Практичне заняття

Частково-рекурсивні функції, рекурсивні функції, примітивно-рекурсивні функції

Приклад 5. Знайти функцію $f\left(x_1, x_2\right)$, яку отримано із функцій $g\left(x_1\right) = 2^{x_1}$ і $h\left(x_1, x_2, x_3\right) = 2^{x_2} \cdot x_3$ за схемою примітивної рекурсії.

Схема примітивної рекурсії для функції двох змінних:

$$\begin{cases} f\left(x_1, 0\right) = g\left(x_1\right), \\ f\left(x_1, y+1\right) = h\left(x_1, y, f\left(x_1, y\right)\right). \end{cases}$$

Знайдемо кілька значень функції f:

$$f\left(x_1, 0\right) = g\left(x_1\right) = 2^{x_1},$$

$$f\left(x_1, 1\right) = h\left(x_1, 0, f\left(x_1, 0\right)\right) = h\left(x_1, 0, 2^{x_1}\right) = 2^0 \cdot 2^{x_1} = 2^{x_1+0},$$

$$f\left(x_1, 2\right) = h\left(x_1, 1, f\left(x_1, 1\right)\right) = h\left(x_1, 1, 2^{x_1}\right) = 2^1 \cdot 2^{x_1} = 2^{x_1+1},$$

$$f\left(x_1, 3\right) = h\left(x_1, 2, f\left(x_1, 2\right)\right) = h\left(x_1, 2, 2^{x_1+1}\right) = 2^2 \cdot 2^{x_1+1} = 2^{x_1+3},$$

$$f\left(x_1, 4\right) = h\left(x_1, 3, f\left(x_1, 3\right)\right) = 2^3 \cdot 2^{x_1+3} = 2^{x_1+6},$$

$$f\left(x_1, 5\right) = h\left(x_1, 4, f\left(x_1, 4\right)\right) = 2^4 \cdot 2^{x_1+6} = 2^{x_1+10},$$

$$f\left(x_1, 6\right) = h\left(x_1, 5, f\left(x_1, 5\right)\right) = 2^5 \cdot 2^{x_1+10} = 2^{x_1+15},$$

$$f\left(x_1, 7\right) = h\left(x_1, 6, f\left(x_1, 6\right)\right) = 2^6 \cdot 2^{x_1+15} = 2^{x_1+21}$$

…………………………………………………

Маємо таку послідовність доданків в показнику 2:

0, 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28,…

Можна записати, що члени цієї послідовності виражаються так:

$$\left[\frac{y\left(y \dot{-} 1\right)}{2}\right].$$

Виникає припущення, що

$$f\left(x_1, x_2\right) = 2^{x_1 + \left[\frac{x_2\left(x_2 \dot{-} 1\right)}{2}\right]}.$$

Операція мінімізації

Операція мінімізації M $\left(n+1\right)-$арній функції g ставить у відповідність $n-$арну функцію f, яка задається співвідношенням:

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = \mu_y\left(g\left(x_1, \ldots, x_n, y\right) = 0\right).$$

Будемо позначати $f = M\left(g\right)$.

Для всіх значень $x_1, \ldots, x_n$, значення функції $f\left(x_1, \ldots, x_n\right)$ визначається так. Послідовно обчислюємо значення $g\left(x_1, \ldots, x_n, y\right)$ для $y = 0,1,2,\ldots$ Перше таке значення y, для якого $g(x_1,\ldots,x_n,y)=0$ буде шуканим значенням функції $f(x_1,\ldots,x_n)$. При цьому для всіх $t<y$ значення $g(x_1,\ldots,x_n,t)$ визначено і не дорівнює нулю.

Процес знаходження значення $f(x_1,\ldots,x_n)$ ніколи не закінчиться в таких випадках:

1) для всіх значень y значення $g(x_1,\ldots,x_n,y)$ визначено і не дорівнює нулю,
2) для всіх $t<y$ значення $g(x_1,\ldots,x_n,t)$ визначено і не дорівнює нулю, а значення $g(x_1,\ldots,x_n,y)$ невизначено,
3) значення $g(x_1,\ldots,x_n,0)$ невизначено.

Функцію, яку можна отримати з базисних функцій за допомогою скінченного числа застосувань операцій суперпозиції, примітивної рекурсії і мінімізації, називають частково-рекурсивної функцією (скорочено ЧРФ).

Усюди визначену ЧРФ називають рекурсивної функцією (скорочено РФ).

Завдання. Знайти значення частково-рекурсивної функції, заданої з використанням оператора мінімізації.

Приклад розв'язання задачі. Нехай $f(x,y)=M(g)$, де $g(x,y,z)=x\dot{-}y^z$. Знайти $f(10,3)$.

$g(10,3,0)=9$, $g(10,3,1)=7$, $g(10,3,2)=1$, $g(10,3,3)=0$.

$f(10,3)=3$.

Варіанти завдань.

1. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=3x\dot{-}yz^2$. Знайти $f(50,3)$.
2. $f(x)=M(g)$, $g(x,y)=x\dot{-}y^3$. Знайти $f(100)$.
3. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x^2+y^2\dot{-}xyz$. Знайти $f(15,2)$.

$g(15,2,0)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 0)=229$

$g(15,2,1)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 1)=229\dot{-}30=199$

$g(15,2,2)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 2)=229\dot{-}60=169$

$g(15,2,3)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 3)=229\dot{-}90=139$

$g(15,2,4)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 4)=229\dot{-}120=109$

$g(15,2,5)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 5)=229\dot{-}150=79$

$g(15,2,6)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 6)=229\dot{-}180=49$

$g(15,2,7)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 7)=229\dot{-}210=19$

$g(15,2,8)=15^2+2^2\dot{-}(15\cdot 2\cdot 8)=229\dot{-}240=0$

$f(15,2)=8$

4. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x^2+y^2 \dot{-} z^2$. Знайти $f(8,6)$.
5. $f(x)=M(g)$, $g(x,y)=x \dot{-} 2^y$. Знайти $f(20)$.
6. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x \dot{-} yz$. Знайти $f(20,5)$.
7. $f(x)=M(g)$, $g(x,y)=5x \dot{-} y^3$. Знайти $f(20)$.
8. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x \dot{-} (y+3)(z \dot{-} 3)$. Знайти $f(20,2)$.
9. $f(x)=M(g)$, $g(x,y)=5x \dot{-} 3^y$. Знайти $f(20)$.
10. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x \dot{-} yz^2$. Знайти $f(50,2)$.
11. $f(x)=M(g)$, $g(x,y)=x \dot{-} y^y$. Знайти $f(300)$.
12. $f(x,y)=M(g)$, $g(x,y,z)=x \dot{-} z^y$. Знайти $f(200,4)$.

Завдання. Застосувати операцію мінімізації до функції $\tilde{g}(x_1,x_2)$ за змінною x_2. Результуючу функцію $f(x_1,x_2)$ записати в аналітичній формі.

Приклад 1. $g(x_1,x_2)=nsg(x_2)=\begin{cases}1, x_2=0\\ 0, x_2>0\end{cases}$.

$$f(x_1,x_2)=\mu_y\left(\tilde{g}(x_1,y)=x_2\right)=\mu_y\left(g(x_1,x_2,y)=0\right).$$

1) Нехай $x_2=0$: маємо $nsg(y)=0$

$y=0$, $1\neq 0$,

$y=1$, $0=0$

2) Нехай $x_2=1$: маємо $nsg(y)=1$

$y=0$, $1=1$.

3) Нехай $x_2=2$: маємо $nsg(y)=2$, немає розв'язків.

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases}1, x_2=0\\ 0, x_2=1\\ \text{невизн., якщо } x_2\geq 2\end{cases}$$

Приклад 2. $g(x_1,x_2)=\left[\dfrac{1}{x_1}\right]+x_2$.

$$f(x_1,x_2)=\mu_y\left(g(x_1,y)=x_2\right).$$

1) Нехай $x_2=0$: маємо $\left[\dfrac{1}{x_1}\right]+y=0$

$$y=0,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]=0 \Rightarrow \begin{array}{c} x_1=0,\ \text{невизн.} \\ x_1=1,\quad 1\neq 0 \\ x_1\geq 0, 0=0 \end{array}$$

2) Нехай $x_2=1$: маємо $\left[\frac{1}{x_1}\right]+y=1$

$$y=0,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]=1 \Rightarrow x_1=1.$$

3) Нехай $x_2=2$: маємо $\left[\frac{1}{x_1}\right]+y=2$

$$y=0,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]+0\neq 2$$

$$y=1,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]+1=2 \Rightarrow x_1=1.$$

4) Нехай $x_2=3$: маємо $\left[\frac{1}{x_1}\right]+y=3$

$$y=0,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]+0\neq 3$$

$$y=1,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]+1\neq 3$$

$$y=2,\ \left[\frac{1}{x_1}\right]+2=3 \Rightarrow x_1=1.$$

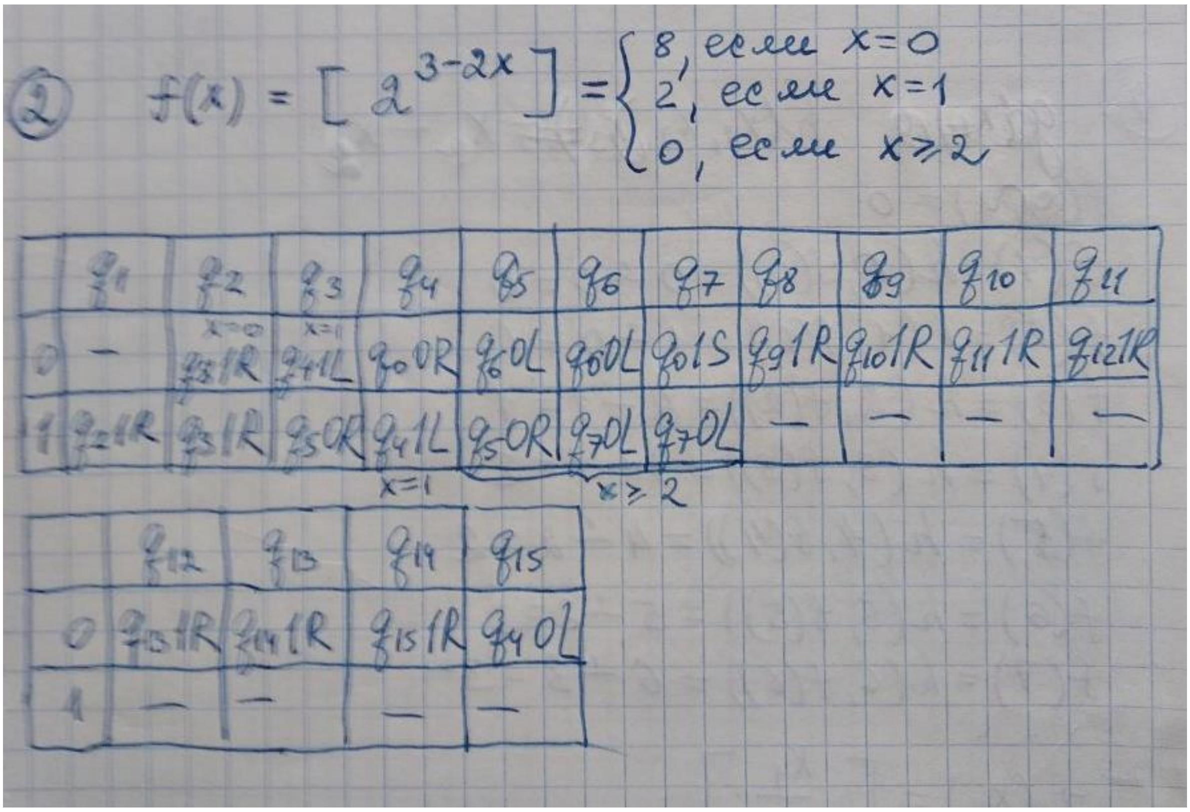
Отримали:

$$f(x_1,x_2)=\begin{cases} 0, x_2=0, x_1\geq 2, \\ 0, x_2=1, x_1=1, \\ 1, x_2=2, x_1=1, \\ 2, x_2=3, x_1=1. \end{cases}$$

або

$$f(x_1,x_2)=(x_2\dot{-}1)nsg(x_1\dot{-}1).$$

1. В алфавите $T=\{0,1\}$ построить машину Тьюринга *правильно вычисляющую* функцию $f(x)=\left[2^{3-2x}\right]$.



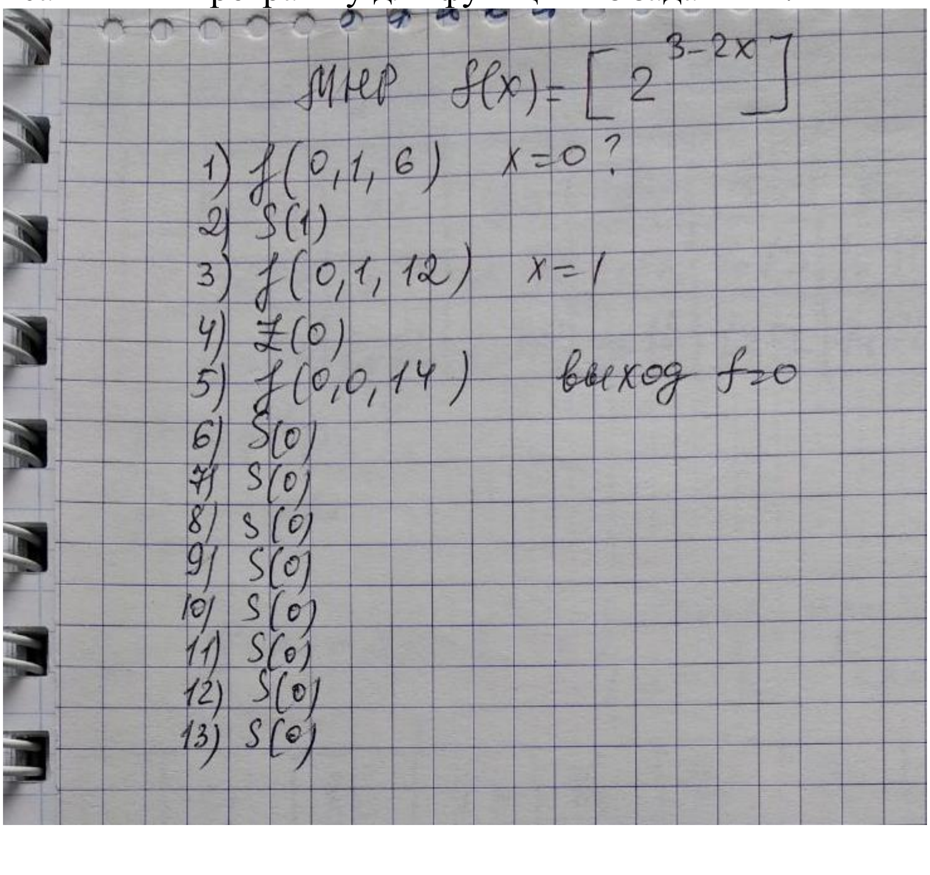
② $f(x) = [2^{3-2x}] = \begin{cases} 8, \text{ если } x=0 \\ 2, \text{ если } x=1 \\ 0, \text{ если } x \geq 2 \end{cases}$

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}	q_{11}
0	—	$x=0$ $q_3 1R$	$x=1$ $q_4 1L$	$q_0 0R$	$q_6 0L$	$q_6 0L$	$q_0 1S$	$q_9 1R$	$q_{10} 1R$	$q_{11} 1R$	$q_{12} 1R$
1	$q_2 1R$	$q_3 1R$	$q_5 0R$	$q_4 1L$	$q_5 0R$	$q_7 0L$	$q_7 0L$	—	—	—	—

$x=1$ $\qquad x \geq 2$

	q_{12}	q_{13}	q_{14}	q_{15}
0	$q_{13} 1R$	$q_{14} 1R$	$q_{15} 1R$	$q_4 0L$
1	—	—	—	—

2. Написать МНР-программу для функции из задания 1.



МНР $f(x) = [2^{3-2x}]$

1) $J(0,1,6)$ $x=0$?
2) $S(1)$
3) $J(0,1,12)$ $x=1$
4) $Z(0)$
5) $J(0,0,14)$ выход $f=0$
6) $S(0)$
7) $S(0)$
8) $S(0)$
9) $S(0)$
10) $S(0)$
11) $S(0)$
12) $S(0)$
13) $S(0)$

3. Построить нормальный алгоритм Маркова, применимый ко всем словам $x_1 x_2 \dots x_n$ в алфавите $\{a,b\}$ и переводящий их в слово $\alpha = b^n x_1 \dots x_n$.

① Построить нормальный алгоритм Маркова, применимый ко всем словам $x_1, \dots x_n$ в алфавите $\{a,b\}$ и переводящий их в слово $b^n x_1, \dots x_n$

1) $\# a \to |a\#$ – сдвигая вправо #, ставим столько |, сколько символов в слове;
2) $\# b \to |b\#$
3) $\# \to$ – удаляем # в конце слова
4) $a| \to |a$ } сортировка (все символы | передвигаем в начало слова
5) $b| \to |b$
6) $||a \to b|a$ } заменяем | символами b
7) $||b \to b|b$
8) $|b \to \cdot bb$
9) $|a \to \cdot ba$
10) $\lambda \to \#$ – ставим # перед первым символом слова $x_1 \dots x_n$

Знайти функцію $f(x)$, яку отримано за схемою примітивної рекурсії

④ $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = (x_3 + 1)\, nsg\left(1 + \frac{x_3}{3}\right)$

$nsg\left(1 + \frac{x_3}{3}\right) = 0$ для $x_3 \geq 0$

$f(x_1, 0) = x_1$

$f(x_1, 1) = h(x_1, 0, f(x_1, 0)) = (x_1 + 1)\, nsg\left(1 + \frac{x_1}{3}\right) = 0$

$f(x_1, 2) = h(x_1, 1, f(x_1, 1)) = (0 + 1)\, nsg\left(1 + \frac{0}{3}\right) = 0$

.....

$f(x_1, x_2) = x_1 \cdot nsg\, x_2$