ДНІПРОВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМ. О.ГОНЧАРА

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

КАФЕДРА МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ТА ТЕХНОЛОГІЙ ПРОГРАМУВАННЯ

**Лабораторна робота №1 на тему**

**«Методи розв’язування нелінійного рівняння**»

**з курсу «Методи обчислень»**

**Варіант №7**

Виконав:

студент групи ПА-19-2

Ільяшенко Єгор

Дніпро, 2021

Зміст

[Зміст 2](#_Toc65891729)

[1. Основні теоретичні відомості 3](#_Toc65891730)

[1.1. Загальна ідея ітераційних методів уточнення кореня 5](#_Toc65891731)

[1.2. Геометричне зображення ітераційних методів 7](#_Toc65891732)

[1.3. Метод простої ітерації 9](#_Toc65891733)

[1.4. Метод Ньютона 11](#_Toc65891734)

[1.5. Метод хорд 13](#_Toc65891735)

[1.6. Комбінований метод 15](#_Toc65891736)

[2. Програма 17](#_Toc65891737)

[Висновки 19](#_Toc65891738)

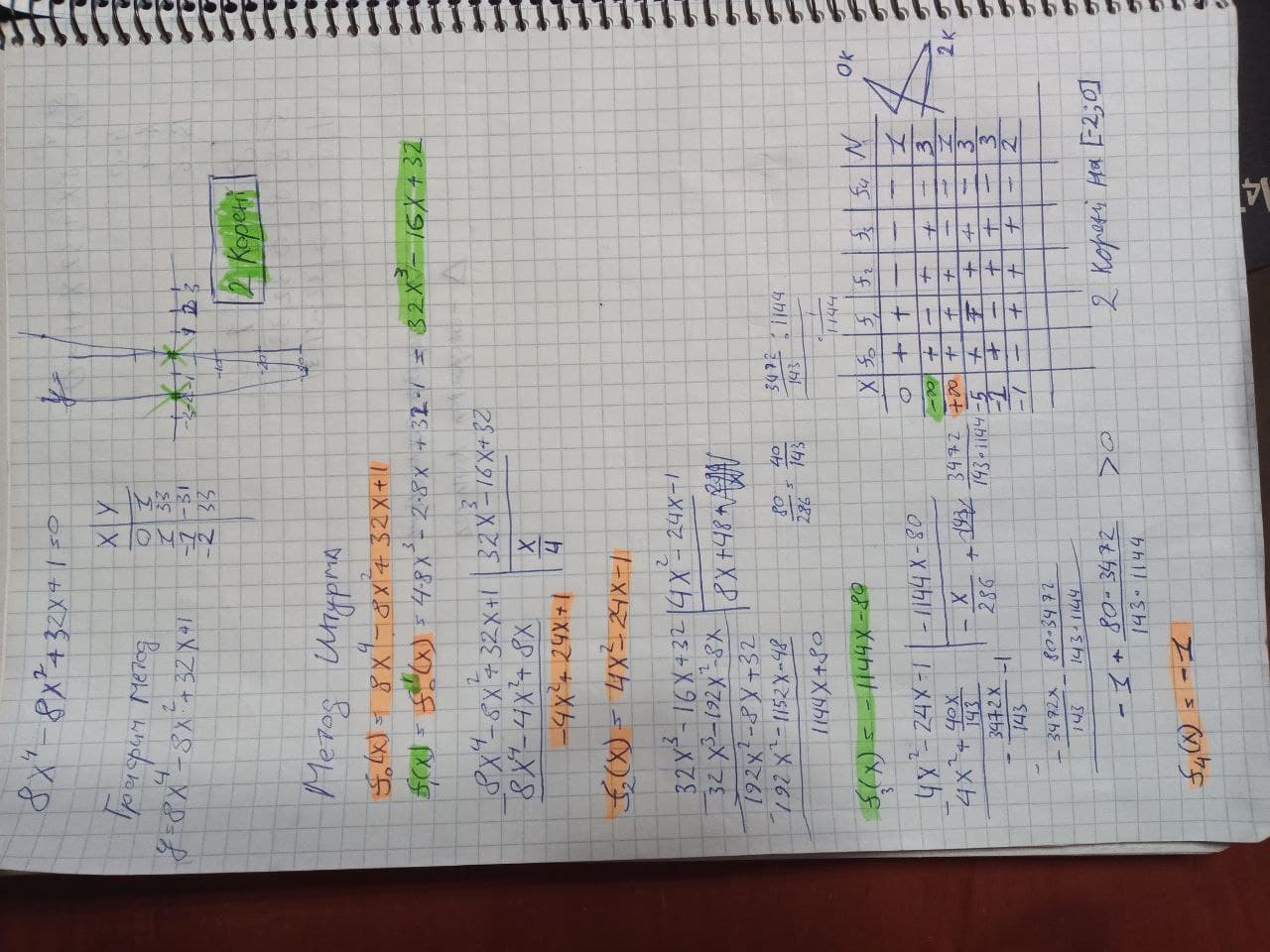
# Основні теоретичні відомості

**Метод Штурма для відокремлення дійсних коренів**

***Теорема Штурма.***Нехай – алгебраїчний многочлен з усіма дійсними коефіцієнтами, і () – дійсні числа, які не є його нулями, тобто ; – система функцій Штурма, побудована для на відрізку . Тоді кількість різних (без урахування кратності) дійсних коренів рівняння , що належать відрізку , дорівнює різниці , де – кількість змін знаків у послідовності значень , а – кількість змін знаків у послідовності значень . Нульові значення в цих послідовностях не приймаються до уваги (пропускаються).

***Система функцій Штурма.*** для полінома будується в такий спосіб. Дві перші функції знаходяться за правилом: , . Кожна з наступних функцій знаходиться як остача від ділення на , але взята з протилежним знаком.

Зауважимо, що функції системи Штурма можна будувати з точністю до додатного сталого множника.

**Приклад**

## Загальна ідея ітераційних методів уточнення кореня

Розглянемо рівняння:

де

Нехай відомо, що рівняння має на проміжку єдиний дійсний корінь , функція неперервна на цьому проміжку, причому та зберігають знак на .

Перепишемо рівняння в іншому, більш зручному вигляді для ітерування:

Перехід до можна зробити багатьма способами. Зупинимось на одному з них. Помножимо обидві частини рівності , а деяку неперервну на проміжку функцію , а потім до обох частин одержаної рівності додамо . Одержимо рівність вигляду:

Якщо позначити то отримаймо рівняння вигляду , корені обох рівнянь збігаються на відрізку . Кожен конкретний ітераційний метод пропонує свій варіант вибору функції .

Далі вибираємо довільну точку на відрізку , як початкове наближення до кореня, а потім за допомогою ітераційної формули будуємо послідовність

Будемо казати, що ітераційний метод збігається, якщо послідовність , побудована цим методом, прямує до кореня , тобто виконується умова . Якщо ітераційний процес збігається, то число можна вважати наближеним значенням кореня .

**Теорема (збіжності).** Нехай рівняння має єдиний дійсний корінь і нехай функція така, що виконується умови:

при ;

і для .

Тоді ітераційний метод буде збігатися при будь-якому виборі нульового наближення , і для наближення розв’язку , обчисленого за формулою буде виконуватися нерівність:

[1]

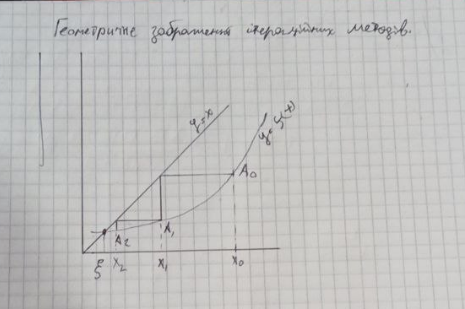
## Геометричне зображення ітераційних методів

Нехай в околі кореня дійсна функція , має неперервну похудну, , таку що . Якщо зберігає знак в околі кореня , то ітераційні методи мають наочну геометричну інтерпретацію.

На площині будуємо графіки функцій , та . Абсциса точки перетину цих графіків і буде шуканим дійсним коренем рівняння . Починаючи з деякої точки , будуємо ламану , ланки якої по черзі паралельні осям та . На кривій розташовані вершини , а вершини , — на прямій . Спільні абсциси точок та , та , очевидно, є послідовними наближеннями кореня .

У випадку , коли , всі наближення знаходяться з того боку від кореня , з якого взято . Послідовність наближень монотонно прямує до кореня .

У випадку , коли , наближення розташовані по черзі то з одного боку від кореня . У цьому випадку послідовність наближень збігається до кореня за коливальним законом.

Якщо , то процес ітерацій може розбігатися. 

## Метод простої ітерації

**Умова застосування методу**:

Для застосування методу, рівняння  потрібно замінити на тотожне йому . Його можна знайти різними шляхами, але для збіжності потрібно забезпечити виконання умови . Метод зводиться до знаходження абсциси перетину прямої та кривої .

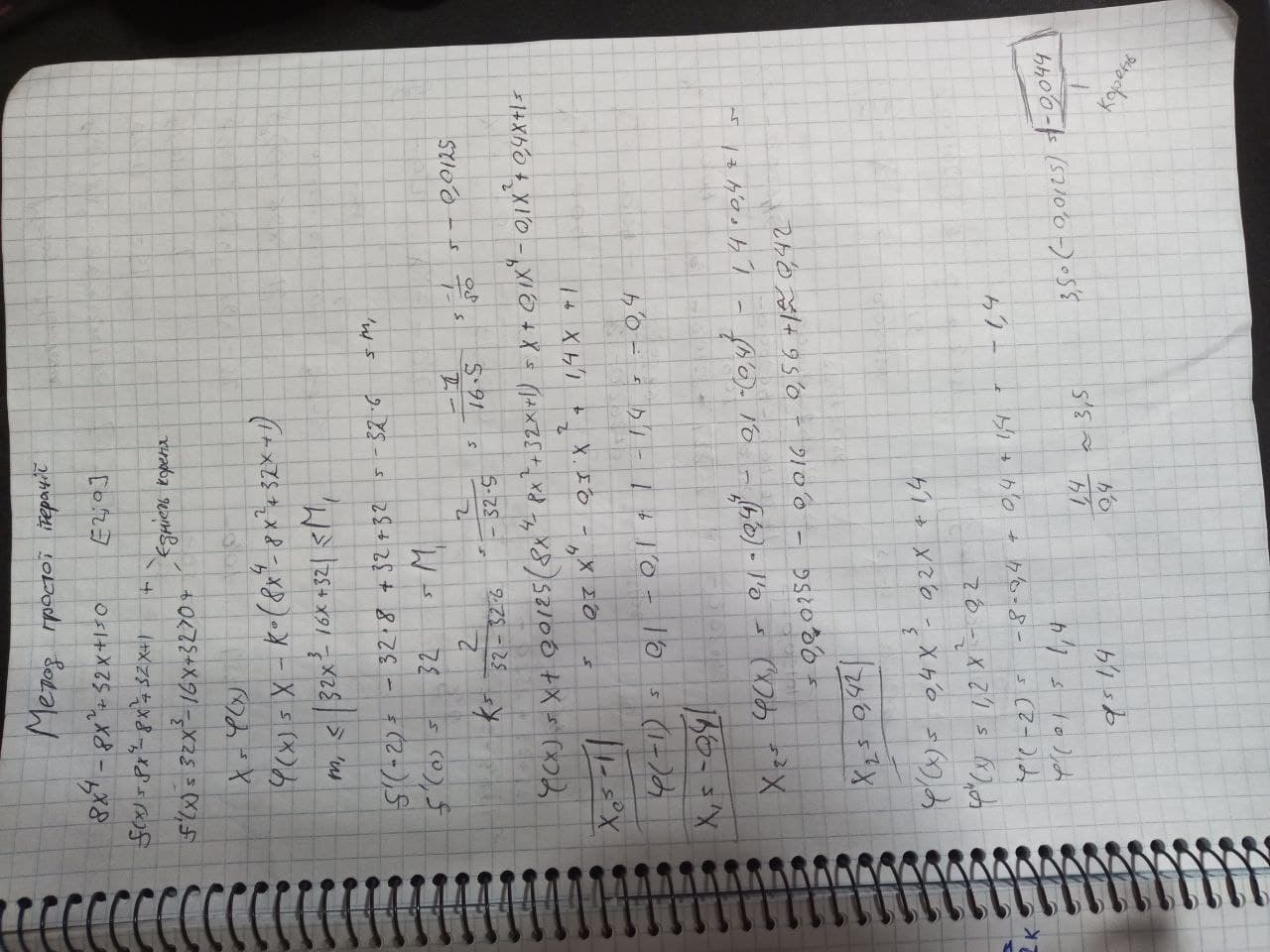
Один з шляхів отримати рівняння :

Нехай , тоді k можна знайти за формулою:

Зауважимо, що , де це корінь, взагалі кажучи. Це означає, що ***порядок збіжності методу простої ітерації дорівнює одиниці***.

Далі приведено алгоритм методу просто ітерації, (ліва границя проміжку) та задані за умовою.

**Приклад**



## Метод Ньютона

**Умови застосування методу**:

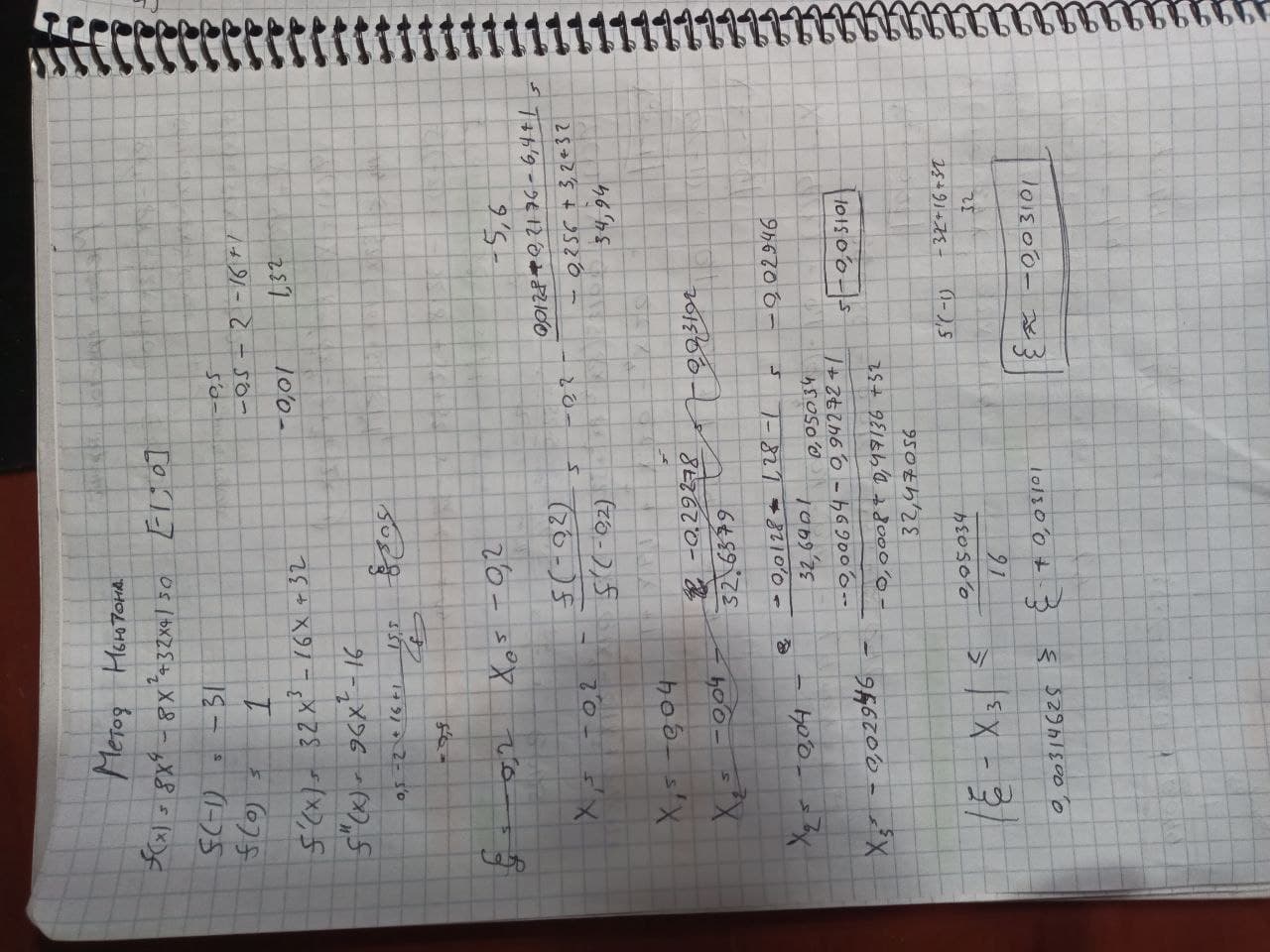
1. , де ;
2. , для ;
3. Знакосталість та для всіх .

***Ітераційна формула*** методу Ньютона:

Якщо *х*0 вибрати так, щоб *f*  *f* () 0, то () 0, тому всі наближення, починаючи з , будуть знаходитись з одного і того ж боку від кореня (з того, де розташоване ) та будуть прямувати до кореня монотонно.

Якщо вибрати так, щоб *f* () *f* () 0, то наближення буде з іншого боку від кореня , ніж , і якщо не вийде за межі відрізка [*a*, *b*], то всі наступні наближення , ,… будуть з того боку від кореня , з якого знаходиться *х*1. Отже, послідовність , , ,… буде монотонно прямувати до кореня . Якщо вийде за межі відрізка [*a*, *b*], то треба змінити .

Далі приведено алгоритм методу Ньютона, (ліва границя проміжку) задані за умовою.

**Приклад**

## Метод хорд

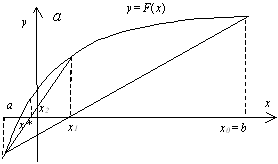
**Умови застосування методу**:

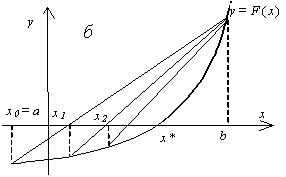
1. неперервність та для всіх .
2. та не змінює знака й не набуває значення нуль.

***Ітераційна формула методу хорд:***

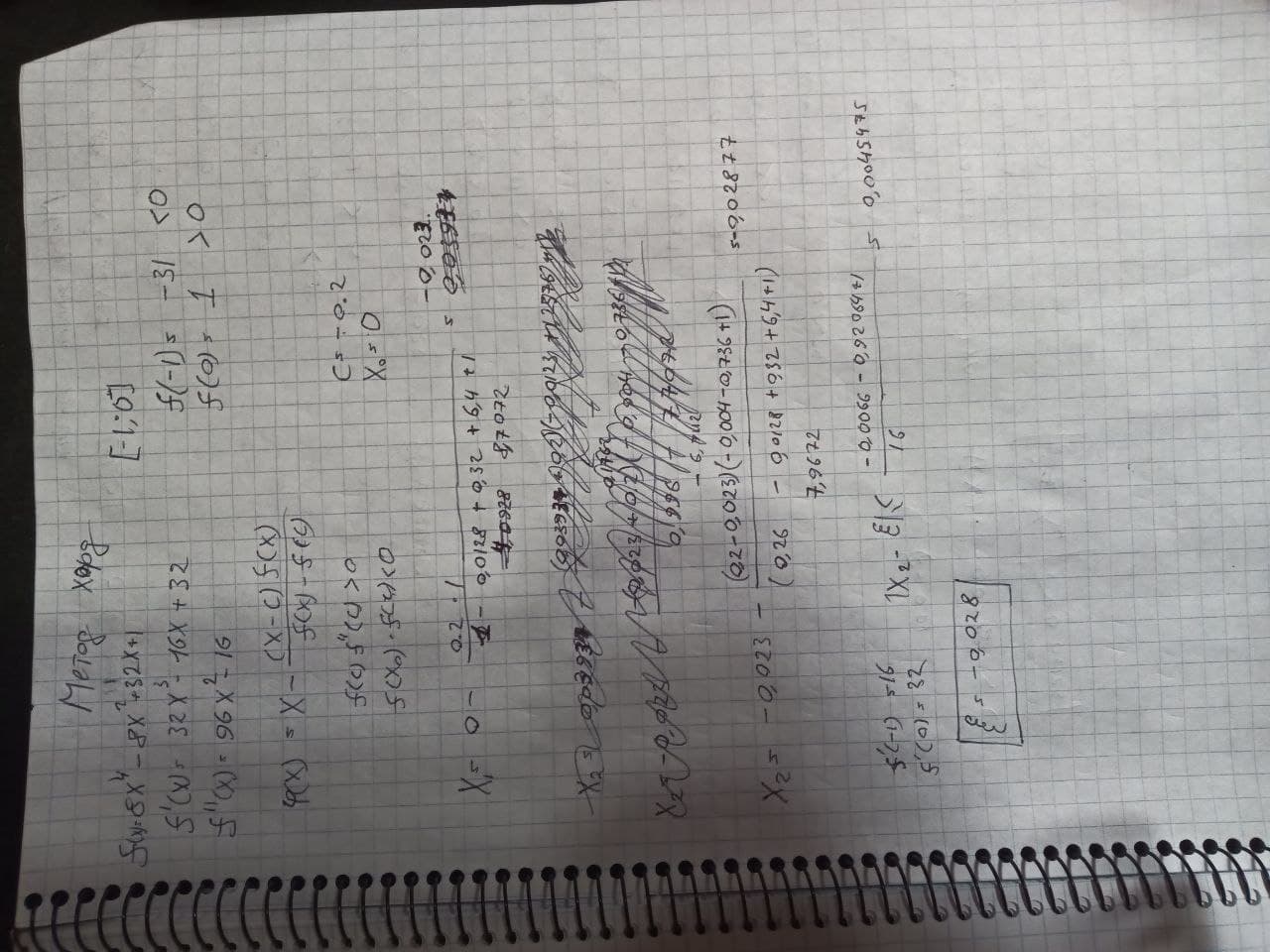
де *с* – якась фіксована точка з [*a*, *b*], зазвичай *с* дорівнює граничній точці, тобто *a* або *b*.

Якщо точку *с* вибрати так, щоб виконувалася нерівність , то на всьому відрізку [a, b] буде виконуватись умова , а це означає , що послідовність наближень буде прямувати до кореня монотонно. Якщо при цьому нульове наближення вибрати так, щоб , то в знаменнику формули модулі чисел та будуть додаватися.





Далі приведено алгоритм методу хорд, (ліва границя проміжку), (права границя проміжку) задані за умовою.

**Приклад**  


## Комбінований метод

**Умови застосування методу**:

1. , де ;
2. , для ;
3. Знакосталість та для всіх .

У комбінованому методі використовуються формули метода Ньютона та метода хорд, які дають наближення до кореня з різних боків. З урахуванням типу графіка функції, ці методи комбінують так:

Якщо , то метод хорд дає наближене значення кореня з недостачею, а метод дотичних — з надлишком.

Якщо , то метод хорд дає наближене значення кореня з надлишком, а метод дотичних — з недостачею.

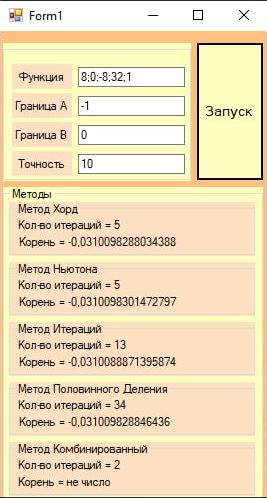
В усіх випадках справжній корінь розміщений між наближеними значеннями, отриманими за методами хорд і дотичних та знаходиться за формулою , де – корінь з надлишком, – корінь з недостачею.

# Програма

Я написав програму на C#, в якій реалізував виконання методів для будь-якого поліному. (тільки поліному)

IDE - MS VS

API – WF C#



Після запуску програми потрібно ввести функцію у вигляді модифікаторів, записаних через “;”, ліву та праву границю, в якій існує корень та точність.

Приклад запису функції



Записується, як “8;0;-8;32;1”

Програма виводе корінь, та кількість ітерацій, яка знадобилася для його знаходження.

Код програми



Висновки

Я вивчив методи відокремлення та уточнення коренів у алгебраїчних рівняннях. Вирішив свою функцію усіма методами, а також розробив програму, яка вираховує ці корені із рахуванням кількості ітерацій.

Метод ділення навпіл виявився найпростішим, його можна використовувати якщо швидкість неважлива. Він має найбільшу кількість ітерацій.  
Найшвидшим є комбінований метод.