

Методичні вказівки до виконання контрольно-модульної роботи за дисципліною «Методи оптимізації»

Задача о назначениях

Постановка задачи.

Пусть имеется n различных работ и n механизмов для их выполнения, причем каждый механизм может использоваться на любой работе. Производительность каждого механизма на различных работах различна. Обозначим через c_{ij} производительность i -го механизма на j -той работе. Требуется так распределить механизмы по работам, чтобы суммарная производительность была максимальной.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = 1, m, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, \quad j = 1, n, \quad (3)$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1. \end{cases} \quad (4)$$

Алгоритм венгерского метода

Шаг 1. Проводим предварительное преобразование матрицы C .

1.1. В каждом столбце матрицы C находим максимальный элемент и все элементы соответствующего столбца последовательно отнимаем от максимального (для задачи максимизации) или в каждом столбце найдем минимальный элемент и вычтем его из каждого элемента соответствующего столбца (для задачи минимизации). Получим матрицу C' .

$$C'_{ij} = \max_i C_{ij} - C_{ij} \text{ (для задачи максимизации),}$$

$$C'_{ij} = C_{ij} - \min_i C_{ij} \text{ (для задачи минимизации).}$$

1.2. В каждой строке матрицы C' найдем минимальный элемент и вычтем его из каждого элемента соответствующей строки. Получим матрицу C'' .

$$C''_{ij} = C'_{ij} - \min_j C'_{ij}.$$

Шаг 2. Рассматривая столбцы матрицы сверху вниз поочередно, помечаем звездочками нули таким образом, чтобы они не лежали в одной строке или одном столбце (в каждом столбце и в каждой строке может быть только один ноль со звездочкой). Если количество поставленных звездочек равно n , то оптимальное решение найдено.

Шаг 3.

3.1. Столбцы, в которых есть нули со звездочками, помечаем сверху знаком «+», и далее эти столбцы считают занятыми.

3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули. Незанятый ноль помечается знаком «'» (штрих).

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом. Далее эту строку считаем занятой.

Если в строке нуля со штрихом нет нуля со звездочкой, то переходим к шагу 5.

Если в процессе поиска незанятых нулей оказалось, что незанятых нулей больше нет, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбирается минимальный незанятый элемент (h). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам. Получаем эквивалентную матрицу. В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 5. Производим построение цепочки из нулей. Начиная от последнего отмеченного $0'$, движемся по столбцу к 0^* , далее по строке к $0'$, и так далее, пока это возможно. Внутри цепочки знаки «*» снимаются, а штрихи заменяются звездочками. После этого все пометки, кроме «*», снимаются и переходим к шагу 3.

Пример 1. Пусть задана матрица эффективностей

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 13 & 9 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 4 & 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 \\ 11 & 4 & 10 & 10 & 5 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 11 & 12 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 9 & 3 & 10 \end{bmatrix}, n=7.$$

Шаг 1.1. В каждом столбце находим максимальный элемент и все элементы этого столбца последовательно отнимаем от максимального (для задачи максимизации).

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 & 3 & 7 & 3 \\ 2 & 3 & 13 & 9 & 1 & 6 & 7 \\ 12 & 4 & 12 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 \\ 11 & 4 & 10 & 10 & 5 & 13 & 7 \\ 9 & 6 & 11 & 12 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 9 & 3 & 10 \end{bmatrix}.$$

Максимальные элементы столбцов:

12 6 13 12 11 13 10 .

Получили матрицу C' .

Шаг 1.2. В каждой строке найдем минимальный элемент и вычтем его из каждого элемента соответствующей строки. Минимальные элементы для каждой строки показаны справа.

$$C' = \begin{bmatrix} 11 & 2 & 11 & 4 & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 3 & 0 & 3 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 8 & 12 & 6 \\ 7 & 0 & 12 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 12 & 8 \\ 10 & 2 & 5 & 7 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица C'' имеет вид:

$$C'' = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 9 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 10 & 3 & 0 & 3 & 10 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 7 & 8 & 12 & 6 \\ 7 & 0 & 12 & 5 & 0 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 6 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 4 & 12 & 8 \\ 10 & 2 & 5 & 7 & 2 & 10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Получилась матрица, эквивалентная исходной матрице C , в каждой строке и столбце которой есть хотя бы один ноль.

Шаг 2. Рассматривая столбцы матрицы сверху вниз поочередно, помечаем звездочками нули таким образом, чтобы они не лежали в одной строке или одном столбце.

$$\begin{bmatrix} 9 & 0^* & 9 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 10 & 3 & 0^* & 3 & 10 & 7 & 3 \\ 0^* & 2 & 1 & 7 & 8 & 12 & 6 \\ 7 & 0 & 12 & 5 & 0^* & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 6 & 0^* & 3 \\ 3 & 0 & 2 & 0^* & 4 & 12 & 8 \\ 10 & 2 & 5 & 7 & 2 & 10 & 0^* \end{bmatrix}.$$

Так как удалось поставить $n=7$ звездочек, то **оптимальное решение X^* найдено:**

$$X^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Оптимальное значение целевой функции

$$f(X^*) = 4 + 13 + 12 + 11 + 13 + 12 + 10 = 75.$$

Пример 2. Пусть задана матрица эффективностей

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 & 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 4 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & 10 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 11 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 6 & 12 & 3 & 1 & 10 \\ 12 & 11 & 1 & 7 & 10 & 4 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 8 & 13 & 13 & 17 & 14 \\ 16 & 17 & 19 & 18 & 14 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}, n=8.$$

Шаг 1.1. В каждом столбце находим максимальный элемент и все элементы этого столбца последовательно отнимаем от максимального (для задачи максимизации).

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 9 & 6 & 9 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 4 & 4 & 8 & 7 & 9 \\ 6 & 3 & 5 & 5 & 10 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & 2 & 11 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 3 & 6 & 12 & 3 & 1 & 10 \\ 12 & 11 & 1 & 7 & 10 & 4 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 8 & 13 & 13 & 17 & 14 \\ 16 & 17 & 19 & 18 & 14 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

Максимальные элементы столбцов:

$$[16 \ 17 \ 19 \ 18 \ 14 \ 13 \ 17 \ 14].$$

Получим эквивалентную матрицу C'

$$C' = \begin{bmatrix} 11 & 15 & 10 & 12 & 5 & 8 & 11 & 7 \\ 9 & 15 & 11 & 14 & 10 & 5 & 10 & 5 \\ 10 & 14 & 14 & 13 & 4 & 12 & 12 & 6 \\ 15 & 13 & 15 & 16 & 3 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 15 & 16 & 12 & 2 & 10 & 16 & 4 \\ 4 & 6 & 18 & 11 & 4 & 9 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Шаг 1.2. В каждой строке найдем минимальный элемент и вычтем его из каждого элемента соответствующей строки. Минимальные элементы для каждой строки показаны справа от матрицы C' . Получим эквивалентную матрицу C'' .

$$C'' = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 5 & 7 & 0 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 10 & 6 & 9 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 10 & 9 & 0 & 8 & 8 & 2 \\ 12 & 10 & 12 & 13 & 0 & 8 & 7 & 5 \\ 7 & 13 & 14 & 10 & 0 & 8 & 14 & 2 \\ 2 & 4 & 16 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

Матрица C'' в каждой строке и каждом столбце содержит хотя бы один ноль.

Шаг 2. Рассматривая столбцы матрицы сверху вниз поочередно, помечаем звездочками нули таким образом, чтобы они не лежали в одной строке или одном столбце.

$$\begin{bmatrix} 6 & 10 & 5 & 7 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 10 & 6 & 9 & 5 & 0^* & 5 & 0 \\ 6 & 10 & 10 & 9 & 0 & 8 & 8 & 2 \\ 12 & 10 & 12 & 13 & 0 & 8 & 7 & 5 \\ 7 & 13 & 14 & 10 & 0 & 8 & 14 & 2 \\ 2 & 4 & 16 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\ 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\ 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3.1. Столбцы, в которых есть нули со звездочками, помечаем сверху знаком «+», и далее эти столбцы считают занятыми.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 6 & 10 & 5 & 7 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 4 & 10 & 6 & 9 & 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 6 & 10 & 10 & 9 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 12 & 10 & 12 & 13 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 7 & 13 & 14 & 10 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 4 & 16 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7
 \end{array} \right] .
 \end{array}$$

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули. Незанятый ноль помечается знаком «'» (штрих).

$$\begin{array}{cccccccc}
 & + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 6 & 10 & 5 & 7 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 4 & 10 & 6 & 9 & 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 6 & 10 & 10 & 9 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 12 & 10 & 12 & 13 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 7 & 13 & 14 & 10 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 4 & 16 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7
 \end{array} \right] .
 \end{array}$$

Для наглядности ноль со штрихом отмечен синим цветом.

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 6 & 10 & 5 & 7 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 4 & 10 & 6 & 9 & 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 6 & 8 & 8 & 9 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 12 & 10 & 12 & 13 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 7 & 13 & 14 & 10 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 4 & 16 & 9 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 3 & 3 & 3 & 10 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 0 & 12 & 14 & 7
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули. Незанятых нулей больше нет, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=2$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 6 & 10 & 5 & 7 \\
 4 & 10 & 6 & 9 \\
 6 & 8 & 8 & 9 \\
 12 & 10 & 12 & 13 \\
 7 & 13 & 14 & 10 \\
 2 & 4 & 16 & 9 \\
 3 & 3 & 3 & 10 \\
 0^* & 0' & 0 & 0
 \end{array} \right. & \begin{array}{cccc}
 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 0 & 8 & 8 & 2 \\
 0 & 8 & 7 & 5 \\
 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0 & 12 & 14 & 7
 \end{array} & \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array} \right]
 \end{array}$$

Зеленым цветом отмечены элементы матрицы величина которых уменьшается, а красным цветом отмечены элементы матрицы величина которых увеличивается, остальные элементы матрицы не изменяются.

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 4 & 8 & 3 & 5 \\
 2 & 8 & 4 & 7 \\
 4 & 6 & 8 & 7 \\
 10 & 8 & 10 & 11 \\
 5 & 11 & 12 & 8 \\
 0 & 2 & 14 & 7 \\
 1 & 1 & 1 & 8 \\
 0^* & 0' & 0 & 0
 \end{array} \right. & \begin{array}{cccc}
 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 0 & 8 & 8 & 2 \\
 0 & 8 & 7 & 5 \\
 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} & \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array} \right]
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 4 & 8 & 3 & 5 \\
 2 & 8 & 4 & 7 \\
 4 & 6 & 8 & 7 \\
 10 & 8 & 10 & 11 \\
 5 & 11 & 12 & 8 \\
 0' & 2 & 14 & 7 \\
 1 & 1 & 1 & 8 \\
 0^* & 0' & 0 & 0
 \end{array} \right. & \begin{array}{cccc}
 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 0 & 8 & 8 & 2 \\
 0 & 8 & 7 & 5 \\
 0 & 8 & 14 & 2 \\
 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} & \left. \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \end{array} \right]
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & + & + & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0 \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & + & .
 \end{array}$$

Продолжаем искать незанятые нули.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & + & + & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0' \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & + & .
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & & + & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0' \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0 & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & + & .
 \end{array}$$

Ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & & + & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0' \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0' \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Незанятых нулей больше нет, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=2$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 4 & 8 & 3 & 5 & 0^* & 3 & 6 & 2 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 5 & 0^* & 5 & 0' \\
 4 & 6 & 8 & 7 & 0 & 8 & 8 & 2 \\
 10 & 8 & 10 & 11 & 0 & 8 & 7 & 5 \\
 5 & 11 & 12 & 8 & 0 & 8 & 14 & 2 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 2 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 1 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 2 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{c}
 + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 6 & 1 & 3 & 0^* & 1 & 4 & 0 \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 4 & 6 & 5 & 0 & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{c}
 + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 6 & 1 & 3 & 0^* & 1 & 4 & 0' \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 4 & 6 & 5 & 0 & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 6 & 1 & 3 & 0^* & 1 & 4 & 0' \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 4 & 6 & 5 & 0 & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0' & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0^* \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\
 0^* & 0' & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Продолжаем искать незанятые нули.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0^* & 1 & 4 & 0' \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0' & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0' & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0^* \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\ 0^* & 0' & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ . \\ \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Если в строке нуля со штрихом нет нуля со «*», то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Производим построение цепочки из нулей. Начиная от последнего отмеченного $0'$, движемся по столбцу к 0^* , далее по строке к $0'$, и так далее, пока это возможно.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0^* & 1 & 4 & 0' \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0' & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0' & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0^* \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\ 0^* & 0' & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ . \\ \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

Внутри цепочки знаки «*» снимаются, а штрихи заменяются звездочками.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0' & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ \\ . \\ \\ + \\ + \\ + \end{matrix}$$

После этого все пометки, кроме «*», снимаются и переходим к шагу 3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3.1. Столбцы, в которых есть нули со звездочками, помечаем сверху знаком «+», и далее эти столбцы считают занятыми.

$$\begin{array}{cccccc} + & + & & & + & + & + & + \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 0 & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccc} + & + & & & + & + & + & + \\ \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\ 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\ 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 0 & 0^* & 0' & 0 & 4 & 14 & 16 & 9 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 0 & 0^* & 0' & 0 & 4 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Незанятых нулей больше нет, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=1$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 6 & 1 & 3 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 4 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 6 & 8 & 9 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 9 & 10 & 6 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 2 & 14 & 7 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 0 & 0^* & 0' & 0 & 4 & 14 & 16 & 9
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Продолжаем искать незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & + & + & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0 \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ . \\ \\ \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Отмечаем следующий незанятый ноль.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & + & & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0' \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ \\ \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & & & & & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0' & 2 & 0 & 1 & 4 & 0^* \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0' \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0^* & 6 & 6 & 0' \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0' & 0 & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ \\ \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Отмечаем следующий незанятый ноль.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|---|----|----|----|----|---|
| + | | | | | | + | | |
| 2 | 5 | 0' | 2 | 0 | 1 | 4 | 0* | + |
| 2 | 7 | 3 | 6 | 7 | 0* | 5 | 0' | + |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 0* | 6 | 6 | 0' | + |
| 8 | 5 | 7 | 8 | 0' | 6 | 5 | 3 | . |
| 3 | 8 | 9 | 5 | 0 | 6 | 12 | 0 | |
| 0* | 1 | 13 | 6 | 4 | 7 | 4 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 0* | 0 | |
| 1 | 0* | 0' | 0 | 5 | 15 | 17 | 10 | + |

Если в строке нуля со штрихом нет нуля со «*», то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Производим построение цепочки из нулей. Начиная от последнего отмеченного 0', движемся по столбцу к 0*, далее по строке к 0', и так далее, пока это возможно.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|---|----|----|----|----|---|
| + | | | | | | + | | |
| 2 | 5 | 0' | 2 | 0 | 1 | 4 | 0* | + |
| 2 | 7 | 3 | 6 | 7 | 0* | 5 | 0' | + |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 0* | 6 | 6 | 0' | + |
| 8 | 5 | 7 | 8 | 0' | 6 | 5 | 3 | . |
| 3 | 8 | 9 | 5 | 0 | 6 | 12 | 0 | |
| 0* | 1 | 13 | 6 | 4 | 7 | 4 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 0* | 0 | |
| 1 | 0* | 0' | 0 | 5 | 15 | 17 | 10 | + |

Внутри цепочки знаки «*» снимаются, а штрихи заменяются звездочками.

| | | | | | | | | |
|----|----|----|---|----|----|----|----|---|
| + | | | | | | + | | |
| 2 | 5 | 0* | 2 | 0 | 1 | 4 | 0 | + |
| 2 | 7 | 3 | 6 | 7 | 0* | 5 | 0' | + |
| 2 | 3 | 5 | 4 | 0 | 6 | 6 | 0* | + |
| 8 | 5 | 7 | 8 | 0* | 6 | 5 | 3 | . |
| 3 | 8 | 9 | 5 | 0 | 6 | 12 | 0 | |
| 0* | 1 | 13 | 6 | 4 | 7 | 4 | 0 | |
| 1 | 0 | 0 | 7 | 3 | 0 | 0* | 0 | |
| 1 | 0* | 0' | 0 | 5 | 15 | 17 | 10 | + |

После этого все пометки, кроме «*», снимаются и переходим к шагу 3.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\ 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 1 & 0^* & 0 & 0 & 5 & 15 & 17 & 10 \end{bmatrix}.$$

Шаг 3.1. Столбцы, в которых есть нули со звездочками, помечаем сверху знаком «+», и далее эти столбцы считают занятыми.

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & + & & + & + & + & + \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\ 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 1 & 0^* & 0 & 0 & 5 & 15 & 17 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc} + & + & + & & + & + & + & + \\ \begin{bmatrix} 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\ 2 & 5 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\ 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\ 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\ 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\ 1 & 0^* & 0 & 0' & 5 & 15 & 17 & 10 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & + & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0 & 0' & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Продолжаем искать незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & + & & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & \boxed{0'} & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0 & 0' & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 3 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0' & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0 & 0' & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] +
 \end{array}$$

Незанятых нулей больше нет, поэтому переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=1$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & + & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 5 & 0^* & 2 & 0 & 1 & 4 & 0 \\
 2 & 7 & 3 & 6 & 7 & 0^* & 5 & 0 \\
 2 & 2 & 5 & 4 & 0 & 6 & 6 & 0^* \\
 8 & 5 & 7 & 8 & 0^* & 6 & 5 & 3 \\
 3 & 8 & 9 & 5 & 0 & 6 & 12 & 0 \\
 0^* & 1 & 13 & 6 & 4 & 7 & 4 & 0 \\
 1 & 0' & 0 & 7 & 3 & 0 & 0^* & 0 \\
 1 & 0^* & 0 & 0' & 5 & 15 & 17 & 10
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & + & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 4 & 0^* & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 0^* & 4 & 0 \\
 2 & 2 & 5 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0^* \\
 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 6 & 4 & 3 \\
 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 6 & 11 & 0 \\
 0^* & 0 & 13 & 5 & 4 & 7 & 3 & 0 \\
 2 & 0' & 1 & 7 & 4 & 1 & 0^* & 1 \\
 2 & 0^* & 1 & 0' & 6 & 16 & 17 & 11
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & + & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 4 & 0^* & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 0^* & 4 & 0 \\
 2 & 2 & 5 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0^* \\
 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 6 & 4 & 3 \\
 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 6 & 11 & 0 \\
 0^* & 0' & 13 & 5 & 4 & 7 & 3 & 0 \\
 2 & 0' & 1 & 7 & 4 & 1 & 0^* & 1 \\
 2 & 0^* & 1 & 0' & 6 & 16 & 17 & 11
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 4 & 0^* & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 0^* & 4 & 0 \\
 2 & 2 & 5 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0^* \\
 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 6 & 4 & 3 \\
 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 6 & 11 & 0 \\
 0^* & 0' & 13 & 5 & 4 & 7 & 3 & 0 \\
 2 & 0' & 1 & 7 & 4 & 1 & 0^* & 1 \\
 2 & 0^* & 1 & 0' & 6 & 16 & 17 & 11
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в процессе поиска незанятых нулей оказалось, что незанятых нулей больше нет, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=1$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 2 & 4 & 0^* & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 \\
 2 & 6 & 3 & 5 & 7 & 0^* & 4 & 0 \\
 2 & 2 & 5 & 3 & 0 & 6 & 5 & 0^* \\
 8 & 4 & 7 & 7 & 0^* & 6 & 4 & 3 \\
 3 & 7 & 9 & 4 & 0 & 6 & 11 & 0 \\
 0^* & 0' & 13 & 5 & 4 & 7 & 3 & 0 \\
 2 & 0' & 1 & 7 & 4 & 1 & 0^* & 1 \\
 2 & 0^* & 1 & 0' & 6 & 16 & 17 & 11
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & + & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 0^* & 3 & 0 \\
 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0^* \\
 7 & 3 & 7 & 6 & 0^* & 6 & 3 & 3 \\
 2 & 6 & 9 & 3 & 0 & 6 & 10 & 0 \\
 0^* & 0' & 15 & 5 & 5 & 8 & 3 & 1 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 5 & 2 & 0^* & 2 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 7 & 17 & 17 & 12
 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & + & & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 0^* & 3 & 0 \\
 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0^* \\
 7 & 3 & 7 & 6 & 0^* & 6 & 3 & 3 \\
 2 & 6 & 9 & 3 & 0 & 6 & 10 & 0 \\
 0^* & 0' & 15 & 5 & 5 & 8 & 3 & 1 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 5 & 2 & 0^* & 2 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 7 & 17 & 17 & 12
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 0^* & 3 & 0 \\
 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0^* \\
 7 & 3 & 7 & 6 & 0^* & 6 & 3 & 3 \\
 2 & 6 & 9 & 3 & 0 & 6 & 10 & 0 \\
 0^* & 0' & 15 & 5 & 5 & 8 & 3 & 1 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 5 & 2 & 0^* & 2 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 7 & 17 & 17 & 12
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Незанятых нулей больше нет, то переходим к шагу 4.

Шаг 4. Выбираем минимальный незанятый элемент ($h=1$). Число h вычитается из всех незанятых строк и прибавляется ко всем занятым столбцам.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 0 & 1 & 2 & 0 \\
 1 & 5 & 3 & 4 & 7 & 0^* & 3 & 0 \\
 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0^* \\
 7 & 3 & 7 & 6 & 0^* & 6 & 3 & 3 \\
 2 & 6 & 9 & 3 & 0 & 6 & 10 & 0 \\
 0^* & 0' & 15 & 5 & 5 & 8 & 3 & 1 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 5 & 2 & 0^* & 2 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 7 & 17 & 17 & 12
 \end{array} \right] & +
 \end{array}$$

Получаем эквивалентную матрицу.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0 \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \cdot \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

В новой матрице все пометки сохраняются. После этого повторяем выполнение шага 3.2.

Шаг 3.2. Просматривая строки матрицы слева направо, ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & + & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0 \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \cdot \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & + & & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0 & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0 \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ \cdot \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & & & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0' & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0 \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ \\ . \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом есть ноль со звездочкой, то снимаем знак занятости «+» со столбца, где находится ноль со звездочкой, и помечаем знаком «+» справа строку, в которой находится ноль со штрихом.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0' & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0 \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Ищем незанятые нули.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0' & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0' \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ + \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Если в строке нуля со штрихом нет нуля со «*», то переходим к шагу 5.

Шаг 5. Производим построение цепочки из нулей. Начиная от последнего отмеченного $0'$, движемся по столбцу к 0^* , далее по строке к $0'$, и так далее, пока это возможно.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0' & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0^* \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0' \\
 0^* & 0' & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0^* & 2 & 0' & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

Внутри цепочки знаки «*» снимаются, а штрихи заменяются звездочками.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & + & & & \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0' & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0' & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0^* & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0 \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0^* \\
 0 & 0^* & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0' & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0 & 2 & 0^* & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] & \begin{array}{l} + \\ + \\ + \\ . \\ + \\ + \\ + \end{array}
 \end{array}$$

После этого все пометки, кроме «*», снимаются и переходим к шагу 3.

$$\left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0^* & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0 \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0^* \\
 0 & 0^* & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0 & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0 & 2 & 0^* & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] .$$

Шаг 3.1. Столбцы, в которых есть нули со звездочками, помечаем сверху знаком «+», и далее эти столбцы считают занятыми.

$$\begin{array}{cccccccc}
 + & + & + & + & + & + & + & + \\
 \left[\begin{array}{cccccccc}
 1 & 3 & 0^* & 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\
 0 & 4 & 2 & 3 & 7 & 0^* & 2 & 0 \\
 0^* & 0 & 4 & 1 & 0 & 6 & 3 & 0 \\
 6 & 2 & 6 & 5 & 0^* & 6 & 2 & 3 \\
 1 & 5 & 8 & 2 & 0 & 6 & 9 & 0^* \\
 0 & 0^* & 14 & 5 & 6 & 9 & 3 & 2 \\
 2 & 0 & 2 & 7 & 6 & 3 & 0^* & 3 \\
 2 & 0 & 2 & 0^* & 8 & 18 & 17 & 13
 \end{array} \right] .
 \end{array}$$

Так как удалось поставить $n=8$ звездочек, оптимальное решение найдено. Оно имеет вид:

$$X^* = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix},$$

$$f(X^*) = 9 + 8 + 6 + 11 + 10 + 11 + 17 + 18 = 90.$$