ЛР1. Методична розробка 3

Нагадаємо загальну ідею ітераційних методів уточнення коренів нелінійного рівняння $f(x)=0$, де $f(x)\in C[a,b]$. Це рівняння переписуємо у вигляді, більш зручному для ітерування, а саме:

$$x=\varphi(x)\text{, де}$$

$$\varphi(x)\equiv x+\psi(x)\cdot f(x), \tag{1.3}$$

1.5 Метод простої ітерації

Цей метод добудемо як частинний випадок ітераційних методів, якщо функцію $\psi(x)$, що знаходиться у правій частині рівності (1.3), виберемо у вигляді

$$\psi(x)=-k=Const\neq 0.$$

Ітераційна формула (1.4) для методу простої ітерації набуде такого вигляду

$$x_{n+1}=x_n-k\cdot f(x_n),\quad n=0,1,\cdots.$$

Вважаємо, що на $[a,\ b]$ похідна $f'(x)$ існує, є неперервною та зберігає знак (це ***умова застосування методу***). Коефіцієнт k виберемо так, щоб виконувалася умова $|\varphi'(x)|=|1-k\cdot f'(x)|<1$ (тобто, щоб метод збігався). Останню нерівність можна переписати у вигляді $-1<1-k\cdot f'(x)<1$, або у вигляді системи двох нерівностей

$$\begin{cases} k\cdot f'(x)>0, \\ k\cdot f'(x)<2. \end{cases} \tag{1.12}$$

Нехай $m_1\leq|f'(x)|\leq M_1,\ \forall x\in[a,b]$. Розглянемо два випадки.

1. $f'(x)>0,\ \forall x\in[a,b]$. З умов (1.12) добуваємо нерівності $0<k<\dfrac{2}{f'(x)}$. Звідси випливає, що коефіцієнт k може бути будь яким числом з проміжку $\left(0;\dfrac{2}{M_1}\right)$.
2. $f'(x)<0,\ \forall x\in[a,b]$. З умов (1.12) приходимо до нерівностей $\dfrac{-2}{|f'(x)|}<k<0$. Звідси випливає, що якщо коефіцієнт k належить проміжку $\left(\dfrac{-2}{M_1};\ 0\right)$, то $|\varphi'(x)|\leq q<1$.

В обох випадках швидкість збіжності залежить від числа q. ***Метод буде збігатися найшвидше***, якщо

$$k = \frac{2}{M_1 + m_1} \text{ у випадку } f'(x) > 0, \ \forall x \in [a,b], \tag{1.13}$$

або $$k = \frac{-2}{M_1 + m_1} \text{ у випадку } f'(x) < 0, \ \forall x \in [a,b]. \tag{1.14}$$

Зауважимо, що $\varphi'(\xi) = 1 - k \cdot f'(\xi) \neq 0$, взагалі кажучи. Це означає, що ***порядок збіжності методу простої ітерації дорівнює одиниці***.

Приклад. Нехай треба методом простої ітерації на відрізку [–3; –2] уточнити корінь нелінійного рівняння $f(x) \equiv x^3 - 2{,}9x + 3 = 0$. Переконаємося, що на відрізку [–3; –2] існує єдиний дійсний корінь: $f(-3) = -15{,}3 < 0$; $f(-2) = 0{,}8 > 0$. Так, корінь існує. Перевіримо, чи буде цей корінь єдиний, для цього знаходимо першу похідну

$$f'(x) = 3x^2 - 2{,}9 > 0, \ \forall x \in [-3; -2].$$

Перша похідна зберігає знак на відрізку [–3; –2], це гарантує єдиність кореня.

Запишемо нелінійне рівняння у вигляді, зручному для ітерування

$$x = \varphi(x), \text{ де } \varphi(x) \equiv x - k \cdot f(x), \ x \in [-3; -2].$$

Щоб визначити коефіцієнт k, знаходимо границі для першої похідної за модулем

$$m_1 \le |f'(x)| \le M_1.$$

Оскільки друга похідна зберігає знак $f''(x) = 6x < 0, \ \forall x \in [-3; -2]$, то функція $f'(x)$ своє найбільше і найменше значення досягає в межових точках, тобто

$$f'(-2) = 9{,}1 = m_1; \ f'(-3) = 24{,}1 = M_1.$$

Отже, маємо $k \in \left(0; \frac{2}{24{,}1}\right) \approx (0;\, 0{,}08)$. За формулою (1.13) обчислюємо коефіцієнт k.

$$k = \frac{2}{m_1 + M_1} = \frac{2}{33{,}2} \approx 0{,}06024 \approx 0{,}06.$$

Тепер будуємо функцію $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = x - 0{,}06 \cdot (x^3 - 2{,}9x + 3) = -0{,}06x^3 + 1{,}174x - 0{,}18.$$

Вибираємо нульове наближення $\boxed{x_0 = -2{,}5}$. За ітераційною формулою (1.4) обчислюємо перше наближення.

$$\varphi(x_0) = -0{,}06 \cdot (-15{,}625) + 1{,}174 \cdot (-2{,}5) - 0{,}18 = 0{,}9375 - 2{,}935 - 0{,}18 = -2{,}1775.$$

Приймемо до уваги властивість самовиправленості ітераційних методів і для спрощення подальших обчислень добуте число заокруглимо. Залишимо ті розряди (починаючи з лівого краю), які не змінились порівняно з x_0, та ще два розряди, які уточнюються. Отже, $\boxed{x_1 = -2{,}18}$.

Далі обчислюємо друге наближення.

$$x_2 = \varphi(x_1) = -0{,}06 \cdot (-10{,}360232) + 1{,}174 \cdot (-2{,}18) - 0{,}18 =$$
$$= 0{,}6216739 - 2{,}55932 - 0{,}18 = -2{,}1176461.$$

Порівнюючи друге та перше наближення, бачимо, що у x_2 уточнюється другий розряд після коми. Отже, можна вважати $\boxed{x_2 = -2{,}12}$.

Оцінимо похибку останнього наближення апріорним методом. Для цього треба знати число q, яке визначається формулою

$$q = \max_{x \in [a;\, b]} |\varphi'(x)|. \tag{1.9}$$

Обчислимо потрібну похідну

$$\varphi'(x) = -0{,}18x^2 + 1{,}174.$$

Перевіримо, чи буде ця похідна монотонною. Для цього обчислимо другу похідну $\varphi''(x) = -0{,}36 \cdot x > 0,\ \forall x \in [-3; -2]$. Оскільки похідна $\varphi''(x)$ зберігає знак на відрізку $[-3; -2]$, то перша похідна є монотонною на цьому відрізку. Отже, достатньо знайти значення похідної $\varphi'(x)$ на кінцях відрізка $[-3; -2]$.

$$\varphi'(-3) = -0{,}18 \cdot 9 + 1{,}174 = -1{,}62 + 1{,}174 = -0{,}446;$$
$$\varphi'(-2) = -0{,}18 \cdot 4 + 1{,}174 = -0{,}72 + 1{,}174 = 0{,}454.$$

Зауважимо, що у прикладі похідна $\varphi'(x)$ не зберігає знак в околі кореня ξ. Отже, маємо $q = 0{,}454$ та обчислюємо $\dfrac{q}{1-q} = \dfrac{0{,}454}{0{,}546} \approx 0{,}83$. Тепер звертаємося до (1.7).

$$|x_2 - \xi| \le \frac{q}{1-q} |x_2 - x_1| \approx 0{,}83 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}05.$$

Якщо точність нас не задовольняє, то обчислюємо наступну ітерацію.

$$\varphi(x_2) = -0{,}06 \cdot (-2{,}12)^3 + 1{,}174 \cdot (-2{,}12) - 0{,}18 =$$

$$= -0{,}06 \cdot (-9{,}528128) - 2{,}48888 - 0{,}18 = -2{,}09719232.$$

Звідси знаходимо $\boxed{x_3 = -2{,}097}$, і т. п. поки не наблизимось до кореня ξ з бажаною точністю.

1.6. Метод Ньютона (дотичних)

У цьому варіанті ітераційних методів функцію $\psi(x)$, що стоїть у правій частині формули (1.3), виберемо у вигляді $\psi(x) = -\dfrac{1}{f'(x)}$, тоді $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Вважаємо, що на $[a, b]$ похідні $f'(x)$, $f''(x)$ існують, неперервні та зберігають знак (це ***умови застосування методу дотичних***). Знаходимо похідну $\varphi'(x)$.

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x)} + \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{(f'(x))^2} = f(x) \cdot \frac{f''(x)}{(f'(x))^2}. \tag{1.15}$$

Як видно з (1.15), $\varphi'(\xi) = 0$. Це означає, що існує такий окіл точки ξ, де $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| < 1$, тобто ітераційний процес буде збігатися. Отже, якщо ***метод Ньютона розбігається, то треба звузити відрізок*** $[a, b]$. З (1.15) знаходимо $\varphi''(\xi) = \dfrac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \neq 0$. Це означає, що в умовах (1.11) $m = 2$, тобто, ***порядок збіжності методу*** Ньютона дорівнює двом.

Запишемо ***ітераційну формулу*** методу Ньютона.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \; n = 0,\ 1,\ \cdots . \tag{1.16}$$

Якщо x_0 вибрати так, щоб $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, то $\varphi'(x_0) > 0$, тому всі наближення, починаючи з x_0, будуть знаходитись з одного і того ж боку від кореня ξ (з того, де розташоване x_0) та будуть прямувати до кореня ξ монотонно.

Якщо x_0 вибрати так, щоб $f(x_0) \cdot f''(x_0) < 0$, то наближення x_1 буде з іншого боку від кореня ξ, ніж x_0, і якщо x_1 не вийде за межі відрізка $[a, b]$, то всі наступні наближення $x_2, x_3, \ldots$ будуть з того боку від кореня ξ, з якого знаходиться x_1. Отже, послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$ буде монотонно прямувати до кореня ξ. Якщо x_1 вийде за межі відрізка $[a, b]$, то треба змінити x_0.

Метод Ньютона має своє власне геометричне зображення, показане на рис. 1.7. Ітераційну формулу (1.16) можна добути з геометричного зображення методу, для цього треба записати рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $\left(x_n, f(x_n)\right)$

$$y = f(x_n) + (x - x_n) f'(x_n).$$

Точка перетину цієї дотичної з віссю абсцис має координати $\left(x_{n+1}, 0\right)$. Підставивши координати цієї точки в рівняння дотичної, добудемо формулу (1.16).

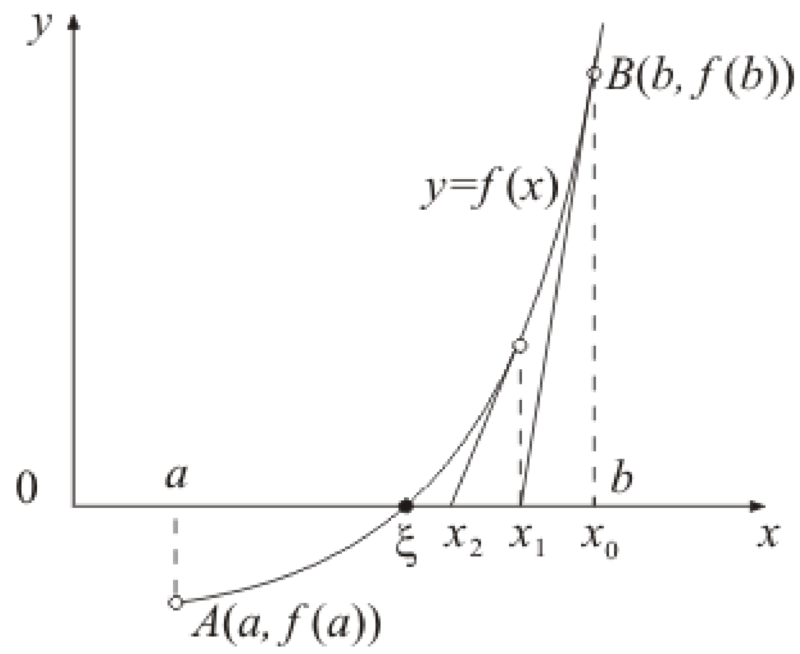

Рис. 1.7. Графічне зображення методу Ньютона

Приклад. Нехай треба методом дотичних уточнити на відрізку [–3; –2] корінь нелінійного рівняння

$$f(x) \equiv x^3 - 2{,}9x + 3 = 0 .$$

Обчислюємо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка [–3; –2].

$$f(-3) = -27 - 2{,}9 \cdot (-3) + 3 = -15{,}3 < 0; \quad f(-2) = -8 - 2{,}9 \cdot (-2) + 3 = 0{,}8 > 0 .$$

Вибираємо нульове наближення так, щоб виконувалась умова $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$. Для цього знаходимо потрібні похідні.

$$f'(x) = 3x^2 - 2{,}9 > 0, \ \forall x \in [-3; -2],$$
$$f''(x) = 6x < 0, \ \forall x \in [-3; -2].$$

Отже, $\boxed{x_0 = -3}$. За ітераційною формулою (1.16) обчислимо декілька наближень.

$$x_1 = -3 - \frac{f(-3)}{f'(-3)} = -3 - \frac{(-15{,}3)}{24{,}1} = -3 + 0{,}6348547\ldots = -2{,}3651453\ldots .$$

У добутому числі достатньо залишити після коми лише два розряди, інші відкидаємо. Отже,

$$\boxed{x_1 = -2{,}36}.$$

Далі обчислюємо

$$x_2 = -2{,}36 - \frac{f(-2{,}36)}{f'(-2{,}36)} = -2{,}36 - \frac{(-3{,}300256)}{13{,}8088} = -2{,}36 + 0{,}2389965\ldots = -2{,}1210035\ldots$$

Оскільки x_2 та x_1 відрізняються починаючи з першого розряду після коми, то знову залишаємо після коми два розряди. $\boxed{x_2 = -2{,}12}$. Обчислюємо x_3.

$$x_3 = -2{,}12 - \frac{f(-2{,}12)}{f'(-2{,}12)} = -2{,}12 - \frac{(-0{,}380128)}{10{,}5832} = -2{,}12 + 0{,}035918 = -2{,}084082.$$

Відмінність x_3 від x_2 починається з другого розряду після коми, тобто похибка в x_3 можлива не ближче до коми, ніж у другому розряді. Цей висновок, зроблено апостеріорним методом.

Покажемо, як у цьому прикладі оцінити похибку апріорним методом. Для цього в обчисленій ітерації x_3 залишимо п'ять розрядів після коми і використаємо нерівність (1.10). Отже, маємо $\boxed{x_3 = -2{,}08408}$. Оскільки $f'(x)$ монотонна на відрізку [–3; –2], то

$$\min_{x\in[-3;-2]} |f'(x)| = \min\{|f'(-3)|, |f'(-2)|\} = \min\{24{,}1;\ 9{,}1\} = 9{,}1.$$

Тепер звертаємось до нерівності (1.10)

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|} \quad . \tag{1.10}$$

Обчислюємо

$$|x_3 - \xi| \le \frac{|f(-2{,}08408)|}{9{,}1} = \frac{0{,}0081389}{9{,}1} = 0{,}0008943\cdots.$$

Видно, що похибка в x_3 не більша, ніж одиниця в третьому розряді після коми. Тому остаточно приймаємо $\boxed{\xi \approx -2{,}084}$.

1.7. Метод хорд

Цей частинний випадок ітераційних методів добудемо, якщо функцію $\psi(x)$, що стоїть у правій частині формули (1.3), візьмемо у вигляді

$$\psi(x) = -\frac{x-c}{f(x)-f(c)},$$

де c – якась фіксована точка з $[a, b]$. З формули (1.3) маємо

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-c)\,f(x)}{f(x)-f(c)}.$$

Ітераційна формула методу хорд має вигляд

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - c)\,f(x_n)}{f(x_n)-f(c)},\ n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{1.17}$$

Щоб проаналізувати особливості збіжності методу, знайдемо похідну $\varphi'(x)$.

$$\varphi'(x) = 1 - \left(\frac{x-c}{f(x)-f(c)}\right)'_x \cdot f(x) - \frac{(x-c)\cdot f'(x)}{f(x)-f(c)} =$$

$$= 1 - f(x)\left(\frac{1}{f(x)-f(c)} - \frac{(x-c)\cdot f'(x)}{(f(x)-f(c))^2}\right) - \frac{(x-c)\cdot f'(x)}{f(x)-f(c)} =$$

$$= 1 - \frac{f(x)}{f(x)-f(c)} + \frac{(x-c)f'(x)}{f(x)-f(c)}\left(\frac{f(x)}{f(x)-f(c)} - 1\right) =$$

$$= \frac{f(c)}{(f(x)-f(c))^2}\left(f(c) - f(x) + (x-c)f'(x)\right).$$

Якщо скористатися наступним розвиненням

$$f(c) = f(x) + (c-x)\cdot f'(x) + \frac{(c-x)^2}{2!} f''(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in (x,c),$$

то шукану похідну $\varphi'(x)$ можна переписати у вигляді

$$\varphi'(x) = \frac{f(c)\cdot f''(\tilde{x})\cdot(c-x)^2}{2(f(x)-f(c))^2}, \quad \tilde{x} \in (x,c). \qquad (1.18)$$

Похідні $f'(x)$, $f''(x)$ зберігають знак на $[a,\ b]$ (це ***умови застосування методу хорд***), тому якщо точку c вибрати так, щоб виконувалася нерівність

$$f(c)\cdot f''(c) > 0, \qquad (1.19)$$

то на всьому відрізку $[a,\ b]$ буде виконуватись умова $\varphi'(x) > 0$, а це означає , що послідовність наближень $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ буде прямувати до кореня ξ монотонно. Якщо при цьому нульове наближення x_0 вибрати так, щоб

$$f(x_0)\cdot f(c) < 0, \qquad (1.20)$$

то в знаменнику формули (1.18) модулі чисел $f(x_n)$ та $f(c)$ будуть додаватися.

Коли число c взято достатньо близьким до точного кореня ξ, то, як видно з формули (1.18), $\varphi'(x)$ буде малим за модулем числом за рахунок множника $f(c)$ і тому існує такий окіл точки ξ, в якому буде виконуватися нерівність $|\varphi'(x)| < 1$, а це означає, що ітераційний процес буде збігатися до точного кореня ξ.

З формули (1.18) маємо $\varphi'(\xi) = \dfrac{f(c)\cdot f''(\tilde{x})\cdot(c-\xi)^2}{2(f(c))^2} \neq 0$. Це означає, що в умовах (1.11) $m = 1$, тобто метод хорд має ***перший порядок збіжності***.

Метод хорд має своє власне геометричне зображення, показане на рис. 1.8.

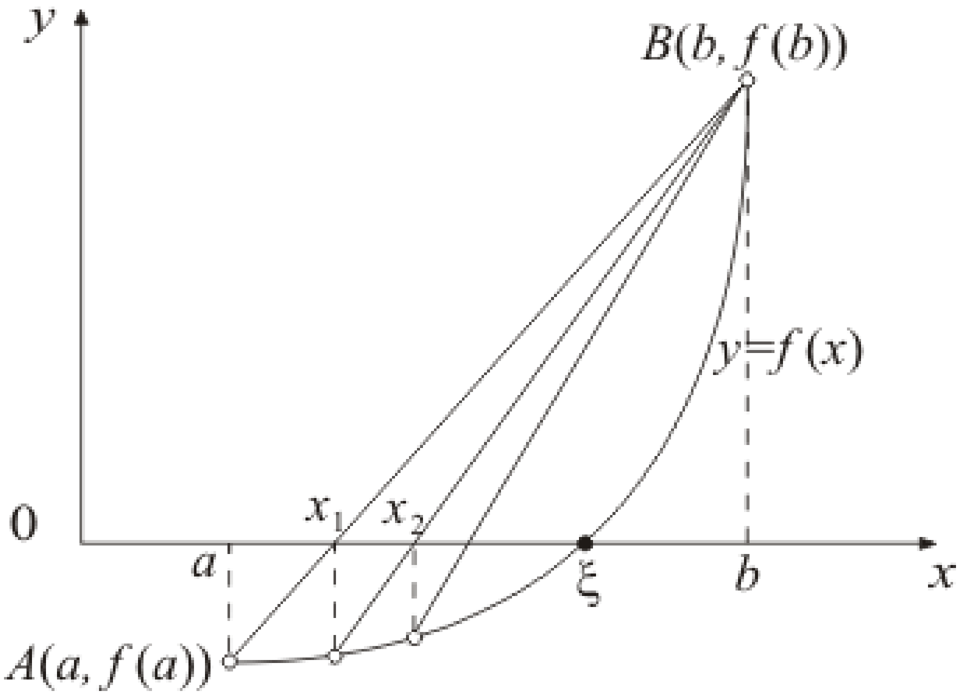

Рис. 1.8. Графічне зображення методу хорд

Ітераційну формулу (1.17) можна добути з геометричного зображення методу хорд. Для цього запишемо рівняння прямої, що проходить через дві точки з координатами $\left(x_n, f(x_n)\right)$ та $\left(c, f(c)\right)$

$$\frac{x - x_n}{c - x_n} = \frac{y - f(x_n)}{f(c) - f(x_n)}.$$

Ця пряма (хорда) перетинає вісь абсцис у точці з координатами $\left(x_{n+1}, 0\right)$. Підставивши координати цієї точки до рівняння хорди, добудемо формулу (1.17).

Приклад. Нехай треба методом хорд уточнити корінь на відрізку [–3; –2] нелінійного рівняння

$$f(x) \equiv x^3 - 2{,}9x + 3 = 0.$$

Обчислимо значення функції $f(x)$ на кінцях відрізка [–3; –2].

$$f(-3) = -27 - 2{,}9 \cdot (-3) + 3 = -15{,}3 < 0;$$
$$f(-2) = -8 - 2{,}9 \cdot (-2) + 3 = 0{,}8 > 0.$$

Знаходимо потрібні похідні

$$f'(x) = 3x^2 - 2{,}9 > 0,\ \ \forall x \in [-3;-2],$$
$$f''(x) = 6x < 0,\ \ \forall x \in [-3;-2].$$

Запишемо нелінійне рівняння у вигляді зручному для ітерування $x = \varphi(x)$, де

$$\varphi(x) = x - \frac{(x-c)\,f(x)}{f(x) - f(c)}.$$

Число c та нульове наближення x_0 виберемо так, щоб виконувались умови (1.19), (1.20). Отже, $\boxed{x_0 = -2}$; $\boxed{c = -3}$.

За ітераційною формулою (1.17) обчислюємо перше та друге наближення:

$$x_1 = -2 - \frac{(-2+3)\cdot f(-2)}{f(-2) - f(-3)} = -2 - \frac{0{,}8}{0{,}8 + 15{,}3} = -2 - 0{,}04968944\ldots = -2{,}04968944\ldots.$$

$$\boxed{x_1 = -2{,}05}.$$

$$x_2 = -2{,}05 - \frac{(-2{,}05+3)\cdot f(-2{,}05)}{f(-2{,}05) + f(-3)} = -2{,}05 - \frac{0{,}95\cdot 0{,}329875)}{0{,}329875 + 15{,}3} = -2{,}05 - \frac{0{,}3133812}{15{,}629875} =$$
$$= -2{,}05 - 0{,}0200501\ldots = -2{,}0700501\ldots\ .$$

$$\boxed{x_2 = -2{,}0700}.$$

Щоб оцінити похибку наближення x_2 апріорним методом, тобто користуючись нерівністю (1.7), треба знати число q, яке знаходиться за формулою $q = \max\limits_{x\in[-3;-2]} |\varphi'(x)|$. Похідна $\varphi'(x)$ визначається формулою (1.18), дослідити її модуль на максимум достатньо складно, тому для оцінки похибки x_2 звернемося до більш простої нерівності (1.10).

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|}\ . \qquad (1.10)$$

Оскільки $f'(x)$ монотонна на відрізку [–3; –2], то

$$\min_{x\in[-3;-2]} |f'(x)| = \min\{|f'(-3)|, |f'(-2)|\} = \min\{24{,}1;\ 9{,}1\} = 9{,}1.$$

Тепер запишемо нерівність (1.10).

$$|x_2 - \xi| \le \frac{|f(-2{,}0700)|}{9{,}1} = \frac{0{,}133257}{9{,}1} = 0{,}0146436\cdots.$$

Отже, в другій ітерації треба залишити лише два розряди після коми, тобто маємо таку відповідь $\boxed{\xi \approx -2{,}07}$.

1.8. *Метод ділення навпіл*

На відміну від розглянутих вище ітераційних методів метод ділення навпіл не потребує для уточнення кореня міняти вигляд рівняння $f(x)=0$, $x\in[a,b]$. Рівняння на вказаному відрізку повинно мати один дійсний корінь ξ, а функція $f(x)$ повинна бути неперервною на цьому відрізку (це ***умови застосування методу***). Цей метод має ще назву «метод дихотомії», або «метод бісекції».

Нехай треба підійти до кореня ξ із заданою похибкою ε. Уточнювати корінь будемо за таким ***алгоритмом***. Ділимо відрізок $[a,\ b]$ навпіл точкою $x_0=\dfrac{a+b}{2}$. Якщо $f(x_0)=0$, то x_0 і є шуканим коренем. Якщо ні, то з двох відрізків $[a,\ x_0]$, $[x_0,\ b]$ вибираємо той, на кінцях якого $f(x)$ має значення протилежних знаків. Новий відрізок $[a_1, b_1]$ знову ділимо навпіл і повторюємо попередні міркування. У результаті або одержимо точний корінь на якомусь кроці, або прийдемо до відрізка $[a_n,\ b_n]$, довжина якого менша ніж 2ε. Середина останнього відрізка, тобто точка $x_n=\dfrac{b_n+a_n}{2}$, дає значення кореня ξ із заданою похибкою ε.

Дослідимо метод на ***збіжність***. У загальному випадку алгоритм приводить до нескінченної послідовності вкладених відрізків $[a_1,\ b_1]$, $[a_2,\ b_2]$, …, $[a_n,\ b_n]$, … таких, що $a_1\le a_2\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1$. Довжина кожного відрізка дорівнює половині попереднього, тобто

$$b_1-a_1=\frac{b-a}{2},\quad b_2-a_2=\frac{b_1-a_1}{2}=\frac{b-a}{2^2},\cdots,\ b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n},\cdots.$$

Ліві кінці цих відрізків $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ утворюють нескінченну неспадну, обмежену зверху послідовність, а праві кінці $b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots$ утворюють не зростаючу нескінченну обмежену знизу послідовність. Звідси випливає, що існують границі $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ та $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Якщо в рівності $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$ спрямувати n до нескінченності, то будемо мати $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. Позначимо цю спільну границю буквою $\bar{\xi}$. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\bar{\xi}\,. \tag{1.21}$$

Далі в нерівності $f(a_n)f(b_n)<0,\ n=1,2,\cdots$ спрямуємо n до нескінченності. Враховуючи те, що $f(x)\in C[a,\ b]$, а також границі (1.21), приходимо до нерівності

$$\left(f(\bar{\xi})\right)^2\le 0\,.$$

Це можливо тільки тоді, коли $f(\bar{\xi})=0$, тобто $\bar{\xi}$ є нулем функції $f(x)$. Але функція $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ має лише один нуль ξ. Це означає, що $\bar{\xi}=\xi$.

Переваги методу ділення навпіл:

- цей метод не потребує обчислення похідної $f'(x)$ та не вимагає монотонності функції $f(x)$;
- метод завжди збігається;
- легко оцінити похибку наближеного значення x_n;
- метод легко програмувати на ЕОМ.

Недоліки методу:

- метод має повільну збіжність. Він збігається зі швидкістю геометричної прогресії із знаменником 1/2, оскільки $|\xi - x_n| \le |b_n - a_n| = \dfrac{|b-a|}{2^n}$;
- при підвищенні точності значно зростає об'єм обчислювальної роботи.

Висновок

Метод ділення навпіл рекомендується застосовувати для грубого знаходження кореня (в межах обчислювальної похибки), бо інколи через похибки округлень значення функції $f(x)$ може мати не той знак, а значить буде розглядатися не та половина відрізка.

==