Лабораторна робота № 3
Конфліктні ситуації і матричні ігри

Мета роботи: отримати навики побудови математичної моделі та аналізу конфліктної ситуації.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал та ознайомиться з прикладами ігрового моделювання конфліктів.

2. Навести приклад конфліктної ситуації, побудувати її математичну модель та, використовуючи засоби додатка Microsoft Excel або середовище Matlab 6.1, провести необхідний аналіз, згідно з варіантом індивідуального завдання.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв’язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

1. Короткі теоретичні відомості

Конфлікт − це ситуація з кількома учасниками, цілі яких не збігаються і дії яких не є абсолютно незалежними.

До конфліктних ситуацій належать, наприклад, взаємини між банком і клієнтом, покупцем та продавцем, начальником та підлеглим і т. п.

Теорія ігор − це розділ математики, в якому досліджуються математичні моделі прийняття рішень в умовах конфлікту, тобто в умовах зіткнення сторін, кожна з яких прагне впливати на розвиток конфлікту у власних інтересах.

Математична модель конфліктної ситуації називається **грою**, сторони, що беруть участь у конфлікті, − **гравцями.**

Вибір і застосування однієї з передбачених правилами дій називається **ходом** гравця. Ходи можуть бути особистими і випадковими.

Особистий хід − це свідомий вибір гравцем однієї з можливих дій (наприклад, хід у шаховій грі). **Випадковий хід −** це випадково вибрана дія (наприклад, вибір карти з перетасованої колоди). Далі розглядатимемо тільки особисті ходи гравців.

Природно, що гравець приймає рішення по ходу гри. Проте теоретично **можна припустити, що всі ці рішення прийняті гравцем заздалегідь.** Сукупність цих рішень становить його **стратегію.**

Стратегією гравця називається деякий план або сукупність правил, за якими він обирає рішення під час кожного особистого ходу залежно від ситуації, що склалася у процесі гри.

У ігровій моделі конфлікту мають бути такі компоненти:

а) зацікавлені сторони конфлікту − **гравці**, їх множину позначимо літерою I;

б) можливі способи дій − **стратегії** кожного гравця $k \in I$ та набір кінцевих станів − ситуацій, якими закінчується гра, що залежить від вибору гравцями стратегій;

в) інтереси сторін, що задаються у вигляді **платежів** або **виграшів,** які відповідають кожному можливому кінцевому стану.

Опишемо все це детальніше.

Кожен гравець $k \in I$ має у своєму розпорядженні деякий набір **стратегій** S_k. Множини $S_1, S_2, ..., S_n$ можуть бути як скінченними, так і нескінченними.

В основі раціональної поведінки учасників гри лежить так званий **постулат «загального знання»**: кожен учасник повністю інформований про свої стратегічні можливості та стратегічні можливості своїх партнерів і конкурентів. Це означає, що набір множин $\{S_1, S_2, ..., S_n\}$ відомий кожному з гравців.

Процес гри полягає у виборі кожним із гравців своєї стратегії: $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, ..., $s_n \in S_n$. Результатом чого є **ігрова ситуація** $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, яку називають ще **результатом** гри. Множина Q всіх можливих ігрових ситуацій утворює **ситуаційний простір** гри $Q = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$.

Дані стратегії називають ще **чистими стратегіями**, оскільки є й інші погляди на перебіг гри і, відповідно, на поняття стратегії.

Ступінь зацікавленості гравця k у тій чи іншій ситуації s визначається розміром виграшу − значенням функції $H^k(s)$, який він в цій ситуації може отримати. Функції H^1=$H^1(s)$, H^1=$H^2(s)$,…, $H^n = H^n(s)$ називаються **платіжними** або **функціями виграшу.** Ці функції набувають числових значень, мають загальну область визначення Q і кожна з них є функцією від n змінних, тобто функцією від кількості гравців.

Таким чином, будь-який конфлікт подано системою

$$\Gamma=(I, \{S_1, S_2, ... S_n\}, \{H^1, H^2, \ldots, H^n\}), \qquad (1)$$

яка називається **безкоаліційною** грою або просто грою.

Систему (1) називають **нормальною формою** гри.

Передбачається, що в безкоаліційній грі учасники діють розумно, незалежно один від одного, без взаємної співпраці та обміну інформацією. Поведінкою учасників такої гри керують чисто егоїстичні мотиви, а саме: отримати якомога більший індивідуальний виграш.

Розглянемо детальніше, в рамках даної загальної схеми, опис гри з двома учасниками. Хай гравців звуть А і В, тоді I={A, B}. Припустімо, що кожен з учасників має у своєму розпорядженні скінченну кількість стратегій, перший має m, а другий − n стратегій: $S_A = \{б_1, б_2, ..., б_m\}$, $S_B = \{в_1, в_2, ..., в_n\}$.

Тоді множина ігрових ситуацій $Q = S_A \times S_B$ складається з $m \times n$ таких елементів:

$$\begin{pmatrix} (б_1, в_1) & (б_1, в_2) & ... & (б_1, в_n) \\ (б_2, в_1) & (б_2, в_2) & ... & (б_2, в_n) \\ ... & ... & ... & ... \\ (б_m, в_1) & (б_m, в_2) & ... & (б_m, в_n) \end{pmatrix}$$

Хай, крім того, H^A, H^B − функції виграшів. Оскільки в нашому випадку множина ігрових ситуацій скінченна, ці функції можуть бути задані у вигляді таблиць за допомогою пари матриць $A = [a_{jk}]$ та $B = [b_{jk}]$ розміру $m \times n$, елементи яких − суть **виграшу** гравців у кожній з ситуацій: $a_{jk} = H^{A}(б_j, в_k)$, $b_{jk} = H^{B}(\alpha_j, \beta_k)$. Матриці A і B також **платіжні.**

Очевидно, якщо перший гравець в матричній грі має всього m стратегій, а другий − n, то таку гру Г можна описати, задавши виграші гравців двома матрицями. Така пара матриць також називається **нормальною формою гри Г.**

Оскільки в описі гри двох осіб фігурують дві матриці, такі ігри часто називають **біматричними.**

Біматрична гра двох гравців така, що для будь-яких стратегій i, j виконується: $a_{ij} + b_{ij} = const$, може бути задана за допомогою однієї матриці і тому такі ігри називають **матричними іграми з постійною сумою** або просто **матричними.** Матричні ігри з нульовою сумою називають **антагоністичними.** Нормальна форма матричної гри з матрицею A позначається через Γ_A, вона є самою платіжною матрицею A.

Матрична гра двох гравців з нульовою сумою може розглядатися як подана нижче абстрактна гра двох гравців.

Перший гравець має m стратегій i = 1, 2, ..., m, другий − n стратегій j = 1, 2, ..., n. Кожній парі стратегій (i, j) поставлено у відповідність число a_{ij}, що виражає виграш гравця 1 за рахунок гравця 2, якщо перший гравець вибере свою i-ту стратегію, а гравець 2 – свою j-ту стратегію.

Кожен із гравців робить один хід: гравець 1 вибирає свою i-ту стратегію ($i=\overline{1,m}$), гравець 2 − свою j-ту стратегію ($j=\overline{1,n}$), після чого гравець 1 отримує виграш a_{ij} за рахунок гравця 2 (якщо $a_{ij} < 0$, то це означає, що перший гравець платить другому суму $|a_{ij}|$). На цьому гра закінчується.

2. Приклади ігрового моделювання конфліктів

Наведемо приклади конфліктних ситуацій і їх моделей у вигляді матричних ігор.

Приклад 1(гра в монети). Перший із двох учасників гри накриває рукою монету, яка може бути орлом догори або решкою. Другий учасник відгадує, якою стороною догори лежить ця монета. Якщо другий відгадав, то перший платить йому суму, рівну одиниці. Якщо другий не відгадав, то він платить першому суму, рівну одиниці.

У цій грі два учасники, що мають протилежні інтереси: отримати виграш за рахунок іншого гравця. У першого гравця є тільки дві (чисті) стратегії: 1-ша − накрити монету догори орлом, 2-га − накрити монету решкою догори. У другого гравця також є тільки дві стратегії: 1-ша − сказати, що монета накрита орлом догори, 2-га − монета накрита решкою догори.

Матриця виграшів формується так: якщо чисті стратегії у обох гравців збігаються, то це означає, що другий гравець відгадав, якою стороною накрив монету перший гравець, отже, виграє другий гравець, а перший − програє 1. Якщо гравці застосовують різні стратегії, то це означає, що другий гравець не відгадав, якою стороною накрита монета, і 1 виграє перший гравець.

Матриця А виграшів першого гравця має вигляд:

	1	2
1	−1	1
2	1	−1

Ця матриця є одночасно матрицею програшів другого гравця.

Дана гра належить до матричних ігор з нульовою сумою.

Приклад 2 (вибір складу команди). Спортивний клуб А має в своєму розпорядженні три варіанти складу команди Аl, А2 і А3. Клуб В − два варіанти В1, В2. Подаючи заявку для участі в змаганні, жоден з клубів не знає, який склад вибере супротивник. Ймовірності виграшу клубу А за різних варіантів складів команд (формовані з досвіду минулих зустрічей) задані матрицею:

	B1	B2
A1	0,5	0,9
A2	0,2	0,6
A3	0,4	0,5

Потрібно знайти оптимальну поведінку кожного клубу − оптимальний варіант складу команд.

3. Розв'язання матричних ігор в чистих стратегіях

Розглядається матрична гра Γ_A з матрицею

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Нагадаємо, що проведення кожної партії матричної гри з матрицею А зводиться до вибору першим гравцем i-го рядка, а другим гравцем j-го стовпця та отримання гравцем 1 (за рахунок гравця 2) виграшу a_{ij}.

Головним у дослідженні ігор є поняття оптимальних стратегій гравців. У це поняття інтуїтивно вкладається такий сенс: стратегія гравця є **оптимальною,** якщо: а) застосування цієї стратегії забезпечує йому найбільший гарантований виграш при всіляких стратегіях іншого гравця і б) відхилення від цієї стратегії не вигідне. Виходячи з цих міркувань, гравець 1 досліджує матрицю виграшів А таким чином: для кожного значення і ($i = \overline{1, m}$) визначається мінімальне значення виграшу залежно від вживаних стратегій гравця 2: $\min\limits_j a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$), тобто визначається мінімальний виграш для гравця 1 за умови, що він прийме свою і-ту чисту стратегію, потім з цих мінімальних виграшів відшукується така стратегія $i = i_0$, за якої цей мінімальний виграш буде максимальним, тобто знаходиться

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{б}. \quad (2)$$

Визначення 1. Число $\underline{\alpha}$, що визначається за формулою (2) називається **нижньою чистою ціною гри** і показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець 1, застосовуючи свої чисті стратегії за будь-яких дій гравця 2.

Величина $\underline{\alpha}$ називається також **максиміном**, принцип побудови стратегії i_0, заснований на максимізації мінімального виграшу, − **принципом максиміну,** а вибрана відповідно до цього принципу стратегія i_0 − **максимінною** або **захисною стратегією** гравця 1.

Гравець 2 при оптимальній своєї поведінці повинен прагнути і за рахунок своїх стратегій по можливості максимально зменшити виграш гравця 1. Тому для гравця 2 шукається $\max\limits_{i} a_{ij} (j=\overline{1,n})$, тобто визначається максимальний виграш гравця 1, за умови, що гравець 2 застосує свою j-ту чисту стратегію, потім гравець 2 шукає таку свою стратегію $j = j_1$, при якій гравець 1 отримає мінімальний виграш, тобто знаходить

$$\min_{j} \max_{i} a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{б}. \tag{3}$$

Визначення 2. Число $\overline{\alpha}$, визначене за формулою (3), називається **чистою верхньою ціною гри** і показує, який максимальний виграш за рахунок своїх стратегій може собі гарантувати гравець 1.

Число $\overline{\alpha}$ називається також **мінімаксом.** При цьому принцип побудови стратегії j_1, заснований на мінімізації максимальних втрат, називається **принципом мінімакса,** а вибрана відповідно до цього принципу стратегія j_1 − **мінімаксною** або **захисною** стратегією гравця 2.

Іншими словами, застосовуючи свої чисті стратегії гравець 1 може забезпечити собі виграш не менше $\underline{\alpha}$, а гравець 2 за рахунок застосування своїх чистих стратегій може не допустити виграш гравця 1 більше, ніж $\overline{\alpha}$.

Використання одним із гравців захисної стратегії не гарантує того, що супротивник також скористається захисною стратегією. Якщо $\underline{\alpha} \neq \overline{\alpha}$, то при використанні одним із гравців захисної стратегії другому гравцеві вигідно не вибирати захисну стратегію, тобто для таких ігор виникає спокуса переграти супротивника (див., наприклад, гру в монети).

Визначення 3. Якщо у грі з матрицею А виконується $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$, то говорять, що ця гра має **сідлову** точку в чистих стратегіях і **чисту ціну гри** $\upsilon = \underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Сідлова точка − елемент $a_{i_o j_0}$ визначається парою чистих стратегій (i_0, j_0) гравців 1 та 2, відповідно, при яких досягається рівність $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. Таку пару стратегій називають **урівноваженою.**

У це поняття вкладено такий сенс: якщо один із гравців дотримується урівноваженої стратегії, то інший гравець не зможе вчинити краще, ніж також дотримуватися урівноваженої стратегії. Математично це можна записати й інакше:

$$a_{ij_o} \le a_{i_o j_o} \le a_{i_o j} \tag{4}$$

де i, j − будь-які чисті стратегії відповідно гравців 1 і 2, а (i_0, j_0) − стратегії, що визначають сідлову точку.

Можна показати, що будь-яка урівноважена пара стратегій є захисною, проте зворотне твердження не має місця.

Сідловий елемент $a_{i_o j_o}$, як видно з (4), є мінімальним в i-му рядку і максимальним в j-му стовпці матриці A. Пошук сідлової точки матриці A відбувається таким чином: у матриці A послідовно в кожному рядку знаходять мінімальний елемент і перевіряють, чи є цей елемент максимальним у своєму стовпці. Якщо так, то він і є сідловим елементом, а пара стратегій, що відповідають йому, утворюють сідлову точку.

Визначення 4. Пара чистих стратегій (i_0, j_0) гравців 1 і 2, які утворюють сідлову точку, називається **розв’язком гри.** При цьому i_0, j_0 називаються **оптимальними чистими стратегіями** відповідно гравців 1 та 2.

Приклад 1

$$
\begin{array}{rccc}
 & & & \min\limits_j a_{ij} \\
 & & & \Vert \\
A = & \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & \cancel{2} \end{pmatrix} & & \left.\begin{matrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 2 \\
\max\limits_i a_{ij} = & \underbrace{\begin{matrix} 2 & \;5 & \;4 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 2.} & &
\end{array}
$$

Сідловою точкою є пара (i_0= 3; j_0 = 1), при якій $\upsilon = \underline{б} = \overline{б} = 2$.

Зазначимо, що хоча виграш в ситуації (3;3) також дорівнює $2 = \underline{б} = \overline{б}$, вона не є сідловою точкою, оскільки цей виграш не є максимальним серед виграшів третього стовпця.

Приклад 2

$$
\begin{array}{rccc}
 & & \min\limits_j a_{ij} & \\
H = & \begin{pmatrix} 10 & 30 \\ 40 & 20 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \rightarrow \\ \rightarrow \end{matrix} & \left.\begin{matrix} 10 \\ 20 \end{matrix}\right\} \max\limits_i \min\limits_j a_{ij} = 20 \\
\max\limits_i a_{ij} & \begin{matrix} \downarrow & \;\downarrow \end{matrix} & & \\
 & \underbrace{\begin{matrix} 40 & 30 \end{matrix}}_{\min\limits_j \max\limits_i a_{ij} = 30.} & &
\end{array}
$$

З аналізу матриці виграшів видно, що $\underline{\alpha} < \overline{\alpha}$, тобто ця матриця не має сідлової точки. Якщо гравець 1 вибирає свою чисту максимінну стратегію i = 2, то гравець 2, вибравши свою мінімаксну j = 2, програє тільки 20. В цьому випадку гравцеві 1 вигідно вибрати стратегію i = 1, тобто відхилитися від своєї чистої максимінної стратегії та виграти 30. Тоді гравцеві 2 буде вигідно вибрати стратегію j = 1, тобто відхилитися від своєї чистої мінімаксної стратегії і програти 10. У свою чергу гравець 1 повинен вибрати свою 2-гу стратегію, щоб виграти 40, а гравець 2 відповість вибором 2-ї стратегії і так далі.

Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи

1. Чи будь-який конфлікт моделюється матричною грою?

2. Які припущення про поведінку гравців робляться при моделюванні конфлікту?

3. Чим відрізняються захисна та урівноважена стратегії?

4. За яких умов матрична гра має декілька оптимальних розв'язків?

5. Який сенс мають нижня та верхня ціни гри?

Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань

1. Навести змістовний приклад конфліктної ситуації, що моделюється у вигляді біматрічної або матричної гри та має не менше чотирьох чистих стратегій для кожного гравця. Побудувати відповідну ігрову модель.

2. Знайти для цієї гри:

1) розв'язання в чистих стратегіях та всі сідлові точки, якщо це можливо;

2) обчислити нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

3. Навести приклади матричних ігор (матриць А), які:

1) мають більше однієї сідлової точки і знайти ці сідлові точки та відповідні оптимальні розв'язки;

2) мають тільки одну сідлову точку та знайти відповідний оптимальний розв'язок;

3) не мають оптимальних рішень в чистих стратегіях, обчислити для них нижню і верхню ціни в чистих стратегіях і відповідні мінімаксну і максимінну стратегії гравців.

У матриці А повинно бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини перебувають у межах відрізка [C1, C2]. Розмірність матриці А та межі C1, C2 вибрати у нижчеподаній таблиці відповідно до номера в журналі:

№	n	m	C1	C2	№	n	m	C1	C2
1	3	3	−4	5	16	2	6	5	11
2	3	4	−4	5	17	4	3	5	11
3	3	5	−4	5	18	4	5	5	11
4	2	6	−4	5	19	4	4	5	11
5	4	3	−4	5	20	6	2	5	11
6	4	5	−4	5	21	5	2	5	11
7	4	4	−4	5	22	5	3	5	11
8	6	2	−4	5	23	5	4	5	11
9	5	2	−4	5	24	5	5	5	11
10	5	3	−4	5	25	3	3	11	16
11	5	4	−4	5	26	3	4	11	16
12	5	5	−4	5	27	3	5	11	16
13	3	3	5	11	28	2	6	11	16
14	3	4	5	11	29	4	3	11	16
15	3	5	5	11	30	4	5	11	16