Транспортна задача

Задана транспортна задача. Знайти початковий розв`язок транспортної задачі методами: північно-західного кута, мінімального елемента, Фогеля. Порівняти значення цільової функції для кожного початкового розв`язка. Розв`язати задачу методом потенціалів. За початковий розв`язок узяти розв`язок, який знайдено методом мінімального елемента.

$$\begin{array}{c} \begin{bmatrix} 16 & 30 & 17 & 10 & 16 \\ 30 & 27 & 26 & 9 & 23 \\ 13 & 4 & 22 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{c} 4 \\ 6 \\ 10 \\ 10 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} 7 & 7 & 7 & 7 & 2 \end{array} \end{array}$$

Розв'язання. Маємо $m=4$ виробника та $n=5$ споживачів. Перевіримо умову: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Маємо $4+6+10+10=7+7+7+7+2=30$. Тобто задана закрита транспортна задача.

1. Знайдемо початковий розв`язок транспортної задачі **методом північно-західного кута**.

Запишемо таблицю, в яку вносимо тільки об'єми виробництва та споживання.

					$a_1=4$
					$a_2=6$
					$a_3=10$
					$a_4=10$
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Заповнювати таблицю починаємо з верхньої лівої клітинки (північно-західного кута).

Знаходимо $x_{11}=min(a_1,b_1)=min(4,7)=4$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{12}=x_{13}=x_{14}=x_{15}=0$ і перший рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_1=7-4=3$.

4	0	0	0	0	$a_1=4$
					$a_2=6$
					$a_3=10$
					$a_4=10$
~~$b_1=7$~~ $b_1=3$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{21}=min(a_2,b_1)=min(6,3)=3$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{31}=x_{41}=0$

і перший стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_2 = 6 - 3 = 3$.

4	0	0	0	0	$a_1 = 4$
3					$\cancel{a_2 = 6}$, $a_2 = 3$
0					$a_3 = 10$
0					$a_4 = 10$
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 3$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$b_4 = 7$	$b_5 = 2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{22} = min(a_2, b_2) = min(3,7) = 3$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{23} = x_{24} = x_{25} = 0$ і другий рядок виключається з подальшого розгляду (викреслюється). Об'єм споживання $b_2 = 7 - 3 = 4$.

4	0	0	0	0	$a_1 = 4$
3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2 = 6}$, $a_2 = 3$
0					$a_3 = 10$
0					$a_4 = 10$
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 3$	$\cancel{b_2 = 7}$ $b_2 = 4$	$b_3 = 7$	$b_4 = 7$	$b_5 = 2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{32} = min(a_3, b_2) = min(10,4) = 4$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{42} = 0$ і другий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_3 = 10 - 4 = 6$.

4	0	0	0	0	$a_1 = 4$
3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2 = 6}$, $a_2 = 3$
0	**4**				$\cancel{a_3 = 10}$, $a_3 = 6$
0	0				$a_4 = 10$
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 3$	$\cancel{b_2 = 7}$ $b_2 = 4$	$b_3 = 7$	$b_4 = 7$	$b_5 = 2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{33} = min(a_3, b_3) = min(6,7) = 6$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{34} = x_{35} = 0$ і третій рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_3 = 7 - 6 = 1$.

4	0	0	0	0	$a_1 = 4$

3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2=6}$, $a_2=3$
0	**4**	**6**	0	0	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=6$
0	0				$a_4=10$
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=3$	$\cancel{b_2=7}$ $b_2=4$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=1$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{43}=min(a_4,b_3)=min(10,1)=1$. Третій стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_4=10-1=9$.

4	0	0	0	0	$a_1=4$
3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2=6}$, $a_2=3$
0	**4**	**6**	0	0	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=6$
0	0	**1**			$\cancel{a_4=10,}$ $a_4=9$
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=3$	$\cancel{b_2=7}$ $b_2=4$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=1$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Продовжуємо заповнювати таблицю з північно-західного кута. Знаходимо $x_{44}=min(a_4,b_4)=min(9,7)=7$. Четвертий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_4=9-7=2$.

4	0	0	0	0	$a_1=4$
3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2=6}$, $a_2=3$
0	**4**	**6**	0	0	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=6$
0	0	**1**	**7**		$\cancel{a_4=10,}$ $\cancel{a_4=9,}$ $a_4=2$
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=3$	$\cancel{b_2=7}$ $b_2=4$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=1$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Залишилась одна клітинка. Заповнюємо: $x_{45}=min(a_4,b_5)=min(2,2)=2$.

4	0	0	0	0	$a_1=4$
3	**3**	0	0	0	$\cancel{a_2=6}$, $a_2=3$
0	**4**	**6**	0	0	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=6$
0	0	**1**	**7**	**2**	$\cancel{a_4=10,}$ $\cancel{a_4=9,}$ $a_4=2$
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=3$	$\cancel{b_2=7}$ $b_2=4$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=1$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Отже початковий розв'язок, знайдений методом північно-західного кута такий:

$$X^{(0)}_{\text{півн.-західн. кута}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(0)}_{\text{півн.-західн. кута}}\right) = 4\cdot16+3\cdot30+3\cdot27+4\cdot4+6\cdot22+1\cdot5+7\cdot4+2\cdot24 = 464.$$

2. Знайдемо початковий розв`язок транспортної задачі **методом мінімального елемента.**

Запишемо таблицю, в яку вносимо об'єми виробництва та споживання та вартості перевезень. Вартості перевезень c_{ij} будемо записувати у верхньому лівому куточку клітинки, а об'єми перевезень x_{ij} у нижньому правому куточку клітинки.

16	30	17	10	16	$a_1 = 4$
30	27	26	9	23	$a_2 = 6$
13	4	22	3	1	$a_3 = 10$
3	1	5	4	24	$a_4 = 10$
$b_1 = 7$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$b_4 = 7$	$b_5 = 2$	

В таблиці знаходимо мінімальні вартості перевезень. Якщо таких значень декілька, то вибираємо будь-яке з них.

В нашому випадку $c_{42} = c_{35} = 1$. Виберемо $c_{42} = 1$. Знаходимо $x_{42} = min(a_4, b_2) = min(10,7) = 7$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{12} = x_{22} = x_{32} = 0$ і другий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_4 = 10 - 7 = 3$.

16	30 0	17	10	16	$a_1 = 4$
30	27 0	26	9	23	$a_2 = 6$
13	4 0	22	3	1	$a_3 = 10$
3	1 **7**	5	4	24	~~$a_4 = 10$~~, $a_4 = 3$
$b_1 = 7$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$b_4 = 7$	$b_5 = 2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Це $c_{35} = 1$. Знаходимо $x_{35} = min(a_3, b_5) = min(10,2) = 2$. Так як мінімум досягається у стовпці, то

$x_{15}=x_{25}=x_{35}=0$ і п’ятий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об’єм виробництва $a_3=10-2=8$.

16	30 0	17	10	16 0	$a_1=4$
30	27 0	26	9	23 0	$a_2=6$
13	4 0	22	3	1 **2**	~~$a_3=10$~~ $a_3=8$
3	1 **7**	5	4	24 0	~~$a_4=10$,~~ $a_4=3$
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Маємо $c_{34}=c_{41}=3$. Виберемо $c_{34}=3$. Знаходимо $x_{34}=min(a_3,b_4)=min(8,7)=7$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{14}=x_{24}=x_{44}=0$ і четвертий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об’єм виробництва $a_3=8-7=1$.

16	30 0	17	10 0	16 0	$a_1=4$
30	27 0	26	9 0	23 0	$a_2=6$
13	4 0	22	3 **7**	1 **2**	~~$a_3=10$~~ ~~$a_3=8$~~, $a_3=1$
3	1 **7**	5	4 0	24 0	~~$a_4=10$~~, $a_4=3$
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Маємо $c_{41}=3$. Знаходимо $x_{41}=min(a_4,b_1)=min(3,7)=3$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{43}=0$ і четвертий рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об’єм споживання $b_1=7-3=4$.

16	30 0	17	10 0	16 0	$a_1=4$
30	27 0	26	9 0	23 0	$a_2=6$
13	4 0	22	3 **7**	1 **2**	~~$a_3=10$~~ ~~$a_3=8$~~, $a_3=1$
3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	~~$a_4=10$~~, $a_4=3$
~~$b_1=7$~~ $b_1=4$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Маємо $c_{31}=13$. Знаходимо $x_{31}=min\left(a_3,b_1\right)=min\left(1{,}4\right)=1$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{33}=0$ і третій рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_1=4-1=3$.

16 **3**	30 0	17	10 0	16 0	$a_1=4$
30	27 0	26	9 0	23 0	$a_2=6$
13 **1**	4 0	22 0	3 **7**	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$ $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$
3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$
$\cancel{b_1=7}$ $\cancel{b_1=4}$ $b_1=3$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Маємо $c_{11}=16$. Знаходимо $x_{11}=min\left(a_1,b_1\right)=min\left(4{,}3\right)=3$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{21}=0$ і перший стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_1=4-3=1$.

16 **3**	30 0	17	10 0	16 0	$\cancel{a_1=4}$, $a_1=1$
30 0	27 0	26	9 0	23 0	$a_2=6$
13 **1**	4 0	22 0	3 **7**	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$ $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$
3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$
$\cancel{b_1=7}$ $\cancel{b_1=4}$ $b_1=3$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$	

В таблиці знаходимо мінімальну вартість перевезення. Маємо $c_{13}=17$. Знаходимо $x_{13}=min\left(a_1,b_3\right)=min\left(1{,}7\right)=1$. Перший рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_3=7-1=6$.

16 **3**	30 0	17 **1**	10 0	16 0	$\cancel{a_1=4}$, $a_1=1$
30 0	27 0	26	9 0	23 0	$a_2=6$
13 **1**	4 0	22 0	3 **7**	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$ $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$
3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$
$\cancel{b_1=7}$ $\cancel{b_1=4}$ $b_1=3$	$b_2=7$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=6$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Залишилась одна клітинка. Заповнюємо: $x_{23}=6$.

16 **3**	30 0	17 **1**	10 0	16 0	$\cancel{a_1=4}$, $a_1=1$
30 0	27 0	26 **6**	9 0	23 0	$a_2=6$
13 **1**	4 0	22 0	3 **7**	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$ $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$
3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$
$\cancel{b_1=7}$ $\cancel{b_1=4}$ $b_1=3$	$b_2=7$	$\cancel{b_3=7}$ $b_3=6$	$b_4=7$	$b_5=2$	

Отже початковий розв’язок, знайдений методом мінімального елемента такий:

$$X^{(0)}_{мін.елем.}=\begin{pmatrix}3&0&1&0&0\\0&0&6&0&0\\1&0&0&7&2\\3&7&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(0)}_{мін.елем.}\right)=3\cdot16+1\cdot17+6\cdot26+1\cdot13+7\cdot3+2\cdot1+3\cdot3+7\cdot1=273.$$

3. Знайдемо початковий розв`язок транспортної задачі **методом Фогеля**.

Запишемо таблицю, в яку вносимо об’єми виробництва та споживання та вартості перевезень. Вартості перевезень c_{ij} будемо записувати у верхньому лівому куточку клітинки, а об’єми перевезень x_{ij} у нижньому правому куточку клітинки.

Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням. Запишемо отримані числа у додатковий стовпчик справа та додатковий рядок знизу.

16	30	17	10	16	$a_1=4$	6
30	27	26	9	23	$a_2=6$	14
13	4	22	3	1	$a_3=10$	2
3	1	5	4	24	$a_4=10$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6,14,2,2,10,3,12,1,15\}=15$. Це число у п'ятому стовпчику. Серед вартостей перевезень п'ятого стовпчика виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{15},c_{25},c_{35},c_{45}\}=min\{16,23,1,24\}=c_{35}=1$. Знаходимо $x_{35}=min(a_3,b_5)=min(10,2)=2$. Так як мінімум досягається у стовпці, то $x_{15}=x_{25}=x_{45}=0$ і п'ятий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_3=10-2=8$.

16	30	17	10	16 0	$a_1=4$	6
30	27	26	9	23 0	$a_2=6$	14
13	4	22	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	2
3	1	5	4	24 0	$a_4=10$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30	17	10	16 0	$a_1=4$	6
30	27	26	9	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3	1	5	4	24 0	$a_4=10$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$b_4=7$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6,17,1,2,10,3,12,1\}=17$. Це число у другому рядку. Серед вартостей перевезень другого рядка виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{21},c_{22},c_{23},c_{24}\}=min\{30,27,26,9\}=c_{24}=9$. Знаходимо $x_{24}=min(a_2,b_4)=min(6,7)=6$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{21}=x_{22}=x_{23}=0$ і другий рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_4=7-6=1$.

16	30	17	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3	1	5	4	24 0	$a_4=10$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Продовжуємо. Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30	17	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3	1	5	4	24 0	$a_4=10$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6,1,2,10,3,12,1\}=12$. Це число у третьому стовпчику. Серед вартостей перевезень третього стовпчика виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{13},c_{33},c_{43}\}=min\{17,22,5\}=c_{43}=5$. Знаходимо $x_{43}=min(a_4,b_3)=min(10,7)=7$. Так як мінімум досягається у стовпчику, то $x_{13}=x_{33}=0$ і третій стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_4=10-7=3$.

16	30	17 0	10	16 0	$a_1=4$	7
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3	1	5 **7**	4	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Продовжуємо. Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30	17 0	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3	1	5 **7**	4	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$	2
$b_1=7$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6,1,2,10,3,1\}=10$. Це число у першому стовпчику. Серед вартостей перевезень першого стовпчика виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{11},c_{31},c_{43}\}=min\{16,13,3\}=c_{41}=3$. Знаходимо $x_{41}=min(a_4,b_1)=min(3,7)=3$. Так як мінімум досягається у рядку, то $x_{42}=x_{44}=0$ і четвертий рядок виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм споживання $b_1=7-3=4$.

16	30	17 0	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $a_3=8$	1
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$	2
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=4$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
10	3	12	1	15		

Продовжуємо. Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30	17 0	10	16 0	$a_1 = 4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2 = 6$	17
13	4	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3 = 10}$, $a_3 = 8$	1
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4 = 10}$, $a_4 = 3$	2
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 4$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$\cancel{b_4 = 7}$ $b_4 = 1$	$b_5 = 2$		
3	26	12	7	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6,1,3,26,7\} = 26$. Це число у другому стовпчику. Серед вартостей перевезень другого стовпчика виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{12}, c_{32}\} = min\{30, 4\} = c_{32} = 4$. Знаходимо $x_{32} = min(a_3, b_2) = min(8,7) = 7$. Так як мінімум досягається у стовпчику, то $x_{12} = 0$ і другий стовпчик виключається з подальшого розглядання (викреслюється). Об'єм виробництва $a_3 = 8 - 7 = 1$.

16	30 0	17 0	10	16 0	$a_1 = 4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2 = 6$	17
13	4 **7**	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3 = 10}$, $\cancel{a_3 = 8}$, $a_3 = 1$	1
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4 = 10}$, $a_4 = 3$	2
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 4$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$\cancel{b_4 = 7}$ $b_4 = 1$	$b_5 = 2$		
3	26	12	7	15		

Продовжуємо. Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30 0	17 0	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4 **7**	22 0	3	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$	10
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$	2
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=4$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $b_4=1$	$b_5=2$		
3	26	12	7	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6{,}10{,}3{,}7\}=10$. Це число у третьому рядку. Серед вартостей перевезень третього рядка виберемо мінімальну вартість: $min\{c_{31},c_{34}\}=min\{13,3\}=c_{34}=3$. Знаходимо $x_{34}=min(a_3,b_4)=min(1{,}1)=1$.

Маємо випадок рівних об'ємів виробництва та споживання. У методі Фогеля, на відміну від методів північно-західного кути та мінімального елементу, з таблиці викреслюється або рядок або стовпчик, а не рядок та стовпчик одночасно.

Виключимо з подальшого розглядання (викреслимо) третій рядок. Об'єм споживання $b_4=1-1=0$.

16	30 0	17 0	10	16 0	$a_1=4$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2=6$	17
13	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**	$\cancel{a_3=10}$, $\cancel{a_3=8}$, $a_3=1$	10
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4=10}$, $a_4=3$	2
$\cancel{b_1=7}$ $b_1=4$	$b_2=7$	$b_3=7$	$\cancel{b_4=7}$ $\cancel{b_4=1}$ $b_4=0$	$b_5=2$		
3	26	12	7	15		

Продовжуємо. Для кожного рядка та кожного стовпця знайдемо модуль різниці між мінімальною вартістю та найближчою до неї за значенням.

16	30	17	10	16	$a_1=4$	6

	0	0		0		
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2 = 6$	17
13	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**	$\cancel{a_3 = 10}$, $\cancel{a_3 = 8}$, $a_3 = 1$	10
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4 = 10}$, $a_4 = 3$	2
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 4$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$\cancel{b_4 = 7}$ $\cancel{b_4 = 1}$ $b_4 = 0$	$b_5 = 2$		
16	26	12	10	15		

Серед знайдених чисел виберемо максимальне: $max\{6{,}16{,}10\} = 16$. Це число у першому стовпчику. Так як маємо тільки один невикреслений рядок, то $x_{11} = min(a_1, b_1) = min(4,4) = 4$. Маємо випадок рівних об'ємів виробництва та споживання. Виключимо з подальшого розглядання (викреслимо) перший стовпчик Об'єм виробництва $a_1 = 4 - 4 = 0$.

16 **4**	30 0	17 0	10	16 0	$\cancel{a_1 = 4}$, $a_1 = 0$	6
30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2 = 6$	17
13	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**	$\cancel{a_3 = 10}$, $\cancel{a_3 = 8}$, $a_3 = 1$	10
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4 = 10}$, $a_4 = 3$	2
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 4$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$\cancel{b_4 = 7}$ $\cancel{b_4 = 1}$ $b_4 = 0$	$b_5 = 2$		
16	26	12	10	15		

Випадок $min(a_i, b_j) = a_i = b_j$ для певних i та j свідчить , що початковий розвязок є виродженим (тобто містить **меньше** за $m+n-1$ додатну компоненту). Метод Фогеля дозволяє отримати початковий розв'язок з рівно $m+n-1$ компонент, але частина з них може дорівнювати нулеві.

Для даного прикладу $x_{14} = 0$ буде базисною компонентою початкового розв'язку.

16 **4**	30 0	17 0	10 **0**	16 0	$\cancel{a_1 = 4}$, $a_1 = 0$	6

30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0	$a_2 = 6$	17
13	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**	$\cancel{a_3 = 10}$, $\cancel{a_3 = 8}$, $a_3 = 1$	10
3 **3**	1 0	5 **7**	4 0	24 0	$\cancel{a_4 = 10}$, $a_4 = 3$	2
$\cancel{b_1 = 7}$ $b_1 = 4$	$b_2 = 7$	$b_3 = 7$	$\cancel{b_4 = 7}$ $\cancel{b_4 = 1}$ $b_4 = 0$	$b_5 = 2$		
16	26	12	10	15		

Отже початковий розв’язок, знайдений методом Фогеля такий:

$$X^{(0)}_{Фогеля} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(0)}_{мін.елем.}\right) = 4 \cdot 16 + 0 \cdot 10 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 7 \cdot 5 = 195.$$

4. Знайдемо оптимальний розв’язок транспортної задачі **методом потенціалів**. За початковий розв’язок виберемо розв’язок, який знайдено за методом мінімального елементу.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	a_i
u_1	16 **3**	30 0	17 **1**	10 0	16 0	4
u_2	30 0	27 0	26 **6**	9 0	23 0	6
u_3	13 **1**	4 0	22 0	3 **7**	1 **2**	10
u_4	3 **3**	1 **7**	5 0	4 0	24 0	10
b_j	7	7	7	7	2	

Для **базисних компонент** розв’язку записуємо систему рівнянь $v_j - u_i = c_{ij}$.

Маємо таку систему $m + n - 1 = 8$ рівнянь з $m + n = 9$ невідомими.

$v_1 - u_1 = 16$,

$v_3 - u_1 = 17$,

$v_3 - u_2 = 26$,

$v_1 - u_3 = 13$,

$v_4 - u_3 = 3$,

$v_5 - u_3 = 1$,

Нехай одна зі змінних дорівнює нулеві. Наприклад, $u_3 = 0$. Тоді розв’язок системи такий:

$u_1 = -3$,

$u_2 = -12$,

$u_3 = 0$,

$u_4 = 10$,

$v_1 = 13$,

$v_1 - u_4 = 3,$
$v_2 - u_4 = 1.$

$v_2 = 11,$
$v_3 = 14,$
$v_4 = 3,$
$v_5 = 1.$

Для **небазисних компонент** розв'язку обчислюємо оцінки за формулами $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = 11 - (-3) - 30 = 11 + 3 - 30 = -16 < 0,$

$\Delta_{14} = v_4 - u_1 - c_{14} = 3 - (-3) - 10 = 3 + 3 - 10 = -4 < 0,$

$\Delta_{15} = v_5 - u_1 - c_{15} = 1 - (-3) - 16 = 1 + 3 - 16 = -12 < 0,$

$\Delta_{21} = v_1 - u_2 - c_{21} = 13 - (-12) - 30 = 13 + 12 - 30 = -5 < 0,$

$\Delta_{22} = v_2 - u_2 - c_{22} = 11 - (-12) - 27 = 11 + 12 - 27 = -4 < 0,$

$\Delta_{24} = v_4 - u_2 - c_{24} = 3 - (-12) - 9 = 3 + 12 - 9 = 6 > 0,$

$\Delta_{25} = v_5 - u_2 - c_{25} = 1 - (-12) - 23 = 1 + 12 - 23 = -10 < 0,$

$\Delta_{32} = v_2 - u_3 - c_{32} = 11 - 0 - 4 = 7 > 0,$

$\Delta_{33} = v_3 - u_3 - c_{33} = 14 - 0 - 22 = -8 < 0,$

$\Delta_{43} = v_3 - u_4 - c_{43} = 14 - 10 - 5 = -1 < 0,$

$\Delta_{44} = v_4 - u_4 - c_{44} = 3 - 10 - 4 = -11 < 0,$

$\Delta_{45} = v_5 - u_4 - c_{45} = 1 - 10 - 24 = -33 < 0$

Маємо дві оцінки, які є додатними. Це означає, що план перевезень можна покращити. Виберемо максимальну додатну оцінку. Це оцінка Δ_{32}. Змінну x_{32} введемо до базису.

Побудуємо замкнений ланцюжок, який починається в клітинці $(3,2)$, яку позначимо знаком «+», і буде проходити через деякі клітинки, які відповідають базисним змінним. При цьому ланцюжок має тільки вертикальні та горизонтальні ланки і клітинки почергово позначаються знаками «+» та «–».

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 **3**	30 0	17 **1**	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 **6**	9 0	23 0
u_3	13 – **1**	4 + 0	22 0	3 **7**	1 **2**
u_4	3 + **3**	1 – **7**	5 0	4 0	24 0

Щоб визначити, яку змінну потрібно вивести із базису, знайдемо величину

$$\theta = \min_{\substack{\text{по клітинках,}\\ \text{які позначено}\\ \text{знаком "}-\text{"}}} x_{ij} .$$

Об'єми перевезень в клітинках ланцюжка перераховуються за правилом:

- в клітинках, які позначені знаком «+» до об'ємів перевезень додається θ,
- в клітинках, які позначені знаком «–» від об'ємів перевезень віднімається θ.

У нашому випадку; $\theta = min(1,7) = 1$. Тому змінна x_{31} виводиться з базису і $x_{31} = 1-1 = 0$, $x_{32} = 0+1 = 1$, $x_{41} = 3+1 = 4$, $x_{42} = 7-1 = 6$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 **3**	30 0	17 **1**	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 **6**	9 0	23 0
u_3	13 0	4 **1**	22 0	3 **7**	1 **2**
u_4	3 **4**	1 **6**	5 0	4 0	24 0

Отже,

$$X^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(1)}\right) = 3\cdot16 + 1\cdot17 + 6\cdot26 + 1\cdot4 + 7\cdot3 + 2\cdot1 + 4\cdot3 + 6\cdot1 = 266 .$$

Продовжуємо розв'язування задачі. Для **базисних компонент** розв'язку записуємо систему рівнянь $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_1 - u_1 = 16$,
$v_3 - u_1 = 17$,
$v_3 - u_2 = 26$,
$v_2 - u_3 = 4$,
$v_4 - u_3 = 3$,
$v_5 - u_3 = 1$,
$v_1 - u_4 = 3$,
$v_2 - u_4 = 1$.

Нехай $u_3 = 0$. Тоді розв'язок системи такий:

$u_1 = -10$,
$u_2 = -19$,
$u_3 = 0$,
$u_4 = 3$,
$v_1 = 6$,
$v_2 = 4$,
$v_3 = 7$,
$v_4 = 3$,
$v_5 = 1$.

Для **небазисних компонент** розв’язку обчислюємо оцінки за формулами $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = 4 - (-10) - 30 = 4 + 10 - 30 = -16 < 0$,

$\Delta_{14} = v_4 - u_1 - c_{14} = 3 - (-10) - 10 = 3 + 10 - 10 = 3 > 0$,

$\Delta_{15} = v_5 - u_1 - c_{15} = 1 - (-10) - 16 = 1 + 10 - 16 = -5 < 0$,

$\Delta_{21} = v_1 - u_2 - c_{21} = 6 - (-19) - 30 = 6 + 19 - 30 = -5 < 0$,

$\Delta_{22} = v_2 - u_2 - c_{22} = 4 - (-19) - 27 = 4 + 19 - 27 = -4 < 0$,

$\Delta_{24} = v_4 - u_2 - c_{24} = 3 - (-19) - 9 = 3 + 19 - 9 = 13 > 0$,

$\Delta_{25} = v_5 - u_2 - c_{25} = 1 - (-19) - 23 = 1 + 19 - 23 = -3 < 0$,

$\Delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 0 - 13 = -7 < 0$,

$\Delta_{33} = v_3 - u_3 - c_{33} = 7 - 0 - 22 = -15 < 0$,

$\Delta_{43} = v_3 - u_4 - c_{43} = 7 - 3 - 5 = -1 < 0$,

$\Delta_{44} = v_4 - u_4 - c_{44} = 3 - 3 - 4 = -4 < 0$,

$\Delta_{45} = v_5 - u_4 - c_{45} = 1 - 3 - 24 = -26 < 0$

Виберемо максимальну додатну оцінку. Це оцінка Δ_{24}. Змінну x_{24} введемо до базису. Побудуємо замкнений ланцюжок.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 (−) 3	30 0	17 (+) 1	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 (−) 6	9 (+) 0	23 0
u_3	13 0	4 (+) 1	22 0	3 (−) 7	1 2
u_4	3 (+) 4	1 (−) 6	5 0	4 0	24 0

Знаходимо $\theta = min(7,6,3,6) = 3$. Тому змінна x_{11} виводиться з базису і $x_{24} = 0 + 3 = 3$, $x_{34} = 7 - 3 = 4$, $x_{32} = 1 + 3 = 4$, $x_{42} = 6 - 3 = 3$, $x_{41} = 4 + 3 = 7$, $x_{11} = 3 - 3 = 0$, $x_{13} = 1 + 3 = 4$, $x_{23} = 6 - 3 = 3$.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 0	30 0	17 4	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 3	9 3	23 0
u_3	13 0	4 4	22 0	3 4	1 2
u_4	3 7	1 3	5 0	4 0	24 0

Отже,

$$X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(2)}\right) = 4\cdot17 + 3\cdot26 + 3\cdot9 + 4\cdot4 + 4\cdot3 + 2\cdot1 + 7\cdot3 + 3\cdot1 = 227.$$

Наступна ітерація. Для **базисних компонент** розв'язку записуємо систему рівнянь $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_3 - u_1 = 17$,
$v_3 - u_2 = 26$,
$v_4 - u_2 = 9$,
$v_2 - u_3 = 4$,
$v_4 - u_3 = 3$,
$v_5 - u_3 = 1$,
$v_1 - u_4 = 3$,
$v_2 - u_4 = 1.$

Нехай $u_3 = 0$. Тоді розв'язок системи такий:

$u_1 = 3$,
$u_2 = -6$,
$u_3 = 0$,
$u_4 = 3$,
$v_1 = 6$,
$v_2 = 4$,
$v_3 = 20$,
$v_4 = 3$,
$v_5 = 1.$

Для **небазисних компонент** розв'язку обчислюємо оцінки за формулами $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

$\Delta_{11} = v_1 - u_1 - c_{11} = 6 - 3 - 16 = -13 < 0$

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = 4 - 3 - 30 = -29 < 0$,

$\Delta_{14} = v_4 - u_1 - c_{14} = 3 - 3 - 10 = -10 < 0$,

$\Delta_{15} = v_5 - u_1 - c_{15} = 1 - 3 - 16 = -18 < 0$,

$\Delta_{21} = v_1 - u_2 - c_{21} = 6 - (-6) - 30 = 6 + 6 - 30 = -18 < 0$,

$\Delta_{22} = v_2 - u_2 - c_{22} = 4 - (-6) - 27 = 4 + 6 - 27 = -17 < 0$,

$\Delta_{25} = v_5 - u_2 - c_{25} = 1 - (-6) - 23 = 1 + 6 - 23 = -16 < 0$,

$\Delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 6 - 0 - 13 = -7 < 0$,

$\Delta_{33} = v_3 - u_3 - c_{33} = 20 - 0 - 22 = -2 < 0$,

$\Delta_{43} = v_3 - u_4 - c_{43} = 20 - 3 - 5 = 12 > 0$,

$\Delta_{44} = v_4 - u_4 - c_{44} = 3 - 3 - 4 = -4 < 0$,

$\Delta_{45} = v_5 - u_4 - c_{45} = 1 - 3 - 24 = -26 < 0$

Додатною є оцінка Δ_{43}. Змінну x_{43} введемо до базису. Побудуємо замкнений ланцюжок.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 0	30 0	17 **4**	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 − **3**	9 + **3**	23 0
u_3	13 0	4 + **4**	22 0	3 − **4**	1 **2**
u_4	3 **7**	1 − **3**	5 + 0	4 0	24 0

Знаходимо $\theta = min(3{,}4{,}3) = 3$. Обчислюємо нові значення перевезень у ланцюжку: $x_{43} = 0 + 3 = 3$, $x_{42} = 3 - 3 = 0$, $x_{32} = 4 + 3 = 7$, $x_{34} = 4 - 3 = 1$, $x_{24} = 3 + 3 = 7$, $x_{23} = 3 - 3 = 0$.

Отримали, що перевезення $x_{42} = 0$ та $x_{23} = 0$. Виключимо з базису змінну x_{23}.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 0	30 0	17 **4**	10 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0
u_3	13 0	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**
u_4	3 **7**	1 **0**	5 **3**	4 0	24 0

Отже,

$$X^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & \underline{0} & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(3)}\right) = 4 \cdot 17 + 6 \cdot 9 + 7 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 7 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 191.$$

Наступна ітерація. Для **базисних компонент** розв’язку записуємо систему рівнянь $v_j - u_i = c_{ij}$.

$v_3 - u_1 = 17$,
$v_4 - u_2 = 9$,
$v_2 - u_3 = 4$,
$v_4 - u_3 = 3$,
$v_5 - u_3 = 1$,
$v_1 - u_4 = 3$,
$v_2 - u_4 = 1$,
$v_3 - u_4 = 5$.

Нехай $u_3 = 0$. Тоді розв’язок системи такий:

$u_1 = -9$, $u_2 = -6$,
$u_3 = 0$, $u_4 = 3$,
$v_1 = 0$, $v_2 = 4$,
$v_3 = 8$, $v_4 = 3$,
$v_5 = 1$.

Для **небазисних компонент** розв'язку обчислюємо оцінки за формулами $\Delta_{ij} = v_j - u_i - c_{ij}$.

$\Delta_{11} = v_1 - u_1 - c_{11} = 0 - (-9) - 16 = 9 - 16 = -7 < 0$

$\Delta_{12} = v_2 - u_1 - c_{12} = 4 - (-9) - 30 = 4 + 9 - 30 = -17 < 0$,

$\Delta_{14} = v_4 - u_1 - c_{14} = 3 - (-9) - 10 = 3 + 9 - 10 = 2 > 0$,

$\Delta_{15} = v_5 - u_1 - c_{15} = 1 - (-9) - 16 = 1 + 10 - 16 = -5 < 0$,

$\Delta_{21} = v_1 - u_2 - c_{21} = 0 - (-6) - 30 = 0 + 6 - 30 = -24 < 0$,

$\Delta_{22} = v_2 - u_2 - c_{22} = 4 - (-6) - 27 = 4 + 6 - 27 = -17 < 0$,

$\Delta_{23} = v_3 - u_2 - c_{23} = 8 - (-6) - 26 = 8 + 6 - 26 = -12 < 0$

$\Delta_{25} = v_5 - u_2 - c_{25} = 1 - (-6) - 23 = 1 + 6 - 23 = -16 < 0$,

$\Delta_{31} = v_1 - u_3 - c_{31} = 0 - 0 - 13 = -13 < 0$,

$\Delta_{33} = v_3 - u_3 - c_{33} = 8 - 0 - 22 = -14 < 0$,

$\Delta_{44} = v_4 - u_4 - c_{44} = 3 - 3 - 4 = -4 < 0$,

$\Delta_{45} = v_5 - u_4 - c_{45} = 1 - 3 - 24 = -26 < 0$.

Додатною є оцінка Δ_{14}. Змінну x_{14} введемо до базису. Побудуємо замкнений ланцюжок.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 0	30 0	17 – **4**	10 + 0	16 0
u_2	30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0
u_3	13 0	4 + **7**	22 0	3 – **1**	1 **2**
u_4	3 **7**	1 – **0**	5 + **3**	4 0	24 0

Знаходимо $\theta = min(1,0,4) = 0$. Об'єми перевезень не змінюються, але змінна x_{42} виводиться з базису. Така ситуація склалась у зв'язку з тим, що базисний розв'язок є виродженим.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
u_1	16 0	30 0	17 **4**	10 **0**	16 0
u_2	30 0	27 0	26 0	9 **6**	23 0
u_3	13 0	4 **7**	22 0	3 **1**	1 **2**
u_4	3 **7**	1 0	5 **3**	4 0	24 0

Отже,

$$X^{(4)}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$f\left(X^{(3)}\right)=4\cdot17+6\cdot9+7\cdot4+1\cdot3+2\cdot1+7\cdot3+3\cdot5=191.$$

Наступна ітерація. Для **базисних компонент** розв'язку записуємо систему рівнянь $v_j-u_i=c_{ij}$.

$v_3-u_1=17$, $v_4-u_1=10$,
$v_4-u_2=9$, $v_2-u_3=4$,
$v_4-u_3=3$, $v_5-u_3=1$,
$v_1-u_4=3$, $v_3-u_4=5$.

Нехай $u_3=0$. Тоді розв'язок системи такий:

$u_1=-7$, $u_2=-6$,
$u_3=0$, $u_4=5$,
$v_1=8$, $v_2=4$,
$v_3=10$, $v_4=3$,
$v_5=1$.

Для **небазисних компонент** розв'язку обчислюємо оцінки за формулами $\Delta_{ij}=v_j-u_i-c_{ij}$.

$\Delta_{11}=v_1-u_1-c_{11}=8-(-7)-16=8+7-16=-1<0$
$\Delta_{12}=v_2-u_1-c_{12}=4-(-7)-30=4+7-30=-19<0$,
$\Delta_{15}=v_5-u_1-c_{15}=1-(-7)-16=1+7-16=-8<0$,
$\Delta_{21}=v_1-u_2-c_{21}=8-(-6)-30=8+6-30=-16<0$,
$\Delta_{22}=v_2-u_2-c_{22}=4-(-6)-27=4+6-27=-17<0$,
$\Delta_{23}=v_3-u_2-c_{23}=10-(-6)-26=10+6-26=-10<0$
$\Delta_{25}=v_5-u_2-c_{25}=1-(-6)-23=1+6-23=-16<0$,
$\Delta_{31}=v_1-u_3-c_{31}=8-0-13=-5<0$,
$\Delta_{33}=v_3-u_3-c_{33}=10-0-22=-12<0$,
$\Delta_{42}=v_2-u_4-c_{44}=4-5-4=-5<0$
$\Delta_{44}=v_4-u_4-c_{44}=3-5-4=-6<0$,
$\Delta_{45}=v_5-u_4-c_{45}=1-5-24=-28<0$

Так як для всіх Δ_{ij} виконано умову $\Delta_{ij}\le 0$, то базисний розв'язок $X^{(4)}$ є оптимальним. Маємо

$$X_*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ f\left(X_*\right)=191.$$