МЛТА. Лекція 15.03.2021

Машина Тьюрінга

Англійський інженер і математик Алан Матісон Тьюрінг (1912–1954) увів поняття математичної машини (1936 р.), яка моделює розумову діяльність людини і уточнює інтуїтивне уявлення про алгоритми. Ця модель була не декларативною, а «машиноподібною», хоча справжні електронні та електромеханічні машини з'явилися лише кілька років по тому (і сам Тьюрінг займався їх розробкою під час другої світової війни). Зараз відомо багато різних варіантів машин Тьюринга і їх узагальнень (багатострічкові, мультистекові та ін.).

Під ***машиною Тьюрінга*** (скорочено МТ) будемо розуміти впорядковану п’ятірку

$$\langle Q, T, \delta, q_1, q_0 \rangle,$$

де:

- Q – скінченна множина внутрішніх станів;
- T – скінченний алфавіт символів стрічки, причому T містить спеціальний символ порожньої клітки Λ (або λ);
- $\delta : Q \times T \to Q \times T \times \{R, L, S\}$ – однозначна функція переходів;
- $q_1 \in Q$ – початковий стан;
- $q_0 \in Q$ – заключний (фінальний) стан.

Неформально машина Тьюрінга – це абстрактний пристрій, складений зі стрічки, пристрою (голівки) читання-запису і керівного пристрою (рис. 1).

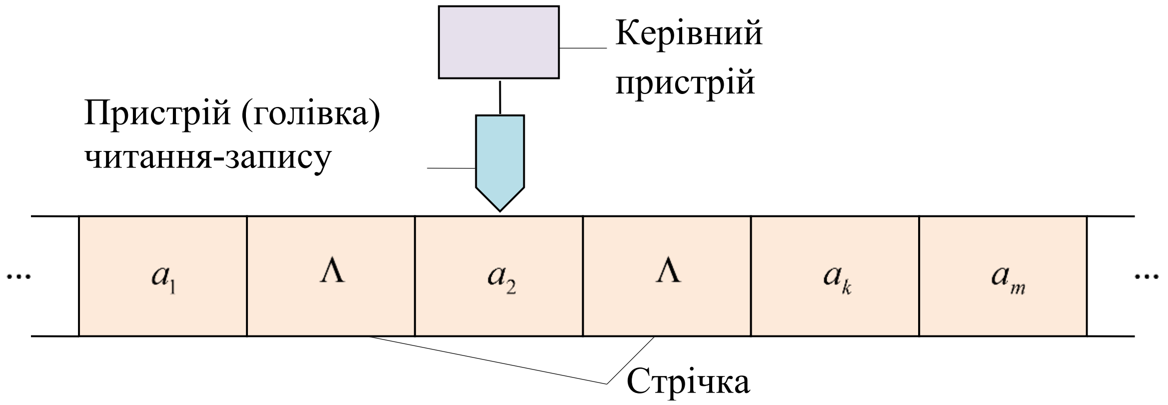

Рис. 1

Стрічка розділена на комірки (клітки) і допускається потенційно-необмеженою в обидва боки. У кожній комірці у кожний дискретний момент часу знаходиться рівно один символ із зовнішнього алфавіту. У будь-який момент часу стрічка містить скінченну кількість комірок, відмінних від символу $\Lambda(\lambda)$. Алфавіт $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $n \ge 2$ містить порожній символ. Найпростіший алфавіт $T = \{0, 1\}$, де 0 – порожній символ. Комірки не нумеруються та не іменуються.

Керівний пристрій у кожний дискретний момент часу перебуває в певному стані q_j, що належить множині $Q = \{q_0, q_1, \ldots, q_m\}, m \ge 1$ – множині внутрішніх станів. Число елементів в Q характеризує об'єм внутрішньої пам'яті машини Тьюрінга. У множині внутрішніх станів виділені два спеціальні стани: q_1 – початковий, а q_0 – заключний стан. МТ починає роботу в стані q_1, потрапивши в стан q_0 машина завжди зупиняється.

Пристрій* (*голівка*) *читання-запису переміщується вздовж стрічки так, що в кожен момент часу вона «бачить» рівно одну комірку стрічки. Голівка читання-запису може зчитувати вміст цієї комірки і записувати в неї замість цього символу деякий інший символ із зовнішнього алфавіту T (чи той же самий).

У процесі роботи керівний пристрій залежно від стану, в якому він знаходиться і символу, який він «бачить», змінює свій (внутрішній) стан (може залишитися в попередньому стані), видає голівці читання-запису наказ надрукувати в комірці, в якій спостерігаємо певний символ із зовнішнього алфавіту, і «наказує» голівці читання-запису або залишатися на місці, або зсунутись на одну комірку вліво чи на одну комірку вправо.

Роботу керівного пристрою машина Тьюрінга виконує відповідно до програми.

Програма машини Тьюрінга складається зі скінченої кількості команд. Кожна ***команда*** має вигляд п'ятірки :

$$q_i a_j q_k a_m d \text{ або } q_i a_j \to q_k a_m d,$$

де $d = \{S, L, R\}$ – функція руху голівки читання-запису:

- S означає відсутність руху голівки читання-запису (стоп),
- L – зсування на одну комірку вліво,
- R – зсування на одну комірку вправо.

Виконання цієї команди має таке значення: якщо голівка читання-запису в стані q_i розглядає комірку, в якій записано символ a_j, то відповідно до цієї команди замінюємо символ a_j на a_m; стан голівки читання-запису q_i на q_k і голівка читання-запису або зсувається вліво (L), або вправо (R), або ж залишається на місці (S).

Наприклад, команда $q_2 a_3\, q_4 a_4 L$. Її виконання продемонстровано на рис. 2.

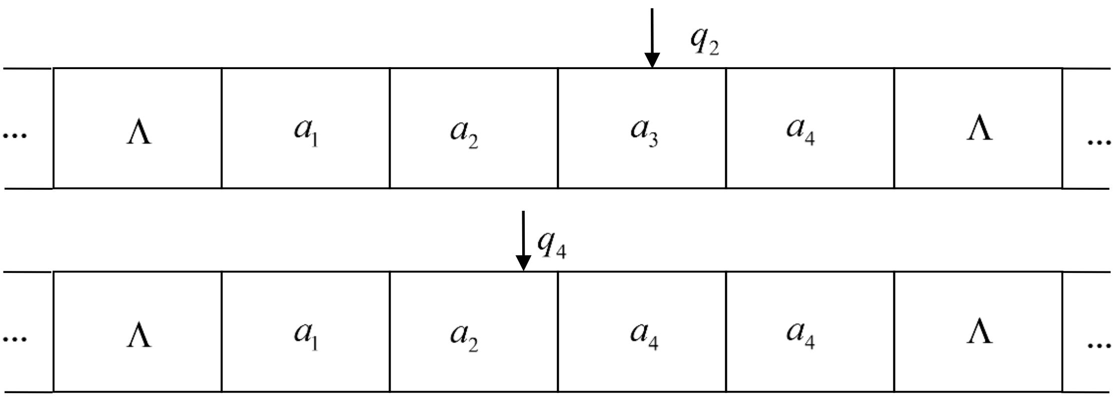

Рис. 2

Будемо вимагати, щоб для будь-якої пари $q_i a_j$ була в програмі точно одна команда, що починається з цього запису. Якщо стан змінюється на q_0, то можна стверджувати, що машина зупиняється і жодної команди, яка починається з q_0 немає.

Будемо вважати, що:

- МТ починає роботу зі стану q_1,
- на стрічці на кожному такті тільки скінченна кількість непорожніх символів і серед них можна виділити крайній правий та крайній лівий символ,
- машина в стані q_1 починає рух на крайньому лівому непорожньому символі.

Роботу програми машини Тьюрінга будемо ілюструвати за допомогою конфігурацій. Слово

$$a_{j_1}\ldots a_{j_{l-1}} q_i a_{j_l}\ldots a_{j_s}$$

називають ***конфігурацією машини Тьюрінга*** (у даний момент часу t).

Стандартна початкова конфігурація має вигляд $K_1 = q_1\alpha$, а ***стандартна заключна* (*фінальна*) *конфігурація*** має вигляд $K_0 = q_0\beta$

За умови $t=1$ конфігурація має вигляд $q_1 a_{j_1}\ldots a_{j_s}$. Якщо в момент часу t стрічка порожня, то конфігурацією машини буде слово $q_i\Lambda\Lambda\Lambda\Lambda\ldots$ Якщо на першому такті t була конфігурація K_1, а на наступному – K_2, то слід записувати $K_1 \vdash K_2$.

Якщо K_1 – початкова конфігурація, а K_0 – заключна, то послідовність $K_1 \vdash K_2 \vdash \ldots \vdash K_0$ називають тьюрінговими розрахунками і означає вона, що конфігурація K_0 виводиться із K_1.

Якщо $p_1 = a_{j_1}\ldots a_{j_s}$ – вхідне слово, то МТ, почавши роботу на слові p_1 або зупиниться через певну кількість кроків, або ніколи не зупиниться.

У першому випадку стверджують, що МТ застосовна до слова p_1 і результатом є слово p, що відповідає заключній конфігурації і $p = T(p_1)$.

У другому випадку – МТ не застосовна до слова p_1.

Часто будуть використані позначення типу P^m для слів такого вигляду $\underbrace{PP\ldots P}_{m\ \text{разів}}$.

Розглянемо найпростіший алфавіт $T=\{0,1\}$, де 0 – порожній символ і $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ – довільний набір цілих невід'ємних чисел.

Слово

$$1^{x_1+1}01^{x_2+1}0\ldots01^{x_n+1}$$

називають ***основним машинним кодом*** і позначають $K(x_1,x_2,\ldots x_n) = K(x_1)0K(x_2)0\ldots0K(x_n)$ для будь-якого $n\in N$. Зокрема як $K(x)=1^{x+1}$ будемо кодувати блок з $(n+1)$-ї одиниці.

$T=\{\lambda,|\}$

Далі будемо розглядати часткові числові функції $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $x_i \in N_0$.

Машині Тьюрінга відповідає часткова словарна функція з областю визначення та областю значень, що є скінченними словами в алфавіті T, яка кожному такому слову ставить в відповідність результат застосування машини до цього слова.

Визначимо обчислення функцій на МТ. Будемо розглядати словарні часткові функції $f: T^* \to T^*$, де T^* – множина усіх слів скінченної довжини в алфавіті T.

Машина Тьюрінга ***правильно обчислює*** часткову функцію f, якщо для будь-якого $a \in T^*$ виконується:

1) якщо $f\left(a\right)$ визначена і $f\left(a\right)=b$, тоді машина Тьюрінга застосовна до початкової конфігурації q_1a та заключною конфігурацією є q_0b,

2) якщо $f\left(a\right)$ невизначена, то МТ незастосовна до початкової конфігурації q_1a.

Функція f називається ***правильно обчислюваною за Тьюрінгом***, якщо існує МТ, яка її правильно обчислює.

Аналогічні визначення можна зробити і для функцій кількох змінних. Для цього достатньо множину слів, які є аргументами, записати у вигляді одного слова, ввівши знак-розділювач.

У подальшому будемо вважати, що в початковий момент часу голівка читання-запису машини «бачить» крайню ліву одиницю слова $K\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)$.

Приклад 1. Побудувати машину Тьюрінга, яка застосовна до слів 1^{3n} $\left(n \ge 1\right)$ та незастосовна до слів вигляду $1^{3n+\alpha}$, де $\alpha = 1,2$. Алфавіт $T = \left\{0,1\right\}$.

Програму машини Тьюрінга зручно записувати у вигляді таблиці:

$q_1 1 q_2 1 R$
$q_2 1 q_3 1 R$
$q_3 1 q_1 1 R$
$q_1 0 q_4 0 L$
$q_4 1 q_4 1 L$
$q_4 0 q_0 0 R$
$q_2 0 q_2 0 S$
$q_3 0 q_3 0 S$

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_4 0 L$	$q_2 0 S$	$q_3 0 S$	$q_0 0 R$
1	$q_2 1 R$	$q_3 1 R$	$q_1 1 R$	$q_4 1 L$