МО_Лекція (2) 28.09.2021

Задача лінійного програмування

Задача лінійного програмування є одною з найбільш вивчених задач математичного програмування.

Уперше в загальній постановці задача лінійного програмування (ЗЛП) була сформульована в 30-х Дж. фон Нейманом. Основні задачі й приклади застосування, критерії оптимальності й економічна інтерпретація, методи розв'язання були сформульовані радянським ученим Л. В. Канторовичем в 1930-1940-х роках.

В 1939 році до професора Л. В. Канторовича прийшли на консультацію представники фанерного тресту і запропонували його увазі кілька задач, що виникли у них на виробництві. При математичній формалізації задач виявилось, що вони зводяться до знаходження екстремуму лінійної функції на множині точок многогранника. Перебрати всі вершини многогранника було майже неможливо через їх велику кількість. Л. В. Канторович дослідив такі задачі та запропонував метод для їх розв'язування, заклавши основи нового напряму в теорії екстремальних задач.

Цей напрям отримав назву лінійного програмування. Термін «лінійне програмування» з'явився в середині 40-х років 20 століття в працях Т.Ч. Купманса.

Для прикладу сформулюємо в загальному вигляді задачу про оптимальний план виробництва продукції.

Підприємство виробляє продукцію кількох типів. Задані витрати на одиницю продукції кожного типу, прибуток від її реалізації, об'єми наявних ресурсів та обмеження на об'єми виробництва кожного типу продукції. Необхідно скласти такий план виробництва, який з врахуванням обмежень на ресурси і об'єми випуску кожного типу продукції забезпечував би найбільший загальний прибуток.

Окремі праці, що стосувались питань лінійного програмування, з'являлись і раніше. Наприклад, в 1931 році в Угорщині було надруковано статтю Е. Егерварі, яка була присвячена задачі про призначення – окремому випадку транспортної задачі. На основі результатів цієї статті пізніше було розроблено ефективний метод розв'язування транспортної задачі, який одержав назву угорського методу.

Перша праця, де розглядались загальні питання лінійного програмування і викладені основні ідеї методу послідовного поліпшення плану для невироджених задач лінійного програмування, була надрукована Дж. Б. Данцігом у 1949 році. Метод Данціга увійшов в математику під назвою симплексний метод. У 1956 році Дж. Б. Данціг, Л. Р. Форд і Д. Р. Фалкерсон на основі угорського методу знайшли загальний метод розв'язування задач лінійного програмування, який лише в незначних деталях відрізнявся від методу, запропонованого Л. В. Канторовичем.

Значний внесок у дослідження загальної задачі лінійного програмування зробив відомий американський математик і фізик Джон фон Нейман, який встановив, що будь-яку матричну гру двох осіб з нульовою сумою можна подати у вигляді задачі лінійного програмування і навпаки.

Методи лінійного програмування знайшли широке використання на практиці. Зокрема за розробку математичних методів та їх впровадження в економіку Л. В. Канторовичу разом з американським економістом Т.Ч. Купмансом у 1975 році була присуджена Нобелевська премія.

Математична постановка задачі лінійного програмування (ЛП)

Задачі ЛП розглядаються в трьох основних формах:

1. Канонічна форма.

Потрібно знайти максимум цільової функції при заданих обмеженнях-рівностях

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots n \tag{3}$$

2. Стандартна форма.

Потрібно знайти максимум або мінімум цільової функції при заданих обмеженнях-нерівностях:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min), \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}, \tag{5}$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots n. \tag{6}$$

3. Загальна форма.

Потрібно знайти максимум або мінімум цільової функції при заданих обмеженнях різного виду (частина обмежень – рівності, частина – нерівності):

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max(min), \tag{7}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, r, \tag{8}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} b_i, i = r+1, \dots, m, \tag{9}$$

окрім того не всі змінні є обмеженими

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, q, \quad q \leq n. \tag{10}$$

Способи приведення задач ЛП в загальній формі до задач ЛП в канонічній формі і навпаки

При розв'язанні задач часто буває необхідно переходити від однієї форми математичної постановки задачі до іншої і від задачі мінімізації до задачі максимізації і навпаки.

1. Перехід від задачі мінімізації до задачі максимізації і навпаки.

$$f(x) \to max \qquad \Leftrightarrow \qquad -f(x) \to min$$

$$f(x) \to min \qquad \Leftrightarrow \qquad -f(x) \to max$$

Наприклад: $2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \to max \Leftrightarrow -2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to min$.

2. Перехід від обмежень у формі нерівностей до обмежень у формі рівностей і навпаки.

- Якщо від загальної або стандартної задачі ЛП необхідно перейти до канонічної задачі ЛП, то для кожного обмеження-нерівності вводиться додаткова змінна $x_j \ge 0$, $j = n+1, \dots$ і, в залежності від знаку нерівності, додаємо або віднімаємо цю змінну з лівої частини нерівності.

  Наприклад: для задачі лінійного програмування

$$4x_1 - x_2 + 2x_3 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 7, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0$$

маємо

$3x_1 + 2x_2 - x_3 \le 7$	$3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7$, $x_4 \ge 0$
$x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 10$	$x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_5 = 10$, $x_5 \ge 0$

- Якщо задані обмеження типу рівностей $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b$, то їх можна замінити на рівносильну систему двох нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b \end{cases}.$$

3. Якщо не на всі змінні x_j накладаються умови невід'ємності, то перейти до задачі з обмеженими змінними можна такими способами:

- для будь-якої необмеженої змінної x_k вводяться дві додаткові змінні x_k' та x_k''. Необмежена змінна x_k записується як різниця двох обмежених:

$x_k = x'_k - x''_k$. Це подання підставляємо в систему обмежень і цільову функцію.

Переваги	Недоліки
Простота.	Збільшення розмірності задачі.

- нехай x_k – необмежена змінна. Виключаємо x_k з системи обмежень та із цільової функції $x_k = \varphi(x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n)$ і в подальшому розглянемо задачу з новою цільовою функцією і системою обмежень, тобто розмірність задачі стає $(n-1)$. Розв'язав задачу, знайдемо $x_1,\ldots,x_{k-1},x_{k+1},\ldots,x_n$. Підставивши знайдені змінні в подання для x_k, знайдемо і її.

Переваги	Недоліки
Зменшення розмірності задачі.	Потрібні додаткові обчислювальні витрати на перетворення моделі. Якщо необмежених змінних багато, то задача може вироджуватися

Введемо необхідні для подальшого визначення.

Півпростором в n-вимірному евклідовому просторі називається множина точок x, що задовольняють співвідношенню

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b \text{ , де } a_j,\, b \text{ – константи.}$$

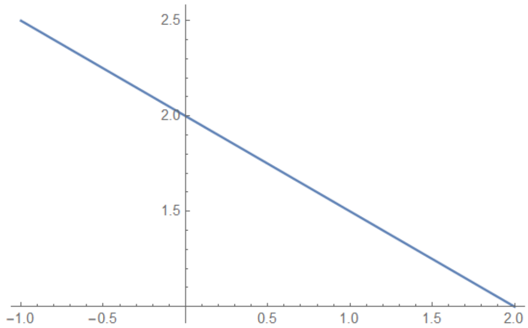
Гіперплощиною називається множина точок X евклідового простору E^n ($x \in E^n$), що задовольняють рівнянню:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b \;.$$

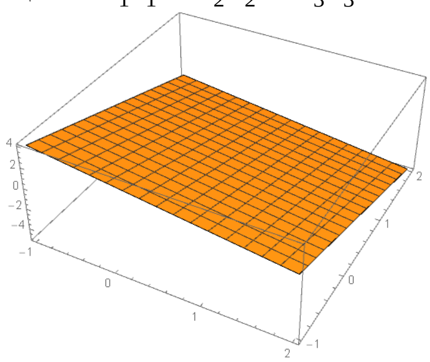
Приклади:

1) у просторі E^2 гіперплощиною є пряма $a_1x_1 + a_2x_2 = b$.

2) у просторі E^3 гіперплощиною буде площина $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$.



$x_1 + 2x_2 = 4$ – пряма в просторі E^2



$x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$ – площина в просторі E^3

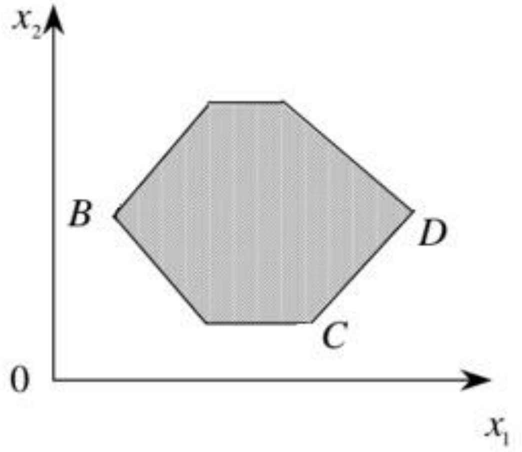
Множина точок, яка задовольняє обмеженням задачі, називається ***множиною допустимих розв'язків*** D задачі. А будь-яка точка із D є ***допустимою точкою*** (вектором, планом)

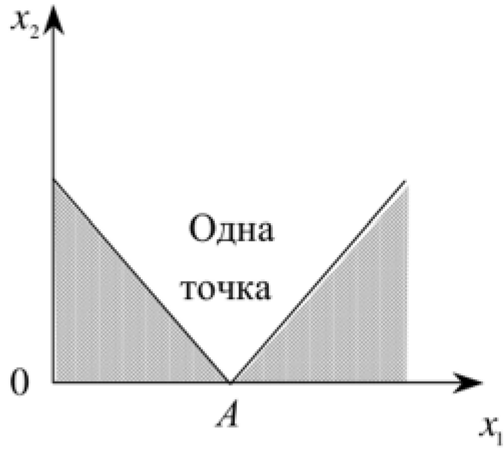
Оптимальним розв'язком називається допустима точка, яка доставляє цільовій функції максимум або мінімум.

Багатогранна множина – це множина, яка утворена перетином скінченого числа гіперплощин. Замкнута багатогранна множина називається ***багатогранником***.

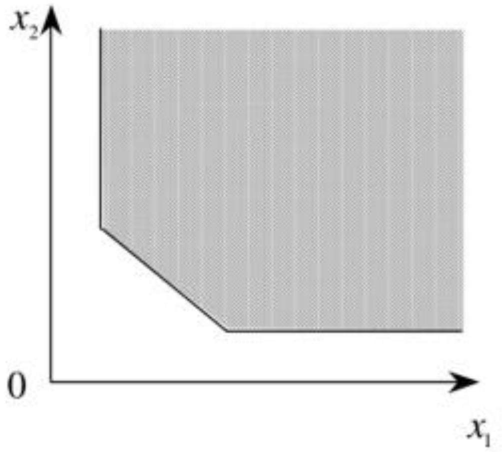
Множина допустимих розв'язків може бути:

1) замкнутою та обмеженою. Задача завжди має розв'язки.

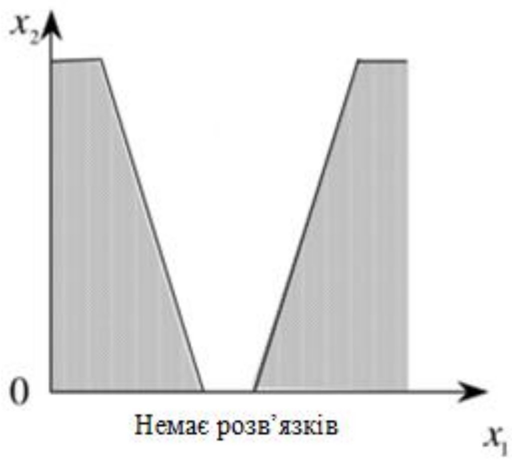




2) необмеженою. Задача може мати або не мати розв'язків. Не мати розв'язків із-за необмеженості цільової функції на допустимій множині.



3) порожньою.



Множина X називається ***опуклою множиною***, якщо для $\forall\, x, y \in X$ й $\forall\, \lambda \in [0,1]$, точка $\lambda\, x + (1-\lambda)\, y \in X$.

Геометрично це означає, що множина X називається опуклою, якщо вона разом зі своїми точками містить і відрізок їх з'єднуючий.

Теорема. Багатогранна множина є опуклою, якщо не є порожньою.

Доведення теореми базується на твердженнях, що півпростір є множиною опуклою та перетин будь-якого числа опуклих множин є множина опукла.

Точка x називається ***опуклою лінійною комбінацією*** точок $x_1, \ldots, x_m$ з простору E^n, якщо

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j x_j, \text{ для } \lambda_j \ge 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1.$$

Кутовою точкою (***крайньою точкою*** або ***вершиною***) багатогранної множини називається така точка, яку не можна представити у вигляді опуклої лінійної комбінації точок даної множини. Інакше, точка є кутовою, якщо вона не є внутрішньою точкою ніякого відрізку, що належить допустимій множині.

Теорема (про можливість розв'язання задачі лінійного програмування). Якщо задача лінійного програмування має розв'язок, то він досягається у вершині допустимої множини. Якщо розв'язок задачі лінійного програмування досягається в декількох вершинах допустимої множини, то він досягається й у точках, які є опуклою лінійною комбінацією цих вершин.

Ця теорема дозволяє звузити область пошуку оптимальних розв'язків задачі ЛП до скінченого числа точок (вершин).

При розв'язуванні задачі ЛП перед нами виникають такі питання:

1) чи має задача розв'язок і, якщо не має, то з якої причини;
2) якщо $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – допустима точка, то як визначити чи є вона вершиною чи ні;
3) якщо x – вершина, то чи є вона точкою оптимуму;
4) якщо x – вершина, то як з цієї точки перейти в наступну вершину, в якій значення цільової функції не менше, ніж в точці x.

Методом, який дозволяє відповісти на всі ці питання і ***за скінченну кількість кроків*** або отримати оптимальний розв'язок або відповісти на питання про нерозв'язність задачі є ***симплекс-метод***.

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування

Симплекс-метод – це універсальний метод розв'язання задачі ЛП. Спочатку метод був сформульований для областей вигляду:

$$D = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) : x \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} x_j = 1 \right\}.$$

Такі області називаються симплексами, звідси й назва методу. Потім метод було узагальнено на випадок більш загальних допустимих множин, але первинна назва за ним так і залишилася. Ще метод називають ***метод послідовного поліпшення плану***.

Цей метод використається для задач ЛП, представлених у ***канонічній формі***:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to max, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}. \qquad (3)$$

Припустимо, що всі обмеження (2) лінійно незалежні, тобто виражають незалежні одну від одної умови задачі. Якщо це не так, то зайві рівняння потрібно просто виключити з розгляду. Задачу (1)-(3) має сенс розв'язувати, коли число рівнянь m в системі обмежень (2) менше за число змінних n: $m < n$. У протилежному випадку,

- якщо $m = n$, то система (2) має єдиний розв'язок, і задача максимізації цільової функції (1) не має сенсу;
- якщо $m > n$, то система (2) є перевизначена, і у загальному випадку не має розв'язків.

Якщо $m < n$, то система (2) має нескінченну множину розв'язків і серед них можна знайти оптимальний розв'язок, який доставляє максимум цільовій функції (1).

Позначимо

$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \ldots. \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ – стовпець коефіцієнтів при x_j як A_j, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots. \\ b_m \end{pmatrix}$ – стовпець правої частини, тоді задача прийме вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} c_jx_j \to max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} A_jx_j = b,$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1,n}$$

Вектори $\{A_j\}$, $j = \overline{1,n}$ будемо називати ***векторами-умовами***.

Допустимий розв'язок називається ***базисним*** (***опорним***) ***розв'язком***, якщо його ненульовим компонентам відповідає лінійно незалежна система векторів-умов $\{A_j\}$.

Базисний розв'язок називається ***опорним***, якщо він невід'ємний: $x \ge 0$.

Якщо кількість додатних компонент базисного розв'язку дорівнює m (кількості обмежень задачі), то базисний розв'язок називається ***невиродженим***. Якщо ця кількість менше за m, те – ***виродженим*** базисним розв'язком.

Теорема (про зв'язок вершини допустимої множини й базисного розв'язку). Допустима точка буде вершиною тоді й тільки тоді, коли вона є базисною.

Без доведення.

Систему обмежень приводимо до ***канонічного вигляду***, а саме до вигляду, коли в кожне рівняння системи входить одна змінна з коефіцієнтом одиниця й ця змінна не входить в інші рівняння системи:

$$\begin{cases} x_1 + \alpha_{1m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \quad x_2 + \alpha_{2m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_m + \alpha_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m. \end{cases}$$

Система векторів-умов, що відповідає змінним $x_1,\ldots,x_m$, буде лінійно незалежною й мати вигляд

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За базисний розв'язок можемо вибрати: $x^0 = (\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0)$.

У випадку, якщо всі $\beta_i \geq 0$, даний розв'язок буде базисним і згідно за теоремою, він буде вершиною допустимої множини.

Якщо серед β_i є від'ємні, тоді необхідно або так перетворити систему обмежень, щоб після перетворення все праві частини були невід'ємні; або переконатися в тому, що такого перетворення не існує.

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування

Алгоритм симплекс-метода

1 етап. Приводимо задачу лінійного програмування (ЛП) до канонічної форми.

2 етап.

2.1. Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \left(\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m - \left(\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n\right). \end{cases}$$

Тут $x_1,\ldots,x_m$ – базисні змінні, а $x_{m+1},\ldots,x_n$ – небазисних змінні.

2.2. Виключаємо базисні змінні $x_1,\ldots,x_m$ з цільової функції:

$$z = c'_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c'_n x_n + Q.$$

3 етап. Складаємо симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Небазисні змінні					Вільні члени
	$-x_{m+1}$	...	$-x_r$	...	$-x_n$	
x_1	$\alpha_{1,m+1}$	...	$\alpha_{1,r}$	...	$\alpha_{1,n}$	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	$\alpha_{s,m+1}$	...	$\alpha_{s,r}$	...	$\alpha_{s,n}$	β_s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$\alpha_{m,m+1}$	...	$\alpha_{m,r}$	...	$\alpha_{m,n}$	β_m
Коефіцієнти цільової функції	$-c'_{m+1}$	...	$-c'_r$	...	$-c'_n$	Q

4 етап. *Знаходження початкового базисного розв'язку.*

Якщо всі $\beta_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$, то за початковий опорний розв'язок вибираємо точку $x^{(0)} = \left(\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0\right)$, $f\left(x^{(0)}\right) = Q$. Переходимо на 5 етап.

Якщо серед β_i, є від'ємні, то проводимо *крок модифікованих Жорданових виключень*.

Для переходу в іншу точку допустимої області D необхідно в системі обмежень (в симплекс-таблиці) поміняти місцями базисну і небазисну змінні.

Нехай серед β_i є від'ємні. Виберемо будь-який з них. На практиці вибирають або максимальний за модулем або перший за порядком. Нехай для визначеності, наприклад, $\beta_s < 0$.

Якщо всі коефіцієнти $\alpha_{sj} \geq 0$ (серед коефіцієнтів α_{sj} немає від'ємних), то задача не має розв'язків через несумісність системи обмежень. Цей випадок означає, що

$$x_s + \alpha_{sm+1}x_{m+1} + .. + \alpha_{sn}x_n = \beta_s < 0,\ \alpha_{sj} \geq 0, j = \overline{m+1,n}.$$

Щоб рівність виконувалося, необхідно щоб $x_j < 0$, а це суперечить умові невід'ємності: $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай серед α_{sj} є від'ємні. Вибираємо в рядку будь-яке з них. На практиці вибирають або максимальне за модулем або перше за порядком.

Нехай r – номер стовпчика, в якому знаходиться вибраний елемент. Стовпець з номером r називається ***розв'язувальним стовпцем***. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Номер ***розв'язувального рядка*** s вибираємо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

Змінна з індексом s буде виводитися з базису.

Елемент α_{sr}, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називається ***розв'язувальним елементом*** (ведучим елементом).

Далі виконуємо ***крок модифікованих Жорданових виключень***, який полягає в наступному:

1) У новій симплекс-таблиці на місце розв'язувального елемента ставимо число 1

2) Решту елементів розв'язувального рядка перенесемо в нову симплекс-таблицю без змін.

3) Решту елементів розв'язувального стовпця перенесемо в нову симплекс-таблицю з протилежним знаком.

4) Решту елементів нової симплекс-таблиці знаходимо за правилом прямокутника (правилом обчислення визначника другого порядку). Причому розв'язувальний елемент завжди вважається таким, що стоїть на головній діагоналі.

5) Всі елементи нової симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент.

Виконуючи 4 етап скінченне число раз, отримаємо або початковий опорний розв'язок, або встановимо несумісність системи обмежень.

5 етап. *Знаходження оптимального розв'язку*

Нехай є поточний базисний розв'язок $x^{(k)}$.

Якщо всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні, то $x^* = x^{(k)}$ (отримано оптимальний розв'язок задачі).

Якщо серед коефіцієнтів в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємні, то можливі два випадки:

1) Нехай $c_r^{'} < 0$. Якщо всі інші коефіцієнти цього стовпця $\alpha_{ir} \le 0$ (серед коефіцієнтів стовпця немає додатних), то задача не має розв'язку в силу необмеженості цільової функції на допустимій множині.

2) Нехай не виявлено необмеженість цільової функції на допустимій множині. Тоді ми переходимо від цього базисного розв'язку до наступного. За розв'язувальний стовпець візьмемо будь-який стовпець з коефіцієнтом $c_j^{'} < 0$. На практиці вибирають або максимальний за модулем або перший за порядком.

Нехай для визначеності $c_r^{'} < 0$ і серед коефіцієнтів α_{ir} є додатні. Номер розв'язувального рядка визначимо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

Далі виконуємо *крок модифікованих Жорданових виключень* і переходимо до нового базисного розв'язку $x^{(k+1)}$.

За скінченне число кроків (скінченне число раз виконуючи 5 етап) або буде знайдено оптимальний розв'язок задачі ЛП, або встановлено факт необмеженості цільової функції на допустимій множині.