Методи оптимізації. Лекція 13 за 27.05.2022 (контрольна робота)
Лекція 14 за 03.06.2022

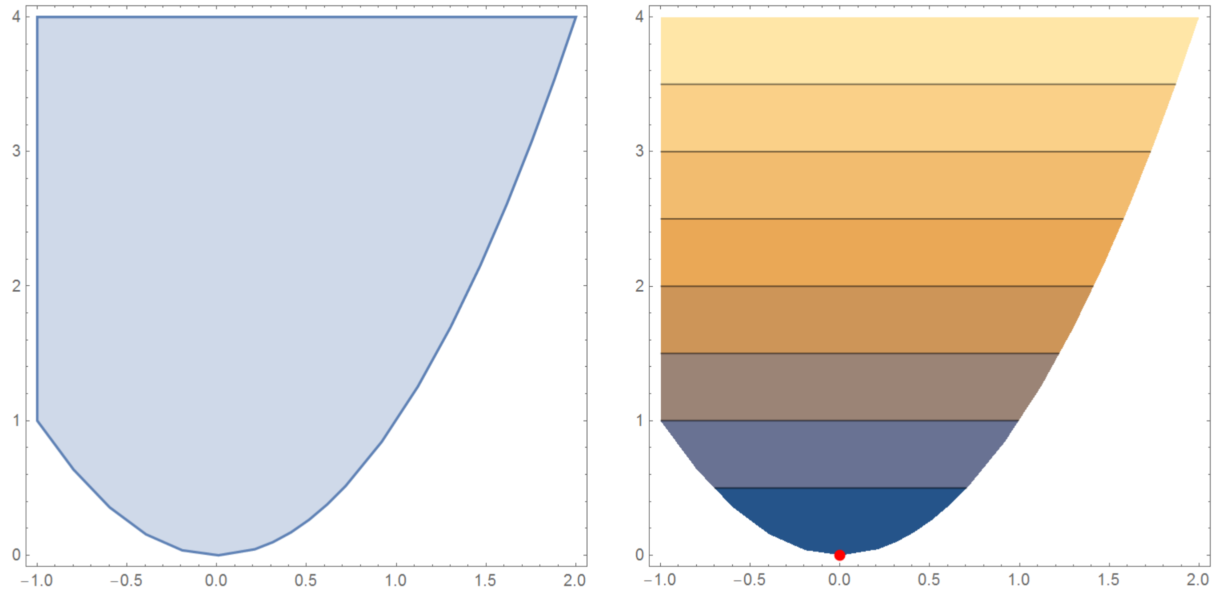
Приклад. Метод гіперплощини, що відтинає (або метод Келлі січних площин). Розглянемо таку задачу:

$$f(x) = x^2 \to min, \quad -1 \le x \le 2.$$

Введемо додаткову змінну x_2 і перейдемо до задачі з лінійною цільовою функцією:

$$\begin{gathered} x_2 \to min, \\ x_1^2 - x_2 \le 0, \\ -1 - x_1 \le 0, \\ x_1 - 2 \le 0. \end{gathered} \tag{7}$$

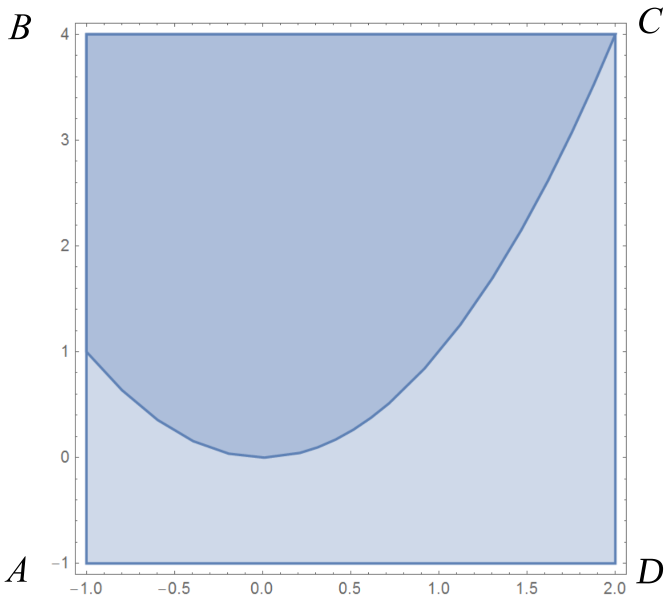
Від одновимірної вихідної задачі перейшли до двовимірної задачі. На рисунку а) зображено множину допустимих розв'язків, а на рис б) червоною точкою показано оптимальний розв'язок задачі та лінії рівня цільової функції.



а) б)

Апроксимуємо допустиму множину багатокутником Z_1 (в даному випадку прямокутником $ABCD$): $A(-1,-1)$, $B(-1,4)$, $C(2,4)$, $D(2,-1)$. Отримаємо задачу:

$$\begin{gathered} x_2 \to min, \\ -1 - x_1 \le 0, \; x_1 - 2 \le 0, \\ -1 - x_2 \le 0, \; x_2 - 4 \le 0. \end{gathered} \tag{8}$$



Оптимальним розв'язком цієї задачі буде точка $x^{(1)} = (-1,-1)$. Перевіримо, чи задовольняє ця точка обмеженням задачі (7):

$$g_1\left(x^{(1)}\right) = \left[x_1^{(1)}\right]^2 - x_2^{(1)} = (-1)^2 - (-1) = 2 > 0,$$

$$g_2\left(x^{(1)}\right) = -1 - (-1) = 0,$$

$$g_3\left(x^{(1)}\right) = (-1) - 2 < 0.$$

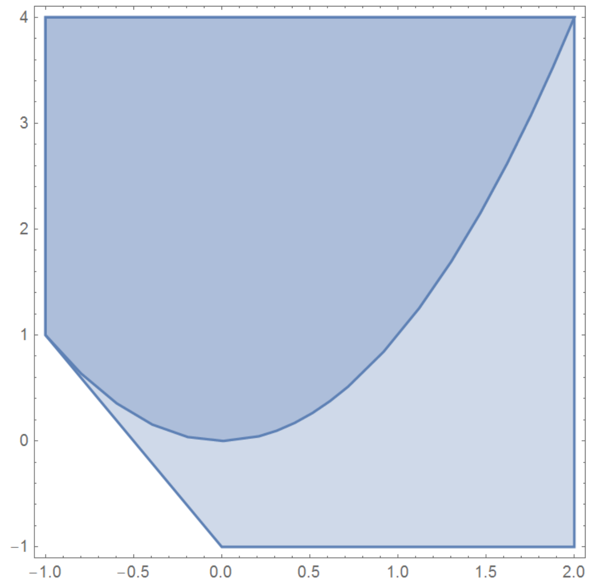
Додаємо до обмежень задачі (8) нове обмеження

$$g_1\left(x^{(1)}\right) + g_1'\left(x^{(1)}\right)\left(x - x^{(1)}\right) \le 0 \text{ або } -2x_1 - x_2 - 1 \le 0.$$

Розпишемо детально: $g_1\left(x^{(1)}\right) = 2$, $g_1'\left(x^{(1)}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ -1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(-1,-1)} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$$2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 - (-1) \\ x_2 - (-1) \end{pmatrix} = 2 + (-2x_1 - 2) + (-x_2 - 1) = -2x_1 - x_2 - 1.$$

Новий багатокутник Z_2 буде п'ятикутником з вершинами: $A(0,-1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,4)$, $D(2,4)$, $E(2,-1)$.



Розв'язуємо задачу

$$x_2 \to min,$$
$$-1 - x_1 \le 0,\ x_1 - 2 \le 0, \qquad (9)$$
$$-1 - x_2 \le 0,\ x_2 - 4 \le 0,\ -2x_1 - x_2 - 1 \le 0.$$

Оптимальним розв'язком задачі буде точка $x^{(2)} = (0, -1)$.

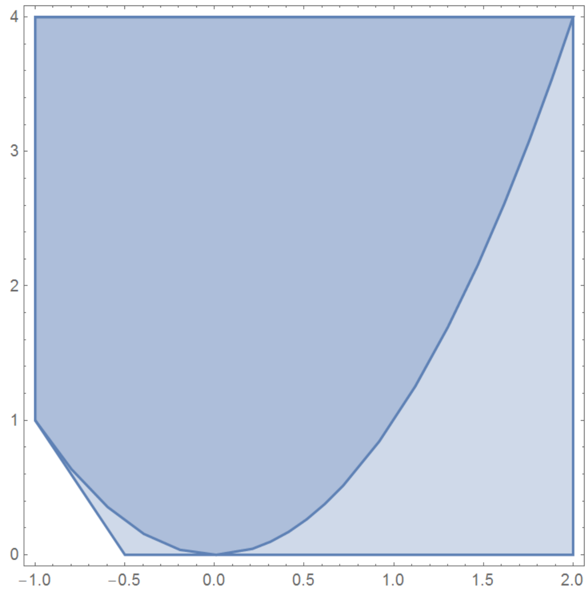
$$g_1\left(x^{(2)}\right) = \left[x_1^{(2)}\right]^2 - x_2^{(2)} = 0 - (-1) = 1 > 0,$$
$$g_2\left(x^{(2)}\right) = -1 - 0 < 0,$$
$$g_3\left(x^{(1)}\right) = 0 - 2 < 0.$$

Не виконується перше обмеження задачі (7). Тобто, $j = 1$.

До обмежень задачі лінійного програмування додаємо обмеження:

$$-x_2 \le 0.$$

Отримуємо новий багатокутник Z_3. Це п'ятикутник з вершинами: $A(-0.5, 0)$, $B(-1, 1)$, $C(-1, 4)$, $D(2, 4)$, $E(2, 0)$.



Продовжуємо виконання ітерацій. Обчислення закінчуються, якщо виконано умову зупинки.

Метод лінеаризації

Даний метод базується на ідеї лінійної апроксимації ***цільової функції і обмежень задачі***. У цьому сенсі він є узагальненням методу умовного градієнту. Разом з тим метод лінеаризації містить і якісно нові моменти: до лінійної апроксимації цільової функції додається квадратичний член і тому в якості допоміжних виникають задачі квадратичного (а не лінійного, як можна було б очікувати) програмування.

Розглянемо задачу математичного програмування виду:

$$f\left(x\right)\to min,$$

$$g_i\left(x\right)\le 0,\quad i=\overline{1,m}, \tag{1}$$

де функції $f\left(x\right), g_1\left(x\right),..., g_m\left(x\right)$ – неперервно-диференційовні, а функції $g_1\left(x\right),..., g_m\left(x\right)$, крім того, опуклі в просторі E^n.

Нехай X – допустима множина задачі (1). Будемо вважати також, що X – непорожня множина.

Довільній точці $x\in E^n$ поставимо у відповідність таку задачу квадратичного програмування відносно p:

$$\left(f'\left(x\right),p\right)+\frac{1}{2}\| p\|^2\to min,$$

$$\left(g_i'\left(x\right),p\right)+g_i\left(x\right)\le 0,\quad i=\overline{1,m}. \tag{2}$$

Цю задачу сформульовано на основі лінійних частин розкладень:

$$f\left(x+p\right)=f\left(x\right)+\left(f'\left(x\right),p\right)+o\left(\|p\|\right),$$

$$g_i\left(x+p\right)=g_i\left(x\right)+\left(g_i'\left(x\right),p\right)+o\left(\|p\|\right),\quad i=\overline{1,m},$$

причому в цільову функцію додано квадратичний член $\frac{1}{2}\| p\|^2$, а константа $f\left(x\right)$ відкинута.

Зауважимо, що в силу опуклості функцій $g_1\left(x\right),..., g_m\left(x\right)$ та умови $X\ne\varnothing$, допустима множина задачі (2) завжди непорожня. Завдяки квадратичному члену цільова функція задачі (2) є сильно опуклою. Тому ця задача має єдиний розв'язок. Позначимо його через $p\left(x\right)$.

$m\|z\|^2\le\left(f''\left(x\right),z\right)\le M\|z\|^2$

У методі лінеаризації послідовність наближень $\left\{ x^{(k)}\right\}$ генерується за формулою

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\alpha_k p^{(k)},\ k=0,1,2,\dots, \tag{3}$$

де $p^{(k)} = p\left(x^{(k)}\right)$ – розв'язок задачі (2) при $x = x^{(k)}$, α_k – параметр, який регулює довжину кроку вздовж напрямку $p^{(k)}$. При цьому, на відміну від методу умовного градієнту, точки послідовності $\left\{ x^{(k)} \right\}$ не обов'язково повинні належати множині X, а послідовність значень функції $\left\{ f\left(x^{(k)}\right) \right\}$ – спадати.

Сформулюємо теорему про збіжність варіанту методу з постійним кроком α_k.

Теорема. Нехай функції $f(x), g_1(x),..., g_m(x)$ є диференційовними в просторі E^n, їх градієнти задовольняють в E^n умові Ліпшиця, функції $g_1(x),..., g_m(x)$ є опуклими в E^n та існує точка $\bar{x} \in E^n$, така, що $g_i(\bar{x}) < 0$ для всіх $i = \overline{1,m}$ (умова Слейтера). Нехай $x^{(0)} \in X$, причому множина $N_0 = \left\{ x \in E^n : f(x) \leq f\left(x^{(0)}\right) \right\}$ – обмежена. Тоді існує число $\bar{\alpha} > 0$ таке, що будь-яка гранична точка x_* послідовності $\left\{ x^{(k)} \right\}$, яка визначається за формулою (3), де $\alpha_k = \alpha \in \left(0, \bar{\alpha}\right]$, є стаціонарною в задачі (1), тобто

$$f'(x_*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x_*) = 0, \tag{4}$$

$$\lambda_i^* g_i(x_*) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{5}$$

де $\lambda_1^* \geq 0,...,\lambda_m^* \geq 0$ – певні числа (множники Лагранжа). Якщо при цьому цільова функція $f(x)$ є опуклою в просторі E^n, то x_* – розв'язок задачі (1).

Відзначимо, що умова обмеженості множини N_0 забезпечується, наприклад, умовою сильної опуклості функції або умовою $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} f(x) = +\infty$.

Алгоритм методу лінеаризації

Початковий етап. Вибрати початкову точку $x^{(0)} \in X$, константу зупинки $\varepsilon > 0$, покласти $k = 0$ і перейти до основного етапу.

Основний етап

Крок 1. Обчислити $f'\left(x^{(k)}\right)$, $g_i\left(x^{(k)}\right)$, $g_i'\left(x^{(k)}\right)$ $i = \overline{1,m}$.

Крок 2. Знайти оптимальне розв'язок $p^{(k)}$ задачі:

$$\left(f'\left(x^{(k)}\right), p \right) + \frac{1}{2} \| p \|^2 \to min,$$

$$\left(g_i'\left(x^{(k)}\right),\ p \right) + g_i\left(x^{(k)}\right) \leq 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Крок 3. Взяти за α_k оптимальний розв'язок такої задачі лінійного пошуку:

$$f\left(x^{(k)} + \alpha\ p^{(k)}\right) \to min,\ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Покласти $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha_k \ p^{(k)}$, замінити k на $k+1$.

Крок 4. Якщо $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\| \le \varepsilon$, то зупинитися: $x^{(k)}$ – наближення до точки мінімуму. В іншому випадку - перейти до кроку 1.

Алгоритм описано.

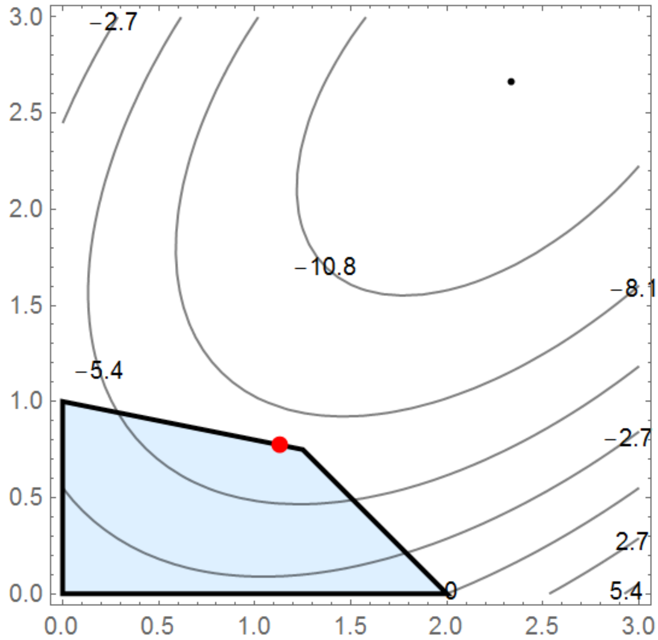
Приклад. Розглянемо задачу

$$f(x) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - x_1 - 4x_2 \to min$$

при обмеженнях

$$x_1 + x_2 \le 2,\ x_1 + 5x_2 \le 5,\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Лінії рівня цільової функції і допустима область показані на рисунку.



$$x_* \approx (1.129, 0.774),\ f(x_*) \approx -7.1613.$$

Розв'яжемо цю задачу методом лінеаризації, взявши за вихідну точку $x^{(0)} = (0,0)^T \in X$, $f\left(x^{(0)}\right) = 0$.

Градієнт цільової функції дорівнює

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 2x_2 - 4 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6 \end{pmatrix}.$$

Також будемо використовувати позначення:

$$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2,\ g_2(x) = x_1 + 5x_2 - 5,\ g_3(x) = -x_1,\ g_4(x) = -x_2.$$

Градієнти обмежень задачі мають вигляд:

$$g_1'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ g_2'(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix},\ g_3'(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Кожна ітерація алгоритму містить розв'язок допоміжної задачі знаходження напрямку спуску і лінійний пошук вздовж цього напрямку (знаходження крокового множника).

Ітерація 1. Пошук напрямку. У початковій точці $x^{(0)}=(0,0)^T$ маємо $f'\left(x^{(0)}\right)=(-4;-6)^T$, $g_1\left(x^{(0)}\right)=-2$, $g_2\left(x^{(0)}\right)=-5$, $g_3\left(x^{(0)}\right)=0$, $g_4\left(x^{(0)}\right)=0$.

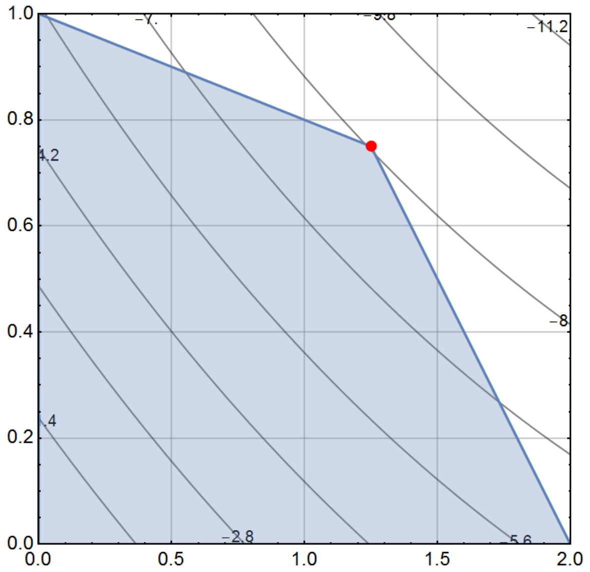
Напрямок спуску $p^{(0)}$ знайдемо з розв'язання такої задачі квадратичного програмування:

$$\frac{1}{2}\left(p_1^2+p_2^2\right)-4p_1-6p_2\to min$$

при обмеженнях

$$p_1+p_2-2\le 0,$$
$$p_1+5p_2-5\le 0,$$
$$-p_1\le 0,\ -p_2\le 0.$$

Допустиму область допоміжної задачі показано на рисунку нижче. Оптимальним розв'язком цієї задачі є вектор $p^{(0)}=\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)^T$.



Лінійний пошук. Будь-яка точка $x^{(1)}$, яку знайдено з точки $x^{(0)}$ у напрямку $p^{(0)}$, може бути представлена у вигляді

$$x^{(1)}=x^{(0)}+\alpha p^{(0)},\ \text{де}\ 0\le\alpha\le 1.$$

Тобто маємо

$$x^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}+\alpha\begin{pmatrix}5/4\\3/4\end{pmatrix}=\left(\frac{5\alpha}{4},\frac{3\alpha}{4}\right)^T,$$

а відповідне їй значення цільової функції дорівнює $f\left(x^{(0)}+\alpha h^{(0)}\right)=\frac{19}{8}\alpha^2-\frac{19}{2}\alpha$.

Значення α_0 знаходиться з розв'язання такої задачі одновимірної оптимізації:

$$\frac{19}{8}\alpha^2-\frac{19}{2}\alpha\to min,\ 0\le\alpha\le 1.$$

Оптимальний розв'язок дорівнює $\alpha_0 = 1$.

Отже,

$$x^{(1)} = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)^T \approx (1.25, 0.75)^T, \ f\left(x^{(1)}\right) = -7.125.$$

Ітерація 2. Пошук напрямку. В точці $x^{(1)} = \left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)^T \approx (1.25, 0.75)^T$ маємо

$$f'\left(x^{(1)}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{11}{5}\right)^T,$$

$$g_1\left(x^{(1)}\right) = 0, \ g_2\left(x^{(1)}\right) = 0, \ g_3\left(x^{(1)}\right) = -\frac{5}{4}, \ g_4\left(x^{(1)}\right) = -\frac{3}{4}.$$

Для знаходження напрямку $p^{(1)}$ розв'яжемо таку задачу:

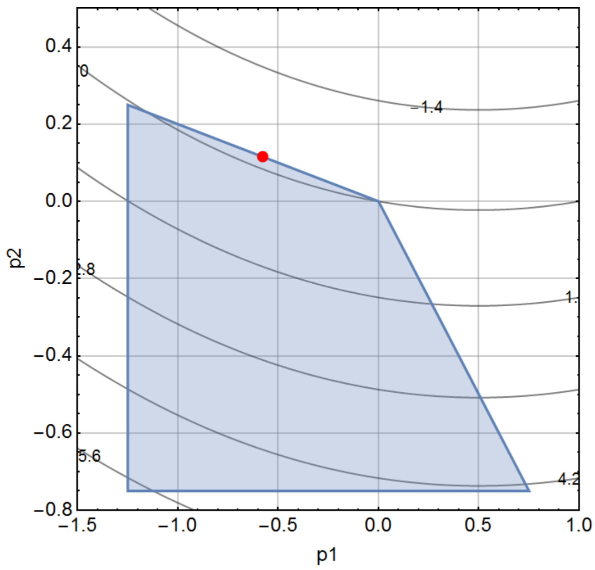
$$\frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - 0.5p_1 - 5.5p_2 \to min,$$

$$p_1 + p_2 \le 0,$$

$$p_1 + 5p_2 \le 0,$$

$$-p_1 - 1.25 \le 0, \ -p_2 - 0.75 \le 0.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є вектор $p^{(1)} = \left(-\frac{15}{26}, \frac{3}{26}\right) = (-0.577, 0.115)^T$.



Лінійний пошук. Маємо

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1.25 \\ 0.75 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -0.577 \\ 0.115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 - 0.577\alpha \\ 0.75 + 0.115\alpha \end{pmatrix},$$

а відповідне їй значення цільової функції дорівнює $f\left(x^{(1)} + \alpha p^{(1)}\right) = \frac{279}{338}\alpha^2 - \frac{9}{26}\alpha - \frac{57}{8}$.

Значення α_1 знаходиться з розв'язання такої задачі одновимірної оптимізації:

$$0.825\alpha^2 - 0.346\alpha - 7.125 \to min,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Оптимальний розв'язок дорівнює $\alpha_1 = 0.2097$.

Отже, маємо $x^{(2)} = \left(\frac{35}{31}, \frac{24}{31}\right) = (1.129, 0.774)^T$, $f\left(x^{(2)}\right) = -7.1613$.

Ітерація 3. Пошук напрямку. В точці $x^{(2)} = \left(\frac{35}{31}, \frac{24}{31}\right) = (1.129, 0.774)^T$ маємо $f'\left(x^{(2)}\right) = \left(-\frac{32}{31}, -\frac{160}{31}\right)^T$, $g_1\left(x^{(2)}\right) = -\frac{3}{31}$, $g_2\left(x^{(2)}\right) = 0$, $g_3\left(x^{(2)}\right) = -\frac{35}{31}$, $g_4\left(x^{(2)}\right) = -\frac{24}{31}$.

Задача для знаходження напрямку $p^{(2)}$ має вигляд:

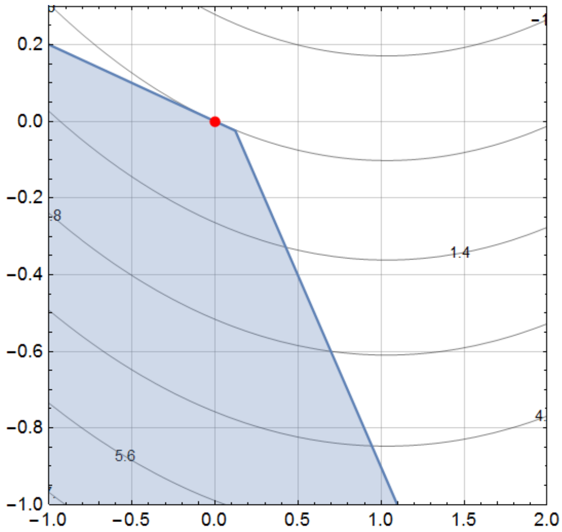
$$\frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) - \frac{32}{31}p_1 - \frac{160}{31}p_2 \to min,$$

$$p_1 + p_2 \le \frac{3}{31},$$

$$p_1 + 5p_2 \le 0,$$

$$-p_1 - \frac{35}{31} \le 0,\ -p_2 - \frac{24}{31} \le 0.$$

Оптимальним розв'язком цієї задачі є вектор $p^{(2)} = (0, 0)^T$.



Отже, точка $x^{(2)} = \left(\frac{35}{31}, \frac{24}{31}\right) = (1.129, 0.774)^T$ є оптимальним розв'язком задачі з заданою точністю.