# Понятия аппроксимации и устойчивости разностной схемы. Сходимость метода конечных разностей

## § 6.3. Основные понятия, связанные с конечно-разностной аппроксимацией дифференциальных задач

К основным понятиям, связанным с методом конечных разностей, относятся следующие: аппроксимация, порядок аппроксимации, устойчивость, сходимость, порядок сходимости (или точность), консервативность и корректность. Определим каждое из этих понятий.

**6.3.1. Аппроксимация и порядок аппроксимации.** Запишем дифференциальную задачу в операторной форме

$$LU = f,$$

где $L$ — один из дифференциальных операторов:

$$L = \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{— \textit{диффузионный};} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} & \text{— \textit{волновой};} \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} & \text{— \textit{лапласиан};} \end{cases}$$

$U(x, y)$ — искомая функция, удовлетворяющая дифференциальной задаче; $f$ — входные данные (т.е. начальные и краевые условия, правые части и т.п.). Операторная форма $(LU)_h = f_h$ описывает дифференциальную задачу в узлах сетки, а операторная форма $L_h U_h = f_h$ описывает конечно-разностную схему на точном решении $U(x, t)$ , т.е. в конечно-разностной схеме вместо значений сеточной функции подставлены точные (неизвестные) значения искомой функции. Для перечисленных дифференциальных операторов $L$ конечно-разностные операторы $L_h$ имеют вид

$$L_h = \begin{cases} \dfrac{\Delta}{\tau} - a^2\dfrac{\Delta^2}{h^2} & \text{— диффузионный;} \\ \dfrac{\Delta^2}{\tau^2} - a^2\dfrac{\Delta^2}{h^2} & \text{— волновой;} \\ \dfrac{\Delta^2}{h_1^2} + \dfrac{\Delta^2}{h_2^2} & \text{— лапласиан.} \end{cases}$$

Наконец, операторная форма конечно-разностной схемы (например, схемы (6.28) или (6.30)) имеет вид

$$L_h u_h = f_h. \tag{6.38}$$

Введем норму сеточной функции с помощью выражения

$$\left\| u^k \right\| = \max_j \left| u_j^k \right|, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{6.39}$$

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) *аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении, если какая-либо норма разности (не обязательно в виде* (6.39)) $\|(LU)_h - L_h U_h\|$ *стремится к нулю при* $\tau$, $h \to 0$:

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| \xrightarrow[\tau, h \to 0]{} 0. \tag{6.40}$$

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) *аппроксимирует дифференциальную задачу на точном решении с порядком* $p$ *по времени и порядком* $q$ *по пространственной переменной, если какая-либо норма разности* $\|(LU)_h - L_h U_h\|$ *удовлетворяет равенству*

$$\|(LU)_h - L_h U_h\| = O\left(\tau^p + h^q\right). \tag{6.41}$$

Таким образом, если конечно-разностная схема аппроксимирует дифференциальную задачу, то речь идет *о близости* дифференциального и конечно-разностного операторов в узлах сетки.

**6.3.2. Устойчивость.** Пусть в конечно-разностной схеме (6.38) входные данные $f_h$ получили возмущения и приняли значения $\widetilde{f}_h$. Тогда сеточная функция $u_h$ также получит возмущение и примет значение $\widetilde{u}_h$.

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) *устойчива по входным данным, если найдется такая ограниченная константа* $K > 0$, *не зависящая от сеточных характеристик* $\tau$,

*$h$ и входных данных $f_h$, что выполняется неравенство*

$$\|u_h - \widetilde{u}_h\| \leqslant K \left\| f_h - \widetilde{f}_h \right\|. \tag{6.42}$$

Таким образом, понятие устойчивости интерпретируется следующим образом: конечно-разностная схема устойчива, если для малых возмущений входных данных (начально-краевых условий и правых частей) конечно-разносная схема (6.38) обеспечивает малые возмущения сеточной функции $u_h$, т. е. решение с помощью конечно-разностной схемы находится под контролем входных данных.

Если во входные данные $f_h$ входят только начальные условия или только краевые условия, или только правые части, то говорят *об устойчивости* соответственно *по начальным условиям*, *по краевым условиям* или *по правым частям.*

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) ***абсолютно*** (***безусловно***) *устойчива, если неравенство* (6.42) *выполняется при любых значениях сеточных характеристик $\tau$ и $h$, т. е. на шаги сетки не накладывается никаких ограничений.*

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) *условно устойчива, если неравенство* (6.42) *выполняется для сеточных характеристик $\tau$ и $h$, на которые накладываются определенные ограничения.*

**6.3.3. Сходимость и порядок сходимости.** *Определение. Решение $u_h$, полученное с помощью конечно-разностной схемы* (6.38), *сходится к точному решению $U$, если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ стремится к нулю при стремлении к нулю сеточных характеристик $\tau$, $h$:*

$$\|U - u_h\| \xrightarrow[\tau, h \to 0]{} 0. \tag{6.43}$$

*Определение. Конечно-разностная схема* (6.38) *имеет $p$-й порядок сходимости* (*порядок точности*) *по времени и $q$-й порядок сходимости по пространственной переменной, если какая-либо норма разности $\|U - u_h\|$ удовлетворяет равенству*

$$\|U - u_h\| = O\left(\tau^p + h^q\right). \tag{6.44}$$

Таким образом, порядок сходимости (порядок точности) характеризует близость конечно-разностного и точного (неизвестного) решения.

**6.3.4. Теорема эквивалентности о связи аппроксимации и устойчивости со сходимостью.** При численном решении задач математической физики в общем случае необходимо исследовать и аппроксимацию, и устойчивость, и сходимость. Однако следующая теорема утверждает, что достаточно исследовать аппроксимацию и устойчивость, и, в случае положительного ответа, сходимость будет обеспечена.

*Теорема эквивалентности. Если конечно-разностная схема* (6.38) ***аппроксимирует*** *на точном решении дифференциальную задачу с p-м порядком по времени и q-м порядком по пространственной переменной и эта схема* ***устойчива****, то решение с помощью этой конечно-разностной схемы* ***сходится*** *к решению дифференциальной задачи с p-м порядком по времени и q-м порядком по пространственной переменной.*

Действительно, следующая цепочка доказывает теорему:

$$\|U - u_h\| \leqslant K \|f - f_h\| = K \|(LU)_h - L_h U_h\| = O\left(\tau^p + h^q\right),$$

откуда

$$\|U - u_h\| = O\left(\tau^p + h^q\right),$$

что и требовалась доказать.

В приведенной выше цепочке первое неравенство записано по условию устойчивости, а последнее равенство — по условию аппроксимации.

**6.3.5. Консервативность и корректность.** Все дифференциальные, интегральные и прочие уравнения характеризуют некоторые *законы сохранения* какой-либо субстанции (массы, энергии, импульса и т. п.). Заменяя дифференциальную задачу конечно-разностной схемой, можно нарушить эти законы сохранения.

*Определение. Конечно-разностная схема* ***консервативна****, если для нее выполняются законы сохранения, на основе которых поставлена дифференциальная задача.*

В противном случае конечно-разностная схема является ***неконсервативной***, т. е. решение с ее помощью не соответствует решению дифференциальной задачи (решается другая задача). Поэтому неконсервативными схемами пользоваться не рекомендуется.

Свойство *корректности* конечно-разностных схем вытекает из свойств аппроксимации и устойчивости.

*Определение.* *Дифференциальная задача* **поставлена корректно**, *если выполнены следующие два условия*:

1) *задача однозначно разрешима при любых входных данных*;

2) *решение задачи непрерывно зависит от входных данных.*

По аналогии определяется и корректность разностной задачи.

*Определение.* *Конечно-разностная задача* (6.38) **поставлена корректно**, *если при любых достаточно малых шагах* $\tau$ *и* $h$ *сетки выполнены условия*:

1) *решение* $u_h$ *существует и единственно при всех входных данных из некоторого допустимого семейства*;

2) *решение* $u_h$ *непрерывно зависит от входных данных* $f_h$, *причем эта зависимость* **равномерна** *относительно величины шагов сетки* (*т.е. конечно-разностная схема устойчива*).

Таким образом, основными характеристиками конечно-разностной схемы, которые *обязательно* должны быть проанализированы, являются: *аппроксимация, устойчивость и консервативность.*

## § 6.4. Анализ порядка аппроксимации разностных схем

Из определения порядка аппроксимации ясно, что чем выше порядок аппроксимации, тем лучше конечно-разностная схема приближается к дифференциальной задаче. Это не означает, что решение по разностной схеме может быть так же близко к решению дифференциальной задачи, так как разностная схема может быть условно устойчивой или абсолютно неустойчивой вовсе.

Для нахождения порядка аппроксимации используется аппарат разложения в ряды Тейлора *точных* (неизвестных, но дифференцируемых) решений дифференциальной задачи в узлах сетки (подчеркнем: значения сеточной функции $u_h$ дискретны, следовательно, не дифференцируемы и поэтому не разлагаются в ряды Тейлора).

В соответствии с определением порядка аппроксимации проанализируем порядок аппроксимации конечно-разностной схемы (6.28), для чего эту схему запишем на точном решении $U_j^k$:

$$\frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} = a^2 \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{h^2}. \tag{6.45}$$

Разложим в ряды Тейлора по переменной $x$ значения $U_{j+1}^k$, $U_{j-1}^k$ в окрестности узла $(j,k)$ до четвертой производной включительно, а значение $U_j^{k+1}$ — в ряд Тейлора по переменной $t$ в окрестности узла $(j,k)$ до второй производной включительно, получим

$$U_{j+1}^k = U\left(x_j + h, t^k\right) =$$
$$= U_j^k + \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_j^k h + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_j^k \frac{h^2}{2} + \left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_j^k \frac{h^3}{6} + O\left(h^4\right), \quad (6.46)$$

$$U_{j-1}^k = U\left(x_j - h, t^k\right) =$$
$$= U_j^k - \left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_j^k h + \left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_j^k \frac{h^2}{2} - \left.\frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\right|_j^k \frac{h^3}{6} + O\left(h^4\right), \quad (6.47)$$

$$U_j^{k+1} = U\left(x_j, t^k + \tau\right) = U_j^k + \left.\frac{\partial U}{\partial t}\right|_j^k \tau + O\left(\tau^2\right). \quad (6.48)$$

Подставляя (6.46)–(6.48) в (6.45), находим

$$L_h U_h = \frac{U_j^{k+1} - U_j^k}{\tau} - a^2 \frac{U_{j+1}^k - 2U_j^k + U_{j-1}^k}{h^2} =$$
$$= \left(\frac{\partial U}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)_j^k + O\left(\tau + h^2\right) = (LU)_h + O\left(\tau + h^2\right).$$

Таким образом,

$$\left\|(LU)_h - L_h U_h\right\| = O\left(\tau + h^2\right),$$

т. е. явная схема (6.28) для уравнения теплопроводности имеет *первый порядок аппроксимации по времени* и *второй — по пространственной переменной*. Аналогично, тот же порядок аппроксимации можно получить и для неявной схемы (6.30).

## § 6.5. Исследование устойчивости конечно-разностных схем

Поскольку устойчивость является одной из основных характеристик конечно-разностных схем, то в данном параграфе рассматриваются различные методы исследования устойчивости конечно-разностных схем по начальным условиям. Наиболее распространенными методами исследования устойчивости являются следующие [10–14]:

— метод гармонического анализа (Фурье);

— принцип максимума;

— спектральный метод;

— энергетический метод.

Каждый из этих методов имеет достоинства и недостатки.

**6.5.1. Метод гармонического анализа.** Из математической физики известно, что решение начально-краевых задач представляется в виде следующего ряда:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n e^{i\lambda_n x},$$

где $\lambda_n$ — собственные значения, а $\exp(i\lambda_n x) = \cos(\lambda_n x) + i\sin(\lambda_n x)$ — собственные функции, получаемые из решения соответствующей задачи Штурма–Лиувиля, т. е. решение может быть представлено в виде суперпозиции отдельных гармоник $u_n(x,t) = u_n(t)\exp(i\lambda_n x)$, каждая из которых есть произведение функции времени $t$ и функции пространственной переменной $x$, причем последняя по модулю ограничена сверху единицей при любых значениях переменной $x$.

В то же время функция времени $u_n(t)$, называемая амплитудной частью гармоники, никак не ограничена и является источником неконтролируемого входными данными роста функции, а следовательно, источником неустойчивости.

Таким образом, если конечно-разностная схема устойчива, то отношение амплитудной части гармоники на верхнем временном слое к амплитудной части на нижнем временном слое по модулю должно быть меньше единицы.

Если разложить значение сеточной функции $u_j^k$ в ряд Фурье по собственным функциям:

$$u_j^k = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{kn} e^{i\lambda_n x_j}, \tag{6.49}$$

где амплитудная часть $\eta_{kn}$ может быть представлена в виде произведения

$$\eta_{kn} = U_n \cdot q^k, \tag{6.50}$$

$U_n$ — размерный и постоянный сомножитель амплитудной части, а $k$ — показатель степени (соответствующий номеру временного слоя) сомножителя, зависящего от времени, то, подставив (6.49) в конечно-разностную схему, можно по модулю оценить отношение амплитудных частей на соседних временных слоях.

Однако поскольку операция суммирования линейна и собственные функции ортогональны для различных индексов суммирования, то в конечно-разностную схему вместо сеточных значений достаточно подставить одну гармонику разложения (6.49) (при этом у амплитудной части убрать индекс $n$), т. е.

$$u_{j\pm 1}^k = \eta_k e^{i\lambda_n (x_j \pm h)}, \quad u_j^k = \eta_k e^{i\lambda_n (x_j)}, \quad u_j^{k+1} = \eta_{k+1} e^{i\lambda_n (x_j)}. \tag{6.51}$$

Таким образом, если конечно-разностная схема *устойчива по начальным данным*, то

$$\left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k}\right| \leqslant 1, \tag{6.52}$$

т. е. условие (6.52) является *необходимым* условием устойчивости.

**6.5.2. Исследование устойчивости методом гармонического анализа явной и неявной схем для уравнения теплопроводности.** Подставим выражения (6.51) в явную конечно-разносную схему (6.28) для уравнения теплопроводности, получим

$$\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k} = 1 - 4\sigma \cdot \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2}, \quad \sigma = \frac{a^2 \tau}{h^2}. \tag{6.53}$$

Здесь использована формула, вытекающая из формулы Эйлера:

$$\exp(i\lambda_n h) - 2 + \exp(-i\lambda_n h) = -4 \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2},$$

и формула $1 - \cos \lambda_n h = 2 \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2}$, причем $0 < \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2} \leqslant 1$, поскольку $\lambda_n \neq 0$ и $h \neq 0$.

В соответствии с (6.53) получаем выражение

$$\left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k}\right| = \left|1 - 4\sigma \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2}\right| = |1 - 4\sigma m|, \quad m = \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2},$$

или, с учетом (6.52), неравенство

$$|1 - 4\sigma m| \leqslant 1.$$

Отсюда получаем следующие два неравенства:

$$-1 \leqslant 1 - 4\sigma m \leqslant +1,$$

из которых правое выполнено всегда, а из левого следует знаменитое *условие устойчивости Куранта*: $\sigma m \leqslant 1/2$, или более жесткое для $\sigma$ условие

$$\sigma = \frac{a^2\tau}{h^2} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{6.54}$$

Из (6.54) следует, что *явная схема* для уравнения теплопроводности *условно устойчива* с условием (6.54), накладываемым на сеточные характеристики $\tau$ и $h$.

Подставим теперь гармоники (6.51) в неявную конечно-разностную схему (6.30) для уравнения теплопроводности, получим

$$\eta_{k+1} = \left(1 + 4\sigma \sin^2 \frac{\lambda_n h}{2}\right)^{-1} \eta_k,$$

откуда

$$\left|\frac{\eta_{k+1}}{\eta_k}\right| = \left|\frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2 \dfrac{\lambda_n h}{2}}\right| \leqslant 1$$

всегда, так как $\sigma$ и квадрат синуса больше нуля.

Следовательно, *неявная схема* для уравнения теплопроводности *абсолютно устойчива*, так как для выполнения неравенства $\left|\dfrac{\eta_{k+1}}{\eta_k}\right| \leqslant 1$ на сеточные характеристики $\tau$ и $h$ не накладывалось никаких ограничений.

Комплекс $\dfrac{a^2\tau}{h^2}$ называют числом Куранта для уравнения теплопроводности.