ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

Озн. Випадковою величиною (в.в.) називають таку величину, яка внаслідок випробування може набувати лише одного числового значення, яке зумовлене результатом експерименту.

<u>**Позначення**</u> $\xi, \eta, \varsigma, \ldots$ або $X, Y, Z, \ldots$ **.**

Нехай множина результатів експерименту Ω , а окремі результати ω . В.в. є функцією від ω : $\xi = \xi(\omega), \quad \omega \in \Omega$, яка набуває числових значень.

<u>Типи випадкових величин</u>

Розрізняють в.в. дискретні, неперервні, змішані та інші.

<u>Дискретні в.в.</u>

Озн. В.в. $\xi = \xi(\omega)$ називається дискретною, якщо множина її значень скінчена, або нескінчена, але злічена, і для кожного її значення x_i визначена ймовірність

$$p_i = P\{\xi = x_i\}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Відповідність між можливими значення в.в. і ймовірностями цих значень називають <u>розподілом ймовірностей в.в.</u>

Для дискретних в.в. цю відповідність можна задати у вигляді таблиці

ξ	$x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n \quad \ldots$
P	$p_1 \quad p_2 \quad \ldots \quad p_n \quad \ldots$

Оскільки події $\{\xi = x_1\}, \{\xi = x_2\}, \ldots, \{\xi = x_n\}, \ldots$ становлять повну групу подій, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

(сума може бути скінченна), $p_k \geq 0, \; k = 1, 2, \ldots$.

<u>Приклади дискретних в.в.</u>

ξ – число виграшів на куплені лотерейних білетів,

ξ – число викликів, які надходять на станцію швидкої допомоги протягом дня,

ξ – число вкладів, внесених в банк протягом дня і т. і.

Приклад 1. Надаючи банківський кредит комерційній фірмі, здійснюють прогноз можливих значень збитків та відповідних значень ймовірності:

Оцінка можливого результату	Прогнозовані збитки тис. грош. од.	Значення ймовірності
Песимістична	30	0.2
Стримана	6	0.5
Оптимістична	-40	0.3

Написати закон розподілу збитків (в.в. ξ).

Маємо

ξ	$-40 \quad 6 \quad 30$
P	$0.3 \quad 0.5 \quad 0.2$

Як бачимо при заданні дискретних в.в. ми розглядаємо їх закони розподілу, які відображають значення в.в. x_i та його ймовірність $p_i, \quad i \geq 1$.

Таке описання в.в. ξ не є єдиним, і, головне, універсальним.

Розглянемо **загальне означення в.в.**

Озн. Числова функція $\xi = \xi(\omega)$**,** $\omega \in \Omega$ називається в.в. , якщо для всякого множина належить -алгебрі, тобто визначена ймовірність .

Озн. Функцією розподілу ймовірностей в.в. ξ називають функцію $F(x)$, яка для кожного x відображає ймовірність того, що в.в. набуде значення, менше ніж x :

$$\boxed{F(x) = P\{\xi < x\}, \;\; x \in R^1}$$

($F(x)$ іноді називають інтегральною функцією розподілу).

Властивості

1. $0 \leq F(x) \leq 1;$

2. $P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a), \quad$ якщо $a < b$;

3. Якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;

   ($F(x)$ – монотонно не спадає).

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1;$

5. $F(x)$ – неперервна зліва: $\lim\limits_{x \to y-0} F(x) = F(y);$

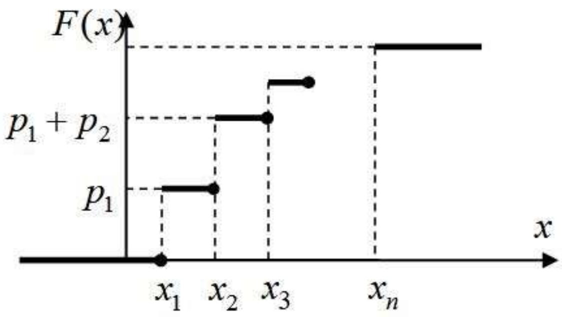
6. $F(x)$ або зовсім не має розривів (стрибків), або може мати скінченну кількість розривів, або нескінчену, але злічену;

7. $P\{\xi = x_0\} = F(x_0 + 0) - F(x_0)$

(якщо $F(x)$ неперервна, то $P\{\xi = x_0\} = 0$).

Зауваження. Якщо якась функція володіє властивостями 3, 4, 5 , то вона може бути функцією розподілу випадкової величини на деякому ймовірнісному просторі.

Графік функції розподілу дискретної в.в. має ступінчатий вигляд (нижче на малюнку зображений графік ф. р. дискретної в.в. зі скінченою множиною значень):



Приклад 2. В.в. має наступний розподіл

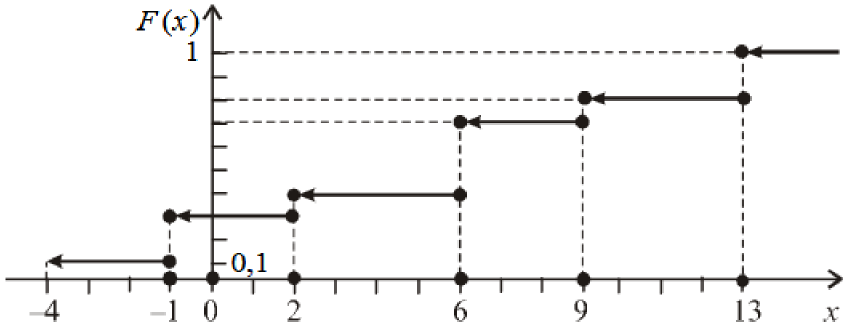
ξ	–4	–1	2	6	9	13
P	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.2

Знайти вираз для функції розподілу (ф. р.) $F(x)$ та намалювати її графік. Знайти ймовірність того, що величина ξ набуде значення, що не перевищує 5.

Розв. За означенням $F(x)$ маємо:

$$F(x)\begin{cases} 0, & x \le -4 \\ 0.1, & -4 < x \le -1, \\ 0.1+0.2, & -1 < x \le 2, \\ 0.1+0.2+0.1, & 2 < x \le 6, \\ 0.1+0.2+0.1+0.3, & 6 < x \le 9, \\ 0.1+0.2+0.1+0.3+0.1, & 9 < x \le 13, \\ 1, & x > 13 \end{cases} \qquad F(x)\begin{cases} 0, & x \le -4 \\ 0.1, & -4 < x \le -1, \\ 0.3, & -1 < x \le 2, \\ 0.4, & 2 < x \le 6, \\ 0.7, & 6 < x \le 9, \\ 0.8, & 9 < x \le 13, \\ 1, & x > 13 \end{cases}$$

Графік $F(x)$ має вигляд:



$P\{\xi \le 5\} = P\{\xi = -4\} + P\{\xi = -1\} + P\{\xi = 2\} = 0.1 + 0.2 + 0.1 = 0.4$

Неперервні в.в. (в.в. з абсолютно неперервним розподілом)

Озн. В.в. називають неперервною, якщо її функція розподілу $F(x)$ представима у вигляді:

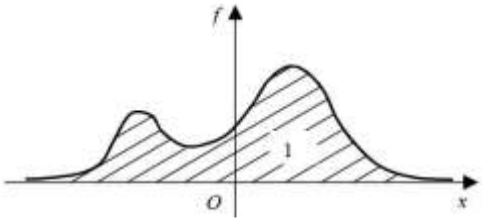
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du, \quad x \in R^1.$$

Зауваження. У цьому випадку $F(x)$ є абсолютно неперервною функцією.

Функцію $f(x)$ називають **щільністю розподілу в.в.** ξ**.**

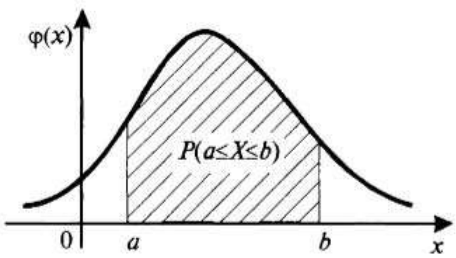
Властивості $f(x)$**:**

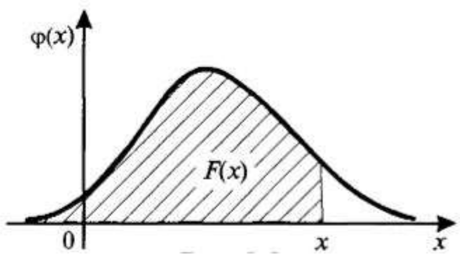
1) $f(x) \ge 0,\ x \in R^1$;



2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)du = 1$;

3) $P\{a \le \xi < b\} = \int_{a}^{b} f(u)du$;





4) Майже для всіх дійсних x

$$F'(x) = f(x).$$

Зауваження. Якщо $f(x)$ – неперервна функція, то

$$P\{x \le \xi < x + \Delta x\} = \int_{x}^{x+\Delta x} f(u)du \approx f(x)\Delta x \quad .$$