

Лабораторна робота №1

ТОЧКОВІ ОЦІНКИ ЧИСЛОВИХ ХАРАКТЕРИСТИК ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН. ДИСПЕРСІЙНА ТАБЛИЦЯ. ПОБУДОВА ДОВІРЧОГО ІНТЕРВАЛУ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО ОЧІКУВАННЯ У ВИПАДКУ ВІДОМОЇ ТА НЕВІДОМОЇ ДИСПЕРСІЙ

Мета роботи – навчитися розраховувати точкові та інтервальні оцінки числових характеристик випадкових величин.

Після виконання роботи студент повинен:

ЗНАТИ принципи побудови довірчих інтервалів; етапи алгоритму побудови довірчого інтервалу математичного очікування у випадку відомої дисперсії; співвідношення між довірчою ймовірністю і рівнем значущості; етапи алгоритму побудови довірчого інтервалу математичного очікування у випадку невідомої дисперсії.

УМІТИ будувати дисперсійну таблицю, обчислювати точкові оцінки, будувати довірчі інтервали числових характеристик випадкових величин, користуватися статистичними таблицями.

Завдання:

1. Побудувати дисперсійну таблицю.
2. Визначити точкові оцінки числових характеристик випадкових величин:
 - математичного очікування;
 - дисперсії (зміщену, незміщену);
 - середньоквадратичного відхилення (зміщену, незміщену).
3. Знайти довірчий інтервал для математичного очікування у випадку відомої дисперсії.
4. Знайти довірчий інтервал для математичного очікування у випадку невідомої дисперсії.

Хід роботи:

1 Знайдемо оцінку математичного очікування \bar{x} , зміщену $\bar{\sigma}_x^2$ та незміщену $\hat{\sigma}_x^2$ оцінки дисперсії, зміщену $\bar{\sigma}_x$ та незміщену $\hat{\sigma}_x$ оцінки середньоквадратичного відхилення за формулами:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$
$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$
$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\hat{\sigma}_x^2},$$

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\bar{\sigma}_x^2}.$$

2 Побудуємо дисперсійну таблицю, яка має вигляд, наведений у табл. 1.1:

Таблиця 1.1 – Дисперсійна таблиця

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2
1				
2				
..				
n				
Сума	$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum x_i^2$	$\sum y_i^2$
Середнє значення	\bar{x}	\bar{y}		

3 Для знаходження довірчого інтервалу математичного очікування у випадку відомої дисперсії виконаємо наступні дії:

а) розрахуємо за допомогою дисперсійної таблиці оцінне значення математичного очікування \bar{x} за формулою

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

б) установимо довірчу ймовірність α або рівень значущості $q = 1 - \alpha$;

в) за таблицею нормального закону розподілу (додаток А) знайдемо всередині таблиці ймовірність $\frac{\alpha + 1}{2}$, після чого ε_α буде визначатись за номерами рядка та стовпчика. Елемент першого стовпчика дає цілі та десяті дані ε_α , елемент першого рядка – соті ε_α ;

г) запишемо довірчий інтервал:

$$\left(\bar{x} - \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

або

$$\bar{x} \pm \varepsilon_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

4 Для побудови довірчого інтервалу математичного очікування у випадку невідомої дисперсії виконаємо наступні дії:

а) розрахуємо точкові оцінки основних характеристик випадкових величин за допомогою дисперсійної таблиці:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i,$$

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2;$$

- б) задамо α – довірчу ймовірність або $q = 1 - \alpha$ – рівень значущості;
 в) для ймовірності α та $(n-1)$ степені свободи за таблицею розподілу Стюдента (додаток Б) знайдемо $t_{q,n-1}$. Перший стовпчик таблиці відповідає кількості ступенів свободи $(n-1)$, перший рядок – ймовірності q . На перетині $(n-1)$ рядка та q стовпчика знаходимо шукане значення $t_{q,n-1}$;
 г) запишемо довірчий інтервал:

$$\bar{x} \pm t_{q,n-1} \cdot \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{n-1}}.$$

Приклад

Дана вибірка $X = (1, 0, -1, 0, 1, 0)$. Знайти точкову оцінку математичного очікування, а також зміщену і незміщену оцінки дисперсії та середньоквадратичного відхилення. Побудувати довірчий інтервал з ймовірністю 95% при $\sigma = 1$ і довірчий інтервал у випадку невідомої дисперсії з ймовірністю 95%. Порівняти побудовані довірчі інтервали.

Розв'язання:

1. Зведемо вихідні дані до дисперсійної таблиці та виконаємо відповідні обчислення (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 – Дисперсійна таблиця до прикладу 1

n	x_i	x_i^2
1	1	1
2	0	0
3	-1	1
4	0	0
5	1	1
6	0	0
Σ	1	3

2. За даними, одержаними з табл. 1.2, розрахуємо:

–математичне очікування \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{6} \cdot 1 = \frac{1}{6};$$

–зміщену та незміщену оцінки дисперсії

$$\bar{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{6} \cdot 3 - \frac{1}{6^2} \cdot 1^2 = \frac{17}{36},$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n(n-1)} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = \frac{1}{5} \cdot 3 - \frac{1}{6 \cdot 5} \cdot 1^2 = \frac{17}{30},$$

–зміщену та незміщену оцінки середньоквадратичного відхилення

$$\bar{\sigma}_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{17}{36}} = \frac{\sqrt{17}}{6};$$

$$\hat{\sigma}_x = \sqrt{\sigma_x^2} = \sqrt{\frac{17}{30}}.$$

3. Знайдемо довірчий інтервал у випадку відомої дисперсії $\sigma=1$ з довірчою ймовірністю 95%. За таблицями нормального розподілу знайдемо всередині таблиці значення $\frac{0,95+1}{2}=0,975$ та проведемо перпендикуляри: горизонтальний перпендикуляр показує цілі та десяті значення $\varepsilon_\alpha=1.9$, а вертикальний – соті значення $\varepsilon_\alpha=0.06$. В результаті $\varepsilon_\alpha=1,90+0,06=1,96$. Тоді довірчий інтервал матиме вигляд

$$\left(\frac{1}{6} - 1,96 \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{6} + 1,96 \frac{1}{\sqrt{6}} \right); (-0,63; 0,97).$$

4. Знайдемо довірчий інтервал для математичного очікування у випадку невідомої дисперсії з довірчою ймовірністю 95%.

Для рівня зі значущістю 5% та п'ятьма ступенями свободи за таблицею розподілу Стюдента знаходимо $t_{табл}(0.05, 5)$. Перший стовпчик таблиці показує число ступенів свободи, перший рядок – рівень значущості. На перетині знаходимо табличне значення $t_{табл}(0.05, 5)$. Тоді довірчий інтервал матиме вигляд

$$\left(\frac{1}{6} - 2,015 \frac{\sqrt{17/6}}{\sqrt{6-1}}; \frac{1}{6} + 2,015 \frac{\sqrt{17/6}}{\sqrt{6-1}} \right); (-0,45; 0,78).$$

Вихідні дані для самостійного виконання лабораторної роботи №1 подані у додатку. Номер варіанта обирається за номером студента в журналі.

ДОДАТОК

Вихідні дані для лабораторної роботи №1

Варіант 1										
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	6,7
Варіант 2										
X _i	5,5	7,1	2,6	5,4	10	11,6	12,4	2,9	2,4	1,6
Y _i	17,7	14	4,2	12,5	29,1	25,8	22	9	4,1	3,7
Варіант 3										
X _i	13,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	6,7
Y _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Варіант 4										
X _i	5,1	7,4	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	16,7	13	7,2	14,5	20,1	21,8	23	11	7,1	4,7
Варіант 5										
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	6,7
Варіант 6										
X _i	15,4	17,6	12,3	15,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	13,7	18	16,2	19,5	14,1	14,8	15	9	5,1	3,7
Варіант 7										
X _i	5,1	7,2	2,4	5,1	11,2	12,2	10,1	4,8	2,3	1,5
Y _i	18,7	28	16,2	25,5	34,1	44,2	35	23	8,1	10,7
Варіант 8										
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	11,7	14	5,2	13,5	20,1	21,8	24	12	7,1	6,7
Варіант 9										
X _i	5,3	7,4	2,4	5,6	11,1	12,2	10,3	4,8	2,3	1,5
Y _i	33,1	38	16,2	40,5	54,1	64,8	55	53	15,1	10,7
Варіант 10										
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	3,7	8	1,2	3,5	9,1	8,8	9,2	3	1,1	0,7
Варіант 11										
X _i	3,4	5,96	1,3	3,9	8	10,6	9,4	3,9	1,4	1
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	6,7
Варіант 12										
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	1,7	1,8	1,6	2,5	7,1	6,8	5	2	1,7	0,7
Варіант 13										
X _i	3,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6
Y _i	13,7	28	9,7	19,5	44,1	54,8	55	43	18,1	16,7
Варіант 14										
X _i	2,4	7,8	2,1	5,8	11,2	12,5	10,3	4,8	2,3	1,5
Y _i	13,7	38	16,2	35,5	54,1	64,8	55	23	15,1	10,7
Варіант 15										
X _i	0,4	0,6	0,3	0,9	1	1,6	1,4	0,6	0,3	0,6
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	16,7

Варіант 16											
X _i	5,2	7,6	2,4	5,9	11	12,6	10,6	4,9	2,4	1,6	
Y _i	13,7	17,8	6,2	15,5	24,1	24,9	25	13	8,1	6,7	
Варіант 17											
X _i	3,5	7,1	2,6	5,4	10	11,8	12,4	2,9	2,5	1,6	
Y _i	17,7	14,3	4,2	12,5	29,1	25,8	22	9	4,1	3,7	
Варіант 18											
X _i	11,7	18,3	6,2	15,5	24,1	23,8	25	13	8,1	9,7	
Y _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,6	2,4	1,6	
Варіант 19											
X _i	6,1	7,4	2,3	5,9	11	11,6	10,4	4,9	2,4	1,6	
Y _i	16,7	13	7,2	14,5	20,1	21,8	23	11	7,1	8,7	
Варіант 20											
X _i	9,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	5,9	2,4	1,6	
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	21,1	24,8	25	13	8,1	6,7	
Варіант 21											
X _i	8,4	17,6	12,3	15,9	10,5	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6	
Y _i	13,7	18	16,2	19,5	14,1	14,8	15	9	5,1	3,7	
Варіант 22											
X _i	7,1	7,2	2,4	5,1	11,2	12,2	10,1	4,8	2,3	1,5	
Y _i	18,7	28	16,2	25,5	34,1	44,2	35	23	8,1	10,7	
Варіант 23											
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6	
Y _i	11,7	14	5,2	13,5	20,1	21,8	24	12	7,1	6,7	
Варіант 24											
X _i	5,3	7,4	2,4	5,6	11,1	12,2	10,3	4,8	2,3	1,5	
Y _i	30,1	38,1	16,2	40,5	54,1	64,8	55	53	15,1	10,7	
Варіант 25											
X _i	5,4	7,6	2,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	2,6	
Y _i	3,7	8	1,2	5,5	9,1	8,8	9,2	3,6	1,1	0,7	
Варіант 26											
X _i	4,4	5,96	1,3	3,9	8	15,6	9,4	3,9	1,4	1,8	
Y _i	23,7	18	6,2	15,5	24,1	24,8	25	13	8,1	6,7	
Варіант 27											
X _i	5,4	7,6	6,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6	
Y _i	1,7	1,8	1,6	2,5	7,1	6,8	5,2	2,1	1,7	0,7	
Варіант 28											
X _i	3,4	7,6	7,3	5,9	11	12,6	10,4	4,9	2,4	1,6	
Y _i	15,7	28	9,7	19,5	44,1	54,8	55	43	17,1	16,7	
Варіант 29											
X _i	6,4	7,8	2,1	3,8	11,2	12,5	10,3	4,8	2,3	1,5	
Y _i	13,7	38	16,2	35,5	54,1	64,8	55	23	12,1	10,7	
Варіант 30											
X _i	1,4	0,6	0,3	0,9	1	1,6	1,4	0,6	0,3	0,6	
Y _i	13,7	18	6,2	15,5	14,1	24,8	15,6	13	8,1	16,7	