

## Конечно-разностные схемы для уравнений гиперболического типа

Рассмотрим первую начально-краевую задачу для волнового уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0; \end{array} \right. \quad (6.12)$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad x = 0, \quad t > 0; \quad (6.13)$$

$$u(l, t) = \varphi_2(t), \quad x = l, \quad t > 0; \quad (6.14)$$

$$u(x, 0) = \psi_1(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0; \quad (6.15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad t = 0. \end{array} \right. \quad (6.16)$$

Нанесем на пространственно-временную область  $0 \leq x \leq l$ ,  $0 \leq t \leq T$  конечно-разностную сетку  $\omega_{h, \tau}$ :

$$\omega_{h, \tau} = \{x_j = jh, \quad j = \overline{0, N}; \quad t^k = k\tau, \quad k = \overline{0, K}\}, \quad (6.25)$$

с пространственным шагом  $h = l/N$  и шагом по времени  $\tau = T/K$ .

На пространственно-временной сетке (6.25) будем аппроксимировать дифференциальное уравнение (6.12) одной из следующих конечно-разностных схем:

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^k - 2u_j^k + u_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau^2 + h^2),$$

$$j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.31)$$

с шаблоном на рис. 6.3 а и

$$\frac{u_j^{k+1} - 2u_j^k + u_j^{k-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^{k+1} - 2u_j^{k+1} + u_{j-1}^{k+1}}{h^2} + O(\tau + h^2),$$

$$j = \overline{1, N-1}; \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.32)$$

с шаблоном на рис. 6.3 б.

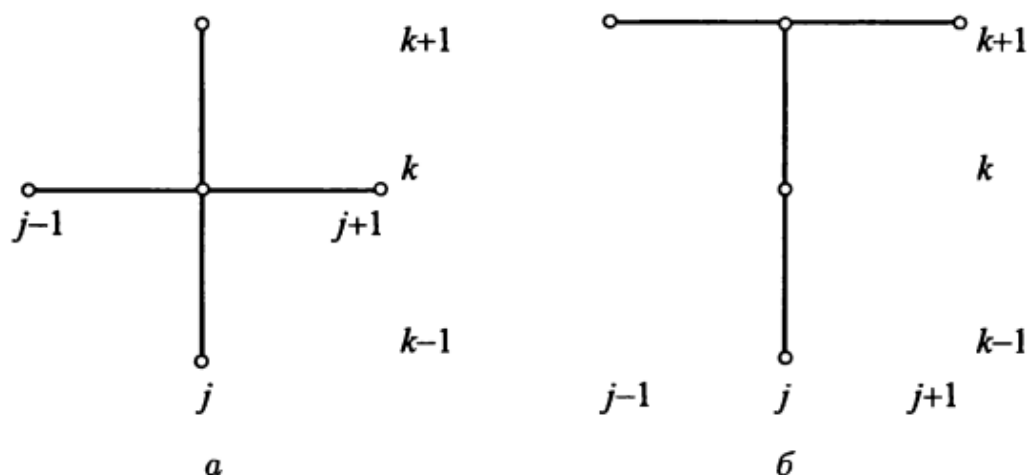


Рис. 6.3. Шаблоны конечно-разностных схем для волнового уравнения

При этом схема (6.31) является *явной*. С ее помощью решение  $u_j^{k+1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , определяется сразу, поскольку значения сеточных функций  $u_j^{k-1}$ ,  $u_j^k$  на нижних временных слоях должны быть известны. В соответствии с шаблоном для этой схемы порядок аппроксимации равен двум как по пространственной, так и по временной переменной (достаточно разложить на точном решении нецентральные значения сеточной функции  $u_j^{k-1}, u_j^{k+1}, u_{j-1}^k, u_{j+1}^k$  в ряд Тейлора в окрестности центрального узла  $(x_j, t^k)$  до производных четвертого порядка включительно соответственно по переменным  $t$  и  $x$ ).

Схема (6.32) является *неявной схемой*, ее можно свести к СЛАУ с трехдиагональной матрицей, реализуемой методом прогонки. В обеих схемах необходимо знать значения  $u_j^{k-1}$ ,  $u_j^k$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , на нижних временных слоях. Для  $k = 1$  это делается следующим образом:

$$u_j^0 = \psi_1(x_j), \quad j = \overline{0, N}, \quad (6.33)$$

где  $\psi_1(x)$  — функция из начального условия (6.15).

Для определения  $u_j^1$  можно воспользоваться простейшей аппроксимацией второго начального условия (6.16):

$$\frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi_2(x_j).$$

Отсюда для искоемых значений  $u_j^1$  получаем следующее выражение:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau.$$

Недостатком такого подхода является первый порядок аппроксимации второго начального условия. Для повышения порядка аппроксимации воспользуемся следующей процедурой.

Разложим  $u_j^1$  в ряд Тейлора на точном решении по времени в окрестности  $t = 0$ :

$$u_j^1 = u(x_j, 0 + \tau) = u_j^0 + \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^0 \tau + \left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 \frac{\tau^2}{2} + O(\tau^3).$$

Для определения второй производной в полученном выражении воспользуемся исходным дифференциальным уравнением

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right|_j^0 = a^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^0 = a^2 \psi_1''(x_j).$$

В результате получаем искомое значение сеточной функции  $u_j^1$  со вторым порядком точности:

$$u_j^1 = \psi_1(x_j) + \psi_2(x_j)\tau + a^2 \psi_1''(x_j) \frac{\tau^2}{2}. \quad (6.34)$$

Для определения  $u_j^2$  из схемы (6.31) или (6.32) достаточно (6.33), (6.34) подставить в соответствующие схемы. При  $k = 2$  значения  $u_j^1$ ,  $u_j^2$  сеточной функции известны, а  $u_j^3$  определяются из схемы (6.31) или (6.32) и т. д.

Краевые условия (6.13) и (6.14) в схемах (6.31), (6.32) используются автоматически соответственно при  $j = 1$  и  $j = N - 1$ , так же как в схемах (6.28), (6.30) для задачи теплопроводности.

Анализ рассмотренных разностных схем показывает, что явная конечно-разностная схема для волнового уравнения условно устойчива с условием

$$\sigma = \frac{a^2 \tau^2}{h^2} < 1,$$

накладываемым на сеточные характеристики  $\tau$  и  $h$ . Неявная схема обладает абсолютной устойчивостью.

## Метод конечных разностей для уравнений эллиптического типа

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \\ u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (6.21)$$

$$(6.22)$$

в прямоугольнике  $x \in [0, l_1]$ ,  $y \in [0, l_2]$ , на который наложим сетку

$$\omega_{h_1, h_2} = \{x_i = ih_1, i = \overline{0, N_1}; y_j = jh_2, j = \overline{0, N_2}\}. \quad (6.35)$$

На этой сетке аппроксимируем задачу (6.21), (6.22) с помощью отношения конечных разностей по следующей схеме (вводится сеточная функция  $u_{ij}, i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$ ):

$$\begin{aligned} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} + O(h_1^2 + h_2^2) = \\ = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \end{aligned} \quad (6.36)$$

которая имеет второй порядок аппроксимации по переменным  $x$  и  $y$ , поскольку шаблон центрально-симметричен (рис. 6.4).

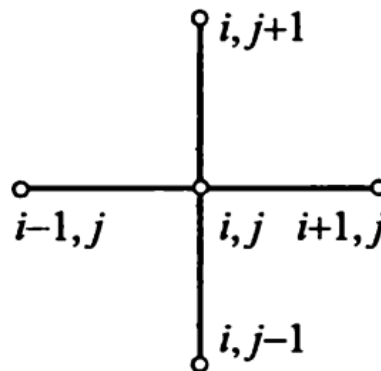


Рис. 6.4. Центрально-симметричный шаблон для уравнения Пуассона.

СЛАУ (6.36) имеет пятидиагональный вид. Решать ее можно различными методами линейной алгебры, например методом Гаусса, итерационными методами, методом матричной прогонки и т. п.

Рассмотрим разностно-итерационный метод Либмана численного решения задачи Дирихле (6.21), (6.22). Для простоты изложения этого метода примем  $h_1 = h_2 = h$ , тогда из схемы (6.36) получим ( $n$  — номер итерации)

$$u_{i,j}^{(n+1)} = \frac{1}{4} \left[ u_{i+1,j}^{(n)} + u_{i-1,j}^{(n)} + u_{i,j+1}^{(n)} + u_{i,j-1}^{(n)} - h^2 \cdot f_{i,j} \right],$$

$$f_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}. \quad (6.37)$$

На каждой координатной линии (например,  $y_j = \text{const}$ ,  $j = \overline{1, N_2 - 1}$ ) с помощью линейной интерполяции (см. рис. 6.5)

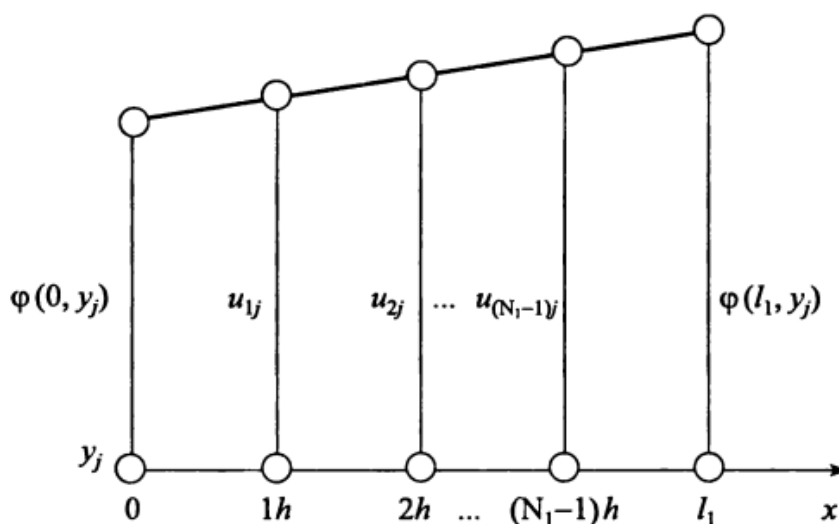


Рис. 6.5. К разностно-итерационному методу Либмана  
граничных значений  $\varphi(x, y)$  определим  $u_{i,j}^{(0)}$  на нулевой итерации, подставив которые в (6.37), получим распределение  $u_{i,j}^{(1)}$  на первой итерации:

$$u_{i,j}^{(1)} = \frac{1}{4} \left[ u_{i+1,j}^{(0)} + u_{i-1,j}^{(0)} + u_{i,j+1}^{(0)} + u_{i,j-1}^{(0)} - h^2 \cdot f_{i,j} \right],$$

$$i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}.$$

Это распределение  $u_{i,j}^{(1)}$  снова подставляется в (6.37), получаем распределение  $u_{i,j}^{(2)}$  и т. д. Процесс Либмана прекращается, когда

$$\left\| u^{(n+1)} - u^{(n)} \right\| \leq \varepsilon, \quad \left\| u^{(n)} \right\| = \max_{i,j} \left| u_{i,j}^{(n)} \right|,$$

где  $\varepsilon$  — наперед заданная точность.

Замечание. Метод простых итераций для решения СЛАУ, возникающих при аппроксимации уравнения Пуассона (Лапласа), отличается довольно медленной сходимостью. Этот недостаток может стать существенным при использовании мелких сеток, когда число уравнений в системе становится большим. Существуют более эффективные методы решения таких СЛАУ, например, метод верхней релаксации.

### Метод установления

Разностные методы для уравнений параболического и гиперболического типов обладают рядом преимуществ перед аналогичными методами для уравнений эллиптического типа. Эти преимущества связаны с простотой алгоритмизации, однородностью вычислительного процесса, возможностью применения экономичных разностных схем в случае многомерных задач.

Этот факт стимулировал поиск путей перехода от эллиптических задач к эквивалентным (при определенных условиях) параболическим задачам. Оказалось, что решение параболических задач при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически стремится к решению соответствующих эллиптических задач, т. е. к решению нестационарных задач, в которых искомая функция уже не зависит от времени. Такой способ решения эллиптических задач называется методом установления.

Рассмотрим задачу Дирихле для уравнения Пуассона:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (6.136)$$

$$\begin{cases} u(x, y)|_{\Gamma} = \varphi(x, y), & (x, y) \in \Gamma. \end{cases} \quad (6.137)$$

В соответствии с методом установления вместо задачи (6.136), (6.137) рассмотрим следующую начально-краевую задачу для уравнения параболического типа (двумерного уравнения теплопроводности), добавив в правую часть уравнения (6.136)

дифференциальный оператор  $\frac{\partial u}{\partial t}$  и дополняя входные данные однородным начальным условием, сохранив при этом независимость от времени краевого условия (6.137):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - f(x, y), \quad (6.138)$$

$$\begin{aligned} (x, y) &\in \Omega, \\ u(x, y, t)|_{\Gamma} &= \varphi(x, y), \\ (x, y) &\in \Gamma, \end{aligned} \quad (6.139)$$

$$\begin{aligned} u(x, y, 0)|_{\bar{\Omega}} &= 0, \\ (x, y) &\in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \end{aligned} \quad (6.140)$$

где  $\Omega$  — плоская двумерная область, ограниченная границей  $\Gamma$ .

Процесс численного решения уравнения (6.138) с условиями (6.139), (6.140) состоит в переходе при  $t \rightarrow \infty$  от значения функции  $u(x, y) = 0$  к искомому стационарному решению. Счет ведется до выхода решения на стационарный режим. Естественно, ограничиваются решением при некотором достаточно большом значении  $t$ , если искомые значения на двух последовательных слоях совпадают с заданной степенью точности.

Метод установления фактически представляет итерационный процесс решения задачи (6.138) с условиями (6.139), (6.140), причем на каждой итерации значения искомой функции получаются путем численного решения некоторой вспомогательной задачи. В теории разностных схем показано, что этот итерационный процесс сходится к решению исходной задачи, если такое стационарное решение существует.

Можно показать, что метод установления применим в задачах для уравнений эллиптического типа не только с граничными условиями первого рода (6.137), но также и с граничными условиями второго и третьего родов.