Методи оптимізації

Лабораторне заняття 3, 12.10.2021

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування
Метод штучного базису

Перед застосуванням методу штучного базису наведемо розв'язання задачі лінійного програмування в канонічної формі симплекс-методом, який був розглянутий раніше.

Приклад 1 (варіант № 60)**.** Знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП симплекс-методом.

$$f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 0 \cdot x_5 \to max,$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = 5, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5 = 5, \end{cases} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & -2 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b} = (5,5,5)^T, \ \mathbf{c} = (3,2,1,-1,0).$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1,5}.$$

Розв'язання. Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду. Виконаємо елементарні перетворення рядків розширеної матриці.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

З першого рядка віднімемо другий, помножений на 3. Результат запишемо на місце першого рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & -5 & 0 & 1 & -1 & -10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & -2 & 2 & 0 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

З третього рядка віднімемо другий, помножений на 2. Результат запишемо на місце третього рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & -5 & 0 & 1 & -1 & -10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -6 & 0 & 0 & -3 & -5 \end{array}\right) \sim$$

Розділимо елементи третього рядка на (-3). Результат запишемо на місце третього рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -6 & -5 & 0 & 1 & -1 & -10 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1/3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right) \sim$$

Додамо перший і третій рядки. Результат запишемо на місце першого рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -19/3 & -3 & 0 & 1 & 0 & -25/3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 5 \\ -1/3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right) \sim$$

З другого рядка віднімемо третій. Результат запишемо на місце другого рядка.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -19/3 & -3 & 0 & 1 & 0 & -25/3 \\ 10/3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10/3 \\ -1/3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 5/3 \end{array}\right)$$

Змінні x_3, x_4, x_5 будуть базисними змінними.

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5 через небазисні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 10/3 - 10/3x_1, \\ x_4 = -25/3 - \left(-19/3x_1 - 3x_2\right), \\ x_5 = 5/3 - \left(-1/3x_1 + 2x_2\right), \end{cases}$$

Підставимо подання для x_3, x_4, x_5 в цільову функцію.

$$f = 3x_1 + 2x_2 + +10/3 - 10/3x_1 + 25/3 - 19/3x_1 - 3x_2 =$$
$$= -20/3x_1 - x_2 + 35/3.$$

Цільову функцію записано через небазисні змінні.

Так як число змінних задачі $n = 5$, а число обмежень задачі $m = 3$, то $n - m = 2$ і задачу можна розв'язати графічно. Побудуємо область допустимих розв'язків, градієнт, лінії рівня цільової функції (рис. 1).

Координати вершин допустимої області такі: $A(1,\ 2/3)$, $B(1,1)$, $C(35/41,\ 40/41)$.

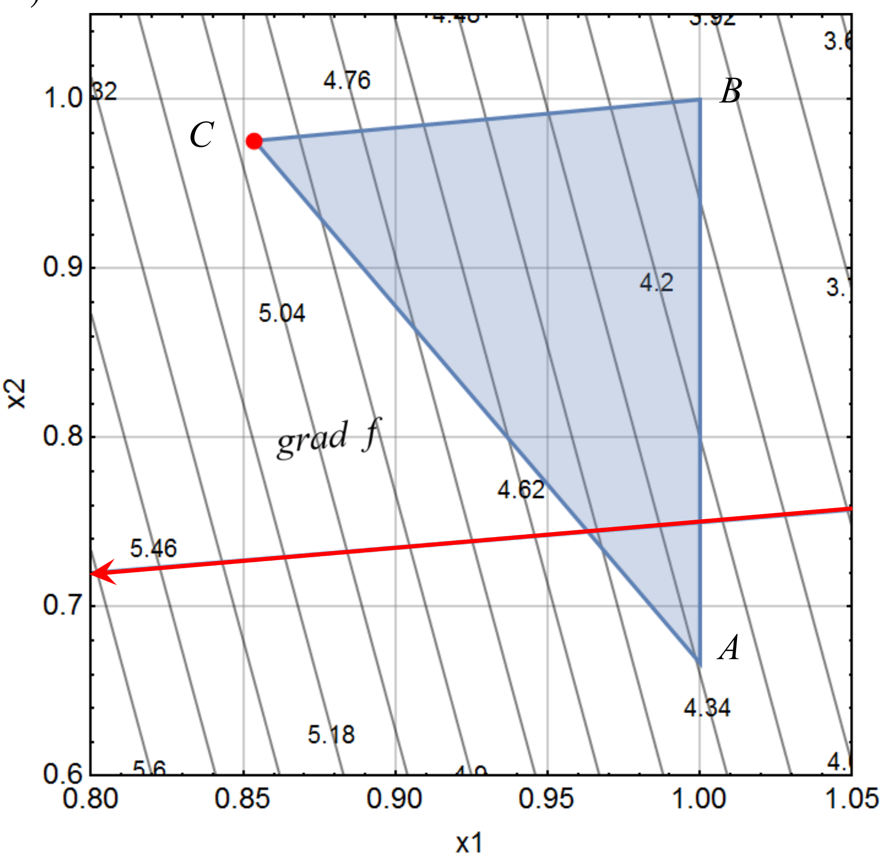

Рис. 1

Оптимальним розв’язком є точка $x^* = \left(\frac{35}{41}, \frac{40}{41}\right)$, $f\left(x^*\right) = 5$.

Продовжимо розв'язання задачі симплекс-методом. Складаємо симплекс таблицю. Так як серед вільних членів β_i, є від'ємні, то немає початкового базисного розв'язку.

Перевіряємо випадок відсутності розв'язку через несумісність системи обмежень. Так як у другому рядку серед коефіцієнтів α_{2j} є від'ємні, то допустима область непорожня.

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	10/3	0	10/3
x_4	-19/3	-3	-25/3
x_5	-1/3	2	5/3
	20/3	1	35/3

Для переходу в іншу точку допустимої області необхідно в системі обмежень (в симплекс-таблиці) поміняти місцями базисну і небазисну змінні.

У рядку з $\beta_2 = -25/3$ треба вибрати від'ємний елемент. Виберемо максимальний за модулем елемент $\alpha_{12} = -19/3$. Перший стовпець буде розв'язувальним стовпцем. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Змінна x_1 буде вводитися в базис.

Номер розв'язувального рядка s вибираємо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку $\min\limits_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} = \min\limits_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \geq 0} \left\{ \frac{10/3}{10/3}, \frac{-25/3}{-19/3} \right\} = 1.$

Зазначимо, що відношення $\dfrac{5/3}{-1/3}$ враховувалося, так як воно є від'ємним.

Змінна x_3 буде виводитися з базису. Елемент $\alpha_{11} = 10/3$, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця буде розв'язувальним елементом.

Далі виконуємо ***крок модифікованих Жорданових виключень***, який полягає в наступному:

1) У новій симплекс-таблиці на місце розв'язувального елемента ставимо число 1

2) Решту елементів розв'язувального рядка перенесемо в нову симплекс-таблицю без змін.

3) Решту елементів розв'язувального стовпця перенесемо в нову симплекс-таблицю з протилежним знаком.

4) Решту елементів нової симплекс-таблиці знаходимо за правилом прямокутника (правилом обчислення визначника другого порядку). Причому розв'язувальний елемент завжди вважається таким, що стоїть на головній діагоналі.

5) Всі елементи нової симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент.

Обчислення елементів нової симплекс-таблиці за правилом прямокутника:

$$\left(\frac{10}{3}\cdot(-3)-\left(-\frac{19}{3}\right)\cdot 0\right)/\left(\frac{10}{3}\right)=-3$$

$$\left(\frac{10}{3}\cdot\left(-\frac{25}{3}\right)-\left(-\frac{19}{3}\right)\cdot\frac{10}{3}\right)/\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{(-250+190)3}{9\cdot 10}=-2$$

$$\left(\frac{10}{3}\cdot\frac{35}{3}-\frac{20}{3}\cdot\frac{10}{3}\right)/\left(\frac{10}{3}\right)=\frac{(350-200)3}{9\cdot 10}=5$$

	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	3/10	0	1
x_4	19/10	-3	-2
x_5	1/10	2	2
	-2	1	5

Далі запишемо симплекс-таблиці без детальних коментарів.

	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	3/10	0	1
x_2	-19/30	-1/3	2/3
x_5	41/30	2/3	2/3
	-41/30	1/3	13/3

Так як всі вільні члени невід'ємні, то отримано початковий базисний розв'язок $x^{(0)}=\left(1,\frac{2}{3},0,0,\frac{2}{3}\right)$, $f\left(x^{(0)}\right)=13/3$. Початковий базисний розв'язок – це вершина допустимої області $A\left(1,\frac{2}{3}\right)$.

Переходимо на етап знаходження оптимального розв'язку задачі ЛП.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємні коефіцієнти.

Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів стовпця з від'ємним коефіцієнтом цільової функції є додатні коефіцієнти, то необмеженості цільової функції на допустимій множині не виявлено.

За розв'язувальний стовпець виберемо перший стовпець (так як від'ємний коефіцієнт цільової функції один).

Номер розв'язувального рядка визначимо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}}=\min_{i:\alpha_{ir}>0}\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку $\min\limits_{i:\alpha_{ir}>0}\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}=\min\limits_{i:\alpha_{i1}>0}\left\{\frac{10}{3},\frac{2\cdot 30}{3\cdot 41}\right\}=\frac{20}{41}$.

Зазначимо, що відношення $\left(\frac{2}{3}\right)\Big/\left(-\frac{19}{30}\right)$ враховувалося.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_5$	$-x_4$	
x_1	-9/41	-6/41	35/41
x_2	19/41	-1/41	40/41
x_3	30/41	20/41	20/41
	1	1	5

Всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні.

Базисний розв'язок $x^{(1)}=\left(\frac{35}{41},\frac{40}{41},\frac{20}{41},0,0\right)$, $z\left(x^{(1)}\right)=5$ є оптимальним розв’язком $x^*=x^{(1)}$. Це вершина допустимої області $C\left(\frac{35}{41},\frac{40}{41}\right)$.

Приклад 2 (варіант № 60)**.** Знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП симплекс-методом з використанням методу штучного базису.

$$f=3x_1+2x_2+x_3-x_4+0\cdot x_5\to max,$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5=5,\\3x_1+2x_2+x_3+x_5=5,\\7x_1-2x_2+2x_3-x_5=5,\end{cases}$$

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1&3&1&2\\3&2&1&0&1\\7&-2&2&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}=(5,5,5)^T,\ \mathbf{c}=(3,2,1,-1,0).$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,5}.$$

Система обмежень задачі не містить одиничної матриці і містить один одиничний вектор, тому штучні змінні вводимо в друге і третє рівняння. Також штучні змінні вводимо в цільову функцію з довільно великим від'ємним числом M.

Отримуємо таку задачу ЛП:

$$f=3x_1+2x_2+x_3-x_4+0\cdot x_5-M\left(x_6+x_7\right)\to max,$$

$$\begin{cases}3x_1+x_2+3x_3+x_4+2x_5=5,\\3x_1+2x_2+x_3+x_5+x_6=5,\\7x_1-2x_2+2x_3-x_5+x_7=5,\end{cases}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,7}.$$

Змінна x_4 і штучні змінні x_6, x_7 будуть базисними, а небазисними змінними будуть x_1, x_2, x_3, x_5. Виразимо базисні змінні через небазисні:

$$\begin{cases} x_4 = 5 - (3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5), \\ x_6 = 5 - (3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5), \\ x_7 = 5 - (7x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_5). \end{cases}$$

Підставами подання для x_4, x_6, x_7 в цільову функцію.

$$f = 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5 + 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_5 - M(5 - 3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 +$$
$$+5 - 7x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_5) =$$
$$= 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_5 - 5 - M(10 - 10x_1 - 3x_3).$$

Складаємо симплекс-таблицю. Рядок коефіцієнтів цільової функції розділимо на два рядки.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$	
x_4	3	1	3	2	5
x_6	3	2	1	1	5
x_7	7	-2	2	-1	5
	-6	-3	-4	-2	-5
M	-10	0	-3	0	-10

$\tilde{x}^{(0)} = (0,0,0,5,0,5,5)$, $f(\tilde{x}^{(0)}) = -5 - 10M$.

	$-x_7$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_5$	
x_4	-3/7	13/7	15/7	17/7	20/7
x_6	-3/7	20/7	1/7	10/7	20/7
x_1	1/7	-2/7	2/7	-1/7	5/7
	6/7	-33/7	-16/7	-20/7	-5/7
M	10/7	-20/7	-1/7	-10/7	-20/7

$\tilde{x}^{(1)} = \left(\frac{5}{7}, 0, 0, \frac{20}{7}, 0, \frac{20}{7}, 0\right)$,

$f(\tilde{x}^{(1)}) = -5/7(1 + 4M)$.

	$-x_7$	$-x_6$	$-x_3$	$-x_5$	
x_4	-3/20	-13/20	41/20	3/2	1
x_2	-3/20	7/20	1/20	1/2	1
x_1	1/20	1/10	3/10	0	1
	3/20	33/20	-41/20	-1/2	4
M	1	1	0	0	0

$\tilde{x}^{(2)} = (1,1,0,1,0,0,0)$, $f(\tilde{x}^{(2)}) = 4$.

	$-x_3$	$-x_5$	
x_4	41/20	3/2	1
x_2	1/20	1/2	1
x_1	3/10	0	1
	-41/20	-1/2	4

Всі штучні змінні вийшли з базису, тому відповідні стовпці можна видалити з симплекс-таблиці.

Отримано початковий базисний розв'язок вихідної задачі $x^{(0)} = \left(1,1,0,1,0\right)$, $f\left(x^{(0)}\right) = 4$. Початковий базисний розв'язок – це вершина допустимої області $B(1,1)$. Знайдемо оптимальний розв'язок задачі, продовжуючи розв'язання вже без штучних змінних.

	$-x_4$	$-x_5$	
x_3	20/41	30/41	20/41
x_2	-1/41	19/41	40/41
x_1	-6/41	-9/41	35/41
	1	1	5

Якщо всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні, то отримано оптимальний розв'язок задачі.

Базисний розв'язок $x^{(1)} = \left(\frac{35}{41}, \frac{40}{41}, \frac{20}{41}, 0, 0\right)$, $z\left(x^{(1)}\right) = 5$ є оптимальним розв’язком $x^* = x^{(1)} = \left(\frac{35}{41}, \frac{40}{41}, \frac{20}{41}, 0, 0\right)$.

Оптимальний розв'язок $x^{(1)}$ – вершина допустимої області $C\left(\frac{35}{41}, \frac{40}{41}\right)$.

Приклад 3. Знайти оптимальне розв'язок задачі ЛП симплекс-методом.

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 12, \\ 7x_1 - x_2 \ge 28, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Приводимо задачу лінійного програмування (ЛП) до канонічної форми.

$$z\left(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\right) = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ -x_1 + 3x_2 - x_4 = 12, \\ 7x_1 - x_2 - x_5 = 28, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = -12, \\ -7x_1 + x_2 + x_5 = -28, \end{cases}$$

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5 через небазисні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 6 - (3x_1 + 2x_2), \\ x_4 = -12 - (x_1 - 3x_2), \\ x_5 = -28 - (-7x_1 + x_2), \end{cases}$$

Цільову функцію вже записано через небазисні змінні, тому додаткових перетворень виконувати не потрібно.

Складаємо симплекс таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	3	2	6
x_4	1	-3	-12
x_5	-7	1	-28
	-1	-1	0

Так як серед вільних членів β_i, є від'ємні, то немає початкового базисного розв'язку.

Перевіряємо випадок відсутності розв'язку через несумісність системи обмежень. Так як в кожному рядку з від'ємним вільним членом серед коефіцієнтів α_{ij} є від'ємні, то несумісності системи обмежень не виявлено.

У рядку з $\beta_3 = -28$ (максимальний за модулем) потрібно вибрати від'ємний елемент. Виберемо елемент $\alpha_{31} = -7$. Перший стовпець буде ***розв'язувальним стовпцем***. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Змінна x_1 буде вводитися в базис.

Номер ***розв'язувального рядка*** s вибираємо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку

$$\min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} \geq 0} \left\{ \frac{6}{3}, \frac{-28}{-7} \right\} = 2.$$

Змінна x_3 буде виводитися з базису. Елемент $\alpha_{11} = 3$, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця буде ***розв'язувальним елементом***.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень.

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	1/3	2/3	2
x_4	-1/3	-11/3	-14
x_5	7/3	17/3	-14
	1/3	-1/3	2

Так як серед вільних членів β_i, є від'ємні, то немає початкового базисного розв'язку.

Перевіряємо випадок відсутності розв'язку через несумісність системи обмежень.

Так як в третьому рядку з від'ємним вільним членом серед коефіцієнтів α_{ij} немає від'ємних, то система обмежень несумісна. Отже, задача не має розв'язку через несумісність системи обмежень.

Для заданої задачі є можливість розв'язати цю проблему графічно. Побудуємо область допустимих розв'язків, градієнт цільової функції (рис. 2). Маємо, що немає точок, які б одночасно задовольняли всім обмеженням задачі. Допустима область – порожня множина.

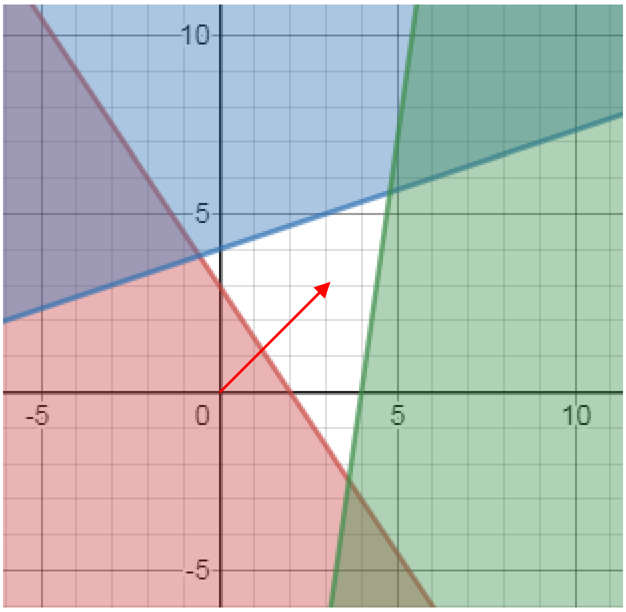

Рис. 2

Приклад 4. Знайти оптимальне розв'язок задачі ЛП симплекс-методом.

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ -3x_1 + 2x_2 \leq 3, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Приводимо задачу лінійного програмування (ЛП) до канонічної форми.

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} -3x_1 - x_2 + x_3 = -3, \\ x_1 - 3x_2 + x_4 = 3, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_5 = 3, \end{cases}$$

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5 через небазисні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = -3 - (-3x_1 - x_2), \\ x_4 = 3 - (x_1 - 3x_2), \\ x_5 = 3 - (-3x_1 + 2x_2), \end{cases}$$

Цільову функцію вже записано через небазисні змінні, тому додаткових перетворень виконувати не потрібно.

Складаємо симплекс таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	-3	-1	-3
x_4	1	-3	3
x_5	-3	2	3
	-1	-1	0

Так як серед вільних членів β_i, є від'ємні, то немає початкового базисного розв'язку.

Перевіряємо випадок відсутності розв'язку через несумісність системи обмежень. Так як в кожному рядку з від'ємним вільним членом серед коефіцієнтів α_{ij} є від'ємні, то несумісності системи обмежень не виявлено.

У рядку з $\beta_1 = -3$ потрібно вибрати від'ємний елемент. Виберемо елемент $\alpha_{11} = -3$. Перший стовпець буде ***розв'язувальним стовпцем***. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Змінна x_1 буде вводитися в базис.

Змінн x_3 буде виводитися з базису. Елемент $\alpha_{11} = -3$, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця буде ***розв'язувальним елементом***.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень..

	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	-1/3	1/3	1
x_4	1/3	-10/3	2
x_5	-1	3	6
	-1/3	-2/3	1

Так як всі вільні члени невід'ємні, то отримано початковий базисний розв'язок $x^{(0)} = (1,0,2,0,6)$, $z\left(x^{(0)}\right) = 1$. Початковий базисний розв'язок – це вершина допустимої області $(1,0)$.

Переходимо на етап знаходження оптимального розв'язку задачі ЛП.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємні коефіцієнти. Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів стовпця з від'ємним коефіцієнтом цільової функції є додатні коефіцієнти, то необмеженості цільової функції на допустимій множині не виявлено.

За розв'язувальний стовпець виберемо другий стовпець (максимальний за модулем коефіцієнт цільової функції). Третій рядок буде розв’язувальним. Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_3$	$-x_5$	
x_1	-2/9	-1/9	1/3
x_4	-7/9	10/9	26/3
x_2	-1/3	1/3	2
	-5/9	2/9	7/3

$x^{(1)}=\left(\frac{1}{3},2,0,\frac{26}{3},0\right)$, $z\left(x^{(1)}\right)=\frac{7}{3}$. Базисний розв'язок $x^{(1)}$ – це вершина допустимої області $(1/3,2)$.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємний коефіцієнт.

Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів стовпця з від'ємним коефіцієнтом цільової функції немає додатних коефіцієнтів, то цільова функція необмежена на допустимій множині.

Отже, задача не має розв'язку через необмеженість цільової функції на допустимій множині.

Для заданої задачі є можливість розв'язати її графічно. Побудуємо область допустимих розв'язків, градієнт цільової функції (рис. 3). Допустима область є необмеженою.

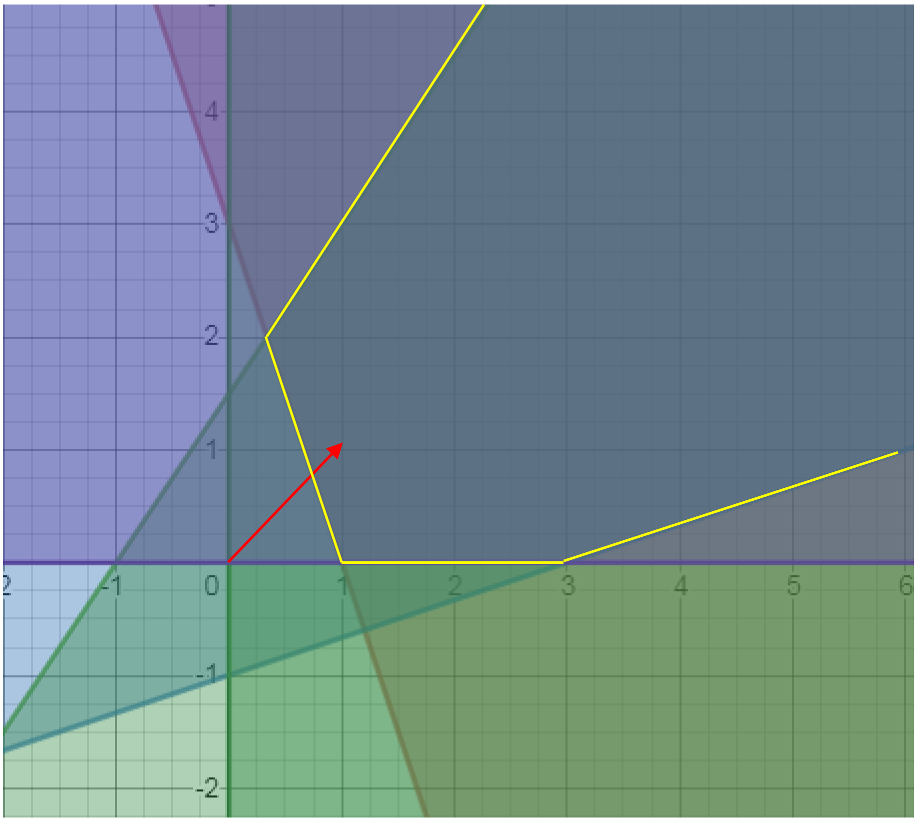

Рис. 3