МРЗ (Викладач Бойко Л.Т.)

Тема: **МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗДР.**

6.4. Багатокрокові методи розв'язування задачі Коші

Розв'язуючи задачу Коші, багатокрокові методи, на відміну від однокрокових, при визначені y_{i+1} використовують декілька вже відомих попередніх значень $y_i,\ y_{i-1},\ y_{i-2},\ \cdots, y_{i-n}$. У випадку змінного кроку h_i використання багатокрокових методів значно ускладнюється, тому надалі вважаємо всі вузлові точки рівновіддаленими. Серед багатокрокових методів широко відомими є методи Адамса.

6.4.1. Екстраполяційні методи Адамса

Розв'язуємо задачу Коші (6.1), (6.2). Приймаємо, що $x_i,\ i=\overline{0,N}$ – система рівновіддалених вузлових точок із сталим кроком h, тобто

$$x_i = x_0 + ih,\ i = 0,1,\ \cdots, N;\ h = \frac{b-a}{N}.$$

Вважаємо, що $y_i,\ i=\overline{0,n}$ – відомі значення, вони можуть бути обчислені, наприклад, методом Рунге-Кутта. Шукаємо $y(x_{i+1})$ за формулою (6.12), в якій

$$\Delta y_i = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx = \int\limits_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \cdot dx\ . \qquad (6.39)$$

Для наближеного обчислення інтеграла (6.39) функцію $y'(x),\ x \in [x_i, x_{i+1}]$ наблизимо алгебраїчним інтерполяційним многочленом степеня n, побудованим за вузлами $x_i,\ x_{i-1},\ \cdots, x_{i-n}$ (рис. 6.3). Таке інтерполювання за межі таблиці значень функції має назву екстраполювання. З цим і пов'язана назва методу.

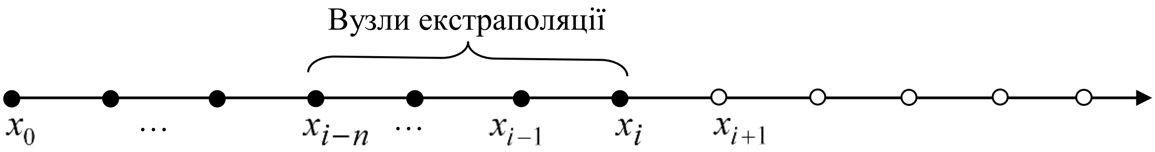

Рис. 6.3. Схема вузлів, що використовуються

Побудуємо поліном за формулою Лагранжа

$$y'(x) = L_n(x) + R_n(x). \tag{6.40}$$

Тут

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(y'_{i-k} \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-k} - x_{i-m}} \right), \tag{6.41}$$

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+2)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}. \tag{6.42}$$

Приймемо до уваги те, що вузли розташовані рівновіддалено. Позначимо

$$x = x_i + h\alpha,\ \alpha \in [0;1],\ \ x_{i-k} = x_i - kh,\ \ \ x_{i-m} = x_i - mh.$$

Напишемо окремо добутки, що присутні у виразах (6.41), (6.42)

$$\prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} \frac{(x - x_{i-m})}{(x_{i-k} - x_{i-m})} = \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} \frac{(\alpha + m)}{(m-k)} =$$

$$= \frac{1}{(-k)\cdot(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(n-k)} \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha + m) = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha + m), \tag{6.43}$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{m=0}^{n} (x - x_{i-m}) = h^{n+1} \cdot \prod_{m=0}^{n} (\alpha + m). \tag{6.44}$$

Підставивши (6.43) та (6.44) до функцій (6.41), (6.42), будемо мати

$$L_n(x_i + \alpha h) = \sum_{k=0}^{n} y'_{i-k} \frac{(-1)^k}{k!\ (n-k)!} \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha + m), \tag{6.45}$$

$$R_n(x_i + \alpha h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot y^{(n+2)}(\xi(x_i + \alpha h)) \cdot \prod_{m=0}^{n} (\alpha + m). \tag{6.46}$$

Тепер підставимо (6.45), (6.46) до формули (6.40), а потім під знак інтеграла (6.39). У результаті знаходимо приріст функції

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x)dx = h\int_0^1 y'(x_i + \alpha h) \cdot d\alpha =$$

$$= h\sum_{k=0}^{n} y'_{i-k}\,\frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!}\int_0^1 \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha+m)d\alpha + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 y^{(n+2)}(\xi(x_i+\alpha h))\prod_{m=0}^{n}(\alpha+m)d\alpha$$

.

Позначимо

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k!\,(n-k)!}\int_0^1 \prod_{\substack{m=0,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha+m)\cdot d\alpha,\quad k=\overline{0,n}, \qquad (6.47)$$

$$r_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!}\int_0^1 y^{(n+2)}(\xi(x_i+\alpha h))\prod_{m=0}^{n}(\alpha+m)\cdot d\alpha .$$

Тут r_n – похибка (залишковий член) екстраполяційної формули Адамса. Виділимо головний член цієї похибки, для чого напишемо розкладання

$$y^{(n+2)}(\xi) = y^{(n+2)}(x_i) + (\xi - x_i)\cdot y^{(n+3)}(\zeta),\quad \zeta\in(\xi, x_i)$$

і підставимо його у вираз для похибки r_n, одержимо

$$r_n = \frac{h^{n+2}y^{(n+2)}(x_i)}{(n+1)!}\int_0^1 \prod_{m=0}^{n}(\alpha+m)d\alpha + \frac{h^{n+3}}{(n+1)!}\int_0^1 y^{(n+3)}(\zeta(\alpha))\frac{(\xi-x_i)}{h}\prod_{m=0}^{n}(\alpha+m)\,d\alpha$$

.

Позначимо

$$C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\int_0^1 \prod_{m=0}^{n}(\alpha+m)\cdot d\alpha,$$

тоді

$$r_n = h^{n+2}y^{(n+2)}(x_i)\cdot C_{n+1} + O(h^{n+3}). \qquad (6.48)$$

Розрахункова формула екстраполяційного методу Адамса набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h\sum_{k=0}^{n} A_k\cdot f(x_{i-k}, y_{i-k}). \qquad (6.49)$$

Далі розглянемо декілька частинних випадків.

1. При $n=0$ маємо одноточковий варіант екстраполяційного методу Адамса. За формулою (6.49) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot A_0\cdot f(x_i, y_i).$$

Невідомий коефіцієнт A_0 обчислюємо за формулою (6.47).

$$A_0 = \frac{1}{1 \cdot 1}\int_0^1 1 \cdot d\alpha = 1.$$

Отже, розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Використовуючи (6.48), знаходимо похибку цієї розрахункової формули $r_0 = O(h^2)$. Отже, отримали формулу Ейлера.

2. При $n = 1$ будемо мати двоточковий екстраполяційний метод Адамса. На підставі формули (6.49) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_0 \cdot f(x_i, y_i) + A_1 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})).$$

Коефіцієнти A_0, A_1 обчислюємо за формулою (6.47)

$$A_0 = \frac{1}{1 \cdot 1}\int_0^1 (1+\alpha) \cdot d\alpha = \left.\left(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}\right)\right|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$A_1 = \frac{-1}{1 \cdot 1}\int_0^1 \alpha \cdot d\alpha = -\left.\frac{\alpha^2}{2}\right|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = -\frac{1}{2}.$$

Остаточно розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Локальна похибка добутої формули випливає з (6.46) $r_1 = O(h^3)$.

3. Розглянемо ще один випадок екстраполяційного методу Адамса при $n = 2$. Формула (6.49) має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_0 \cdot f(x_i, y_i) + A_1 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + A_2 \cdot f(x_{i-2}, y_{i-2})).$$

Аналогічно двом попереднім випадкам обчислюємо коефіцієнти

$$A_0 = \frac{23}{12}, \quad A_1 = -\frac{4}{3}, \quad A_2 = \frac{5}{12}.$$

Тепер можна записати розрахункову формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})), \quad i = \overline{0, N-1}$$

із похибкою на кроці $r_2 = O(h^4)$.

Інтерполяційний многочлен для функції $y'(x) = f(x, y(x))$ можна представити не тільки у формі Лагранжа, а також у формі Ньютона для інтерполювання в кінці таблиці. У цьому випадку екстраполяційний метод Адамса може бути записаним через скінченні різниці функції $y'(x)$.

6.4.2. Інтерполяційні методи Адамса

Цей метод будує розрахункові формули аналогічно екстраполяційному методу, але при обчисленні приросту функції (6.39) наближує функцію $y'(x)$ на відрізку $[x_i, x_{i+1}]$ інтерполяційним алгебраїчним многочленом степеня $n+1$, побудованим за вузлами $x_{i+1},\ x_i,\ x_{i-1},\ \cdots,\ x_{i-n}$ (рис. 6.4).

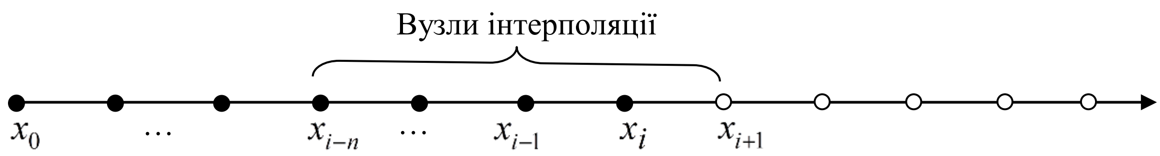

Рис. 6.4. Схема вузлів, що використовуються

Напишемо інтерполяційний многочлен разом із залишком

$$y'(x) = \sum_{k=-1}^{n} \left(y'_{i-k} \prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n} \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-k} - x_{i-m}} \right) + \frac{y^{(n+3)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+2}(x)}{(n+2)!}. \qquad (6.50)$$

Тут $\omega_{n+2}(x) = \prod_{m=-1}^{n} (x - x_{i-m})$.

Нехай так же як і в екстраполяційному методі

$$x = x_i + h\alpha,\ \alpha \in [0;1],\ \ x_{i-k} = x_i - kh,\quad x_{i-m} = x_i - mh,$$

тоді

$$\prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n} \frac{(x - x_{i-m})}{(x_{i-k} - x_{i-m})} = \prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n} \frac{(\alpha + m)}{(m-k)} =$$

$$= \frac{1}{(-1-k)\cdot(-k)\cdot(-k+1)\cdots(-1)\cdot 1\cdots(n-k)} \prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n} (\alpha + m) =$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,(n-k)!}\prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n}(\alpha+m), \tag{6.51}$$

$$\omega_{n+2}(x)=\prod_{m=-1}^{n}(x-x_{i-m})=h^{n+2}\cdot\prod_{m=-1}^{n}(\alpha+m). \tag{6.52}$$

Підставивши (6.51), (6.52) у функцію (6.50), добудемо формулу для $y'(x)$

$$y'(x)=y'(x_i+\alpha h)=\sum_{k=-1}^{n}y'_{i-k}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,(n-k)!}\prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n}(\alpha+m)+$$

$$+\frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i+\alpha h))}{(n+2)!}\cdot h^{n+2}\prod_{m=-1}^{n}(\alpha+m). \tag{6.53}$$

Тепер інтегруємо вираз (6.53) для того, щоб обчислити приріст функції (6.39)

$$\Delta y_i=h\int_0^1 y'(x_i+\alpha h)d\alpha=h\sum_{k=-1}^{n}y'_{i-k}\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,(n-k)!}\int_0^1\prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n}(\alpha+m)d\alpha+$$

$$+h^{n+3}\int_0^1\frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i+\alpha h))}{(n+2)!}\prod_{m=-1}^{n}(\alpha+m)d\alpha.$$

Позначимо

$$A_k=\frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!\,(n-k)!}\int_0^1\prod_{\substack{m=-1,\\ m\neq k}}^{n}(\alpha+m)d\alpha,\quad k=\overline{-1,n}, \tag{6.54}$$

$$r_n=h^{n+3}\int_0^1\frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i+\alpha h))}{(n+2)!}\prod_{m=-1}^{n}(\alpha+m)d\alpha=O(h^{n+3}) \tag{6.55}$$

та приходимо до наближеної розрахункової формули

$$y_{i+1}=y_i+h\sum_{k=-1}^{n}A_k\cdot f(x_{i-k},y_{i-k}) \tag{6.56}$$

з похибкою $r_n=O(h^{n+3})$.

Наведемо декілька частинних випадків розрахункової формули інтерполяційних методів Адамса.

1. При $n=-1$ маємо із формули (6.56)

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot A_{-1} \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Невідомий коефіцієнт A_{-1} обчислюємо за формулою (6.54)

$$A_{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 1 \cdot d\alpha = 1.$$

Отже, розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Це неявний метод Ейлера з локальною похибкою $r_{-1} = O(h^2)$.

2. При $n = 0$ будемо мати двоточковий інтерполяційний метод Адамса. На підставі формули (6.56) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_{-1} \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}) + A_0 \cdot f(x_i, y_i)).$$

Коефіцієнти A_{-1}, A_0 обчислюємо за формулою (6.54)

$$A_{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2}, \qquad A_0 = \frac{-1}{1 \cdot 1} \int_0^1 (\alpha - 1) \cdot d\alpha = -\left(\frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \Bigg|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = \frac{1}{2}.$$

Остаточно розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Локальна похибка добутої формули випливає із (6.55): $r_0 = O(h^3)$. Це неявний модифікований метод Ейлера (див. (6.15)).

3. Аналогічно попереднім двом випадкам добуваємо розрахункову формулу інтерполяційного методу Адамса при $n = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (5 f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8 f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})), \quad i = \overline{1, N-1}$$

із похибкою на кроці $r_1 = O(h^4)$.

Порівнюючи екстраполяційні та інтерполяційні методи Адамса, можна відмітити таке: екстраполяційні методи є явними, а інтерполяційні – неявними; при одному і тому ж n порядок локальної похибки (відносно h) інтерполяційного методу Адамса є на одиницю більшим, тобто інтерполяційні методи Адамса є точнішими за екстраполяційні.

Методи Адамса явний і неявний використовуються разом у багатокрокових методах, які мають назву «***прогноз – корекція***». На кожному кроці явний метод використовується один раз для обчислення «прогнозу».

Потім за допомогою неявного методу будується ітераційний процес. У цілому метод «прогноз – корекція» є явним. Обидва методи рекомендується брати одного порядку точності.

Порівняємо між собою методи Рунге-Кутта та методи Адамса.

1. Методи Рунге-Кутта є однокроковими, а методи Адамса – багатокроковими. Отже, у методів Рунге-Кутта на старті немає проблем (вони самостартуючі), а методи Адамса на старті потребують допомоги інших методів.
2. У методах Рунге-Кутта функція $f(x, y)$ в одному і тому вузлі обчислюється декілька разів, а добутий результат використовується тільки один раз (для обчислення наближеного значення функції $y(x)$ у наступному вузлі). У методах Адамса функція $f(x, y)$ для кожного вузла обчислюється один раз, а використовується для обчислення шуканих значень функції $y(x)$ у декількох наступних вузлах. Якщо $f(x, y)$ є складною функцією, то вказана особливість робить методи Адамса економнішими.
3. Методи Рунге-Кутта легко узагальнюються на випадок змінного кроку інтегрування, а методи Адамса дуже ускладнюються у випадку нерівномірного розташування вузлів сітки.