# Лабораторна робота № 4
# Графоаналітичний метод розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор

**Мета роботи:** отримати навики застосування графоаналітичного методу розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор.

**Порядок виконання роботи**

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал.

2. Застосувати графоаналітичного метод розв'язання матричних (2× n)-ігор та (m×2)-ігор згідно з варіантом індивідуального завдання та провести необхідний аналіз, будуючи відповідні графіки за допомогою засобів додатка Microsoft Excel або середовища Matlab 6.1.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який має містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

**1. Короткі теоретичні відомості**

Серед матричних ігор, що мають практичне значення, порівняно рідко зустрічаються ігри з сідловою точкою; типовішим є випадок, коли нижня і верхня ціни гри різні. В цьому випадку шукають розв'язок матричної гри у змішаних стратегіях.

**Визначення 1. Змішаною стратегією** гравця називається розподіл імовірностей на множині його чистих стратегій.

Для матричної гри з матрицею $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ змішаною стратегією першого гравця буде вектор $x = (x_1, ..., x_m)$ такий, що

$$x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, ..., m) \text{ та } \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$$

а змішаною стратегією другого гравця − вектор $y = (y_1, ..., y_n)$ такий, що

$$y_j \geq 0, (j = 1, 2,\ldots, n) \text{ і } \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Фон Нейман довів теорему (основну теорему матричних ігор) про те, що кожна матрична гра має принаймні один розв'язок (можливо, в області змішаних стратегій).

Виграш, отриманий у результаті розв'язання, називається ціною гри. З основної теореми виходить, що кожна кінцева гра має ціну.

Знаходження розв'язку матричної гри у змішаних стратегіях досить трудомістка процедура. Проте для окремих випадків матричної гри − для ігор розміру (2×n) та (m×2) розв'язки у змішаних стратегіях можна знайти порівняно просто за допомогою графоаналітичного (графічного) методу, який ґрунтується на теоремі Неймана і такому результаті:

$$V = \max_{0 \leq x \leq 1} \min_{1 \leq j < n} A(x, j) = \min_{0 \leq y \leq 1} \max_{1 \leq i \leq m} A(i, y), \qquad (1)$$

де $A(x, j) = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij}$, $A(i, y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j$, а $V$ − ціна гри.

Розглянемо $(2\times n)$-гру. Хай перший гравець має дві чисті стратегії − $A_1$, $A_2$, а супротивник − n чистих стратегій: $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$. Тоді змішана стратегія першого гравця має вигляд p = (x, 1−x), де $0 \le x \le 1$. Другий гравець при використанні своєї j-ї чистої стратегії проти змішаної стратегії p першого гравця отримує виграш: $y_j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1 - x)$, де j = 1, 2, ..., n. Виграш другого гравця є лінійною функцією від змішаної стратегії першого гравця.

Для знаходження значення гри і оптимальної змішаної стратегії першого гравця досить на відрізку [0,1] побудувати графіки сімейства лінійних функцій $y^j = a_{1j} \cdot x + a_{2j} \cdot (1 - x)$, де j = 1, 2, ..., n та знайти точку максимуму $x^0$ функції $\min\limits_{1 \le j \le n}(a_{1j}x + a_{2j}(1 - x))$ − нижнього обвідного сімейства.

Розв’язок $(m\times 2)$-гри шукається аналогічним чином.

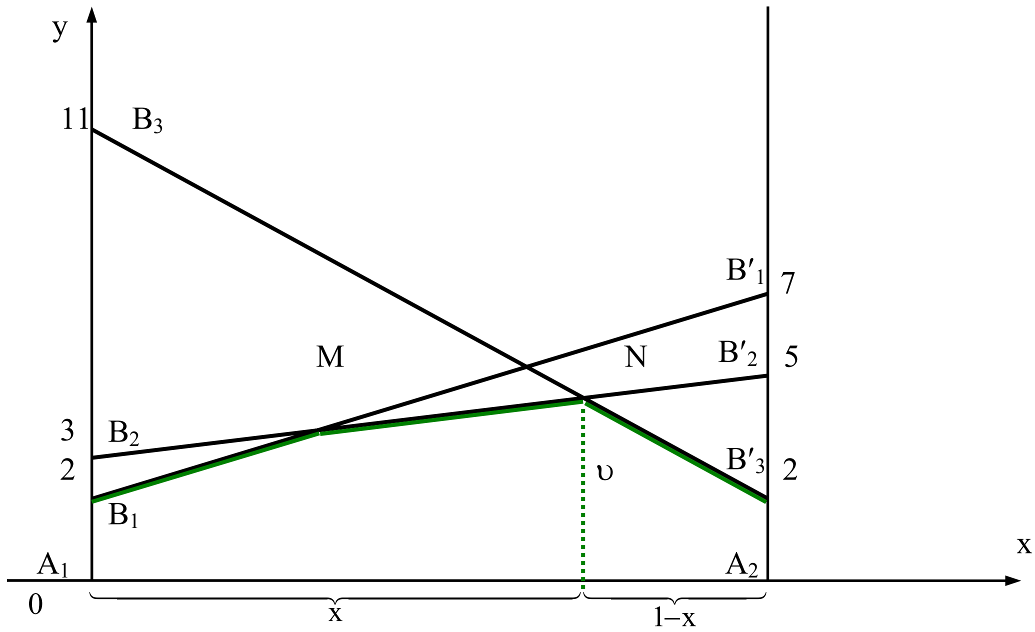
Пояснимо метод на прикладах.

**Приклад 1**

Розглянемо гру, задану платіжною матрицею.

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ 1 \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 3 & 11 \\ 7 & 5 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

На площині xOy введемо систему координат та на осі x відкладемо відрізок одиничної довжини $A_1$, $A_2$, кожній точці якого відповідатиме деяка змішана стратегія першого гравця (x, 1−x). Зокрема, точці $A_1$ = (0;0) відповідає стратегія $A_1$, точці $A_2$ = (1;0) − стратегія $A_2$ і так далі.




У точках $A_1$ та $A_2$ відновимо перпендикуляр і на отриманих прямих відкладатимемо виграші гравців. На першому перпендикулярі (в даному випадку він збігається з віссю y) відкладемо виграш гравця 1 при стратегії $A_1$, а на другому − при стратегії $A_2$. Якщо гравець 1 застосує стратегію $A_1$, то виграє при стратегії $B_1$ другого гравця $-$ 2, при стратегії $B_2$ $-$ 3, а при стратегії $B_3$ $-$ 11. Числам 2, 3, 11 на осі x відповідають точки $B_1$, $B_2$ та $B_3$.

Якщо ж гравець 1 застосує стратегію $A_2$, то його виграш при стратегії $B_1$ дорівнює 7, при $B_2$ $-$ 5, а при $B_3$ $-$ 2. Ці числа визначають точки $B'_1$, $B_2'$, $B_3$ на перпендикулярі, відновленому в точці $A_2$. З'єднавши між собою точки $B_1$ та $B'_1$, $B_2$ та $B'_2$, $B_3$ та $B'_3$, отримаємо три прямі, відстань до яких від осі $x$ визначає середній виграш при будь-якому поєднанні відповідних стратегій. Наприклад, відстань від будь-якої точки відрізка $B_1B'_1$ до осі x визначає середній виграш $\upsilon_1$ при будь-якому поєднанні стратегій $A_1$ та $A_2$ (з частотами x та $1-x$) і стратегією $B_1$ гравця 2. Ця відстань дорівнює $2x_1 + 6(1-x_2) = \upsilon_1$

Таким чином, ординати точок, що належать ламаній $B_1MNB'_3$ визначають мінімальний виграш гравця 1 при застосуванні ним будь-яких змішаних стратегій. Ця мінімальна величина є максимальною в точці N; отже, цій точці відповідає оптимальна стратегія $X^* = (x, 1-x)$, а її ордината дорівнює ціні гри $\upsilon$. Координати точки N знаходимо як точку перетину прямих $B_2$ $B'_2$ та $B_3$ $B'_3$.

Відповідні два рівняння мають вигляд

$$\begin{cases} 3x + 5(1-x) = \upsilon \\ 11x + 2(1-x) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow x = \frac{3}{11}, \upsilon = \frac{49}{11}.$$

Отже, $X = (\frac{3}{11}; \frac{9}{11})$, при ціні гри $\upsilon = \frac{49}{11}$. Таким чином, ми можемо знайти оптимальну стратегію за допомогою матриці

$$\begin{pmatrix} 3 & 11 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Оптимальні стратегії для гравця 2 можна знайти за системою

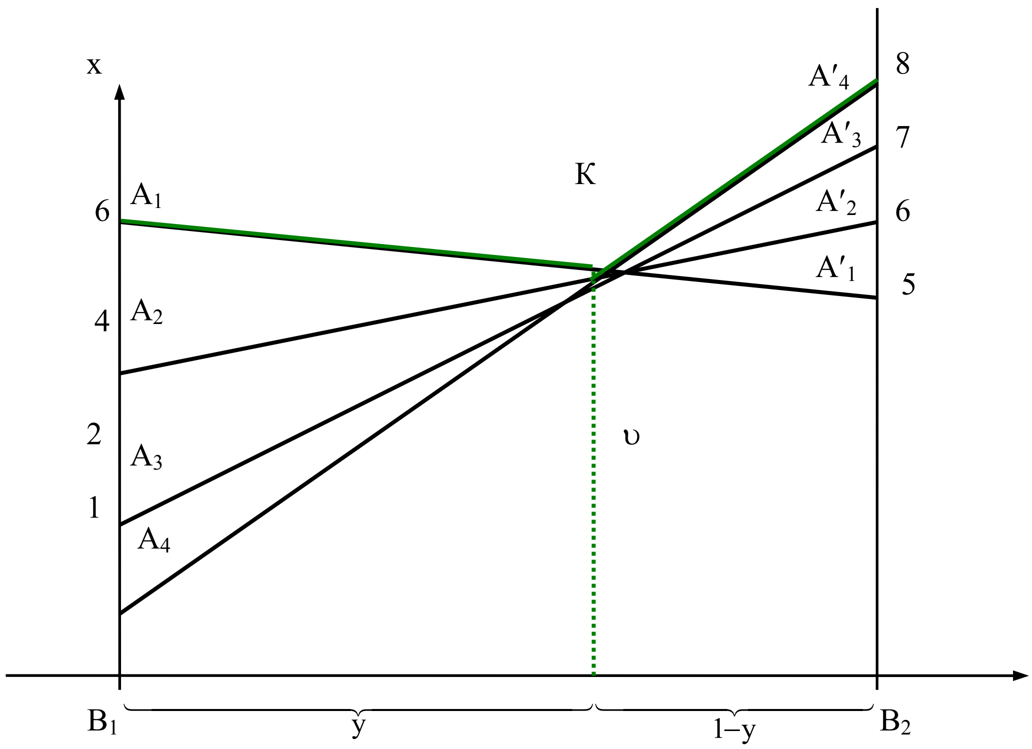
$$\begin{cases} 3y + 5(1-y) = \upsilon \\ 5y + 2(1-y) = \upsilon \end{cases} \Rightarrow y = \frac{9}{11},$$

тому $Y = (0; \frac{9}{11}; \frac{2}{11})$. (З рисунка видно, що стратегія B1 не увійде до оптимальної стратегії).

**Приклад 2**

Знайти розв'зок гри, заданої матрицею

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ 1 & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 6 \\ 2 & 7 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} \end{array}$$




Розв’язання. Матриця має розмірність $2\times4$. Будуємо прямі, що відповідають стратегіям гравця 1. Ламана $A_1KA'_4$ відповідає верхній межі виграшу гравця 1, а відрізок NK − ціні гри. Розв’язок гри такий $Y=(\frac{3}{8};\ \frac{5}{8})$; $X=(\frac{7}{8};\ 0;\ 0;\ \frac{1}{8})$; $\upsilon=\frac{43}{8}$.

**Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи**

1. Як графічно виявляється співвідношення (1)?
2. Описати процедуру графоаналітичного розв’язання (m×2)-гри.
3. Чи може (2× n)-гра мати нескінчену множину розв’язків?
4. Чому точка максимуму $x^0$ нижнього обвідного сімейства функцій $y_j=a_{1j}x+a_{2j}(1-x)$ є розв’язком (2× n)-гри?

**Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань**

1. Вибрати матрицю А розміру (2× n) і таку, що має сідлову точку, та знайти розв’язання відповідної гри в чистих стратегіях і, використовуючи графічний метод, знайти розв’язання цієї ж гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри, результати порівняти.

2. Вибрати матрицю А розміру (2× n) і таку, що не має сідлової точки і, використовуючи графічний метод, знайти розв’язання відповідної гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри.

3. Вибрати матрицю А розміру (m× 2) і таку, що вона має сідлову точку та знайти розв’язання відповідної гри в чистих стратегіях і, використовуючи гра-

фічний метод, знайти розв’язання цієї ж гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри, результати порівняти.

4. Вибрати матрицю А розміру $(m\times 2)$ і таку, що вона не має сідлової точки і, використовуючи графічний метод, знайти розв’язання відповідної гри у змішаних стратегіях. Визначити ціну гри.

У матриці А повинно бути не менше трьох попарно різних елементів і обов’язково мають бути задіяні числа С1, С2. Розмірність матриці А та числа С1, С2 вибрати в поданій таблиці відповідно до номера в журналі:

| № | n | m | C1 | C2 | № | n | m | C1 | C2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | −4 | 5 | 16 | 3 | 5 | 0 | 62 |
| 2 | 3 | 4 | −2 | 6 | 17 | 4 | 3 | 15 | 18 |
| 3 | 3 | 5 | 0 | 7 | 18 | 4 | 5 | −2 | 11 |
| 4 | 4 | 5 | 10 | 15 | 19 | 4 | 4 | 25 | 32 |
| 5 | 4 | 3 | −14 | 5 | 20 | 6 | 3 | −5 | 40 |
| 6 | 4 | 5 | 2 | 21 | 21 | 5 | 5 | 3 | 12 |
| 7 | 4 | 4 | −24 | 0 | 22 | 5 | 3 | −7 | 13 |
| 8 | 5 | 3 | 32 | 43 | 23 | 5 | 4 | 8 | 22 |
| 9 | 5 | 4 | −10 | 25 | 24 | 5 | 5 | 14 | 19 |
| 10 | 5 | 3 | −40 | −25 | 25 | 3 | 3 | 1 | 16 |
| 11 | 5 | 4 | −6 | 3 | 26 | 3 | 4 | −8 | 1 |
| 12 | 5 | 5 | −41 | 35 | 27 | 3 | 5 | −11 | 26 |
| 13 | 3 | 4 | 15 | 34 | 28 | 3 | 4 | −3 | 12 |
| 14 | 3 | 4 | 23 | 31 | 29 | 4 | 3 | 10 | 20 |
| 15 | 3 | 5 | 25 | 54 | 30 | 4 | 5 | −6 | 6 |

## Лабораторна работа № 5
## Зведення матричних ігор до задач лінійного програмування

**Мета роботи:** ознайомитися зі способами розв'язання матричних ігор, що базуються на методах лінійного програмування.

**Порядок виконання роботи**

1. Вивчити необхідний теоретичний матеріал.

2. Привести матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування та розв'язати їх симплекс методом, використовуючи сервіс «Поиск решения» додатку Microsoft Excel або іншу програму для розв'язання задач лінійного програмування.

3. Скласти звіт про виконання роботи, який повинен містити:

− постановку задачі;

− опис та аналіз ходу розв'язання задачі;

− висновки за результатом виконаної роботи.

**1. Короткі теоретичні відомості**

Матрична гра являє собою антагоністичну гру двох осіб з платіжною матрицею $A_{m\times n}=[a_{ij}]$, з $m$ можливими стратегіями першого гравця та $n$ стратегіями другого гравця. Перший гравець прагне максимізувати свій виграш, а другий – мінімізувати свій програш. Якщо матриця гри має сідлову точку, тобто існує елемент, що є максимальним у стовпці і мінімальним у рядку, то гра має розв'язок в чистих стратегіях. У протилежному випадку гра має розв'язок у змішаних стратегіях, які являють собою ймовірнісні розподіли на множині чистих стратегій: $\overline{p}=\left(p_1,...,p_m\right)^T$ – змішана стратегія першого гравця, $\overline{q}=\left(q_1,...,q_n\right)^T$ – змішана стратегія другого гравця, $\sum\limits_{i=1}^{m}p_i=\sum\limits_{j=1}^{n}q_j=1$.

Використання у грі оптимальних змішаних стратегій забезпечує першому гравцеві виграш, не менший ніж при використанні ним іншої довільної стратегії; другому гравцеві – програш, не більший ніж при використанні ним іншої довільної стратегії. Ціна гри (оптимальне очікуване значення) має вигляд

$$V=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i^0q_j^0,\text{ де }\overline{p}_0=\left(p_1^0,...,p_m^0\right)^T\text{ і }\overline{q}_0=\left(q_1^0,...,q_n^0\right)^T.$$

Для знаходження оптимальних стратегій в іграх двох гравців з нульовою сумою можна застосовувати графічний метод (для ігор виду 2×m чи n×2 – див. лабораторну роботу № 3), а також можна звести задачу до загального вигляду задач лінійного програмування і розв'язувати її, використовуючи симплекс-метод.

Згідно з основною теоремою теорії ігор, кожна скінченна гра має принаймні один розв'язок, який визначає деяка змішана стратегія. Окрім того, має місце така теорема:

**Теорема 1.** Для того, щоб число $V$ було ціною гри, а вектори $\overline{p}_0=\left(p_1^0,...,p_m^0\right)^T$ та $\overline{q}_0=\left(q_1^0,...,q_n^0\right)^T$ були векторами ймовірностей оптимальних стратегій, необхідно і достатньо, щоб виконувалась така система нерівностей:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^0 \ge V, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le V, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{cases}$$

Для зручності, будемо вважати, що $V > 0$. На практиці цього завжди можна досягти, збільшуючи всі елементи матриці $[a_{ij}]$ на одне і те ж додатне число K (дана процедура не впливає на оптимальні стратегії, а тільки збільшує ціну гри на K).

Метою першого гравця є отримання максимального виграшу, а другого – мінімального програшу. З огляду на сформульовану теорему, задачу максимізації гарантованого виграшу першого гравця та задачу гарантованого програшу другого гравця можна представити як пару взаємно двоїстих задач лінійного програмування.

*Задача I гравця:*

$$Z^* = V \to \max;$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 a_{ij} \ge V, \; j = 1, ..., n; \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^0 = 1, p_i^0 \ge 0, \; i = 1, ..., m;$$

*Задача II гравця:*

$$F^* = V \to \min;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^0 \le V, \; i = 1, ..., m; \tag{2}$$

$$\sum_{J=1}^{n} q_j^0 = 1, \; q_j^0 \ge 0, \; j = 1, ..., n.$$

Запишемо систему обмежень (1) в розширеній формі:

$$p_1^0 a_{11} + p_2^0 a_{21} + \cdots + p_m^0 a_{m1} \ge V,$$
$$\vdots$$
$$p_1^0 a_{1n} + p_2^0 a_{2n} + \cdots + p_m^0 a_{mn} \ge V,$$
$$p_1^0 + p_2^0 + \cdots + p_m^0 = 1.$$

Поділимо праві та ліві частини обмежень на $V$ (відповідно до зробленого припущення $V$ – додатне число). Отримаємо:

$$\frac{p_1^0 a_{11}}{V} + \frac{p_2^0 a_{21}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{m1}}{V} \ge \frac{V}{V},$$

$$\frac{p_1^0 a_{12}}{V} + \frac{p_2^0 a_{22}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{m2}}{V} \ge \frac{V}{V},$$

$$\vdots$$

$$\frac{p_1^0 a_{1n}}{V} + \frac{p_2^0 a_{2n}}{V} + \cdots + \frac{p_m^0 a_{mn}}{V} \ge \frac{V}{V},$$

$$\frac{p_1^0}{V} + \frac{p_2^0}{V} + \cdots + \frac{p_m^0}{V} = \frac{1}{V}.$$

Зробивши заміну $\frac{p_i^0}{V} = x_i,\ i = 1, 2, \ldots, m,$ маємо:

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1} \ge 1,$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn} \ge 1,$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = \frac{1}{V}.$$

Оскільки метою першого гравця є отримання максимального виграшу, то тим самим, він повинен забезпечити $\min \frac{1}{V}$. Отже, визначення оптимальної стратегії першого гравця зводиться до розв’язання такої задачі лінійного програмування:

знайти $Z = x_1 + x_2 + \cdots + x_m \to \min$ за обмежень

$$x_1 a_{11} + x_2 a_{21} + \cdots + x_m a_{m1} \ge 1,$$
$$\vdots$$
$$x_1 a_{1n} + x_2 a_{2n} + \cdots + x_m a_{mn} \ge 1,$$
$$x_i \ge 0, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Міркуючи аналогічним чином відносно другого гравця, та ввівши заміну $\frac{q_j^0}{V} = y_j,\ j = 1, 2, \ldots, n,$ отримаємо задачу:

знайти $F = y_1 + y_2 + \cdots + y_n \to \max$ за обмежень

$$y_1 a_{11} + y_2 a_{12} + \cdots + y_n a_{1n} \le 1,$$
$$\vdots$$
$$y_1 a_{m1} + y_2 a_{m2} + \cdots + y_n a_{mn} \le 1,$$
$$y_j \ge 0, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n.$$

Задача другого гравця є двоїстою задачею відносно задачі першого гравця і навпаки. Процес знаходження розв’язку гри з використанням лінійного програмування складається з таких етапів:

1. Побудова пари двоїстих задач лінійного програмування, які є еквівалентними матричній грі, що розглядається.

2. Знаходження оптимальних планів пари двоїстих задач.

3. Знаходження розв’язку гри, враховуючи співвідношення між оптимальними планами двоїстих задач та оптимальними стратегіями і ціною гри.

**2. Приклад застосування лінійного програмування**

Дві фірми можуть вкласти свій наявний капітал у будівництво п'яти об'єктів. Стратегія фірм: і-та стратегія полягає у фінансуванні і-го об'єкта (i=1, 2, …, 5). Враховуючи особливості вкладів й інші умови, прибуток фірми виражається за допомогою матриці А:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Прибуток першої фірми є величиною збитку другої, тобто описувану гру можна розглядати як гру двох осіб з нульовою сумою.

**Розв'язання.** Для зведення вищезгаданої задачі до задачі лінійного програмування треба, насамперед, до кожного елемента матриці додати число k=4 (усі елементи матриці А мають бути додатними). Отримуємо:

$$A = \begin{bmatrix} 6\,4\,5\,1\,8 \\ 4\,2\,3\,8\,7 \\ 6\,4\,7\,6\,3 \\ 4\,1\,5\,4\,5 \\ 7\,4\,4\,2\,6 \end{bmatrix}.$$

Вводимо невідомі величини $x_1, x_2, \ldots, x_5$. Тоді отримуємо таку задачу лінійного програмування: знайти $Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \to \min$ при виконанні умов

$$6x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 \ge 1,$$

$$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 4x_5 \ge 1,$$

$$5x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 5x_4 + 4x_5 \ge 1,$$

$$x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \ge 1,$$

$$8x_1 + 7x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 \ge 1,$$

$$x_i \ge 0,\ i = \overline{1,5}.$$

Розв'язком цієї задачі буде: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0{,}125,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0{,}125.$

Оскільки $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = \dfrac{1}{V}$, то $V = \dfrac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5} = \dfrac{1}{0{,}25} = 4.$

Знаючи те, що $x_i = \dfrac{p_i}{V}$, отримуємо $p_1 = 0,\ p_2 = 0,\ p_3 = 0{,}5,\ p_4 = 0,\ p_5 = 0{,}5.$

Побудуємо до задачі двоїсту. За невідомі візьмемо $y_1, y_2, \ldots, y_5$. Маємо:

$$F = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \to \max,$$

$$6y_1 + 4y_2 + 5y_3 + y_4 + 8y_5 \le 1,$$

$$4y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 8y_4 + 7y_5 \le 1,$$
$$6y_1 + 4y_2 + 7y_3 + 6y_4 + 3y_5 \le 1,$$
$$4y_1 + y_2 + 5y_3 + 4y_4 + 5y_5 \le 1,$$
$$7y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 6y_5 \le 1, y_j \ge 0, j = \overline{1,5}.$$

Розв’язком цієї задачі буде: $y_1 = 0,\ y_2 = 0{,}25,\ y_3 = 0,\ y_4 = 0,\ y_5 = 0.$

Знаючи те, що $y_i = \dfrac{q_i}{V}$, отримуємо $q_1 = 0,\ q_2 = 1,\ q_3 = 0,\ q_4 = 0,\ q_5 = 0.$

Отже, вектори ймовірностей оптимальних змішаних стратегій відповідно для першої та другої фірми будуть p = (0; 0; 0,5; 0; 0,5); q = (0; 1; 0; 0; 0), а ціна початкової гри − $V^* = V - 4 = 0.$

**Питання для підготовки до захисту лабораторної роботи**

1. Як визначаються оптимальні стратегії гравців?
2. В чому полягає метод зведення матричних ігор до задач лінійного програмування?

**Задача лабораторної роботи та варіанти індивідуальних завдань**

1. Зробити формальну постановку задачі.
2. Привести матричну гру до пари двоїстих задач лінійного програмування та розв’язати їх симплекс-методом.
3. Знайти оптимальні стратегії гравців.

Вибрати матрицю А: у ній має бути не менше чотирьох попарно різних елементів і таких, що їх величини належать відрізку [C1,C2]. Розмірність матриці А та межі C1, C2 вибрати у таблиці відповідно до номеру в журналі:

| № | n | m | C1 | C2 | № | n | m | C1 | C2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 3 | 3 | –4 | 5 | 16 | 5 | 6 | 5 | 11 |
| 2 | 3 | 4 | –4 | 5 | 17 | 4 | 3 | 5 | 11 |
| 3 | 3 | 5 | –4 | 5 | 18 | 4 | 5 | 5 | 11 |
| 4 | 4 | 6 | –4 | 5 | 19 | 4 | 4 | 5 | 11 |
| 5 | 4 | 3 | –4 | 5 | 20 | 6 | 2 | 5 | 11 |
| 6 | 4 | 5 | –4 | 5 | 21 | 5 | 2 | 5 | 11 |
| 7 | 4 | 4 | –4 | 5 | 22 | 5 | 3 | 5 | 11 |
| 8 | 6 | 3 | –4 | 5 | 23 | 5 | 4 | 5 | 11 |
| 9 | 5 | 4 | –4 | 5 | 24 | 5 | 5 | 5 | 11 |
| 10 | 5 | 3 | –4 | 5 | 25 | 3 | 3 | 11 | 16 |
| 11 | 5 | 4 | –4 | 5 | 26 | 3 | 4 | 11 | 16 |
| 12 | 5 | 5 | –4 | 5 | 27 | 3 | 5 | 11 | 16 |
| 13 | 3 | 3 | 5 | 11 | 28 | 5 | 6 | 11 | 16 |
| 14 | 3 | 4 | 5 | 11 | 29 | 4 | 3 | 11 | 16 |
| 15 | 3 | 5 | 5 | 11 | 30 | 4 | 5 | 11 | 16 |