МО_ Лекція (4) 26.10.2021

Обґрунтування симплекс-методу розв'язання задачі ЛП
Критерій оптимальності (продовження)

2) значення цільової функції в точці $x^{(1)}$ не менше за значення цільової функції в точці $x^{(0)}$: $\left(c, x^{(1)}\right) \geq \left(c, x^{(0)}\right)$.

Нехай $x^{(0)} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0\right)$. Позначимо $\theta = \dfrac{\beta_s}{\alpha_{sr}}$. Тоді

$$x^{(1)} = \left(\beta_1 - \theta\alpha_{1r}, ..., \beta_{s-1} - \theta\alpha_{s-1,r}, \overset{s-e}{0}, \beta_{s+1} - \theta\alpha_{s+1,r}, ..., \beta_m - \theta\alpha_{m,r}, 0, ..., 0, \overset{r-e}{\theta}, 0, ..., 0\right).$$

Порівняємо значення цільової функції в точках $x^{(0)}$ і $x^{(1)}$.

$$\left(c, x^{(0)}\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \beta_j,$$

$$\left(c, x^{(1)}\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j \left(\beta_j - \theta\alpha_{jr}\right) + \theta c_r = \left(c, x^{(0)}\right) + \theta\left(c_r - z_r\right),$$

де

$$z_r = \sum_{j=1}^{m} c_j \alpha_{jr}.$$

Для того, щоб значення цільової функції не зменшувалася, треба щоб $\left(c_r - z_r\right) \geq 0$. Відзначимо, що в останньому рядку таблиці (рядку коефіцієнтів цільової функції) знаходяться відносні оцінки $\left(z_r - c_r\right)$.

Таким чином, щоб значення цільової функції збільшилася (не зменшилася), потрібно вибрати в рядку коефіцієнтів цільової функції на 5 етапі симплекс-методу від'ємний коефіцієнт.

3) **Теорема (про необмеженість цільової функції на допустимій множині)**. Нехай $x = \left(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0\right)$ – базисний розв'язок. Якщо існує номер r такий, що відповідна відносна оцінка $z_r - c_r < 0$ і всі коефіцієнти $\alpha_{ir} \leq 0$, $\forall i = \overline{1, m}$, то цільова функція необмежена на допустимій множині.

Доведення. Ідея доведення: взявши будь-яку точку допустимої множини, покажемо, що значення цільової функції в цій точці більше, ніж значення цільової функції в точці x.

Візьмемо довільну точку y допустимої множини

$$y = \left(x_1 - p\alpha_{1r}, ..., x_m - p\alpha_{mr}, 0, \ldots, 0, \overset{r-e}{p}, 0, ..., 0\right),$$

де p – довільне додатне число.

Покажемо, що y – допустимий розв'язок. Так як $\alpha_{ir} \le 0$, $\forall i = \overline{1,m}$, то всі компоненти вектору y додатні.

Якщо x – допустимий розв'язок, то $\sum_{j=1}^{m} x_j A_j = b$:

$$\sum_{j=1}^{m}\left(x_j - p\alpha_{jr}\right)A_j + pA_r = \sum_{j=1}^{m} x_j A_j \underbrace{-p\sum_{j=1}^{m}\alpha_{jr}A_j + pA_r}_{=0} = b.$$

Вектори $A_1, \ldots, A_m$ утворюють базис, вектор A_r можна записати через вектори базису як $A_r = \sum_{j=1}^{m}\alpha_{jr}A_j$.

Обчислимо значення цільової функції в точці y.

$$\left(c,y\right) = \sum_{j=1}^{m} c_j\left(x_j - p\alpha_{jr}\right) + c_r p = \sum_{j=1}^{m} c_j x_j - p\sum_{j=1}^{m} c_j\alpha_{jr} + c_r p =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j x_j + p\underbrace{\left(c_r - z_r\right)}_{>0}.$$

В силу довільності $p > 0$ значення цільової функції в точці y необмежено зверху.

4) **Теорема (критерій оптимальності)**. Нехай точка $x = \left(x_1,\ldots,x_m,0,\ldots,0\right)$ – базисний розв'язок. Якщо всі коефіцієнти цільової функції $z_k - c_k \ge 0$, $k = 1,\ldots,n$, то x – оптимальний розв'язок задачі ЛП.

Доведення. Візьмемо довільний допустимий розв'язок $y = \left(y_1,\ldots,y_n\right)$. Покажемо, що значення цільової функції в цій точці буде не більше, ніж в точці x.

Так як точки x й y – допустимі розв'язки задачі ЛП, то

$$\sum_{j=1}^{m} x_j A_j = b,\ \sum_{j=1}^{n} y_j A_j = b.$$

Маємо

$$\sum_{j=1}^{n} y_j A_j = \sum_{j=1}^{n} y_j\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}A_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\alpha_{ij}\right)A_i = b = \sum_{i=1}^{m} x_i A_i .$$

Тут використано те, що вектор A_j можна розкласти за векторами базису $A_1, \ldots, A_m$: $A_j = \sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}A_i$ та з порівняння отриманих виразів $x_i = \sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j$.

Знайдемо значення цільової функції в точці y і порівняємо його зі значенням цільової функції в точці x.

$$\left(c,y\right) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j \overset{c_k \le z_k}{\le} \sum_{j=1}^{n} z_j y_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}c_i\right)y_j = \sum_{i=1}^{m} c_i\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}y_j\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \left(c,x\right).$$

Тобто маємо, що $(c,y) \le (c,x)$. В силу довільності допустимого розв'язку y теорему доведено.

Збіжність симплекс-методу

Оскільки в основі симплекс-методу лежить ідея направленого перебору вершин багатогранника умов і число вершин багатогранника є скінченне, то у разі існування оптимального розв'язку метод збігається за скінченну кількість кроків.

Недоліки симплекс-методу:

1) при великому числі змінних, таблиці стають громіздкими;

2) в результаті помилок округлення може бути отримано неоптимальний розв'язок.

Зациклення в задачах лінійного програмування

Оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування досягається в одній з кутових точок багатогранника розв'язків, кількість яких скінченна, тому, використовуючи для розв'язання задачі симплекс-метод, за скінченну кількість кроків можна знайти оптимальний план або з'ясувати, що задача не має розв'язку. Однак строга монотонність алгоритму симплекс-методу має місце тільки в разі невиродженості всіх базисних розв'язків, які отримано в ході виконання алгоритму.

Якщо при знаходженні розв'язувального елементу в симплекс-таблиці існує декілька однакових значень $\theta = \dfrac{\beta_s}{\alpha_{sr}}$, то це означає, що можна вибрати для виключення з базису більш ніж один вектор. На наступному кроці симплекс-методу буде отримано вироджений базисний розв'язок, в якому хоча б одна з базисних змінних дорівнює нулю.

Якщо деякий базисний розв'язок буде виродженим, тобто один або більше вільних членів основної системи обмежень дорівнюють нулю, то при визначенні вектору, який необхідно на наступному етапі виводити з базису, найменше значення θ дорівнюватиме нулю і відповідатиме тому рівнянню, вільний член якого дорівнює нулю. Отже, на наступній ітерації буде виводитися з базису відповідна змінна, при цьому всі значення базисних змінних в наступному опорному розв'язку залишаються без змін, тобто значення цільової функції після проведення ітерації не зміниться.

Це означає, що такі ітерації можуть не привести до поліпшення значення цільової функції.

У такому випадку після певного числа ітерацій отримують базисний розв'язок, який вже було отримано раніше в процесі розв’язання задачі. Подальші ітерації, проведені аналогічно, приведуть до повторного перебору тих же базисних розв'язків (опорних планів). Вироджений базисний розв'язок є причиною того, що виникає теоретична можливість нескінченного числа повторень однакових послідовностей ітерацій, що не поліпшують розв'язків. Таку ситуацію називають ***зацикленням***.

Щоб уникнути зациклення:

1) застосовується ***метод збурень***. Замість вихідної системи розглядається збурена система:

$$\sum_{j=1}^{m} A_j x_j = b(\varepsilon),$$

де ε – мала величина.

2) вибір розв'язувального елемента здійснюється за правилом, яке виключає зациклення.

Розглянемо ***правило Бленда***. Нехай x – вироджений базисний розв'язок і не виявлено необмеженість цільової функції на допустимій множині. Тоді

- за номер розв'язувального стовпця r вибирається мінімальний з номерів небазисних змінних, для якого $c_r^{'} < 0$;
- за номер розв'язувального рядка вибирається мінімальний з номерів базисних змінних, для якої $\dfrac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min\limits_{i:\alpha_{ir}>0} \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ir}}$.

<u>*Зауваження*</u>. Задачі з виродженими розв'язками на практиці зустрічаються часто, але зациклення є вкрай рідким.

Двоїстість в лінійному програмуванні

Двоїстість є фундаментальне поняття в лінійному програмуванні. ***Кожній*** задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу, яка називається ***двоїстою***.

Нехай задано задачу ЛП в канонічній формі:

$$(c, x) \to max, \tag{1}$$

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$x \ge 0. \tag{3}$$

До поняття двоїстості приходимо, якщо спробуємо оцінити зверху цільову функцію (1). Запишемо рівність

$$(c, x) = (c, x) + (y, b - Ax),$$

де $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in E^m$, $(y, b - Ax) = 0$.

Маємо

$$(c, x) = (c, x) + (y, b) - (y, Ax) = (c, x) + (b, y) - (x, A^T y) =$$

$$= (b, y) - (-c + A^T y, x).$$

Будемо вимагати, щоб

$$A^T y \ge c.$$

Тоді, так як $x \ge 0$, маємо, що

$$(-c + A^T y, x) \ge 0.$$

Отже,

$$(c, x) \le (b, y).$$

Тоді

$$max(c,x) = min(b,y) \text{ при умові } A^T y \geq c$$

і замість задачі (1)-(3) можна розглядати таку задачу лінійного програмування:

$$(b,y) \to min, \tag{4}$$

$$A^T y \geq c. \tag{5}$$

Зауваження. Змінна може бути будь-якого знаку.

Задача (1)-(3) називається ***прямою*** задачею, а задача (4)-(5) – ***двоїстою*** задачею. Так як задачі взаємно двоїсті, то вірно і навпаки: (4)-(5) – пряма задача, а (1)-(3) –двоїста задача.

Перехід від прямої задачі до двоїстої

Запишемо правила переходу від прямої задачі лінійного програмування в загальній формі до двоїстої задачі.

1. Якщо пряма задача є задачею максимізації, то двоїста буде задачею мінімізації, і навпаки.

2. Коефіцієнти цільової функції $c_1,\ldots c_n$ прямої задачі стають вільними членами обмежень двоїстої задачі.

3. Вільні члени обмежень $b_1,\ldots b_m$ прямої задачі стають коефіцієнтами цільової функції двоїстої задачі.

4. Число змінних двоїстої задачі буде дорівнювати числу обмежень прямої задачі. Число обмежень двоїстої задачі дорівнює числу змінних прямої задачі.

5. Матриця обмежень прямої задачі транспонується.

6. Якщо $j-$а змінна прямої задачі є обмеженою $\left(x_j \geq 0\right)$), то $j-$е обмеження двоїстої задачі буде нерівністю, а якщо $j-$а змінна прямої задачі необмежена, то $j-$е обмеження двоїстої задачі буде рівністю.

Перехід до двоїстої задачі зручно здійснювати за допомогою таблиці (схеми)

	$x_1 \geq 0$	$\ldots$	$x_k \geq 0$	x_{k+1}	$\ldots$	x_n	
$y_1 \geq 0$	a_{11}	$\ldots$	a_{1k}	$a_{1,k+1}$	$\ldots$	a_{1n}	$\leq b_1$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$y_s \geq 0$	a_{s1}	$\ldots$	a_{sk}	$a_{s,k+1}$	$\ldots$	a_{sn}	$\leq b_s$
y_{s+1}	$a_{s+1,1}$	$\ldots$	$a_{s+1,k}$	$a_{s+1,k+1}$	$\ldots$	$a_{s+1,n}$	$= b_{s+1}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
y_m	a_{m1}	$\ldots$	a_{mk}	$a_{m,k+1}$	$\ldots$	a_{mn}	$= b_m$
	$\geq c_1$	$\ldots$	$\geq c_k$	$= c_{k+1}$	$\ldots$	$= c_n$	

Приклади прямих/двоїстих задач:

1. $(c,x) \to max$, $Ax = b$, $x \geq 0$ — $(b,y) \to min$, $A^T y \geq c$, $y - \forall$

2. $(c,x) \to max$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$ — $(b,y) \to min$, $A^T y \geq c$, $y \geq 0$

3. $(c,x) \to min$, $Ax = b$, $x \geq 0$ — $(b,y) \to max$, $A^T y \leq c$, $y - \forall$

4. $(c,x) \to min$, $Ax \leq b$, $x - \forall$ — $(b,y) \to max$, $A^T y = c$, $y \geq 0$

Теорема (про зв'язок між розв'язками прямої й двоїстої задач ЛП). Якщо пряма задача ЛП має оптимальний розв'язок, то й двоїста задача ЛП має оптимальний розв'язок, причому оптимальні значення цільових функцій при цьому рівні:

$$(c, x^*) = (b, y^*).$$

Якщо пряма задача не має розв'язку через необмеженість цільової функції на допустимій множині, то двоїста задача ЛП не має допустимих розв'язків.

Якщо пряма задача не має розв'язку через несумісність системи обмежень, то двоїста задача ЛП або не має допустимих розв'язків або цільова функція необмежена на допустимій множині.

Теорема (двоїстий критерій оптимальності). Для того щоб допустимий розв'язок x_* був оптимальним розв'язком прямої задачі, необхідно й достатньо, щоб існував такий вектор $y^* = (y_1^*, ..., y_m^*) \in E^m$, що

1) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* = c_j$ для всіх $x_j^* > 0$,

2) $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \geq c_j$ для всіх $x_j^* = 0$.

Економічна інтерпретація прямої й двоїстої задач

Економічну інтерпретацію двоїстої задачі доцільно розглянути на прикладі задачі оптимального використання обмежених ресурсів.

Пряма задача. Визначити, які об’єми виробництва продукції $j-$го виду x_j, $j=\overline{1,n}$ необхідно виробляти в процесі виробництва, щоб максимізувати загальну виручку від реалізації продукції підприємства. При цьому відомі: наявні (фіксовані) об'єми ресурсів $b_i, i=\overline{1,m}$, норми витрат $i-$го виду ресурсу на виробництво одиниці $j-$го виду продукції a_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, а також c_j, $j=\overline{1,n}$ – вартості одиниці продукції $j-$го виду.

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to max, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j \le b_i,\ i=\overline{1,m}, \tag{2}$$

$$x_j \ge 0,\quad j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Двоїста задача. Розглянемо тепер цю ж задачу з іншої точки зору. Допустимо, що при певних умовах доцільно продавати деяку частину або всі наявні ресурси. Необхідно визначити ціни ресурсів.

Кожному ресурсу $b_i, i=\overline{1,m}$ поставимо у відповідність його оцінку $y_i, i=\overline{1,m}$. Умовно будемо вважати, що y_i – ціна одиниці $i-$го ресурсу.

На виготовлення одиниці $j-$го виду продукції витрачається, згідно математичної моделі (1)-(3), m видів ресурсів у кількості відповідно $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj}$. Оскільки ціна одиниці $i-$го виду ресурсу дорівнює y_i, то загальна вартість ресурсів, що витрачаються на виробництво одиниці $j-$го виду продукції, розраховується так:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m.$$

Продавати ресурси доцільно лише за умови, що виручка, отримана від продажу ресурсів, перевищує суму, яку можна було б отримати від реалізації продукції, виготовленої з тих же обсягів ресурсів, тобто:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + \ldots + a_{mj}y_m \ge c_j,\ j=\overline{1,n}.$$

Зрозуміло, що покупці ресурсів прагнуть здійснити операцію якнайдешевше, отже, необхідно визначити мінімальні ціни одиниць кожного виду ресурсів, при яких їх продаж є доцільніше, ніж виготовлення продукції. Загальну вартість ресурсів можна виразити формулою:

$$z(y) = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Тобто необхідно визначити, які мінімальні ціни можна встановити для одиниці кожного $i-$го виду ресурсу, щоб продаж ресурсів була доцільніше, ніж виробництво продукції.

$$z(y)=\sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to min, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \ge c_j, \quad j=\overline{1,n}, \tag{5}$$

$$y_i \ge 0, \; i=\overline{1,m}. \tag{6}$$

Зауважимо, що істинний сенс величин $y_i, i=\overline{1,m}$ – умовні ціни, що виражають рівень «цінності» відповідного ресурсу для даного виробництва. Англійський термін «shadow prices» в літературі перекладається як «оцінка» або «тіньова, прихована ціна». Академік Л. В. Канторович назвав їх «об'єктивно зумовленими оцінками» відповідного ресурсу.

Задача (4)-(6) є двоїстою до задачі (1)-(3), яку називають прямою (основною, початковою). Поняття двоїстості є взаємним. Тому кожну з них можна вважати прямою, а іншу – двоїстою.

Кожну з двох двоїстих задач можна розв'язати окремо, проте встановлені теоремами двоїстості залежності між оптимальними планами прямої та двоїстої задач дозволяють знайти оптимальний розв'язок двоїстої задачі при наявності оптимального плану прямої, і навпаки.

Для задач ЛП вигляду (1)-(3) та (4)-(6) має місце така відповідність між змінними двоїстих задач:

Основні змінні прямої задачі				Додаткові змінні прямої задачі			
x_1	x_2	$\dots$	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}		x_{n+m}
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
y_{m+1}	y_{m+2}	$\dots$	y_{m+n}	y_1	y_2	$\dots$	y_m
Додаткові змінні двоїстої задачі				Основні змінні двоїстої задачі			

Теорія двоїстості є потужним математичним апаратом обґрунтування структури виробництва. Вона дозволяє перш за все визначати статус ресурсів та інтервали стійкості двоїстих оцінок щодо зміни запасів дефіцитних ресурсів. В умовах ринкової економіки ціни на ресурси можуть змінюватися в досить широких межах. Крім цього, постачальники з об'єктивних причин можуть не виконати попередні домовленості. Тому аналіз ринку ресурсів в передплановому періоді має велике значення. Важливою є проблема заміни одного дефіцитного ресурсу іншим.

Використання двоїстих оцінок робить можливим визначення рентабельності кожного виду продукції, яку виробляє підприємство. У той же час можна оцінити інтервали можливої зміни цін одиниці кожного виду продукції, що дуже важливо в ринкових умовах.

За допомогою двоїстих оцінок можна визначити статус кожного ресурсу.

Ресурси, що використовуються для виробництва продукції, можна умовно розділити на ***дефіцитні*** і ***недефіцитні*** в залежності від того, повне або часткове їх використання передбачено оптимальним планом прямої задачі.

Якщо деяка двоїста оцінка y_i в оптимальному плані двоїстої задачі дорівнює нулю, то відповідний $i-$й ресурс використовується у виробництві продукції не повністю і є ***недефіцитним***.

Якщо ж двоїста оцінка $y_i > 0$, то $i-$й ресурс використовується для оптимального плану виробництва продукції повністю і називається ***дефіцитним***.

Відомо, що величина двоїстої оцінки показує, наскільки збільшиться значення цільової функції, якщо запас відповідного ресурсу збільшити на одну умовну одиницю.

Оцінку рентабельності продукції, виробленої на підприємстві, можна здійснювати за допомогою двоїстих оцінок і обмежень двоїстої задачі, які характеризують кожен вид продукції.

Ліва частина кожного обмеження двоїстої задачі є вартістю відповідних ресурсів, використовуваних для виробництва одиниці $j-$ї продукції. Якщо ця величина перевищує ціну одиниці продукції c_j, то виробляти таку продукцію невигідно, вона ***нерентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі відповідна їй змінна $x_j = 0$.

Якщо ж загальна оцінка всіх ресурсів дорівнює ціні одиниці продукції, то виробляти таку продукцію доцільно, вона ***рентабельна*** і в оптимальному плані прямої задачі їй відповідає змінна $x_j > 0$.

Приклад. Для виробництва трьох видів виробів *A*, *B*, *C* використовується три види сировини. Кожен вид сировини може бути використаний в кількості відповідно не більшому за 180, 210 та 244 кг. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції даного виду і ціна одиниці продукції наведено в таблиці

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	A	*B*	*C*
I	4	2	1
II	3	1	3
III	1	2	5
Ціна одиниці продукції	10	14	12

Визначити план випуску продукції, при якому забезпечується її максимальна сумарна вартість. Оцінити кожен з видів сировини, що використовуються для виробництва продукції. Оцінка всієї використаної сировини повинна бути мінімальною.

Постановка прямої задачі

$$f(x)=10x_1+14x_2+12x_3 \to max,$$

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3 \le 180, \\ 3x_1+x_2+3x_3 \le 210, \\ x_1+2x_2+5x_3 \le 244, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j=\overline{1,3}.$$

Постановка двоїстої задачі

$$z(y)=180y_1+210y_2+244y_3 \to min,$$

$$\begin{cases} 4y_1+3y_2+y_3 \ge 10, \\ 2y_1+y_2+2y_3 \ge 14, \\ y_1+3y_2+5y_3 \ge 12, \end{cases}$$

$$y_i \ge 0,\ i=\overline{1,3}.$$

Знайдемо оптимальний розв'язок прямої задачі.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	
x_4	4	2	1	180
x_5	3	1	3	210
x_6	1	2	5	244
	-10	-14	-12	0

	$-x_1$	$-x_4$	$-x_3$	
x_2	2	1/2	1/2	90
x_5	1	-1/2	5/2	120
x_6	-3	-1	4	64
	18	7	-5	1260

		y_4	y_1	y_3	
		$-x_1$	$-x_4$	$-x_6$	
y_5	x_2	19/8	5/8	-1/8	82
y_2	x_5	23/8	1/8	-5/8	80
y_6	x_3	-3/4	-1/4	1/4	16
		57/4	23/4	5/4	1340

Оптимальний розв'язок прямої задачі:

$$x^* = (0,82,16,0,80,0),\ f(x^*)=1340.$$

Оптимальний розв'язок двоїстої задачі:

$$y^* = \left(\frac{23}{4},0,\frac{5}{4},\frac{57}{4},0,0\right),\ f(y^*)=1340.$$

Основні змінні оптимального плану прямої задачі означають об'єми виробництва відповідних видів продукції. Отже, випуск продукції виду *A* не планується (***нерентабельна*** продукція), а *B* та *C* – планується в кількості відповідно 82 та 16 од. (***рентабельні*** продукції).

Додаткові змінні оптимального плану прямої задачі x_4, x_5 та x_6 характеризує залишки (невикористані об'єми) ресурсів відповідно *I*, *II* та *III*. Оскільки $x_5=80$, то це означає, що другий ресурс використовується в процесі виробництва продукції не повністю (***недефіцитний*** ресурс). Перший і третій ресурси відповідно до оптимального плану виробництва будуть використані повністю (***дефіцитні*** ресурси), тому що $x_4=x_6=0$.

Основні змінні прямої задачі			Додаткові змінні прямої задачі		
$x_1 = 0$	$x_2 = 82$	$x_3 = 16$	$x_4 = 0$	$x_5 = 80$	$x_6 = 0$
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
$y_4 = 57/4$	$y_5 = 0$	$y_6 = 0$	$y_1 = 23/4$	$y_2 = 0$	$y_3 = 5/4$
Додаткові змінні двоїстої задачі			Основні змінні двоїстої задачі		

Оптимальний план двоїстої задачі дає оптимальну систему оцінок ресурсів, які використовуються у виробництві.

Основні змінні двоїстої задачі за наведеною схемою відповідають додатковим змінним прямої задачі, які характеризують обсяги невикористаних ресурсів. Отже, отримані значення змінних y_1, y_2 та y_3 можна використовувати для відносної кількісної оцінки важливості відповідних видів ресурсів. Так, $y_1 = 23/4$ и $y_3 = 5/4$ відмінні від нуля, а ресурси *I* та *III* (за значеннями додаткових змінних прямої задачі) використовуються повністю. Двоїста оцінка $y_2 = 0$ і відповідний вид ресурсу в повному обсязі використовується (не є дефіцитним) згідно оптимальному плану виробництва продукції. Це підтверджується також попереднім аналізом додаткових змінних оптимального плану прямої задачі.