СХЕМА КРАНКА-НИКОЛСОНА

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0. \tag{6.1}$$

Краевые условия

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0, \tag{6.2}$$

$$u(l,t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0, \tag{6.3}$$

Начальное условие

$$u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \quad t = 0, \tag{6.4}$$

1. Явная конечно-разностная схема для этой задачи может быть записана в виде

$$\begin{gathered}
\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \\
j = \overline{1, N-1}, \quad k = \overline{0, K-1}; \\
u_0^{k+1} = \varphi_1\left(t^{k+1}\right), \quad u_N^{k+1} = \varphi_2\left(t^{k+1}\right), \quad k = \overline{0,\ K}; \\
u_j^0 = \psi(x_j), \quad j = \overline{0, N}.
\end{gathered} \tag{6.28}$$

Эта схема, записанная в форме

$$u_j^{k+1} = \sigma \cdot u_{j+1}^k + (1 - 2\sigma)\, u_j^k + \sigma \cdot u_{j-1}^k, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2},$$
$$j = \overline{1, N-1}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots, \tag{6.107}$$

обладает тем *достоинством*, что решение на верхнем временном слое t^{k+1} получается сразу (без решения СЛАУ) по значениям сеточной функции на нижнем временном слое t^k, где решение известно (при $k = 0$ значения сеточной функции формируются из начального условия (6.4.)). Но эта же схема обладает существенным *недостатком*, поскольку она является условно устойчивой с условием (6.54), накладываемым на сеточные характеристики τ и h.

2. Неявная конечно разностная схема для этой задачи может быть записана в виде

$$
\begin{gathered}
\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}=a^2\frac{u_{j+1}^{k+1}-2u_j^{k+1}+u_{j-1}^{k+1}}{h^2}+O(\tau+h^2),\\
j=\overline{1,N-1},\quad k=\overline{0,K-1};\\
u_0^{k+1}=\varphi_1(t^{k+1}),\quad u_N^{k+1}=\varphi_2(t^{k+1}),\quad k=\overline{0,\ K-1};\\
u_j^0=\psi(x_j),\quad j=\overline{0,N}.
\end{gathered}
\qquad (6.30)
$$

Эта схема, записанная в форме

$$
-a_ju_{j-1}^{k+1}+b_ju_j^{k+1}-c_ju_{j+1}^{k+1}=d_j,\ \ j=\overline{1,N-1},\ \ k=0,1,2,\dots\ , \qquad (6.108)
$$

приводит к необходимости решать СЛАУ, но зато эта схема абсолютно устойчива.

Проанализируем схемы (6.107), (6.108). Пусть точное решение, которое неизвестно, возрастает по времени, т. е. $u_j^{k+1}>u_j^k$. Тогда, в соответствии с явной схемой (6.107), разностное решение будет заниженным по сравнению с точным, так как u_j^{k+1} определяется по меньшим значениям сеточной функции на предыдущем временном слое, поскольку решение является возрастающим по времени.

Для неявной схемы (6.108) на возрастающем решении, наоборот, решение завышено по сравнению с точным, поскольку оно определяется по значениям сеточной функции на верхнем временном слое.

На убывающем решении картина изменяется противоположным образом: явная конечно-разностная схема завышает решения, а неявная — занижает (см. рис. 6.7).

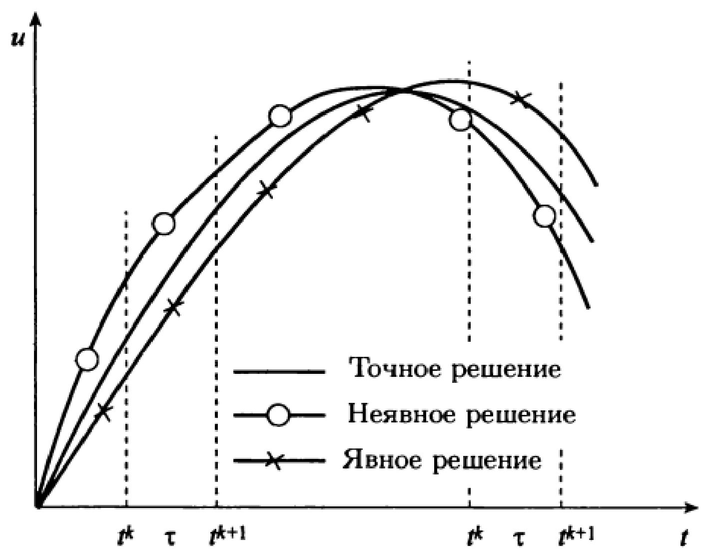

Рис. 6.7. Двусторонний метод аппроксимации

На основе этого анализа возникла идея о построении более точной неявно-явной конечно-разностной схемы с весами при пространственных конечно-разностных операторах, причем при измельчении шагов τ и h точное (неизвестное) решение может быть взято в «вилку» сколь угодно узкую, так как если явная и неявная схемы аппроксимируют дифференциальную задачу и эти схемы устойчивы, то при стремлении сеточных характеристик τ и h к нулю решения по явной и неявной схемам стремятся к точному решению с разных сторон.

Рассмотрим неявно-явную схему с весами для простейшего уравнения теплопроводности:

$$\frac{u_j^{k+1} - u_j^k}{\tau} = \theta a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + \\ + (1-\theta)\, a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2}, \quad (6.109)$$

где θ — вес неявной части конечно-разностной схемы, $1-\theta$ — вес для явной части, причем $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. При $\theta = 1$ имеем полностью неявную схему, при $\theta = 0$ — полностью явную схему, и при $\theta = 1/2$ — схему *Кранка–Николсона.*

В соответствии с гармоническим анализом для схемы (6.109) получаем неравенство

$$\left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k}\right| < \left|\frac{1 - 4\sigma(1-\theta)}{1 + 4\sigma\theta}\right| \leqslant 1,$$

откуда

$$-1 \leqslant \frac{1 - 4\sigma(1-\theta)}{1 + 4\sigma\theta} \leqslant +1, \quad (6.110)$$

причем правое неравенство выполнено всегда.

Левое неравенство имеет место для любых значений σ, если $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$. Если же вес θ лежит в пределах $0 \leqslant \theta < 1/2$, то между σ и θ из левого неравенства устанавливается связь

$$\sigma \leqslant \frac{1}{2\cdot(1-2\theta)}, \quad 0 \leqslant \theta < 1/2, \quad (6.111)$$

являющаяся условием устойчивости неявно-явной схемы с весами (6.109), когда вес находится в пределах $0 \leqslant \theta < 1/2$.

Таким образом, неявно-явная схема с весами (6.109) абсолютно устойчива при $1/2 \leqslant \theta \leqslant 1$ и условно устойчива с условием (6.111) при $0 \leqslant \theta < 1/2$.

Рассмотрим порядок аппроксимации неявно-явной схемы с весами (6.109), для чего разложим в ряд Тейлора в окрестности узла $\left(x_j, t^k\right)$ на точном решении значения сеточных функций u_j^{k+1} по переменной t, $u_{j\pm1}^k$, $u_{j\pm1}^{k+1}$ по переменной x и полученные разложения подставим в (6.109):

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k \frac{\tau}{2} + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \theta \cdot a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u_j^k + \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k \cdot \tau + O\left(\tau^2\right)\right] +$$

$$+ (1-\theta)\, a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k + O\left(h^2\right).$$

В этом выражении дифференциальный оператор $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ от квадратной скобки в соответствии с дифференциальным уравнением (6.1) равен дифференциальному оператору $\dfrac{1}{a^2}\dfrac{\partial}{\partial t}$, в соответствии с чем вышеприведенное равенство приобретает вид

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_j^k + \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k \frac{\tau}{2} + O\left(\tau^2\right) =$$

$$= \theta a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k + \theta \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k \cdot \tau + a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k -$$

$$- \theta a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_j^k + O\left(\tau^2 + h^2\right).$$

После упрощения получаем

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_j^k = \left(\theta - {}^1\!/\!_2\right) \left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_j^k \cdot \tau + O\left(\tau^2 + h^2\right),$$

откуда видно, что для схемы Кранка–Николсона ($\theta = 1/2$) порядок аппроксимации схемы (6.109) составляет $O\left(\tau^2 + h^2\right)$, т. е. на один порядок по времени выше, чем для обычных явных или неявных схем. Таким образом, схема Кранка–Николсона (6.109) при $\theta = 1/2$ *абсолютно устойчива и имеет второй порядок аппроксимации по времени и пространственной переменной x.*

Аналогично схема Кранка–Николсона записывается и исследуется для других нестационарных уравнений, например для волнового уравнения.