Практичне заняття 29.03.2021

Машина Тьюрінга

1. Побудувати машину Тьюрінга, яка застосовується до всіх слів $x_1x_2x_3\ldots x_n$ в алфавіті $\{a,b\}$ і переводить їх в слово α. Перевірити роботу машини Тьюрінга над деякими словами.

$$\alpha = \begin{cases} x_1\lambda x_3\lambda\ldots\lambda x_n, & \text{якщо } n \text{ - непарне,} \\ x_1x_2\ldots x_n, & \text{якщо } n \text{ - парне.} \end{cases}$$

Опишемо роботу алгоритму, який розв’язує цю задачу.

Будемо позначати стани машини Тьюрінга числами 0, 1, 2, …, причому 1 – початковий, а 0 – заключний стан.

Нехай в алфавіті $\{a,b\}$ задано слово довільної довжини n. По черзі переходячи зі стану 1 в стан 2, визначаємо, чи є n парним або непарним.

Якщо n – парне, то у стані 1 зчитуємо символ λ і переходимо в стан 3. У цьому випадку вихідне слово міняти не треба. У стані 3 повертаємося на перший символ слова та зупиняємося в стані 0.

Якщо n – непарне, то в стані 2 зчитуємо символ λ і переходимо в стан 4. В цьому випадку у вихідному слові треба видалити всі парні символи. Це здійснюється станами 4 і 5 при русі вліво. Таким чином, повертаємося на перший символ слова та зупиняємося в стані 0.

Запишемо програму побудованої машини Тьюрінга у вигляді таблиці:

	1	2	3	4	5
a	$aR2$	$aR1$	$aL3$	$aL5$	$\lambda L4$
b	$bR2$	$bR1$	$bL3$	$bL5$	$\lambda L4$
λ	$\lambda L3$	$\lambda L4$	$\lambda R0$	$\lambda R0$	$\lambda R0$

Перевіримо роботу побудованої машини Тьюрінга над словом $aabbbabaa$.

В цьому випадку $n=9$ (непарне).

$\underset{1}{a}abbbabaa$, $a\underset{2}{a}bbbabaa$, $aa\underset{1}{b}bbabaa$, $aab\underset{2}{b}babaa$, …, $aabbbabaa\underset{2}{\lambda}$, $aabbbaba\underset{4}{a}\lambda$, $aabbbab\underset{5}{\lambda}a\lambda$, …, $\underset{0}{a}\lambda b\lambda b\lambda b\lambda a\lambda$.

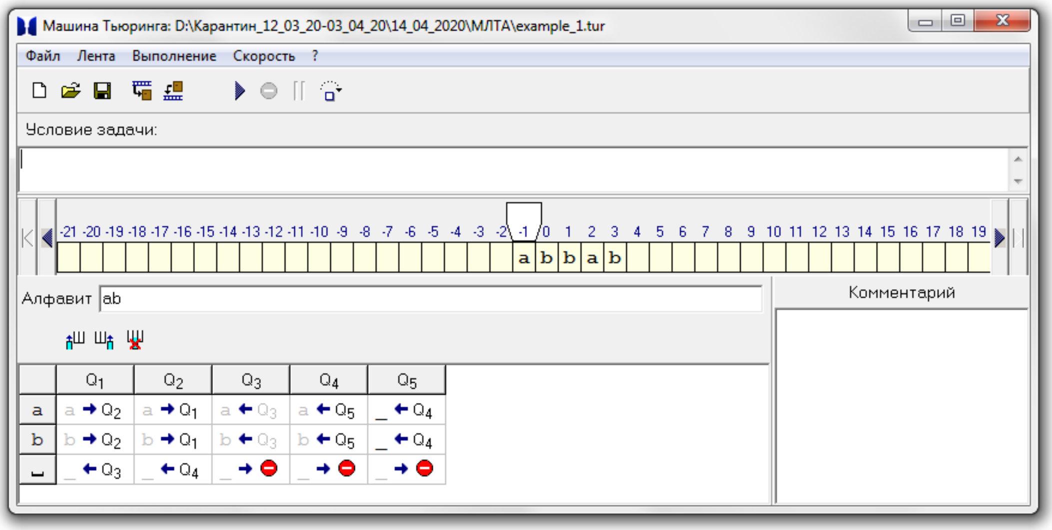
Перевіримо роботу побудованої машини Тьюрінга над словом $abba$.

В цьому випадку $n=4$ (парне).

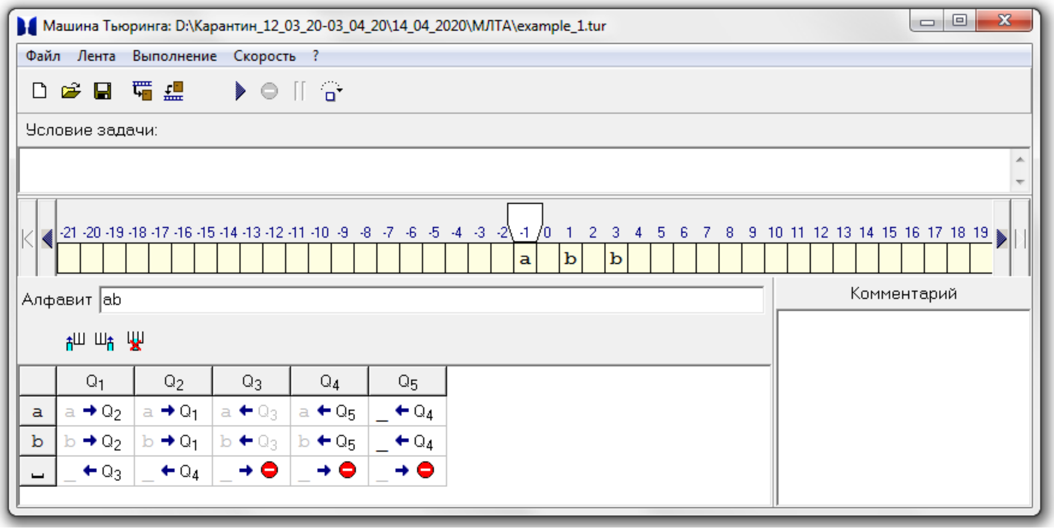
$\underset{1}{a}bba$, $a\underset{2}{b}ba$, $ab\underset{1}{b}a$, $abb\underset{2}{a}$, $abba\underset{1}{\lambda}$, $abb\underset{3}{a}\lambda$, $ab\underset{3}{b}a$, $a\underset{3}{b}ba$, $\underset{3}{a}bba$, $\underset{3}{\lambda}abba$, $\underset{0}{a}bba$.

Отже, перевірка зроблена, результат роботи машини Тьюрінга задовольняє вимогам, які ставилися в умові завдання.

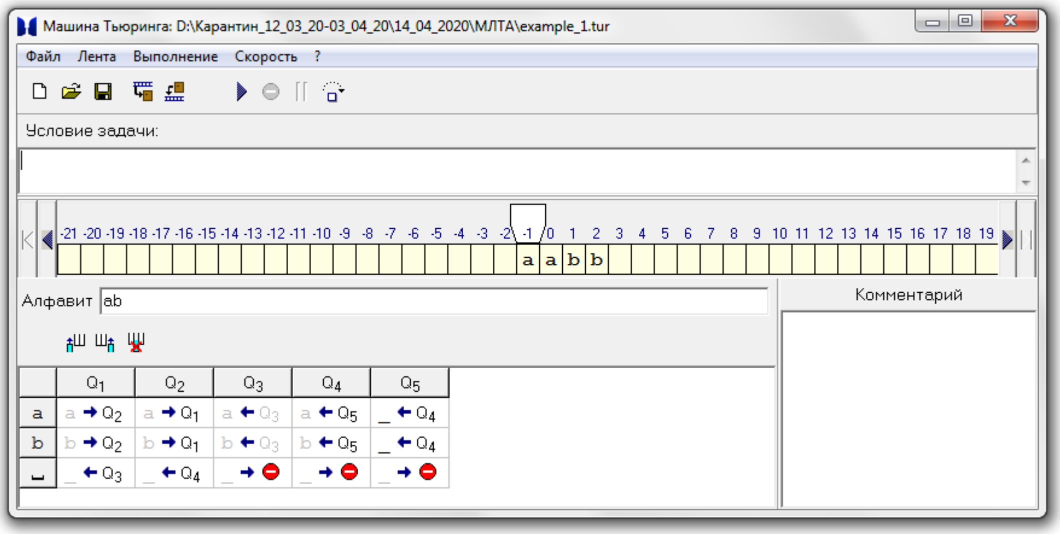
Перевіримо роботу отриманої програми в емуляторі. Нехай задано слово $abbab$. У цьому випадку довжина слова $n=5$ (непарне). Маємо наступну початкову конфігурацію:



Заключна конфігурація має вид:



Нехай задано слово $aabb$. У цьому випадку довжина слова $n=4$ (парне). Маємо наступну початкову конфігурацію:



Заключна конфігурація $q_0 aabb$. В цьому випадку вихідне слово не змінюється.

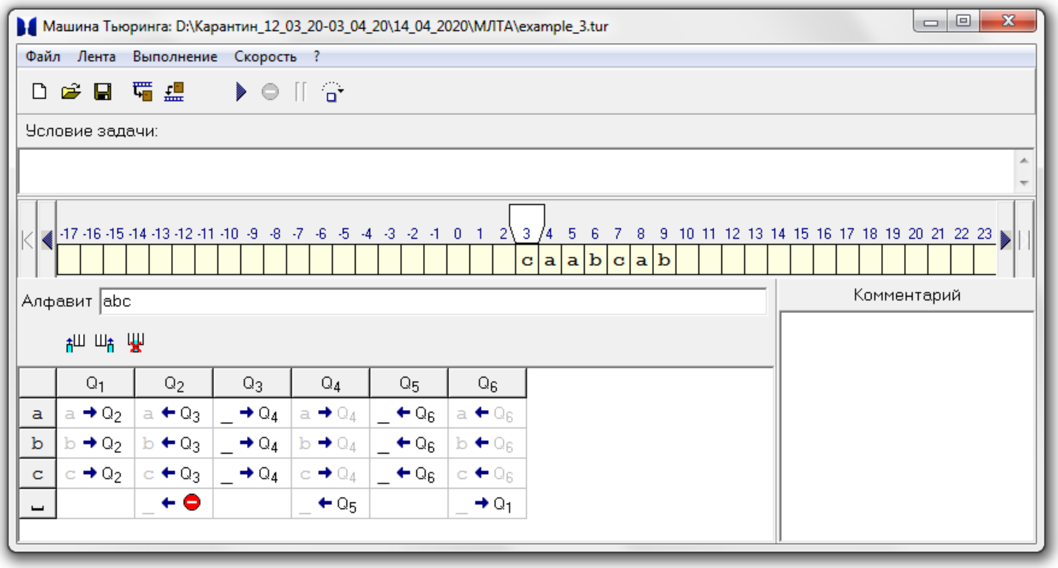
2. Нехай задано алфавіт $\{a,b,c\}$, λ – порожній символ. Побудувати машину Тьюринга, яка в слові P непарної довжини залишає тільки середній символ.

	1	2	3	4	5	6
a	$2aR$	$3aL$	$4\lambda R$	$4aR$	$6\lambda L$	$6aL$
b	$2bR$	$3bL$	$4\lambda R$	$4bR$	$6\lambda L$	$6bL$
c	$2cR$	$3cL$	$4\lambda R$	$4cR$	$6\lambda L$	$6cL$
λ		$0\lambda L$		$5\lambda L$		$1\lambda R$

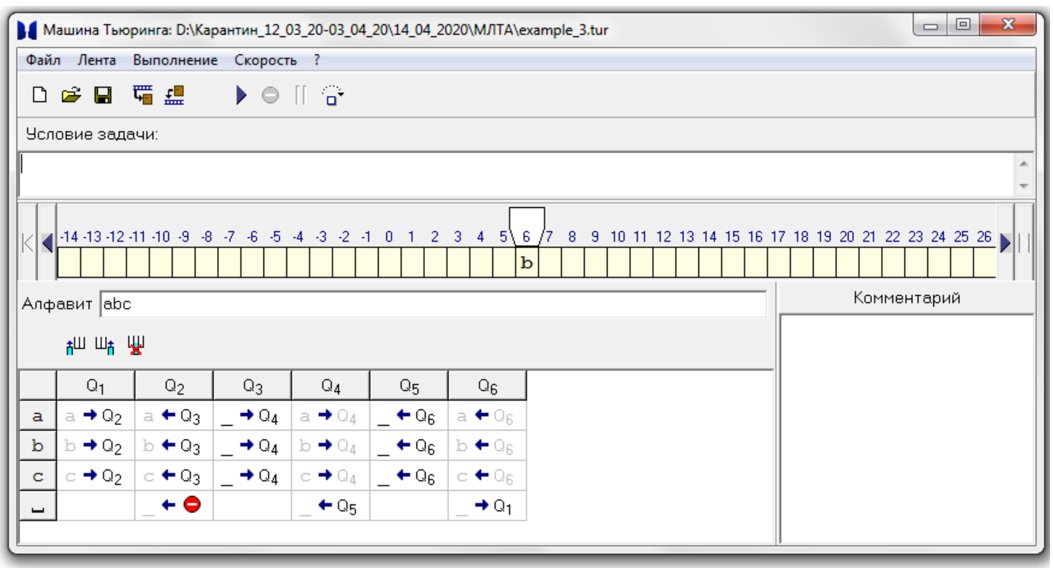
Опишемо роботу програми:

1. перевіряємо наявність другого символу,
2. якщо другий символ є в наявності, то повертаємося і видаляємо перший символ, проходимо до кінця слова і видаляємо останній символ слова, переходимо на пункт 1,
3. якщо залишився один символ, закінчуємо роботу програми.

Нехай задано слово *caabcab*. За умовою задачі довжина слова обов'язково непарна. Маємо таку початкову конфігурацію:



Заключна конфігурація має вид:



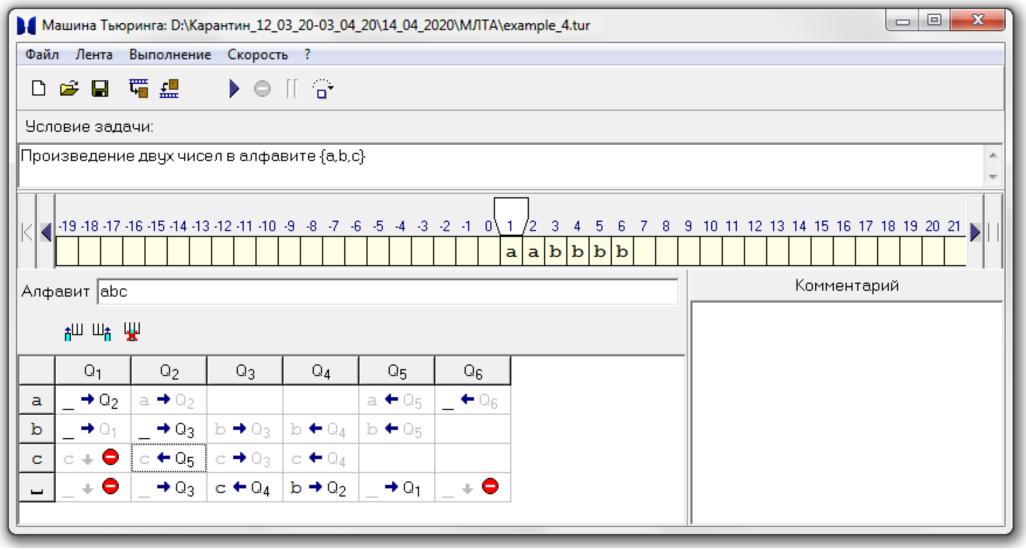
3. Нехай задано алфавіт $\{a,b,c\}$, λ – порожній символ. Побудувати машину Тьюрінга, яка в обчислює функцію $f(x,y)=x\cdot y$.

Початкова конфігурація: $K_1=q_1\underbrace{a\ldots a}_{x}\underbrace{b\ldots b}_{y}$, заключна конфігурація $K_1=q_0\underbrace{c\ldots c}_{x\cdot y}$.

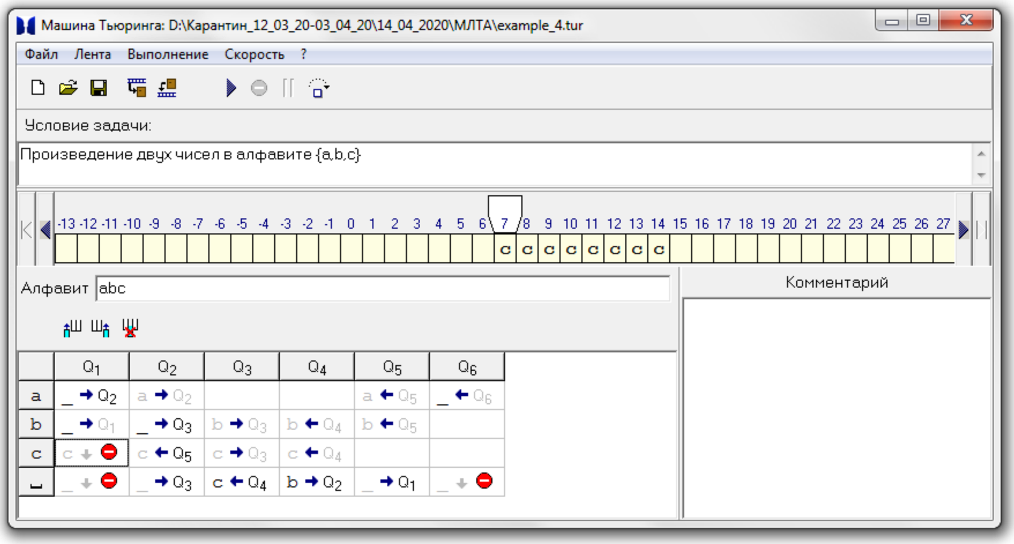
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a	$q_2\lambda R$	q_2aR			q_5aL	$q_6\lambda L$
b	$q_1\lambda R$	$q_3\lambda R$	q_3bR	q_4bL	q_5bL	
c	q_0cS	q_5cL	q_3cR	q_4cL		
λ	$q_0\lambda S$	$q_6\lambda L$	q_4cL	q_2bR	$q_1\lambda R$	$q_0\lambda S$

Ідея алгоритму: $x\cdot y=\underbrace{y+\ldots+y}_{x\ раз}$.

Нехай $x=2$, $y=4$. Обчислимо $f(2,4)=2\cdot 4=8$. Маємо таку початкову конфігурацію:



Заключна конфігурація має вид:



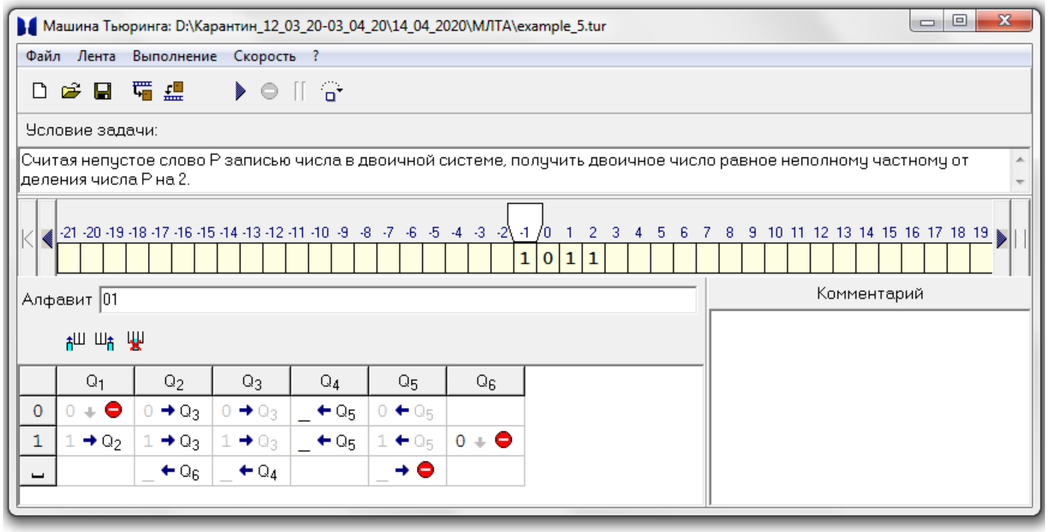
4. Вважаючи непорожнє слово P записом числа в двійковій системі, отримати двійкове число, що дорівнює неповній частці від ділення числа P на 2.

Наприклад: $1011 \to 101 \quad ([11/2]=5)$, $1100 \to 110 \quad ([12/2]=6)$, $1110 \to 111 \quad ([14/2]=7)$. Тобто, треба видалити останній символ числа. Але, потрібно врахувати, що $0 \to 0 \quad ([0/2]=0)$, $1 \to 0 \quad ([1/2]=0)$.

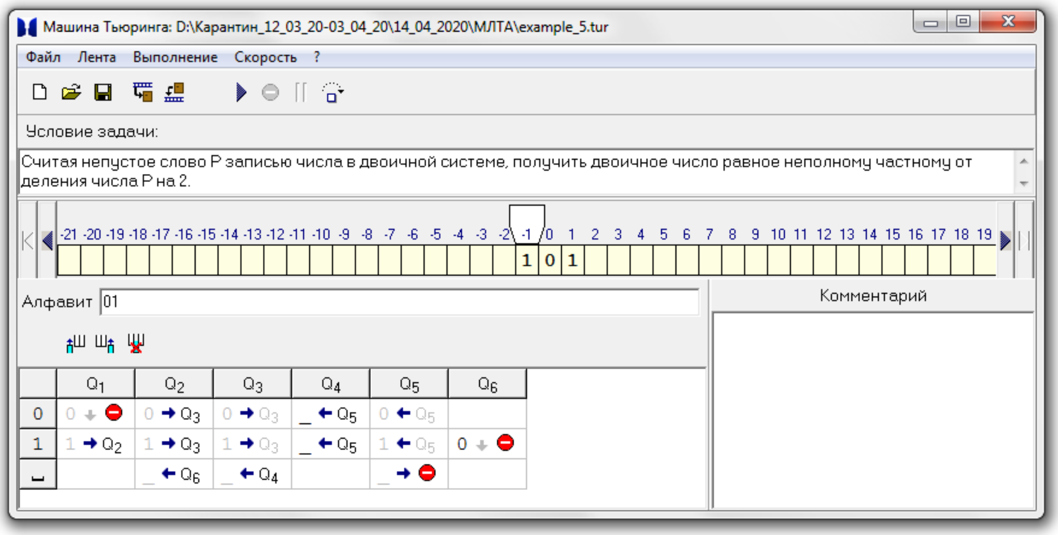
Алфавіт $\{0,1,\lambda\}$, λ – порожній символ.

	1	2	3	4	5	6
0	$00S$	$30R$	$30R$	$5\lambda L$	$50L$	
1	$21R$	$31R$	$31R$	$5\lambda L$	$51L$	$00S$
λ		$6\lambda L$	$4\lambda L$		$0\lambda R$	

Нехай задано число 1011. Маємо наступну початкову конфігурацію:



Заключна конфігурація має вид:



5. Нехай задано алфавіт $\{a,b\}$, λ – порожній символ. Побудувати машину Тьюрінга, яка в слові P кожне входження ab замінює на cc.

	1	2	3	4	5	6
a	$1aR$	$2aL$	$4aR$	$4aR$	$3cR$	$6aL$
b	$1bR$	$2bL$	$3bR$	$5cL$	–	$6bL$
c	$1cR$	$2cL$	$3cR$	$3cR$	–	$6cL$
*	–	–	$6\lambda L$	$6\lambda L$	–	$0\lambda R$
λ	$2*L$	$3*R$	$3\lambda R$	–	–