

Завдання для самостійної роботи з РМФ

Зміст

1. Канонічний вид лінійного рівняння другого порядку з двома незалежними змінними	3
2. Задачі <i>Діріхле</i> для рівняння <i>Лапласа</i>	7
3. Крайова задача для рівняння теплопровідності	11
4. Крайова задача для рівняння коливань струни	14

МА-19-1: варіанти 01–02;

ПА-19-1: варіанти 03–24;

ПА-19-2: варіанти 25–47.

1. Канонічний вид лінійного рівняння другого порядку з двома незалежними змінними

Для однорідного лінійного рівняння з частинними похідними другого порядку

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_* u = g,$$

де коефіцієнти a_{11} , a_{12} , a_{22} , a_1 , a_2 , a_* та права частина g суть відомі функції декартових ортогональних координат x, y на площині, знайти області, в яких рівняння зберігає тип, та привести рівняння до канонічного виду в кожній такій області.

$$1. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 5 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 2 u = 0$$

$$2. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 3 u = 0$$

$$3. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3 u = 0$$

$$4. x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 6 u = 0$$

$$5. x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 4 u = 0$$

$$6. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 8 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 2 u = 0$$

$$7. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 6 \frac{\partial u}{\partial x} - 8 \frac{\partial u}{\partial y} + 2 u = 0$$

$$8. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 5 u = 0$$

$$9. \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} + 7 u = 0$$

$$10. y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3 u = 0$$

$$11. \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

$$12. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 8y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 7u = 0$$

$$13. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \cos x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (4 - \sin^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 9 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

$$14. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 5y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 5 \frac{\partial u}{\partial x} - 7 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

$$15. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0$$

$$16. \quad 3x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 3y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 4u = 0$$

$$17. \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 7 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 7u = 0$$

$$18. \quad \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0$$

$$19. \quad 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{2x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0$$

$$20. \quad 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 6y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} + 5u = 0$$

$$21. \quad 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0$$

$$22. \quad 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0$$

$$23. \quad 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 2u = 0$$

$$24. \quad -\frac{x}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 7 \frac{\partial u}{\partial y} - 6u = 0$$

$$25. \quad -xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} - 5u = 0$$

$$26. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - 3 \frac{\partial u}{\partial y} - 4u = 0$$

$$27. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} - 3u = 0$$

$$28. \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$29. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2y \frac{\partial u}{\partial x} - 3x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$30. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + y \frac{\partial u}{\partial x} + 5x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$31. \quad y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2x \frac{\partial u}{\partial x} + 2xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$32. \quad \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$33. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$34. \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - xy^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 3 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$35. \quad \frac{1}{x^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{y}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$36. \quad \operatorname{sign} y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial x} - 5 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$37. \quad x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{1}{y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$38. \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2y \frac{\partial u}{\partial x} + 4x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$39. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 8y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$40. x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$41. \sin y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 6 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$42. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 7x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$43. \operatorname{sign} x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + xy \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$44. 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{2x}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 4 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$45. 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 6y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$46. 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{2}{y} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + x \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$47. \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 4y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$48. \sin^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2 \operatorname{tg} y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$49. -\frac{x}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{y^2}{x} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 7 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$50. -\sin y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2 \cos y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin y \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

2. Задачі Діріхле для рівняння Лапласа

1. Розв'язати внутрішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < c^2\}, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \mathcal{S} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2\}, \end{cases}$$

з умовами на колі, згідно табл. 2.1, 2.2, 2.3. Розв'язки подати в полярній та декартовій системах координат. Обґрунтувати розв'язки, для чого показати, що вони задовільняють: 1) рівнянню Лапласа в декартовій та полярній системах координат; 2) умови на колі в декартовій системі координат.

2. Розв'язати зовнішню задачу Діріхле для рівняння Лапласа

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathcal{D} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 > c^2\}, \\ u(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \mathcal{S} = \{(x, y) \mid (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = c^2\}, \end{cases}$$

з умовами на колі, згідно табл. 2.1, 2.2, 2.3. Розв'язки подати в полярній та декартовій системах координат. Обґрунтувати розв'язки, для чого показати, що вони задовільняють: 1) рівнянню Лапласа в полярній системі координат; 2) умови на колі в декартовій системі координат.

Для умов на колі в табл. 2.1, 2.2, 2.3 прийняті такі позначення

$$\begin{cases} g_2(x, y) = g_1(x, y) + \delta g_2(x, y), \\ g_3(x, y) = g_2(x, y) + \delta g_3(x, y), \\ g_4(x, y) = g_3(x, y) + \delta g_4(x, y). \end{cases}$$

Табл. 2.1. Варіанти умов на колі 01 – 16

№	$g_1(x, y)$	$\delta g_2(x, y)$	$\delta g_3(x, y)$	$\delta g_4(x, y)$	\mathcal{D}
01	x^2	$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$	x^4	x^5	$x^2 + y^2 + x + 3y - \frac{3}{2} = 0$
02	y^2	$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$	y^4	y^5	$x^2 + y^2 + x + 5y - \frac{5}{2} = 0$
03	xy	$x^3 + y^3 + x^2y + xy^2$	x^3y	x^4y	$x^2 + y^2 + 3x - 2y - \frac{3}{4} = 0$
04	$x^2 + x$	$x^3 + y^3 + x^2y$	xy^3	xy^4	$x^2 + y^2 - 3x - 3y + \frac{1}{2} = 0$
05	$y^2 + x$	$x^3 + y^3 + xy^2$	x^2y^2	x^3y^2	$x^2 + y^2 + 3x + 4y + \frac{9}{4} = 0$
06	$xy + x$	$x^3 + x^2y + xy^2$	x^4	x^2y^3	$x^2 + y^2 - 4x + y + \frac{1}{4} = 0$
07	$x^2 + y$	$y^3 + x^2y + xy^2$	y^4	x^5	$x^2 + y^2 + 5x - 3y + \frac{9}{2} = 0$
08	$y^2 + y$	$x^3 + y^3 + x^2y$	x^3y	y^5	$x^2 + y^2 - x - 2y - 1 = 0$
09	$xy + y$	$x^3 + y^3 + xy^2$	xy^3	x^4y	$x^2 + y^2 + x + 6y + 7 = 0$
10	$x^2 + xy$	$x^3 + x^2y + xy^2$	x^2y^2	xy^4	$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$
11	$y^2 + xy$	$y^3 + x^2y + xy^2$	x^4	x^3y^2	$x^2 + y^2 + 2x - 5y + 5 = 0$
12	$x^2 + y^2$	$x^3 + y^3 + x^2y$	y^4	x^2y^3	$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$
13	$x^2 + x + y$	$x^3 + y^3$	x^3y	x^5	$x^2 + y^2 + 4x + y + 2 = 0$
14	$y^2 + x + y$	$x^3 + x^2y$	xy^3	y^5	$x^2 + y^2 - 5x + 4y + 8 = 0$
15	$xy + x + y$	$x^3y + xy^2$	x^2y^2	x^4y	$x^2 + y^2 - 2x - 5y - \frac{7}{4} = 0$
16	$x^2 + xy + x$	$x^3 + x^2y$	x^4	xy^4	$x^2 + y^2 + x - 6y + \frac{1}{4} = 0$

Табл. 2.2. Варіанти умов на колі 17–32

№	$g_1(x, y)$	$\delta g_2(x, y)$	$\delta g_3(x, y)$	$\delta g_4(x, y)$	\mathcal{D}
17	$y^2 + xy + x$	$y^3 + xy^2$	y^4	x^3y^2	$x^2 + y^2 + 3x + 6y + \frac{9}{4} = 0$
18	$x^2 + y^2 + x$	$x^2y + xy^2$	x^3y	x^2y^3	$x^2 + y^2 - 4x + 5y + \frac{5}{4} = 0$
19	$x^2 + xy + y$	$x^3 + y^3$	xy^3	x^5	$x^2 + y^2 + 5x - y - \frac{5}{2} = 0$
20	$y^2 + xy + y$	$x^3 + x^2y$	x^2y^2	y^5	$x^2 + y^2 - 5x - 3y - \frac{1}{2} = 0$
21	$x^2 + y^2 + y$	$x^3 + xy^2$	x^4	x^4y	$x^2 + y^2 + 5x + 5y + \frac{7}{2} = 0$
22	$x^2 + y^2 + xy$	$x^2y + xy^2$	y^4	xy^4	$x^2 + y^2 - x + 2y + 1 = 0$
23	$x^2 + xy + x + y$	y^3	x^3y	x^3y^2	$x^2 + y^2 + x - 4y + 4 = 0$
24	$y^2 + xy + x + y$	x^3	xy^3	x^2y^3	$x^2 + y^2 - 2x - 3y + 3 = 0$
25	$x^2 + y^2 + x + y$	x^2y	x^2y^2	x^5	$x^2 + y^2 + 3x + 4y + 6 = 0$
26	x^2	$x^3 + x^2y + xy^2$	x^4	xy^4	$x^2 + y^2 - 4x + 5y + 10 = 0$
27	y^2	$y^3 + x^2y + xy^2$	y^4	x^3y^2	$x^2 + y^2 + 5x - 2y + 7 = 0$
28	xy	$x^3 + y^3 + x^2y$	x^3y	x^2y^3	$x^2 + y^2 - x - 6y + 9 = 0$
29	$x^2 + x$	$x^3 + y^3 + xy^2$	xy^3	x^5	$x^2 + y^2 + x + 3y - \frac{3}{2} = 0$
30	$y^2 + x$	$x^3 + x^2y + xy^2$	x^2y^2	y^5	$x^2 + y^2 + x + 5y - \frac{5}{2} = 0$
31	$xy + x$	$y^3 + x^2y + xy^2$	x^4	x^4y	$x^2 + y^2 + 3x - 2y - \frac{3}{4} = 0$
32	$x^2 + y$	$x^3 + y^3 + x^2y$	y^4	xy^4	$x^2 + y^2 - 3x - 3y + \frac{1}{2} = 0$

Табл. 2.3. Варіанти умов на колі 33–49

№	$g_1(x, y)$	$\delta g_2(x, y)$	$\delta g_3(x, y)$	$\delta g_4(x, y)$	\mathcal{D}
33	$y^2 + y$	$x^3 + y^3$	$x^3 y$	xy^4	$x^2 + y^2 + 3x + 4y + \frac{9}{4} = 0$
34	$xy + y$	$x^3 + x^2 y$	xy^3	$x^3 y^2$	$x^2 + y^2 - 4x + y + \frac{1}{4} = 0$
35	$x^2 + xy$	$x^3 y + xy^2$	$x^2 y^2$	$x^2 y^3$	$x^2 + y^2 + 5x - 3y + \frac{9}{2} = 0$
36	$y^2 + xy$	$x^3 + x^2 y$	x^4	x^5	$x^2 + y^2 - x - 2y - 1 = 0$
37	$x^2 + y^2$	$y^3 + xy^2$	y^4	y^5	$x^2 + y^2 + x + 6y + 7 = 0$
38	$x^2 + x + y$	$x^2 y + xy^2$	$x^3 y$	$x^4 y$	$x^2 + y^2 - 2x + 3y + 1 = 0$
39	$y^2 + x + y$	$x^3 + y^3$	xy^3	xy^4	$x^2 + y^2 + 2x - 5y + 5 = 0$
40	$xy + x + y$	$x^3 + x^2 y$	$x^2 y^2$	$x^3 y^2$	$x^2 + y^2 - 3x - 4y + 4 = 0$
41	$x^2 + xy + x$	$x^3 + xy^2$	x^4	$x^2 y^3$	$x^2 + y^2 + 4x + y + 2 = 0$
42	$y^2 + xy + x$	$x^2 y + xy^2$	y^4	x^5	$x^2 + y^2 - 5x + 4y + 8 = 0$
43	$x^2 + y^2 + x$	y^3	$x^3 y$	y^5	$x^2 + y^2 - 2x - 5y - \frac{7}{4} = 0$
44	$x^2 + xy + y$	x^3	xy^3	$x^4 y$	$x^2 + y^2 + x - 6y + \frac{1}{4} = 0$
45	$y^2 + xy + y$	$x^2 y$	$x^2 y^2$	xy^4	$x^2 + y^2 + 3x + 6y + \frac{9}{4} = 0$
46	$x^2 + y^2 + y$	$x^3 + x^2 y + xy^2$	x^4	$x^3 y^2$	$x^2 + y^2 - 4x + 5y + \frac{5}{4} = 0$
47	$x^2 + y^2 + xy$	$y^3 + x^2 y + xy^2$	y^4	$x^2 y^3$	$x^2 + y^2 + 5x - y - \frac{5}{2} = 0$
48	$x^2 + xy + x + y$	$x^3 + y^3 + x^2 y$	$x^3 y$	x^5	$x^2 + y^2 - 5x - 3y - \frac{1}{2} = 0$
49	$y^2 + xy + x + y$	$x^3 + y^3 + xy^2$	xy^3	xy^4	$x^2 + y^2 + 5x + 5y + \frac{7}{2} = 0$

3. Крайова задача для рівняння теплопроводності

Розв'язати крайову задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + g(t, x), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq \ell, \\ \left. \begin{array}{l} u(t, 0) = \psi_1(t) \\ u(t, \ell) = \psi_2(t) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T, \end{array} \right.$$

де $g(t, x) = 0$, початкова умова є такою

$$u_0(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x \in [0, x_1], \\ h_1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, & x \in [x_1, x_2], \\ h_1 + (h_2 - h_1) \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}, & x \in [x_2, x_3], \\ h_2 \frac{x_4 - x}{x_4 - x_3}, & x \in [x_3, x_4], \\ 0, & x \in [x_4, \ell], \end{array} \right.$$

а функції $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ та значення параметрів a , ℓ , x_{1-4} , $h_{1,2}$ наведені в табл. 3.1 та 3.2, де позначено $\tau = t/T$.

Табл. 3.1. Варіанти 1–25

№	a	ℓ	x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	$\psi_1(t)$	$\psi_2(t)$	T
1	2	5	2	3	4	5	+1	-1	τ	$\sin(1\pi\tau)$	8
2	4	7	2	3	5	6	+3	+1	$\tau + 2\tau^2$	τ^2	9
3	1	5	2	3	4	5	-1	+1	τ	2τ	7
4	3	6	1	3	4	6	-2	-1	$\tau \exp(1\tau)$	τ	8
5	2	5	1	2	3	5	+2	0	τ^2	$\sin(1\pi\tau)$	6
6	3	7	2	3	4	6	-2	-2	$\tau^2 + 3\tau$	$2\tau^2$	8
7	1	5	1	2	3	4	+3	+1	$\tau^2 + 2\tau$	τ	5
8	2	6	0	1	2	3	0	+2	τ^2	$\tau \exp(1\tau)$	7
9	4	6	1	2	3	4	+2	+3	$\sin(1\pi\tau)$	$2\sin(1\pi\tau)$	9
10	3	7	2	4	5	6	+3	-1	$\sin(1\pi\tau)$	τ^2	7
11	2	6	2	4	5	6	+1	+3	τ	$\sin(1\pi\tau)$	6
12	1	8	0	2	4	7	-1	+3	$\tau \exp(1\tau)$	$\sin(1\pi\tau)$	8
13	2	9	0	1	3	7	+1	+3	$\sin(1\pi\tau)$	$\tau \exp(1\tau)$	5
14	3	9	2	3	6	7	-3	+1	$\tau \exp(1\tau)$	τ^2	6
15	2	5	2	3	4	5	+1	-1	$\tau \exp(1\tau)$	τ	8
16	4	7	2	3	5	6	+3	+1	$\tau \exp(1\tau)$	$2\tau \exp(1\tau)$	9
17	1	5	2	3	4	5	-1	+1	2τ	$\sin(1\pi\tau)$	7
18	3	6	1	3	4	6	-2	-1	τ^2	$\tau + 5\tau^2$	8
19	2	5	1	2	3	5	+2	0	$4\tau - 2\tau^2$	τ	6
20	3	7	2	3	4	6	-2	-2	$\tau \exp(1\tau)$	2τ	8
21	1	5	1	2	3	4	+3	+1	4τ	$\sin(1\pi\tau)$	5
22	2	6	0	1	2	3	0	+2	$2\tau - \tau^2$	$3\tau^2$	7
23	4	6	0	2	3	4	+3	+3	τ	$\tau + 2\tau^2$	9
24	3	7	2	4	5	7	+3	0	$\tau \exp(1\tau)$	4τ	7
25	2	6	2	4	5	6	+1	+3	τ	$\sin(2\pi\tau)$	6

Табл. 3.2. Варіанти 26–50

№	a	ℓ	x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	$\psi_1(t)$	$\psi_2(t)$	T
26	2	5	2	3	4	5	+1	-1	$\tau \exp(2\tau)$	τ	8
27	4	7	2	3	5	7	+3	0	τ^2	$\sin(2\pi\tau)$	9
28	1	5	2	3	4	5	-1	+1	τ^2	$\tau \exp(2\tau)$	7
29	3	6	1	3	4	6	-2	-1	$\sin(4\pi\tau)$	$\sin(2\pi\tau)$	8
30	2	6	1	2	3	5	-2	+1	$\sin(2\pi\tau)$	τ^2	6
31	3	6	1	2	3	5	-2	+1	τ	$\sin(3\pi\tau)$	8
32	1	6	1	3	4	5	+1	-2	$\sin(2\pi\tau)$	$\tau \exp(2\tau)$	5
33	2	6	1	2	4	5	-3	+1	$\tau \exp(3\tau)$	$\sin(2\pi\tau)$	7
34	4	6	0	2	4	6	-3	0	τ^2	$\tau \exp(4\tau)$	9
35	3	6	2	3	4	5	-2	+1	$\tau \exp(5\tau)$	τ	7
36	2	6	2	4	5	6	+3	0	$\tau \exp(1\tau)$	$\tau \exp(2\tau)$	6
37	1	6	0	2	4	5	0	+2	$2\tau^2$	$\sin(7\pi\tau)$	8
38	2	6	2	3	4	6	+1	+1	$\tau \exp(2\tau)$	2τ	5
39	3	7	0	2	5	6	+2	-1	3τ	$\sin(5\pi\tau)$	6
40	2	7	1	2	4	6	-3	+2	$\tau \exp(4\tau)$	τ^2	8
41	4	7	1	3	4	5	-2	+2	τ	$\sin(3\pi\tau)$	9
42	1	7	0	1	2	3	-3	+3	$\tau \exp(3\tau)$	τ	7
43	2	7	1	3	5	6	-1	+1	τ^2	$\sin(2\pi\tau)$	8
44	4	7	0	3	5	7	0	+2	τ^2	$\tau \exp(3\tau)$	9
45	1	7	1	4	5	6	+3	+1	$\sin(2\pi\tau)$	$\sin(4\pi\tau)$	7
46	3	7	1	4	5	7	+2	+1	$\sin(3\pi\tau)$	τ^2	8
47	2	7	1	3	6	7	+1	+3	τ	$\sin(5\pi\tau)$	6
48	3	7	2	3	6	7	-2	-3	$\sin(3\pi\tau)$	$\tau \exp(3\tau)$	8
49	1	7	2	4	5	5	-1	-3	$\tau \exp(3\tau)$	$\sin(7\pi\tau)$	5
50	2	7	2	4	6	7	-3	-2	τ^2	$\tau \exp(2\tau)$	7

4. Крайова задача для рівняння коливань струни

Розв'язати крайову задачу

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2} + g(t, x), \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t \leq T, \\ u(0, x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = u_1(x) \end{array} \right\}, \quad 0 < x < \ell, \quad (4.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, 0) = \psi_1(t) \\ u(t, \ell) = \psi_2(t) \end{array} \right\}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

де $g(t, x) = 0$, $u_1(x) \equiv 0$, а функції $u_0(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ та значення параметрів a , ℓ , x_{1-4} , $h_{1,2}$ суть такі ж самі, як в крайовій задачі для рівняння теплопроводності.