Методи оптимізації

Лабораторне заняття 2, 28.09.2021

Симплекс-метод розв'язання задачі лінійного програмування

Алгоритм симплекс-метода

<u>1 етап</u>. Приводимо задачу лінійного програмування (ЛП) до канонічної форми.

<u>2 етап</u>.

2.1. Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \left(\alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1n}x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m = \beta_m - \left(\alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{mn}x_n\right). \end{cases}$$

Тут $x_1,\ldots,x_m$ – базисні змінні, а $x_{m+1},\ldots,x_n$ – небазисних змінні.

2.2. Виключаємо базисні змінні $x_1,\ldots,x_m$ з цільової функції:

$$z = c'_{m+1}x_{m+1} + \ldots + c'_n x_n + Q.$$

<u>3 етап</u>. Складаємо симплекс-таблицю:

Базисні змінні	Небазисні змінні					Вільні члени
	$-x_{m+1}$	...	$-x_r$	...	$-x_n$	
x_1	$\alpha_{1,m+1}$	...	$\alpha_{1,r}$	...	$\alpha_{1,n}$	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_s	$\alpha_{s,m+1}$	...	$\alpha_{s,r}$	...	$\alpha_{s,n}$	β_s
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_m	$\alpha_{m,m+1}$	...	$\alpha_{m,r}$	...	$\alpha_{m,n}$	β_m
Коефіцієнти цільової функції	$-c'_{m+1}$	...	$-c'_r$	...	$-c'_n$	Q

<u>4 етап</u>. *Знаходження початкового базисного розв'язку.*

Якщо всі $\beta_i \geq 0$, $i = 1,\ldots,m$, то за початковий опорний розв'язок вибираємо точку $x^{(0)} = \left(\beta_1,\ldots,\beta_m,0,\ldots,0\right)$, $f\left(x^{(0)}\right) = Q$. Переходимо на 5 етап.

Якщо серед β_i, є від'ємні, то проводимо *крок модифікованих Жорданових виключень*.

Для переходу в іншу точку допустимої області D необхідно в системі обмежень (в симплекс-таблиці) поміняти місцями базисну і небазисну змінні.

Нехай серед β_i є від'ємні. Виберемо будь-який з них. На практиці вибирають або максимальний за модулем або перший за порядком. Нехай для визначеності, наприклад, $\beta_s < 0$.

Якщо всі коефіцієнти $\alpha_{sj} \geq 0$ (серед коефіцієнтів α_{sj} немає від'ємних), то задача не має розв'язків через несумісність системи обмежень. Цей випадок означає, що

$$x_s + \alpha_{sm+1} x_{m+1} + .. + \alpha_{sn} x_n = \beta_s < 0,\ \alpha_{sj} \geq 0, j = \overline{m+1,n}.$$

Щоб рівність виконувалося, необхідно щоб $x_j < 0$, а це суперечить умові невід'ємності: $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$.

Нехай серед α_{sj} є від'ємні. Вибираємо в рядку будь-яке з них. На практиці вибирають або максимальне за модулем або перше за порядком.

Нехай r – номер стовпчика, в якому знаходиться вибраний елемент. Стовпець з номером r називається ***розв'язувальним стовпцем***. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Номер ***розв'язувального рядка*** s вибираємо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

Змінна з індексом s буде виводитися з базису.

Елемент α_{sr}, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця, називається ***розв'язувальним елементом*** (ведучим елементом).

Далі виконуємо ***крок модифікованих Жорданових виключень***, який полягає в наступному:

1) У новій симплекс-таблиці на місце розв'язувального елемента ставимо число 1
2) Решту елементів розв'язувального рядка перенесемо в нову симплекс-таблицю без змін.
3) Решту елементів розв'язувального стовпця перенесемо в нову симплекс-таблицю з протилежним знаком.
4) Решту елементів нової симплекс-таблиці знаходимо за правилом прямокутника (правилом обчислення визначника другого порядку). Причому розв'язувальний елемент завжди вважається таким, що стоїть на головній діагоналі.
5) Всі елементи нової симплекс-таблиці ділимо на розв'язувальний елемент.

Виконуючи 4 етап скінченне число раз, отримаємо або початковий опорний розв'язок, або встановимо несумісність системи обмежень.

5 етап. *Знаходження оптимального розв'язку*

Нехай є поточний базисний розв'язок $x^{(k)}$.

Якщо всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні, то $x^* = x^{(k)}$ (отримано оптимальний розв'язок задачі).

Якщо серед коефіцієнтів в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємні, то можливі два випадки:

1) Нехай $c_r^{'} < 0$. Якщо всі інші коефіцієнти цього стовпця $\alpha_{ir} \le 0$ (серед коефіцієнтів стовпця немає додатних), то задача не має розв'язку в силу необмеженості цільової функції на допустимій множині.

2) Нехай не виявлено необмеженість цільової функції на допустимій множині. Тоді ми переходимо від цього базисного розв'язку до наступного. За розв'язувальний стовпець візьмемо будь-який стовпець з коефіцієнтом $c_j^{'} < 0$. На практиці вибирають або максимальний за модулем або перший за порядком.

Нехай для визначеності $c_r^{'} < 0$ і серед коефіцієнтів α_{ir} є додатні. Номер розв'язувального рядка визначимо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

Далі виконуємо *крок модифікованих Жорданових виключень* і переходимо до нового базисного розв'язку $x^{(k+1)}$.

За скінченне число кроків (скінченне число раз виконуючи 5 етап) або буде знайдено оптимальний розв'язок задачі ЛП, або встановлено факт необмеженості цільової функції на допустимій множині.

Приклад. Знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП у канонічній формі симплекс-методом.

Варіант №59. $c = (5,5,1,2,-1)$, $b = (26,2,12)$, $A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = 5x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \to max$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 26, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 = 12, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

Це зручно зробити записавши розширену матрицю системи обмежень задачі і потім застосувавши до неї елементарні перетворення рядків матриці. Елементарними перетвореннями над рядками матриці є:

- множення рядка на ненульове число;
- додавання до одного рядка матриці іншого її рядка, помноженого на деяке ненульове число.
- перестановка двох рядків.

Розширена матриця для прикладу має вигляд:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 6 & 3 & 1 & 1 & 1 & 26 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Виберемо за базисні змінні x_3, x_4, x_5. Стовпець матриці обмежень $A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ має потрібний вигляд. Тому елементарними перетвореннями рядків матриці $\bar{A}$ отримаємо щоб $A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Тоді вектори A_3, A_4, A_5 будуть складати лінійно незалежну систему векторів-умов.

Від першого рядка матриці $\bar{A}$ віднімемо другий рядок і запишемо результат як перший рядок, отримуємо еквівалентну матрицю:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 7 & 1 & 1 & 0 & 1 & 24 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Від першого рядка матриці $\bar{A}$ віднімемо третій рядок і запишемо результат як перший рядок:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -3 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}\right).$$

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5, x_6 через небазисні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 12 - (4x_1 - 3x_2), \\ x_4 = 2 - (-x_1 + 2x_2), \\ x_5 = 12 - (3x_1 + 4x_2). \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через небазисні змінні:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 5x_1 + 5x_2 + 12 - (4x_1 - 3x_2) + 4 - 2(-x_1 + 2x_2) - 12 + (3x_1 + 4x_2) =$$
$$= 6x_1 + 8x_2 + 12 + 4 \to max.$$

Для заданої задачі є можливість розв'язати її графічно.

Побудуємо область допустимих розв'язків, градієнт і лінії рівня цільової функції (рис. 1). Координати вершин допустимої області такі: $A(3,0)$, $B(3.36, 0.48)$, $C(1.6, 1.8)$, $D(0,1)$. Вектор-градієнт $grad\ f = (6,8)$. Оптимальними розв'язками є точки B та C, а, отже, увесь відрізок, що їх з'єднує. $x^* = \lambda(1.6, 1.8) + (1-\lambda)(3.36, 0.48)$, $\lambda \in [0,1]$, $f(x^*) = 28$.

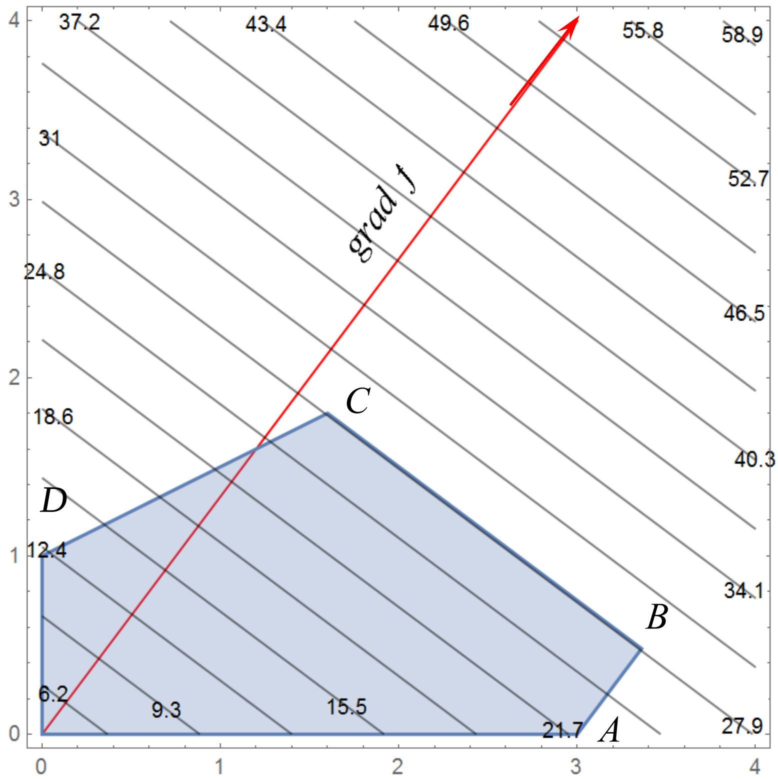

Рис. 1

Продовжимо розв'язання задачі симплекс-методом. Складаємо симплекс таблицю:

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	4	-3	12
x_4	-1	2	2
x_5	3	4	12
	-6	-8	4

Так як всі вільні члени невід'ємні, то маємо початковий базисний розв'язок $x^{(0)} = (0,0,12,2,12)$, $f\left(x^{(0)}\right) = 4$. Геометрично, початковий базисний розв'язок – це вершина допустимої області $O(0,0)$.

Переходимо на етап знаходження оптимального розв'язку задачі ЛП.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємні коефіцієнти.

Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів кожного стовпчика з від'ємним коефіцієнтом цільової функції є додатні коефіцієнти, то необмеженості цільової функції на допустимій множині не виявлено.

За розв'язувальний стовпець виберемо другий стовпець (так як в ньому знаходиться максимальний за модулем від'ємний коефіцієнт цільової функції). Номер розв'язувального рядка визначимо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку $\min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \{1,3\} = 1$. Відзначимо, що відношення $12/(-3)$ не враховувалося.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	5/2	3/2	15
x_2	-1/2	1/2	1
x_5	5	-2	8
	-10	4	12

Базисний розв'язок $x^{(1)} = (0,1,15,0,8)$, $f\left(x^{(1)}\right) = 12$. Точка $x^{(1)}$ – це вершина допустимої області $D(0,1)$.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємний коефіцієнт.

Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів стовпця з від'ємним коефіцієнтом цільової функції є додатні коефіцієнти, то необмеженості цільової функції на допустимій множині не виявлено.

За розв'язувальний стовпець виберемо перший стовпець. Розв'язувальним рядком буде третій рядок, так як

$$\min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \left\{ \frac{15 \cdot 2}{5}, \frac{8}{5} \right\} = \frac{8}{5}.$$

Виконуємо крок модифікованих Жорданових винятків і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_5$	$-x_4$	
x_3	-1/2	5/2	11
x_2	1/10	3/10	9/5
x_1	1/5	-2/5	8/5
	2	0	28

Всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні. Базисний розв'язок $x^{(2)}=\left(\frac{8}{5},\frac{9}{5},11,0,0\right)$, $f\left(x^{(2)}\right)=28$ є оптимальним розв'язком $x^{*}=x^{(2)}=\left(1.6,1.8,11,0,0\right)$.

Базисний розв'язок $x^{(2)}$ – це вершина допустимої області $C\left(1.6,1.8\right)$.

За розв'язувальний стовпець можна вибрати першгий стовпець (так як в ньому знаходиться перший за порядком від'ємний коефіцієнт цільової функції).

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	4	-3	12
x_4	-1	2	2
x_5	3	4	12
	-6	-8	4

Номер розв'язувального рядка визначимо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}}=\min_{i:\alpha_{ir}>0}\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку $\min\limits_{i:\alpha_{ir}>0}\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}=\min\limits_{i:\alpha_{ir}>0}\left\{3,4\right\}=3$. Відзначимо, що відношення $2/\left(-1\right)$ не враховувалося.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	1/4	-3/4	3
x_4	1/4	5/4	5
x_5	-3/4	25/4	3
	6/4	-50/4	22

Базисний розв’язок $x^{(1)}=\left(3,0,0,5,3\right)$, $f\left(x^{(1)}\right)=22$. Точка $x^{(1)}$ – це вершина допустимої області $A\left(3,0\right)$.

У рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці є від'ємний коефіцієнт.

Перевіряємо випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині. Так як серед коефіцієнтів стовпця з від'ємним коефіцієнтом цільової функції є додатні коефіцієнти, то необмеженості цільової функції на допустимій множині не виявлено.

За розв'язувальний стовпець виберемо другий стовпець. Розв'язувальним рядком буде третій рядок, так як

$$\min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \left\{ \frac{5 \cdot 4}{5}, \frac{3 \cdot 4}{25} \right\} = \frac{12}{25}.$$

Виконуємо крок модифікованих Жорданових винятків і переходимо до нового базисного розв'язку.

	$-x_3$	$-x_5$	
x_1	4/25	3/25	84/25
x_4	2/5	-1/5	22/5
x_2	-3/25	4/25	12/25
	0	2	28

Всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні. Базисний розв'язок $x^{(2)} = \left(\frac{84}{25}, \frac{22}{5}, 0, \frac{12}{25}, 0 \right)$, $f\left(x^{(2)}\right) = 28$ є оптимальним розв'язком $x^* = x^{(2)} = (3.36, 0.48, 0, 4.4, 0)$.

Базисний розв'язок $x^{(2)}$ – це вершина допустимої області $B(3.36, 0.48)$.