ЛР1. Методична розробка 2

1.3. Загальна ідея ітераційних методів уточнення кореня

Такі широко відомі методи уточнення дійсного кореня нелінійного рівняння, як метод хорд, дотичних, простої ітерації, об’єднані однією ідеєю. Сформулюємо цю загальну ідею ітераційних методів.

Нехай відомо, що рівняння (1.1) на відрізку $[a, b]$ має єдиний дійсний ізольований корінь ξ, функція $f(x) \in C^{(2)}[a,b]$, причому $f'(x)$ та $f''(x)$ зберігають знак на $[a, b]$. Рівняння (1.1) перепишемо в іншому, більш зручному для ітерування вигляді

$$x = \varphi(x). \tag{1.2}$$

Перехід від вигляду (1.1) до вигляду (1.2) можна зробити багатьма способами. Зупинимося на одному з них. Помножимо обидві частини рівності (1.1) на деяку неперервну функцію $\psi(x) \neq 0,\ x \in [a,b]$, а потім до лівої та правої частин одержаної рівності додамо x. Рівність (1.1) перетвориться до вигляду

$$x + \psi(x) \cdot f(x) = 0 \cdot \psi(x) + x.$$

Якщо позначити

$$\varphi(x) \equiv x + \psi(x) \cdot f(x), \tag{1.3}$$

то прийдемо до вигляду (1.2). Очевидно, що корені рівняння (1.2) та (1.1) збігаються на відрізку $[a, b]$. Кожен конкретний ітераційний метод пропонує свій варіант вибору функції $\psi(x)$.

Далі, на відрізку $[a, b]$ вибираємо довільну точку x_0 як початкове наближення до кореня ξ, а потім за допомогою ***ітераційної формули***

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, \cdots \tag{1.4}$$

будуємо послідовність

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots. \tag{1.5}$$

Будемо казати, що ***ітераційний метод збігається***, якщо послідовність (1.5), побудована цим методом, прямує до кореня ξ, тобто, виконується умова

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi, \quad \text{або (що одне і те ж)} \ \lim_{n\to\infty} \left|\xi - x_n\right| = 0. \tag{1.6}$$

Якщо ітераційний метод збігається, то число x_n – окремий член послідовності (1.5) – можна вважати наближеним значенням кореня ξ.

Сформулюємо достатні умови збіжності ітераційного методу.

Теорема (збіжності). Нехай рівняння (1.2) має єдиний дійсний корінь $\xi \in [a,b]$ і нехай функція $\varphi(x)$ така, що виконуються умови:

$\varphi(x) \in [a,b]$ при $\forall x \in [a,b]$;

$\exists \varphi'(x)$ і $|\varphi'(x)| \le q < 1$ для $\forall x \in [a,b]$.

Тоді ітераційний метод буде збігатися при будь-якому виборі нульового наближення $x_0 \in [a,b]$, і для наближеного розв'язку x_n, обчисленого за формулою (1.4), буде виконуватися нерівність

$$|\xi - x_n| \le \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|. \tag{1.7}$$

При застосуванні ітераційних методів нерівність (1.7) використовується для того, щоб оцінити похибку наближеного розв'язку x_n. Як тільки виконується умова

$$\frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon, \tag{1.8}$$

то $|\xi - x_n| \le \varepsilon$. На нерівність (1.8) можна дивитись як на умову зупинення ітераційного процесу, при цьому число q треба знайти за формулою

$$q = \max_{x \in [a;\, b]} |\varphi'(x)|. \tag{1.9}$$

Якщо число q важко знайти, то замість нерівності (1.7) можна використати іншу нерівність, а саме:

$$|\xi - x_n| \le \frac{|f(x_n)|}{\min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)|}\ . \tag{1.10}$$

Для доведення нерівності (1.10) візьмемо розвинення

$$f(x_n) = f(\xi) + (x_n - \xi) \cdot f'(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in (\xi, x_n),$$

і, припускаючи, що $f'(x) \ne 0,\ \ x \in [a,b]$, знайдемо потрібну різницю

$$\xi - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(\tilde{x})}.$$

Звідси і випливає нерівність (1.10). Якщо не тільки $f'(x) \ne 0$, а і $f''(x)$ зберігає знак на $[a, b]$, то $f'(x)$ монотонна, тоді $\min\limits_{x \in [a,b]} |f'(x)| = \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$.

Крім оцінок (1.7), (1.10), які мають місце для всієї множини ітераційних методів, викладених у цьому параграфі, кожен ітераційний метод окремо може мати свою формулу для оцінки похибки наближеного розв'язку.

Зауваження

1. Інколи на практиці близькість наближеного розв'язку x_n до кореня ξ оцінюють по значенню $|f(x_n)|$, а не $|\xi - x_n|$. Як видно з рис. 1.3, це не завжди правильно.

Число $|f(x_n)|$ може бути меншим, ніж ε, а точка x_n при цьому знаходиться ще далеко від точки ξ. Можливо навпаки, число $|f(x_n)|$ ще перевищує ε, а відстань $|\xi - x_n|$ мала і вже треба зупиняти ітераційний процес.

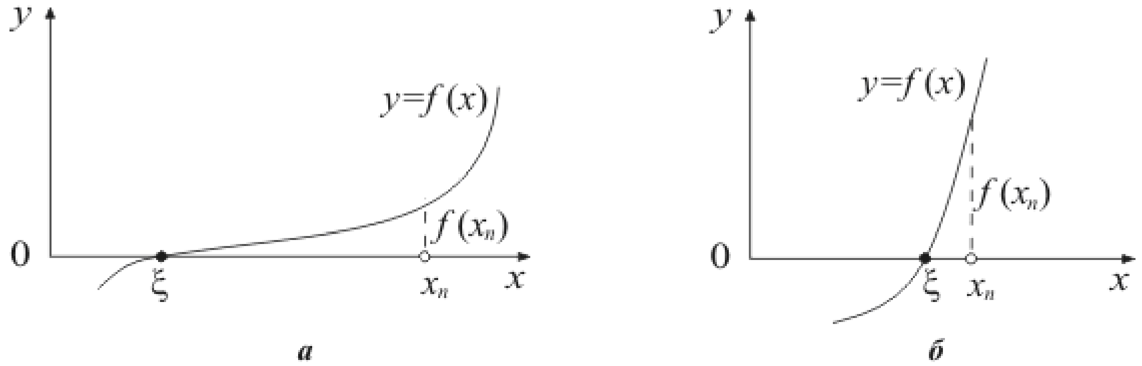

Рис. 1.3. Геометричне зображення похибки:
а **- випадок повільної зміни функції;** ***б*** **- випадок швидкої зміни функції**

2. Оскільки метод ітерації збігається при будь-якому виборі $x_0 \in [a, b]$, якщо $|\varphi'(x)| < 1$, то цей метод має ***властивість самовиправленості***. Це означає, що окрема помилка при обчислені деякого наближення x_n, яка не виводить це наближення за межі відрізка $[a, b]$, не впливає на кінцевий результат. Помилкове значення x_n можна вважати новим нульовим наближенням x_0. Можливо зміниться лише обсяг обчислювальної роботи. Властивість самовиправленості робить ітераційний метод одним із *надійних методів обчислень*.
3. Очевидно, що швидкість збіжності буде тим вищою, чим меншим буде число q. Це випливає з нерівності (1.7). Крім того, з ітераційної формули (1.4) можна знайти залежність між похибками двох сусідніх ітерацій. Дійсно, позначимо $\xi - x_n \equiv r_n$, $n = 0,1,\ldots$ На підставі ітераційної формули (1.4) маємо залежність $\xi - r_{n+1} = \varphi(\xi - r_n)$, $n = 0,1,\cdots$. Звідси знаходимо $r_{n+1} = \xi - \varphi(\xi - r_n)$. Вважаючи похибку r_n малою величиною, перепишемо останню рівність у вигляді розкладання в ряд Тейлора
$$r_{n+1} = \xi - \varphi(\xi) + \frac{r_n}{1!}\varphi'(\xi) - \frac{r_n^2}{2!}\varphi''(\xi) + \ldots - \frac{(-r_n)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi) + O\left(|r_n|^{m+1}\right).$$

Оскільки ξ – точний корінь рівняння, то $\xi = \varphi(\xi)$ і остаточно маємо

$$r_{n+1} = \frac{r_n}{1!}\varphi'(\xi) - \frac{r_n^2}{2!}\varphi''(\xi) + \ldots - \frac{(-r_n)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi) + O\left(|r_n|^{m+1}\right).$$

Якщо в рівнянні (1.2) функція $\varphi(x)$ така, що виконуються умови

$$\varphi'(\xi) = 0,\ \varphi''(\xi) = 0,\ \ldots,\ \varphi^{(m-1)}(\xi) = 0,\ \varphi^{(m)}(\xi) \neq 0, \tag{1.11}$$

то

$$r_{n+1} = (-1)^{m+1}\frac{(r_n)^m}{m!}\varphi^{(m)}(\xi) + O\left(\left|r_n\right|^{m+1}\right) = O\left(\left|r_n\right|^m\right).$$

У цьому випадку кажуть, що метод має ***m-й порядок збіжності***. Можна очікувати тим більшої швидкості збіжності методу, чим більшим є число m .

1.4. Геометричне зображення ітераційних методів

Нехай в околі дійсного кореня $x=\xi$ дійсна функція $\varphi(x)$, що стоїть праворуч у рівнянні $x=\varphi(x)$, має неперервну похідну $\varphi'(x)$, таку що $\left|\varphi'(x)\right| \le q < 1$. Якщо $\varphi'(x)$ зберігає знак в околі кореня ξ, то ітераційні методи мають наочну геометричну інтерпретацію (рис. 1.4). Беремо ітераційну формулу $x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0,1,\cdots$

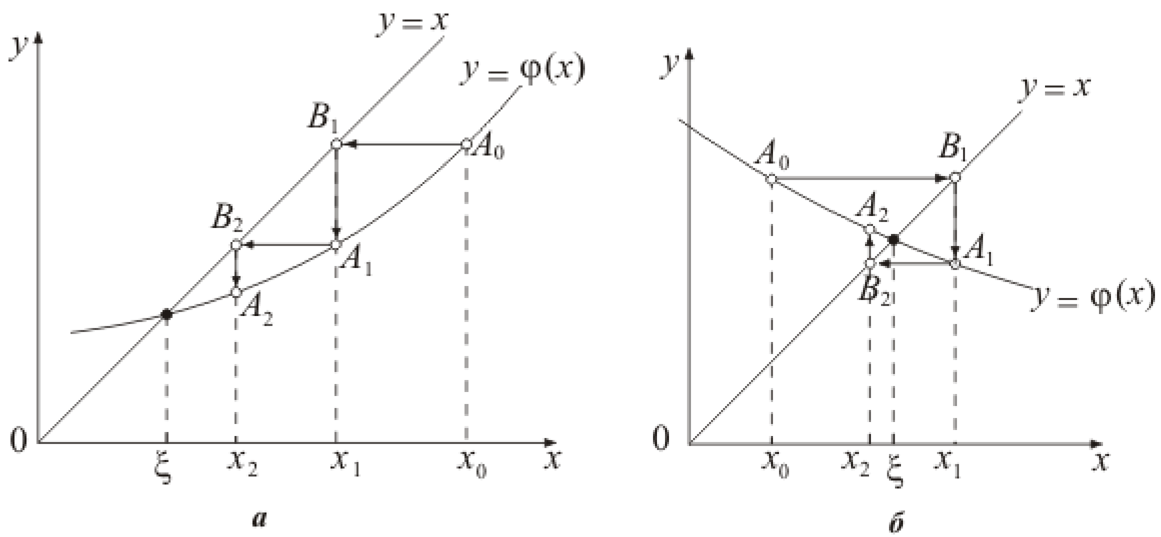

Рис. 1.4. Геометричне зображення ітераційних методів:
***а* - сходинки, *б* - спіраль**

На площині *xoy* будуємо графіки функцій $y=x$, та $y=\varphi(x)$. Абсциса точки перетину цих графіків і буде шуканим дійсним коренем ξ рівняння (1.2). Починаючи з деякої точки $A_0(x_0, \varphi(x_0))$, будуємо ламану $A_0 B_1 A_1 B_2 A_2 \ldots$, ланки якої по черзі паралельні осям *ох* та *оу*. На кривій $y=\varphi(x)$ розташовані вершини $A_0, A_1, A_2, \ldots$, а вершини $B_1, B_2, \ldots$, – на прямій $y=x$. Спільні абсциси точок A_1 та B_1, A_2 та B_2, очевидно, є послідовними наближеннями x_1, x_2 кореня ξ.

У випадку *а*, коли $0 < \varphi'(x) < 1$, всі наближення знаходяться з того боку від кореня ξ, з якого взято нульове наближення x_0. Послідовність наближень ***монотонно*** прямує до кореня ξ, тобто кожне наступне наближення ближче до точного кореня ніж попереднє.

У випадку *б*, коли $-1 < \varphi'(x) < 0$, наближення розташовані по черзі то з одного то з іншого боку від кореня ξ. Кожне наступне наближення знаходиться по інший бік від кореня ξ, ніж попереднє. У цьому випадку послідовність наближень збігається до кореня ξ ***за коливним законом***. Це означає, що корінь знаходиться завжди між двома сусідніми ітераціями, тому зручно виходити з ітераційного процесу за умови $|x_n - x_{n-1}| \le \varepsilon$. Зауважимо, що коли ітераційний процес збігається за коливним законом, то треба прослідкувати, щоб $x_1 \in [a, b]$.

З рис. 1.4 видно, що коли в околі кореня ξ значення функції $|\varphi'(x)|$ є близькими до одиниці, то збіжність ітераційного процесу буде дуже повільною, а якщо значення $|\varphi'(x)|$ є близькими до нуля, то ітераційний процес збігається швидко.

Якщо $\max\limits_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| > 1$, то ітераційний процес буде розбігатися. Геометрично це показано на рис.1.5 при $\varphi'(x) > 1$.

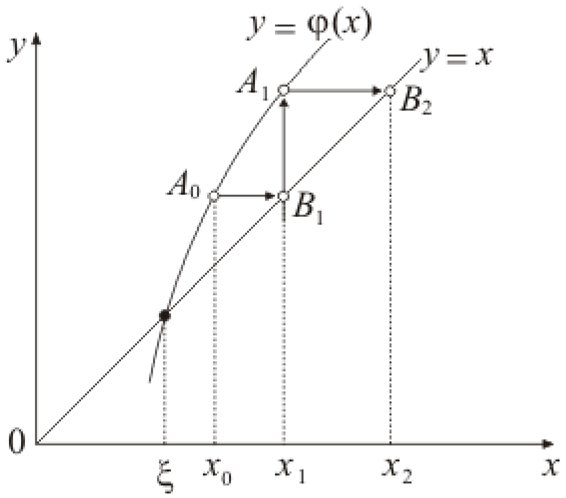

Рис. 1.5. Геометричне зображення розбіжного методу

Якщо $\varphi'(x)$ не зберігає знак в околі кореня ξ, але умова збіжності $|\varphi'(x)| < 1$ виконується, то ітераційний процес збігатиметься за схемою, яка буде якоюсь комбінацією розглянутих двох випадків, показаних на рис. 1.4. При цьому для алгоритму не можна дати такого наочного геометричного зображення, як у розглянутих двох випадках.

Ітераційні методи відрізняються один від одного вибором функції $\psi(x)$ у формулі (1.3). Далі розглянемо деякі конкретні варіанти вибору функції $\psi(x)$. Вони відповідають відомим класичним ітераційним методам: методу простої ітерації, методу дотичних, методу хорд.

==