ЛР1. Методична розробка 1
Викладач Бойко Л.Т.

1.1. Постановка задачі

Розглянемо рівняння

$$f(x)=0, \text{ де } f(x)\in C[a,b]. \quad (1.1)$$

Число ξ, що перетворює рівняння (1.1) у тотожність, будемо називати ***коренем*** цього рівняння, або ***нулем функції*** $f(x)$. ***Розв'язати рівняння*** – означає знайти всі його корені. Корені рівняння можуть бути дійсними, комплексними, кратними, ізольованими (простими).

Лише у виняткових випадках розв'язок рівняння можна побудувати у вигляді формули. Крім того, в деяких випадках рівняння (1.1) може мати коефіцієнти, які відомі лише наближено, тоді задача про точне визначення коренів такого рівняння втрачає сенс.

Наближене відшукання ізольованих дійсних коренів складається з двох етапів: відокремлення коренів та уточнення.

Відокремити дійсний корінь – означає знайти інтервал (за можливістю малий), який містить тільки один корінь рівняння.

Уточнити корінь – означає довести його наближене значення до потрібної точності.

1.2. Методи відокремлення дійсних коренів

При відокремленні дійсних коренів ***аналітичним методом*** слід спиратися на теорему, відому як перша теорема Больцано-Коші

Теорема. Якщо визначена і неперервна на відрізку [*a*, *b*] функція $f(x)$ на кінцях цього відрізку набуває значень різних знаків, тобто $f(a)\cdot f(b)<0$, то цей відрізок містить, принаймні, один дійсний корінь рівняння $f(x)=0$.

Корінь буде єдиним, якщо $f'(x)$ існує та зберігає знак на [*a*, *b*], тобто $f(x)$ є монотонною.

Процес відокремлення коренів на [*a*, *b*] починається з визначення знаків $f(x)$ у межових точках $x=a$, $x=b$. Якщо на кінцях відрізка [*a*, *b*] функція $f(x)$ набуває значень різних знаків, то на цьому проміжку розташована непарна кількість коренів рівняння (1.1).

Якщо на кінцях відрізка [*a*, *b*] функція $f(x)$ набуває значень одного знаку, то на цьому відрізку або зовсім не існує коренів рівняння (1.1), або існує парна кількість.

Далі визначаються знаки функції $f(x)$ в деяких проміжних точках $x=\alpha_1$, α_2, …, α_n, вибір яких ураховує особливості функції $f(x)$. Якщо виявиться, що $f(\alpha_k)\cdot f(\alpha_{k+1})<0$, то відрізок $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$ має корені рівняння

(1.1). Якщо $f'(x)$ зберігає знак для всіх $x \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, то корінь на цьому відрізку єдиний. Якщо $f'(x)$ змінює знак на $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, то цей відрізок треба розбити на ще менші відрізки так, щоб $f'(x)$ зберігала знак на кожному з них.

Процес відокремлення коренів вважається закінченим, якщо визначені проміжки монотонності $f(x)$, на кінцях яких $f(x)$ набуває значень різних знаків.

Універсальним методом відокремлення коренів є побудова графіка функції $y = f(x)$ за допомогою ЕОМ (***графічний метод відокремлення***). Координати точок перетину графіка з віссю абсцис і є нулями функції $f(x)$ (рис. 1.1). Зауважимо, що корінь ξ_4, показаний на рис. 1.1, не є ізольованим, це кратний корінь.

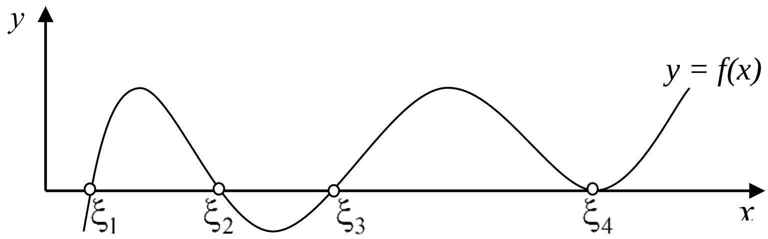

Рис. 1.1. Схема графічного методу відокремлення коренів

При застосуванні графічного методу інколи буває зручно записати спочатку рівняння (1.1) у вигляді $\varphi(x) = \psi(x)$ і далі побудувати графіки функцій $y = \varphi(x)$ та $y = \psi(x)$. Абсциси точок перетину цих графіків і будуть значеннями коренів.

Приклад 1. Треба відокремити корені рівняння $f(x) \equiv x \sin x - 1 = 0$. Оскільки $x = 0$ не є його коренем, то рівняння можна переписати у вигляді $\sin x = \dfrac{1}{x}$. Будуємо графіки функцій $y = \sin x$ та $y = \dfrac{1}{x}$, вони показані на рис 1.2.

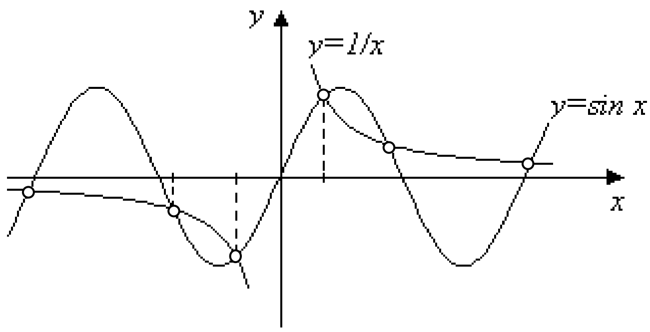

Рис. 1.2. Графіки функцій до прикладу 1

Видно, що точок перетину цих графіків існує безліч. Абсциса кожної точки перетину є коренем нашого рівняння.

Якщо рівняння (1.1) є ***алгебраїчним***, тобто

$$f(x) \equiv P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0, \qquad a_{\mathrm{n}} \neq 0,$$

то задача відокремлення коренів у цьому випадку розв'язується більш просто та точно. Тут слід згадати відомі з алгебри теореми

Теорема 1. Алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів, взагалі кажучи, комплексних, причому кожен корінь рахується стільки разів, яка його кратність.

Теорема 2. Якщо в алгебраїчному рівнянні всі коефіцієнти дійсні, то комплексні корені (якщо вони є) будуть обов'язково комплексно спряженими парами.

Наслідок. Алгебраїчне рівняння непарного степеня з усіма дійсними коефіцієнтами має, принаймні, один дійсний корінь.

Теорема 3. У алгебраїчного рівняння $P_n(x) = 0$ з усіма дійсними коефіцієнтами кількість додатних коренів (з урахуванням їхньої кратності) дорівнює кількості змін знаків у послідовності коефіцієнтів $a_0, a_1, \cdots, a_n$ або менше на парне число. Нульові коефіцієнти рівняння не враховуються.

Кількість від'ємних коренів рівняння $P_n(x) = 0$ можна знайти, якщо застосувати теорему 3 до рівняння $P_n(-x) = 0$.

Приклад 2. Застосуємо теорему 3 до рівняння

$$P_3(x) \equiv x^3 - 2{,}9x + 3 = 0. \qquad (*)$$

Тут $a_0 = 3; a_1 = -2{,}9; a_2 = 0; a_3 = 1$. Отже, маємо в послідовності коефіцієнтів дві зміни знаків. Це означає, що рівняння або має два додатних корені, або зовсім не має додатних коренів. Щоб з'ясувати кількість від'ємних коренів рівняння (*), потрібно перейти від рівняння (*) до такого рівняння

$$P_3(-x) \equiv -x^3 + 2{,}9x + 3 = 0. \qquad (**)$$

Корені рівнянь (*), (**) протилежні за знаками. З'ясуємо кількість додатних коренів рівняння (**). Беремо послідовність коефіцієнтів $a_0 = 3; a_1 = 2{,}9; a_2 = 0; a_3 = -1$ рівняння (**). Маємо одну зміну знаків. Отже, рівняння (**) має один додатний корінь. Звідси випливає, що рівняння (*) має один від'ємний корінь.

Теорема Штурма. Нехай $P(x)$ – алгебраїчний многочлен з усіма дійсними коефіцієнтами, a і b $(a < b)$ – дійсні числа, які не є його нулями, тобто $P(a) \neq 0$, $P(b) \neq 0$; $f_0(x)$, $f_1(x)$, $\cdots$, $f_m(x)$ – система функцій Штурма, побудована для $P(x)$ на відрізку [a, b]. Тоді кількість різних (без урахування кратності) дійсних коренів рівняння $P(x)$=0, що належать відрізку [a, b], дорівнює різниці $N(a)-N(b)$, де $N(a)$ – кількість змін знаків у послідовності значень $f_0(a)$, $f_1(a), \cdots, f_m(a)$ а $N(b)$ – кількість змін знаків у послідовності значень $f_0(b)$, $f_1(b), \cdots, f_m(b)$. Нульові значення в цих послідовностях не приймаються до уваги (пропускаються).

Система функцій Штурма $f_i(x),\ i=\overline{0,m}$ для полінома $P(x)$ будується в такий спосіб. Дві перші функції знаходяться за правилом: $f_0(x)=P(x)$, $f_1(x)=P'(x)$. Кожна з наступних функцій $f_i(x),\ i=\overline{2,m}$ знаходиться як остача від ділення $f_{i-2}(x)$ на $f_{i-1}(x)$, але взята з протилежним знаком, тобто, якщо записати $f_{i-2}(x)=f_{i-1}(x)\cdot q(x)+r_i(x)$, де $r_i(x)$ – остача, то $f_i(x)=-r_i(x)$. За цим правилом знаходяться функції $f_i(x)$ до останньої не рівної нулю остачі.

Зауважимо, що функції системи Штурма можна будувати з точністю до додатного сталого множника.

Хоча теорема Штурма у порівнянні з іншими теоремами алгебри є достатньо трудомісткою, але вона дає чітку відповідь на питання: «Скільки дійсних різних коренів має рівняння на $[a,\ b]$, та де ці корені розташовані?»

Існує ще багато інших теорем, які допомагають відокремлювати корені алгебраїчних рівнянь

Приклад 3. Маємо рівняння $f(x)\equiv x^3-2{,}9x+3=0$. Відокремимо його дійсні корені методом Штурма. Для цього будуємо систему функцій Штурма.

$$\boxed{\begin{aligned}&f_0(x)=x^3-2{,}9x+3;\\&f_1(x)=3x^2-2{,}9.\end{aligned}}$$

Щоб знайти $f_2(x)$, ділимо $f_0(x)$ на $f_1(x)$ та беремо остачу з протилежним знаком.

$$\begin{array}{rl}
x^3-2{,}9x+3 & \big|\ \underline{3x^2-2{,}9} \\
-\ \underline{x^3-\dfrac{2{,}9}{3}x} & \big|\ \dfrac{x}{3} \\
\underbrace{-\dfrac{2}{3}\cdot 2{,}9x+3}_{\textit{остача}} &
\end{array}$$

Зручно взяти остачу помножену на додатне число 3. Отже,

$$\boxed{f_2(x)=5{,}8x-9}.$$

Знайдемо функцію $f_3(x)$. Для цього поділимо $f_1(x)$ на $f_2(x)$.

$$\begin{array}{r|l} 3x^2-2{,}9 & 5{,}8x-9 \\ \cline{2-2} -\;3x^2-\dfrac{27}{5{,}8}x & \dfrac{3}{5{,}8}x+\dfrac{27}{(5{,}8)^2} \\ \cline{1-1} \dfrac{27}{5{,}8}x-2{,}9 & \\ -\;\dfrac{27}{5{,}8}x-\dfrac{27\cdot 9}{(5{,}8)^2} & \\ \cline{1-1} \underbrace{\dfrac{27\cdot 9}{(5{,}8)^2}-2{,}9}_{\textit{остача}} & \end{array}$$

Остачею є стала. Обчислювати її не потрібно, нас цікавить лише її знак. Неважко бачити, що вона додатна. Отже $\boxed{f_3(x)=-1}$.

Далі будуємо таблицю змін знаків функцій Штурма (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Знаки функцій системи Штурма (до прикладу 3)

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$N(x)$
$-\infty$	–	+	–	–	2
$+\infty$	+	+	+	–	1
0	+	–	–	–	1
–10	–	+	–	–	2
–5	–	+	–	–	2
–3	–	+	–	–	2
–2	+	+	–	–	1

З таблиці видно, що рівняння має тільки один дійсний корінь, який належить інтервалу (–3, –2).

Деякі методи уточнення коренів вимагають, щоб на відрізку $[a, b]$ перша та друга похідні функції $f(x)$ зберігали знак. Для нашого прикладу ці умови виконуються. Для доведення цього твердження обчислюємо похідні

$$f'(x)=3x^2-2{,}9\,;\quad f''(x)=6x<0,\quad \forall x\in[-3,-2].$$

Те, що перша похідна $f'(x)$ зберігає знак для $\forall x\in[-3;-2]$ можна доводити у різний спосіб. Зупинимося на таких трьох способах:

1. Оскільки $f''(x)=6x<0$ для $\forall x\in[-3;-2]$, то $f'(x)$ – монотонно спадна. Обчислюємо $f'(-2)=9{,}1$; $f'(-3)=24{,}1$. Отже, $f'(x)$ монотонно спадає від додатного числа до додатного. Це означає, що $f'(x)$ є додатною для $\forall x\in[-3;-2]$.

2. Знаходимо нулі першої похідної $f'(x) = 3x^2 - 2,9 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 \approx 1$, $x_2 \approx -1$. Жодна з цих двох точок не попадає на відрізок $[-3;-2]$. Отже, $f'(x)$ не змінює знак на відрізку $[-3;-2]$.
3. Виконаємо перегрупування доданків у виразі першої похідної
$$f'(x) = 3x^2 - 2,9 = 3(x^2 - 1) + 0,1 > 0\,, \quad \forall x \in [-3,-2]$$

==