МР1 (Л.Т. Бойко)

Тема: **методи наближення функцій**

4.1. Постановка задачі інтерполяції

Найпростішу задачу інтерполяції (або інтерполювання) формулюємо так. На проміжку $[a, b]$ задані $(n+1)$ різних між собою точок $x_0,\ x_1,\ \cdots, x_n$, які називаються ***вузлами інтерполяції***, і відомі значення функції $f(x)$ у цих точках:

$$f(x_0) = y_0, \quad f(x_1) = y_1,\ \ldots,\ f(x_n) = y_n .$$

Потрібно побудувати функцію $\varphi(x)$ (***інтерполяційну функцію***), яка б належала певному класу функцій і набувала у вузлах інтерполяції таких самих значень, як і $f(x)$, тобто таку, що

$$\varphi(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0,n}. \qquad (4.1)$$

Геометрично це означає, що треба побудувати криву $y = \varphi(x)$ якогось визначеного типу, котра проходить через задану систему точок $M_i(x_i, y_i),\ i = \overline{0,n}$ (рис. 4.1). Як видно з рис. 4.1, таких функцій можна побудувати багато.

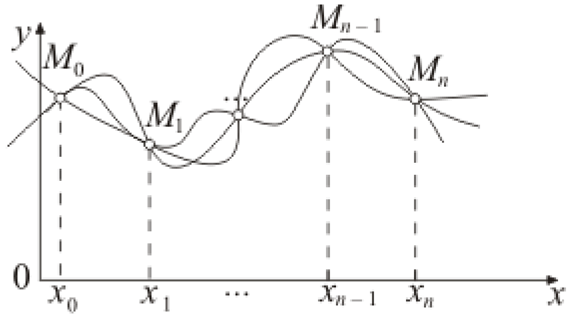

Рис. 4.1. Графіки функцій, що задовольняють умови інтерполювання

У вузлах інтерполяції значення функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$ однакові. Але коли x не збігається з жодним вузлом, розбіжність між значеннями цих функцій може бути досить значною, навіть якщо вузлів багато і вони мало віддалені один від одного. Так може статися, наприклад, якщо $f(x)$ сильно звивиста функція і навіть розривна, а $\varphi(x)$ має високий ступінь гладкості. Для того, щоб мати надію одержати задовільний збіг $f(x)$ і $\varphi(x)$ на всьому проміжку $[a, b]$, слід вибір класу інтерполяційних функцій узгоджувати з властивостями вихідної функції $f(x)$. Наприклад, достатньо гладку функцію $f(x)$ вдається добре наблизити алгебраїчними многочленами. Якщо $f(x)$ періодична, то інтерполяційну функцію доцільно шукати серед тригонометричних многочленів з таким самим періодом.

На практиці до задачі інтерполювання звертаються, якщо потрібно багатократно обчислювати одну і ту саму складну функцію в різних точках. У цьому випадку доцільно обчислити раз назавжди її значення за фіксованими точками $x_0,\ x_1,\ \cdots, x_n$, а в інших точках обчислювати її наближені значення, використовуючи більш просту інтерполяційну функцію. При цьому розрізняють інтерполяцію у вузькому сенсі, коли $x \in [x_0, x_n]$, та ***екстраполяцію***, коли $x \notin [x_0, x_n]$. Далі, вживаючи термін «інтерполяція», будемо розуміти обидва ці випадки.

4.2. Інтерполяція алгебраїчними многочленами

Будемо шукати функцію $\varphi(x)$ у вигляді алгебраїчного многочлена

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x^i\ , \tag{4.2}$$

тобто у вигляді лінійної комбінації функцій $x^i,\ i = 0, 1, 2, \cdots, m$ з невідомими коефіцієнтами $a_i,\ i = \overline{0,m}$. Підставимо (4.2) до умов інтерполювання (4.1) і отримаємо СЛАР відносно шуканих коефіцієнтів $a_i,\ i = \overline{0,m}$.

$$\sum_{i=0}^{m} a_i \cdot x_j^i = f(x_j),\ \ j = \overline{0,n}. \tag{4.3}$$

СЛАР (4.3) має $(n+1)$ рівнянь та $(m+1)$ невідомих. Розглянемо можливі варіанти:

1) $m>n$, тобто невідомих коефіцієнтів у системі (4.3) більше, ніж рівнянь. СЛАР (4.3) має більше ніж один розв’язок. У цьому випадку серед шуканих коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_m$ можна виділити $m+1-r$ (r – ранг матриці A цієї системи) вільних коефіцієнтів, даючи яким довільні значення, можна відшукувати вже єдині значення решти невідомих коефіцієнтів.
2) $m<n$, тобто невідомих коефіцієнтів у системі (4.3) менше, ніж рівнянь. У цьому випадку система (4.3) може не мати розв’язку.
3) $m=n$. Система (4.3) має єдиний розв’язок, якщо визначник її матриці A відрізняється від нуля. Матриця системи (4.3) має вигляд

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix}.$$

Визначник цієї матриці є відомим в алгебрі визначником Вандермонда. Він відрізняється від нуля, якщо всі вузли різні.

Отже, надалі приймаємо, що в задачі інтерполювання всі вузли різні та ***m* = *n*,** тобто степінь алгебраїчного многочлена (4.2) на одиницю менший ніж кількість вузлів. У цьому випадку лінійна ***задача інтерполювання має єдиний розв'язок***.

На практиці інтерполяційні многочлени будують використовуючи прості алгебраїчні міркування, які не вимагають розв'язування СЛАР (4.3). Залежно від того, для чого призначається інтерполяційний многочлен, його можна записати в різних формах.

4.3. Інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа

Функцію $\varphi(x)$ шукаємо у вигляді

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot Q_n^{(i)}(x), \tag{4.4}$$

де $Q_n^{(i)}(x)$ – алгебраїчний многочлен степеня *n*, побудований для вузла x_i. Функція (4.4) буде задовольняти умови (4.1), якщо алгебраїчні поліноми $Q_n^{(i)}(x),\ \ i = \overline{0,n}$ мають такі властивості

$$Q_n^{(i)}(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i. \end{cases}$$

Оскільки $Q_n^{(i)}(x)$ – многочлен степеня *n* з нулями в точках $x_0,\ x_1,\ \cdots,$ $x_{i-1},\ \ x_{i+1}, \cdots, x_n$ то його можна подати у вигляді

$$Q_n^{(i)}(x) = C_i \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{n} (x - x_m). \tag{4.5}$$

З умови $Q_n^{(i)}(x_i) = 1$ дістанемо $C_i = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{n} (x_i - x_m)}$. Тепер поліном (4.5) набуває вигляду

$$Q_n^{(i)}(x) = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq i}}^{n} \frac{x - x_m}{x_i - x_m}. \tag{4.6}$$

Підставивши (4.6) в (4.4), добудемо формулу для інтерполяційного полінома, яка носить ім'я Лагранжа і позначається $L_n(x)$

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{n} y_i \prod_{\substack{m=0\\ m\neq i}}^{n} \frac{x-x_m}{x_i-x_m} \equiv L_n(x). \tag{4.7}$$

Напишемо многочлен Лагранжа трохи в іншому вигляді. Для цього впровадимо функцію $\omega_{n+1}(x)=\prod_{m=0}^{n}(x-x_m)$, обчислимо її похідну $\omega'_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}\prod_{\substack{m=0\\ m\neq k}}^{n}(x-x_m)$ та знайдемо значення похідної в точці x_i

$$\omega'_{n+1}(x_i)=\prod_{\substack{m=0\\ m\neq i}}^{n}(x_i-x_m).$$

Тепер можна записати

$$\prod_{\substack{m=0\\ m\neq i}}^{n} \frac{x-x_m}{x_i-x_m}=\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Отже, інтерполяційний многочлен у формі Лагранжа набуває такого вигляду

$$L_n(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_i)\omega'_{n+1}(x_i)}.$$

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен за формулою Лагранжа при таких умовах інтерполювання:

x_i	0	2	3	5
$f(x_i)=y_i$	1	3	2	5

За формулою (4.7) напишемо

$$L_3(x)=y_0\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}+y_1\frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}+$$

$$+y_2\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}+y_3\frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}.$$

Підставимо до цієї формули вхідні дані з таблиці

$$L_3(x)=1\cdot\frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(-2)(-3)(-5)}+3\cdot\frac{(x-0)(x-3)(x-5)}{2\cdot(-1)(-3)}+2\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{3\cdot 1\cdot(-2)}+$$

$$+5\cdot\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{5\cdot3\cdot2}=\frac{3}{10}x^3-\frac{13}{6}x^2+\frac{62}{15}x+1.$$

Неважко перевірити, що знайдений кубічний многочлен задовольняє умови інтерполювання.

Зауваження

1. Формула Лагранжа зручна, коли за однією системою вузлів необхідно інтерполювати декілька функцій. У цьому випадку можна один раз обчислити многочлени $Q_n^{(i)}(x)$, що залежать тільки від розташування вузлів і точки *x*, і використати їх для всіх функцій.
2. Формула Лагранжа зручна при вивчені збіжності інтерполювання [1; 6].
3. Оскільки у формулі Лагранжа ***всі*** доданки залежать від ***всіх*** вузлів, то при додаванні нового вузла не тільки добавиться новий доданок, але доведеться змінювати всі знайдені раніше доданки. Це вносить деяку незручність при практичній роботі з цією формою інтерполяційного полінома. У таких ситуаціях будуть зручнішими інші варіанти запису інтерполяційного полінома.

4.4. Залишковий член інтерполяційного многочлена Лагранжа

При обчисленні $f(x)$ за інтерполяційним многочленом, тобто за наближеною формулою $f(x)\approx L_n(x)$, існують три джерела похибок: 1) неусувна похибка за рахунок того, що значення $f(x_i)$ виміряні, або обчислені неточно; 2) похибка методу; 3) похибка заокруглень, яка виникає при обчисленні $L_n(x)$ на ЕОМ через скінченність розрядної сітки.

Залишковим членом інтерполяційного многочлена називається функція

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x).$$

Ця функція визначає ***похибку методу інтерполювання***. У вузлах інтерполяції вона дорівнює нулю. В усіх інших точках відрізка інтерполювання цю функцію треба визначити, або оцінити її значення. З цього приводу сформулюємо теорему.

Теорема. *Нехай* $f(x)\in C^{(n+1)}[a,b]$, *а* $L_n(x)$ – *інтерполяційний многочлен, побудований по значеннях* $L_n(x_i)=f(x_i)$, $i=0,1,\cdots,n;$ $x_i\in[a,b]$. *Тоді знайдеться хоча б одна точка* $\xi\in[a,b]$ *така, що*

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot\omega_{n+1}(x)}{(n+1)!},\ \text{де}\ \omega_{n+1}(x)=\prod_{m=0}^{n}(x-x_m). \qquad (4.8)$$

Зауважимо, що якщо $f(x)$ є алгебраїчним многочленом степеня n, то похибка інтерполювання дорівнює нулю. Це означає, що будь-який алгебраїчний многочлен степеня n можна записати формулою Лагранжа.

Формула (4.8) широко використовується в теоретичних дослідженнях. На практиці користуватися нею неможливо, оскільки невідома координата точки $\xi=\xi(x)$. Але, якщо відома стала M_{n+1} така, що

$$M_{n+1} = \sup_{x\in[a,\,b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

то з формули (4.8) можна добути таку оцінку похибки інтерполювання

$$| R_n(x) | \le \frac{M_{n+1} \cdot | \omega_{n+1}(x) |}{(n+1)!}. \tag{4.9}$$

Нерівність (4.9) може бути використана у практичних обчисленнях. Вона дає можливість провести апріорну оцінку похибки, тобто для випадку аналітично заданої функції $f(x) \in C^{(n+1)}[a,b]$ провести оцінювання похибки інтерполювання до початку обчислень.

4.5. Поділені різниці та їхні властивості

Нехай відомі різні між собою значення аргументу $x_0,\ x_1,\ \cdots, x_n$ та відповідні значення функції $f(x_0),\ f(x_1),\ \ldots,\ f(x_n)$. Для цих значень функції і вузлів обчислимо відношення

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ldots,$$

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \ldots, \quad f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Ці відношення називаються ***поділеними (розділеними) різницями*** першого порядку. Вони визначають середню швидкість зміни функції $f(x)$ (або середнє значення її похідної) на відповідному відрізку $[x_i, x_{i+1}],\ i = 0,1,\cdots,n-1$.

Поділені різниці другого порядку, побудовані за вузлами $x_i,\ x_{i+1},\ x_{i+2}$, мають вигляд

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i}.$$

Якщо поділені різниці k-го порядку $f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k})$ вже відомі, то поділені різниці (k+1) -го порядку обчислюються за допомогою формули

$$f(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k+1}) = \frac{f(x_{i+1}, \cdots, x_{i+k+1}) - f(x_i, \cdots, x_{i+k})}{x_{i+k+1} - x_i}.$$

При практичній побудові поділених різниць їх зручно розташовувати у вигляді таблиці (табл. 4.1). Така таблиця називається ***таблицею поділених різниць***.

Таблиця 4.1

Схема розташування поділених різниць

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f(x_0, x_1)$			
x_2	$f(x_2)$	$f(x_1, x_2)$	$f(x_0, x_1, x_2)$		
...	...	...	...	$\ldots$	$f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	$f(x_{n-2}, x_{n-1})$			
x_n	$f(x_n)$	$f(x_{n-1}, x_n)$	$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$		

Відмітимо деякі ***властивості поділених різниць***.

1. Поділену різницю k-го порядку можна виразити через значення функції у вузлах за такою формулою

$$f(x_i, x_{i+1}, \ \ldots, x_{i+k}) = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i \\ m \neq j}}^{i+k} (x_j - x_m)}. \tag{4.15}$$

Доведемо цю формулу методом математичної індукції. При k =1 формула правильна, оскільки

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i} = \sum_{j=i}^{i+1} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i \\ m \neq j}}^{i+1} (x_j - x_m)}.$$

Припустимо, що формула (4.15) є правильною при $k = \ell - 1$ і доведемо її правильність при $k = \ell$. Напишемо поділену різницю ℓ-го порядку

$$f(x_i, x_{i+1}, \ \ldots, x_{i+\ell}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+\ell}) - f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+\ell-1})}{x_{i+\ell} - x_i} =$$

$$=\frac{1}{x_{i+\ell}-x_i}\left(\sum_{j=i+1}^{i+\ell}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+\ell}(x_j-x_m)}-\sum_{j=i}^{i+\ell-1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq j}}^{i+\ell-1}(x_j-x_m)}\right).$$

В останній формулі при $j = i$ та $j = i+\ell$ відповідні доданки з $f(x_j)$ зустрічаються один раз, причому у потрібному вигляді. При всіх інших значеннях j доданки з $f(x_j)$ зустрічаються двічі. Об'єднаємо ці доданки парами

$$\frac{1}{x_{i+\ell}-x_i}\left(\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+\ell}(x_j-x_m)}-\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq j}}^{i+\ell-1}(x_j-x_m)}\right)=$$

$$=\frac{1}{x_{i+\ell}-x_i}\cdot\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+\ell-1}(x_j-x_m)}\left(\frac{1}{x_j-x_{i+\ell}}-\frac{1}{x_j-x_i}\right)=$$

$$=\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i+1\\ m\neq j}}^{i+\ell-1}(x_j-x_m)}\cdot\frac{1}{(x_j-x_{i+\ell})(x_j-x_i)}=\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq j}}^{i+\ell}(x_j-x_m)}.$$

Остаточно маємо

$$f(x_i,x_{i+1},\ldots,x_{i+\ell})=\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq i}}^{i+\ell}(x_i-x_m)}+\frac{f(x_{i+\ell})}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq i+\ell}}^{i+\ell}(x_{i+\ell}-x_m)}+\sum_{j=i+1}^{i+\ell-1}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq j}}^{i+\ell}(x_j-x_m)}=$$

$$=\sum_{j=i}^{i+\ell}\frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i\\ m\neq j}}^{i+\ell}(x_j-x_m)}.$$

Формула (4.15) доведена.

2. Поділена різниця будь-якого порядку є лінійним оператором від $f(x)$. Дійсно, нехай $f(x) = \alpha \cdot f_1(x) + \beta \cdot f_2(x)$, тоді

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i \\ m \neq j}}^{i+k} (x_j - x_m)} = \alpha \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f_1(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i \\ m \neq j}}^{i+k} (x_j - x_m)} +$$

$$+\beta \sum_{j=i}^{i+k} \frac{f_2(x_j)}{\prod\limits_{\substack{m=i \\ m \neq j}}^{i+k} (x_j - x_m)} = \alpha f_1(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}) + \beta f_2(x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}).$$

3. Поділена різниця є симетричною функцією своїх аргументів, тобто не змінюється при будь-якій перестановці аргументів. Дійсно, будь-яке переставляння аргументів у поділеній різниці приводить до зміни місць доданків у сумі та зміни місць множників у добутках формули (4.15).

4.6. Інтерполяційний многочлен у формі Ньютона

За допомогою поділених різниць можна одержати іншу форму запису інтерполяційного многочлена (4.7). Для цього на проміжку $[a,\ b]$ задамо функцію $f(x)$ її значеннями $f(x_i)$ у вузлах $x_i \in [a,b],\ i = \overline{0,n}$, причому $x_i \neq x_j$ при $i \neq j$.

Нехай x – це довільна точка на проміжку $[a,\ b]$, причому $x \neq x_i,\ i = \overline{0,n}$. Розглянемо поділену різницю першого порядку, побудовану за точками $\{x,\ x_0\}$

$$f(x,\ x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Звідси знаходимо

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x, x_0). \tag{4.16}$$

Тут число $f(x_0) = P_0(x)$ є інтерполяційним многочленом нульового степеня, побудованим за одним вузлом x_0, $R_0(x) = (x - x_0) \cdot f(x, x_0)$ – похибка інтерполювання. Далі підключимо ще один вузол x_1 та розглянемо множину точок $\{x, x_0, x_1\}$. За означенням поділеної різниці другого порядку маємо

$$f(x,\ x_0, x_1) = \frac{f(x, x_0) - f(x_0, x_1)}{x - x_1}.$$

Звідси знаходимо

$$f(x,x_0)=f(x_0,x_1)+(x-x_1)\cdot f(x,x_0,x_1).$$

Підставивши знайдений вираз в (4.16), маємо

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)\cdot f(x,\,x_0,x_1). \qquad (4.17)$$

Тут $P_1(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f(x_0,\,x_1)$ – інтерполяційний поліном першого степеня, побудований за вузлами $x_0,\,x_1$; $R_1(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdot f(x,\,x_0,x_1)$ – похибка інтерполювання.

Якщо порівняти $P_1(x)$ та $P_0(x)$, то бачимо, що

$$P_1(x)=P_0(x)+(x-x_0)\cdot f(x_0,\,x_1),$$

тобто наступний поліном $P_1(x)$ дорівнює попередньому поліному $P_0(x)$ плюс доданок, що характеризує вплив нового вузла x_1.

Додамо ще один вузол x_2 і скористаємось формулою для поділеної різниці третього порядку

$$f(x,x_0,\,x_1,\,x_2)=\frac{f(x,x_0,x_1)-f(x_0,x_1,x_2)}{x-x_2}.$$

Знайдемо звідси $f(x,x_0,x_1)$ та підставивши до формули (4.17), одержимо

$$f(x)=P_1(x)+(x-x_0)(x-x_1)\cdot f(x_0,x_1,x_2)+(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\cdot f(x,x_0,x_1,x_2).$$

Методом математичної індукції добудемо формулу для інтерполяційного полінома, побудованого за вузлами $x_0,x_1,\cdots,x_n$.

$$P_n(x)=f(x_0)+(x-x_0)\cdot f(x_0,x_1)+(x-x_0)(x-x_1)\cdot f(x_0,x_1,x_2)+\cdots+ \qquad (4.18)$$
$$+(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})\cdot f(x_0,x_1,\,\cdots,x_n).$$

Похибка цієї інтерполяційної формули має вигляд

$$R_n(x)=\left(\prod_{m=0}^{n}(x-x_m)\right)\cdot f(x,x_0,x_1,\ldots,x_n). \qquad (4.19)$$

Формулу (4.18) називають ***формулою Ньютона для інтерполяційного многочлена*** у випадку нерівних проміжків між вузлами.

Приклад. Побудувати інтерполяційний многочлен за формулою Ньютона та за такими умовами інтерполювання

x_i	0	2	3	5
$f(x_i)$	1	3	2	5

Для цих даних обчислюємо таблицю поділених різниць (табл. 4.2).

Таблиця 4.2

Поділені різниці до прикладу

x_i	$f(x_i)$	Поділені різниці 1-го порядку	Поділені різниці 2-го порядку	Поділені різниці 3-го порядку
0	1	1	–2/3	3/10
2	3	–1	5/6	
3	2	3/2		
5	5			

Тепер скористаємось формулою (4.18)

$$P_3(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1) \cdot f(x_0, x_1, x_2) +$$

$$+(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) =$$

$$= 1 + 1 \cdot (x - 0) - \frac{2}{3}x(x-2) + \frac{3}{10}x(x-2)(x-3) = \frac{3}{10}x^3 - \frac{13}{6}x^2 + \frac{62}{15}x + 1.$$

Як видно, інтерполяційний поліном, побудований за формулою Ньютона, збігається з інтерполяційним поліномом, побудованим за формулою Лагранжа (див. приклад у п.4.3).

При побудові многочлена Ньютона не обов’язково заздалегідь знати степінь многочлена, що забезпечує потрібну точність (як при побудові многочлена Лагранжа). Можна послідовно додавати вузли доти, доки потрібний степінь не буде досягнутий, при цьому додавання одного чи декількох вузлів не призводить до переробки всіх обчислень, як це було б у формулі (4.7).

Однак, якщо інтерполювати декілька функцій в одній і тій же точці x і за однією і тією ж системою вузлів x_i, $i = \overline{0, n}$, то більш зручним виявляється інтерполяційний многочлен Лагранжа, оскільки значення многочленів $Q_n^{(i)}(x)$ можна вирахувати один раз для усіх функцій.

Формула (4.19) дає вираз для залишкового члена інтерполяційного многочлена Ньютона

$$R_n(x) = \omega_{n+1}(x) \cdot f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Порівнюючи цей залишок із залишком (4.8) інтерполяційного многочлена Лагранжа, одержуємо рівність

$$f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}.$$

Залишковий член інтерполяційної формули Ньютона важко досліджувати, бо величина $f(x, x_0, x_1, \ldots, x_n)$ залежить від значення функції $f(x)$, яке невідоме.

На практиці поділені різниці найчастіше спадають із збільшенням їхнього порядку, потім поводять себе неправильно (починає впливати обчислювальна похибка) а далі зростають. Звідси виходить, що перші доданки в інтерполяційній формулі (4.18) будуть найсуттєвіше впливати на значення інтерполяційного многочлена в точці x (особливо якщо перші вузли розташовані якнайближче до точки x). При цьому поправки, які одержують при притягненні наступних вузлів, як правило, виявляються незначними. Але з того моменту, коли поділені різниці починають поводитися неправильно, притягнення нових вузлів стає недоцільним.