МР2 (Викладач Бойко Л.Т.)

Тема: МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗДР.

6.3. Методи Рунге-Кутта

Нехай треба знайти розв'язок задачі Коші (6.1), (6.2). Для цього на відрізку $[a,\ b]$ фіксуємо точки $x_i,\ i=\overline{0,n}$ із змінним кроком $h_i = x_{i+1} - x_i,\ i=\overline{0,n-1}$. Будемо шукати значення функції $y(x)$ у цих точках, використовуючи розрахункову формулу (6.12). Розглянемо окремий відрізок $[x_i, x_{i+1}]$, вважаючи, що значення $y(x_i)$ є відомим, та будемо шукати приріст (6.11).

6.3.1. Загальна ідея методів

Будемо користуватися позначеннями, прийнятими в [7]. Для наближеного обчислення приросту функції Δy_i за формулою (6.11) впровадимо до розгляду три набори параметрів:

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_q; \tag{6.18}$$

$$\begin{cases} \beta_{10}; \\ \beta_{20},\quad \beta_{21}; \\ \cdots; \\ \beta_{q0},\quad \beta_{q1},\ \cdots\ ,\beta_{q,q-1}; \end{cases} \tag{6.19}$$

$$A_0,\ A_1,\ \cdots, A_q. \tag{6.20}$$

За допомогою параметрів (6.18), (6.19) складемо величини:

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h_i, y_i + \beta_{10} \cdot \varphi_0), \\ \varphi_2 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_2 \cdot h_i, y_i + \beta_{20} \cdot \varphi_0 + \beta_{21} \cdot \varphi_1), \\ \cdots, \\ \varphi_q = h_i \cdot f(x_i + \alpha_q \cdot h_i, y_i + \sum\limits_{m=0}^{q-1} \beta_{qm} \cdot \varphi_m). \end{cases} \tag{6.21}$$

Тепер запишемо лінійну комбінацію величин (6.21) із коефіцієнтами (6.20)

$$\sum_{j=0}^{q} A_j \cdot \varphi_j \,. \tag{6.22}$$

Лінійна комбінація (6.22) буде аналогом квадратурної суми для обчислення інтеграла (6.11), тобто приросту функції Δy_i. Параметри (6.18), (6.19), (6.20) виберемо так, щоб (6.22) якомога точніше наближувала приріст функції Δy_i. Для цього похибку наближення, тобто величину

$$r_q(h_i) = \Delta y_i - \sum_{j=0}^{q} A_j \cdot \varphi_j \,,$$

як функцію від кроку h_i, розвинемо у ряд Тейлора в околі значення $h_i = 0$. Маємо

$$r_q(h_i) = r_q(0) + \frac{h_i}{1!} r_q'(0) + \frac{h_i^2}{2!} r_q''(0) + \cdots + \frac{h_i^k}{k!} r_q^{(k)}(0) + \frac{h_i^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h_i), \quad 0 \le \theta \le 1 \,. \tag{6.23}$$

При цьому вважаємо, що права частина диференціального рівняння (6.1) є достатньо гладкою функцією, так що всі необхідні похідні існують і є неперервними функціями на $[a, b]$.

Якщо параметри (6.18), (6.19), (6.20) вдасться вибрати так, щоб для розвинення (6.23) виконувались умови

$$\begin{cases} r_q(0) = 0, \\ r_q'(0) = 0, \\ \cdots, \\ r_q^{(k)}(0) = 0, \end{cases} \tag{6.24}$$

то похибка $r_q(h_i)$ буде величиною того ж порядку мализни, що і h_i^{k+1}, тобто

$$r_q(h_i) = \frac{h_i^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h_i), \quad 0 \le \theta \le 1. \tag{6.25}$$

Число k будемо називати ***порядком*** (ступенем) ***точності методу*** Рунге-Кутта. При цьому локальна похибка визначається формулою (6.25), а розрахункова формула приймає вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^{q} A_j \cdot \varphi_j \,. \tag{6.26}$$

Фіксуючи число q, будемо мати конкретний варіант методу Рунге-Кутта.

Записати в загальному вигляді (тобто при будь-якому значенні числа q) систему рівнянь (6.24) для визначення параметрів (6.18), (6.19), (6.20) важко. Тому розглянемо лише декілька прикладів побудови однокрокових методів за способом Рунге-Кутта.

6.3.2. Метод Рунге-Кутта першого порядку точності

При $q=0$ маємо лише один параметр A_0. Параметрів (6.18) та (6.19) не буде зовсім. Формула (6.26) набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + A_0 h_i f(x_i, y_i).$$

Похибку $r_0(h_i)$ розкладемо в ряд за степенями h_i

$$r_0(h_i) = \Delta y_i - A_0 h_i f(x_i, y_i) = y(x_i + h_i) - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) =$$

$$= y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \cdots - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) =$$

$$= h_i f(x_i, y_i) \cdot (1 - A_0) + \frac{h_i^2}{2} \left(f_x' + f_y' \cdot f \right)\Big|_{x=x_i,\, y=y_i} + O(h_i^3)$$

Від цього розвинення знаходимо похідні по h_i:

$$r_0'(h_i) = (1 - A_0) \cdot f(x_i, y_i) + h_i \left(f_x' + f_y' \cdot f \right)\Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + O(h_i^2),$$

$$r_0''(h_i) = \left(f_x' + f_y' \cdot f \right)\Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + O(h_i).$$

Далі підставимо ці похідні до умови (6.24):

$$r_0(0) \equiv 0,$$

$$r_0'(0) = (1 - A_0) \cdot f(x_i, y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = 1,$$

$$r_0''(0) = \left(f_x' + f_y' \cdot f \right)\Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} \neq 0$$

Отже, $k=1$. Розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i),$$

тобто вона збігається з формулою Ейлера. Похибку на кроці запишемо на підставі формули (6.25)

$$r_0(h_i) = \frac{h_i^2}{2} r_0''(\theta h_i) = O(h_i^2).$$

Отже, метод Ейлера є методом Рунге-Кутта першого порядку точності.

6.3.3. Метод Рунге-Кутта другого порядку точності

Нехай $q = 1$, тоді із множини коефіцієнтів (6.18), (6.19), (6.20) шуканими будуть лише чотири

$$\alpha_1,\ \beta_{10},\ A_0,\ A_1. \tag{6.27}$$

За формулами (6.21) маємо

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h_i, y_i + \beta_{10} \cdot h_i \cdot f). \end{cases}$$

Отже,

$$\Delta y_i \approx A_0 \cdot \varphi_0 + A_1 \cdot \varphi_1.$$

Займемося вибором параметрів (6.27). Для цього запишемо формулу для локальної похибки

$$r_1(h_i) = y(x_i + h_i) - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) - A_1 h_i f(x_i + \alpha_1 h_i, y_i + \beta_{10} h_i f(x_i, y_i)). \tag{6.28}$$

Праву частину рівності (6.28) розкладемо в ряд за степенями h_i, залишаючи тільки доданки з h_i^3. Виконаємо це розвинення поступово

$$\begin{aligned} y(x_i + h_i) &= y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \frac{h_i^3}{3!} y'''(x_i) + \cdots = \\ &= y(x_i) + h_i f(x_i, y_i) + \frac{h_i^2}{2}\left(f'_x + f'_y \cdot f \right)\Big|_{\substack{x = x_i, \\ y = y_i}} + \\ &+ \frac{h_i^3}{6}\left(f''_{xx} + 2 f''_{xy} \cdot f + f''_{yy} \cdot f^2 + f'_y (f'_x + f'_y \cdot f) \right)\Big|_{\substack{x = x_i, \\ y = y_i}} + O(h_i^4). \end{aligned} \tag{6.29}$$

Щоб розкласти функцію $\varphi_1(h_i)$ в ряд за степенями h_i використаємо таку формулу Тейлора

$$f(x + a, y + b) = f(x, y) + \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) +$$

$$+ \cdots + \frac{1}{m!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x, y) + \cdots.$$

На підставі цієї формули маємо

$$\varphi_1(h_i) \equiv h_i f(x_i + \alpha_1 h_i, y_i + \beta_{10} h_i f(x_i, y_i)) =$$

$$= h_i f(x_i, y_i) + h_i^2 \cdot \left(\alpha_1 \cdot f_x' + \beta_{10} \cdot f \cdot f_y'\right)\Big|_{\substack{x = x_i, \\ y = y_i}} +$$

$$+\frac{h_i^3}{2}\left(\alpha_1^{\,2} \cdot f_{xx}'' + 2\alpha_1 \cdot \beta_{10} \cdot f \cdot f_{xy}'' + \beta_{10}^{\,2} \cdot f^2 \cdot f_{yy}''\right)\Big|_{\substack{x = x_i, \\ y = y_i}} + O(h_i^4). \qquad (6.30)$$

Підставивши (6.29), (6.30) до (6.28), маємо шукане розкладання

$$r_1(h_i) = (1 - A_0 - A_1) \cdot h_i f(x_i, y_i) + \frac{h_i^2}{2} D_1 + \frac{h_i^3}{6} D_2 + O(h_i^4), \qquad (6.31)$$

де

$$D_1 = f_x' + f \cdot f_y' - 2A_1\left(\alpha_1 \cdot f_x' + \beta_{10} \cdot f \cdot f_y'\right) = (1 - 2\alpha_1 A_1) f_x' + (1 - 2\beta_{10} A_1) f \cdot f_y',$$

$$D_2 = f_{xx}'' + 2 \cdot f \cdot f_{xy}'' + f^2 \cdot f_{yy}'' + f_y' \cdot \left(f_x' + f \cdot f_y'\right) -$$

$$-3A_1\left(\alpha_1^{\,2} \cdot f_{xx}'' + 2\alpha_1 \cdot \beta_{10} \cdot f \cdot f_{xy}'' + \beta_{10}^{\,2} \cdot f^2 \cdot f_{yy}''\right). \qquad (6.32)$$

У коефіцієнтах D_1, D_2 функція $f(x, y)$ та всі її частинні похідні обчислюються в точці (x_i, y_i). Від функції (6.31) знаходимо потрібні похідні:

$$r_1'(h_i) = (1 - A_0 - A_1) \cdot f(x_i, y_i) + h_i D_1 + \frac{h_i^2}{2} D_2 + O(h_i^3),$$

$$r_1''(h_i) = D_1 + h_i D_2 + O(h_i^2),$$

$$r_1'''(h_i) = D_2 + O(h_i).$$

Підставимо ці похідні до умови (6.24):

$$r_1(0) \equiv 0,$$

$$r_1'(0) = (1 - A_0 - A_1) \cdot f(x_i, y_i) = 0, \quad \Rightarrow \quad A_0 + A_1 = 1.$$

$$r_1''(0) = D_1 = 0, \qquad \Rightarrow \qquad 2\alpha_1 A_1 = 1, \quad 2\beta_{10} A_1 = 1.$$

$$r_1'''(0) = D_2 \neq 0.$$

Отже, для чотирьох невідомих коефіцієнтів (6.27) маємо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ 2\alpha_1 A_1 = 1, \\ 2\beta_{10} A_1 = 1. \end{cases} \tag{6.33}$$

Добута система (6.33) має безліч розв'язків. Кожен з них визначає окрему розрахункову формулу другого порядку точності, тобто формулу з локальною похибкою $O(h_i^3)$.

Якщо вибрати $\alpha_1 = \beta_{10} = 1,\ \ A_0 = A_1 = \dfrac{1}{2}$, то добудемо розрахункову формулу модифікованого методу Ейлера (6.17). При $\alpha_1 = \beta_{10} = \dfrac{1}{2},\ \ A_0 = 0,\ \ A_1 = 1$ добудемо ще одну модифікацію методу Ейлера. Зрозуміло, що таких модифікацій можна побудувати скільки завгодно.

Якщо виконуються умови (6.33), то формула (6.31) для локальної похибки стане такою

$$r_1(h_i) = \frac{h_i^3}{6} D_2 + O(h_i^4).$$

У деяких випадках за рахунок вдалого вибору параметрів (6.27) можна зменшити коефіцієнт D_2, а значить і похибку. Наприклад, якщо до виразу (6.32) підставимо значення $\alpha_1 = \beta_{10} = \dfrac{1}{2A_1}$, взяті із умов (6.33), то будемо мати

$$D_2 = \left(f_{xx}'' + 2 \cdot f \cdot f_{xy}'' + f^2 \cdot f_{yy}'' \right) \cdot \left(1 - \frac{3}{4A_1} \right) + f_y' \cdot \left(f_x' + f \cdot f_y' \right).$$

Якщо далі вибрати $A_1 = \dfrac{3}{4}$, то $D_2 = f_y' \cdot \left(f_x' + f \cdot f_y' \right)$. При такому виборі A_1 розрахункова формула (6.26) набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}\left(\varphi_0 + 3\varphi_1\right), \text{ де}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i,\ y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f\left(x_i + \dfrac{2}{3} \cdot h_i,\ y_i + \dfrac{2}{3} \cdot \varphi_0 \right). \end{cases}$$

Розрахункові формули методів Рунге-Кутта більш високих порядків точності можна знайти в [7].