МЛТА. Лекція 24.05.2021

Функція Аккермана (Ackermann function)

Наведемо приклад функції, що не є примітивно рекурсивною. Ідея прикладу полягає в тому, щоб побудувати алгоритмічно обчислювану функцію, яка мала таку властивість, якої не має жодна примітивно рекурсивна функція. Такою властивістю може бути швидкість зростання функції. Отже, необхідно вказати таку алгоритмічно обчислювану функцію, яка зростає швидше за будь-яку примітивно-рекурсивну функцію і тому примітивно-рекурсивної не є.

Почнемо з побудови послідовності функцій φ_0, φ_1, φ_2.

Нехай

$$\varphi_0(a,y) = a + y,\ \varphi_1(a,y) = a \cdot y,\ \varphi_2(a,y) = a^y. \tag{1}$$

Ці функції пов'язані між собою такими рекурсивними співвідношеннями:

$$\varphi_1(a,1) = a,\ \varphi_1(a,y+1) = a + a \cdot y = \varphi_0(a,\varphi_1(a,y)),$$
$$\varphi_2(a,1) = a,\ \varphi_2(a,y+1) = a \cdot a^y = \varphi_1(a,\varphi_2(a,y)) \tag{2}$$

Продовжимо цю послідовність, поклавши за визначенням для $n = 2,3,\ldots$

$$\begin{cases} \varphi_{n+1}(a,0) = 1 \\ \varphi_{n+1}(a,1) = a \\ \varphi_{n+1}(a,y+1) = \varphi_n(a,\varphi_{n+1}(a,y)) \end{cases}. \tag{3}$$

Схема (3) має вигляд примітивної рекурсії. Функції $\varphi_n(a,y)$ зростають дуже швидко. Наприклад, $\varphi_3(a,1) = a$, $\varphi_3(a,2) = \varphi_2(a,a) = a^a$, $\varphi_3(a,3) = \varphi_2(a,a^a) = a^{a^a}$, … . Значення $\varphi_3(a,k+1)$ виходить як результат піднесення числа a в ступінь a k разів.

Зафіксуємо значення a. Наприклад, $a = 2$.

Отримаємо послідовність одномісних функцій (функцій від одного аргументу): $\varphi_0(2,y)$, $\varphi_1(2,y)$, $\varphi_2(2,y)$, … .

Визначимо тепер функцію $B(x,y)$, яка перелічує цю послідовність

$$B(x,y) = \varphi_x(2,y).$$

Тобто, $B(0,y) = \varphi_0(2,y) = 2 + y$, $B(1,y) = \varphi_1(2,y) = 2 \cdot y$, … .

Визначимо також функцію $A(x) = B(x,x)$.

Функція $B(x,y)$ називається ***функцією Аккермана***, а функція $A(x)$ – ***діагональною функцією Аккермана***.

Для функції $B(x,y)$ на підставі введених вище позначень і співвідношень (3) маємо:

$$\begin{cases} B(0,y)=2+y \\ B(x+1,0)=sg(x) \\ B(x+1,y+1)=B(x,B(x+1,y)) \end{cases}, \qquad (4)$$

Співвідношення (4) дозволяють обчислити значення функції $B(x,y)$ і, отже, $A(x)$, причому для обчислення функції в даній точці потрібно звернутися до значень функції в попередній точці – зовсім як в схемі примітивної рекурсії. Проте тут рекурсія проводиться відразу за двома змінним (така рекурсія називається подвійною, двократною), і це істотно ускладнює характер впорядкування точок. Отже, поняття передування точок також ускладнюється.

Наприклад, $B(3,3)=B(2,B(3,2))$. Так як $B(3,2)=\varphi_3(2,2)=2^2=4$, то обчисленню значення $B(3,3)$ за схемою (4) має передувати обчислення $B(2,4)$.

Для $B(3,4)$ необхідно знайти спочатку $B(2,16)$.

Важливо відзначити, що це впорядкування не визначено заздалегідь, як у схемі примітивної рекурсії, де n завжди передує $n+1$, а з'ясовується в ході обчислень. Тому схему подвійної рекурсії не завжди вдається звести до схеми примітивної рекурсії.

Можна довести, що функція Аккермана має такі властивості:

1. $B(n,x)\geq 2^x$ при $n\geq 2$, $x\geq 1$,
2. $B(n,x+1)\geq B(n,x)$ при $n\geq 1$, $x\geq 1$,
3. $B(n+1,x)\geq B(n,x+1)$ при $n\geq 1$, $x\geq 2$,
4. $B(n+1,x)\geq B(n,x)$ при $n\geq 2$, $x\geq 2$.

Функція $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ називається ***B*-мажоровною**, якщо $\exists N\geq 0$, що

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)<B(N,max\{x_1,\ldots,x_n\})$$

в будь-якій точці $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, де усі $x_i\geq 2$.

Теорема 1. Будь-яка ПРФ є *B*-мажоровною функцією.

Теорема 2. Діагональна функція Аккермана $A(x)$ зростає швидше за будь-яку примітивно-рекурсивну функцію, отже, не є примітивно-рекурсивною функцією.

Елементарні властивості примітивно-рекурсивних функцій

Теорема 1. Нехай $(n+1)$-арна функція g є примітивно-рекурсивною функцією. Тоді $(n+2)$-арна функція f, яку задано співвідношенням

$$f(x_1,\ldots,x_n,y,z)=\sum_{k=y}^{z} g(x_1,\ldots,x_n,k)$$

також примітивно-рекурсивна функція.

Доведення. Маємо

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,y,z\right)=\left(\sum_{k=0}^{z}g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right)\dot{-}\sum_{k=0}^{y}g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right)\right)+$$
$$+nsg\left(y\dot{-}z\right)\cdot g\left(x_1,\ldots,x_n,y\right).$$

Функції

$$f_1\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=\sum_{k=0}^{z}g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right),$$
$$f_2\left(x_1,\ldots,x_n,y\right)=\sum_{k=0}^{y}g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right)$$

є примітивно-рекурсивними. Наприклад, для f_1 маємо:

$$\begin{cases} f_1\left(x_1,\ldots,x_n,0\right)=g\left(x_1,\ldots,x_n,0\right) \\ f\left(x_1,\ldots,x_n,t+1\right)=f_1\left(x_1,\ldots,x_n,t\right)+g\left(x_1,\ldots,x_n,t+1\right) \end{cases}.$$

Теорема 1 означає, що операція підсумовування, яку застосовано до примітивно-рекурсивної функції, знову дає примітивно-рекурсивну функцію.

Теорема 2. Нехай $\left(n+1\right)$-арна функція g, n-арні функції α і β є примітивно-рекурсивними функціями. Тоді n-арна функція h, яка задається співвідношенням

$$h\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{k=\alpha\left(x_1,\ldots,x_n\right)}^{\beta\left(x_1,\ldots,x_n\right)}g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right)$$

також примітивно-рекурсивна функція.

Доведення.

$$h\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f\left(x_1,\ldots,x_n,\alpha\left(x_1,\ldots,x_n\right),\beta\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right),$$

де f – функція з теореми 1.

Зауваження. Теореми 1, 2 називаються теоремами підсумовування. Замінивши в цих теоремах символ суми $\sum$ на символ $\prod$, отримаємо теореми мультиплікації.

Теорема 3. Нехай задані n-місні, примітивно-рекурсивні, усюди визначені функції $f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, …, $f_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, $\alpha_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, …, $\alpha_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, причому ні при яких значеннях змінних жодна з функцій $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ одночасно не обертаються в нуль. Тоді функція f, яку визначено за такою схемою:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\begin{cases} f_1\left(x_1,\ldots,x_n\right), \text{якщо } \alpha_1\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0, \\ \ldots\ldots \\ f_k\left(x_1,\ldots,x_n\right), \text{якщо } \alpha_k\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0, \\ f_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_n\right)-\text{в інших випадках} \end{cases}$$

буде примітивно-рекурсивною функцією.

Для доведення достатньо подати функцію f у вигляді

$$f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{m=1}^{k} f_m\left(x_1,\ldots,x_n\right)\cdot nsg\left(\alpha_m\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)+$$

$$+f_{k+1}\left(x_1,\ldots,x_n\right)\cdot sg\left(\prod_{m=1}^{k}\alpha_m\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right).$$

Введемо ще одну операцію.

$(n+1)$-арна функція f виходить з $(n+1)$-арної функції g за допомогою ***операції обмеженої мінімізації***, якщо вона задається співвідношенням

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,y\right)=\begin{cases}\text{першому, починаючи з нуля,}\\ \text{значенню } z, \text{ такому, що } z<y\\ \text{і } g\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=0, \text{ якщо таке } z \text{ існує;}\\ \\ y, \text{ якщо таке } z \text{ не існує.}\end{cases}$$

Будемо позначати функцію, яку отримано за допомогою операції обмеженої мінімізації:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,y\right)=\mu_{z<y}\left(g\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=0\right).$$

Теорема 4 (про обмежену мінімізацію). Нехай $(n+1)$-арна функція g є примітивно-рекурсивною функцією. Тоді $(n+1)$-арна функція f, яка задається співвідношенням

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,y\right)=\mu_{z<y}\left(g\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=0\right)$$

теж ПРФ.

Доведення. Розглянемо функцію

$$\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=\prod_{k=0}^{z} sg\left(g\left(x_1,\ldots,x_n,k\right)\right).$$

Зафіксуємо $x_1,\ldots,x_n,y$.

Нехай $\mu_{z<y}\left(g\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=0\right)=b$.

Маємо

$$\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=\begin{cases}1, z<b\\ 0, z\ge b\end{cases}.$$

Тоді

$$\sum_{z=0}^{y}\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=b=\mu_{z<y}\left(g\left(x_1,\ldots,x_n,z\right)=0\right).$$

Тому функцію f можна задати так:

$$f\left(x_1,\ldots,x_n,y\right)=\sum_{z=0}^{y}\varphi\left(x_1,\ldots,x_n,z\right).$$

Відповідно до теорем 1 та 2 функція f – ПРФ.

Зауваження. Твердження теорем про підсумовування, мультиплікацію, кускове завдання, обмежену мінімізацію правильні і для рекурсивних функцій.

Теза Чорча і її значення

Такі, розглянуті раніше, класи функцій збігаються:

1) клас ЧРФ,
2) клас МНР- обчислюваних функцій,
3) клас функцій, обчислюваних за Тьюрінгом,
4) клас функцій, обчислюваних за Марковим.

Всі розглянуті формалізми є різними математичними уточненнями інтуїтивного поняття алгоритмічно обчислюваної функції (АОФ).

Вперше таке твердження щодо рекурсивних функцій висунуто в 1936 році А. Чорчем (*Alonzo Church*) і отримало назву «теза Чорча». Узагальнення тези Чорча на випадок частково рекурсивних функцій запропоновано в тому ж році С. Кліні (*Stephen Cole Kleene*).

Теза Чорча. Клас частково рекурсивних функцій збігається з класом алгоритмічно обчислюваних функцій, які задано на множині натуральних чисел.

Поняття алгоритмічно обчислюваної функції не є строго математичним поняттям, тому теза Чорча не підлягає математичному доведенню. Теза Чорча – це ***природно-науковий факт***, який підтверджується такими результатами:

1) істотно різні формальні уточнення поняття алгоритмічно обчислюваної функції, запропоновані авторами в різний час, виявилися еквівалентними в сенсі визначення одного і того ж класу функцій;

2) перехід від визначення функції в одному формалізмі до визначення цієї ж функції в іншому формалізмі – конструктивний, тобто він здійснюється певним алгоритмом (наприклад, за схемою нормального алгоритму Маркова ефективно будується МНР-програма, яка задає ту ж функцію);

3) для кожного з цих формалізмів всі задані в конкретному формалізмі функції – алгоритмічно обчислювані функції в інтуїтивному сенсі;

4) всі відомі досі алгоритмічно обчислювані функції виявилися частково-рекурсивними функціями. Нікому ще не вдалося навести приклад функції, яка була б алгоритмічно обчислюваною в інтуїтивному сенсі, але яка не була б частково рекурсивною функцією.

З тези Чорча як наслідок випливає, що клас рекурсивних функцій збігається з класом всюди визначених алгоритмічно обчислюваних функцій, заданих на множині натуральних чисел.

Значення тези Чорча полягає в наступному:

1. Прийняття тези Чорча перетворює інтуїтивні поняття алгоритму, обчислюваності, розв'язності в об'єкти математичного вивчення. Це дає можливість ставити і вирішувати питання алгоритмічної обчислюваності функцій, алгоритмічної розв'язності або не розв’язності масових проблем.

2. Використання тези Чорча як аксіоми дозволяє в багатьох випадках замінити формальні завдання алгоритмів на їх неформальний опис. Це дає істотне спрощення доведень, дозволяє виділити основну ідею доведення або побудови, звільняючи його від зайвих деталей. Однак доведення на основі тези Чорча завжди має бути ретельно обґрунтованим! У разі виникнення сумнівів необхідно вміти провести чисто формальне доведення.

Отже, є всі підстави прийняти тезу Чорча.

Нумерація пар і n-ок натуральних чисел

Поняття примітивно рекурсивних, рекурсивних та частково-рекурсивних функцій визначені на розширеній множині натуральних чисел N_0. Для того, щоб перенести ці поняття на інші множини, елементи яких можуть мати складну будову, будемо нумерувати елементи цих множин натуральними числами.

Спочатку розглянемо функцію нумерації пар і n-ок натуральних чисел, які називають ***канторовськими.***

Всі пари натуральних чисел розташуємо в послідовність так, що пара (x,y) йде раніше пари (u,v), якщо $x+y<u+v$ або $x+y=u+v$ та $x<u$.

Отримаємо таку послідовність пар натуральних чисел:

$$(0,0),\ (0,1),\ (1,0),\ (0,2),\ (1,1),\ (2,0),\ (0,3),\ldots$$

Номер пари (x,y) в такій послідовності позначають $C(x,y)$ і називають ***канторовським номером*** пари (x,y), причому нумерацію починають з нуля.

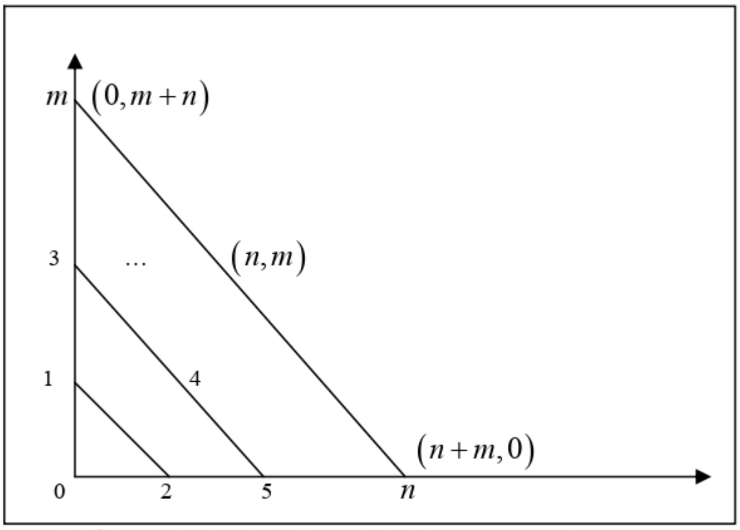
Отже,

$$C(0,0)=0,\ C(0,1)=1,\ C(1,0)=2,\ C(0,2)=3,\ C(1,1)=4,\ C(2,0)=5,\ \ldots$$

Ліву та праву компоненти пари з номером позначимо відповідно $l(n)$ та $r(n)$:

$$l(n)=x,\ r(n)=y.$$

Функції $l(n)$ і $r(n)$ називаються ***лівою*** та ***правою координатними функціями***. Покажемо, що функції $C(x,y)$, $l(n)$ і $r(n)$ записуються через звичайні арифметичні функції.



Теорема. Функції $C(x,y)$, $l(n)$, $r(n)$ – примітивно рекурсивні.

Доведення.

Пара (x,y) знаходиться на x-ому місці за парою $(0,x+y)$:

$$(0,x+y),\ (1,x+y-1),\ \ldots,\ (x,y),\ \ldots,\ (x+y,0),\ \ldots$$

Перед парою $(0,x+y)$ знаходиться $x+y$ груп пар з однаковою сумою компонент, причому в групі з сумою компонент m міститься $m+1$ пара. Тому перед парою $(0,x+y)$ знаходиться усього

$$1+2+\ldots+(x+y)=\frac{(x+y+1)(x+y)}{2} \text{ пар.}$$

Тому

$$C(x,y)=x+\frac{(x+y+1)(x+y)}{2}=\frac{2x+(x+y+1)(x+y)}{2}=\frac{(x+y)^2+3x+y}{2},$$

$$n=C(x,y)=\left[\frac{(x+y)^2+3x+y}{2}\right]. \qquad (1)$$

Отже, функція $C(x,y)$ – примітивно рекурсивна.