МО_ Лекція (3) 12.10.2021

Приклад. Знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП симплекс-методом.

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 \le 5, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

Розв'язання.

Будемо ілюструвати знаходження оптимального розв'язку графічно. Побудуємо область допустимих розв'язків і градієнт цільової функції (рис. 1).

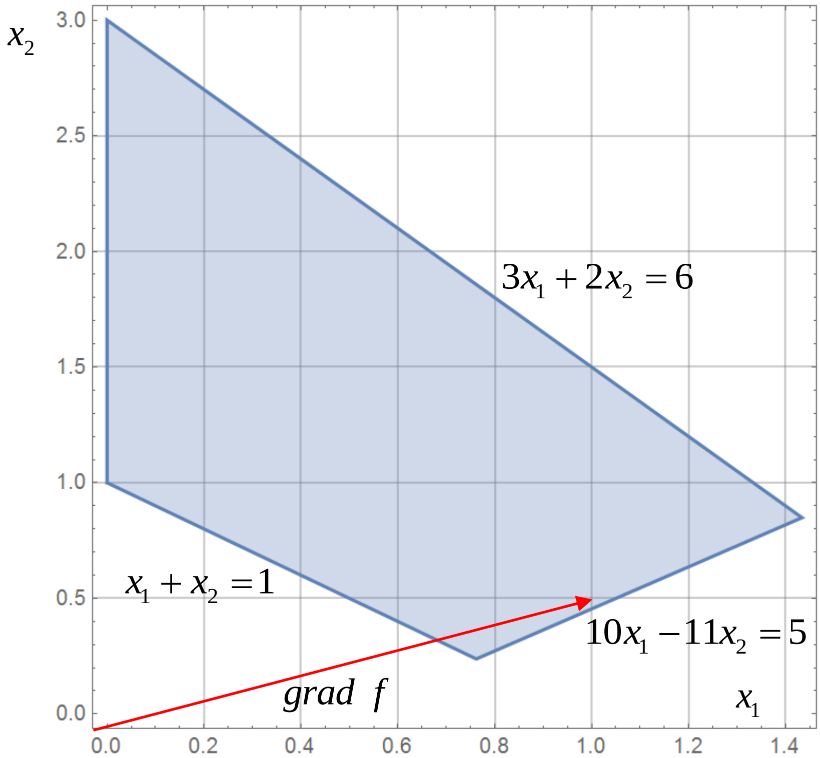

Рис. 1

Знайдемо розв'язок задачі лінійного програмування (ЛП) симплекс-методом.

Приводимо задачу лінійного програмування (ЛП) до канонічної форми.

$$z(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 2x_1 + x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_5 = 1, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,5}.$$

Приводимо систему обмежень до канонічного вигляду.

$$\begin{cases} 10x_1 - 11x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = -1, \end{cases}$$

Виразимо базисні змінні x_3, x_4, x_5 через небазисні змінні x_1, x_2.

$$\begin{cases} x_3 = 5 - \left(10x_1 - 11x_2\right), \\ x_4 = 6 - \left(3x_1 + 2x_2\right), \\ x_5 = -1 - \left(-x_1 - x_2\right). \end{cases}$$

Цільова функція вже записана через небазисні змінні, тому додаткових перетворень виконувати не треба.

Складаємо симплекс таблицю:

Базисні змінні	Небазисні змінні		Вільні члени
	$-x_1$	$-x_2$	
x_3	10	-11	5
x_4	3	2	6
x_5	-1	-1	-1
Коефіцієнти цільової функції	-2	-1	0

Так як серед вільних членів β_i, є від'ємні, то немає початкового базисного розв'язку.

Перевіряємо випадок відсутності розв'язку через несумісність системи обмежень. Так як в рядку з від'ємним β_3, серед коефіцієнтів α_{3j} є від'ємні, то допустима область не порожня.

Для переходу в іншу точку допустимої області D необхідно в системі обмежень (в симплекс-таблиці) поміняти місцями базисну і небазисну змінні.

У рядку з $\beta_3 = -1$ виберемо від'ємний елемент α_{31}.

Перший стовпець буде ***розв'язувальним стовпцем***. Тим самим ми визначили індекс змінної, яка буде вводитися в базис. Змінна x_1 буде вводитися в базис.

Номер ***розв'язувального рядка*** s вибираємо з умови:

$$\frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}.$$

В даному випадку

$$\min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}}\geq 0} \frac{\beta_i}{\alpha_{i1}} = \min_{i:\frac{\beta_i}{\alpha_{i1}}\geq 0} \left\{\frac{5}{10}, \frac{6}{3}, \frac{-1}{-1}\right\} = \frac{5}{10}.$$

Змінна x_3 буде виводитися з базису.

Елемент $\alpha_{11} = 10$, який стоїть на перетині розв'язувального рядка і розв'язувального стовпця буде ***розв'язувальним елементом***.

Далі виконуємо крок модифікованих Жорданових виключень. Покажемо покрокове заповнення нової симплекс-таблиці, виконуючи відразу пункт 5.

1) У новій симплекс-таблиці на місце розв'язувального елемента ставимо число 1 і ділимо на розв'язувальний елемент.

Базисні змінні	Небазисні змінні		Вільні члени
	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	$1/10$		
x_4			
x_5			
Коефіцієнти цільової функції			

2) Решту елементів розв'язувального рядка переносимо в нову симплекс-таблицю без змін і ділимо на розв'язувальний елемент.

Базисні змінні	Небазисні змінні		Вільні члени
	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	$1/10$	$-11/10$	$5/10$
x_4			
x_5			
Коефіцієнти цільової функції			

3) Решту елементів розв'язувального стовпця переносимо в нову симплекс-таблицю з протилежним знаком і ділимо на розв'язувальний елемент.

Базисні змінні	Небазисні змінні		Вільні члени
	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	1/10	−11/10	5/10
x_4	−3/10		
x_5	1/10		
Коефіцієнти цільової функції	2/10		

4) Решту елементів нової симплекс-таблиці знаходимо за правилом прямокутника (правилом обчислення визначника другого порядку). Причому розв'язувальний елемент ***завжди*** вважається таким, що стоїть на головній діагоналі.

Покажемо це на прикладі виділеної кольором клітинки.

$$\frac{10\cdot(-1)-(-1)\cdot 5}{10}=-\frac{5}{10}=-\frac{1}{2}$$

Базисні змінні	Небазисні змінні		Вільні члени
	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	1/10	−11/10	5/10
x_4	−3/10	53/10	9/2
x_5	1/10	−21/10	−1/2
Коефіцієнти цільової функції	2/10	−16/5	1

Продовжуємо виконання етапу знаходження початкового базисного розв'язку.

	$-x_3$	$-x_2$	
x_1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{11}{10}$	$\frac{1}{2}$
x_4	$-\frac{3}{10}$	$\frac{53}{10}$	$\frac{9}{2}$
x_5	$\frac{1}{10}$	$-\frac{21}{10}$	$-\frac{1}{2}$
Коефіцієнти цільової функції	$\frac{1}{5}$	$-\frac{16}{5}$	1

	$-x_3$	$-x_4$	
x_1	$\frac{2}{53}$	$\frac{11}{53}$	$\frac{76}{53}$
x_2	$-\frac{3}{53}$	$\frac{10}{53}$	$\frac{45}{53}$
x_5	$-\frac{1}{53}$	$\frac{21}{53}$	$\frac{68}{53}$
Коефіцієнти цільової функції	$\frac{1}{53}$	$\frac{32}{53}$	$\frac{197}{53}$

Так як всі вільні члени невід'ємні, то отримано начальний базисний розв'язок $x^{(0)}=\left(\frac{76}{53},\frac{45}{53},0,0,\frac{68}{53}\right)$, $z\left(x^{(0)}\right)=\frac{197}{53}$.

Якщо всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні, то отримано оптимальний розв'язок задачі. В даному прикладі отриманий початковий базисний розв'язок є оптимальним розв'язком задачі.

Для вихідної задачі ЛП $x^{*}=\left(\frac{76}{53},\frac{45}{53}\right)$, $z\left(x^{*}\right)=\frac{197}{53}$.

Метод штучного базису

Зведення системи обмежень задачі лінійного програмування, записаної в канонічній формі, до канонічного вигляду може виявитися досить трудомістким процесом. До того ж права частина перетвореної системи обмежень часто містить від'ємні компоненти. Тобто, немає початкового базисного розв'язку. У сформульованому раніше алгоритмі симплекс-методу за знаходження початкового базисного розв'язку відповідає 4 етап.

Іншим способом знаходження початкового базисного розв'язку є **метод штучного базису**. Метод штучного базису або знаходить початковий базисний розв'язок, або встановлює, що вихідна система обмежень є несумісна.

Розглянемо задачу лінійного програмування в канонічної формі:

$$c_1x_1+\ldots+c_nx_n\to max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+\ldots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j\ge 0,\ j=\overline{1,n}. \tag{3}$$

Матриця коефіцієнтів при невідомих системи обмежень (2) не містить одиничної матриці. Отримати одиничну матрицю можна, якщо до кожного рівняння в системі обмежень задачі додати одну змінну $x_{n+i}\ge 0,\ i=\overline{1,m}$. Такі змінні називаються ***штучними***.

<u>*Зауваження.*</u> Не обов'язково кількість введених штучних змінних повинна дорівнювати m. Їх необхідно вводити тільки в ті рівняння системи обмежень, які не розв’язані відносно базисних змінних.

Припустимо, що система обмежень (2) не містить жодного одиничного вектору, тоді штучну змінну вводимо в кожне рівняння:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \end{cases} \quad (4)$$

$$x_j \ge 0, j = \overline{1, n+m}. \quad (5)$$

В результаті додавання змінних в рівняння системи обмежень (2) область допустимих розв'язків задачі розширилася. Задачу з системою обмежень (4)-(5) називають ***розширеною*** або ***М-задачею***. Розв'язок розширеної задачі буде збігатися з розв'язком початкової задачі тільки за умови, що всі введені штучні змінні в оптимальному плані задачі вийшли із базису, тобто дорівнюють нулю.

Відповідно до алгоритму симплекс-методу в базис вводяться змінні, які покращують (збільшують) значення цільової функції. Тому для того, щоб процедура симплексних перетворень виключала з базису штучні змінні, ці змінні потрібно ввести в цільову функцію з від'ємними коефіцієнтами. Цільова функція М-задачі матиме вигляд:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n - Mx_{n+1} - Mx_{n+2} - \ldots - Mx_{n+m} \to max, \quad (6)$$

Величина M вважається досить великим числом. Тоді, яке б мале значення не приймала штучна змінна x_{n+i}, значення цільової функції буде від'ємним. Тому процедура симплекс-методу відразу виключає відповідні штучні змінні з базису і забезпечує визначення базисного розв'язку, в якому все штучні змінні $x_{n+i} = 0, i = \overline{1, m}$.

Якщо в оптимальному плані розширеної задачі існує хоча б одне значення $x_{n+i} > 0$, це означає, що вихідна задача не має розв'язку (тобто система обмежень несумісна).

Для розв'язання розширеної задачі за допомогою симплекс-таблиць зручно використовувати таблиці, рядок коефіцієнтів цільової функції яких ділиться на два рядки. Тоді в $(m+2)$-ому рядку містяться коефіцієнти з M, а в $(m+1)$-ому – ті, які не містять M. Вектор, який підлягає включенню в базис, визначають за $(m+2)$-им рядком. Ітераційний процес за $(m+2)$-им рядком проводять до повного виключення всіх штучних змінних з базису, далі процес визначення оптимального плану продовжують за $(m+1)$-им рядком.

Взаємозв'язок між розв’язками вихідної і розширеної задач лінійного програмування не є очевидним і визначається такою теоремою.

Теорема. Якщо в оптимальному розв'язку $\tilde{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0\right)$ розширеної задачі штучні змінні $x_{n+i} = 0, i = \overline{1, m}$, то допустимий розв'язок $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ є оптимальним розв’язком вихідної задачі.

Доведення. Зауважимо, що у оптимальних розв'язків розширеної задачі $\tilde{x}^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*, 0, \ldots, 0\right)$ і вихідної задачі $x^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ значення цільових функцій збігаються.

$$f\left(x^*\right) = c_1 x_1^* + \ldots + c_n x_n^* = c_1 x_1^* + \ldots + c_n x_n^* - M \cdot 0 - M \cdot 0 - \ldots - M \cdot 0 = f\left(\tilde{x}^*\right).$$

Доведемо, що план x^* – оптимальний розв'язок вихідної задачі.

Від супротивного. Допустимо, що x^* не є оптимальним розв’язком. Тоді існує такий оптимальний розв'язок $y^* = \left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*\right)$, для якого $f\left(y^*\right) > f\left(x^*\right)$. Звідси для вектору $\tilde{y}^* = \left(\tilde{y}_1^*, \tilde{y}_2^*, \ldots, \tilde{y}_n^*, 0, \ldots, 0\right)$, що є розв’язком розширеної задачі, маємо:

$$f\left(\tilde{y}^*\right) = f\left(y^*\right) > f\left(x^*\right) = f\left(\tilde{x}^*\right).$$

Тобто

$$f\left(\tilde{y}^*\right) > f\left(\tilde{x}^*\right).$$

Отримали, що розв'язок $\tilde{x}^*$ розширеної задачі не є оптимальним, що суперечить умові теореми, а тому зроблене припущення про неоптимальність розв'язку x^* є невірним.

Перевагами методу штучного базису є простота, відсутність необхідності виконувати перетворення системи обмежень до канонічного вигляду, недоліком - збільшення розмірності задачі.

Приклад. Знайти оптимальний розв'язок задачі ЛП симплекс-методом з використанням методу штучного базису.

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1,5}.$$

Система обмежень задачі не містить одиничної матриці і не містить жодного одиничного вектора, тому штучну змінну вводимо в кожне рівняння. Також штучні змінні вводимо в цільову функцію з довільно великим від'ємним числом M.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отримуємо таку задачу ЛП:

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 - M\left(x_6 + x_7 + x_8\right) \to max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 + x_7 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_8 = 7, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1,8}.$$

Штучні змінні x_6, x_7, x_8 будуть базисними, а небазисними змінними будуть $x_1, \ldots, x_5$. Виразимо базисні змінні через небазисних:

$$\begin{cases} x_6 = 4 - \left(x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5\right), \\ x_7 = 6 - \left(2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5\right), \\ x_8 = 7 - \left(2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5\right). \end{cases}$$

Підставимо вирази для x_6, x_7, x_8 в цільову функцію.

$$f = 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 - M\left(4 - x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - x_5 + \right.$$
$$\left. +6 - 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 + 7 - 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5\right) =$$
$$= 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 - M\left(17 - 5x_1 - 2x_2 - x_3 - 4x_4 - 4x_5\right).$$

Складаємо симплекс-таблицю. Рядок коефіцієнтів цільової функції розділимо на два рядки.

	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	
x_6	1	2	1	2	1	4
x_7	2	1	-2	1	1	6
x_8	2	-1	2	1	2	7
	-2	1	-1	1	3	0
M	-5	-2	-1	-4	-4	-17

	$-x_7$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	
x_6	-1/2	3/2	2	3/2	1/2	1
x_1	1/2	1/2	-1	1/2	1/2	3
x_8	-1	-2	4	0	1	1
	1	2	-3	2	4	6
M	5/2	1/2	-6	-3/2	-3/2	-2

	$-x_7$	$-x_2$	$-x_8$	$-x_4$	$-x_5$	
x_6	0	5/2	-1/2	3/2	0	1/2
x_1	1/4	0	1/4	1/2	3/4	13/4
x_3	-1/4	-1/2	1/4	0	1/4	1/4
	1/4	1/2	3/4	2	19/4	27/4
M	1	-5/2	3/2	-3/2	0	-1/2

	$-x_7$	$-x_6$	$-x_8$	$-x_4$	$-x_5$	
x_2	0	2/5	-1/5	3/5	0	1/5
x_1	1/4	0	1/4	1/2	3/4	13/4
x_3	-1/4	1/5	3/20	3/10	1/4	7/20
	1/4	-1/5	17/20	17/10	19/4	133/20
M	1	1	1	0	0	0

Всі штучні змінні вийшли з базису, тому відповідні стовпці можна видалити з симплекс-таблиці.

	$-x_4$	$-x_5$	
x_2	3/5	0	1/5
x_1	1/2	3/4	13/4
x_3	3/10	1/4	7/20
	17/10	19/4	133/20

Якщо всі коефіцієнти в рядку коефіцієнтів цільової функції симплекс-таблиці невід'ємні, то отримано оптимальний розв'язок задачі.

Оптимальний розв'язок $x^* = \left(\frac{13}{4}, \frac{1}{5}, \frac{7}{20}, 0, 0 \right)$, $f\left(x^*\right) = \frac{133}{20}$.

Обґрунтування симплекс-методу розв'язання задачі ЛП
Критерій оптимальності

Нехай розв'язок $x^{(0)} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0\right)$ є базисним розв'язком. Щоб обґрунтувати симплекс-метод покажемо, що:

1) новий базисний розв'язок $x^{(1)}$, який отримано після перетворення симплекс-таблиці з розв’язувальним елементом α_{sr}, теж буде базисним розв’язком,

2) значення цільової функції в точці $x^{(1)}$ не менше за значення цільової функції в точці $x^{(0)}$: $\left(c, x^{(1)}\right) \geq \left(c, x^{(0)}\right)$,

3) обґрунтувати випадок необмеженості цільової функції на допустимій множині,

4) якщо всі коефіцієнти в рядку цільової функції невід'ємні, то отримано оптимальний розв'язок задачі.

Виконаємо обґрунтування симплекс-методу.

1) Нехай $x^{(0)} = \left(\beta_1, \ldots, \beta_m, 0, \ldots, 0\right)$ – базисний розв'язок. Точка $x^{(1)}$, яку обчислено за симплекс-методом, буде мати такі координати:

$$x^{(1)} = \left(\beta'_1, \ldots, \beta'_{s-1}, \underset{s-e\ место}{0}, \beta'_{s+1}, \ldots, \beta'_m, 0, \ldots, 0, \underset{r-e\ место}{\beta'_s}, 0, \ldots, 0 \right).$$

Щоб $x^{(1)}$ була базисною потрібно показати, що всі $\beta'_i \geq 0$.

1. $\beta_s' = \dfrac{\beta_s}{\alpha_{sr}} \geq 0$ (з правила вибору розв'язувального елемента),

2. Решта коефіцієнтів

$$\beta_i' = \frac{\beta_i \cdot \alpha_{sr} - \beta_s \cdot \alpha_{ir}}{\alpha_{sr}} = \beta_i - \frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} \alpha_{ir}.$$

Тоді:

а) якщо $\alpha_{ir} \leq 0$, то $\beta_i' \geq 0$;

б) якщо $\alpha_{ir} > 0$, то розділивши на α_{ir}, отримаємо

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} - \frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} \geq 0 \text{ (т.к. } \frac{\beta_s}{\alpha_{sr}} = \min_{i:\alpha_{ir}>0} \frac{\beta_i}{\alpha_{ir}} \text{).}$$

Отже, всі $\beta_j' \geq 0, \quad j = 1, \ldots, m$. Точка $x^{(1)}$ є базисним розв'язком.