

ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. О. ГОНЧАРА  
ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ  
КАФЕДРА ОБЧИСЛЮВАЛЬНОЇ МАТЕМАТИКИ ТА МАТЕМАТИЧНОЇ  
КІБЕРНЕТИКИ

Лабораторна робота №4  
на тему «Чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних  
диференціальних рівнянь I-го порядку»  
з курсу «Методи обчислень»  
Варіант № 7

Виконав:  
студент групи ПА-19-2  
Ільяшенко Єгор

## Зміст

Основні теоретичні відомості .....	3
Постановка задачі .....	3
Постановка завдання .....	7
Метод Ейлера та його модифікації .....	8
Метод Рунге-Кутта .....	12
Метод Адамса.....	19
Аналіз результатів.....	28
Висновки.....	29
Перелік використаних джерел .....	30

## Основні теоретичні відомості

### Постановка задачі

**Постановка 1.** Нехай на відрізку  $a \leq x \leq b$  треба знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b], \quad (6.1)$$

який у точці  $x_0 \in [a, b]$  набуває заданих початкових значень

$$y(x_0) = y_0. \quad (6.2)$$

Ця задача називається задачею Коші для рівняння (6.1). Умова (6.2) називається початковою. Найчастіше точкою  $x_0$  є початок відрізка інтегрування  $[a, b]$ . Але це не обов'язково. Можливі випадки задачі Коші, коли  $x_0 = b$ , або  $x_0$  – це якась внутрішня точка відрізка  $[a, b]$ .

Вважаємо, що функція  $f(x, y)$  є такою, що розв'язок задачі (6.1), (6.2) існує і є єдиним. Достатньою умовою існування єдиного розв'язку з класу  $C[a, b]$  є неперервність функції  $f(x, y)$  за всіма аргументами і виконання умови Ліпшица по змінній  $y$ .

**Постановка 2.** Задачу Коші можна формулювати для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y_1'(x) = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ y_2'(x) = f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n), \\ \dots, \\ y_n'(x) = f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{cases} \quad (6.3)$$

при таких початкових умовах

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad i = \overline{1, n}. \quad (6.4)$$

Задачу (6.3), (6.4) можна звести до задачі вигляду (6.1), (6.2), якщо впровадити такі векторні функції:

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots \\ y_n'(x) \end{bmatrix}, \quad F(x, Y(x)) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \dots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

Тепер задачу (6.3), (6.4) можна записати у векторному вигляді

$$\begin{aligned} Y'(x) &= F(x, Y(x)), \quad x \in [a, b], \\ Y(x_0) &= Y_0. \end{aligned}$$

Отже, задача (6.3), (6.4) зведена до вигляду (6.1), (6.2).

**Постановка 3.** Задачу Коші можна формулювати для диференціального рівняння  $n$ -го порядку

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)), \quad x \in [a, b]. \quad (6.5)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{00}, \\ y'(x_0) = y_{10}, \\ \dots, \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1,0}. \end{cases} \quad (6.6)$$

Задача (6.5), (6.6) може бути зведена до вигляду (6.3), (6.4), якщо впровадити такі позначення

$$\begin{cases} y_1(x) = y'(x), \\ y_2(x) = y'_1(x) = y''(x), \\ \dots, \\ y_{n-1}(x) = y'_{n-2}(x). \end{cases} \quad (6.7)$$

З урахуванням (6.7) перепишемо рівняння (6.5) у вигляді системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} y'(x) = y_1, \\ y'_1(x) = y_2, \\ \dots, \\ y'_{n-2}(x) = y_{n-1}, \\ y'_{n-1}(x) = f(x, y, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}). \end{cases} \quad (6.8)$$

Початкові умови (6.6) з урахуванням позначень (6.7) запишемо у вигляді

$$\begin{cases} y(x_0) = y_{00}, \\ y_1(x_0) = y_{10}, \\ \dots, \\ y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0}. \end{cases} \quad (6.9)$$

Отже задача (6.5), (6.6) зведена до вигляду (6.8), (6.9), який, у свою чергу, можна привести до вигляду (6.1), (6.2).

У подальшому, методи розв'язування задачі Коші будемо вивчати на рівнянні першого порядку, тобто на задачі (6.1), (6.2), узагальнюючи відповідні розрахункові формули на випадки задач (6.3), (6.4), або (6.5), (6.6).

Точні методи розв'язування задачі Коші вивчаються в курсі диференціальних рівнянь. Ці методи дозволяють добути точний розв'язок в аналітичному вигляді. Чисельні методи розв'язування задачі Коші дозволяють знайти наближений розв'язок у вигляді таблиці. Першим кроком будь-якого чисельного методу розв'язування задачі Коші є розбиття відрізка  $[a, b]$  на скінченну кількість частин за допомогою вузлових точок  $x_i, i = \overline{0, n}, n \geq 1$  таких, що

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Позначимо  $h_i = x_{i+1} - x_i, (i = \overline{0, n-1})$  відстань між двома сусідніми точками, тобто крок, з яким змінюється координата точки  $x_i$ . Сітку вузлів вважаємо взагалі нерівномірною, хоча, в окремих випадках, вона може стати рівномірною, коли

$$h_i = h = \frac{b-a}{n}, (i = \overline{0, n-1}).$$

Оскільки в точці  $x_0$  значення функції  $y(x_0)$  є відомим, то надалі розглянемо відрізок  $[x_i, x_{i+1}]$ , вважаючи, що в точці  $x_i$  значення  $y(x_i)$  відомо. Поставимо собі задачу знайти значення  $y(x_{i+1})$ . Для цього проінтегруємо рівняння (6.1) за відрізком  $[x_i, x_{i+1}]$ , одержимо

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \cdot dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx. \quad (6.10)$$

Позначимо

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx. \quad (6.11)$$

Значення  $\Delta y_i$  будемо називати **приростом функції**  $y(x)$  у точці  $x_i$ . Але за формулою (6.11) неможливо обчислити приріст, бо невідома залежність  $y(x)$

Інтеграл у лівій частині рівності (6.10) можна обчислити. Отже, маємо із (6.10)

$$y(x_{i+1}) - y(x_i) = \Delta y_i.$$

Звідси приходимо до формули

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \Delta y_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (6.12)$$

Формула (6.12) лежить в основі більшості чисельних методів розв'язування задачі Коші. Вона дає вираз значення шуканої функції  $y(x)$  у кожній наступній точці  $x_{i+1}$  через її значення у попередній точці  $x_i$ . Різні методи розв'язування задачі Коші відрізняються один від одного способом наближеного обчислення інтеграла (6.11), тобто приросту функції. Найпростішим з чисельних методів є метод Ейлера, який ще називають методом ламаних або методом дотичних.



## Постановка завдання

Дано звичайне диференціальне рівняння I-го порядку

$$y'(x) = f(x, y(x)), \quad x \in [a, b] \quad (1)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0, \quad x_0 \in [a, b], \quad (2)$$

де  $[a, b]$  – заданий відрізок числової осі;  $f(x, y)$  – відома неперервна функція своїх аргументів,  $y(x)$  – шукана функція на  $[a, b]$ ;  $x_0 = a$ ,  $y_0$  – відомі сталі.

1. Розробити підпрограми розв'язання задачі Коші (1), (2) методами Ейлера, Рунге-Кутта  $s$ -го порядку точності і явним  $s$ -кроковим методом Адамса. Розроблена програма має надавати чисельний розв'язок задачі Коші кожним із зазначених методів у рівновіддалених точках відрізка  $[a, b]$  з кроком  $h = \frac{b-a}{N}$ , де

$N > 0$  – задане натуральне число.

2. Якщо це можливо, то знайти розв'язок  $y^*(x)$  задачі Коші (1), (2) у квадратурах або за допомогою будь-якого стандартного математичного пакету прикладних програм.

3. Роздрукувати у вигляді порівняльної таблиці числові розв'язки, отримані відповідно до п.1.

4. Виконати аналіз похибки числових розв'язків задачі (1),(2), порівнюючи наближені розв'язки з точним (якщо точний розв'язок відомий), або порівнюючи наближені розв'язки між собою.

5. Побудувати і порівняти між собою графіки отриманих розв'язків на  $[a, b]$ .

Функція  $f(x, y)$ , значення  $a$ ,  $b$ ,  $x_0$ ,  $y_0$  та  $s > 1$  визначаються варіантом індивідуального завдання.

## Метод Ейлера та його модифікації

Метод Ейлера є історично першим методом чисельного розв'язування задачі Коші (6.1), (6.2). У практиці обчислень цей метод використовується рідко через невисоку точність. Але на його прикладі зручно пояснити деякі поняття та ідеї побудови і дослідження чисельних методів розв'язування задачі Коші.

Для наближеного обчислення інтеграла (6.11) застосуємо одноточкову квадратурну формулу лівих прямокутників

$$\Delta y_i = h_i f(x_i, y(x_i)) + O(h_i^2).$$

Відкинувши член порядку  $O(h_i^2)$  і позначивши через  $y_i$  наближене значення величини  $y(x_i)$ , одержимо з (6.12) таку розрахункову формулу

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.13)$$

Формула (6.13) має назву **формули Ейлера**, а чисельний метод розв'язування задачі Коші, визначений формулою (6.13), називають **методом Ейлера**.

Дамо геометричне пояснення методу Ейлера (рис. 6.1). Нехай  $y = y^{(0)}(x)$  є графіком шуканої інтегральної кривої, що проходить через точку  $A_0 = (x_0, y_0)$ . Треба знайти  $y^{(0)}(x_1)$ , тобто ординату точки  $A_1 = (x_1, y^{(0)}(x_1))$ . Однак, за формулою Ейлера обчислюється ордината точки  $B_1 = (x_1, y_1)$ , де  $y_1 = y_0 + h_0 \cdot f(x_0, y_0)$ . Точка  $B_1$  розташована на дотичній, проведеній до графіка функції  $y = y^{(0)}(x)$  у точці  $(x_0, y_0)$ . Отже, замість того, щоб рухатись за графіком функції  $y = y^{(0)}(x)$ , метод дає можливість рухатись за дотичною  $A_0B_1$  до цього графіка. Довжина відрізка  $A_1B_1$  є похибкою на кроці в точці  $x_1$ .

Точка  $B_1$  належить уже іншій інтегральній кривій диференціального рівняння (6.1). Нехай її рівнянням буде  $y = y^{(1)}(x)$ . Аналогічно попереднім розрахункам за формулою Ейлера обчислюємо значення  $y_2 = y_1 + h_1 \cdot f(x_1, y_1)$ , тобто знаходимо ординату точки  $C_2 = (x_2, y_2)$ , що розташована на дотичній до графіка функції  $y = y^{(1)}(x)$ , проведеній в точці  $B_1$ . Довжина відрізка  $B_2C_2$  є похибкою на кроці, а довжина відрізка  $A_2C_2$  є повною похибкою в точці  $x_2$ .



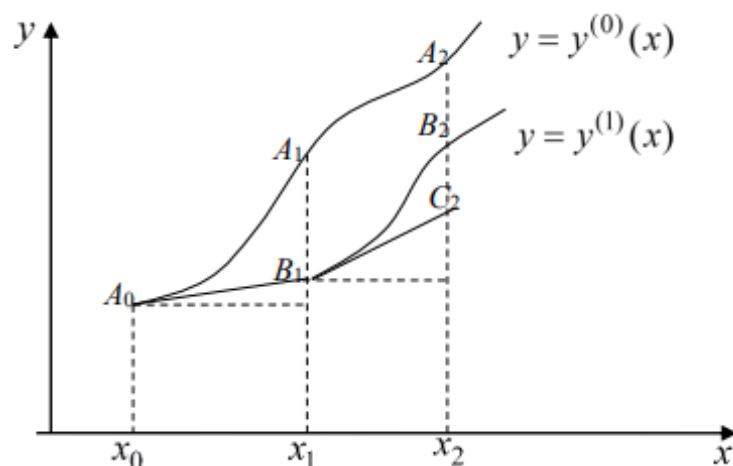


Рис. 6.1. Геометричне зображення методу Ейлера

**Похибкою на кроці**, або **локальною похибкою**, будемо називати ту похибку, з якою обчислюємо  $y(x_{i+1})$ , якщо припустити, що  $y(x_i)$  відомо точно. Але відомим точно може бути лише  $y(x_0)$ . У точці  $x_1$  значення  $y(x_1)$  обчислено вже наближено з похибкою  $O(h_0^2)$ . Ця похибка перейде до значення  $y_2$  і потім в усі подальші значення  $y_i$ ,  $i = \overline{3, n}$ . Отже, **повна похибка** при обчисленні значень  $y(x_i)$ ,  $i = \overline{2, n}$  може бути більшою, ніж локальна, оскільки похибка на кожному кроці, переходячи в наступні кроки, може накопичуватися. Звідси випливає, що в точці  $x_n$  повна похибка може стати досить великою. Це є **недоліком методу Ейлера**. Але його **перевагою** є простота розрахункової формули (6.13). Методом Ейлера рекомендується користуватися, якщо розв'язок потрібно знайти тільки на короткому проміжку і з невеликою точністю.

З рис. 6.1 видно, що в результаті його застосування отримана ламана  $A_0B_1C_2$ , кожна ланка якої дотикається відповідної інтегральної кривої. Ця ламана називається **ламанною Ейлера**. Інколи сам метод Ейлера називають **методом ламаних** або **методом дотичних**.

Метод Ейлера належить до класу **однокрокових**, тобто таких методів розв'язування задачі Коші, які дозволяють знайти наближене значення розв'язку у вузлі  $x_{i+1}$ , використовуючи значення розв'язку тільки в одному попередньому вузлі  $x_i$ .

На відміну від однокрокових, **багатокрокові** методи розв'язування задачі Коші дозволяють відшукувати розв'язок у черговій вузловій точці  $x_{i+1}$ , використовуючи інформацію про розв'язок більш ніж в одній попередній вузловій точці.

**Модифікований метод Ейлера** можна добути, якщо для наближеного обчислення інтеграла (6.11) застосувати квадратурну формулу трапецій

$$\Delta y_i = \frac{h_i}{2} (f(x_i, y(x_i)) + f(x_i + h_i, y(x_i + h_i))) + O(h_i^3). \quad (6.14)$$

Відкинувши в (6.14) похибку  $O(h_i^3)$ , приходимо до наближеного рівняння відносно шуканого значення  $y_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})). \quad (6.15)$$

Рівняння (6.15) є прикладом *неявного однокрокового методу*, оскільки воно не розв'язано відносно  $y_{i+1}$ . Але, якщо використати формулу Ейлера, то в межах прийнятої похибки  $O(h_i^3)$  нелінійне рівняння (6.15) можна лінеаризувати. Робиться це в такий спосіб. У правій частині формули (6.14) замінимо значення  $y(x_i + h_i)$  таким розвиненням

$$y(x_i + h_i) = y(x_i) + h_i \cdot f(x_i, y(x_i)) + O(h_i^2) = y^*(x_{i+1}) + O(h_i^2),$$

де позначено

$$y^*(x_{i+1}) \equiv y(x_i) + h_i \cdot f(x_i, y(x_i)).$$

Тоді

$$f(x_{i+1}, y(x_i + h_i)) = f(x_{i+1}, y^*(x_{i+1}) + O(h_i^2)) = f(x_{i+1}, y^*(x_{i+1})) + O(h_i^2). \quad (6.16)$$

Підставивши (6.16) до (6.14), приходимо до двох розрахункових формул:

$$\begin{cases} y_{i+1}^* = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h_i}{2} (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)). \end{cases} \quad (6.17)$$

Локальна похибка формул (6.17) є  $O(h_i^3)$ , тобто на порядок меншою, ніж у формулі Ейлера. Розрахункові формули (6.17) і є *модифікацією формули Ейлера*.

Якби для наближеного обчислення інтеграла (6.11) була використана квадратурна формула середніх прямокутників, то це дозволило б добути ще одну модифікацію методу Ейлера з локальною похибкою того ж порядку, що і в методі (6.17). Далі розглянемо метод Рунге-Кутта, який узагальнює метод Ейлера та його модифікації.

```
> #Метод Ейлера
 $Y_{Euler} := [evalf(seq(a..b, h))]:$ 
 $Y_{Euler}[1] := y0:$ 
```

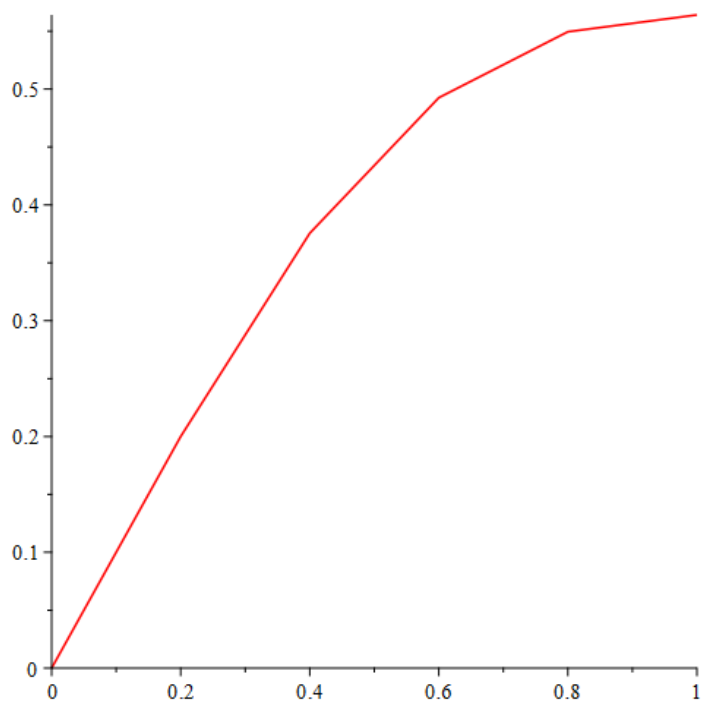
```
for i from 2 to n + 1 do
```

```
 $Y_{Euler}[i] := evalf(Y_{Euler}[i-1] + h \cdot g(x[i-1], Y_{Euler}[i-1])):$ 
```

```
end do:
```

```
>  $Y_{Euler}$ ;
plot( $(x, Y_{Euler})$ , style=line, color="Red");
```

```
[0, 0.2000000000, 0.3755165124, 0.4925613020, 0.5495076088, 0.5640537814]
```



## Метод Рунге-Кутта

### 6.3. Методи Рунге-Кутта

Нехай треба знайти розв'язок задачі Коші (6.1), (6.2). Для цього на відрізку  $[a, b]$  фіксуємо точки  $x_i, i = \overline{0, n}$  із змінним кроком  $h_i = x_{i+1} - x_i, i = \overline{0, n-1}$ . Будемо шукати значення функції  $y(x)$  у цих точках, використовуючи розрахункову формулу (6.12). Розглянемо окремий відрізок  $[x_i, x_{i+1}]$ , вважаючи, що значення  $y(x_i)$  є відомим, та будемо шукати приріст (6.11).

#### 6.3.1. Загальна ідея методів

Будемо користуватися позначеннями, прийнятими в [7]. Для наближеного обчислення приросту функції  $\Delta y_i$  за формулою (6.11) впровадимо до розгляду три набори параметрів:

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q; \quad (6.18)$$

$$\begin{cases} \beta_{10}; \\ \beta_{20}, \beta_{21}; \\ \dots; \\ \beta_{q0}, \beta_{q1}, \dots, \beta_{q, q-1}; \end{cases} \quad (6.19)$$

$$A_0, A_1, \dots, A_q. \quad (6.20)$$

За допомогою параметрів (6.18), (6.19) складемо величини:

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h_i, y_i + \beta_{10} \cdot \varphi_0), \\ \varphi_2 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_2 \cdot h_i, y_i + \beta_{20} \cdot \varphi_0 + \beta_{21} \cdot \varphi_1), \\ \dots, \\ \varphi_q = h_i \cdot f(x_i + \alpha_q \cdot h_i, y_i + \sum_{m=0}^{q-1} \beta_{qm} \cdot \varphi_m). \end{cases} \quad (6.21)$$

Тепер запишемо лінійну комбінацію величин (6.21) із коефіцієнтами (6.20)



$$\sum_{j=0}^q A_j \cdot \varphi_j. \quad (6.22)$$

Лінійна комбінація (6.22) буде аналогом квадратурної суми для обчислення інтеграла (6.11), тобто приросту функції  $\Delta y_i$ . Параметри (6.18), (6.19), (6.20) виберемо так, щоб (6.22) якомога точніше наближувала приріст функції  $\Delta y_i$ . Для цього похибку наближення, тобто величину

$$r_q(h_i) = \Delta y_i - \sum_{j=0}^q A_j \cdot \varphi_j,$$

як функцію від кроку  $h_i$ , розвинемо у ряд Тейлора в околі значення  $h_i = 0$ .  
Маємо

$$r_q(h_i) = r_q(0) + \frac{h_i}{1!} r_q'(0) + \frac{h_i^2}{2!} r_q''(0) + \dots + \frac{h_i^k}{k!} r_q^{(k)}(0) + \frac{h_i^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h_i), \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (6.23)$$

При цьому вважаємо, що права частина диференціального рівняння (6.1) є достатньо гладкою функцією, так що всі необхідні похідні існують і є неперервними функціями на  $[a, b]$ .

Якщо параметри (6.18), (6.19), (6.20) вдасться вибрати так, щоб для розвинення (6.23) виконувались умови

$$\begin{cases} r_q(0) = 0, \\ r_q'(0) = 0, \\ \dots, \\ r_q^{(k)}(0) = 0, \end{cases} \quad (6.24)$$

то похибка  $r_q(h_i)$  буде величиною того ж порядку мализни, що і  $h_i^{k+1}$ , тобто

$$r_q(h_i) = \frac{h_i^{k+1}}{(k+1)!} r_q^{(k+1)}(\theta h_i), \quad 0 \leq \theta \leq 1. \quad (6.25)$$

Число  $k$  будемо називати **порядком** (ступенем) **точності методу** Рунге-Кутта. При цьому локальна похибка визначається формулою (6.25), а розрахункова формула приймає вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^q A_j \cdot \varphi_j. \quad (6.26)$$

Фіксуючи число  $q$ , будемо мати конкретний варіант методу Рунге-Кутта.

Записати в загальному вигляді (тобто при будь-якому значенні числа  $q$ ) систему рівнянь (6.24) для визначення параметрів (6.18), (6.19), (6.20) важко. Тому розглянемо лише декілька прикладів побудови однокрокових методів за способом Рунге-Кутта.

### 6.3.2. Метод Рунге-Кутта першого порядку точності

При  $q = 0$  маємо лише один параметр  $A_0$ . Параметрів (6.18) та (6.19) не буде зовсім. Формула (6.26) набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + A_0 h_i f(x_i, y_i).$$

Похибку  $r_0(h_i)$  розкладемо в ряд за степенями  $h_i$

$$\begin{aligned} r_0(h_i) &= \Delta y_i - A_0 h_i f(x_i, y_i) = y(x_i + h_i) - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) = \\ &= y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \dots - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) = \\ &= h_i f(x_i, y_i) \cdot (1 - A_0) + \frac{h_i^2}{2} \left( f'_x + f'_y \cdot f \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} + O(h_i^3) \end{aligned}$$

Від цього розвинення знаходимо похідні по  $h_i$ :

$$\begin{aligned} r'_0(h_i) &= (1 - A_0) \cdot f(x_i, y_i) + h_i \left( f'_x + f'_y \cdot f \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} + O(h_i^2), \\ r''_0(h_i) &= \left( f'_x + f'_y \cdot f \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} + O(h_i). \end{aligned}$$

Далі підставимо ці похідні до умови (6.24):

$$\begin{aligned} r_0(0) &\equiv 0, \\ r'_0(0) &= (1 - A_0) \cdot f(x_i, y_i) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_0 = 1, \\ r''_0(0) &= \left( f'_x + f'_y \cdot f \right) \Big|_{x=x_i, y=y_i} \neq 0 \end{aligned}$$

Отже,  $k = 1$ . Розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h_i \cdot f(x_i, y_i),$$

тобто вона збігається з формулою Ейлера. Похибку на кроці запишемо на підставі формули (6.25)



$$r_0(h_i) = \frac{h_i^2}{2} r_0''(\theta h_i) = O(h_i^2).$$

Отже, метод Ейлера є методом Рунге-Кутта першого порядку точності.

### 6.3.3. Метод Рунге-Кутта другого порядку точності

Нехай  $q = 1$ , тоді із множини коефіцієнтів (6.18), (6.19), (6.20) шуканими будуть лише чотири

$$\alpha_1, \beta_{10}, A_0, A_1. \quad (6.27)$$

За формулами (6.21) маємо

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f(x_i + \alpha_1 \cdot h_i, y_i + \beta_{10} \cdot h_i \cdot f). \end{cases}$$

Отже,

$$\Delta y_i \approx A_0 \cdot \varphi_0 + A_1 \cdot \varphi_1.$$

Займемося вибором параметрів (6.27). Для цього запишемо формулу для локальної похибки

$$r_1(h_i) = y(x_i + h_i) - y(x_i) - A_0 h_i f(x_i, y_i) - A_1 h_i f(x_i + \alpha_1 h_i, y_i + \beta_{10} h_i f(x_i, y_i)). \quad (6.28)$$

Праву частину рівності (6.28) розкладемо в ряд за степенями  $h_i$ , залишаючи тільки доданки з  $h_i^3$ . Виконаємо це розвинення поступово

$$\begin{aligned} y(x_i + h_i) &= y(x_i) + h_i y'(x_i) + \frac{h_i^2}{2} y''(x_i) + \frac{h_i^3}{3!} y'''(x_i) + \dots = \\ &= y(x_i) + h_i f(x_i, y_i) + \frac{h_i^2}{2} \left( f'_x + f'_y \cdot f \right) \Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + \\ &+ \frac{h_i^3}{6} \left( f''_{xx} + 2f''_{xy} \cdot f + f''_{yy} \cdot f^2 + f'_y (f'_x + f'_y \cdot f) \right) \Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + O(h_i^4). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Щоб розкласти функцію  $\varphi_1(h_i)$  в ряд за степенями  $h_i$  використаємо таку формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f(x+a, y+b) &= f(x, y) + \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y) + \frac{1}{2} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 f(x, y) + \\ &+ \dots + \frac{1}{m!} \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right)^m f(x, y) + \dots. \end{aligned}$$

На підставі цієї формули маємо

$$\begin{aligned}\varphi_1(h_i) &\equiv h_i f(x_i + \alpha_1 h_i, y_i + \beta_{10} h_i f(x_i, y_i)) = \\ &= h_i f(x_i, y_i) + h_i^2 \cdot \left( \alpha_1 \cdot f'_x + \beta_{10} \cdot f \cdot f'_y \right) \Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + \\ &+ \frac{h_i^3}{2} \left( \alpha_1^2 \cdot f''_{xx} + 2\alpha_1 \cdot \beta_{10} \cdot f \cdot f''_{xy} + \beta_{10}^2 \cdot f^2 \cdot f''_{yy} \right) \Big|_{\substack{x=x_i, \\ y=y_i}} + O(h_i^4). \quad (6.30)\end{aligned}$$

Підставивши (6.29), (6.30) до (6.28), маємо шукане розкладання

$$r_1(h_i) = (1 - A_0 - A_1) \cdot h_i f(x_i, y_i) + \frac{h_i^2}{2} D_1 + \frac{h_i^3}{6} D_2 + O(h_i^4), \quad (6.31)$$

де

$$\begin{aligned}D_1 &= f'_x + f \cdot f'_y - 2A_1 \left( \alpha_1 \cdot f'_x + \beta_{10} \cdot f \cdot f'_y \right) = (1 - 2\alpha_1 A_1) f'_x + (1 - 2\beta_{10} A_1) f \cdot f'_y, \\ D_2 &= f''_{xx} + 2 \cdot f \cdot f''_{xy} + f^2 \cdot f''_{yy} + f'_y \cdot \left( f'_x + f \cdot f'_y \right) - \\ &- 3A_1 \left( \alpha_1^2 \cdot f''_{xx} + 2\alpha_1 \cdot \beta_{10} \cdot f \cdot f''_{xy} + \beta_{10}^2 \cdot f^2 \cdot f''_{yy} \right). \quad (6.32)\end{aligned}$$

У коефіцієнтах  $D_1, D_2$  функція  $f(x, y)$  та всі її частинні похідні обчислюються в точці  $(x_i, y_i)$ . Від функції (6.31) знаходимо потрібні похідні:

$$\begin{aligned}r'_1(h_i) &= (1 - A_0 - A_1) \cdot f(x_i, y_i) + h_i D_1 + \frac{h_i^2}{2} D_2 + O(h_i^3), \\ r''_1(h_i) &= D_1 + h_i D_2 + O(h_i^2), \\ r'''_1(h_i) &= D_2 + O(h_i).\end{aligned}$$

Підставимо ці похідні до умови (6.24):

$$\begin{aligned}r_1(0) &\equiv 0, \\ r'_1(0) &= (1 - A_0 - A_1) \cdot f(x_i, y_i) = 0, \quad \Rightarrow \quad A_0 + A_1 = 1. \\ r''_1(0) &= D_1 = 0, \quad \Rightarrow \quad 2\alpha_1 A_1 = 1, \quad 2\beta_{10} A_1 = 1. \\ r'''_1(0) &= D_2 \neq 0.\end{aligned}$$

Отже, для чотирьох невідомих коефіцієнтів (6.27) маємо систему трьох рівнянь

$$\begin{cases} A_0 + A_1 = 1, \\ 2\alpha_1 A_1 = 1, \\ 2\beta_{10} A_1 = 1. \end{cases} \quad (6.33)$$

Добута система (6.33) має безліч розв'язків. Кожен з них визначає окрему розрахункову формулу другого порядку точності, тобто формулу з локальною похибкою  $O(h_i^3)$ .

Якщо вибрати  $\alpha_1 = \beta_{10} = 1$ ,  $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$ , то добудемо розрахункову формулу модифікованого методу Ейлера (6.17). При  $\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2}$ ,  $A_0 = 0$ ,  $A_1 = 1$  добудемо ще одну модифікацію методу Ейлера. Зрозуміло, що таких модифікацій можна побудувати скільки завгодно.

Якщо виконуються умови (6.33), то формула (6.31) для локальної похибки стане такою

$$r_1(h_i) = \frac{h_i^3}{6} D_2 + O(h_i^4).$$

У деяких випадках за рахунок вдалого вибору параметрів (6.27) можна зменшити коефіцієнт  $D_2$ , а значить і похибку. Наприклад, якщо до виразу (6.32) підставимо значення  $\alpha_1 = \beta_{10} = \frac{1}{2A_1}$ , взяті із умов (6.33), то будемо мати

$$D_2 = (f_{xx}'' + 2 \cdot f \cdot f_{xy}'' + f^2 \cdot f_{yy}'') \cdot \left(1 - \frac{3}{4A_1}\right) + f_y' \cdot (f_x' + f \cdot f_y').$$

Якщо далі вибрати  $A_1 = \frac{3}{4}$ , то  $D_2 = f_y' \cdot (f_x' + f \cdot f_y')$ . При такому виборі  $A_1$  розрахункова формула (6.26) набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(\varphi_0 + 3\varphi_1), \text{ де}$$

$$\begin{cases} \varphi_0 = h_i \cdot f(x_i, y_i), \\ \varphi_1 = h_i \cdot f\left(x_i + \frac{2}{3} \cdot h_i, y_i + \frac{2}{3} \cdot \varphi_0\right). \end{cases}$$

Розрахункові формули методів Рунге-Кутта більш високих порядків точності можна знайти в [7].

```
> #Метод Рунге-Кутты (3 порядок)
```

```
YРунга := [ evalf( seq( a .. b, h ) ) ] :
```

```
YРунга[ 1 ] := y0 :
```

```
for i from 2 to n + 1 do
```

```
  K1 := h · g( x[ i - 1 ], YРунга[ i - 1 ] ) :
```

```
  K2 := h · g( x[ i - 1 ] +  $\frac{h}{2}$ , YРунга[ i - 1 ] +  $\frac{K_1}{2}$  ) :
```

```
  K3 := h · g( x[ i - 1 ] +  $\frac{3 \cdot h}{4}$ , YРунга[ i - 1 ] +  $\frac{3}{4} \cdot K_2$  ) :
```

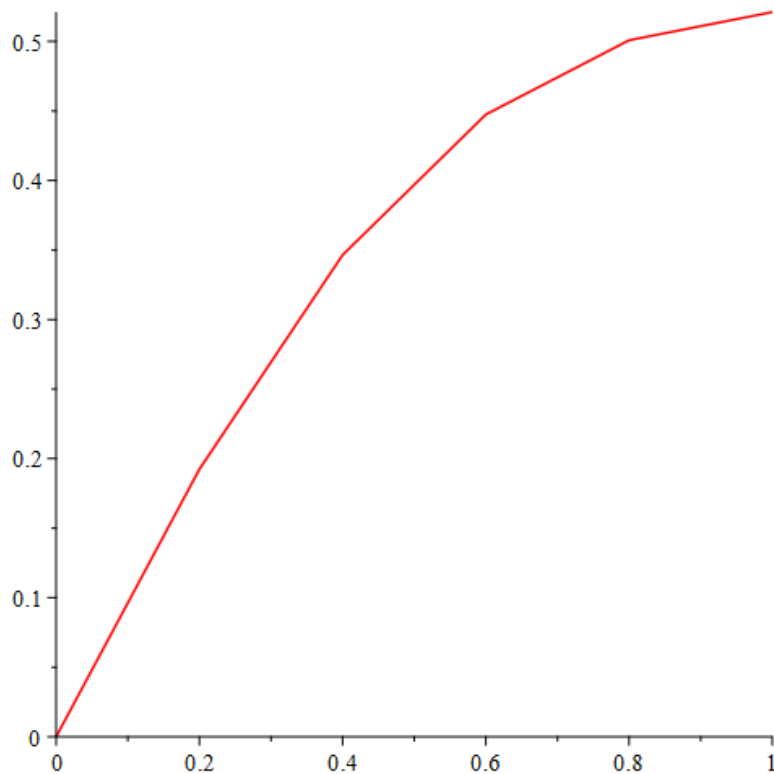
```
  YРунга[ i ] := evalf( YРунга[ i - 1 ] +  $\frac{1}{9} \cdot (2 \cdot K_1 + 3 \cdot K_2 + 4 \cdot K_3)$  ) :
```

```
end do :
```

```
> YРунга;
```

```
plot( ( x, YРунга ), style = line, color = "Red" );
```

```
[ 0, 0.1923158161, 0.3464132736, 0.4474193413, 0.5008440612, 0.5210600417 ]
```



## Метод Адамса

### 6.4. Багатокрокові методи розв'язування задачі Коші

Розв'язуючи задачу Коші, багатокрокові методи, на відміну від однокрокових, при визначенні  $y_{i+1}$  використовують декілька вже відомих попередніх значень  $y_i, y_{i-1}, y_{i-2}, \dots, y_{i-n}$ . У випадку змінного кроку  $h_i$  використання багатокрокових методів значно ускладнюється, тому надалі вважаємо всі вузлові точки рівновіддаленими. Серед багатокрокових методів широко відомими є методи Адамса.

#### 6.4.1. Екстраполяційні методи Адамса

Розв'язуємо задачу Коші (6.1), (6.2). Приймаємо, що  $x_i, i = \overline{0, N}$  – система рівновіддалених вузлових точок із сталим кроком  $h$ , тобто

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad h = \frac{b-a}{N}.$$

Вважаємо, що  $y_i, i = \overline{0, n}$  – відомі значення, вони можуть бути обчислені, наприклад, методом Рунге-Кутта. Шукаємо  $y(x_{i+1})$  за формулою (6.12), в якій

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) \cdot dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) \cdot dx. \quad (6.39)$$

Для наближеного обчислення інтеграла (6.39) функцію  $y'(x)$ ,  $x \in [x_i, x_{i+1}]$  наблизимо алгебраїчним інтерполяційним многочленом степеня  $n$ , побудованим за вузлами  $x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$  (рис. 6.3). Таке інтерполювання за межі таблиці значень функції має назву екстраполювання. З цим і пов'язана назва методу.

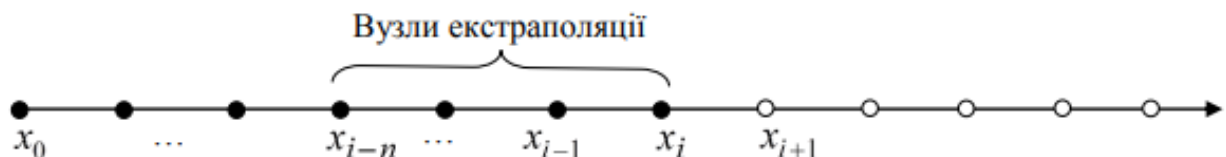


Рис. 6.3. Схема вузлів, що використовуються

Побудуємо поліном за формулою Лагранжа



$$y'(x) = L_n(x) + R_n(x). \quad (6.40)$$

Тут

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( y'_{i-k} \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-k} - x_{i-m}} \right), \quad (6.41)$$

$$R_n(x) = \frac{y^{(n+2)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+1}(x)}{(n+1)!}. \quad (6.42)$$

Приймемо до уваги те, що вузли розташовані рівновіддалено. Позначимо

$$x = x_i + h\alpha, \quad \alpha \in [0;1], \quad x_{i-k} = x_i - kh, \quad x_{i-m} = x_i - mh.$$

Напишемо окремо добутки, що присутні у виразах (6.41), (6.42)

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n \frac{(x - x_{i-m})}{(x_{i-k} - x_{i-m})} &= \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n \frac{(\alpha + m)}{(m - k)} = \\ &= \frac{1}{(-k) \cdot (-k+1) \cdots (-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdots (n-k)} \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) = \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m), \end{aligned} \quad (6.43)$$

$$\omega_{n+1}(x) = \prod_{m=0}^n (x - x_{i-m}) = h^{n+1} \cdot \prod_{m=0}^n (\alpha + m). \quad (6.44)$$

Підставивши (6.43) та (6.44) до функцій (6.41), (6.42), будемо мати

$$L_n(x_i + \alpha h) = \sum_{k=0}^n y'_{i-k} \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m), \quad (6.45)$$

$$R_n(x_i + \alpha h) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot y^{(n+2)}(\xi(x_i + \alpha h)) \cdot \prod_{m=0}^n (\alpha + m). \quad (6.46)$$

Тепер підставимо (6.45), (6.46) до формули (6.40), а потім під знак інтеграла (6.39). У результаті знаходимо приріст функції

$$\Delta y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = h \int_0^1 y'(x_i + \alpha h) \cdot d\alpha =$$



$$= h \sum_{k=0}^n y'_{i-k} \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \int_0^1 \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) d\alpha + \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 y^{(n+2)}(\xi(x_i + \alpha h)) \prod_{m=0}^n (\alpha + m) d\alpha$$

Позначимо

$$A_k = \frac{(-1)^k}{k! (n-k)!} \int_0^1 \prod_{\substack{m=0, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) \cdot d\alpha, \quad k = \overline{0, n}, \quad (6.47)$$

$$r_n = \frac{h^{n+2}}{(n+1)!} \int_0^1 y^{(n+2)}(\xi(x_i + \alpha h)) \prod_{m=0}^n (\alpha + m) \cdot d\alpha.$$

Тут  $r_n$  – похибка (залишковий член) екстраполяційної формули Адамса. Виділимо головний член цієї похибки, для чого напишемо розкладання

$$y^{(n+2)}(\xi) = y^{(n+2)}(x_i) + (\xi - x_i) \cdot y^{(n+3)}(\zeta), \quad \zeta \in (\xi, x_i)$$

і підставимо його у вираз для похибки  $r_n$ , одержимо

$$r_n = \frac{h^{n+2} y^{(n+2)}(x_i)}{(n+1)!} \int_0^1 \prod_{m=0}^n (\alpha + m) d\alpha + \frac{h^{n+3}}{(n+1)!} \int_0^1 y^{(n+3)}(\zeta(\alpha)) \frac{(\xi - x_i)}{h} \prod_{m=0}^n (\alpha + m) d\alpha$$

Позначимо

$$C_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 \prod_{m=0}^n (\alpha + m) \cdot d\alpha,$$

тоді

$$r_n = h^{n+2} y^{(n+2)}(x_i) \cdot C_{n+1} + O(h^{n+3}). \quad (6.48)$$

Розрахункова формула екстраполяційного методу Адамса набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=0}^n A_k \cdot f(x_{i-k}, y_{i-k}). \quad (6.49)$$

Далі розглянемо декілька частинних випадків.

1. При  $n=0$  маємо одноточковий варіант екстраполяційного методу Адамса. За формулою (6.49) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot A_0 \cdot f(x_i, y_i).$$

Невідомий коефіцієнт  $A_0$  обчислюємо за формулою (6.47).

$$A_0 = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 1 \cdot d\alpha = 1.$$

Отже, розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Використовуючи (6.48), знаходимо похибку цієї розрахункової формули  $r_0 = O(h^2)$ . Отже, отримали формулу Ейлера.

2. При  $n = 1$  будемо мати двоточковий екстраполяційний метод Адамса. На підставі формули (6.49) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_0 \cdot f(x_i, y_i) + A_1 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1})).$$

Коефіцієнти  $A_0, A_1$  обчислюємо за формулою (6.47)

$$A_0 = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 (1 + \alpha) \cdot d\alpha = \left( \alpha + \frac{\alpha^2}{2} \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$A_1 = \frac{-1}{1 \cdot 1} \int_0^1 \alpha \cdot d\alpha = -\frac{\alpha^2}{2} \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = -\frac{1}{2}.$$

Остаточно розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (3f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Локальна похибка добутої формули впливає з (6.46)  $r_1 = O(h^3)$ .

3. Розглянемо ще один випадок екстраполяційного методу Адамса при  $n = 2$ . Формула (6.49) має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_0 \cdot f(x_i, y_i) + A_1 \cdot f(x_{i-1}, y_{i-1}) + A_2 \cdot f(x_{i-2}, y_{i-2})).$$

Аналогічно двом попереднім випадкам обчислюємо коефіцієнти

$$A_0 = \frac{23}{12}, \quad A_1 = -\frac{4}{3}, \quad A_2 = \frac{5}{12}.$$

Тепер можна записати розрахункову формулу

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (23f(x_i, y_i) - 16f(x_{i-1}, y_{i-1}) + 5f(x_{i-2}, y_{i-2})), \quad i = \overline{0, N-1}$$

із похибкою на кроці  $r_2 = O(h^4)$ .

Інтерполяційний многочлен для функції  $y'(x) = f(x, y(x))$  можна представити не тільки у формі Лагранжа, а також у формі Ньютона для інтерполювання в кінці таблиці. У цьому випадку екстраполяційний метод Адамса може бути записаним через скінченні різниці функції  $y'(x)$ .

#### 6.4.2. Інтерполяційні методи Адамса

Цей метод будує розрахункові формули аналогічно екстраполяційному методу, але при обчисленні приросту функції (6.39) наближує функцію  $y'(x)$  на відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$  інтерполяційним алгебраїчним многочленом степеня  $n+1$ , побудованим за вузлами  $x_{i+1}, x_i, x_{i-1}, \dots, x_{i-n}$  (рис. 6.4).

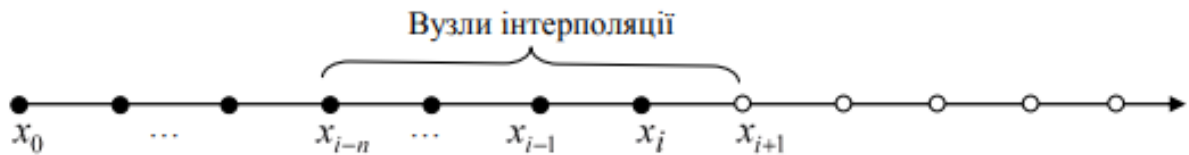


Рис. 6.4. Схема вузлів, що використовуються

Напишемо інтерполяційний многочлен разом із залишком

$$y'(x) = \sum_{k=-1}^n \left( y'_{i-k} \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n \frac{x - x_{i-m}}{x_{i-k} - x_{i-m}} \right) + \frac{y^{(n+3)}(\xi(x)) \cdot \omega_{n+2}(x)}{(n+2)!}. \quad (6.50)$$

Тут  $\omega_{n+2}(x) = \prod_{m=-1}^n (x - x_{i-m})$ .

Нехай так же як і в екстраполяційному методі

$$x = x_i + h\alpha, \quad \alpha \in [0;1], \quad x_{i-k} = x_i - kh, \quad x_{i-m} = x_i - mh,$$

тоді

$$\begin{aligned} \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n \frac{(x - x_{i-m})}{(x_{i-k} - x_{i-m})} &= \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n \frac{(\alpha + m)}{(m - k)} = \\ &= \frac{1}{(-1-k) \cdot (-k) \cdot (-k+1) \cdots (-1) \cdot 1 \cdots (n-k)} \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) = \end{aligned}$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!} \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m), \quad (6.51)$$

$$\omega_{n+2}(x) = \prod_{m=-1}^n (x - x_{i-m}) = h^{n+2} \cdot \prod_{m=-1}^n (\alpha + m). \quad (6.52)$$

Підставивши (6.51), (6.52) у функцію (6.50), добудемо формулу для  $y'(x)$

$$\begin{aligned} y'(x) = y'(x_i + \alpha h) &= \sum_{k=-1}^n y'_{i-k} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!} \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) + \\ &+ \frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i + \alpha h))}{(n+2)!} \cdot h^{n+2} \prod_{m=-1}^n (\alpha + m). \end{aligned} \quad (6.53)$$

Тепер інтегруємо вираз (6.53) для того, щоб обчислити приріст функції (6.39)

$$\begin{aligned} \Delta y_i &= h \int_0^1 y'(x_i + \alpha h) d\alpha = h \sum_{k=-1}^n y'_{i-k} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!} \int_0^1 \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) d\alpha + \\ &+ h^{n+3} \int_0^1 \frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i + \alpha h))}{(n+2)!} \prod_{m=-1}^n (\alpha + m) d\alpha. \end{aligned}$$

Позначимо

$$A_k = \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!(n-k)!} \int_0^1 \prod_{\substack{m=-1, \\ m \neq k}}^n (\alpha + m) d\alpha, \quad k = \overline{-1, n}, \quad (6.54)$$

$$r_n = h^{n+3} \int_0^1 \frac{y^{(n+3)}(\xi(x_i + \alpha h))}{(n+2)!} \prod_{m=-1}^n (\alpha + m) d\alpha = O(h^{n+3}) \quad (6.55)$$

та приходимо до наближеної розрахункової формули

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{k=-1}^n A_k \cdot f(x_{i-k}, y_{i-k}) \quad (6.56)$$

з похибкою  $r_n = O(h^{n+3})$ .

Наведемо декілька частинних випадків розрахункової формули інтерполяційних методів Адамса.

1. При  $n = -1$  маємо із формули (6.56)



$$y_{i+1} = y_i + h \cdot A_{-1} \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Невідомий коефіцієнт  $A_{-1}$  обчислюємо за формулою (6.54)

$$A_{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 1 \cdot d\alpha = 1.$$

Отже, розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Це неявний метод Ейлера з локальною похибкою  $r_{-1} = O(h^2)$ .

2. При  $n = 0$  будемо мати двоточковий інтерполяційний метод Адамса. На підставі формули (6.56) знаходимо

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot (A_{-1} \cdot f(x_{i+1}, y_{i+1}) + A_0 \cdot f(x_i, y_i)).$$

Коефіцієнти  $A_{-1}, A_0$  обчислюємо за формулою (6.54)

$$A_{-1} = \frac{1}{1 \cdot 1} \int_0^1 \alpha \cdot d\alpha = \frac{1}{2}, \quad A_0 = \frac{-1}{1 \cdot 1} \int_0^1 (\alpha - 1) \cdot d\alpha = - \left( \frac{\alpha^2}{2} - \alpha \right) \Big|_{\alpha=0}^{\alpha=1} = \frac{1}{2}.$$

Остаточно розрахункова формула набуває вигляду

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot (f(x_{i+1}, y_{i+1}) + f(x_i, y_i)), \quad i = \overline{0, N-1}.$$

Локальна похибка добутої формули впливає із (6.55):  $r_0 = O(h^3)$ . Це неявний модифікований метод Ейлера (див. (6.15)).

3. Аналогічно попереднім двом випадкам добуваємо розрахункову формулу інтерполяційного методу Адамса при  $n = 1$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{12} \cdot (5f(x_{i+1}, y_{i+1}) + 8f(x_i, y_i) - f(x_{i-1}, y_{i-1})), \quad i = \overline{1, N-1}$$

із похибкою на кроці  $r_1 = O(h^4)$ .

**Порівнюючи екстраполяційні та інтерполяційні методи Адамса,** можна відмітити таке: екстраполяційні методи є явними, а інтерполяційні – неявними; при одному і тому ж  $n$  порядок локальної похибки (відносно  $h$ ) інтерполяційного методу Адамса є на одиницю більшим, тобто інтерполяційні методи Адамса є точнішими за екстраполяційні.

Методи Адамса явний і неявний використовуються разом у багатокрокових методах, які мають назву «**прогноз – корекція**». На кожному кроці явний метод використовується один раз для обчислення «прогнозу».

Потім за допомогою неявного методу будується ітераційний процес. У цілому метод «прогноз – корекція» є явним. Обидва методи рекомендується брати одного порядку точності.

**Порівняємо між собою методи Рунге-Кутта та методи Адамса.**

1. Методи Рунге-Кутта є однокроковими, а методи Адамса – багатокроковими. Отже, у методів Рунге-Кутта на старті немає проблем (вони самостартуючі), а методи Адамса на старті потребують допомоги інших методів.
2. У методах Рунге-Кутта функція  $f(x, y)$  в одному і тому вузлі обчислюється декілька разів, а добутий результат використовується тільки один раз (для обчислення наближеного значення функції  $y(x)$  у наступному вузлі). У методах Адамса функція  $f(x, y)$  для кожного вузла обчислюється один раз, а використовується для обчислення шуканих значень функції  $y(x)$  у декількох наступних вузлах. Якщо  $f(x, y)$  є складною функцією, то вказана особливість робить методи Адамса економнішими.
3. Методи Рунге-Кутта легко узагальнюються на випадок змінного кроку інтегрування, а методи Адамса дуже ускладнюються у випадку нерівномірного розташування вузлів сітки.



#Метод Адамса

$Y_{Адамса} := [evalf(seq(a..b, h))] :$

$Y_{Адамса}[1] := y0 :$

**for**  $i$  **from** 2 **to**  $n + 1$  **do**

**if**  $i < 4$  **then**

$Y_{Адамса}[i] := Y_{Рунга}[i];$

**else:**

$Y_{Адамса}[i] := Y_{Адамса}[i-1] + \frac{h}{12} \cdot (23 \cdot g(x[i-1], Y_{Адамса}[i-1]) - 16 \cdot g(x[i-2], Y_{Адамса}[i-2]) + 5 \cdot g(x[i-3], Y_{Адамса}[i-3]));$

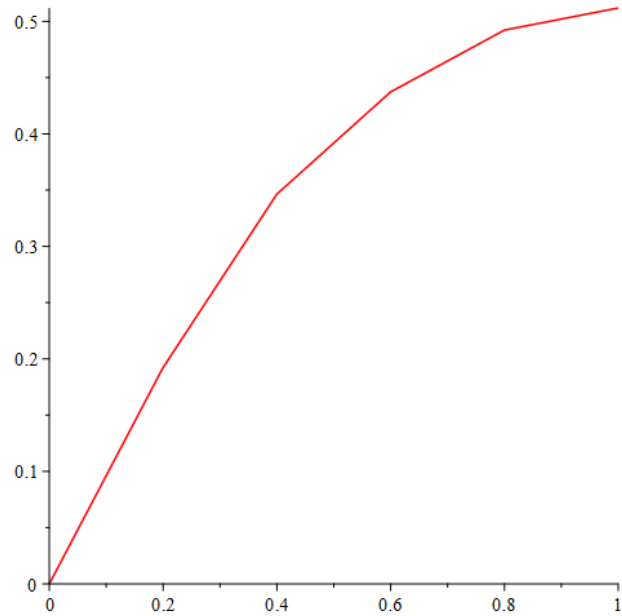
**end if**

**end do :**

$Y_{Адамса};$

$plot((x, Y_{Адамса}), style = line, color = "Red");$

[0, 0.1923158161, 0.3464132736, 0.4373370289, 0.4922679522, 0.5118955518]



## Аналіз результатів

> #Порівняльна таблиця

$Matrix\left(\left[\left[x\right], \left[Y_{\text{Ейлера}}\right], \left[Y_{\text{Рунга}}\right], \left[Y_{\text{Адамса}}\right]\right]\right);$

```
[0, 0.2000000000, 0.4000000000, 0.6000000000, 0.8000000000, 1.]
[0, 0.2000000000, 0.3755165124, 0.4925613020, 0.5495076088, 0.5640537814]
[0, 0.1923158161, 0.3464132736, 0.4474193413, 0.5008440612, 0.5210600417]
[0, 0.1923158161, 0.3464132736, 0.4373370289, 0.4922679522, 0.5118955518]
```

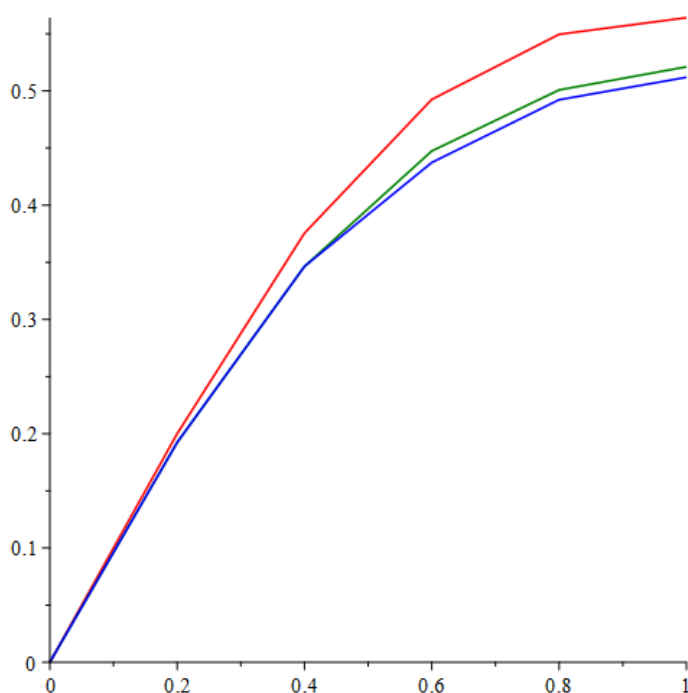
> #Порівняння на графіках

$P1 := \text{plot}\left(x, Y_{\text{Ейлера}}, \text{style} = \text{line}, \text{color} = \text{"Red"}\right);$

$P2 := \text{plot}\left(x, Y_{\text{Рунга}}, \text{style} = \text{line}, \text{color} = \text{"Green"}\right);$

$P3 := \text{plot}\left(x, Y_{\text{Адамса}}, \text{style} = \text{line}, \text{color} = \text{"Blue"}\right);$

$\text{plots}[\text{display}](\{P1, P2, P3\});$



## **Висновки**

Під час виконання лабораторної роботи номер 4 « Чисельні методи розв'язання задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь I-го порядку » з курсу «Методи обчислень» я розглянув різні методи вирішення диференціальний рівнянь I-го порядку. Була створенна програма у застосунку Maple, у якому робились усі розрахунки.

### **Перелік використаних джерел**

1. Бойко Л.Т. Основи чисельних методів: навчальний посібник. – Д.: Вид-во ДНУ, 2009. – 244 с.
2. Шахно С.М. Практикум з чисельних методів: навч. посібник [Текст] / С.М. Шахно, А.Т. Дудикевич, С.М. Левицька. – Львів: ЛНУ імені Івана Франка. 2013. – 432 с.