Методи оптимізації. Лекція 15.02.2022

Задача про максимальний потік
Метод Форда-Фалкерсона

Постановка задачі. Нехай необхідно визначити максимальний обсяг неподільного продукту, який можна доставити з будь-якого початкового пункту в кінцевий, минувши при цьому скінченне число пунктів (можливо жодного), не допустивши при цьому втрат за умови, що обсяги перевезень між окремими пунктами обмежені. Під неділимістю тут розуміється той факт, що вантаж ніде не затримується на шляху прямування.

Основні поняття. *Графом* $G=(V,E)$ називається об'єкт, який заданий парою множин (V,E), де V – множина вершин, $E \subseteq V \times V$ – множина ребер.

Граф називається *скінченним*, якщо множини його вершин і ребер є скінченними.

Орієнтованим графом (орграфом) називається граф $G=(V,E)$, в якому (v_i, v_j) – впорядкована пара, де V – множина вершин, а елементи E називають *дугами* або *орієнтованими ребрами*.

Для спрощення запису будемо позначати ребро (дугу) (v_i, v_j) як (i, j).

При зображенні орієнтованих графів напрямки ребер позначаються стрілками. Кожному неорієнтованому графу можна поставити у відповідність орієнтований граф з тією самою множиною вершин, в якій кожне ребро замінено двома орієнтованими ребрами, що є інцидентними тим самим вершинам і мають протилежні напрямки.

Граф $G=(V,E)$ називається *зваженим*, якщо його ребра (дуги) або вершини мають додаткові характеристичні ознаки (вагу).

Мережу можна представити як систему, яка транспортує деякий продукт з однієї точки в іншу. Цим продуктом можуть бути люди, електроенергія, природний газ, нафта та багато іншого.

Математична постановка задачі про максимальний потік

Нехай є мережа, яка визначається графом $G=(V,E)$ без циклів і петель, орієнтованим в одному напрямку від вершини s, яка є входом (джерелом) графа, до вершини t, що є виходом (стоком) графа. В джерело s не входить жодна дуга, а зі стоку t не виходить жодна дуга.

Кожному ребру (i, j) відповідає додатне дійсне число b_{ij}, яке називають ***пропускною спроможністю*** (пропускною здатністю) ребра (i, j), тобто це максимальна кількість одиниць потоку, яку можна перемістити цією дугою за одиницю часу $(b_{ij} \geq 0)$. Якщо між вершинами немає ребра, то пропускна спроможність дорівнює нулю. Необхідна умова: орієнтований граф повинен бути зв'язним.

Невід'ємне число x_{ij}, яке дорівнює кількості одиниць потоку, що переміщують дугою (i, j) за одиницю часу, будемо називати ***потоком дуги*** (i, j). Очевидно, що

$$0 \le x_{ij} \le b_{ij}. \tag{1}$$

Якщо $x_{ij} = b_{ij}$, то дуга (i, j) є ***насичена*** потоком.

Для будь-якої вершини, крім джерела і стоку, величина потоку, що надходить в цю вершину, дорівнює величині потоку, що випливає з нього. Ця умова називається умовою збереження потоку, в проміжних вершинах потоки не створюються і не зникають. Отже, величина x_{ij} потоку дуги (i, j) задовольняє таким умовам:

$$\sum_{i \in B(j)} x_{ij} - \sum_{k \in A(j)} x_{jk} = \begin{cases} -v, j = s \\ 0, j \ne s,t \\ v, j = t \end{cases} \tag{2}$$

де

$A(j)$ – множина вершин, які безпосередньо йдуть за вершиною j,

$B(j)$ – множина вершин, які передують вершині j.

Задача про максимальний потік полягає у визначенні такого допустимого потоку, при якому величина v буде максимальною.

$$v = \sum_{i \in A(s)} x_{si} \to max. \tag{3}$$

при виконанні обмежень (1), (2).

Метод Форда-Фалкерсона

Нехай множину вершин (s,t)-мережі поділено на дві множини V_1 та V_2, що не перетинаються:

$$V_1 \cap V_2 = \varnothing,\ V_1 \cup V_2 = V,\ s \in V_1,\ t \in V_2.$$

Розрізом мережі, що відокремлює джерело s від стоку t, називається множина дуг $\{(i, j), i \in V_1, j \in V_2\}$,видалення якої з (s,t)-мережі робить її незв'язною.

Пропускною спроможністю розрізу є сума пропускних спроможностей дуг, які складають розріз.

Розріз є ***мінімальним***, якщо його пропускна спроможність мінімальна.

Теорема Форда-Фалкерсона. Величина максимального потоку в (s,t)-мережі дорівнює пропускній спроможності мінімального розрізу.

Доведення цієї теореми є конструктивним і являє собою алгоритм знаходження максимального потоку.

Алгоритм методу Форда-Фалкерсона

Алгоритм починає роботу з довільного допустимого (тобто такого, що задовольняє обмеженням (1), (2)) потоку. Якщо такий потік визначити складно, то завжди можна прийняти за початковий потік нульової величини $\left\{x_{ij}=0,(i,j)\in E\right\}$.

Перший етап. Виконання позначення вершин.

На цьому етапі визначається допустимий шлях із джерела s в стік t, уздовж якого величина потоку може бути збільшена, або встановлюється оптимальність побудованого потоку.

Кожна з вершин (s,t)-мережі може бути в одному з трьох станів:

- непозначена,
- позначена та нерозглянута,
- позначена та розглянута.

Позначка вершини складається з двох частин:

- перша частина вказує з якої вершини і за якою дугою (прямою або протилежною) прийшли в дану вершину,
- друга частина вказує максимальне значення, на яке може бути змінено потік за цією дугою.

Наприклад, запис $j\left(i^{+},5\right)$ означає, що у вершину j ми прийшли з вершини i за прямою дугою і величина потоку за дугою (i,j) буде дорівнювати 5. Запис $j\left(k^{-},2\right)$ означає, що у вершину j ми прийшли з вершини k за протилежною дугою і величина потоку за дугою (k,j) буде дорівнювати 2.

Спочатку всі вершини (s,t)-мережі непозначені.

Джерело отримує умовну позначку $s\left(s^{+},\infty\right)$. Символ ∞ означає, що величина потоку необмежена зверху. Тепер джерело є позначене та нерозглянуте.

Розглянути вершину означає позначити усі вершини, які зв'язані з нею дугами.

Вершина j може бути позначена з вершини i

- за прямою дугою, якщо $x_{ij}<b_{ij}$, і отримує позначку

  $j\left(i^{+},\varepsilon(j)\right)$, де $\varepsilon(j)=min\left(\varepsilon(i),b_{ij}-x_{ij}\right)$,

- за протилежною дугою, якщо $x_{ij}>0$, і отримує позначку

  $j\left(i^{-},\varepsilon(j)\right)$, де $\varepsilon(j)=min\left(\varepsilon(i),x_{ij}\right)$.

За скінченну кількість кроків приходимо або до випадку, що стік t позначено, і тоді переходимо до другого етапу, або стік t позначити неможливо, тоді той потік, що побудовано, є максимальний.

Другий етап. Зміна потоку.

На цей етап попадаємо тільки у випадку, коли на першому етапі вдалося побудувати шлях, що прямує із джерела в стік.

Нехай стік має позначку $t\left(k^{+},\varepsilon(t)\right)$. Рухаючись у зворотному напрямку зі стоку до джерела, величину потоку на дугах цього шляху змінимо на одну й туж саму величину $\varepsilon(t)$:

- прямими дугами: $x_{ij}' = x_{ij} + \varepsilon(t)$,
- протилежними дугами: $x_{ij}' = x_{ij} - \varepsilon(t)$.

Після цього усі позначки ліквідуються і переходимо на перший етап.

Якщо ж стік t на першому етапі позначити не вдалося, то задачу розв’язано. При цьому частину вершин буде позначено (ці вершини складуть множину V_1), а частину вершин буде непозначеною (ці вершини складуть множину V_2). Дуги $\left\{(i,j), i \in V_1, j \in V_2\right\}$ є мінімальним розрізом (s,t)-мережі, а пропускна спроможність мінімального розрізу дорівнює величині максимального потоку.

Приклад. Нехай задана (s,t)-мережа, яка складається із джерела, стоку та 4 проміжних вершин. На дугах вказані їх пропускні спроможності і орієнтація (рис. 1). Знайдемо величину максимального потоку та мінімальний розріз.

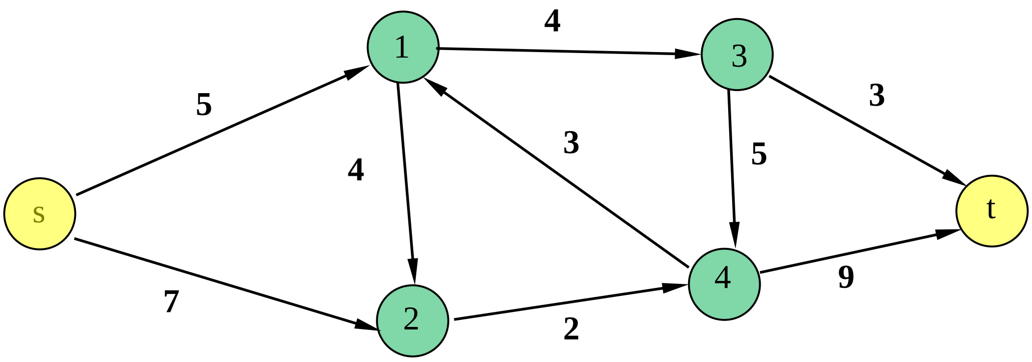

Рис. 1.

Приймемо за початковий потік нульовий потік. Позначимо його на дугах через кому за пропускною спроможністю дуги (рис. 2).

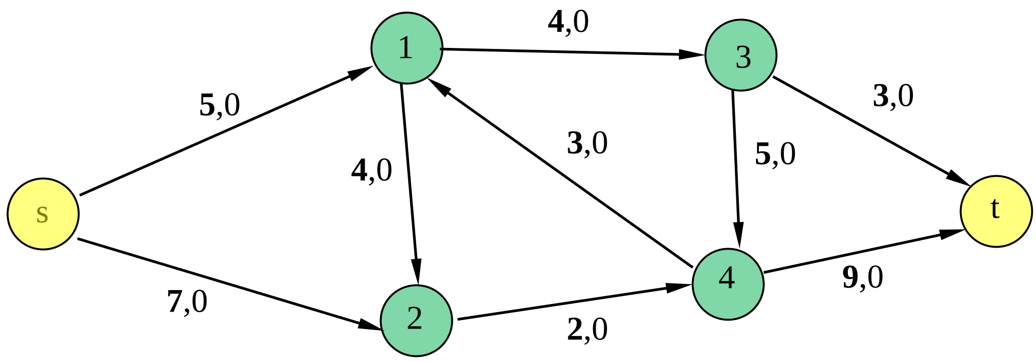

Рис. 2.

Ітерація 1. Розглянемо шлях $s \to 1 \to 3 \to t$. Це повний шлях від джерела до стоку. Маємо такі позначки вершин цього шляху:

$s\left(s^{+},\infty\right)$

$1\left(s^{+},5\right)$

$3\left(1^{+},4\right)$

$t\left(3^{+},3\right)$

Так як $\varepsilon_1\left(t\right)=3$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_1\left(t\right)=3$ (рис. 3). Ребро $\left(3,t\right)$ є тепер насиченим, так як $x_{3t}=b_{3t}=3$.

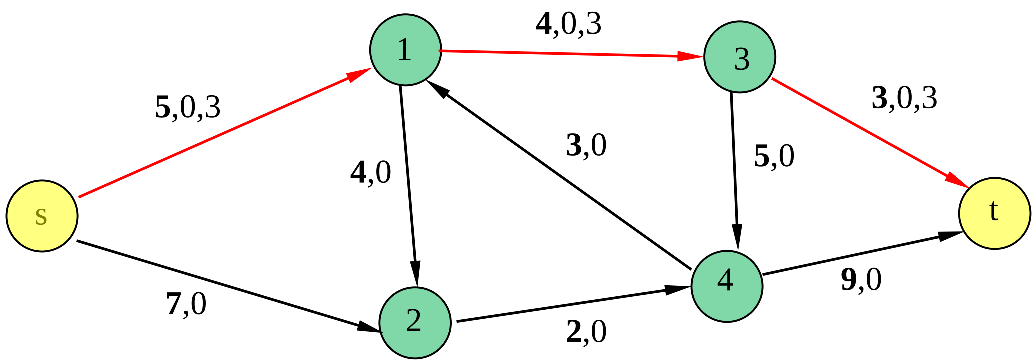

Рис. 3

Ітерація 2. Розглянемо шлях $s \to 2 \to 4 \to t$. Маємо такі позначки вершин шляху:

$s\left(s^{+},\infty\right)$

$2\left(s^{+},7\right)$

$4\left(2^{+},2\right)$

$t\left(4^{+},2\right)$

Так як $\varepsilon_2\left(t\right)=2$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 4 \leftarrow 2 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_2\left(t\right)=2$ (рис. 4). Ребро $\left(2,4\right)$ є тепер насиченим, так як $x_{24}=b_{24}=2$.

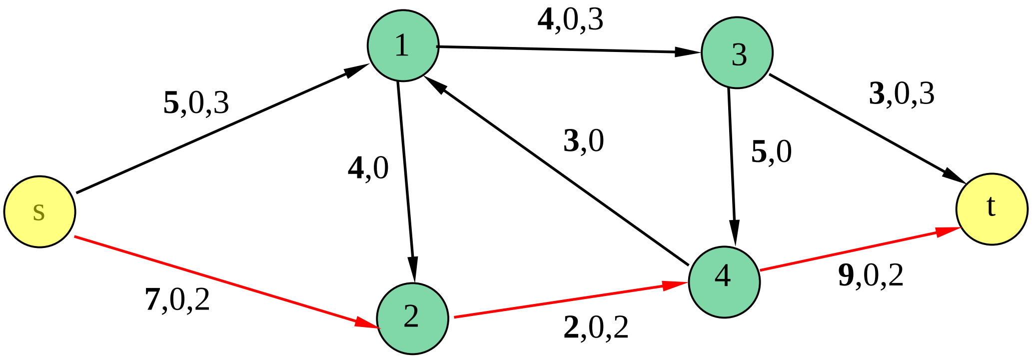

Рис. 4

Ітерація 3. Розглянемо шлях $s \to 1 \to 3 \to 4 \to t$. Маємо такі позначки вершин шляху:

$s\left(s^{+},\infty\right)$

$1\left(s^{+},2\right)$

$3\left(1^{+},1\right)$

$4\left(3^{+},1\right)$

$t\left(7^{+},1\right)$

Так як $\varepsilon_3\left(t\right)=1$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 4 \leftarrow 3 \leftarrow 1 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_3\left(t\right)=1$ (рис. 5).

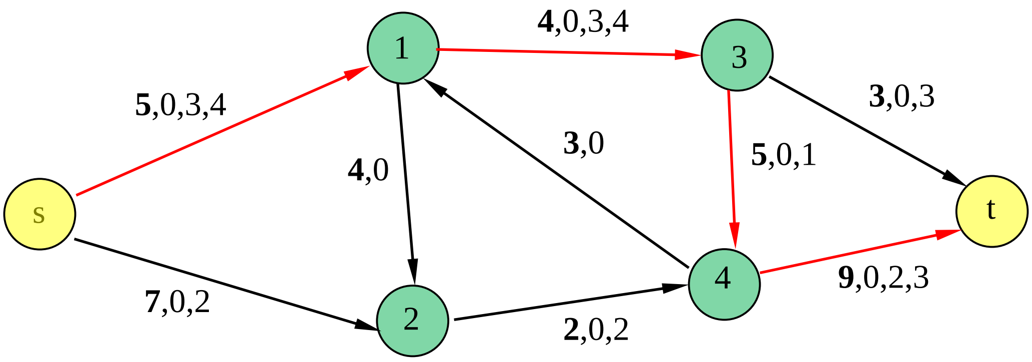

Рис. 5

Ітерація 4. Починаємо розставляти позначки вершин:

$s\left(s^{+},\infty\right)$

$1\left(s^{+},1\right)$

$2\left(s^{+},5\right)$

Інші вершини позначити не вдається.

Позначені вершини складають множину $V_1=\{s,1,2\}$, а непозначені вершини складають множину $V_2=\{3,4,t\}$.

Дуги $\{(1{,}3),(2{,}4)\}$ є мінімальним розрізом заданої (s,t)-мережі (рис. 6), а пропускна спроможність мінімального розрізу дорівнює величині максимального потоку $v=4+2=6$.

Для перевірки: $v=\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)+\varepsilon_3(t)=3+2+1=6$.

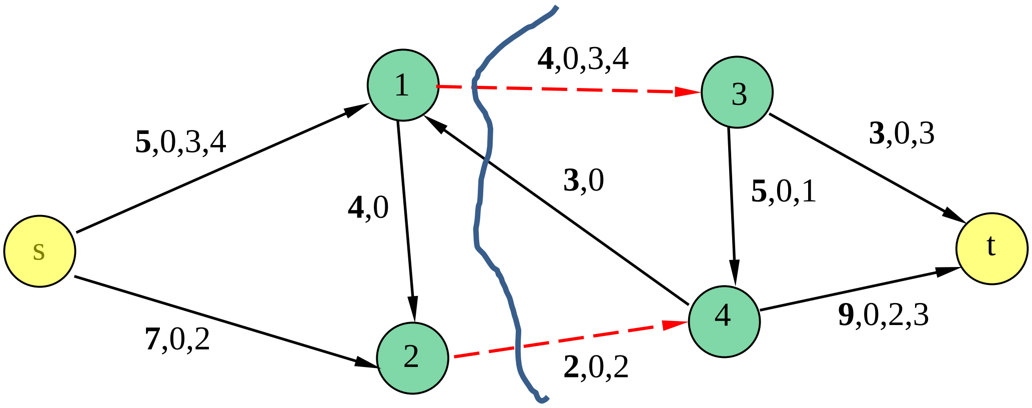

Рис. 6

Відповідь: величина максимального потоку $v=6$, мінімальний розріз $\{(1{,}3),(2{,}4)\}$.

Приклад. У першому наведеному прикладі не було шляхів, які б містили протилежні (протилежно спрямовані) дуги.

Нехай задана (s,t)-мережа, яка складається із джерела, стоку та 2 проміжних вершин. На дугах вказані їх пропускні спроможності і орієнтація (рис. 7). Знайдемо величину максимального потоку.

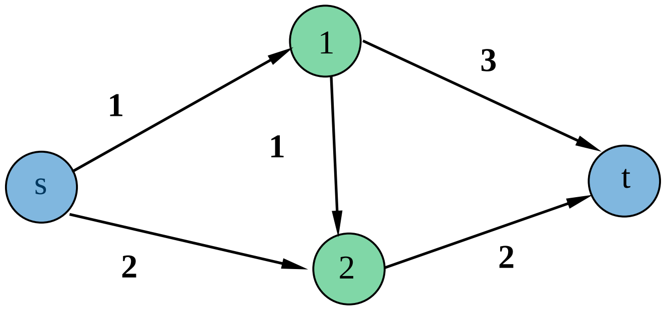

Рис. 7

Приймемо за початковий потік – нульовий потік.

Ітерація 1. Розглянемо шлях $s\to1\to2\to t$. Це повний шлях від джерела до стоку. Маємо такі позначки вершин цього шляху:

$s(s^+,\infty)$

$1(s^+,1)$

$2(1^+,1)$

$t(2^+,1)$

Так як $\varepsilon_1(t)=1$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 2 \leftarrow 1 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_1(t)=1$ (рис. 8).

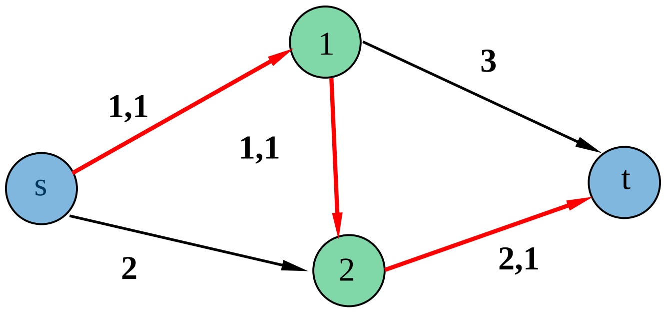

Рис. 8

Ітерація 2. Розглянемо шлях $s \rightarrow 2 \rightarrow t$. Маємо такі позначки вершин шляху:

$s(s^+, \infty)$

$2(s^+, 2)$

$t(2^+, 1)$

Так як $\varepsilon_2(t)=1$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 2 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_2(t)=1$ (рис. 9).

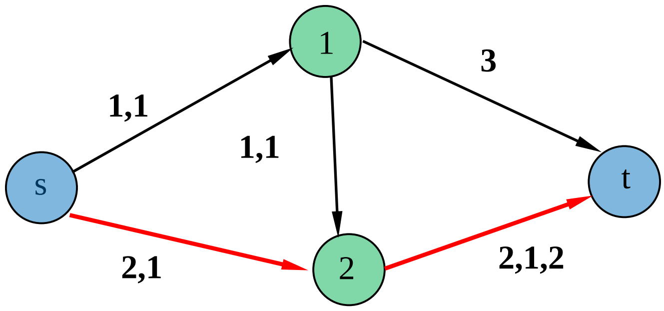

Рис. 9

Ітерація 3. Розглянемо шлях $s \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow t$. Маємо такі позначки вершин шляху:

$s(s^+, \infty)$

$2(s^+, 1)$

$1(2^-, 1)$

$t(1^+, 1)$

Так як $\varepsilon_3(t)=1$, то змінюємо на шляху $t \leftarrow 1 \rightarrow 2 \leftarrow s$ величини потоків дуг на $\varepsilon_3(t)=1$ (рис. 10).

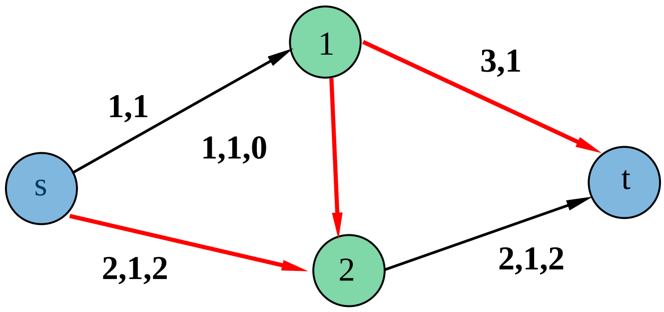

Рис. 10

Ітерація 4. Починаємо розставляти позначки вершин:

$s\left(s^{+},\infty\right)$

Більше вершин позначити не вдається.

Позначені вершини складають множину $V_1=\{s\}$, а непозначені вершини складають множину $V_2=\{1,2,t\}$.

Дуги $\{(s,1),(s,2)\}$ є мінімальним розрізом заданої (s,t)-мережі (рис. 11), а пропускна спроможність мінімального розрізу дорівнює величині максимального потоку $v=3$.

Для перевірки: $v=\varepsilon_1(t)+\varepsilon_2(t)+\varepsilon_3(t)=3$.

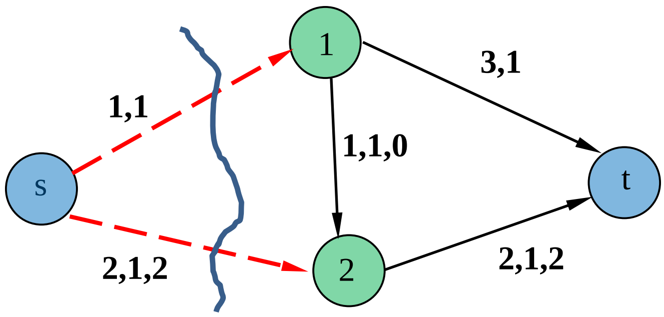

Рис. 14

Відповідь: величина максимального потоку $v=3$, мінімальний розріз $\{(s,1),(s,2)\}$.