





# Analyse multi-échelle

Principes et applications transparents de Marco Cagnazzo, cours Saïd Ladjal, said.ladjal@telecom-paris.fr

**IMA 201** 

#### Introduction

Ondelettes Débruitage



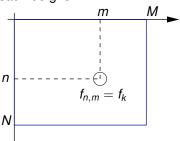
#### Introduction





# Représentation des images numériques

- Grille discrète, image  $N \times M$  pixels
- A chaque pixel (n, m), on associe un ordre de traitement k
- Généralement, balayage ligne par ligne unilatéral : k = (n-1)M + m
- On notera indifféremment  $f_{n,m}$  ou  $f_k$
- Images en niveaux de gris







#### Transformations linéaires

#### Rappel: Cas 1D

Dans le cas 1-D, une transformée linéaire est un produit matriciel. Soit  $\mathbf{f} \in \mathbb{C}^{N_1}$  le vecteur d'entrée. En général, le résultat de la transformée est un vecteur  $\mathbf{g} \in \mathbb{C}^{N_2}$  tel que :

$$\mathbf{g} = \mathsf{Tf}$$
  $g_k = \sum_{n=1}^{N_1} T_{k,n} f_n$ 

Dans la majorité des cas, nous nous intéressons au cas  $N_1=N_2=N$ . La transformée est entièrement définie par la matrice carrée  $\mathbf{T}\in\mathbb{C}^{N\times N}$ 

Comment étendre cette définition au cas 2D ?





4/71

### Transformations linéaires en 2D : forme scalaire

Soit **F** une image (ou un bloc de pixels) de taille  $N \times M$ . Une transformée de **F** est une image **G** de taille  $N \times M$  telle que chaque  $g_{k,\ell}$  soit une combinaison linéaire des éléments de  ${\bf F}$  :

$$g_{k,\ell} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} t(k,\ell,n,m) f_{n,m}$$
 (1)

Une transformée 2D est alors complètement définie par le tenseur t:

$$t: (k, \ell, n, m) \to \mathbb{C}$$
  
 $k \in 1, ..., N$   $\ell \in 1, ..., M$   
 $n \in 1, ..., N$   $m \in 1, ..., M$ 





#### Transformations linéaires en 2D : forme vectorielle

Une transformée 2D peut toujours s'écrire comme un produit matriciel. Il suffit d'introduire la forme vectorielle des images.

Soient **F**, **G** et *t* liées par l'équation (1). On introduit  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^{NM \times 1}$ :

$$\mathbf{x} = [f_{1,1}, f_{2,1}, \dots, f_{N,1}, f_{1,2}, f_{2,2}, \dots, f_{N,2}, f_{1,M}, f_{2,M}, \dots, f_{N,M}]^T$$

$$\mathbf{y} = [g_{1,1}, g_{2,1}, \dots, g_{N,1}, g_{1,2}, g_{2,2}, \dots, g_{N,2}, g_{1,M}, g_{2,M}, \dots, g_{N,M}]^T$$

Chaque élément de y est une combinaison linéaire d'éléments de x, donc :

$$y = Tx$$

Après de calculs banals mais laborieux, on peut trouver :

$$\mathbf{T}_{i,j} = t[r(j), c(j), r(i), c(i)]$$

$$r(j) = j - N \left| \frac{j-1}{N} \right|$$

$$c(j) = N \left| \frac{j-1}{N} \right| + 1$$

La transformée est alors complètement définie par la matrice  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{\mathit{NM} \times \mathit{NM}}$ 





6/71

#### Transformée inverse

On considère des transformées inversibles, c'est-à-dire telles que **T** soit inversible. Dans ce cas :

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{y}$$

Il est évident que dans ce cas, il existe un tenseur t' tel que :

$$f_{n,m} = \sum_{k=1}^{N} \sum_{\ell=1}^{M} t'(n, m, k, \ell) g_{k,\ell}$$

La relation entre t' et  $T^{-1}$  est similaire à celle entre t et T





23.10.20

# Transformations linéaires en 2D : forme matricielle

Étant donné que :

$$g_{k,\ell} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} t(k,\ell,n,m) f(n,m)$$

si on définit :

$$[\tau_{k,\ell}] = \begin{bmatrix} t(k,\ell,1,1) & \dots & t(k,\ell,1,M) \\ t(k,\ell,N,1) & \dots & t(k,\ell,N,M) \end{bmatrix}$$

alors:

23.10.20

$$g_{k,\ell} = \sum_{n,m} \tau_{k,\ell}(n,m) f(n,m)$$

Donc  $g_{k,\ell}$  représente le produit scalaire (le dégrée de similitude) entre l'image f et l'image de base  $[\tau_{k,\ell}]$ 





#### Ondelettes Débruitage

#### Transformée inverse : forme matricielle

On définit :

$$[\tau'_{k,\ell}] = \begin{bmatrix} t'(1,1,k,\ell) & \dots & t'(1,M,k,\ell) \\ t'(N,1,k,\ell) & \dots & t'(N,M,k,\ell) \end{bmatrix}$$

Alors on trouve:

$$\textbf{F} = \sum_{\textbf{k},\ell} g_{\textbf{k},\ell} \tau_{\textbf{k},\ell}'$$

Les  $g_{k,\ell}$  donnent les poids des différents contributions  $[\tau'_{k,\ell}]$  à l'image **F**.

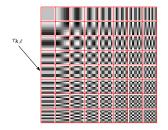
Pour une transformée orthogonale,  $[\tau_{k,\ell}] = [\tau'_{k,\ell}]$ 





Ondelettes Débruitage

### Transformée en forme matricielle : exemple







23.10.20

#### . ..

#### **Transformations linéaires en 2D**

#### Propriétés

▶ Transformée unitaire :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^H$$

► Unitaire et réelle (orthogonale) :

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$$

► Séparable :

$$t(k,\ell,n,m)=t_1(k,n)t_2(\ell,m)$$

ightharpoonup Séparable et symétrique : M = N et

$$t(k, \ell, n, m) = t(k, n)t(\ell, m)$$





# Transformée séparable

Si  $t(k, \ell, n, m) = t_1(k, n)t_2(\ell, m)$ , ils existent deux matrices  $T_1$  et  $T_2$  telles que :

$$G = T_1FT_2^T$$

Démonstration.

$$egin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \quad \Rightarrow h_{p,q} = \sum_{n=1}^N T_1(p,n) f(n,q) \ &= \mathbf{H} \mathbf{T}_2^T \quad \Rightarrow e_{k,\ell} = \sum_{m=1}^M h(k,m) T_2(\ell,m) \ &e_{k,\ell} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M T_1(k,n) f(n,m) T_2(\ell,m) \end{aligned}$$

Donc, si  $T_1(k,\ell) = t_1(k,\ell)$  et  $T_2(k,\ell) = t_2(k,\ell)$ , alors  $\mathbf{G} = \mathbf{E}$  CQFD.





### Transformée séparable : interprétation

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \mathbf{T}_2^T \\ &= \mathbf{T}_1 \left( \mathbf{T}_2 \mathbf{F}^T \right)^T \\ &= \left[ \mathbf{T}_2 \left( \mathbf{T}_1 \mathbf{F} \right)^T \right]^T \end{aligned}$$

Appliquer une transformée 2D séparable est équivalent à :

- ▶ appliquer d'abord la transformée 1D T₂ sur les lignes de F et ensuite la transformée 1D T₁ sur les colonnes ;
- ou alors à appliquer d'abord T<sub>1</sub> sur les colonnes de F et ensuite T<sub>2</sub> sur les lignes





### Transformée séparable et symétrique

Si 
$$N = M$$
 et  $t_1 = t_2 = t$  alors  $t(k, \ell, n, m) = t(k, n)t(\ell, m)$  et  $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_2 = \mathbf{C}$  avec  $\mathbf{C}_{i,j} = t(i,j)$ 

Autrement dit, si on applique la transformée 1D C sur les lignes et sur les colonnes de F, on est en train de calculer une transformée 2D séparable et symétrique :

$$\mathbf{G} = \mathbf{CFC}^T$$
  $g_{k,\ell} = \sum_{n,m} C(k,n)C(\ell,m)f_{n,m}$ 

La transformée 2D est alors complètement caractérisée par la matrice  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ 

On peut prouver que **T** est inversible [orthogonale] si et seulement si C l'est.

Les transformées les plus intéressantes sont réelles, séparables, symétriques et orthogonales





# Idées clés

- On peut étendre ce que l'on sait sur les transformées 1-D en 2-D
- Transformée directe : analyse
- ▶ Transformée inverse : synthèse
- Coefficients : mesurent la corrélation avec fonction d'analyse
- Unicité de la décomposition
- Représentation du signal sur un même nombre d'éléments: les coefficients de la décomposition
- Reconstruction : utiliser la base pour décrire le signal (synthèse)





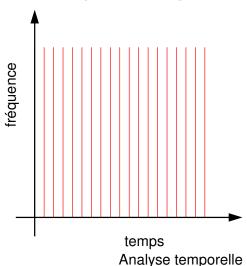
- Analyse: similitude à des "atomes"  $\phi_k[n]$
- Similitude : produit scalaire

$$c[k] = \sum_{n} x[n] \phi_k[n]$$

- Projection sur un ensemble de signaux
- Changement de base
- Transformée linéaire



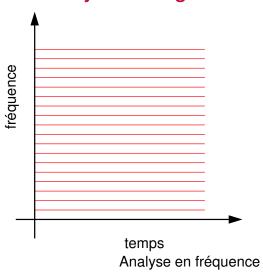




$$\phi_k[n] = \delta[n-k]$$

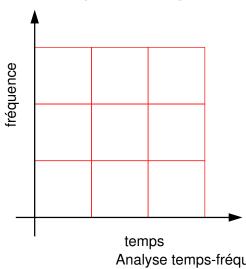


PARIS



$$\phi_k[n] = e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$$





$$\phi_{k,t}[n] = e^{-j2\pi \frac{k}{N}n} w_t[n]$$

Analyse temps-fréquence

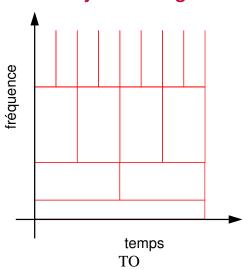


#### Introduction

Ondelettes

Débruitage

# L'analyse des signaux



$$\phi_{k,a}[n] = \phi(2^{-a}n - k)$$

TELECOM Paris

#### **Outline**

Introduction

Transformée en ondelettes

Débruitage





► Modèle d'images : *trends* + *anomalies* 







Une école de l'IMT

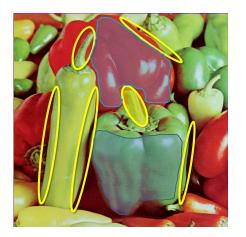
► Modèle d'images : *trends* + *anomalies* 







► Modèle d'images : *trends* + *anomalies* 







#### Anomalies :

- Variations soudaines du signal, sur une courte durée
- Contributions aux hautes fréquences
- Contours des objets
- Bonne résolution spatiale
- Résolution en fréquence grossière

#### Trends:

- Variations lentes du signal, sur une longue durée
- Contributions aux baisses fréquences
- Intérieur des objets
- Résolution spatiale grossière
- Bonne résolution en fréquence





Modèle du signal : une ligne d'une image

Une école de l'IMT







Modèle du signal : une ligne d'une image







Modèle du signal : une ligne d'une image

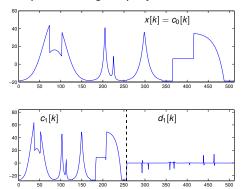






# Ondelettes et analyse à résolutions multiples

- Approximation : version à basse résolution
- "Détails": nuls pour un signal polynomial

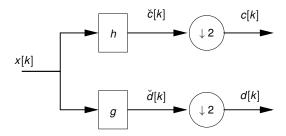






#### Bancs de filtres 1D

#### Décomposition



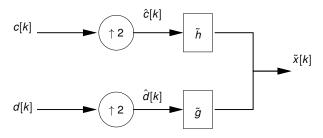
Banc de filtres d'analyse

2  $\downarrow$  : opérateur de décimation :  $c[k] = \check{c}[2k]$ 





#### Reconstruction



Banc de filtres de synthèse

 $2\uparrow$ : opérateur d'interpolation, multiplie le nombre d'échantillons par 2

$$\hat{c}[k] = egin{cases} c[k/2] & ext{si } k ext{ est pair} \\ 0 & ext{si } k ext{ est impair} \end{cases}$$





### Propriétés des filtres

- ► Reconstruction parfaite
- ► RIF
- Orthogonalité
- Moments nuls
- Symétrie

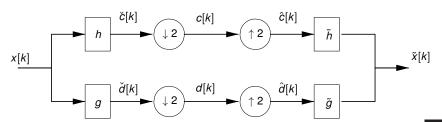




### Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\widetilde{X}_{k}=X_{k+\ell}\Longleftrightarrow\widetilde{X}\left( z\right) =z^{-\ell}X\left( z\right)$$







#### Relations dans le domaine Z

filtre 
$$\check{C}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \check{c}_n z^{-n} = H(z) X(z)$$
décimateur  $C(z) = \frac{1}{2} \left[ \check{C} \left( z^{1/2} \right) + \check{C} \left( -z^{1/2} \right) \right]$ 
interpolateur  $\hat{C}(z) = C(z^2)$ 
sortie  $\check{X}(z) = \check{H}(z) C(z^2) + \check{G}(z) D(z^2)$ 

$$\widetilde{X}(z) = \frac{1}{2} \left[ \widetilde{H}(z) H(z) + \widetilde{G}(z) G(z) \right] X(z)$$

$$+ \frac{1}{2} \left[ \widetilde{H}(z) H(-z) + \widetilde{G}(z) G(-z) \right] X(-z)$$





### Conditions de reconstruction parfaite

En cascadant bancs de filtres d'analyse et de synthèse, on veut la reconstruction parfaite (RP), c'est-à-dire,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\widetilde{X}_{k} = X_{k+\ell} \iff \widetilde{X}(z) = z^{-\ell}X(z)$$
 $\updownarrow$ 

$$\widetilde{H}(z)H(z)+\widetilde{G}(z)G(z)=2z^{-\ell}$$
 Non distorsion  $\widetilde{H}(z)H(-z)+\widetilde{G}(z)G(-z)=0$  Non aliasing





### Conditions de reconstruction parfaite

#### Forme matricielle

Si les filtres d'analyse sont fixés, les filtres de synthèse sont univoquement déterminés :

$$\begin{bmatrix} H(z) & G(z) \\ H(-z) & G(-z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widetilde{H}(z) \\ \widetilde{G}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z^{-\ell} \\ 0 \end{bmatrix}$$

On assume que la *matrice de modulation* soit inversible.





Une école de l'IMT

## Conditions de reconstruction parfaite

#### Filtres de synthèse

Déterminant de la matrice de modulation :

$$\Delta(z) = H(z) G(-z) - G(z) H(-z)$$

$$\widetilde{H}(z) = \frac{2z^{-\ell}}{\Delta(z)} G(-z)$$

$$\widetilde{G}(z) = -\frac{2z^{-\ell}}{\Delta(z)}H(-z)$$





# Reconstruction parfaite avec filtres RIF

Filtres à réponse impulsionnelle finie:

On peut montrer que dans ce cas la condition de non aliasing est équivalente à imposer la condition de signes alternés pour les filtres.

Exemple:

$$h(k) = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}$$
 $g(k) = \begin{bmatrix} p & q & r & s & t \end{bmatrix}$ 

$$\widetilde{h}(k) = \boxed{p - q r - s t}$$

$$\widetilde{g}(k) = \boxed{-a h - c}$$





34/71

# Orthogonalité

L'orthogonalité assure la conservation de l'énergie :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (x_k)^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k)^2 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} (d_k)^2$$

 $\Rightarrow$  énergie de l'erreur sur les coefficients = énergie de l'erreur sur le signal

- Erreur de quantification
- Bruit





Analyse multi-échelle

#### Moments nuls

- ▶ Le moments nuls (MN) représentent la capacité du filtre à reconstruire les polynômes
- Un filtre avec p MN peut représenter des polynômes de degré strictement inférieur à p
- Si l'entrée du banc est un polynôme de grade au plus p − 1 la sortie du filtre passe haut est strictement nulle
- Alors toute l'information est représentée avec la moitié des échantillons (signal d'approximation)
- Un filtre avec p MN a un support non inférieur à 2p





23.10.20

- Les propriétés des bancs de filtres telles qu'on les a vues sont valables pour signaux de durée infinie
- Pour éviter d'augmenter le nombre de coefficients, un signal fini est périodisé avant d'entrer dans le banc d'analyse
- Le résultat est périodique de la même période
  - ► Une période suffit pour effectuer la synthèse
  - Création de sauts (effet de bord)



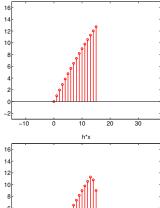


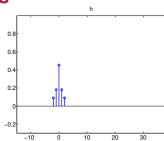
# **Symétrie**

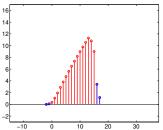
- Pour éviter de créer des coefficients à haute fréquence, on peut penser à symétriser le signal avant de le périodiser (comme pour la TCD)
- Mais on double le nombre de coefficients
- À moins que les filtres ne soient symétriques
  - Dans ce cas le résultat du filtrage est une suite symétrique et périodique : une demi-période suffit pour la reconstruction
  - Contrainte supplémentaire sur les filtres





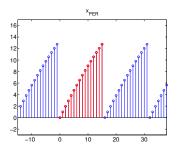


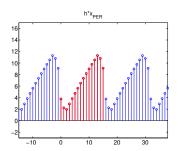




Expansion des coefficients

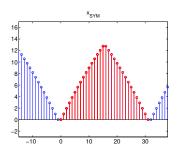


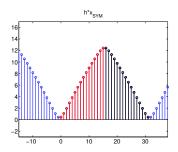
















41/71

# Orthogonalité et biorthogonalité

#### Reconstruction parfaite pour signaux de durée finie

- ► Problème de l'expansion des coefficients (convolution)
- Solution : convolution circulaire
  - La convolution circulaire permet de reconstruire un signal de N échantillons avec N coefficients d'ondelettes
  - Mais elle engendre des discontinuité aux bordes : "fausses" fréquences qui demandent beaucoup de ressources mais ne contiennent pas d'information
- ► Solution : Périodisation symétrique
  - Pas de discontinuités introduites
  - Mais ça double le nombre de coefficients !
  - Sauf si le filtre est symétrique

Le seul filtre orthogonal, RIF et symétrique est celui de Haar!





### Filtre de Haar

$$h(k) = \boxed{1 \quad 1}$$
$$g(k) = \boxed{1 \quad -1}$$

$$\widetilde{h}(k) = \boxed{1} \boxed{1}$$
 $\widetilde{g}(k) = \boxed{-1} \boxed{1}$ 

- Symétrique
- Orthogonal (normalisation)
- Nombre de moments nuls = 1
  - Capable de représenter uniquement les signaux constants par morceaux





23.10.20

# Filtres biorthogonaux

#### Filtres Cohen-Daubechies-Fauveau

Pour les filtres biorthogonaux, si h a p MN et  $\tilde{h}$  a  $\tilde{p}$  MN, le support est au moins  $p + \tilde{p} - 1$ .

Ils existent des filtres biorthogonaux (CDF) qui :

- Sont symétriques (phase linéaire)
- Ont le maximum de MN pour une durée fixée
- Sont "quasi" orthogonaux (conservation de l'énergie) : filtres h et  $\widetilde{h}$  similaires

Ces filtres sont les plus communément utilisés dans le codage d'images.





44/71

# Filtres biorthogonaux 9/7

#### Coefficients du filtre :

n	0	±1	±2	±3	± <b>4</b>
h[/]	0.852699	0.377403	-0.110624	-0.023849	0.037828
$\widetilde{h}[I]$	0.788486	0.418092	-0.040689	-0.064539	

Réponses impulsionnelles des filtres passe-bas d'analyse et de synthèse biorthogonaux 9/7. On a pour les filtres passe-haut :

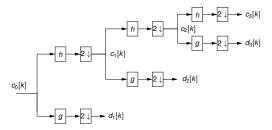
$$g[I] = (-1)^{l+1} \widetilde{h}[I-1]$$
 et  $\widetilde{g}[I] = (-1)^{l-1} h[I+1]$ .





# Analyse multirésolution 1D

#### Décomposition

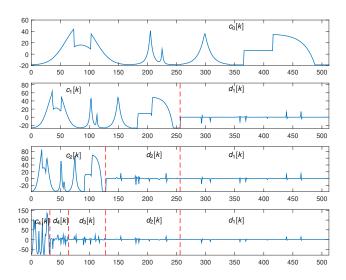


Structure de décomposition en ondelettes sur 3 niveaux de résolution





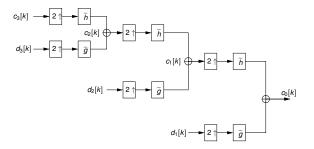
### **Multiresolution Analysis 1D**







### Reconstruction



Reconstruction à partir des coefficients d'ondelettes



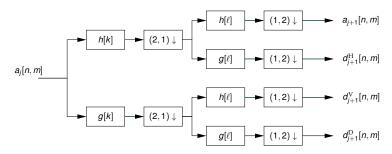


23.10.20

### AMR 2D

#### Bancs de filtres 2D séparables

#### Pour 1 niveau de décomposition

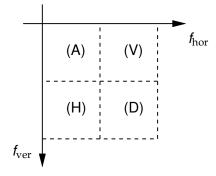






49/71

## Interprétation fréquentielle



Les zones (A), (H), (V) et (D) correspondent effectivement aux coefficients d'approximation, de détails horizontaux, verticaux et diagonaux.

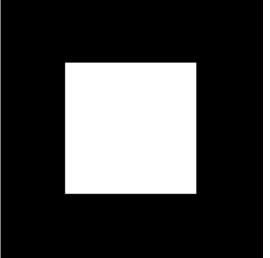




#### Débruitage

Debruitaç

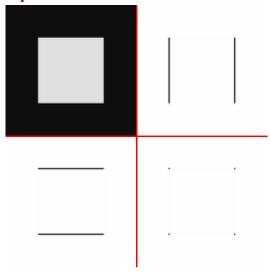








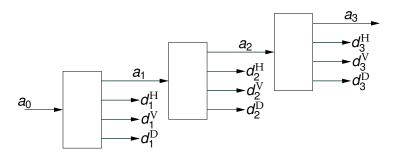
# **Exemple**





Analyse multi-échelle

### AMR 2D sur 3 niveaux

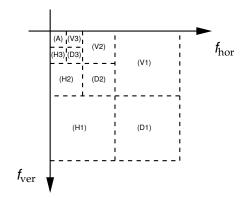


Mise en oeuvre d'une AMR 2D séparable sur 3 niveaux de résolution.





# AMR 2D - interprétation fréquentielle

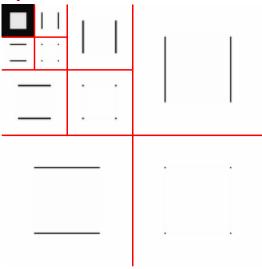






Introduction Ondelettes Débruitage

## **Exemple**



Analyse multi-échelle



Introduction

#### Ondelettes

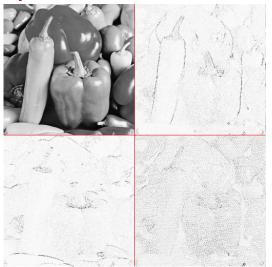
Débruitage







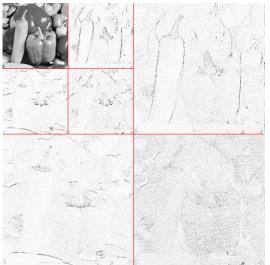
Débruitage







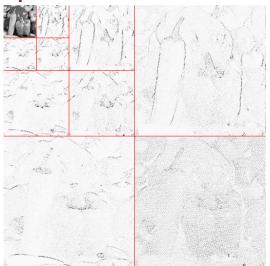
Débruitage







Débruitage







Débruitage







### **Outline**

Débruitage







#### **Principes**

**Modèle** : On observe un signal r(t) qui est la somme d'un signal utile inconnu s(t) et d'un bruit aléatoire b(t).

Après décomposition sur un base d'ondelettes on a :

$$c_j^r[k] = c_j^s[k] + c_j^b[k]$$

#### Hypothèses:

- base orthonormale,
- décomposition orthogonale,
- ightharpoonup signal original (résolution j=0) de taille multiple de  $2^{j_{\text{max}}}$
- ► RSB élevé en bande d'approximation :

$$a_{j_{\max}}^s pprox a_{j_{\max}}^r$$

**Critère**: minimisation de l'EQM:  $\mathcal{E}^2(s) = \mathbb{E}\{\|s - \hat{s}\|^2\}$ 





# **Débruitage**

#### **Principes**

- Signal utile régulier
  - Energie concentrée dans les basses fréquences
  - Signal creux dans les hautes fréquences
  - Beaucoup de coefficients très petits
  - Quelques coefficients de grande amplitude (information !)
- Le bruit est souvent blanc et stationnaire
  - Modèle : blanc, stationnaire, centré et de puissance  $\sigma^2$
  - Puissance équi-repartie entre les sous-bandes
- Qu'est-ce qu'on retrouve dans les sous-bandes à haute fréquence?





## **Exemples**









SNR: 22.4 dB;





# Exemples

### Sousbande d'approximation

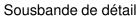




SNR: 46.4 dB











SNR: 15.2 dB





# Estimateur par atténuation

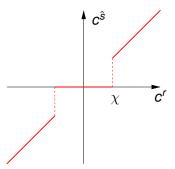
- La valeur optimale de  $\theta_j[k]$  dépend de  $c_i^s[k]$  qui est inconnu!
- ▶ Si on contraint  $\theta$  à être binaire :  $\theta_i[k] \in \{0, 1\}$ , alors
  - L'EQM est le double du cas précédent
  - ▶ Il est plus facile de déterminer la valeur optimale de  $\theta$  : c'est 1 uniquement si  $|c_i^s[k]| > \sigma$
- En conclusion : il faut retenir les coefficients d'ondelettes où le signal est censé avoir une valeur élevée, et mettre à zéro les autres.





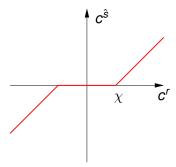
23.10.20

# Notion de seuillage



#### Hard Thresholding

$$c^{\hat{s}} = \begin{cases} c^r & \text{if } |c^r| > \chi \\ 0 & \text{if } |c^r| \leq \chi \end{cases}$$



#### Soft Thresholding

$$c^{\hat{\mathbf{s}}} = \begin{cases} c^r - \chi & \text{if } c^r > \chi \\ 0 & \text{if } |c^r| \le \chi \\ c^r + \chi & \text{if } c^r < \chi \end{cases}$$

Analyse multi-échelle





### Notion de seuillage

- Le seuillage dur a un comportement discontinu au voisinage du seuil  $\pm \chi$
- Le seuillage doux introduit un biais  $\mp \chi$  sur l'estimation des coefficients de grande amplitude
- Problème principale : choix de la valeur du seuil





69/71

### Approche minimax

Si les coefficients d'ondelettes du bruit  $c_i^b[k]$  sont de même loi marginale  $\tilde{\mu}$  symétrique (de variance  $\sigma^2$ )

#### **Alors**

70/71

- On peut donner une équation donnant  $\chi_m$ , le seuil qui minimise le maximum de l'EQM sur l'ensemble des signaux s.
- On peut relier cette EQM au cas idéal d'oracle binaire

#### Tableaux de solutions numériques





## Valeur asymptotique du seuil optimal

 Supposons que les coefficients d'ondelettes du bruit soient de densité marginale :

$$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad \mu(z) = Ce^{-h(z)}$$

où  $C \in \mathbb{R}_+^*$  et h est une fonction paire, continue, strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , convexe et majorée à l'infini par un polynome

▶ Quand la taille du signal  $K_m$  va vers  $+\infty$ , on a

$$\chi_m \sim \chi_{\rm U} = h^{-1}(\ln K_m)$$

- ▶ Dans le cas gaussien,  $\chi_U = \sigma \sqrt{2 \ln K_m}$
- $\triangleright \chi_{II}$  est appelé seuil universel



