Методи оптимізації. Лекція 01.04.2022

Приклад 2. Розглянемо приклад застосування методу множників Лагранжа для моделювання поведінки споживача на споживчому ринку.

Громадянин хоче розмістити 100 грошових одиниць у банку. Банк пропонує два види внесків: терміном на один рік з прибутковістю 20 % річних або терміном на два роки з прибутковістю 25 % річних. Щоб визначити, як розподілити грошові кошти, застосуємо функцію, наведену далі.

Нехай $x_1,\ x_2$ – сума грошей, що буде розміщена як перший і другий вид внесків відповідно. Оскільки громадянин може розмістити не більше тієї суми, яку він має, то перше обмеження матиме такий вигляд:

$$x_1 + x_2 \le 100.$$

Також потрібно врахувати, що $x_1,\ x_2$ мають бути більші за нуль, тому внесок не може виражатися від'ємним числом. Вкладаючи кошти, громадянин бажає отримати максимальний прибуток. Корисність грошей, згідно з загальними законами споживчої корисності, що залишаться після внеску, дорівнює

$$\left(\frac{3}{5}\right)^0 ln\left(100 - x_1 - x_2\right).$$

Корисність доходу вкладених коштів на один рік і на два роки відповідно становить:

$$\frac{3}{5} ln\left(\frac{3}{5} x_1\right) \text{ та } \frac{9}{25} ln\left(\frac{16}{25} x_2\right).$$

Загальну корисність можна записати у вигляді такої функції:

$$f\left(x\right) = ln\left(100 - x_1 - x_2\right) + \frac{3}{5} ln\left(\frac{3}{5} x_1\right) + \frac{9}{25} ln\left(\frac{16}{25} x_2\right),$$

$$x_1 + x_2 \le 100,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

1. Розв’яжемо задачу при обмеженні $x_1 + x_2 < 100$. За необхідною умовою мінімуму частинні похідні цільової функції $f\left(x\right)$ за кожною змінною, прирівняні до нуля мають такий вигляд:

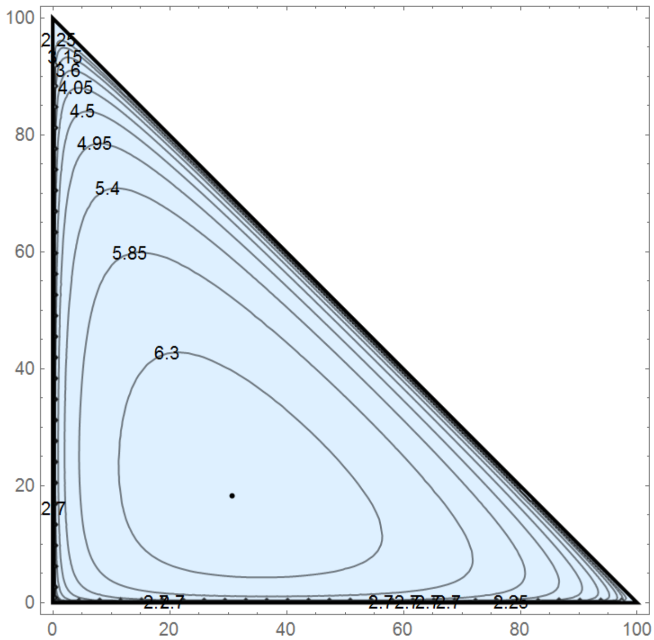
$$\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1} = -\frac{1}{100 - x_1 - x_2} + \frac{3}{5x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2} = -\frac{1}{100 - x_1 - x_2} + \frac{9}{25x_2} = 0.$$

Із поданої системи рівнянь знаходимо змінні $x_1,\ x_2$, тобто, суму грошей, яка буде розміщена в перший і другий вид внеску. Отже, аналітично розв’язавши систему рівнянь маємо

$$\tilde{x}_1 = \frac{1500}{49} \approx 31,\ \tilde{x}_2 = \frac{900}{49} \approx 18.$$

$$f\left(\tilde{x}\right) \approx 6.5657.$$



2. Розв'яжемо задачу при обмеженні $x_1 + x_2 = 100$.

Запишемо функцію Лагранжа:

$$L(x,\lambda) = ln(100 - x_1 - x_2) + \frac{3}{5} ln\left(\frac{3}{5} x_1\right) + \frac{9}{25} ln\left(\frac{16}{25} x_2\right) + \lambda(100 - x_1 - x_2).$$

Частинні похідні цільової функції за кожною змінною, прирівняні до нуля мають такий вигляд:

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_1} = -\frac{1}{100 - x_1 - x_2} + \frac{3}{5x_1} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial x_2} = -\frac{1}{100 - x_1 - x_2} + \frac{9}{25x_2} - \lambda = 0,$$

$$\frac{\partial L(x,\lambda)}{\partial \lambda} = 100 - x_1 - x_2 = 0.$$

Розв'язавши систему рівнянь, маємо

$$\hat{x}_1 = 62.5,\ \hat{x}_2 = 37.5.$$

$$f(\hat{x}) = 3.3187.$$

3. За аналізом цільової функції маємо, що максимум функції $f(x)$ за умов $x_1 + x_2 \le 100$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ досягається в точці $\tilde{x}$. Отже, вкладник розмістить у короткостроковий депозит – 31 %, а в довгостроковий – 18 % своїх коштів. Інша частина коштів залишиться на поточні потреби. Ухвалення цього рішення принесе вкладнику найбільшу корисність.

Приклад 3. Знайти екстремуми функції $f(x) = 4x_1 + 3x_2$ на множині, яка задана рівнянням $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

Запишемо задачу в стандартному вигляді

$$4x + 3y \to extr,$$

$$x^2+y^2-1=0.$$

Складемо для неї функцію Лагранжа

$$L(x,\lambda)=4x_1+3x_2+\lambda\left(x_1^2+x_2^2-1\right)$$

і обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x,\lambda)=4+2\lambda x_1,\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x,\lambda)=3+2\lambda x_2,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,\lambda)=x_1^2+x_2^2-1.$$

Після цього потрібно розв'язати систему

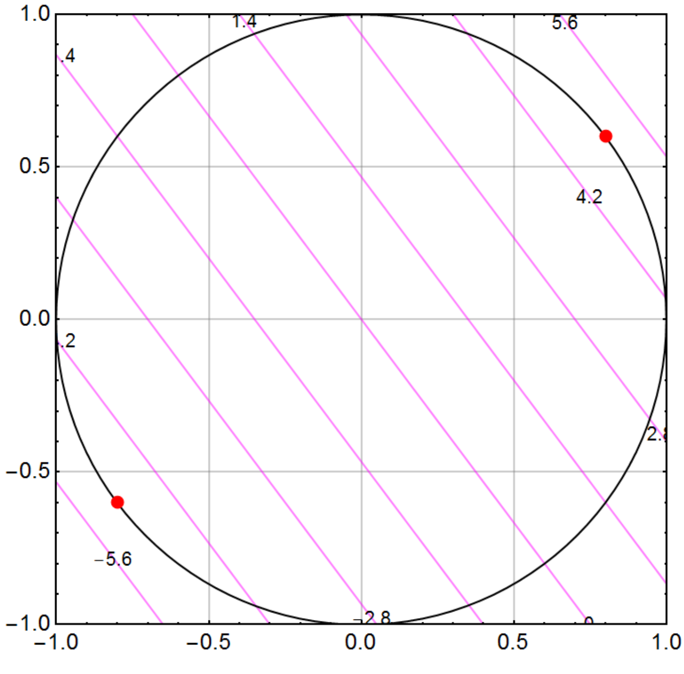
$$\begin{cases} 4+2\lambda x_1=0 \\ 3+2\lambda x_2=0 \\ x_1^2+x_2^2-1=0 \end{cases}$$

При $\lambda=\pm\frac{5}{2}$ отримуємо дві підозрілі на екстремум точки $M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ та $M_2\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$.

За умовою задачі екстремуми цільової функції потрібно знайти на множині, що задається рівнянням $x_1^2+x_2^2=1$, тобто на колі. Оскільки коло є компактна множина, а цільова функція є неперервна, то за теоремою Веєрштрасса цільова функція досягає своїх максимуму і мінімуму.

Для визначення точок максимуму і мінімуму знайдемо значення цільової функції $f(x)$ в підозрілих на екстремум точках: $f(M_1)=5$, $f(M_2)=-5$.

Так як інших підозрілих точок немає, то глобальний максимум досягається в точці $M_1\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$ і дорівнює він 5, а глобальний мінімум досягається в точці $M_2\left(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)$ і дорівнює -5. Інших екстремумів немає.



Мінімізація функцій однієї змінної
(одновимірна оптимізація)

Методи одновимірної оптимізації є складовою частиною багатьох методів нелінійного програмування і ефективність цих методів обумовлює також ефективність застосування методів багатовимірної оптимізації.

Універсальних методів, придатних для мінімізації довільних функцій однієї змінної не існує. Тому розробляються алгоритми, орієнтовані на різні класи функцій.

У багатьох практично важливих випадках не потрібно вимагати опуклості досліджуваної функції. Достатньо значно слабших припущень про квазіопуклість або строгу квазіопуклість цільової функції.

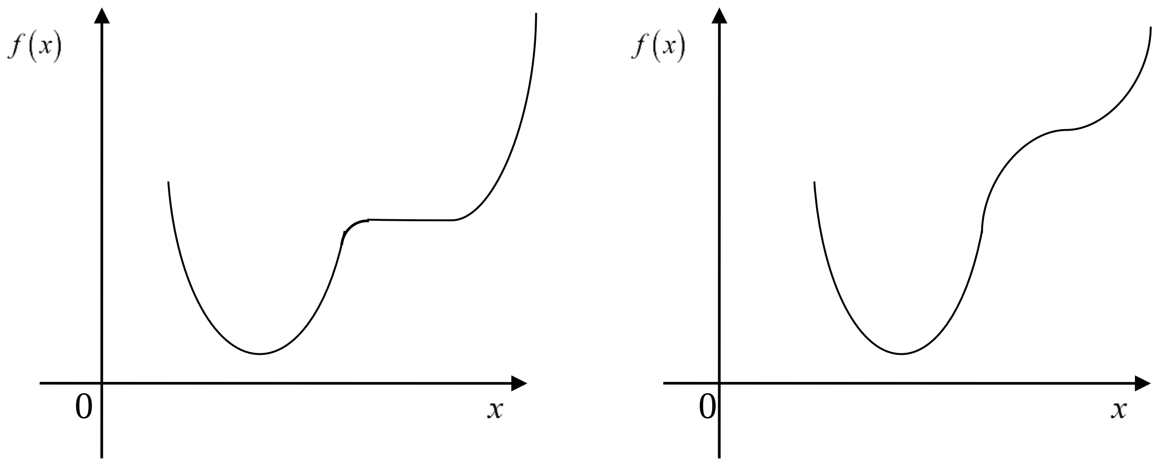
Нехай X – непорожня опукла множина в E^n.

Функція $f(x)$ називається ***квазіопуклою*** функцією на множині $X \subseteq E^n$, якщо для всіх $y, z \in X$ виконується нерівність

$$f\left(\lambda\, y + (1-\lambda)\, z \right) \le max\left\{ f(y),\, f(z) \right\} \text{ при будь–якому } \lambda \in (0,1). \qquad (1)$$

Функція $f(x)$ називається ***строго квазіопуклою*** функцією на множині X, якщо нерівність (1) виконується як строга при $f(y) \neq f(z)$.

На рис. 1 наведені на площині приклади графіків квазіопуклої (рис. 1.*а*) і строго квазіопуклої функцій (рис. 1.*б*).



а) квазіопукла функція   б) строго квазіопукла функція

Рис. 1

Строго квазіопуклі функції особливо важливі в математичному програмуванні, тому що для них будь-який локальний мінімум на опуклій множині є глобальним.

Строго квазіопукла функція однієї змінної має на відрізку ***єдину*** точку мінімуму.

Постановка задачі

Розглянемо задачу мінімізації строго квазіопуклої функції $f\left(x\right)$, яка досягає на множині $X=\left\{\, x : a \le x \le b \,\right\}$ своєї нижньої границі :

$$f\left(x\right) \to min,\ x \in \left[a,b\right]. \qquad (2)$$

Розглянемо три метода знаходження мінімуму строго квазіопуклої функції:

- метод ділення навпіл (дихотомії),
- метод золотого перетину,
- метод Фібоначчі.

Ідея методів ділення навпіл, золотого перетину, Фібоначчі

Суть методів полягає в побудові послідовності вкладених відрізків, які містять точку мінімуму x_*:

$$\left[a,b\right] \supset \ldots \supset \left[a_k,b_k\right] \supset \ldots \supset \left[a_n,b_n\right],$$

$x_* \in \left[a_k,b_k\right]$ для будь-якого k.

Належність точки x_* кожному з цих відрізків забезпечується тим, що функція $f\left(x\right)$ є строго квазіопуклою.

В процесі пошуку оптимуму цільової функції інтервал $\left[a,b\right]$, який називається *інтервалом невизначеності*, постійно зменшується (звужується), тому методи одновимірної оптимізації іноді називають методами звуження інтервалу невизначеності.

Схема алгоритмів указаних методів

1. На відрізку $\left[a,b\right]=\left[a_1,b_1\right]$ вибирають дві точки x_1 та x_2, які є симетричні відносно середини відрізку.
2. Обчислюють значення цільової функції $f\left(x_1\right)$ та $f\left(x_2\right)$. Якщо $f\left(x_1\right) \le f\left(x_2\right)$, то покладаємо $a_2=a$, $b_2=x_2$, наближене значення мінімуму $\overline{x}_2=x_1$.

Якщо ж $f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right)$, то покладаємо $a_2=x_1$, $b_2=b$, наближене значення мінімуму $\overline{x}_2=x_2$.

3. Продовжуємо цю процедуру до виконання критерію закінчення (наприклад, довжина відрізка менше наперед заданого числа).

Методи розрізняються способом вибору точок x_1 та x_2 на кожному з вкладених проміжків.

Метод ділення навпіл (метод дихотомії)

На відрізку $\left[a,b\right]=\left[a_1,b_1\right]$ вибирають дві точки

$$x_1 = \lambda_1 = \frac{a+b-\delta}{2},\ x_2 = \mu_1 = \frac{a+b+\delta}{2} = a+b-\lambda_1,$$

де δ – стала, $0<\delta<b-a$.

Величина δ вибирається обчислювачем і може характеризувати похибку вимірювання величини x і обмежена знизу можливостями вимірювального приладу.

Точки λ_1 та μ_1 розташовані симетрично на відрізку $[a,b]$ відносно його середини та при малих значеннях δ поділяють його майже навпіл – цим і пояснюється назва методу.

Далі обчислюємо та порівнюємо значення цільової функції в точках λ_1 та μ_1: $f(\lambda_1)$ та $f(\mu_1)$. Якщо $f(\lambda_1)\le f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2=a$, $b_2=\mu_1$. Якщо ж $f(\lambda_1)>f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2=\lambda_1$, $b_2=b$.

У результаті отримуємо відрізок $[a_2,b_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a,b]$ і має довжину

$$b_2-a_2=\mu_1-a=\frac{a+b+\delta}{2}-a=\frac{b-a+\delta}{2}=\frac{b-a-\delta}{2^1}+\delta.$$

Нехай відрізок $[a_k,b_k]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a,b]$ уже відомий і має довжину

$$b_k-a_k=\frac{b-a-\delta}{2^{k-1}}+\delta>\delta,\ k\ge 2.$$

Тоді виберемо точки

$$\lambda_k=\frac{a_k+b_k-\delta}{2},\ \mu_k=\frac{a_k+b_k+\delta}{2}=a_k+b_k-\lambda_k, \tag{3}$$

і обчислимо значення цільової функції $f(\lambda_k)$ та $f(\mu_k)$.

Якщо $f(\lambda_k)\le f(\mu_k)$, то покладаємо $a_{k+1}=a_k$, $b_{k+1}=\mu_k$ (рис. 2,*а*).

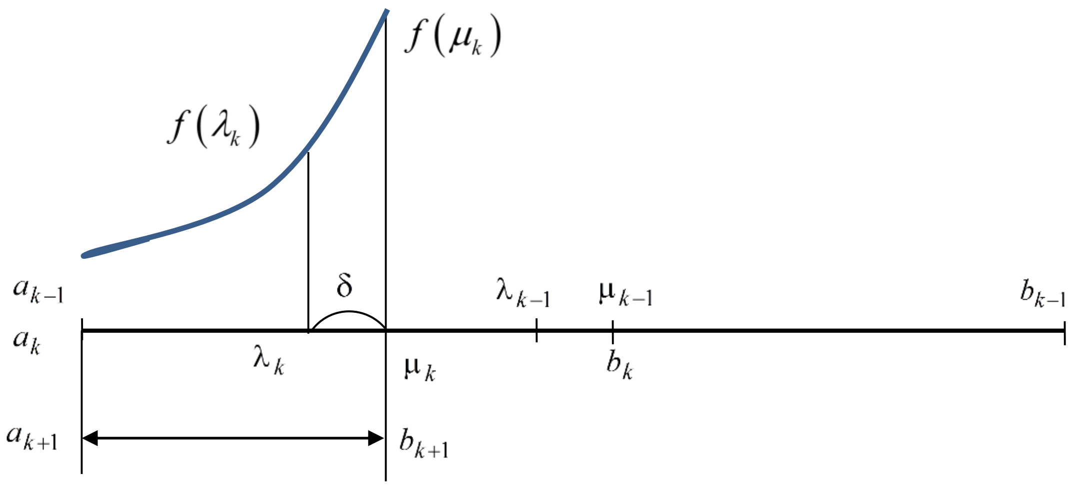


Рис. 2, *а*

Якщо ж $f(\lambda_k)>f(\mu_k)$, то покладаємо $a_{k+1}=\lambda_k$, $b_{k+1}=b_k$ (рис. 2,*б*).

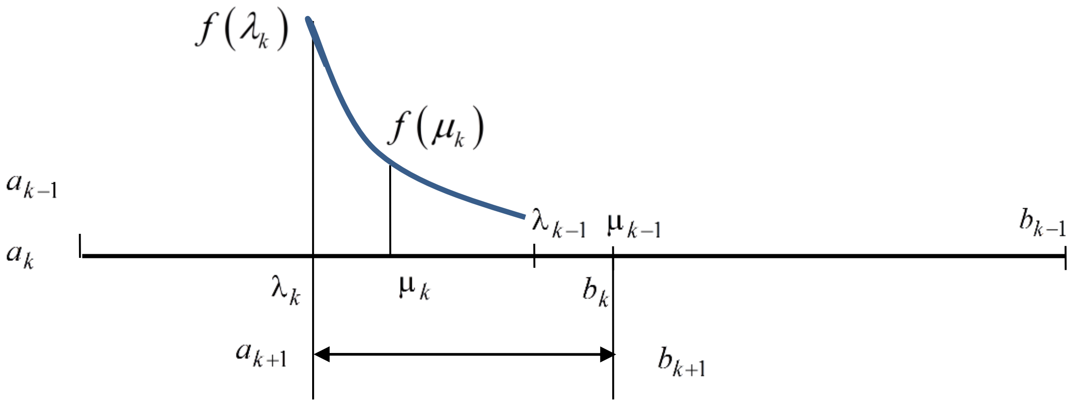


Рис. 2, *б*

Довжина отриманого відрізку $\left[a_{k+1},b_{k+1}\right]$ дорівнює

$$b_{k+1}-a_{k+1}=\frac{b-a-\delta}{2^k}+\delta>\delta .$$

Відрізок $\left[a_{k+1},b_{k+1}\right]$ містить точку мінімуму функції $f\left(x\right)$ на $\left[a,b\right]$.

Коли кількість обчислень значень цільової функції нічим не обмежена, то описаний процес ділення відрізку навпіл можна продовжувати до тих пір, поки не отримаємо відрізок $\left[a_{k+1},b_{k+1}\right]$, який має довжину

$$b_{k+1}-a_{k+1}<\varepsilon ,$$

де ε – задана точність, $\varepsilon>\delta$. Зауваження: $\delta\in\left(0,\varepsilon/2\right)$.

Кількість ітерацій

$$k>log_2\frac{b-a-\delta}{\varepsilon-\delta}.$$

Так як кожне ділення навпіл потребує двох обчислень значення цільової функції, то для досягнення точності $b_{k+1}-a_{k+1}<\varepsilon$ потрібно всього $n=2k$

$$n=2k>2\,log_2\frac{b-a-\delta}{\varepsilon-\delta}$$

таких обчислень.

Коли відрізок $\left[a_{k+1},b_{k+1}\right]$ вже визначений, то за точку мінімуму x_* можна взяти точку $\bar{x}_n=\lambda_k$ при $f\left(\lambda_k\right)\le f\left(\mu_k\right)$ або $\bar{x}_n=\mu_k$ при $f\left(\lambda_k\right)>f\left(\mu_k\right)$, а значення $f\left(\bar{x}_n\right)$ може служити наближенням для $f\left(x_*\right)$. При такому виборі наближення до точки мінімуму буде допущена похибка

$$\left|x_*-\bar{x}_n\right|\le max\left\{b_{k+1}-\bar{x}_n,\bar{x}_n-a_{k+1}\right\}=\frac{b-a-\delta}{2^k}. \qquad (4)$$

Якщо не потрібно обчислювати значення цільової функції в точці $\bar{x}_n$, то замість $\bar{x}_n$ можна взяти точку $y_n=\frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$ з меншою похибкою

$$\left|x_*-y_n\right|\le\frac{b_{k+1}-a_{k+1}}{2}=\frac{b-a-\delta}{2^{k+1}}+\frac{\delta}{2}. \qquad (5)$$

Метод золотого перетину

Золотим перетином відрізка називають його ділення на дві частини так, щоб відношення довжини всього відрізка до довжини більшої частини дорівнювало відношенню довжини більшої частини до довжини меншої.

$$\boxed{\frac{b-a}{c-a}=\frac{c-a}{b-c}}$$

Безпосередньо можна перевірити, що золотий перетин відрізка $[a,b]$ роблять дві симетрично розташовані відносно його середини $[a,b]$ точки:

$$x_1=\lambda_1=a+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b-a),\ x_2=\mu_1=a+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a). \qquad (6)$$

!Виявляється, що точка λ_1, у свою чергу, робить золотий перетин відрізка $[a,\mu_1]$, а точка μ_1 – золотий перетин відрізка $[\lambda_1,b]$.

Покладемо $a_1=a$, $b_1=b$. На відрізку $[a_1,b_1]$ візьмемо точки λ_1 та μ_1 за формулами (6) та обчислимо значення цільової функції $f(\lambda_1)$ та $f(\mu_1)$.

Якщо $f(\lambda_1)\le f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2=a_1$, $b_2=\mu_1$, $\bar{x}_2=\lambda_1$. Якщо ж $f(\lambda_1)>f(\mu_1)$, то покладаємо $a_2=\lambda_1$, $b_2=b_1$, $\bar{x}_2=\mu_1$. У результаті отримаємо відрізок $[a_2,b_2]$, який містить точку мінімуму функції $f(x)$ на $[a,b]$ і має довжину

$$b_2-a_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b-a).$$

Точка $\bar{x}_2$ є наближеним значенням точки мінімуму x_* і робить золотий перетин відрізка $[a_2,b_2]$, наближене оптимальне значення цільової функції $f(\bar{x}_2)=min\{f(\lambda_1),f(\mu_1)\}$.

Зауважимо, що

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2}\approx 0.38197,\ \frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0.61803,\ \frac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.61803.$$

Для відрізку $[a_n,b_n]$ маємо

$$b_n-a_n=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1}(b-a),$$

$$\lambda_n=a_n+\frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_n-a_n),\ \mu_n=a_n+\frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n-a_n). \qquad (7)$$

Відрізок $[a_n,b_n]$ містить точку мінімуму x_* функції $f(x)$ на $[a,b]$, також визначена точка $\bar{x}_n$, яка робить золотий перетин відрізка $[a_n,b_n]$ і є наближеним значенням мінімуму. Якщо (рис. 3):

1) $f(\lambda_n) \le f(\mu_n)$, то покладаємо $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \mu_n$, $\bar{x}_{n+1} = \lambda_n$;

2) $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$, то покладаємо $a_{n+1} = \lambda_n$, $b_{n+1} = b_n$, $\bar{x}_{n+1} = \mu_n$.

Довжина отриманого відрізка $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ дорівнює

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a),$$

Випадок 1:

Випадок 2:

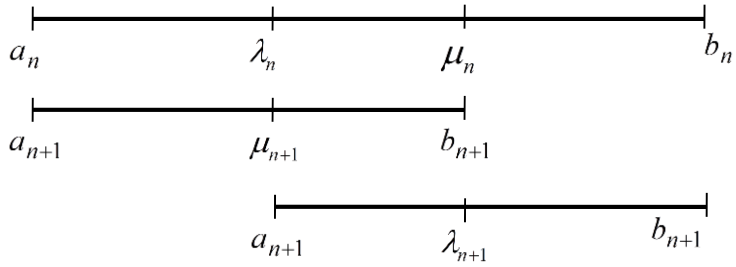


Рис. 3

Коли число обчислень значень цільової функції $f(x)$ заздалегідь не обмежене, то описаний процес можна продовжувати, наприклад, до тих пір, поки не буде виконана нерівність $b_n - a_n < \varepsilon$, де ε – задана точність. Коли число обчислень значень цільової функції $f(x)$ задане і дорівнює n, то процес закінчується і за розв'язок приймається або точка $\bar{x}_n$ з похибкою

$$|x_* - \bar{x}_n| \le max\{\, b_n - \bar{x}_n,\ \bar{x}_n - a_n \} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n (b-a). \tag{8}$$

Якщо ж не потрібно обчислювати значення цільової функції в точці $\bar{x}_n$, то береться точка

$$v_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

з похибкою

$$|x_* - v_n| \le \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n-1} \frac{(b-a)}{2}. \tag{9}$$

Рекомендації до чисельної реалізації методу золотого перетину

На кожному відрізку $[a_n, b_n]$, який містить точку $\bar{x}_n$ з попереднього кроку і яку знайдено з похибкою через наближене обчислення числа $\sqrt{5}$, при виборі наступної точки x_{n+1} треба остерігатися користування формулою $x_{n+1} = a_n + b_n - \bar{x}_n$, тому що тоді похибка з попереднього кроку переноситься на даний крок. Замість цього краще безпосередньо провести золотий переріз відрізка $[a_n, b_n]$ і за точку x_{n+1} узяти ту з точок $a_n + \frac{3-\sqrt{5}}{2}(b_n - a_n)$, $a_n + \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n - a_n)$, яка найбільш віддалена від $\bar{x}_n$.