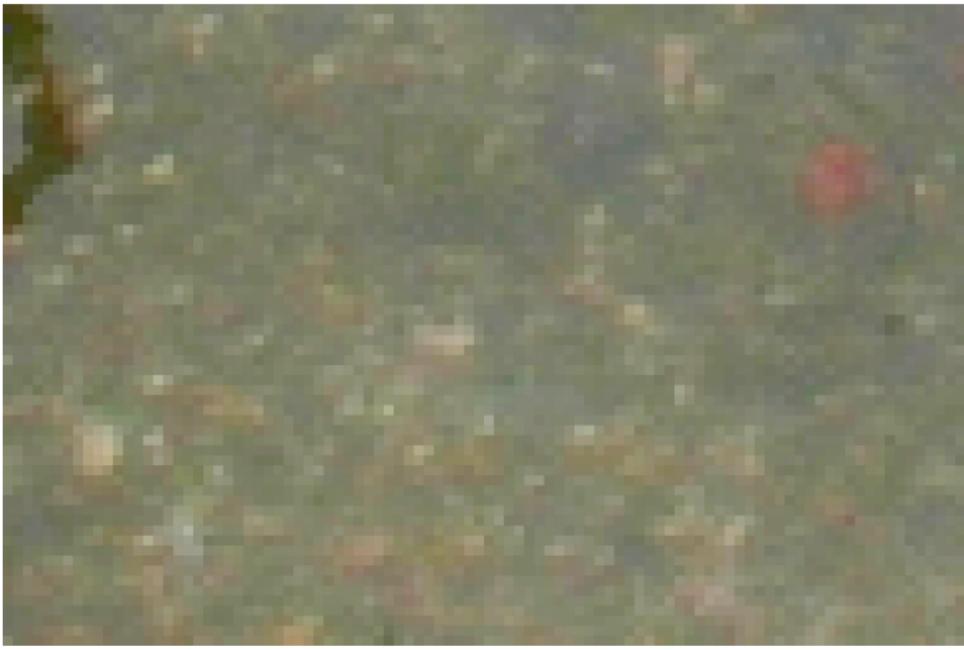
Acquisition des images numériques

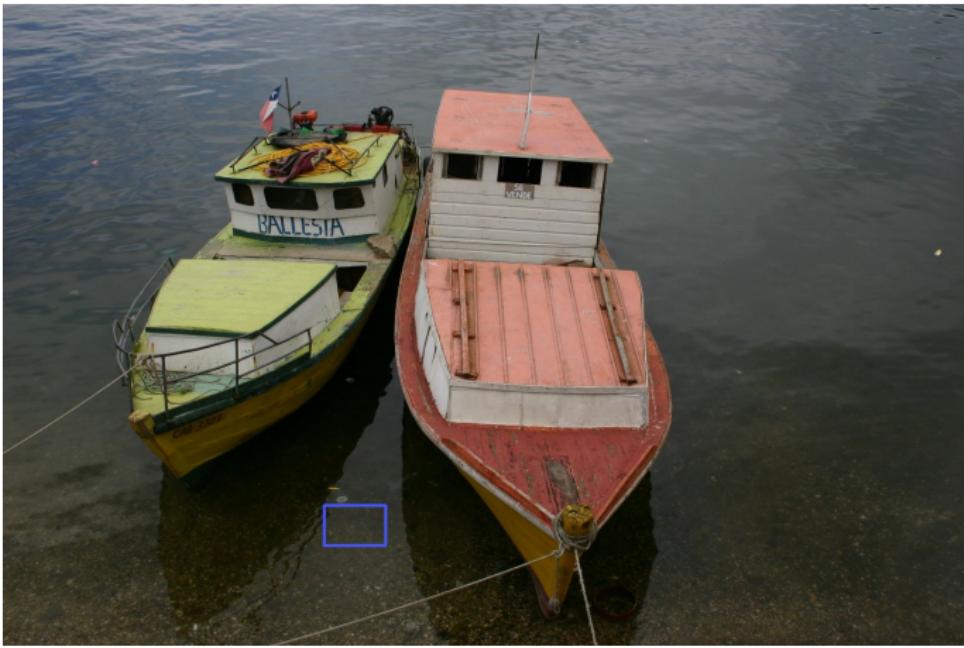
Yann GOUSSEAU
Télécom Paris
4IM01
2024-2025



Acquisition des images le cas de la photographie numérique

- ① Généralités
- ② Le système optique
- ③ Transformée de Fourier et échantillonnage bidimensionnel
- ④ Sources et modélisation du bruit

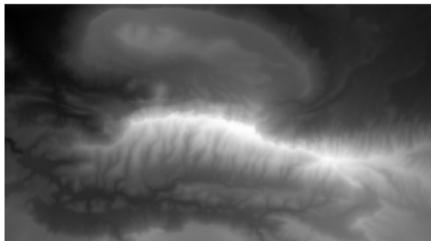




Des dispositifs couverts par ce cours



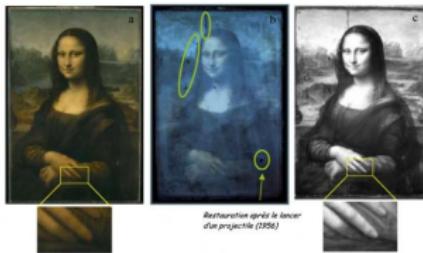
Hors sujet



Modèle numérique de terrain



image radar



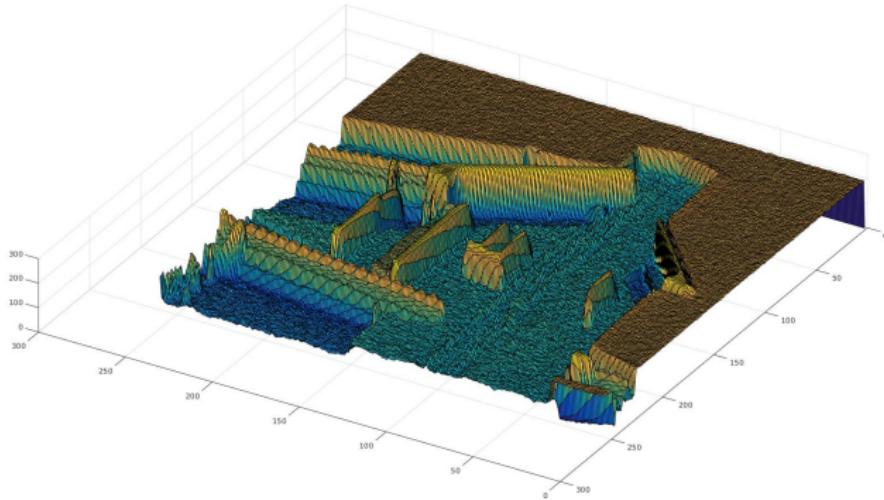
Joconde : visible, UV, IR



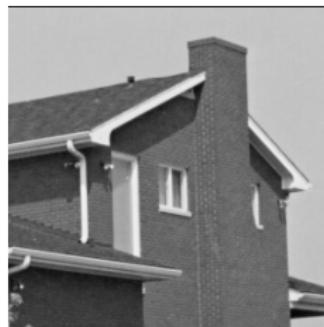
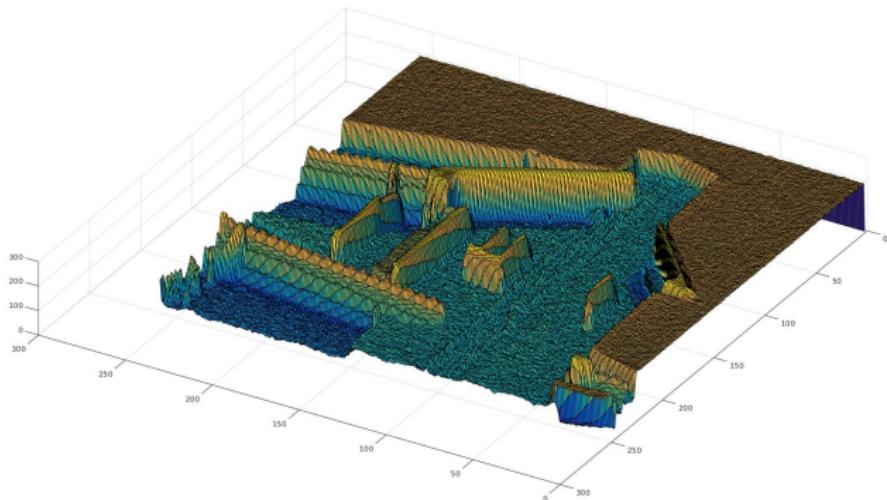
radiographie (rayons X)

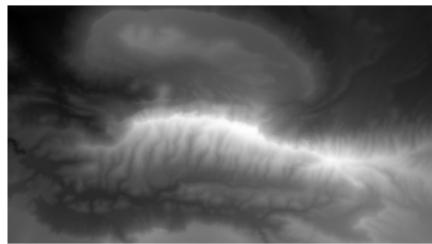
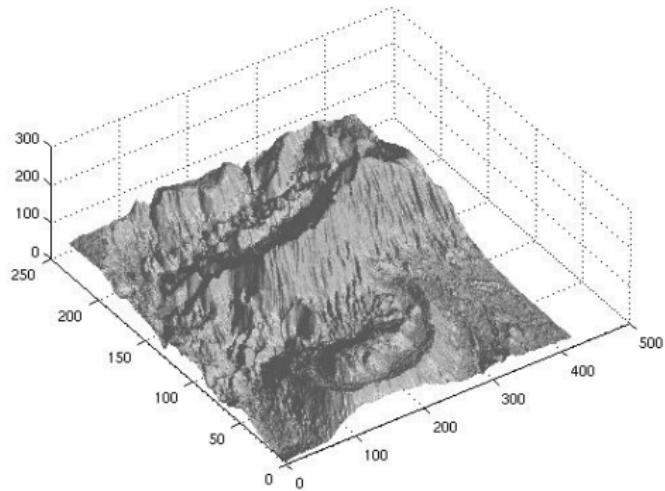


Image de profondeur (laser)



Une image vue comme une surface







Le modèle sténopé (pin-hole)

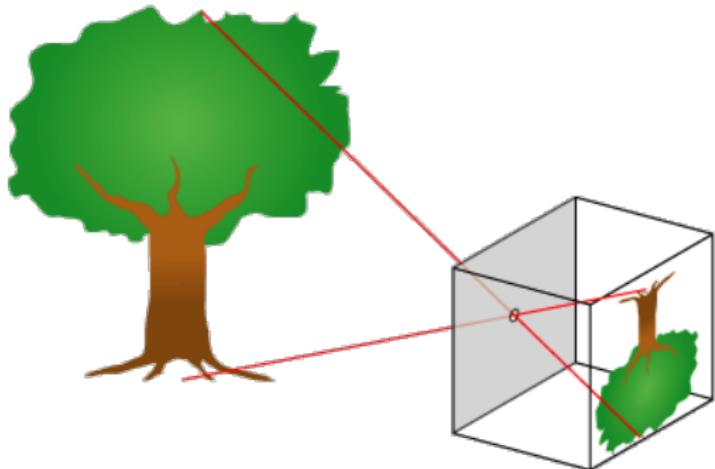
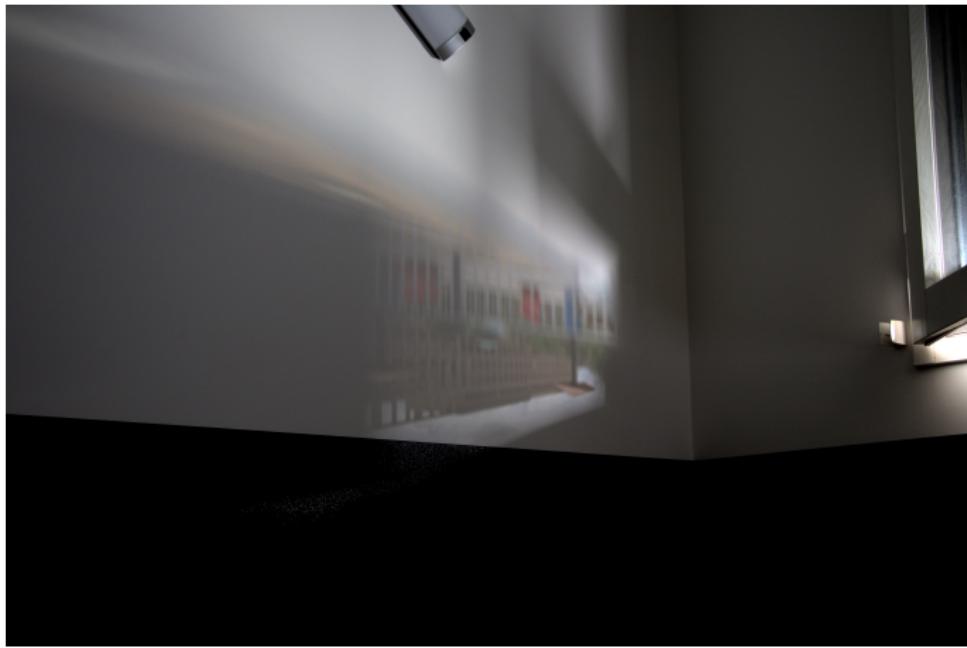


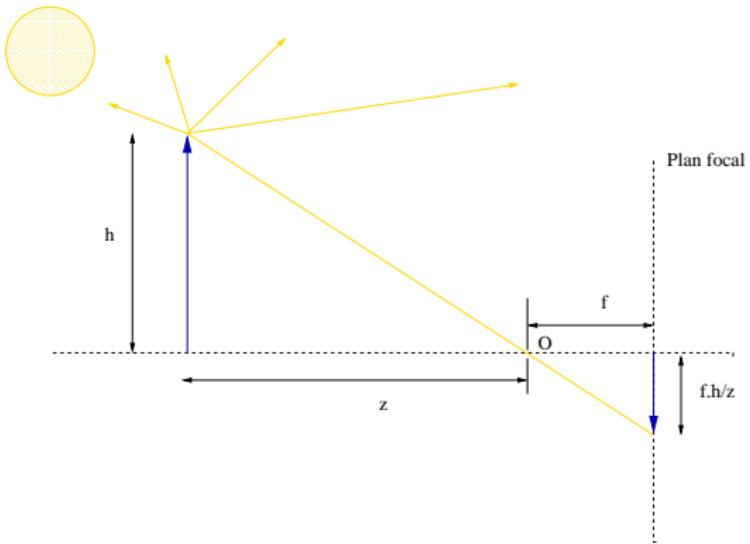
Illustration from wikipedia.org

(Aristote, Alhazen 10^{eme} s., Brunelleschi début 15^{eme} s., Da Vinci 1500, Kepler 1604 *camera obscura*)



Courtesy Manon Heffernan

Le modèle sténopé (pin-hole)



Une partie de la lumière issue de l'objet passe par l'ouverture O et se projette sur le plan focal. La distance f est appelée distance focale.

Première conséquence : pas de perception absolue de la taille des objets.



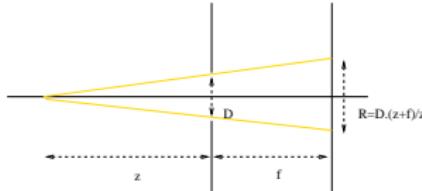
Constance de taille. Illusion de Ponzo.



Deuxième conséquence : le phénomène d'occultation → discontinuités (bords)



La perception humaine a la capacité de reconstruire les parties cachées
complétion amodale (cours à venir sur l'inpainting)



Ouverture O finie : rayons → cônes → flou

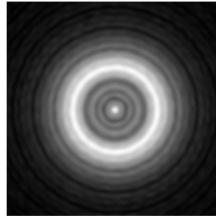
Pour une ouverture de diamètre D et S la scène (à distance z), on observe (en première approximation)

$$g_z * S,$$

où g_z est la fonction indicatrice d'un disque de rayon $(z + f)D/z$.

Si $z \gg f$ chaque point donne à peu près la même tache de flou

Modélisation plus fine : prise en compte de la diffraction





Gauche : image originale ; droite : convoluée avec un noyau passe-bas



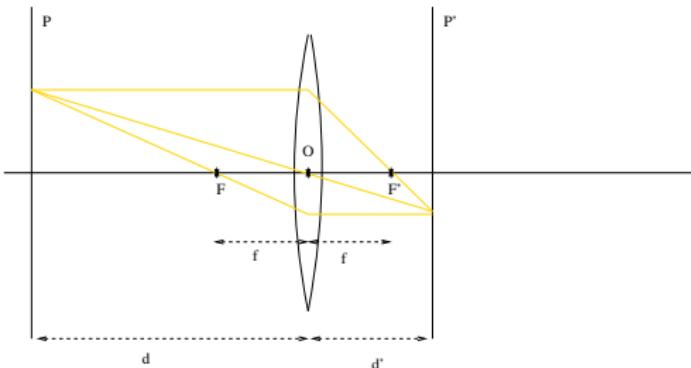
Sheila Bocchine - creative commons



Un sténopé artisanal

- Pour obtenir une image plus nette tout en ayant une ouverture non nulle (besoin de lumière) : ajout d'une lentille.
- On observe toujours $g * S$, où g est la réponse impulsionnelle du système optique (en négligeant diverses aberrations et interférences).

Le modèle "lentille mince"



Hypothèses :

- Rayons lumineux proches de la normale à la surface de la lentille
- On néglige le trajet de la lumière à l'intérieur de la lentille.

Rayons issus de P se concentrent sur P' . On note f la **distance focale**
→ Relation de Descartes

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

Effectuer la mise au point : ajuster la position du plan P .

Si l'objet photographié n'est pas dans le plan P : flou de mise au point → convolution.

On observe une scène

$$\tilde{s} = g_o * s,$$

où

$$g_o = g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil}.$$

- g_{ouv} ouverture finie
- g_{flou} défaut de mise au point
- g_{fil} flou de bougé (ou de filé)

g_o s'appelle la **réponse impulsionnelle** (PSF en anglais pour Point Spread Function) du système optique.

Un phénomène non pris en compte : le flou est variable selon la distance des objets à l'appareil photo



La profondeur de champ

Distance séparant l'objet net le plus proche de l'appareil de l'objet net le plus lointain.

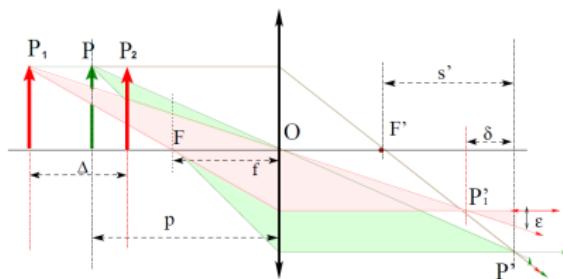


Figure par H. Maître

En utilisant la relation de Descartes et en notant D l'ouverture du diaphragme, on trouve

$$\Delta = \frac{2\epsilon Dpf(p-f)}{D^2f^2 - \epsilon^2(p-f)^2}$$

En supposant que $\delta \ll s$ et $f \ll p$ on a

$$\Delta \approx \frac{2\epsilon p^2}{Df}$$

Ouverture

D diamètre du diaphragme ; f distance focale ;
nombre d'ouverture $N = f/D$ (généralement progression géométrique)



wikipedia.org

Quand N augmente (à f constant) :

- La profondeur de champs augmente (formule précédente)
- Les défauts de diffraction augmentent
- Les défauts de vignettage diminuent

Profondeur de champs

Nombre d'ouverture $N = 1,4$



Profondeur de champs

Nombre d'ouverture $N = 13$



Flou artistique



f/2.8 - by bahramr - creative commons

Focale

Diverses focales en format 24 × 36 depuis un même point de vue : influence sur la taille de l'image



28 mm :
courte focale,
image de petite taille.



50 mm :
focale normale.



70 mm



210 mm :
longue focale,
image de grande taille.

Changement de focale et de point de vue : influence sur la perspective



24 mm :
point de vue rapproché,
perspective exagérée.



50 mm :
perspective « normale ».



100 mm



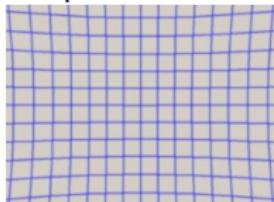
200 mm :
point de vue éloigné,
perspective écrasée.

(source : Wikipedia)

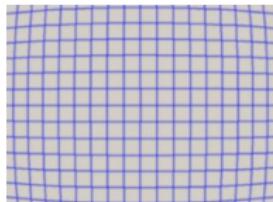
Autres phénomènes

Parmi les phénomènes qui ne rentrent pas dans le cadre d'un système linéaire invariant par translation :

- Distortion géométriques

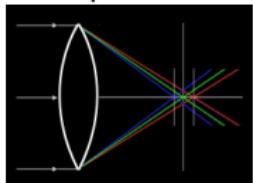


"en coussinet" :

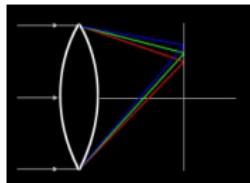


"en barillet" :

- Aberrations chromatiques



"longitudinale" :



"transversale" :

- Vignetage



Aberration transversale



Aberration longitudinale



Avant et après correction du vignettage
Correction automatique DxO

Autre paramètre d'acquisition : le temps d'exposition

- Peut compenser un manque de lumière ou une ouverture faible
- Doit être court pour les objets en mouvement
- Sinon, flou de mouvement



- Après passage dans le système optique
→ acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- Echantillonnage du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) → convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique
→ acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- Echantillonnage du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) → convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique
→ acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- **Echantillonnage** du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow \left(\{f(k)\}_{k \in \Omega} \right).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) → convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

- Après passage dans le système optique
→ acquisition de l'information lumineuse du plan focal
- Utilisation d'un capteur numérique : grille de capteurs photosensibles qui convertissent les photons en courant électrique
- **Echantillonnage** du signal lumineux

$$\left(f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \right) \rightarrow (\{f(k)\}_{k \in \Omega}).$$

- Intégration des photons par le capteur (comptage des photons) → convolution avec g_{capt} , fonction indicatrice du capteur
Modification de la PSF

Intégration par le capteur

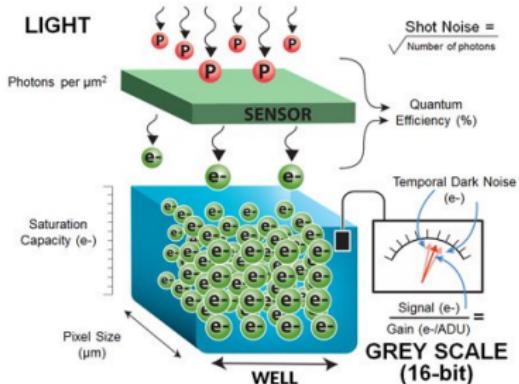
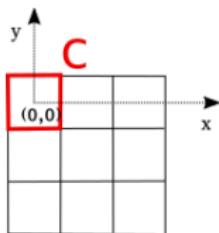


image credit : www.flir.com

- En chaque cellule photoréceptrice : addition des contributions des photons
≠ valeurs ponctuelles
- Taille des cellules :
1 microns (smartphones) / 10 microns (reflex)

Intégration par le capteur



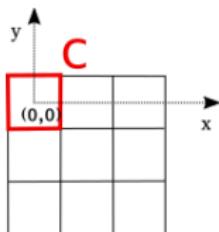
$I_{i,j}$: image capturée par le capteur à la position (i,j)

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \int_{C+(i,j)} I(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \mathbb{1}_C(x - i, y - j) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \mathbb{1}_C(i - x, j - y) dx dy \\ &= (I * \mathbb{1}_C)(i, j) \end{aligned}$$

→ échantillonnage de $I * \mathbb{1}_C$

la PSF g_0 est modifiée en $g_0 * \mathbb{1}_C$

Intégration par le capteur



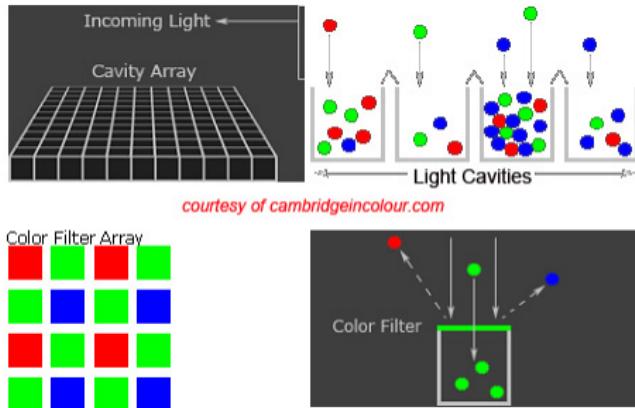
$I_{i,j}$: image capturée par le capteur à la position (i,j)

$$\begin{aligned} I_{i,j} &= \int_{C+(i,j)} I(x, y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \mathbb{1}_C(x - i, y - j) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} I(x, y) \mathbb{1}_C(i - x, j - y) dx dy \\ &= (I * \mathbb{1}_C)(i, j) \end{aligned}$$

→ échantillonnage de $I * \mathbb{1}_C$

la PSF g_0 est modifiée en $g_0 * \mathbb{1}_C$

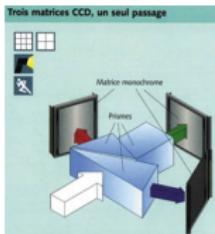
Trame de Bayer



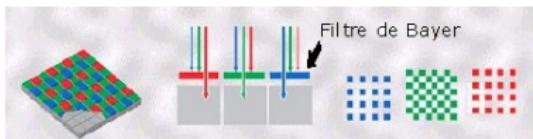
En chaque pixel : une seule couleur capturée
→ nécessite une reconstruction des 2 couleurs manquantes : dématricage (démosaïcage)
Voir le cours sur la couleur

Alternatives pour capturer la couleur

- Tri-CCD



- Capteur Fovéon



→ cours sur la couleur

Rappels d'analyse de Fourier

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi \mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

Rappels d'analyse de Fourier

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

Rappels d'analyse de Fourier

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Pour $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$,

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

- Définition alternative (traitement du signal) avec $\exp(-2i\pi\mathbf{x} \cdot \omega)$.
- \hat{f} est continue et $\rightarrow 0$ à l'infini.
- On supposera désormais que f est régulière et décroît rapidement à l'infini :

$$\forall p, q \in \mathbb{N}^2, |\mathbf{x}|^p \partial_q f \leq C.$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{x} \cdot \omega) d\mathbf{x}.$$

Rappels d'analyse de Fourier

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-2} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.
- $\mathcal{F}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \exp(-i\omega \cdot \mathbf{a}) \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) \cdot f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \mathbf{a})$
- Dans la suite, on appliquera certaines de ces formules à l'impulsion de Dirac (δ) sans plus de justifications
Cadre mathématique : théorie des distributions (e.g. "Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod, 2000)

Rappels d'analyse de Fourier

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-2} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.
- $\mathcal{F}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \exp(-i\omega \cdot \mathbf{a}) \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \mathbf{a})$
- Dans la suite, on appliquera certaines de ces formules à l'impulsion de Dirac (δ) sans plus de justifications
Cadre mathématique : théorie des distributions (e.g. "Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod, 2000)

- $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$ et $\mathcal{F}(f \cdot g) = (2\pi)^{-2} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$.
- $\mathcal{F}(f(\mathbf{x} - \mathbf{a})) = \exp(-i\omega \cdot \mathbf{a}) \mathcal{F}(f)$ et $\mathcal{F}(\exp(i\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}) f)(\omega) = \mathcal{F}(f)(\omega - \mathbf{a})$
- Dans la suite, on appliquera certaines de ces formules à l'impulsion de Dirac (δ) sans plus de justifications
Cadre mathématique : théorie des distributions (e.g. "Analyse de Fourier et applications", C. Gasquet et P. Witomski, Dunod, 2000)

- L'échantillonnage d'une fonction f en un point x est modélisé par

$$f \cdot \delta_x$$

où δ_x est une distribution (impulsion de Dirac)

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies avec les impulsions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$, vérifie

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

- L'échantillonnage d'une fonction f en un point x est modélisé par

$$f \cdot \delta_x$$

où δ_x est une distribution (impulsion de Dirac)

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies avec les impulsions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$, vérifie

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

- L'échantillonnage d'une fonction f en un point x est modélisé par

$$f \cdot \delta_x$$

où δ_x est une distribution (impulsion de Dirac)

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies avec les impulsions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$, vérifie

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

- L'échantillonnage d'une fonction f en un point x est modélisé par

$$f \cdot \delta_x$$

où δ_x est une distribution (impulsion de Dirac)

- $\mathcal{F}(\delta_x)(\omega) = \exp(-ix\omega)$
- Sous certaines conditions, les correspondances convolution-multiplication restent vraies avec les impulsions
- On montre que le *peigne de Dirac*, $\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$, vérifie

$$\mathcal{F}\left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}\right)(\omega) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \exp(iaj\omega) = \frac{2\pi}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}}.$$

Retour à l'acquisition des images :

$$u = (h * s) \cdot \Pi_{\Gamma}$$

où

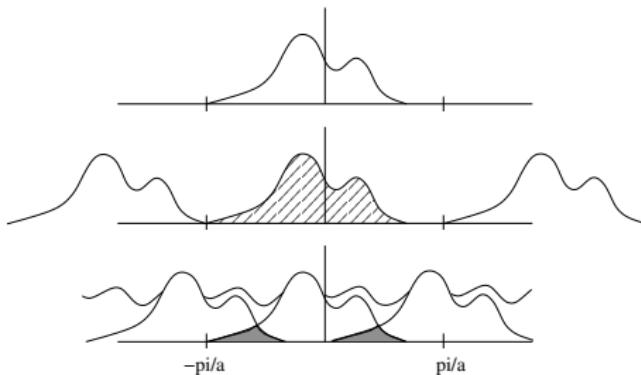
- s scène (fonction de L^1),
- h : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_{\Gamma} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma}$,
le peigne de Dirac associé aux positions Γ

Le repliement de spectre en dimension 1

On considère $\Gamma = a\mathbb{Z}$, donc $\Pi_\Gamma = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{aj}$,
on a alors $u = f \cdot \Pi_\Gamma$ et

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{a} \mathcal{F}(f) * \sum_{j \in \mathbb{Z}} \delta_{\frac{2\pi j}{a}},$$

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = \frac{1}{a} \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}(f) \left(\omega - \frac{2\pi j}{a} \right).$$



Le repliement de spectre en dimension 1

Conséquence :

- si $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\pi/a, \pi/a]$, on a

$$\mathcal{F}(f.\Pi_\Gamma).\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]} = \mathcal{F}(f),$$

donc on retrouve f car $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$, donc

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f.\Pi_\Gamma).\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = f.\Pi_\Gamma * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]})$$

or $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}$, donc

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

- sinon, le spectre de $f.\Pi_\Gamma$ est détérioré de manière irréversible.

Le repliement de spectre en dimension 1

Conséquence :

- si $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\pi/a, \pi/a]$, on a

$$\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]} = \mathcal{F}(f),$$

donc on retrouve f car $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$, donc

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = f \cdot \Pi_\Gamma * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]})$$

or $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}$, donc

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

- sinon, le spectre de $f \cdot \Pi_\Gamma$ est détérioré de manière irréversible.

Le repliement de spectre en dimension 1

Conséquence :

- si $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset [-\pi/a, \pi/a]$, on a

$$\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]} = \mathcal{F}(f),$$

donc on retrouve f car $f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))$, donc

$$f = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f \cdot \Pi_\Gamma) \cdot \mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = f \cdot \Pi_\Gamma * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]})$$

or $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_{[-\pi/a, \pi/a]}) = \frac{\sin(\pi x/a)}{\pi x/a}$, donc

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} f(ja) \frac{\sin((x - ja)\pi/a)}{(x - ja)\pi/a}.$$

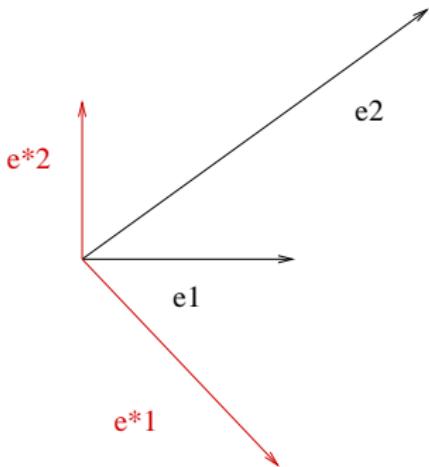
- sinon, le spectre de $f \cdot \Pi_\Gamma$ est détérioré de manière irréversible.

La dimension 2 : le réseau dual

Soit $\Gamma = \mathbb{Z}.\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}.\mathbf{e}_2$, où $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ non colinéaires.

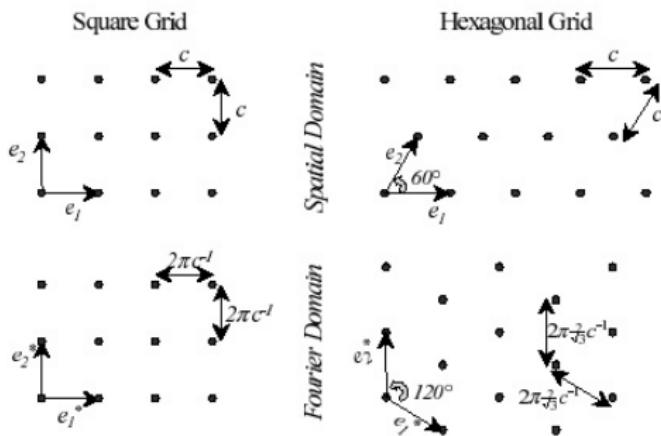
Le réseau dual est $\Gamma^* = \mathbb{Z}.\mathbf{e}_1^* + \mathbb{Z}.\mathbf{e}_2^*$,

où $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j^* = 2\pi\delta_{i,j}$.



Exemples de réseaux

- Réseau carré \leftrightarrow réseau carré
- Réseau hexagonal \leftrightarrow réseau hexagonal



Le repliement de spectre en dimension 2

On a $\Gamma = \mathbf{e}_1\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2\mathbb{Z}$ et $\Gamma^* = \mathbf{e}_1^*\mathbb{Z} + \mathbf{e}_2^*\mathbb{Z}$, $\Pi_\Gamma = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \delta_{j\mathbf{e}_1, k\mathbf{e}_2}$.

On montre que $\mathcal{F}(\Pi_\Gamma) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \Pi_{\Gamma^*}$.

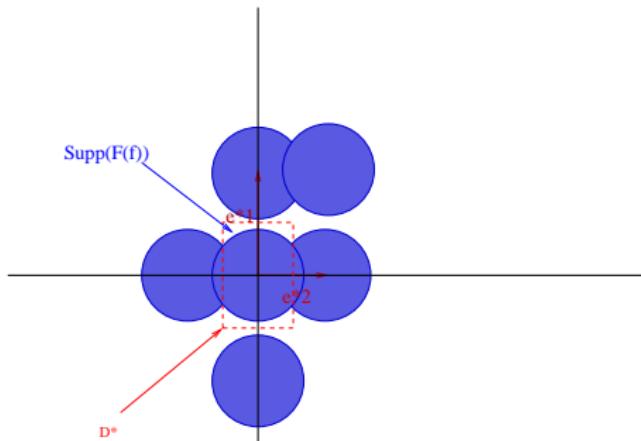
L'image échantillonnée est $u = f \cdot \Pi_\Gamma$ et

$$\mathcal{F}(u) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \mathcal{F}(f) * \Pi_{\Gamma^*}$$

donc

$$\mathcal{F}(u)(\omega) = |\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*| \sum_{\gamma \in \Gamma^*} \mathcal{F}(f)(\omega - \gamma)$$

On a repliement de spectre si les $\gamma + \text{Supp}(\mathcal{F}(f))$ ne sont pas disjoints, pour $\gamma \in \Gamma^*$.



Le théorème de Shannon en dimension 2

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$ tels que

- ① $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma^*, \gamma + K \cap \gamma' + K = \emptyset$
- ② $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset K$,
alors

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) s(\mathbf{x} - \gamma),$$

où

$$s = \frac{1}{|K|} \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K).$$

Soit $K \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma^*$:

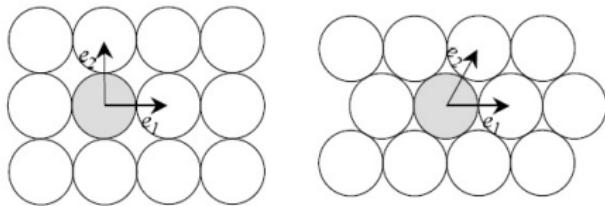
$$(\gamma + K) \cap (\gamma' + K) = \emptyset$$

on veut que $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \subset K$.

- Les hautes fréquences comprises dans la scène s (par exemple les bords) sont atténuerées par g_o .
- Si cela n'est pas suffisant (i.e. $\text{Supp}(\mathcal{F}(f)) \notin K$), on peut procéder à un filtrage passe bas. Il suffit de considérer $h * f$ où $\text{Supp}(F(h)) \in K$.
- si on augmente la fréquence d'échantillonnage, il faut diminuer la taille des capteurs → augmentation de la taille du support de $\mathcal{F}(h_{capt})$...

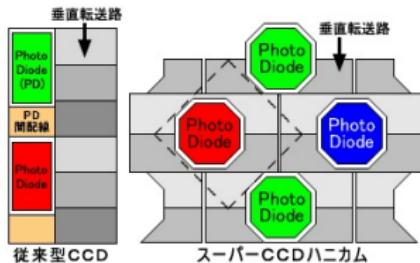
Exemple 1 : Réseau hexagonal et spectre isotrope

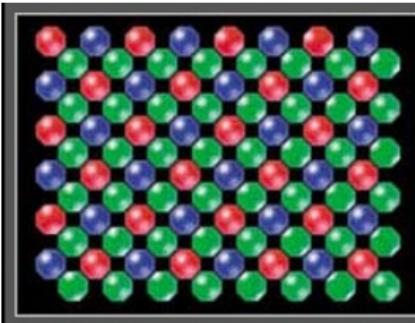
Si l'on suppose que $\text{Supp}(\mathcal{F}(f))$ est un disque, on montre alors que le réseau hexagonal est le plus efficace (environ 15% de plus que le réseau carré)



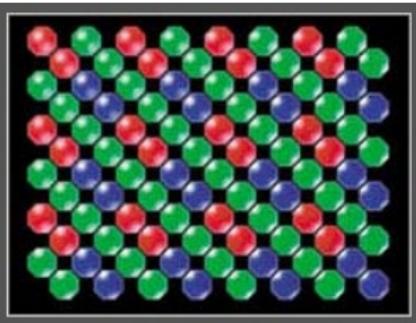
Exemple 2 : le *super CCD* (Fujifilm)

Agencement en quinquence → possibilité de capteurs de plus grandes dimensions pour une même résolution horizontale et verticale.





Conventional Super CCD color filter array layout



Super CCD EXR color filter array layout

La transformée de Fourier Discrète

On ne dispose que d'images discrètes : $\{u_{k,l}\}_{k=1,\dots,M; l=1,\dots,N}$.

On considère la Transformée de Fourier Discrète (TFD) de $u_{k,l}$:

$$\hat{u}_{m,n} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} u_{k,l} \omega_N^{-mk} \omega_N^{-nl},$$

où $\omega_N = \exp\left(\frac{2i\pi}{N}\right)$.

Une image et sa TFD



Une image et le logarithme du module de sa transformée de Fourier

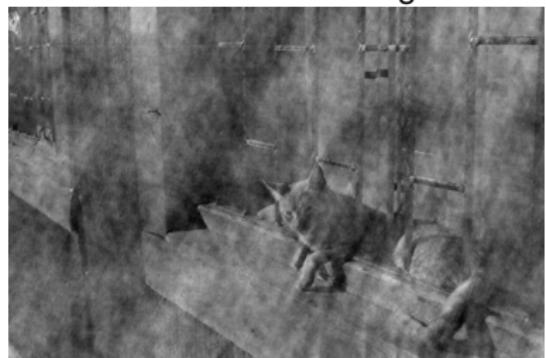
Digression



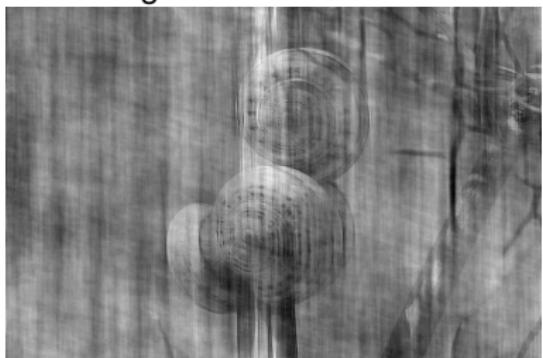
Image A



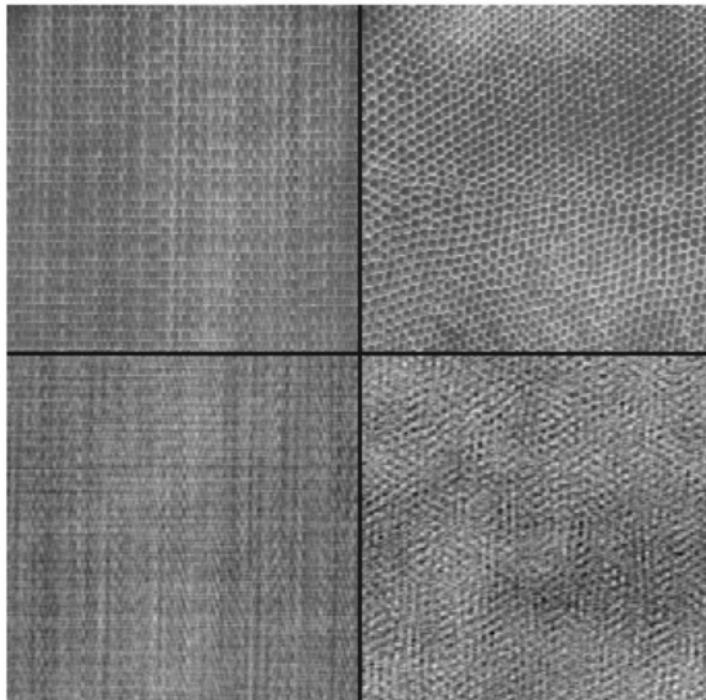
Image B



Phase de A et module de B

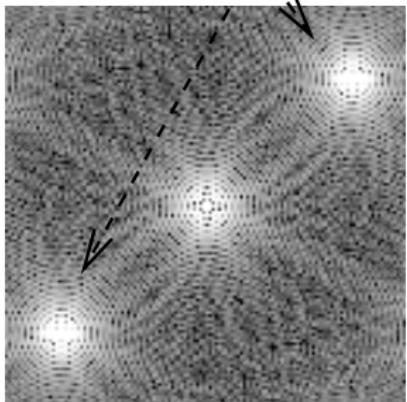
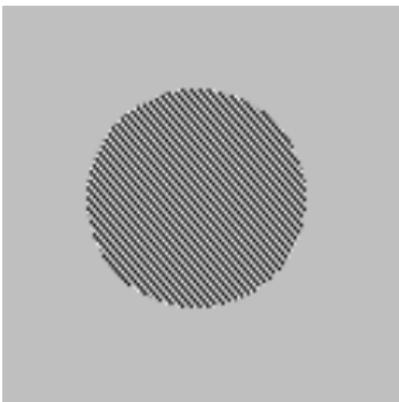
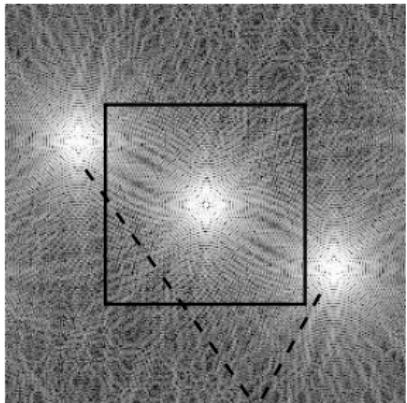
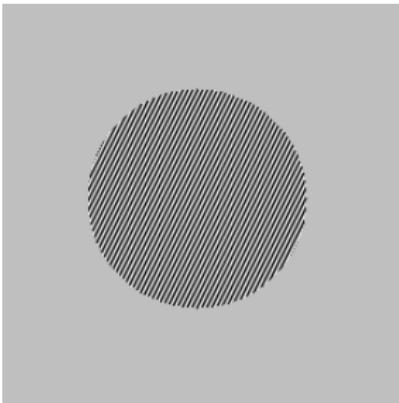


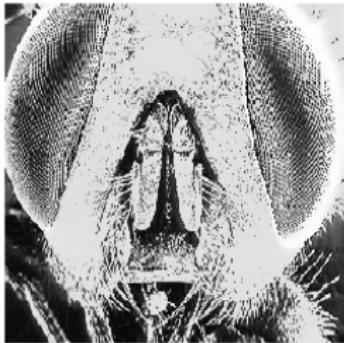
Phase de B et module de A



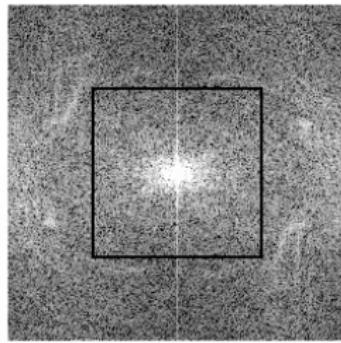
Les images du bas sont obtenues en remplaçant les phases de la transformée de Fourier par des phases aléatoires
Plus de détails dans le cours sur la texture

Un exemple synthétique de repliement





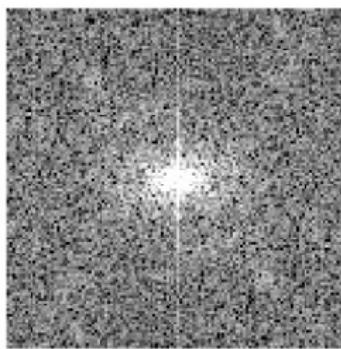
(a) Image originale



(b) Sa TFD, non nulle en dehors du carré visible en surimpression



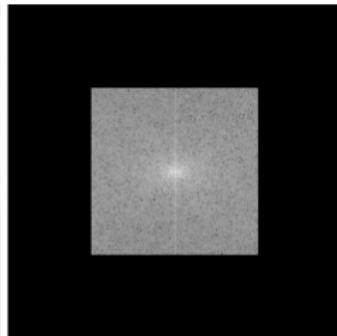
(c) Image sous-échantillonnée d'un facteur 2



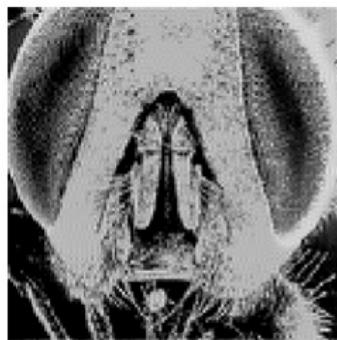
(d) La TFD correspondante, sur laquelle il y a repliement



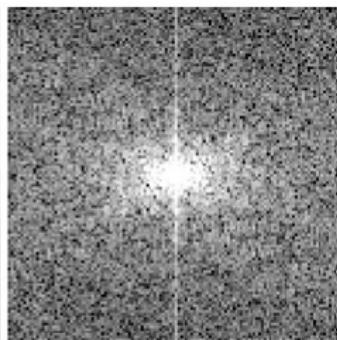
(a) Image obtenue par TFD inverse
de b



(b) Image obtenue en mettant à zéro
les hautes fréquences de 11.1.3-a



(c) Sous-échantillonnage : le replie-
ment a disparu



(d) TFD de c

Autre exemple



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs déficients)



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs déficients)



Image issue d'un appareil numérique aux filtres passe-bas (sur les capteurs déficients)

Autre exemple de repliement



A gauche, image originale ; à droite sous-échantillonnage d'un facteur 2

Apparition du ringing



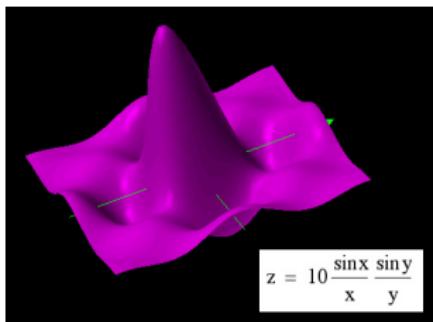
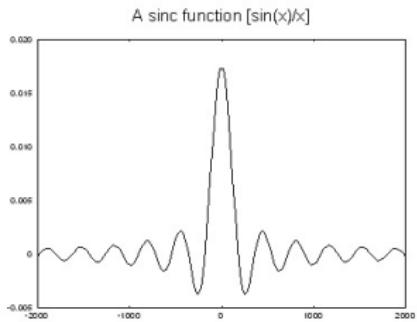
A gauche, image originale ; à droite : sous-échantillonnage d'un facteur 2
après multiplication par l'indicatrice d'un carré en Fourier

Le phénomène du ringing

Pour être dans les conditions de Shannon, on peut multiplier le spectre de l'image par $\mathbb{1}_K$. L'image résultante est alors

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f)\mathbb{1}_K) = f * \mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K).$$

Si K est la fonction indicatrice d'un carré de côté a , $\mathcal{F}^{-1}(\mathbb{1}_K)$ est le produit de deux fonctions sinc :



Ringing



Retour à l'acquisition des images :

$$u = (g * s) \cdot \Pi_{\Gamma} \cdot F$$

où

- s scène (fonction de L^1),
- g : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_{ouv} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_{\Gamma} = \sum \gamma \in \Gamma \delta_{\gamma}$,
- $F = \mathbb{1}_{\Omega}, \Omega \in \mathbb{R}^2$, support de l'acquisition.

$$u = Q[h((g_o * s).\Pi_\Gamma.F + b)]$$

où

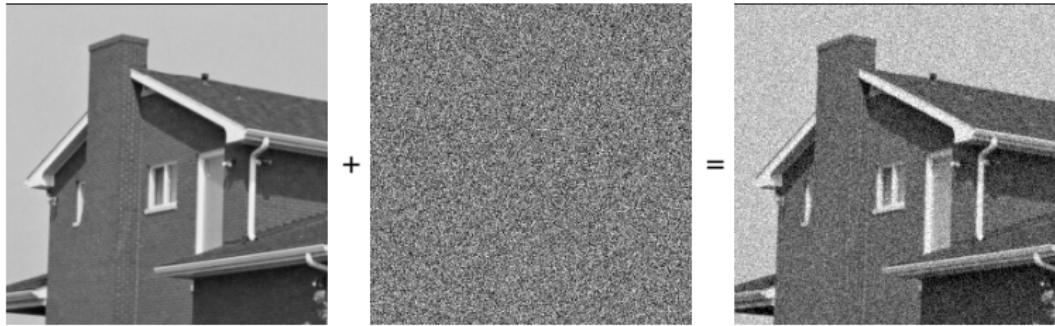
- s scène (fonction de L^1),
- g : réponse impulsionnelle du système optique et de l'intégration des capteurs ($g_{ouvr} * g_{flou} * g_{fil} * g_{capt}$),
- $\Pi_\Gamma = \sum \gamma \in \Gamma \delta_\gamma$,
- $F = \mathbb{1}_\Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^2$, support de l'acquisition.
- b bruit additif : pour $(i,j) \in \Gamma$, $\{b(i,j)\}$ est une famille de variables aléatoires i.i.d.
- h est une fonction croissante : un "changement de contraste"
- Q est un opérateur de *quantification*

Pour l'étude détaillée des rôles du changement de contraste et de la quantification :
→ prochain cours.

On note v l'image discrète après optique + échantillonnage ; u l'image bruitée

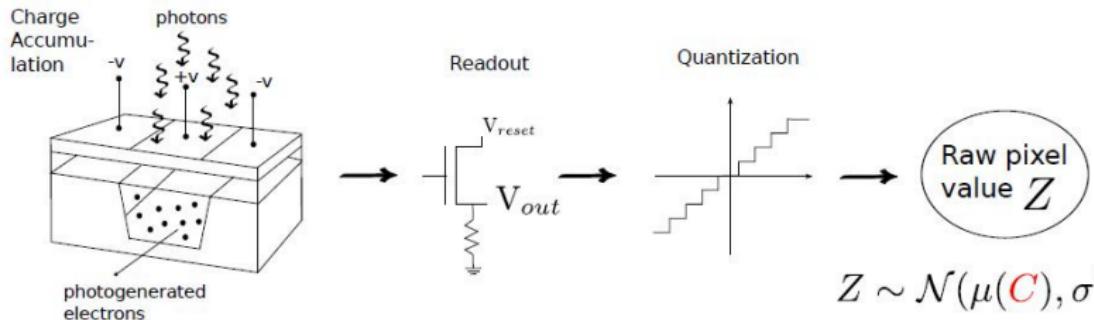
- Bruit additif : $u(i,j) = v(i,j) + b(i,j)$
où les $b(i,j)$ sont i.i.d.
- Bruit impulsional : $u(i,j) = v(i,j).A(i,j) + (1 - A(i,j)).B(i,j)$,
où $A(i,j)$ sont des variables de Bernoulli i.i.d. et $B(i,j)$ des variables i.i.d.
("sel et poivre" si B à valeurs dans $\{0, M\}$)
- Bruit multiplicatif (de *chatoiement* ou speckle en anglais) :
 $u(i,j) = v(i,j).b(i,j)$
avec les $b(i,j)$ i.i.d.

Modèle additif



En pratique l'hypothèse de bruit i.i.d. est fausse !

Les causes du bruit



$$Z \sim \mathcal{N}(\mu(C), \sigma^2(C))$$

C irradiance

τ exposure time

g camera gain

a photo-response non-uniformity factor

μ_r, σ_r^2 readout noise mean and variance

$$\mu(C) = ga\tau C + \mu_R$$

$$\sigma^2(C) = g^2 a \tau C + \sigma_R^2$$

Illustration Cecilia Aguerrebere

- **Bruit *shot noise*** Nb de photons émis par la source : loi de Poisson de moyenne $C\tau$ avec C radiance (nombre de photons par unité de temps) et τ temps d'exposition
- **Courant d'obscurité (Dark current)**
Emission résiduelle d'électrons d'origine thermique : Poisson de moyenne $d\tau$ dépendant de τ
- **Bruit de lecture (readout noise).**
Erreurs lors de la lecture des électrons (par rapport à un voltage de référence)
- **Non uniformités spatiales**
de la réponse des photo-senseurs (PRNU)
du bruit thermique (DCNU)

$$I_{noise} = f([g(Poiss(C\tau) + Poiss(d_\tau))] + N_{out}) + Q$$

avec

- $Poiss(\lambda)$: variable de Poisson de moyenne λ
- C radiance (photons / temps)
- g : gain
- τ : temps d'acquisition
- d_τ : valeur moyenne du bruit *dark current*
- N_{out} : bruit de lecture (gaussien de moyenne μ_R et variance σ_R^2).
- Q : bruit de quantification (uniforme)
- f : fonction de réponse de l'appareil

Remarque : on néglige les variations spatiales (DCNU et PRNU)

Première simplification

Le modèle complet est

$$I_{noise} = f([g(Poiss(C\tau) + Poiss(d_\tau))] + N_{out}) + Q$$

Hypothèses supplémentaires :

- On considère des images RAW, pour lesquelles $f = Id$ (réponse linéaire au nombre de photons)
- Le bruit de quantification Q est négligeable devant le bruit de lecture
- Le dark current est négligeable pour temps d'exposition courts ($< 1s$)

Alors

$$I_{noise} = gPoiss(C\tau) + N_{out}$$

$$I_{noise} = gPoiss(C\tau) + N_{out}$$

- On a $P(\lambda) \approx N(\lambda, \lambda)$ pour λ grand (en pratique quelques dizaines)
- En photographie standard : l'approximation gaussienne est suffisante (faux pour e.g. l'astrophotographie)

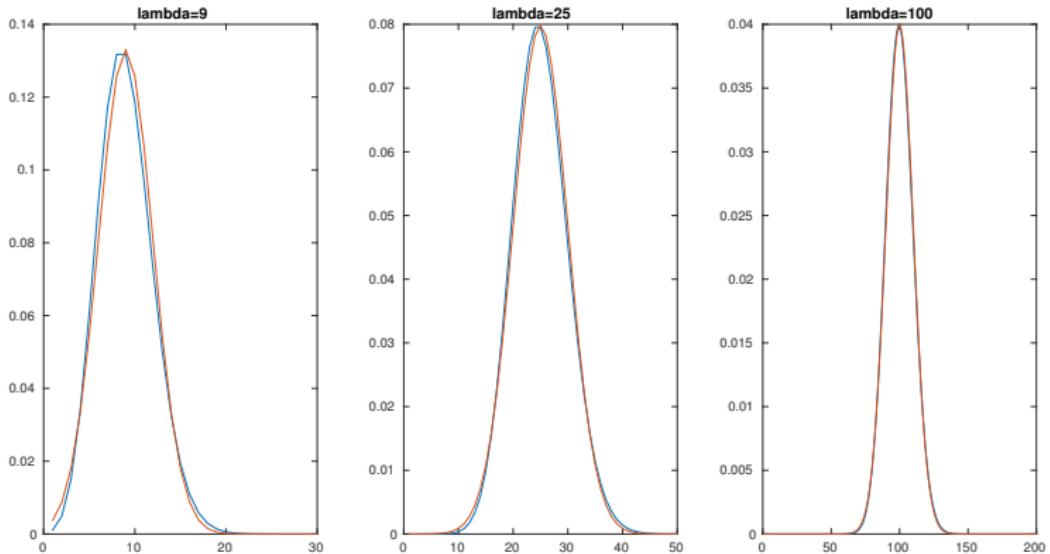
Approximation gaussienne :

$$N(gC\tau + \mu_R, g^2C\tau + \sigma_R^2)$$

avec μ_R et σ_R les moyennes et variances du bruit de lecture

Application : création d'images HDR / cours 4IM06

Approximation gaussienne



Bleu : Poisson ; rouge : normale

Conclusion : la variance du bruit **dépend du signal**.

Pour prendre en compte ce phénomène, deux approches possibles :

- utilisation directe du modèle de bruit (e.g. pour dériver des estimateurs statistiques) : cf cours HDR à venir
- modification du signal pour se ramener à un bruit gaussien i.i.d.
opération de *stabilisation de la variance* (e.g. transformée de Anscomb)

Compléments :

- *Study of the digital camera acquisition process and statistical modeling of the sensor raw data*, C. Aguerrebere et al., preprint HAL, 2013
- *Optimal inversion of the generalized Anscomb transformation for Poisson-Gaussian noise*, A. Mäkitalo et A. Foi, IEEE Image Processing, 22, 1, pp.91-103, 2013

En bref, à retenir :

- Camera oscura / Importance de l'occultation et de la perception relative des tailles
- Réponse impulsionnelle
- Relation de Descartes
- Profondeur de champs et paramètres de prise de vue
- Echantillonnage / repliement de spectre
- Ringing
- Modélisation du bruit