ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Постановка задач математической физики

Чтобы поставить задачу математической физики, необходимо вывести дифференциальное уравнение в частных производных, описывающее рассматриваемый физический процесс, а также начальные и краевые условия. При этом начальные условия ставятся для уравнений, содержащих частные производные по времени (уравнения описывают нестационарные физические процессы). Краевые (граничные) условия ставятся для уравнений, описывающих физические процессы в ограниченных областях.

Задачи математической физики, содержащие начальные и краевые условия, называются *начально-краевыми*; задачи, содержащие только граничные условия — *краевыми*, а задачи, содержащие только начальные условия (в бесконечных областях) — *задачами Коши*.

Известно, что количество условий и вид начальных и краевых условий зависят от типов уравнений математической физики, среди которых различают параболический, гиперболический и эллиптический типы, количества границ, количества разрывов в граничных условиях, порядка дифференциальных уравнений.

Вывод основных уравнений математической физики, начальных и краевых условий к ним дается в курсе «Уравнения математической физики». Здесь же ограничимся математической формулировкой типовых задач математической физики.

6.1.1. Постановка задач для уравнений параболического типа. Классическим примером уравнения параболического типа является уравнение теплопроводности (диффузии). В одномерном по пространству случае однородное (без источников энергии) уравнение теплопроводности имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{6.1}$$

Если на границах x $=0$ и x $= l$ заданы значения искомой функции $u(x,t)$ *в виде*

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{6.2}$$

$$u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0, \tag{6.3}$$

т. е. *граничные условия первого рода*, и, кроме того, заданы начальные условия

$$u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0, \tag{6.4}$$

то задачу (6.1)–(6.4) называют *первой начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности* (6.1).

В терминах теории теплообмена $u(x,t)$ — распределение температуры в пространственно-временной области $\Omega \times \mathrm{T} = \{0 \leqslant \mathrm{x} \leqslant l;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$, a^2 — коэффициент температуропроводности, а (6.2), (6.3) с помощью функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ задают температуру на границах $x = 0$ и $x = l$.

Если на границах x $= 0$ и x $= l$ заданы значения производных искомой функции по пространственной переменной:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{6.5}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0, \tag{6.6}$$

т. е. *граничные условия второго рода*, то задачу (6.1), (6.5), (6.6), (6.4) называют второй начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (6.1). В терминах теории теплообмена на границах в этом случае заданы тепловые потоки.

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее производной по пространственной переменной:

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha\, u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{6.7}$$

$$\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} + \beta\, u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0, \tag{6.8}$$

т.е. *граничные условия третьего рода*, то задачу (6.1), (6.7), (6.8), (6.4) называют третьей начально-краевой задачей для уравнения теплопроводности (6.1). В терминах теории теплообмена граничные условия (6.7), (6.8) задают теплообмен между газообразной или жидкой средой с известными температурами $\varphi_1(t)/\alpha$ на границе x = 0 и $\varphi_2(t)/\beta$ на границе $x = l$ и границами расчетной области с неизвестными температурами $u(0,t)$, $u(l,t)$. Коэффициенты α, β — известные коэффициенты теплообмена между газообразной или жидкой средой и соответствующей границей.

Для пространственных задач теплопроводности в области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ первая начально-краевая задача имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \ M(x,y,z) \in \Omega, \ t > 0; & (6.9) \\ u(M,t) = \varphi(M,t), \quad M(x,y,z) \in \Gamma, \quad t > 0; & (6.10) \\ u(M,0) = \psi(M), \quad M(x,y,z) \in \overline{\Omega}, \quad t = 0. & (6.11) \end{cases}$$

Аналогично ставится вторая и третья начально-краевые задачи для пространственного уравнения (6.9).

На практике часто ставятся начально-краевые задачи теплопроводности со смешанными краевыми условиями, когда на границах задаются граничные условия различных родов.

6.1.2. Постановка задач для уравнений гиперболического типа. Классическим примером уравнения гиперболического типа является волновое уравнение, которое в области $0 < x < l$, $t > 0$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < l, \qquad t > 0.$$

Здесь $u(x,t)$ — малые продольные или поперечные перемещения (колебания) стержня, a — скорость звука в материале, из которого изготовлен стержень.

Если концы стержня движутся по заданным законам, то есть на концах заданы перемещения (или значения искомой функции), *то первая начально-краевая задача для волнового уравнения имеет вид* (причем, если концы стержня жестко закреплены, то $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; & (6.12) \\ u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; & (6.13) \\ u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; & (6.14) \\ u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0; & (6.15) \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0. & (6.16) \end{cases}$$

Как видно, в задачах для волнового уравнения, кроме начального распределения искомой функции, задается еще распределение начальной скорости перемещения.

Если на концах стержня заданы значения силы, которые пропорциональны значениям производной перемещения по пространственной переменной (т. е. на концах заданы значения первых производных по переменной x), то ставится *вторая начально-краевая задача для волнового уравнения*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \\ \dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \\ u(x,0) = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0; \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0. \end{cases}$$

В условиях, когда концы стержня *свободны*, функции $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = 0$.

Наконец, в условиях, когда концы закреплены *упруго*, т. е. на концевые заделки действуют силы, пропорциональные перемещениям, ставится *третья начально-краевая задача для волнового уравнения*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} + \alpha u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0;$$

$$\frac{\partial\, u(l,t)}{\partial\, x} + \beta u(l,t) = \varphi_2(t), \qquad x = l, \qquad t > 0;$$

$$u(x,0) = \psi_1(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad t = 0;$$

$$\frac{\partial\, u(x,0)}{\partial\, t} = \psi_2(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant l, \qquad t = 0.$$

Аналогично ставятся двумерные и трехмерные начально-краевые задачи для двумерного и трехмерного волнового уравнения.

Необходимо отметить, что волновое уравнение легко трансформируется в систему уравнений *акустики*, являющихся простейшей линейной моделью газодинамических течений.

Действительно, введем следующие обозначения:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\, u}{\partial\, t} = p, & (6.17) \\[2ex] \dfrac{\partial\, u}{\partial\, x} = v. & (6.18) \end{cases}$$

Продифференцируем (6.17) по переменной t, а (6.18) – по переменной x, результат подставим в волновое уравнение, получим

$$\frac{\partial\, p}{\partial\, t} = a^2 \frac{\partial\, v}{\partial\, x}. \tag{6.19}$$

Продифференцируем затем (6.17) по x, а (6.18) — по t и, полагая, что смешанные производные от $u(x,t)$ по переменным x и t не зависят от порядка дифференцирования, получим

$$\frac{\partial\, v}{\partial\, t} = \frac{\partial\, p}{\partial\, x}. \tag{6.20}$$

Здесь p, v — возмущения (слабые колебания) давления и скорости в акустической волне, а систему (6.19), (6.20) называют уравнениями акустики. Поскольку (6.19), (6.20) — линейное приближение уравнений газовой динамики, они используются для исследования устойчивости численных методов решения уравнений газовой динамики.

6.1.3. Постановка задач для уравнений эллиптического типа. Классическим примером уравнения эллиптического типа является уравнение Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

или уравнение Лапласа при $f(x, y) \equiv 0$.

Здесь функция $u(x, y)$ может иметь различный физический смысл, например: стационарное, независящее от времени, распределение температуры, скорость потенциального (безвихревого) течения идеальной (без трения и теплопроводности) жидкости, распределение напряженностей электрического и магнитного полей, потенциала в силовом поле тяготения и т. п.

Если на границе Γ расчетной области $\overline{\Omega} = \Omega + \Gamma$ задана искомая функция, то соответствующая *первая краевая* задача для уравнения Лапласа или Пуассона называется *задачей Дирихле*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; & (6.21) \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. & (6.22) \end{cases}$$

Если на границе Γ задается нормальная производная искомой функции, то соответствующая *вторая краевая* задача называется задачей Неймана для уравнения Лапласа или Пуассона:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega; & (6.23) \\ \left.\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_{\Gamma} = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. & (6.24) \end{cases}$$

При этом n — направление внешней к границе Γ нормали.

Более приемлемой является координатная форма краевого условия (6.24):

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cos(\widehat{n, i}) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\widehat{n, j}) = \varphi(x, y),$$

где $\cos(\widehat{n, i})$, $\cos(\widehat{n, j})$ — направляющие косинусы внешнего вектора единичной нормали к границе Γ, i и j — орты базисных векторов.

Наконец третья краевая задача для уравнения Пуассона (Лапласа) имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega; \\ \left.\dfrac{\partial u(x, y)}{\partial n}\right|_\Gamma + \alpha \, u|_\Gamma = \varphi(x, y), \qquad (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

Основные определения и конечно-разностные схемы для уравнений параболического типа

6.2.1. Основные определения. Основные определения, связанные с методом конечных разностей, рассмотрим на примере конечно-разностного решения первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности (6.1)–(6.4). В этом же параграфе будут рассмотрены простейшие конечно-разностные схемы для задач математической физики, содержащих дифференциальные уравнения различных типов.

Нанесем на пространственно-временную область $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ конечно-разностную сетку $\omega_{h,\tau}$:

$$\omega_{h,\tau} = \{x_j = jh,\ j = \overline{0, N};\ t^k = k\tau,\ k = \overline{0, K}\}, \qquad (6.25)$$

с пространственным шагом $h = l/N$ и шагом по времени $\tau = T/K$ (рис. 6.1).

Введем два *временных слоя*: нижний $t^k = k\tau$, на котором распределение искомой функции $u(x_j, t^k)$, $j = \overline{0, N}$, известно (при $k = 0$ распределение определяется начальным условием (6.4) $u(x_j, t^0) = \psi(x_j)$), и верхний временной слой $t^{k+1} = (k+1)\tau$, на котором распределение искомой функции $u(x_j, t^{k+1})$, $j = \overline{0, N}$, подлежит определению.

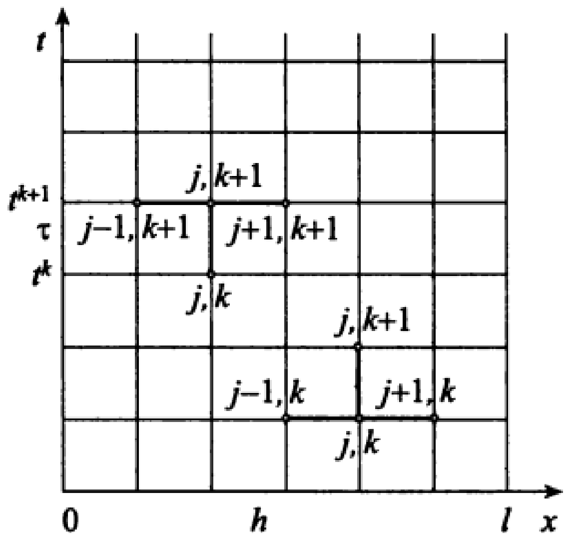

Рис. 6.1. Конечно-разностная сетка

Сеточной функцией задачи (6.1)–(6.4) (обозначение u_j^k) назовем однозначное отображение *целых* аргументов j, k в значения функции $u_j^k = u(x_j, t^k)$.

На введенной сетке (6.25) введем сеточные функции u_j^k, u_j^{k+1}, первая из которых известна, вторая — подлежит определению. Для ее определения в задаче (6.1)–(6.4) заменим (аппроксимируем) дифференциальные операторы отношением конечных разностей, получим

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k = \frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} + O(\tau), \tag{6.26}$$

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k = \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(h^2). \tag{6.27}$$

Подставляя (6.26), (6.27) в задачу (6.1)–(6.4), получим *явную конечно-разностную схему* для этой задачи в форме

$$\begin{gathered}
\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \\
j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\
u_0^{k+1} = \varphi_1\left(t^{k+1}\right), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2\left(t^{k+1}\right), \quad k = \overline{0,\ K}; \\
u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}.
\end{gathered} \tag{6.28}$$

В каждом уравнении этой задачи все значения сеточной функции известны, за исключением одного, u_j^{k+1}, которое может быть определено *явно* из соотношений (6.28). В соотношения (6.28) краевые условия входят при значениях $j = 1$ и $j = N - 1$, а начальное условие — при $k = 0$.

Если в (6.27) дифференциальный оператор по пространственной переменной аппроксимировать отношением конечных разностей на верхнем временном слое:

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^{k+1} = \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2), \tag{6.29}$$

то после подстановки (6.26), (6.29) в задачу (6.1)–(6.4) получим *неявную конечно-разностную схему* для этой задачи:

$$\begin{gathered}
\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2), \\
j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\
u_0^{k+1} = \varphi_1(t^{k+1}), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2(t^{k+1}), \quad k = \overline{0,\ K-1}; \\
u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}.
\end{gathered} \tag{6.30}$$

Теперь сеточную функцию u_j^{k+1} на верхнем временном слое можно получить из решения СЛАУ (6.30) с трехдиагональной матрицей. Эта СЛАУ в форме, пригодной для использования метода прогонки, имеет вид

$$
\begin{array}{r}
a_1 = 0; \\ \\ c_{N-1} = 0;
\end{array}
\left\{
\begin{array}{ll}
b_1 u_1^{k+1} + c_1 u_2^{k+1} = d_1, & j = 1, \\
a_j u_{j-1}^{k+1} + b_j u_j^{k+1} + c_j u_{j+1}^{k+1} = d_j, & j = \overline{2, N-2}, \\
a_{N-1} u_{N-2}^{k+1} + b_{N-1} u_{N-1}^{k+1} = d_{N-1}, & j = N-1,
\end{array}
\right.
$$

где $a_j = \sigma$, $j = \overline{2, N-1}$; $b_j = -(1 + 2\sigma)$, $j = \overline{1, N-1}$; $c_j = \sigma$, $j = \overline{1, N-2}$; $d_j = -u_j^k$, $j = \overline{2, N-2}$; $d_1 = -(u_1^k + \sigma\varphi_1(t^{k+1}))$; $d_{N-1} = -(u_{N-1}^k + \sigma\varphi_2(t^{k+1}))$; $\sigma = \dfrac{a^2\tau}{h^2}$.

Шаблоном конечно-разностной схемы называют ее геометрическую интерпретацию на конечно-разностной сетке.

На рис. 6.2 приведены шаблоны для явной (6.28) и неявной (6.30) конечно-разностных схем при аппроксимации задачи (6.1)–(6.4).

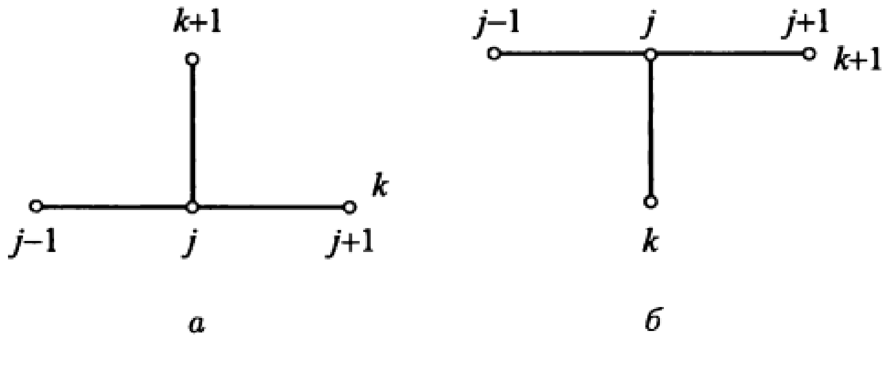

Рис. 6.2. Шаблоны явной (a) и неявной ($б$) конечно-разностных схем для уравнения теплопроводности