МО_ Лекция 08.02.2022

Задача цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП). Метод відсікань Гомори.

Цілочисельне програмування – це розділ математичного програмування, який використовує змінні лише у цілочисельному вигляді, в тому числі і в окремому випадку, коли змінні є бінарними (0; 1). Цілочисельне програмування є розділом більш загального дискретного програмування, яке має справу у більш широкому сенсі з неподільностями, комбінаторними задачами, множинами, діапазонами значень.

З математичної точки зору задачі цілочисельного програмування можуть бути лінійними або нелінійними. Можлива ***частково*** цілочисельна задача: не все x_j – цілі.

Задачі лінійного цілочисельного програмування розв'язують проблеми із змінними, які визначають: кількість одиниць неподільної продукції; розподіл завдань між підприємствами; планування роботи при різних номенклатурах продукції та ін.

Математична постановка задачі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) має вигляд

$$(c, x) \to max, \tag{1}$$

$$Ax = b, \tag{2}$$

$$x \geq 0, \tag{3}$$

$$x_j - \text{цілі}, \ j = \overline{1,n}. \tag{4}$$

Таким чином, зовнішній вигляд задачі лінійного цілочисельного програмування практично не відрізняється від звичайної задачі ЛП, за винятком того, що на розв'язок задачі ЛП накладається додаткове обмеження (4): визначення лише ***цілих*** значень змінних.

У задачі цілочисельного лінійного програмування, на відміну від задачі лінійного програмування, множина допустимих розв'язків ***не є опуклою***. Нехай задача ЛП має багатогранник розв'язків, який наведено на рис. 1.а.

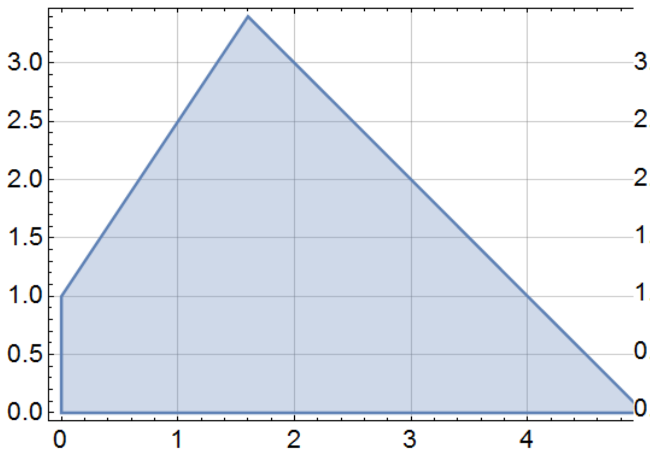

Рис.1.а

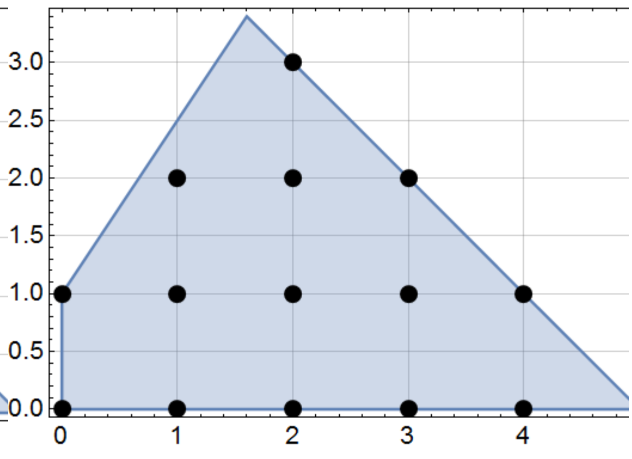

Рис.1.б

Якщо накласти вимогу цілочисельності, то допустима множина такої задачі являє собою сукупність ізольованих точок з цілочисельними координатами і не буде опуклою (рис. 1.б). Тому відшукання розв'язку таких задач пов'язане зі значними труднощами. Зокрема, для більшості практичних задач неможливе застосування стандартних прийомів, які полягають в заміні дискретної задачі її неперервним аналогом, і подальше округлення знайденого розв'язку до найближчого цілочисельного.

Одним з основних методів розв’язання задачі цілочисельного лінійного програмування є метод відсікання Гоморі.

Метод відсікання Гоморі

Розглянемо перший алгоритм Гоморі для розв’язання цілком цілочисельних задач.

Алгоритм методу Гоморі складається з наступних етапів:

1) відкинемо на час вимоги цілочисельності й знаходимо розв’язок задачі ЛП. Якщо вона не має розв'язків, то задача ЦЛП теж розв'язків не має.

2) Якщо отриманий розв’язок задачі ЛП є цілочисельним, то задачу розв’язано.

3) Інакше вводиться додаткове обмеження, якому задовольняє будь-який цілочисельний розв’язок і не задовольняє знайдений нецілочисельний оптимальний розв’язок задачі ЛП. Геометрично це означає, що будується гіперплощина, що відсікає нецілочисельний оптимальний розв’язок задачі ЛП і при цьому зберігає усі цілочисельні допустимі розв’язки.

4) Далі переходимо на перший етап, тобто розв’язується задача ЛП із введеним новим обмеженням.

За скінчене число кроків метод дозволяє або знайти оптимальний розв’язок задачі ЦЛП, або встановити нерозв'язність задачі.

Як будувати нові обмеження?

Для будь-якої базисної змінної можемо записати рівняння:

$$x_i + \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \beta_i, i = \overline{1,m}. \qquad (5)$$

Кожне із чисел α_{ij} і β_i можна представити у вигляді суми цілої й дробової частини:

$$\alpha_{ij} = \lfloor \alpha_{ij} \rfloor + \{\alpha_{ij}\},\ \beta_i = [\beta_i] + \{\beta_i\}.$$

Зауважимо, що дробова частина будь-якого числа належить проміжку $(0,1)$.

Декілька прикладів:

$\alpha_{ij} = 2{,}6$, $[\alpha_{ij}] = [2{,}6] = 2$, $\{\alpha_{ij}\} = \{2{,}6\} = 0{,}6$,

$\beta_i = 1{,}1$, $[\beta_i] = [1{,}1] = 1$, $\{\beta_i\} = \{1{,}1\} = 0{,}1$,

$\alpha_{ij} = -3\frac{2}{5}$, $[\alpha_{ij}] = \left[-3\frac{2}{5}\right] = -4$, $\{\alpha_{ij}\} = \left\{-3\frac{2}{5}\right\} = \frac{3}{5}$,

$$\beta_i = -\frac{5}{7},\ [\beta_i] = \left[-\frac{5}{7}\right] = -1,\ \{\beta_i\} = \left\{-\frac{5}{7}\right\} = \frac{2}{7}.$$

Візьмемо дробову частину від лівої та правої частин (5).

Дробова частина суми не перевищує суми дробових частин,

$$\left\{x_i + \alpha_{i,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{i,n}x_n\right\} \le \left\{x_i\right\} + \left\{\alpha_{i,m+1}x_{m+1}\right\} + \ldots + \left\{\alpha_{i,n}x_n\right\} \le$$

дробова частина добутку не перевищує добутку цілого на дробову частину,

$$\le \left\{x_i\right\} + \left\{\alpha_{i,m+1}x_{m+1}\right\} + \ldots + \left\{\alpha_{i,n}x_n\right\} \le x_{m+1}\left\{\alpha_{i,m+1}\right\} + \ldots + x_n\left\{\alpha_{i,n}\right\}.$$

Отже,

$$x_{m+1}\left\{\alpha_{i,m+1}\right\} + \ldots + x_n\left\{\alpha_{i,n}\right\} \ge \left\{\beta_i\right\}.$$

Умова, за яку відсікається оптимальний нецілочисельний план, має вигляд:

$$\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\alpha_{ij}\right\}x_j \ge \left\{\beta_i\right\}. \tag{6}$$

Цьому обмеженню задовольняє будь-який цілочисельний план і не задовольняє оптимальний нецілочисельний план.

Якщо в оптимальному розв’язку задачі ЛП отримано кілька дробових компонентів, то за індекс i вибирають індекс тієї компоненти, у якої максимальна дробова частина.

Далі вводимо змінну x_{n+1} (для переходу до канонічного вигляду):

$$\sum_{j=m+1}^{n}\left\{\alpha_{ij}\right\}x_j - x_{n+1} = \left\{\beta_i\right\},\ x_{n+1} \ge 0. \tag{7}$$

Далі розв’язуємо задачу (1),(2),(3),(7).

Продовжуючи аналогічно, знайдемо розв’язок задачі ЦЛП або встановимо її нерозв'язність.

Задача не має розв’язку, якщо в якомусь рядку отримано, що значення базисної змінної x_i є дробове, а всі коефіцієнти α_{ij} – цілі.

Приклад. Знайти оптимальний цілочисловий розв’язок задачі ЦЛП методом Гоморі.

$$z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі числа.}$$

Область допустимих розв’язків для задачі ЦЛП зображена точками на рис. 1.

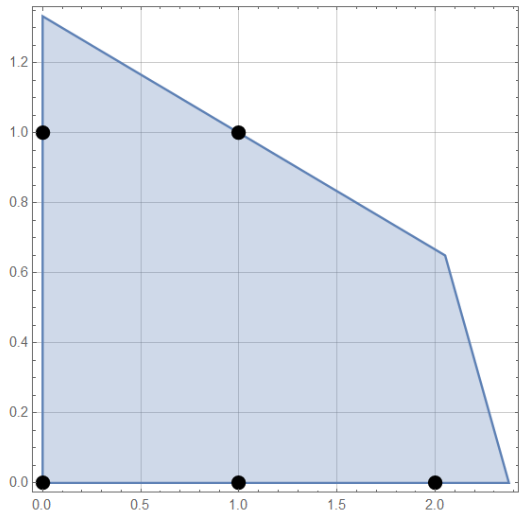

Рис. 1

Знайдемо розв'язок задачі лінійного програмування (ЛП) без врахування умови цілочисельності симплекс-методом.

$$z = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3, \\ x_1 + 3x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідні симплекс-таблиці наведені нижче.

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	2	1	19/3
x_4	1	3	4
	-1	-4	0

	$-x_1$	$-x_4$	
x_3	5/3	-1/3	5
x_2	1/3	1/3	4/3
	1/3	4/3	16/3

Отримали оптимальний розв'язок задачі ЛП: $x^* = \left(0, \frac{4}{3}, 5, 0\right)$, $f_* = 16/3$.

Так як змінна $x_2 = 4/3$ не є цілочисельною, то потрібно ввести додаткове обмеження.

За другим рівнянням складаємо додаткове обмеження:

$$\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_4 \ge \frac{1}{3} \text{ або } x_1 + x_4 \ge 1. \qquad (*)$$

Підкреслимо, що коефіцієнти нерівності – це дробові частини відповідних коефіцієнтів рядка базисної змінної x_4.

Дамо геометричну інтерпретацію нерівності (*) у системі координат x_1Ox_2. Підставивши $x_4 = 4 - x_1 - 3x_2$, отримаємо нерівність $x_2 \le 1$. Пряма $x_2 = 1$ відсікає від допустимої області оптимальний нецілочисельний розв'язок (рис. 2).

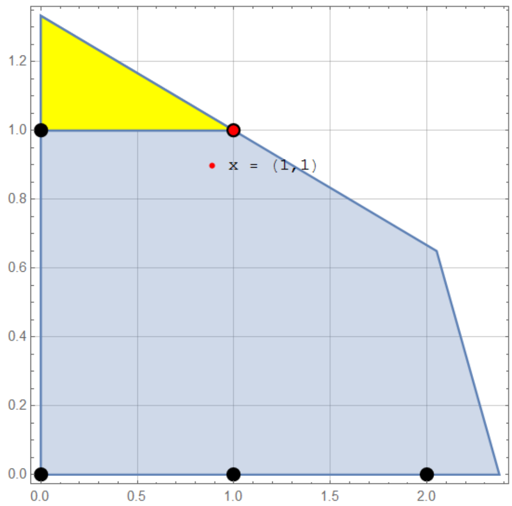

Рис. 2

Перетворимо отриману нерівність (*) в рівняння:

$$x_1 + x_4 - x_5 = 1 \text{ за умови } x_5 \geq 0.$$

Знайдемо розв'язок задачі ЛП з додатковою умовою (*) без врахування умови цілочисельності. Добавимо до останньої симплекс-таблиці ще один рядок і розв'яжемо задачу симплекс-методом.

	$-x_1$	$-x_4$	
x_1	5/3	-1/3	5
x_4	1/3	1/3	4/3
x_5	-1	-1	-1
	1/3	4/3	16/3

	$-x_5$	$-x_4$	
x_3	5/3	-2	10/3
x_2	1/3	0	1
x_1	-1	1	1
	1/3	1	5

Отримали оптимальний розв'язок задачі ЛП: $x^* = \left(1,1,\frac{10}{3},0,0\right)$, $f_* = 5$.

Так як змінні $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ є цілочисельними, то отримано оптимальний розв'язок початкової задачі ЦЛП.

Приклад (№61). Знайти оптимальний цілочисловий розв'язок задачі ЦЛП методом Гоморі.

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

за умов

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 \leq 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,$$

$$x_1, x_2 \text{ – цілі числа.}$$

Область допустимих розв’язків для задачі ЦЛП зображена точками на рис. 1.

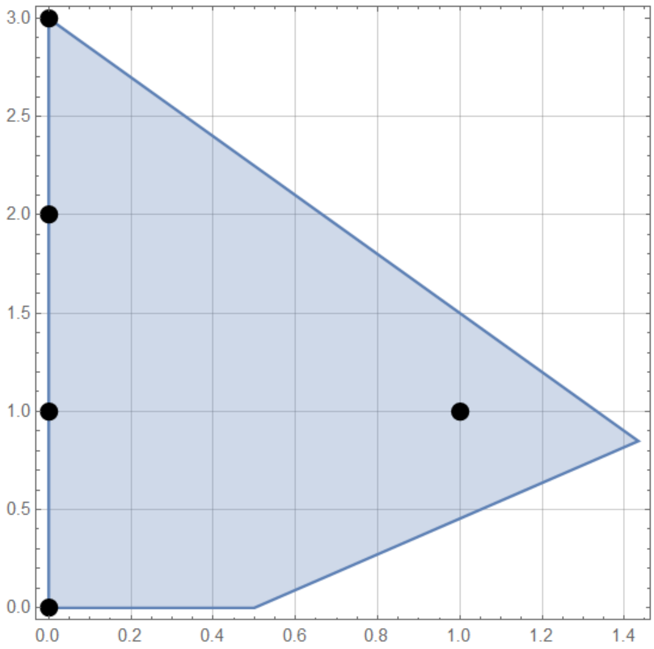

Рис. 1

Знайдемо розв’язок задачі лінійного програмування (ЛП) без врахування умови цілочисельності симплекс-методом.

$$z = 2x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases} \qquad (8)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Відповідні симплекс-таблиці наведені нижче.

	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	10	-11	5
x_4	3	2	6
	-2	-1	0

	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	1/10	-11/10	1/2
x_4	-3/10	53/10	9/2
	1/5	-16/5	1

	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	2/53	11/53	76/53
x_2	-3/53	10/53	45/53
	1/53	32/53	197/53

Отримали оптимальний розв’язок задачі ЛП (8):

$$x^* = \left(\frac{76}{53}, \frac{45}{53}, 0, 0\right),$$

$$f_* = 197 / 53.$$

Так як змінні $x_1 = 76/53$, $x_2 = 45/53$ не є цілочисельними, то потрібно ввести додаткове обмеження.

За другим рівнянням зі змінною x_2, що отримала нецілочисельне значення в оптимальному плані з найбільшою дробовою частиною 45/53, складаємо додаткове обмеження:

$$\frac{50}{53}x_3 + \frac{10}{53}x_4 \ge \frac{45}{53} \text{ або } 10x_3 + 2x_4 \ge 9. \tag{9}$$

Підкреслимо, що коефіцієнти нерівності (9) – це дробові частини відповідних коефіцієнтів рядка базисної змінної x_2. А саме, дробова частина числа $-3/53$ дорівнює $50/53$.

Дамо геометричну інтерпретацію нерівності (9) у системі координат x_1Ox_2. Підставивши $x_3 = 5 - (10x_1 - 11x_2)$, $x_4 = 6 - (3x_1 + 2x_2)$, отримаємо нерівність $2x_1 - 2x_2 \le 1$. Пряма $2x_1 - 2x_2 = 1$ відсікає від допустимої області оптимальний нецілочисельний розв'язок (рис. 2).

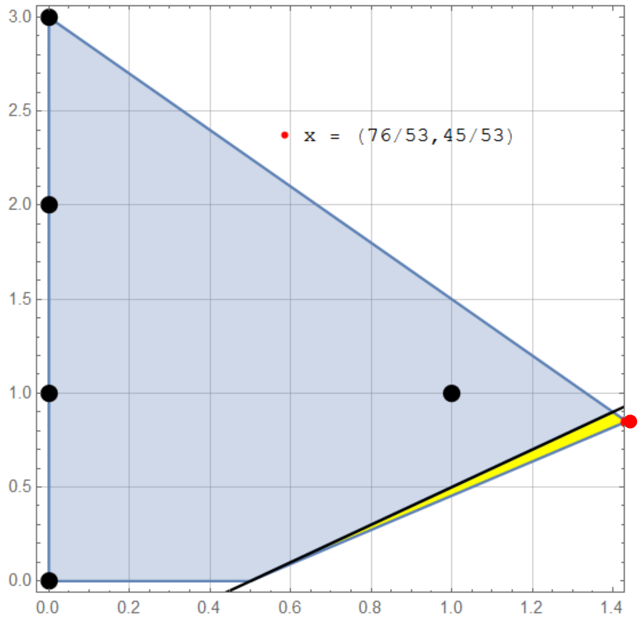

Рис. 2

Перетворимо отриману нерівність (9) в рівняння:

$$10x_3 + 2x_4 - x_5 = 9 \text{ за умови } x_5 \ge 0.$$

Знайдемо розв'язок задачі ЛП з додатковою умовою (9) без врахування умови цілочисельності. Добавимо до останньої симплекс-таблиці ще один рядок і розв'яжемо задачу симплекс-методом.

	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	2/53	11/53	76/53
x_2	-3/53	10/53	45/53
x_5	-10/53	-2/53	-9/53
	1/53	32/53	197/53

	$-x_5$	$-x_4$	
x_1	1/5	1/5	7/5
x_2	-3/10	1/5	9/10
x_3	-53/10	1/5	9/10
	1/10	3/5	37/10

Отримали оптимальний розв’язок задачі ЛП: $x^* = \left(\frac{7}{5}, \frac{9}{10}, \frac{9}{10}, 0, 0\right)$, $f_* = 37/10$. Так як змінні $x_1 = 7/5$, $x_2 = 9/10$ не є цілочисельними, то потрібно ввести додаткове обмеження.

За першим рівнянням зі змінною x_1, що отримала нецілочисельне значення в оптимальному плані з дробовою частиною 1/5, складаємо додаткове обмеження:

$$\frac{1}{5}x_5 + \frac{1}{5}x_4 \geq \frac{2}{5} \text{ або } x_5 + x_4 \geq 2. \tag{10}$$

Дамо геометричну інтерпретацію нерівності (10) у системі координат x_1Ox_2. Підставивши $x_3 = 5 - (10x_1 - 11x_2)$, $x_4 = 6 - (3x_1 + 2x_2)$, $x_5 = 1 - (2x_1 - 2x_2)$, отримаємо нерівність $x_1 \leq 1$. Пряма $x_1 = 1$ відсікає від допустимої області оптимальний нецілочисельний розв’язок (рис. 3).

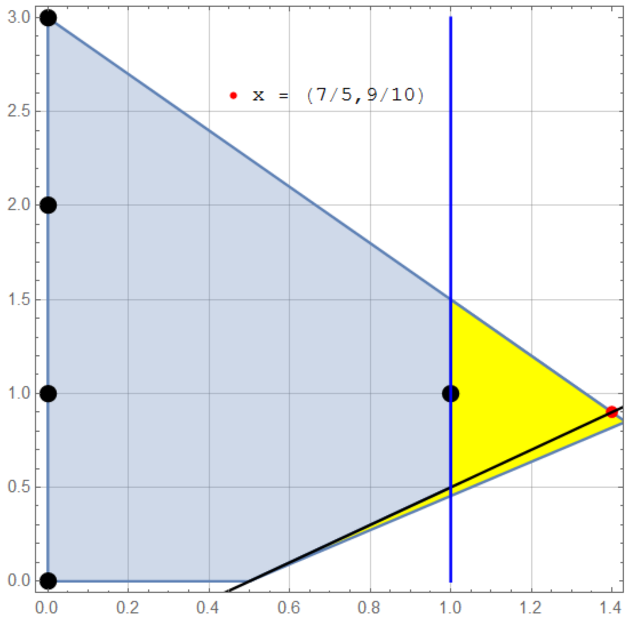

Рис. 3

Перетворимо отриману нерівність (10) в рівняння:

$$x_5 + x_4 - x_6 = 2 \text{ за умови } x_6 \geq 0.$$

Знайдемо розв'язок задачі ЛП з додатковою умовою (10) без врахування умови цілочисельності. Добавимо до останньої симплекс-таблиці ще один рядок і розв'яжемо задачу симплекс-методом.

	$-x_5$	$-x_4$	
x_1	1/5	1/5	7/5
x_2	-3/10	1/5	9/10
x_3	-53/10	1/5	9/10
x_6	-1/5	-1/5	-2/5
	1/10	3/5	37/10

	$-x_6$	$-x_4$	
x_1	1	0	1
x_2	-3/2	1/2	3/2
x_3	-53/2	11/2	23/2
x_5	-5	1	2
	1/2	1/2	7/2

Отримали оптимальний розв'язок задачі ЛП: $x^* = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{23}{2}, 0, 0, 2\right)$, $f_* = 7/2$. Так як змінна $x_2 = 3/2$ не є цілочисельною, то потрібно ввести додаткове обмеження.

За другим рівнянням зі змінною x_2, що отримала нецілочисельне значення в оптимальному плані з дробовою частиною 1/2, складаємо додаткове обмеження:

$$\frac{1}{2}x_6 + \frac{1}{2}x_4 \geq \frac{1}{2} \text{ або } x_6 + x_4 \geq 1. \qquad (11)$$

Дамо геометричну інтерпретацію нерівності (11) у системі координат x_1Ox_2. Підставив $x_4 = 6 - (3x_1 + 2x_2)$, $x_5 = 1 - (2x_1 - 2x_2)$, $x_6 = 1 - x_1$, отримаємо нерівність $2x_1 + x_2 \leq 3$. Пряма $2x_1 + x_2 = 3$ відсікає від допустимої області оптимальний нецілочисельний розв'язок (рис. 4).

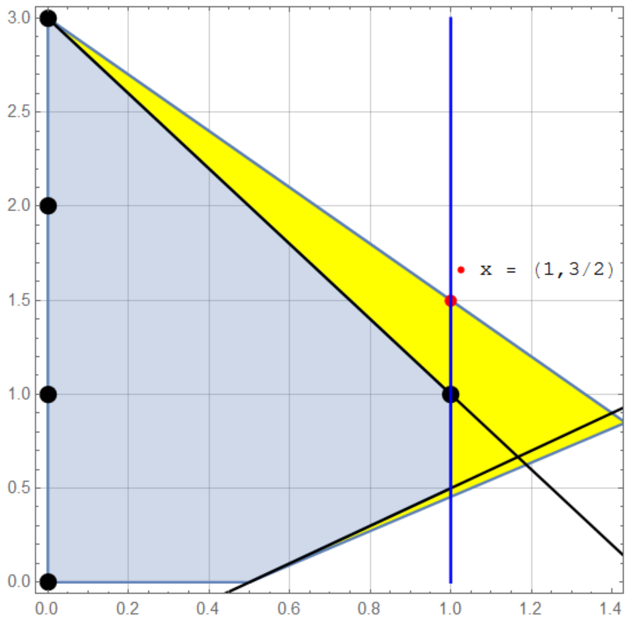

Рис. 4

Перетворимо отриману нерівність (11) в рівняння:

$$x_6 + x_4 - x_7 = 1 \text{ за умови } x_7 \geq 0.$$

Знайдемо розв'язок задачі ЛП з додатковою умовою (11) без врахування умови цілочисельності. Добавимо до останньої симплекс-таблиці ще один рядок і розв'яжемо задачу симплекс-методом.

	$-x_6$	$-x_4$	
x_1	1	0	1
x_2	-3/2	1/2	3/2
x_3	-53/2	11/2	23/2
x_5	-5	1	2
x_7	-1	-1	-1
	1/2	1/2	7/2

	$-x_7$	$-x_4$	
x_1	1	-1	0
x_2	-3/2	2	3
x_3	-53/2	32	38
x_5	-5	1	6
x_6	-1	1	1
	1/2	1/2	3

Отримали оптимальний розв'язок задачі ЛП: $x^* = (0,3,38,0,6,1,0)$, $f_* = 3$.

Так як змінні $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ є цілочисельними, то отримано оптимальний розв'язок початкової задачі ЦЛП.

Зауважимо, що оптимальним цілочисельним розв'язкам є також точка з координатами $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $f_* = 3$.