МЛТА. Лекція 29.03.2021

Приклад 2. Побудувати машину Тьюрінга, яка початкову конфігурацію $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $n \geq 1$, переводить у заключну конфігурацію $K_0 = q_0 [01]^n$.

Програма машини Тьюрінга, яка розв'язує цю задачу, може бути записана так.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_2 0R$	$q_1 1R$	$q_5 0L$	$q_5 0L$	$q_0 0R$
1	$q_4 0R$	$q_3 1R$	$q_4 0R$	$q_3 1R$	$q_3 1L$

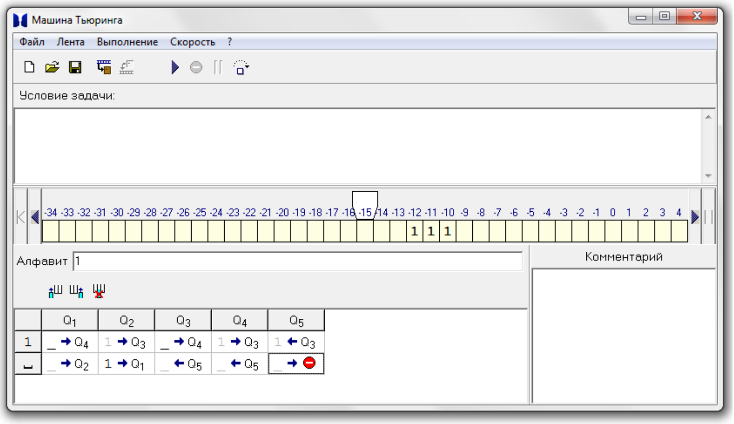
Для перевірки коректності роботи програми доцільно скористатися програмою-емулятором.

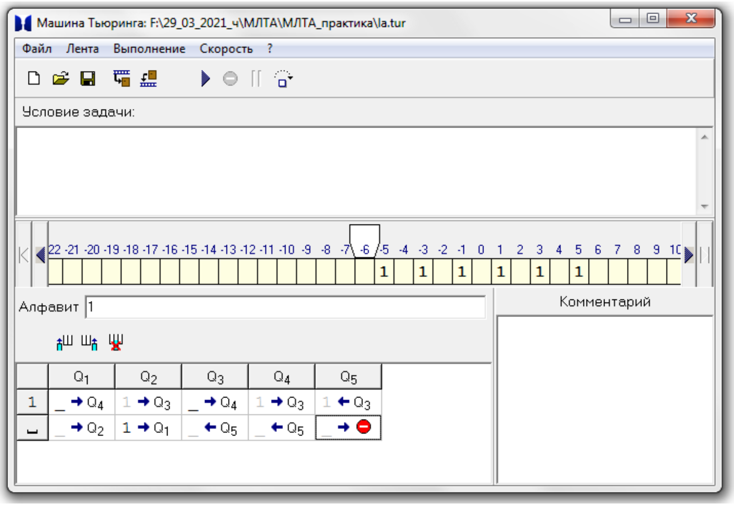
Емулятор машин Тьюрінга – спеціальна програма, що дозволяє моделювати роботу машин Тьюрінга. Вхідними даними цієї програми є стани керуючого пристрою машини Тьюрінга і вхідне слово, а результатом роботи програми є слово, що вийшло після його перетворення керуючим пристроєм.

За наведеними посиланнями можна знайти деякі емулятори машини Тьюрінга:

http://kpolyakov.spb.ru/.
http://matinf.igpu.ru/simulator/tm.html
https://alistat.eu/online/turingmachinesimulator

Нижче наведені скриншоти емулятора машини Тьюрінга за першим наведеним посиланням.





Приклад 3. Побудувати машину Тьюрінга, яка початкову конфігурацію $K_1 = 1^n q_1 01^m$, $m \geq 1$, $n \geq 1$, переводить у заключну конфігурацію $K_0 = 1^m q_0 01^n$.

Таблиця 1

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	q_7	q_8	q_9	q_{10}
0	$q_2 0L$	$q_3 0R$	$q_{10} 0R$	$q_5 0R$	$q_6 0R$	$q_7 1L$	$q_8 0L$	$q_9 0L$	$q_3 0R$	$q_0 0S$
1		$q_2 1L$	$q_4 0R$	$q_4 1R$	$q_5 1R$	$q_6 1R$	$q_7 1L$	$q_8 1L$	$q_9 1L$	$q_{10} 1R$

Конфігурації:

$11q_1 01 \vdash 1q_2 101 \vdash 0q_2 1101 \vdash q_2 01101 \vdash q_3 1101 \vdash 0q_4 101 \vdash 01q_4 01 \vdash 010q_5 1 \vdash$
$0101q_5 0 \vdash 01010q_6 0 \vdash 0101q_7 01 \vdash 010q_8 101 \vdash 01q_8 0101 \vdash 0q_9 10101 \vdash q_9 010101 \vdash$
$q_3 10101 \vdash q_4 0101 \vdash q_5 101 \vdash 1q_5 01 \vdash 10q_6 1 \vdash 101q_6 0 \vdash 10q_7 11 \vdash 1q_7 011 \vdash q_8 1011 \vdash$
$q_9 001011 \vdash 0q_3 01011 \vdash q_{10} 1011 \vdash 1q_{10} 011 \vdash 1q_0 011.$

Зауваження. У цьому прикладі початкова та заключна конфігурації не є стандартними.

Розібрати самостійно.

Приклад 4. Побудувати машину Тьюрінга, яка початкову конфігурацію $K_1 = q_1 1^n$ переводить у заключну конфігурацію $K_0 = q_0 1^{2n}$.

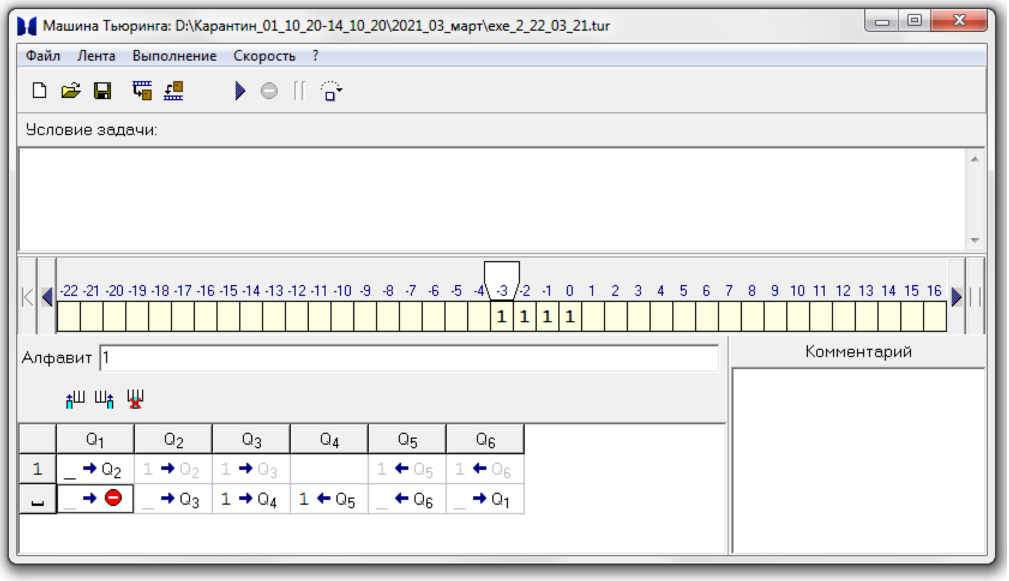
Програма МТ

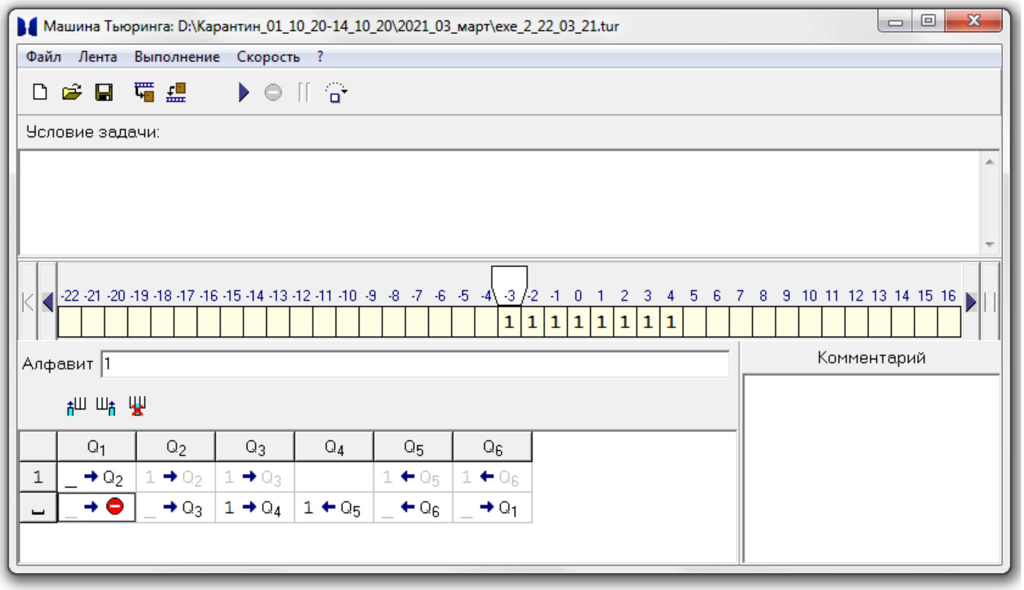
$q_1 1 \to q_2 0R,$
$q_1 0 \to q_0 0R,$
$q_2 1 \to q_2 1R,$
$q_2 0 \to q_3 0R,$
$q_3 0 \to q_4 1R,$
$q_3 1 \to q_3 1R,$
$q_4 0 \to q_5 1L,$
$q_5 1 \to q_5 1L,$
$q_5 0 \to q_6 0L,$
$q_6 1 \to q_6 1L,$
$q_6 0 \to q_1 0R.$

Конфігурації

$q_1 1^n \vdash 0q_2 1^{n-1} \vdash 01q_2 1^{n-2} \vdash \ldots \vdash 01^{n-1} q_2 0 \vdash$
$\vdash 01^{n-1} 0q_3 0 \vdash 01^{n-1} 01q_4 0 \vdash 01^{n-1} 0q_5 11 \vdash$
$\vdash 01^{n-1} q_5 011 \vdash 01^{n-2} q_6 1011 \vdash \ldots \vdash$
$\vdash q_6 01^{n-1} 01^2 \vdash q_1 1^{n-1} 01^2 \vdash 0q_2 1^{n-2} 01^2 \vdash \ldots \vdash$
$\vdash 01^{n-2} q_2 01^2 \vdash 1^{n-2} 0q_3 1^2 \vdash 1^{n-2} 01^2 q_3 0 \vdash$
$\vdash 1^{n-2} 01^2 1q_4 0 \vdash 1^{n-2} 01^2 11q_5 0 \vdash \ldots \vdash q_0 1^{2n}.$

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_0 0R$	$q_3 0R$	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_2 1R$	$q_3 1R$		$q_5 1L$	$q_6 1L$

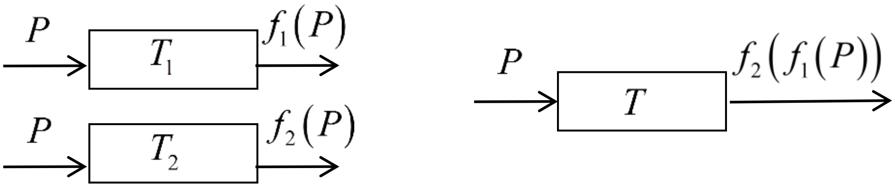




Програми машини Тьюрінга

Пряма побудова машин Тьюрінга (МТ) для розв'язання навіть найпростіших задач може виявитися складною задачею. Однак існують прийоми, які полегшують цей процес, якщо використовувати способи поєднання програм кількох машин в результуючі програми.

1. **Суперпозиція машин Тьюрінга**. Нехай задано дві машини Тьюрінга T_1 та T_2, які обчислюють словарні функції $f_1(P)$ та $f_2(P)$ відповідно в одному і тому ж алфавіті. Тоді існує машина Тьюрінга T, яка обчислює функцію $f(P) = f_2(f_1(P))$.



Нехай програма МТ T_1 складається з команд з номерами від 1 до m. Замінимо в програмі T_1 заключний стан q_0 на q_{m+1}. А команди програми T_2 перенумеруємо (перейменуємо), починаючи з номера $m+1$. В програмі T_2 стан q_0 не змінюємо.

При цьому для будь-якого слова P функція $f(P)$ визначена тоді і тільки тоді, коли $f_1(P)$ визначена і $f_2(f_1(P))$ – визначена.

Суперпозиція машин Тьюрінга ще називається ***композицією машин Тьюрінга***.

Приклад композиції машин Тьюрінга. Побудувати композицію T машин Тьюрінга T_1 та T_2, знайти результат застосування композиції МТ T до слова P.

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{12}1R$	$q_{11}0R$

T_2

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1R$	$q_{21}1R$
1	$q_{21}0L$	$q_{20}1S$

а) $P=1^3 0^2 1^2$.
б) $P=1^4 01$.

Композиція T машин Тьюрінга T_1 і T_2 має вигляд:

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	$q_2 0R$	$q_3 1L$	$q_4 1R$	$q_3 1R$
1	$q_2 1R$	$q_1 0R$	$q_3 0L$	$q_0 1S$

а) до слова P машина Тьюрінга не застосовна.
б) Перевірити самостійно.

Ітерація машини Тьюрінга. Нехай q' – деякий заключний стан машини Тьюрінга T, а q'' – якийсь стан МТ T, який не є заключним. Замінимо всюди в програмі МТ T символ q' на q''. Отримаємо нову програму, що визначає МТ T'.

Машина Тьюрінга T' називається **ітерацією машини T за парою станів** (q', q'').

Приклад ітерації машини T за парою станів (q_0, q_3). Нехай задано машину Тьюрінга T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_4	q_4
0	$q_2 0L$	$q_0' 1S$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_2 0R$
1	$q_1 2R$	$q_2 1R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$
2		$q_3 1R$				$q_0 1R$

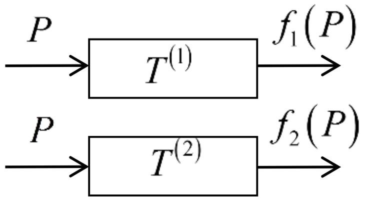
Перевірити роботу МТ T' над словом $P = 1^x 0 1^y$, $x \geq 1$, $y \geq 1$.

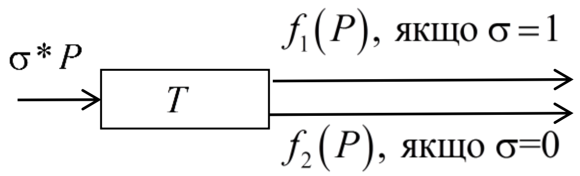
Задана машина Тьюрінга має ***два*** заключні стани, які позначені q_0 і q_0'. Потрібно побудувати ітерацію машини T за парою станів (q_0, q_3). Для цього будується нова програма, в якій стан q_0 замінюється на стан q_3. Нова МТ T' має ***один*** заключний стан q_0'. Результатом застосування ітерації машини Тьюрінга до слова P буде слово $P' = 1^{2x+y+1}$.

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_4	q_4
0	$q_2 0L$	$q_0' 1S$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_2 0R$
1	$q_1 2R$	$q_2 1R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$
2		$q_3 1R$				$q_3 1R$

2. Розгалуження машин (умовний перехід). Нехай задані дві машини $T^{(1)}$ та $T^{(2)}$, що обчислюють функції f_1 та f_2 відповідно. Побудуємо машину T, яка початкову конфігурацію $q_1 \sigma * P$, де σ – спеціальний символ алфавіту $\{0,1\}$, переводить в заключну:

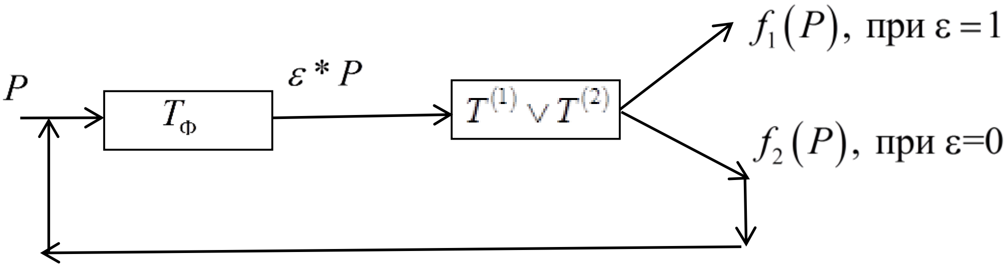
- $q_0 f_1(P)$, якщо $\sigma = 1$,
- $q_0 f_2(P)$, якщо $\sigma = 0$.





3. Операція циклу. В програмах машини Тьюрінга можуть бути цикли. Нехай маємо словарні функції f_1 та f_2, а також предикат Φ, який визначений на словах. Значення предиката Φ позначимо через 0 або 1. Для довільного слова P перевіряємо умову $\Phi(P) = 1$. Якщо умова виконана, то видається відповідь $f_1(P)$. Якщо $\Phi(P) = 0$, то обчислюється $P' = f_2(P)$. Потім перевіряється умова $\Phi(P') = 1$, якщо «так», то видається відповідь $f_1(P')$, інакше обчислюється $P'' = f_2(P')$ тощо.

Позначимо через $T^{(1)}$, $T^{(2)}$ та T_{Φ} машини Тьюринга, які обчислюють словарні функції f_1, f_2 та предикат Φ відповідно. Машина Тьюрінга T будується за схемою:



Перетворення машини Тьюрінга

Нехай у вихідній МТ T є n станів (внутрішній алфавіт) і m символів алфавіту (зовнішній алфавіт).

Теорема 1 Шеннона. Будь-яка машина Тьюрінга T може бути перетворена в еквівалентну машину Тьюрінга T' не більше ніж з ***двома*** внутрішніми станами.

При цьому скорочення кількості станів компенсується розширенням зовнішнього алфавіту: крім вихідних m символів додається $4mn$ спеціальних символів. Отже, машина Тьюрінга T' буде мати $m+4mn$ символів.

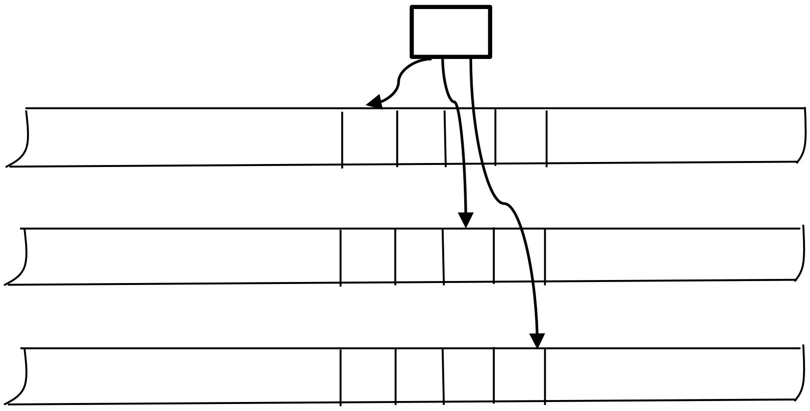
Теорема 2 Шеннона. Будь-яка машина Тьюрінга T може бути перетворена в еквівалентну машину Тьюрінга T'' не більше ніж з ***двома*** символами зовнішнього алфавіту.

При цьому скорочення кількості символів компенсується розширенням внутрішнього алфавіту (кількості станів): крім вихідних n станів додається $8mn$ спеціальних станів. Отже, машина Тьюрінга T'' буде мати $n+8mn$ станів.

Багатострічкова машина Тьюрінга

Початкова конфігурація:

- вхідні дані (скінченна послідовність символів) розміщені на першій стрічці;
- всі інші клітинки всіх стрічок містять порожні символи;
- керуючий пристрій знаходиться в початковому стані (позначається q_1);
- пристрій читання / запису першої стрічки знаходиться на першому (крайньому лівому) символі вхідного слова;
- пристрої читання / запису інших стрічок займають довільне положення.



За один перехід (крок) багатострічкова МТ робить такі дії:

- керуючий пристрій переходить в новий стан, який може збігатися з попереднім;
- на кожній стрічці в клітинку, що оглядається, записується новий символ. Будь-який з них може збігатися з символом, який був там раніше.
- кожний з пристроїв читання / запису зсувається вправо, вліво або залишається на місці. Пристрої читання / запису зсуваються незалежно один від одного. Тому різні пристрої читання / запису можуть рухатися в різних напрямках, а деякі залишатися на місці.