МР1 (Викладач Бойко Л.Т.)

Тема: **МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗДР.**

У випадку розв'язування звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) залежно від того, ставляться додаткові умови в одній або в декількох точках, задачі діляться на:

- одноточкові, або з початковими умовами, або задачі Коші;
- багатоточкові, або граничні, або крайові задачі. У граничних – як правило, додаткові умови ставляться на кінцях того відрізку, де розглядається диференціальне рівняння.

6.1. Постановки задачі Коші

Постановка 1. Нехай на відрізку $a \le x \le b$ треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a,b], \tag{6.1}$$

який у точці $x_0 \in [a,b]$ набуває заданих початкових значень

$$y(x_0) = y_0. \tag{6.2}$$

Ця задача називається задачею Коші для рівняння (6.1). Умова (6.2) називається початковою. Найчастіше точкою x_0 є початок відрізка інтегрування $[a, b]$. Але це не обов'язково. Можливі випадки задачі Коші, коли $x_0 = b$, або x_0 – це якась внутрішня точка відрізка $[a, b]$.

Вважаємо, що функція $f(x, y)$ є такою, що розв'язок задачі (6.1), (6.2) існує і є єдиним. Достатньою умовою існування єдиного розв'язку з класу $C[a,b]$ є неперервність функції $f(x, y)$ за всіма аргументами і виконання умови Ліпшіца по змінній y.

Постановка 2. Задачу Коші можна формулювати для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \cdots, \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{cases} \tag{6.3}$$

при таких початкових умовах

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \ i = \overline{1, n}. \tag{6.4}$$

Задачу (6.3), (6.4) можна звести до задачі вигляду (6.1), (6.2), якщо впровадити такі векторні функції:

$$Y(x)=\begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \cdots \\ y_n(x) \end{bmatrix},\ \ Y'(x)=\begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \cdots \\ y_n'(x) \end{bmatrix},\ F(x,Y(x))=\begin{bmatrix} f_1(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ f_2(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \\ \cdots \\ f_n(x,y_1,y_2,\dots,y_n) \end{bmatrix},\ \ Y_0=\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \cdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}.$$

Тепер задачу (6.3), (6.4) можна записати у векторному вигляді

$$Y'(x)=F(x,Y(x)),\ x\in[a,b],$$
$$Y(x_0)=Y_0.$$

Отже, задача (6.3), (6.4) зведена до вигляду (6.1), (6.2).

Постановка 3. Задачу Коші можна формулювати для диференціального рівняння *n*-го порядку

$$y^{(n)}= f(x,y(x),y'(x),\cdots,y^{(n-1)}(x)),\ x\in[a,b]. \tag{6.5}$$

$$\begin{cases} y(x_0)=y_{00}, \\ y'(x_0)=y_{10}, \\ \cdots, \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_{n-1,0}. \end{cases} \tag{6.6}$$

Задача (6.5), (6.6) може бути зведена до вигляду (6.3), (6.4), якщо впровадити такі позначення

$$\begin{cases} y_1(x)=y'(x), \\ y_2(x)=y_1'(x)=y''(x), \\ \cdots, \\ y_{n-1}(x)=y_{n-2}'(x). \end{cases} \tag{6.7}$$

З урахуванням (6.7) перепишемо рівняння (6.5) у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y'(x)=y_1, \\ y_1'(x)=y_2, \\ \cdots, \\ y_{n-2}'(x)=y_{n-1}, \\ y_{n-1}'(x)= f(x,y,y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}). \end{cases} \tag{6.8}$$

Початкові умови (6.6) з урахуванням позначень (6.7) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{00}, \\ y_1(x_0) = y_{10}, \\ \cdots, \\ y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}. \end{cases} \tag{6.9}$$

Отже задача (6.5), (6.6) зведена до вигляду (6.8), (6.9), який, у свою чергу, можна привести до вигляду (6.1), (6.2).

У подальшому, методи розв'язування задачі Коші будемо вивчати на рівнянні першого порядку, тобто на задачі (6.1), (6.2), узагальнюючи відповідні розрахункові формули на випадки задач (6.3), (6.4), або (6.5), (6.6).

Точні методи розв'язування задачі Коші вивчаються в курсі диференціальних рівнянь. Ці методи дозволяють добути точний розв'язок в аналітичному вигляді. Чисельні методи розв'язування задачі Коші дозволяють знайти наближений розв'язок у вигляді таблиці. Першим кроком будь-якого чисельного методу розв'язування задачі Коші є розбиття відрізка $[a, b]$ на скінченну кількість частин за допомогою вузлових точок x_i, $i = \overline{0,n}$, $n \geq 1$ таких, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Позначимо $h_i = x_{i+1} - x_i$, $\left(i = \overline{0, n-1}\right)$ відстань між двома сусідніми точками, тобто крок, з яким змінюється координата точки x_i. Сітку вузлів вважаємо взагалі нерівномірною, хоча, в окремих випадках, вона може стати рівномірною, коли

$$h_i = h = \frac{b-a}{n}, \ \left(i = \overline{0, n-1}\right).$$

Оскільки в точці x_0 значення функції $y(x_0)$ є відомим, то надалі розглянемо відрізок $[x_i, x_{i+1}]$, вважаючи, що в точці x_i значення $y(x_i)$ відомо. Поставимо собі задачу знайти значення $y(x_{i+1})$. Для цього проінтегруємо рівняння (6.1) за відрізком $[x_i, x_{i+1}]$, одержимо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \cdot dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx \ . \tag{6.10}$$

Позначимо

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx. \tag{6.11}$$

Значення Δy_i будемо називати ***приростом функції*** $y(x)$ у точці x_i. Але за формулою (6.11) неможливо обчислити приріст, бо невідома залежність $y(x)$

. Інтеграл у лівій частині рівності (6.10) можна обчислити. Отже, маємо із (6.10)

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \Delta y_i .$$

Звідси приходимо до формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \Delta y_i , \quad i = \overline{0, n-1}. \tag{6.12}$$

Формула (6.12) лежить в основі більшості чисельних методів розв'язування задачі Коші. Вона дає вираз значення шуканої функції $y(x)$ у кожній наступній точці x_{i+1} через її значення у попередній точці x_i. Різні методи розв'язування задачі Коші відрізняються один від одного способом наближеного обчислення інтеграла (6.11), тобто приросту функції. Найпростішим з чисельних методів є метод Ейлера, який ще називають методом ламаних або методом дотичних.

6.2. Метод Ейлера та його модифікації

Метод Ейлера є історично першим методом чисельного розв'язування задачі Коші (6.1), (6.2). У практиці обчислень цей метод використовується рідко через невисоку точність. Але на його прикладі зручно пояснити деякі поняття та ідеї побудови і дослідження чисельних методів розв'язування задачі Коші.

Для наближеного обчислення інтеграла (6.11) застосуємо одноточкову квадратурну формулу лівих прямокутників

$$\Delta y_i = h_i f(x_i, y(x_i)) + O(h_i^2) .$$

Відкинувши член порядку $O(h_i^2)$ і позначивши через y_i наближене значення величини $y(x_i)$, одержимо з (6.12) таку розрахункову формулу

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \cdots, n-1. \tag{6.13}$$

Формула (6.13) має назву ***формули Ейлера***, а чисельний метод розв'язування задачі Коші, визначений формулою (6.13), називають ***методом Ейлера***.

Дамо геометричне пояснення методу Ейлера (рис. 6.1). Нехай $y = y^{(0)}(x)$ є графіком шуканої інтегральної кривої, що проходить через точку $A_0 = (x_0, y_0)$. Треба знайти $y^{(0)}(x_1)$, тобто ординату точки $A_1 = (x_1, y^{(0)}(x_1))$. Однак, за формулою Ейлера обчислюється ордината точки $B_1 = (x_1, y_1)$, де $y_1 = y_0 + h_0 \cdot f(x_0, y_0)$. Точка B_1 розташована на дотичній, проведеній до графіка функції $y = y^{(0)}(x)$ у точці (x_0, y_0). Отже, замість того, щоб рухатись за графіком функції $y = y^{(0)}(x)$, метод дає можливість рухатись за дотичною $A_0 B_1$ до цього графіка. Довжина відрізка $A_1 B_1$ є похибкою на кроці в точці x_1.

Точка B_1 належить уже іншій інтегральній кривій диференціального рівняння (6.1). Нехай її рівнянням буде $y = y^{(1)}(x)$. Аналогічно попереднім розрахункам за формулою Ейлера обчислюємо значення $y_2 = y_1 + h_1 \cdot f(x_1, y_1)$, тобто знаходимо ординату точки $C_2 = (x_2, y_2)$, що розташована на дотичній до графіка функції $y = y^{(1)}(x)$, проведеній в точці B_1. Довжина відрізка B_2C_2 є похибкою на кроці, а довжина відрізка A_2C_2 є повною похибкою в точці x_2.

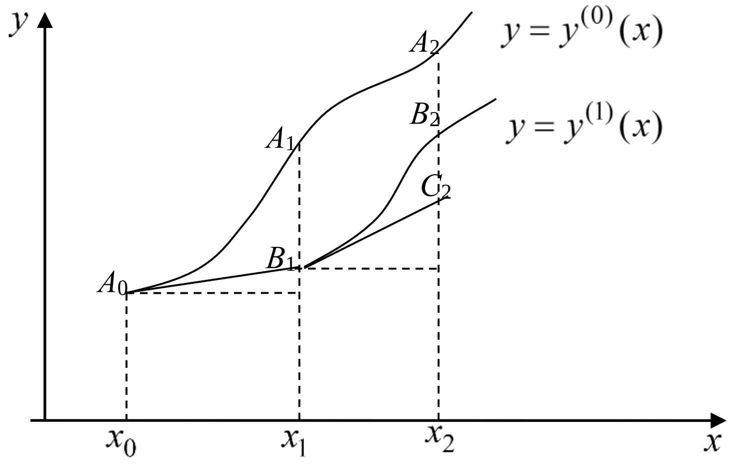

Рис. 6.1. Геометричне зображення методу Ейлера

Похибкою на кроці, або ***локальною похибкою***, будемо називати ту похибку, з якою обчислюємо $y(x_{i+1})$, якщо припустити, що $y(x_i)$ відомо точно. Але відомим точно може бути лише $y(x_0)$. У точці x_1 значення $y(x_1)$ обчислено вже наближено з похибкою $O(h_0^2)$. Ця похибка перейде до значення y_2 і потім в усі подальші значення y_i, $i = \overline{3,n}$. Отже, ***повна похибка*** при обчисленні значень $y(x_i)$, $i = \overline{2,n}$ може бути більшою, ніж локальна, оскільки похибка на кожному кроці, переходячи в наступні кроки, може накопичуватися. Звідси випливає, що в точці x_n повна похибка може стати досить великою. Це є ***недоліком методу Ейлера***. Але його ***перевагою*** є простота розрахункової формули (6.13). Методом Ейлера рекомендується користуватися, якщо розв'язок потрібно знайти тільки на короткому проміжку і з невеликою точністю.

З рис. 6.1 видно, що в результаті його застосування отримана ламана $A_0B_1C_2$, кожна ланка якої дотикається відповідної інтегральної кривої. Ця ламана називається ***ламаною Ейлера.*** Інколи сам метод Ейлера називають ***методом ламаних*** або ***методом дотичних***.

Метод Ейлера належить до класу ***однокрокових***, тобто таких методів розв'язування задачі Коші, які дозволяють знайти наближене значення розв'язку у вузлі x_{i+1}, використовуючи значення розв'язку тільки в одному попередньому вузлі x_i.

На відміну від однокрокових, ***багатокрокові*** методи розв'язування задачі Коші дозволяють відшукувати розв'язок у черговій вузловій точці x_{i+1}, використовуючи інформацію про розв'язок більш ніж в одній попередній вузловій точці.

Модифікований метод Ейлера можна добути, якщо для наближеного обчислення інтеграла (6.11) застосувати квадратурну формулу трапецій

$$\Delta y_i = \frac{h_i}{2}\Big(f(x_i, y(x_i)) + f(x_i + h_i, y(x_i + h_i))\Big) + O(h_i^3). \tag{6.14}$$

Відкинувши в (6.14) похибку $O(h_i^3)$, приходимо до наближеного рівняння відносно шуканого значення y_{i+1}

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})\Big). \tag{6.15}$$

Рівняння (6.15) є прикладом ***неявного однокрокового методу***, оскільки воно не розв'язано відносно y_{i+1}. Але, якщо використати формулу Ейлера, то в межах прийнятої похибки $O(h_i^3)$ нелінійне рівняння (6.15) можна лінеаризувати. Робиться це в такий спосіб. У правій частині формули (6.14) замінимо значення $y(x_i + h_i)$ таким розвиненням

$$y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i \cdot f(x_i, y(x_i)) + O(h_i^2) = y^*(x_{i+1}) + O(h_i^2),$$

де позначено

$$y^*(x_{i+1}) \equiv y(x_i) + h_i \cdot f(x_i, y(x_i)).$$

Тоді

$$f(x_{i+1}, y(x_i + h_i)) = f(x_{i+1}, y^*(x_{i+1}) + O(h_i^2)) = f(x_{i+1}, y^*(x_{i+1})) + O(h_i^2). \tag{6.16}$$

Підставивши (6.16) до (6.14), приходимо до двох розрахункових формул:

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \dfrac{h_i}{2}\Big(f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)\Big). \end{cases} \tag{6.17}$$

Локальна похибка формул (6.17) є $O(h_i^3)$, тобто на порядок меншою, ніж у формулі Ейлера. Розрахункові формули (6.17) і є ***модифікацією формули Ейлера***.

Якби для наближеного обчислення інтеграла (6.11) була використана квадратурна формула середніх прямокутників, то це дозволило б добути ще одну модифікацію методу Ейлера з локальною похибкою того ж порядку, що і в методі (6.17). Далі розглянемо метод Рунге-Кутта, який узагальнює метод Ейлера та його модифікації.