Конспект лекций по предмету

Уравнения математической физики

для специальности «Прикладная математика»

Учебный год 2016 – 2017

Содержание

1. Уравнения и краевые задачи математической физики

1.0. $\Pi\rho o\lambda\varepsilon\gamma\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

> Основным источником уравнений с частными производными являются модели сплошных сред математической и теоретической физики. [7]

Скалярные и векторные поля заданы в связной области $\mathcal{D}$ евклидового действительного аффинного пространства $\mathbb{R}^3$, параметризованного декартовой ортогональной системой координат: $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = \big(x_1, x_2, x_3\big)$ (см. пояснение **??** на с. **??**). Область $\mathcal{D}$ может совпадать с пространством $\mathbb{R}^3$.

1.1. Уравнения движения материальной частицы

Вообразим пустое трёхмерное пространство, в котором движутся материальные точки (далее будем говорить о *материальных частицах*, см. определение 1.2). Для того, чтобы различать места в пространстве, то есть геометрические точки, введём понятие *системы координат*. Последняя определена заданием: 1) некоторой отсчётной геометрической точки в пространстве и 2) направлений. В пустом пространстве такую точку выбрать невозможно, поэтому выберем некоторую материальную частицу, из которой выведем взаимно перпендикулярные направления. Таковыми могут быть выбраны направления на удалённые материальные частицы, например, на *неподвижные звёзды*. Итак, мы завершили взаимно однозначное сопоставление геометрических точек и троек чисел — декартовых ортогональных координат, подтверждаемое человеческим опытом (то есть нашем трехмерное пространстве есть евклидово, поскольку мы можем измерять расстояния между геометрическими точками и углы между направлениями, см. задачу 1.1 на с. 29).

Для того, чтобы можно было изучать последовательную смену материальной точкой своих положений в пространстве, то есть пребывание материальной частицы в различных геометрических точках, к системе координат прибавим часы, хотя природа измеряемого ими времени нам не вполне понятна (или даже так — вполне непонятна). Мы просто соотносим время с некоторым непрерывным параметром t, с помощью которого упорядочиваем положения материальной точки в пространстве, в общем случае — различные события (значениям параметра, меньшим соотносимого с текущим мгновением значения t, соответствуют предшествующие события, то есть произошедшие в предшествующие мгновения, а бо́льшим значениям параметра — последующие события, см. пояснение).

После того, как мы обсудили и, тем самым, ввели в оборот *основные* (или *первичные*, то есть не определяемые строго) *понятия*, введём *определения*, а затем перейдём к *аксиомам*, которые в механике называются законами *Ньютона* (их обоснованность есть следствие обобщения наблюдений, подобно обоснованности аксиом евклидовой геометрии).

Определение 1.1. *Системой отсчёта* называется система координат, в каждой точке которой находятся одинаково идущие (синхронизированные) часы. □

Определение 1.2. *Материальной частицей* называется материальное тело, размерами которого в условиях данного движения можно пренебречь. □

Каждой материальной частице ставится в соответствие параметр m, принимающий действительные положительные значения и называемый *массой*. Масса частицы с течением времени сохраняется, то есть $m = \mathtt{const}$, что выражает *закон сохранения массы*.

Одну инерциальную систему отсчёта, связанную с некоторым наблюдателем, будем называть *лабораторной*. Декартовы ортогональные координаты геометрической точки в лабораторной системе отсчёта будем обозначать x, y, z, а орты соответствующих осей — $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Любую точку пространства в лабораторной системе координат можно указать вектором

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\,. \tag{1.1}$$

Определение 1.3. *Закон движения* материальной частицы есть функция геометрического положения частицы от времени

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)\,, \qquad t \in [t_1, t_2]\,, \tag{1.2}$$

траектория частицы — образ отображения $[t_1, t_2] \to \mathbb{R}^3$, первая и вторая производные закона движения (1.2)

$$\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\,, \qquad \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}} = \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \tag{1.3}$$

суть *скорость* и *ускорение* материальной частицы. □

Аксиома 1.1. Существует система отсчёта, называемая *инерциальной*, в которой изолированная материальная частица (не испытывающая действия какой-либо силы) сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения (*первый закон* механики *Ньютона*). □

Замечание 1.1. Поскольку скорость материальной частицы в инерциальной системе отсчёта постоянна, то есть $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \mathtt{const}$, закон движения материальной частицы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t) \equiv \boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v}$ есть равномерное движение вдоль прямой или состояние покоя. Очевидно, что любая система отсчёта, движущаяся равномерно и прямолинейно относительной инерциальной системы отсчёта, также будет инерциальной. Это значит, что указанная в аксиоме 1.1 система отсчёта не единственная. □

Аксиома 1.2.
(принцип детерминизма Галилея-Ньютона) □

Аксиома 1.3.
(принцип детерминизма Галилея-Ньютона) □

Аксиома 1.4. В инерциальной системе отсчёта скорость изменения количества движения $\boldsymbol{p} := m\boldsymbol{v}$ материальной частицы, находящейся в мгновение времени t в точке пространства $\boldsymbol{x}$, равна действующей на материальную частицу силе $\boldsymbol{F}$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = m\dot{\boldsymbol{v}} = m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}) \tag{1.4}$$

(*второй закон* механики *Ньютона* в *дифференциальной форме*). □

Замечание 1.2. Проинтегрировав обе части (1.4) вдоль траектории за конечный промежуток времени, то есть при известном законе её движения (1.2), получим, что изменение количества движения материальной частицы равно импульсу действующей силы

$$\boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}\left(t, \boldsymbol{\varphi}(t), \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)\right)\, \mathrm{d}t \tag{1.5}$$

(*второй закон* механики *Ньютона* в *интегральной форме*). □

Теорема 1.1. Умножив обе части (1.4) скалярно на скорость $\boldsymbol{v}$ материальной частицы, будем иметь уравнение *кинетической энергии* K (или *живой силы*, см. пояснение 1.1 на с. 30), $2K = m\boldsymbol{v}^2$, в *дифференциальной форме*

$$\dot{K}(t) = \boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{F}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})\,, \tag{1.6}$$

то есть скорость изменения кинетической энергии K материальной частицы равна равна мощности $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}$ силы, действующей на последнюю. □

Доказательство.

■

Замечание 1.3.

Интегральная форма уравнения энергии может быть получена интегрированием обеих частей дифференциальной формы вдоль траектории за конечный промежуток времени

$$K(t_2) - K(t_1) = \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}\, \mathrm{d}t = \int\limits_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,. \tag{1.7}$$

то есть изменение кинетической энергии материальной частицы равно работе действующей силы.

Определение 1.4. Действующая на материальную частицу сила называется *консервативной*, если существует *потенциальная функция* $V(\boldsymbol{x})$ (также *потенциал*, *потенциальная энергия*) или, что то же самое, *силовая функция* $U(\boldsymbol{x})$, такая что

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\nabla V(\boldsymbol{x}) = \nabla U(\boldsymbol{x})\,; \tag{1.8}$$

где ∇ — дифференциальный оператор *Гамильтона* (см. определение (7.24) на с. 215), ∇V, ∇U — градиенты соответственно потенциальной и силовой функции (см. определения (7.25) на с. 215), при этом потенциальная и силовая функции определены с точностью до постоянной, то есть: $\nabla V(\boldsymbol{x}) = \nabla\big(V(\boldsymbol{x}) + C\big)$, $\nabla U(\boldsymbol{x}) = \nabla\big(U(\boldsymbol{x}) + C\big)$, а сила есть однозначная функция положения в пространстве. □

Теорема 1.2. *Пусть* действующая на материальную частицу сила консервативна, *тогда* уравнение кинетической энергии (1.6), (1.7) допускает запись в виде *уравнения сохранения энергии* в *дифференциальной* (скорость изменения энергии материальной частицы равна нулю)

$$\dot{E}(t) = \dot{K}(t) + \dot{V}(t) = 0 \tag{1.9}$$

и *интегральной* (энергия материальной частицы есть величина постоянная)

$$E(t) = K(t) + V(t) = \texttt{const} \tag{1.10}$$

формах, где $E(t) = K(t) + V(t)$ — (полная) энергия материальной частицы. □

Доказательство. Для консервативной силы, как функции положения в пространстве, верно представление (1.8), откуда следует, что правая часть уравнения кинетической энергии в дифференциальной форме (1.6) может быть записана так

$$\boldsymbol{v}(t)\cdot\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\varphi}(t)\right) = \left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(-\nabla V(\boldsymbol{x})\right)\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)} = -\left[\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}\cdot\nabla V\left(\boldsymbol{x}\right)}{\mathrm{d}t}\right]_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\varphi}(t)} = -\frac{\mathrm{d}V\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)}{\mathrm{d}t} = -\dot{V}(t)\,,$$

где производная сложной функции $V\big(\boldsymbol{\varphi}(t)\big)$ по t обозначена как $\dot{V}(t)$ для простоты записи. Но тогда уравнение кинетической энергии (1.6) принимает вид $\dot{K}(t) = -\dot{V}(t)$, а значит допускает запись (**??**). Из полученной выше записи правой части (**??**) сразу же следует интегральная форма уравнения сохранения энергии (1.10). ■

1.2. Уравнение *Лапласа*

Материальными частицами, как идеализацией протяжённых тел, будем называть любые тела, если их размеры (наименьшие радиусы описанных вокруг тел сфер) намного меньше расстояния между телами (центрами описанных сфер). Закон всемирного тяготения *Ньютона* позволяет вычислить взаимное притяжение материальных частиц, если известны их массы и положения в определённые мгновения времени в инерциальной системе отсчёта (для удобства положим систему координат декартовой ортогональной с базисом $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$). Пусть центры двух шаров (рис. 1.1, *а*), массы которых суть M и m, находятся соответственно в геометрических точках $\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$, а радиусы шаров намного меньше расстояния δ между центрами, где

$$r^2 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2, \tag{1.11}$$

тогда величина силы взаимного притяжения материальных частиц (рис. 1.1, *б*), которыми заменим шары, равна

$$F = \frac{\gamma\, mM}{r^2}\,, \tag{1.12}$$

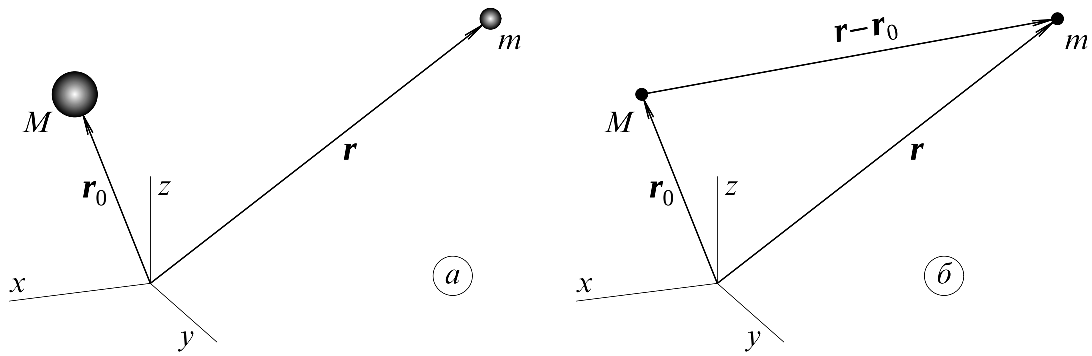

Рис. 1.1. Силу взаимного притяжения двух шаров массы m и M, центры которых расположены в точках пространства $\boldsymbol{x}_0$ и $\boldsymbol{x}$ (a) можно вычислить по закону тяготения *Ньютона* (1.12), заменив шары материальными частицами (*б*)

где $\gamma = 6,67430 \cdot 10^{-11}$ м^3 с$^{-2}$ кг$^{-1}$ (Н м^2 кг$^{-2}$) — гравитационная постоянная, а массы частиц выражены в килограммах.

Если выполнено условие $m \ll M$, то можно пренебречь влиянием материальной частицы массы m на положение материальной частицы массы M, откуда заключаем, что положение первой меняется с течением времени, а положение последней — неизменно.

Введём орт (единичный вектор) $\boldsymbol{e}$ направления от точки $\boldsymbol{x}_0$ к точке $\boldsymbol{x}$

$$\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|} = \frac{x - x_0}{\delta}\,\boldsymbol{i} + \frac{y - y_0}{r}\,\boldsymbol{j} + \frac{z - z_0}{r}\,\boldsymbol{k},$$

тогда силу притяжения, действующую со стороны материальной частицы M на материальную частицу m, запишем так

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -F\boldsymbol{e} = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\boldsymbol{e} = F_x\,\boldsymbol{i} + F_y\,\boldsymbol{j} + F_z\,\boldsymbol{k}\,, \tag{1.13}$$

где компоненты (F_x, F_y, F_z) вектора $\boldsymbol{F}$ суть

$$F_x(\boldsymbol{x}) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{x - x_0}{r}\,, \qquad F_y(\boldsymbol{x}) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{y - y_0}{r}\,, \qquad F_z(\boldsymbol{x}) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{z - z_0}{r}\,\cdot \tag{1.14}$$

Очевидно, что для силы притяжения $\boldsymbol{F}$ (1.20), (1.14) можно указать силовую функцию

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{\gamma\, mM}{r}\,, \tag{1.15}$$

такую, что

$$\boldsymbol{F} = \nabla U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\,\boldsymbol{k}\,, \tag{1.16}$$

или

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}\,, \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}\,, \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}\,.$$

В самом деле, вычислим частные производные функции (1.25) по переменным x, y, z

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\gamma\, mM}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\, mMr^{-1}\right) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{x-x_0}{r}\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\gamma\, mM}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\, mMr^{-1}\right) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial y} = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{y-y_0}{r}\,,$$
$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma\, mM}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\gamma\, mMr^{-1}\right) = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{z-z_0}{r}\,,$$

где

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r}\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r}\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r}\,.$$

Теперь вычислим вторые производные силовой функции

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\gamma\, mM}{r^2}\,\frac{x-x_0}{r}\right) = -\gamma\, mM\frac{\partial}{\partial x}\left(r^{-3}(x-x_0)\right) =$$
$$= -\gamma\, mM\left(-3\, r^{-4}\,\frac{\partial r}{\partial x}\,(x-x_0) + r^{-3}\right) = -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{x-x_0}{r^4}\,\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{1}{r^3}\right) =$$
$$= -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{(x-x_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{(y-y_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right),$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{(z-z_0)^2}{r^5} + \frac{1}{r^3}\right),$$

а затем сложим их

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{\delta^5} + 3\,\frac{1}{\delta^3}\right) =$$
$$= -\gamma\, mM\left(-3\,\frac{\delta^2}{\delta^5} + 3\,\frac{1}{\delta^3}\right) = 0\,.$$

Это значит, что силовая функция удовлетворяет уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0\,, \tag{1.17}$$

называемому уравнением *Лапласа.* С помощью дифференциального оператора *Лапласа*

$$\Delta := \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{1.18}$$

уравнение *Лапласа* (1.17) допускает краткую запись

$$\Delta U = 0\,. \tag{1.19}$$

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma\, m m_i}{\delta_i^2}\, \boldsymbol{e}_i = F_x\, \boldsymbol{i} + F_y\, \boldsymbol{j} + F_z\, \boldsymbol{k}\,, \tag{1.20}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma\, m m_i}{\delta_i}\,, \tag{1.21}$$

$$\delta_i^2 = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2, \tag{1.22}$$

$$\rho\, \mathrm{d}\omega = \rho\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta \tag{1.23}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \gamma m \iiint\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega} \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta}{\delta^3(\boldsymbol{x};\xi,\eta,\zeta)}\,, \tag{1.24}$$

$$\delta^2(\boldsymbol{x};\xi,\eta,\zeta) = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2,$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \gamma m \rho \iiint\limits_{(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega} \frac{\mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathrm{d}\zeta}{\delta(\boldsymbol{x};\xi,\eta,\zeta)}\,, \tag{1.25}$$

$(\xi - x_0)^2 + (\eta - y_0)^2 + (\zeta - z_0)^2 \leqslant R^2$

Ньютон доказал, что однородный шар (или шаровой слой) притягивает точки внешней области так же, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре (см. рис. 1.2).

Будем рассматривать притяжение Землёй, масса которой M и радиус R, материального тела с массой m, принимаемого за материальную частицу и расположенного на расстоянии h от поверхности Земли (рис. 1.2).

Расстояние от центра Земли до притягиваемого тела, очевидно, есть $r = R + h$, тогда значение силовой функции U (1.25) на высоте h над поверхностью Земли

$$U(R+h) = \frac{\gamma\, mM}{R+h}$$

запишем в виде разложения в ряд *Тейлора* относительно поверхности Земли ($h = 0$)

$$U(R+h) = U(R) + \frac{\mathrm{d}U(R)}{\mathrm{d}h}\, h + \frac{\mathrm{d}^2 U(R)}{\mathrm{d}h^2}\, \frac{h^2}{2} + \mathscr{O}(h^3) = -\frac{\gamma\, mM}{R} + \frac{\gamma\, mMh}{R^2} + \frac{\gamma\, mMh^2}{R^3} + \mathscr{O}(h^3)\,.$$

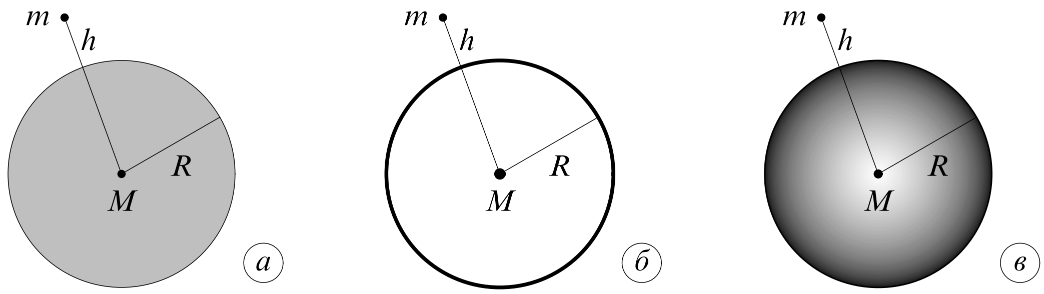

Рис. 1.2. Закон тяготения (1.12) позволяет описать притяжение однородным шаром массы M и радиуса R материальной частицы массы m на расстоянии h от поверхности шара как притяжение материальной частицей массы M материальной частицы массы m, расстояние между которыми равно $R+h$ (*а*). Замена материальной частицей возможна также для сферической оболочки массы M и радиуса R (*б*) и слоистого шара массы M и радиуса R (*в*), если плотность шара зависит только от расстояния до центра

Ограничившись линейным приближением, будем иметь следующее выражение силовой функции на высоте h

$$U(R+h) = -\gamma\frac{mM}{R} + \gamma\frac{mMh}{R^2} = \mathtt{const} + mgh\,, \tag{1.26}$$

где g — ускорение свободного падения (связь g с γ, M и R вводится в школьной физике).

Подставив значение силовой функции (1.26) в уравнение сохранения энергии (1.10), получим запись последнего в таком виде

$$E = K - U = K + V = \frac{m\boldsymbol{v}^2}{2} + mgh = C + \gamma\frac{mM}{R} = \mathtt{const}\,, \tag{1.27}$$

известную из школьного курса физики как *закон сохранения механической энергии* (но мы знаем, что на самом деле теорема).

1.3. Уравнение теплопроводности

> 1807 год ознаменовался тем, что вековой спор по самым основным вопросам математики в одном из ее аспектов был решен и решен в пользу Бернулли: знаменитый французский математик и физик Жан Батист Фурье (1768—1830) представил Парижской Академии наук статью о распространении тепла внутри твердых тел... [40]

По теореме 1.2, энергия тела не сохраняется, если на последние действуют неконсервативные силы.

Пример 1.1. Тело с массой m начинает двигаться со скоростью $\boldsymbol{v}$ по горизонтальной шероховатой плоскости. Под действием силы трения $\boldsymbol{F}$ (направления векторов $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{F}$ суть противоположны, то есть $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{F} = -|\boldsymbol{v}||\boldsymbol{F}| < 0$) тело остановится за конечный промежуток времени, нагревшись при этом. ▲

Пример 1.2. Металлический шар с массой m падает с высоты h на твёрдую поверхность, не отскакивая от последней, а оставаясь в месте падения. В начале падения шар обладает потенциальной энергией $V = mgh$, к концу падения потенциальная энергия полностью переходит в кинетическую $K = \dfrac{m\boldsymbol{v}^2}{2}$, последняя же полностью расходуется на деформацию (смятие) и нагрев шара. ▲

Нагрев тел в обоих примерах указывает на переход кинетической энергии движения в тепловую энергию. Для дальнейшего изложения напомним определения энергии и тепловой энергии, известные из школьной физики.

Определение 1.5. *Энергией* называется способность материальных тел производить работу.

Определение 1.6. *Тепловой энергией* называется вид энергии, передающийся немеханическим путём.

Немеханический способ передачи энергии означает, что нет возможности указать видимые тела (макротела), которым передана кинетическая энергия. По современным представлениям таковые тела суть невидимые структурные элементы вещества материальных тел — электроны, ядра атомов, молекулы, частота и размах колебаний которых увеличивается (что воспринимается как нагрев) или уменьшается (охлаждение). Эти движения невидимых тел (микротел) описываются не на языке механики, а молекулярно-кинетической теории. Физика XVII – XIX вв. описывала тепловые явления (передачу тепловой энергии) с помощью понятия *теплорода*. Теплород мыслился как особая невидимая среда (тонкая субстанция), приток которой к телу (или в тело) воспринимается как нагрев тела, а отток от тела (из тела) как охлаждение. Именно на таком языке и было впервые выведено уравнение теплопроводности, применяемое и в современной физике.

Закон сохранения тепловой энергии гласит, что *изменение тепловой энергии в некоторой области пространства за промежуток времени равно потоку тепловой энергии через границу этой области и выделению тепловой энергии источниками (поглощению стоками) за этот же промежуток времени.*

Пусть передача тепловой энергии происходит в некоторой произвольной конечной области $\mathcal{D}$ пространства (рис. 1.3, *а*) на конечном промежутке времени $[t_1, t_2]$. Область имеет кусочно-гладкую поверхность $\mathcal{S}$ и заполнена материальной несжимаемой средой (веществом) с известными теплофизическими свойствами. Мы выведем уравнение, описывающее перенос тепловой энергии, двумя способами: 1) для малой подобласти конечной области $\mathcal{D}$; 2) для конечной области $\mathcal{D}$.

Рассмотрим малую (элементарную) подобласть $\mathrm{d}\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ в виде прямоугольного параллелепипеда («кирпича»), «вырезанного» с помощью трёх пар параллельных плоскостей $x_0 = \mathtt{const}$, $x_0 + \mathrm{d}x = \mathtt{const}$, $y_0 = \mathtt{const}$, $y_0 + \mathrm{d}y = \mathtt{const}$, $z_0 = \mathtt{const}$, $z_0 + \mathrm{d}z = \mathtt{const}$, где $(x_0, y_0, z_0) \equiv \boldsymbol{r}_0$ — произвольная точка области $\mathcal{D}$ (рис. 1.3, *б*). Далее для простоты будем говорить о малой (элементарной) области. Очевидно, что объём последней равен $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, а площади граней, перпендикулярных осям x, y и z, суть $\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$ и $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ соответственно. Также выделим на конечном промежутке времени $[t_1, t_2]$ малый (элементарный) промежуток времени $\mathrm{d}t$ (прошедший от мгновения t_0 до мгновения $t_0 + \mathrm{d}t$, где $[t_0, t_0 + \mathrm{d}t] \subset [t_1, t_2]$).

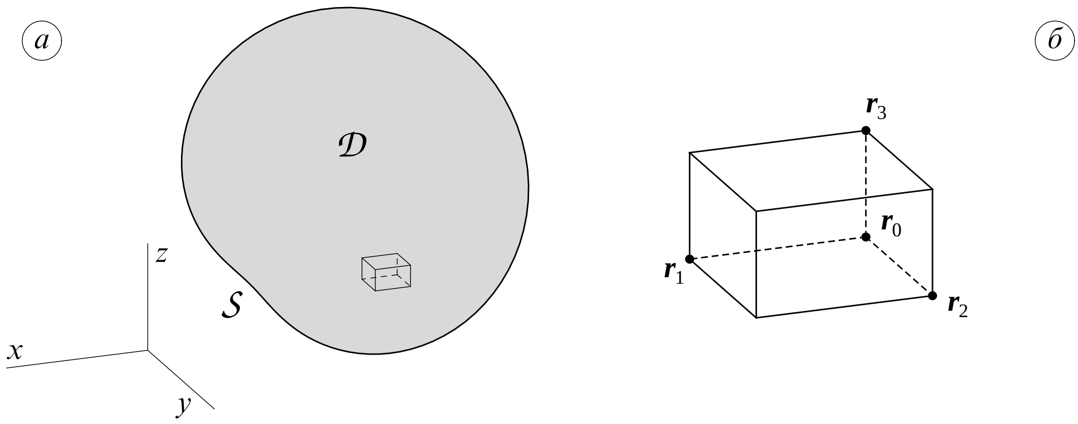

Рис. 1.3. Конечная область трёхмерного пространства $\mathcal{S}$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$ (*а*); малая подобласть $\mathrm{d}\mathcal{D}$ области $\mathcal{D}$ в виде параллелепипеда с рёбрами, параллельными осям декартовой прямоугольной системы координат (x, y, z) (*б*)

Изменение количества тепловой энергии в малой области за малый промежуток времени равно

$$\delta E(t_0, \boldsymbol{x}_0) = e(t_0 + \mathrm{d}t, \boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - e(t_0, \boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \Big[e(t_0 + \mathrm{d}t, \boldsymbol{x}_0) - e(t_0, \boldsymbol{x}_0)\Big]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,, \tag{1.28}$$

где $e(t, \boldsymbol{x})$ — объёмная плотность тепловой энергии среды. Из термодинамики известно, что

$$e(t, \boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x})\; c_V(t, \boldsymbol{x})\; T(t, \boldsymbol{x})\,, \tag{1.29}$$

где ρ — плотность среды, c_V — удельная массовая теплоёмкость среды при постоянном объёме (определяется опытным путём), T — абсолютная температура среды.

Упростим выражение в квадратных скобках (1.28), применив разложение в ряд *Тейлора* с точностью до члена первого порядка по δt

$$e(t_0{+}\mathrm{d}t, \boldsymbol{x}_0){-}e(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \frac{\partial e(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t}\,\frac{\mathrm{d}t}{1!}{+}\frac{\partial^2 e(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t^2}\,\frac{(\mathrm{d}t)^2}{2!}{+}\frac{\partial^3 e(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t^3}\,\frac{(\mathrm{d}t)^3}{3!}{+}\ldots \approx \frac{\partial e(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t}\,\mathrm{d}t\,,$$

тогда изменение количества тепловой энергии (1.28) сможем можем приближенно записать так

$$\delta E(t_0, \boldsymbol{x}_0) \approx \frac{\partial e(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \left[\rho\,\frac{\partial (c_V\, T)}{\partial t}\right]_{(t_0, \boldsymbol{x}_0)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.30}$$

Поток тепловой энергии через границу малой области (составленную из шести граней) за малый промежуток времени равен

$$\begin{aligned}\delta Q(t_0, \boldsymbol{x}_0) = -\Big[q_x(t_0, \boldsymbol{x}_1) - q_x(t_0, \boldsymbol{x}_0)\Big]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\, - \\ -\Big[q_y(t_0, \boldsymbol{x}_2) - q_y(t_0, \boldsymbol{x}_0)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\, - \\ -\Big[q_z(t_0, \boldsymbol{x}_3) - q_z(t_0, \boldsymbol{x}_0)\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}t\,,\end{aligned} \tag{1.31}$$

где $\boldsymbol{x}_1 = (x_0 + \mathrm{d}x, y_0, z_0)$, $\boldsymbol{x}_2 = (x_0, y_0 + \mathrm{d}y, z_0)$, $\boldsymbol{x}_3 = (x_0, y_0, z_0 + \mathrm{d}z)$, $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$ — вектор поверхностной плотности потока тепловой энергии. Этот вектор «отвечает» за перенос тепловой энергии так же, как вектор поверхностной плотности потока количества движения (импульса) материальной среды $\rho\boldsymbol{v}$ «отвечает» за перенос среды. Применив для величин вквадратных скобках соответствующие разложения вряд Тейлора с точностью до членов первого порядка по $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ и $\mathrm{d}z$

$$\begin{aligned}q_x(t_0, \boldsymbol{x}_1) - q_x(t_0, \boldsymbol{x}_0) \approx \frac{\partial q_x(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,, \\ q_y(t_0, \boldsymbol{x}_2) - q_y(t_0, \boldsymbol{x}_0) \approx \frac{\partial q_y(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,, \\ q_z(t_0, \boldsymbol{x}_3) - q_z(t_0, \boldsymbol{x}_0) \approx \frac{\partial q_z(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

запишем приближённо величину потока тепловой энергии (1.31) таким образом

$$\delta Q(t_0, \boldsymbol{x}_0) = -\nabla\cdot\boldsymbol{q}(t_0, \boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,, \tag{1.32}$$

где ∇ — дифференциальный оператор *Гамильтона* (см. определение (7.24) на с. 215), а $\nabla\cdot\boldsymbol{q}$ — дивергенция вектора $\boldsymbol{q} = (q_x, q_y, q_z)$ (см. определение (7.25) на с. 215)

$$\nabla\cdot\boldsymbol{q} = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z}\,. \tag{1.33}$$

Закон теплопроводности *Фурье* устанавливает следующую дифференциальную связь вектора $\boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{x})$ и температурного поля $T(t, \boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{x}) = -\lambda(t, \boldsymbol{x})\,\nabla T(t, \boldsymbol{x}) = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial z}\,\boldsymbol{k}\right), \tag{1.34}$$

где $\lambda(t, \boldsymbol{x})$ — коэффициент теплопроводности (определяется опытным путём). Для компонентов векторов $\boldsymbol{q}$ и ∇T закон *Фурье* имеет следующий вид

$$q_x = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\,, \qquad q_y = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\,, \qquad q_z = -\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\,. \tag{1.35}$$

Поясним физический смысл закона теплопроводности *Фурье*, для чего рассмотрим семейство изотерм $T(t, \boldsymbol{x}) = \mathtt{const}$, то есть поверхностей, на которых температура принимает постоянные значения. Возьмём изотерму, проходящую через точку $\boldsymbol{x}_0$ в мгновение времени t_0. Изотерма, проходящая через точку $\boldsymbol{x}_0$, как двусторонняя поверхность, разбивает пространство в окрестности точки на две части. что вектор ∇T перпендикулярен изотерме. Остаётся выяснить, в какую сторону вектор ∇T направлен. Одну часть пространства, в которой $T(t_0, \boldsymbol{x}) > T(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, будем называть *положительной*, а другую, в которой $T(t_0, \boldsymbol{x}) < T(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, — *отрицательной*.

Единственная возможность для согласования знаков односторонних производных состоит в том, что $\boldsymbol{\nu} \uparrow\uparrow \nabla T(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, то есть вектор градиента температуры в точке $\boldsymbol{x}_0$ направлен по нормали к изотерме, проходящей через точку $\boldsymbol{x}_0$, в сторону роста температуры. Но второй закон термодинамики утверждает, что *тепловая энергия может самопроизвольно переходить только от более нагретых тел к менее нагретым*, то есть направление вектора $\boldsymbol{q}(t, \boldsymbol{x})$ противоположно направлению вектора $\nabla T(t, \boldsymbol{x})$. Но именно это свойство тепловой энергии и отражено в законе теплопроводности *Фурье* (1.34), (1.35).

Подставив выражения (1.35) для компонентов вектора $\boldsymbol{q}$ в выражение для потока тепловой энергии (1.32), (1.33), будем иметь

$$\delta Q(t_0, \boldsymbol{x}_0) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{(t_0, \boldsymbol{x}_0)} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.36}$$

Пусть объёмная плотность выделения (поглощения) тепловой энергии в среде (за счёт прохождения химических реакций, электрического тока и других явлений, называемых совокупно внутренними распределёнными источниками тепловой энергии) есть $h(t, \boldsymbol{x})$, тогда изменение тепловой энергии в малой области за малый промежуток времени, из-за действия внутренних источников, равно

$$h(t_0, \boldsymbol{x}_0)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,. \tag{1.37}$$

Нам осталось только приравнять величину (1.30) всем выписанным вкладам (1.36), (1.37) в изменение тепловой энергии и сократить полученное равенство на общий множитель $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$, чтобы получить уравнение теплопроводности

$$\left[\rho\,\frac{\partial(c_V\,T)}{\partial t}\right]_{(t_0, \boldsymbol{x}_0)} = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\,\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right]_{(t_0, \boldsymbol{x}_0)} + h(t_0, \boldsymbol{x}_0)\,. \tag{1.38}$$

В силу произвольности выбора мгновения времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ и точки $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}$, уравнение (1.38) далее будем записывать без указания на $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$.

Если теплофизические свойства среды могут быть описаны постоянными величинами c_V, λ, тогда уравнение теплопроводности принимает такой вид

$$\rho\,c_V\,\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + h\,.$$

Более удобная форма уравнения может быть получена после деления обеих частей на произведение $\rho\,c_V$ и введения коэффициента температуропроводности a^2

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) + g\,, \tag{1.39}$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda}{\rho\, c_V}\,, \qquad g(t,\boldsymbol{x}) = \frac{h(t,\boldsymbol{x})}{\rho\, c_V}\,.$$

Заметим, что уравнение теплопроводности (1.39) можно записать коротко, если применить для записи оператор *Лапласа*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2\,\Delta T + g\,. \tag{1.40}$$

Теперь рассмотрим конечную область $\mathcal{D}$ (см. рис. 1.3, *б*), для которой в произвольное мгновение времени $t \in [t_1, t_2]$ запишем выражения: 1) тепловой энергии среды

$$E(t) = \iiint\limits_{\mathcal{D}} e(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D}\,; \tag{1.41}$$

2) потока тепловой энергии через границу области

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,; \tag{1.42}$$

3) скорости выделения тепловой энергии за счёт распределённых внутренних источников

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} h(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D}\,. \tag{1.43}$$

С помощью введённых величин закон сохранения тепловой энергии в области $\mathcal{D}$ для конечного промежутка времени $[t_a, t_b] \subset [t_1, t_2]$ записывается в *интегральной форме*

$$E(t_b) - E(t_a) = -\int\limits_{t_a}^{t_b} \left(\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S} \right) \mathrm{d}t + \int\limits_{t_a}^{t_b} \left(\iiint\limits_{\mathcal{D}} h(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} \right) \mathrm{d}t\,. \tag{1.44}$$

Поверхностный интеграл преобразуем по формуле *Остроградского – Гаусса*

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S} = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} \tag{1.45}$$

и перепишем закон сохранения тепловой энергии (1.44) так

$$E(t_b) - E(t_a) = \int\limits_{t_a}^{t_b} \left(\iiint\limits_{\mathcal{D}} \big[h(t,\boldsymbol{x}) - \nabla \cdot \boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x}) \big]\,\mathrm{d}\mathcal{D} \right) \mathrm{d}t\,,$$

или в развёрнутом виде

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} e(t_b,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} - \iiint\limits_{\mathcal{D}} e(t_a,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \int\limits_{t_a}^{t_b}\left(\iiint\limits_{\mathcal{D}}\big[h(t,\boldsymbol{x}) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\big]\,\mathrm{d}\mathcal{D}\right)\mathrm{d}t\,.$$

Изменим порядок интегрирования по времени и пространству в правой части последнего интегрального равенства

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} e(t_b,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} - \iiint\limits_{\mathcal{D}} e(t_a,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \iiint\limits_{\mathcal{D}}\left(\int\limits_{t_a}^{t_b}\big[h(t,\boldsymbol{x}) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\big]\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\mathcal{D}$$

и запишем закон сохранения тепловой энергии в виде одного интеграла по области $\mathcal{D}$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\left\{e(t_b,\boldsymbol{x}) - e(t_a,\boldsymbol{x}) - \int\limits_{t_a}^{t_b}\big[h(t,\boldsymbol{x}) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x})\big]\,\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}\mathcal{D} = 0\,,$$

к которому применим теорему о среднем значении

$$e(t_b,\boldsymbol{x}^*) - e(t_a,\boldsymbol{x}^*) = \int\limits_{t_a}^{t_b}\big[h(t,\boldsymbol{x}^*) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x}^*)\big]\,\mathrm{d}t\,,$$

где $\boldsymbol{x}^* \in \mathcal{D}$. Далее применим теорему о среднем значении к интегралу по переменной t

$$e(t_b,\boldsymbol{x}^*) - e(t_a,\boldsymbol{x}^*) = (t_b - t_a)\big[h(t^*,\boldsymbol{x}^*) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t^*,\boldsymbol{x}^*)\big]\,,$$

где $t^* \in [t_a, t_b]$, разделим обе части последнего равенства на $t_b - t_a$, перейдём к пределу при $t_b \to t_a = t \in [t_1, t_2]$

$$\lim_{t_b\to t_a}\frac{e(t_b,\boldsymbol{x}^*) - e(t_a,\boldsymbol{x}^*)}{t_b - t_a} = \lim_{t_b\to t_a}\big[h(t^*,\boldsymbol{x}^*) - \nabla\cdot\boldsymbol{q}(t^*,\boldsymbol{x}^*)\big]$$

и получим *дифференциальную* форму закона сохранения тепловой энергии

$$\frac{\partial e(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q}(t,\boldsymbol{x}) + h(t,\boldsymbol{x})\,. \tag{1.46}$$

Подставив в полученное уравнение зависимость (1.29) и закон теплопроводности *Фурье* (1.34), (1.35), придём куравнению теплопроводности (1.40).

1.4. Уравнение колебаний

Тела, с которыми имеет дело механика, бывают самых разных типов: точечные массы, занимающие в каждый данный момент времени лишь одну точку; абсолютно твердые тела, которые никогда не деформируются; струны, стержни и струи, которые являются одномерными; мембраны и оболочки, которые занимают собой лишь поверхности; жидкости и твердые тела, заполняющие пространство, и многое другое. [56]

Применим законы механики *Ньютона* к выводу уравнения, описывающего поперечные колебания натянутой струны при следующих предположениях:

1) струна есть физическое тело, у которого принимается во внимание *протяжённость* только *в одном направлении*, для которого введём переменную $s \in \boldsymbol{x}$;

2) струна совершает колебания в плоскости (x, y), где ось x направлена вдоль струны в состоянии покоя (в этом случае $s = x$), ось y перпендикулярна оси x;

3) смещение малых участков струны и струны в целом вдоль оси x равно нулю, соответственно компонент скорости $v_x = 0$; смещение вдоль оси y зависит от времени t и положения участка струны x (или s), то есть смещение есть некоторая функция $u(t, x)$, а компонент скорости смещения вдоль оси y равен

$$v_y(t, x) = \frac{\partial u(t, x)}{\partial t}\,; \tag{1.47}$$

4) струну рассматриваем как *абсолютно гибкое* протяжённое тело, то есть на выделенный малый $(x, x + \mathrm{d}x)$ или конечный (a, b) участки струны со стороны остальных частей струны действуют силы натяжения, касательные к струне при x и $x + \mathrm{d}x$ или $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.4);

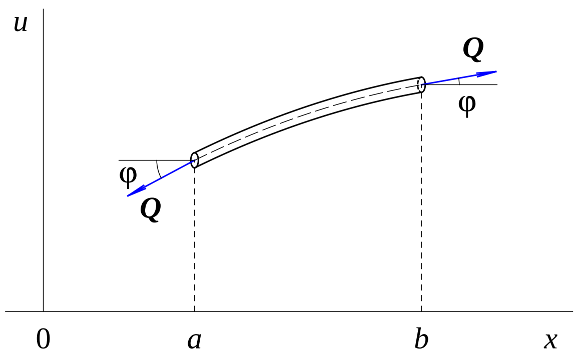

Рис. 1.4. Из струны вырезан конечный участок (a, b), действие отброшенных частей заменено силами натяжения $\boldsymbol{Q}(t, x)$ на концах участка $x = a$ и $x = b$

5) струну рассматриваем как *абсолютно упругое* протяжённое тело, то есть подчиняющееся закону *Гука* (изменение силы натяжения пропорционально изменению длины струны);

6) струна совершает *малые колебания*, то есть рассматриваем смещение $u(t, x)$ и его частные производные

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = v_y(t, x)\,, \qquad \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} = \mathtt{tg}\,\varphi(t, x) \approx \mathtt{sin}\,\varphi(t, x) \approx \varphi(t, x)\,, \tag{1.48}$$

как малые величины, квадратами которых будем пренебрегать;

7) длина произвольного конечного участка (a, b) струны не меняется при совершении струной малых колебаний (см. задачу 1.4 на с. 29)

$$s(b)-s(a)=\int\limits_a^b \mathrm{d}s=\int\limits_a^b \sqrt{1+\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)^2}\,\mathrm{d}x \approx \int\limits_a^b \mathrm{d}x = b-a,$$

то есть с точностью до малых второго порядка малости не изменяется (следовательно, параметр s совпадает с переменной x в состоянии покоя и при совершении колебаний);

8) линейная плотность струны равна $\rho(x)$, то есть масса элемента $(x, x+\mathrm{d}x)$ струны равна $\mathrm{d}m=\rho(x)\,\mathrm{d}x$, а масса конечного участка (a,b) равна

$$M(a,b)=\int\limits_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

9) линейная плотность внешних массовых сил, действующих в плоскости (x,y) параллельно оси y равна $h(t,x)$ (если сила тяжести учитывается, то вклад последней в $h(t,x)$ равен $-\rho(x)\,g$, где g — ускорение свободного падения), то есть величина силы, действующей на малый участок $(x, x+\mathrm{d}x)$ струны, равна $h(t,x)\,\mathrm{d}x$, а на конечный участок (a,b) струны — равна

$$F(t;a,b)=\int\limits_a^b h(t,x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{1.49}$$

10) силу сопротивления внешней среды не учитываем.

Условия, при которых мы рассматриваем колебания струны, позволяют учесть только закон сохранения количества движения (второй закон *Ньютона*), поскольку законы сохранения массы и энергии выполняются очевидным образом.

Вначале выведем уравнение малых колебаний струны в *дифференциальной форме*, рассматривая малый участок $(x, x+\mathrm{d}x)$ струны. Ускорение вертикального смещения малого участка равно частной производной скорости вертикального смещения $v_y(t,x)$ (1.47) по времени t

$$a=\frac{\partial v_y(t,x)}{\partial t}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}\,.$$

На рассматриваемый малый участок струны действует совокупная сила 1) реакции отброшенных частей струны (слева и справа от участка струны), обусловленная натяжением струны $\boldsymbol{Q}$, и 2) внешних массовых сил. Величина силы натяжения $\boldsymbol{Q}(t,x)$ постоянна в пределах малого участка струны, то есть $|\boldsymbol{Q}(t,x)|=Q_0$ (в силу неизменности длины $\mathrm{d}s$ участка, где $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$), а местное направление силы натяжения определено значением угла $\varphi(t,x)$. Следовательно, для малого участка струны можем записать равнодействующую сил в направлении оси y в таком виде

$$Q_0\,\mathtt{sin}\,\varphi(t,x+\mathrm{d}x)-Q_0\,\mathtt{sin}\,\varphi(t,x)+h(t,x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Теперь учтём связь (1.48) угла $\varphi(t,x)$ наклона касательной к струне со смещением $u(t,x)$ и примением разложение смещения в ряд *Тейлора* по пространственной переменной x, тогда для равнодействующей сил получим следующее выражение

$$
\begin{aligned}
&Q_0\left[\frac{\partial u(t,x+\mathrm{d}x)}{\partial x}-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]+h(t,x)\,\mathrm{d}x=\\
&=Q_0\left[\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{1!}+\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial x^3}\,\frac{(\mathrm{d}x)^2}{2!}+\ldots-\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right]+h(t,x)\,\mathrm{d}x=\\
&=Q_0\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x+h(t,x)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
$$

Далее приравняем количество движения малого участка струны в вертикальном направлении равнодействующей сил в вертикальном направлении

$$
\rho(x)\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=Q_0\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x+h(t,x)\,\mathrm{d}x\,.
$$

После сокращения на $\mathrm{d}x$ получим уравнение, описывающее малые пеоперечные колебания упругой струны

$$
\rho(x)\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=Q_0\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+h(t,x)\,.
$$

Обычно это уравнение рассматривают в предположении постоянной линейной плотности $\rho(x)\equiv\rho_0$, то есть

$$
\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+f(t,x)\,, \tag{1.50}
$$

где $\rho_0\,a^2=Q_0$, $h(t,x)=\rho_0\,f(t,x)$.

При тех же предположениях можно вывести уравнение, описывающее малые поперечные колебания натянутой мембраны

$$
\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(t,x,y)}{\partial y^2}\right)+f(t,x,y)\,, \tag{1.51}
$$

где $u(t,x,y)$ — отклонение мембраны от равновесного положения, $f(t,x,y)$ — функция, описывающая внешние воздействия на мембрану.

Привлекая уравнения движения слошной среды и термодинамики идеального газа, можно вывести уравнение малых *продольных* колебаний сплошной среды. Таковыми можно считать акустические, или звуковые колебания, возникающие при распространении звука. Точнее говоря, звуки, которые мы слышим, и есть акустические колебания. Уравнение акустических колебаний имеет такой вид

$$
\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial t^2}=a_0^2\left(\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\bar{p}}{\partial z^2}\right), \tag{1.52}
$$

где $\bar{p}$ — отклонение давления воздуха в акустической волне от постоянного значения p_0 (в отсутствие колебаний), a_0 — скорость звука в воздухе (примерно 300 м/с).

1.5. Уравнения и краевые задачи математической физики

Соберем в одном месте равнее выведенные уравнения *Лапласа*, теплопроводности и колебаний

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{1.53}$$

$$\frac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} - a^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x})\,, \tag{1.54}$$

$$\frac{\partial^2 u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} - a^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x}) = f(t,\boldsymbol{x})\,, \tag{1.55}$$

описывающие различныфе явления, но представляющие, тем не менее, всего лишь некоторые отдельные виды дифференциальных уравнений в частных производных.

Определение 1.7. Дифференциальным уравнением в частных производных порядка m по независимым переменным $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathcal{D}$ относительно функции $u(\boldsymbol{x})$ (зависимой переменной) называется соотношение, связывающее независимые переменные, зависимую переменную и частные производные зависимой переменной по независимым (хотя бы по одной из независимых переменных), причём порядок старшей частной производной равен m. □

Определение 1.8. Дифференциальным уравнением в частных производных порядка m по независимым переменным $t \in [t_1, t_2]$ и $\boldsymbol{x} = (x, y, z) \in \mathcal{D}$ относительно функции $u(t, \boldsymbol{x})$ (зависимой переменной) называется соотношение, связывающее независимые переменные, зависимую переменную и частные производные зависимой переменной по независимым (хотя бы по одной из независимых переменных), причём порядок старшей частной производной равен m. □

В основном мы будем рассматривать линейные дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка.

Определение 1.9. Линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка по переменным $\boldsymbol{x} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ относительно функции $u(\boldsymbol{x})$ называется соотношение вида

$$\sum_{\kappa=1}^{3}\sum_{\iota=1}^{3} a_{\kappa,\iota}(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{x})}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} + \sum_{\kappa=1}^{3} a_\kappa(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial x_\kappa} + a_\star(\boldsymbol{x})\,u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})\,, \tag{1.56}$$

где $a_{\kappa,\iota}(\boldsymbol{x})$, $a_\kappa(\boldsymbol{x})$, $a_\star(\boldsymbol{x})$, $g(\boldsymbol{x})$ — известные (по крайней мере, непрерывные) функции независимых переменных. □

Определение 1.10. Линейным дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка по переменным $(t, \boldsymbol{x}) = (t, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{D}$ относительно функции $u(t, \boldsymbol{x})$ называется соотношение вида

$$\sum_{\kappa=0}^{3}\sum_{\iota=0}^{3} a_{\kappa,\iota}(t,\boldsymbol{x})\,\frac{\partial^2 u(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_\kappa \partial x_\iota} + \sum_{\kappa=0}^{3} a_\kappa(t,\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_\kappa} + a_\star(t,\boldsymbol{x})\,u(t,\boldsymbol{x}) = g(t,\boldsymbol{x})\,, \tag{1.57}$$

где $a_{\kappa,\iota}(t,\boldsymbol{x})$, $a_\kappa(t,\boldsymbol{x})$, $a_\star(t,\boldsymbol{x})$, $g(t,\boldsymbol{x})$ — известные (по крайней мере, непрерывные) функции независимых переменных. $\square$

Для дифференциальных уравнений в частных производных (даже линейных), как и для дифференциальных уравнений в обыкновенных производных, отсутствуют общие методы решения, поэтому под решениями таких уравнений понимают решения частных (так называемых краевых) задач. Поэтому важно понимать, какова степень произвола при постановке задач для уравнений в частных производных.

Напомним, что для дифференциального уравнения с обыкновенными производными порядка m (или, в более привычной форме, обыкновенного дифференциального уравнения порядка m)

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(m)}) = 0\,, \qquad x \in I \subseteq \boldsymbol{x}\,, \tag{1.58}$$

где I — конечный или (полу-) бесконечный интервал действительной оси x, вся совокупность решений, называемая m-параметрическим семейством решений (немного устаревшее понятие — *общее решение*), может быть представлена некоторой функцией (разумеется, для каждого уравнения — «своей») независимой переменной x и параметров — произвольных постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_m$, а именно в явном виде

$$y = \varphi(x; C_1, C_2, \ldots, C_m)\,. \tag{1.59}$$

или неявном

$$\Phi(x, y; C_1, C_2, \ldots, C_m) = 0\,. \tag{1.60}$$

Решения уравнения (1.58), которые не входят в семейство (1.59) или (1.60) (если они существуют), называются *особыми*.

Верно и обратное утверждение, то есть некоторому явному (1.59) или неявному (1.60) семейству функций можно поставить в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение (1.58) порядка m (см. пояснение).

Можно ли перенести эти утверждения на уравнения с частными производными? Для того, чтобы ответить на данный вопрос, рассмотрим некоторые простые примеры уравнений с частными производными.

Пример 1.3. Уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + 1 = 0\,, \qquad (x, y) \in \mathcal{D} \subseteq \boldsymbol{x}^2\,, \tag{1.61}$$

очевидно, не имеет решений. ▲

Пример 1.4. Уравнение первого порядка

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 0\,, \qquad (x,y) \in \mathcal{D} \subseteq \boldsymbol{x}^2\,, \tag{1.62}$$

имеет только постоянные решения $u(x,y) = \texttt{const}$. ▲

Пример 1.5. Для уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0\,, \qquad (x,y) \in \mathcal{D} \subseteq \boldsymbol{x}^2\,, \tag{1.63}$$

после первого интегрирования по переменной y получим

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = u_1(x)\,, \tag{1.64}$$

где $u_1(x)$ — произвольная функция x, а после второго интегрирования по переменной x найдём семейство решений

$$u(x,y) = \int u_1(x)\,\mathrm{d}x + v_2(y) = v_1(x) + v_2(y)\,, \tag{1.65}$$

зависящее от двух произвольных функций (см. задачу 1.5 на с. 29). ▲

Пример 1.6. Для уравнения третьего порядка

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = 0\,, \qquad (x,y,z) \in \mathcal{D} \subseteq \boldsymbol{x}^3\,, \tag{1.66}$$

после первого интегрирования по переменной z имеем

$$\frac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x \partial y} = u_1(x,y)\,, \tag{1.67}$$

после второго интегрирования по переменной y

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x} = \int u_1(x,y)\,\mathrm{d}y + v_2(x,z) = v_1(x,y) + v_2(x,z)\,, \tag{1.68}$$

и после третьего интегрированя найдём семейство решений

$$u(x,y,z) = \int v_1(x,y)\,\mathrm{d}x + \int v_2(x,z)\,\mathrm{d}x + w_3(y,z) = w_1(x,y) + w_2(x,z) + w_3(y,z)\,, \tag{1.69}$$

зависящее от трёх произвольных функций (см. задачу 1.5 на с. 29). ▲

Рассмотренные примеры показывают, что для однозначного нахождения функции, подчинённой дифференциальному уравнению в частных производных, следует задавать в качестве некоторых дополнительных условий вспомогательные функции, позволяющие выделить искомую функцию из (вообще говоря) неизвестного семейства решений дифференциального уравнения. Задание таких вспомогательных функций на всей или части границы пространственной (то есть независимых переменных $\boldsymbol{x}$) или пространственно-временной (то есть независимых переменных $(t, \boldsymbol{x})$) области составляет суть постановки краевых задач теории дифференциальных уравнений в частных производных.

1.6. Задачи

К разделу 1.1. на с. 8

Задача 1.1. Если мы развили геометрические представления и понятия настолько, что можем «измерить» размерность пространства, то что нам для этого нужно и как это сделать? ▲

К разделу 1.2. на с. 11

К разделу 1.3. на с. 15

Задача 1.2. Каковы размерности величин E, e, c_V, Q, λ, a^2, h, g в уравнении теплопроводности?

Задача 1.3. Происходит ли перенос тепловой энергии вдоль изотерм?

К разделу 1.4. на с. 21

Задача 1.4. Докажите, что длина струны при совершении малых колебаний не меняется с точностью до величин второго порядка малости.

Решение.

К разделу 1.5. на с. 25

Задача 1.5. Насколько произвольны функции $v_1(x), v_2(y)$ в решении $u(x, y)$ уравнения (1.63) из примера 1.5 на с. 27 и функции $w_1(x, y), w_2(x, z), w_3(y, z)$ в решении $u(x, y, z)$ уравнения (1.66) из примера 1.6 на с. 27?

Ответ. Поскольку решение $u(x, y)$ уравнения (1.63) и решение $u(x, y, z)$ уравнения (1.66) суть непрерывны в соответствующих областях $\mathcal{D}$ (это следует из дифференцируемости функций $u(x, y)$ и $u(x, y, z)$), то произвольные функции $v_1(x), v_2(y)$ и $w_1(x, y), w_2(x, z), w_3(y, z)$ должны быть непрерывными в $\mathcal{D}$, однако последние могут быть неограниченными в замыканиях областей $\mathcal{D}$. Если на решения наложены дополнительные условия (другими словами, поставлены соответствующие граничные задачи), например, в виде принятия на границах областей значений, заданных непрерывными функциями, то произвольные функции должны быть непрерывными (а значит ограниченными) в замыканиях областей $\mathcal{D}$. При совпадении области $\mathcal{D}$ с плоскостью (пример 1.5) или с пространством (пример 1.6) из ограниченности решений $u(x, y)$ и $u(x, y, z)$ сразу же следует ограниченность произвольных функций на плоскости или в пространстве.

1.7. Пояснения

Основные понятия теории поля, определения дифференциальных операторов теории поля и интегральные формулы *Стокса*, *Остроградского – Гаусса* и *Грина* (первую и вторую формулы *Грина* не следует смешивать с формулой *Грина* — записью в $\boldsymbol{x}^2$ формулы *Стокса*) можно найти в любом учебнике анализа, например в [?, ?, ?]. Теоремы **??** и **??** о необходимых и достаточных условиях потенциальности и соленоидальности векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$ взяты без изменений из [?].

Доступное изложение всех этих вопросов имеется в учебнике [?] и учебном пособии [?].

К разделу 1.1. на с. 8

Пояснение 1.1 к с. 10. Во времена Ньютона «силой» (лат. vis) назывались многие объекты, например, ускорение точки. Произведение массы точки на квадрат ее скорости Лейбниц (G. W. Leibnitz) назвал vis viva (живая сила). Современный термин «сила» соответствует vis motrix (ускоряющая сила) у Ньютона [5].

... Лейбницу принадлежит введение в механику живой силы или, как стали говорить в XIX столетии, меры кинетической энергии в ее механической форме. Это было ... результатом целенаправленного поиска. Материя должна была быть наделена активностью, чем-то таким, что, как выражался Лейбниц, находится на полпути между способностью действовать и самим действием [43].

... Лейбниц вел длительную полемику со сторонниками Декарта, настаивая на том, что произведение массы тела на квадрат его скорости (живая сила по Лейбницу) является истинной мерой движения, а не произведение массы на скорость (импульс), как считал Декарт [?].

... Лейбниц живой силой называл произведение $m\boldsymbol{v}^2$ без делителя 2. Такое определение живой силы встречается и до сих пор у французских авторов, но его следует признать неудачным, так как это определение влечёт за собой необходимость при формулировании закона изменения кинетической энергии, или живой силы, говорить о «половине живой силы» [39].

В старых учебниках эта величина называлась «живой силой»; этой величиной воспользовались впервые Х. Гюйгенс и Г. Лейбниц; термин «живая сила» ввел впервые Бернулли И. [9], стр. 72: «Живая сила есть та сила, которая пребывает в равномерно движущемся теле. Наоборот, мертвая сила — та, которую получает тело без движения, если оно побуждается и принуждается к движению, или же которая побуждает двигаться быстрее или медленнее, если тело уже находится в движении» [?].

К разделу 1.2. на с. 11

Пояснение 1.2 к с. **??**.

Помимо рассказа об экспериментах, в этом письме Гука содержатся такие важные слова: «Я предполагаю, что притяжение обратно пропорционально квадрату расстояния до центра, соответственно предположению Кеплера о зависимости скорости от расстояния. Галлей, вернувшись с острова св. Елены, рассказал мне, что маятник качается медленнее на вершине горы, чем у подножья, и не мог понять причины. Я сказал ему, что он решил давно занимавший меня вопрос об убывании тяготения с удалением от центра... Говоря о падении внутри Земли, я не думаю что закон притяжения будет таким же до самого центра Земли, но, напротив, я считаю, что, чем ближе тело будет к центру, тем слабее будет притяжение, возможно, подобно тому, как это происходит с маятником или телом внутри вогнутой поверхности, где сила уменьшается по мере приближения к нижней точке... Притяжение на значительных расстояниях [от небесных тел] можно вычислять по указанной пропорции [обратных квадратов] как притяжение самим центром.

<...>

... Гук нарисовал орбиты и увидел, что они похожи на эллипсы... Назвать их эллипсами ему не позволила научная честность, так как доказать эллиптичность он не смог. Сделать это Гук предложил Ньютону, сказав, что он не сомневается, что Ньютон с его превосходными методами справится с этой задачей и убедится также и в том, что первый закон Кеплера (утверждающий, что планеты движутся по эллипсам) тоже следует из закона обратных квадратов.

Отправив Ньютону письмо с таким предложением, Гук перешел к следующим открытиям, так как времени заниматься математическими подробностями у него не было. Ньютон же замолчал и больше никогда ничего Гуку не писал (за исключением одного случая, когда он переслал Гуку просьбу одного итальянского врача, желающего сотрудничать с Королевским обществом, и, пользуясь случаем, поблагодарил за сведения об экспериментах с падающими шарами), о переписке с ним нигде не упоминал (хотя письма хранил) и о том, что Гук поставил перед ним задачу о тяготении, никому не говорил.

Но за задачу эту Ньютон взялся, исследовал закон движения, убедился, что действительно получаются эллиптические орбиты, доказал, что, и обратно, из закона Кеплера об эллиптичности орбит следует закон обратных квадратов. . . Для того, чтобы все это как следует оформить и изложить в доступном виде, ему потребовалось сформулировать основные принципы, относящиеся к общим понятиям, таким как масса, сила, ускорение. Так появились знаменитые «три закона Ньютона», на которые сам Ньютон, правда, не претендовал (первый закон — это всем давно и хорошо известный закон инерции Галилея, а остальные два никак не могли быть открыты позже чем, скажем, закон упругости Гука или формула Гюйгенса для центробежной силы). А вот в связи с законом всемирного тяготения Ньютон повел себя весьма неаккуратно. [6]

Я сейчас расскажу, как в математической физике появилось уравнение Лапласа. Его появление на свет вызвано совсем нетривиальным ходом развития естественнонаучных идей. Неожиданный поворот мыслей Лапласа предопределил, как мне кажется, ряд важных соображений, следствием которых явились уравнения Максвелла для электромагнитного поля и, в настоящее время, уравнения полей, связанных с элементарными частицами.

Как известно, Кеплер, обрабатывая наблюдения Тихо Браге над движением планет, установил. . . три удивительных закона

<. . . >

1. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор от Солнца до планеты заметает равные площади в равные интервалы времени.
3. Квадраты времен обращения двух планет пропорциональны кубам больших полуосей их орбит.

Законы эти, хотя и красивые, но довольно сложные. В дальнейшем Ньютон нашел для этих законов более простое, хотя и не менее удивительное, выражение, называемое законом всемирного тяготения:

Между любыми двумя телами действует сила притяжения, прямо пропорциональная их массам и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними.

<. . . >

Очевидно, что отсюда. . . вытекает равенство. . . , которое и называется уравнением Лапласа. Таким образом, Лаплас предложил отказаться от явной формулы для сил дальнодействия и заменить ее на дифференциальное уравнение для поля потенциала u. Можно считать, что дифференциальное уравнение описывает взаимодействие между соседними элементами поля u. Таким образом, введение этого поля подменяет задачу о дальнодействии между реальными телами задачей о «близкодействующем» взаимодействии между соседними областями пространства, залитого некоторым, искусственно придуманным, полем величины u. Лапласу мы обязаны идеей введения уравнений для описания этого поля u, уравнений, которые действуют всюду вне тех точек, в которых сосредоточены сами притягивающие массы. [17]

Природа силовой функции U или потенциала V, вообще говоря, непонятна; в современной физике принято говорить в таких случаях о действии некоторого поля и о совершаемой им работе. Различные явления (гравитационные, электрические, магнитные и др.) порождаются различными полями, описание которых (но не объяснений!) возможно на языке дифференциальных уравнений. *Тодхантер* [54] изложил историю появления в механике понятия потенциала (§§ 779, 789) и названия потенциала (§ 790).

То, что тяготение вне шара или сферической оболочки с массой M можно заменить тяготением точки той же массы в центре шара или оболочки, известно со времён Ньютона. Доказательство основано на геометрических построениях. Пример такого доказательства можно найти во втором томе книги *Томсона* [55]. В книге *Арнольда* [6] приведено современное доказательство.

Как не существует определения массы (в аксиоматике классической механики это числовой параметр), так не существует определения электрического заряда, но законы, описывающие электрические явления и свойства , позволяют (как и в случае массы) ввести числовую меру заряда. Таковыми служат закон *Ку-*

лона, свойство заряда распределяться поровну между одинаковыми телами, а также существование двух видов заряда, которые принято различать по знаку (исторически — по способу получения и накопления, так называемое «кошачье» и «янтарное» []). Таким образом можно разделить заряд на достаточно малые части.

К разделу 1.5. на с. 25

Возникновение и развитие понятия корректности краевых задач математической физики рассмотрено в статье *Симонова* [47].

2. Канонический вид линейных уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными

2.0. $\Pi\rho o\lambda\varepsilon\gamma\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

> ...в настоящее время самым важным из методов, при помощи которых математик приносит своими работами наибольшую пользу исследователю природы, является систематическая классификация величин. [31]

> Вид дифференциальных уравнений в определенных рамках можно менять посредством различных преобразований зависимых и независимых переменных. Простейшие формы, достижимые с помощью неособых преобразований независимых переменных, принято называть каноническими. В этих формах накапливаются результаты теоретических исследований, ими же обычно удобно пользоваться и при практическом решении задач. [10]

Помимо уравнений *Лапласа* (**??**), теплопроводности (**??**) и колебаний (**??**), существуют другие линейные уравнения математической физики второго порядка, различающиеся количеством производных первого и второго порядков, а также видом коэффициентов перед производными, тем не менее, решения таких уравнений обладают свойствами, сходными со свойствами решений уравнений (**??**), (**??**) и (**??**), что позволяет включать уравнения в соответствующие классификационные единицы. В данном разделе мы рассмотрим одну из таких классификаций по типам (*эллиптические*, *параболические* и *гиперболические*) для уравнений от двух независимых переменных, основанную на преобразовании независимых переменных $(x, y) \leftrightarrow (\xi, \eta)$. Классификация по типам возможна и для уравнений от трёх независимых переменных, однако способ отнесения к типам для таких уравнений имеет мало общего со способом, рассмотренным в данном разделе.

Из соображений удобства и единообразия записи уравнений будем обозначать независимые переменные как x, y, то есть как декартовые ортогональные координаты на плоскости (полагая, что x, y изменяются в пределах области $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$), тогда уравнения (**??**), (**??**) и (**??**) примут следующий вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\,.$$

Для того, чтобы сделать освоение классификации по типам независимым от предыдущего раздела, приведём определения дифференциальных уравнений в частных производных первого и второго порядков, включая различные виды линейных уравнений (квазилинейные, линейные с переменными и постоянными коэффициентами).

2.1. Основные определения

Определение 2.1. Соотношение вида

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0\,, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}\,, \tag{2.1}$$

где все производные функции F по двум последним аргументам не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$, называется дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка относительно функции $u(x, y)$. □

Определение 2.2. Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $u(x, y)$ (2.1) называется *линейным относительно производных* или *квазилинейным*, если оно имеет вид

$$a_1\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\,(x, y, u)\,\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_1\,(x, y, u)\,, \tag{2.2}$$

где коэффициенты a_1, a_2 при производных и член Φ_1 суть функции одних и тех же переменных, причём все коэффициенты a_1, a_2 не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$. □

Определение 2.3. Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $u(x, y)$ (2.1) называется *линейным* (*с переменными коэффициентами*), если оно имеет вид

$$a_1(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2(x, y)\,\frac{\partial u}{\partial y} + a_\star(x, y)\,u = g(x, y)\,, \tag{2.3}$$

где коэффициенты уравнения a_1, a_2, $a_\star$ и свободный член g (ещё — функция правой части или просто правая часть (уравнения)) суть функции одних и тех же переменных, причём все коэффициенты a_1, a_2 не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$. □

Определение 2.4. Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка относительно функции $u(x, y)$ (2.1) называется *линейным с постоянными коэффициентами*, если оно имеет вид

$$a_1\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial u}{\partial y} + a_\star u = g(x, y)\,, \tag{2.4}$$

где коэффициенты уравнения a_1, a_2, $a_\star$ суть постоянные, а функция $g(x, y)$ определена в области $\mathcal{D}$. □

Иногда будем записывать линейные дифференциальные уравнения с переменными (2.3) или с постоянными (2.4) коэффициентами подобно линейному дифференциальному уравнению (2.2)

$$a_1\,\frac{\partial u}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial u}{\partial y} = \Phi_1\,, \tag{2.5}$$

где функция Φ_1 такова

$$\Phi_1\,(x, y, u) = g(x, y) - a_\star u\,, \tag{2.6}$$

а коэффициенты a_1, a_2, $a_\star$ суть функции независимых переменных $(x, y) \in \mathcal{D}$ или постоянные.

Определение 2.5. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка (с переменными (2.3) или постоянными (2.4) коэффициентами) называется *однородным*, если $g(x, y) \equiv 0$. □

Определение 2.6. Соотношение вида

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y}\right) = 0\,, \qquad (x, y) \in \mathcal{D}\,, \tag{2.7}$$

где все производные функции F по трём последним аргументам не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$, называется дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка относительно функции $u(x, y)$. □

Определение 2.7. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $u(x, y)$ (2.7) называется *линейным относительно старших производных*, или *квазилинейным*, если оно имеет вид

$$a_{1,1}\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}\Big(\ldots\Big) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}\Big(\ldots\Big) \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} = \Phi_2\Big(\ldots\Big)\,, \tag{2.8}$$

где коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ при вторых производных и член Φ_2 суть функции одних и тех же переменных, причём все коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$. □

Определение 2.8. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $u(x, y)$ (2.7) называется *линейным* (*с переменными коэффициентами*), если оно имеет вид

$$a_{1,1}(x, y)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}(.)\, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{2,2}(.)\, \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + a_1(.)\, \frac{\partial u}{\partial x} + a_2(.)\, \frac{\partial u}{\partial y} + a_\star(.)\, u = g(.)\,, \tag{2.9}$$

где коэффициенты уравнения $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, a_1, a_2, $a_\star$ и свободный член g (ещё — функция правой части или просто правая часть (уравнения)) суть функции одних и тех же переменных, причём все коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ не обращаются в нуль ни в одной точке области $\mathcal{D}$. □

Определение 2.9. Дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка относительно функции $u(x,y)$ (2.7) называется *линейным с постоянными коэффициентами*, если оно имеет вид

$$a_{1,1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}+2a_{1,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{2,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y}+a_1\,\frac{\partial u}{\partial x}+a_2\,\frac{\partial u}{\partial y}+a_\star u=g(x,y)\,, \tag{2.10}$$

где коэффициенты уравнения $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, a_1, a_2, $a_\star$ суть постоянные, а функция $g(x,y)$ определена в области $\mathcal{D}$ (см. пояснение 2.1 на с. 61). □

Иногда будем записывать линейные дифференциальное уравнение с переменными (2.9) или постоянными (2.10) коэффициентами подобно линейному относительно старших производных дифференциальному уравнению (2.8)

$$a_{1,1}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x}+2a_{1,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{2,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y}=\Phi_2\,, \tag{2.11}$$

где функция Φ_2 такова

$$\Phi_2\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=g(x,y)-a_\star u-a_1\,\frac{\partial u}{\partial x}-a_2\,\frac{\partial u}{\partial y}\,, \tag{2.12}$$

а коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$, a_1, a_2, $a_\star$ суть функции независимых переменных $(x,y)\in\mathcal{D}$ или постоянные.

Определение 2.10. Линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (с переменными (2.9) или постоянными (2.10) коэффициентами) называется *однородным*, если $g(x,y)\equiv 0$. □

2.2. Общее преобразование независимых переменных

Сделаем в окрестности $\mathcal{O}(x_0,y_0)\subset\mathcal{D}$ произвольной точки (x_0,y_0) непрерывно дифференцируемое преобразование независимых переменных

$$\begin{cases}\xi=\phi(x,y)\,,\\ \eta=\psi(x,y)\,,\end{cases}\qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,. \tag{2.13}$$

Теорема 2.1. *Пусть*: 1) функции $\xi=\phi(x,y)$ и $\eta=\psi(x,y)$ (2.13) задают (*прямое*) непрерывно дифференцируемое отображение $\mathcal{O}(x_0,y_0)\to\mathcal{O}(\xi_0,\eta_0)$; 2) якобиан (прямого) отображения отличен от нуля или бесконечности в $\mathcal{O}(x_0,y_0)$

$$J(x,y)=\left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial x} & \dfrac{\partial\phi}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial x} & \dfrac{\partial\psi}{\partial y}\end{vmatrix}\,,\qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,, \tag{2.14}$$

тогда существует задаваемое функциями

$$\begin{cases} x = p(\xi,\eta)\,, \\ y = q(\xi,\eta)\,, \end{cases} \qquad (\xi,\eta) \in \mathcal{O}(\xi_0,\eta_0)\,, \tag{2.15}$$

обратное непрерывно дифференцируемое отображение $\mathcal{O}(\xi_0,\eta_0) \to \mathcal{O}(x_0,y_0)$. □

Замечание 2.1. *Пусть* посылки теоремы 2.1 выполнены, *тогда* якобиан обратного отображения $\mathcal{O}(\xi_0,\eta_0) \to \mathcal{O}(x_0,y_0)$ отличен от нуля или бесконечности в $\mathcal{O}(\xi_0,\eta_0)$

$$I(\xi,\eta) = \left|\frac{\partial(p,q)}{\partial(\xi,\eta)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial \xi} & \dfrac{\partial p}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial q}{\partial \xi} & \dfrac{\partial q}{\partial \eta} \end{vmatrix}\,, \qquad (\xi,\eta) \in \mathcal{O}(\xi',\eta')\,, \tag{2.16}$$

поскольку $J(x,y)\,I(\xi,\eta) \equiv 1$ (см. пояснение 2.2 на с. 61). □

Пример 2.1. Пусть задано *обратное* преобразование независимых переменных $(\xi,\eta) = (r,\varphi) \to (x,y)$, известных как полярные координаты на плоскости,

$$\begin{cases} x = p(r,\varphi) = r\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ y = q(r,\varphi) = r\,\mathtt{sin}\,\varphi\,, \end{cases} \qquad r \in [0,c]\,, \quad \varphi \in [0,2\pi)\,, \tag{2.17}$$

$$\begin{cases} r = \phi(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \varphi = \psi(x,y) = \mathtt{arctg}\,\dfrac{y}{x} = \mathtt{arcctg}\,\dfrac{x}{y}\,, \end{cases} \qquad 0 < x^2+y^2 \leqslant c\,. \tag{2.18}$$

Вычислим якобианы преобразований

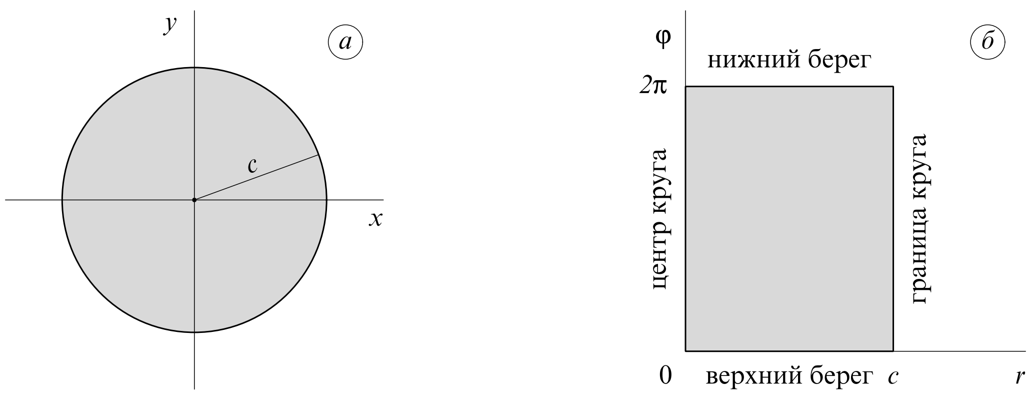

Рис. 2.1. Круг радиуса c с центром в начале прямоугольной декартовой системы координат (x,y) плоскости $\mathbb{R}^2$ отображается на прямоугольную область полярной системы координат (центр круга отображается на левую сторону прямоугольника, это особая точка отображения (2.18)) (*б*)

$$I(r,\varphi) = \left|\frac{\partial(p,q)}{\partial(r,\phi)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial p}{\partial r} & \dfrac{\partial p}{\partial \phi} \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial r} & \dfrac{\partial q}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & +r\cos\phi \end{vmatrix} = r\,. \tag{2.19}$$

$$J(x,y) = \left|\frac{\partial(\phi,\psi)}{\partial(x,y)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{\partial \phi}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial \psi}{\partial x} & \dfrac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\[2ex] -\dfrac{y}{x^2+y^2} & +\dfrac{x}{x^2+y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,, \tag{2.20}$$

В особой точке якобиан $J = \infty$, а якобиан $I = 0$, но всегда $JI = 1$. ▲

Пусть дважды непрерывно дифференцируемая в области $\mathcal{D}$ функция $u(x,y)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению (2.11), (2.12). Выразим производные функции $u(x,y)$ первого и второго порядков по переменным x,y в $\mathcal{O}(x_0,y_0)$ через производные функции $v(\xi,\eta) := u(p(\xi,\eta),q(\xi,\eta))$ по переменным ξ,η в $\mathcal{O}(\xi_0,\eta_0)$ (при дифференцировании применяем обратную замену переменных, то есть $u(x,y) := v(\phi(x,y),\psi(x,y)))$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_{1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_{1}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\,,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \\
&= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \xi}}_{1,1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}}_{1,2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}}_{2,1}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \eta}}_{2,2}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_{1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial x}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = \\
&= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \xi}}_{1,1}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}}_{1,2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial x} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}}_{2,1}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \eta}}_{2,2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_{1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x\partial y}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right) = \\
&= \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \xi}}_{1,1}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\partial \eta}}_{1,2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \xi}{\partial y} + \left(\underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \xi}}_{2,1}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial \eta\partial \eta}}_{2,2}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\frac{\partial \eta}{\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \xi}}_{1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y\partial y} + \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \eta}}_{2}\frac{\partial^2 \eta}{\partial y\partial y}\,.
\end{aligned}$$

Подставим полученные выражения для производных первого и второго порядков в дифференциальное уравнение (2.11), (2.12), проведём группировку членов с одинаковыми вторыми производными (обозначены парами индексов $_{1,1}$, $_{1,2}$, $_{2,1}$ и $_{2,2}$), учитывая при этом, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции вторые смешанные производные равны, и запишем дифференциальное уравнение в независимых переменных ξ,η

$$b_{1,1}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\xi}+2\,b_{1,2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta}+b_{2,2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\eta}=\Psi_2\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right), \tag{2.21}$$

где

$$\begin{cases} b_{1,1}=a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right)+a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,, \\ b_{1,2}=a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,, \\ b_{2,2}=a_{1,1}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}+a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}+\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right)+a_{2,2}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,, \end{cases} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}\Psi_2=g-a_\star v-a_1\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)-a_2\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)-\\ -a_{1,1}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x}\right)-2a_{1,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right)-a_{2,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y}+\frac{\partial v}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y}\right).\end{aligned} \tag{2.23}$$

С помощью дифференциальных операторов

$$\begin{cases} R\,[\varphi,\omega]=a_{1,1}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial x}+a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial y}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial x}\right)+a_{2,2}\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\omega}{\partial y}\,, \\ S\,[\varphi]\qquad=a_{1,1}\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial x}+2a_{1,2}\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+a_{2,2}\,\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial y}+a_1\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}+a_2\,\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\,, \end{cases} \tag{2.24}$$

коэффициенты (2.22) и функция (2.23) допускают краткую запись

$$b_{1,1}=R\,[\phi,\phi]\,,\quad b_{1,2}=R\,[\phi,\psi]\,,\quad b_{2,2}=R\,[\psi,\psi]\,, \tag{2.25}$$

$$\Psi_2=g-a_\star v-S\,[\phi]\,\frac{\partial v}{\partial\xi}-S\,[\psi]\,\frac{\partial v}{\partial\eta}\,. \tag{2.26}$$

Приведение дифференциального уравнения (2.11), (2.12) к виду (2.21) подразумевает зависимость коэффициентов (2.22) и функции (2.23) от переменных ξ,η, в силу существования обратного преобразования (2.15), которое не всегда имеет явное представление.

2.3. Приведение к каноническому виду

Поставим задачу упрощения преобразованного уравнения (2.21), (2.22), (2.23) как задачу обращения в нуль одного или двух его коэффициентов, например, коэффициента $b_{1,1}$. Для этого за независимую переменную $\xi=\phi(x,y)$ выберем решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка

$$R\,[\phi,\phi] = a_{1,1}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0\,, \qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,. \tag{2.27}$$

Решая задачу обращения в нуль коэффициента $b_{2,2}$, получим такое же уравнение относительно функции $\psi(x,y)$

$$R\,[\psi,\psi] = a_{1,1}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0\,, \qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,. \tag{2.28}$$

Существует связь между нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка вида (2.27), (2.28), и соответствующим обыкновенным уравнением. Эту связь указывает следующее

Утверждение 2.1. Для того, чтобы решением нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка

$$a_{1,1}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,\frac{\partial z}{\partial y} = 0\,, \qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,, \tag{2.29}$$

была функция $z=\omega(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{1,1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y - 2\,a_{1,2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + a_{2,2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = 0\,, \qquad (x,y)\in\mathcal{O}(x_0,y_0)\,, \tag{2.30}$$

имело 1-параметрическое семейство решений $\omega(x,y) = C$. $\square$

Доказательство. Начнём с обоснования *необходимости* утверждения. Итак, пусть функция $z=\omega(x,y)$ есть решение уравнения в частных производных (2.29). Запишем тождество $\omega(x,y) - C = 0$, которое будем рассматривать как неявную функцию $y=y(x)$, тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\omega(x,y(x)) - C\Big) = \frac{\partial\omega}{\partial x} + \frac{\partial\omega}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x} = -\frac{\partial\omega}{\partial y}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} \neq 0\,, \tag{2.31}$$

или как неявную функцию $x = x(y)$, тогда

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\Big(\omega(x(y),y) - C\Big) = \frac{\partial\omega}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\partial\omega}{\partial y} = 0\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial y} = -\frac{\partial\omega}{\partial x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,, \qquad \frac{\partial\omega}{\partial x} \neq 0\,. \tag{2.32}$$

Теперь подставим полученные выражения для частной производной функции $\omega(x,y)$ по x в дифференциальное уравнение в частных производных (2.29). В первом случае будем иметь обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{1,1}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2\,a_{1,2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + a_{2,2} = 0\,, \tag{2.33}$$

а во втором — обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a_{2,2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 - 2\,a_{1,2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) + a_{1,1} = 0\,. \qquad (2.34)$$

Оба обыкновенных дифференциальных уравнения приводимы к симметричной форме (2.30). Это означает, что *необходимость* утверждения доказана.

Перейдем к обоснованию *достаточности* утверждения. Итак, пусть 1-параметрическим семейством решений обыкновенного дифференциального уравнения (2.30) есть тождество $\omega(x, y) - C = 0$. Тогда в произвольной точке окрестности $\mathcal{O}(x_0, y_0)$ это тождество определяет неявную функцию $y = y(x)$ или неявную функцию $x = y(y)$. Тогда для дифференциала зависимой переменной, согласно (2.31), имеем выражение

$$\mathrm{d}y = -\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^{-1}\mathrm{d}x\,,$$

а согласно (2.32) — выражение

$$\mathrm{d}x = -\frac{\partial\phi}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{-1}\mathrm{d}y\,.$$

Подставим найденные выражения для $\mathrm{d}y$ и для $\mathrm{d}x$ в обыкновенное дифференциальное уравнение (2.30), откуда сразу же получим дифференциальное уравнение в частных производных (2.29). Это означает, что *достаточность* утверждения доказана. ■

Определение 2.11. *Характеристиками* линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.11), (2.12), называются 1-параметрические семейства решений обыкновенного дифференциального уравнения (2.30) (или, что то же самое, обыкновенных дифференциальных уравнений (2.33) или (2.34)); сами дифференциальные уравнения (2.30), (2.33) и (2.34) называются *уравнениями характеристик.* □

Определение 2.12. Величина

$$D(x, y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} \qquad (2.35)$$

называется *дискриминантом* линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.11), (2.12). □

Пусть $a_{1,1} \neq 0$, тогда можем решить уравнение характеристик (2.33) относительно производной

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_{1,2} \mp \sqrt{D}}{a_{1,1}}\,, \qquad (2.36)$$

пусть $a_{2,2} \neq 0$, тогда можем решить уравнение характеристик (2.34) относительно производной

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{a_{1,2} \mp \sqrt{D}}{a_{2,2}}\,, \tag{2.37}$$

и отнесём линейное дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка (2.11), (2.12) к одному из трёх типов, в зависимости от знака дискриминанта D (2.35) (см. табл. 2.1).

Табл. 2.1. Тип линейного дифференциального уравнения
в частных производных второго порядка (2.11), (2.12)

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$	число и тип характеристик	тип уравнения
$D > 0$	две действительные	гиперболический
$D = 0$	одна действительная	параболический
$D < 0$	две комплексно-сопряжённые	эллиптический

Утверждение 2.2. При невырожденном преобразовании (2.13), (2.15) независимых переменных, дискриминанты уравнений в исходных и новых независимых переменных связаны равенствами

$$\begin{cases} D(x,y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1}\,a_{2,2} = \; I^2(\xi,\eta)\left(b_{12}^2 - b_{11}\,b_{22}\right) \; = \; I^2(\xi,\eta)\,E(\xi,\eta)\,, \\ E(\xi,\eta) = b_{1,2}^2 - b_{1,1}\,b_{2,2} = J^2(x,y)\left(a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}\right) = J^2(x,y)\,D(x,y)\,, \end{cases} \tag{2.38}$$

где J (2.14), I (2.16) — соответственно якобианы прямого (2.13) и обратного (2.15) преобразований. $\square$

Доказательство. Вычислим дискриминант уравнения (2.21) в новых независимых переменных ξ, η

$$\begin{aligned} E(\xi,\eta) \equiv b_{1,2}^2 - b_{1,1}\,b_{2,2} = &\left[a_{1,1}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] \times \\ \times &\left[a_{1,1}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] - \\ - &\left[a_{1,1}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\,\frac{\partial\phi}{\partial y}\right] \times \\ \times &\left[a_{1,1}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\,\frac{\partial\psi}{\partial y}\right], \end{aligned}$$

откуда сразу же получим второе равенство (2.38)

$$E(\xi,\eta) = \ldots = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \left(a_{1,2}^2 - a_{1,1}\,a_{2,2}\right) \equiv J^2(x,y)\,D(x,y)\,.$$

Первое равенство (2.38) может быть доказано подобным образом. ■

Утверждение 2.3. При невырожденном преобразовании (2.13), (2.15) независимых переменных тип линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка (2.11), (2.12) не меняется. □

Доказательство основано на равенствах (2.38), из которых следует, что при невырожденном преобразовании независимых переменных знак дискриминанта, который положен в основу выделения типов линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка, согласно табл. 2.1, не меняется. ■

В *области гиперболичности* $D > 0$, поэтому уравнение (2.30) имеет два действительных 1-параметрических семейства решений $\phi(x,y) = C_1$ и $\psi(x,y) = C_2$. В силу утверждения 2.1, имеем $R[\phi,\phi] = 0$ (2.27) и $R[\psi,\psi] = 0$ (2.28). Следовательно, если ввести новые независимые переменные $\xi = \phi(x,y)$ и $\eta = \psi(x,y)$, то получим $b_{1,1}(\xi,\eta) \equiv 0$, $b_{2,2}(\xi,\eta) \equiv 0$. Это значит, что от старших членов уравнения (2.21), (2.22) останется только вторая смешанная производная

$$2\,b_{1,2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \Psi_2\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right).$$

Разделив обе части последнего уравнения на $2\,b_{1,2}(\xi,\eta) \neq 0$ приведём уравнение к *первому каноническому виду* в области гиперболичности

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \Psi'_H\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right), \qquad \Psi'_H = \frac{\Psi_2}{2\,b_{1,2}}\,. \tag{2.39}$$

Введём ещё одну пару независимых переменных (α,σ)

$$\begin{cases} \xi = \alpha + \sigma\,, \\ \eta = \alpha - \sigma\,, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\,(\xi + \eta)\,, \\ \sigma = \dfrac{1}{2}\,(\xi - \eta)\,, \end{cases} \tag{2.40}$$

и соответствующую зависимую $w(\alpha,\sigma) := v\left(\xi(\alpha,\sigma),\eta(\alpha,\sigma)\right)$, тогда для производных функции $v(\xi,\eta) = w\left(\alpha(\xi,\eta),\sigma(\xi,\eta)\right)$ получим следующие выражения

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right),$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right) = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)\frac{\partial \sigma}{\partial \eta} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \alpha} + \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \alpha} - \frac{\partial^2 w}{\partial \alpha \partial \sigma} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma \partial \sigma}\right] = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2}\right).$$

После подстановки выражения для смешанной производной функции $v(\xi, \eta)$ в первый канонический вид (2.39) уравнения в области гиперболичности получим *второй канонический вид* уравнения в области гиперболичности

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} = \Psi_H''\left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right), \tag{2.41}$$

где

$$\Psi_H''\left(\alpha, \sigma, w, \frac{\partial w}{\partial \alpha}, \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right) =$$

$$= 4\Psi_H'\left[\xi(\alpha,\sigma), \eta(\alpha,\sigma), v\left(\xi(\alpha,\sigma), \eta(\alpha,\sigma)\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \sigma}\right)\right].$$

В *области параболичности* $D = 0$, поэтому уравнение (2.30) имеет одно действительное 1-параметрическое решение $\phi(x, y) = C$, с помощью которого можно обратить в нуль только один из двух коэффициентов $b_{1,1}$, $b_{2,2}$ (2.22); пусть для определённости: $b_{1,1} = 0$, $b_{2,2} \neq 0$. Тогда, в силу утверждение 2.2, имеем $b_{1,2} = 0$, поскольку $b_{1,2}^2 - b_{1,1}b_{2,2} = 0$. Если ввести новую независимую переменную $\xi = \phi(x, y)$, а вторую независимую переменную $\eta = \psi(x, y)$ выбрать так, чтобы якобиан J (2.14) был отличен от нуля, то задача упрощения уравнения в области параболичности будет решена. Действительно, после обращения в нуль коэффициентов $b_{1,1}$ и $b_{1,2}$, уравнение принимает вид

$$b_{2,2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi_2\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

и после деления его обеих частей на $b_{22} \neq 0$ получим *канонический вид* в области параболичности

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Psi_P\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right), \qquad \Psi_P = \frac{\Psi_2}{b_{2,2}}. \tag{2.42}$$

В области *эллиптичности* $D < 0$, поэтому правые части уравнений (2.36), (2.37) и соответствующие 1-параметрические семейства решений суть комплексно сопряжённые

$$\begin{cases} \phi(x,y) = C\,, \\ \bar{\phi}(x,y) = \psi(x,y) = \bar{C}\,. \end{cases}$$

Если ввести *комплексные* независимые переменные

$$\begin{cases} \xi = \phi(x,y)\,, \\ \eta = \bar{\phi}(x,y)\,, \end{cases}$$

то уравнение (2.21) можно привести к такому же виду, что и в области гиперболичности

$$2\,b_{12}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = \Psi_2\left(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial\xi},\frac{\partial v}{\partial\eta}\right).$$

Получим каноническую форму в области эллиптичности, введя *действительные* независимые переменные α, σ

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\sigma\,, \\ \eta = \alpha - i\sigma\,, \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{1}{2}\,(\xi+\eta)\,, \\ \sigma = \dfrac{1}{2i}\,(\xi-\eta)\,. \end{cases} \tag{2.43}$$

Далее найдём входящие в выражения для коэффициентов $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,2}$ (2.22) производные комплексных независимых переменных ξ, η через производные действительных независимых переменных α, σ по исходным независимым переменным x и y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,, & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - i\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,, \end{cases}$$

образуем произведения найденных производных

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} - \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} - i\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,, \end{cases}$$

и подставим их в выражения для коэффициентов $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, $b_{2,2}$ (2.25)

$$\begin{cases} b_{1,1} = R\,[\alpha,\alpha] - R\,[\sigma,\sigma] + 2i\,R\,[\alpha,\sigma] = 0\,, \\ b_{1,2} = R\,[\alpha,\alpha] + R\,[\sigma,\sigma] \qquad\qquad\quad \neq 0\,, \\ b_{2,2} = R\,[\alpha,\alpha] - R\,[\sigma,\sigma] - 2i\,R\,[\alpha,\sigma] = 0\,. \end{cases}$$

Из полученных выражений и комплексной сопряженности коэффициентов $b_{1,1}$ и $b_{2,2}$ следует, что равны нулю действительная и мнимая части последних

$$R\,[\alpha,\alpha] = R\,[\sigma,\sigma] \neq 0\,, \qquad R[\alpha,\sigma] = 0\,. \tag{2.44}$$

Отсюда заключаем, что при введении действительных независимых переменных α и σ дифференциальное уравнение (2.21) принимает вид

$$c_{1,1}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + c_{2,2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2} = \Omega_2\left(\alpha,\sigma,w,\frac{\partial w}{\partial\alpha},\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right), \tag{2.45}$$

где $w(\alpha,\sigma) := u\,\big(x(\alpha,\sigma), y(\alpha,\sigma)\big)$, а коэффициенты и правая часть таковы

$$c_{1,1} = R\,[\alpha,\alpha], \quad c_{1,2} = R\,[\alpha,\sigma], \quad c_{2,2} = R\,[\sigma,\sigma], \quad \Omega_2 = g - a_\star w - S[\alpha]\,\frac{\partial w}{\partial\alpha} - S[\sigma]\,\frac{\partial w}{\partial\sigma}\cdot \tag{2.46}$$

Разделив левую и правую части дифференциального уравнения (2.46) на коэффициенты $c_{1,1} = c_{2,2} \neq 0$, получим *канонический вид* дифференциальное уравнения в области эллиптичности, записанный в действительных независимых переменных

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2} = \Omega_E\left(\alpha,\sigma,w,\frac{\partial w}{\partial\alpha},\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right), \qquad \Omega_E = \frac{\Omega_2}{c_{11}} = \frac{\Omega_2}{c_{22}}\,\cdot \tag{2.47}$$

2.4. Алгоритм приведения к каноническому виду

Подведём итог приведения линейного уравнения в частных производных второго порядка от двух независимых переменных

$$a_{1,1}(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + a_{2,2}(x,y)\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y} = \Phi_2\,, \tag{2.48}$$

где функция Φ_2 такова

$$\Phi_2 = g(x,y) - a_\star(x,y)\,u - a_1(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial x} - a_2(x,y)\,\frac{\partial u}{\partial y}\,, \tag{2.49}$$

к каноническому виду, составив следующий алгоритм.

1. Выписать коэффициенты уравнения (2.48), (2.49), то есть $a_{1,1}(x,y)$, $a_{1,2}(x,y)$, $a_{2,2}(x,y)$, $a_1(x,y)$, $a_2(x,y)$, $a_*(x,y)$.

2. Составить выражение для дискриминанта $D(x,y) = a_{1,2}^2(x,y) - a_{1,1}(x,y)\,a_{2,2}(x,y)$ и найти области в плоскости переменных (x,y), в которых:

а) $D(x,y) > 0$ (область гиперболичности);

б) $D(x,y) = 0$ (область параболичности);

в) $D(x,y) < 0$ (область эллиптичности).

3. Составить дифференциальное уравнение (в обыкновенных производных) характеристик одного из таких видов:

а) относительно производной $y'(x)$

$$a_{1,1}(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2a_{1,2}(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) + a_{2,2}(x,y) = 0\,; \tag{2.50}$$

б) относительно производной $x'(y)$

$$a_{1,1}(x,y) - 2a_{1,2}(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right) + a_{2,2}(x,y)\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2 = 0\,; \tag{2.51}$$

4. Решить уравнение характеристик относительно производной, как квадратное, например, для уравнения (2.50) будут получены два решения в областях гиперболичности (действительные) и эллиптичности (комплексно сопряжённые) уравнения (2.48), (2.49)

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_\mp = \frac{a_{1,2}(x,y) \mp \sqrt{D(x,y)}}{a_{1,1}(x,y)} \tag{2.52}$$

и одно решение в области параболичности

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_\mp = \frac{a_{1,2}(x,y)}{a_{1,1}(x,y)}\,; \tag{2.53}$$

5. Решить полученные обыкновенные дифференциальные уравнения, то есть найти:

а) два 1-параметрических семейства решений в областях гиперболичности и эллиптичности уравнения (2.48), (2.49)

$$\begin{cases} \phi_1(x,y) = C_1\,, \\ \psi_1(x,y) = C_2\,; \end{cases} \tag{2.54}$$

б) одно 1-параметрическое семейство решений $\phi_1(x,y)=C_1$ в области параболичности уравнения (2.48), (2.49), дополнив найденное семейство таким 1-параметрическим семейством $\psi_1(x,y)=C_2$, чтобы было выполнено условие невырожденности преобразования;

6. Ввести новые независимые переменные

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y)\,, \\ \eta = \psi_1(x,y)\,, \end{cases} \tag{2.55}$$

после чего:

а) в областях гиперболичности и параболичности уравнения (2.48), (2.49) найти производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,, \qquad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}\,, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y}\,, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,, \qquad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\,, \quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y}\,, \end{cases} \tag{2.56}$$

и записать уравнение (2.48), (2.49) в каноническом виде

$$b_{1,1}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\xi} + 2\,b_{1,2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} + b_{2,2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial\eta\partial\eta} = \Psi_2\,, \tag{2.57}$$

где

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,, \\ b_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,, \\ b_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,, \end{cases} \tag{2.58}$$

$$\begin{gathered} \Psi_2 = g - a_* v - a_1\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) - a_2\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right) - \\ - a_{1,1}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x}\right) - 2a_{1,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}\right) - a_{2,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y}\right), \end{gathered} \tag{2.59}$$

либо так (первые производные выделены из всех слагаемых (2.59) и множители перед ними собраны вместе, как коэффициенты c_1, c_2)

$$\Psi_2 = g - a_* v - b_1\,\frac{\partial v}{\partial\xi} - b_2\,\frac{\partial v}{\partial\eta}\,, \tag{2.60}$$

где

$$
\begin{aligned}
b_1 = S[\phi_1] &= a_{1,1}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} + a_1\,\frac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial\xi}{\partial y}\,,\\
b_2 = S[\psi_1] &= a_{1,1}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y} + a_1\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial\eta}{\partial y}\,;
\end{aligned}
\tag{2.61}
$$

б) в области эллиптичности уравнения (2.48), (2.49) ещё раз ввести новые независимые переменные

$$
\begin{cases}
\alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2} = \dfrac{\phi_1(x,y)+\psi_1(x,y)}{2} \equiv \phi_2(x,y)\,,\\[2ex]
\sigma = \dfrac{\xi-\eta}{2i} = \dfrac{\phi_1(x,y)-\psi_1(x,y)}{2i} \equiv \psi_2(x,y)\,,
\end{cases}
\tag{2.62}
$$

найти производные

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,, \qquad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y}\,,\\[2ex]
\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,, \qquad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x}\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y}\,,
\end{cases}
\tag{2.63}
$$

и записать уравнение (2.48), (2.49) в каноническом виде

$$
c_{1,1}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\alpha} + 2\,c_{1,2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha\partial\sigma} + c_{2,2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma\partial\sigma} = \Omega_2\,,
\tag{2.64}
$$

где

$$
\begin{cases}
c_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,,\\[2ex]
c_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,,\\[2ex]
c_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,,
\end{cases}
\tag{2.65}
$$

а функция Ω_2 может быть записана либо так (слагаемые, включающие первые производные в новых независимых переменных, преобразованы «одной пачкой», поэтому каждая из таких производных присутствует пять раз)

$$\Omega_2 = g - a_* w - a_1\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial x}\right) - a_2\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial y}\right) -$$
$$- a_{1,1}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x}\right) - 2a_{1,2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y}\right) - a_{2,2}\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y} + \frac{\partial w}{\partial \sigma}\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y}\right), \tag{2.66}$$

либо так (первые производные выделены из всех слагаемых (2.66) и множители перед ними собраны вместе, как коэффициенты c_1, c_2)

$$\Omega_2 = g - a_* w - c_1\,\frac{\partial w}{\partial \alpha} - c_2\,\frac{\partial w}{\partial \sigma}\,, \tag{2.67}$$

где упомянутые коэффициенты таковы

$$\begin{aligned} c_1 = S[\phi_2] &= a_{1,1}\,\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial y} + a_1\,\frac{\partial \alpha}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,, \\ c_2 = S[\psi_2] &= a_{1,1}\,\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial x} + 2a_{1,2}\,\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x \partial y} + a_{2,2}\,\frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial y} + a_1\,\frac{\partial \sigma}{\partial x} + a_2\,\frac{\partial \sigma}{\partial y}\,. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Сделаем некоторые пояснения к алгоритму.

1. Если уравнение (2.48), (2.49) есть однородное, то оно останется таким и после приведения к каноническому виду, то же верно и в отношении члена (производной) нулевого порядка $a_\star u \to a_* v$ (никакая замена переменных не может уничтожить или породить этот член уравнения); члены с первыми производными могут порождаться или уничтожаться вследствие замены независимых переменных.

2. Из общей теории приведения уравнений к каноническому виду однозначно следует, что после пребразования независимых переменных коэффициенты при вторых производных уравнения: *а*) *гиперболического* типа (2.57) суть $b_{1,1} = b_{2,2} = 0$, $b_{1,2} \neq 0$ (первый канонический вид) или $b_{1,1} + b_{2,2} = 0$, $b_{1,2} = 0$ (второй канонический вид); *б*) *эллиптического* типа (2.64) суть $c_{1,1} = c_{2,2} \neq 0$, $c_{1,2} = 0$, тем не менее, для проверки правильности введения новых независимых переменных, следует вычислить все коэффициенты при вторых производных.

3. Формулы преобразования уравнений к каноническому виду (в новых независимых переменных) дают выражения для коэффициентов в исходных независимых переменных x, y, поэтому везде, где это возможно, следует выполнить явную замену независимых переменных вида

$$\begin{cases} x = p(\xi, \eta)\,, \\ y = q(\xi, \eta)\,, \end{cases} \tag{2.69}$$

или вида

$$\begin{cases} x = r(\alpha, \sigma)\,, \\ y = s(\alpha, \sigma)\,, \end{cases} \tag{2.70}$$

которые суть следствия обращения зависимостей (2.55) или (2.62).

2.5. Примеры приведения к каноническому виду

Пример 2.2. Для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.71}$$

найдём области, в которых уравнение сохраняет тип, и в каждой такой области приведём уравнение к каноническому виду.

1. Коэффициенты при вторых производных линейного однородного уравнения (2.71) суть $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 0$, $a_{2,2} = y$; первые производные и функция u отсутствуют, поэтому коэффициенты при них тождественно равны нулю: $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_\star = 0$; правая часть g также есть тождественно равная нулю функция.

2. По известным коэффициентам вычислим дискриминант $D = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = -y$. Следовательно, на плоскости переменных (x, y) существуют две области, в которых уравнение сохраняет тип: I) $y > 0$ (область *эллиптичности*, $D < 0$); II) $y < 0$ (область *гиперболичности*, $D > 0$). На прямой $y = 0$ имеем $D = 0$, но говорить о параболическом типе уравнения мы не можем, поскольку прямая на плоскости не является областью. В таких случаях говорят, что на прямой $y = 0$, разделяющей области эллиптичности и гиперболичности, уравнение *вырождается*.

3. Уравнение характеристик получим подстановкой в общее уравнение (2.30) коэффициентов $a_{1,1}$, $a_{1,2}$, $a_{2,2}$ уравнения (2.71)

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = -y\,. \tag{2.72}$$

I. Перейдём к рассмотрению области *эллиптичности*.

4. Уравнение характеристик (2.72) здесь распадается на две комплексные ветви с разделяющимися переменными

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\mp} = \mp i\sqrt{y}\,.$$

5. Разделим переменные в обеих комплексных ветвях

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}} = \mp i\,\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}y = \mp i\,\mathrm{d}x$$

и найдём непосредственным интегрированием соответствующие ветвям 1-параметрические комплексно сопряжённые семейства решений

$$\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \mp ix + C_{\mp} \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\sqrt{y} = \mp ix + C_{\mp}\,.$$

6. Запишем переменные x, y в этих семействах в левой части и введём новые комплексные независимые переменные

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x, y) = 2\sqrt{y} + ix\,, \\ \eta = \psi_1(x, y) = 2\sqrt{y} - ix\,, \end{cases} \tag{2.73}$$

и, в соответствии с правилом введения новых действительных независимых переменных (2.43), положим для последних

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2} = 2\sqrt{y} = \phi_2(x,y)\,, \\ \sigma = \dfrac{\xi-\eta}{2i} = \quad\; x = \psi_2(x,y)\,. \end{cases} \tag{2.74}$$

Теперь найдём первые и вторые производные переменных α, σ (2.74) по переменным x, y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{y}}\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y} = -\dfrac{1}{2y\sqrt{y}}\,, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = 1\,, \quad \dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y} = 0\,. \end{cases}$$

Далее вычислим коэффициенты (2.65) при вторых производных по переменным α, σ

$$\begin{cases} c_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 1\,, \\ c_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 0\,, \\ c_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 1\,, \end{cases}$$

и функцию (2.66)

$$-\Omega_2 = a_{1,1}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\underbrace{\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x}}_{0} + \frac{\partial w}{\partial\sigma}\underbrace{\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x}}_{0}\right) + 2a_{1,2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\underbrace{\frac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y}}_{0} + \frac{\partial w}{\partial\sigma}\underbrace{\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y}}_{0}\right) + a_{2,2}\left(\frac{\partial w}{\partial\alpha}\underbrace{\frac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y}}_{\neq 0} + \frac{\partial w}{\partial\sigma}\underbrace{\frac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y}}_{0}\right) =$$

$$= a_{2,2}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha}\,\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} = y\left(-\frac{1}{2}\,y^{-3/2}\right)\frac{\partial w}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{y}{y\sqrt{y}}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{y}}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha} \overset{(2.74)}{=} -\frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha}\,.$$

Следовательно, канонический вид уравнения (2.71) в области *эллиптичности* таков

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2} = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\partial w}{\partial\alpha}\,. \tag{2.75}$$

II. Перейдём к рассмотрению области *гиперболичности.*

4. Уравнение характеристик (2.72) здесь расщепляется на две действительные ветви с разделяющимися переменными

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\mp} = \mp\sqrt{-y}\,.$$

5. Разделим переменные в обеих действительных ветвях

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{-y}} = \mp\mathrm{d}x \qquad \Leftrightarrow \qquad -(-y)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}(-y) = \mp\mathrm{d}x$$

и найдём непосредственным интегрированием соответствующие ветвям 1-параметрические семейства решений

$$-\frac{(-y)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \mp x + C_{\mp} \qquad \Leftrightarrow \qquad -2\sqrt{-y} = \mp x + C_{\mp}\,.$$

6. Запишем переменные x, y в этих семействах в правой части, введём новые независимые переменные

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = 2\sqrt{-y} - x\,, \\ \eta = \psi_1(x,y) = 2\sqrt{-y} + x\,, \end{cases} \tag{2.76}$$

а затем найдём первые и вторые производные переменных ξ, η (2.76) по переменным x, y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} = -1\,, \quad \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{-y}}\,, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} = \dfrac{1}{2y\sqrt{-y}}\,, \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} = +1\,, \quad \dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{1}{\sqrt{-y}}\,, \quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y} = \dfrac{1}{2y\sqrt{-y}}\,. \end{cases}$$

Далее вычислим коэффициенты (2.58) при вторых производных функции v по переменным ξ, η

$$\begin{cases} b_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = 0\,, \\ b_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = 2\,, \\ b_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = 0\,, \end{cases}$$

и функцию (2.59)

$$-\Psi_2 = a_{1,1}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\underbrace{\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x}}_{0} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\underbrace{\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x}}_{0}\right) + 2a_{1,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\underbrace{\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}}_{0} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\underbrace{\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}}_{0}\right) + a_{2,2}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi}\underbrace{\frac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y}}_{\neq 0} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\underbrace{\frac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y}}_{\neq 0}\right) =$$

$$= \frac{y}{2y\sqrt{-y}}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\right) \overset{(2.76)}{=} \frac{2}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\right),$$

откуда следует первый канонический вид уравнения (2.71) в *области гиперболичности*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\xi+\eta}\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} + \frac{\partial v}{\partial\eta}\right). \tag{2.77}$$

Итак, уравнение (2.71) имеет канонический вид (2.75) в области эллиптичности ($y > 0$) и первый канонический вид (2.77) в *области гиперболичности* ($y<0$), а на прямой линии $y=0$ происходит параболическое вырождение (см. задачу 2.8 на с. 60). ▲

Пример 2.3. Для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x} - 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial y} = 0 \tag{2.78}$$

найдём области, в которых уравнение сохраняет тип, и в каждой такой области приведём уравнение к каноническому виду.

1. Коэффициенты линейного однородного уравнения (2.78) суть $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = -1$, $a_{2,2} = 2$, $a_1 = 0$, $a_2=0$, $a_\star=0$, функция правой части $g = 0$.

2. Поскольку дискриминант $D = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = (-1)^2 - 1\cdot 2 = -1 < 0$, то приходим к заключению об *эллиптичности* уравнения на всей плоскости переменных (x, y).

3. Составим уравнение характеристик в виде квадратного уравнения

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2 = 0\,.$$

4. Решим уравнение характеристик относительно производной в виде двух комплексно сопряжённых ветвей

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\mp} = -1 \mp i\,.$$

5. Разделим переменные в найденных ветвях

$$\mathrm{d}y = (-1 \mp i)\,\mathrm{d}x$$

и после интегрирования найдём два 1-параметрических комплексно-сопряжённых семейства

$$y = (-1 \mp i)\,x + C_{\mp}.$$

6. Запишем переменные x, y в этих семействах в левой части и введём последовательно новые комплексные независимые переменные ξ, η, а затем новые действительные переменные α, σ

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = x + y + ix\,, \\ \eta = \psi_1(x,y) = x + y - ix\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \dfrac{\xi+\eta}{2} = x + y = \phi_2(x,y)\,, \\ \sigma = \dfrac{\xi-\eta}{2i} = x \qquad = \psi_2(x,y)\,. \end{cases} \tag{2.79}$$

Найдём первые и вторые производные переменных α, σ (2.79) по переменным x, y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} = 1\,, \quad \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 1\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y} = 0\,, \\ \dfrac{\partial\sigma}{\partial x} = 1\,, \quad \dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y} = 0\,. \end{cases} \tag{2.80}$$

Далее вычислим коэффициенты (2.65) при вторых производных функции w по переменным α, σ

$$\begin{cases} c_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y} = 1\,, \\ c_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\alpha}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\alpha}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 0\,, \\ c_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} + \dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y}\,\dfrac{\partial\sigma}{\partial y} = 1\,, \end{cases}$$

коэффициенты (2.68) при первых производных функции w по переменным α, σ

$$\begin{cases} c_1 = a_{1,1}\,\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\dfrac{\partial^2\alpha}{\partial y\partial y} = 0\,, \\ c_2 = a_{1,1}\,\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\dfrac{\partial^2\sigma}{\partial y\partial y} = 0\,, \end{cases}$$

и функцию (2.67)

$$\Omega_2 = -c_1\,\frac{\partial u}{\partial\alpha} - c_2\,\frac{\partial u}{\partial\sigma} = 0\,.$$

Следовательно, канонический вид уравнения (2.78)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \sigma^2} = 0 \tag{2.81}$$

совпадает с уравнением *Лапласа.* ▲

Пример 2.4. Для дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2x\,\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - 2\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.82}$$

найдём области, в которых уравнение сохраняет тип, и в каждой такой области приведём уравнение к каноническому виду.

1. Коэффициенты уравнения (2.82) суть $a_{1,1}=1$, $a_{1,2} = -x$, $a_{2,2} = x^2$, $a_1=0$, $a_2= -2$, $a_\star = 0$, а функция правой части $g = 0$ (коэффициенты и правая часть определены на всей плоскости).

2. Из выражения для дискриминанта $D(x,y) = a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} = x^2 - x^2 \equiv 0$ заключаем о *параболичности* уравнения во всей его области определения.

3. Составим уравнение характеристик

$$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y + 2x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{2.83}$$

которое перепишем в виде квадратного уравнения относительно производной y по x

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + 2x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 = 0\,.$$

4. Решим уравнение относительно производной (квадратное уравнение имеет один корень кратности два) в виде одной действительной ветви

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{\mp} = -x\,.$$

5. Разделим переменные в полученном дифференциальном уравнении

$$\mathrm{d}y = -x\,\mathrm{d}x$$

и после интегрирования найдём 1-параметрическое семейство, при записи которого поместим переменные x, y в левой части

$$x^2 + 2y = C_1\,. \tag{2.84}$$

6. 1-параметрическое семейство решений (2.84) уравнения характеристик позволяет ввести одну новую независимую переменную, например $\xi=\phi(x,y)$, а другую переменную, соответственно $\eta=\psi(x,y)$, введём так, чтобы преобразование от (x,y) к (ξ,η) было невырожденным. Геометрически это означает, что 1-параметрические семейства линий $\phi(x,y) = C_1$ и $\psi(x,y) = C_2$ пересекаются, но не касаются друг друга.

Геометрическое истолкование невырожденности преобразования $(x,y) \leftrightarrow (\xi,\eta)$ упрощает подбор подходящих функций $\psi(x,y)$. Например, преобразование

$$\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = x^2 + 2y\,, \\ \eta = \psi_1(x,y) = \qquad\quad y\,, \end{cases} \qquad J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2x\,, \tag{2.85}$$

оказывается вырожденным (рис. 2.2, *а*), поскольку линии обоих семейств $\xi = \texttt{const}$ и $\eta = \texttt{const}$ касаются в точках оси ординат. Напротив, преобразование

$$
\begin{cases} \xi = \phi_1(x,y) = x^2 + 2y\,, \\ \eta = \psi_1(x,y) = x\,, \end{cases} \qquad J(x,y) = \begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0\,, \tag{2.86}
$$

оказывается невырожденным (рис. 2.2, *б*), поскольку линии обоих семейств $\xi = \mathtt{const}$ и $\eta = \mathtt{const}$ пересекаются, но нигде не касаются. Следовательно, данное преобразование вводит новые независимые переменные должным образом (см. задачу 2.9 на с. 60).

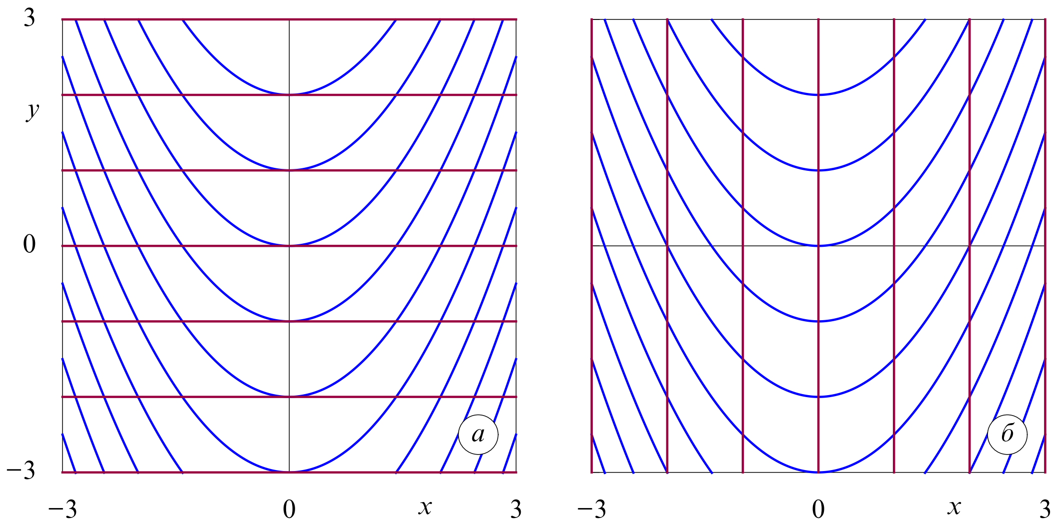

Рис. 2.2. Преобразование независимых переменных для уравнения (2.82) параболического типа в примере 2.4: первое семейство линий (синий цвет, *а*, *б*) образовано 1-параметрическим семейством решений (2.84) уравнения характеристик (2.83); второе семейство (коричневый цвет, *а*, *б*) может быть выбрано достаточно произвольно. Критерий отбора второго допустимого семейства состоит в том, что якобиан преобразования (2.14) на с. 36 принимает отличные от нуля или бесконечности значения. 1-параметрическое семейство $\psi(x,y) = y = C_2$ (2.85) не позволяет ввести всюду в плоскости (x,y) невырожденного преобразования, поскольку касается 1-параметрического семейства (2.84) в точках оси $x = 0$ (*а*) (якобиан здесь равен нулю). 1-параметрическое семейство $\psi(x,y) = x = C_2$ (2.86) (*б*) удовлетворяет критерию отбора

Найдём первые и вторые производные переменных ξ, η (2.86) по переменным x, y

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = 2x\,, & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 2\,, \quad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial x} = 2\,, \quad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial y \partial y} = 0\,, \\[2ex]
\dfrac{\partial \eta}{\partial x} = \ \ 1\,, & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial x} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} = 0\,, \quad \dfrac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial y} = 0\,.
\end{cases}
$$

Далее вычислим коэффициенты (2.61) при вторых производных функции v по переменным ξ, η

$$
\begin{cases}
b_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y} = 4x^2 - 2x\,4x + 4x^2 = 0\,, \\[2ex]
b_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial \xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial \xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 2x - 2x = 0\,, \\[2ex]
b_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial \eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y} + \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = 1\,,
\end{cases}
$$

коэффициенты (2.61) при первых производных функции v

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} + 2a_{12}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{22}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} + a_1\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = -1\cdot 2 - 2\cdot 2 = -2\,, \\[2ex] b_2 = a_{11}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x} + 2a_{12}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{22}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y} + a_1\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \qquad -2\cdot 0 = \quad 0\,, \end{cases}$$

и функцию (2.60)

$$\Psi_2 = -b_1\,\frac{\partial v}{\partial\xi} - b_2\,\frac{\partial v}{\partial\eta} = 2\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\cdot$$

Следовательно, можем записать канонический вид уравнения (2.82)

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\eta^2} = 2\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\,\cdot \tag{2.87}$$

Какое уравнение напоминает уравнение (2.87)? ▲

Пример 2.5. Для дифференциального уравнения

$$x^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y\,\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \tag{2.88}$$

найдём области, в которых уравнение сохраняет тип, и в каждой такой области приведём уравнение к каноническому виду.

1. Коэффициенты уравнения (2.88) суть $a_{11}=x^2$, $a_{12}=0$, $a_{22}=-y^2$, $a_1=0$, $a_2=-2y$, $a_\star=0$, а функция правой части $g=0$ (коэффициенты и правая часть определены на всей плоскости).

2. Выражение для дискриминанта $D = x^2y^2 \geqslant 0$ указывает на *гиперболический* тип уравнения во всей плоскости, кроме прямых $x=0$ и $y=0$ (то есть в четырёх квадрантах плоскости).

3. Составим уравнение характеристик

$$x^2\mathrm{d}y\,\mathrm{d}y - y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x = 0\,, \tag{2.89}$$

которое запишем в виде квадратного уравнения относительно производной y по x

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

4. Решим полученное уравнение относительно производной в виде двух действительных ветвей

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_\mp = \mp\frac{y}{x}\,\cdot$$

5. Разделим переменные в каждой из ветвей и проинтегрируем

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\,, \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}y}{y} = +\dfrac{\mathrm{d}x}{x}\,, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} xy = C_-\,, \\[2ex] \dfrac{y}{x} = C_+\,. \end{cases} \tag{2.90}$$

6. На основе двух 1-параметрических семейств решений (2.90) введём новые независимые переменные ξ, η

$$
\begin{cases}
\xi = \phi_1(x,y) = xy\,, \\
\eta = \psi_1(x,y) = \dfrac{y}{x}\,,
\end{cases}
\tag{2.91}
$$

и найдём первые и вторые производные переменных ξ, η по переменным x, y

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\xi}{\partial x} = y\,, & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} = x\,, & \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} = 0\,, & \dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} = 1\,, & \dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} = 0\,, \\
\dfrac{\partial\eta}{\partial x} = -\dfrac{y}{x^2}\,, & \dfrac{\partial\eta}{\partial y} = \dfrac{1}{x}\,, & \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x} = 2\,\dfrac{y}{x^3}\,, & \dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} = -\dfrac{1}{x^2}\,, & \dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y} = 0\,.
\end{cases}
$$

Далее вычислим коэффициенты (2.61) при вторых производных функции v по переменным ξ, η

$$
\begin{cases}
b_{1,1} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = x^2y^2 - y^2x^2 = 0\,, \\
b_{1,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\xi}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = x^2\,\dfrac{y^2}{x^4} - y^2\,\dfrac{1}{x^2} = -2y^2, \\
b_{2,2} = a_{1,1}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_{1,2}\left(\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} + \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x}\right) + a_{2,2}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y}\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = -x^2\,\dfrac{y^2}{x^2} - y^2 = 0\,,
\end{cases}
$$

коэффициенты (2.61) при первых производных функции v

$$
\begin{cases}
b_1 = a_{1,1}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\dfrac{\partial^2\xi}{\partial y\partial y} + a_1\,\dfrac{\partial\xi}{\partial x} + a_2\,\dfrac{\partial\xi}{\partial y} = -2xy\,, \\
b_2 = a_{1,1}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial x} + 2a_{1,2}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y} + a_{2,2}\,\dfrac{\partial^2\eta}{\partial y\partial y} + a_1\,\dfrac{\partial\eta}{\partial x} + a_2\,\dfrac{\partial\eta}{\partial y} = 2x^2\,\dfrac{y}{x^3} - y^2\,0 - 2y\,\dfrac{1}{x} = 0\,,
\end{cases}
$$

и функцию (2.60)

$$
\Psi_2 = -b_1\,\frac{\partial v}{\partial\xi} - b_2\,\frac{\partial v}{\partial\eta} = 2xy\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\,.
$$

Теперь запишем уравнение (2.88) в переменных ξ, η

$$
2\,(-2y^2)\,\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = 2xy\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\,,
$$

выполним очевидные сокращения в левой и правой частях

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{1}{2}\,\frac{x}{y}\,\frac{\partial v}{\partial\xi}
$$

и выразим отношение переменных x и y через переменную η (2.91)

$$
\frac{\partial^2 v}{\partial\xi\partial\eta} = -\frac{1}{2\eta}\,\frac{\partial v}{\partial\xi}\,.
\tag{2.92}
$$

Уравнение (2.92) есть окончательная запись первого канонического вида уравнения (2.88) (см. задачу 2.10 на с. 60). ▲

2.6. Задачи

Задача 2.1. Для линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами (2.9) найдите области, в которых уравнение сохраняет тип, и приведите уравнение к каноническому виду в каждой такой области:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 4\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\,u = 0\,;$

2) $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 6x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3\,u = 0\,;$

3) $x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} + 5\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 3\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 6\,u = 0\,;$

4) $x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 8xy\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 6\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 8\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2\,u = 0\,;$

5) $\mathtt{sign}\,y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \mathtt{sign}\,x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 3\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 5\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 7\,u = 0\,;$

6) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2\,\mathtt{cos}\,x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (4 - \mathtt{sin}^2 x)\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + 2\,\dfrac{\partial u}{\partial x} - 9\,\dfrac{\partial u}{\partial y} + 3\,u = 0\,;$

7) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} - 2x\sqrt{y}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - x^2 y\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + x\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} - y\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0\,;$

8) $\dfrac{1}{y^2}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial x} + 2\,\dfrac{x}{y}\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2\,\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = 0\,.$

Задача 2.2. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) гиперболического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных: $\xi = y + x$, $\eta = y - x$. Найдите коэффициент $a_{1,2}$.

Задача 2.3. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) гиперболического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных $\xi = y + x$, $\eta = y - x$. Каковы коэффициенты $a_{1,1}$, $a_{2,2}$?

Задача 2.4. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) гиперболического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных $\xi = y + x$, $\eta = y - x$. Найдите коэффициент $b_{1,2}$.

Задача 2.5. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) эллиптического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных $\alpha = y - x$, $\sigma = x$. Каков знак коэффициента $a_{1,1}$?

Задача 2.6. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) эллиптического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных $\alpha = y - x$, $\sigma = x$. Каков знак произведения $a_{1,1}\,a_{2,2}$?

Задача 2.7. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами (2.10) эллиптического типа приведено к каноническому виду следующим преобразованием независимых переменных $\alpha = y - x$, $\sigma = x$. Выразите дискриминант D через один из коэффициентов уравнения.

Задача 2.8. Для уравнения (2.71) в примере 2.2 на с. 51 получите второй канонический вид уравнения.

Задача 2.9. Предложите несколько 1-параметрических семейств функций двух переменных $\psi(x, y) = C_2$, дополняющих 1-параметрическое семейство $\phi(x, y) = C_1$ (2.84) в примере 2.4 на с. 55 до невырожденного преобразования независимых переменных $\xi = \phi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ при приведении уравнения параболического типа (2.82) к каноническому виду и выпишите соответствующие канонические виды.

Задача 2.10. Для уравнения (2.88) в примере 2.5 на с. 57 получите второй канонический вид уравнения.

2.7. Пояснения

К разделу 2.1. на с. 34

Пояснение 2.1 к с. 36. Следует различать линейное уравнение с постоянными коэффициентами и линейное уравнение с постоянными коэффициентами a_{11}, a_{12}, a_{22} при старших производных. ▼

К разделу 2.2. на с. 36

Пояснение 2.2 к с. 37.

3. Метод разделения переменных

3.0. $\Pi\rho o\lambda\varepsilon\gamma\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

3.1. Введение в метод разделения переменных

Эффективным методом решения краевых задач (в областях, обладающих определенной симметрией) для уравнений Лапласа и Гельмгольца является метод разделения переменных. Общая идея метода заключается в нахождении множества решений однородного уравнения с частными производными, удовлетворяющих определенным граничным условиям. Эти решения являются теми «атомами», из которых строится «общее» решение на основе принципа линейной суперпозиции. Поскольку каждый из «атомов» — решение соответствующего однородного уравнения, то их линейная комбинация также есть решение этого же уравнения. [42]

Всем, кто хоть раз пытался решить какое-либо дифференциальное уравнение, известно, что такое разделение переменных. Обычно этот метод представляется как множество всяческих ловких приемов, лежащих на грани математики. [45]

Поясним содержание метода разделения переменных, взяв за основу вспомогательные краевые задачи для уравнений теплопроводности и колебаний. Пусть в некоторой области $\mathcal{D}$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$ заданы начальные условия для уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = a^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x})\,, & (t,\boldsymbol{x}) \in (0,T] \times \mathcal{D}\,, \\ u(0,\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})\,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\,, \end{cases} \tag{3.1}$$

и для уравнения колебаний

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} = a^2 \Delta u(t,\boldsymbol{x})\,, & (t,\boldsymbol{x}) \in (0,T] \times \mathcal{D}\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u(0,\boldsymbol{x})}{\partial t} &= u_1(\boldsymbol{x}) \\ u(0,\boldsymbol{x}) &= u_0(\boldsymbol{x}) \end{aligned}\right\}, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\,; \end{cases} \tag{3.2}$$

граничные условия для обоих уравнений пусть будут либо такие (однородные условия *Дирихле*)

$$u(t,\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \mathcal{S}\,, \tag{3.3}$$

либо такие (однородные условия *Неймана*)

$$\frac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0\,, \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T] \times \mathcal{S}\,, \tag{3.4}$$

где $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})$ — орт внешней нормали к границе $\mathcal{S}$.

Далее предположим, что решения краевых задач допускают представление в виде

$$u(t,\boldsymbol{x}) = O(t)\,v(\boldsymbol{x})\,, \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in [0,T]\times\mathcal{D}\,, \tag{3.5}$$

где $O(t)$, $v(\boldsymbol{x})$ — некоторые неизвестные пока функции только временно́й t и пространственных $\boldsymbol{x}$ переменных, и вычислим частные производные функции $u(t,\boldsymbol{x})$, входящие в постановки краевых задач, исходя из представления (3.5) (см. задачу **??** на с. 78):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = O'(t)\,v(\boldsymbol{x})\,, \\ \dfrac{\partial^2 u(t,\boldsymbol{x})}{\partial t^2} = O''(t)\,v(\boldsymbol{x})\,, \\ \Delta u(t,\boldsymbol{x}) = O(t)\,\Delta v(\boldsymbol{x})\,, \\ \dfrac{\partial u(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = O(t)\,\dfrac{\partial v(t,\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,. \end{cases} \tag{3.6}$$

Теперь подставим выражения (3.6) производных представления (3.5):

1) в уравнения краевых задач (то есть в уравнения теплопроводности и колебаний)

$$\begin{cases} O'(t)\,v(\boldsymbol{x}) = a^2\,O(t)\,\Delta v(\boldsymbol{x})\,, \\ O''(t)\,v(\boldsymbol{x}) = a^2\,O(t)\,\Delta v(\boldsymbol{x})\,, \end{cases} \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in (0,T]\times\mathcal{D}\,,$$

откуда заключим, что для функций $O(t)$ и $v(\boldsymbol{x})$ и их соотвествующих производных должны быть выполнены следующие тождества (при записи которых учтено, что функции $O(t)$ и $v(\boldsymbol{x})$ могут обращаться в нуль только в отдельных точках своих областей определения):

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{O'(t)}{O(t)} \equiv \dfrac{\Delta v(\boldsymbol{x})}{v(\boldsymbol{x})} \equiv \texttt{const}\,, \\ \dfrac{1}{a^2}\,\dfrac{O''(t)}{O(t)} \equiv \dfrac{\Delta v(\boldsymbol{x})}{v(\boldsymbol{x})} \equiv \texttt{const}\,, \end{cases} \qquad (t,\boldsymbol{x}) \in (0,T]\times\mathcal{D}\,; \tag{3.7}$$

2) в граничные условия (3.3) и (3.4) краевых задач, откуда заключим, что для функции $v(\boldsymbol{x})$ выполнено либо однородное условие *Дирихле*

$$v(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\,, \tag{3.8}$$

либо однородное условие *Неймана*

$$\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\,. \tag{3.9}$$

Теперь обратимся к полученным выше тождествам (3.7) (на всякий случай уточним, что равенства (3.7) выполнены при всех значениях $t \in (0,T]$ и $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, что означает тождественность по t и $\boldsymbol{x}$) и обозначим постоянные через $-\lambda$ (так просто удобно), где λ —

параметр разделения (переменных). Тогда левые части тождеств примут вид линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами соответственно первого и второго порядков

$$\begin{cases} O'(t) + \lambda a^2 O(t) = 0\,, & t \in (0,T]\,, \\ O''(t) + \lambda a^2 O(t) = 0\,, & t \in (0,T]\,, \end{cases} \tag{3.10}$$

а правые части — вид линейного однородного уравнения в частных производных второго порядка

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) + \lambda\, v(\boldsymbol{x}) = 0\,. \tag{3.11}$$

Дифференциальные уравнения (3.10) и (3.11) относительно функций $O(t)$ и $v(\boldsymbol{x})$ включают неопределённое значение параметра разделения λ. Это означает, что следует увязать разыскание функций $O(t)$ и $v(\boldsymbol{x})$ и допустимых значений параметра λ.

Найдём соответствующие обыкновенным дифференциальным уравнениям (3.10) семейства решений (или, применяя несколько устаревшее название, *общие решения*):

а) 1-параметрическое для первого уравнения (3.10)

$$O(t) = A\,\mathsf{e}^{-\lambda a^2 t}\,, \quad \lambda \in \boldsymbol{x}\,, \qquad t \in [0,T]\,; \tag{3.12}$$

б) 2-параметрические для второго уравнения (3.10)

$$\begin{cases} O(t) = B_1\,\mathsf{e}^{-\sqrt{-\lambda}at} + C_1\,\mathsf{e}^{+\sqrt{-\lambda}at}\,, & \lambda < 0\,, \\ O(t) = B_2\,t + C_2\,, & \lambda = 0\,, \\ O(t) = B_3 \cos\left(\sqrt{\lambda}at\right) + C_3 \sin\left(\sqrt{\lambda}at\right), & \lambda > 0\,. \end{cases} \quad t \in (0,T]\,. \tag{3.13}$$

Семейства (3.12), (3.13) включают неограниченно возрастающие функции, если $\lambda < 0$, поэтому допустимые значения параметра суть неотрицательные.

Мы пока не умеем находить «общие» решения или решать граничные задачи для дифференциального уравнения (3.11), однако с помощью этого уравнения также можно указать множество, которому принадлежат допустимые значения параметра разделения.

В самом деле, умножим уравнение (3.11) на функцию $v(\boldsymbol{x})$

$$v(\boldsymbol{x})\left(\Delta v(\boldsymbol{x}) + \lambda\, v(\boldsymbol{x})\right) = v(\boldsymbol{x})\,\Delta v(\boldsymbol{x}) + \lambda\, v^2(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\,,$$

и проинтегрируем обе части полученного тождества по области $\mathcal{D}$

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} v(\boldsymbol{x})\,\Delta v(\boldsymbol{x})\;\mathrm{d}\mathcal{D} + \lambda \iiint\limits_{\mathcal{D}} v^2(\boldsymbol{x})\;\mathrm{d}\mathcal{D} = 0\,. \tag{3.14}$$

Далее запишем для функции $v(\boldsymbol{x})$ первую формулу *Грина* (7.95) на с. 228 и учтём что выполнено одно из двух граничных условий (3.8), (3.9), тогда первая формула *Грина* примет такой упрощённый вид

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \Big[\big(\nabla v(\boldsymbol{x})\big)^2 + v(\boldsymbol{r})\,\Delta v(\boldsymbol{x})\Big]\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \underbrace{v(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}}_{\equiv\,0}\,\mathrm{d}\mathcal{S} = 0\,, \tag{3.15}$$

из которого следует неожиданный вывод о том, что интегралы по области $\mathcal{D}$ в левой части (3.15) суть знакоопределённые, а именно

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} v(\boldsymbol{x})\,\Delta v(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} = -\iiint\limits_{\mathcal{D}} \big(\nabla v(\boldsymbol{x})\big)^2\,\mathrm{d}\mathcal{D}\,.$$

Заменим первое интегральное слагаемое в (3.14) с помощью последнего равенства

$$\lambda \iiint\limits_{\mathcal{D}} v^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \big(\nabla v(\boldsymbol{x})\big)^2\,\mathrm{d}\mathcal{D}\,,$$

откуда получим неравенство для допустимых значений параметра (см. задачу 3.2 на с. 78)

$$\lambda = \frac{\displaystyle\iiint\limits_{\mathcal{D}} \big(\nabla v(\boldsymbol{x})\big)^2\,\mathrm{d}\mathcal{D}}{\displaystyle\iiint\limits_{\mathcal{D}} v^2(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D}} \geqslant 0\,, \tag{3.16}$$

ранее полученное с помощью семейств решений (3.12), (3.13) дифференциальных уравнений (3.10). Нулевое значение параметра разделения допустимо для граничного условия *Неймана* (3.9), тогда решением уравнения Гельмгольца будет тождественно постоянная функция $v(\boldsymbol{x}) \equiv \texttt{const}$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D} + \mathcal{S}$ (постоянная C в этом случае оказывается неопределённой, то есть может принимать любые действительные значения).

Неожиданный вывод, который нам предстоит сделать далее, состоит в том, что с помощью граничных задач для дифференциального уравнения (3.11), называемого уравнением *Гельмгольца*, соответственно с условием *Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta v(\boldsymbol{x}) + \lambda\, v(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\,,\\ v(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\,, \end{cases} \tag{3.17}$$

и условием *Неймана*

$$\begin{cases} \Delta v(\boldsymbol{x}) + \lambda\, v(\boldsymbol{x}) = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}\,,\\ \dfrac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0\,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S}\,, \end{cases} \tag{3.18}$$

могут быть найдены все допустимые значения параметра разделения, причём множество этих значений счётно и неграничено сверху. Допустимые значения параметра λ называются *собственными значениями* граничных задач, а соответствующие решения $v_\lambda(\boldsymbol{x})$ задач — их *собственными функциями*. Граничные задачи (3.17), (3.18) называются задачами

Штурма – Лиувилля или граничными задачами на собственные значения и собственные функции для оператора *Лапласа* (см. пояснение 3.1 на с. 80).

Заметим, что если значение параметра известно (тогда это уже не параметр, а коэффициент), уравнение *Гельмгольца* (3.11) записывают так

$$\Delta v(\boldsymbol{x}) + k^2 v(\boldsymbol{x}) = 0\,, \tag{3.19}$$

чтобы явно указать знак коэффициента перед вторым слагаемым (см. пояснение).

Разделение переменных и системы координат

3.2. Разделение переменных в декартовых переменных

3.2.1. Задача *Штурма – Лиувилля* на отрезке

Определение 3.1. Граничная задача *Штурма – Лиувилля* на отрезке $[0, \ell]$ заключается в нахождении (см. пояснение 3.2 на с. 80):

1) ненулевых (нетривиальных) 1-параметрических решений $X_\lambda(x) \in \mathbb{R}$ линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка на интервале $(0, \ell)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0\,; \tag{3.20}$$

удовлетворяющих нулевым (однородным) граничным условиям на концах отрезка

$$\begin{cases} \alpha_0\, X(0) + \sigma_0\, X'(0) = 0\,, & \alpha_0^2 + \sigma_0^2 > 0\,, \\ \alpha_\ell\, X(\ell) + \sigma_\ell\, X'(\ell) = 0\,, & \alpha_\ell^2 + \sigma_\ell^2 > 0\,; \end{cases} \tag{3.21}$$

2) значений параметра $\lambda \in \mathbb{R}$, при которых такие решения существуют. Решения $X_\lambda(x)$ называются *собственными функциями* задачи *Штурма – Лиувилля* (3.20), (3.21), а соответствующие им значения параметра λ — *собственными значениями* задачи. $\square$

Мы ограничимся рассмотрением четырёх наборов граничных условий задачи (3.20), (3.21), приведённых во втором и третьем столбцах табл. 3.1.

Покажем, что можно указать область допустимых значений параметра λ (но не самые значения), не решая задачу *Штурма – Лиувилля* (тем же способом, который был применён в разделе 3.1.). Действительно, умножим уравнение задачи (3.20) на собственную функцию $X_\lambda(x)$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \ell]$, выполняя интегрирование по частям и учитывая граничные условия, приведённые в табл. 3.1.

$$\int\limits_0^\ell X(x)\left(X''(x) + \lambda X(x)\right) \mathrm{d}x = \int\limits_0^\ell X(x)\, X''(x)\, \mathrm{d}x + \lambda \int\limits_0^\ell X^2(x)\, \mathrm{d}x =$$

$$= X(x)\, X'(x)\,\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell X'^2(x)\, \mathrm{d}x + \lambda \int\limits_0^\ell X^2(x)\, \mathrm{d}x = -\int\limits_0^\ell X'^2(x)\, \mathrm{d}x + \lambda \int\limits_0^\ell X^2(x)\, \mathrm{d}x = 0\,.$$

Табл. 3.1. Собственные значения λ_μ и собственные функции $X_\mu(x)$ задачи (3.20), (3.21)

Задача	$x=0$	$x=\ell$	λ_μ	X_μ
SL_1 $\mu=1,2,3,\ldots$	$X(0)=0$	$X(\ell)=0$	$\left(\dfrac{\pi\mu}{\ell}\right)^2$	$\sin\left(\dfrac{\pi\mu x}{\ell}\right)$
SL_2 $\mu=0,1,2,\ldots$	$X'(0)=0$	$X'(\ell)=0$	$\left(\dfrac{\pi\mu}{\ell}\right)^2$	$\cos\left(\dfrac{\pi\mu x}{\ell}\right)$
SL_3 $\mu=1,2,3,\ldots$	$X(0)=0$	$X'(\ell)=0$	$\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2$	$\sin\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\right)$
SL_4 $\mu=1,2,3,\ldots$	$X'(0)=0$	$X(\ell)=0$	$\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2$	$\cos\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\right)$

Тогда из последнего равенства получим следующее неравенство для λ

$$\lambda = \frac{\displaystyle\int_0^\ell X_\lambda'^{\,2}(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^\ell X_\lambda^2(x)\,\mathrm{d}x} \geqslant 0\,. \tag{3.22}$$

Значению параметра $\lambda=0$ соответствует уравнение $X''(x)=0$, 2-параметрическое семейство решений которого найдём двукратным интегрированием

$$X(x) = A_1 + A_2\,x\,. \tag{3.23}$$

Подстановка граничных условий в общее решение (3.23) даёт тривиальное решение $X_0(x)\equiv 0$ (такое решение не учитываем) для задач SL_1, SL_3, SL_4, и решение $X_0(x)=A_1$ для задачи SL_2, где A_1 — произвольная постоянная (при $A_1=0$ получим решение, которое не учитываем).

2-параметрическое семейство решений уравнения (3.20) (второго порядка, однородного и линейного, с постоянным коэффициентом) при $\lambda>0$ построим методом *Эйлера*, образуя линейные комбинации частных решений вида $\mathrm{e}^{\kappa_1 x}$ и $\mathrm{e}^{\kappa_2 x}$

$$X(x) = A_1\,\mathrm{e}^{\kappa_1 x} + A_2\,\mathrm{e}^{\kappa_2 x}, \tag{3.24}$$

где $\kappa_{1,\,2} = \mp i\sqrt{\lambda}$ суть корни *характеристического уравнения* $\kappa^2+\lambda=0$. Поскольку

$$
\begin{aligned}
X'(x) &= \kappa_1 A_1 \,\mathrm{e}^{\kappa_1 x} + \kappa_2 A_2 \,\mathrm{e}^{\kappa_2 x}\,,\\
X''(x) &= \kappa_1^2 A_1 \,\mathrm{e}^{\kappa_1 x} + \kappa_2^2 A_2 \,\mathrm{e}^{\kappa_2 x} = -\lambda\, X(x)\,,
\end{aligned}
$$

то семейство функций (3.24) удовлетворяет уравнению (3.20).

Теперь запишем семейство (3.25) в таком виде

$$
X(x) = +A_1 \,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x} + A_2 \,\mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}x}\,, \tag{3.25}
$$

найдём производную семейства

$$
X'(x) = -i\sqrt{\lambda}\, A_1 \,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x} + i\sqrt{\lambda}\, A_2 \,\mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}x} = i\sqrt{\lambda}\left(-A_1 \,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}x} + A_2 \,\mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}x}\right)
$$

и составим системы линейных алгебраических однородных уравнений относительно неопределённых коэффициентов A_1 и A_2 согласованием семейства с каждым из четырёх наборов граничных условий

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{SL}_1 : \begin{cases} +\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} A_2 = 0\,,\\ +\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_2 = 0\,, \end{cases}
&&\mathrm{SL}_2 : \begin{cases} -\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} A_2 = 0\,,\\ -\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_2 = 0\,, \end{cases}\\
&\mathrm{SL}_3 : \begin{cases} +\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} A_2 = 0\,,\\ -\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_2 = 0\,, \end{cases}
&&\mathrm{SL}_4 : \begin{cases} -\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} A_2 = 0\,,\\ +\,\mathrm{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_1 + \mathrm{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} A_2 = 0\,, \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

где вместо показательной функции мнимого аргумента следует подставить соответствующее выражение по формуле *Эйлера*

$$
\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi\,. \tag{3.27}
$$

Ненулевые решения ($A_1^2 + A_2^2 \neq 0$) каждой из четырёх систем линейных однородных уравнений (3.26) существуют только при выполнении следующих необходимых условий

$$\mathrm{SL}_1: \quad \begin{vmatrix} +\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} \\ +\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} \end{vmatrix} = +2\,i\,\mathtt{sin}\,(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\ell = \mu\pi, \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\mathrm{SL}_2: \quad \begin{vmatrix} -\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} \\ -\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} \end{vmatrix} = -2\,i\,\mathtt{sin}\,(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\ell = \mu\pi, \qquad \mu = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$\mathrm{SL}_3: \quad \begin{vmatrix} +\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} \\ -\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} \end{vmatrix} = +2\ \mathtt{cos}\,(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\ell = \frac{\pi}{2} + \mu\pi, \ \ \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\mathrm{SL}_4: \quad \begin{vmatrix} -\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,0} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,0} \\ +\mathtt{e}^{-i\sqrt{\lambda}\,\ell} & +\mathtt{e}^{+i\sqrt{\lambda}\,\ell} \end{vmatrix} = -2\ \mathtt{cos}\,(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,\ell = \frac{\pi}{2} + \mu\pi, \ \ \mu = 0, 1, 2, \ldots,$$

которые дают искомые собственные значения задачи *Штурма – Лиувилля*, помещённые в четвёртом столбце табл. 3.1, причем счётный индекс μ для задач SL_3 и SL_4 сдвинут так, чтобы $\mu \in \mathbb{N}$.

Теперь перейдём к построению собственных функций (3.25) задачи *Штурма – Лиувилля*, то есть нахождению коэффициентов A_1, A_2. Поскольку системы линейных уравнений (3.26) суть вырожденные, один из двух коэффициентов линейно выразим через другой, а при выборе значения последнего учтём, что собственные функции $X_\mu(x)$ задачи *Штурма – Лиувилля* обычно применяют как базис для построения решений дифференциальных уравнений в обыкновенных и частных производных, поэтому будем добиваться простоты выражений для собственных функций (3.25).

В задаче SL_1 имеем $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\mu\pi}{\ell}$, тогда для собственных функций получим

$$X_\mu(x) = A_1\,\mathtt{e}^{-i\frac{\mu\pi x}{\ell}} + A_2\,\mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi x}{\ell}} = (A_1 + A_2)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{\ell} + i\,(A_2 - A_1)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{3.28}$$

где коэффициенты A_1 и A_2 должны быть найдены из соответствующей вырожденной системы уравнений (3.26)

$$\begin{cases} + \qquad\qquad A_1 + \qquad\qquad A_2 = 0\,, \\ +\,\mathtt{cos}\,\mu\pi\,A_1 + \mathtt{cos}\,\mu\pi\,A_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.29}$$

Выразив из (3.29) $A_2 = -A_1$, перепишем (3.28)

$$X_\mu(x) = -2iA_1\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{3.30}$$

Поскольку выбор коэффициента A_1 открыт, выберем $2iA_1 = -1$ и получим собственные функции задачи SL_1 в таком виде

$$X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{3.31}$$

В задаче SL_2 имеем $\sqrt{\lambda} = \dfrac{\mu\pi}{\ell}$, тогда для собственных функций $X_\mu(x)$ получим то же выражение (3.28), что и в задаче SL_1, в котором коэффициенты A_1 и A_2 должны быть найдены из соответствующей вырожденной системы уравнений (3.26)

$$\begin{cases} - \qquad\qquad A_1 + \qquad\qquad A_2 = 0\,, \\ -\,\mathtt{cos}\,\mu\pi\, A_1 + \mathtt{cos}\,\mu\pi\, A_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.32}$$

Выразив из (3.32) $A_2 = A_1$, перепишем (3.32)

$$X_\mu(x) = 2A_1\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{3.33}$$

Выберем $2A_1 = 1$ и получим собственные функции задачи SL_2 в таком виде

$$X_\mu(x) = \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{3.34}$$

В задаче SL_3 имеем $\sqrt{\lambda} = \dfrac{(2\mu-1)\,\pi}{2\ell}$, тогда для собственных функций получим

$$X_\mu(x) = (A_1 + A_2)\,\mathtt{cos}\,\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell} + i\,(A_2 - A_1)\,\mathtt{sin}\,\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,, \tag{3.35}$$

где коэффициенты A_1 и A_2 должны быть найдены из соответствующей вырожденной системы уравнений (3.26)

$$\begin{cases} + \qquad\qquad\qquad A_1 + \qquad\qquad\qquad A_2 = 0\,, \\ +\,i\,\mathtt{sin}\,\dfrac{(2\mu-1)\,\pi}{2\ell}\,A_1 + i\,\mathtt{sin}\,\dfrac{(2\mu-1)\,\pi}{2\ell}\,A_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.36}$$

Выразив из (3.36) $A_2 = -A_1$, перепишем (3.35)

$$X_\mu(x) = -2iA_1\,\mathtt{sin}\,\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,. \tag{3.37}$$

Выберем $2iA_1 = -1$ и получим собственные функции задачи SL_3 в таком виде

$$X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,. \tag{3.38}$$

В задаче SL_4 имеем $\sqrt{\lambda} = \dfrac{(2\mu-1)\,\pi}{2\ell}$, тогда для собственных функций $X_\mu(x)$ получим то же выражение (3.35), что и в задаче SL_3, в котором коэффициенты A_1 и A_2 должны быть найдены из соответствующей вырожденной системы уравнений (3.26)

$$\begin{cases} - \phantom{i \sin \frac{(2\mu-1)\pi}{2\ell}} A_1 + \phantom{i \sin \frac{(2\mu-1)\pi}{2\ell}} A_2 = 0\,, \\ - i \,\mathtt{sin}\, \dfrac{(2\mu - 1)\,\pi}{2\ell}\, A_1 + i \,\mathtt{sin}\, \dfrac{(2\mu - 1)\,\pi}{2\ell}\, A_2 = 0\,. \end{cases} \tag{3.39}$$

Выразив из (3.39) $A_2 = A_1$, перепишем (3.35)

$$X_\mu(x) = 2A_1 \,\mathtt{cos}\, \frac{(2\mu - 1)\,\pi x}{2\ell}\,. \tag{3.40}$$

Выберем $2A_1 = 1$ и получим собственные функции задачи SL_4 в таком виде

$$X_\mu(x) = \mathtt{cos}\, \frac{(2\mu - 1)\,\pi x}{2\ell}\,. \tag{3.41}$$

Собственные функции задачи *Штурма – Лиувилля* для каждого из четырёх наборов граничных условий помещены в пятом столбце табл. 3.1 и показаны на рис. 3.1, 3.2.

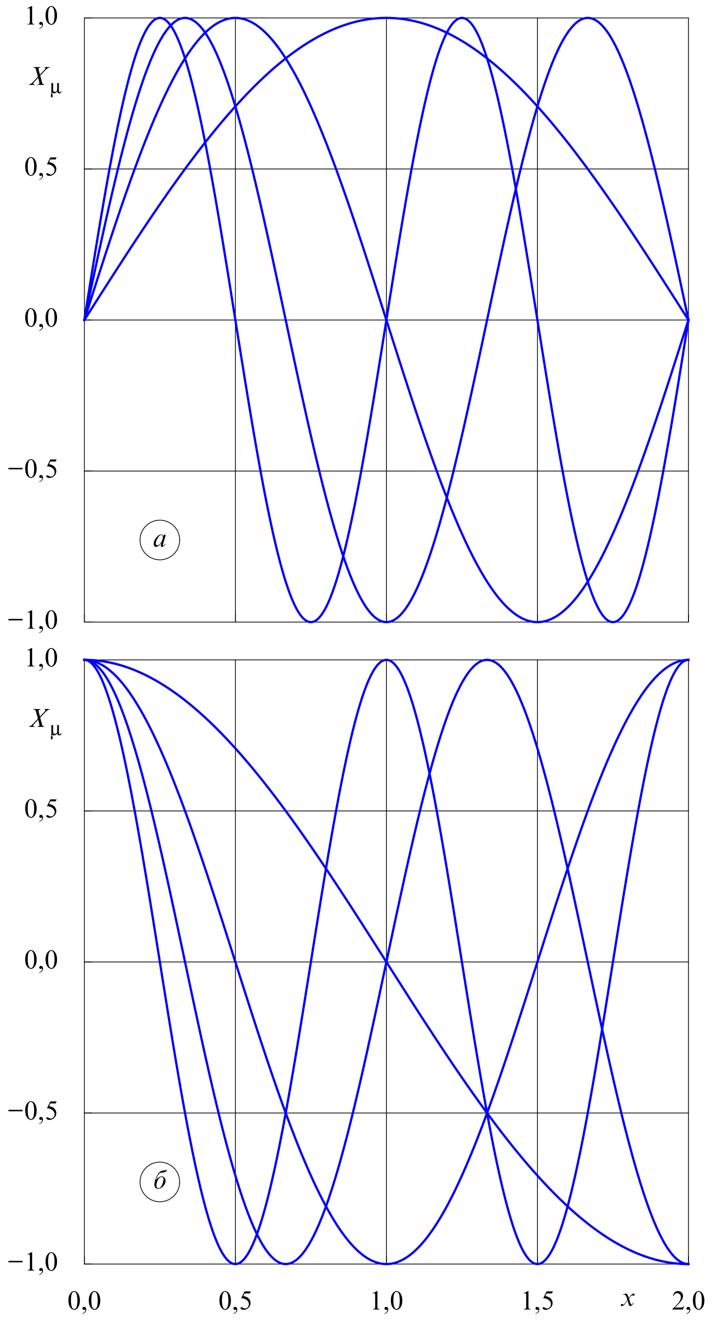

Рис. 3.1. Собственные функции $X_\mu(x)$ задач *Штурма – Лиувилля* SL_1 (*а*, $\mu = 1, 2, 3, 4$) и SL_2 (*б*, $\mu = 1, 2, 3, 4$)

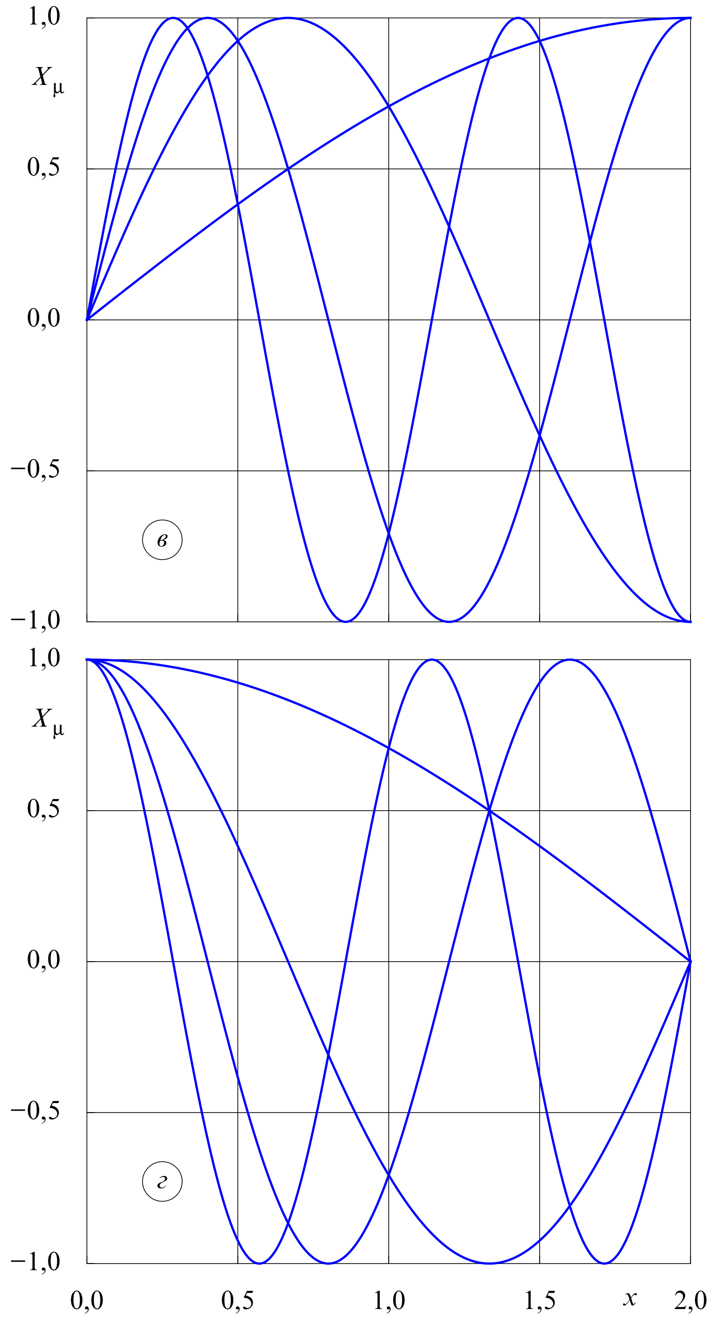

Рис. 3.2. Собственные функции $X_\mu(x)$ задач *Штурма – Лиувилля* SL_3 (*в*, $\mu = 1, 2, 3, 4$) и SL_4 (*г*, $\mu = 1, 2, 3, 4$)

3.3. Разделение переменных в полярных переменных

$$\begin{cases} x = r\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ y = r\,\mathtt{sin}\,\varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \\ \varphi = \mathtt{arctg}\,\dfrac{y}{x}\,; \end{cases} \tag{3.42}$$

Оператор *Лапласа* на плоскости $\mathbb{R}^2$ в полярной системе координат (3.42) имеет такой вид (см. задачу 3.3 на с. 78 и пример 7.9 на с. 226)

$$\Delta_{(r,\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \tag{3.43}$$

3.3.1. Общее решение уравнения *Лапласа* в полярных переменных

Запишем уравнение *Лапласа* на плоскости $\mathbb{R}^2$ в полярной системе координат (3.42)

$$\Delta\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial\mathring{u}}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\mathring{u}}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{3.44}$$

и будем разыскивать ограниченное и периодическое по зависимой переменной φ решение последнего в виде

$$\mathring{u}(r,\varphi) = R(r)\,\Phi(\varphi)\,, \tag{3.45}$$

где $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$ — подлежащие определению функции. Наложенное на функцию $\mathring{u}(r,\varphi)$ условие периодичности $\mathring{u}(r,\varphi) = \mathring{u}(r,\varphi+2\pi)$ влечёт соответствующее условие для функции $\Phi(\varphi)$: $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi+2\pi)$.

Из представления (3.45) получим выражения для производных искомого решения по переменным r и φ

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathring{u}}{\partial r} = R'\,\Phi\,, \qquad \dfrac{\partial\mathring{u}}{\partial\varphi} = R\,\Phi', \\ \dfrac{\partial^2\mathring{u}}{\partial r^2} = R''\,\Phi\,, \qquad \dfrac{\partial^2\mathring{u}}{\partial\varphi^2} = R\,\Phi'', \end{cases}$$

которые подставим в уравнение *Лапласа* (3.44)

$$\frac{R'}{r}\,\Phi + R''\,\Phi + \frac{R}{r^2}\,\Phi'' = 0\,.$$

Разделим последнее уравнение на $r^{-2}R(r)\,\Phi(\varphi)$

$$\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} + \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = 0$$

и перенесём в правую часть члены, зависящие от φ

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}\,.$$

Полученное равенство выполняется в произвольной точке (r, φ) плоскости, из чего заключим, что его левая и правая части равны порознь одной и той же постоянной величине

$$\underbrace{\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)}}_{1} = \underbrace{-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}}_{2} = \texttt{const} \equiv \underbrace{\ \lambda\ }_{3}\,, \tag{3.46}$$

называемой *параметром разделения*. Рассмотрим по отдельности части 1, 3 и 2, 3 равенства (3.46) и запишем их в виде двух зависимых (через параметр разделения λ) линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\Phi''(\varphi) + \lambda\,\Phi(\varphi) = 0\,, \tag{3.47}$$

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - \lambda\,R(r) = 0\,. \tag{3.48}$$

Вначале обратимся к линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (3.47) первого порядка с постоянным коэффициентом λ (параметром разделения); в зависимости от значений последнего уравнение имеет следующие 2-параметрические семейства решений:

$$\Phi_\lambda(\varphi) = \begin{cases} A_\lambda \texttt{cos}\,\sqrt{\lambda}\varphi \qquad + B_\lambda \texttt{sin}\,\sqrt{\lambda}\varphi\,, & \lambda > 0\,,\\ A_0 \qquad\qquad\quad + B_0\,\varphi\,, & \lambda = 0\,,\\ A_\lambda \texttt{exp}\,(-\sqrt{-\lambda}\varphi) + B_\lambda \texttt{exp}\,(+\sqrt{-\lambda}\varphi)\,, & \lambda < 0\,, \end{cases} \tag{3.49}$$

из которых отберём согласованные с условием периодичности: $\mathring{u}_\lambda(r, \varphi) = \mathring{u}_\lambda(r, \varphi + 2\pi)$, то есть $\Phi_\lambda(\varphi) = \Phi_\lambda(\varphi + 2\pi)$.

Очевидно, что условие периодичности решений $u_\lambda(\rho, \varphi) = R_\lambda(\rho)\,\Phi_\lambda(\varphi)$ может быть выполнено за счёт периодичности функций $\Phi_\lambda(\varphi)$ (3.49), последнее же достигается выбором:

1) значения $\lambda = 0$, которому соответствует постоянное при $B_0 = 0$ решение

$$\Phi_0(\varphi) = A_0\,, \tag{3.50}$$

2) значений $\lambda > 0$, которым соответствуют решения в виде линейных комбинаций тригонометрических функций

$$A_\lambda \texttt{cos}\,\sqrt{\lambda}\varphi + B_\lambda \texttt{sin}\,\sqrt{\lambda}\varphi \equiv \Phi_\lambda(\varphi) = \Phi_\lambda(\varphi + 2\pi)\,,$$

и подчинением параметра разделения дополнительному условию

$$\sqrt{\lambda}\,(\varphi + 2\pi) = \sqrt{\lambda}\,\varphi + \sqrt{\lambda}\,2\pi \quad \Rightarrow \quad \sqrt{\lambda}\,2\pi = \mu\,2\pi, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,,$$

откуда заключим, что множество допустимых положительных значений параметра разделения λ счётно

$$\lambda = \mu^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{3.51}$$

а соответствующие им частные решения таковы

$$\Phi_\mu(\varphi) = A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{3.52}$$

причём, следуя полученной формуле (3.51), мы сменили указатель параметра на μ, то есть вместо $\Phi_\lambda(\varphi)$ здесь и далее будем писать $\Phi_\mu(\varphi)$, поскольку так удобнее.

Теперь перейдём к решению уравнения (3.48), которое относится к типу линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; его 2-параметрическое семейство решений для различных значений параметра разделения будем разыскивать как линейную комбинацию частных решений.

При нулевом значении параметра разделения приведём уравнение (3.48) к виду

$$rR_0''(r) + R_0'(r) = \big(rR_0'(r)\big)' = 0 \tag{3.53}$$

и найдём решение последнего двумя последовательными интегрированиями

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \ln r\,. \tag{3.54}$$

Для положительных значениях параметра разделения (3.51) частные решения уравнения (3.48)

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \mu^2R(r) = 0 \tag{3.55}$$

будем разыскивать в виде степенных функций r^q, где q — неизвестные значения показателя степени. Подставим степенные функции в уравнение (3.55)

$$q\,(q-1)\,r^2\,r^{\,q-2} + q\,r\,r^{\,q-1} - \mu^2\,r^{\,q} = r^{\,q}\,\Big(q(q-1) + q - \mu^2\Big) = r^{\,q}\,\Big(q^2 - \mu^2\Big) = 0\,,$$

откуда получим алгебраическое уравнение $q^2 - \mu^2 = 0$ относительно q. Соответствующие корням $q = \mp\mu \neq 0$ алгебраического уравнения частные решения уравнения (3.55) суть

$$R_\mu(r) = C_\mu\,r^{-\mu} + D_\mu\,r^{+\mu}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{3.56}$$

Сложим частные решения вида (3.45) для всех допустимых значений параметра разделения: $\lambda = 0$ и $\lambda = \mu^2$, $\mu \in \mathbb{N}$, и получим ∞-параметрическое семейство решений («общее решение») уравнения *Лапласа* в полярной системе координат (3.42)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = R_0(r)\,\Phi_0(\varphi) + \sum_{\mu=1}^{\infty} R_\mu(r)\,\Phi_\mu(\varphi)\,,$$

или, после подстановки полученных выражений для $R_0(r)$ (3.54), $\Phi_0(\varphi)$ (3.50), $R_\mu(r)$ (3.56) и $\Phi_\mu(\varphi)$ (3.52), в виде

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \Big(C_0 + D_0 \ln r\Big)\,A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu}\Big)\Big(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\Big)\,.$$

Мы можем уменьшить количество параметров (произвольных постоянных) полученного семейства, записав его так (см. задачу 3.5 на с. 79)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu}\Big)\Big(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{3.57}$$

∞-параметрическое семейство решений (3.57) уравнения *Лапласа* в полярной системе координат (3.42), периодичных по переменной φ, имеет две особые точки, в которых оно становится неограниченным:

1) начало координат ($r = 0$), за счёт логарифмического члена и членов с отрицательными степенями переменной r;

2) бесконечно удаленную точку ($r = \infty$), за счёт логарифмического члена и членов с положительными степенями переменной r.

3.3.2. Общее решение уравнения *Гельмгольца* в полярных переменных

3.4. Задачи

К разделу 3.1. на с. 62

Задача 3.1. Поясните вычисление: 1) третьей и 2) четвёртой «производных» (3.6) функции $u(t, \boldsymbol{r})$ (**??**).

Решение. При вычислении:
1) производной $\Delta u(t, \boldsymbol{r})$ функции $u(t, \boldsymbol{r}) = O(t)\, v(\boldsymbol{r})$:
а) применим определение оператора *Лапласа* (1.18) на с. 14 или (7.63) на с. 222

$$\Delta u(t, \boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) u(t, x, y, z) = \frac{\partial^2 u(t, x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y, z)}{\partial z^2}\,;$$

б) подставим вместо функции $u(t, \boldsymbol{r})$ представление $u(t, \boldsymbol{r}) = O(t)\, v(\boldsymbol{r})$ (**??**)

$$\Delta u(t, \boldsymbol{r}) = \frac{\partial^2 \big(O(t)\, v(x, y, z)\big)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \big(O(t)\, v(x, y, z)\big)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \big(O(t)\, v(x, y, z)\big)}{\partial z^2}\,,$$

в) вынесем функцию $O(t)$ из под операторов дифференцирования по пространственным переменным x, y и z второго порядка

$$\Delta u(t, \boldsymbol{r}) = O(t) \left(\frac{\partial^2 v(x, y, z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v(x, y, z)}{\partial z^2}\right);$$

г) снова применим определение оператора *Лапласа* и получим формулу дифференцирования

$$\Delta u(t, \boldsymbol{r}) = O(t) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) v(x, y, z) = O(t)\, \Delta v(\boldsymbol{r})\,;$$

2) производной $\dfrac{\partial u(t, \boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{\nu}}$ функции $u(t, \boldsymbol{r}) = O(t)\, v(\boldsymbol{r})$:
а) применим определение оператора *Гамильтона* (7.24) на с. 215
Поднаторев в работе с операторами *Гамильтона* ∇ и *Лапласа* Δ дифференцирования по пространственным переменным $\boldsymbol{r}$, формулы вида $\Delta u(t, \boldsymbol{r}) = O(t)\, \Delta v(\boldsymbol{r})$ можно получать без промежуточных шагов, просто учитывая, что оператор *Лапласа* Δ «не видит» функции $O(t)$ временно́й переменной t, потому функцию $O(t)$ можно вынести из-под оператора Δ. ▲

Задача 3.2. Объясните, почему в неравенстве (3.16) нулевое значение параметра разделения есть допустимое.

К разделу 3.3. на с. 74

Задача 3.3. Вывести выражение (3.43) для оператора *Лапласа* в полярной системе координат (3.42), применяя замену переменных.

Решение. Вывод искомого выражения проведём в такой последовательности:
1) запишем формулы перехода (3.42) от полярных координат к декартовым прямоугольным координатам

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi\,, \\ y = r \sin\varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \\ \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}\,; \end{cases}$$

2) сделаем замену зависимой переменной $u(x,y) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \mathring{u}(r,\varphi)$;

3) продифференцируем функции $u(x,y)$ и $\mathring{u}(r,\varphi)$ по переменным x, y, причём функцию $\mathring{u}(r,\varphi)$ будем рассматривать как сложную:

а) один раз

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}; \end{cases}$$

б) дважды

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\right)\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\right)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial \varphi}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial r}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial \varphi}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \end{cases}$$

4) вычислим первые и вторые повторные производные

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = \dfrac{x}{r}, & \dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{x^2}{r^2}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = -\dfrac{y}{r^2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = +\dfrac{y}{r^2}\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = \dfrac{y}{r}, & \dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{y^2}{r^2}, & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = +\dfrac{x}{r^2}, & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\dfrac{x}{r^2}\dfrac{y}{r}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial r}\dfrac{x^2}{r^2} - 2\dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial \varphi}\dfrac{x}{r}\dfrac{y}{r^2} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\left(\dfrac{1}{r} - \dfrac{1}{r}\dfrac{x^2}{r^2}\right) + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{y}{r^2}\dfrac{x}{r}, \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial r}\dfrac{y^2}{r^2} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r\partial \varphi}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\dfrac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial r}\dfrac{\partial r}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} + \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \varphi}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \end{cases}$$

$$\Delta_{(r,\,\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,. \tag{3.58}$$

(7.89) (7.89) пример 7.9

К разделу 3.2. на с. 66

Задача 3.4. Рассмотреть задачу *Штурма – Лиувилля* и непосредственно показать, что при $\lambda \leqslant 0$ задача не имеет решения.

К разделу 3.3. на с. 74

Задача 3.5. Объясните, каким образом, при записи ∞-параметрического семейства решений (3.57) для уравнения *Лапласа* в полярной переменных (полярной системе координат) удалось избавиться от параметра (произвольной постоянной) A_0.

3.5. Пояснения

К разделу 3.0. на с. 62

К разделу 3.1. на с. 62

Пояснение 3.1 к с. 66.

▼

К разделу 3.2. на с. 66

Пояснение 3.2 к с. 66.

▼

К разделу 3.3. на с. 74

4. Задачи для уравнений эллиптического типа

4.0. $\Pi\rho o\lambda\varepsilon\gamma \acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

Origin of the Term ”Harmonic”

The word “harmonic” is commonly used to describe a quality of sound. Harmonic functions derive their name from a roundabout connection they have with one source of sound — a vibrating string.

Physicists label the movement of a point on a vibrating string “harmonic motion”. Such motion may be described using sine and cosine functions, and in this context the sine and cosine functions are sometimes called harmonics. In classical Fourier analysis, functions on the unit circle are expanded in terms of sines and cosines. Analogous expansions exist on the sphere in $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, in terms of homogeneous harmonic polynomials (see Chapter 5). Because these polynomials play the same role on the sphere that the harmonics sine and cosine play on the circle, they are called spherical harmonics. The term “spherical harmonic” was apparently first used in this context by William Thomson (Lord Kelvin) and Peter Tait (see [18], Appendix B). By the early 1900 s, the word “harmonic” was applied not only to homogeneous polynomials with zero Laplacian, but to any solution of Laplace’s equation. [63]

Математический метод, который в Англии обычно называют «методом коэффициентов Лапласа», а здесь будет именоваться *сферическим гармоническим анализом* ... применяется к широкому классу физических задач.

$<\ldots>$

... *Сферическая гармоническая функция* определяется как однородная функция V от x, y, z, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}y^2} + \frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}z^2} = 0. \tag{1.126}$$

$<\ldots>$

...Выписанные ниже функции представляют сферические гармоники соответствующей степени; $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}\ldots$ [55]

В данном разделе нас будут интересовать как общие свойства решений линейных уравнений эллиптического типа с постоянными коэффициентами, именно *Лапласа* $\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$, *Пуассона* $\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$ и *Гельмгольца* $\Delta u(\boldsymbol{x}) + k^2 u(\boldsymbol{x}) = 0$, так и методы нахождения решений указанных уравнений в конечных или бесконечных областях, при некоторых наложенных ограничениях, называемых граничными условиями. За решениями уравнения *Лапласа* исторически закрепилось название, которое вводит следующее

Определение 4.1. Функция, удовлетворяющая уравнению *Лапласа* в некоторой области $\mathcal{D}$, то есть дважды непрерывно диференцируемая в $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$, такая что

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n\,, \tag{4.1}$$

где $n = 2, 3$, называется *гармонической в области* $\mathcal{D}$. $\square$

Нам понадобятся вспомогательные формулы *Грина* на плоскости $\mathbb{R}^2$ (здесь не приведены, см. раздел 7.4. на с. 227) и в пространстве $\mathbb{R}^3$: первая (напомним, что она имеет две симметричные разновидности)

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\mathcal{D}} \Big(\nabla u(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla v(\boldsymbol{x}) + u(\boldsymbol{x})\,\Delta v(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} u(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,,\\
&\iiint\limits_{\mathcal{D}} \Big(\nabla v(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}) + v(\boldsymbol{x})\,\Delta u(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} v(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,,
\end{aligned} \tag{4.2}$$

и вторая (напомним, что она есть просто разность двух видов первой формулы *Грина*)

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \Big(u(\boldsymbol{x})\,\Delta v(\boldsymbol{x}) - v(\boldsymbol{x})\,\Delta u(\boldsymbol{x})\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \Big(u(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial v(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - v(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{4.3}$$

В разделе 4.1. приведены постановки трёх основных задач — *Дирихле*, *Неймана* и *Робэна* — для уравнений *Лапласа*, *Пуассона* и *Гельмгольца*.

В разделе 4.2. введено понятие *основных* (*фундаментальных*) решений оператора *Лапласа* на плоскости и в пространстве, соответственно как частных плоско- и пространственно-изотропных решений уравнения *Лапласа*.

В разделе 4.3. выведена *основная* формула *Грина*, применяемая при решении задачи *Дирихле* для уравнений *Лапласа* и *Пуассона*.

В разделе 4.4. приведены и доказаны (с помощью вспомогательных и основной формул *Грина*) некоторые свойства гармонических функций (теоремы о потоке, среднем по сфере, среднем по шару, бесконечной дифференцируемости).

В разделе 4.5. рассмотрено отдельно свойство гармонических функций, называемое принципом максимума/минимума (сокращённо ПММ, к физическому понятию «принципа», то есть положению, принимаемому без доказательства, не имеет отношения), имеющее множественные следствия для гармонических функций (двойное неравенство для значений гармонических функций, постоянство гармонических функций, непрерывная зависимость решения задачи *Дирихле* от граничных условий, равномерная сходимость последовательность гармонических функций на границе области, единственность решения задачи *Дирихле*); также доказана неединственность решения задачи *Неймана* при нулевом значении производной искомой функции на границе области (ПММ для этого не нужен).

В разделах 4.6. и 4.7. решены задачи *Дирихле* и *Неймана* для уравнения *Лапласа* внутри и вне круга методом разделения переменных.

В разделах 4.8. и 4.9. решены задачи *Дирихле* и *Неймана* для уравнения *Лапласа* в кольце методом разделения переменных.

В разделе 4.10. решена задача *Дирихле* для уравнения *Лапласа* в прямоугольнике методом разделения переменных.

4.1. Постановки основных граничных задач для уравнений *Лапласа*, *Пуассона* и *Гельмгольца*

Ради краткости изложения, приведём постановки указанных в названии раздела задач только для уравнения *Пуассона*, для остальных уравнений в постановках соответствующих задач следут заменить уравнение *Пуассона* на уравнение *Лапласа* или *Гельмгольца* (см. задачу 4.1 на с. 134).

Определение 4.2. Дважды непрерывно дифференцируемая по переменной $\boldsymbol{x}$ в области $\mathcal{D}$ и непрерывная в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ области функция $u(\boldsymbol{x})$ называется решением задачи *Дирихле* для уравнения *Пуассона*, если: 1) удовлетворяет в области уравнению *Пуассона*; 2) принимает заданные значения на границе $\mathcal{S}$ области, то есть

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \,, \\ u(\boldsymbol{x}) = g_0(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \,, \end{cases} \tag{4.4}$$

где функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в области, функция $g_0(\boldsymbol{x})$ непрерывна на границе. □

Определение 4.3. Дважды непрерывно дифференцируемая по переменной $\boldsymbol{x}$ в области $\mathcal{D}$ и непрерывно дифференцируемая в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ области функция $u(\boldsymbol{x})$ называется решением задачи *Неймана* для уравнения *Пуассона*, если: 1) удовлетворяет в области уравнению *Пуассона*; 2) принимает заданные значения производной по направлению орта $\boldsymbol{\nu}$ внешней нормали к границе $\mathcal{S}$ области, то есть

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \,, \\ \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_1(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \,, \end{cases} \tag{4.5}$$

где функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в области, функция $g_1(\boldsymbol{x})$ непрерывна на границе. □

Определение 4.4. Дважды непрерывно дифференцируемая по переменной $\boldsymbol{x}$ в области $\mathcal{D}$ и непрерывно дифференцируемая в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ области функция $u(\boldsymbol{x})$ называется решением задачи *Робэна* для уравнения *Пуассона*, если: 1) удовлетворяет в области уравнению *Пуассона*; 2) принимает заданные значения в линейной комбинации с производной по направлению орта $\boldsymbol{\nu}$ внешней нормали к границе $\mathcal{S}$ области, то есть

$$\begin{cases} \Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{D} \,, \\ \theta_0(\boldsymbol{x})\, u(\boldsymbol{x}) + \theta_1(\boldsymbol{x})\, \dfrac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_2(\boldsymbol{x}) \,, & \boldsymbol{x} \in \mathcal{S} \,, \end{cases} \tag{4.6}$$

где функция $f(\boldsymbol{x})$ непрерывна в области, функции $\theta_0(\boldsymbol{x}), \theta_1(\boldsymbol{x})$ и $g_2(\boldsymbol{x})$ непрерывны на границе. □

Замечание 4.1. Приведенные выше постановки основных задач могут порождать вопросы о том, чем обусловлен выбор граничных условий. Или иначе — почему решения уравнений следует находить при наложении на искомые функции ограничений в виде условий *Дирихле*, *Неймана* и *Робэна*? На самом деле эти условия появились не умозрительно, а при постановке «настоящих» прикладных задач, то есть они входят как составные части в соответствующие математические модели физических явлений. □

Замечание 4.2. Постановка задачи *Робэна* вполне самостоятельна, хотя граничное условие задачи есть не что иное как линейная комбинация (различная в каждой точке $\boldsymbol{x}$ границы!) граничных условий задач *Дирихле* и *Неймана*. Тем не менее, линейность граничного условия задачи *Робэна* иногда удобно толковать буквально, например, полагая функции-переключатели равными $\theta_0 = 1, \theta_1 = 0$ для задачи *Дирихле* и $\theta_0 = 0, \theta_1 = 1$ для задачи *Неймана*. □

4.2. Основные решения оператора *Лапласа*

Мы вывели уравнение *Лапласа*, рассматривая модели тяготения *Ньютона* и электростатики *Кулона* в трёхмерном пространстве (см. раздел 1.2. на с. 11). Напомним, что вначале мы ввели потенциалы тяготения и электростатики, а уже потом показали, что они суть решения уравнения *Лапласа*. Сейчас мы рассмотрим обратную задачу — попробуем найти все решения уравнения *Лапласа*, обладающие свойствами потенциалов, именно — зависеть только от расстояния r наблюдателя до выделенной точки пространства (например, источника тяготения или заряда), но не от направления в пространстве (свойство *изотропии*). Из соображений удобства, будем работать в воображаемом n-мерном пространстве, полагая, что либо $n=2$ (плоскость), либо $n=3$ («наше» пространство).

Итак, пусть $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ — некоторая выделенная точка (она далее не меняется), $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка; введём расстояние $r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ точки $\boldsymbol{x}$ до точки $\boldsymbol{\xi}$ (см. рис. 4.1)

$$r^2(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|^2 = \sum_{\kappa=1}^{n} \left(x_\kappa - \xi_\kappa\right)^2, \tag{4.7}$$

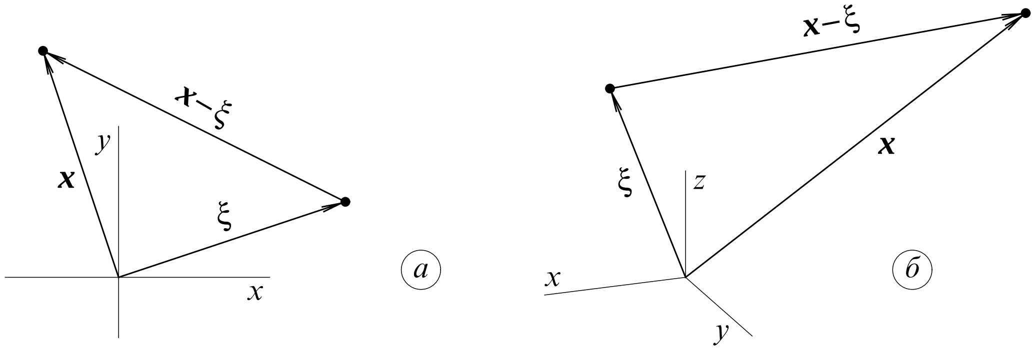

Рис. 4.1. К построению изотропных решений уравнения *Лапласа* на плоскости (*а*) и в пространстве (*б*): искомые решения в произвольной точке $\boldsymbol{x}$ зависят только от расстояния $r = |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|$ до выделенной точки $\boldsymbol{\xi}$

где $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2)=(x,y)$ и $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2)=(x_0,y_0)$ (на плоскости) либо $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)=(x,y,z)$ и $\boldsymbol{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(x_0,y_0,z_0)$ (в пространстве), и будем разыскивать плоско- и пространственно-изотропные решения уравнения *Лапласа* в виде сложной функции переменных x_κ

$$u(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) = w\left(r(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\right) \equiv w\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\right).$$

Частные производные первого и второго порядков искомой функции по переменным x_κ (входящие в них частные производные r по x_κ мы уже находили, см. раздел 1.2. на с. 11)

$$\frac{\partial u}{\partial x_\kappa} = \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\,\frac{\partial r}{\partial x_\kappa}\,, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_\kappa} = \frac{x_\kappa - \xi_\kappa}{r}\,,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\kappa^2} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x_\kappa}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\,\frac{\partial^2 r}{\partial x_\kappa^2} = \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2}\left(\frac{x_\kappa - \xi_\kappa}{r}\right)^2 + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\left(\frac{x_\kappa - \xi_\kappa}{r}\right)^2\right],$$

подставим в уравнение *Лапласа*

$$\Delta u = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\kappa^2} = 0\,,$$

которое примет вид линейного однородного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром n

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{n-1}{r}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = 0\,, \qquad n = 2, 3\,. \tag{4.8}$$

Пусть $n = 2$, умножим обе части уравнения (4.8) на r

$$r\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = r\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = 0\,,$$

и после двукратного интегрирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = A_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}w = \frac{A_1}{r}\,\mathrm{d}r \quad \Rightarrow$$

найдём 2-параметрическое семейство решений

$$w(r) = A_1 \ln r + A_2\,, \qquad n = 2\,. \tag{4.9}$$

Пусть $n = 3$, умножим обе части уравнения (4.8) на r^2

$$r^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = r^2\,\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}r^2} + 2r\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

и после двукратного интегрирования

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad r^2\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = A_1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}w = \frac{A_1}{r^2}\,\mathrm{d}r \quad \Rightarrow$$

найдём 2-параметрическое семейство его решений

$$w(r) = -\frac{A_1}{r} + A_2\,, \qquad n = 3\,. \tag{4.10}$$

Постоянные A_2 в семействах решений (4.9) и (4.10) не будем учитывать, как несущественные, а постоянные A_1 подчиним условиям, полезность которых будет прояснена в следующем разделе.

Пусть $n = 2$, тогда условие для нахождения постоянной A_1 состоит в том, что криволинейный интеграл первого рода от производной $w(r)$ (4.9) по окружности произвольного радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{\xi}$ равен единице, то есть

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_\varrho(\boldsymbol{\xi})} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}v}\, \mathrm{d}\mathcal{C} = 1\,. \tag{4.11}$$

Введём местную полярную систему координат

$$\begin{cases} x = x_0 + r\cos\varphi\,, \\ y = y_0 + r\sin\varphi\,, \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)\,,$$

тогда для интеграла (4.11) имеем

$$\oint\limits_{\mathcal{C}_v(\boldsymbol{\xi})} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}\mathcal{C} = A_1 \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{r}\, r\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi A_1\,,$$

откуда $A_1 = (2\pi)^{-1}$.

Пусть $n = 3$, тогда условие для нахождения постоянной A_1 состоит в том, что поверхностный интеграл первого рода от производной $w(r)$ (4.10) по сфере радиуса r с центром в точке $\boldsymbol{\xi}$ равен единице, то есть

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}_r(\boldsymbol{\xi})} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}\mathcal{S} = 1\,. \tag{4.12}$$

Введём местную сферическую систему координат

$$\begin{cases} x = x_0 + r\sin\theta\cos\varphi\,, \\ y = y_0 + r\sin\theta\sin\varphi\,, \\ z = z_0 + r\cos\theta\,, \end{cases} \qquad \varphi \in [0, 2\pi)\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,,$$

тогда для интеграла (4.12) имеем

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}_r(\boldsymbol{\xi})} \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r}\, \mathrm{d}\mathcal{S} = A_1 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{r^2}\, r^2 \sin\theta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta = 4\pi A_1\,,$$

откуда $A_1 = (4\pi)^{-1}$.

Окончательно получим следующие выражения для искомых плоско- и пространственно-изотропных гармонических функций (см. задачу 4.2 на с. 134)

$$w(r) = w\left(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|\right) = \begin{cases} +\dfrac{1}{2\pi}\ln r = +\dfrac{1}{2\pi}\ln|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|\,, & n = 2\,, \\ -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r} \quad = -\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}|}\,, & n = 3\,. \end{cases} \tag{4.13}$$

Определение 4.5. Гармонические функции (4.13) называются *основными* (*фундаментальными*) решениями оператора *Лапласа*. □

Для того, чтобы подчеркнуть присутствие в основных решениях (4.13) аргумента $\boldsymbol{x}$ и параметра $\boldsymbol{\xi}$, иногда будем применять такое обозначение

$$\mathscr{E}\,(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi}) \equiv w\left(|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\xi}|\right). \tag{4.14}$$

4.3. Интегральное представление гармонических функций

Решения уравнений *Лапласа* и *Пуассона* в области $\mathcal{D}$ обладают удивительным свойством, состоящим в том, что значения во внутренних точках области допускают непосредственное выражение через граничные значения решения и его производной по направлению орта внешней нормали к границе области $\mathcal{D}$. В данном разделе мы дадим вывод данного представления в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Пусть функция $u(\boldsymbol{x})$ дважды непрерывно дифференцируема в замыкании области $\mathcal{D}$. Выберем произвольную точку $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{D}$ и действительное число $\varepsilon>0$ так, чтобы замыкание шара $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ находилось в области $\mathcal{D}$, то есть $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})\Subset\mathcal{D}$ (см. раздел обозначений и рис. 4.2).

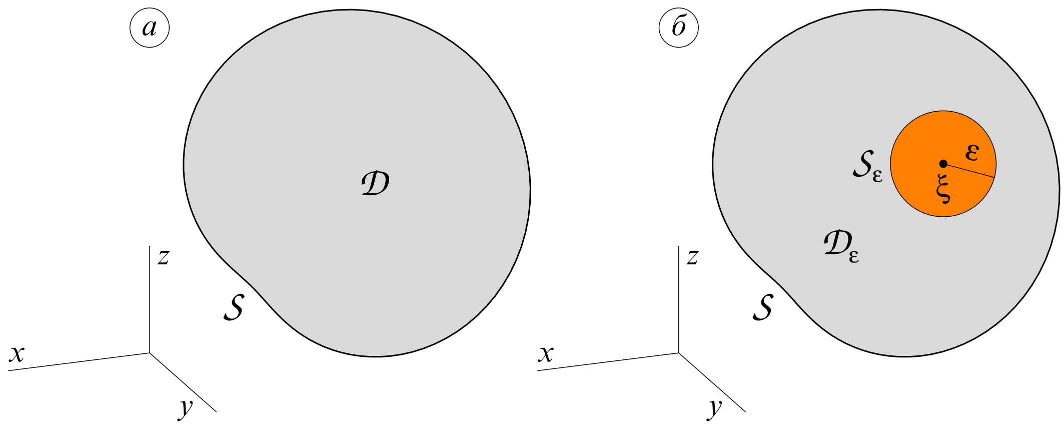

Рис. 4.2. К выводу основной формулы *Грина*: область $\mathcal{D}$ с кусочно гладкой границей $\mathcal{S}$ (*а*); область $\mathcal{D}_\varepsilon$ образована вырезанием из области $\mathcal{D}$ замыкания шара $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ радиуса ε с центром в точке $\boldsymbol{\xi}\in\mathcal{D}$ так, чтобы граница $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ шара $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ не имела с границей $\mathcal{S}$ области $\mathcal{D}$ общих точек, то есть $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})\Subset\mathcal{D}$ (*б*)

Применим вторую формулу *Грина* (4.3) к функциям $u(\boldsymbol{x})$ и $\mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})$ (4.14) в области $\mathcal{D}_\varepsilon$, которая образована как дополнение замыкания шара $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ до области $\mathcal{D}$ (граница области $\mathcal{D}_\varepsilon$ состоит из двух не связанных частей: границы $\mathcal{S}$ области $\mathcal{D}$ и границы $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ шара $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$, что учтено при записи формулы *Грина*),

$$\underbrace{\iiint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon}\left(\mathscr{E}\,\Delta u - u\underbrace{\Delta\mathscr{E}}_{=0}\right)\mathrm{d}\mathcal{D}_\varepsilon}_{I} = \underbrace{\oiint\limits_{\mathcal{S}}\left(\mathscr{E}\,\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u\,\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}}_{II} + \underbrace{\oiint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}\left(\mathscr{E}\,\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}} - u\,\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon}_{III} \tag{4.15}$$

и найдём предельный вид формулы (4.15) при $\varepsilon \to 0$, рассматривая составляющие I, II, III формулы по отдельности.

При рассмотрении составляющей I учтём свойство аддитивности интеграла по области интегрирования, что приводит к равенству

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \iiint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{D}_\varepsilon + \iiint\limits_{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{B}_\varepsilon\,,$$

в котором выполним оценку интеграла по шару

$$\left|\iiint\limits_{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{B}_\varepsilon\right| \leqslant \max_{\boldsymbol{x}\in\overline{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}} |\,\Delta u\,| \left|\iiint\limits_{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} \mathscr{E}\,\mathrm{d}\mathcal{B}_\varepsilon\right| = \mathtt{const}\int\limits_0^\varepsilon \underbrace{\frac{1}{4\pi r}}_{|\mathscr{E}|} 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \mathtt{const}\,\frac{\varepsilon^2}{2}$$

и перейдём к пределу при $\varepsilon \to 0$, откуда найдём предельное значение составляющей I в формуле (4.15)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \iiint\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{D}_\varepsilon = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \mathscr{E}\,\Delta u\,\mathrm{d}\mathcal{D}\,.$$

Составляющая II формулы (4.15) (интеграл по $\mathcal{S}$) не зависит от ε и, следовательно, не меняется при предельном переходе $\varepsilon \to 0$.

Наконец, рассмотрим составляющую III формулы (4.15) (интеграл по $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$), в которой сделаем оценку первого слагаемого (см. пояснение)

$$\left|\oiint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} \mathscr{E}\,\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon\right| \leqslant \max_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} \left|\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right| \underbrace{\frac{1}{4\pi\varepsilon}}_{|\mathscr{E}|} \underbrace{4\pi\varepsilon^2}_{|\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})|} = \mathtt{const}\,\varepsilon$$

и учтём постоянство основного решения $\mathscr{E}$ и производной $\mathscr{E}$ по направлению орта внешней нормали $\boldsymbol{\nu}$ к сфере $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})$ во втором слагаемом (орт $\boldsymbol{\nu}$ направлен внутрь «дырки»)

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} u\,\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon \overset{(4.14)}{=} \underbrace{-\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}}_{\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial\boldsymbol{\nu}}} \oiint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})} u\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon = -\,u(\boldsymbol{x}^*)\Big|_{\boldsymbol{x}^*\in\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{\xi})}.$$

Следовательно, предельный вид второй формулы *Грина* (4.15) при $\varepsilon \to 0$ таков

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\Delta u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{D} + \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial \mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}\,.$$

Для того, чтобы придать полученной формуле окончательный вид, учтём, что оба интеграла в правой части зависят от векторного параметра $\boldsymbol{\xi}$, а переменная интегрирования есть $\boldsymbol{x}$, в левой же части формулы вектор $\boldsymbol{\xi}$ есть аргумент функции. Поэтому поменяем обозначение переменной интегрирования на $\boldsymbol{\xi}$, а указателя текущей точки — на $\boldsymbol{x}$ и получим окончательную запись предельного вида второй формулы *Грина*

$$u(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})\,\Delta u(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\xi}} + \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{4.16}$$

Формула (4.16) даёт интегральное представление функции (обладающей свойствами, указанными в начале вывода) в произвольной внутренней точке $\boldsymbol{x}$ области $\mathcal{D}$ и называется *основной формулой Грина* (третья по счёту формула *Грина*, см. задачу 4.3 на с. 134).

Следствия основной формулы Грина

Следствие 1. *Если* в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению *Лапласа*: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = 0$, *тогда* основная формула *Грина* (4.16) принимает вид

$$u(\boldsymbol{x}) = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{4.17}$$

Формула (4.17) выражает значение гармонической в области функции в произвольной точке области через значения функции и её нормальной производной на границе области.

Следствие 2. *Если* в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет уравнению *Пуассона*: $\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, *тогда* основная формула *Грина* (4.16) принимает вид

$$u(\boldsymbol{x}) = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})\,f(\boldsymbol{\xi})\,\mathrm{d}\mathcal{D}_{\boldsymbol{\xi}} + \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u(\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \mathscr{E}(\boldsymbol{\xi};\boldsymbol{x})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}\mathcal{S}_{\boldsymbol{\xi}}\,. \tag{4.18}$$

Формула (4.18) выражает значение функции, удовлетворяющей уравнению *Пуассона* в области, в произвольной точке области через значения функции и её нормальной производной на границе области и значения правой части уравнения *Пуассона* в области.

Замечание 4.3. Основная формула *Грина* (4.16) и следствия (4.17), (4.18) из неё верны и на плоскости (см. задачу 4.4 на с. 134). ▼

4.4. Свойства гармонических функций

Теорема 4.1. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая в замыкании области $\mathcal{D}$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$ функция u есть гармоническая в области $\mathcal{D}$, тогда

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S} = 0\,, \tag{4.19}$$

то есть полный поток векторного поля $\nabla u(\boldsymbol{x})$ через границу $\mathcal{S}$ области $\mathcal{D}$ равен нулю. □

Доказательство. Применим к паре функций $u(\boldsymbol{x})$ и $v(\boldsymbol{x}) \equiv 1$ первую (4.2) или вторую (4.3) формулу *Грина*, откуда сразу же следует утверждение теоремы. ■

Теорема 4.2. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая в замыкании шара $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$ функция u есть гармоническая в шаре, тогда в центре шара функция принимает значение

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,, \tag{4.20}$$

равное среднему своих значений по поверхности шара. □

Доказательство. Запишем основную формулу *Грина* (4.17) в шаре $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$, выбрав за произвольную внутреннюю точку $\boldsymbol{x}$ центр шара $\boldsymbol{\xi}$, тогда будем иметь для значения гармонической функции в центре шара

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \oiint\limits_{\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\xi})} \left(u(\boldsymbol{x})\,\frac{\partial \mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\nu}} - \mathscr{E}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{\xi})\,\frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) \mathrm{d}\mathcal{S} = \left\{ \mathscr{E} = -\frac{1}{4\pi R}\,,\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \boldsymbol{\nu}} = \frac{1}{4\pi R^2} \right\} =$$

$$= \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi R} \underbrace{\oiint\limits_{\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\xi})} \frac{\partial u(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}}_{=0\ (4.19)} = \frac{1}{4\pi R^2} \oiint\limits_{\mathcal{S}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,,$$

где учтено, что для точек $\boldsymbol{\xi}$ на поверхности шара $r = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = R$. ■

Теорема 4.3. Пусть дважды непрерывно дифференцируемая в замыкании шара $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$ функция u есть гармоническая в шаре, тогда в центре шара функция принимает значение

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\frac{4}{3}\,\pi R^3} \iiint\limits_{\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{B}\,, \tag{4.21}$$

равное среднему своих значений в шаре. □

Доказательство. Запишем равенство (4.20) для шара $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}) \subset \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$

$$u(\boldsymbol{\xi}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{4\pi r^2} \oiint\limits_{\mathcal{S}_r(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,,$$

умножим на величину площади поверхности шара (то есть сферы $\mathcal{S}_r(\boldsymbol{\xi})$), которая может быть вычислена интегрированием выражения для элемента площади $\mathrm{d}\mathcal{S}_r$ по сферическим углам (θ, φ)

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}_r(\boldsymbol{\xi})} \mathrm{d}\mathcal{S}_r = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \,\mathtt{sin}\,\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi r^2,$$

тогда будем иметь равенство

$$u(\boldsymbol{\xi})\ 4\pi r^2 \overset{!}{=} \oiint\limits_{\mathcal{S}_r(\boldsymbol{x})} \mathring{u}(r,\theta,\varphi)\ \mathrm{d}\mathcal{S}_r = \int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{u}(r,\theta,\varphi)\ r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

которое проинтегрируем по r от 0 до R

$$\frac{4}{3}\pi R^3\, u(\boldsymbol{\xi}) \equiv u(\boldsymbol{\xi}) \int\limits_0^R 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \overset{!}{=} \int\limits_0^R\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{u}(r,\theta,\varphi)\ r^2 \sin\theta\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \equiv \iiint\limits_{\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{\xi})\ \mathrm{d}\mathcal{B}_{\boldsymbol{\xi}}\,,$$

где $\mathring{u}(r,\theta,\varphi)$ — представление гармонической функции u в сферических переменных, откуда сразу же следует утверждение теоремы. ■

Теорема 4.4. Гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ имеет в каждой точке $\boldsymbol{x}\in\mathcal{D}$ непрерывные производные любого порядка. □

Доказательство. Воспользуемся представлением гармонической функции с помощью основной формулы *Грина* (4.16). Стоящие в правой части формулы интегралы можно любое число раз дифференцировать под знаком интеграла по параметрам — координатам точки представления $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$. ■

4.5. Принцип минимума/максимума для гармонических функций

> One of the most useful and best known tools employed in the study of partial differential equations is the maximum principle. This principle is a generalization of the elementary fact of calculus that any function $f(x)$ which satisfies the inequality $f'' > 0$ on an interval $[a, b]$ achieves its maximum value at one of the endpoints of the interval. We say that solutions of the inequality $f'' > 0$ satisfy a maximum principle. More generally, functions which satisfy a differential inequality in a domain D and, because of it, achieve their maxima on the boundary of D are said to possess a maximum principle. [64]

Теорема 4.5 (*принцип максимума*). *Пусть*: 1) непрерывная в замыкании области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ есть гармоническая в области $\mathcal{D}$; 2) число M есть максимальное значение функции $u(\boldsymbol{x})$ в замыкании области $\mathcal{D}$; 3) существует точка $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}$, такая что $u(\boldsymbol{\xi}) = M$; *тогда* функция $u(\boldsymbol{x})$ принимает постоянное значение M в замыкании области $\mathcal{D}$. □

Доказательство проведём от противного, то есть предположим, что $u(\boldsymbol{x}) \not\equiv M$. Возьмём в области $\mathcal{D}$ внутренний шар $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$ (то есть $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi}) \Subset \mathcal{D}$) и предположим, что в шаре найдётся точка $\boldsymbol{\xi}'$, такая что $u(\boldsymbol{\xi}') < M$. Тогда, в силу непрерывности функции $u(\boldsymbol{x})$, существует шар $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}') \Subset \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$, в котором значения функции ограничены числом $M - \varepsilon < M$ (см. рис. 4.3).

По теореме 4.3 о среднем значении гармонической функции $u(\boldsymbol{x})$ по шару $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$ имеем

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint\limits_{\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{B} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3} \left[\ \iiint\limits_{\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})\setminus\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}')} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{B} + \iiint\limits_{\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}')} u(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\mathcal{B}\right].$$

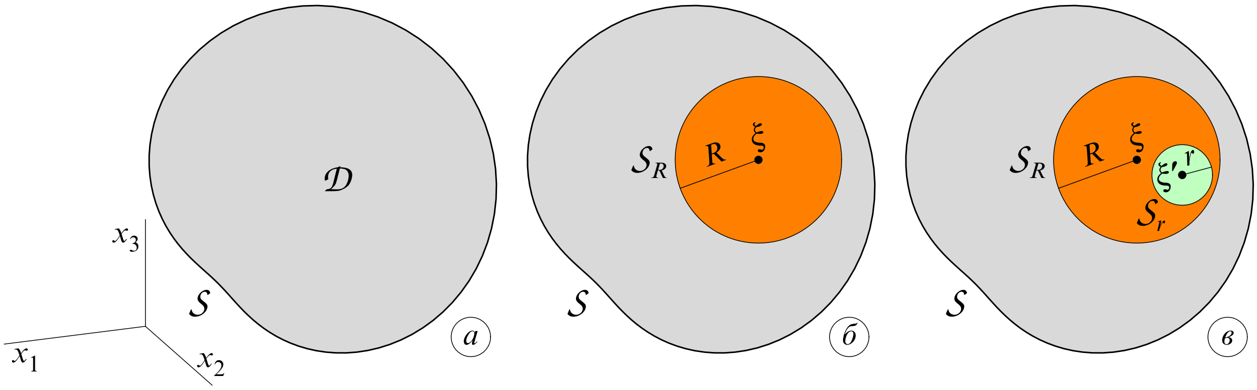

Рис. 4.3. К доказательству теоремы 4.5 о принципе максимума: область $\mathcal{D}$ с кусочно-гладкой границей $\mathcal{S}$ (a); центр первого шара $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi}) \Subset \mathcal{D}$ радиуса R расположен в точке $\boldsymbol{\xi}$ максимума M функции $u(\boldsymbol{x})$ по замыканию $\bar{\mathcal{D}}$ области: $u(\boldsymbol{\xi}) = M = \max\limits_{\bar{\mathcal{D}}} u(x)$ (*б*); радиус r второго шара $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}') \Subset \mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$, $\boldsymbol{\xi} \notin \mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}')$, выбран так: $u(\boldsymbol{x}) \leqslant M - \varepsilon < M$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}')$, $\varepsilon > 0$ (*в*)

Значения подынтегральной функции в шаре $\mathcal{B}_r(\boldsymbol{\xi}')$ и дополнении последнего до шара $\mathcal{B}_R(\boldsymbol{\xi})$ ограничим соответственно числами $M - \varepsilon$ и M, тогда неравенство

$$u(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \frac{1}{\frac{4}{3}\pi R^3}\left[M\left(\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi r^3\right) + (M - \varepsilon)\,\frac{4}{3}\,\pi r^3\right] = M - \varepsilon\left(\frac{r}{R}\right)^3 < M$$

будет противоречить условиям 2) и 3) теоремы. Противоречие разрешим отказом от предположения о существования точки $\boldsymbol{\xi}' \in \mathcal{D}$, в которой $u(\boldsymbol{\xi}') < M$, но это как раз и означает, что $u(\boldsymbol{x}) \equiv M$ в замыкании области $\mathcal{D}$. ■

Теорема 4.6 (*принцип минимума*). *Пусть*: 1) непрерывная в замыкании области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ есть гармоническая в области $\mathcal{D}$; 2) число m есть минимальное значение функции $u(\boldsymbol{x})$ в замыкании области $\mathcal{D}$; 3) существует точка $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}$, такая что $u(\boldsymbol{\xi}) = m$; *тогда* функция $u(\boldsymbol{x})$ принимает постоянное значение m в замыкании области $\mathcal{D}$. □

Доказательство следует доказательству теоремы 4.5 для функции $-u(\boldsymbol{x})$. ■

Теоремы 4.5 и 4.6 иногда объединяют в одну.

Теорема 4.7 (*принцип минимума и максимума*). Гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$, непрерывная в замыкании области $\mathcal{D}$, достигает своих наименьших и наибольших значений на границе области $\mathcal{D}$. □

Следствия из слабого принципа максимума

Следствие 1. Гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$, непрерывная в замыкании области $\mathcal{D}$ и отличная от постоянной, удовлетворяет двойному неравенству

$$\min_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}} u(\boldsymbol{\xi}) < u(\boldsymbol{x}) < \max_{\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{S}} u(\boldsymbol{\xi})$$

во всех точках $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}$, где $\mathcal{S}$ есть граница области $\mathcal{D}$. □

Доказательство свойства излишне, поскольку свойство есть не что иное, как изменённая формулировка теоремы 4.7. ■

Следствие 2. Гармоническая в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$, непрерывная в замыкании области $\mathcal{D}$ и принимающая постоянное значение на границе $\mathcal{S}$ области $\mathcal{D}$, тождественно равна этому значению в области $\mathcal{D}$. □

Доказательство сразу же следует из свойства 1. ■

Следствие 3. Решение задачи *Дирихле* для уравнения *Лапласа* единственно. □

Доказательство проведём от противного. Предположим, что поставленная в области $\mathcal{D}$ задача *Дирихле* с граничным условием $g_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathcal{S}$, имеет два различных решения, которые обозначим $u_1(\boldsymbol{x})$ и $u_2(\boldsymbol{x})$. В силу линейности оператора *Лапласа* Δ и граничного условия, для разности решений $u(\boldsymbol{x}) = u_2(\boldsymbol{x}) - u_1(\boldsymbol{x})$ будем иметь задачу *Дирихле* с тождественно нулевым граничным условием. Но тогда, в силу следствия 2, в замыкании области $\mathcal{D}$ будет верно тождество $u(\boldsymbol{x}) \equiv 0$. ■

Следствие 4. Решение задачи *Дирихле* для уравнения *Лапласа* непрерывно зависит от граничных условий. □

Доказательство. Пусть $u_1(\boldsymbol{x})$ и $u_2(\boldsymbol{x})$ суть решения двух задач *Дирихле* в области $\mathcal{D}$ соответственно с граничными условиями $g_{0,1}(\boldsymbol{x})$, $g_{0,2}(\boldsymbol{x})$, такими что $|g_{0,2}(\boldsymbol{x}) - g_{0,1}(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$. Это значит, что граничные значения функции $u(\boldsymbol{x}) = u_2(\boldsymbol{x}) - u_1(\boldsymbol{x})$, гармонической в области $\mathcal{D}$ и непрерывной в замыкании $\mathcal{D}$, удовлетворяют на границе $\mathcal{S}$ двойному неравенству $-\varepsilon < u(\boldsymbol{x}) < +\varepsilon$, откуда имеем: $-\varepsilon < \min\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} u(\boldsymbol{x})\,,\ \max\limits_{\boldsymbol{x}\in\mathcal{S}} u(\boldsymbol{x}) < +\varepsilon$, а значит, в силу свойства 1, в области $\mathcal{D}$ функция $u(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет двойному неравенству $-\varepsilon < u(\boldsymbol{x}) < +\varepsilon$, откуда следует, что в области $\mathcal{D}$ имеет место одностороннее неравенство $|u_2(\boldsymbol{x}) - u_1(\boldsymbol{x})| < \varepsilon$. ■

Следствие 5. Решение задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* не единственно (определено с точностью до аддитивной постоянной). □

4.6. Задачи *Дирихле* для уравнения *Лапласа* внутри и вне круга

4.6.1. Постановка внутренней задачи

Внутренняя задача *Дирихле* для круга состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую в круге $\mathcal{D}$ и непрерывную в замыкании круга $\mathcal{D} + \mathcal{C}$ гармоническую функцию u, принимающую заданные значения на границе $\mathcal{C}$ круга (рис. 4.4, *а*)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathcal{D} = \Big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 < c^2\Big\}\,, \\ u(x,y) = u_0(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C} = \Big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = c^2\Big\}\,. \end{cases} \tag{4.22}$$

В полярной системе координат (3.42) постановка задачи (4.22) такова

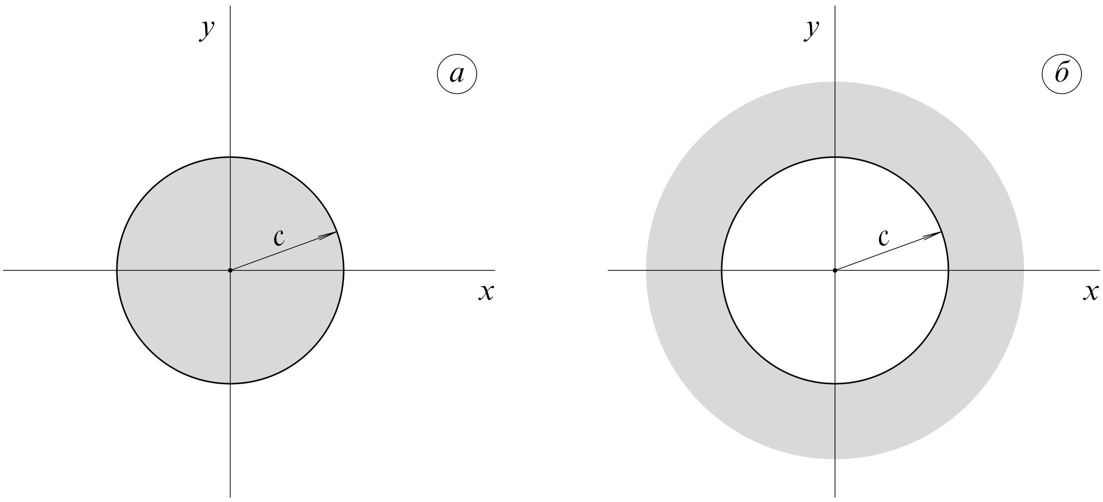

Рис. 4.4. Внутренность (a) и внешность ($б$) круга радиуса c

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial \varphi^2}=0\,, & (r,\varphi)\in(0,c)\times(0,2\pi)\,,\\ \mathring{u}(c,\varphi)=\mathring{u}_0(\varphi)\,, & \varphi\in[0,2\pi)\,,\\ \mathring{u}(r,0)=\mathring{u}(r,2\pi)\,, & r\in[0,c]\,, \end{cases} \tag{4.23}$$

где $\mathring{u}(r,\varphi):=u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, $\mathring{u}_0(\varphi):=u_0(c\cos\varphi, c\sin\varphi)$, и добавлено условие периодичности решения по полярному углу φ.

4.6.2. Решение внутренней задачи методом разделения переменных

Обратимся к ∞-параметрическому семейству решений (3.57) на с. 77 уравнения *Лапласа* (3.44) в полярной системе координат

$$\mathring{u}(r,\varphi)=C_0+D_0\ln r+\sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(C_\mu\, r^{-\mu}+D_\mu\, r^{+\mu}\Big)\Big(A_\mu\cos\mu\varphi+B_\mu\sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{4.24}$$

Легко видеть, что из-за функций $\ln r$ и $r^{-\mu}$, $\mu\in\mathbb{N}$, семейство (4.24) есть неограниченное в круге $r\leqslant c$. Следовательно, в постановку задачи (4.23) следует включить второе дополнительное условие — *ограниченности* решения. Положив в (4.24) $D_0=0$, $C_\mu=0$, $D_\mu=1$, получим ограниченное в круге семейство решений уравнения *Лапласа* в переменных (r,φ)

$$\mathring{u}(r,\varphi)=C_0+\sum_{\mu=1}^{\infty}r^{+\mu}\Big(A_\mu\cos\mu\varphi+B_\mu\sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{4.25}$$

Выберем произвольные постоянные D_0, A_μ, B_μ в семействе (4.25) так, чтобы удовлетворить граничному условию $\mathring{u}(c,\varphi)=\mathring{u}_0(\varphi)$ задачи (4.23). Для этого разложим граничную функцию $\mathring{u}_0(\varphi)$ в ряд *Фурье* на $[0,2\pi]$

$$\mathring{u}_0(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_\mu \cos\mu\varphi + b_\mu \sin\mu\varphi \Big)\,, \tag{4.26}$$

где коэффициенты *Фурье* суть

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{u}_0(\phi)\,\mathrm{d}\phi\,, \qquad a_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{u}_0(\phi)\cos\mu\phi\,\mathrm{d}\phi\,, \qquad b_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{u}_0(\phi)\sin\mu\phi\,\mathrm{d}\phi\,; \tag{4.27}$$

Сопоставляя ряд (4.25) при $r = c$ и ряд (4.26) получим выражения, связывающие коэффициенты этих рядов

$$a_0 = 2C_0\,, \qquad a_\mu = c^\mu A_\mu\,, \qquad b_\mu = c^\mu B_\mu\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{4.28}$$

Подставляя выражения (4.28) для коэффициентов D_0, A_μ, B_μ через коэффициенты a_0, a_μ, b_μ в семейство (4.25) получим решение задачи (4.23)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \Big(a_\mu \cos\mu\varphi + b_\mu \sin\mu\varphi \Big)\,. \tag{4.29}$$

4.6.3. Решение внутренней задачи с помощью интеграла *Пуассона*

Подставим в решение (4.29) задачи (4.23) вместо коэффициентов *Фурье* интегральные выражения (4.27); тогда будем иметь следующее представление для решения

$$\begin{aligned} \mathring{u}(r,\varphi) &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \Big[\cos\mu\phi\,\cos\mu\varphi + \sin\mu\phi\,\sin\mu\varphi \Big] \right\} \mathring{u}_0(\phi)\,\mathrm{d}\phi = \\ &= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \cos\mu(\phi-\varphi) \right\} \mathring{u}_0(\phi)\,\mathrm{d}\phi\,. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках представления (4.30) с помощью формулы *Эйлера* $2\cos\mu(\phi-\varphi) = \exp\big\{-i\mu(\phi-\varphi)\big\} + \exp\big\{+i\mu(\phi-\varphi)\big\}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{r}{c}\right)^{\mu} \cos\mu(\phi-\varphi) &= \left\{ \varrho := \frac{r}{c} < 1 \right\} = \frac{1}{2}\left[1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(\varrho\,\mathrm{e}^{-i\,(\phi-\varphi)}\Big)^{\mu} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(\varrho\,\mathrm{e}^{+i\,(\phi-\varphi)}\Big)^{\mu} \right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{\varrho\,\mathrm{e}^{-i\,(\phi-\varphi)}}{1-\varrho\,\mathrm{e}^{-i\,(\phi-\varphi)}} + \frac{\varrho\,\mathrm{e}^{+i\,(\phi-\varphi)}}{1-\varrho\,\mathrm{e}^{+i\,(\phi-\varphi)}} \right] = \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2-2\varrho\cos(\phi-\varphi)} = \frac{1}{2}\,\frac{c^2-r^2}{c^2+r^2-2cr\cos(\phi-\varphi)}\,. \end{aligned}$$

Заменив выражение в фигурных скобках в (4.30) получим интегральную формулу *Пуассона*(интеграл *Пуассона*) для решения задачи (4.23)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_0(\phi)\,\frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2 - 2cr\cos(\phi-\varphi)}\,\mathrm{d}\phi\,. \tag{4.31}$$

4.6.4. Обоснование решения внутренней задачи

4.6.5. Постановка внешней задачи

Внешняя задача *Дирихле* для круга состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую вне круга $\mathcal{D}$ и непрерывную в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ внешности круга гармоническую функцию u, принимающую заданные значения на границе $\mathcal{C}$ круга (рис. 4.4, *б* на с. 94)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y)\in\mathcal{D} = \Big\{(x,y)\mid x^2+y^2>c^2\Big\}\,,\\ u(x,y) = u_0(x,y)\,, & (x,y)\in\mathcal{C} = \Big\{(x,y)\mid x^2+y^2=c^2\Big\}\,. \end{cases} \tag{4.32}$$

В полярной системе координат (3.42) постановка задачи (4.32) такова

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial\mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\mathring{u}(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0\,, & (r,\varphi)\in(c,+\infty)\times[0,2\pi)\,,\\ u(c,\varphi) = \mathring{g}_0(\varphi)\,, & \varphi\in[0,2\pi)\,,\\ u(r,0) = \mathring{u}(r,2\pi)\,, & r\in[c,+\infty)\,, \end{cases} \tag{4.33}$$

где добавлено условие периодичности и должно быть учтено условие ограниченности решения.

4.6.6. Решение внешней задачи методом разделения переменных

Обратимся к ∞-параметрическому семейству решений (3.57) на с. 77 уравнения *Лапласа* (3.44) в полярной системе координат

$$\mathring{u}(r,\varphi) = C_0 + D_0\ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu}\Big)\Big(A_\mu\cos\mu\varphi + B_\mu\sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{4.34}$$

Из-за функций $\ln r$ и $r^{+\mu}$, $\mu\in\mathbb{N}$, семейство (4.24) есть неограниченное во внешности круга $r>c$. Положив в (4.34) $D_0=0$, $C_\mu=1$, $D_\mu=0$, получим ограниченное во внешности круга семейство решений уравнения *Лапласа* в переменных (r,φ)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = C_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} r^{-\mu}\Big(A_\mu\cos\mu\varphi + B_\mu\sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{4.35}$$

Решение задачи (4.33)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{c}{r}\right)^{\mu} \Big(a_\mu \cos\mu\varphi + b_\mu \sin\mu\varphi\Big) \tag{4.36}$$

может быть получено из семейства (4.35), подобно решению (4.29) внутренней задачи (4.23).

4.6.7. Решение внешней задачи с помощью интеграла *Пуассона*

Интегральная формула *Пуассона*(интеграл *Пуассона*) для решения внешней задачи (4.33)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathring{g}_0(\phi)\, \frac{r^2 - c^2}{c^2 + r^2 - 2cr\cos(\phi-\varphi)}\, \mathrm{d}\phi \tag{4.37}$$

может быть получено из решения (4.36) подобно интегральной формуле (4.31) для решения внутренней задачи (4.23).

4.6.8. Решение внешней задачи методом *Кельвина*

Решение задачи (4.33) методом *Кельвина* основано на *преобразовании инверсии*

$$r\rho = c^2, \tag{4.38}$$

отображающем внутренность круга (рис. 4.4, *а*) на его внешность (рис. 4.4, *б*) и наоборот.

Преобразуем уравнение *Лапласа* (3.44) в полярной системе координат к новым переменным (ρ,φ), для чего вычислим производные функции u первого и второго порядков по r

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r} = \left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right) = -\dfrac{c^2}{r^2}\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho} = -\dfrac{\rho^2}{c^2}\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\,, \\ \dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial r^2} = \dfrac{\partial}{\partial \rho}\left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}^2\rho}{\mathrm{d}r^2}\right) = \dfrac{\rho^4}{c^4}\dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \rho^2} + 2\,\dfrac{\rho^3}{c^4}\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\,, \end{cases}$$

а затем подставим их в уравнение (3.44)

$$\begin{aligned} 0 = \Delta\mathring{u}(r,\varphi) = -\frac{\rho^3}{c^4}\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho} + \frac{\rho^4}{c^4}\frac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \rho^2} + 2\,\frac{\rho^3}{c^4}\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho} + \frac{\rho^2}{c^4}\frac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi^2} = \\ = \frac{\rho^4}{c^4}\left(\frac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{\rho^4}{c^4}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\,\frac{\partial \mathring{u}}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi^2}\right) = \frac{\rho^4}{c^4}\,\Delta\mathring{u}(\rho,\varphi). \end{aligned}$$

Следовательно, преобразование инверсии не изменяет уравнения *Лапласа* и сводит внешнюю задачу (4.33) к внутренней (4.23), решение которой представлено рядом (4.29). Выполнив в последнем преобразование инверсии (4.38), получим решение (4.36) внешней задачи (4.33).

4.6.9. Обоснование решения внешней задачи

4.6.10. Примеры решения внутренней и внешней задач

Пример 4.1. Рассмотрим внутреннюю задачу *Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & x^2+y^2+4x<0\,,\\ u(x,y) = x^2, & x^2+y^2+4x=0\,. \end{cases} \tag{4.39}$$

Преобразуем уравнение границы области, дополнив квадратный двучлен x^2+4x до полного квадрата

$$x^2+y^2+4x = \Big(x^2+4x+4\Big)+y^2-4 = (x+2)^2+y^2-4 = 0\,, \tag{4.40}$$

откуда заключим, что область $\mathcal{D}$, в которой поставлена задача *Дирихле* (4.39), есть круг радиуса 2 с центром в точке $(-2,0)$. В полярной системе координат опишем область $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D}: \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi - 2\,,\\ y = r\sin\varphi\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leqslant r\leqslant 2\,,\\ 0\leqslant\varphi<2\pi, \end{cases} \tag{4.41}$$

и запишем граничное условие

$$\begin{aligned} \mathring{g}_0(\varphi) &= x^2\Big|_{(x+2)^2+y^2=4} \overset{(4.41)}{=} (r\,\cos\varphi-2)^2\Big|_{r=2} = 4\,\cos^2\!\varphi - 8\cos\varphi + 4 =\\ &= 2\,(1+\,\cos 2\varphi) - 8\cos\varphi + 4 = 2\cos 2\varphi - 8\cos\varphi + 6\,. \end{aligned} \tag{4.42}$$

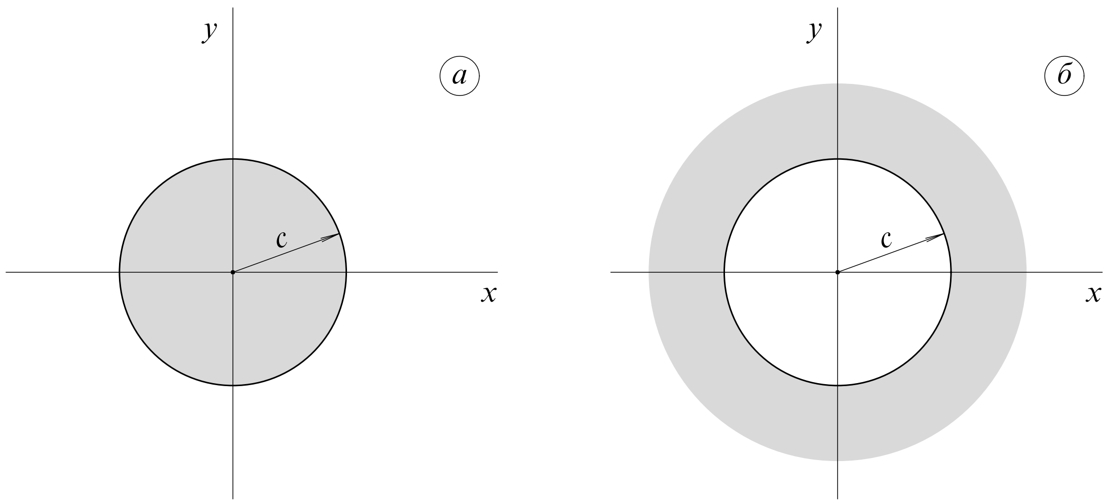

Рис. 4.5. Внутренность (*а*) и внешность (*б*) круга радиуса c

Выражение в правой части равенства (4.42) есть разложение в ряд *Фурье* (4.26) граничной функции $\mathring{u}_0(\varphi)$ задачи *Дирихле* (4.39). Следовательно, ненулевые коэффициенты ряда *Фурье* суть

$$\frac{a_0}{2} = 6\,, \qquad a_1 = -8\,, \qquad a_2 = 2\,,$$

а составленное по ним решение (4.29) внутренней задачи *Дирихле* (4.23) в переменных (r,φ) таково

$$\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \left(\frac{r}{2}\right)a_1\cos\varphi + \left(\frac{r}{2}\right)^2 a_2\cos 2\varphi = 6 - 4\,r\cos\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\cos 2\varphi\,, \quad 0\leqslant r\leqslant 2\,, \quad 0\leqslant\varphi<2\pi. \tag{4.43}$$

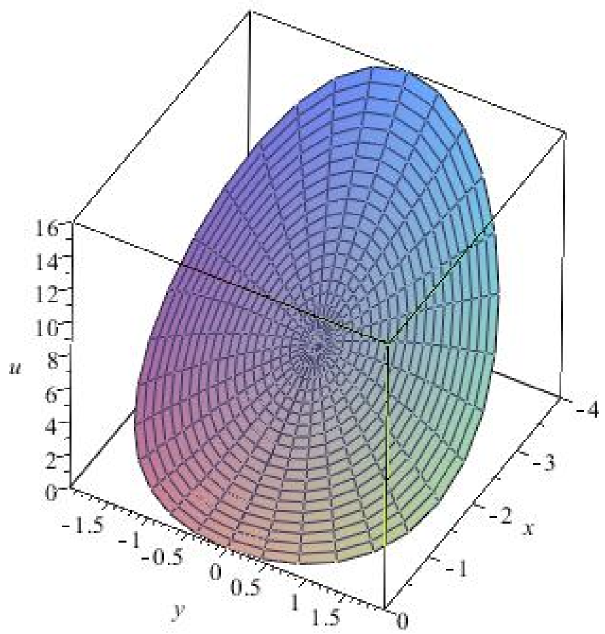

Рис. 4.6. Решение $u(x,y)$ (4.46) внутренней задачи *Дирихле* (4.39)

Вернёмся к исходным переменным (x,y) в решении (4.43), для чего применим формулу для косинуса двойного аргумента

$$\mathring{u}(r,\varphi) = 6 - 4\,r\cos\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) = 6 - 4\,r\cos\varphi + \frac{1}{2}\,r^2\cos^2\varphi - \frac{1}{2}\,r^2\sin^2\varphi\,, \tag{4.44}$$

а затем применим формулы (4.41)

$$u(x,y) = 6 - 4\,(x+2) + \frac{1}{2}\,(x+2)^2 - \frac{1}{2}\,y^2 = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2 - 2x\,. \tag{4.45}$$

Следовательно, решение задачи *Дирихле* (4.39) в переменных (x,y) таково (см. рис. 4.6)

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2 - 2x\,. \tag{4.46}$$

Обоснуем решение (4.46), показав, что оно удовлетворяет: 1) уравнению *Лапласа*; 2) граничному условию. Вначале найдём вторые повторные частные производные функции $u(x,y)$ (4.46)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = +x - 2\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = +1\,, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -y\,, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1\,,$$

и убедимся, что функция $u(x,y)$ (4.46) удовлетворяет уравнению *Лапласа*. Далее вычислим значение функции $u(x,y)$ (4.46) на границе круга

$$u(x,y)\Big|_{x^2+y^2+4x=0} = u(x,y)\Big|_{y^2=-x^2-4x} = \left(\frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,y^2 - 2x\right)\Big|_{y^2=-x^2-4x} =$$

$$= \frac{1}{2}\,x^2 - \frac{1}{2}\,(-x^2-4x) - 2x = \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{2}\,x^2 + 2x - 2x = x^2,$$

и убедимся, что функция $u(x,y)$ (4.46) удовлетворяет граничному условию. Следовательно, внутренняя задача *Дирихле* (4.39) решена правильно. ▲

Пример 4.2. Для внешней задачи *Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & x^2+y^2+4x > 0\,, \\ u(x,y) = x^2\,, & x^2+y^2+4x = 0\,, \end{cases} \tag{4.47}$$

решение получается из разложения граничной функции в ряд *Фурье* (4.42) и решения (4.36) внешней задачи *Дирихле* (4.33)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = 6 - \frac{16}{r}\,\cos\varphi + \frac{8}{r^2}\,\cos 2\varphi\,, \qquad 2 \leqslant r \leqslant +\infty\,, \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi\,. \tag{4.48}$$

Решение (4.48) показано на рис. 4.7 и 4.8.

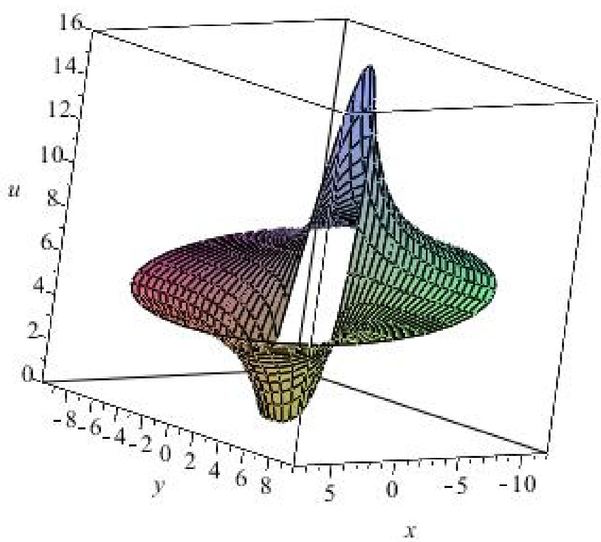

Рис. 4.7. Решение $u(x,y)$ (4.48) внешней задачи *Дирихле* (4.47): $2 \leqslant r \leqslant 10$

В силу какого свойства решения (4.36) внешней задачи *Дирихле* (4.33) решение (4.48) задачи (4.47) асимптотически выходит на постоянное значение? Чему равняется это постоянное значение? ▲

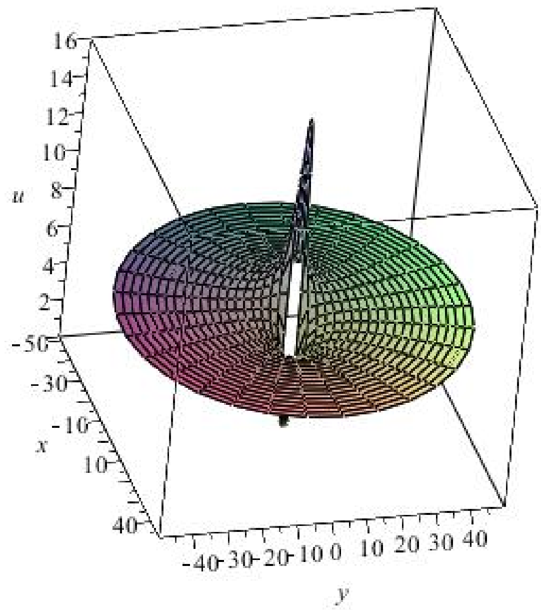

Рис. 4.8. Решение $u(x, y)$ (4.48) внешней задачи *Дирихле* (4.47): $2 \leqslant r \leqslant 50$

Пример 4.3. Рассмотрим внутреннюю задачу *Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & x^2+y^2+4x-2y-4<0\,,\\ u(x,y) = g_0(x,y)\,, & x^2+y^2+4x-2y-4=0\,, \end{cases} \tag{4.49}$$

граничные функции $u_0(x,y)$ которой записаны в табл. 4.1.

Табл. 4.1. Граничные функции для задачи (4.49)

№	Граничная функция
1	$g_{0,1}(x,y) = xy$
2	$g_{0,2}(x,y) = x^2y$
3	$g_{0,3}(x,y) = x^2y^2$
4	$g_{0,4}(x,y) = x^3y^2$

Преобразуем уравнение границы области, дополнив квадратные двучлены x^2+4x и y^2-2y до полных квадратов

$$x^2+y^2+4x-2y-4 = \Big(x^2+4x+4\Big)+\Big(y^2-2y+1\Big)-9 = (x+2)^2+(y-1)^2-9=0\,, \tag{4.50}$$

откуда заключим, что область $\mathcal{D}$, в которой поставлена задача *Дирихле* (4.49), есть круг радиуса 3 с центром в точке $(-2,1)$. В полярной системе координат область $\mathcal{D}$ имеет следующее описание

$$\mathcal{D}: \quad \begin{cases} x = r\cos\varphi - 2\,,\\ y = r\sin\varphi + 1\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} 0\leqslant r \leqslant 3\,,\\ 0\leqslant \varphi < 2\pi. \end{cases} \tag{4.51}$$

Дальнейшее изложение данного примера построено таким образом. Все окончательные выражения для решений $u(x,y)$ внутренней задачи *Дирихле* (4.56), а также вспомогательные выражения, позволяющие проследить за последовательностью действий и проверить их, сведены в табл. 4.2, 4.3, 4.4, 4.5, соответственно для наборов 1 − 4 граничных условий из табл. 4.1. Развёрнутый ход решения приведён только для граничного условия 4.

В полярной системе координат граничное условие 4 принимает вид

$$\begin{aligned} \mathring{g}_{0,4}(\varphi) &= x^3y^2\Big|_{(x+2)^2+(y-1)^2=9} = (r\cos\varphi-2)^3(r\sin\varphi+1)^2\Big|_{r=3} = \\ &= -\frac{527}{4}+\frac{1341}{8}\cos\varphi-129\sin\varphi+9\cos2\varphi+\frac{297}{2}\sin2\varphi- \\ &\quad -\frac{1431}{16}\cos3\varphi-81\sin3\varphi+\frac{243}{4}\cos4\varphi+\frac{81}{4}\sin4\varphi-\frac{243}{16}\cos5\varphi\,. \end{aligned} \tag{4.52}$$

Посмотрим на выражение (4.52) как на разложение в ряд *Фурье* (4.26) граничной функции $\mathring{g}_{0,4}(\varphi)$ задачи *Дирихле* (4.49). Тогда коэффициент a_0 и первые пять пар коэффициентов ряда *Фурье* таковы

$$\begin{aligned} &\frac{a_0}{2} = -\frac{527}{4}\,, \quad a_1 = +\frac{1341}{8}\,, \quad a_2 = +9\,, \quad a_3 = -\frac{1431}{16}\,, \quad a_4 = +\frac{243}{4}\,, \quad a_5 = -\frac{243}{16}\,, \\ &\qquad\qquad b_1 = -129\,, \quad b_2 = +\frac{297}{2}\,, \quad b_3 = -81\,, \quad b_4 = +\frac{81}{4}\,, \quad b_5 = 0\,, \end{aligned} \tag{4.53}$$

остальные коэффициенты суть нулевые. Теперь составим «заготовку» решения (4.29)

$$\begin{aligned}\mathring{u}(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \left(\frac{r}{3}\right)^1 \left(a_1 \cos 1\varphi + b_1 \sin 1\varphi\right) + \left(\frac{r}{3}\right)^2 \left(a_2 \cos 2\varphi + b_2 \sin 2\varphi\right) + \\ + \left(\frac{r}{3}\right)^3 \left(a_3 \cos 3\varphi + b_3 \sin 3\varphi\right) + \left(\frac{r}{3}\right)^4 \left(a_4 \cos 4\varphi + b_4 \sin 4\varphi\right) + \left(\frac{r}{3}\right)^5 a_5 \cos 5\varphi\,,\end{aligned} \tag{4.54}$$

в которую подставим значения коэффициентов (4.53) и получим решение задачи *Дирихле* (4.49) в переменных (r,φ)

$$\begin{aligned}\mathring{u}(r,\varphi) = -\frac{527}{4} + \frac{447}{8}\, r^1 \cos 1\varphi - 43\, r^1 \sin 1\varphi + \quad r^2 \cos 2\varphi + \frac{33}{2}\, r^2 \sin 2\varphi - \\ - \quad \frac{53}{16}\, r^3 \cos 3\varphi - \quad 3\, r^3 \sin 3\varphi + \frac{3}{4}\, r^4 \cos 4\varphi + \quad \frac{1}{4}\, r^4 \sin 4\varphi - \frac{1}{16}\, r^5 \cos 5\varphi\,.\end{aligned} \tag{4.55}$$

С помощью известных тригонометрических формул кратного аргумента

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi\,, \qquad \sin 2\varphi = 2\cos\varphi\, \sin\varphi\,,$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\, \sin^2\varphi\,, \qquad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\, \sin\varphi - \sin^3\varphi\,,$$

$$\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\, \sin^2\varphi + \sin^4\varphi\,, \qquad \sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\, \sin\varphi - 4\cos\varphi\, \sin^3\varphi\,,$$

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\, \sin^2\varphi + 5\cos\varphi\, \sin^4\varphi\,, \qquad \sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\, \sin\varphi - 10\cos^2\varphi\, \sin^3\varphi + \sin^5\varphi\,,$$

перейдём в записи решения (4.55) к тригонометрическим функциям одинарного аргумента

$$\begin{aligned}\mathring{u}(r,\varphi) = -\frac{527}{4} + \frac{447}{8}\, r\cos\varphi - 43\, r\sin\varphi + (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2 + \\ + 33\,(r\cos\varphi)(r\sin\varphi) - \frac{53}{16}\,(r\cos\varphi)^3 + \frac{159}{16}\,(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)^2 - \\ - 9\,(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi) + 3\,(r\sin\varphi)^3 + \frac{3}{4}\,(r\cos\varphi)^4 - \\ - \frac{9}{2}\,(r\cos\varphi)^2(r\sin\varphi)^2 + \frac{3}{4}\,(r\sin\varphi)^4 + (r\cos\varphi)^3(r\sin\varphi) - \\ - (r\cos\varphi)(r\sin\varphi)^3 - \frac{1}{16}\,(r\cos\varphi)^5 + \frac{5}{8}\,(r\cos\varphi)^3(r\sin\varphi)^2 - \frac{5}{16}\,(r\cos\varphi)(r\sin\varphi)^4\,.\end{aligned}$$

К последнему выражению применим формулы (4.51) перехода к декартовым переменным

$$\begin{aligned}u(x,y) = -\frac{527}{4} + \frac{447}{8}\,(x+2) - 43\,(y-1) + (x+2)^2 - (y-1)^2 + \\ + 33\,(x+2)(y-1) - \frac{53}{16}\,(x+2)^3 + \frac{159}{16}\,(x+2)(y-1)^2 - \\ - 9\,(x+2)^2(y-1) + 3\,(y-1)^3 + \frac{3}{4}\,(x+2)^4 - \\ - \frac{9}{2}\,(x+2)^2(y-1)^2 + \frac{3}{4}\,(y-1)^4 + (x+2)^3(y-1) - \\ - (x+2)(y-1)^3 - \frac{1}{16}\,(x+2)^5 + \frac{5}{8}\,(x+2)^3(y-1)^2 - \frac{5}{16}\,(x+2)(y-1)^4\,.\end{aligned}$$

Раскрыв скобки и проведя очевидные упрощения получим решение задачи *Дирихле* (4.49) в переменных (x, y) в виде многочлена пятой степени

$$\begin{aligned} u(x,y) = -\frac{1}{16}\,x^5 + \frac{5}{8}\,x^3y^2 - \frac{5}{16}\,xy^4 + \frac{1}{8}\,x^4 - \frac{1}{4}\,x^3y - \frac{3}{4}\,x^2y^2 + \frac{1}{4}\,xy^3 + \frac{1}{8}\,y^4 - \\ -\frac{3}{16}\,x^3 + \frac{1}{2}\,y^3 + \frac{9}{16}\,xy^2 - \frac{3}{2}\,x^2y - \frac{29}{8}\,x^2 + \frac{67}{8}\,xy + \frac{29}{8}\,y^2 + \frac{121}{4}\,x - \frac{57}{4}\,y - \frac{45}{2}\,. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Обоснуем решение (4.56), показав, что оно удовлетворяет: 1) уравнению *Лапласа*; 2) граничному условию. По найденным вторым повторным частным производным функции $u(x, y)$ (4.56)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{5}{16}\,x^4 + \frac{15}{8}\,x^2y^2 - \frac{5}{16}\,y^4 + \frac{1}{2}\,x^3 - \frac{3}{4}\,x^2y - \frac{3}{2}\,xy^2 + \frac{1}{4}\,y^3 - \\ &\quad -\frac{9}{16}\,x^2 + \frac{9}{16}\,y^2 - 3xy - \frac{29}{4}\,x + \frac{67}{8}\,y + \frac{121}{4}\,, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= +\frac{5}{4}\,x^3y - \frac{5}{4}\,xy^3 - \frac{1}{4}\,x^3 - \frac{3}{2}\,x^2y + \frac{3}{4}\,xy^2 + \frac{1}{2}\,y^3 + \\ &\quad +\frac{3}{2}\,y^2 + \frac{9}{8}\,xy - \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{67}{8}\,x + \frac{29}{4}\,y - \frac{57}{4}\,, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{5}{4}\,x^3 + \frac{15}{4}\,xy^2 + \frac{3}{2}\,x^2 - \frac{3}{2}\,xy - \frac{3}{2}\,y^2 - \frac{9}{8}\,x - 3y - \frac{29}{4}\,, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= +\frac{5}{4}\,x^3 - \frac{15}{4}\,xy^2 - \frac{3}{2}\,x^2 + \frac{3}{2}\,xy + \frac{3}{2}\,y^2 + 3y + \frac{9}{8}\,x + \frac{29}{4}\,, \end{aligned}$$

убеждаемся, что функция $u(x, y)$ (4.56) удовлетворяет уравнению *Лапласа*.

Представим функцию $u(x, y)$ (4.56) в виде (без доказательства)

$$u(x,y) = F(x,y)\,P_3(x,y) + g_{0,4}(x,y) = (x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4)\,P_3(x,y) + x^3y^2\,, \tag{4.57}$$

где $F(x, y)$ — многочлен степени 2 (4.50), задающий границу области (окружность радиуса 3 с центром в точке $(-2, +1)$: $(x + 2)^2 + (y - 1)^2 - 9 = 0$), $P_3(x, y)$ — подлежащий определению многочлен степени 3, $g_{0,4}(x, y)$ — многочлен степени 5, задающий граничное условие 4. Многочлен $P_3(x, y)$ найдём, разделив разность $u(x, y) - u_{0,4}(x, y)$ на $F(x, y)$ без остатка

$$P_3(x,y) = \frac{u(x,y) - g_{0,4}(x,y)}{F(x,y)} = -\frac{1}{16}\,x^3 - \frac{5}{16}\,xy^2 + \frac{3}{8}\,x^2 - \frac{3}{8}\,xy + \frac{1}{8}\,y^2 - \frac{31}{16}\,x + \frac{3}{4}\,y + \frac{45}{8}\,. \tag{4.58}$$

Из представления (4.57) сразу же убеждаемся, что функция $u(x, y)$ удовлетворяет граничному условию. Следовательно, задача *Дирихле* (4.49) решена правильно.

Решения задачи (4.49) для граничных условий $1 - 4$ показаны на рис. 4.9 — 4.12.

Данный пример показывает влияние граничной функции на решение внутренней задачи *Дирихле* и возможность представления последнего в виде (4.57). Сложные вычисления с многочленами могут быть выполнены в любой системе аналитических вычислений. ▲

Табл. 4.2. Решение задачи Дирихле (4.49) в круге $F(x, y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$ для граничного условия 1

1	$g_0(x, y)$	xy
	$\mathring{g}_0(\varphi)$	$\underbrace{-2}_{0}\underbrace{+3\cos\varphi - 6\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{9}{2}\sin 2\varphi}_{2}$
	a_μ, b_μ	$\underbrace{\frac{a_0}{2} = -2,}_{0}\quad \underbrace{a_1 = +3,\ b_1 = -6,}_{1}\quad \underbrace{b_2 = +\frac{9}{2}}_{2}$
	$\mathring{u}(r, \varphi)$	$\underbrace{-2}_{0}\underbrace{+r\cos\varphi - 2r\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{1}{2}r^2\sin 2\varphi}_{2}$
	$u(x, y)$	$\underbrace{xy}_{2}$

Табл. 4.3. Решение задачи Дирихле (4.49) в круге $F(x,y) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 9 < 0$ для граничного условия 2

2	$g_0(x,y)$	x^2y
	$\mathring{g}_0(\varphi)$	$\underbrace{+\frac{17}{2}}_{0}\underbrace{-12\cos\varphi+\frac{75}{4}\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{9}{2}\cos 2\varphi-18\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+\frac{27}{4}\sin 3\varphi}_{3}$
	a_μ, b_μ	$\underbrace{\frac{a_0}{2}=+\frac{17}{2}}_{0},\ \underbrace{a_1=-12,\ b_1=+\frac{75}{4}}_{1},\ \underbrace{a_2=+\frac{9}{2},\ b_2=-18}_{2},\ \underbrace{b_3=+\frac{27}{4}}_{3}$
	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{+\frac{17}{2}}_{0}\underbrace{-4r\cos\varphi+\frac{25}{4}r\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{1}{2}r^2\cos 2\varphi-2r^2\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+\frac{1}{4}r^3\sin 3\varphi}_{3}$
	$u(x,y)$	$\underbrace{+\frac{3}{4}x^2y-\frac{1}{4}y^3}_{3}\underbrace{-\frac{1}{4}x^2-xy+\frac{1}{4}y^2}_{2}\underbrace{-x+\frac{3}{2}y}_{1}\underbrace{+1}_{0}$
	$u(x,y)$	$=F(x,y)P(x,y)+u_0(x,y)=\Big(\underbrace{x^2+y^2}_{2}\underbrace{+4x-2y}_{1}\underbrace{-4}_{0}\Big)\Big(\underbrace{-\frac{1}{4}y}_{1}\underbrace{-\frac{1}{4}}_{0}\Big)+\underbrace{x^2y}_{3}$

Табл. 4.4. Решение задачи Дирихле (4.49) в круге $F(x,y)=(x+1)^2+(y-1)^2-9<0$ для граничного условия 3

3	$g_0(x,y)$	x^2y^2
	$\mathring{u}_0(\varphi)$	$\underbrace{+\frac{293}{8}}_{0}\underbrace{-39\cos\varphi+\frac{75}{2}\sin\varphi}_{1}\underbrace{-\frac{27}{2}\cos 2\varphi-36\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+27\cos 3\varphi+\frac{27}{2}\sin 3\varphi}_{3}\underbrace{-\frac{81}{8}\cos 4\varphi}_{4}$
	a_μ, b_μ	$\underbrace{\frac{a_0}{2}=+\frac{293}{8},}_{0}\ \underbrace{a_1=-39,\ b_1=+\frac{75}{2},}_{1}\ \underbrace{a_2=-\frac{27}{2},\ b_2=-36,}_{2}\ \underbrace{a_3=+27,\ b_3=+\frac{27}{2},}_{3}\ \underbrace{a_4=-\frac{81}{8}}_{4}$
	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{+\frac{293}{8}}_{0}\underbrace{-13\,r\cos\varphi+\frac{25}{2}\,r\sin\varphi}_{1}\underbrace{-\frac{3}{2}\,r^2\cos 2\varphi-4\,r^2\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+r^3\cos 3\varphi+\frac{1}{2}\,r^3\sin 3\varphi}_{3}\underbrace{-\frac{1}{8}\,r^4\cos 4\varphi}_{4}$
	$u(x,y)$	$\underbrace{-\frac{1}{8}\,x^4+\frac{3}{4}\,x^2y^2-\frac{1}{8}\,y^4}_{4}\underbrace{+\frac{3}{4}\,x^2-2\,xy-\frac{3}{4}\,y^2}_{2}\underbrace{-9\,x+\frac{9}{2}\,y}_{1}\underbrace{+7}_{0}$
	$u(x,y)$	$=F(x,y)P(x,y)+u_0(x,y)=\left(\underbrace{x^2+y^2}_{2}\underbrace{+4x-2y}_{1}\underbrace{-4}_{0}\right)\left(\underbrace{-\frac{1}{8}\,x^2-\frac{1}{8}\,y^2}_{2}\underbrace{+\frac{1}{2}\,x-\frac{1}{4}\,y}_{1}\underbrace{-\frac{7}{4}}_{0}\right)+\underbrace{x^2y^2}_{4}$

Табл. 4.5. Решение задачи Дирихле (4.49) в круге $F(x,y)=(x+1)^2+(y-1)^2-9<0$ для граничного условия 4

4	$g_0(x,y)$	x^3y^2
	$\mathring{g}_0(\varphi)$	$\underbrace{-\frac{527}{4}}_{0}\underbrace{+\frac{1341}{8}\cos\varphi-129\sin\varphi}_{1}\underbrace{+9\cos 2\varphi+\frac{297}{2}\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{-\frac{1431}{16}\cos 3\varphi-81\sin 3\varphi}_{3}\underbrace{+\frac{243}{4}\cos 4\varphi+\frac{81}{4}\sin 4\varphi}_{4}\underbrace{-\frac{243}{16}\cos 5\varphi}_{5}$
	a_μ, b_μ	$\underbrace{\frac{a_0}{2}=-\frac{527}{4}}_{0},\ \underbrace{a_1=+\frac{1341}{8},\ b_1=-129}_{1},\ \underbrace{a_2=9,\ b_2=+\frac{297}{2}}_{2},\ \underbrace{a_3=-\frac{1431}{16},\ b_3=-81}_{3},\ \underbrace{a_4=+\frac{243}{4},\ b_4=+\frac{81}{4}}_{4},\ \underbrace{a_5=-\frac{243}{16}}_{5}$
	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{-\frac{527}{4}}_{0}\underbrace{+\frac{447}{8}r\cos\varphi-43r\sin\varphi}_{1}\underbrace{+r^2\cos 2\varphi+\frac{33}{2}r^2\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{-\frac{53}{16}r^3\cos 3\varphi-3r^3\sin 3\varphi}_{3}\underbrace{+\frac{3}{4}r^4\cos 4\varphi+\frac{1}{4}r^4\sin 4\varphi}_{4}\underbrace{-\frac{1}{16}r^5\cos 5\varphi}_{5}$
	$u(x,y)$	$\underbrace{-\frac{1}{16}x^5+\frac{5}{8}x^3y^2-\frac{5}{16}xy^4}_{5}\underbrace{+\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{4}x^3y-\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{1}{4}xy^3+\frac{1}{8}y^4}_{4}\underbrace{-\frac{3}{16}x^3+\frac{1}{2}y^3+\frac{9}{16}xy^2-\frac{3}{2}x^2y}_{3}\underbrace{-\frac{29}{8}x^2+\frac{67}{8}xy+\frac{29}{8}y^2}_{2}+$ $\underbrace{+\frac{121}{4}x-\frac{57}{4}y}_{1}\underbrace{-\frac{45}{2}}_{0}$
	$u(x,y)$	$F(x,y)P(x,y)+u_0(x,y)=\Big(\underbrace{x^2+y^2}_{2}\underbrace{+4x-2y}_{1}\underbrace{-4}_{0}\Big)\Big(\underbrace{-\frac{1}{16}x^3-\frac{5}{16}xy^2}_{3}\underbrace{+\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{8}xy+\frac{1}{8}y^2}_{2}\underbrace{-\frac{31}{16}x+\frac{3}{4}y}_{1}\underbrace{+\frac{45}{8}}_{0}\Big)+\underbrace{x^3y^2}_{5}$

Пример 4.4. Рассмотрим внешнюю задачу *Дирихле*

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & x^2+y^2+4x-2y-4>0\,, \\ u(x,y) = g_0(x,y)\,, & x^2+y^2+4x-2y-4=0\,, \end{cases} \tag{4.59}$$

с четырьмя наборами граничного условия, помещёнными в табл. 4.1 на с. 103.

Поскольку граничные условия *внешней* задачи такие же, как и для подробно рассмотренной *внутренней* задачи из примера 4.3, из последней заимствуются разложения граничных функций $\mathring{g}_0(\varphi)$ в ряд *Фурье*, самоё же решение *внешней* задачи строится по образцу решения внешней задачи из примера 4.2.

Решения внешней задачи (4.59) помещены в табл. 4.6 и показаны на рис. 4.13—4.16. ▲

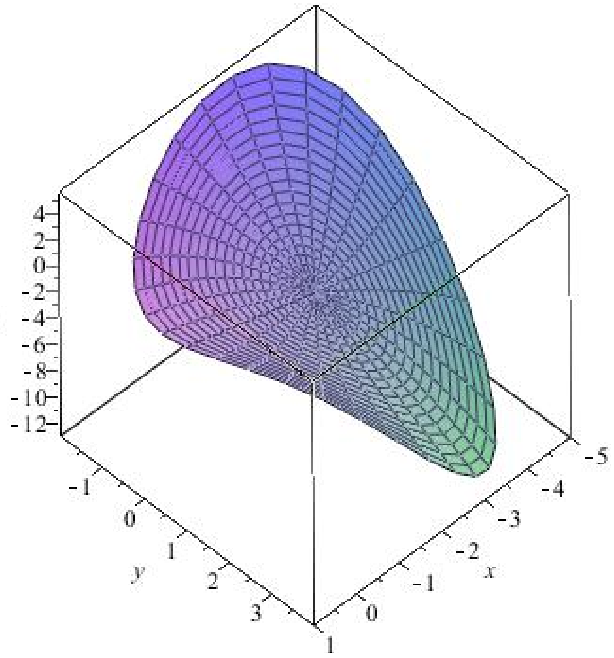

Рис. 4.9. Решение внутренней задачи *Дирихле* (4.49): граничное условие 1 (табл. 4.1, 4.2)

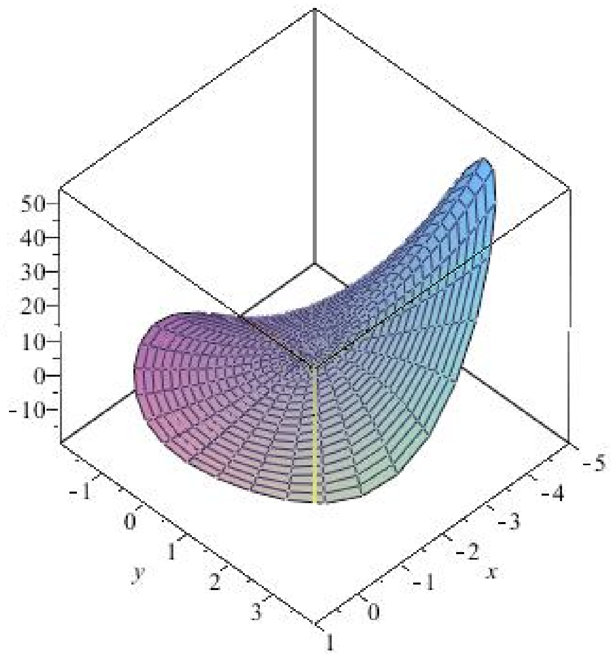

Рис. 4.10. Решение внутренней задачи *Дирихле* (4.49): граничное условие 2 (табл. 4.1, 4.3)

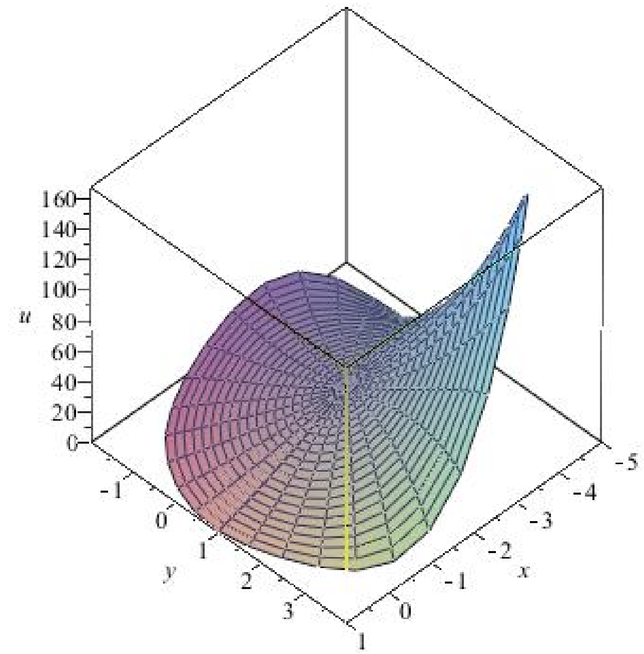

Рис. 4.11. Решение внутренней задачи *Дирихле* (4.49): граничное условие 3 (табл. 4.1, 4.4)

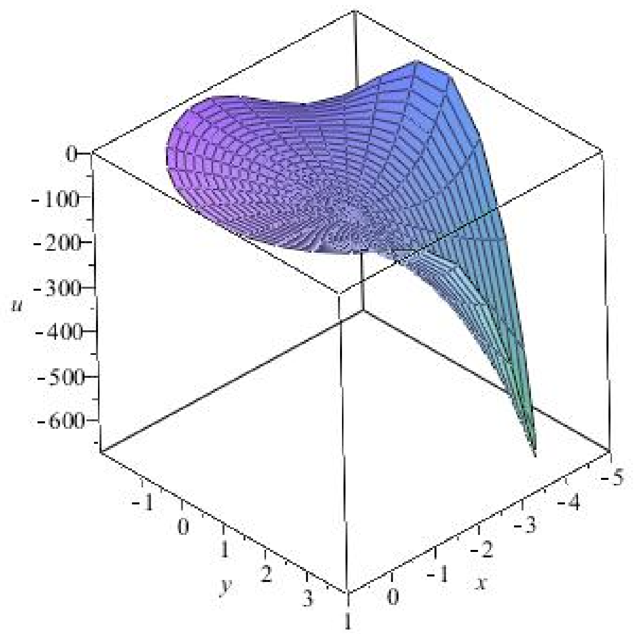

Рис. 4.12. Решение внутренней задачи *Дирихле* (4.49): граничное условие 4 (табл. 4.1, 4.5)

Табл. 4.6. Решения задачи Дирихле (4.59) вне круга $F(x,y)=(x+1)^2+(y-1)^2-9>0$ для граничных условий 1 – 4

1	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{-2}_{0}\underbrace{+9\,\frac{1}{r}\cos\varphi-18\,\frac{1}{r}\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{81}{2}\,\frac{1}{r^2}\sin 2\varphi}_{2}$
2	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{+\frac{17}{2}}_{0}\underbrace{-36\,\frac{1}{r}\cos\varphi+\frac{225}{4}\,\frac{1}{r}\sin\varphi}_{1}\underbrace{+\frac{81}{2}\,\frac{1}{r^2}\cos 2\varphi-162\,\frac{1}{r^2}\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+\frac{729}{4}\,\frac{1}{r^3}\sin 3\varphi}_{3}$
3	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{+\frac{293}{8}}_{0}\underbrace{-117\,\frac{1}{r}\cos\varphi+\frac{225}{2}\,\frac{1}{r}\sin\varphi}_{1}\underbrace{-\frac{243}{2}\,\frac{1}{r^2}\cos 2\varphi-324\,\frac{1}{r^2}\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{+729\,\frac{1}{r^3}\cos 3\varphi+\frac{729}{2}\,\frac{1}{r^3}\sin 3\varphi}_{3}\underbrace{-\frac{6561}{8}\,\frac{1}{r^4}\cos 4\varphi}_{4}$
4	$\mathring{u}(r,\varphi)$	$\underbrace{-\frac{527}{4}}_{0}\underbrace{+\frac{4023}{8}\,\frac{1}{r}\cos\varphi-387\,\frac{1}{r}\sin\varphi}_{1}\underbrace{+81\,\frac{1}{r^2}\cos 2\varphi+\frac{2673}{2}\,\frac{1}{r^2}\sin 2\varphi}_{2}\underbrace{-\frac{38637}{16}\,\frac{1}{r^3}\cos 3\varphi-2187\,\frac{1}{r^3}\sin 3\varphi}_{3}+$ $\underbrace{+\frac{19683}{4}\,\frac{1}{r^4}\cos 4\varphi+\frac{6561}{4}\,\frac{1}{r^4}\sin 4\varphi}_{4}\underbrace{-\frac{59049}{16}\,\frac{1}{r^5}\cos 5\varphi}_{5}$

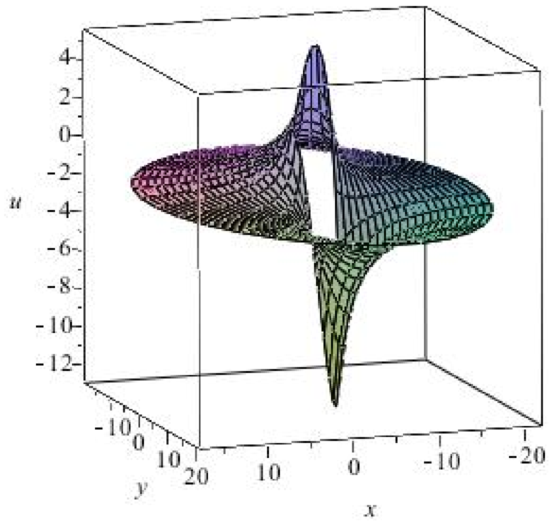

Рис. 4.13. Решение внешней задачи *Дирихле* (4.59): граничное условие 1 (табл. 4.1, 4.6)

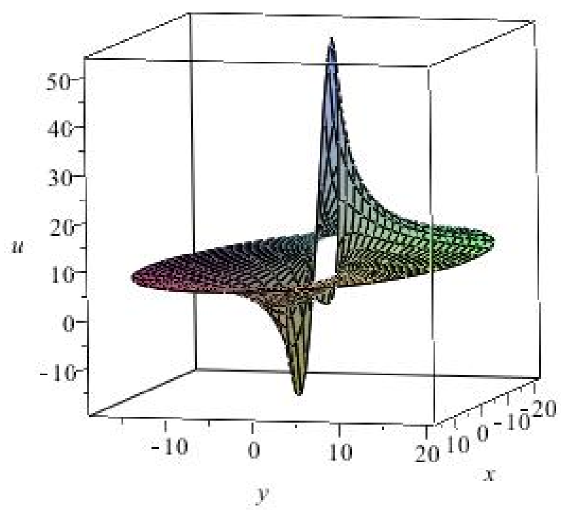

Рис. 4.14. Решение внешней задачи *Дирихле* (4.59): граничное условие 2 (табл. 4.1, 4.6)

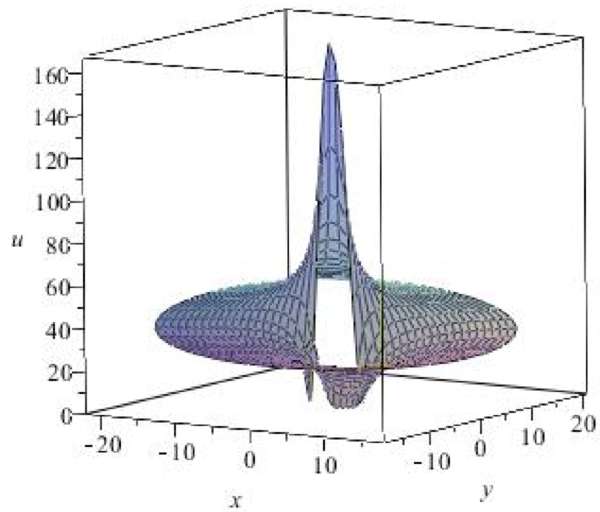

Рис. 4.15. Решение внешней задачи *Дирихле* (4.59): граничное условие 3 (табл. 4.1, 4.6)

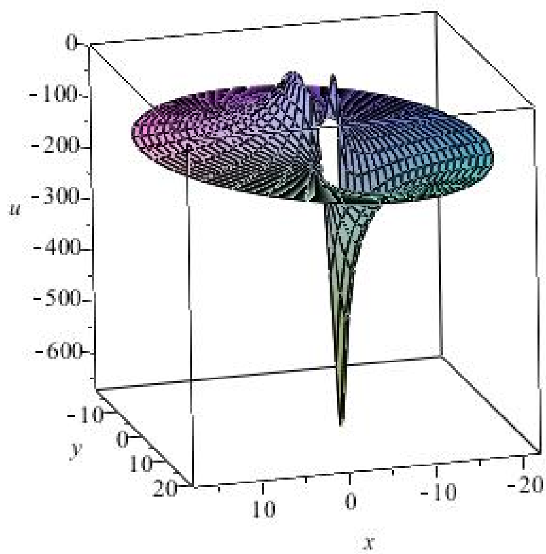

Рис. 4.16. Решение внешней задачи *Дирихле* (4.59): граничное условие 4 (табл. 4.1, 4.6)

4.7. Задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* внутри и вне круга

4.7.1. Постановка внутренней задачи

Внутренняя задача *Неймана* для круга состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую в круге $\mathcal{D}$ и непрерывную в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ круга гармоническую функцию u, производная которой по направлению орта $\boldsymbol{\nu}$ внешней нормали к границе $\mathcal{C}$ круга принимает заданные значения (рис. 4.17, *а*)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathcal{D} = \Big\{(x,y)\colon\, x^2+y^2<c^2\Big\}\,, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_1(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C} \;= \Big\{(x,y)\colon\, x^2+y^2=c^2\Big\}\,, \end{cases} \tag{4.60}$$

причём выполнено условие разрешимости задачи (см. свойство гармонических функций, выражаемое теоремой 4.1 на с. 89 и задачу 4.5 на с. 134)

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} g_1(x,y)\,\mathrm{d}\mathcal{C} = 0\,. \tag{4.61}$$

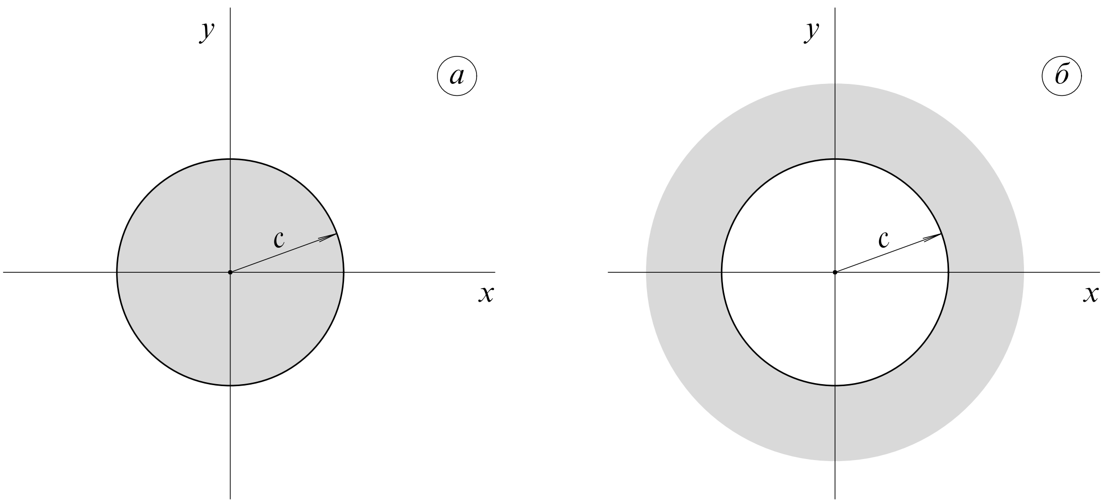

Рис. 4.17. Внутренность (*а*) и внешность (*б*) круга радиуса c

В полярной системе координат (3.42) постановка задачи такова

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial \varphi^2} = 0\,, & (r,\varphi) \in (0,c)\times(0,2\pi)\,, \\ \dfrac{\partial \mathring{u}(c,\varphi)}{\partial r} = \mathring{g}_1(\varphi)\,, & \varphi \in [0,2\pi)\,, \\ \quad \mathring{u}(r,0) = \mathring{u}(r,2\pi)\,, & r \in [0,c]\,, \end{cases} \tag{4.62}$$

где добавлено условие периодичности решения по переменной φ и должно быть учтено условие разрешимости (4.61)

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{4.63}$$

Заметим, что внутренняя задача *Неймана* имеет неединственное решение: если функция $\mathring{u}(r,\varphi)$ — некоторое решение задачи, то таковым будет и функция $\mathring{u}(r,\varphi) + C$.

4.7.2. Решение внутренней задачи методом разделения переменных

Обратимся к ∞-параметрическому семейству решений (3.57) на с. 77 уравнения *Лапласа* (3.44) в полярной системе координат

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu}\Big)\Big(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\Big)\,, \tag{4.64}$$

в котором сохраним только члены, ограниченные в круге

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} r^{\mu}\Big(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\Big)\,. \tag{4.65}$$

Произвольные постоянные в семействе (4.65) определим из граничного условия задачи (4.62):

1) найдём производную семейства по направлению орта внешней нормали к границе круга

$$\frac{\partial \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\, r^{\mu-1}\Big(A_\mu \cos(\mu\varphi) + B_\mu \sin(\mu\varphi)\Big)\,, \tag{4.66}$$

2) разложим функцию $\mathring{g}_1(\varphi)$ в ряд *Фурье*

$$\mathring{g}_1(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_\mu \cos(\mu\varphi) + b_\mu \sin(\mu\varphi)\Big)\,, \tag{4.67}$$

где a_μ и b_μ суть коэффициенты *Фурье* (см. задачу 4.11 на с. 135)

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\cos(\mu\phi)\,\mathrm{d}\phi\,, \qquad b_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\sin(\mu\phi)\,\mathrm{d}\phi\,; \tag{4.68}$$

3) приравняем коэффициенты ряда (4.66) при $r = c$ и ряда (4.67) и получим счётную последовательность равенств для произвольных постоянных A_μ и B_μ

$$\begin{cases} \mu\, c^{\mu-1} A_\mu = a_\mu\,, \\ \mu\, c^{\mu-1} B_\mu = b_\mu\,, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}\,, \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A_\mu = \dfrac{a_\mu}{\mu\, c^{\mu-1}}\,, \\ B_\mu = \dfrac{b_\mu}{\mu\, c^{\mu-1}}\,, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{4.69}$$

Следовательно, решение внутренней задачи *Неймана* в круге (4.62) имеет следующий вид

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + c\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu}\Big(a_\mu \cos(\mu\varphi) + b_\mu \sin(\mu\varphi)\Big)\,, \tag{4.70}$$

где A_0 — произвольная постоянная (см. задачу 4.12 на с. 135).

4.7.3. Решение внутренней задачи с помощью интеграла *Дини*

Подставим в решение (4.70) задачи (4.62) вместо коэффициентов *Фурье* их выражения (4.68), тогда будем иметь

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu}\Big[\cos(\mu\phi)\cos(\mu\varphi) + \sin(\mu\phi)\sin(\mu\varphi)\Big]\right\}\mathring{g}_1(\phi)\,\mathrm{d}\phi =$$

$$= A_0 + \frac{c}{\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu}\cos\big[\mu(\varphi-\phi)\big]\right\}\mathring{g}_1(\phi)\,\mathrm{d}\phi\,. \tag{4.71}$$

Преобразуем выражение в фигурных скобках представления (4.71):

1) применим формулу *Эйлера* $\exp(i\mu\psi) = \cos(\mu\psi) + i\sin(\mu\psi)$, где $\psi = \varphi - \phi$, (также см. задачу 4.13 на с. 135)

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu}\cos(\mu\psi) = \left\{\varrho := \frac{r}{c} < 1\right\} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\,\mathrm{Re}\Big(\varrho^{\mu}\,\mathrm{e}^{i\mu\psi}\Big) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\,\mathrm{Re}\Big(\varrho\,\mathrm{e}^{i\psi}\Big)^{\mu} =$$

$$= \left\{z := \varrho\,\mathrm{e}^{i\psi},\ |z|<1\right\} = \mathrm{Re}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^{\mu}}{\mu} = -\,\mathrm{Re}\,\ln(1-z) = -\ln|1-z|\,;$$

2) вычислим аргумент натурального логарифма в последнем выражении

$$|1-z| = \Big|1-\varrho\,\mathrm{e}^{i\psi}\Big| = \Big|1-\frac{r}{c}\cos\psi + i\,\frac{r}{c}\sin\psi\Big| = \sqrt{\frac{c^2+r^2-2\,cr\cos(\varphi-\phi)}{c^2}}\,;$$

3) подставим полученный аргумент в натуральный алгоритм

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu}\left(\frac{r}{c}\right)^{\mu}\cos(\mu\psi) = -\frac{1}{2}\ln\frac{c^2+r^2-2\,cr\cos(\varphi-\phi)}{c^2}\,.$$

Заменим выражение в фигурных скобках представления (4.71) полученным и запишем окончательную интегральную формулу решения задачи (4.62) (интеграл *Дини*)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 - \frac{c}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\,\mathtt{ln}\,\frac{c^2+r^2-2\,cr\,\mathtt{cos}\,(\varphi-\phi)}{c^2}\,\mathrm{d}\phi\,, \tag{4.72}$$

которая допускает ещё одну запись (см. задачу 4.14 на с. 135)

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 - \frac{c}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\,\mathtt{ln}\Big(c^2+r^2-2\,cr\,\mathtt{cos}\,(\varphi-\phi)\Big)\,\mathrm{d}\phi\,. \tag{4.73}$$

4.7.4. Постановка внешней задачи

Внешняя задача *Неймана* для круга состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую во внешности $\mathcal{D}$ круга и непрерывную в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ внешности круга гармоническую функцию u, производная которой по направлению орта $\boldsymbol{\nu}$ внутренней нормали к границе $\mathcal{C}$ круга принимает заданные значения (рис. 4.17, *б* на с. 116)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y)\in\mathcal{D} = \Big\{(x,y)\colon\, x^2+y^2>c^2\Big\}\,, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial\boldsymbol{\nu}} = g_1(x,y)\,, & (x,y)\in\mathcal{C} = \Big\{(x,y)\colon\, x^2+y^2=c^2\Big\}\,, \end{cases} \tag{4.74}$$

причём выполнено условие разрешимости задачи (см. свойство гармонических функций, выражаемое теоремой 4.1 на с. 89 и задачу 4.5 на с. 134)

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} g_1(x,y)\,\mathrm{d}\mathcal{C} = 0\,. \tag{4.75}$$

В полярной системе координат (3.42) постановка задачи такова

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial\mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\mathring{u}(r,\varphi)}{\partial\varphi^2} = 0\,, & (r,\varphi)\in(c,+\infty)\times(0,2\pi)\,, \\ -\dfrac{\partial\mathring{u}(c,\varphi)}{\partial r} = \mathring{g}_1(\varphi)\,, & \varphi\in[0,2\pi)\,, \\ \quad\mathring{u}(r,0) = \mathring{u}(r,2\pi)\,, & r\in[c,+\infty]\,, \end{cases} \tag{4.76}$$

где добавлено условие периодичности решения по переменной φ и учтено условие разрешимости (4.75)

$$\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{4.77}$$

Решение внешней задачи *Неймана* определено с точностью до аддитивной постоянной: если функция $\mathring{u}(r,\varphi)$ — некоторое решение задачи, то таковым будет и функция $\mathring{u}(r,\varphi)+C$.

4.7.5. Решение внешней задачи методом разделения переменных

Обратимся к ∞-параметрическому семейству решений (3.57) на с. 77 уравнения *Лапласа* (3.44) в полярной системе координат

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu}\right) \left(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\right), \tag{4.78}$$

в котором сохраним только члены, ограниченные вне круга

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} r^{-\mu} \left(A_\mu \cos\mu\varphi + B_\mu \sin\mu\varphi\right). \tag{4.79}$$

Произвольные постоянные в семействе (4.79) определим с помощью граничного условия задачи (4.76):

1) найдём производную семейства по направлению орта внутренней нормали к границе круга (см. постановку задачи (4.76))

$$-\frac{\partial \mathring{u}(c,\varphi)}{\partial r} = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu\, c^{-\mu-1} \left(A_\mu \cos(\mu\varphi) + B_\mu \sin(\mu\varphi)\right); \tag{4.80}$$

2) разложим функцию $\mathring{u}_1(\varphi)$ в ряд *Фурье*

$$\mathring{g}_1(\varphi) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(a_\mu \cos(\mu\varphi) + b_\mu \sin(\mu\varphi)\right), \tag{4.81}$$

где a_μ и b_μ суть коэффициенты *Фурье* (см. задачу 4.15 на с. 136)

$$a_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\cos(\mu\phi)\,\mathrm{d}\phi\,, \qquad b_\mu = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_1(\phi)\sin(\mu\phi)\,\mathrm{d}\phi\,; \tag{4.82}$$

3) приравняем коэффициенты тригонометрических рядов (4.80) и (4.81) и получим счётную последовательность равенств для произвольных постоянных A_μ и B_μ

$$\begin{cases} \dfrac{\mu\, A_\mu}{c^{\mu+1}} = a_\mu\,, \\[2ex] \dfrac{\mu\, B_\mu}{c^{\mu+1}} = b_\mu\,, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} A_\mu = \dfrac{a_\mu\, c^{\mu+1}}{\mu}\,, \\[2ex] B_\mu = \dfrac{b_\mu\, c^{\mu+1}}{\mu}\,, \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{N}. \tag{4.83}$$

Следовательно, решение внутренней задачи *Неймана* в круге (4.62) таково

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + c\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{\mu}\left(\frac{c}{r}\right)^{\mu} \left(a_\mu \cos(\mu\varphi) + b_\mu \sin(\mu\varphi)\right), \tag{4.84}$$

где A_0 — произвольная постоянная (см. задачу 4.16 на с. 136).

4.7.6. Решение внешней задачи с помощью интеграла *Дини*

4.7.7. Примеры решения внутренней и внешней задач

4.8. Задача *Дирихле* для уравнения *Лапласа* в кольце

4.8.1. Постановка задачи

Задача *Дирихле* в кольце состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую в кольце $\mathcal{D}$ и непрерывную в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ кольца гармоническую функцию u, принимающую заданные значения на границе $\mathcal{C}=\mathcal{C}_1+\mathcal{C}_2$ кольца (рис. 4.18)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y)=0\,, & (x,y)\in\mathcal{D}\,=\Big\{(x,y)\mid c_1^2<x^2+y^2<c_2^2\Big\}\,,\\ u(x,y)=g_{0,1}(x,y)\,, & (x,y)\in\mathcal{C}_1=\Big\{(x,y)\mid x^2+y^2=c_1^2\Big\}\,,\\ u(x,y)=g_{0,2}(x,y)\,, & (x,y)\in\mathcal{C}_2=\Big\{(x,y)\mid x^2+y^2=c_2^2\Big\}\,, \end{cases} \tag{4.85}$$

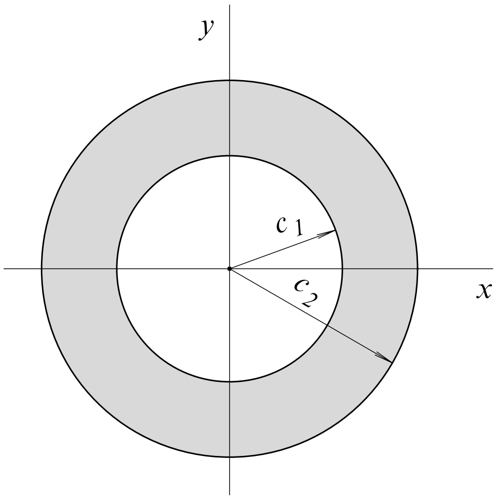

Рис. 4.18. Кольцевая область с внутренним c_1 и внешним c_2 радиусами

В полярной системе координат постановка задачи *Дирихле* (4.85) принимает такой вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial\mathring{u}}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\mathring{u}}{\partial\varphi^2}=0\,, & (r,\varphi)\in(c_1,c_2)\times[0,2\pi)\,,\\ \mathring{u}(c_1,\varphi)=\mathring{g}_{0,1}(\varphi)\,, & \\ & \varphi\in[0,2\pi)\,,\\ \mathring{u}(c_2,\varphi)=\mathring{g}_{0,2}(\varphi)\,, & \\ \mathring{u}(r,0)=\mathring{u}(r,2\pi)\,, & r\in[c_1,c_2]\,, \end{cases} \tag{4.86}$$

где добавлено условие периодичности.

4.8.2. Решение задачи методом разделения переменных

Для решения задачи *Дирихле* в кольце (4.86) обратимся к ∞-параметрическому семейству решений уравнения *Лапласа* в полярных переменных (см. (3.57) на с. 77), в котором сохраним все члены и изменим обозначения произвольных постоянных

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\left(A_\mu\, r^{-\mu} + B_\mu\, r^{+\mu} \right) \cos\mu\varphi + \left(C_\mu\, r^{-\mu} + D_\mu\, r^{+\mu} \right) \sin\mu\varphi \right]. \quad (4.87)$$

Решение задачи построим с помощью следующего алгоритма:

1) разложим граничные функции $\mathring{g}_{0,1}(\varphi)$, $\mathring{g}_{0,2}(\varphi)$ в ряды *Фурье*

$$\begin{cases} \mathring{g}_{0,1}(\varphi) = \dfrac{a_{0,1}}{2} + \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(a_{\mu,1} \cos\mu\varphi + b_{\mu,1} \sin\mu\varphi \right), \\ \mathring{g}_{0,2}(\varphi) = \dfrac{a_{0,2}}{2} + \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} \left(a_{\mu,2} \cos\mu\varphi + b_{\mu,2} \sin\mu\varphi \right), \end{cases} \quad (4.88)$$

где коэффициенты разложения суть

$$\begin{cases} a_{0,1} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,1}(\phi)\,\mathrm{d}\phi, \\ a_{\mu,1} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,1}(\phi) \cos\mu\phi\,\mathrm{d}\phi, \qquad b_{\mu,1} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,1}(\phi) \sin\mu\phi\,\mathrm{d}\phi, \end{cases} \quad (4.89)$$

$$\begin{cases} a_{0,2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,2}(\phi)\,\mathrm{d}\phi, \\ a_{\mu,2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,2}(\phi) \cos\mu\phi\,\mathrm{d}\phi, \qquad b_{\mu,2} = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathring{g}_{0,2}(\phi) \sin\mu\phi\,\mathrm{d}\phi; \end{cases} \quad (4.90)$$

2) запишем граничные условия для семейства (4.87)

$$u(c_1,\varphi) = A_0 + B_0 \ln c_1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\left(A_\mu\, c_1^{-\mu} + B_\mu\, c_1^{+\mu} \right) \cos\mu\varphi + \left(C_\mu\, c_1^{-\mu} + D_\mu\, c_1^{+\mu} \right) \sin\mu\varphi \right] =$$

$$= \frac{a_{1,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(a_{1,\mu} \cos\mu\varphi + b_{1,\mu} \sin\mu\varphi \right) = g_1(\varphi), \quad (4.91)$$

$$u(c_2,\varphi) = A_0 + B_0 \,\mathtt{ln}\, c_2 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left[\left(A_\mu \, c_2^{-\mu} + B_\mu \, c_2^{+\mu} \right) \mathtt{cos}\,\mu\varphi + \left(C_\mu \, c_2^{-\mu} + D_\mu \, c_2^{+\mu} \right) \mathtt{sin}\,\mu\varphi \right] =$$

$$= \frac{a_{2,0}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(a_{2,\mu} \,\mathtt{cos}\,\mu\varphi + b_{2,\mu} \,\mathtt{sin}\,\mu\varphi \right) = g_2(\varphi)\,; \tag{4.92}$$

3) из сопоставления левых и правых частей граничных условий (4.91) и (4.92) получим счетные последовательности независимых (относительно μ) систем линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных семейства (4.87)

$$\begin{cases} 2\,A_0 + 2\,\mathtt{ln}\,c_1\, B_0 = a_{0,1}\,, \\ 2\,A_0 + 2\,\mathtt{ln}\,c_2\, B_0 = a_{0,2}\,, \end{cases} \tag{4.93}$$

$$\begin{cases} c_1^{-\mu}\, A_\mu + c_1^{+\mu}\, B_\mu = a_{\mu,1}\,, \\ c_2^{-\mu}\, A_\mu + c_2^{+\mu}\, B_\mu = a_{\mu,2}\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1^{-\mu}\, C_\mu + c_1^{+\mu}\, D_\mu = b_{\mu,1}\,, \\ c_2^{-\mu}\, C_\mu + c_1^{+\mu}\, D_\mu = b_{\mu,2}\,, \end{cases} \qquad \mu = 1, 2, \ldots; \tag{4.94}$$

4) решим систему (4.93) по формулам *Крамера*

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 2 & \mathtt{ln}\,c_1 \\ 2 & \mathtt{ln}\,c_2 \end{vmatrix}, \qquad A_0 = \Delta_0^{-1} \begin{vmatrix} a_{0,1} & \mathtt{ln}\,c_1 \\ a_{0,2} & \mathtt{ln}\,c_2 \end{vmatrix}, \qquad B_0 = \Delta_0^{-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{0,1} \\ 1 & a_{0,2} \end{vmatrix};$$

5) решим системы (4.94) по формулам *Крамера*

$$\Delta_\mu = \begin{vmatrix} c_1^{-\mu} & c_1^{+\mu} \\ c_2^{-\mu} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, \qquad A_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} a_{\mu,1} & c_1^{+\mu} \\ a_{\mu,2} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, \qquad B_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} c_1^{-\mu} & a_{\mu,1} \\ c_2^{-\mu} & a_{\mu,2} \end{vmatrix},$$

$$C_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} b_{\mu,1} & c_1^{+\mu} \\ b_{\mu,2} & c_2^{+\mu} \end{vmatrix}, \qquad D_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} c_1^{+\mu} & b_{\mu,1} \\ c_2^{+\mu} & b_{\mu,2} \end{vmatrix};$$

6) запишем окончательные выражения для постоянных семейства (4.87)

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{a_{0,1}\,\mathtt{ln}\,c_2 - a_{0,2}\,\mathtt{ln}\,c_1}{\mathtt{ln}\,c_2 - \mathtt{ln}\,c_1}\,, \quad A_\mu = c_1^\mu c_2^\mu\, \dfrac{c_2^\mu\, a_{1,\mu} - c_1^\mu\, a_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \quad B_\mu = \dfrac{c_2^\mu\, a_{2,\mu} - c_1^\mu\, a_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \\ B_0 = \dfrac{1}{2}\, \dfrac{a_{0,2} - a_{0,1}}{\mathtt{ln}\,c_2 - \mathtt{ln}\,c_1}\,, \quad C_\mu = c_1^\mu c_2^\mu\, \dfrac{c_2^\mu\, b_{1,\mu} - c_1^\mu\, b_{2,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \quad D_\mu = \dfrac{c_2^\mu\, b_{2,\mu} - c_1^\mu\, b_{1,\mu}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,. \end{cases} \tag{4.95}$$

4.8.3. Примеры решения задачи

4.9. Задача *Неймана* для уравнения *Лапласа* в кольце

4.9.1. Постановка задачи

Задача *Неймана* в кольце состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую в кольце $\mathcal{D}$ и непрерывно дифференцируемую в замыкании $\mathcal{D} + \mathcal{C}$ кольца гармоническую функцию u, производная которой по направлению орта $\boldsymbol{\nu}$ внешней нормали к границе $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2$ кольца принимает заданные значения (рис. 4.18 на с. 121)

$$\begin{cases} \Delta u(x,y) = 0\,, & (x,y) \in \mathcal{D} = \Big\{(x,y) \mid c_1^2 < x^2 + y^2 < c_2^2\Big\}\,, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_{1,1}(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C}_1 = \Big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = c_1^2\Big\}\,, \\ \dfrac{\partial u(x,y)}{\partial \boldsymbol{\nu}} = g_{1,2}(x,y)\,, & (x,y) \in \mathcal{C}_2 = \Big\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = c_2^2\Big\}\,, \end{cases} \tag{4.96}$$

причём выполнено условие разрешимости задачи (см. свойство гармонических функций, выражаемое теоремой 4.1 на с. 89 и задачу 4.5 на с. 134)

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{C} = \oint\limits_{\mathcal{C}_1} g_1\,\mathrm{d}\mathcal{C}_1 + \oint\limits_{\mathcal{C}_2} g_2\,\mathrm{d}\mathcal{C}_2 = 0\,. \tag{4.97}$$

В полярной системе координат постановка задачи *Неймана* принимает такой вид

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\,\dfrac{\partial \mathring{u}}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 \mathring{u}}{\partial \varphi^2} = 0\,, & (r,\varphi) \in (c_1, c_2) \times [0, 2\pi)\,, \\ \left.\begin{array}{l} -\dfrac{\partial \mathring{u}(c_1,\varphi)}{\partial r} = \mathring{g}_{1,1}(\varphi) \\ +\dfrac{\partial \mathring{u}(c_2,\varphi)}{\partial r} = \mathring{g}_{1,2}(\varphi) \end{array}\right\}, & \varphi \in [0, 2\pi)\,, \\ \mathring{u}(r,0) = \mathring{u}(r,2\pi)\,, & r \in [c_1, c_2]\,, \end{cases} \tag{4.98}$$

где добавлено условие периодичности и учтено условие разрешимости (4.97)

$$c_2 \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,2}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + c_1 \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,1}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0\,. \tag{4.99}$$

4.9.2. Решение задачи методом разделения переменных

Для решения задачи *Неймана* в кольце (4.98) обратимся к ∞-параметрическому семейству решений уравнения *Лапласа* в полярных переменных (см. (3.57) на с. 77), в котором сохраним все члены и изменим обозначения произвольных постоянных

$$\mathring{u}(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{\mu=1}^{\infty}\left[\Big(A_\mu r^{-\mu} + B_\mu r^{+\mu}\Big)\cos\mu\varphi + \Big(C_\mu r^{-\mu} + D_\mu r^{+\mu}\Big)\sin\mu\varphi\right]. \tag{4.100}$$

Решение задачи построим с помощью следующего алгоритма:

1) разложим граничные функции $\mathring{g}_{1,1}(\varphi)$, $\mathring{g}_{1,2}(\varphi)$ в ряды *Фурье*

$$\begin{cases} \mathring{g}_{1,1}(\varphi) = \dfrac{a_{0,1}}{2} + \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_{\mu,1} \cos \mu\varphi + b_{\mu,1} \sin \mu\varphi \Big) \,, \\ \mathring{g}_{1,2}(\varphi) = \dfrac{a_{0,2}}{2} + \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_{\mu,2} \cos \mu\varphi + b_{\mu,2} \sin \mu\varphi \Big) \,, \end{cases} \tag{4.101}$$

где коэффициенты разложения суть

$$\begin{cases} a_{0,1} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,1}(\phi)\, \mathrm{d}\phi \,, \\ a_{\mu,1} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,1}(\phi) \cos \mu\phi \, \mathrm{d}\phi \,, \qquad b_{\mu,1} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,1}(\phi) \sin \mu\phi \, \mathrm{d}\phi \,, \end{cases} \tag{4.102}$$

$$\begin{cases} a_{0,2} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,2}(\phi)\, \mathrm{d}\phi \,, \\ a_{\mu,2} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,2}(\phi) \cos \mu\phi \, \mathrm{d}\phi \,, \qquad b_{\mu,2} = \dfrac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathring{g}_{1,2}(\phi) \sin \mu\phi \, \mathrm{d}\phi \,; \end{cases} \tag{4.103}$$

2) найдём производную семейства (4.100) по переменной r

$$\frac{\partial \mathring{u}(r,\varphi)}{\partial r} = \frac{B_0}{r} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \Big[\Big(-A_\mu \, r^{-\mu-1} + B_\mu \, r^{+\mu-1} \Big) \cos \mu\varphi + \Big(-C_\mu \, r^{-\mu-1} + D_\mu \, r^{+\mu-1} \Big) \sin \mu\varphi \Big]; \tag{4.104}$$

3) запишем граничные условия задачи (4.98) для семейства (4.100)

$$\frac{\partial u(c_1,\varphi)}{\partial r} = \frac{B_0}{c_1} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \Big[\Big(-A_\mu \, c_1^{-\mu-1} + B_\mu \, c_1^{+\mu-1} \Big) \cos \mu\varphi + \Big(-C_\mu \, c_1^{-\mu-1} + D_\mu \, c_1^{+\mu-1} \Big) \sin \mu\varphi \Big] =$$

$$= -\frac{a_{0,1}}{2} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_{\mu,1} \cos \mu\varphi + b_{\mu,1} \sin \mu\varphi \Big) = -\mathring{u}_{1,1}(\varphi) \,, \tag{4.105}$$

$$\frac{\partial u(c_2,\varphi)}{\partial r} = \frac{B_0}{c_2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu \Big[\Big(-A_\mu \, c_2^{-\mu-1} + B_\mu \, c_2^{+\mu-1} \Big) \cos \mu\varphi + \Big(-C_\mu \, c_2^{-\mu-1} + D_\mu \, c_2^{+\mu-1} \Big) \sin \mu\varphi \Big] =$$

$$= +\frac{a_{0,2}}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_{\mu,2} \cos \mu\varphi + b_{\mu,2} \sin \mu\varphi \Big) = +\mathring{u}_{1,2}(\varphi) \,; \tag{4.106}$$

4) из сопоставления левых и правых частей граничных условий (4.105) и (4.106) получим счетную последовательность независимых (относительно μ) систем линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных семейства (4.100)

$$\begin{cases} \dfrac{B_0}{c_1} = -\dfrac{a_{0,1}}{2}\,, \\[2ex] \dfrac{B_0}{c_2} = +\dfrac{a_{0,2}}{2}\,, \end{cases} \tag{4.107}$$

$$\begin{cases} -\mu\, c_1^{-\mu-1}\, A_\mu + \mu\, c_1^{+\mu-1}\, B_\mu = -a_{\mu,1}\,, \\ -\mu\, c_2^{-\mu-1}\, A_\mu + \mu\, c_2^{+\mu-1}\, B_\mu = +a_{\mu,2}\,, \end{cases} \qquad \mu = 1, 2, \ldots, \tag{4.108}$$

$$\begin{cases} -\mu\, c_1^{-\mu-1}\, C_\mu + \mu\, c_1^{+\mu-1}\, D_\mu = -b_{\mu,1}\,, \\ -\mu\, c_2^{-\mu-1}\, C_\mu + \mu\, c_2^{+\mu-1}\, D_\mu = +b_{\mu,2}\,, \end{cases} \qquad \mu = 1, 2, \ldots; \tag{4.109}$$

5) из системы (4.107) найдём два различных выражения для коэффициента B_0

$$B_0 = -c_1\, \frac{a_{0,1}}{2}\,, \qquad B_0 = +c_2\, \frac{a_{0,2}}{2}\,, \tag{4.110}$$

которые, тем не менее, суть совместные (см. задачу 4.19 на с. 136);

6) решим системы (4.108), (4.109) по формулам *Крамера*

$$\Delta_\mu = \mu \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & +c_1^{+\mu-1} \\ -c_2^{-\mu-1} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, \quad A_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} -a_{\mu,1} & +c_1^{+\mu-1} \\ +a_{\mu,2} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, \quad B_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & -a_{\mu,1} \\ -c_2^{-\mu-1} & +a_{\mu,2} \end{vmatrix},$$

$$C_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} -b_{\mu,1} & +c_1^{+\mu-1} \\ +b_{\mu,2} & +c_2^{+\mu-1} \end{vmatrix}, \quad D_\mu = \Delta_\mu^{-1} \begin{vmatrix} -c_1^{-\mu-1} & -b_{\mu,1} \\ -c_2^{-\mu-1} & +b_{\mu,2} \end{vmatrix};$$

7) запишем окончательные выражения для постоянных семейства (4.100)

$$\begin{cases} B_0 = -c_1\, \dfrac{a_{0,1}}{2} = +c_2\, \dfrac{a_{0,2}}{2}\,, \\[2ex] A_\mu = \dfrac{c_1^{\mu+1} c_2^{\mu+1}}{\mu}\, \dfrac{c_1^{\mu-1} a_{\mu,2} + c_2^{\mu-1} a_{\mu,1}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \qquad B_\mu = \dfrac{1}{\mu}\, \dfrac{c_1^{\mu+1} a_{\mu,1} + c_2^{\mu+1} a_{\mu,2}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \\[2ex] C_\mu = \dfrac{c_1^{\mu+1} c_2^{\mu+1}}{\mu}\, \dfrac{c_1^{\mu-1} b_{\mu,2} + c_2^{\mu-1} b_{\mu,1}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,, \qquad D_\mu = \dfrac{1}{\mu}\, \dfrac{c_1^{\mu+1} b_{\mu,1} + c_2^{\mu+1} b_{\mu,2}}{c_2^{2\mu} - c_1^{2\mu}}\,. \end{cases} \tag{4.111}$$

4.9.3. Примеры решения задачи

4.10. Задача *Дирихле* для уравнения *Лапласа* в прямоугольнике

4.10.1. Постановка задачи

Задача *Дирихле* для прямоугольника состоит в том, чтобы найти дважды непрерывно дифференцируемую в прямоугольнике $\mathcal{D}$ и непрерывную в замыкании $\mathcal{D}+\mathcal{C}$ прямоугольника гармоническую функцию u, принимающую заданные значения на границе $\mathcal{C}$ прямоугольника (рис. 4.19)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0\,, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b)\,, \\ \left.\begin{aligned} u(x,0) = \phi_1(x) \\ u(x,b) = \phi_2(x) \end{aligned}\right\}, & 0 \leqslant x \leqslant a\,, \\ \left.\begin{aligned} u(0,y) = \psi_1(y) \\ u(a,y) = \psi_2(y) \end{aligned}\right\}, & 0 \leqslant y \leqslant b\,, \end{cases} \tag{4.112}$$

причём выполнены условия согласования

$$\begin{cases} \phi_1(0) = \psi_1(0)\,, & \phi_1(a) = \psi_2(0)\,, \\ \phi_2(0) = \psi_1(b)\,, & \phi_2(a) = \psi_2(b)\,. \end{cases} \tag{4.113}$$

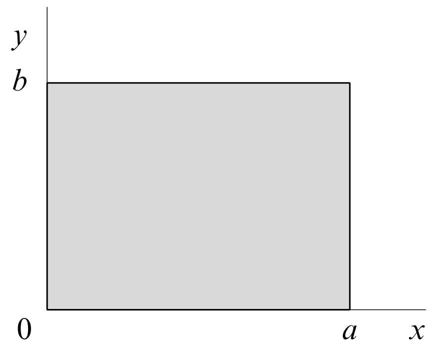

Рис. 4.19. Прямоугольная область $\mathcal{D}$

4.10.2. Решение задачи методом разделения переменных

Решение задачи *Дирихле* (4.112) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$u(x,y) = q(x,y) + v(x,y) + w(x,y)\,, \tag{4.114}$$

причём функцию $q(x,y)$ выберем так, чтобы она обращалась в нуль в вершинах прямоугольной области, например, билинейной

$$q(x,y) = q_{0,0} + q_{1,0}\,x + q_{0,1}\,y + q_{1,1}\,xy\,, \tag{4.115}$$

коэффициенты которой таковы

$$\begin{cases} q_{0,0} = \phi_1(0) = \psi_1(0)\,, & \\ q_{1,0} = \dfrac{[\phi_1(a) - \phi_1(0)]}{a}\,, & q_{1,1} = \dfrac{[\phi_2(a) - \phi_2(0)] - [\phi_1(a) - \phi_1(0)]}{ab} = \\ q_{0,1} = \dfrac{[\psi_1(b) - \psi_1(0)]}{b}\,, & \phantom{q_{1,1}} = \dfrac{[\psi_2(b) - \psi_2(0)] - [\psi_1(b) - \psi_1(0)]}{ab}\,. \end{cases} \tag{4.116}$$

Далее подставим представление (4.115) в граничную задачу (4.112) и получим граничную задачу для функции $v(x,y) + w(x,y) = u(x,y) - q(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0\,, & (x,y) \in (0,a)\times(0,b)\,, \\ \left.\begin{aligned} v(x,0) + w(x,0) &= \phi_1^*(x) \\ v(x,b) + w(x,b) &= \phi_2^*(x) \end{aligned}\right\}, & x \in [0,a]\,, \\ \left.\begin{aligned} v(0,y) + w(0,y) &= \psi_1^*(y) \\ v(a,y) + w(a,y) &= \psi_2^*(y) \end{aligned}\right\}, & y \in [0,b]\,, \end{cases} \tag{4.117}$$

где введены новые граничные функции

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \phi_1^*(x) &= \phi_1(x) - q(x,0) \\ \phi_2^*(x) &= \phi_2(x) - q(x,b) \end{aligned}\right\}, & x \in [0,a]\,, \\ \left.\begin{aligned} \psi_1^*(y) &= \psi_1(y) - q(0,y) \\ \psi_2^*(y) &= \psi_2(y) - q(a,y) \end{aligned}\right\}, & y \in [0,b]\,, \end{cases} \tag{4.118}$$

и учтено, что функция $q(x,y)$ есть гармоническая, то есть $\Delta q(x,y) = 0$.

Линейную граничную задачу (4.117), (4.118) для суммы $v(x,y) + w(x,y)$ разделúм на две вспомогательные граничные задачи:

1) граничную задачу для функции $v(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = 0\,, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b)\,, \\ \left.\begin{array}{l} v(x,0) = \phi_1^*(x) \\ v(x,b) = \phi_2^*(x) \end{array}\right\}, & x \in [0,a]\,, \\ \left.\begin{array}{l} v(0,y) = 0 \\ v(a,y) = 0 \end{array}\right\}, & y \in [0,b]\,; \end{cases} \tag{4.119}$$

2) граничную задачу для функции $w(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w(x,y)}{\partial y^2} = 0\,, & (x,y) \in (0,a) \times (0,b)\,, \\ \left.\begin{array}{l} w(x,0) = 0 \\ w(x,b) = 0 \end{array}\right\}, & x \in [0,a]\,, \\ \left.\begin{array}{l} w(0,y) = \psi_1^*(y) \\ w(a,y) = \psi_2^*(y) \end{array}\right\}, & y \in [0,b]\,. \end{cases} \tag{4.120}$$

1) Решение вспомогательной граничной задачи (4.119) будем разыскивать методом разделения переменных:

а) представим искомую функцию $v(x,y)$ в виде произведения двух функций, соответственно независимой переменной x и независимой переменной y

$$v(x,y) = X(x)\,Y(y)\,; \tag{4.121}$$

б) найдём вторые повторные производные представления функции $v(x,y)$ (4.121) по переменным x, y

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2} = X''(x)\,Y(y)\,, \\ \dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial y^2} = X(x)\,Y''(y)\,, \end{cases}$$

и подставим в уравнение задачи (4.119)

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) = 0\,;$$

в) введём *параметр разделения* λ

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda = \mathtt{const}\,;$$

г) составим две граничные задачи, связанные между собой через параметр λ: I) задачу *Штурма – Лиувилля* нахождения собственных значений λ и собственных функций $X(x)$ (см. раздел 3.2.1. на с. 66)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \\ X(0) = X(a) = 0\,; \end{cases} \tag{4.122}$$

II) задачу нахождения функции $Y(y)$ (граничные условия далее будут уточнены)

$$\begin{cases} Y''(y) - \lambda Y(y) = 0\,, \\ Y(0) = ?, \quad Y(b) = ? \end{cases} \tag{4.123}$$

I) Вначале рассмотрим задачу *Штурма – Лиувилля* (4.122), счётное множество решений которой нам известно (см. раздел 3.2.1.на с. 66), поэтому просто выпишем собственные значения

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{a}\right)^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{4.124}$$

и соответствующие им собственные функции

$$X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{a}\,\cdot \tag{4.125}$$

II) Теперь обратимся к граничной задаче (4.123), в которую последовательно будем подставлять собственные значения (4.124), так что получим счётную последовательность граничных задач

$$\begin{cases} Y''_\mu(y) - \left(\dfrac{\mu\pi}{a}\right)^2 Y_\mu(y) = 0\,, \\ Y_\mu(0) = ?, \quad Y_\mu(b) = ? \end{cases} \tag{4.126}$$

Уравнения этой задачи суть линейные однородные обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Следуя известному алгоритму решения подобных уравнений (см. пояснение **??** на с. **??**) запишем и решим характеристические уравнения

$$k^2 - \left(\frac{\mu\pi}{a}\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{1,2} = \mp\frac{\mu\pi}{a}\,,$$

а затем составим соответствующие уравнениям 2-параметрические семейства решений

$$Y_\mu(y) = A_\mu\,\mathtt{exp}\left(-\frac{\mu\pi y}{a}\right) + B_\mu\,\mathtt{exp}\left(+\frac{\mu\pi y}{a}\right).$$

Для записи этих семейств применим гиперболические синус и косинус, определённые на основе показательной функции (см. пояснение)

$$2\,\mathtt{sh}(\sigma) = \mathtt{exp}\,(+\sigma) - \mathtt{exp}\,(-\sigma)\,, \qquad \mathtt{exp}\,(-\sigma) = \mathtt{ch}(\sigma) - \mathtt{sh}(\sigma)\,,$$
$$2\,\mathtt{ch}(\sigma) = \mathtt{exp}\,(+\sigma) + \mathtt{exp}\,(-\sigma)\,, \qquad \mathtt{exp}\,(+\sigma) = \mathtt{ch}(\sigma) + \mathtt{sh}(\sigma)\,,$$

тогда

$$A_\mu\,\mathtt{exp}\,(-\sigma) + B_\mu\,\mathtt{exp}\,(+\sigma) = A_\mu\big[\mathtt{ch}(\sigma) - \mathtt{sh}(\sigma)\big] + B_\mu\big[\mathtt{ch}(\sigma) + \mathtt{sh}[\sigma)\big] =$$
$$= [A_\mu + B_\mu]\,\mathtt{ch}(\sigma) + [B_\mu - A_\mu]\,\mathtt{sh}(\sigma)\,.$$

Итак, 2-параметрические семейства решений уравнения граничной задачи (4.126) принимают такой вид

$$Y_\mu(y) = C_\mu\,\mathtt{ch}\,\frac{\mu\pi y}{a} + D_\mu\,\mathtt{sh}\,\frac{\mu\pi y}{a}\,, \tag{4.127}$$

где $C_\mu = A_\mu + B_\mu$, $D_\mu = B_\mu - A_\mu$ — новые произвольные постоянные.

Сборка (4.121), (4.125), (4.127) образует частные решения уравнения задачи (4.119), именно (мы изменим порядок следования сомножителей в представлении (4.121) только из соображений удобства выполнения дальнейших действий и их записи)

$$v_\mu(t,x) = Y_\mu(y)\,X_\mu(x) = \left\{C_\mu\,\mathtt{ch}\,\frac{\mu\pi y}{a} + D_\mu\,\mathtt{sh}\,\frac{\mu\pi y}{a}\right\}\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{a}\,,$$

суммирование всех частных решений образует ∞-параметрическое семейство функций

$$\bar v(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{C_\mu\,\mathtt{ch}\,\frac{\mu\pi y}{a} + D_\mu\,\mathtt{sh}\,\frac{\mu\pi y}{a}\right\}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{a}\,, \tag{4.128}$$

которые: *а*) определены в прямоугольнике $[0,a]\times[0,b]$; *б*) удовлетворяют уравнению граничной задачи (4.119); *в*) удовлетворяют граничным условиям на сторонах прямоугольника $\{x=0\}\times\{0\leqslant y\leqslant b\}$ и $\{x=a\}\times\{0\leqslant y\leqslant b\}$; *г*) вообще не удовлетворяют граничным условиям на сторонах $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=0\}$ и $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=b\}$.

Выберем величины $Y_\mu(0)$ и $Y_\mu(b)$ (граничные условия условия задач (4.126)) так, чтобы из семейства (4.128) выделить функцию, удовлетворяющую граничным условиям задачи (4.119) на сторонах прямоугольника $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=0\}$ и $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=b\}$, то есть получить решение последней:

а) подставим в семейство значения $y=0$ и $y=b$;

б) разложим граничные функции $\phi_1^*(x)$ и $\phi_2^*(x)$ (то есть на сторонах прямоугольника $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=0\}$ и $\{0\leqslant x\leqslant a\}\times\{y=b\}$) в ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$ (иначе — в тригонометрический ряд *Фурье* «по синусам», см. раздел 8.1. на с. 236);

$$\begin{cases} \phi_1^*(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \phi_{1,\mu}^* \,\mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a}\,, \qquad \phi_{1,\mu}^* = \dfrac{2}{a}\int\limits_0^a \phi_1^*(\xi)\,\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi\,, \\ \phi_2^*(x) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \phi_{2,\mu}^* \,\mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a}\,, \qquad \phi_{2,\mu}^* = \dfrac{2}{a}\int\limits_0^a \phi_2^*(\xi)\,\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{a}\,\mathrm{d}\xi\,; \end{cases} \tag{4.129}$$

в) приравняем соответствующие ряды

$$\begin{cases} \bar{v}(x,0) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \left\{ C_\mu \,\mathtt{ch}\, \dfrac{\mu\pi y}{a} + D_\mu \,\mathtt{sh}\, \dfrac{\mu\pi y}{a} \right\}\Bigg|_{y=0} \mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a} = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \phi_{1,\mu}^* \,\mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a}\,, \\ \bar{v}(x,b) = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \left\{ C_\mu \,\mathtt{ch}\, \dfrac{\mu\pi y}{a} + D_\mu \,\mathtt{sh}\, \dfrac{\mu\pi y}{a} \right\}\Bigg|_{y=b} \mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a} = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} \phi_{2,\mu}^* \,\mathtt{sin}\, \dfrac{\mu\pi x}{a}\,; \end{cases}$$

г) приравняем коэффициенты при одинаковых собственных функциях $X_\mu(x)$ в полученных равенствах (тождествах по x) и получим счётную последовательность систем линейных алгебраических уравнений относительно произвольных постоянных C_μ и D_μ

$$\begin{cases} C_\mu = \phi_{1,\mu}^*\,, \\ \mathtt{ch}\dfrac{\mu\pi b}{a}\, C_\mu + \mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}\, D_\mu = \phi_{2,\mu}^*\,, \end{cases}$$

решения которых суть

$$\begin{cases} C_\mu = \phi_{1,\mu}^*\,, \\ D_\mu = \dfrac{\phi_{2,\mu}^* - \phi_{1,\mu}^*\,\mathtt{ch}\dfrac{\mu\pi b}{a}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}}\,; \end{cases} \tag{4.130}$$

д) подставим найденные значения (4.130) произвольных постоянных C_μ и D_μ в семейство (4.128)

$$v(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \phi_{1,\mu}^*\,\mathtt{ch}\frac{\mu\pi y}{a} + \frac{\phi_{2,\mu}^* - \phi_{1,\mu}^*\,\mathtt{ch}\dfrac{\mu\pi b}{a}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi y}{a} \right\} \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{a} =$$

$$= \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \phi_{1,\mu}^* \left(\mathtt{ch}\frac{\mu\pi y}{a}\;\mathtt{sh}\frac{\mu\pi b}{a} - \mathtt{ch}\frac{\mu\pi b}{a}\;\mathtt{sh}\frac{\mu\pi y}{a} \right) + \phi_{2,\mu}^*\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi y}{a} \right\} \frac{\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi x}{a}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}}\,;$$

e) применим формулу сложения для суммы и разности аргументов гиперболического синуса $\mathtt{sh}\,(\sigma \mp \omega) = \mathtt{sh}\,\sigma\ \mathtt{ch}\,\omega \mp \mathtt{ch}\,\sigma\ \mathtt{sh}\,\omega$ к последнему ряду и получим искомое решение вспомогательной граничной задачи (4.119)

$$v(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \phi^*_{1,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi(b-y)}{a} + \phi^*_{2,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi y}{a} \right\} \frac{\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi x}{a}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}}\,. \tag{4.131}$$

2) Решение вспомогательной граничной задачи (4.120) получим из решения (4.131) вспомогательной граничной задачи (4.119) с помощью перестановок $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$

$$w(x,y) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \psi^*_{1,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi(a-x)}{b} + \psi^*_{2,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi x}{b} \right\} \frac{\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi y}{b}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi a}{b}}\,, \tag{4.132}$$

где $\psi^*_{1,\mu}$ и $\psi^*_{2,\mu}$ суть коэффициенты разложений в ряды *Фурье* функций $\psi^*_1(y)$ и $\psi^*_2(y)$

$$\begin{cases} \psi^*_1(y) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} \psi^*_{1,\mu}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi y}{b}\,, \qquad \psi^*_{1,\mu} = \frac{2}{b}\int_0^b \psi^*_1(\eta)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\eta\,, \\ \psi^*_2(y) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} \psi^*_{2,\mu}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi y}{b}\,, \qquad \psi^*_{2,\mu} = \frac{2}{b}\int_0^b \psi^*_{2,\mu}(y)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\eta}{b}\,\mathrm{d}\eta\,. \end{cases} \tag{4.133}$$

Сборка выражений (4.114), (4.115), (4.131), (4.132) даёт искомое решение граничной задачи (4.112)

$$\begin{aligned} u(x,y) = q(x,y) &+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \phi^*_{1,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi(b-y)}{a} + \phi^*_{2,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi y}{a} \right\} \frac{\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi x}{a}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi b}{a}} + \\ &+ \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \psi^*_{1,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi(a-x)}{b} + \psi^*_{2,\mu}\,\mathtt{sh}\frac{\mu\pi x}{b} \right\} \frac{\mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi y}{b}}{\mathtt{sh}\dfrac{\mu\pi a}{b}}\,. \end{aligned} \tag{4.134}$$

4.10.3. Примеры решения задачи

4.11. Задачи

К разделу 4.1. на с. 82

Задача 4.1. В определении 4.1 на с. 81 сказано, что гармоническая функция удовлетворяет уравнению *Лапласа* в области, но ничего не сказано о значениях, принимаемых гармонической функцией на границе области (если область конечна). Решения задач *Дирихле* (4.4) на с. 83, *Неймана* (4.5) на с. 83 или *Робэна* (4.6) на с. 83, конечно, все суть гармонические функции. Верно ли обратное, то есть что всякая функция, гармоническая в конечной области, есть решение хотя бы одной из указанных задач?

К разделу 4.2. на с. 84

Задача 4.2. Закон «всемирного притяжения» *Ньютона* (1.20) на с. 14 с хорошей точностью описывает строение Солнечной системы, которая по сути есть плоское образование (орбиты большинства планет не очень сильно отклоняются от плоскости эклиптики). Тем не менее, потенциал тяготения (см. силовую функцию (1.25) на с. 14) соответствует пространственному основному решению оператора *Лапласа* (4.10) на с. 85. Можно ли построить наблюдаемую Солнечную систему на основе потенциала тяготения, соответствующего плоскому основному решению оператора *Лапласа* (4.9) на с. 85?

К разделу 4.3. на с. 87

Задача 4.3. Выведите основную формулу *Грина* для плоскости. Обоснуйте условие (4.11) на с. 86 однозначного выбора постоянной A_1 основного решения оператора *Лапласа* (4.13).

Задача 4.4. Покажите, где и каким именно образом учтено условие (4.12) на с. 86 однозначного выбора постоянной A_1 основного решения оператора *Лапласа* (4.13) при выводе основной формулы *Грина* (4.16) на с. 89 в пространстве.

К разделу 4.4. на с. 89

Задача 4.5. Докажите свойства гармонических функций для плоскости.

К разделу 4.5. на с. 91

Задача 4.6. Докажите теорему 4.5 на с. 91 (о принципе минимума/максимума) для плоскости.

К разделу 4.6. на с. 93

Задача 4.7. Решите внешнюю задачу *Дирихле* (4.33) методом разделения переменных.

Задача 4.8. Какова связь преобразования инверсии *Кельвина* (4.38) с преобразованием инверсии в комплексном анализе?

Задача 4.9. Решите внутреннюю задачу *Дирихле* в областях с границами $\mathcal{C}$ и граничными условиями, сведёнными в табл. 4.7 на с. 135. Запишите решения в полярной и декар-

Табл. 4.7. Рекуррентные граничные условия для задачи *Дирихле*: $u_{0,k+1} = u_{0,k} + \delta u_{0,k+1}$, $k = 1, 2, 3$

№	$u_{0,1}(x,y)$	$\delta u_{0,2}(x,y)$	$\delta u_{0,3}(x,y)$	$\delta u_{0,4}(x,y)$	$\mathcal{C}$
1	x^2	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	x^4	x^5	$x^2+y^2-x-2y-1=0$
2	y^2	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	y^4	y^5	$x^2+y^2+x+6y+7=0$
3	xy	$x^3+y^3+x^2y+xy^2$	x^3y	x^4y	$x^2+y^2-2x+3y+1=0$
4	x^2+x	$x^3+y^3+x^2y$	xy^3	xy^4	$x^2+y^2+2x-5y+5=0$
5	y^2+x	$x^3+y^3+xy^2$	x^2y^2	x^3y^2	$x^2+y^2-3x-4y+4=0$
6	$xy+x$	$x^3+x^2y+xy^2$	x^4	x^2y^3	$x^2+y^2+4x+y+2=0$
7	x^2+y	$y^3+x^2y+xy^2$	y^4	x^5	$x^2+y^2-5x+4y+8=0$

товой системах координат. Обоснуйте решения, показав, что они удовлетворяют: *а*) уравнению *Лапласа*; *б*) граничному условию. Постройте изображения полученных решений.

Задача 4.10. Решите внешнюю задачу *Дирихле* в областях с границами $\mathcal{C}$ и граничными условиями, сведёнными в табл. 4.7 на с. 135. Запишите решения в полярной системе координат. Обоснуйте решения, показав, что они удовлетворяют: *а*) уравнению *Лапласа*; *б*) граничному условию. Постройте изображения полученных решений.

К разделу 4.7. на с. 116

Задача 4.11. Объясните отсутствие в разложении граничной функции $u_1(r,\varphi)$ в ряд *Фурье* (4.67) коэффициента a_0 .

Задача 4.12. Запишите, если это возможно, решение (4.70) на с. 118 задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* в круге (4.62) в декартовых переменных.

Задача 4.13. При выводе интегрального представления (4.72) на с. 119 (интеграла *Дини*) решения (4.70) задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* в круге (4.62) применено разложение в степенной ряд

$$\mathtt{ln}\,\frac{1}{1-z} = -\mathtt{ln}\,(1-z) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{z^\mu}{\mu} = \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots, \tag{4.135}$$

круг сходимости которого $|z| < 1$. Выведите это разложение.

Решение.

▲

Задача 4.14. Докажите, что интегральное представление (4.72) на с. 119 (интеграл *Дини*) решения (4.70) задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* в круге (4.62) допускает запись (4.73).

Задача 4.15. Объясните отсутствие в разложении граничной функции $u_1(r,\varphi)$ в ряд *Фурье* (4.81) коэффициента a_0 .

Задача 4.16. Запишите, если это возможно, решение (4.84) на с. 120 задачи *Неймана* для уравнения *Лапласа* вне круга (4.76) в декартовых переменных.

К разделу 4.8. на с. 121

Задача 4.17. Поясните сохранение всех членов семейства (3.57) на с. 77 или (4.87) на с. 122 при решении задачи *Дирихле* (4.86) в кольце.

К разделу 4.9. на с. 123

Задача 4.18. Поясните сохранение всех членов семейства (3.57) на с. 77 или (4.100) на с. 124 при решении задачи *Неймана* (4.98) в кольце.

Задача 4.19. Докажите, что равенство (4.110), накладывающее связь между нулевыми коэффициентами разложения граничных функций в ряды *Фурье*, не приводит к противоречию, поскольку есть следствие условия разрешимости (4.99) задачи *Неймана* (4.98) для уравнения *Лапласа* в кольце.

К разделу 4.10. на с. 127

Задача 4.20. Постройте 4-параметрическое решение граничной задачи (4.112) на с. 127 для случая линейных граничных функций, если известно, что: $u(0,0) = h_{0,0}$, $u(a,0) = h_{1,0}$, $u(a,b) = h_{1,1}$, $u(0,b) = h_{0,1}$. Задайте определённые значения параметров задачи $h_{0,0}$, $h_{1,0}$, $h_{1,1}$ и $h_{0,1}$ и постройте полученное решение.

4.12. Пояснения

5. Задачи для уравнений параболического типа

5.0. Π$\rho o \lambda \varepsilon \gamma ó \mu \varepsilon \nu \alpha$

В данной теме мы обратимся к неоднородному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, \tag{5.1}$$

для которого изучим постановки и свойства решений задачи *Коши* в пространственно-временнóй полосе конечной ширины $\overline{\mathcal{Q}(T)} = [0,T] \times \mathbb{R}$ (рис. 6.1, *а*) и краевых задач в пространственно-временнóм прямоугольнике $\overline{\mathcal{G}(T)} = [0,T] \times [a,b]$ (рис. 6.1, *б*).

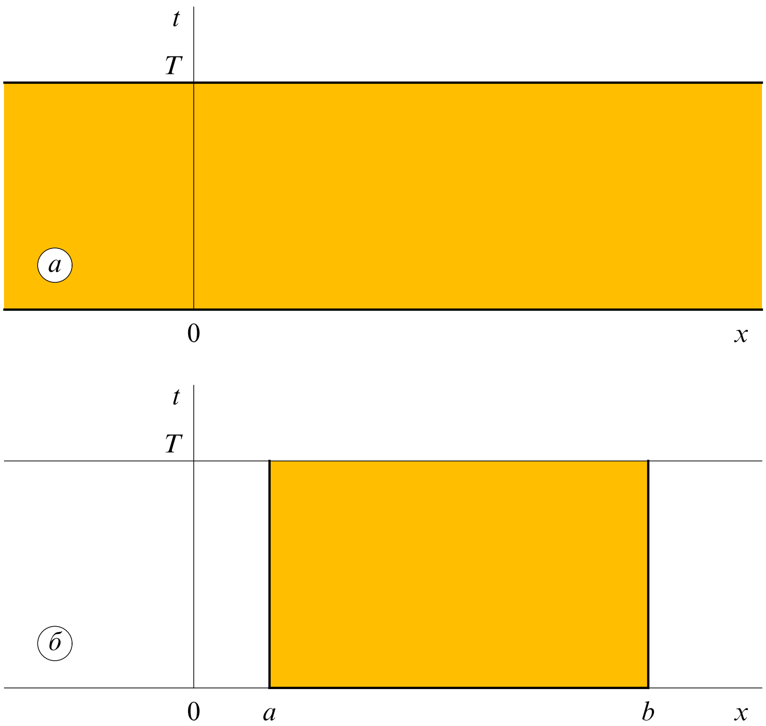

Рис. 5.1. Пространственно-временнáя полоса $\overline{\mathcal{Q}(T)} = [0,T] \times \mathbb{R}$ конечной ширины для задачи *Коши* (*а*); пространственно-временнóй прямоугольник $\overline{\mathcal{G}(T)} = [0,T] \times [a,b]$ для краевых задач, жирной ломаной показана параболическая граница (*б*)

В разделе 5.1. обоснуем принципы минимума и максимума для полосы и прямоугольника, «параболическими» аналогами «эллиптического» принципа минимума и максимума для пространственной двумерной области из раздела 4.5.

В разделе 5.2. рассмотрим постановки краевых задач с граничными условиями *Дирихле*, *Неймана* и *Робена*, и методы их решения, основанные на разделении переменных.

В разделе 5.6. рассмотрим постановку задачи *Коши* и метод её решения, основанный на разделении переменных.

5.1. Принцип минимума/максимума для уравнения теплопроводности

5.2. Краевая задача для уравнения теплопроводности с граничными условиями *Дирихле*

5.2.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи состоит в нахождении температуры в каждом сечении тонкого стержня конечной длины ℓ в любое мгновение конечного промежутка времени $[0, T]$, если: 1) боковая поверхность стержня теплоизолирована; 2) внутри стержня действуют распределенные источники тепла заданной мощности; 3) температура стержня в начальное мгновение $t = 0$ известна; 4) температура на концах стержня известна в течение промежутка времени $[0, T]$.

Математическая постановка есть краевая задача нахождения функции: 1) непрерывной в замкнутом пространственно-временно́м прямоугольнике $[0, T] \times [0, \ell]$; 2) один раз непрерывно дифференцируемой по переменной t и дважды непрерывно дифференцируемой по переменной x в $(0, T] \times (0, \ell)$; 3) удовлетворяющей пространственно одномерному неоднородному уравнению теплопроводности и соответствующим начальным условиям (при $t=0$) и граничным условиям *Дирихле* (на концах стержня $x=0$, $x=\ell$ при $0 \leqslant t \leqslant T$), именно

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,,\\
u(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,,\\
\left.\begin{aligned} u(t,0) = \psi_1(t)\\ u(t,\ell) = \psi_2(t)\end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad\quad 0 \leqslant t \leqslant T\,,
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

причём начальное и граничные условия согласованы

$$
\begin{cases}
u_0(0) = \psi_1(0)\,,\\
u_0(\ell) = \psi_2(0)\,.
\end{cases}
\tag{5.3}
$$

5.2.2. Решение задачи методом разделения переменных

> ...основная идея метода разделения переменных состоит в представлении решения краевой задачи в виде разложения по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля, образующим полную систему функций в соответствующей пространственной области. Зная собственные значения и собственные функции соответствующего оператора, можно построить решения начально-краевых задач как для уравнения теплопроводности, так и для уравнения колебаний в ограниченной области. [46]

Решение краевой задачи (5.2), (5.3) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$
u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{5.4}
$$

причём функцию $q(t,x)$ выберем так

$$
q(t,x) = \psi_1(t) + \big[\,\psi_2(t) - \psi_1(t)\big]\,\frac{x}{\ell}\,, \tag{5.5}
$$

чтобы удовлетворить граничным условиям задачи: $q(t,0) = \psi_1(t)$, $q(t,\ell) = \psi_2(t)$.

Подстановка представления (5.4), (5.5) для искомого решения $u(t,x)$ в задачу (5.2) показывает, что сумма функций $v(t,x) + w(t,x)$ есть решение следующей краевой задачи с однородными (нулевыми) граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} + a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ v(0,x) + w(0,x) = v_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{array}{c} v(t,0) + w(t,0) = 0 \\ v(t,\ell) + w(t,\ell) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \end{cases} \tag{5.6}$$

где правая часть и начальное условие суть таковы

$$\begin{cases} h(t,x) = g(t,x) - \left[\dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\right], \\ \;v_0(x) = u_0(x) - q(0,x)\,. \end{cases} \tag{5.7}$$

Краевую задачу (5.6), (5.7) для суммы $v(t,x) + w(t,x)$, в силу линейности последней по $v(t,x)$ и $w(t,x)$, разделим на две:

1) краевую задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ v(0,x) = v_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{array}{c} v(t,0) = 0 \\ v(t,\ell) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,; \end{cases} \tag{5.8}$$

2) краевую задачу для функции $w(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T, \\ w(0,x) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{array}{c} w(t,0) = 0 \\ w(t,\ell) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{5.9}$$

1) Решение краевой задачи (5.8) будем разыскивать методом разделения переменных:

а) представим искомую функцию $v(t,x)$ в виде произведения двух функций соответственно независимой переменной t и независимой переменной x

$$v(t,x) = O(t)\,X(x)\,; \tag{5.10}$$

б) найдём производные представления функции $v(t,x)$ (5.10), первую по переменной t и вторую по переменной x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = O'(t)\,X(x)\,, \\ \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = O\,(t)\,X''(x)\,, \end{cases}$$

и подставим в уравнение задачи (5.8);

в) введём *параметр разделения* λ

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{O'(t)}{O(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \mathtt{const};$$

г) составим две задачи, связанные между собой через параметр λ: I) задачу *Штурма – Лиувилля* нахождения собственных значений λ и собственных функций $X(x)$ (см. раздел 3.2.1. на с. 66)

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \qquad 0 < x < \ell\,, \\ X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0\,; \end{cases} \tag{5.11}$$

II) задачу *Коши* нахождения функции $O(t)$ (начальное условие далее будет уточнено)

$$\begin{cases} O'(t) + \lambda\,a^2\,O(t) = 0\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ O(0) = ? \end{cases} \tag{5.12}$$

I) Вначале рассмотрим задачу *Штурма – Лиувилля* (5.11), счётное множество решений которой нам известно (см. раздел 3.2.1. на с. 66), поэтому просто выпишем собственные значения

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{5.13}$$

и соответствующие им собственные функции

$$X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{5.14}$$

II) Теперь обратимся к задаче *Коши* (5.12), в которую последовательно будем подставлять собственные значения (5.13), так что получим счётное множество задач *Коши*

$$\begin{cases} O_\mu'(t) + \left(\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 O_\mu(t) = 0\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ O(0) = ? \end{cases} \tag{5.15}$$

1-параметрические семейства решений линейных с постоянными коэффициентами однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка задач *Коши* (5.15) найдём методом разделения переменных (здесь «разделение переменных» применяется только к обыкновенным дифференциальным уравнениям задач (5.15) «внутри» применения «разделение переменных» для краевой задачи (5.8)):

а) запишем производные в обыкновенных дифференциальных уравнениях с помощью обозначения *Лейбница* (без указания аргумента t функций $O_\mu(t)$)

$$\frac{\mathrm{d}O_\mu}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 O_\mu = 0\,;$$

б) перенесём вторые слагаемые в левых частях последних уравнений в правые части, разделим на O_μ и умножим на $\mathrm{d}t$ обе части полученных уравнений

$$\frac{\mathrm{d}O_\mu}{O_\mu} = -\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 \mathrm{d}t\,;$$

в) выполним интегрирование в обеих частях последних равенств

$$\mathtt{ln}\,|O_\mu| = -\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t + \mathtt{ln}\,|A_\mu|$$

или

$$\mathtt{ln}\,|O_\mu| = \mathtt{ln}\;\mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t} + \mathtt{ln}\,|A_\mu|\,;$$

г) выполним потенцирование

$$O_\mu(t) = A_\mu\,\mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\,;$$

д) подставим значение $t = 0$ в полученные равенства и выразим постоянные интегрирования A_μ (произвольные постоянные) через значения $O_\mu(0)$ функций $O_\mu(t)$: $A_\mu = O_\mu(0)$;

е) запишем искомые 1-параметрические семейства решений уравнений задач *Коши* (5.15)

$$O_\mu(0) = O_\mu(0)\,\mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\,. \tag{5.16}$$

Сборка (5.10), (5.14), (5.16) образует частные решения уравнения задачи (5.8), именно

$$v_\mu(t,x) = O_\mu(t)\,X_\mu(x) = O_\mu(0)\,\mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

суммирование всех частных решений образует ∞-параметрическое семейство функций

$$\bar{v}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\ \mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\, \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{5.17}$$

которые: *а*) определены в прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$; *б*) удовлетворяют уравнению краевой задачи (5.8); *в*) удовлетворяют граничным условиям краевой задачи; *г*) вообще не удовлетворяют начальным условиям.

Выберем величины $O_\mu(0)$ (начальные условия задач *Коши* (5.15)) так, чтобы из семейства (5.17) выделить функцию, удовлетворяющую начальным условиям краевой задачи (5.8), то есть получить решение последней:

а) подставим в семейство значение $t = 0$

$$\bar{v}(0,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,;$$

б) разложим начальное условие (5.7) краевой задачи (5.8) в ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$ (5.14) (то есть в тригонометрический ряд *Фурье* «по синусам»)

$$v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu}\, \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

где коэффициенты разложений суть

$$v_{0,\mu} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell v_0(\xi)\, \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\ \mathrm{d}\xi\,, \tag{5.18}$$

в) из сравнения коэффициентов рядов «по синусам» заключим, что $O_\mu(0) = v_{0,\mu}$.

Следовательно, функция

$$v(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu}\ \mathtt{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\, \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell} \tag{5.19}$$

есть искомое решение краевой задачи (5.8).

2) Решение краевой задачи (5.9), по образцу найденного решения (5.19) краевой задачи (5.8), сразу будем искать в виде ряда по собственным функциям (5.14) (то есть в виде тригонометрического ряда *Фурье* «по синусам»)

$$\bar{w}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\ \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{5.20}$$

в котором коэффициенты $w_\mu(t)$ суть неизвестные функции переменной t, но при этом ряд определён в прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$.

Для того, чтобы найти функции $w_\mu(t)$:

а) вычислим частные производные ряда (5.20), первого порядка по переменной t и второго порядка по переменной x

$$\frac{\partial \bar{w}(t,x)}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu'(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial x^2} = -\sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu\pi a}{\ell}\Big)^2 w_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,;$$

б) разложим правую часть $h(t,x)$ (5.7) уравнения краевой задачи (5.9) в ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$ (5.14)

$$h(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{5.21}$$

где коэффициенты разложения суть

$$h_\mu(t) = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(t,\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,; \tag{5.22}$$

в) подставим найденные производные ряда (5.20) и разложение правой части $h(t,x)$ в уравнение краевой задачи (5.9), откуда получим ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$, тождественно равный нулю ряд в прямоугольнике $(0,T]\times[0,\ell]$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{w_\mu'(t) + \Big(\frac{\mu\pi a}{\ell}\Big)^2 w_\mu(t) - h_\mu(t)\right\}\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell} \equiv 0\,,$$

что возможно лишь при обращении в нуль всех коэффициентов ряда

$$w_\mu'(t) + \Big(\frac{\mu\pi a}{\ell}\Big)^2 w_\mu(t) - h_\mu(t) = 0\,, \qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{5.23}$$

Присоединим к линейным с постоянными коэффициентами неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка (5.23) относительно функций $w_\mu(t)$ соответствующие начальные условия:

а) подставим в ряд (5.20) значение $t=0$

$$\bar{w}(0,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(0)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,;$$

б) сопоставим полученный ряд с начальным условием краевой задачи (5.9), откуда заключим, что $w_\mu(0)=0$;

в) составим счётную последовательность задач *Коши*

$$\begin{cases} w_\mu'(t) + \Big(\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\Big)^2 w_\mu(t) = h_\mu(t)\,, \\ w_\mu(0) = 0\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{5.24}$$

Задачи *Коши* (5.24) будем решать так:

а) запишем 1-параметрические решения

$$\mathring{w}_\mu(t) = B_\mu\, \mathsf{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}, \qquad \mu \in \mathbb{N}, \tag{5.25}$$

однородных уравнений, где B_μ — неопределённые (произвольные) постоянные (см. решения (5.16) уравнений задач *Коши* (5.15))

$$w'_\mu(t) + \left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t) = 0\,, \qquad \mu \in \mathbb{N};$$

б) к решениям (5.25) однородных уравнений применим методом вариации произвольных постоянных для нахождения семейств решений вида

$$\bar{w}_\mu(t) = B_\mu(t)\, \mathsf{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}, \qquad \mu \in \mathbb{N}, \tag{5.26}$$

в) подставим представления (5.26) в задачи *Коши* (5.24) и получим счётные последовательности задач *Коши* для нахождения функций $B_\mu(t)$

$$\begin{cases} B'_\mu(t) = \mathsf{e}^{+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t}\, h_\mu(t)\,, \\ B_\mu(0) = 0\,, \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{N};$$

г) решим полученные задачи *Коши* непосредственным интегрированием

$$B_\mu(t) = \int\limits_0^t \mathsf{e}^{+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\, h_\mu(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,; \tag{5.27}$$

д) подставим найденные функции $B_\mu(t)$ (5.27) в семейства (5.26) и запишем решения задач *Коши* (5.24)

$$w_\mu(t) = \mathsf{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 t} \int\limits_0^t \mathsf{e}^{+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 \tau}\, h_\mu(\tau)\, \mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \mathsf{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)}\, h_\mu(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{5.28}$$

Сборка (5.20), (5.22), (5.28) даёт решение краевой задачи (5.9)

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \int\limits_0^t \mathsf{e}^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 (t-\tau)}\, h_\mu(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\} \mathtt{sin}\, \frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{5.29}$$

5.2.3. Обоснование решения задачи

5.2.4. Примеры решения задачи

Пример 5.1. Применим метод разделения переменных к решению следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,, & 0 < x < 5\,, \quad 0 < t \leqslant 9\,, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 2x\,, & 0 \leqslant x \leqslant 4\,, \\ 8(5-x)\,, & 4 \leqslant x \leqslant 5\,, \end{cases} & \\ \left.\begin{aligned} u(t,0) &= \ \tau^2 \\ u(t,5) &= 2\tau^2 \end{aligned}\right\}, & 0 \leqslant t \leqslant 9\,. \end{cases} \tag{5.30}$$

где $\tau = t/T$.

Выберем функцию $q(t,x)$ согласно выражению (5.5)

$$q(t,x) = \tau^2 + \frac{x}{5}\,\tau^2 = \frac{(5+x)\,t^2}{5\cdot 81} = \frac{(5+x)\,t^2}{405} \tag{5.31}$$

и запишем решение краевой задачи согласно представлению (5.4)

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x) + \frac{(5+x)\,t^2}{405}\,, \tag{5.32}$$

откуда для производных и начального условия имеем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{2\,(5+x)\,t}{405}\,, \\ \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\,, \\ u(0,x) = v(0,x) + w(0,x) = u_0(x)\,. \end{cases} \tag{5.33}$$

Следовательно, для суммы функций $v(t,x) + w(t,x)$ получим следующую краевую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{2\,(5+x)\,t}{405}\,, & 0 < x < 5\,, \quad 0 < t \leqslant 9\,, \\ v(0,x) + w(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant 5\,, \\ \left.\begin{aligned} v(t,0) + w(t,0) = 0 \\ v(t,5) + w(t,5) = 0 \end{aligned}\right\}, & 0 < t \leqslant 9\,, \end{cases} \tag{5.34}$$

которую разделим на две вспомогательные краевые задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,, & 0 < x < 5\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,, \\ v(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant 5\,, \\ \left.\begin{aligned} v(t,0) = 0 \\ v(t,5) = 0 \end{aligned}\right\}, & 0 \leqslant t \leqslant 9\,, \end{cases} \tag{5.35}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \dfrac{2\,(5+x)\,t}{405}\,, & 0 < x < 5\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,,\\
w(0,x) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant 5\,,\\
\left.\begin{aligned} w(t,0) = 0\\ w(t,5) = 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 9\,.
\end{cases}
\tag{5.36}
$$

Запишем решение вспомогательной задачи (5.35) согласно (5.19)

$$
v(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{0,\mu}\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,,
\tag{5.37}
$$

где коэффициенты разложения функции $u_0(x)$ суть (см. разложение (8.20) на с. 244)

$$
u_{0,\mu} = 4B_\mu^2\,\mathtt{sin}\,(4A_\mu)\,,
\tag{5.38}
$$

причём для удобства и краткости записи введены вспомогательные величины

$$
A_\mu := \frac{\mu\pi}{5}\,, \qquad B_\mu := \frac{5}{\mu\pi}\cdot
\tag{5.39}
$$

На всякий случай, поясним происхождение выражений (5.38), (5.39) в разложении (8.20), последнее приведём здесь для удобства

$$
u_0(x) = \frac{2h}{\pi^2}\,\frac{\ell^2}{c\,(\ell-c)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell} = \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{0,\mu}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,
$$

откуда

$$
u_{0,\mu} = \frac{2h}{\pi^2}\,\frac{\ell^2}{c\,(\ell-c)}\,\frac{1}{\mu^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} = \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\frac{2h}{c\,(\ell-c)}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\cdot
$$

Теперь учтём, что $\ell = 5$, $c = 4$, $h = 8$, тогда имеем для коэффициентов разложения функции $u_0(x)$

$$
u_{0,\mu} = \left(\frac{5}{\mu\pi}\right)^2\frac{2\cdot 8}{4\,(5-4)}\,\mathtt{sin}\left(4\cdot\frac{\mu\pi}{5}\right) = \frac{16}{4}\,B_\mu^2\,\mathtt{sin}\,(4A_\mu) = 4B_\mu^2\,\mathtt{sin}\,(4A_\mu).
$$

Следовательно, решение вспомогательной задачи (5.35) есть ряд

$$
v(t,x) = 4\sum_{\mu=1}^{\infty} B_\mu^2\,\mathtt{sin}\,(4A_\mu)\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,.
\tag{5.40}
$$

Запишем решение вспомогательной задачи (5.36) согласно (5.29)

$$
w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,,
\tag{5.41}
$$

где функции $w_\mu(t)$ выражаются в квадратурах, согласно (5.28)

$$
w_\mu(t) = \int\limits_0^t \mathtt{e}^{-A_\mu^2\,(t-\tau)}\,h_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\int\limits_0^t \mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\,h_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,
\tag{5.42}
$$

$h_\mu(t)$ — коэффициенты разложения функции

$$h(t,x) = -\frac{2\,(5+x)\,t}{405} = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,. \tag{5.43}$$

Вычислим коэффициенты $h_\mu(t)$

$$h_\mu(t) = \frac{2}{5}\int\limits_0^5 h(t,x)\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{5}\,\frac{2\,t}{405}\int\limits_0^5 (5+x)\,\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,\mathrm{d}x = -\left(\frac{2}{5\cdot 9}\right)^2 t\,I_1\,. \tag{5.44}$$

Определённый интеграл I_1 вычислим по частям

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_0^5 (5+x)\,\mathtt{sin}\,A_\mu\,x\,\mathrm{d}x = \left\{\begin{matrix} u = x+5\,, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x\,, \\ \mathrm{d}v = \mathtt{sin}\,A_\mu\,x\,\mathrm{d}x\,, & v = -B_\mu\,\mathtt{cos}\,A_\mu\,x \end{matrix}\right\} = \\ &= -B_\mu\,(5+x)\,\mathtt{cos}\,A_\mu\,x\,\Big|_0^5 + B_\mu^2\,\mathtt{sin}\,A_\mu\,x\,\Big|_0^5 = \\ &= -B_\mu\left[\,10\,(-1)^\mu - 5\,\right] = -5B_\mu\left[\,2\,(-1)^\mu - 1\,\right]\,. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Возвращаясь к коэффициентам $h_\mu(t)$ будем иметь для последних

$$h_\mu(t) = -\left(\frac{2}{5\cdot 9}\right)^2 t\,I_1 \overset{(5.45)}{=} \frac{4B_\mu}{405}\left[2\,(-1)^\mu - 1\right]\,t =: b_\mu\,t\,. \tag{5.46}$$

Обратимся к нахождению функций $w_\mu(t)$, согласно (5.42)

$$w_\mu(t) = b_\mu\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\int\limits_0^t \tau\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\,\mathrm{d}\tau = b_\mu\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\,I_2(t)\,, \tag{5.47}$$

где определённый интеграл вычислим по частям

$$\begin{aligned} I_2(t) &= \int\limits_0^t \tau\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left\{\begin{matrix} u = \tau\,, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}\tau\,, \\ \mathrm{d}v = \mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\,, & v = B_\mu^2\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau} \end{matrix}\right\} = \tau B_\mu^2\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\Big|_0^t - B_\mu^2\int\limits_0^t \mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\,\mathrm{d}\tau = \\ &= B_\mu^2\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,\tau}\left(\tau - B_\mu^2\right)\Big|_0^t = B_\mu^2\,\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,t}\left(t - B_\mu^2\right) - B_\mu^4 = B_\mu^2\,\left[\mathtt{e}^{+A_\mu^2\,t}\left(t - B_\mu^2\right) - B_\mu^2\right]. \end{aligned} \tag{5.48}$$

Следовательно,

$$w_\mu(t) \overset{(5.47),\,(5.48)}{=} b_\mu B_\mu^2\left\{t - B_\mu^2 - B_\mu^2\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\right\}\,, \tag{5.49}$$

и решение вспомогательной задачи (5.36) примет вид

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu B_\mu^2\left\{t - B_\mu^2 - B_\mu^2\,\mathtt{e}^{-A_\mu^2\,t}\right\}\mathtt{sin}\,(A_\mu x)\,. \tag{5.50}$$

Решение же исходной краевой задачи (5.30) получим путём сборки решений вспомогательных задач, то есть по формуле (5.32). ▲

5.3. Краевая задача для уравнения теплопроводности с граничными условиями *Неймана*

5.3.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи состоит в нахождении температуры в каждом сечении тонкого стержня длины ℓ в любое мгновение конечного промежутка времени $[0, T]$, если: 1) боковая поверхность стержня теплоизолирована; 2) внутри стержня действуют распределенные источники тепла заданной мощности; 3) начальная температура стержня известна; 4) тепловые потоки на концах стержня известны.

Математическая постановка задачи состоит в нахождении в пространственно-времено́м прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$ функции $u(t,x)$, являющейся решением следующей краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x} &= \psi_1(t) \\ \dfrac{\partial u(t,\ell)}{\partial x} &= \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{5.51}$$

5.3.2. Решение задачи методом разделения переменных

Решение задачи (??) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{5.52}$$

причём функцию $q(t,x)$ выберем так, чтобы удовлетворить неоднородным (ненулевым) граничным условиям задачи (??)

$$q(t,x) = \psi_1(t)\,x + \big[\,\psi_2(t) - \psi_1(t)\big]\,\frac{x^2}{2\ell}\,. \tag{5.53}$$

Подстановка представления (5.52), (5.53) для искомого решения $u(t,x)$ в задачу (??) показывает, что сумма функций $v(t,x) + w(t,x)$ есть решение следующей краевой задачи с однородными (нулевыми) граничными условиями

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad t > 0\,, \\
v(0,x) + w(0,x) = v_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\
\left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(t,0)}{\partial x} + \dfrac{\partial w(t,0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v(t,\ell)}{\partial t} + \dfrac{\partial w(t,\ell)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad t \geqslant 0\,,
\end{cases}
\tag{5.54}
$$

и „новыми“ правой частью $h(t,x)$ и начальным условием $v_0(x)$

$$
\begin{cases}
h(t,x) := g(t,x) - \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t} + a^2 \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\,, \\
\qquad\qquad \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t} = \psi_1'(t)\,x + \big[\,\psi_2'(t) - \psi_1'(t)\big]\,\dfrac{x^2}{2\ell}\,, \\
\qquad\qquad \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2} = \big[\,\psi_2(t) - \psi_1(t)\big]\,\dfrac{1}{\ell}\,, \\
v_0(x) := u_0(x) - q(x,0), \\
\qquad\qquad q(x,0) = \psi_1(0)\,x + \big[\,\psi_2(0) - \psi_1(0)\big]\,\dfrac{x^2}{2\ell}\,.
\end{cases}
\tag{5.55}
$$

Краевую задачу (5.54), (5.55), в силу линейности последней, разделим на две — *вспомогательную краевую задачу* для функции $v(t,x)$ (в этой задаче уравнение однородно, т. е. не содержит функции $h(t,x)$, а начальное условие неоднородно)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\
v(0,x) = v_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\
\left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(t,0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial v(t,\ell)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,,
\end{cases}
\tag{5.56}
$$

и *вспомогательную краевую задачу* для функции $w(t,x)$ (в этой задаче уравнение неоднородно, т. е. содержит функцию $h(t,x)$, а начальное условие однородно)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ w(0,x) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial w(t,0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial w(t,\ell)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad\quad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{5.57}$$

Решение вспомогательной задачи (5.56) будем разыскивать *методом разделения переменных*, подобно решению вспомогательной задачи (5.8) на с. 140, то есть в виде

$$v(t,x) = O(t)\,X(x)\,, \tag{5.58}$$

тогда получим две задачи, связанные между собой через параметр разделения λ: задачу *Штурма – Лиувилля* для функции $X(x)$ (см. разд. 3.2.1. на с. 66)

$$\mathrm{SL}_2(X): \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \\ X'(0) = 0, \quad X'(\ell) = 0\,, \end{cases} \tag{5.59}$$

и задачу *Коши* для функции $O(t)$ (начальное условие далее будет уточнено)

$$C(O): \quad \begin{cases} O'(t) + \lambda\,a^2\,O(t) = 0\,, \\ O(0) = ? \end{cases} \tag{5.60}$$

Собственные значения задачи (5.59) равны (см. табл. 3.1 на с. 67)

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \mu = 0, 1, 2, \dots\,, \tag{5.61}$$

а соответствующие им *собственные функции* суть

$$X_\mu(x) = \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{5.62}$$

Подставим теперь допустимые значения (5.61) параметра разделения λ в задачу *Коши* (5.60), разделим переменные и проинтегрируем уравнение, учитывая начальное условие (которое снабдим нижним индексом μ)

$$O_\mu(t) = O_\mu(0)\,e^{-\lambda_\mu a^2 t} = O_\mu(0)\,e^{-\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t}\,. \tag{5.63}$$

Для решения краевой задачи (5.56) получаем счётное семейство функций

$$v_\mu(t,x) = X_\mu(x)\,O_\mu(t)\,, \tag{5.64}$$

удовлетворяющих уравнению и граничным условиям, но не удовлетворяющих начальному условию.

Сумма функций (5.64)

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} v_\mu(t,x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} X_\mu(x)\, O_\mu(t) = \sum_{\mu=0}^{\infty} O_\mu(0)\, e^{-\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{\mu\pi x}{\ell} \tag{5.65}$$

также удовлетворяет уравнению (формально!) и граничным условиям. Постараемся подобрать постоянные $O_\mu(0)$ так, чтобы ряд (5.65) был согласован с начальным условием краевой задачи (5.56). Для этого сопоставим ряд (5.65) при $t = 0$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} v_\mu(x,0) = \sum_{\mu=0}^{\infty} O_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} O_\mu(0) \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}$$

и разложение начального условия задачи (5.56) в ряд по собственным функциям (5.62)

$$v_0(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} v_{0,\,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} v_{0,\,\mu} \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

откуда

$$O_0(0) \equiv v_{0,\,0} = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^\ell v_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad O_\mu(0) \equiv v_{0,\,\mu} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell v_0(\xi)\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{5.66}$$

Следовательно, решением вспомогательной краевой задачи (5.56) есть ряд

$$v(t,x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} O_\mu(0)\, e^{-\left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{5.67}$$

коэффициенты которого равны коэффициентам (5.66) разложения начального условия $v_0(x)$ в ряд по собственным функциям (5.62).

Решение вспомогательной краевой задачи (5.57) сразу будем разыскивать в виде ряда по собственным функциям (5.62)

$$w(t,x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu(t)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} w_\mu(t) \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{5.68}$$

в котором коэффициенты $w_\mu(t)$ суть неизвестные функции времени. Соответственно, разложим правую часть $h(t,x)$ уравнения задачи (5.57) в ряд по собственным функциям (5.62)

$$h(t,x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} h_\mu(t)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=0}^{\infty} h_\mu(t) \cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

$$h_0(t) = \frac{1}{\ell}\int\limits_0^\ell h(\xi,t)\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad h_\mu(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell h(\xi,t)\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{5.69}$$

В результате, вместо уравнения задачи (5.57) получаем ряд по собственным функциям (5.62), тождественно равный нулю

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{w_\mu'(t) + \left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t) - h_\mu(t)\right\}\cos\frac{\mu\pi x}{\ell} = 0\,,$$

что возможно лишь при обращении в нуль всех коэффициентов ряда

$$w_\mu'(t) + \left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t) - h_\mu(t) = 0, \qquad \mu = 0,1,2,\ldots \tag{5.70}$$

Подобно решению вспомогательной задачи (5.9) на с. 140, для нахождения функций $w_\mu(t)$ имеем счётную последовательность задач *Коши*

$$\begin{cases} w_\mu'(t) + \left(\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t) = h_\mu(t)\,, \\ w_\mu(0) = 0\,, \end{cases} \qquad \mu = 0,1,2,\ldots\,, \tag{5.71}$$

решения которых суть

$$w_\mu(t) = \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\,h_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.72}$$

Сборка (5.68), (5.69) и (5.72) даёт решение вспомогательной краевой задачи (5.57)

$$w(t,x) = \sum_{\mu=0}^{\infty}\left\{\int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2(t-\tau)}\,h_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{5.73}$$

5.3.3. Обоснование решения задачи

5.3.4. Примеры решения задачи

5.4. Краевая задача для уравнения теплопроводности с граничными условиями *Робена*

5.4.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи состоит в нахождении температуры в каждом сечении тонкого стержня длины ℓ в любое мгновение конечного промежутка времени $[0, T]$, если: 1) боковая поверхность стержня теплоизолирована; 2) внутри стержня действуют распределенные источники тепла заданной мощности; 3) начальная температура стержня известна; 4) на одном конце стержня известна температура, а на другом — тепловой поток.

Математическая постановка задачи состоит в нахождении в пространственно-временно́м прямоугольнике $[0, T]\times[0, \ell]$ функции $u(t, x)$, являющейся решением краевой задачи, которую рассмотрим в двух разновидностях. Первая разновидность такова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} u(t,0) &= \psi_1(t) \\ \dfrac{\partial u(t,\ell)}{\partial x} &= \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\quad 0 \leqslant t \leqslant T\,, \end{cases} \tag{5.74}$$

а вторая получается зеркальной перестановкой граничных условий

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t \leqslant T\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u(t,0)}{\partial x} &= \psi_1(t) \\ u(t,\ell) &= \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\quad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{5.75}$$

5.4.2. Решение задачи методом разделения переменных

Решение задачи (**??**) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{5.76}$$

причём функцию $q(t, x)$ выберем так, чтобы удовлетворить неоднородным (ненулевым) граничным условиям задачи (**??**)

$$q(t,x) = \psi_1(t) + \psi_2(t)\,x\,. \tag{5.77}$$

Подстановка представления (5.76), (5.77) для искомого решения $u(t,x)$ в задачу (**??**) показывает, что сумма функций $v(t,x)+w(t,x)$ есть решение следующей краевой задачи с однородными (нулевыми) граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t}=a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}+a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}+h(t,x)\,, & 0<x<\ell\,, \quad t>0\,,\\ v(x,0)+w(x,0)=v_0(x)\,, & 0\leqslant x\leqslant \ell\,,\\ \left.\begin{aligned} v(0,t)+w(0,t)=0\\ \dfrac{\partial v(\ell,t)}{\partial t}+\dfrac{\partial w(\ell,t)}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\}, & \qquad t\geqslant 0\,, \end{cases} \tag{5.78}$$

и „новыми“ правой частью $h(t,x)$ и начальным условием $v_0(x)$

$$\begin{cases} h(t,x):=f(t,x)-\dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t}+a^2\dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\,,\\ \qquad\qquad \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t}=\psi_1'(t)+\psi_2'(t)\,x\,,\\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\equiv 0\,,\\ v_0(x):=u_0(x)-q(x,0),\\ \qquad\qquad q(x,0)=\psi_1(0)+\psi_2(0)\,x\,. \end{cases} \tag{5.79}$$

Краевую задачу (5.78), (5.79), в силу линейности последней, разделим на две — *вспомогательную краевую задачу* для функции $v(t,x)$ (в этой задаче уравнение однородно, т. е. не содержит функции $h(t,x)$, а начальное условие неоднородно)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t}=a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & 0<x<\ell\,, \qquad 0<t\leqslant T\,,\\ v(x,0)=v_0(x)\,, & 0\leqslant x\leqslant \ell\,,\\ \left.\begin{aligned} v(0,t)=0\\ \dfrac{\partial v(\ell,t)}{\partial x}=0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,, \end{cases} \tag{5.80}$$

и *вспомогательную краевую задачу* для функции $w(t,x)$ (в этой задаче уравнение неоднородно, т. е. содержит функцию $h(t,x)$, а начальное условие однородно)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,,\\
w(x,0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,,\\
\left.\begin{aligned} w(0,t) &= 0\\ \dfrac{\partial w(\ell,t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad\quad 0 \leqslant t \leqslant T\,.
\end{cases}
\tag{5.81}
$$

Решение вспомогательной задачи (5.80) будем разыскивать *методом разделения переменных*, подобно решению вспомогательной задачи (**??**) на с. 155, тогда будем иметь две задачи, связанные между собой через параметр λ: I) задачу *Штурма – Лиувилля* для функции $X(x)$ (см. разд. 3.2.1. на с. 66)

$$
\mathrm{SL}_3(X): \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,\\ X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0\,, \end{cases}
\tag{5.82}
$$

и II) задачу *Коши* для функции $O(t)$ (начальное условие далее будет уточнено)

$$
C(O): \quad \begin{cases} O'(t) + \lambda\, a^2\, O(t) = 0\,,\\ O(0) = ? \end{cases}
\tag{5.83}
$$

Собственные значения задачи (5.82) равны (см. табл. 3.1 на с. 67)

$$
\lambda_\mu = \left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,,
\tag{5.84}
$$

а соответствующие им *собственные функции* —

$$
X_\mu(x) = \sin\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,.
\tag{5.85}
$$

Подставим теперь допустимые значения (5.84) параметра разделения λ в задачу *Коши* (5.83), разделим переменные и проинтегрируем уравнение, учитывая начальное условие (которое снабдим нижним индексом μ)

$$
O_\mu(t) = O_\mu(0)\,\mathrm{e}^{-\lambda_\mu a^2 t} = O_\mu(0)\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2 a^2 t}\,.
\tag{5.86}
$$

Для решения краевой задачи (5.80) получаем счётное семейство функций

$$
v_\mu(t,x) = O_\mu(t)\,X_\mu(x)\,,
\tag{5.87}
$$

удовлетворяющих уравнению и граничным условиям, но не удовлетворяющих начальному условию.

Сумма функций (5.87)

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} X_\mu(x)\, O_\mu(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, \mathtt{e}^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2 a^2 t}\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell} \tag{5.88}$$

также удовлетворяет уравнению (формально!) и граничным условиям. Постараемся подобрать постоянные $O_\mu(0)$ так, чтобы ряд (5.88) был согласован с начальным условием краевой задачи (5.80). Для этого сопоставим ряд (5.88) при $t = 0$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(x,0) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}$$

и разложение начального условия задачи (5.80) в ряд по собственным функциям (5.85)

$$v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\,\mu}\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,,$$

откуда

$$O_\mu(0) \equiv v_{0,\,\mu} = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^\ell v_0(\xi)\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,\xi}{2\ell}\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{5.89}$$

Следовательно, решением вспомогательной краевой задачи (5.80) есть ряд

$$v(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, e^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2 a^2 t}\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,, \tag{5.90}$$

коэффициенты которого равны коэффициентам (5.89) разложения начального условия $v_0(x)$ в ряд по собственным функциям (5.85).

Решение вспомогательной краевой задачи (5.81) сразу будем разыскивать в виде ряда по собственным функциям (5.85)

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\, \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,, \tag{5.91}$$

в котором коэффициенты $w_\mu(t)$ суть неизвестные функции времени.

Последовательность решения задачи (5.81) такая же, как и для задачи (**??**), поэтому запишем окончательное выражение для решения

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left\{ \int\limits_0^t e^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)a}{2\ell}\right)^2 (t-\tau)}\, h_\mu(\tau)\, \mathrm{d}\tau \right\} \mathtt{sin}\, \frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,. \tag{5.92}$$

где $h_\mu(t)$ — коэффициенты разложения правой части уравнения задачи (5.81) в ряд по собственным функциям (5.85):

$$h(t,x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,X_\mu(x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,,$$

$$h_\mu(t)=\frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell h(\xi,t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\pi(2\mu-1)\,\xi}{2\ell}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{5.93}$$

Решение задачи (**??**) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$u(t,x)=q(t,x)+v(t,x)+w(t,x)\,, \tag{5.94}$$

причём функцию $q(t,x)$ выберем так, чтобы удовлетворить неоднородным (ненулевым) граничным условиям задачи (**??**)

$$q(t,x)=\psi_1(t)(x-\ell)+\psi_2(t)\,. \tag{5.95}$$

Подстановка представления (5.94), (5.95) для искомого решения $u(t,x)$ в задачу (**??**) показывает, что сумма функций $v(t,x)+w(t,x)$ есть решение следующей краевой задачи с однородными (нулевыми) граничными условиями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\,\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+a^2\,\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+h(t,x)\,, & 0<x<\ell\,, \quad t>0\,,\\ v(x,0)+w(x,0)=v_0(x)\,, & 0\leqslant x\leqslant \ell\,,\\ \left.\begin{array}{r} \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x}+\dfrac{\partial w(0,t)}{\partial x}=0\\ v(\ell,t)+w(\ell,t)=0 \end{array}\right\}, & \qquad t\geqslant 0\,, \end{cases} \tag{5.96}$$

и „новыми“ правой частью $h(t,x)$ и начальным условием $v_0(x)$

$$\begin{cases} h(t,x):=f(t,x)-\dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t}+a^2\dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\,,\\ \qquad\qquad \dfrac{\partial q(t,x)}{\partial t}=\psi_1'(t)(x-\ell)+\psi_2'(t)\,,\\ \qquad\qquad \dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\equiv 0\,,\\ v_0(x):=u_0(x)-q(x,0),\\ \qquad\qquad q(x,0)=\psi_1(0)(x-\ell)+\psi_2(0)\,x\,. \end{cases} \tag{5.97}$$

Краевую задачу (5.96), (5.97), в силу линейности последней, разделим на две — *вспомогательную краевую задачу* для функции $v(t,x)$ (в этой задаче уравнение однородно, т. е. не содержит функции $h(t,x)$, а начальное условие неоднородно)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,,\\
v(x,0) = v_0(x)\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,,\\
\left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(0,t)}{\partial x} &= 0\\ v(\ell,t) &= 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad\quad\; 0 \leqslant t \leqslant T\,,
\end{cases}
\tag{5.98}
$$

и *вспомогательную краевую задачу* для функции $w(t,x)$ (в этой задаче уравнение неоднородно, т.е. содержит функцию $h(t,x)$, а начальное условие однородно)

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,,\\
w(x,0) = 0\,, & 0 \leqslant x \leqslant \ell\,,\\
\left.\begin{aligned} \dfrac{\partial w(0,t)}{\partial x} &= 0\\ w(\ell,t) &= 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad\quad\; 0 \leqslant t \leqslant T\,.
\end{cases}
\tag{5.99}
$$

Решение вспомогательной задачи (5.98) будем разыскивать *методом разделения переменных*, подобно решению вспомогательной задачи (5.80) на с. 155, тогда будем иметь две задачи, связанные между собой через параметр λ: I) задачу *Штурма – Лиувилля* для функции $X(x)$ (см. разд. 3.2.1. на с. 66)

$$
\mathrm{SL}_4(X): \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,,\\ X'(0) = 0, \quad X(\ell) = 0\,, \end{cases}
\tag{5.100}
$$

и II) задачу *Коши* для функции $O(t)$ (начальное условие далее будет уточнено)

$$
C(O): \quad \begin{cases} O'(t) + \lambda\, a^2\, O(t) = 0\,,\\ O(0) = ? \end{cases}
\tag{5.101}
$$

Собственные значения задачи (5.100) равны (см. табл. **??** на с. **??**)

$$
\lambda_\mu = \left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,,
\tag{5.102}
$$

а соответствующие им *собственные функции* —

$$
X_\mu(x) = \cos\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,.
\tag{5.103}
$$

Подставим теперь допустимые значения (5.102) параметра разделения λ в задачу *Коши* (5.101), разделим переменные и проинтегрируем уравнение, учитывая начальное условие (которое снабдим нижним индексом μ)

$$O_\mu(t) = O_\mu(0)\, e^{-\lambda_\mu a^2 t} = O_\mu(0)\, e^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2 a^2 t}\,. \tag{5.104}$$

Для решения краевой задачи (5.98) получаем счётное семейство функций

$$v_\mu(t,x) = X_\mu(x)\, O_\mu\,(t)\,, \tag{5.105}$$

удовлетворяющих уравнению и граничным условиям, но не удовлетворяющих начальному условию.

Сумма функций (5.105)

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} X_\mu(x)\, O_\mu(t) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, e^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)}{2\ell}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell} \tag{5.106}$$

также удовлетворяет уравнению (формально!) и граничным условиям. Постараемся подобрать постоянные $O_\mu(0)$ так, чтобы ряд (5.106) был согласован с начальным условием краевой задачи (5.98). Для этого сопоставим ряд (5.106) при $t = 0$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(x,0) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0) \cos\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}$$

и разложение начального условия задачи (5.98) в ряд по собственным функциям (5.103)

$$v_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\,\mu} \cos\frac{\pi(2\mu-1)\,x}{2\ell}\,,$$

откуда

$$O_\mu(0) \equiv v_{0,\,\mu} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell v_0(\xi) \cos\frac{\pi(2\mu-1)\,\xi}{2\ell}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{5.107}$$

Следовательно, решением вспомогательной краевой задачи (5.98) есть ряд

$$v(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, \mathrm{e}^{-\left(\frac{(2\mu-1)\,\pi}{2\ell}\right)^2 a^2 t} \cos\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,, \tag{5.108}$$

коэффициенты которого равны коэффициентам (5.107) разложения начального условия $v_0(x)$ в ряд по собственным функциям (5.103).

Решение вспомогательной краевой задачи (5.99) сразу будем разыскивать в виде ряда по собственным функциям (5.103)

$$w(t,x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\,X_\mu(x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\cos\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,, \tag{5.109}$$

в котором коэффициенты $w_\mu(t)$ суть неизвестные функции времени.

Последовательность решения задачи (5.99) такая же, как и для задачи (**??**), поэтому запишем окончательное выражение для решения

$$w(t,x)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{\int_0^t \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi(2\mu-1)a}{2\ell}\right)^2(t-\tau)}\,h_\mu(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right\}\cos\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,. \tag{5.110}$$

где $h_\mu(t)$ — коэффициенты разложения правой части уравнения задачи (5.99) в ряд по собственным функциям (5.103):

$$h(t,x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,X_\mu(x)=\sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\cos\frac{(2\mu-1)\,\pi x}{2\ell}\,,$$

$$h_\mu(t)=\frac{2}{\ell}\int_0^\ell h(\xi,t)\cos\frac{(2\mu-1)\,\pi\xi}{2\ell}\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{5.111}$$

5.4.3. Обоснование решения задачи

5.4.4. Примеры решения задачи

5.5. Сводные сведения о краевых задач для уравнения теплопроводности

Краевые задачи I (5.2), II (**??**), III (**??**) и IV (**??**) решаются методом разделения переменных единообразно, но некоторая путаница может возникать при выборе функции $q(t,x)$ (5.5), (5.53), (5.77), (5.95), собственных значений λ_μ и собственных функций $X_\mu(x)$ задачи *Штурма – Лиувилля*. Для упрощения работы, все необходимые сведения собраны в табл. 5.1.

Табл. 5.1. Начальные и граничные условия, собственные значения и собственные функции основных I (5.2), II (??), III (??), IV (??) и вспомогательных ([(5.8),(5.9)], [(5.56),(5.57)], [(5.80),(5.81)], [(5.98),(5.99)]) краевых задач для неоднородного пространственно одномерного уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx} + g(t,x)$. Решения основных краевых задач разыскиваются в виде $u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)$, где функции $q(t,x)$ удовлетворяют граничным условиям, $v(t,x)$, $w(t,x)$ — решения соответствующих вспомогательных задач ($v_0(x) = u_0(x) - q(x,0)$, $h(t,x) = f(t,x) - q_t(t,x) + a^2 q_{xx}(t,x)$, п. ч. ≡ правая часть уравнения краевой задачи, для задач I, II, IV $\mu = 1,2,3,\ldots$, для задачи II $\mu = 0,1,2,\ldots$)

№	$(0,t)$	(l,t)	$(x,0)$	п. ч.	$q(t,x)$	λ_μ	$X_\mu(x)$
I	$u(0,t)=\psi_1(t)$ $v\,(0,t)=0$ $w(0,t)=0$	$u(l,t)=\psi_2(t)$ $v(l,t)=0$ $w(l,t)=0$	$u(x,0)=u_0(x)$ $v(x,0)=v_0(x)$ $w(x,0)=0$	$g(t,x)$ 0 $h(t,x)$	$\psi_1(t)+\left[\,\psi_2(t)-\psi_1(t)\right]\left(\dfrac{x}{l}\right)$	$\left(\dfrac{\pi\mu}{l}\right)^2$	$\mathtt{sin}\left(\sqrt{\lambda_\mu}x\right)$
II	$u_x(0,t)=\psi_1(t)$ $v_x\,(0,t)=0$ $w_x(0,t)=0$	$u_x(l,t)=\psi_2(t)$ $v_x(l,t)=0$ $w_x(l,t)=0$	$u(x,0)=u_0(x)$ $v(x,0)=v_0(x)$ $w(x,0)=0$	$g(t,x)$ 0 $h(t,x)$	$\psi_1(t)\,x+\left[\,\psi_2(t)-\psi_1(t)\right]\left(\dfrac{x^2}{2l}\right)$	$\left(\dfrac{\pi\mu}{l}\right)^2$	$\mathtt{cos}\left(\sqrt{\lambda_\mu}x\right)$
III	$u(0,t)=\psi_1(t)$ $v\,(0,t)=0$ $w(0,t)=0$	$u_x(l,t)=\psi_2(t)$ $v_x(l,t)=0$ $w_x(l,t)=0$	$u(x,0)=u_0(x)$ $v(x,0)=v_0(x)$ $w(x,0)=0$	$g(t,x)$ 0 $h(t,x)$	$\psi_1(t)+\psi_2(t)\,x$	$\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)}{2l}\right)^2$	$\mathtt{sin}\left(\sqrt{\lambda_\mu}x\right)$
IV	$u_x(0,t)=\psi_1(t)$ $v_x\,(0,t)=0$ $w_x(0,t)=0$	$u(l,t)=\psi_2(t)$ $v(l,t)=0$ $w(l,t)=0$	$u(x,0)=u_0(x)$ $v\,(x,0)=v_0(x)$ $u(x,0)=0$	$g(t,x)$ 0 $h(t,x)$	$\psi_1(t)(x-l)+\psi_2(t)$	$\left(\dfrac{\pi(2\mu-1)}{2l}\right)^2$	$\mathtt{cos}\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)$

5.6. Задача Коши для уравнения теплопроводности

5.6.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи состоит в нахождении температуры в каждом сечении тонкого стержня бесконечной длины в любое мгновение конечного промежутка времени, если: 1) боковая поверхность стержня теплоизолирована; 2) внутри стержня действуют распределённые источники с известной линейной плотностью выделения тепла; 3) температура стержня в начальное мгновение известна.

Математическая постановка задачи состоит в нахождения функции: 1) ограниченной и непрерывной в замыкании $\overline{\mathcal{Q}(T)} = [0, T] \times \mathbb{R}$ пространственно-временнóй полосы; 2) один раз непрерывно дифференцируемой по переменной t и дважды непрерывно дифференцируемой по переменной x в полосе $\mathcal{Q}(T) = (0, T] \times \mathbb{R}$; 3) удовлетворяющей: *а*) неоднородному уравнению теплопроводности и *б*) соответствующему начальному условию на нижней границе $t = 0$ полосы, иначе — состоит в решении задачи *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,, \\ u(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{5.112}$$

5.6.2. Решение задачи методом разделения переменных

Решение задачи *Коши* (5.112) будем разыскивать в виде суммы двух функций

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{5.113}$$

которые должны удовлетворять следующим требованиям:

1) функция $v(t,x)$ есть решение вспомогательной задачи *Коши* для однородного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,, \\ v(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{5.114}$$

2) функция $w(t,x)$ есть решение вспомогательной задачи *Коши* для неоднородного уравнения теплопроводности с однородным начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,, \\ w(0,x) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5.115}$$

Решение обеих вспомогательных задач *Коши* (5.114) и (5.115) будем разыскивать методом разделения переменных.

1) Для решения задачи *Коши* (5.114):

а) представим искомую функцию $v(t,x)$ в виде произведения двух функций соответственно независимой переменной t и независимой переменной x

$$v(t,x) = O(t)\,X(x)\,, \qquad (t,x) \in \overline{\mathcal{Q}(T)}\,; \tag{5.116}$$

б) найдём производные представления функции $v(t,x)$ (5.116), первую по переменной t и вторую по переменной x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = O'(t)\,X(x)\,, \\ \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = O\,(t)\,X''(x)\,, \end{cases}$$

и подставим в уравнение задачи (5.114)

$$O'(t)\,X(x) = a^2\,O\,(t)\,X''(x)\,; \tag{5.117}$$

в) введём *параметр разделения* λ^2

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{O'(t)}{O(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \mathtt{const};$$

г) составим два обыкновенных дифференциальных уравнения для функций $O(t)$ и $X(x)$, связанных между собой через параметр λ

$$\begin{cases} O'_\lambda(t) + \lambda a^2\,O_\lambda(t) = 0\,, & t \in (0,T]\,, \\ X''_\lambda(x) + \lambda X_\lambda(x) = 0\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5.118}$$

При записи обоих дифференциальных уравнений, учитывая опыт решения краевых задач для уравнения теплопроводности, решаемых методом разделения переменных, мы сразу же снабдили обе искомые функции нижним индексом, указывающим на то, что решения уравнений зависят от параметра разделения. Однако, в отличие от краевых задач, для вспомогательной задачи *Коши* (5.114) нам не удалось получить соответствующие задачи *Штурма – Лиувилля* для функций X_λ, поскольку в задаче *Коши* (5.114) отсутствуют граничные условия, а значит, мы не сможем получить известным способом счётную последовательность допустимых значений параметра λ (см. постановку задачи *Штурма – Лиувилля* в разделе 3.2.1. на с. 66). Сведения о допустимых значениях параметра λ мы сможем получить только из первого уравнения (5.118). В самом деле, для этого уравнения, записанного с помощью обозначения производной по *Лейбницу*

$$\frac{\mathrm{d}O_\lambda(t)}{\mathrm{d}t} + \lambda a^2\,O_\lambda(t) = 0\,,$$

после умножения на $\mathrm{d}t$ и деления на O_λ получим известную задачу действительного анализа о нахождения функции интегрированием

$$\frac{\mathrm{d}O_\lambda}{O_\lambda} = -\lambda a^2\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,|O_\lambda| = \mathrm{d}\mathtt{e}^{-\lambda a^2 t} + \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,C_\lambda \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,|O_\lambda| = \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,C_\lambda\,\mathtt{e}^{-\lambda a^2 t}\,,$$

откуда имеем 1-параметрическое семейство решений («общее решение») дифференциального уравнения относительно функции $O_\lambda(t)$

$$O_\lambda(t) = C_\lambda\, \mathtt{e}^{-\lambda a t},$$

где C_λ — произвольные постоянные.

Из найденного семейства решений мы сразу же заключим, что допустимые значения параметра разделения суть неотрицательные: $\lambda \geqslant 0$, в противном случае все решения семейства будут неограниченно возрастающими при расширении полосы $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Перейдём к интегрированию дифференциального уравнения второго порядка относительно функций $X_\lambda(x)$ (5.118), для чего составим характеристическое уравнение: $\kappa^2+\lambda=0$, корни которого суть чисто мнимые сопряжённые числа $\kappa_{1,2}=\mp i\sqrt{\lambda}$. Следовательно, искомое 2-параметрическое семейство решений («общее решение») дифференциального уравнения относительно функции $X_\lambda(x)$ таково

$$X_\lambda(x) = A_\lambda \cos\sqrt{\lambda}x + B_\lambda \sin\sqrt{\lambda}x\,,$$

где A_λ, B_λ — произвольные постоянные.

Упростим последующие выкладки, введя для параметра разделения обозначение λ^2, тогда при извлечении корня из параметра мы должны учитывать как отрицательные, так и положительные значения. Теперь оба найденных семейства можем записать так

$$\begin{cases} O_\lambda(t) = C_\lambda\, \mathtt{e}^{-\lambda^2 a t}, \\ X_\lambda(x) = A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x\,; \end{cases}$$

д) следуя представлению (5.116) метода разделения переменных, составим выражения для частных решений однородного уравнения теплопроводности в составе задачи *Коши* (5.114)

$$v_\lambda(t,x) = O_\lambda(t)\, X_\lambda(x) = \mathtt{e}^{-\lambda^2 a t}\left(A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x\right), \tag{5.119}$$

и образуем сумму всех частных решений вида (5.119)

$$\bar{v}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_\lambda(t,x)\,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a t}\left(A_\lambda \cos\lambda x + B_\lambda \sin\lambda x\right)\mathrm{d}\lambda\,,$$

учитывая, что параметр λ принимает произвольные значения.

Поскольку каждому значению λ соответствуют свои значения произвольных постоянных A_λ, B_λ, нам придётся пересмотреть свою точку зрения на эти величины и признать их полноценными функциями параметра λ, что отразим в записи составленной суммы

$$\bar{v}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a t}\Big[A(\lambda) \cos\lambda x + B(\lambda) \sin\lambda x\Big]\mathrm{d}\lambda\,, \tag{5.120}$$

которая есть искомое ∞-параметрическое семейство решений («общее решение») уравнения вспомогательной задачи *Коши* (5.114).

е) выберем в семействе (5.120) произвольные функции $A(\lambda), B(\lambda)$ так, чтобы соответствующая им функция семейства (5.120) была согласована с начальным условием задачи (5.114), то есть

$$u_0(x) = \bar{v}(0, x)\,,$$

или в развёрнутой записи

$$u_0(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\Big]\mathrm{d}\lambda\,, \tag{5.121}$$

что сводит задачу выбора произвольных функций к представлению функции $u_0(x)$ в виде интеграла *Фурье*. Поскольку решение этой задачи известно (см. раздел 8.4. на с. 249), то произвольные функции таковы

$$\begin{cases} A(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,, \\[2ex] B(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,; \end{cases} \tag{5.122}$$

з) сборка (5.120), (5.122) приводит к следующему выражению для искомого решения вспомогательной задачи *Коши* (5.114)

$$\begin{aligned} v(t,x) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\cos\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\,\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi + \sin\lambda x\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\,\sin\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda\,, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\Big(\cos\lambda x\,\cos\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi + \sin\lambda x\,\sin\lambda\xi\Big)\,\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}\lambda\,, \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\,\cos\big[\lambda(\xi - x)\big]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\lambda\,, \end{aligned}$$

которому придадим иной вид, изменяя порядок интегрирования и учитывая чётность функции $\cos$

$$v(t,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\cos\big[\lambda(\xi - x)\big]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{5.123}$$

и) рассмотрим отдельно «внутренний» интеграл, входящий в решение (5.123) и зависящий от параметра $\alpha = \xi - x$

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \,\mathtt{cos}\, \alpha\lambda \,\mathrm{d}\lambda\,. \tag{5.124}$$

Продифференцируем интеграл (5.124) по параметру α и полученный интеграл

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \lambda \,\mathtt{sin}\, \alpha\lambda \,\mathrm{d}\lambda$$

вычислим по частям

$$\frac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = \left\{ \begin{array}{ll} p = \mathtt{sin}\, \alpha\lambda, & \mathrm{d}p = \alpha \cos \alpha\lambda \,\mathrm{d}\lambda \\ \mathrm{d}q = \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \lambda \,\mathrm{d}\lambda, & q = -\dfrac{1}{2a^2 t}\, \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \end{array} \right\} = \underbrace{\frac{1}{2a^2 t}\, \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \mathtt{sin}\, \alpha\lambda \,\Bigg|_{\lambda=0}^{\lambda=+\infty}}_{0} - \frac{\alpha}{2a^2 t}\, I(\alpha)\,.$$

Окончательно получим задачу *Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения относительно интеграла $I(\alpha)$ (5.124)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\mathrm{d}I(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} = -\dfrac{\alpha}{2a^2 t}\, I(\alpha), \\ I(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\,, \end{array} \right. \tag{5.125}$$

уравнение которой решим, разделяя переменные

$$\frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{\alpha \,\mathrm{d}\alpha}{2a^2 t} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{1}{2a^2 t}\, \mathrm{d}\left(\frac{\alpha^2}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,|I| = \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,\mathtt{exp}\left(-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}\right) + \mathrm{d}\,\mathtt{ln}\,|C|\,,$$

откуда 1-параметрическое семейство решений уравнения задачи (5.125) таково

$$I(\alpha) = C\; \mathtt{e}^{-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}}.$$

Теперь подставим начальное условие задачи (5.125) в полученное семейство и найдём решение задачи

$$I(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}\; \mathtt{e}^{-\frac{\alpha^2}{4a^2 t}}\,. \tag{5.126}$$

Начальное условие задачи (5.125) получено подстановкой нулевого значения параметра α в интеграл (5.124)

$$I(0) = \int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\, \mathrm{d}\lambda = \left\{ \begin{array}{c} x = a\sqrt{t}\,\lambda \\ \mathrm{d}x = a\sqrt{t}\,\mathrm{d}\lambda \end{array} \right\} = \frac{1}{a\sqrt{t}} \int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{a\sqrt{t}}\, J\,, \tag{5.127}$$

а интеграл *Гаусса* J вычислен с помощью искусственного приёма, сводящего вычисление квадрата интеграла *Гаусса* к вычислению интеграла от показательной функции по четверти круга

$$J^2 = \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right) \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathtt{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y \right) = \lim_{R\to\infty} \left(\int\limits_0^{+R} \mathtt{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x \right) \left(\int\limits_0^{+R} \mathtt{e}^{-y^2}\, \mathrm{d}y \right) =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^R \mathtt{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{\{(x\geqslant 0,\, y\geqslant 0)|\ x^2+y^2\leqslant R\}} \mathtt{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\,,$$

для чего перейдём к полярным переменным

$$J^2 = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^{\pi/2} \mathtt{e}^{-r^2}\, r\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi/2} \mathrm{d}\varphi\, \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \mathtt{e}^{-r^2} \mathrm{d}r^2 = -\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\, \lim_{R\to\infty} \mathtt{e}^{-r^2}\Big|_0^R = \frac{\pi}{4}\,.$$

к) заменим интеграл (5.124) выражением (5.126), подставим в решение (5.123) вспомогательной задачи *Коши* (5.114) и получим окончательный вид решения

$$v(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\, \mathtt{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\, u_0(\xi)\, \mathrm{d}\xi\,. \tag{5.128}$$

2) Для решения задачи *Коши* (5.115):

а) запишем заготовку ∞-параметрического семейства решений неоднородного уравнения задачи (5.115), следуя, как образцу, записи семейства (5.120)

$$\bar{w}(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t} \Big[A(t,\lambda) \cos \lambda x + B(t,\lambda) \sin \lambda x \Big] \mathrm{d}\lambda\,, \tag{5.129}$$

где $A(t,\lambda), B(t,\lambda)$ теперь уже произвольные функции не только параметра λ, но и переменной t;

б) запишем представление правой части неоднородного уравнения задачи (5.115) в виде интеграла *Фурье*

$$f(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big[C(t,\lambda) \cos \lambda x + D(t,\lambda) \sin \lambda x \Big] \mathrm{d}\lambda\,, \tag{5.130}$$

где функции $C(t,\lambda), D(t,\lambda)$ могут быть вычислены по известным формулам

$$
\begin{cases}
C(t,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\xi)\,\mathtt{cos}\,\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,, \\
D(t,\lambda) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t,\xi)\,\mathtt{sin}\,\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,;
\end{cases}
\tag{5.131}
$$

в) найдём частные производные семейства (5.129) по переменным t и x

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{w}(t,x)}{\partial t} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(-\lambda^2 a^2\,\mathtt{e}^{-\lambda^2 a t}\Big)\Big[A(t,\lambda)\,\mathtt{cos}\,\lambda x + B(t,\lambda)\,\mathtt{sin}\,\lambda x\Big]\mathrm{d}\lambda \\
&+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\frac{\mathrm{d}A(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}\,\mathtt{cos}\,\lambda x + \frac{\mathrm{d}B(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}\,\mathtt{sin}\,\lambda x\right]\mathrm{d}\lambda\,, \\
\frac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial x^2} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(-\lambda^2\,\mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\Big)\Big[A(t,\lambda)\,\mathtt{cos}\,\lambda x + B(t,\lambda)\,\mathtt{sin}\,\lambda x\Big]\mathrm{d}\lambda\,;
\end{aligned}
\tag{5.132}
$$

г) подставим производные (5.132) семейства (5.129) и интегральное представление функции $f(t,x)$ в неоднородное уравнение задачи (5.115)

$$
\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 t}\left[\frac{\mathrm{d}A(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}\,\mathtt{cos}\,\lambda x + \frac{\mathrm{d}B(t,\lambda)}{\mathrm{d}t}\,\mathtt{sin}\,\lambda x\right]\mathrm{d}\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\Big[C(t,\lambda)\,\mathtt{cos}\,\lambda x + D(t,\lambda)\,\mathtt{sin}\,\lambda x\Big]\mathrm{d}\lambda\,,
$$

откуда получим обыкновенные дифференциальные уравнения для нахождения произвольных функций $A(t,\lambda)$, $B(t,\lambda)$, дополненные начальными условиями, которые непосредственно следуют из начальных условий задачи (5.115), именно следующие задачи *Коши*

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}A(t,\lambda)}{\mathrm{d}t} = \mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 t}\,C(t,\lambda)\,, \qquad A(t,\lambda) = 0\,, \\
\dfrac{\mathrm{d}B(t,\lambda)}{\mathrm{d}t} = \mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 t}\,D(t,\lambda)\,, \qquad B(t,\lambda) = 0\,;
\end{cases}
\tag{5.133}
$$

д) решим задачи *Коши* (5.133)

$$
\begin{cases}
A(t,\lambda) = \displaystyle\int\limits_0^t \mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 \tau}\,C(\tau,\lambda)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\,\mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 \tau}\,\mathtt{cos}\,\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,, \\
B(t,\lambda) = \displaystyle\int\limits_0^t \mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 \tau}\,D(\tau,\lambda)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\,\mathtt{e}^{+\lambda^2 a^2 \tau}\,\mathtt{sin}\,\lambda\xi\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,,
\end{cases}
\tag{5.134}
$$

и подставим в заготовку (5.129)

$$w(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\,\mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\Big[\cos\lambda\xi\cos\lambda x + \sin\lambda\xi\sin\lambda x\Big]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \int\limits_{0}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\,\mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\cos\big[\lambda(\xi - x)\big]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\tau\,,$$

а далее приведём полученное интегральное выражение для решения задачи *Коши* (5.115) к виду

$$w(t,x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\int\limits_0^{+\infty}\mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\cos\big[\lambda(\xi - x)\big]\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,; \tag{5.135}$$

e) вычислим интеграл от параметра, подобно рассмотрению интеграла (5.124),

$$I = \int\limits_0^{+\infty}\mathtt{e}^{-\lambda^2 a^2 (t-\tau)}\cos\big[\lambda(\xi - x)\big]\,\mathrm{d}\lambda = \frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t-\tau}}\,\mathtt{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}},$$

подставим в (5.135) и запишем окончательно решение задачи *Коши* (5.115)

$$w(t,x) = \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathtt{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.136}$$

Теперь можем записать решение задачи *Коши* (5.112)

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathtt{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,u_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\,\mathtt{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}\,f(\tau,\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.137}$$

5.6.3. Основное решение оператора теплопроводности

Определение 5.1. Функция

$$\mathscr{E}(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathtt{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,, \tag{5.138}$$

участвующая в записи решений (5.128) и (5.136) вспомогательных задач *Коши* (5.114) и (5.115) и записи решения (5.137) основной задачи *Коши* (5.112), называется *основным* (или *фундаментальным*) решением оператора теплопроводности (рис. 5.2). □

С помощью основного решения (5.138), учитывая представление (5.113), можем теперь записать решение (5.137) задачи *Коши* (5.112) в кратком виде так

$$u(t,x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\,\mathscr{E}(t, x-\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int\limits_{0}^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi)\,\mathscr{E}(t-\tau, x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{5.139}$$

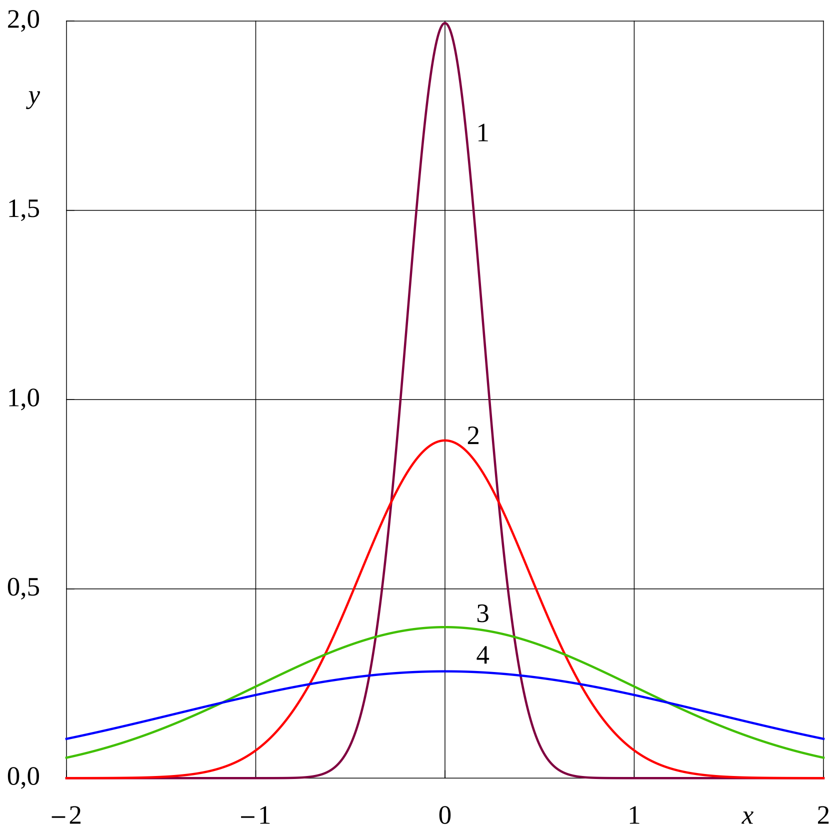

Рис. 5.2. Основное решение оператора теплопроводности (5.138) при различных значения параметров: $a=1$, $t=0{,}02\,(1); 0{,}10\,(2); 0{,}50\,(3); 1{,}00\,(4)$.

Для дальнейшего изложения понадобятся некоторые свойства основного решения оператора теплопроводности.

Свойство 1. Функция $\mathscr{E}(t,x)$ (5.138) принимает только положительные значения

$$\mathscr{E}(t,x) > 0\,, \qquad (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,. \tag{5.140}$$

Свойство 2. Функция $\mathscr{E}(t,x)$ (5.138) подчиняется условию нормировки по переменной x

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(t,x)\,\mathrm{d}x = 1\,, \qquad (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,. \tag{5.141}$$

Доказательство свойства основано на вычислении несобственного интеграла

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{E}(t,x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{\infty}^{+\infty} \mathsf{e}^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}x = \left\{ z = \frac{x}{2a\sqrt{t}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\infty}^{+\infty} \mathsf{e}^{-z^2}\,\mathrm{d}z = 1\,,$$

и, по сути, повторяет вычисления интеграла *Гаусса* в (5.127). ■

Свойство 3. Функция $\mathscr{E}(t,x)$ (5.138) удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial \mathscr{E}(t,x)}{\partial t} = a^2\, \frac{\partial^2 \mathscr{E}(t,x)}{\partial x^2}\,, \qquad (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,. \tag{5.142}$$

Доказательство основано на нахождении частных производных функции $\mathscr{E}(t,x)$ первого порядка по переменной t и второго порядка по переменной x

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{E}(t,x)}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\frac{1}{t(2a\sqrt{\pi t})}\,\mathsf{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathsf{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2} = \\
&= -\frac{1}{2t}\,\mathscr{E}(t,x) + \frac{(x-\xi)^2}{4a^2t^2}\,\mathscr{E}(t,x)\,,\\
\frac{\partial \mathscr{E}(t,x)}{\partial x} &= -\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\,\mathsf{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\frac{2\,(x-\xi)}{4a^2 t} = -\frac{x-\xi}{2a^2 t}\,\mathscr{E}(t,x)\,,\\
\frac{\partial^2 \mathscr{E}(t,x)}{\partial x^2} &= -\frac{1}{2a^2 t}\,\mathscr{E}(t,x) + \frac{(x-\xi)^2}{4a^4t^2}\,\mathscr{E}(t,x)\,,
\end{aligned}$$

и подстановке их в однородное уравнение теплопроводности (5.142). ■

5.6.4. Обоснование решения задачи

5.6.5. Примеры решения задачи

При работе с интегральной формулой (5.137) (и при её выводе) приходится иметь дело с несобственными интегралами

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \mathtt{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathtt{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\,, \tag{5.143}$$

которые могут быть вычислены введением параметра с последующим дифференцированием по параметру (см. раздел 5.6.2. на с. 163).

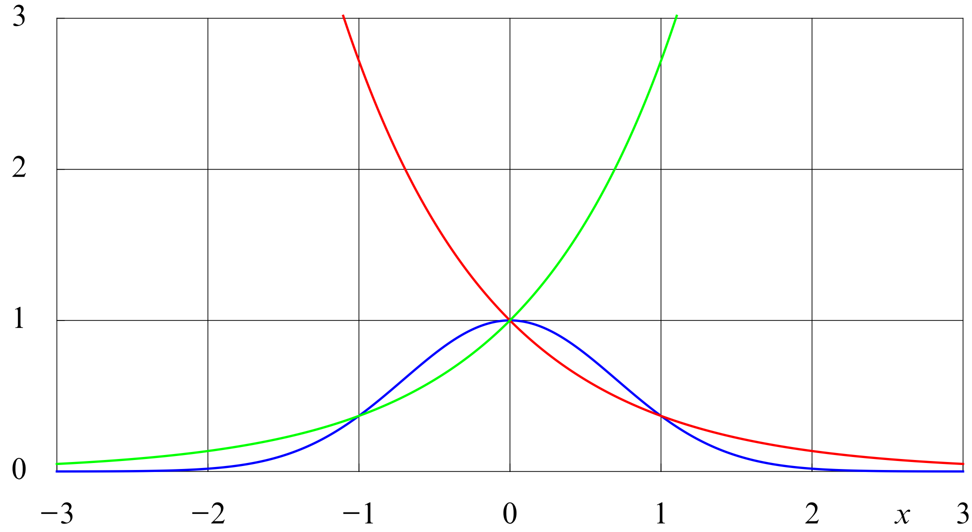

Рис. 5.3. Графики функции $\mathtt{e}^{-x^2}$ (синий), $\mathtt{e}^{-x}$ (красный), $\mathtt{e}^{+x}$ (зелёный) (функция $\mathtt{e}^{-x^2}$ убывает быстрее показательной функции $\mathtt{e}^{-|x|}$ на $\mp\infty$)

С функцией $\mathtt{exp}\,(-x^2)$ (см. рис. 5.3) связаны две специальные функции

$$\mathtt{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{x} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{5.144}$$

$$\mathtt{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{5.145}$$

называемые соответственно *функцией ошибок* (интегралом ошибок) и *дополнительной функцией ошибок* (дополнительным интегралом ошибок). Графики функций $\mathtt{erf}(x)$ (5.144) и $\mathtt{erfc}(x)$ (5.145) показаны на рис. 5.4. Очевидны свойства функции $\mathtt{erf}(x)$

$$\mathtt{erf}(-\infty) = -1\,, \qquad \mathtt{erf}(+\infty) = +1\,, \qquad \mathtt{erf}(-x) = -\mathtt{erf}(x)\,, \tag{5.146}$$

и общее свойство функций $\mathtt{erf}(x)$ и $\mathtt{erfc}(x)$

$$\mathtt{erf}(x) + \mathtt{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^x \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_x^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = 1\,, \tag{5.147}$$

объясняющее название функции $\mathtt{erfc}(x)$.

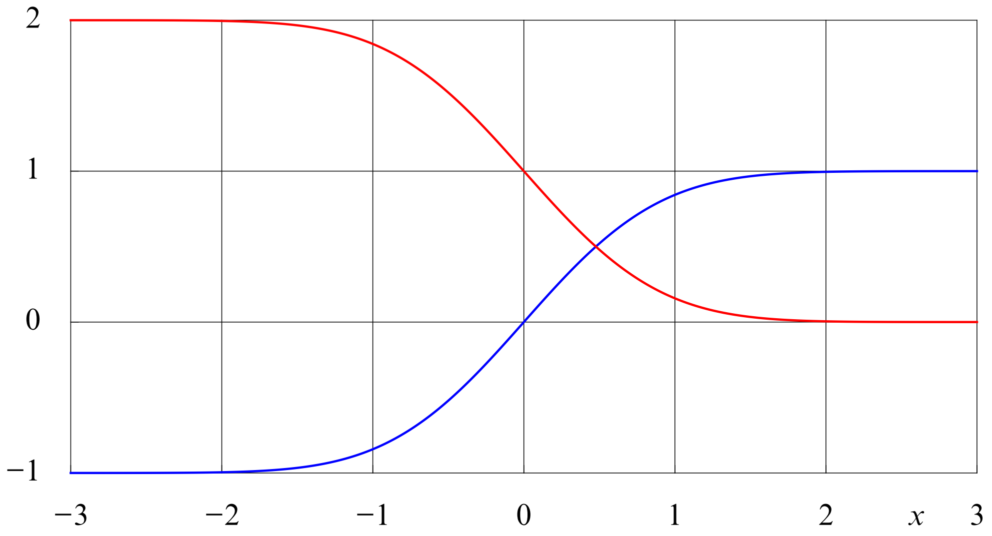

Рис. 5.4. Графики функции ошибок $\mathtt{erf}(x)$ (синий) и дополнительной функции ошибок $\mathtt{erfc}(x)$ (красный)

Функции $\mathtt{erf}(x)$ и $\mathtt{erfc}(x)$ представлены в справочниках таблицами значений; вызов к ним есть в компиляторах всех языков высокого уровня, а также в средах MAPLE и MATLAB .

Покажем, как находить решение задачи *Коши* (5.112) по интегральной формуле (5.137), используя преимущества специальных функций $\mathtt{erf}(x)$ и $\mathtt{erfc}(x)$. Заметим ещё, что интегральная формула применима и для кусочно-непрерывной функции $u_0(x)$.

Пример 5.2. Рассмотрим задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}_x(T)\,, \\[2ex] u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 = \mathtt{const}\,, & x \in \mathbb{R}^-\,, \\ u_2 = \mathtt{const}\,, & x \in \mathbb{R}^+\,. \end{cases} \end{cases} \tag{5.148}$$

Интегральная формула (5.137) для задачи *Коши* (5.154) принимает следующий вид

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u_0(\xi)\,\mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi = \frac{u_1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi + \frac{u_2}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}\,\mathrm{d}\xi = \left\{ \begin{aligned} \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t}} &= \sigma \\ \frac{\mathrm{d}\xi}{2a\sqrt{t}} &= \mathrm{d}\sigma \end{aligned} \right\} =$$

$$= \frac{u_1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{u_2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Полученное интегральное выражение даёт решение задачи, но решения подобных задач принято записывать с помощью *функции ошибок* $\mathtt{erf}$ (5.144). Поэтому преобразуем входящие в решение интегралы с помощью вспомогательной переменной $z = \dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{-z} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{-z} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\mathtt{erf}(z)\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-z}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-z}^{0} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{z} \mathtt{e}^{-\sigma^2}\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathtt{erf}(z)\,,$$

и окончательно запишем решение задачи *Коши* (5.154) так

$$u(t,x) = \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2}\,\mathtt{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right). \tag{5.149}$$

Как ведёт себя решение при $t \to \infty$? Согласовано ли это поведение с принципом максимума? ▲

Пример 5.3. Рассмотрим задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + cu(t,x)\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}_x(T)\,, \\ u(0,x) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 = \mathtt{const}\,, & x \in \mathbb{R}^-\,, \\ u_2 = \mathtt{const}\,, & x \in \mathbb{R}^+\,. \end{cases} \end{cases} \tag{5.150}$$

Интегральная формула (5.137) для решения *Коши* (5.150), очевидно, не применима (из-за члена нулевого порядка $cu(t,x)$). Поэтому введём новую зависимую переменную

$$u(t,x) = \mathtt{e}^{ct}\,v(t,x)\,, \tag{5.151}$$

относительно которой выразим производные исходной зависимой переменной

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \mathtt{e}^{\,ct}\left[c\,v(t,x) + \frac{\partial v(t,x)}{\partial t}\right], \\ \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} &= \mathtt{e}^{\,ct}\,\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,. \end{aligned}$$

Тогда задача *Коши* (5.150) относительной функции $u(t,x)$ может быть заменена задачей *Коши* относительной функции $v(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v(t,x)}{\partial t} = a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}_x(T)\,, \\ v(0,x) = u_0(x)\,, & x \in \mathbb{R}_x\,. \end{cases} \tag{5.152}$$

Решение *Коши* (5.152) получено в примере 5.4; решение исходной задачи *Коши* (5.150) запишем согласно (5.151)

$$u(t,x) = \mathtt{e}^{ct}\left(\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2}\,\mathtt{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right). \tag{5.153}$$

Как ведёт себя решение при $t \to \infty$? При каком условии решение ограничено? ▲

Иногда решение задачи *Коши* (5.112) проще находить не по интегральной формуле (5.137), а по частным правилам.

Правило 5.1. Если функция $f(t,x)$ в правой части уравнения теплопроводности имеет вид $s(t)\,g(x)$, и оператор теплопроводности переводит любую функцию $p(t)\,g(x)$ в некоторую функцию $q(t)\,g(x)$, то решение задачи *Коши* (5.112) можно разыскивать в виде $\varphi(t)\,g(x)$, где функция $\varphi(t)$ подлежит определению.

Пример 5.4. Рассмотрим задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \mathsf{e}^{-3t}\cos x\,, & (t,x)\in\mathcal{Q}_x(T)\,, \\ u(0,x)=\cos x\,, & x\in\mathbb{R}\,. \end{cases} \tag{5.154}$$

Очевидно, что в задаче (5.154) $s(t)=\mathsf{e}^{-3t}$, $g(x)=\cos x$. Подействовав оператором теплопроводности на функцию $s(t)\,g(x)$

$$L_p\,[s(t)\,g(x)] = \left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)s(t)\,g(x) = -3\,\mathsf{e}^{-3t}\cos x+\mathsf{e}^{-3t}\cos x = -2\,\mathsf{e}^{-3t}\cos x\,,$$

убеждаемся, что условие применимости правила 5.1 выполнено.

Будем искать решение задачи в виде $u(t,x)=\varphi(t)\,g(x)$, тогда относительно неизвестной функции $\varphi(t)$ получим задачу *Коши* для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t} = -\varphi(t)+\mathsf{e}^{-3t}\,, & t\in(0,T]\,, \\ \varphi(0)=1\,. \end{cases} \tag{5.155}$$

Методом разделения переменных получим 1-параметрическое семейство решений однородного уравнения задачи (5.155)

$$\varphi(t)=C\,\mathsf{e}^{-t}\,,\qquad t\in(0,T]\,.$$

1-параметрическое семейство решений неоднородного уравнения задачи (5.155) будем искать методом вариации произвольной постоянной, то есть в виде

$$\varphi(t)=C(t)\,\mathsf{e}^{-t}\,,\qquad t\in(0,T]\,,$$

где $C(t)$ — неизвестная функция, относительно которой получим задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}C(t)}{\mathrm{d}t} = \mathsf{e}^{-2t}\,, & t\in(0,T]\,, \\ C(0)=1\,. \end{cases} \tag{5.156}$$

Решение задачи *Коши* (5.156) найдём, подставляя в первообразную функции e^{-2t} (то есть 1-параметрическое семейство решений задачи (5.156))

$$\int \mathsf{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\,\mathsf{e}^{-2t}+C_1$$

начальное условие задачи (5.156), откуда $C_1 = \dfrac{3}{2}$. Следовательно, решение задачи *Коши* (5.156) есть функция

$$C(t) = \frac{1}{2}\left(3 - \mathsf{e}^{-2t}\right). \tag{5.157}$$

Теперь можно выписать решение задачи *Коши* (5.155)

$$\varphi(t) = C(t)\,\mathsf{e}^{-t} = \frac{1}{2}\left(3 - \mathsf{e}^{-2t}\right)\mathsf{e}^{-t} = \frac{1}{2}\left(3\,\mathsf{e}^{-t} - \mathsf{e}^{-3t}\right), \tag{5.158}$$

а затем и решение задачи *Коши* (5.154)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\left(3\,\mathsf{e}^{-t} - \mathsf{e}^{-3t}\right)\cos x\,. \tag{5.159}$$

Выполнение начального условия задачи (5.154) очевидно. Следует ли проверять, что функция (5.159) удовлетворяет уравнению задачи (5.154) ? ▲

5.7. Задачи

К разделу 5.2.

Задача 5.1. Решите краевую задачу (5.2), где $f(t,x)=0$, начальное условие задано кусочно-линейной функцией (обязательно постройте график!)

$$u_0(x) = \begin{cases} 0\,, & x\in[\,0,x_1]\,,\\ h_1\,\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}\,, & x\in[x_1,x_2]\,,\\ h_1+(h_2-h_1)\,\dfrac{x-x_2}{x_3-x_2}\,, & x\in[x_2,x_3]\,,\\ h_2\,\dfrac{x_4-x}{x_4-x_3}\,, & x\in[x_3,x_4]\,,\\ 0\,, & x\in[x_4,\ \ell\,]\,,\end{cases} \tag{5.160}$$

а граничные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и значения параметров a, ℓ, x_{1-4} и $h_{1,2}$ приведены в табл. 5.2, где $\tau=t/T$.

К разделу 5.3.

Задача 5.2. Решите краевую задачу (5.51), где правая часть $f(t,x)=0$, начальное условие $u_0(x)$ (5.160), а граничные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и значения параметров a, ℓ, x_{1-4} и $h_{1,2}$ приведены в табл. 5.2.

К разделу 5.4.

Задача 5.3. Решите краевую задачу (5.74) (нечётные варианты) и краевую задачу (5.75) (чётные варианты), где правая часть $f(t,x)=0$, начальное условие $u_0(x)$ (5.160), а граничные функции $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$ и значения параметров a, ℓ, x_{1-4} и $h_{1,2}$ приведены в табл. 5.2.

Табл. 5.2. Данные задачи (5.2), варианты 1–25

№	a	ℓ	x_1	x_2	x_3	x_4	h_1	h_2	$\psi_1(\tau)$	$\psi_2(\tau)$	T
1	2	5	2	3	4	5	$+1$	-1	τ	$\mathtt{sin}\,(1\pi\tau)$	8
2	4	7	2	3	5	6	$+3$	$+1$	$\tau+2\tau^2$	τ^2	9
3	3	6	1	3	4	6	-2	-1	$\tau\mathtt{exp}\,(1\tau)$	τ	8
4	2	5	1	2	3	5	$+2$	0	τ^2	$\mathtt{sin}\,(1\pi\tau)$	6
5	3	7	2	3	4	6	-2	-2	$\tau^2+3\tau$	$2\tau^2$	8
6	2	6	0	1	2	3	0	$+2$	τ^2	$\tau\mathtt{exp}\,(1\tau)$	7

К разделу 5.6.

Задача 5.4. Решите задачу *Коши* ($u_1, u_2 = \texttt{const}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \, \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T) \,, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 \,, & x - x_0 \in \mathbb{R}^- \,, \\ u_2 \,, & x - x_0 \in \mathbb{R}^+ \,. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 5.5. Решите задачу *Коши* ($u_1, u_2 = \texttt{const}$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \, \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + c u(t,x) \,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T) \,, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 \,, & x - x_0 \in \mathbb{R}^- \,, \\ u_2 \,, & x - x_0 \in \mathbb{R}^+ \,. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 5.6. Решите задачу *Коши* ($u_1, u_2 = \texttt{const}$; $x_1 < x_2$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \, \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T) \,, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 \,, & x \in (-\infty, x_1) \,, \\ u_2 \,, & x \in [x_1, x_2] \,, \\ u_3 \,, & x \in (x_2, +\infty) \,. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 5.7. Решите задачу *Коши* ($u_1, u_2, u_3 = \texttt{const}$; $x_1 < x_2 < x_3$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = a^2 \, \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T) \,, \\ u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u_1 \,, & x \in (-\infty, x_1) \,, \\ u_1 + \dfrac{u_2 - u_1}{x_2 - x_1} \, (x - x_1) \,, & x \in [x_1, x_2] \,, \\ u_2 + \dfrac{u_3 - u_2}{x_3 - x_2} \, (x - x_2) \,, & x \in [x_2, x_3] \,, \\ u_3 \,, & x \in (x_3, +\infty) \,. \end{cases} \end{cases}$$

Задача 5.8. Решите задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 3 \, \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 4 \, \mathsf{e}^{-2t} \cos x \,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T) \,, \\ u(x,0) = \cos x \,, & x \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Задача 5.9. Решите задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 3\,\mathtt{e}^{-4t}\,\mathtt{sin}\,x\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,, \\ u(x,0) = \mathtt{sin}\,x\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

Задача 5.10. Решите задачу *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,x)}{\partial t} = 2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + 5\,\mathtt{e}^{-t}\,\mathtt{cos}\,x\,, & (t,x) \in \mathcal{Q}(T)\,, \\ u(x,0) = 1 + \mathtt{cos}\,x\,, & x \in \mathbb{R}\,. \end{cases}$$

5.8. Пояснения

К разделу **??** *на с.* **??**

Пояснение 5.1 к с. **??**.

5.9. Пояснения

6. Задачи для уравнений гиперболического типа

6.0. Π$\rho o\lambda\varepsilon\gamma\acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

В данной теме мы обратимся к неоднородному волновому уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, \tag{6.1}$$

для которого изучим постановки и свойства решений задачи *Коши* в пространственно-временно́й полосе конечной ширины $\overline{\mathcal{Q}(T)} = [0,T] \times \mathbb{R}$ (рис. 6.1, *а*) и краевых задач в пространственно-временно́м прямоугольнике $\overline{\mathcal{G}(T)} = [0,T] \times [a,b]$ (рис. 6.1, *б*).

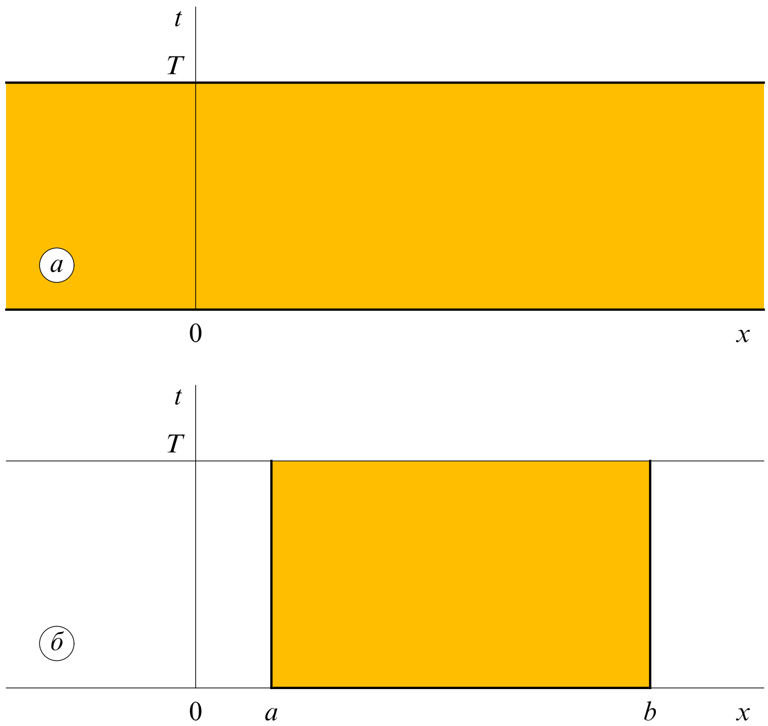

Рис. 6.1. Пространственно-временна́я полоса $\overline{\mathcal{Q}(T)} = [0,T] \times \mathbb{R}$ конечной ширины для задачи *Коши* (*а*); пространственно-временно́й прямоугольник $\overline{\mathcal{G}(T)} = [0,T] \times [a,b]$ для краевых задач, жирной ломаной показана граница, на которой заданы условия (*б*)

В разделе 6.1.рассмотрим постановку краевой задачи с граничными условиями *Дирихле* и метод её решения, основанный на разделении переменных.

В разделе 6.2. рассмотрим постановку задачи *Коши* и метод её решения, основанный на методе характеристик.

6.1. Краевая задача для пространственно одномерного волнового уравнения с граничными условиями *Дирихле*

6.1.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи такова: известны положение и распределение скорости упругой струны конечной длины ℓ в начальное мгновение времени $t=0$, в последующие мгновения $t>0$ струна под действием известной распределённой силы и вследствие известного движения концов струны совершает малые плоские поперечные колебания. Описать движение струны на конечном промежутке времени $[0,T]$.

Математическая постановка есть краевая задача в замкнутом пространственно-временно́м прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$: найти непрерывную в прямоугольнике и дважды непрерывно-дифференцируемую в $(0,T]\times(0,\ell)$ функцию, удовлетворяющую пространственно одномерному неоднородному волновому уравнению (уравнению малых колебаний струны) и соответствующим начальным условиям (при $t=0$) и граничным условиям *Дирихле* (на концах струны $x=0$ и $x=\ell$ при $0\leqslant t\leqslant T$), именно

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\,, & 0<x<\ell\,, \qquad 0<t\leqslant T\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} &= u_1(x) \\ u(0,x) &= u_0(x) \end{aligned}\right\}, & 0\leqslant x\leqslant \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} u(t,0) &= \psi_1(t) \\ u(t,\ell) &= \psi_2(t) \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,, \end{cases} \tag{6.2}$$

причём выполнены условия согласования начальных и граничных условий (см. задачу 6.1 на с. 202)

$$\begin{cases} u_0(0) = \psi_1(0)\,, \\ u_0(\ell) = \psi_2(0)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} u_1(0) = \psi_1'(0)\,, \\ u_1(\ell) = \psi_2'(0)\,. \end{cases} \tag{6.3}$$

6.1.2. Решение задачи методом разделения переменных

Решение задачи (6.2) будем разыскивать в виде суммы трёх функций

$$u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{6.4}$$

из которых первая ответственна за выполнение граничных условий задачи (6.2), то есть $q(t,0)=\psi_1(t)$, $q(t,\ell)=\psi_2(t)$. Функция $q(t,x)$ может быть введена множеством способов (см. задачу 6.2 на с. 202), например, в виде линейной по независимой переменной x

$$q(t,x) = \psi_1(t) + \big[\,\psi_2(t) - \psi_1(t)\big]\,\frac{x}{\ell}\,\cdot \tag{6.5}$$

Подстановка представления (6.4) в задачу (6.2) показывает, что «остаток» представления, то есть функция $v(t,x)+w(t,x)=u(t,x)-q(t,x)$, есть решение краевой задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2}+\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}+a^2\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2}+h(t,x)\,, & 0<x<\ell\,, \qquad 0<t\leqslant T\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial w(0,x)}{\partial t}&=v_1(x) \\ v(0,x)+\quad w(0,x)&=v_0(x) \end{aligned}\right\}, & 0<x<\ell\,, \\ \left.\begin{aligned} v(t,0)+w(t,0)=0 \\ v(t,\ell)+w(t,\ell)=0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,, \end{cases} \tag{6.6}$$

где правая часть уравнения и начальные условия суть следующие функции

$$\begin{cases} h(t,x)=g(t,x)-\left[\dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial t^2}-a^2\,\dfrac{\partial^2 q(t,x)}{\partial x^2}\right], \\ v_1(x)=u_1(x)-\dfrac{\partial q(0,x)}{\partial t}\,, \\ v_0(x)=u_0(x)-\quad q(0,x)\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

Краевую задачу (6.6), (6.7) для суммы $v(t,x)+w(t,x)$, в силу линейности по $v(t,x)$ и $w(t,x)$, раздели́м на две вспомогательные:

1) краевую задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2}=a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & 0<x<\ell\,, \qquad 0<t\leqslant T\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t}&=v_1(x) \\ v(0,x)&=v_0(x) \end{aligned}\right\}, & 0<x<\ell\,, \\ \left.\begin{aligned} v(t,0)=0 \\ v(t,\ell)=0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0\leqslant t\leqslant T\,; \end{cases} \tag{6.8}$$

2) краевую задачу для функции $w(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + h(t,x)\,, & 0 < x < \ell\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial w(0,x)}{\partial t} &= 0 \\ w(0,x) &= 0 \end{aligned}\right\}, & 0 < x < \ell\,, \\ \left.\begin{aligned} w(t,0) &= 0 \\ w(t,\ell) &= 0 \end{aligned}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant T\,. \end{cases} \tag{6.9}$$

1) Решение задачи (6.8) будем разыскивать методом разделения переменных:

а) представим искомую функцию $v(t,x)$ в виде произведения двух функций соответственно независимой переменной t и независимой переменной x

$$v(t,x) = O(t)\,X(x)\,; \tag{6.10}$$

б) найдём вторые повторные производные представления функции $v(t,x)$ (6.10)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} = O''(t)\,X(x)\,, \\ \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} = O(t)\,X''(x)\,, \end{cases}$$

и подставим в уравнение задачи (6.8);

в) введём *параметр разделения* λ

$$\frac{1}{a^2}\,\frac{O''(t)}{O(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = \mathtt{const};$$

г) составим две задачи, связанные между собой через параметр λ: I) краевую задачу *Штурма – Лиувилля* нахождения собственных значений λ и собственных функций $X(x)$

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, & 0 < x < \ell\,, \\ X(0) = 0\,, \quad X(\ell) = 0\,; \end{cases} \tag{6.11}$$

II) задачу *Коши* нахождения функции $O(t)$ (начальные условия далее будут уточнены)

$$\begin{cases} O''(t) + \lambda\,a^2\,O(t) = 0\,, & 0 < t \leqslant T\,, \\ O'(0) = ?, \quad O(0) = ? \end{cases} \tag{6.12}$$

I) Вначале рассмотрим задачу *Штурма – Лиувилля* (6.11), счётное множество решений которой нам известно (см. раздел 3.2.1. на с. 66), поэтому просто выпишем собственные значения

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi}{\ell}\right)^2, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{6.13}$$

и соответствующие им собственные функции

$$X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{6.14}$$

II) Теперь обратимся к задаче *Коши* (6.12), в которую последовательно будем подставлять собственные значения (6.13), так что получим счётное множество задач *Коши*

$$\begin{cases} O''_\mu(t) + \left(\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 O_\mu(t) = 0\,, \qquad 0 < t \leqslant T\,, \\ O'_\mu(0) = ?, \quad O_\mu(0) = ? \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{6.15}$$

2-параметрические семейства решений линейных с постоянными коэффициентами однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в составе задач *Коши* (6.15) найдём так (см. пояснение 6.1 на с. 202):

а) составим характеристические уравнения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\kappa^2 + \left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 = 0\,,$$

сопряжённые чисто мнимые корни которых суть

$$\kappa_{1,2} = \mp i\,\frac{\mu\pi a}{\ell}\,;$$

б) составим комплекснозначные фундаментальные системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений (то есть полные системы линейно независимых частных комплекснозначных решений обыкновенных дифференциальных уравнений) и запишем их с помощью формулы *Эйлера*

$$\mathtt{exp}\left\{\mp i\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\right\} = \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell} \mp i\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,;$$

в) составим действительнозначные фундаментальные системы решений обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,, \qquad \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,;$$

г) составим линейные комбинации действительнозначных решений фундаментальных систем

$$O_\mu(t) = A_\mu\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell} + B_\mu\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,, \tag{6.16}$$

где A_μ, B_μ — произвольные постоянные (параметры семейств).

Теперь подставим полученные семейства (6.16) и их производные по переменной t в начальные условия задач (6.15) и найдём связь параметров семейств с неопределёнными пока величинами $O_\mu(0)$ и $O'_\mu(0)$

$$\begin{aligned} O_\mu(0) &= \left(\qquad A_\mu \cos\frac{\mu\pi a t}{\ell} + \qquad B_\mu \sin\frac{\mu\pi a t}{\ell} \right)\bigg|_{t=0} = \qquad A_\mu\,, \\ O'_\mu(0) &= \left(-\frac{\mu\pi a}{\ell}\, A_\mu \sin\frac{\mu\pi a t}{\ell} + \frac{\mu\pi a}{\ell}\, B_\mu \cos\frac{\mu\pi a t}{\ell} \right)\bigg|_{t=0} = \frac{\mu\pi a}{\ell}\, B_\mu\,. \end{aligned} \tag{6.17}$$

Сборка (6.10), (6.14), (6.16), (6.17) образует частные решения уравнения задачи (6.8), именно

$$v_\mu(t,x) = O_\mu(t)\, X_\mu(x) = \left(O_\mu(0) \cos\frac{\mu\pi a t}{\ell} + \frac{\ell}{\mu\pi a}\, O'_\mu(0) \sin\frac{\mu\pi a t}{\ell} \right) \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

суммирование всех частных решений образует параметрическое семейство функций

$$\bar{v}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(O_\mu(0) \cos\frac{\mu\pi a t}{\ell} + \frac{\ell}{\mu\pi a}\, O'_\mu(0) \sin\frac{\mu\pi a t}{\ell} \right) \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{6.18}$$

которые: *а*) определены в прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$; *б*) удовлетворяют уравнению краевой задачи (6.8); *в*) удовлетворяют граничным условиям краевой задачи; *г*) вообще не удовлетворяют начальным условиям.

Выберем величины $O_\mu(0)$ и $O'_\mu(0)$ (начальные условия задач *Коши* (6.15)) так, чтобы из семейства (6.18) выделить функцию, удовлетворяющую начальным условиям краевой задачи (6.8), то есть получить решение последней:

а) подставим в семейство и его производную по переменной t значение $t = 0$

$$\begin{cases} \bar{v}(0,x) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(0) \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \\ \dfrac{\partial \bar{v}(0,x)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} O'_\mu(0)\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O'_\mu(0) \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,; \end{cases}$$

б) разложим начальные условия (6.7) краевой задачи (6.8) в ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$ (6.14) (то есть в тригонометрический ряд *Фурье* «по синусам»)

$$\begin{cases} v_0(x) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{0,\mu} \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \\ v_1(x) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu}\, X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} v_{1,\mu} \sin\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \end{cases}$$

где коэффициенты разложений суть

$$v_{0,\mu} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell v_0(\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad v_{1,\mu} = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell v_1(\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,; \tag{6.19}$$

в) из сравнения коэффициентов соответствующих рядов «по синусам» заключим, что $O_\mu(0) = v_{0,\mu}$, $O'_\mu(0) = v_{1,\mu}$.

Следовательно, функция

$$v(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(v_{0,\mu}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi at}{\ell} + \frac{\ell}{\mu\pi a}\,v_{1,\mu}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi at}{\ell}\right)\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell} \tag{6.20}$$

есть искомое решение краевой задачи (6.8).

2) Решение краевой задачи (6.9), по образцу найденного решения (6.20) краевой задачи (6.8), сразу будем искать в виде ряда по собственным функциям (6.14) (то есть в виде тригонометрического ряда *Фурье* «по синусам»)

$$\bar{w}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\,X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{6.21}$$

в котором коэффициенты $w_\mu(t)$ суть неизвестные функции переменной t, но при этом ряд определён в прямоугольнике $[0,T]\times[0,\ell]$.

Для того, чтобы найти функции $w_\mu(t)$:

а) вычислим вторые повторные производные ряда (6.21)

$$\frac{\partial^2\bar{w}(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty} w''_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,$$

$$\frac{\partial^2\bar{w}(t,x)}{\partial x^2} = -\sum_{\mu=1}^{\infty}\Big(\frac{\mu\pi a}{\ell}\Big)^2 w_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,;$$

б) разложим правую часть $h(t,x)$ уравнения краевой задачи (6.9) в ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$ (6.14)

$$h(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} h_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{6.22}$$

где коэффициенты разложения суть

$$h_\mu(t) = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell h(t,\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,; \tag{6.23}$$

в) подставим найденные производные ряда (6.21) и разложение правой части $h(t,x)$ в уравнение краевой задачи (6.9), откуда получим ряд по собственным функциям $X_\mu(x)$, тождественно равный нулю ряд в прямоугольнике $(0,T]\times[0,\ell]$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left\{w''_\mu(t)+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t)-h_\mu(t)\right\}\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\equiv 0\,,$$

что возможно лишь при тождественном обращении в нуль всех коэффициентов ряда

$$w''_\mu(t)+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t)-h_\mu(t)=0\,,\qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{6.24}$$

Присоединим к линейным с постоянными коэффициентами неоднородным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка (6.24) относительно функций $w_\mu(t)$ соответствующие начальные условия:

а) подставим в ряд (6.21) и его производную по переменной t значение $t=0$

$$\begin{cases} \bar w(0,x) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(0)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,,\\[2ex] \dfrac{\partial \bar w(0,x)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} w'_\mu(0)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,; \end{cases}$$

б) сопоставим полученные ряды с начальными условиями краевой задачи (6.9), откуда заключим, что $w_\mu(0)=0, w'_\mu(0)=0$;

в) составим счётную последовательность задач *Коши*

$$\left\{\begin{aligned} & w''_\mu(t)+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t)=h_\mu(t)\,,\qquad 0<t\leqslant T\,,\\ & \left.\begin{aligned} w'_\mu(0)=0\\ w_\mu(0)=0\end{aligned}\right\}, \end{aligned}\right.\qquad \mu\in\mathbb{N}\,. \tag{6.25}$$

Задачи *Коши* (6.25) будем решать так:

а) запишем 2-параметрические решения

$$\mathring{w}_\mu(t)=C_\mu\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}+D_\mu\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,,\qquad \mu\in\mathbb{N}\,, \tag{6.26}$$

однородных уравнений, де C_μ, D_μ — неопределённые (произвольные) постоянные (см. пояснение 6.1 на с. 202 и решения (6.16) уравнений задач *Коши* (6.15))

$$w''_\mu(t)+\left(\frac{\mu\pi a}{\ell}\right)^2 w_\mu(t)=0\,,\qquad \mu\in\mathbb{N}\,;$$

б) к решениям (6.26) однородных уравнений применим методом вариации произвольных постоянных для нахождения семейств решений вида

$$\bar w_\mu(t)=C_\mu(t)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}+D_\mu(t)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\qquad \mu\in\mathbb{N}\,, \tag{6.27}$$

неоднородных уравнений задач *Коши* (6.25), где $C_\mu(t), D_\mu(t)$ — неопределённые функции (см. пояснение 6.2 на с. 206);

в) наложим на функции $C_\mu(t), D_\mu(t)$, следуя методу вариации произвольных постоянных, ограничения в виде счётных последовательностей систем линейных алгебраических уравнений относительно производных функций $C_\mu(t), D_\mu(t)$

$$\begin{cases} \cos\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\, C'_\mu(t) + \sin\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\, D'_\mu(t) = 0\,, \\ -\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\sin\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\, C'_\mu(t) + \dfrac{\mu\pi a}{\ell}\cos\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\, D'_\mu(t) = h_\mu(t)\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,,$$

из которых получим системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} C'_\mu(t) = -\dfrac{\ell}{\mu\pi a}\, h_\mu(t)\sin\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\,, \\ D'_\mu(t) = +\dfrac{\ell}{\mu\pi a}\, h_\mu(t)\cos\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,; \tag{6.28}$$

г) присоединим к системам дифференциальных уравнений (6.28) относительно функций $C_\mu(t), D_\mu(t)$ соответствующие начальные условия, которые получим подстановкой семейств (6.27) и их производных по переменной t в начальные условия задач *Коши* (6.25)

$$\begin{cases} w_\mu(0) = \left(C_\mu(t)\cos\dfrac{\mu\pi at}{\ell} + D_\mu(t)\sin\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\right)\Bigg|_{t=0} = C_\mu(0) = 0\,, \\ w'_\mu(0) = \left(-\dfrac{\mu\pi a}{\ell}\, C_\mu(t)\sin\dfrac{\mu\pi at}{\ell} + \dfrac{\mu\pi a}{\ell}\, D_\mu(t)\cos\dfrac{\mu\pi at}{\ell}\right)\Bigg|_{t=0} = \dfrac{\mu\pi a}{\ell}\, D_\mu(0) = 0\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,;$$

откуда имеем $C_\mu(0) = 0, D_\mu(0) = 0$;

д) решим полученные задачи *Коши* непосредственным интегрированием уравнений (6.28)

$$\begin{cases} C_\mu(t) = -\dfrac{\ell}{\mu\pi a}\displaystyle\int_0^t h_\mu(\tau)\sin\dfrac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau\,, \\ D_\mu(t) = +\dfrac{\ell}{\mu\pi a}\displaystyle\int_0^t h_\mu(\tau)\cos\dfrac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,; \tag{6.29}$$

е) подставим найденные функции $C_\mu(t), D_\mu(t)$ (6.29) в семейства (6.27) и запишем решения задач *Коши* (6.25)

$$w_\mu(t) = \frac{\ell}{\mu\pi a}\left\{ -\cos\frac{\mu\pi at}{\ell}\int_0^t h_\mu(\tau)\sin\frac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau + \sin\frac{\mu\pi at}{\ell}\int_0^t h_\mu(\tau)\cos\frac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau \right\}, \quad \mu\in\mathbb{N}\,.$$

Упростим выражение в фигурных скобках с помощью известной тригонометрической формулы $\mathtt{sin}\,(\alpha \mp \sigma) = \mathtt{sin}\,\alpha\,\mathtt{cos}\,\sigma \mp \mathtt{cos}\,\alpha\,\mathtt{sin}\,\sigma$

$$\frac{\mu\pi a}{\ell}\,w_\mu(t) = -\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\int\limits_0^t h_\mu(\tau)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau + \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\int\limits_0^t h_\mu(\tau)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a\tau}{\ell}\,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_0^t h_\mu(\tau)\left(\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a\tau}{\ell} - \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a\tau}{\ell}\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= \int\limits_0^t h_\mu(\tau)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a(t-\tau)}{\ell}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

тогда для для решений задач *Коши* (6.25) получим такие выражения

$$w_\mu(t) = \frac{\ell}{\mu\pi a}\int\limits_0^t h_\mu(\tau)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a(t-\tau)}{\ell}\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{6.30}$$

либо, для тех, кто знает, что такое свёртка функций, такие

$$w_\mu(t) = \frac{\ell}{\mu\pi a}\,h_\mu(t) * \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,. \tag{6.31}$$

Сборка (6.21), (6.23), (6.30) даёт решение краевой задачи (6.9) в виде

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\ell}{\mu\pi a}\left\{\int\limits_0^t h_\mu(\tau)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a(t-\tau)}{\ell}\,\mathrm{d}\tau\right\}\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,, \tag{6.32}$$

а сборка (6.21), (6.23), (6.31) — в виде

$$w(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{\ell}{\mu\pi a}\,h_\mu(t) * \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi a t}{\ell}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{6.33}$$

Итак, решением краевой задачи (6.2) есть функция $u(t,x) = q(t,x) + v(t,x) + w(t,x)$, где функция $q(t,x)$ дана выражением (6.5), функция $v(t,x)$ дана выражением (6.20), а функция $w(t,x)$ — выражением (6.32) или выражением (6.33) (см. задачу 6.3 на с. 202).

6.1.3. Обоснование метода разделения переменных

6.1.4. Примеры решения задачи

Пример 6.1. Решим краевую задачу (6.2), в которой $\ell = 7$, $T = 9$, $a^2 = 4$, а функции суть $\psi_1(t) \equiv 0$, $\psi_2(t) \equiv 0$, $u_1(x) \equiv 0$,

$$g(t,x) = -2\,\mathtt{cos}\,\frac{t}{4}\,\mathtt{sin}\,\frac{4\pi x}{7}\,, \qquad u_0(x) = \begin{cases} \dfrac{4\,x}{3}\,, & 0 \leqslant x \leqslant 3\,, \\ 7 - x\,, & 3 \leqslant x \leqslant 7\,, \end{cases}$$

то есть постановка краевой задачи такова

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - 2\,\mathtt{cos}\,\dfrac{t}{4}\,\mathtt{sin}\,\dfrac{4\pi x}{7}\,, & 0 < x < 7\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = 0 \\ u(0,x) = \begin{cases} \dfrac{4\,x}{3}\,, & 0 \leqslant x \leqslant 3\,, \\ 7 - x\,, & 3 \leqslant x \leqslant 7\,, \end{cases} \end{array}\right\}, & 0 \leqslant x \leqslant 7\,, \\ \left.\begin{array}{l} u(t,0) = 0 \\ u(t,7) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 9\,, \end{cases} \tag{6.34}$$

Будем разыскивать решение краевой задачи в виде $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$; запишем краевую задачу для функции $v(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & 0 < x < 7\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t} = 0 \\ v(0,x) = u_0(x) \end{array}\right\}, & 0 < x < 7\,, \\ \left.\begin{array}{l} v(0,t) = 0 \\ v(7,t) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 9\,, \end{cases} \tag{6.35}$$

и краевую задачу для функции $w(t,x)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} = 4\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + g(t,x)\,, & 0 < x < 7\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,, \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial w(t,x)}{\partial t} = 0 \\ w(t,x) = 0 \end{array}\right\}, & 0 < x < 7\,, \\ \left.\begin{array}{l} w(0,t) = 0 \\ w(7,t) = 0 \end{array}\right\}, & \qquad\qquad 0 \leqslant t \leqslant 9\,. \end{cases} \tag{6.36}$$

Для решения краевой задачи (6.35) нам понадобится разложение функции $u_0(x)$ в тригонометрический ряд по синусам

$$u_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{0,\mu}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,,$$

коэффициенты которого суть

$$u_{0,\mu} = \frac{2}{7}\int_0^7 u_0(\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{7}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{7}\left(\int_0^3 \frac{4\xi}{3}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{7}\,\mathrm{d}\xi + \int_3^7 (7-\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{7}\,\mathrm{d}\xi\right) = \frac{8}{21}\,I_1 + \frac{2}{7}\,I_2\,. \tag{6.37}$$

Вычислим интегралы I_1 и I_2 по частям

$$I_1 = \left\{ \begin{aligned} & p = x\,, && \mathrm{d}p = \mathrm{d}x \\ & \mathrm{d}q = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,\mathrm{d}x\,, && q = -\frac{7}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{7} \end{aligned} \right\} =$$

$$= -\frac{7}{\mu\pi}\,x\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{7}\Bigg|_0^3 + \frac{7}{\mu\pi}\int\limits_0^3 \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = -\frac{21}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\Bigg|_0^3 =$$

$$= -\frac{21}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{3\mu\pi}{7}\,,$$

$$I_2 = \left\{ \begin{aligned} & p = 7 - x\,, && \mathrm{d}p = -\mathrm{d}x \\ & \mathrm{d}q = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\,x}{7}\,\mathrm{d}x\,, && q = -\frac{7}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi\,x}{7} \end{aligned} \right\} =$$

$$= -\frac{7}{\mu\pi}\,(7-x)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{7}\Bigg|_3^7 - \frac{7}{\mu\pi}\int\limits_3^7 \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,\mathrm{d}x = \frac{28}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} - \frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\Bigg|_3^7 =$$

$$= \frac{28}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{3\mu\pi}{7}\,.$$

Подставляя в правую часть выражения (6.37) вычисленные интегралы I_1 и I_2, будем иметь

$$\begin{aligned} u_{0,\mu} = \frac{8}{21}\,I_1 + \frac{2}{7}\,I_2 = -\frac{8}{21}\,\frac{21}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{8}{21}\,\frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{2}{7}\,\frac{28}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{3\mu\pi}{7} + \frac{2}{7}\,\frac{49}{\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{3\mu\pi}{7} = \\ = \frac{98}{3\,\mu^2\pi^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{3\mu\pi}{7}\,. \end{aligned} \tag{6.38}$$

Перейдём к решению краевой задачи (6.35), положив $v(t,x) = O(t)\,X(x)$. Тогда для функции $X(x)$ получим краевую задачу *Штурма – Лиувилля*

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0\,, \qquad 0 < x < 7\,, \\ X(0) = 0\,, \quad X(7) = 0\,, \end{cases} \tag{6.39}$$

счётные последовательности собственных значений и собственных функций которой суть

$$\lambda_\mu = \left(\frac{\mu\pi x}{7}\right)^2, \qquad X_\mu(x) = \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{6.40}$$

Для нахождения соответствующих функций $O_\mu(t)$ составим задачи *Коши*

$$\begin{cases} O''_\mu(t) + \left(\dfrac{\mu\pi x}{7}\right)^2 O_\mu(t) = 0\,, \qquad 0 < t \leqslant 9\,, \\ O_\mu(0) = ?, \quad O'_\mu(0) = ?, \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{6.41}$$

и запишем 2-параметрические семейства решений линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, входящих в задачи *Коши* (6.41),

$$O_\mu(t) = A_\mu\,\mathtt{cos}\,\frac{2\mu\pi t}{7} + B_\mu\,\mathtt{sin}\,\frac{2\mu\pi t}{7}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \tag{6.42}$$

с неопределёнными (поизвольными) коэффициентами A_μ, B_μ.

Далее составим линейную комбинацию частных решений $v_\mu(t,x) = O_\mu(t)\,X_\mu(x)$ уравнения краевой задачи (6.35) как 2-параметрическое семейство функций

$$\bar{v}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} O_\mu(t)\,X_\mu(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty}\left(A_\mu \cos\frac{2\mu\pi t}{7} + B_\mu \sin\frac{2\mu\pi t}{7}\right)\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,. \tag{6.43}$$

Для нахождения постоянных A_μ, B_μ подставим в семейство (6.43) и его производную по переменной t

$$\frac{\partial\bar{v}(t,x)}{\partial t} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{2\mu\pi}{7}\left(-A_\mu \sin\frac{2\mu\pi t}{7} + B_\mu \cos\frac{2\mu\pi t}{7}\right)\sin\frac{\mu\pi x}{7}$$

значение $t=0$ и приравняем соответствующим начальным условиям краевой задачи (6.35)

$$\begin{cases} \bar{v}(0,x) = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty} A_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{7} = u_0(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} u_{0,\mu} \sin\frac{\mu\pi x}{7} = \sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{98}{3\,\mu^2\pi^2}\sin\frac{3\mu\pi}{7}\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,, \\ \dfrac{\partial\bar{v}(0,x)}{\partial t} = \displaystyle\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{2\mu\pi}{7}B_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{7} = 0\,. \end{cases} \tag{6.44}$$

Сравнение соответствующих коэффициентов тригонометрических рядов (6.44) позволяет найти постоянные

$$\begin{cases} A_\mu = \dfrac{98}{3\,\mu^2\pi^2}\sin\dfrac{3\mu\pi}{7}\,, \\ B_\mu = 0\,, \end{cases} \qquad \mu\in\mathbb{N}\,, \tag{6.45}$$

и окончательно записать решение краевой задачи (6.35)

$$v(t,x) = \frac{98}{3\,\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\cos\frac{2\mu\pi t}{7}\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,. \tag{6.46}$$

Перейдём к решению краевой задачи (6.36), которое будем искать в виде ряда по собственным функциям (6.40)

$$\bar{w}(t,x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} w_\mu(t)\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,. \tag{6.47}$$

Найдём вторые повторные производные семейства (6.47)

$$\frac{\partial^2\bar{w}(t,x)}{\partial t^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty} w''_\mu(t)\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,,$$

$$\frac{\partial^2\bar{w}(t,x)}{\partial x^2} = -\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\frac{\mu\pi}{7}\right)^2 w_\mu(t)\sin\frac{\mu\pi x}{7}\,,$$

и подстановим в уравнение задачи (6.47)

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}\left[w''_\mu(t) + \left(\frac{2\mu\pi}{7}\right)^2 w_\mu(t)\right]\sin\frac{\mu\pi x}{7} = -2\cos\frac{t}{4}\sin\frac{4\pi x}{7}\,, \tag{6.48}$$

откуда получим задачи *Коши* для нахождения функций $w_\mu(t)$

$$\begin{cases} w''_\mu(t) + \left(\dfrac{2\mu\pi}{7}\right)^2 w_\mu(t) = 0\,, \\ w'_\mu(t) = 0\,, \\ w_\mu(t) = 0\,, \end{cases} \qquad \mu \in \mathbb{N}\,, \quad \mu \neq 4\,, \tag{6.49}$$

$$\begin{cases} w''_4(t) + \left(\dfrac{8\pi}{7}\right)^2 w_4(t) = -2\cos\dfrac{t}{4}\,, \\ w'_4(t) = 0\,, \\ w_4(t) = 0\,. \end{cases} \tag{6.50}$$

Решения задач (6.49), очевидно, тождественно равны нулю, а для решения задачи (6.50) применим формулу (6.30) на с. 191

$$w_4(t) = \frac{7}{8\pi}\int\limits_0^t h_4(\tau)\,\sin\frac{8\pi(t-\tau)}{7}\,\mathrm{d}\tau = -\frac{7}{8\pi}\int\limits_0^t 2\cos\frac{\tau}{4}\,\sin\frac{8\pi(t-\tau)}{7}\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{6.51}$$

Далее преобразуем подынтегральную функцию с помощью известной тригонометрической формулы $2\cos\alpha\,\sin\sigma = \sin(\alpha+\sigma) - \sin(\alpha-\sigma)$

$$2\cos\frac{\tau}{4}\,\sin\frac{8\pi(t-\tau)}{7} = \sin\left(\frac{\tau}{4} - \frac{8\pi\tau}{7} + \frac{8\pi t}{7}\right) - \sin\left(\frac{\tau}{4} + \frac{8\pi\tau}{7} - \frac{8\pi t}{7}\right)$$

и выполним интегрирование в формуле (6.51)

$$\begin{aligned} w_4(t) &= -\frac{7}{8\pi}\int\limits_0^t \sin\left(\frac{\tau}{4} - \frac{8\pi\tau}{7} + \frac{8\pi t}{7}\right)\mathrm{d}\tau + \frac{7}{8\pi}\int\limits_0^t \sin\left(\frac{\tau}{4} + \frac{8\pi\tau}{7} - \frac{8\pi t}{7}\right)\mathrm{d}\tau = \\ &= +\frac{7}{8\pi}\left(\frac{1}{4} - \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\cos\left(\frac{\tau}{4} - \frac{8\pi\tau}{7} + \frac{8\pi t}{7}\right)\Bigg|_0^t - \frac{7}{8\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\cos\left(\frac{\tau}{4} + \frac{8\pi\tau}{7} - \frac{8\pi t}{7}\right)\Bigg|_0^t = \\ &= +\frac{7}{8\pi}\left(\frac{1}{4} - \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\left(\cos\frac{t}{4} - \cos\frac{8\pi t}{7}\right) - \frac{7}{8\pi}\left(\frac{1}{4} + \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\left(\cos\frac{t}{4} - \cos\frac{8\pi t}{7}\right) = \\ &= 2\left(\frac{1}{4} - \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\left(\frac{1}{4} + \frac{8\pi}{7}\right)^{-1}\left(\cos\frac{t}{4} - \cos\frac{8\pi t}{7}\right) = \\ &= 2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2\right]^{-1}\left(\cos\frac{t}{4} - \cos\frac{8\pi t}{7}\right). \end{aligned}$$

Итак, можем записать решение краевой задачи (6.36) в таком виде

$$w(t,x) = 2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2\right]^{-1}\left(\cos\frac{t}{4} - \cos\frac{8\pi t}{7}\right)\sin\frac{4\pi x}{7}\,\cdot \tag{6.52}$$

Решение краевой задачи (6.34) есть сумма функций $v(t,x)$ (6.53) и $w(t,x)$ (6.52).

Проверим выполнение начальных условий для функции $u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)$. Очевидно, что в мгновение $t = 0$ функция $v(0,x) = u_0(x)$, в силу (6.44), а функция $w(0,x) = 0$, то есть $u(0,x) = u_0(x)$. Теперь найдём производную функции $u(t,x)$ по переменной t и подставим значение $t = 0$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = \frac{\partial v(0,x)}{\partial t} + \frac{\partial w(0,x)}{\partial t} =$$
$$= \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{98}{3\,\pi^2\mu^2}\,\frac{2\mu\pi}{7}\,\mathtt{sin}\,\frac{2\mu\pi t}{7}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7} \right)\Bigg|_{t=0} +$$
$$+ \left(2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2 \right]^{-1} \left(\frac{8\pi}{7}\,\mathtt{sin}\,\frac{8\pi t}{7} - \frac{1}{4}\,\mathtt{sin}\,\frac{t}{4} \right)\,\mathtt{sin}\,\frac{4\pi x}{7} \right)\Bigg|_{t=0} = 0\,,$$

откуда заключим, что производная функции $u(t,x)$ по переменной t обращается в нуль при $t = 0$. Итак, начальные условия краевой задачи (6.34) выполнены.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} &= -\frac{8}{3}\sum_{\mu=1}^{\infty} \mathtt{cos}\,\frac{2\mu\pi t}{7}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,,\\
\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2} &= -\frac{2}{3}\sum_{\mu=1}^{\infty} \mathtt{cos}\,\frac{2\mu\pi t}{7}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{7}\,,\\
\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} &= -2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2 \right]^{-1} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 \mathtt{cos}\,\frac{t}{4} - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2 \mathtt{cos}\,\frac{8\pi t}{7} \right] \mathtt{sin}\,\frac{4\pi x}{7}\,,\\
\frac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} &= -2\left[\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{8\pi}{7}\right)^2 \right]^{-1} \frac{1}{4}\left(\frac{8\pi}{7}\right)^2 \left(\mathtt{cos}\,\frac{t}{4} - \mathtt{cos}\,\frac{8\pi t}{7} \right) \mathtt{sin}\,\frac{4\pi x}{7}\,,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

подставим их в уравнение краевой задачи (6.34) и убедимся в том, что уравнение выполнено.

Следовательно краевая задача (6.34) решена правильно. ▲

6.2. Задача *Коши* для волнового уравнения в полосе $[0,T]\times\mathbb{R}$

6.2.1. Постановка задачи

Физическая постановка задачи такова: известны положения и скорости точек упругой натянутой струны беконечной длины в начальное мгновение времени, в последующие мгновения струна под действием известной распределённой силы совершает малые плоские поперечные колебания; описать движение струны на конечном промежутке времени.

Математическая постановка состоит в нахождении функции $u(t,x)$: 1) непрерывной по t и x и непрерывно дифференцируемой по t в замыкании пространственно-временной полосы; 2) дважды непрерывно дифференцируемой по t и x в полосе; 3) удовлетворяющей: *а*) неоднородному волновому уравнению в полосе; и *б*) соответствующим начальным условиям на нижней границе полосы (рис. 6.1, *а*), то есть в решении задачи *Коши*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & (t,x)\in\mathcal{Q}(T)\,,\\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} &= u_1(x)\\ u(0,x) &= u_0(x)\end{aligned}\right\}, & x\in\mathbb{R}\,.\end{cases} \tag{6.54}$$

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_0(s)\,\mathrm{d}s \right) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(s)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(s,\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{6.55}$$

6.2.2. Решение задачи методом бегущих волн

Решение задачи *Коши* (6.54) будем разыскивать в виде суммы двух функций

$$u(t,x) = v(t,x) + w(t,x)\,, \tag{6.56}$$

которые должны удовлетворять следующим требованиям:

1) функция $v(t,x)$ есть решение вспомогательной задачи *Коши* для однородного волнового уравнения с неоднородным начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}\,, & (t,x)\in\mathcal{Q}(T)\,,\\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial v(0,x)}{\partial t} &= u_1(x)\\ v(0,x) &= u_0(x)\end{aligned}\right\}, & x\in\mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{6.57}$$

2) функция $w(t,x)$ есть решение вспомогательной задачи *Коши* для неоднородного волнового уравнения с однородным начальным условием

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 w(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x)\,, & (t,x)\in\mathcal{Q}(T)\,,\\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial w(0,x)}{\partial t} &= 0\\ w(0,x) &= 0\end{aligned}\right\}, & x\in\mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{6.58}$$

1) Для решения задачи *Коши* (6.57):

а) запишем однородное волновое уравнение задачи в виде общего уравнения второго порядка

$$a_{1,1}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial t} + 2a_{1,2}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t\partial x} + a_{2,2}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x\partial x} = 0\,, \tag{6.59}$$

где коэффициенты суть $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 0$, $a_{2,2} = -a^2$, тогда $D(t,x) = a^2$;

б) составим уравнение характеристик для уравнения (6.59)

$$a_{1,1}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - 2\,a_{1,2}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) + a_{2,2} = 0 \quad\Rightarrow\quad \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a^2 = 0\,; \tag{6.60}$$

в) разрешим уравнение характеристик (6.60) относительно производной и проинтегрируем полученные уравнения

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_{\mp} = \mp a \quad\Rightarrow\quad x = \mp at + C_{\mp} \quad\Rightarrow\quad x \pm at = C_{\mp}\,; \tag{6.61}$$

г) введём новые независимые переменные

$$\begin{cases} \xi = x + at\,, \\ \eta = x - at\,, \end{cases} \tag{6.62}$$

называемые характеристическими, и вычислим коэффициенты преобразованного уравнения в характеристических переменных: $b_{1,1} = b_{2,2} = 0$, $b_{1,2} = -2a^2$, то есть уравнение (6.59) принимает такой вид

$$-4a^2 \frac{\partial^2 \bar{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \bar{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi\partial\eta} = 0\,; \tag{6.63}$$

д) проинтегрируем уравнение (6.63) по характеристической переменной η

$$\frac{\partial \bar{v}(\xi,\eta)}{\partial\xi} = \varphi(\xi)\,,$$

а затем по характеристической переменной ξ

$$\bar{v}(\xi,\eta) = \int \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \psi_2(\eta)\,,$$

откуда получим представление для искомой функции в характеристических независимых переменных

$$\bar{v}(\xi,\eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta)\,, \tag{6.64}$$

где $\psi_1(\xi), \psi_2(\eta)$ суть произвольные функции;

е) запишем представление (6.64) в исходных независимых переменных

$$v(t,x) = \psi_1(x+at) + \psi_2(x-at) \tag{6.65}$$

и подставим в начальные условия задачи *Коши* (6.57)

$$\begin{cases} \psi_1(x) + \quad \psi_2(x) = u_0(x)\,, \\ a\,\psi_1'(x) - a\,\psi_2'(x) = u_1(x)\,; \end{cases} \tag{6.66}$$

з) продифференцируем первое уравнение функционально-дифференциальной системы (6.66) и получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций

$$\begin{cases} \psi_1'(x) + \quad \psi_2'(x) = u_0'(x)\,, \\ a\,\psi_1'(x) - a\,\psi_2'(x) = u_1(x)\,; \end{cases} \tag{6.67}$$

и) разрешим систему (6.67) относительно производных

$$\begin{cases} \psi_1'(x) = \dfrac{1}{2}\, u_0'(x) + \dfrac{1}{2a}\, u_1(x)\,, \\ \psi_2'(x) = \dfrac{1}{2}\, u_0'(x) - \dfrac{1}{2a}\, u_1(x)\,, \end{cases} \tag{6.68}$$

которые проинтегрируем в пределах от 0 до x

$$\begin{cases} \psi_1(x) - \psi_1(0) = \dfrac{1}{2}\, u_0(x) - \dfrac{1}{2}\, u_0(0) + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^x u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,, \\ \psi_2(x) - \psi_2(0) = \dfrac{1}{2}\, u_0(x) - \dfrac{1}{2}\, u_0(0) - \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^x u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,; \end{cases} \tag{6.69}$$

к) заменим в полученных выражениях независимую переменную x на соответствующие характеристические переменные

$$\begin{cases} \psi_1(x+at) = \psi_1(0) - \dfrac{1}{2}\, u_0(0) + \dfrac{1}{2}\, u_0(x+at) + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_0^{x+at} u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,, \\ \psi_2(x-at) = \psi_2(0) - \dfrac{1}{2}\, u_0(0) + \dfrac{1}{2}\, u_0(x-at) + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{0} u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,, \end{cases} \tag{6.70}$$

и подставим в представление (6.65) искомой функции

$$\begin{cases} v(t,x) = \psi_1(x+at) + \psi_2(x-at) = \\ \qquad = \underbrace{\psi_1(0) + \psi_2(0) - u_0(0)}_{=0} + \dfrac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \dfrac{1}{2a} \displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,; \end{cases} \tag{6.71}$$

л) окончательно получим решение задачи *Коши* (6.57) в таком виде

$$v(t,x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+at) + u_0(x-at)\right] + \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma\,. \tag{6.72}$$

2) Для решения задачи *Коши* (6.58):

а) поставим ещё одну вспомогательную 1-параметрическую задачу *Коши* относительно функции $W(t-\tau, x)$, где $\tau \in [0, T)$, именно

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial t^2} = a^2\,\dfrac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial x^2}\,, & (t-\tau,x)\in\mathcal{Q}(T)\,, \\ \left.\begin{aligned} \dfrac{\partial W(0,x)}{\partial t} &= f(\tau,x) \\ W(0,x) &= \qquad 0 \end{aligned}\right\}, & x\in\mathbb{R}\,; \end{cases} \tag{6.73}$$

б) заметим, что функция

$$\bar{w}(t,x) = \int\limits_0^t W(t-\tau,x)\,\mathrm{d}\tau \tag{6.74}$$

есть решение задачи *Коши* (6.58), в чём убедимся повторным дифференцированием функции (6.74) по переменным t и x

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{w}(t,x)}{\partial t} = W(t-\tau,x)\Big|_{t=\tau} + \int\limits_0^t \dfrac{\partial W(t-\tau,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t \dfrac{\partial W(t-\tau,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \dfrac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial t^2} = \dfrac{\partial W(t-\tau,x)}{\partial t}\Big|_{t=\tau} + \int\limits_0^t \dfrac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau = f(t,x) + \int\limits_0^t \dfrac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial t^2}\,\mathrm{d}\tau\,, \\ \dfrac{\partial \bar{w}(t,x)}{\partial x} = \int\limits_0^t \dfrac{\partial W(t-\tau,x)}{\partial x}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad \dfrac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial x^2} = \int\limits_0^t \dfrac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}\tau\,, \end{cases}$$

подстановкой найденных производных в неоднородное уравнение задачи (6.58)

$$\frac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 \bar{w}(t,x)}{\partial x^2} - f(t,x) = f(t,x) + \int\limits_0^t \left[\frac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial t^2} - a^2\,\frac{\partial^2 W(t-\tau,x)}{\partial x^2}\right]\mathrm{d}\tau - f(t,x) = 0\,,$$

и проверкой выполнения начальных условий

$$\begin{cases} \bar{w}(0,x) = \left(\int\limits_0^t W(t-\tau,x)\,\mathrm{d}\tau\right)_{t=0} = 0\,, \\ \dfrac{\partial \bar{w}(0,x)}{\partial t} = \left(\int\limits_0^t \dfrac{\partial W(t-\tau,x)}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau\right)_{t=0} = \left(\int\limits_0^t f(\tau,x)\,\mathrm{d}\tau\right)_{t=0} = 0\,; \end{cases}$$

в) следуя решению задачи *Коши* (6.57) относительно функции $v(t,x)$, как образцу, запишем решение вспомогательной задачи *Коши* (6.58) относительно функции $w(t,x)$

$$w(t,x) = \int\limits_0^t W(t-\tau,x)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{6.75}$$

Обратившись к представлению (6.56), запишем искомое решение задачи *Коши* (6.54)

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big[u_0(x+at) + u_0(x-at)\big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma + \frac{1}{2a}\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\tau,\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{6.76}$$

Полученное выражение для решения задачи *Коши* (6.54) называется формулой *Даламбера.*

6.2.3. Решение задачи методом преобразования *Фурье*

6.3. Задачи

Задача 6.1. Дайте истолкование условиям согласования начальных и граничных условий (6.3) краевой задачи (6.2) на с. 183.

Задача 6.2. Предложите семейства функций $q(t,x)$ в представлении (6.4) на с. 183, отличные от линейной (6.5).

Задача 6.3. Замените линейную функцию $q(t,x)$ (6.5) в представлении (6.4) на с. 183 другой функцией из допустимого семейства функций $q(t,x)$ (см. задачу 6.2) и поясните, как это повлияет на функции $v(t,x)$ и $w(t,x)$.

6.4. Пояснения

Пояснение 6.1 к с. 186. Для линейного однородного с постоянными коэффициентами обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,, \tag{6.77}$$

2-параметрическое семейство решений (иначе — *общее решение*, см. книги *Степанова* [51], *Матвеева* [35], *Эльсгольца* [62]) имеет вид суперпозиции линейно независимых (частных) решений $y_1(x), y_2(x)$ (иначе — *фундаментальной системы* дифференциального уравнения)

$$y = \varphi_c(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,. \tag{6.78}$$

Теорема 6.1. Пусть $y_1(x), y_2(x)$ суть два (частных) решения линейного однородного дифференциального уравнения (6.77), тогда отличие определителя *Вронского* от нуля, то есть выполнение условия

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,, \tag{6.79}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы чтобы решения были линейно независимы. □

Следовательно, задача построения семейства (6.78) сводится к нахождению двух линейно независимых (частных) решений дифференциального уравнения (6.77). Последнее можно толковать как линейную зависимость искомой функции и её первой и второй производных. Среди элементарных функций только показательная вида

$$y = \varphi(x) = \mathsf{e}^{\kappa x}, \qquad x \in \mathcal{I}\,. \tag{6.80}$$

где κ — действительное или комплексное число, обладает тем свойством, что её производная любого порядка равна функции с точностью до множителя. На этом свойстве показательной функции основан метод *Эйлера*:

1) найдём производные функции (6.80) первого и второго порядков

$$\varphi'(x) = \kappa\, \mathsf{e}^{\kappa x}, \qquad \varphi''(x) = \kappa^2\, \mathsf{e}^{\kappa x}, \qquad x \in \mathcal{I}\,.$$

полагая число κ неизвестным;

2) подставим производные в дифференциальное уравнение (6.77)

$$\left(a_0\, \kappa^2 + a_1\, \kappa + a_2\right) \mathsf{e}^{\kappa x} = 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,, \tag{6.81}$$

разделим обе части полученного тождества на $\mathsf{e}^{\kappa x}$ и получим *характеристическое уравнение* (левая часть последнего называется *характеристическим многочленом*)

$$a_0\,\kappa^2 + a_1\,\kappa + a_2 = 0\,; \tag{6.82}$$

3) найдём корни κ_1, κ_2 характеристического уравнения (6.82):

а) если корни суть действительные и различные, то линейно независимые решения дифференциального уравнения (6.77) суть

$$y_1(x) = \mathsf{e}^{\kappa_1 x}, \qquad y_2(x) = \mathsf{e}^{\kappa_2 x}, \qquad x \in \mathcal{I}\,; \tag{6.83}$$

б) если корни суть действительные и кратные, то есть $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa$, то линейно независимые решения дифференциального уравнения (6.77) суть

$$y_1(x) = \mathsf{e}^{\kappa x}, \qquad y_2(x) = x\,\mathsf{e}^{\kappa x}, \qquad x \in \mathcal{I}\,; \tag{6.84}$$

в) если корни суть комплексные (а значит, комплексно сопряжённые), то есть $\kappa_{1,2} = p \mp iq$, то линейно независимые комплекснозначные решения дифференциального уравнения (6.77) суть

$$\begin{cases} y_1(x) = \mathsf{e}^{(p-iq)x} = \mathsf{e}^{px}\,\mathsf{e}^{-iqx} = \mathsf{e}^{px}\left(\cos qx - i\sin qx\right)\,, \\ y_2(x) = \mathsf{e}^{(p+iq)x} = \mathsf{e}^{px}\,\mathsf{e}^{+iqx} = \mathsf{e}^{px}\left(\cos qx + i\sin qx\right)\,, \end{cases} \qquad x \in \mathcal{I}\,; \tag{6.85}$$

а линейно независимые действительнозначные решения дифференциального уравнения (6.77) суть

$$y_1(x) = \mathsf{e}^{px}\cos qx\,, \qquad y_2(x) = \mathsf{e}^{px}\sin qx\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,, \tag{6.86}$$

то есть действительная и мнимая (крест накрест) части решений (6.85).

Покажем, что условие (6.79) для решений (6.83), (6.84), (6.85) и (6.86) выполнено. В самом деле

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \mathsf{e}^{\kappa_1 x} & \mathsf{e}^{\kappa_2 x} \\ \kappa_1 \mathsf{e}^{\kappa_1 x} & \kappa_2 \mathsf{e}^{\kappa_2 x} \end{vmatrix} = \left(\kappa_2 - \kappa_1\right)\mathsf{e}^{\left(\kappa_1 + \kappa_2\right)x} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,,$$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \mathsf{e}^{\kappa x} & x\,\mathsf{e}^{\kappa x} \\ \kappa\,\mathsf{e}^{\kappa x} & \mathsf{e}^{\kappa x} + \kappa x\,\mathsf{e}^{\kappa x} \end{vmatrix} = \mathsf{e}^{2\kappa x} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,,$$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \mathsf{e}^{(p-iq)x} & \mathsf{e}^{(p+iq)x} \\ (p-iq)\,\mathsf{e}^{(p-iq)x} & (p+iq)\,\mathsf{e}^{(p+iq)x} \end{vmatrix} = \mathsf{e}^{2\kappa x} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,,$$

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} \cos qx\,\mathsf{e}^{px} & \sin qx\,\mathsf{e}^{px} \\ (p\cos qx - q\sin qx)\,\mathsf{e}^{px} & (p\sin qx + q\cos qx)\,\mathsf{e}^{px} \end{vmatrix} = q\,\mathsf{e}^{2px} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,.$$

Пример 6.2. Найдём 2-параметрическое семейство решений однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y' - 2y = 0\,. \tag{6.87}$$

Продифференцировав дважды подстановку *Эйлера* (6.80) и заменив неизвестную функцию, её первую и вторую производные соответственно на $\exp(\kappa x)$, $\kappa\exp(\kappa x)$, $\kappa^2\exp(\kappa x)$ получим характеристическое уравнение

$$\kappa^2 + \kappa - 2 = 0\,.$$

Корни последнего суть дествительные и различные $\kappa_1 = -2$, $\kappa_2 = +1$, соответствующие им линейно независимые (частные) решения таковы

$$y_1(x) = \mathtt{e}^{-2x}\,, \qquad y_2(x) = \mathtt{e}^{+x}\,. \tag{6.88}$$

Следовательно, линейная комбинация функций (6.88)

$$y = \varphi_c(x) = C_1\mathtt{e}^{-2x} + C_2\mathtt{e}^{+x} \tag{6.89}$$

есть 2-параметрическое семейство решений дифференциального уравнения (6.87). ▲

Пример 6.3. Найдём 2-параметрическое семейство решений однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 6y' + 9y = 0\,. \tag{6.90}$$

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (6.90)

$$\kappa^2 - 6\kappa + 9 = 0$$

имеет два равных корня (или, что то же самое, один корень кратности 2) $\kappa_{1,2} = 3$, соответствующие им линейно независимые (частные) решения таковы

$$y_1(x) = \mathtt{e}^{3x}\,, \qquad y_2(x) = x\,\mathtt{e}^{3x}\,. \tag{6.91}$$

Следовательно, линейная комбинация функций (6.91)

$$y = \varphi_c(x) = \big(C_1 + C_2\,x\big)\,\mathtt{e}^{3x} \tag{6.92}$$

есть 2-параметрическое семейство решений дифференциального уравнения (6.90). ▲

Пример 6.4. Для однородного дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0\,, \tag{6.93}$$

найдём: 1) 2-параметрическое семейство решений; 2) решение задачи *Коши* со следующими начальными условиями: $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Характеристическое уравнение

$$\kappa^2 + 1 = (\kappa - i)(\kappa + i) = 0$$

имеет два комплексно сопряжённых мнимых корня $\kappa_{1,2} = \mp\, i$, соответствующие им линейно независимые комплексно сопряжённые (частные) решения дифференциального уравнения (6.93) таковы

$$\begin{cases} y_1(x) = \mathtt{e}^{-ix} = \cos x - i\sin x\,, \\ y_2(x) = \mathtt{e}^{+ix} = \cos x + i\sin x\,. \end{cases} \tag{6.94}$$

Составим линейную комбинацию решений (6.94)

$$y = \varphi_c(x) = (C_1 + C_2)\cos x + i\,(C_2 - C_1)\sin x = D_1\cos x + D_2\sin x\,, \tag{6.95}$$

чтобы получить 2-параметрическое семейство решений дифференциального уравнения (6.93). Но данное дифференциальное уравнение имеет действительные коэффициенты, поэтому мы разыскиваем 2-х параметрическое семейство его действительнозначных решений, между тем решения (6.94) суть комплекснозначные функции переменной x.

Попробуем прояснить суть возникшего затруднения, обратившись к задаче *Коши*. Подставив в семейство (6.95) и его первую производную начальные условия

$$\begin{cases} y(0) \;= \Big[+(C_1 + C_2)\,\mathtt{cos}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{sin}\,x\Big]\Big|_{x=0} = 0\,, \\ y'(0) = \Big[-(C_1 + C_2)\,\mathtt{sin}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{cos}\,x\Big]\Big|_{x=0} = 1\,, \end{cases}$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных C_1, C_2 и D_1, D_2

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) = D_1 = 0\,, \\ i\,(C_2 - C_1) = D_2 = 1\,, \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} 2\,C_1 = +i\,, \\ 2\,C_2 = -i\,. \end{cases}$$

Найденные значения постоянных $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ (причём постоянные C_1, C_2 суть комплексно сопряжённые) подставим в семейство (6.95) и получим действительнозначное решение задачи *Коши*

$$y = \mathtt{sin}\,x\,, \tag{6.96}$$

как частное решение семейства (6.95). ▲

Пример 6.5. Для однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 5y = 0\,, \tag{6.97}$$

найдём: 1) 2-параметрическое семейство решений; 2) решение задачи *Коши* со следующими начальными условиями: $y(0) = \alpha_1$, $y'(0) = \alpha_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$.

Характеристическое уравнение

$$\kappa^2 - 2\kappa + 5 = 0$$

имеет два комплексно сопряжённых корня $\kappa_{1,2} = 1 \mp i$, которым соответствуют два линейно независимых комплексно сопряжённых (частных) решения

$$\begin{cases} y_1(x) = \mathtt{e}^{(1-i)\,x} = \mathtt{e}^x(\mathtt{cos}\,x - i\,\mathtt{sin}\,x)\,, \\ y_2(x) = \mathtt{e}^{(1+i)\,x} = \mathtt{e}^x(\mathtt{cos}\,x + i\,\mathtt{sin}\,x)\,. \end{cases} \tag{6.98}$$

Составим линейную комбинацию решений (6.98)

$$y = \varphi_c(x) = \mathtt{e}^x\Big[(C_1 + C_2)\,\mathtt{cos}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{sin}\,x\Big] = \mathtt{e}^x\Big(D_1\,\mathtt{cos}\,x + D_2\,\mathtt{sin}\,x\Big)\,, \tag{6.99}$$

чтобы получить 2-параметрическое семейство решений дифференциального уравнения (6.97).

Для решения задачи *Коши* подставим начальные условия в семейство (6.99) и его производную по x при $x = 0$ и получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно параметров C_1 и C_2

$$\begin{cases} y(0) \;= \mathtt{e}^x\Big[+(C_1 + C_2)\,\mathtt{cos}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{sin}\,x\Big]\Big|_{x=0} = \alpha_1\,, \\ y'(0) = \mathtt{e}^x\Big[+(C_1 + C_2)\,\mathtt{cos}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{sin}\,x\Big]\Big|_{x=0} + \\ \qquad + \mathtt{e}^x\Big[-(C_1 + C_2)\,\mathtt{sin}\,x + i\,(C_2 - C_1)\,\mathtt{cos}\,x\Big]\Big|_{x=0} = \alpha_2\,, \end{cases}$$

или после упрощения

$$\begin{cases} (C_1 + C_2) & = \alpha_1\,, \\ (C_1 + C_2) + i\,(C_2 - C_1) & = \alpha_2\,. \end{cases}$$

Единственное решение этой системы

$$\begin{cases} \ \ (C_1 + C_2) = D_1 = \alpha_1\,, \\ i\,(C_2 - C_1) = D_2 = \alpha_2 - \alpha_1\,, \end{cases}$$

где $D_1, D_2 \in \mathbb{R}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ (причём постоянные C_1, C_2 суть комплексно сопряжённые), задает искомое решение задачи *Коши*

$$y = \mathrm{e}^x \Big[\alpha_1 \cos x + (\alpha_2 - \alpha_1) \sin x\Big] \tag{6.100}$$

как частное действительнозначное решение семейства (6.99). ▲

Рассмотренные примеры полностью раскрывают способы построения фундаментальной системы линейного однородного с постоянными коэффициентами обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (6.77). ▼

Пояснение 6.2 к с. 190. Метод вариации произвольной постоянной для неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка выше первого поясним на примере уравнения второго порядка

$$ya_0\,''(x) + a_1\,y'(x) + a_2\,y(x) = g(x)\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,, \tag{6.101}$$

для которого известны линейно независимые решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ (то есть *фундаментальная система* решений, см. книги *Степанова* [51], *Матвеева* [35], *Эльсгольца* [62]) соответствующего однородного уравнения (см. пояснение 6.1 на с. 202)

$$a_0\,y''(x) + a_1\,y'(x) + a_2\,y(x) = 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,. \tag{6.102}$$

Это означает, *во-первых*, что определитель *Вронского* тождественно отличен от нуля

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \not\equiv 0\,, \qquad x \in \mathcal{I}\,. \tag{6.103}$$

во-вторых, что любое решение однородного уравнения (6.102) может быть получено из 2-параметрического семейства (называемого также общим решением)

$$y(x) = C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x) \tag{6.104}$$

при подходящем выборе произвольных постоянных C_1, C_2. Заметим, что семейство (6.104) удовлетворяет однородному уравнению (6.102) при любых значениях постоянных C_1, C_2. В самом деле

$$\begin{aligned} a_0\,y''(x) + a_1\,y'(x) + a_2\,y(x) &= a_0\Big(C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\Big)'' + a_1\Big(C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\Big)' + a_2\Big(C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\Big) = \\ &= a_0\Big(C_1\,y_1''(x) + C_2\,y_2''(x)\Big) + a_1\Big(C_1\,y_1'(x) + C_2\,y_2'(x)\Big) + a_2\Big(C_1\,y_1(x) + C_2\,y_2(x)\Big) = \\ &= C_1\Big(a_0\,y_1''(x) + a_1\,y_1'(x) + a_2\,y_1(x)\Big) + C_2\Big(a_0\,y_2''(x) + a_1\,y_2'(x) + a_2\,y_2(x)\Big) \equiv 0\,. \end{aligned}$$

Будем разыскивать 2-х параметрическое семейство решений неоднородного уравнения (6.101) в виде

$$y(x) = C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x)\,, \tag{6.105}$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ — функции, подлежащие определению (устоявшееся обыкновение обозначать постоянные C_1, C_2 в семействе (6.104) и функции $C_1(x), C_2(x)$ в семействе (6.105) нельзя признать удачным).

Продифференцируем дважды семейство (6.105), накладывая на производные функций $C_1(x)$, $C_2(x)$ условия, указанные в фигурных скобках, тогда будем иметь

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_1'(x)\, y_1(x) + C_1(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2(x) + C_2(x)\, y_2'(x) = \Big\{ C_1'(x)\, y_1(x) + C_2'(x)\, y_2(x) = 0 \Big\} = \\ &= C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)\,, \\ y''(x) &= C_1'(x)\, y_1'(x) + C_1(x)\, y_1''(x) + C_2'(x)\, y_2' + C_2\, y_2''(x) = \Big\{ C_1'(x)\, y_1'(x) + C_2'(x)\, y_2'(x) = g(x) \Big\} = \\ &= C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + g(x)\,. \end{aligned}$$

Подставив семейство (6.105) и полученные выражения для первой и второй производных семейства

$$\begin{cases} y'(x) = C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x)\,, \\ y''(x) = C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + g(x)\,, \end{cases} \tag{6.106}$$

в левую часть неоднородного дифференциального уравнения (6.101)

$$\begin{aligned} a_0\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_2\, y(x) &= a_0 \Big(C_1(x)\, y_1''(x) + C_2(x)\, y_2''(x) + g(x) \Big) + \\ &+ a_1 \Big(C_1(x)\, y_1'(x) + C_2(x)\, y_2'(x) \Big) + a_2 \Big(C_1(x)\, y_1(x) + C_2(x)\, y_2(x) \Big) = \\ &= C_1(x) \Big(a_0\, y_1''(x) + a_1\, y_1'(x) + a_2\, y_1(x) \Big) + \\ &+ C_2(x) \Big(a_0\, y_2''(x) + a_1\, y_2'(x) + a_2\, y_2(x) \Big) + g(x) \equiv g(x)\,, \end{aligned}$$

убедимся, что семейство тождественно удовлетворяет уравнению.

Для того, чтобы семейство (6.105) было полностью определено, нужно воспользоваться условиями, наложенными выше на неизвестные функции $C_1(x), C_2(x)$. Запишем эти условия в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно производных $C_1'(x), C_2'(x)$

$$\begin{cases} y_1(x)\, C_1'(x) + y_2(x)\, C_2'(x) = 0\,, \\ y_1'(x)\, C_1'(x) + y_2'(x)\, C_2'(x) = g(x)\,, \end{cases} \tag{6.107}$$

и найдём решение системы по формулам *Крамера*

$$C_1'(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ g(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)}\,, \qquad C_2'(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)} = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & g(x) \end{vmatrix}}{W(x)}\,, \tag{6.108}$$

где определитель системы есть определитель *Вронского* (6.103), то есть $W(x) = W[y_1(x), y_2(x)]$.

Далее найдём функции $C_1(x), C_2(x)$ непосредственным интегрированием выражений (6.108)

$$C_1(x) = C_{1,0} + \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\, \mathrm{d}x\,, \qquad C_2(x) = C_{2,0} + \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\, \mathrm{d}x\,, \tag{6.109}$$

где $C_{1,0}, C_{2,0}$ — постоянные интегрирования.

Если для неоднородного дифференциального уравнения (6.101) поставлена задача *Коши*, то искомые функции $C_1(x), C_2(x)$ можно должным образом настроить

$$C_1(x) = C_{1,0} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x\,, \qquad C_2(x) = C_{2,0} + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x\,, \tag{6.110}$$

где $C_{1,0} = C_1(x_0)$, $C_{2,0} = C_2(x_0)$, $x_0 \in \mathcal{I}$. ▼

Пример 6.6. Найдём 2-параметрическое семейство решений неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + 4y' + 4y = 3x\,\mathsf{e}^{-2x}. \tag{6.111}$$

Во-первых, отбросим правую часть данного дифференциального уравнения и рассмотрим соответствующее ему однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0\,. \tag{6.112}$$

Характеристическое уравнение последнего есть квадратное

$$\kappa^2 + 4\kappa + 4 = 0 \tag{6.113}$$

и имеет два равных корня (или, что то же самое, один корень кратности 2) $\kappa_{1,2} = -2$. Соответствующие корням линейно независимые частные решения суть

$$y_1(x) = \mathsf{e}^{-2x}, \qquad y_2(x) = x\,\mathsf{e}^{-2x}. \tag{6.114}$$

Во-вторых, составим определитель *Вронского*

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathsf{e}^{-2x} & x\,\mathsf{e}^{-2x} \\ -2\,\mathsf{e}^{-2x} & (1-2x)\,\mathsf{e}^{-2x} \end{vmatrix} = \mathsf{e}^{-4x} \begin{vmatrix} 1 & x \\ -2 & 1-2x \end{vmatrix} = \mathsf{e}^{-4x}$$

и два вспомогательных определителя

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x\,\mathsf{e}^{-2x} \\ 3x\,\mathsf{e}^{-2x} & (1-2x)\,\mathsf{e}^{-2x} \end{vmatrix} = -3x^2\mathsf{e}^{-4x}, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} \mathsf{e}^{-2x} & 0 \\ -2\,\mathsf{e}^{-2x} & 3x\,\mathsf{e}^{-2x} \end{vmatrix} = 3x\,\mathsf{e}^{-4x}.$$

В-третьих, найд"ем по формулам (6.109) функции

$$C_1(x) = C_{1,0} + \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = C_{1,0} - \int 3x^2\,\mathrm{d}x = C_{1,0} - x^3,$$

$$C_2(x) = C_{2,0} + \int \frac{W_2(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x = C_{2,0} + \int 3x\,\mathrm{d}x = C_{2,0} + \frac{3}{2}\,x^2,$$

и составим 2-параметрическое семейство (6.105) решений линейного неоднородного дифференциального уравнения (6.111)

$$\varphi_p(x) = C_1(x)\,y_1(x) + C_2(x)\,y_2(x) = \left(C_{1,0} - x^3\right)\mathsf{e}^{-2x} + \left(C_{2,0} + \frac{3}{2}\,x^2\right) x\,\mathsf{e}^{-2x} = \frac{1}{2}\,x^3\,\mathsf{e}^{-2x} = \\ = \left(C_{1,0} + C_{2,0}\,x\right)\mathsf{e}^{-2x} + \frac{1}{2}\,x^3\,\mathsf{e}^{-2x}\,. \tag{6.115}$$

Для завершения примера следует выполнить проверку решения (6.115) с помощью подстановки в дифференциальное уравнение (6.111). ▲

7. Приложение. Дифференциальные операторы и интегральные формулы теории поля

7.0. Προλεγόμενα

В разделе 7.1. дадим определения определения скалярных и векторных поле, а также основных операторов теории поля: градиента, дивергенции и ротора (см. пояснение 7.1 на с. 235). Скалярные и векторные поля будем рассматривать в связной области $\mathcal{D}$ евклидового действительного аффинного пространства $\mathbb{R}^3$, параметризованного декартовой ортогональной системой координат: $\boldsymbol{r} = (x, y, z) = \big(x_1, x_2, x_3\big)$, причём область $\mathcal{D}$ может совпадать с пространством $\mathbb{R}^3$ (см. пояснение 7.2 на с. 235).

В разделе 7.2. приведём формулировки основных интегральных теорем теории поля: *Стокса*, *Остроградского – Гаусса* (см. пояснение 7.3 на с. 235), с помощью которых выведем инвариантные определения (независящие от выбора системы координат) дифференциальных операторов теории поля.

В разделе 7.3. с помощью инвариантных определений раздела 7.2. выведем формулы для дифференциальных операторов теории поля в криволинейных ортогональных системах координат (см. пояснение 7.8 на с. 235).

В разделе 7.4. выведем первую и вторую вспомогательные формулы *Грина* (см. пояснение 7.9 на с. 235).

7.1. Дифференциальные операторы теории поля

Определение 7.1. *Скалярным полем*, заданным в области $\mathcal{D}$, называется однозначная скалярная функция $u(\boldsymbol{r})$ векторного аргумента $\boldsymbol{r}\in\mathcal{D}$, то есть $u(\boldsymbol{r})\colon \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. □

Определение 7.2. *Векторным полем*, заданным в области $\mathcal{D}$, называется однозначная векторная функция $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (a_x, a_y, a_z) = (a_1, a_2, a_3)$ векторного аргумента $\boldsymbol{r} \in \mathcal{D}$, то есть $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. □

Замечание 7.1. Обратим внимание, как именно определение 7.2 связывает с каждой точкой $\boldsymbol{r}$ области $\mathcal{D}$ вектор $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ □

Привычный в действительном анализе способ наглядного представления скалярных функций их графиками уместен в случае одной или двух независимых (скалярных) переменных. Скалярную функцию бо́льшего числа независимых (скалярных) переменных представить подобным образом невозможно, поэтому наглядность достигается иначе, с помощью поверхностей уровня.

Определение 7.3. *Если* $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, заданное в области $\mathcal{D}$, *тогда* связное гладкое или кусочно-гладкое множество точек $\boldsymbol{r} \in \mathcal{D}$ (многообразие размерности 2), в которых поле принимает заданное значение C, то есть

$$u(\boldsymbol{r}) = u(x, y, z) = C\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}\,, \tag{7.1}$$

называется *поверхностью уровня* скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$. □

Если в правой части равенства (7.1) менять значения C, то получим различные поверхности уровня. Поведение последних (сближение, расхождение и т. д.) даёт качественное представление о скалярном поле. В силу однозначности скалярного поля верно следующее

Утверждение 7.1. Поверхности уровня не пересекаются. □

Пример 7.1. Для скалярного поля

$$u(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}|\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{7.2}$$

найдём поверхности уровня.

Руководствуясь определением 7.3 составим уравнение поверхностей уровня

$$|\boldsymbol{r}| = C \quad \Rightarrow \quad |\boldsymbol{r}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = C^2, \qquad C^2 \in (0, +\infty)\,, \tag{7.3}$$

откуда заключим, что последние суть концентрические сферы с центром в точке $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$.

Далее продифференцируем скалярное поле (7.2) в произвольной точке $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0} = (0, 0, 0)$

$$\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial x}\,\mathrm{d}z\,,$$

где частные производные поля по переменным x, y, z суть

$$\frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial x} = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad \frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial y} = \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad \frac{\partial |\boldsymbol{r}|}{\partial z} = \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\,. \tag{7.4}$$

Следовательно, получим такое выражение для дифференциала скалярного поля

$$\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}) = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|}\,, \tag{7.5}$$

причём дифференциалы суть произвольные (как дифференциалы независимых переменных x, y, z).

Теперь запишем выражение для дифференциала (7.5) скалярного поля (7.2) на какой-либо поверхности уровня (7.3)

$$\frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z}{|\boldsymbol{r}|} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y + z\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{7.6}$$

и убедимся, что дифференциалы $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ суть зависимые (на этой поверхности переменные x, y, z суть зависимые) — можно задать произвольно только дифференциалы любых 2-х переменных, а дифференциал 3-ей переменной будет подчинен условию (7.6). Это означает, что размерность поверхности уровня равна 2, в отличие от размерности объемлющего пространства, равной 3. ▲

Пример 7.2. Для скалярного поля

$$u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{7.7}$$

где $\boldsymbol{e} = (e_x, e_y, e_z)$ — постоянный вектор, найдём поверхности уровня.

Составим, согласно определению 7.3, уравнение поверхностей уровня

$$\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r} = e_x\,x + e_y\,y + e_z\,z = C\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3. \tag{7.8}$$

Возьмём для некоторого значения произвольной постоянной C какой-либо вектор $\boldsymbol{r}_0$ на поверхности уровня (точнее, концевая точка вектора): $\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{r}_0 = C$, перепишем уравнение (7.8) поверхности уровня так, чтобы оно приняло вид канонического уравнения плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{e}$ и проходящей через точку $\boldsymbol{r}_0$, то есть

$$\boldsymbol{e}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0\,, \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3. \tag{7.9}$$

Следовательно, все поверхности уровня суть (параллельные) плоскости, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{e}$.

Выражение для дифференциала скалярного поля (7.7)

$$\mathrm{d}u = e_x\,\mathrm{d}x + e_y\,\mathrm{d}y + e_z\,\mathrm{d}z \tag{7.10}$$

не связывает дифференциалы всех независимых переменных какими-либо условиями, тогда как дифференциал скалярного поля (7.7) на поверхностях уровня (7.8)

$$\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}) = e_x\,\mathrm{d}x + e_y\,\mathrm{d}y + e_z\,\mathrm{d}z = 0\,, \tag{7.11}$$

всегда равный нулю, накладывает линейную связь на дифференциалы всех независимых переменных. Размерность поверхности уровня, очевидно, равна 2. ▲

Определение 7.4. *Пусть* в области $\mathcal{D}$ заданы: 1) скалярное поле $u(\boldsymbol{r})$, дифференцируемое в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{D}$; 2) линия Γ с натуральной параметризацией

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{\varphi}(s)=\varphi_x(s)\,\boldsymbol{i}+\varphi_y(s)\,\boldsymbol{j}+\varphi_z(s)\,\boldsymbol{k}\,, \qquad s\in\mathcal{I}\subset\mathbb{R}, \tag{7.12}$$

где $\boldsymbol{\varphi}(s)\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ есть векторно-значная функция: *а*) непрерывно дифференцируемая в $\mathcal{I}$; *б*) проходящая через точку $\boldsymbol{r}_0$: $\boldsymbol{r}_0=\boldsymbol{\varphi}(0)$, $0\in\mathcal{I}$; *тогда* производная сложной функции $U(s)=u\big(\boldsymbol{\varphi}(s)\big)$ по переменной s при $s=0$

$$\dot{U}(0)=\varphi_x'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}+\varphi_y'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}+\varphi_z'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial z} \tag{7.13}$$

называется *производной скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ вдоль линии Γ в точке $\boldsymbol{r}_0$*. □

Определение 7.5. *Пусть*: 1) выполнены посылки определения 7.4; 2) $\boldsymbol{\tau}_0$ есть касательный орт к линии Γ в точке $\boldsymbol{r}_0$

$$\boldsymbol{\tau}_0=\varphi_x'(0)\,\boldsymbol{i}+\varphi_y'(0)\,\boldsymbol{j}+\varphi_z'(0)\,\boldsymbol{k}\,, \tag{7.14}$$

тогда производная скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ вдоль линии Γ в точке $\boldsymbol{r}_0$ (7.13)

$$\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\tau}_0}=\varphi_x'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}+\varphi_y'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}+\varphi_z'(0)\,\frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial z} \tag{7.15}$$

называется *производной скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ по направлению вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ в точке $\boldsymbol{r}_0$*. □

Замечание 7.2. Иногда определение 7.5 вводят независимо от определения (7.4). □

Определение 7.6. *Пусть* $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, дифференцируемое в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{D}$, *тогда* вектор

$$\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) = \left(\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\, \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \boldsymbol{k} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \tag{7.16}$$

называется *градиентом* (скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$) в точке $\boldsymbol{r}_0$. □

С помощью градиента скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ запишем производную последнего по направлению вектора $\boldsymbol{\tau}_0$ в точке $\boldsymbol{r}_0$ (7.15) так

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_0} = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)\,. \tag{7.17}$$

Определение 7.7. *Пусть* $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, дифференцируемое в области $\mathcal{D}$ (замыкании области $\mathcal{D}$), *тогда* векторное поле

$$\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial x}, \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial y}, \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x}\, \boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\, \boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\, \boldsymbol{k} \tag{7.18}$$

называется *полем градиента* (скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$) в области $\mathcal{D}$ (замыкании $\mathcal{D}$). □

Утверждение 7.2. *Пусть* $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, дифференцируемое в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{D}$, *тогда* вектор $\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$ перпендикулярен поверхности уровня поля $u(\boldsymbol{r})$, проходящей через точку $\boldsymbol{r}_0$. □

Доказательство. Запишем дифференциал скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ на поверхности уровня (7.1), проходящей через точку $\boldsymbol{r}_0$

$$\mathrm{d}u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial x}\, \mathrm{d}x + \frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial y}\, \mathrm{d}y + \frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial z}\, \mathrm{d}z = 0\,.$$

Представим левую часть этого равенства как скалярное произведение вектора $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\, \boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\, \boldsymbol{j} + \mathrm{d}z\, \boldsymbol{k}\,,$$

касательного поверхности уровня в точке $\boldsymbol{r}_0$, и вектора градиента скалярного поля в точке $\boldsymbol{r}_0$ (7.16), тогда равенство

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) = 0\,, \tag{7.19}$$

завершает доказательство. Можно придать левой части последнего равенства большего сходства с выражением (7.17) для производной по направлению, если ввести касательный к поверхности уровня в точке $\boldsymbol{r}_0$ орт

$$\boldsymbol{\tau}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\,, \qquad \mathrm{d}s = \mathrm{d}|\boldsymbol{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2}$$

и записать равенство (7.19) (после деления на $\mathrm{d}s$) так

$$\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{\partial u(\boldsymbol{r}_0)}{\partial \boldsymbol{\tau}_0} = 0\,,$$

то есть производная скалярного поля в направлении произвольного орта $\boldsymbol{\tau}_0$, касательного поверхности уровня данного поля, равна нулю (произвольность орта $\boldsymbol{\tau}_0$ следует понимать в том смысле, что из точки $\boldsymbol{r}_0$ в плоскости, касательной поверхности уровня, можно провести множество касательных ортов). ■

Утверждение 7.3. *Пусть* $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, дифференцируемое в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{D}$, *тогда* вектор $\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$ направлен в сторону роста скалярного поля $u(\boldsymbol{r})$ в точке $\boldsymbol{r}_0$. □

Доказательство. Поверхность уровня, проходящая через точку $\boldsymbol{r}_0$, разбивает окрестность последней на две части: в одной $u(\boldsymbol{r}) > u(\boldsymbol{r}_0)$, в другой $u(\boldsymbol{r}) < u(\boldsymbol{r}_0)$. Будем называть первую часть «положительной», а вторую — «отрицательной». Направим орт $\boldsymbol{\tau}_0$ к поверхности уровня в точке $\boldsymbol{r}_0$ в «положительную» часть окрестности. Далее умножим скалярно орт $\boldsymbol{\tau}_0$ и вектор градиента $\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$ скалярного поля в точке $\boldsymbol{r}_0$

$$\boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) = |\boldsymbol{\tau}_0||\,\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)|\,\mathtt{cos}\,(\boldsymbol{\tau}_0 \widehat{,} \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)) = |\,\mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)|\,\mathtt{cos}\,(\boldsymbol{\tau}_0 \widehat{,} \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0))\,.$$

Пусть $\mathtt{cos}\,(\boldsymbol{\tau}_0 \widehat{,} \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)) > 0$, то есть $\boldsymbol{\tau}_0 \uparrow\uparrow \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_0} = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) > 0\,,$$

то есть производная скалярного поля по направлению орта $\boldsymbol{\tau}_0$ положительна, что согласуется с направлением орта $\boldsymbol{\tau}_0$.

Пусть $\mathtt{cos}\,(\boldsymbol{\tau}_0 \widehat{,} \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)) < 0$, то есть $\boldsymbol{\tau}_0 \downarrow\uparrow \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$, тогда

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}_0} = \boldsymbol{\tau}_0 \cdot \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0) < 0\,,$$

то есть производная скалярного поля по направлению орта $\boldsymbol{\tau}_0$ отрицательна, что противоречит тому, что орт $\boldsymbol{\tau}_0$ направлен в «положительную» часть окрестности точки $\boldsymbol{r}_0$.

Следовательно, единственная возможность состоит в том, что $\boldsymbol{\tau}_0 \uparrow\uparrow \mathtt{grad}\, u(\boldsymbol{r}_0)$. ■

Определение 7.8. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, дифференцируемое в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{D}$, *тогда* скаляр (число)

$$\mathtt{div}\, \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0) = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) \Bigg|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} \tag{7.20}$$

называется *дивергенцией* (векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$) в точке $\boldsymbol{r}_0$. □

Определение 7.9. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, дифференцируемое в области $\mathcal{D}$ (замыкании области $\mathcal{D}$), *тогда* скалярное поле

$$\mathtt{div}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{7.21}$$

называется полем *дивергенции* (векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$) в области $\mathcal{D}$ (замыкании $\mathcal{D}$). □

Определение 7.10. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, дифференцируемое в окрестности точки $\boldsymbol{r}_0 \in \mathcal{D}$, *тогда* вектор

$$\begin{aligned}\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}_0) &= \left.\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0} = \\ &= \left.\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right]\right|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0}\end{aligned} \tag{7.22}$$

называется *ротором* (*завихренностью*) (векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$) в точке $\boldsymbol{r}_0$. □

Определение 7.11. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, дифференцируемое в области $\mathcal{D}$ (замыкании области $\mathcal{D}$), *тогда* векторное поле

$$\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \tag{7.23}$$

называется полем *ротора* (*завихренности*) (векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$) в области $\mathcal{D}$ (замыкании $\mathcal{D}$). □

С помощью оператора *Гамильтона* ∇ (оператора *набла* или *набла*-оператора)

$$\nabla = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial}{\partial z} \tag{7.24}$$

определения 7.7, 7.9 и 7.11 допускают следующую запись:

$$\begin{cases} \mathtt{grad}\,u(\boldsymbol{r}) = \nabla\,u(\boldsymbol{r}) = \left(\boldsymbol{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\ u(\boldsymbol{r})\,, \\ \mathtt{div}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \left(\boldsymbol{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,, \\ \mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nabla\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \left(\boldsymbol{i}\,\dfrac{\partial}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\dfrac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\dfrac{\partial}{\partial z}\right)\times\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,. \end{cases} \tag{7.25}$$

Замечание 7.3. Точнее будет сказать, что выражения (7.25) вводят три дифференциальных оператора на основе оператора *Гамильтона*, а именно: ∇ , $\nabla\cdot$, $\nabla\times$, с помощью которых можно ввести векторное поле градиента, скалярное поле дивергенции и векторное поле ротора. □

Пример 7.3. Для скалярного поля

$$u(\boldsymbol{r}) = \varphi(|\boldsymbol{r}|)\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{7.26}$$

где φ — непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, найдём градиент.

Согласно определению (7.18), для искомого градиента скалярного поля (7.2) имеем

$$\nabla u(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{i}\,\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \boldsymbol{j}\,\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \boldsymbol{k}\,\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\left(\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial y}\,\boldsymbol{j} + \frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial z}\,\boldsymbol{k}\right).$$

Частные производные функции $|\boldsymbol{r}|$ по переменным x, y, z уже известны и даны выражениями (7.2) (см. пример 7.1 на с. 211), поэтому запишем окончательное выражение для градиента

$$\nabla u(\boldsymbol{r}) = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\left(\frac{x}{|\boldsymbol{r}|}\,\boldsymbol{i} + \frac{y}{|\boldsymbol{r}|}\,\boldsymbol{j} + \frac{z}{|\boldsymbol{r}|}\,\boldsymbol{k}\right) = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\,. \tag{7.27}$$

Область определения векторного поля (7.27) получим из области определения скалярного поля (7.26) исключением точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$. ▲

Пример 7.4. Для векторного поля

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \varphi(|\boldsymbol{r}|)\,\boldsymbol{r}\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3, \tag{7.28}$$

где φ — непрерывно дифференцируемая функция своего аргумента, найдём дивергенцию.

Для компонентов векторного поля (7.28)

$$a_\kappa = \varphi(|\boldsymbol{r}|)\,x_\kappa\,, \qquad \kappa = 1, 2, 3, \tag{7.29}$$

найдём соответствующие частные производные

$$\frac{\partial a_\kappa}{\partial x_\kappa} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_\kappa}\,x_\kappa + \varphi(|\boldsymbol{r}|) \overset{(7.4)}{=} \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_\kappa^2}{|\boldsymbol{r}|} + \varphi(|\boldsymbol{r}|)\,, \qquad \kappa = 1, 2, 3, \tag{7.30}$$

тогда, согласно определению (7.21), для искомой дивергенции векторного поля (7.28) имеем

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \underbrace{\varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_1^2}{|\boldsymbol{r}|} + \varphi(|\boldsymbol{r}|)}_{\kappa=1} + \underbrace{\varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_2^2}{|\boldsymbol{r}|} + \varphi(|\boldsymbol{r}|)}_{\kappa=2} + \underbrace{\varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_3^2}{|\boldsymbol{r}|} + \varphi(|\boldsymbol{r}|)}_{\kappa=3}.$$

Выполнив очевидные упрощения получим окончательное выражение для дивергенции

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,|\boldsymbol{r}| + 3\,\varphi(|\boldsymbol{r}|)\,. \tag{7.31}$$

Область определения скалярного поля (7.31) получим из области определения векторного поля (7.28) исключением точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, в которой частные производные (7.30) компонентов (7.29) векторного поля (7.28) не определены. ▲

Пример 7.5. Для векторного поля (7.28) найдём ротор.

Производные компонентов векторного поля (7.28)

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_2}\,x_1 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_2x_1}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial x_3} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_3}\,x_1 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_3x_1}{|\boldsymbol{r}|}\,,$$
$$\frac{\partial a_2}{\partial x_1} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_1}\,x_2 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_1x_2}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad \frac{\partial a_2}{\partial x_3} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_3}\,x_2 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_3x_2}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad (7.32)$$
$$\frac{\partial a_3}{\partial x_1} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_1}\,x_3 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_1x_3}{|\boldsymbol{r}|}\,, \qquad \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{\partial|\boldsymbol{r}|}{\partial x_2}\,x_3 = \varphi'(|\boldsymbol{r}|)\,\frac{x_2x_3}{|\boldsymbol{r}|}\,,$$

отличные от уже найденных (7.30), подставим в формулу для ротора (7.23)

$$\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \frac{\varphi'(|\boldsymbol{r}|)}{|\boldsymbol{r}|}\left[\big(x_2x_3 - x_3x_2\big)\,\boldsymbol{i}_1 + \big(x_3x_1 - x_1x_3\big)\,\boldsymbol{i}_1 + \big(x_1x_2 - x_2x_1\big)\,\boldsymbol{i}_2\right] = \boldsymbol{0}\,, \qquad (7.33)$$

откуда следует, что ротор векторного поля (7.28) тождественно равен нулю.

Область определения векторного поля (7.33) получим из области определения векторного поля (7.28) исключением точки $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$, в которой частные производные (7.32) компонентов (7.29) векторного поля (7.28) не определены. ▲

7.2. Интегральные теоремы теории поля

...Эта теорема (теорема Стокса) имела любопытную историю и претерпела разительные метаморфозы.

Впервые формулировка теоремы появилась в виде приписки к письму сэра Уильяма Томсона (лорда Кельвина) к Стоксу, датированному 2 июля 1850 г. Опубликована она была в качестве восьмого вопроса к экзаменам на смитовскую премию 1854 г. Этот конкурсный экзамен, которому ежегодно подвергались лучшие студенты-математики Кембриджского университета, с 1849 по 1882 г. проводился проф. Стоксом. Ко времени его смерти результат был повсеместно известен как теорема Стокса. Современниками Стокса были даны по крайней мере три доказательства: одно опубликовал Томсон, другое было изложено в „Трактате о натуральной философии“ Томсона и Тейта и третье предложил Максвелл в „Электричестве и магнетизме“... С тех пор именем Стокса были названы значительно более общие результаты, сыгравшие столь заметную роль в развитии некоторых разделов математики, что теорема Стокса вполне может дать материал для размышлений о ценности обобщения. [50]

Определение 7.12. *Пусть*: 1) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывное в области $\mathcal{D}$; 2) $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ — ориентируемая кусочно-гладкая линия; 3) $\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r})$ — орт касательной к линии $\mathcal{C}$, задающий направление на $\mathcal{C}$; *тогда* криволинейный интеграл первого рода

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathcal{C} \qquad (7.34)$$

называется *циркуляцией* векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ по ориентированной линии $\mathcal{C}$. □

Замечание 7.4. Приведём привычные для действительного анализа выражения циркуляции (7.34), записанные с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \Big(\tau_x P + \tau_y Q + \tau_z R\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{C}\,; \qquad (7.35)$$

2) второго рода

$$\int\limits_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z\,, \tag{7.36}$$

где P, Q, R — непрерывные в области $\mathcal{D}$ функции переменных x, y, z. Будем называть выражения (7.35), (7.36) и подобные им P, Q, R-разновидностями понятий теории поля. □

Определение 7.13. *Пусть*: 1) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывное в области $\mathcal{D}$; 2) $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ — двухсторонняя кусочно-гладкая поверхность; 3) $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})$ — орт нормали к поверхности $\mathcal{S}$, задающий сторону $\mathcal{S}$; *тогда* поверхностный интеграл первого рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\; \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{7.37}$$

называется *потоком* векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через ориентированную поверхность $\mathcal{S}$. □

Замечание 7.5. Приведём P, Q, R-разновидности выражения (7.37), записанные с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \Big(\nu_x P + \nu_y Q + \nu_z R\Big)\, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{7.38}$$

2) второго рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{7.39}$$

где P, Q, R — непрерывные в области $\mathcal{D}$ функции переменных x, y, z. □

Определение 7.14. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывное в замыкании области $\mathcal{D}$, *тогда* пространственный интеграл первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\; \mathrm{d}\mathcal{D} \tag{7.40}$$

называется *обильностью* векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в области $\mathcal{D}$. □

Замечание 7.6. Приведём P, Q, R-разновидности выражения (7.40), записанные с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}\mathcal{D} \tag{7.41}$$

2) второго рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \tag{7.42}$$

где P, Q, R — непрерывные в замыкании области $\mathcal{D}$ функции переменных x, y, z. □

Определение 7.15. *Пусть*: 1) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывное в области $\mathcal{D}$; 2) $\mathcal{D} \supset \mathcal{C}$ — произвольная ориентируемая замкнутая кусочно-гладкая линия (контур); 3) циркуляция поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ по контуру $\mathcal{C}$ равна нулю

$$\oint\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{C} = 0 \,, \tag{7.43}$$

тогда поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *потенциальным* в области $\mathcal{D}$. □

Определение 7.16. *Пусть*: 1) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывно дифференцируемое в области $\mathcal{D}$; 2) $\mathcal{D} \supset \mathcal{S}$ — произвольная ориентируемая замкнутая кусочно-гладкая поверхность; 3) поток поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через поверхность $\mathcal{S}$ равен нулю

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{S} = 0 \,, \tag{7.44}$$

тогда поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ называется *соленоидальным* в области $\mathcal{D}$. □

Теорема 7.1. *Пусть*: 1) $\mathcal{S}$ — ограниченная, кусочно-гладкая, двухсторонняя поверхность с кусочно-гладкой границей (краем) $\mathcal{C}$; $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})$ — орт нормали к выбранной стороне $\mathcal{S}$; 3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывно дифференцируемое в окрестности поверхности $\mathcal{S}$, *тогда* справедлива интегральная формула *Стокса*

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r}) \cdot (\nabla \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})) \, \mathrm{d}\mathcal{S} = \oint\limits_{\mathcal{C}} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \, \mathrm{d}\mathcal{C} \,, \tag{7.45}$$

причём при взгляде с выбранной стороны поверхности $\mathcal{S}$ обход границы $\mathcal{C}$ совершается против хода часовой стрелки (поток ротора векторного поля через незамкнутую поверхность равен циркуляции этого же поля вдоль границы поверхности; см. пояснение 7.4 на с. 235). □

Замечание 7.7. Приведём P, Q, R-разновидности формулы *Стокса* (7.45), записанные с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left[\nu_x \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \nu_y \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \nu_z \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{S} = \oint\limits_{\mathcal{C}} \Big(\tau_x P + \tau_y Q + \tau_z R \Big) \, \mathrm{d}\mathcal{C} \,; \tag{7.46}$$

2) второго рода

$$\iint\limits_{\mathcal{S}} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = \oint\limits_{\mathcal{C}} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y + R \, \mathrm{d}z \,, \tag{7.47}$$

где P, Q, R — непрерывно дифференцируемые в окрестности двухсторонней поверхности $\mathcal{S}$ функции переменных x, y, z. $\square$

Замечание 7.8. Приведём полезную для дальнейшего изложения двухмерную запись P, Q, R-разновидности формулы *Стокса* (7.46), (7.47). Пусть векторное поле есть двумерное: $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (P, Q, 0)$ и заданное в области $\mathcal{D}$ на плоскости: $\boldsymbol{r} = (x, y, 0)$, $(x, y) \in \mathcal{D}$. Тогда из трёх компонентов ротора (7.23) этого поля отличен от нуля только один

$$\big(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big)_x = 0\,, \qquad \big(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big)_y = 0\,, \qquad \big(\mathtt{rot}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big)_x = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\,,$$

при условии, что P, Q — непрерывно дифференцируемые в области $\mathcal{D}$ функции переменных x, y.

Далее учтём, что за контур $\mathcal{C}$ в формуле *Стокса* (7.45) можно взять границу области $\mathcal{C}$, а за ограниченную контуром поверхность $\mathcal{S}$ — область $\mathcal{D}$. Орт нормали к этой поверхности имеет только один отличный от нуля компонент: $\boldsymbol{\nu} = (0, 0, +1)$, а касательный орт к контуру имеет два отличных от нуля компонента: $\boldsymbol{\tau} = (\tau_x, \tau_y, 0)$, причём направление орта $\boldsymbol{\tau}$ выбрано с учётом правила обхода области.

Теперь подставим все величины либо в векторную запись (7.45), либо в P, Q, R-разновидности (7.46), (7.47) формулы *Стокса*, чтобы получить двухмерную формулу, записанную с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}\mathcal{D} = \oint\limits_{\mathcal{C}} \Big(\tau_x P + \tau_y Q\Big)\, \mathrm{d}\mathcal{C}\,; \tag{7.48}$$

2) второго рода

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_{\mathcal{C}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y\,, \tag{7.49}$$

известную в действительном анализе как формула *Грина*.

Наблюдателю, движущемуся вдоль контура $\mathcal{C}$, достаточно повернуть касательный орт $\boldsymbol{\tau}$ на угол 90° по часовой стрелке в плоскости переменных (x, y) (нужно ли для этого наблюдателю «выйти» в пространство $\mathbb{R}^3$ над плоскостью?), чтобы получить орт внешней нормали к контуру: $\nu_x = +\tau_y$, $\nu_y = -\tau_x$ (мы приняли обозначение $\boldsymbol{\nu}$ для орта внешней нормали к контуру $\mathcal{C}$, полагая, что путаницы с обозначениями не будет, поскольку работу с пространственной формулой *Стокса* (7.45) мы закончили). С помощью орта $\boldsymbol{\nu}$ перепишем двухмерную формулу *Стокса* с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}\mathcal{D} = \oint\limits_{\mathcal{C}} \Big(\nu_x Q - \nu_y P\Big)\, \mathrm{d}\mathcal{C}\,; \tag{7.50}$$

2) второго рода

$$\iint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint\limits_{\mathcal{C}} Q\,\mathrm{d}x - P\,\mathrm{d}y\,. \tag{7.51}$$

Мы обратимся к формулам (7.50), (7.51) в разделе 7.4., при выводе двухмерных вспомогательных формул *Грина*. $\square$

Теорема 7.2. *Пусть*: 1) $\mathcal{D}$ — ограниченная, в том числе и многосвязная, область с границей $\mathcal{S}$, состоящей из замкнутых кусочно-гладких поверхностей; 2) $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})$ — орт внешней нормали к $\mathcal{S}$; 3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ — векторное поле, непрерывно дифференцируемое в замыкании области $\mathcal{D}$, *тогда* справедлива интегральная формула *Остроградского – Гаусса*

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \nabla \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S}\,, \tag{7.52}$$

(обильность векторного поля в ограниченной области равна потоку этого же поля через границу области; см. пояснение 7.5 на с. 235). □

Замечание 7.9. Теорема 7.2 верна и в случае поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, непрерывного в замыкании области $\mathcal{D}$ и непрерывно дифференцируемого в области $\mathcal{D}$, если интеграл в левой части формулы (7.52) сходится как несобственный. □

Замечание 7.10. Приведём P, Q, R-разновидности формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52), записанные с помощью криволинейных интегралов:

1) первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(\nu_x P + \nu_y Q + \nu_z R\right) \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{7.53}$$

2) второго рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z = \oiint\limits_{\mathcal{S}} P\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}z + Q\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}z + R\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{7.54}$$

где P, Q, R — непрерывно дифференцируемые в замыкании области $\mathcal{S}$ функции переменных x, y, z. □

Теорема 7.3. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ есть векторное поле, непрерывно дифференцируемое в *поверхностно-односвязной* области $\mathcal{D}$, *тогда* каждое из следующих двух условий:

1) в области $\mathcal{D}$ существует потенциальная функция (потенциал) $u(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nabla u(\boldsymbol{r})\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}\,; \tag{7.55}$$

2) векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ является безвихревым

$$\nabla \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{0}\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}\,, \tag{7.56}$$

есть *необходимое* и *достаточное* для потенциальности векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (см. пояснение 7.6 на с. 235) □

Теорема 7.4. *Пусть* $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ есть векторное поле, непрерывно дифференцируемое в *пространственно-односвязной* области $\mathcal{D}$, *тогда* тождество

$$\nabla \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = 0\,, \qquad \boldsymbol{r} \in \mathcal{D}\,, \tag{7.57}$$

есть *необходимое* и *достаточное условие* соленоидальности векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в области $\mathcal{D}$ (см. пояснение 7.7 на с. 235). □

Если векторное поле имеет представление $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{c}$, где $u(\boldsymbol{r})$ — скалярное поле, непрерывно дифференцируемое в замыкании области $\mathcal{D}$, $\boldsymbol{c}$ — постоянный вектор, *тогда* формула *Остроградского – Гаусса* (7.52) принимает вид

$$\left(\iiint\limits_{\mathcal{D}} \nabla u(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{D} - \oiint\limits_{\mathcal{S}} u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S}\right)\cdot \boldsymbol{c} = 0\,.$$

Отсюда заключаем, в силу произвольности постоянного вектора $\boldsymbol{c}$, что при посылках теоремы 7.2 верна следующая интегральная формула

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \nabla u(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{7.58}$$

Для постоянного скалярного поля $u(\boldsymbol{r}) = \mathtt{const}$ из последней получим известный в действительном анализе вывод о том, что *вектор замкнутой поверхности равен нулю*

$$\oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S} = 0\,. \tag{7.59}$$

Интегральные формулы *Стокса* (7.46), *Остроградского – Гаусса* (7.52) и следствия из них позволяют ввести *инвариантные*, то есть независящие от выбора системы координат определения дифференциальных операторов теории поля:

$$\nabla\, u(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{D}} = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{D}\to 0} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \oiint\limits_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{D}} u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S}\,, \tag{7.60}$$

$$\nabla\cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{D}} = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{D}\to 0} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \oiint\limits_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{D}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S}\,, \tag{7.61}$$

$$\nabla\times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{S}} = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{C}\to 0} \frac{1}{|\mathcal{S}|} \oint\limits_{\mathcal{C}=\partial\mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{C}\,. \tag{7.62}$$

Дифференциальный оператор *Лапласа*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{7.63}$$

также допускает инвариантное определение

$$\Delta u(\boldsymbol{r})\Big|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0\in\mathcal{D}} = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{D}\to 0} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\cdot\nabla u(\boldsymbol{r})\, \mathrm{d}\mathcal{S} = \lim_{\operatorname{diam}\mathcal{D}\to 0} \frac{1}{|\mathcal{D}|} \oiint\limits_{\mathcal{S}} \frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{\nu}}\, \mathrm{d}\mathcal{S}\,, \tag{7.64}$$

которое можно вывести с помощью тождества (см. задачу 7.25 на с. 234)

$$\Delta u(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot\nabla u(\boldsymbol{r}) = (\nabla\cdot\nabla)\, u(\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot(\nabla u(\boldsymbol{r}))\,.$$

Пример 7.6. Для векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (7.28) (см. пример 7.4 на с. 216) найдём условие соленоидальности.

Поскольку дивергенция векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (7.28) уже найдена, добавим к правой части выражения (7.31) необходимое и достаточное условие соленоидальности (7.57) и запишем обыкновенное дифференциальной уравнение относительно функции φ

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = -3\,\frac{\mathrm{d}|\boldsymbol{r}|}{|\boldsymbol{r}|}\,, \tag{7.65}$$

после однократного интегрирования которого получаем явное выражение функции φ

$$\varphi(|\boldsymbol{r}|) = C\,|\boldsymbol{r}|^{-3} = \frac{C}{|\boldsymbol{r}|^3}\,. \tag{7.66}$$

Полученное выражение и есть искомое условие соленоидальности векторного поля (7.28). ▲

Пример 7.7. Для векторного поля (см. пример 7.4 на с. 216 и пример 7.6)

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = C\,|\boldsymbol{r}|^{-3}\,\boldsymbol{r} = C\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} \qquad \boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^3, \tag{7.67}$$

вычислим поток через произвольную кусочно-гладкую замкнутую поверхность $\mathcal{S}$.

Суть задачи состоит в том, чтобы применить формулу *Остроградского – Гаусса* (7.52), для чего нужно вычислить дивергенцию векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (7.67). В примере 7.6 поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (7.67) было построено из условия соленоидальности, поэтому вычисление левой части формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52) представляется простым. Это не совсем так. У векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (7.67) есть особая точка $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$, где оно не определено.

Выполним вычисление величины $\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, подтверждающее соленоидальность поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$,

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 3C\,|\boldsymbol{r}|^{-3} - 3C|\boldsymbol{r}|^{-4}\,\frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2}{|\boldsymbol{r}|} = 0\,, \qquad \boldsymbol{r}\neq\boldsymbol{0}\,. \tag{7.68}$$

Поэтому результат вычисления левой части формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52) зависит от того, находится ли особая точка $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ в области $\mathcal{D}$ или вне её (иначе — находится ли особая точка $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ внутри замкнутой поверхности $\mathcal{S}=\partial\mathcal{D}$ или вне её).

Если особая точка $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$ находится вне области $\mathcal{D}$, то

$$\int\limits_{\mathcal{D}} \nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\;\mathrm{d}\mathcal{D} \overset{(7.68)}{=} 0\,. \tag{7.69}$$

Если особая точка находится в области $\mathcal{D}$, построим шар $\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{0})\subset\mathcal{D}$. В области $\mathcal{D}_\varepsilon = \mathcal{D}\backslash\overline{\mathcal{B}_\varepsilon(\boldsymbol{0})}$ векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ не имеет особых точек, поэтому возможно применение формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52)

$$0 = \int\limits_{\mathcal{D}_\varepsilon} \nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\;\mathrm{d}\mathcal{D} = \oint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\;\mathrm{d}\mathcal{S} + \oint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{0})} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\;\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon\,. \tag{7.70}$$

Непосредственно вычислить первый интеграл в правой части (7.70) нельзя, из-за произвольности поверхности $\mathcal{S}$, поэтому сосредоточимся на вычислении второго интеграла — потока поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ через сферу $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{0})$. На последней имеем: $\boldsymbol{\nu} = -|\boldsymbol{r}|^{-1}\,\boldsymbol{r} = -\varepsilon^{-1}\,\boldsymbol{r}$ (внешняя к сфере $\mathcal{S}_\varepsilon(\boldsymbol{0})$ нормаль направлена к особой точке!), но тогда подынтегральная функция постоянна и равна

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -\varepsilon^{-1}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a} = -C\,\varepsilon^{-1}\varepsilon^{-3}\,\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r} = -C\,\varepsilon^{-4}\,\varepsilon^2 = -C\,\varepsilon^{-2}. \tag{7.71}$$

Следовательно,

$$\oint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{0})} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon = -C\,\varepsilon^{-2}\oint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{0})}\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon = -C\,\varepsilon^{-2}\,\varepsilon^2\,4\pi = -4\pi\,C\,, \tag{7.72}$$

где 4π — площадь поверхности шара единичного радиуса, причём значение интеграла не зависит от ε.

Из равенства (7.70) заключим, что если особая точка находится внутри области $\mathcal{D}$, то

$$\oint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathcal{S} = -\oint\limits_{\mathcal{S}_\varepsilon(\mathbf{0})} \boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\mathcal{S}_\varepsilon = 4\pi\,C\,. \tag{7.73}$$

Рассмотренный способ вычисления интегралов основан на вырезании особых точек поля. ▲

7.3. Дифференциальные операторы теории поля в криволинейных ортогональных координатах

Пусть пространство $\mathbb{R}^3$ параметризовано с помощью декартовой ортогональной системы координат, то есть $\boldsymbol{r} = \big(x_1, x_2, x_3\big)$. Рассмотрим параметризацию пространства с помощью системы криволинейных координат $\boldsymbol{q} = \big(q_1, q_2, q_3\big)$

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{q}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x_1 = \phi_1(q_1, q_2, q_3), \\ x_2 = \phi_2(q_1, q_2, q_3), \\ x_3 = \phi_3(q_1, q_2, q_3), \end{cases} \tag{7.74}$$

причём зависимость (7.74) будем полагать обратимой

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} q_1 = \psi_1(x_1, x_2, x_3), \\ q_2 = \psi_2(x_1, x_2, x_3), \\ q_3 = \psi_3(x_1, x_2, x_3), \end{cases} \tag{7.75}$$

то есть якобианы прямого (7.75)

$$J = \left|\frac{\partial\big(\psi_1, \psi_2, \psi_3\big)}{\partial\big(x_1, x_2, x_3\big)}\right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2} & \dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \tag{7.76}$$

и обратного (7.74)

$$I = \left| \frac{\partial\big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big)}{\partial\,\big(q_1, q_2, q_3\big)} \right| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_2} & \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial q_3} \end{vmatrix} \tag{7.77}$$

преобразований отличны от нуля и бесконечности, тогда $J(\boldsymbol{r})\, I(\boldsymbol{q}) = 1$, за исключением разве что отдельных точек или линий (особых точек или линий преобразований (7.74) и (7.75)).

Пусть система координат $\boldsymbol{q}$ есть ортогональная, это значит, что «подвижные» базисные векторы $\boldsymbol{e}_1(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{e}_2(\boldsymbol{q})$, $\boldsymbol{e}_3(\boldsymbol{q})$ в каждой точке $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^3$ подчинены условиям

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_2} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_2} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_2} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_2} = 0\,, \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_1} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_3} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_3} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_3} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_1} \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_3} = 0\,, \\ \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_2} \cdot \dfrac{\partial \boldsymbol{\phi}}{\partial q_3} = \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_2} \dfrac{\partial \phi_1}{\partial q_3} + \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_2} \dfrac{\partial \phi_2}{\partial q_3} + \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_2} \dfrac{\partial \phi_3}{\partial q_3} = 0\,. \end{cases} \tag{7.78}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \mathrm{d}x_2^2 + \mathrm{d}x_3^2 = \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_2} \mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \phi_1}{\partial q_3} \mathrm{d}q_3 \right)^2 + {} \\ + \left(\frac{\partial \phi_2}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \phi_2}{\partial q_2} \mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \phi_2}{\partial q_3} \mathrm{d}q_3 \right)^2 + {} \\ + \left(\frac{\partial \phi_3}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \phi_3}{\partial q_2} \mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \phi_3}{\partial q_3} \mathrm{d}q_3 \right)^2 \overset{(??)}{=} \\ = H_1^2\, \mathrm{d}q_1^2 + H_2^2\, \mathrm{d}q_2^2 + H_3^2\, \mathrm{d}q_3^2\,, \end{aligned} \tag{7.79}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_1^2 = \left(\frac{\partial x_1}{\partial q_1} \mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \mathrm{d}q_3 \right)^2 = \\ = \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_1}\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x_1}{\partial q_3} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}\, \mathrm{d}q_3\, \mathrm{d}q_3 + {} \\ + 2\, \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_2}\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2 + 2\, \frac{\partial x_1}{\partial q_1} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_3 + 2\, \frac{\partial x_1}{\partial q_2} \frac{\partial x_1}{\partial q_3}\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3 \end{aligned} \tag{7.80}$$

где функции $H_1(q_1, q_2, q_3)$, $H_2(q_1, q_2, q_3)$, $H_3(q_1, q_2, q_3)$ — коэффициенты *Ламе*:

$$\begin{cases} H_1^2 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial q_1}\right)^2, \\ H_2^2 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial q_2}\right)^2, \\ H_3^2 = \left(\dfrac{\partial x_1}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_2}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial x_3}{\partial q_3}\right)^2, \end{cases} \tag{7.81}$$

$$\Delta u(q_1^*, q_2^*, q_3^*) = \frac{1}{|\mathcal{D}|} \oiint\limits_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\nu} \cdot \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}} \, \mathrm{d}\mathcal{S}\,, \qquad (q_1^*, q_2^*, q_3^*) \in \mathcal{D}\,. \tag{7.82}$$

$$\Delta_{(q_1,\,q_2,\,q_3)} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\right)\right]. \tag{7.83}$$

Пример 7.8. В (круговой) цилиндрической системе координат имеем $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos\varphi\,, \\ x_2 = r\sin\varphi\,, \\ x_3 = z\,, \end{cases} \tag{7.84}$$

где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, коэффициенты *Ламе* суть

$$\begin{cases} H_1 = r\cos\varphi\,, \\ H_2 = r\sin\varphi\,, \\ H_3 = z\,, \end{cases} \tag{7.85}$$

и оператор *Лапласа* принимает вид

$$\Delta_{(r,\,\varphi,\,z)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\,. \tag{7.86}$$

В особой точке $r = 0$ преобразования (7.84) оператор Лапласа (**??**) не может быть записан. ▲

Пример 7.9. В полярной системе координат имеем $q_1 = r, q_2 = \varphi$:

$$\begin{cases} x = r\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ y = r\,\mathtt{sin}\,\varphi\,, \end{cases} \tag{7.87}$$

где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, коэффициенты *Ламе* суть

$$\begin{cases} H_1 = r\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ H_2 = r\,\mathtt{sin}\,\varphi\,, \end{cases} \tag{7.88}$$

и оператор *Лапласа*

$$\Delta_{(r,\,\varphi)} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\,. \tag{7.89}$$

получается из (7.86) исключением производной по z ▲

Пример 7.10. В сферической системе координат имеем $q_1 = r$, $q_2 = \psi$, $q_3 = \varphi$:

$$\begin{cases} x = r\,\mathtt{sin}\,\psi\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ y = r\,\mathtt{sin}\,\psi\,\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ z = r\,\mathtt{cos}\,\psi\,, \end{cases} \tag{7.90}$$

где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \psi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, коэффициенты *Ламе* суть

$$\begin{cases} H_1 = r\mathtt{cos}\,\varphi\,, \\ H_2 = r\mathtt{sin}\,\varphi\,, \\ H_3 = z\,, \end{cases} \tag{7.91}$$

и оператор *Лапласа* принимает вид

$$\Delta_{(r,\,\psi,\,\varphi)} = \frac{1}{r^2\mathtt{sin}\,\psi}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\mathtt{sin}\,\psi\,\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \psi}\left(\mathtt{sin}\,\psi\,\frac{\partial}{\partial \psi}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\mathtt{sin}\,\psi}\,\frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\right]\cdot \tag{7.92}$$

В особых точках $r = 0$ и $\psi = 0, \pi$ преобразования (7.90) оператор *Лапласа* (**??**) не может быть записан. ▲

7.4. Вспомогательные интегральные формулы *Грина*

Рассмотрим набор полезных для дальнейшего изложения следствий формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52). *Пусть* векторное поле представимо в таком виде

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})\,\nabla v(\boldsymbol{r})\,,$$

или для компонентов векторного поля

$$a_x = u\,\frac{\partial v}{\partial x}\,, \quad a_y = u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,, \quad a_z = u\,\frac{\partial v}{\partial z}\,,$$

где скалярное поле $u(\boldsymbol{r})$ есть непрерывно дифференцируемое, а скалярное поле $v(\boldsymbol{r})$ — дважды непрерывно дифференцируемое в замыкании области $\mathcal{D}$, *тогда* имеем для подынтегральной функции в левой части формулы *Остроградского – Гаусса*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) =$$
$$= \big(\nabla u(\boldsymbol{r})\big)\cdot\big(\nabla v(\boldsymbol{r})\big) + u(\boldsymbol{r})\,\Delta v(\boldsymbol{r}) = (\nabla u)\cdot(\nabla v) + u\,\Delta v\,,$$

а также для подынтегральной функции в правой части

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nu_x a_x + \nu_y a_y + \nu_z a_z = u\left(\nu_x\,\frac{\partial v}{\partial x} + \nu_y\,\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z\,\frac{\partial v}{\partial z}\right) =$$

$$= u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{r})\cdot\nabla v(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})\,\frac{\partial v(\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{\nu}} = u\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\cdot$$

Подставив полученные выражения соответственно в левую и правую части формулы *Остроградского – Гаусса* (7.52) получим *первую формулу Грина*

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\Big[(\nabla u)\cdot(\nabla v) + u\,\Delta v\Big]\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} u\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{7.93}$$

Поменяв в представлении векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ функции $u(\boldsymbol{r})$ и $v(\boldsymbol{r})$ местами

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = v(\boldsymbol{r})\,\nabla u(\boldsymbol{r})$$

получим ещё одну запись *первой формулы Грина*

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\Big[(\nabla v)\cdot(\nabla u) + v\,\Delta u\Big]\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} v\,\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{7.94}$$

Очевидно, что в первой формуле *Грина* можно за функцию $v(\boldsymbol{r})$ взять функцию $u(\boldsymbol{r})$, тогда получим такую запись формулы

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\Big[(\nabla u)^2 + u\,\Delta u\Big]\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}} u\,\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\,\mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{7.95}$$

Разность первых формул *Грина* (7.93), (7.94) порождает *вторую формулу Грина*

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\Big(u\,\Delta v - v\,\Delta u\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{D} = \oiint\limits_{\mathcal{S}}\left(u\,\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}} - v\,\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}\,. \tag{7.96}$$

Первая (7.93), (7.94) и вторая (7.96) формулы *Грина* называются ещё (первой и второй) *вспомогательными* формулами *Грина*.

Замечание 7.11. Покажем, как вывести вспомогательные формулы *Грина*, исходя из (P, Q, R)-вида формулы *Остроградского – Гаусса* (7.53), (7.54):

1) примем, что функции P, Q, R имеют следующее представление

$$P = u\,\frac{\partial v}{\partial x}\,,\qquad Q = u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,,\qquad R = u\,\frac{\partial v}{\partial z}\,;$$

2) найдём производные функций P, Q, R соответственно по переменным x, y, z:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + u\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + u\,\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\,,$$

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z} + u\,\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\,;$$

3) подставим функции P, Q, R в подынтегральное выражение правой части формулы *Остроградского – Гаусса* (7.53)

$$\nu_x\, P + \nu_y\, Q + \nu_z\, R = \nu_x u\,\frac{\partial v}{\partial x} + \nu_y u\,\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z u\,\frac{\partial v}{\partial z} = \\ = u\left(\nu_x\,\frac{\partial v}{\partial x} + \nu_y\,\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

и формулы *Остроградского – Гаусса* (7.54)

$$P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = u\,\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + u\,\frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + u\,\frac{\partial v}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ = u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right),$$

а найденные производные функций P, Q, R — в подынтегральное выражение левой части формулы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right);$$

4) запишем полученый вид *первой вспомогательной* интегральной формулы *Грина*:

а) первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}\mathcal{D} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\mathcal{S}} u\left(\nu_x\,\frac{\partial v}{\partial x} + \nu_y\,\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z\,\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}\,;$$

б) второго рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\,\frac{\partial v}{\partial z} + u\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint\limits_{\mathcal{S}} u\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).$$

Меняя местами функции u и v запишем ещё один вид *первой вспомогательной* формулы *Грина*:

а) первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial z} + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}\mathcal{D} = \oint\!\!\!\oint\limits_{\mathcal{S}} v\left(\nu_x\,\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_y\,\frac{\partial u}{\partial y} + \nu_z\,\frac{\partial u}{\partial z}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}\,;$$

б) второго рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\,\frac{\partial u}{\partial z} + v\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \oint\!\!\!\oint\limits_{\mathcal{S}} v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right).$$

Полученные виды первой вспомогательной формулы *Грина* трудно читаемы, также трудно читаема разность этих видов:

а) первого рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{D} =$$

$$= \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left[u \left(\nu_x \frac{\partial v}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial v}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - v \left(\nu_x \frac{\partial u}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial u}{\partial y} + \nu_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{S}$$

или

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{D} =$$

$$= \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left[\nu_x \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \nu_y \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \nu_z \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \mathrm{d}\mathcal{S}\,;$$

б) второго рода

$$\iiint\limits_{\mathcal{D}} \left[u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z =$$

$$= \oiint\limits_{\mathcal{S}} \left(u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} \right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \left(u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \left(u \frac{\partial v}{\partial z} - v \frac{\partial u}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

называемая *второй вспомогательной* формулой *Грина.*

Введение оператора *Лапласа* и понятия производной функции по направлению существенно упрощает обе вспомогательные формулы *Грина* и приводит их к ранее полученным видам (7.93), (7.94), (7.96). □

7.5. Приложения дифференциальных операторов теории поля

7.6. Задачи

К разделу 7.1. на с. 210

Задача 7.1. Доказать векторное тождество:

1) $\nabla \cdot \big(u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big) = (\nabla u(\boldsymbol{r})) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) + u(\boldsymbol{r})\,(\nabla \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}))\,;$

2) $\nabla \times \big(u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big) = \big(\nabla u(\boldsymbol{r})\big) \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) + u(\boldsymbol{r})\,(\nabla \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}))\,;$

3) $\Delta u(\boldsymbol{r}) = (\nabla \cdot \nabla)\,u(\boldsymbol{r}) = \nabla \cdot (\nabla u(\boldsymbol{r}))\,;$

4) $\Delta \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}))\,,$

где $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, $u(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ суть непрерывно дифференцируемые соответственно скалярное и векторное поля.

Решение. Будем исходить из того, что векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в декартовой ортогональной системе координат имеет компоненты $\big(a_1, a_2\,\ldots, a_n\big)$, тогда $u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ есть векторное поле, компоненты которого суть $\big(ua_1, ua_2\,\ldots, ua_n\big)$.

1) Запишем левую часть первого тождества с помощью определения оператора дивергенции, затем применим правило *Лейбница* для производной произведения двух функций и выполним очевидную группировку слагаемых

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \big(u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big) &= \frac{\partial u a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u a_n}{\partial x_n} = \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\,a_1 + u\,\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\,a_2 + u\,\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\right) + \cdots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\,a_n + u\,\frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right) = \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\,a_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\,a_2 + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\,a_n\right) + u\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\right).
\end{aligned}
$$

Теперь применим определения скалярного произведения векторных полей и дивергенции векторного поля, после чего заключим, что правая часть полученной цепочки равенств совпадает с правой частью первого тождества.

2) Подобно первому тождеству, запишем левую часть второго тождества с помощью определения ротора векторного поля и найдём производные произведения двух функций по правилу *Лейбница*

$$
\begin{aligned}
\nabla \times \big(u(\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})\big) &= \left(\frac{\partial u a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u a_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial u a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u a_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}_2 + \left(\frac{\partial u a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u a_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{i}_3 = \\
&= \left[\left(a_3\,\frac{\partial u}{\partial x_2} - a_2\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) + u\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\right]\boldsymbol{i}_1 + \\
&= \left[\left(a_1\,\frac{\partial u}{\partial x_3} - a_3\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + u\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\right]\boldsymbol{i}_2 + \\
&= \left[\left(a_2\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - a_1\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + u\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\right]\boldsymbol{i}_3 = \\
&= \left(a_3\,\frac{\partial u}{\partial x_2} - a_2\,\frac{\partial u}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(a_1\,\frac{\partial u}{\partial x_3} - a_3\,\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}_2 + \left(a_2\,\frac{\partial u}{\partial x_1} - a_1\,\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{i}_3 + \\
&+ u\left[\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\boldsymbol{i}_1 + \left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\boldsymbol{i}_2 + \left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\boldsymbol{i}_3\right].
\end{aligned}
$$

Теперь применим определения векторного произведения векторных полей и ротора векторного поля, откуда следует, что правая часть полученной цепочки равенств совпадает с правой частью второго тождества.

Оба векторных тождества суть не что иное, как векторные формы записи правила дифференцирования *Лейбница.* ▲

Задача 7.2. Дано скалярное поле $u(\boldsymbol{r})$:

1) $u = \varphi(|\boldsymbol{r}|)$;
2) $u = \varphi(|\boldsymbol{r}|^2)$;
3) $u = \boldsymbol{r} \cdot \nabla\varphi(|\boldsymbol{r}|)$;
4) $u = \boldsymbol{r} \cdot \nabla\varphi(|\boldsymbol{r}|^2)$;
5) $u = |\boldsymbol{r}|^2\,$;
6) $u = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}\,$;
7) $u = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\varphi(|\boldsymbol{r}|)$;
8) $u = \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r}\,\varphi(|\boldsymbol{r}|^2)$;
9) $u = \mathtt{ln}\,|\boldsymbol{r}|\,$;
10) $u = \mathtt{ln}\,|\boldsymbol{r}|^2\,$;
11) $u = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \cdot (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r})\,$;
12) $u = \boldsymbol{r} \cdot \nabla\varphi(|\boldsymbol{r}|^2)\,$;
13) $u = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}) \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{e})\,$;
14) $u = \varphi(|\boldsymbol{r}|^2)$;
15) $u = \varphi\big((\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{e}\big)\,$;
16) $u = \varphi\big(\boldsymbol{e} \cdot (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c})\big)\,$.

где $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, φ — непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}$ суть постоянные векторы. Найти: *а*) область определения поля; *б*) градиент поля; *в*) область определения градиента.

Решение. ▲

Задача 7.3. Дано векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$:

1) $\boldsymbol{a} = \varphi\,(|\boldsymbol{r}|^2)\,\boldsymbol{r}\,$;
2) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}\,$;
3) $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}\,$;
4) $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{r}|^2\,\boldsymbol{r}\,$;
5) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}\,$;
6) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}\,$;
7) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{c}\,$;
8) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{r})\,\boldsymbol{e}\,$;
9) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{r}\,$;
10) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{c}\,$;
11) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{e}\,$;
12) $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{r}|^2\,\boldsymbol{c}\,$;
13) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{r}) \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{r})\,$;
14) $\boldsymbol{a} = \varphi(|\boldsymbol{r}|^2)\,\boldsymbol{r}\,$;
15) $\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{r} + \boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{e})\,$;
16) $\boldsymbol{a} = \nabla \times (\varphi\,(|\boldsymbol{r}|^2)\,\boldsymbol{r})$.

где $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3$, φ — непрерывно дифференцируемая функция скалярного аргумента, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}$ суть постоянные векторы. Найти: *а*) область определения поля; *б*) дивергенцию поля; *в*) область определения дивергенции.

Решение. ▲

Задача 7.4. Дано векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ (см. задачу 7.3). Найти: *а*) область определения поля; *б*) ротор поля; *в*) область определения ротора.

Решение. ▲

К разделу 7.2. на с. 217

Задача 7.5. Доказать, что векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = u(\boldsymbol{r})\nabla u(\boldsymbol{r})$ — бехвихревое.

Задача 7.6. Доказать, что если векторные поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ — бехвихревые, то векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})$ — соленоидальное.

Задача 7.7. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ через любую замкнутую кусочно-гладкую поверхность.

Задача 7.8. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{r}$ по любой замкнутой кусочно-гладкой кривой.

Задача 7.9. Вычислить циркуляцию векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = -x_2\,\boldsymbol{i}_1 + x_1\boldsymbol{i}_2$ по окружности радиуса R в плоскости $x_3 = 0$ с центром в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Задача 7.10. Вычислить циркуляцию векторного поля

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (x_1x_2 + 1)\,\boldsymbol{i}_1 + (\frac{1}{2}\,x_1^2 + x_1 + 2)\,\boldsymbol{i}_2$$

по окружности радиуса R в плоскости $x_3 = 0$ с центром в точке $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$.

Задача 7.11. Доказать соленоидальность векторного поля:

1) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \nabla u(\boldsymbol{r}) \times \nabla v(\boldsymbol{r})$;
2) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = 3\,x_2^4\,x_3^2\,\boldsymbol{i}_1 + 4\,x_1^3\,x_3^2\,\boldsymbol{i}_2 - 3\,x_1x_2^2\,\boldsymbol{i}_3$;
3) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (6\,x_1x_2 + x_3^3)\,\boldsymbol{i}_1 + (3\,x_1^2 - x_3)\,\boldsymbol{i}_2 + (3\,x_1x_3^2 - x_2)\,\boldsymbol{i}_3$.

Задача 7.12. Вычислить поток векторного поля $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = x_1x_3\,\boldsymbol{i}_1 - x_2^2\,\boldsymbol{i}_2 + x_2x_3\,\boldsymbol{i}_3$ через поверхность единичного куба, ограниченного плоскостями: $x_1 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_3 = 1$.

Задача 7.13. Вычислить поток ротора векторного поля

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = (x_1^2 + x_2 - 4)\,\boldsymbol{i}_1 + 3\,x_1x_2\,\boldsymbol{i}_2 + (2\,x_1x_3 + x_3^2)\,\boldsymbol{i}_3$$

через поверхность полусферы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 16$, находящейся над плоскостью $x_3 = 0$.

Задача 7.14. Вывести из инвариантного определения градиента скалярного поля (7.60) выражение для оператора градиента в декартовой ортогональной системе координат в $\mathbb{R}^3$.

Задача 7.15. Вывести из инвариантного определения дивергенции векторного поля (7.61) выражение для оператора дивергенции в декартовой ортогональной системе координат в $\mathbb{R}^3$.

Задача 7.16. Вывести из инвариантного определения ротора векторного поля (7.62) выражение для оператора ротора в декартовой ортогональной системе координат в $\mathbb{R}^3$.

Задача 7.17. Вывести из инвариантного определения оператора *Лапласа* для скалярного поля (7.64) выражение для оператора *Лапласа* в декартовой ортогональной системе координат в $\mathbb{R}^3$.

К разделу 7.3. на с. 224

Задача 7.18. Вывести выражения (7.88) для коэффициентов *Ламе* в полярной системе координат (7.87).

Задача 7.19. Вывести выражения (7.85) для коэффициентов *Ламе* в (круговой) цилиндрической системе координат (7.84).

Задача 7.20. Вывести выражения (7.91) для коэффициентов *Ламе* в сферической системе координат (7.90).

Задача 7.21. Вывести выражение (**??**) для оператора *Лапласа* в полярной системе координат (7.87).

Задача 7.22. Вывести выражение (7.86) для оператора *Лапласа* в (круговой) цилиндрической системе координат (7.84).

Задача 7.23. Вывести выражение (7.92) для оператора *Лапласа* в сферической системе координат (7.90).

К разделу 7.4. на с. 227

Задача 7.24. Вывести инвариантное определение оператора *Лапласа* для скалярного поля из первой (7.93), (7.94) и второй (7.96) формул *Грина* в $\mathbb{R}^3$ (порознь).

Задача 7.25. Вывести инвариантное определение оператора *Лапласа* для скалярного поля в $\mathbb{R}^3$, используя третье тождество задачи 7.1.

7.7. Пояснения

К разделу 7.1. на с. 210

Пояснение 7.1 к с. 210. Основные понятий теории поля изложены в книгах *Борисенко* [12], *Будака* [14], *Зорича* [20], *Ильина* [22], *Лаптева* [28] и *Фихтенгольца* [59]. ▼

Пояснение 7.2 к с. 210.

▼

К разделу 7.2. на с. 217

Пояснение 7.3 к с. 210. Вывод интегральных формул *Стокса* и *Остроградского – Гаусса* приведён в книгах *Борисенко* [12], *Будака* [14], *Зорича* [20], *Ильина* [22], *Лаптева* [28] и *Фихтенгольца* [59]. ▼

Пояснение 7.4 к с. 219.

▼

Пояснение 7.5 к с. 220.

▼

Пояснение 7.6 к с. 221.

▼

Пояснение 7.7 к с. 221.

▼

К разделу 7.3. на с. 224

Пояснение 7.8 к с. 210.

▼

К разделу 7.4. на с. 227

Пояснение 7.9 к с. 210. Вывод первой и второй (вспомогательные) интегральных формул *Грина* приведён в книге *Тихонова* [53]. ▼

Пояснение 7.10 к с. **??**. Первую и вторую (вспомогательные) формулы *Грина* не следует смешивать с формулой *Грина* — записью в $\mathbb{R}^2$ формулы *Стокса*). ▼

8. Приложение. Ряды *Фурье*

8.0. $\Pi\rho o\lambda\varepsilon\gamma \acute{o}\mu\varepsilon\nu\alpha$

8.1. Разложение функции в ряд *Фурье*

> ... по свидетельству Римана ..., когда Фурье в 1807 г. высказал впервые теорему, что совершенно произвольно (графически) данная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда, это утверждение было так неожиданно для престарелого Лагранжа, что он решительным образом восстал против него. Возможно, это было одной из причин того, что работа Фурье 1811 г. была опубликована лишь в 1824 – 1826 гг. ... [40]

> ... коэффициенты ряда ... образуют счетное множество, в то время как „число“ значений функции гораздо больше, множество этих значений более мощное. Тем не менее Фурье имел смелость сказать, что совершенно произвольная (графически заданная) непрерывная функция может быть представлена в виде тригонометрического ряда. И это правильно, потому что (как теперь известно) непрерывные функции вовсе не так разнообразны, как это кажется на первый взгляд. Достаточно задать непрерывную функцию в *рациональных* точках чтобы определить ее полностью. Другими словами, непрерывны функции задаются совокупностью своих значений в рациональных точках. Но эти точки составляют множество такой же мощности, как и коэффициенты разложения (счетное множество). Если мы примем это во внимание, то нас уже не удивит возможность представить любую непрерывную функцию в виде ряда Фурье. [32]

Определение 8.1. *Пусть* $u(x)$ — заданная на $\mathbb{R}$ 2ℓ-периодическая функция, абсолютно интегрируемая (в собственном или несобственном смысле) на произвольном отрезке $[x_0-\ell, x_0+\ell]$, где $x_0 \in \mathbb{R}$, *тогда* тригонометрический ряд

$$u(x) \sim S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \Big(a_\mu \cos\frac{\mu\pi x}{\ell} + b_\mu \sin\frac{\mu\pi x}{\ell} \Big), \tag{8.1}$$

коэффициенты которого (коэффициенты *Фурье*) вычислены по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\ell} \int\limits_{x_0-\ell}^{x_0+\ell} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,, \quad a_\mu = \frac{1}{\ell} \int\limits_{x_0-\ell}^{x_0+\ell} u(\xi) \cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, \quad b_\mu = \frac{1}{\ell} \int\limits_{x_0-\ell}^{x_0+\ell} u(\xi) \sin\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{8.2}$$

называется *рядом Фурье* функции $u(x)$. □

Замечание 8.1. Функция $u(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$, имеет период, равный длине отрезка: $2\ell = b-a$; интегрирование в формулах (8.2) можно проводить по отрезку $[a,b]$, то есть полагая $x_0-\ell = a$, $x_0+\ell = b$, и подразумевая функцию 2ℓ-периодически продолженной на $\mathbb{R}$. □

Теорема 8.1. *Пусть* $u(x)$ — функция периода 2ℓ, кусочно-непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-\ell,+\ell]$, *тогда* её ряд *Фурье* $S(x)$ (8.1) сходится: 1) к значениям $u(x)$ в точках $x \in (-\ell,+\ell)$ непрерывности функции; 2) к полусуммам односторонних пределов $u(x-0)$ и $u(x+0)$, то есть к значениям $\frac{1}{2}\big(u(x-0)+u(x+0)\big)$ в точках $x \in (-\ell,+\ell)$ разрыва функции. □

Теорема 8.2. *Пусть* $u(x)$ — функция периода 2ℓ: 1) непрерывная на отрезке $[-\ell, +\ell]$; 2) удовлетворяющая условию $u(-\ell) = u(+\ell)$; 3) кусочно непрерывно дифференцируемая на отрезке $[-\ell, +\ell]$, *тогда* её ряд *Фурье* $S(x)$ (8.1) сходится к этой функции равномерно на отрезке $[-\ell, +\ell]$. □

Теорема 8.3. *Пусть* на отрезке $[-\ell, +\ell]$: 1) функция $u(x)$ есть непрерывно дифференцируемая ϱ раз; 2) производная функции $u(x)$ порядка $\varrho + 1$ есть кусочно непрерывная; 3) последовательные производные функции $u(x)$ до порядка ϱ включительно принимают равные значения на концах промежутка; 4) известен ряд *Фурье* (8.1) функции $u(x)$, *тогда*: 1) числовой ряд

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \mu^{\varrho} \Big(|a_\mu| + |b_\mu| \Big) , \tag{8.3}$$

сходится; 2) ряд *Фурье* можно почленно дифференцировать ϱ раз. □

8.2. Различные виды записи ряда *Фурье*

Помимо свойств, указанных в определении 8.1 и посылках теорем 8.1, 8.2 и 8.3, разлагающаяся в ряд *Фурье* функция $u(x)$ обладает и другими свойствами, вообще говоря, влияющими на коэффициенты (8.2) ряда *Фурье* и, соответственно, на ряд *Фурье* (8.1).

Рассмотрим, как изменятся формулы (8.2) для вычисления коэффициентов *Фурье* для чётной и нечётной функции $u(x)$.

Пусть $u(x)$ есть чётная функция на отрезке $[-\ell, +\ell]$: $u(x) = u(-x)$, тогда произведение функции $u(x)$ и тригонометрической функции $\cos \dfrac{\mu\pi x}{\ell}$ в формуле (8.2) для a_μ также есть чётная функция, а произведение функции $u(x)$ и тригонометрической функции $\sin \dfrac{\mu\pi x}{\ell}$ в формуле (8.2) для b_μ есть нечётная функция, следовательно, все коэффициенты b_μ суть нулевые, и ряд *Фурье* принимает вид

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \cos \frac{\mu\pi x}{\ell} , \tag{8.4}$$

где коэффициенты разложения суть

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} u(\xi)\, \mathrm{d}\xi , \qquad a_\mu = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^{\ell} u(\xi) \cos \frac{\mu\pi\xi}{\ell}\, \mathrm{d}\xi , \qquad \mu \in \mathbb{N} . \tag{8.5}$$

Пусть $u(x)$ есть нечётная функция на отрезке $[-\ell, +\ell]$: $u(x) = -u(-x)$, тогда произведение функции $u(x)$ и тригонометрической функции $\cos \dfrac{\mu\pi x}{\ell}$ в формуле (8.2) для a_μ есть также нечётная функция, а произведение функции $u(x)$ и тригонометрической функции $\sin \dfrac{\mu\pi x}{\ell}$ в формуле (8.2) для b_μ есть чётная функция, следовательно, коэффициент a_0 и все коэффициенты a_μ суть нулевые, и ряд *Фурье* принимает вид

$$u(x) = \sum_{\mu=1}^{\infty} b_\mu \, \mathtt{sin} \, \frac{\mu\pi x}{\ell} \,, \tag{8.6}$$

где коэффициенты разложения суть

$$b_\mu = \frac{2}{\ell} \int\limits_0^\ell u(\xi) \, \mathtt{sin} \, \frac{\mu\pi\xi}{\ell} \, \mathrm{d}\xi \,, \qquad \mu \in \mathbb{N} \,. \tag{8.7}$$

Представления (8.4), (8.5) и (8.6), (8.7) ряда *Фурье* соответственно для чётной и нечётной функции $u(x)$ позволяют целенаправленно управлять разложением произвольной функции $u(x)$ в ряд *Фурье*. В самом деле, пусть функция $u(x)$ задана на отрезке $[0, \ell]$. Если продолжить функцию на промежуток $[-\ell, 0)$ чётным образом, то придём к разложению в ряд *Фурье* вида (8.4), (8.5), а если продолжить нечётным образом, то — к разложению вида (8.6), (8.7).

Замечание 8.2. Если учесть, что в формулы (8.5) и (8.7) для коэффициентов ряда *Фурье* соответственно чётной и нечётной функции входят только значения последней на отрезке $[0, \ell]$, то продолжение на промежуток $[-\ell, 0)$ можно на самом деле не проводить. Достаточно только выбрать способ продолжения и применить соответствующие формулы для коэффициентов. $\square$

Теперь применим к тригонометрическим функциям в (8.1), (8.2) формулу *Эйлера*, полагая, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям разложимости в ряд *Фурье* на $[-\ell, +\ell]$:

$$\mathtt{cos} \, \frac{\mu\pi x}{\ell} = \frac{\mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi x}{\ell}} + \mathtt{e}^{-\frac{i\mu\pi x}{\ell}}}{2} \,, \qquad \mathtt{sin} \, \frac{\mu\pi x}{\ell} = \frac{\mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi x}{\ell}} - \mathtt{e}^{-\frac{i\mu\pi x}{\ell}}}{2i} \,,$$

$$\mathtt{cos} \, \frac{\mu\pi\xi}{\ell} = \frac{\mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi\xi}{\ell}} + \mathtt{e}^{-\frac{i\mu\pi\xi}{\ell}}}{2} \,, \qquad \mathtt{sin} \, \frac{\mu\pi\xi}{\ell} = \frac{\mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi\xi}{\ell}} - \mathtt{e}^{-\frac{i\mu\pi\xi}{\ell}}}{2i} \,,$$

и перегруппируем члены ряда *Фурье* (8.1)

$$u(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\mu=1}^{\infty} \left(\frac{a_\mu - ib_\mu}{2} \, \mathtt{e}^{+\frac{i\mu\pi x}{\ell}} + \frac{a_\mu + ib_\mu}{2} \, \mathtt{e}^{-\frac{i\mu\pi x}{\ell}} \right).$$

Последнее выражение допускает две формы записи, называемые *комплексной формой* ряда *Фурье*

$$u(x) = \sum_{\mu=-\infty}^{+\infty} c_\mu \, \mathtt{e}^{\mp\frac{i\mu\pi x}{\ell}} \,, \tag{8.8}$$

где коэффициенты разложения суть

$$c_\mu = \frac{1}{2\ell} \int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(\xi) \, \mathtt{e}^{\pm\frac{i\mu\pi\xi}{\ell}} \, \mathrm{d}\xi \,, \tag{8.9}$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}\,, \qquad c_{-\mu} = \frac{a_\mu \pm i b_\mu}{2}\,, \qquad c_{+\mu} = \frac{a_\mu \mp i b_\mu}{2}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \tag{8.10}$$

Выбор одной из двух форм записи совершенно произволен.

8.3. Примеры разложения функций в ряд *Фурье*

Пример 8.1. Дана функция

$$u(x) = x^2, \quad x \in [-1, +1]\,, \tag{8.11}$$

разложим её в ряд *Фурье*, периодически продолжив на $\mathbb{R}$.

Поскольку заданная функция есть чётная, то имеем дело с рядом *Фурье* вида (8.4). Вычислив соответствующие интегралы по частям, запишем коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} a_0 &= 2\int\limits_0^1 \xi^2\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{3}\,\xi^3\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\,,\\ a_\mu &= 2\int\limits_0^1 \xi^2 \cos(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\left[\xi^2\,\frac{\sin(\mu\pi\xi)}{\mu\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{\mu\pi}\int\limits_0^1 \xi\,\sin(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] =\\ &= \frac{4}{\mu\pi}\left[\xi\,\frac{\cos(\mu\pi\xi)}{\mu\pi} - \frac{1}{\mu\pi}\int\limits_0^1 \xi\,\cos(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \frac{4\,(-1)^\mu}{\mu^2\pi^2}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Итак, можем записать ряд *Фурье* функции (8.11) в таком виде

$$u(x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{(-1)^\mu}{\mu^2}\cos(\mu\pi x) = \frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos(1\pi x)}{1^2} - \frac{\cos(2\pi x)}{2^2} + \frac{\cos(3\pi x)}{3^2} - \ldots\right). \tag{8.13}$$

Графики частичных сумм ряда *Фурье* (8.13), показанные на рис. 8.1, дают представление о разложении функции (8.11) в ряд *Фурье* и о сходимости последнего. ▲

Пример 8.2. Дана функция

$$u(x) = \operatorname{sign}(x)\,x^2, \quad x \in [-1, +1]\,, \tag{8.14}$$

разложим её в ряд *Фурье*, периодически продолжив на $\mathbb{R}$.

Поскольку заданная функция есть нечётная, то имеем дело с рядом *Фурье* вида (8.6). Перед продолжением нечётной функции сузим область её определения, удалив один из концов отрезка $[-1, +1]$, например, левый. Найдём коэффициенты ряда (8.6), вычислив соответствующие интегралы по частям

$$\begin{aligned} b_\mu &= 2\int\limits_0^1 \xi^2 \sin(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\left[-\xi^2\,\frac{\cos(\mu\pi\xi)}{\mu\pi}\Big|_0^1 + \frac{2}{\mu\pi}\int\limits_0^1 \xi\,\cos(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] =\\ &= \frac{4}{\mu\pi}\left[\xi\,\frac{\cos(\mu\pi\xi)}{\mu\pi} - \frac{1}{\mu\pi}\int\limits_0^1 \xi\,\cos(\mu\pi\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \frac{4\,(-1)^\mu}{\mu^2\pi^2}\,, \qquad \mu \in \mathbb{N}\,. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Итак, можем записать ряд *Фурье* функции (8.14) в таком виде

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{2}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}(-1)^{\mu+1}\,\frac{\mu^2\pi^2 - 2}{\mu^3\pi^2}\,\sin(\mu\pi x) =\\ &= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1^2\pi^2 - 2}{1^3\pi^2}\sin(1\pi x) - \frac{2^2\pi^2 - 2}{2^3\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{3^2\pi^2 - 2}{3^3\pi^2}\sin(3\pi x) - \ldots\right). \end{aligned} \tag{8.16}$$

Графики частичных сумм ряда *Фурье* (8.16), показанные на рис. 8.2, 8.3, дают представление о разложении функции (8.14) в ряд *Фурье* и о сходимости последнего. ▲

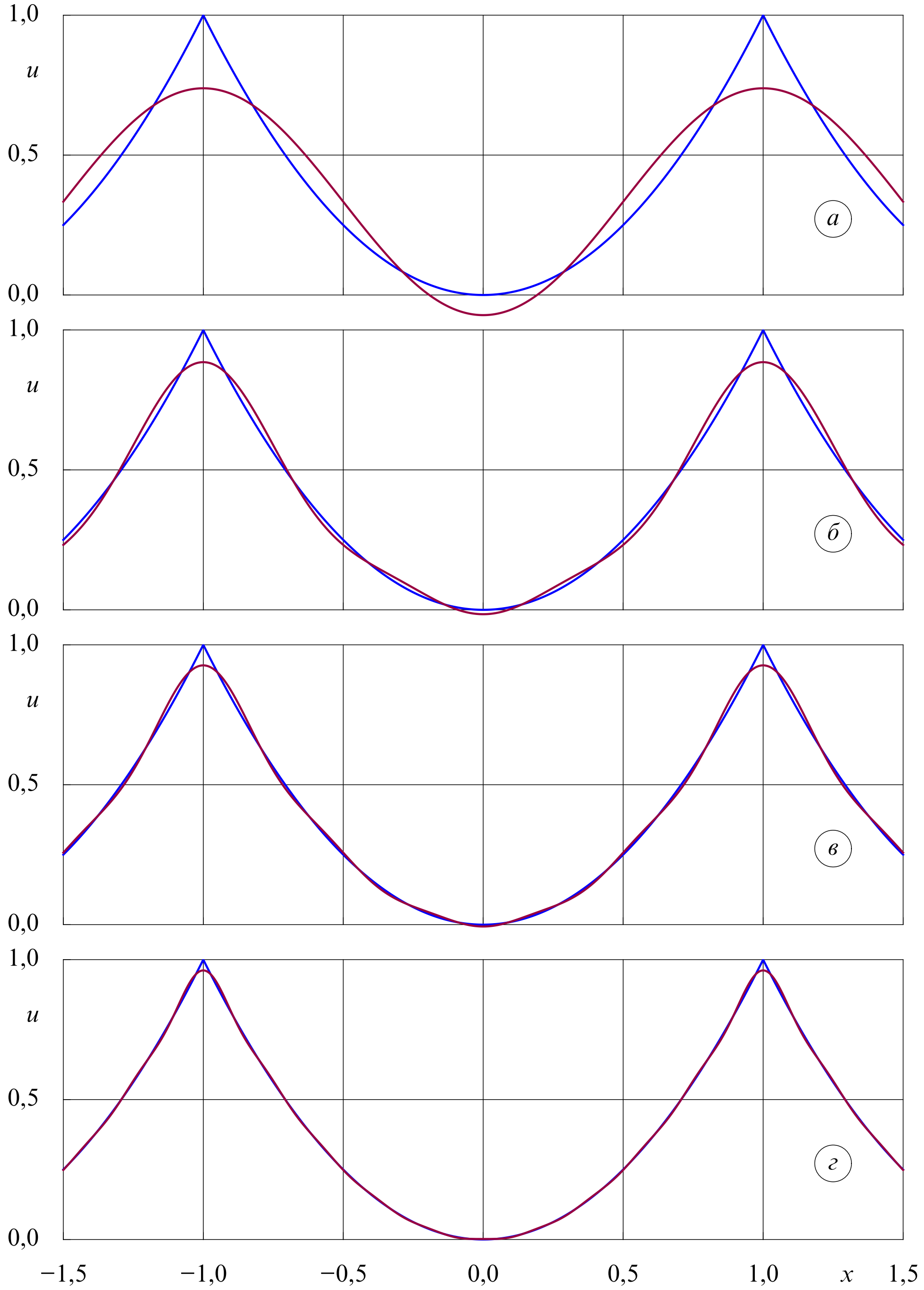

Рис. 8.1. Разложение в ряд *Фурье* (*коричневый цвет*) непрерывно-дифференцируемой функции (8.11) (непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой после периодического продолжения, *синий цвет*): 1 (*а*), 3 (*б*), 5 (*в*), 10 (*г*) слагаемых ряда (8.13)

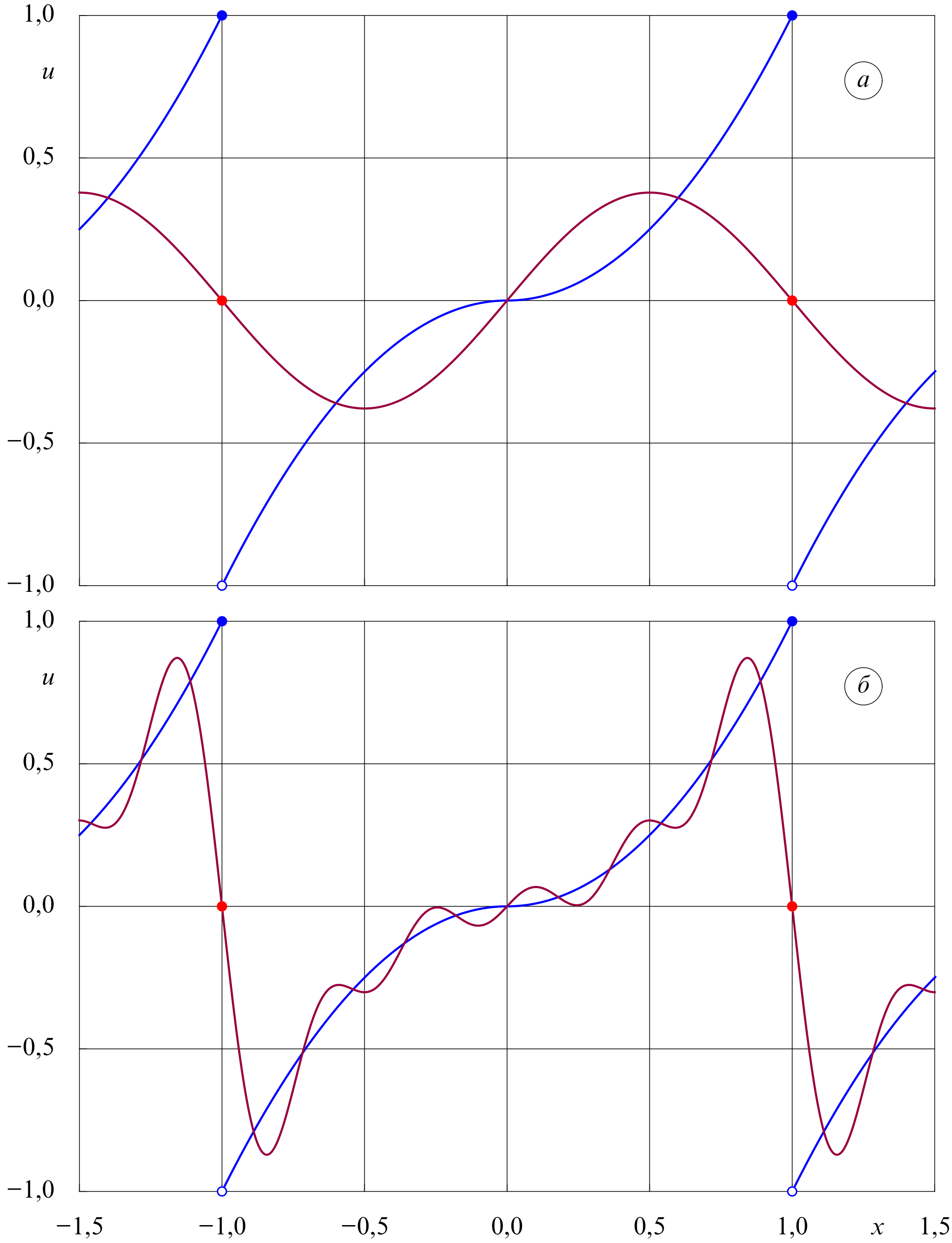

Рис. 8.2. Отрезки ряда *Фурье* (8.16) (*коричневый цвет*) непрерывно дифференцируемой функции (8.14) (кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой после периодического продолжения, *синий цвет*): 1 (*а*), 5 (*б*) слагаемых ряда. На разрывах первого рода продолженной функции *синими кружочками* (залитыми и незалитыми) показаны односторонние предельные значения (левые и правые), *красными кружочками* — осреднённые значения односторонних пределов, через которые проходят отрезки ряда *Фурье* при любом количестве слагаемых

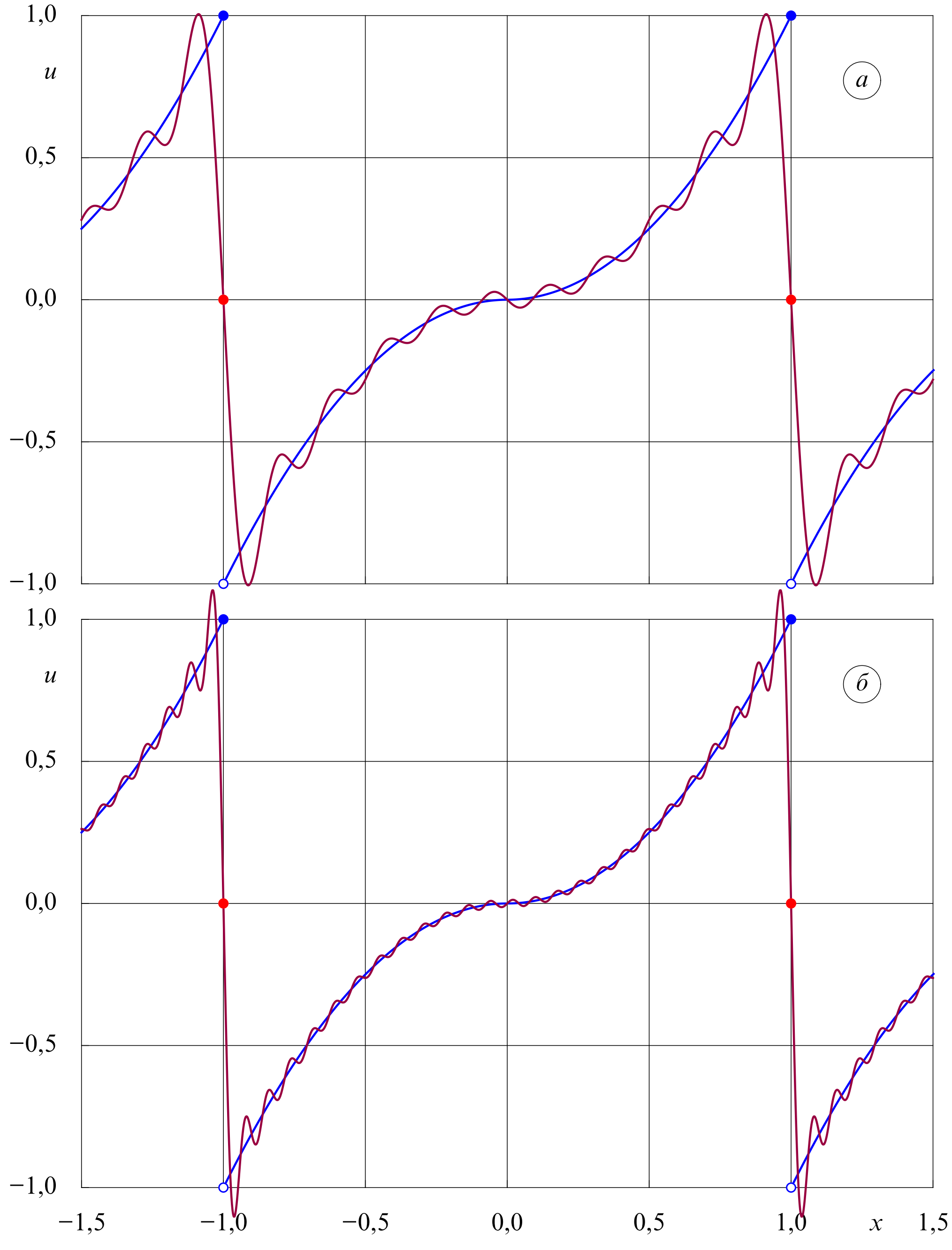

Рис. 8.3. Отрезки ряда *Фурье* (8.16) (*коричневый цвет*) непрерывно дифференцируемой функции (8.14) (кусочно-непрерывной и кусочно-непрерывно дифференцируемой после периодического продолжения, *синий цвет*): 10 (*а*), 25 (*б*) слагаемых ряда. На разрывах первого рода продолженной функции *синими кружочками* (залитыми и незалитыми) показаны односторонние предельные значения (левые и правые), *красными кружочками* — осреднённые значения односторонних пределов, через которые проходят отрезки ряда *Фурье* при любом количестве слагаемых. Незатухающие «всплески» отрезков ряда *Фурье*, приближающиеся с обеих сторон к точкам разрыва функции при увеличении количества слагаемых, составляют суть явления *Гиббса*

Пример 8.3. Дана непрерывная кусочно-линейная функция

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{c}\, h\,, & x \in [0, c]\,, \\[2ex] \dfrac{\ell - x}{\ell - c}\, h\,, & x \in [c, \ell]\,, \end{cases} \tag{8.17}$$

разложим её в ряд *Фурье* по синусам, вначале продолжив нечётным образом на $[-\ell, 0)$, а затем периодически продолжив на $\mathbb{R}$.

Поскольку заданная функция есть кусочно-линейная, вычисление коэффициентов b_μ по формуле (8.7) сведём к вычислению двух определённых интегралов

$$b_\mu = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell u(\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^c \frac{\xi}{c}\,h\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi + \frac{2}{\ell}\int\limits_c^\ell \frac{\ell-\xi}{\ell-c}\,h\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2h}{\ell c}\,I_1 + \frac{2h}{\ell\,(\ell-c)}\,I_2\,. \tag{8.18}$$

Каждый из интегралов I_1 и I_2, зависящих от параметров, вычислим по частям:

$$I_1 = \int\limits_0^c \xi\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \left\{\begin{array}{ll} u = \xi\,, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}\xi\,, \\[1ex] \mathrm{d}v = \mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, & v = -\dfrac{\ell}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell} \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{\ell}{\mu\pi}\,\xi\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\bigg|_0^c + \frac{\ell}{\mu\pi}\int\limits_0^c \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\ell c}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\bigg|_0^c =$$

$$= -\frac{\ell c}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\,,$$

$$I_2 = \int\limits_c^\ell (\ell-\xi)\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \left\{\begin{array}{ll} u = \ell - \xi\,, & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}\xi\,, \\[1ex] \mathrm{d}v = \mathtt{sin}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, & v = -\dfrac{\ell}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell} \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{\ell}{\mu\pi}\,(\ell-\xi)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\bigg|_c^\ell - \frac{\ell}{\mu\pi}\int\limits_c^\ell \mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = +\frac{\ell}{\mu\pi}\,(\ell-c)\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} - \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\bigg|_c^\ell =$$

$$= +\frac{\ell\,(\ell-c)}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\,.$$

Теперь подставим вычисленные интегралы в правую часть (8.18)

$$\begin{aligned} b_\mu &= \frac{2h}{\ell c}\left(-\frac{\ell c}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\right) + \frac{2h}{\ell\,(\ell-c)}\left(\frac{\ell\,(\ell-c)}{\mu\pi}\,\mathtt{cos}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2 \mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\right) = \\ &= \frac{2h\ell}{(\mu\pi)^2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\ell-c}\right)\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell} = \frac{2h}{(\mu\pi)^2}\,\frac{\ell^2}{c\,(\ell-c)}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\,. \end{aligned} \tag{8.19}$$

и окончательно получим

$$u(x) = \frac{2h}{\pi^2}\,\frac{\ell^2}{c\,(\ell-c)}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{\mu^2}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi c}{\ell}\,\mathtt{sin}\,\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{8.20}$$

Графики частичных сумм ряда *Фурье* (8.20), показанные на рис. 8.4, 8.5, дают представление о разложении функции (8.17) в ряд *Фурье* и о сходимости последнего. ▲

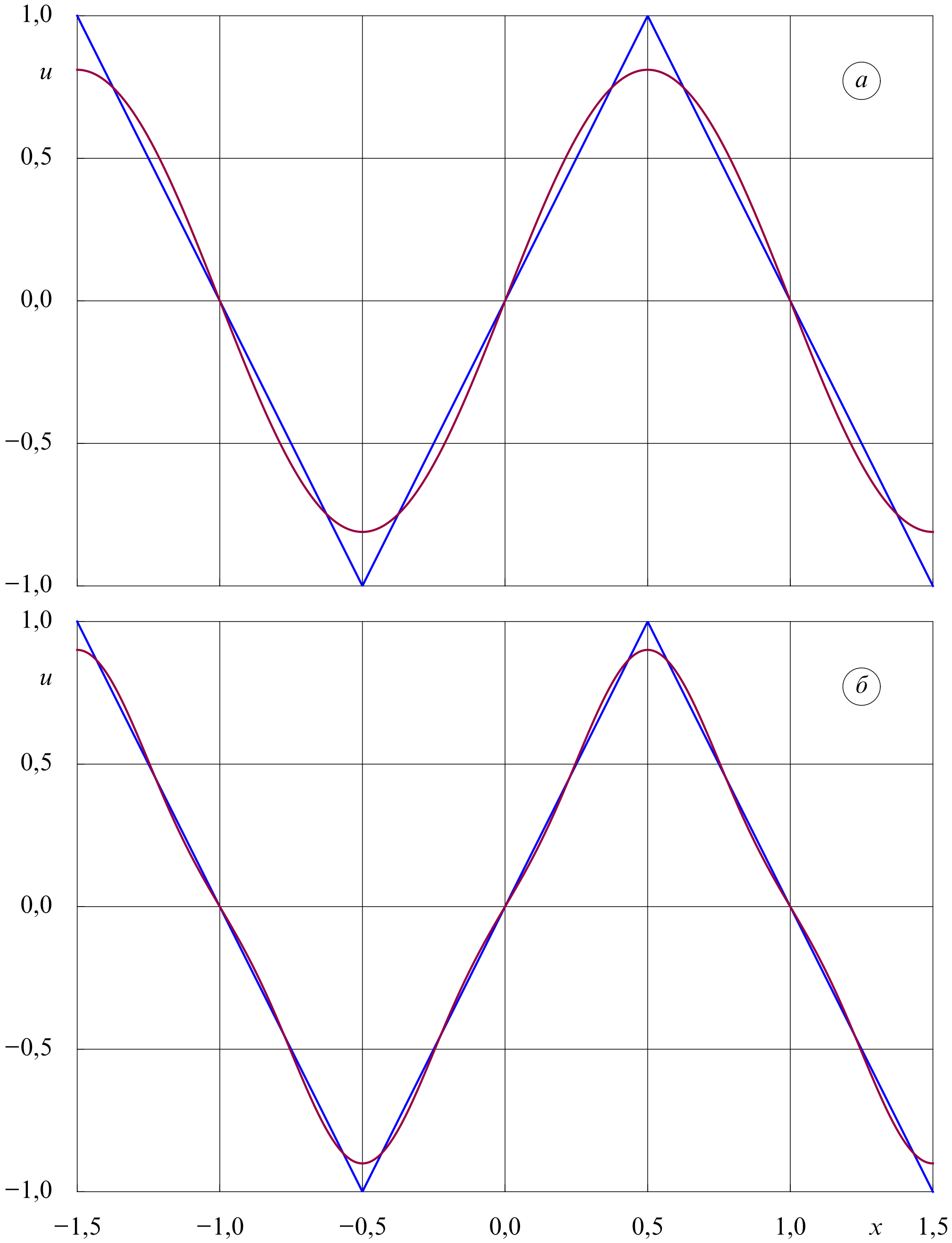

Рис. 8.4. Разложение в ряд *Фурье* (*коричневый цвет*) непрерывной кусочно-линейной функции (8.17), продолженной нечётно (*синий цвет*), $\ell = 1$, $c = 0.5$, $h = 1$: одно (a), три ($б$) слагаемых ряда (8.20)

Рис. 8.5. Разложение в ряд *Фурье* (*коричневый цвет*) непрерывной кусочно-линейной функции (8.17), продолженной нечётно (*синий цвет*), $\ell = 1$, $c = 0.5$, $h = 1$: 10 (*a*), 25 (*б*) слагаемых ряда (8.20)

Пример 8.4. Дана непрерывная кусочно-линейная функция (8.17), разложим её в ряд *Фурье* по косинусам, вначале продолжив её чётным образом на $[-\ell, 0)$, а затем периодически продолжив на $\mathbb{R}$.

Поскольку заданная функция есть кусочно-линейная, вычисление коэффициентов b_μ по формулам (8.5) сведём к вычислению двух определённых интегралов

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell u(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^c \frac{\xi}{c}\,h\,\mathrm{d}\xi + \frac{2}{\ell}\int\limits_c^\ell \frac{\ell-\xi}{\ell-c}\,h\,\mathrm{d}\xi = h\,, \\ a_\mu &= \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell u(\xi)\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^c \frac{\xi}{c}\,h\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi + \frac{2}{\ell}\int\limits_0^c \frac{\ell-\xi}{\ell-c}\,h\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \frac{2h}{\ell c}\,I_1 + \frac{2h}{\ell\,(\ell-c)}\,I_2\,. \end{aligned} \tag{8.21}$$

Каждый из интегралов I_1 и I_2 вычислим по частям:

$$I_1 = \int\limits_0^c \xi\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \left\{\begin{array}{ll} u = \xi\,, & \mathrm{d}u = \mathrm{d}\xi\,, \\ \mathrm{d}v = \cos\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, & v = \dfrac{\ell}{\mu\pi}\sin\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\ell}{\mu\pi}\,\xi\sin\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\bigg|_0^c - \frac{\ell}{\mu\pi}\int\limits_0^c \sin\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \frac{\ell c}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\bigg|_0^c =$$

$$= \frac{\ell c}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\left[\cos\frac{\mu\pi c}{\ell} - 1\right],$$

$$I_2 = \int\limits_c^\ell (\ell-\xi)\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = \left\{\begin{array}{ll} u = \ell-\xi\,, & \mathrm{d}u = -\mathrm{d}\xi\,, \\ \mathrm{d}v = \cos\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi\,, & v = \dfrac{\ell}{\mu\pi}\sin\dfrac{\mu\pi\xi}{\ell} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{\ell}{\mu\pi}\,(\ell-\xi)\sin\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\bigg|_c^\ell + \frac{\ell}{\mu\pi}\int\limits_c^\ell \sin\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{\ell}{\mu\pi}\,(\ell-c)\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} - \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\cos\frac{\mu\pi\xi}{\ell}\bigg|_c^\ell =$$

$$= -\frac{\ell\,(\ell-c)}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\left[(-1)^\mu - \cos\frac{\mu\pi c}{\ell}\right].$$

Теперь подставим вычисленные интегралы в выражение для коэффициентов a_μ (8.21)

$$a_\mu = \frac{2h}{\ell c}\left(\frac{\ell c}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\left[\cos\frac{\mu\pi c}{\ell} - 1\right]\right) +$$

$$+ \frac{2h}{\ell\,(\ell-c)}\left(-\frac{\ell\,(\ell-c)}{\mu\pi}\sin\frac{\mu\pi c}{\ell} + \left(\frac{\ell}{\mu\pi}\right)^2\left[(-1)^\mu - \cos\frac{\mu\pi c}{\ell}\right]\right) =$$

$$= \frac{2h\ell}{(\mu\pi)^2}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{\ell-c}\right)\cos\frac{\mu\pi c}{\ell} - \frac{2h\ell}{(\mu\pi)^2}\,\frac{1}{c} - \frac{2h\ell}{(\mu\pi)^2}\,\frac{(-1)^\mu}{\ell-c} = \frac{2h}{(\mu\pi)^2}\,\frac{\ell}{c\,(\ell-c)}\left[\ell\cos\frac{\mu\pi c}{\ell} - \ell + c - c\,(-1)^\mu\right]$$

и запишем искомое разложение

$$u(x) = \frac{h}{2} + \frac{2h}{\pi^2}\,\frac{\ell^2}{c\,(\ell-c)}\sum_{\mu=1}^\infty \frac{1}{\mu^2}\left[\cos\frac{\mu\pi c}{\ell} - 1 + \frac{c}{\ell} - \frac{c}{\ell}\,(-1)^\mu\right]\cos\frac{\mu\pi x}{\ell}\,. \tag{8.22}$$

Графики частичных сумм ряда *Фурье* (8.22), показанные на рис. 8.6, дают представление о разложении функции (8.17) в ряд *Фурье* и о сходимости последнего. ▲

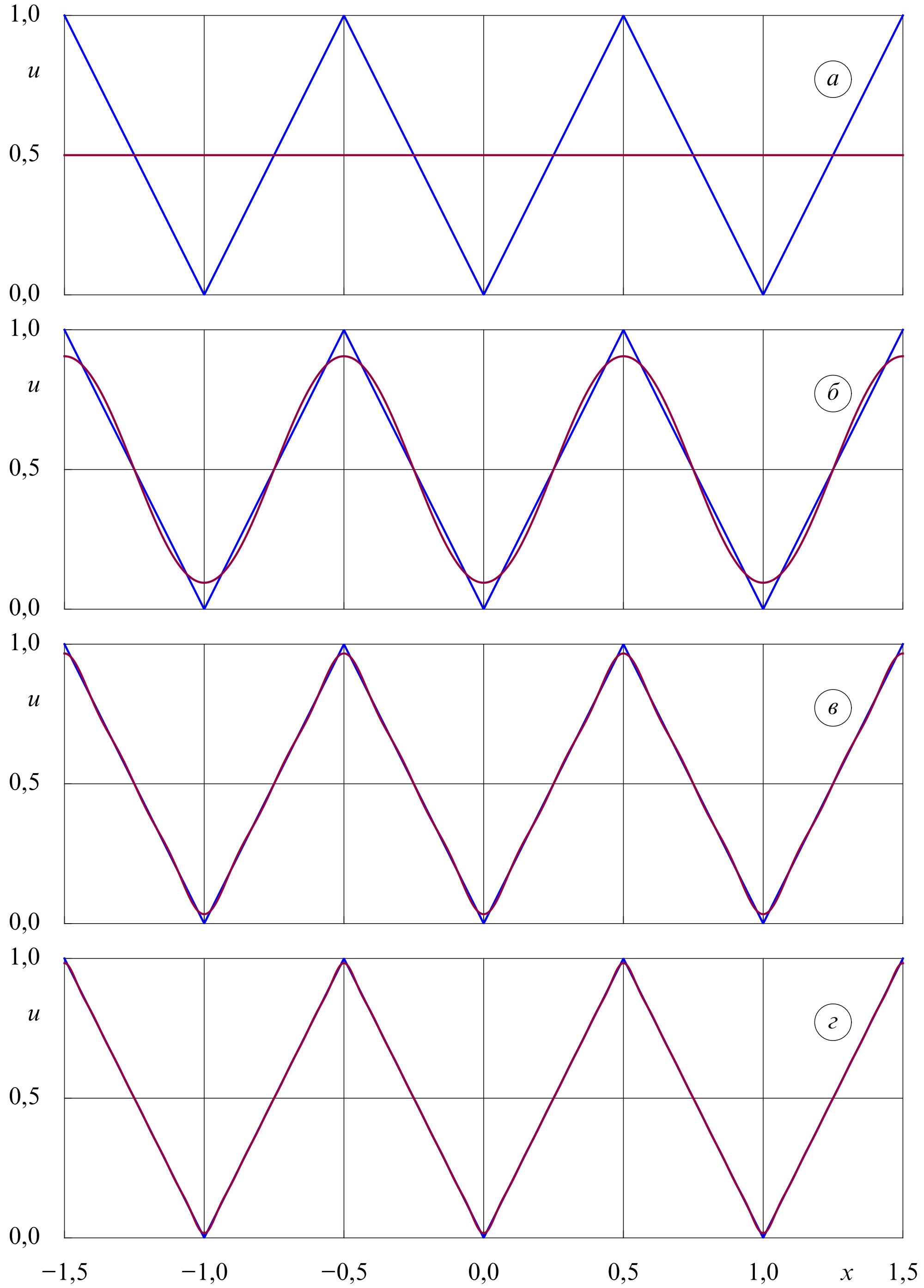

Рис. 8.6. Разложение в ряд *Фурье* (*коричневый цвет*) непрерывной кусочно-линейной функции (8.17), продолженной чётно (*синий цвет*), $\ell = 1$, $c = 0{,}5$, $h = 1$, количество слагаемых ряда (8.22): 1+0 (*а*), 1+3 (*б*), 1+10 (*в*), 1+25 (*г*)

8.4. Преобразование *Фурье*

Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая функция. На основании теоремы о представимости функции в точке своим рядом Фурье можем для любого $\ell > 0$ разложить f в ряд Фурье в промежутке $[-\ell, +\ell]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \Bigl(a_n \cos \frac{\pi n x}{\ell} + b_n \sin \frac{\pi n x}{\ell} \Bigr), \tag{1}$$

<. . . >

Разложение (1) обладает досадной асимметрией: его левая и правая части определены на всей числовой прямой, но равенство имеет место только в промежутке $[-\ell, +\ell]$. Устраним этот недостаток, перейдя к пределу при $\ell \to \infty$. При этом ограничимся наводящими соображениями, оставив строгие рассуждения на потом. [2]

8.4.1. Определение и различные виды записи преобразования *Фурье*

Пусть функция $u(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ есть: *а*) кусочно-гладкая на произвольном отрезке $[-\ell, +\ell]$, $0 < \ell < \infty$, и *б*) абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}$. В силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда *Фурье*, имеет место разложение (8.1), (8.2). Рассмотрим качественно поведение разложения при предельном переходе $\ell \to \infty$ (см. пояснение 14 с. 12). Подставим выражения (8.2) для коэффициентов в ряд (8.1), заменим переменную интегрирования ξ на y, далее применим тригонометрическую формулу

$$\cos\alpha \, \cos\beta + \sin\alpha \, \sin\beta \; = \; \cos\left(\pm\alpha \mp \beta\right), \tag{8.23}$$

тогда будем иметь следующее представление для ряда *Фурье*

$$u(x) = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\ell}\sum_{\mu=1}^{\infty} u(y) \int\limits_{-\ell}^{+\ell} \left(\cos\frac{\mu\pi y}{\ell}\,\cos\frac{\mu\pi x}{\ell} + \sin\frac{\mu\pi y}{\ell}\,\sin\frac{\mu\pi x}{\ell} \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(y)\,\mathrm{d}y + \frac{1}{\ell}\sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(y)\,\cos\frac{\mu\pi(\pm y \mp x)}{\ell}\,\mathrm{d}y\,.$$

В правой части полученного представления перейдём к пределу при $\ell \to \infty$ и учтём, что предел первого слагаемого равен нулю, в силу абсолютной интегрируемости подынтегральной функции, откуда

$$u(x) = \lim_{\ell\to\infty} \frac{1}{\ell}\sum_{\mu=1}^{\infty} \int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(y)\,\cos\frac{\mu\pi(\pm y \mp x)}{\ell}\,\mathrm{d}y\,.$$

Далее введём вспомогательную переменную $\xi_\mu = \dfrac{\mu\pi}{\ell}$, зависящую от счётного индекса μ, так что приращение переменной есть $\Delta\xi_\mu = \xi_{\mu+1} - \xi_\mu = \dfrac{\pi}{\ell}$, и перепишем последнее представление так

$$u(x) = \lim_{\substack{\ell\to+\infty\\ \Delta\xi_\mu\to 0}} \frac{1}{\pi}\sum_{\mu=1}^{\infty}\left(\int\limits_{-\ell}^{+\ell} u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi_\mu(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\Delta\xi_\mu\,.$$

Переходя к пределу в указанном выше смысле (см. пояснение) получим окончательное представление

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi\left(\pm y\mp x\right)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\,. \tag{8.24}$$

Равенство (8.24) называется *интегральной формулой Фурье*, а интеграл в её правой части — *интегралом Фурье.*

$$u(x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\left(\mathtt{cos}\,(\xi y)\,\mathtt{cos}\,(\xi x)+\mathtt{sin}\,(\xi y)\,\mathtt{sin}\,(\xi x)\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathtt{cos}\,(\xi y)\,\mathrm{d}y\right)\mathtt{cos}\,(\xi x) + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathtt{sin}\,(\xi y)\,\mathrm{d}y\right)\mathtt{sin}\,(\xi x)\right]\mathrm{d}\xi\,,$$

Введём обозначения

$$A(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathtt{cos}\,(\xi y)\,\mathrm{d}y\,,\qquad B(\xi) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathtt{sin}\,(\xi y)\,\mathrm{d}y\,,$$

и перепишем интегральную формулу *Фурье*

$$u(x) = \int\limits_{0}^{+\infty}\left(A(\xi)\,\mathtt{cos}\,(\xi x) + B(\xi)\,\mathtt{sin}\,(\xi x)\right)\mathrm{d}\xi\,. \tag{8.25}$$

откуда следует, что предельный переход от ряда *Фурье* к интегралу *Фурье* — *качественный*: если абсолютно интегрируемая на $[-\ell,+\ell]$ функция раскладывается в сумму гармонических колебаний, частоты ν_μ которых образуют дискретную последовательность (частоты ν_μ суть обратны длинам волн $\lambda_\mu = 2\ell/\mu$), то абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}$ функция раскладывается в «сумму» гармонических колебаний, частоты ν которых непрерывно заполняют действительную полуось: $0 \leqslant \nu < +\infty$.

Внутренний интеграл в представлении (8.24) есть чётная функция параметра ξ, подобный интеграл с заменой $\mathtt{cos}\,(\cdot)$ на $\mathtt{sin}\,(\cdot)$ — нечётная функция ξ, поэтому при замене полубесконечного промежутка интегрирования $(0,+\infty)$ по переменой y на бесконечный промежуток $(-\infty,+\infty)$ будем иметь следующие равенства

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

$$0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{sin}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

причём второй интеграл понимается *в смысле главного значения*. В силу формулы *Эйлера* для показательной функции чисто мнимого аргумента имеем

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{cos}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi+\frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathtt{sin}\left[\xi\,(\pm y\mp x)\right]\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathrm{e}^{\pm i\xi(y-x)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\,,$$

откуда следует возможность записи интегральной формулы *Фурье* (8.24) в комплексной форме

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}u(y)\,\mathrm{e}^{\pm i\xi(y-x)}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}\xi\,. \tag{8.26}$$

Комплексная форма записи (8.8), (8.9) тригонометрического ряда *Фурье* позволяет вывести интегральную формулу *Фурье* в комплексной форме (8.26) намного быстрее. В самом деле, подставим выражения (8.9) для коэффициентов в ряд (8.8), тогда, с учётом ранее введённых обозначений, будем иметь

$$u(x)=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2\ell}\int\limits_{-\ell}^{+\ell}u(y)\,\mathrm{e}^{\pm i\frac{\mu\pi y}{\ell}}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{e}^{\mp i\frac{\mu\pi x}{\ell}}=\frac{1}{2\pi}\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{-\ell}^{+\ell}u(y)\,\mathrm{e}^{\pm i\xi_{\mu}(y-x)}\,\mathrm{d}y\right)\Delta\xi\,;$$

откуда получим интегральное представление ряда *Фурье* (8.26).

Выбор верхнего знака в аргументе показательной функции и отнесение числового множителя $(2\pi)^{-1}$ к внешнему интегралу приводит к следующему представлению интегральной формулы *Фурье* (8.26) (см. примечание)

$$u(x) = \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\overbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(y)\,\mathsf{e}^{-i\xi y}\,\mathrm{d}y}^{\mathscr{F}[u](\xi)=\widehat{u}(\xi)}\right)\mathsf{e}^{+i\xi x}\,\mathrm{d}\xi}_{\mathscr{F}^{-1}[\widehat{u}](x)}\,. \tag{8.27}$$

Определение 8.2. *Пусть* функция $u(x)$ есть абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}_{\boldsymbol{x}}$, *тогда* формула

$$\widehat{u}(\xi) \equiv \mathscr{F}[u](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\mathsf{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\,, \qquad \xi \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{\xi}}\,, \tag{8.28}$$

задаёт (*прямое*) *преобразование Фурье* $u(x) \to \widehat{u}(\xi)$, где функция $\widehat{u}(\xi)$ называется *образом Фурье* (*спектральной функцией*) функции $u(x)$, а функция $\mathsf{e}^{-i\xi x}$ — *ядром* прямого преобразования. □

Определение 8.3. *Пусть* функция $\widehat{u}(\xi)$ есть абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}_\xi$, *тогда* формула

$$\mathscr{F}^{-1}\big[\widehat{u}\big](x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi)\,\mathsf{e}^{+ix\xi}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad x \in \mathbb{R}_x\,, \tag{8.29}$$

задаёт *обратное преобразование Фурье* $\widehat{u}(\xi) \to \mathscr{F}^{-1}\big[\widehat{u}\big](x)$, где функция $(2\pi)^{-1}\,\mathsf{e}^{+ix\xi}$ — *ядро* обратного преобразования. □

Для того, чтобы композиция (8.27) обратного (8.29) и прямого (8.28) преобразований *Фурье* была тождественным преобразованием $u(x) \to \widehat{u}(\xi) \to u(x)$, нужно соблюсти определённые условия, которые называет следующая

Теорема 8.4. *Пусть* функция $u(x)$ есть: 1) абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}_x$; 2) кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке в $\mathbb{R}_x$; *тогда*: 1) образ Фурье $\widehat{u}(\xi)$ функции $u(x)$, определяемый формулой (8.28), существует; 2) справедлива формула обращения (8.29), которую следует понимать в смысле главного значения

$$u(x) = \mathtt{v.p.}\ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi)\,\mathsf{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi}\lim_{\ell\to+\infty}\int\limits_{-\ell}^{+\ell} \widehat{u}(\xi)\,\mathsf{e}^{-ix\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{8.30}$$

во всех точках $x \in \mathbb{R}_x$ непрерывности функции $u(x)$; 3) значение $\mathscr{F}^{-1}\big[\widehat{u}\big](x)$ равно полусумме односторонних пределов $u(x-0)$ и $u(x+0)$ в точках $x \in \mathbb{R}_x$ разрыва функции $u(x)$. □

8.4.2. Свойства преобразования *Фурье*

Свойство 1. *Пусть*: 1) функция $u(x)$ есть непрерывно дифференцируемая на каждом конечном интервале в $\mathbb{R}_x$; 2) $u(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$; 3) производная функции $u(x)$ есть абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}_x$; *тогда* справедлива формула преобразования производной

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right](\xi) = i\xi\,\mathscr{F}[u](\xi)\,. \tag{8.31}$$

Доказательство. При указанных условиях в прямом преобразовании *Фурье* производной допустимо интегрирование по частям

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right](\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}\,\mathsf{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \underbrace{u(x)\,\mathsf{e}^{\,i\xi x}\Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}}_{=0} + i\xi\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\mathsf{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = i\xi\,\mathscr{F}[u](\xi)\,.$$

Свойство означает, что при известном образе функции нахождение образа первой производной сводится к умножению образа функции на числовой множитель $i\xi$. ■

Свойство 2. :*Пусть* 1) функция $u(x)$ есть ϱ раз непрерывно дифференцируемая в $\mathbb{R}_x$; 2) производная $u^{(\varrho-1)}(x) \to 0$ при $|x|\to\infty$; 3) производная $u^{(\varrho)}(x)$ есть абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}_x$, *тогда* справедлива формула преобразования производной $u^{(\varrho)}(x)$

$$\mathscr{F}\left[\frac{\mathrm{d}^{\rho}u(x)}{\mathrm{d}x^{\rho}}\right](\xi) = (i\xi)^{\rho}\,\mathscr{F}[u](\xi)\,. \tag{8.32}$$

Доказательство. Следует ϱ раз применить доказательство свойства 1. ■

8.4.3. Примеры преобразования *Фурье* функций

Пример 8.5. Дана функция

$$u(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in [-1,+1]\,, \\ 0\,, & x \notin [-1,+1]\,, \end{cases} \tag{8.33}$$

найдем её образ *Фурье*.

Очевидно, что функция $u(x)$ имеет компактный носитель, её образ *Фурье* найдём непосредственно по определению (8.28)

$$\widehat{u}(\xi) = \int\limits_{-1}^{+1} \mathsf{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathsf{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1} = \frac{2\,\mathtt{sin}\,\xi}{\xi}\,. \tag{8.34}$$

Найденный образ (8.34) есть непрерывная действительнозначная функция действительной переменной ξ . ▲

Пример 8.6. Дана функция

$$u(x) = \begin{cases} x\,, & x \in [-1,+1]\,, \\ 0\,, & x \notin [-1,+1]\,, \end{cases} \tag{8.35}$$

найдем её образ *Фурье*.

Очевидно, что функция $u(x)$ имеет компактный носитель, её образ *Фурье* найдём непосредственно по определению (8.28)

$$\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{-1}^{+1} x\,\mathtt{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x=\left[x\,\frac{\mathtt{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}+\frac{1}{i\xi}\int\limits_{-1}^{+1}\mathtt{e}^{-i\xi}\,\mathrm{d}x\right]=\left[x\,\frac{\mathtt{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}+\frac{1}{i\xi}\,\frac{\mathtt{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}\right]=$$
$$=\left[\frac{\mathtt{e}^{-i\xi}+\mathtt{e}^{+i\xi}}{-i\xi}+\frac{\mathtt{e}^{-i\xi}-\mathtt{e}^{+i\xi}}{\xi^2}\right]=i\left[\frac{\cos\xi}{\xi}-\frac{\sin\xi}{\xi^2}\right]. \tag{8.36}$$

Найденный образ (8.36) есть функция действительной переменной ξ, принимающая чисто мнимые значения. ▲

Пример 8.7. Дана функция

$$u(x)=\begin{cases} x^2\,, & x\in[-1,+1]\,,\\ 0\,, & x\notin[-1,+1]\,,\end{cases} \tag{8.37}$$

найдём её образ *Фурье*.

Очевидно, что функция $u(x)$ имеет компактный носитель, её образ *Фурье* найдём непосредственно по определению (8.28)

$$\begin{aligned}\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{-1}^{+1} x^2\,\mathtt{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x&=\left[x^2\,\frac{\mathtt{e}^{-i\xi x}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}+\frac{2}{i\xi}\int\limits_{-1}^{+1}x\,\mathtt{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right]=\\
&=\left[x^2\,\frac{\mathtt{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}+\frac{2}{i\xi}\left(x\,\frac{\mathtt{e}^{-ix\xi}}{-i\xi}\Bigg|_{x=-1}^{x=+1}-\frac{1}{i\xi}\int\limits_{-1}^{+1}\mathtt{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x\right)\right]=\\
&=\left[\frac{\mathtt{e}^{-i\xi}-\mathtt{e}^{+i\xi}}{-i\xi}+\frac{2}{i\xi}\left(\frac{\mathtt{e}^{-i\xi}+\mathtt{e}^{+ix\xi}}{-i\xi}+\frac{1}{i\xi}\,\frac{\mathtt{e}^{-i\xi x}-\mathtt{e}^{+i\xi x}}{-i\xi}\right)\right]=\\
&=\ \frac{2\sin\xi}{\xi}+\frac{4\cos\xi}{\xi^2}-\frac{4\sin\xi}{\xi^3}\ .\end{aligned} \tag{8.38}$$

Найденный образ (8.38) есть непрерывная действительнозначная функция действительной переменной ξ. ▲

Пример 8.8. Дана функция

$$u(x)=\begin{cases} \mathtt{e}^{-ax}\,, & x\geqslant 0\,,\\ \quad 0\,, & x<0\,,\end{cases}\qquad a>0\,, \tag{8.39}$$

найдём её образ *Фурье*.

Очевидно, что $u(x)$ — ограниченная и абсолютно интегрируемая в $\mathbb{R}$ функция, её образ *Фурье* найдём непосредственно по определению (8.28)

$$\widehat{u}(\xi)=\int\limits_{0}^{+\infty}\mathtt{e}^{-ax}\,\mathtt{e}^{-i\xi x}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathtt{e}^{-(a+i\xi)x}}{-(a+i\xi)}\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{a+i\xi}=\frac{a-i\xi}{a^2+\xi^2}\,. \tag{8.40}$$

Найденный образ (8.40) есть непрерывно дифференцируемая комплекснозначная функция действительной переменной ξ. ▲

8.5. Задачи

Задача 8.1. Разложить в ряд *Фурье* заданную функцию $u(x)$, $|x| \leqslant 1$:

1) $u(x) = |x|$;
2) $u(x) = |x|^3$;
3) $u(x) = x \cos(\pi x)$;
4) $u(x) = x \sin(\pi x)$;
5) $u(x) = |\sin(\pi x)|$;
6) $u(x) = x\, \mathrm{e}^{-|x|}$.

Задача 8.2. Разложить в ряд *Фурье* по синусам заданную функцию $u(x)$, $x \in [0, 1]$:

1) $u(x) = x$;
2) $u(x) = x^3$;
3) $u(x) = x \cos(\pi x)$;
4) $u(x) = x \sin(\pi x)$;
5) $u(x) = \sin(\pi x)$;
6) $u(x) = x\, \mathrm{e}^{-x}$.

8.6. Пояснения

Список литературы

1. *Агошков В. В.*, *Дубовский П. Б.*, *Шутяев В. П.* Методы решения задач математической физики. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с. (*Математика и прикладная математика*)

2. *Агранович М. С.* Обобщенные функции и соболевские пространства. — М.: Изд-во НМУ, 2003. — 67 с. (*Лекции Нового Московского Университета*)

3. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. — 2-е изд., перераб. и испр. — М.: УРСС, 2007. — 246 с.

4. *Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. — 3-е изд., испр. — М.: Изд-во ЛКИ, 2008. — 248 с.

5. *Арнольд В. И.*, *Козлов В. В.*, *Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. — С. 5–304. (*Итоги науки и техники*)

6. *Арнольд В. И.* Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф, от эвольвент до квазикристаллов. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. — 96 с. (*Современная математика для студентов*)

7. *Арнольд В. И.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 2-е изд. — М.: Фазис, 1999. — 181 с.

8. *Бабич В. М.*, *М. Б. Капилевич*, *С. Г. Михлин* и др. Линейные уравнения математической физики / Под ред. *С. Г. Михлина*. — М.: Наука, 1964. — 368 с. (*Справочная математическая библиотека*)

9. *Багров В. Г.*, *Белов В. В.*, *Задорожный В. Н.*, *Трифонов А. Ю.* Методы математической физики. Том IV. Уравнения математической физики. — Томск: Изд-во НТЛ, 2002. — 646 с.

10. *Баранцев Р. Г.* Лекции по трансзвуковой газодинамике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. — 218 с.

11. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. — 448 с.

12. *Борисенко А. И.*, *Тарапов И. Е.* Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — 5-е изд.. — Харьков: Вища школа, 1978. — 216 с.

13. *Будак Б. М.*, *Самарский А. А.*, *Тихонов А. Н.* Сборник задач по математической физике. — 2-е изд., испр. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. — 688 с.

14. *Будак Б. М.*, *Фомин С. В.* Кратные интегралы и ряды. — 2-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1967. — 608 с. (*Курс высшей математики и математической физики*; Выпуск 2.)

15. *Владимиров В. С.*, *Вашарин А. А.*, *Каримова Х. Х.*, *Михайлов В.П.* и др. Сборник задач по уравнениям математической физики. — 4-е изд., стереотип. — М.: Физматлит, 2004. — 288 с.

16. *Геронимус Я. Л.* Теоретическая механика (очерки об основных положениях). — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. — 512 с.

17. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1971. — 416 с.

18. *Годунов С. К.* Уравнения математической физики. — 2-е изд., исправл. и дополн. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. — 392 с.

19. *Журавлев В. Ф.* Основы теоретической механики. — 2-е изд., перераб. — М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. — 320 с.

20. *Зорич В. А.* Математический анализ: Учебник: В 2–х ч.: Часть II. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. — 640 с.

21. *Ильин В. А.*, *Позняк Э. Г.* Линейная алгебра. — 2-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. — 304 с. (*Курс высшей математики и математической физики*; Выпуск 6.)

22. *Ильин В. А.*, *Позняк Э. Г.* Основы математического анализа. Часть II. — 2-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. — 448 с. (*Курс высшей математики и математической физики*; Выпуск 2а.)

23. *Колесникова С. И.* Методы решения основных задач уравнений математической физики. — М.: МФТИ, 2015. — 79 с.

24. *Коллатц Л.* Задачи на собственные значения. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 504 с.

25. *Колоколов И. В.*, *Кузнецов Е. А.*, *Мильштейн А. И.*, *Подивилов Е. В.* и др. Задачи по математическим методам физики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000. — 288 с.

26. *Комеч А. И.* Практическое решение уравнений математической физики: Учеб.-метод. пособие. — М.: МГУ, 1993. — 155 с.

27. *Курант Р.* Уравнения с частными производными: Пер. с англ. — М.: Мир, 1962. — 830 с.

28. *Лаптев Г. Ф.* Элементы векторного исчисления. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975. — 336 с.

29. *Лебедев Н. Н.*, *Скальская И. П.* Сборник задач по математической физике. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 420 с.

30. *Левитан Б. М.*, *Саргсян И. С.* Операторы Штурма–Лиувилля и Дирака. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. — 432 с.

31. *Максвелл Дж.* О соотношении между физикой и математикой // *Максвелл Дж.* Речи и статьи. — 2-е изд.: Пер. с англ. — М.; Л.: Гос. изд-во техн.-теор. лит., 1940. — С. 9–26. (*Классики естествознания*)

32. *Мандельштам Л. И.* Лекции по теории колебаний. — М.: Наука, 1972. — 470 с.

33. *Мартинсон Л. К.*, *Малов Ю. И.* Дифференциальные уравнения математической физики: Учеб. для вузов. — 2-е изд. / Под ред. *В. С. Зарубина*, *А. П. Крищенко*. — М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2002. — 368 с. (*Математика в техническом университете*; Вып. XII).

34. *Матвеев А. В.* Дифференциальные уравнения. — М.: Просвещение, 1988. — 256 с.

35. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. — 3-е изд., исправл. и дополн. — М.:. — М.: Высшая школа, 1967. — 564 с.

36. *Миллер У., мл.* Симметрия и разделение переменных: Пер. с англ. — М.: Мир, 1981. — 342 с.

37. *Михлин С. Г.* Курс математической физики. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. — 576 с.

38. *Михлин С. Г.* Линейные уравнения в частных производных. Учебн. пособие для вузов. — М.: Высш. школа, 1977. — 432 с.

39. *Некрасов А. И.* Курс теоретической механики: В 2-х т. — Т. II. Динамика. — 2-е изд., перераб. — М.: ГИТТЛ, 1953. — 504 с.

40. *Паплаускас А. Б.* Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. — М.: Наука, 1966. — 276 с.

41. *Петровский И. Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. — 3-е изд., дополн. — М.: Физматлит, 1961. — 400 с.

42. *Пикулин В. П.*, *Похожаев С. И.* Практический курс по уравнениям математической физики. — 2-е изд., стереотип. — М.: МЦНМО, 2004. — 208 с.

43. *Погребысский И. Б.* Лейбниц и классическая механика // У истоков классической науки: сб. статей. / Отв. ред. *А. Н. Боголюбов*, сост. *У. И. Франкфурт*. — М.: Наука, 1968. — С. 123–157.

44. *Положий Г. Н.* Уравнения математической физики. — М.: Высш. школа, 1964. — 560 с.

45. *Рота Дж.-К.* От редактора энциклопедии // *Миллер У., мл.* Симметрия и разделение переменных: Пер. с англ. / *У. Миллер, мл.* — М.: Мир, 1981. — С. 7.

46. *Свешников А. Г.*, *Боголюбов А. Н.*, *Кравцов В. В.* Лекции по математической физике: Учеб. пособие. — М.: Изд-во МГУ, 1993. — 352 с.

47. *Смирнов Н. И.* О развитии идеи корректности краевых задач математической физики // *Историко-математические исследования*. — 1980. — Вып. 25. — С. 129–155.

48. *Смирнов М. М.* Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1964. — 208 с.

49. *Соболев С. Л.* Уравнения математической физики. — 4-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1966. — 444 с.

50. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. — М.: Мир, 1968. — 164 с.

51. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. — 8-е изд., стереотип. — М.: Гос. изд–во физ.-мат. лит., 1959. — 468 с.

52. *Тихонов А. Н.*, *Васильева А. Б.*, *Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1985. — 232 с. (*Курс высшей математики и математической физики*; Выпуск 7.)

53. *Тихонов А. Н.*, *Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — 5-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. — 736 с.

54. *Тодхантер И.* История математических теорий притяжения и фигуры Земли от Ньютона до Лапласа: Пер. с англ.: В 2-х т., в одной кн. — М.: Эдиториал УРСС, 2002. — 672 с. (*Классики науки*)

55. *Томсон У.*, *Тэт П.* Трактат по натуральной философии: В 2–х ч.: Ч. II.: Пер. с англ. — М.–Ижевск: НИЦ РХД, Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. — 512 с.

56. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред: Пер. с. англ. — М.: Мир, 1975. — 592 с.

57. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.: Т. I. — 7-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 604 с.

58. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.: Т. II. — 7-е изд., стереотип. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1970. — 800 с.

59. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т.: Т. III. — 5-е изд. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 656 с.

60. *Франк Ф.*, *Мизес Р.* (ред.) Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Часть 2: Пер. с нем. — М.; Л.: ОНТИ. Гл. ред. общетехн. лит., 1937. — 998 с.

61. *Хайрер Э.*, *Ваннер Г.* Математический анализ в свете его истории: Пер. с англ. — М.: Научный мир, 2008. — 396 с.

62. *Эльсгольц Л. Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — 2-е изд., стереотип. — М: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1969. — 424 с. (*Курс высшей математики и математической физики*; Вып. 3)

63. *Axler S.*, *Bourdon P.*, *Ramey W.* Harmonic Function Theory. — N.Y.: Springer–Verlag, 1992. — xi + 260 p. (*Graduate Texts in Mathematics*; 137)

64. *Protter V. H.*, *Weinberger H. F.* Maximum Principles in Differential Equations. — NY: Springer-Verlag, 1984. — x + 262 p.