Следовательно, правую часть неравенства (17.37) как функцию переменной hp_i (считая ее изменяющейся непрерывно) в условных координатах можно представить в виде графика, изображенного на рис.17.2.

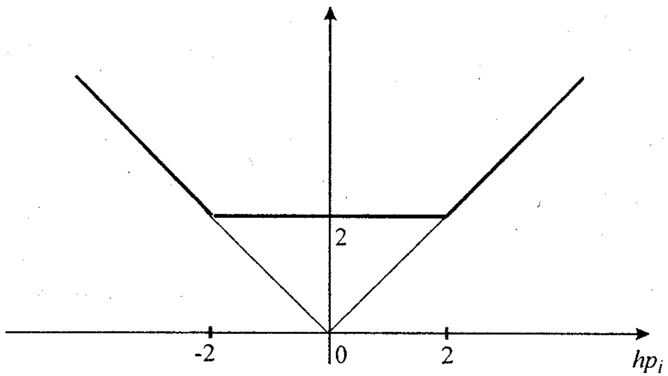

Рис. 17.2. Условный график правой части неравенства (17.37)

Так как левая часть неравенства (17.37) при $q_i > 0$ и малых $h > 0$ (малость h нужна из требований аппроксимации) меньше 2, то на устойчивость прогонки можно рассчитывать лишь в случае, когда $q(x) < 0$. При этом имеет место

$$\left|2 - h^2 q_i\right| = 2 - h^2 q_i > 2 \quad \forall\, h.$$

Чтобы в таком случае неравенство (17.37) выполнялось при любых $p(x)$, для правой его части считаем допустимым только значение 2 (т.е. используем горизонтальную часть графика на рис.17.2). Отсюда получаем ограничение

$$|hp_i| \le 2,$$

означающее, что устойчивость прогонки можно гарантировать при условии, что шаг дискретизации h удовлетворяет неравенству

$$h \le \frac{2}{|p_i|} \quad \forall\, i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}.$$

Усиливая это неравенство и используя сформулированное в конце § 16.1 утверждение «Аппроксимация плюс устойчивость дает сходимость», приходим к заключению, что *если в дифференциальном уравнении* (17.2)

$$q(x) < 0 \quad \forall\, x \in [a, b], \tag{17.38}$$

а в определяющем МКР разностном уравнении (17.32)

$$h \le \frac{2}{\max\limits_{x \in [a,b]} |p(x)|},$$

то МКР *с х о д и т с я* (по крайней мере, к решению первой краевой задачи, т.е. когда в (17.3), (17.4) $\alpha_1 = \beta_1 = 0$; в других случаях требуется более детальный анализ).

Наличие ограничения на шаг h в методе конечных разностей второго порядка (17.32) характеризует его как условно устойчивый метод. Если отказаться от аппроксимации всех производных с порядком $O(h^2)$ и использовать в роли $y'(x_i)$ правые или левые разностные отношения первого порядка точности, связывая их выбор со знаком p_i, а именно, рассматривая вместо (17.31) разностное уравнение

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \begin{bmatrix} \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}, \text{ если } & p_i > 0 \\ \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h}, \text{ если } & p_i < 0 \end{bmatrix} + q_i y_i = f_i$$

при $i = 1, 2, \ldots, n-1$, придем к конечноразностному методу

$$\left[\begin{array}{ll} y_{i-1} - (2 + hp_i - h^2 q_i) y_i + (1 + hp_i) y_{i+1} = h^2 f_i, & \text{если } p_i > 0, \\ (1 - hp_i) y_{i-1} - (2 - hp_i - h^2 q_i) y_i + y_{i+1} = h^2 f_i, & \text{если } p_i < 0, \end{array}\right. \tag{17.39}$$

имеющему первый порядок точности независимо от точности аппроксимации краевых условий.

Легко видеть, что при условии (17.38) диагональное преобладание в методе (17.39) будет при любой величине шага $h > 0$. Отсюда следует его *безусловная устойчивость*, правда в ущерб точности; последнее означает необходимость проведения вычислений с более мелким шагом для доведения погрешности решения до некоторой фиксированной малой величины, чем это требует метод второго порядка (17.32), если они оба одновременно применимы. Конечноразностный метод (17.39) широко используется при решении задач динамики жидкости и газов и называется ***upwind***- или ***противопотоковым методом***.

17.4. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ

Будем искать приближенное решение линейной краевой задачи (17.2)–(17.4) в виде функции

$$y_n(x) := \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(x), \tag{17.40}$$

где определяемые на отрезке $[a,b]$ ***базисные функции*** $\varphi_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и дополнительная функция $\varphi_0(x)$ должны быть дважды дифференцируемыми и попарно линейно независимыми. Кроме того, функция $\varphi_0(x)$ должна удовлетворять данным краевым условиям (17.3), (17.4), а функции $\varphi_i(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ — соответствующим однородным краевым условиям, т.е. должны выполняться равенства

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0\varphi_i(a) + \alpha_1\varphi_i'(a) = 0\,, \\ \beta_0\varphi_i(b) + \beta_1\varphi_i'(b) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \forall\, i \in \{\, i = 1, 2, \ldots, n\,\}. \qquad (17.41)$$

В таком случае функция $y_n(x)$, определяемая выражением (17.40), при любых значениях коэффициентов c_i гарантированно удовлетворяет краевым условиям (17.3), (17.4). Действительно, например, в точке $x = a$ имеем

$$\alpha_0 y_n(a) + \alpha_1 y_n'(a) =$$

$$= \alpha_0\varphi_0(a) + \alpha_1\varphi_0'(a) + \alpha_0\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i(a) + \alpha_1\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i'(a) =$$

$$= A + \sum_{i=1}^{n} c_i[\alpha_0\varphi_i(a) + \alpha_1\varphi_i'(a)] = A\,;$$

аналогично при $x = b$ с помощью (17.4), (17.40) и (17.41) проверяется справедливость равенства

$$\beta_0 y_n(b) + \beta_1 y_n'(b) = B\,.$$

Представление приближенного решения $y_n(x)$, подобное (17.40), характерно для многих приближенно-аналитических методов решения краевых задач (возможны вариации требований к базисным функциям); главное их различие состоит в том, на какой основе ищутся коэффициенты c_i в линейной комбинации базисных функций $\varphi_i(x)$ выражения (17.40).

В ***методе коллокации****) коэффициенты c_i в представлении (17.40) приближенного решения $y_n(x)$ подбираются так, чтобы в ***узлах коллокации*** x_i таких, что

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < b$$

(не обязательно равноотстоящих, но строго внутренних точках отрезка $[a, b]$), *значения* $y_n(x_i)$ *приближенного решения были согласованы с точными значениями* $y(x_i)$.

---

*) *Collocatio* (лат.) — размещение, расстановка. В книге [80] такой метод называют ***интерполяционным методом*** или ***методом совпадений***.

Поскольку точное решение $y(x)$ задачи (17.2)–(17.4) неизвестно, согласование $y_n(x)$ и $y(x)$ в узлах коллокации x_i проводим подстановкой $y_n(x)$ в уравнение (17.2). Имеем равенство

$$y_n''(x_i) + p(x_i)y_n'(x_i) + q(x_i)y_n(x_i) = f(x_i)\,, \qquad (17.42)$$

которое, в силу выставляемого требования согласования $y_n(x_i)$ с $y(x_i)$, считаем точным при каждом $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Продифференцировав дважды функцию $y_n(x)$ в представлении (17.40), от равенства (17.42) переходим к равенству

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j''(x_i) + p_i\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j'(x_i) + q_i\sum_{j=1}^{n} c_j\varphi_j(x_i) =$$

$$= f_i - \varphi_0''(x_i) - p_i\varphi_0'(x_i) - q_i\varphi_0(x_i)\,, \qquad (17.43)$$

где p_i, q_i, f_i соответствуют обозначениям (17.28) сеточных функций. Положим

$$a_{ij} := \varphi_j''(x_i) + p_i\varphi_j'(x_i) + q_i\varphi_j(x_i)\,, \qquad (17.44)$$

$$b_i := f_i - \varphi_0''(x_i) - p_i\varphi_0'(x_i) - q_i\varphi_0(x_i)\,. \qquad (17.45)$$

Тогда (17.43) приобретает стандартный вид линейной алгебраической системы

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_j = b_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (17.46)$$

относительно коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Решив эту систему каким-нибудь стандартным методом и подставив найденные коэффициенты c_i в выражение (17.40), получаем приближенное решение $y_n(x)$.

Успех применения метода коллокации к задаче (17.2)–(17.4), впрочем, как и других приближенно-аналитических методов, сильно зависит от удачного выбора базисных функций $\varphi_i(x)$ в представлении приближенного решения (17.40). В конкретных задачах выбор таких функций, по возможности, должен опираться на априорные или эмпирические сведения о решении. В отсутствие таковых, т.е. в рассматриваемом абстрактном случае, для смешанной краевой задачи (17.2)–(17.4) можно предложить, например, следующий **набор базисных функций**.

В качестве φ_0 возьмем линейную функцию

$$\varphi_0(x) = \delta + \gamma x\,, \qquad (17.47)$$

коэффициенты которой подберем так, чтобы она удовлетворяла неоднородным краевым условиям (17.3), (17.4), т.е. из линейной алгебраической системы

$$\begin{cases}\alpha_0\delta + (\alpha_0 a + \alpha_1)\gamma = A, \\ \beta_0\delta + (\beta_0 b + \beta_1)\gamma = B.\end{cases} \tag{17.48}$$

Функции $\varphi_i(x)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$ можно взять однопараметрическими вида

$$\varphi_i(x) = \gamma_i(x-a)^i + (x-a)^{i+1}, \tag{17.49}$$

если в (17.3) $\alpha_1 = 0$, или вида

$$\varphi_i(x) = \gamma_i(x-a)^{i+1} + (x-a)^{i+2} \tag{17.50}$$

в самом общем случае. Очевидно, что при любых γ_i эти функции удовлетворяют первому из требуемых равенств (17.41)*), а если зафиксировать

$$\gamma_i = -\frac{\beta_0(b-a)^2 + (i+1)\beta_1(b-a)}{\beta_0(b-a) + i\beta_1} \tag{17.51}$$

в выражении (17.49) и

$$\gamma_i = -\frac{\beta_0(b-a)^2 + (i+2)\beta_1(b-a)}{\beta_0(b-a) + (i+1)\beta_1} \tag{17.52}$$

в (17.50), то они будут подчиняться и второму из этих равенств. Следовательно, можно рассчитывать, что с такими базисными функциями при найденных методом коллокации (или каким-либо другим методом) коэффициентах c_i определенная посредством (17.40) функция $y_n(x)$ будет удовлетворять краевым условиям и может служить приближенным решением данной краевой задачи (17.2)–(17.4).

Проблема формального выбора базисных функций φ_i значительно упрощается в случае, когда в задаче (17.2)–(17.4) фигурируют о д н о р о д н ы е краевые условия п е р в о г о рода, т.е. когда

$$y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{17.53}$$

В такой ситуации в выражении (17.40) не нужна функция φ_0, а в роли φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ могут выступать, например, функции

$$\varphi_i(x) = (x-a)^i(b-x)$$

*) Если $\alpha_1 \neq 0$, то первому из равенств (17.41) не удовлетворяет одна функция семейства (17.49), а именно $\varphi_1(x)$.

или

$$\varphi_i(x) = \sin\frac{i(x-a)}{b-a}\pi.$$

К этому случаю, т.е. к условиям (17.53), легко свести более общий случай н е о д н о р о д н ы х краевых условий первого рода

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{17.54}$$

С этой целью достаточно сделать линейную замену (линейный сдвиг)

$$y = u + v, \quad \text{где} \quad v := A + \frac{B-A}{b-a}(x-a).$$

Дважды дифференцируя эту функцию y и подставляя результаты в уравнение (17.2), от задачи (17.2), (17.54) приходим к краевой задаче с однородными краевыми условиями относительно новой переменной u:

$$u'' + p(x)u' + q(x)u = f(x) - \frac{B-A}{b-a}p(x) - vq(x), \qquad x \in [a, b],$$
$$u(a) = 0, \quad u(b) = 0.$$

Пример 17.1. Применим метод коллокации для приближенного представления решения краевой задачи

$$\begin{aligned} &x^4 y'' + x^6 y' - x^5 y = 6 - 3x^3, \quad x \in [1, 2], \\ &y(1) = 1, \quad 3y(2) + y'(2) = 0.5. \end{aligned} \tag{17.55}$$

Составив систему (17.48) относительно коэффициентов δ и γ функции $\varphi_0(x)$ вида (17.47)

$$\begin{cases}\delta + \gamma = 1, \\ 3\delta + 7\gamma = 0.5,\end{cases}$$

находим удовлетворяющую данным краевым условиям линейную функцию $\varphi_0(x) = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}x$. Ограничиваясь одной базисной функцией $\varphi_1(x)$ вида (17.49), по формуле (17.51) вычисляем коэффициент

$$\gamma_1 = -\frac{3(2-1)^2 + 2(2-1)}{3(2-1) + 1\cdot 1} = -\frac{5}{4},$$

подстановка которого в (17.49) при $i = 1$ дает базисную функцию

$$\varphi_1(x) = (x-1)^2 - \frac{5}{4}(x-1).$$

Возьмем в качестве узла коллокации середину рассматриваемого промежутка — точку $x_1 = \frac{3}{2}$ — и потребуем, чтобы функция

$$y_1(x) = \varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x)$$

удовлетворяла в этой точке заданному дифференциальному уравнению. Подставив в него

$$y_1\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{16}-\frac{3}{8}c_1, \quad y_1'=-\frac{5}{8}-\frac{1}{4}c_1 \quad \text{и} \quad y_1''=2c_1,$$

получаем $c_1=\dfrac{701}{864}$. Таким образом, простейшая коллокация с одним узлом приводит к приближению решения данной краевой задачи (17.55) квадратичной функцией

$$y_1(x)=1-\frac{5}{8}(x-1)+\frac{701}{864}(x-1)(x-\frac{9}{4})$$

(ее точное решение $y(x)=\dfrac{1}{x^2}$).

Замечание 17.3. Приближенное решение $y_n(x)$ (17.40), согласно идее метода коллокации, в точках коллокации $x_i\in(a,\,b)$ должно удовлетворять данному дифференциальному уравнению (17.2). Казалось бы, в этих точках оно должно совпадать с точным решением $y(x)$ данной краевой задачи (17.2)–(17.4). Однако это не так, в чем легко убедиться, сравнив полученное в примере 17.1 приближенное решение в узле коллокации $x_1=\dfrac{3}{2}$, равное $y_1\left(\dfrac{3}{2}\right)\approx 0.38$, с точным значением решения $y\left(\dfrac{3}{2}\right)=0.(4)$ (см. также сравнение графиков $y_1(x)$ и $y(x)$ далее на рис.17.3)

Замечание 17.4. Нет принципиальных препятствий к привлечению метода коллокации для приближенного решения нелинейных краевых задач. Трудности на этом пути ожидают при подборе базисных функций φ_i, удовлетворяющих краевым условиям (17.1) в случае их нелинейности, и в необходимости решать нелинейные системы при отыскании коэффициентов c_i того же представления (17.40) приближенного решения. Например, если данное дифференциальное уравнение имеет вид

$$y''=f(x,\,y,\,y'),$$

то коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в представлении $y_n(x)$ вида (17.40) должны находиться из системы

$$\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j''(x_i)=f(x_i,\,\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x_i),\,\sum_{j=0}^{n}c_j\varphi_j'(x_i)),$$

где $i=1,2,\ldots,n$, а $c_0:=1$ (или $c_0:=0$, если это дифференциальное уравнение сопровождается краевыми условиями первого рода).

17.5. МЕТОД ГАЛЁРКИНА

Чтобы лучше понять основную идею ***проекционных методов***, наиболее ярким представителем которых является метод Галёркина, ненадолго отвлечемся от рассматриваемой краевой задачи и сделаем небольшой экскурс в функциональный анализ.

Пусть L — некоторый линейный оператор, действующий в ***гильбертовом пространстве*** H, т.е. в полном нормированном пространстве со скалярным произведением $(\cdot,\,\cdot)$. Стоит задача приближенного решения ***операторного уравнения***

$$Ly=f, \tag{17.56}$$

т.е. задача отыскания некоторого приближения к неизвестному элементу $y\in H$, соответствующему заданному элементу $f\in H$. Пусть, далее, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — некоторая полная замкнутая система линейно независимых элементов из H. Ее n первых элементов $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ выделяют в H конечномерное подпространство H_n, в котором и ищется приближенное решение уравнения (10.56):

$$y_n:=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i. \tag{17.57}$$

Для удобства будем считать, что элемент Ly_n принадлежит тому же подпространству H_n. Тогда к тривиальному равенству

$$f=Ly_n+(f-Ly_n)$$

можно применить одну из центральных теорем теории гильбертовых пространств, согласно которой *любой элемент гильбертова пространства может быть представлен в виде суммы определенного элемента подпространства* (проекции данного элемента на подпространство) *и определенного элемента пространства, ортогонального к выбранному подпространству* (реализующего расстояние от исходного элемента до его проекции) [45, 148][*].

Принадлежность элемента $f-Ly_n$ ортогональному к H_n подпространству $H_n^{\perp}$ означает, что он ортогонален каждому элементу φ_i, входящему в базис пространства H_n. Таким обра-

[*] Представьте себе, например, точку трехмерного пространства в декартовой системе координат, спроектируйте ее радиус-вектор на одну из координатных плоскостей; полученный при этом прямоугольный векторный треугольник может служить простейшей геометрической моделью этой теоремы.