Методи оптимізації

Лабораторне заняття 1 (14.09.2021)

Графічний метод розв’язування задач лінійного програмування

Для розв’язування задач ЛП для функцій двох змінних, а також деяких тривимірних і n-вимірних задач застосовується графічний метод, що ґрунтується на геометричній інтерпретації та аналітичних властивостях задач ЛП.

Постановка задачі ЛП при $n = 2$

Розглянемо двовимірну задачу ЛП:

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 \to max(min) \tag{1}$$

за умов

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\le, \ge, =\} b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\le, \ge, =\} b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\le, \ge, =\} b_m \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \tag{3}$$

Нагадаємо деякі необхідні визначення.

Лінією рівня функції двох змінних $f = f(x,y)$ називається множина точок на площині таких, що у всіх цих точках значення функції одне і теж $f(x,y) = c$, $c = const$.

Градієнтом функції двох змінних $f(x,y)$ в точці $M(x,y)$ називається вектор (позначається $grad\ f(x,y)\big|_M$, $f'(x)\big|_M$), координати якого дорівнюють частинним похідним функції $f(x)$ у точці $M(x,y)$:

$$grad\ f(x,y)\big|_M = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_1}\bigg|_M, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x_n}\bigg|_M \right).$$

Основні властивості градієнта:

- вектор-градієнт в точці $M(x,y)$ визначає напрямок найбільшого зростання функції $f(x,y)$;
- в кожній точці $M(x,y)$ вектор-градієнт перпендикулярний до лінії рівня, яка проходить через точку $M(x,y)$.

Допустимо, що система (2) за умов (3) сумісна і многокутник її розв’язків обмежений.

Кожне i-те обмеження-нерівність (2) визначає півплощину з граничною прямою $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1,m}$. Системою обмежень (2) описується спільна частина, або переріз усіх зазначених півплощин, тобто множина точок, координати яких задовольняють всі обмеження задачі. Така множина точок – ***область допустимих розв’язків***.

Цільова функція задачі ЛП геометрично інтерпретується як сім'я паралельних прямих $c_1x_1 + c_2x_2 = const$.

Розв'язати задачу ЛП графічно означає знайти таку вершину многокутника розв'язків, у результаті підстановки координат якої в (1) лінійна цільова функція набуває найбільшого (найменшого) значення.

Алгоритм графічного методу розв'язання задачі ЛП при $n = 2$

Графічний метод складається з двох етапів:

1. Побудова простору допустимих розв'язків, які задовольняють усі обмеження моделі:
   - будуємо прямі лінії, рівняння яких дістаємо заміною в обмеженнях задачі (2) знаків нерівностей на знаки рівностей;
   - визначаємо півплощини, що відповідають кожному обмеженню задачі.
2. Знаходження оптимального розв'язку серед усіх точок простору допустимих розв'язків:
   - будуємо вектор-градієнт $grad\ f = (c_1, c_2)$, що задає напрям найшвидшого зростання значень цільової функції задачі;
   - будуємо (можна подумки) пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$, перпендикулярну до вектору $grad\ f$;
   - переміщуючи пряму $c_1x_1 + c_2x_2 = const$ (паралельним перенесенням) в напрямі вектору-градієнту $grad\ f$ (для задачі максимізації) або в протилежному напрямі (для задачі мінімізації), знаходимо вершину многокутника розв'язків, де цільова функція досягає екстремального значення (крайню вершину многокутника у потрібному напрямі);
   - визначаємо координати точки, в якій цільова функція набуває максимального (мінімального) значення, і обчислюємо екстремальне значення цільової функції в цій точці.

Можливі варіанти розв'язку задачі ЛП у результаті застосування графічного методу. У разі застосування графічного методу для розв'язування задач ЛП можливі такі випадки:

- цільова функція набуває максимального значення в єдиній вершині А многокутника розв'язків (рис. 1),
- максимального значення цільова функція досягає в будь-якій точці відрізка АВ (рис. 2). Тоді задача ЛП має *альтернативні оптимальні* плани,
- задача ЛП не має оптимальних планів (рис. 3 – цільова функція не обмежена згори; рис. 4 – система обмежень задачі несумісна).

Задача ЛП має оптимальний план за необмеженої області допустимих розв'язків (рис. 3, у разі, коли задача розв'язується на мінімум).

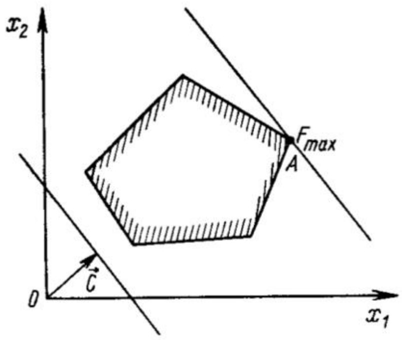

Рис. 1

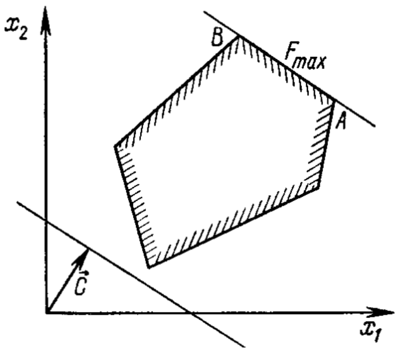

Рис. 2

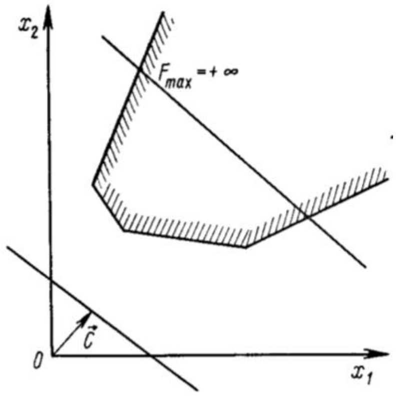

Рис. 3

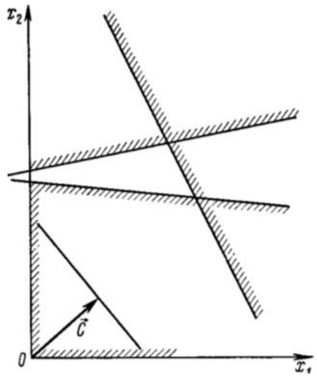

Рис. 4

За допомогою графічного методу можна розв'язати задачу лінійного програмування, система обмежень якої містить n невідомих та m лінійно незалежних рівнянь, якщо n і m пов'язані співвідношенням $n - m = 2$.

Для застосування графічного методу до таких задач, необхідно зробити m повних виключень змінних з системи методом Жордана-Гаусса. Скориставшись умовою невід'ємності змінних задачі перейти до задачі ЛП із двома змінними. Розв'язати отриману задачу графічно, та за знайденим оптимальним розв'язком знайти m змінних, які залишились.

Приклад 1. Задачу лінійного програмування розв'яжемо графічним методом.

Максимізувати цільову функцію $f = 3x_1 + 2x_2$

при виконанні обмежень

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 10, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. Побудуємо *простір допустимих розв'язків* (рис. 5).

Для цього побудуємо прямі лінії, рівняння яких одержимо в результаті заміни в обмеженнях знаків нерівності на знаки рівності.

Потім визначаємо допустиму півплощину для кожного рівняння за допомогою "тестової точки", яка не належить відповідній прямій. Щоб визначити необхідну півплощину (на рис. 5 її напрям позначено стрілкою), потрібно взяти будь-яку точку і перевірити, чи задовольняють її координати зазначене обмеження. Якщо задовольняють, то півплощина, в якій міститься вибрана точка, є геометричним зображенням нерівності. У протилежному разі таким зображенням є інша півплощина. Умова невід'ємності змінних $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ обмежує область допустимих планів задачі першим квадрантом системи координат. Переріз усіх півплощин визначає область допустимих розв'язків D задачі (рис. 5).

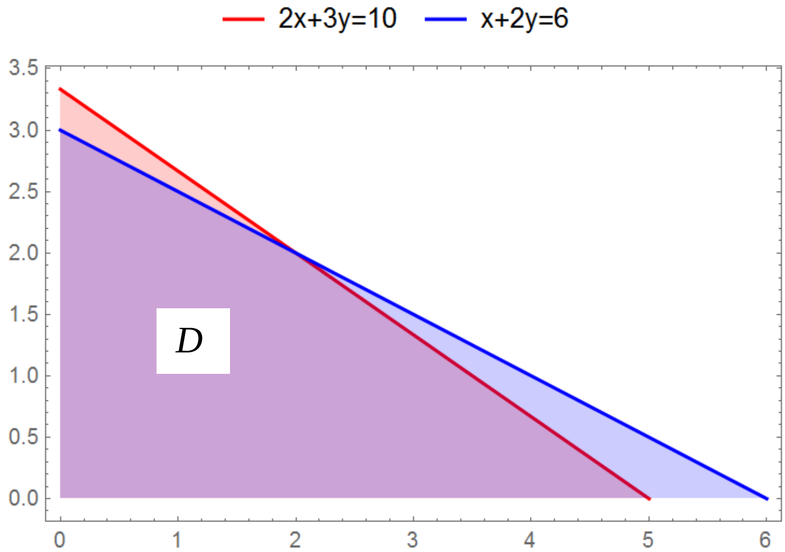

Рис. 5

Переходимо до етапу знаходження *оптимального розв'язку* серед усіх точок області допустимих розв'язків.

Для цього будуємо вектор-градієнт $grad\ f = (3,2)$, координати якого складаються з коефіцієнтів при змінних у цільовій функції. Цей вектор задає напрям зростання значень цільової функції задачі. Далі будуємо пряму $3x_1 + 2x_2 = const$, перпендикулярну до вектору-градієнту. Переміщуючи її в напрямі вектору-градієнту, знаходимо вершину багатокутника D, де цільова функція досягає максимального значення. Після чого визначаємо координати знайденої точки і обчислюємо значення цільової функції f у ній (рис. 6).

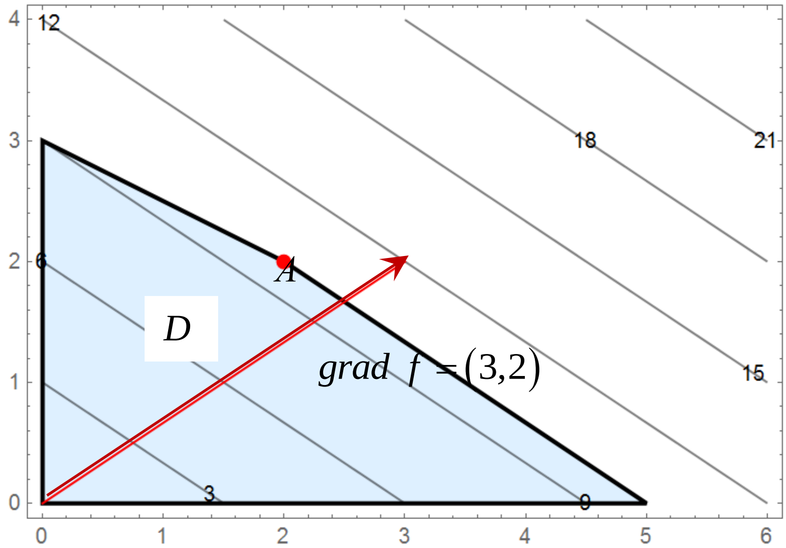

Рис. 6

Знайдена точка $A(2,2)$ (рис. 6) буде точкою максимуму. Координати цієї точки можна знайти з рис. 6 або розв'язавши систему $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 10, \\ x_1 + 2x_2 = 6, \end{cases}$ (оскільки точка A є точкою перетину вказаних прямих).

Отже, ми знайшли точку $A(2,2)$, яка є точкою максимуму для функції f в області D, причому $z(2,2)=10$.

Відповідь: точка максимуму $A(2,2)$, $f_{max}=10$.

Приклад 2. Задачу лінійного програмування розв'яжемо графічним методом.

$$f=x_1+x_2 \to max(min),$$
$$x_1+x_2 \le 3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. Допустима область, градієнт цільової функції, лінії рівня цільової функції, розв'язок задачі зображено на рис. 7.

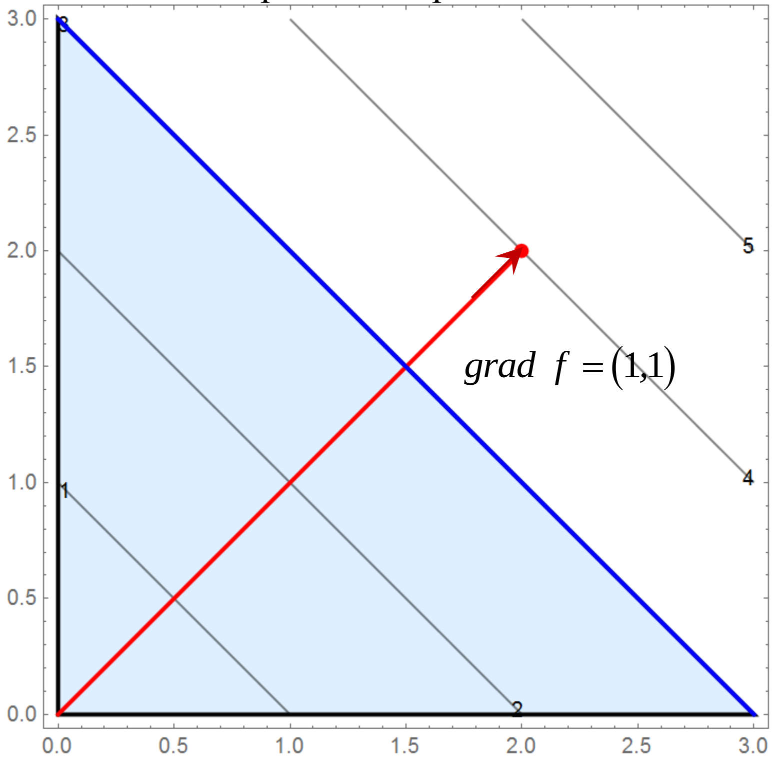

Рис. 7

Найбільшого значення цільова функція досягає у вершинах $(0,3)$ та $(3,0)$, і ***у всіх точках відрізку, які їх з'єднують***.

Відповідь: точка максимуму $\lambda\cdot(0,3)+(1-\lambda)(3,0)$, де $\lambda\in[0,1]$, $f_{max}=3$.

Приклад 3. Задачу лінійного програмування розв'яжемо графічним методом.

$$f=x_1+x_2 \to max(min),$$
$$x_1+x_2 \ge 3,$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. Допустима область, градієнт цільової функції, лінії рівня цільової функції зображено на рис. 8.

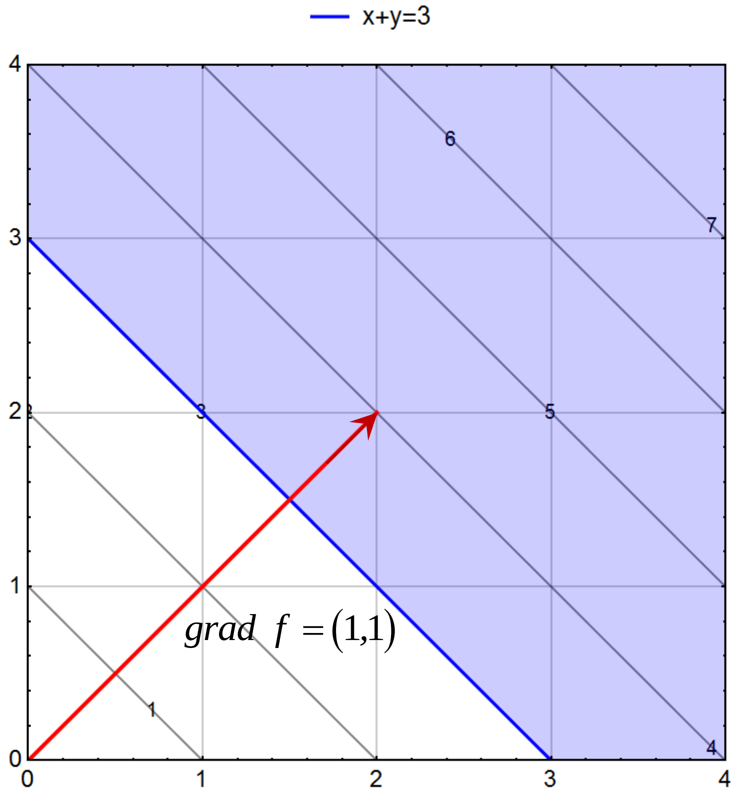

Рис. 8

Задача ***не має розв'язків***, тому що цільова функція необмежена на допустимій множині.

Відповідь: не має розв'язків.

Приклад 4. Задачу лінійного програмування розв'яжемо графічним методом.

Максимізувати цільову функцію $f = 3x_1 + 2x_2$

при виконанні обмежень

$$\begin{cases} 6x_1 - x_2 \le 6, \\ 2x_1 - 3x_2 \ge 4, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язування. Побудуємо *простір допустимих розв'язків* (рис. 9).

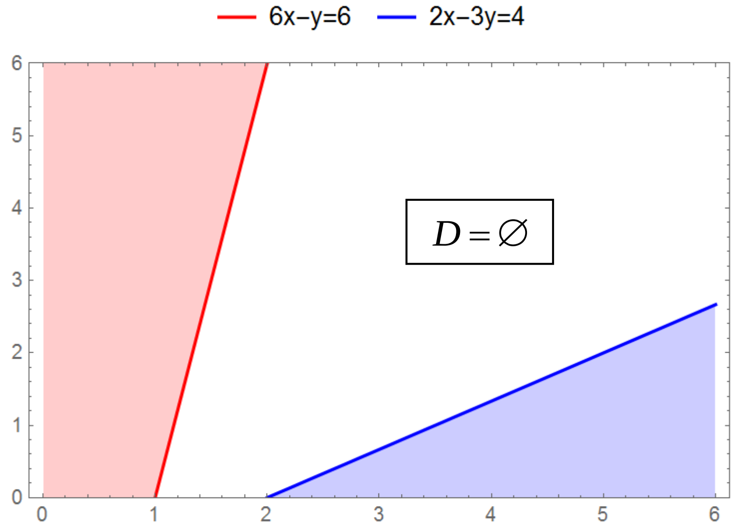

Рис. 9

Задача ***не має розв'язків***, тому що ***допустима множина несумісна***.

Відповідь: не має розв'язків.

Приклад 5. Розв'язати задачу ЛП графічним методом (для n змінних)

$$z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 = 38, \end{cases}$$

$$x_i \geq 0,\ \left(i = \overline{1,5}\right).$$

Розв'язування. Для нашого прикладу необхідне співвідношення виконується, бо $n = 5$, а $m = 3$.

Використовуючи метод Жордана–Гаусса, зробимо три повних виключення невідомих x_1, x_2, x_3. У результаті отримаємо таку систему

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 3x_5 = 6, \\ x_2 + 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases}$$

звідки

$$x_1 = 6 - x_4 + 3x_5,$$

$$x_2 = 70 - 7x_4 - 10x_5,$$

$$x_3 = 20 + 4x_4 - 5x_5.$$

Якщо підставити ці значення у цільову функцію і виключити з останньої системи змінні x_1, x_2, x_3, отримаємо задачу, яка виражається тільки через змінні x_4 та x_5. Отримана задача має вигляд:

$$z = 6x_4 + 15x_5 - 38 \to \max$$

за умов

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 \leq 6, \\ 7x_4 + 10x_5 \leq 70, \\ -4x_4 + 5x_5 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

Задача залежить від двох змінних. Скористаємося графічним методом розв'язання задачі лінійного програмування.

Побудуємо область допустимих розв'язків D (рис. 10). Пронумеруємо рівняння таким чином

$$\begin{cases} x_4 - 3x_5 = 6, & (1) \\ 7x_4 + 10x_5 = 70, & (2) \\ -4x_4 + 5x_5 = 20, & (3) \\ x_4 = 0, & (4) \\ x_5 = 0. & (5) \end{cases}$$

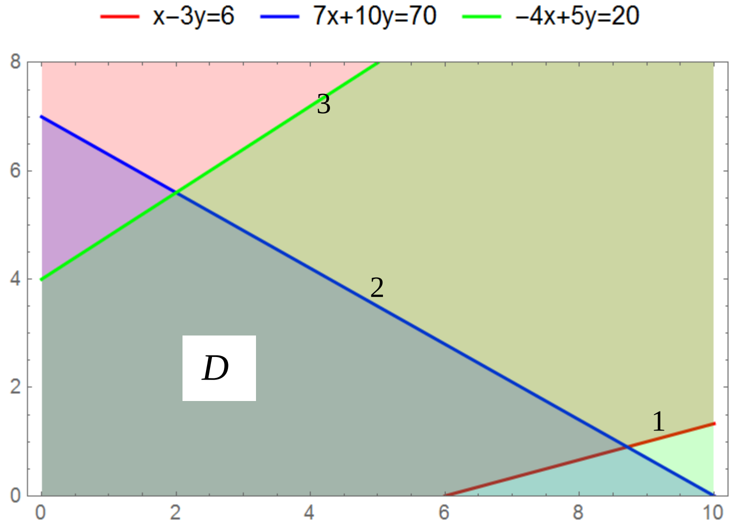

Рис. 10

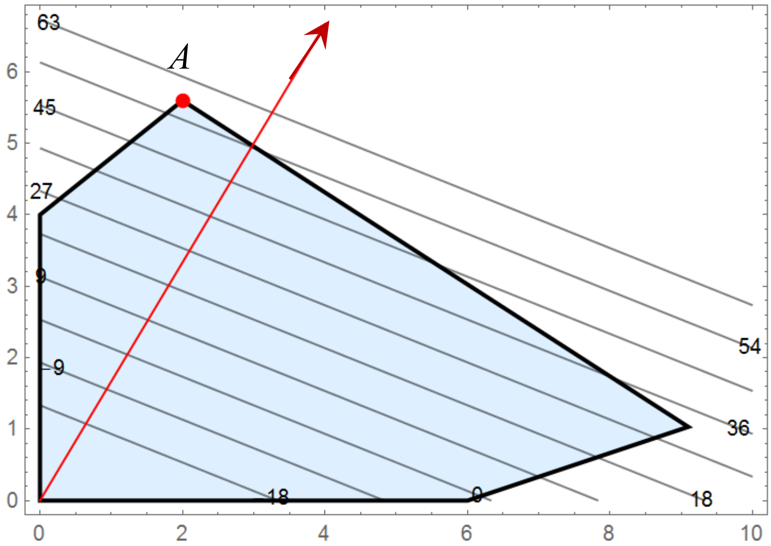

Рис. 11

З рис. 11 бачимо, що функція f набуває максимального значення в кутовій точці A, яка лежить на перетині прямих 2 та 3. Розв'язавши систему

$$\begin{cases} 7x_4 + 10x_5 = 70, \\ -4x_4 + 5x_5 = 20, \end{cases}$$

знаходимо $x_4 = 2$, $x_5 = \dfrac{28}{5} = 5.6$. Максимальне значення функції в цій точці дорівнює $z = -38 + 12 + 84 = 58$.

Для знаходження оптимального плану вихідної задачі підставимо знайдені значення x_4 та x_5 у вирази x_1, x_2, x_3. Звідки отримаємо розв'язок нашої задачі $x_1 = \dfrac{104}{5}$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 2$, $x_5 = \dfrac{28}{5}$.

Відповідь: $f_{max} = 58$ у точці $x^*\left(\frac{104}{5}, 0, 0, 2, \frac{28}{5}\right) = (20.8, 0, 0, 2, 5.6)$.