МР2 (Л.Т. Бойко)

Тема: **Середньоквадратичне наближення функцій**

1. Постановка задачі середньоквадратичного наближення функцій

Задача інтерполювання вимагає від інтерполяційного многочлена $P_n(x)$, щоб він у вузлах інтерполяції x_i, $i = 0,1,\cdots,n$ точно дорівнював значенням $f(x_i)$. Якщо ці значення знайдені наближено (наприклад, з експерименту), то така вимога недоцільна. У цьому випадку кращим буде наближення функції не за точками, а в середньому.

Нехай задана функція $f(x)$, яку будемо наближувати іншою функцією $\varphi(x)$, що належить деякому класу Ф. Постановку задачі сформулюємо для двох випадків завдання функції $f(x)$.

1. Якщо функція $f(x) \in C[a,b]$, то функцію $\varphi(x) \in Ф$ будемо шукати з умови, щоб інтеграл

$$J = \int_a^b \left(f(x) - \varphi(x) \right)^2 dx \to \min \tag{1}$$

набував мінімального значення. Умова (1) означає, що функції $f(x)$ та $\varphi(x)$ на проміжку $[a, b]$ ***у середньому близькі*** одна одній, хоча в окремих точках, або на деяких малих частинах проміжку $[a, b]$, різниця між $f(x)$ та $\varphi(x)$ може бути досить великою.

2. Для функції $f(x)$, яка відома дискретно, тобто своїми значеннями $f(x_i)$ в точках x_i, $i = 0,1, \cdots,n$, треба побудувати функцію $\varphi(x) \in Ф$ так, щоб сума

$$S = \sum_{i=0}^{n} \left(f(x_i) - \varphi(x_i) \right)^2 \to \min \tag{2}$$

набувала мінімального значення. Якщо припустити, що задані значення $f(x_i)$ мають випадкову похибку, то можна сподіватися, що значення, одержані в результаті апроксимації, будуть кращими ніж задані, тобто, середньоквадратичне наближення буде згладжувати локальні неправильності.

Наближення $\varphi(x)$, при якому інтеграл (1), або сума (2) набувають мінімальних значень, будемо називати ***найкращим середньоквадратичним наближенням***, або наближенням за методом найменших квадратів (МНК).

2. Алгоритм побудови найкращого середньоквадратичного наближення (неперервний випадок)

1. Будуємо (або вибираємо) систему координатних (базисних) функцій $\left\{\psi_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$, тобто систему функцій з такими властивостями:
   - функції $\left\{\psi_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$ такі, що $\sum_{i=0}^{n} C_i \psi_i(x) \in \Phi$ при будь-якому $n = 0, 1, 2, \cdots$ та при будь-яких числових коефіцієнтах $C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_n$;
   - при будь-якому натуральному m система функцій $\left\{\psi_i(x)\right\}_{i=0}^{m}$ лінійно незалежна. Це означає, що $\sum_{i=0}^{m} C_i \psi_i(x) = 0 \Leftrightarrow C_i = 0,\ \ i = \overline{0, m}$;
   - система функцій $\left\{\psi_i(x)\right\}_{i=0}^{\infty}$ є повною на множині функцій неперервних на відрізку $[a,\ b]$, тобто для будь-якої функції $g(x) \in C[a,b]$ та для $\forall \varepsilon > 0$ знайдеться таке число n та такі коефіцієнти $C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_n$, що буде виконуватись нерівність $\max\limits_{x\in[a,b]} \left| g(x) - \sum_{i=0}^{n} C_i \psi_i(x) \right| \le \varepsilon$. Іншими словами, будь-яку функцію $g(x) \in C[a,b]$ можна з будь-якою точністю ε наблизити виразом $\sum_{i=0}^{n} C_i \psi_i(x)$, для цього треба тільки відповідним чином вибрати коефіцієнти $C_0,\ C_1,\ \cdots,\ C_n$ та їхню кількість.
2. Апроксимацію $\varphi(x)$ шукаємо у вигляді ***узагальненого многочлена*** m-го степеня
$$\varphi(x) = P_m(x) \equiv \sum_{i=0}^{m} C_i \psi_i(x). \tag{3}$$
3. Підставимо (3) до (1), інтеграл стане функцією коефіцієнтів $C_i, i = \overline{0,\ m}$. Виберемо ці коефіцієнти так, щоб інтеграл
$$\int_a^b \left(f(x) - \sum_{i=0}^{m} C_i \psi_i(x) \right)^2 dx = J(C_0, C_1, \cdots, C_m) \tag{4}$$
набував мінімального значення. Як видно, значення функції (4) будуть невід'ємними. Крім того, функція (4) є поліномом другого степеня відносно своїх аргументів, а значить має одну точку екстремуму, яка є

точкою мінімуму. Для того щоб знайти цю точку мінімуму, обчислимо частинні похідні від інтеграла (4) по всіх C_k, $k=\overline{0,m}$ і напишемо умови

$$\frac{\partial J}{\partial C_k}=2\int_a^b\left(f(x)-\sum_{i=0}^{m}C_i\psi_i(x)\right)\cdot\left(-\psi_k(x)\right)dx=0,\quad k=\overline{0,m}.$$

4. Добуту систему рівнянь перепишемо у вигляді

$$\int_a^b f(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=\sum_{i=0}^{m}C_i\int_a^b\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,dx,\ k=\overline{0,m}. \qquad (5)$$

Позначимо

$$\int_a^b f(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=(f,\psi_k)=\beta_k,\qquad \int_a^b\psi_i(x)\cdot\psi_k(x)\,dx=(\psi_i,\psi_k)=\alpha_{ik},$$

тоді система рівнянь (5) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=0}^{m}\alpha_{ik}\cdot C_i=\beta_k,\quad k=\overline{0,m}. \qquad (6)$$

Визначник СЛАР (6) є визначником Грама

$$\Delta=\begin{vmatrix}(\psi_0,\psi_0) & (\psi_1,\psi_0) & \cdots & (\psi_m,\psi_0)\\ (\psi_0,\psi_1) & (\psi_1,\psi_1) & \cdots & (\psi_m,\psi_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\psi_0,\psi_m) & (\psi_1,\psi_m) & \cdots & (\psi_m,\psi_m)\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Він не дорівнює нулю, бо система функцій $\left\{\psi_i(x)\right\}_{i=0}^{m}$ лінійно незалежна. Це означає, що система (4.30) має єдиний розв’язок. Якщо позначити $C_0^*,\ C_1^*,\ \cdots,C_m^*$ розв’язок цієї системи, то найкраще середньоквадратичне наближення запишеться у вигляді

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{m}C_i^*\cdot\psi_i(x).$$

Середньоквадратичне відхилення (середня похибка) знаходиться за формулою

$$\delta=\sqrt{\frac{\int_a^b\left(f(x)-\sum_{i=0}^{m}C_i^*\cdot\psi_i(x)\right)^2dx}{b-a}}.$$

Середня похибка δ може бути малим числом, але при цьому функції $f(x)$ і $\varphi(x)$ в окремих точках відрізка $[a, b]$ можуть дуже відрізнятися одна від одної.

3. Алгоритм побудови найкращого середньоквадратичного наближення (дискретний випадок)

1. Будуємо систему координатних функцій $\{\psi_i(x)\}_{i=0}^{\infty}$ так, як у неперервному випадку.
2. Апроксимацію $\varphi(x)$ шукаємо у вигляді узагальненого многочлена $\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} C_i \psi_i(x)$, причому вибираємо $m<n$.
3. Коефіцієнти $C_i, i = \overline{0, m}$ знайдемо так, щоб сума
$$\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} C_j \psi_j(x_i) \right)^2 = S(C_0, C_1, \cdots, C_m) \qquad (8)$$
набувала мінімального значення. Обчислюємо частинні похідні від суми (8) по всіх C_k, $k = \overline{0, m}$ і напишемо необхідну умову мінімуму
$$\frac{\partial S}{\partial C_k} = 2\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} C_j \cdot \psi_j(x_i) \right) \cdot \left(-\psi_k(x_i)\right) = 0, \quad k = \overline{0, m} \ .$$
4. Добуту систему рівнянь перепишемо у вигляді
$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \psi_k(x_i) = \sum_{j=0}^{m} C_j \sum_{i=0}^{n} \psi_j(x_i) \cdot \psi_k(x_i), \quad k = \overline{0, m}. \qquad (9)$$
Позначимо
$$\sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot \psi_k(x_i) = (f, \psi_k) = \beta_k, \qquad \sum_{i=0}^{n} \psi_j(x_i) \cdot \psi_k(x_i) = (\psi_j, \psi_k) = \alpha_{jk}$$
і напишемо систему рівнянь (9) у цих позначеннях
$$\sum_{j=0}^{m} \alpha_{jk} \cdot C_j = \beta_k, \quad k = \overline{0, m}. \qquad (10)$$

Визначник СЛАР (10) є визначником Грама (7), він не дорівнює нулю, бо система функцій $\{\psi_i(x)\}_{i=0}^{m}$ лінійно незалежна.

Позначивши розв'язок системи (4.34) $C_0^*, C_1^*, \cdots, C_m^*$, напишемо найкраще середньоквадратичне наближення

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{m} C_i^* \cdot \psi_i(x).$$

Середньоквадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n}\left(f(x_i) - \sum_{j=0}^{m} C_j^* \psi_j(x_i)\right)^2}{n+1}}.$$

При великих n степінь m вибирають, як правило, значно меншим за n. Якщо вибрати $m = n$, то поліном середньоквадратичного наближення стане інтерполяційним.

Приклад. Нехай маємо результати деяких спостережень

x_i	0	1	2	3	4
$f(x_i) = y_i$	1	2	1	0	4

Треба побудувати лінійну функцію, використовуючи МНК

$$P_1(x) = c_0 + c_1 x.$$

Тут Φ – клас алгебраїчних поліномів, $\psi_k(x) = x^k$, $k = 0, 1$.

Будемо мінімізувати суму

$$S(c_0, c_1) = \sum_{i=0}^{4} (y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i)^2$$

за коефіцієнтами c_0, c_1. Напишемо необхідну умову мінімуму функції $S(c_0, c_1)$:

$$\frac{\partial S}{\partial c_0} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{4} (y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i) \cdot (-1) = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial c_1} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{4} (y_i - c_0 - c_1 \cdot x_i) \cdot (-x_i) = 0.$$

Перепишемо ці два рівняння у іншому вигляді:

$$\begin{cases} -\sum\limits_{i=0}^{4} y_i + c_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{4} 1 + c_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{4} x_i = 0, \\ -\sum\limits_{i=0}^{4} y_i \cdot x_i + c_0 \cdot \sum\limits_{i=0}^{4} x_i + c_1 \cdot \sum\limits_{i=0}^{4} x_i^2 = 0. \end{cases}$$

По заданій таблиці даних обчислимо потрібні суми:

$$\sum_{i=0}^{4} 1 = 5, \quad \sum_{i=0}^{4} x_i = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \quad \sum_{i=0}^{4} x_i^2 = 0 + 1 + 4 + 9 + 16 = 30,$$

$$\sum_{i=0}^{4} y_i = 1+2+1+0+4 = 8, \quad \sum_{i=0}^{4} y_i \cdot x_i = 0+2+2+0+16 = 20.$$

Тепер система алгебраїчних рівнянь набуває вигляду $\begin{cases} 5c_0 + 10c_1 = 8, \\ 10c_0 + 30c_1 = 20. \end{cases}$

Розв'язуючи добуту систему, знаходимо шукані коефіцієнти $c_0 = 0{,}8;\ \ c_1 = 0{,}4$. Отже, можна записати шукану лінійну функцію $\boxed{P_1(x) = 0{,}4 \cdot (2+x)}$. Графік цієї функції показано на рис. 4.2.

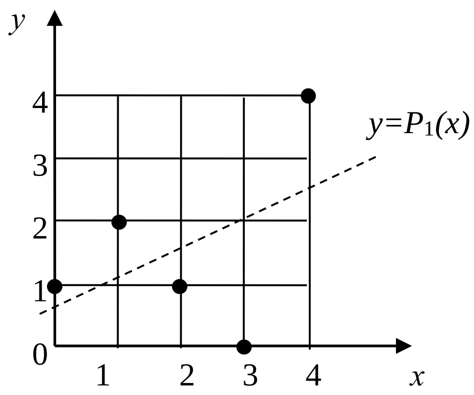

Рис. 4.2. Графік функції середньоквадратичного наближення

Коли значення y_i знаходяться експериментально, є підстави вважати, що значення функції, добуті в результаті апроксимації за МНК, кращі заданих, так як при апроксимації згладжуються випадкові похибки.

Знайдемо середньоквадратичний відхил за такою формулою

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^{n} \left(y_i - P_1(x_i) \right)^2}{n+1}}.$$

Для нашого прикладу спочатку обчислимо чисельник підінтегрального дробу

$$S = \sum_{i=0}^{4} \left(y_i - P_1(x_i) \right)^2 = \left(1 - \frac{4}{5} \right)^2 + \left(2 - \frac{6}{5} \right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5} \right)^2 + \left(0 - 2 \right)^2 + \left(4 - \frac{12}{5} \right)^2 = \frac{38}{5}.$$

Далі знаходимо $\delta = \sqrt{\frac{38}{5 \cdot 5}} = \frac{\sqrt{38}}{5} \approx \frac{6}{5} = 1{,}2$. Якщо необхідно зменшити середню похибку, то треба підвищити степінь алгебраїчного многочлена.