TS CPRP 1
Sciences de l’ingénieur

Séquence 2 : Représenter les pièces dans une MOCN

Les MOCN dans le noir

1. Allumer le feu

1.1 Les ingrédients pour usiner

En BTS CPRP, nous nous intéresseront au machines ayant des outils qui sont commandés numériquement par un programme informatique. Quand on achète une MOCN, elle dispose déjà d'un programme interne. Nous devons cependant le modifier pour qu'il réponde à notre besoin. Comme en informatique, chaque programme à un but précis. Nous auront en principe un programme à entrer dans la machine par pièce que nous souhaitons usiner. Pour programmer, vous connaissez sûrement déjà certain langage de programmation : on peut citer le C++, HTML, CSS, Python, Arduino, etc. Cependant les programmes utilisés pour l'usinage sont assez spécifiques et changent moins que dans d'autres domaines [1]. À l'origine, le langage de programmation était le **G-code** [2], et finalement remplacé par l'**ISO** [3] mais certain constructeur peuvent avoir d'autre langage propre à la marque du constructeur.

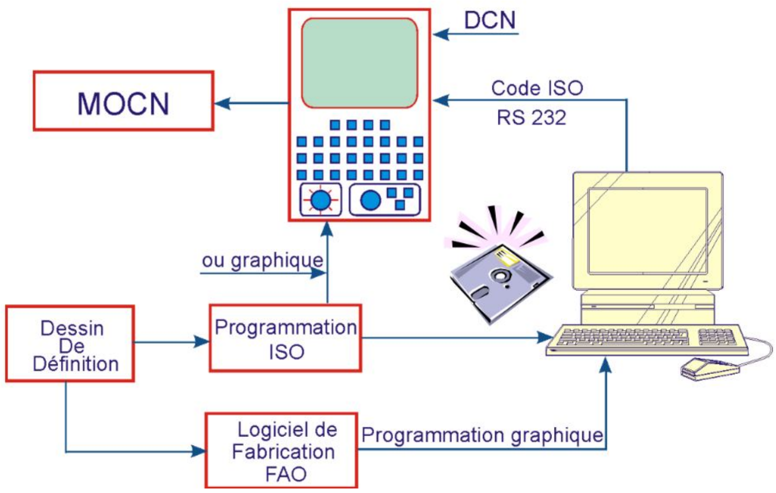


FIGURE 1.1 – Chargement d'un programme dans une MOCN. Université des Sciences et de la Technologie d'Oran Mohamed-Boudiaf USTOMB

1. Les langages de programmation pour le code ou les sites internet évoluent sans cesse, pour un codeur informatique, le choix du langage est très large par rapport à notre domaine.
2. , Développé par l'EIA (Electronic Industries Alliance) au début des années 1960.
3. Remplacé en février 1980 sous la référence RS274D.

Les machines ne sont pas comme nous, sans aucune perception de leur environnement elles sont dans le noir. Et nous leur demandons d'usiner avec une grande précision. Si on veut la longueur maximum d'une pièce de 20,001 mm mais que la pièce sortie mesure 20,002 : elle sera à jeter... Et on veut contrôler des vitesses très lentes ou très rapides (0,001 m/min à 130 m/min).

Alors dans tout ça, de quoi avons-nous besoin ?

A retenir 1.1

— Un objet de départ dont on va enlever la matière : ***Le brut de matière*** ;
— Des éléments pour enlever la matière : ***Les outils*** ;
— De la force ! pour trancher, percer, tronçonner, fournie par : ***Des moteurs*** ;
— Oui mais si j'essaye de couper une feuille de papier avec des ciseaux, sans la tenir dans l'autre main c'est difficile, il faut donc que le *Brut* soit solidement "attaché" : La ***MIP*** et le ***MAP***[a] ;
— Pour faire la forme que l'on veut : ***Une trajectoire*** ;

[a] La MIP (MIse en Position) et le MAP (MAintient en Position) seront abordés plus tard dans l'année dans différents cours, mais surtout en industrialisation.

Dans la suite nous allons nous intéresser au dernier point. *Repérer les éléments dans l'espace.*

Pour usiner, nous avons besoin de plusieurs informations à chaque instant t, la position de l'outil qui usine, sa vitesse, son accélération, sa trajectoire. Ces informations doivent être calculées puis programmées dans la machine. Nous allons voir dans ce chapitre comment construire l'information : repérer les objets dans les MOCN.

1.2 Outil mathématique pour futur.e.s ingénieur : Vous

Un *repère* sera présent pour **toutes** les études, analyses, interrogations que vous verrez. On ne peut pas faire sans. Sinon on ne serait pas capable de décrire ce que l'on voit sous forme mathématique et donc, impossible de programmer les machine. Un *repère* est constitué de deux choses : Une $\mathscr{B}ase$ et une Origine. On l'écrit comme suit : $\mathscr{R}(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.
On lit la phrase suivante : Voici $\mathscr{R}$, un repère constitué d'une origine O et d'une $\mathscr{B}ase$ de vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$.
La $\mathscr{B}ase$, c'est le tableau Excel infini, où sont présents tous les vecteur (en deux ou trois dimensions), mais ils ne peuvent pas être égaux. Par exemple, $\vec{a} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$ ne peuvent pas être élus au rang de $\mathscr{B}ase$ car ils sont égaux. En revanche, dans la bibliothèque infinie il y a les vecteurs $\vec{i} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{Bmatrix}$ et $\vec{j} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{Bmatrix}$ qui peuvent être choisi pour faire une base.

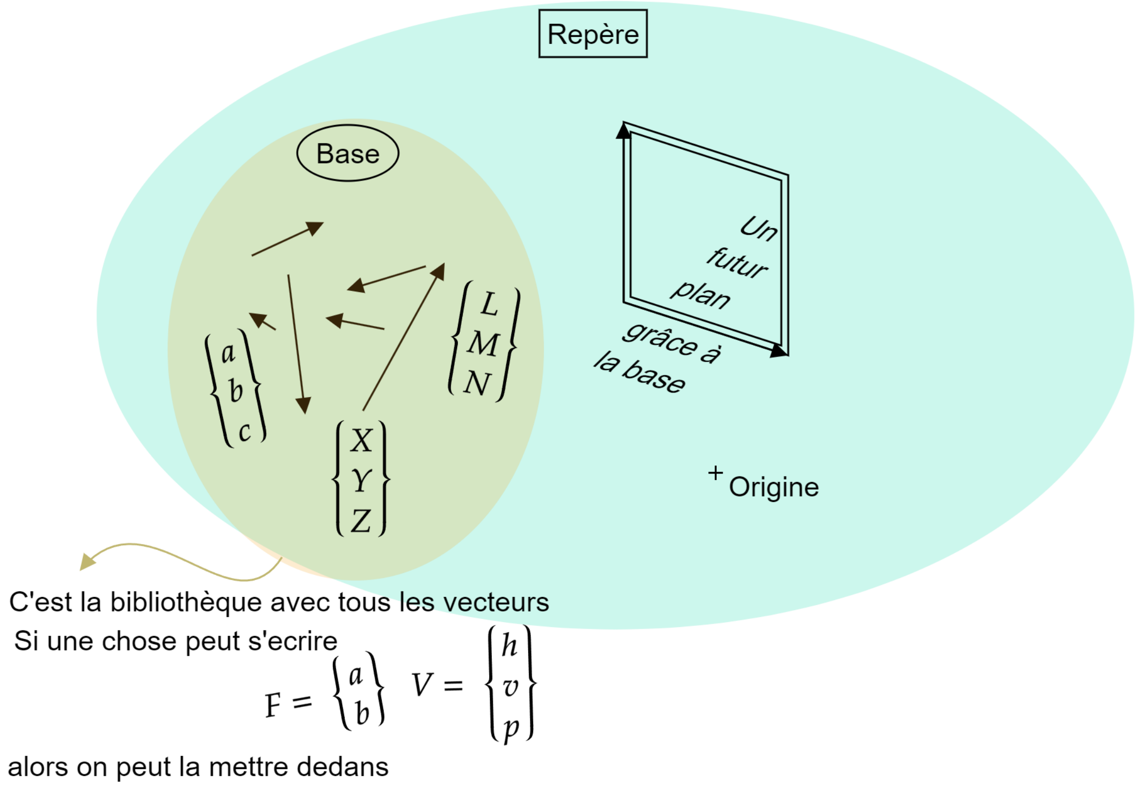


FIGURE 1.2 – Éléments pour construire un repère

Un repère $\mathscr{R}$ est la donnée d'un point d'origine $\mathscr{O}$ et d'une base $\mathscr{B}$, permettant de repérer tous points de l'espace par rapport à $\mathscr{O}$ (l'origine du repère). On décide que $\mathscr{O}$ est notre origine, on choisi deux vecteurs dans notre bibliothèque (sauf s'ils sont égaux), on prend l'origine des deux vecteurs et on le colle sur notre point $\mathscr{O}$. Voilà, le repère est fait.

R En pratique, nous n'avons pas besoin de dire si un vecteur ou un repère est en 2 ou 3 dimensions. Un vecteur en 2 dimensions possède 2 données $\vec{i} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$, il en possédera trois, pour la dimension trois : $\vec{i} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$. De même, un repère en deux dimensions s'écriera $\mathscr{R}(0,\vec{x},\vec{y})$, tandis-qu'un repère à trois dimensions s'écriera $\mathscr{R}(0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

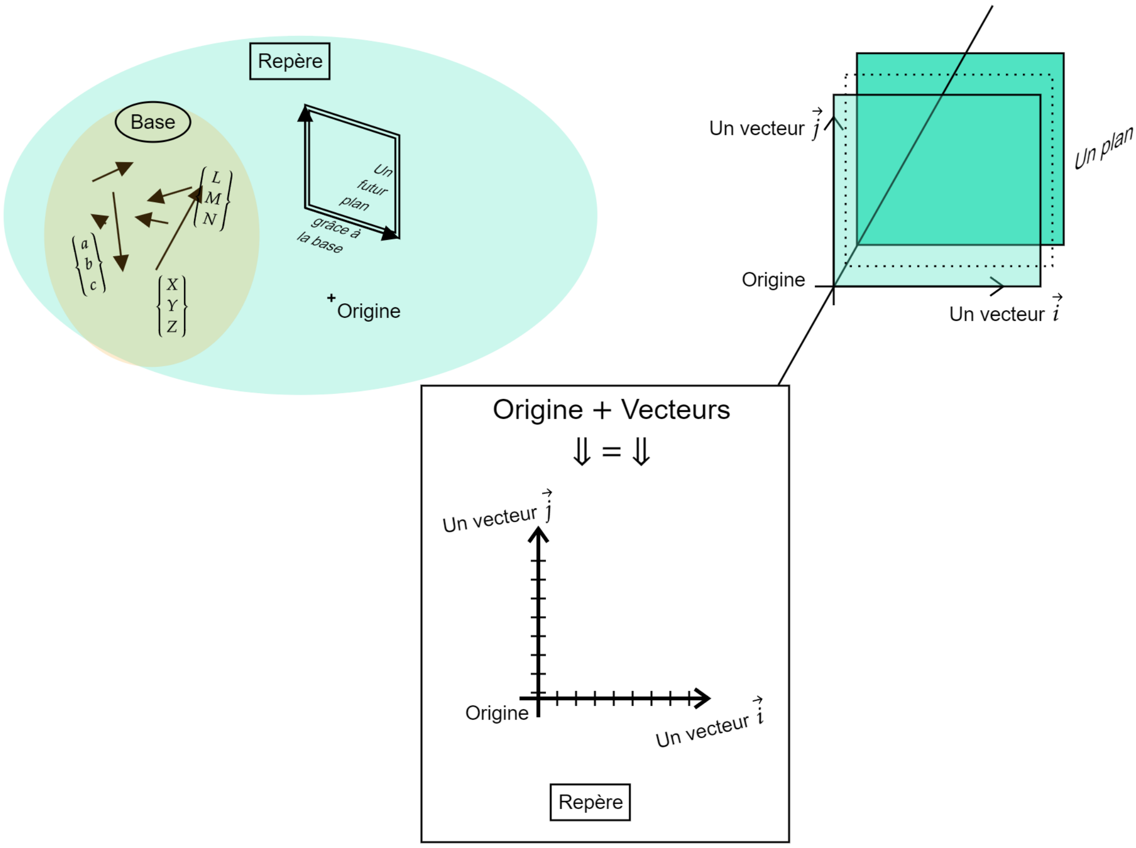
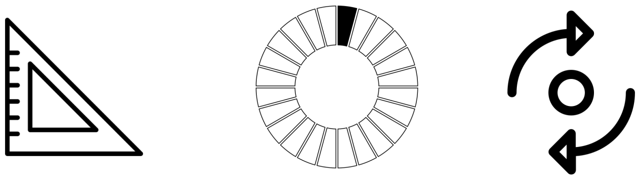


FIGURE 1.3 – Symbolisation d'un repère. Une fois une base (deux vecteurs) et une origine ($\mathscr{O}$) choisies, les deux vecteurs mis bout à bout forme un plan, et $\mathscr{O}$ nous sert à connaître n'importe quel point par rapport à lui.

Maintenant que nous avons vu le cas général, nous allons voir les cas que vous croiserez en pratique. Que ce soit en théorie ou en pratique, en contrôle ou à l'examen, il y a quelque situation à connaître pour ne pas être surpris.e.

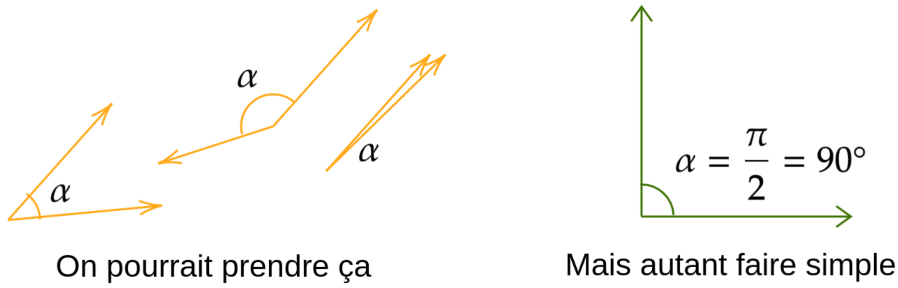
1.3 Ortho-normé-direct

Cette expression, vous la verrez beaucoup. Nous avons vu comment construire un repère, mais ceux qui seront utilisés pour les exercices ou en examens seront pour la plupart du temps construit pour être le plus simple possible. Nous allons détailler les repères principaux, qui sont orthogonaux, normés et directs.



1.3.1 Orthogonalité

Les vecteurs que nous prenons dans notre bibliothèque (la $\mathscr{Base}$) ne seront en général pas pris au hasard. On s'arrangera avoir deux vecteurs simplement perpendiculaires.



En sciences de l'ingénieur, on utilisera davantage certaines unités plutôt que d'autres. Notamment pour les rotations, les radians plutôt que les degrés. Une rotation d'un demi tour (180°) sera égal à π ce qui simplifiera grandement les calculs.

1.3.2 Normé

Une autre simplification est la normalisation des vecteurs utilisés pour construire une base.

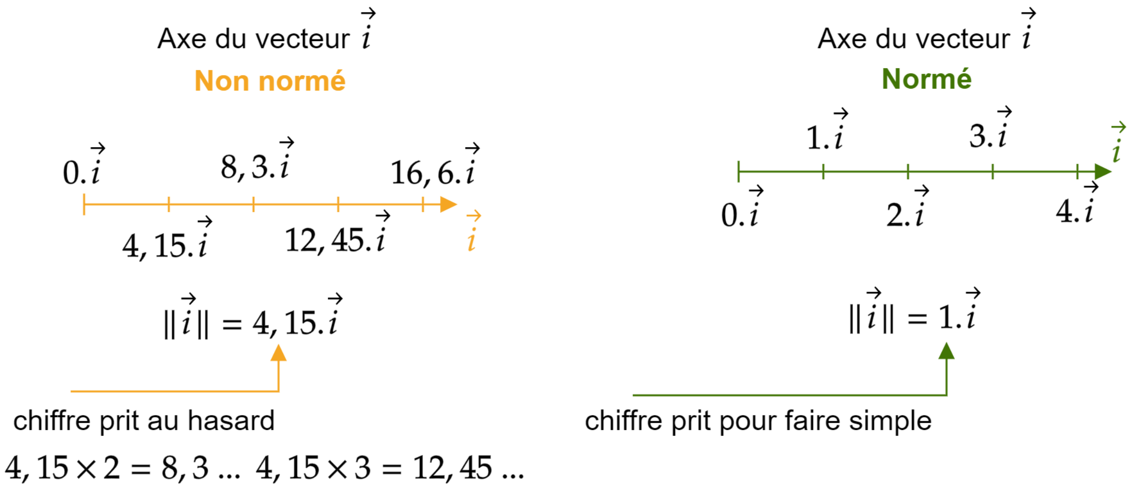


FIGURE 1.4 – Construction d'une base avec des vecteurs à norme unitaire.

La distance entre chaque trait d'un repère dit normé est de *une* unité. L'aspect plus scientifique des *vecteurs unitaires* sera détaillé dans le chapitre [2.1] dédié.

Definition 1.1 Un vecteur qui possède une norme de une unité est appelé **vecteur unitaire**. En mathématique, la norme de quelque chose s'écrit $\|quelquechose\|$ On écrira donc : $\|\vec{u}\| = 1$

1.3.3 Direct

En choisissant un repère dit *direct*, on choisira une fois pour toute, le sens **positif** de rotation entre les axes. En grande majorité, on prendra le sens **anti-horaire**, donc **trigonométrique**. Cela simplifiera les calculs, notamment pour toutes les formules de trigonométrie. De plus, il est important d'avoir un outil commun, par exemple pour décrire la rotation d'une vis dans son logement les calculs négatifs ou positifs peuvent décrire un vissage ou dévissage et une erreur de compréhension doit être évitée.

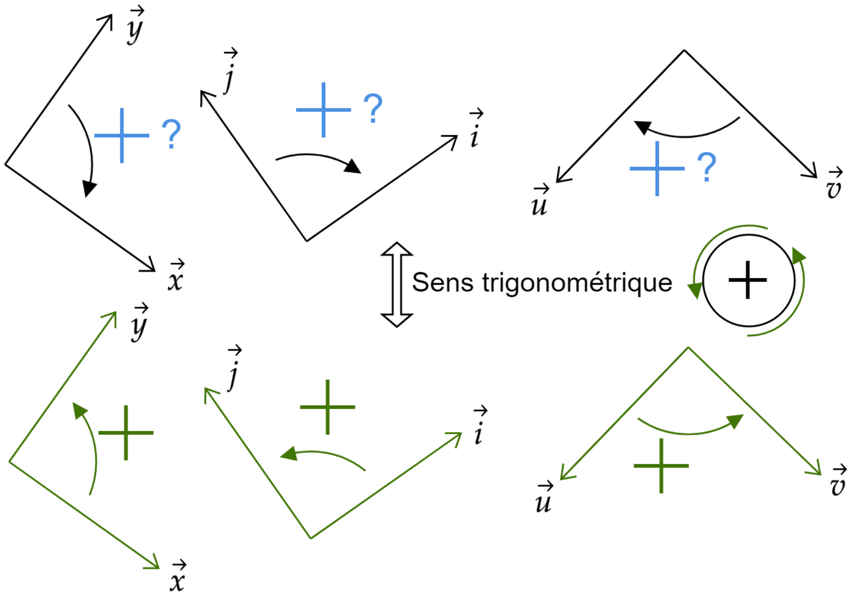


FIGURE 1.5 – Construction d'une base suivant le sens trigonométrique.

A retenir 1.2 Au final, on aura donc un repère qui en général, se composera de deux vecteurs non égaux et unitaires, qui seront mis bout à bout et perpendiculaires. L'endroit de leur rencontre sera le point d'origine du repère. Et le sens sera positif quand on suivra le sens trigonométrique.

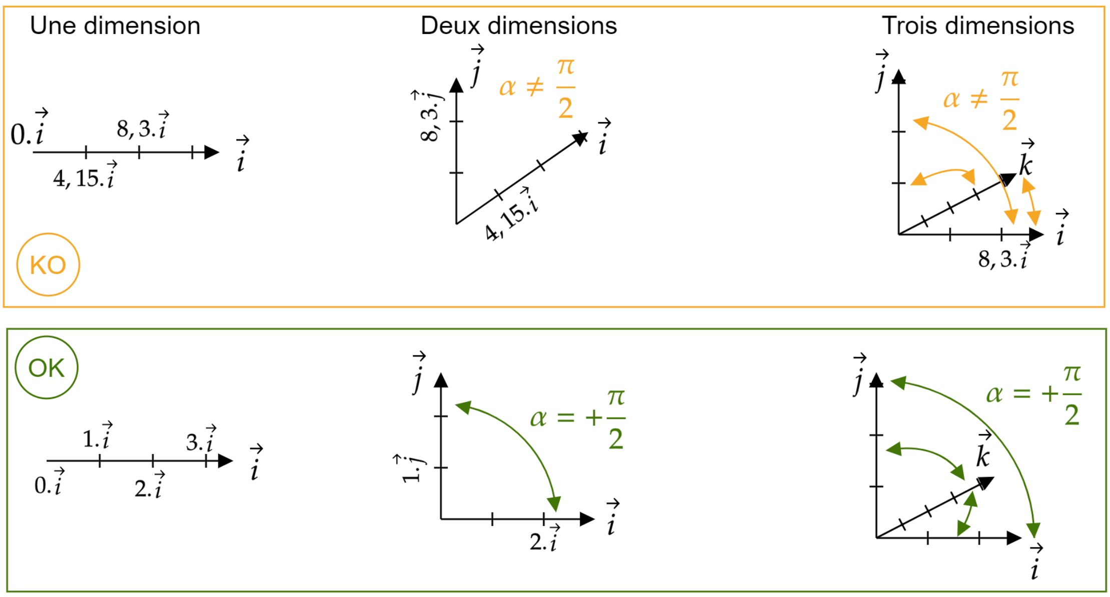


FIGURE 1.6 – Construction d'un repère pour dimension 1, 2 et 3.

Pour la commodité des exercices, vous pourrez croiser plusieurs type de schéma de repère. Retenez les avec attention pour prendre l'habitude de leurs différences.

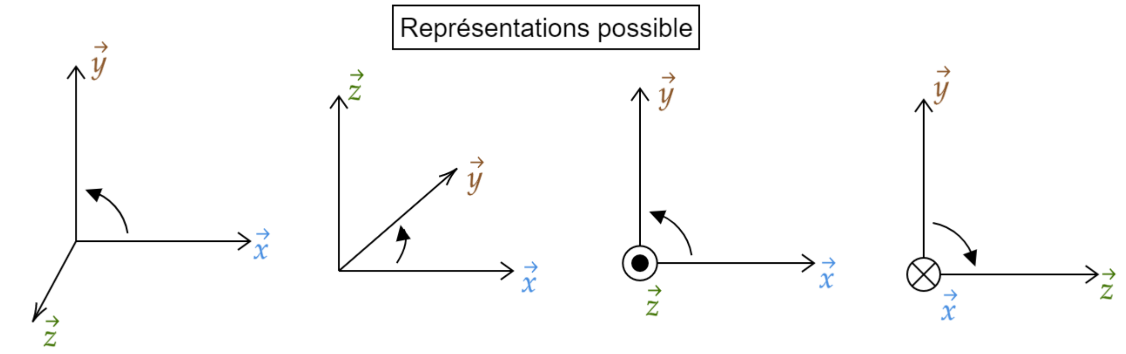


FIGURE 1.7 – Schémas type de repères en fonction du sens direct.

Pour respecter le sens direct des repères, on nom des axes doit être adapté, comme sur le dernier schéma de la figure [1.7]. Il faudra toujours garder la suite $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ ou $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ etc.

Dans les conditions d'un repère otho-normé-direct, on pourra utiliser les relations trigonométriques suivantes :

$$\cos(\theta - \pi) = \; -\cos(\theta) \text{ et } \sin(\theta + \pi) = -\sin(\theta)$$

$$\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta) \text{ et } \sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) \text{ et } \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos(\theta)$$

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\theta) \text{ et } \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)$$

1.4 Référentiel

Definition 1.2 Un Référentiel est l'association d'un repère auquel on ajoute on ajoute le temps t (avec la seconde comme unité par exemple).

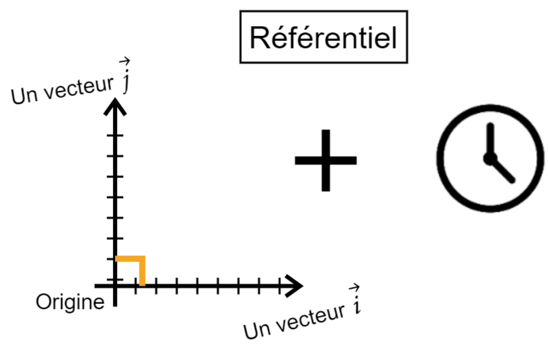


FIGURE 1.8 – Définition d'un référentiel

Pour nous permettre d'étudier les phénomènes physiques, on prendra l'habitude de s'imaginer dans un référentiel. On peut ressentir l'effet des référentiels différents dans le métro ou le RER. Il arrive de ne pas savoir si c'est notre wagon qui est entrain de partir, ou si c'est celui d'en face. Parce qu'on ne nous dit pas ce qui est fixe par rapport à nous, et ce qui est mobile. En effet, tout ce que nous connaissons est en perpétuel mouvement et peut influencer toutes les observations.

Notre planète tourne sur elle-même et se déplace autour du Soleil, qui est lui-même en mouvement à 850 000 km/h dans une galaxie qui se déplace à plus de $631 \pm 20 km/s$ attirée par la lointaine concentration de masse Shapley [4].

Pour pouvoir représenter et étudier un mouvement il faut admettre que son cadre d'observation est fixe pour ne pas qu'il influe sur le phénomène à étudier. C'est pour cela que l'on utilise un référentiel. Il existe plein de référentiel, mais nos études se limiterons en général à des objets très petits ou des vitesses négligeables par rapport à celle de la lumière. Ce qu'il faut retenir c'est surtout le fait qu'un référentiel c'est l'ajout supplémentaire d'une coordonnées de temps. On a donc au final 2 ou 3 coordonnées de position et une coordonnées de temps. Attention, la coordonnées de temps fait souvent partie des coordonnées utilisées sur le repère. Par exemple, si on regarde la hauteur et la distance d'une pomme qui est entrain de tomber, on aura deux coordonnées de position (qui elles même dépendent du temps) et une coordonnées de temps. On a seulement deux coordonnées pour l'analyse voulue mais le temps est toujours là.

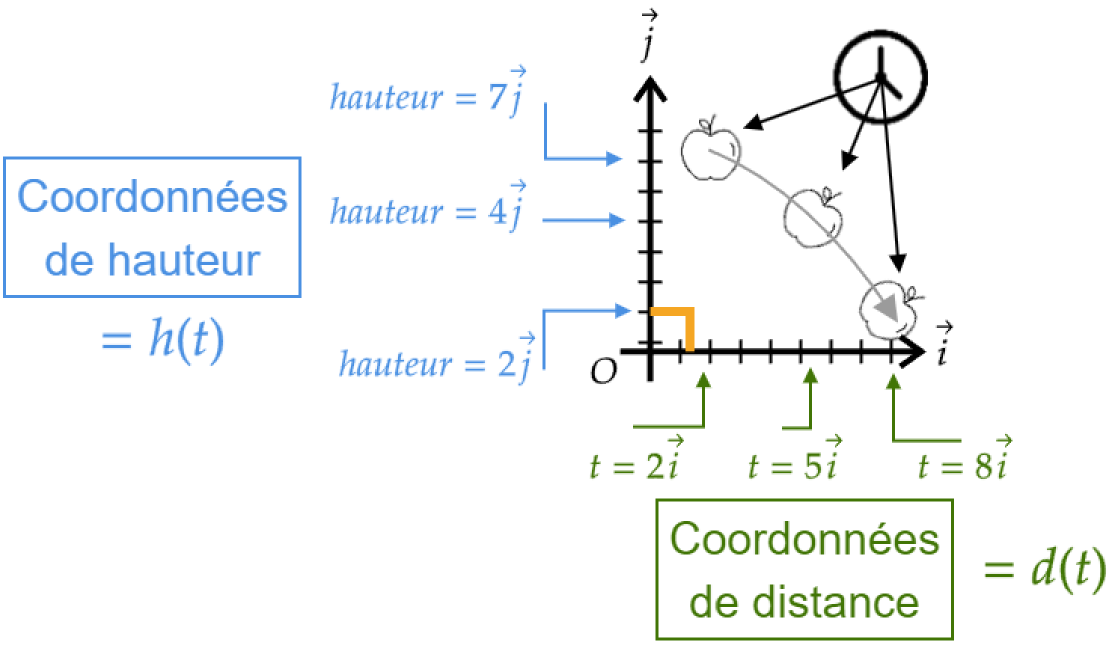


FIGURE 1.9 – Référentiel disposant de deux coordonnées, la hauteur $h(t)$ suivant $\vec{j}$ et la distance $d(t)$ suivant $\vec{i}$.

Sur la figure [1.9] on peut par exemple dire que la hauteur doit être en mètre et le temps en seconde.

1.5 Coordonnées

A ce stade, nous avons un espace qui n'attend plus d'avoir des éléments à l'intérieur. Avec le repère orthonormé direct qu'on utilise, nous pouvons maintenant repérer des points, décrire le mouvement des vents, voir la force engendrée par un barrage ou la trajectoire d'un outil dans une MOCN. Mais encore une fois, on ne peut pas démarrer directement, il y a en effet différents *systèmes* de coordonnées. Comme on choisi son mode de transport en fonction de notre destination, le système de coordonnée sera choisi en fonction de ce qu'il faudra traiter.

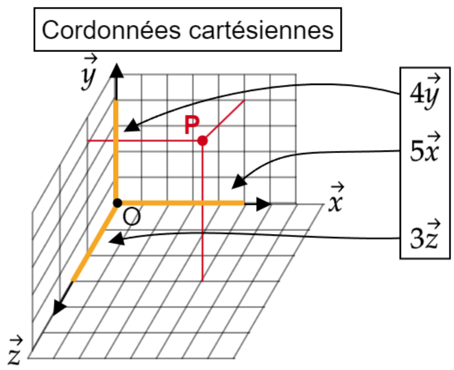
4. Article scientifique : The dipole repeller, Yehuda Hoffman, Daniel Pomarède, R. Brent Tully & Hélène M. Courtois. https ://www.nature.com/

1.5.1 Coordonnées cartésiennes

Ce système de coordonnées est le plus rependus, il est facile à visualiser et vous l'utilisez énormément. Le repère que l'on prend nous donne un espace où des points pourront être posé et repéré par rapport à l'origine et aux axes.

Nous partons d'un repère $\mathscr{R}$ muni d'une $\mathscr{B}ase(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$: $\mathscr{R}(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

On repère simplement les points du système de coordonnées cartésien par leur coordonnées selon chaque axes. Si on se place en 3 dimensions, un point aura donc trois données.



Coordonnées de O

$O(0;0;0)$

Coordonnées de P

$P(5;4;3)$

Distance OP

$$\overrightarrow{OP} = \begin{Bmatrix} x_p(t) - x_o(t) \\ y_p(t) - y_o(t) \\ z_p(t) - z_o(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5-0 \\ 4-0 \\ 3-0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})} = 5\vec{x} + 4\vec{y} + 3\vec{z}$$

FIGURE 1.10 – Coordonnées cartésiennes : Repérage d'un point P.

La figure [1.10] prendre l'exemple d'un point P avec des valeurs algébriques, dans le cas général on peut noter la distance $\vec{OP}$ comme suit : $\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ avec x, y et z n'importe quelle valeur.

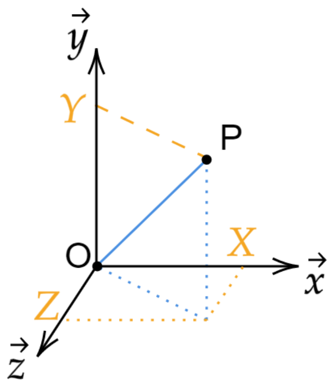


FIGURE 1.11 – Coordonnées cartésiennes : cas général.

Concrètement, c'est un système de coordonnées que vous manipulerez pour des études sur fraiseuses ou centres d'usinage car il s'y prête très bien.

R Attention, il est facile d'être pertubé.e sur certaines notations. Quand on écrit $\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$ il faut bien faire la différence entre les vecteurs unitaires $(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$et les valeurs (x,y,z) qui peuvent avoir le même nom dans certain exercice.

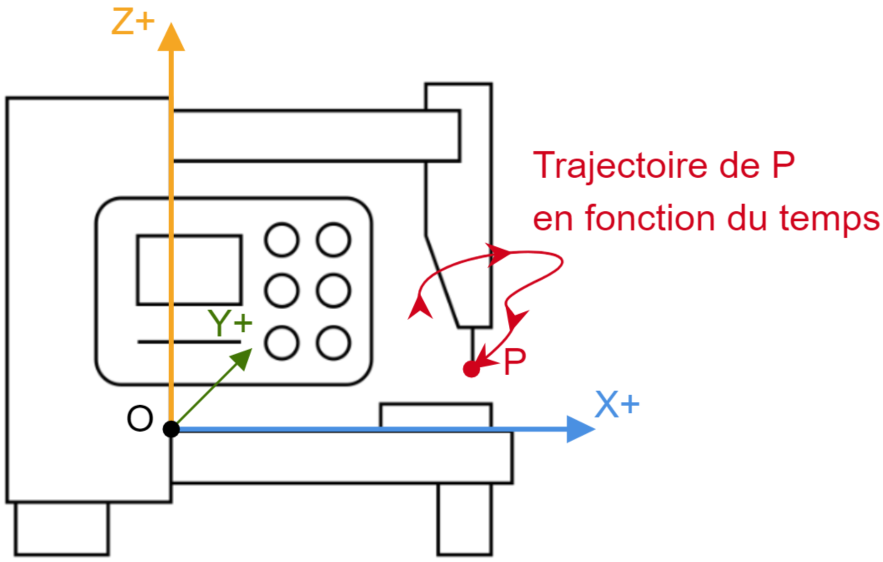


FIGURE 1.12 – Utilisation des coordonnées cartésiennes pour une fraiseuse.

Programmation d'une trajectoire sur fraiseuse en coordonnées cartésiennes

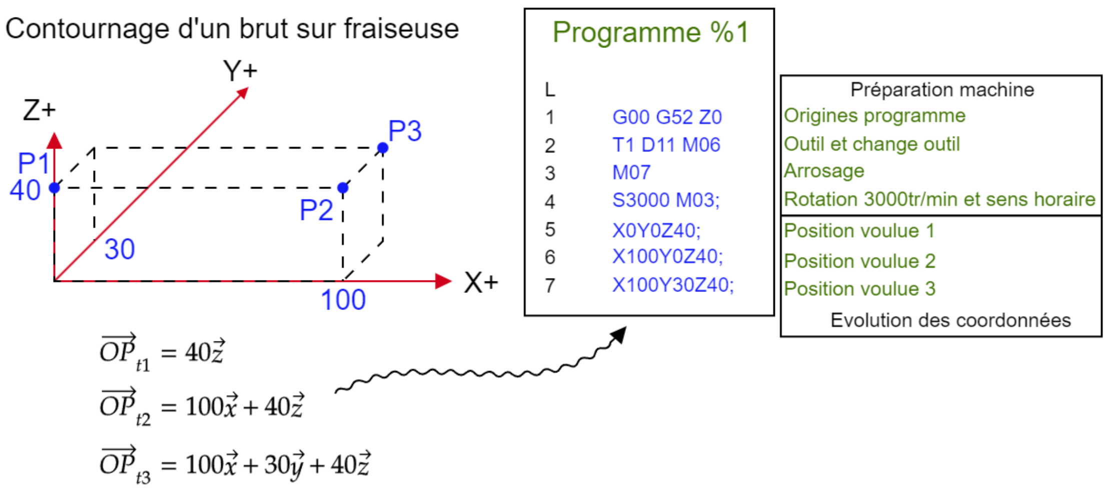


FIGURE 1.13 – Calcul des coordonnées cartésiennes à programmer pour une fraiseuse.

En apprenant le vocabulaire de la programmation ISO, vous serez facilement programmer n'importe quelle trajectoire. Bien sur il faudra ajouter des notions programme que nous n'avons pas encore vue tels que les accélérations/ralentissement, correction de rayon etc.

Programmation d'une trajectoire sur tour en coordonnées cartésiennes

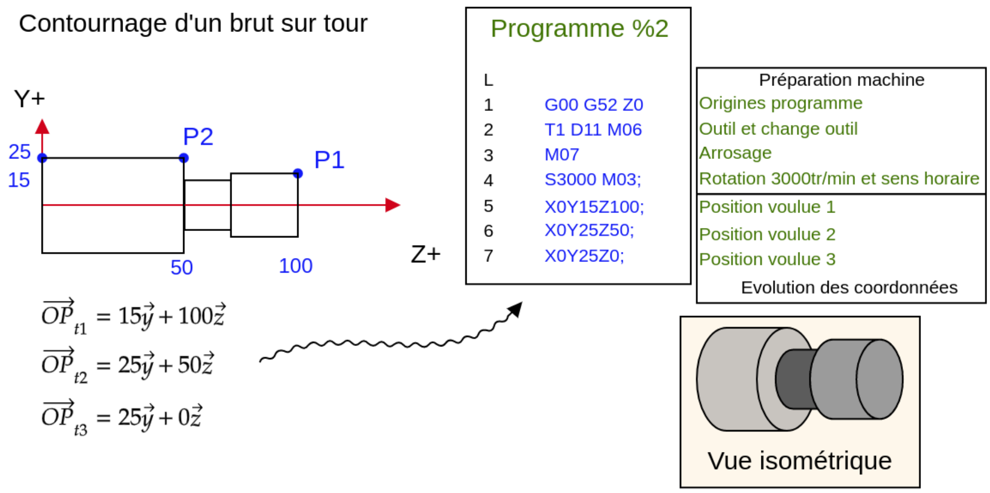
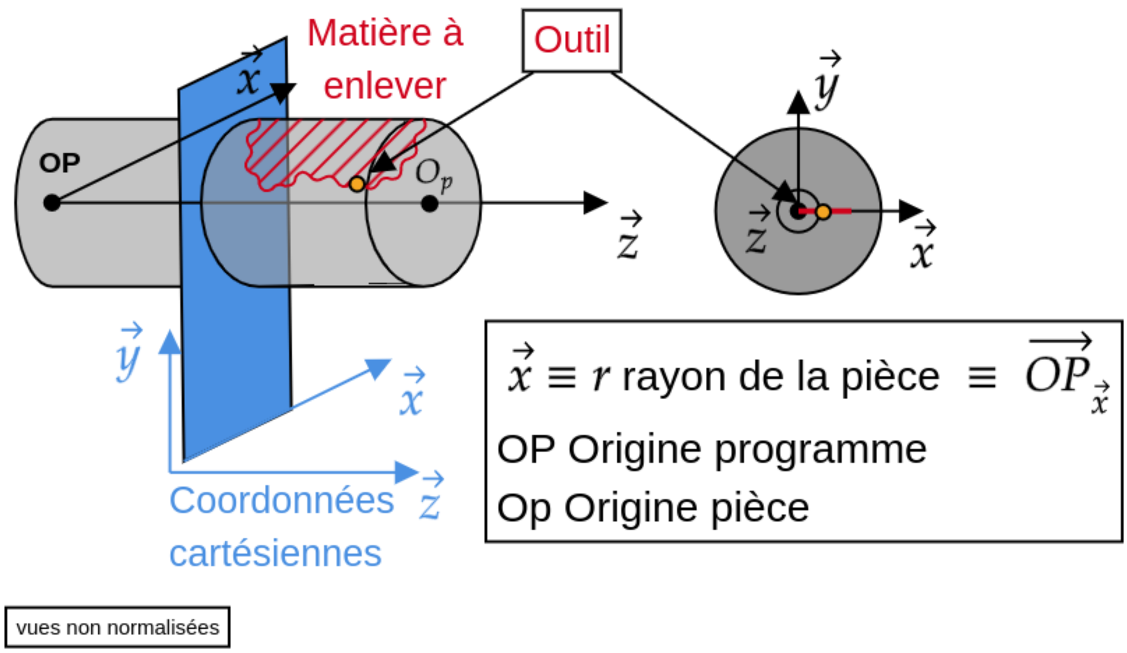


FIGURE 1.14 – Calcul des coordonnées cartésiennes à programmer pour un chariotage/dressage sur un tour.

R Sur un tour, on pourrait s'attendre à choisir des coordonnées polaires ou cylindriques cependant, l'outil qui vient enlever la matière pour une pièce de révolution est toujours sur le même plan.

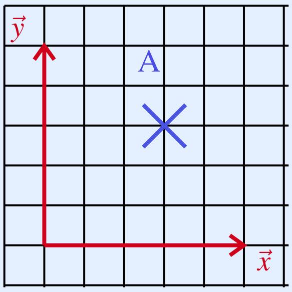


Pour usiner une pièce de révolution sur un tour 2 axes, l'outil ne peut bouger que sur l'axe $\vec{z}$ et s'approcher ou s'éloigner de celui-ci sur l'axe $\vec{x}$[5] L'axe $\vec{z}$ est lié à la longueur de la pièce, on y contrôle la vitesse d'avance (V_f[6]) et la longueur qu'on veut enlever au brut. L'axe $\vec{x}$ est lié au diamètre de la pièce, on y contrôle plusieurs éléments important comme la profondeur de passe (A_p), la vitesse de coupe (V_c) ou plus généralement la forme de la pièce.

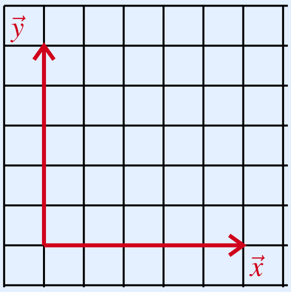
5. Il translate grâce à une liaison roue-vis sans fin, d'un moteur, et d'un codeur absolu pour repérer la position et la vitesse de translation.

6. f pour forward ?

Exercice 1.5.1

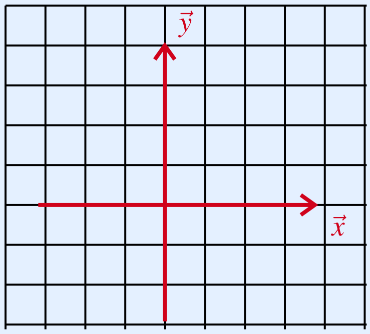


Coordonnées de A :



Coordonnées de B :

$B = \ 1\vec{x}\,;4\vec{y}$



Coordonnées de B :

$C = \ \frac{1}{2}\vec{x}\,;-2\vec{y}$

1.5.2 Coordonnées polaires

Imaginez que vous deviez décrire la trajectoire, vitesse ou accélération des aiguilles d'une montre. Cela devient vite difficile car si on prend un système de coordonnées cartésien, chaque seconde, quand l'une des aiguilles avance, ce sont deux coordonnées qui doivent être changées.

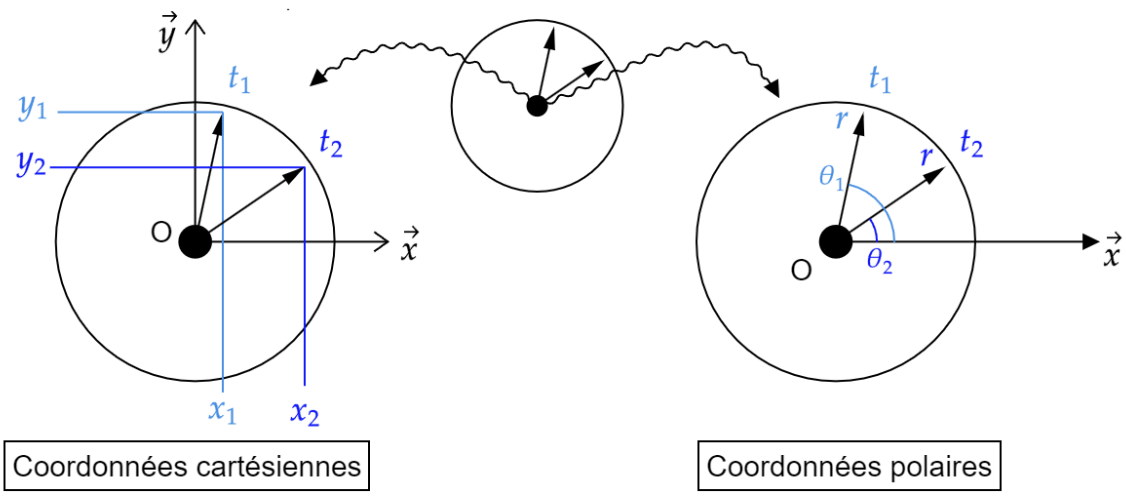


FIGURE 1.15 – Différence entre coordonnées cartésiennes et polaires.

Sur la figure [1.15], en coordonnées cartésiennes, le bout de l'aiguille en t_1 a pour coordonnées $(x_1;y_1)$ et pour t_2 $(x_2;y_2)$: les **deux** valeurs changent. En coordonnées polaires, le bout de l'aiguille en t_1 a pour coordonnées $(r;\theta_1)$ et pour t_2 $(r;\theta_2)$: **Une** seule valeur est changée.

Pour le cas général, les coordonnées polaires se représentent comme sur la figure [1.16]

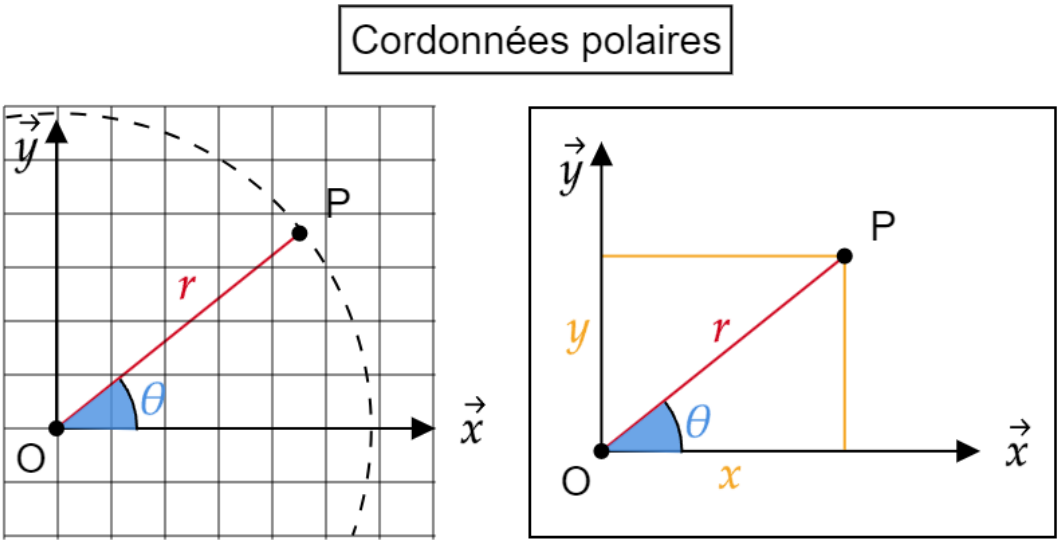
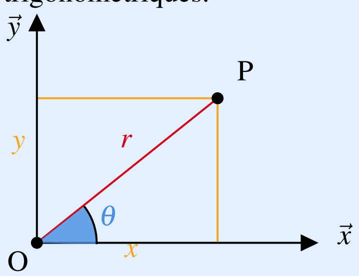


FIGURE 1.16 – Coordonnées polaires.

Exercice 1.5.2

D'après la figure [1.16] essayez d'exprimer r en fonction de x et y. Pensez aux formules trigonométriques.



$r =$

$\overrightarrow{OP} =$

$x =$

$y =$

1.5.3 Coordonnées cylindriques

Les coordonnées cylindriques sont une extension des coordonnées polaires. On fait une succession d'une infinité de plans des coordonnées polaires pour remplir un cylindre. Comme pour les coordonnées polaires, les coordonnées cylindriques sont souvent utilisées lorsque le problème traité présente une symétrie de révolution autour d'un axe, avec lequel sera confondu l'un des vecteurs de la base. Pour étudier les mouvements sur un tour, c'est le système de coordonnées idéal.

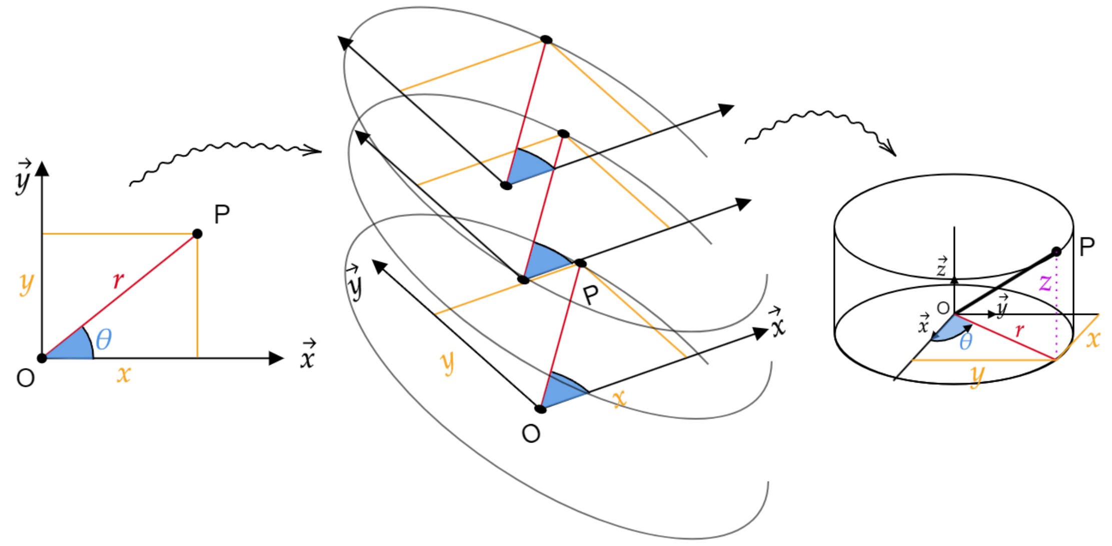


FIGURE 1.17 – Changement des coordonnées polaires en cylindriques.

On cherche à connaître la distance $\vec{OP}$ en coordonnées cylindriques. Par rapport au coordonnées polaires, il y a toujours r, et maintenant il faut ajouter la "hauteur" sur l'axe $\vec{z}$. Ici, r nous donne le rayon, et z la "longueur".

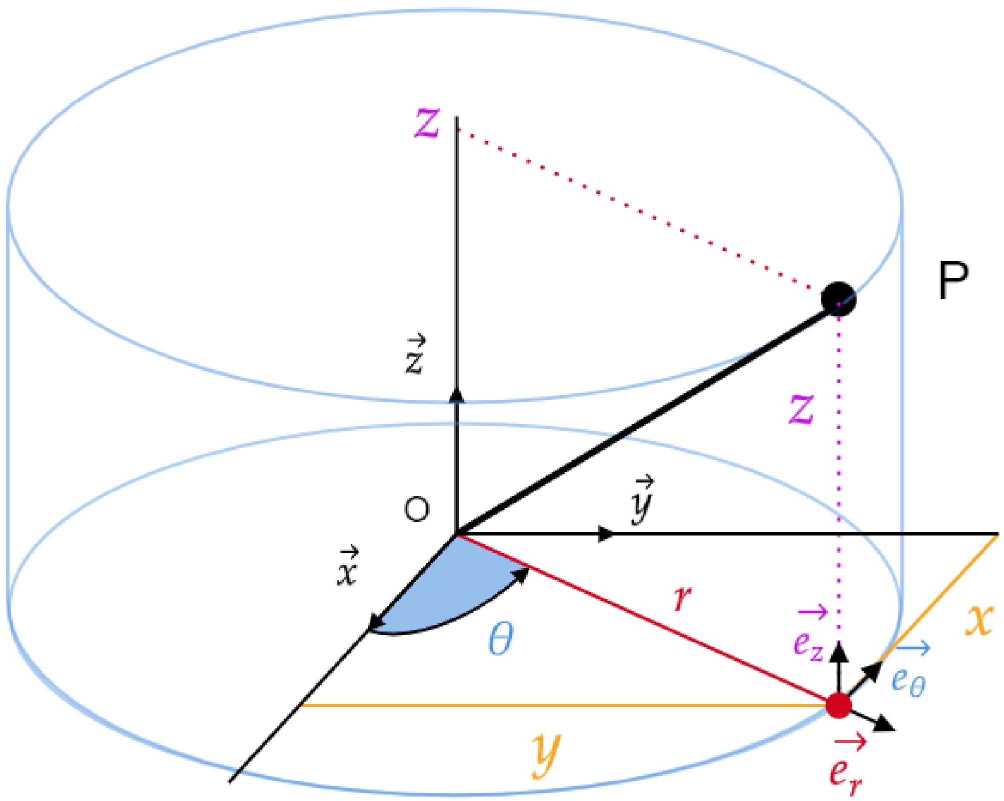


FIGURE 1.18 – Représentation des coordonnées cylindriques.

La distance $\vec{OP}$ dépendra du diamètre r et de la hauteur z :

$$\vec{OP} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$

Le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ change de direction en fonction de l'angle θ, plus besoin des coordonnées x et y.
On peut passer du système cylindrique au système cartésien. Sur la figure [1.18], la longueur x représente le côté adjacent de l'angle θ, et r représente le l'hypoténuse du triangle x, y, r. Avec les formules trigonométrique on obtient $\cos(\theta) = \frac{adjacent}{hypothenuse} = \frac{x}{r} \rightleftarrows x = \cos(\theta).r$. Vous pouvez essayer avec la longueur y. La longueur z en revanche reste la même que pour les coordonnées cartésiennes. Au final le triplet est le suivant :

Coordonnées cartésiennes		Coordonnées cylindriques
x	$=$	$r.\ \cos(\theta)$
y	$=$	$r.\ \sin(\theta)$
z	$=$	z

1.6 Conclusion

Pour étudier le mouvement des outils et des pièces dans l'espace, nous avons le choix du système de coordonnée. En fonction du besoin (forme, trajectoire, symétries) dépendra le système de coordonnée choisi. La plupart du temps, vous travaillerez avec le système de coordonnées cartésien.

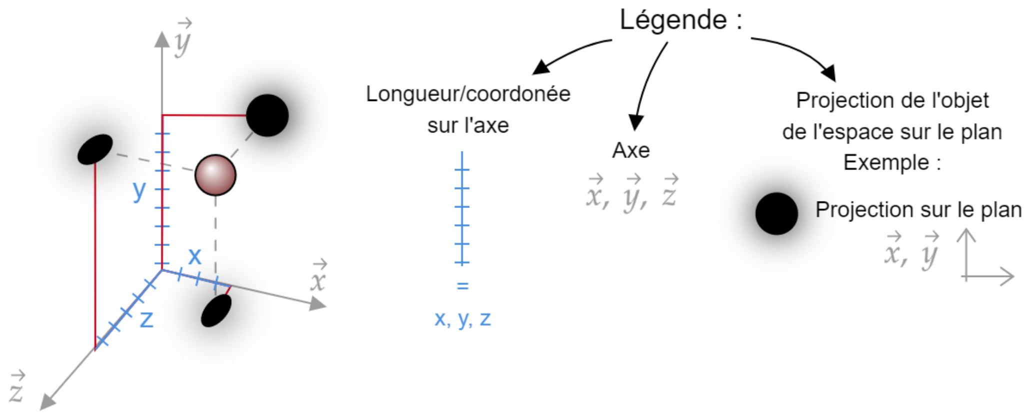


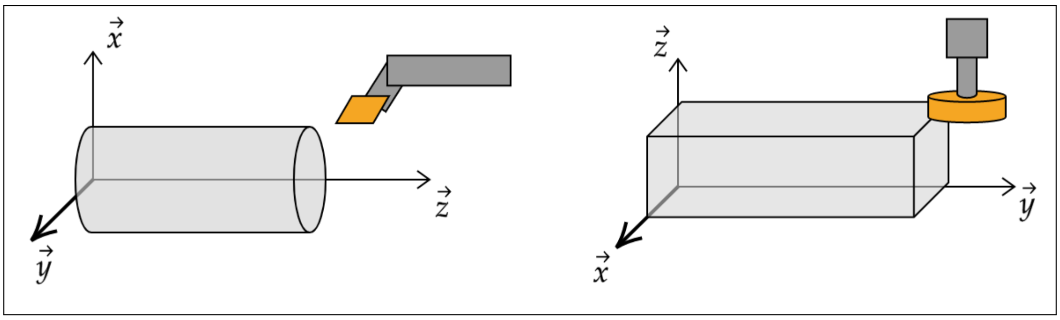
FIGURE 1.19 – Représentation des coordonnées cartésiennes : résumé.

2. Représenter le réel

Savoirs & compétences 2.1 S3.4 – Modélisation des actions mécaniques

2.1 Introduction

Nous savons maintenant exprimer la position de points dans l'espace. Cela nous permets de programmer une succession de point pour avoir une trajectoire d'outil par exemple. Aussi, pour le bon usinage d'une pièce, il est essentiel de connaître d'autres indicateurs comme la vitesse d'outil ou de la pièce, les accélérations et les actions mécaniques (efforts, forces, etc.) générées dans la machine.



Vous vous en doutez, il est indispensable de connaître les efforts engendrés par l'outil pour s'assurer un enlèvement de copeaux ni trop brutal ni trop faible. On doit toujours garder à l'esprit que la machine ne fera que ce qu'on lui demande. On peu facilement casser l'outil ou la pièce et même rendre la machine totalement hors service.

Nous allons apprendre à représenter les différents éléments incontournables pour les sciences de l'ingénieur et notamment pour la conception préliminaire.

2.2 Vecteurs

Les systèmes de coordonnées sont construit grâce à notre bibliothèque de vecteurs. Pour représenter d'autres éléments, nous utiliserons encore des vecteurs. Ils nous permettent d'exprimer une direction et un sens par rapport à notre repère. Pour utiliser un vecteur, on met simplement une flèche au dessus de ce qu'on écrit, cela veut dire qu'il à plusieurs *composantes* [1].

Definition 2.1 Un vecteur $\vec{u}$ est défini par :
— Une direction ;
— Un sens ;
— Une longueur (sa norme).
Un vecteur est indépendant du point d'origine.

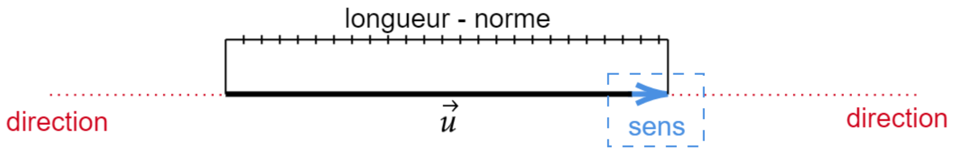
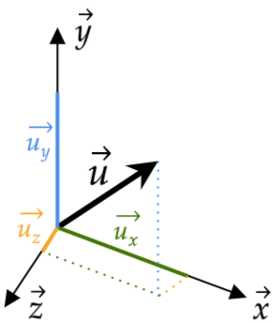


FIGURE 2.1 – Représentation d'un vecteur.

Exemple d'écriture de vecteur :
$\overrightarrow{Vecteur}$; $\overrightarrow{Vent} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ -13 \end{Bmatrix}$; $\overrightarrow{W}$

2.2.1 Notation

Soit un vecteur $\vec{u}$ dans un repère orthonormé direct.



On note les vecteurs de deux façons.

Horizontalement :

$\vec{u} = u_x\vec{x} + u_y\vec{y} + u_z\vec{z}$

Ici trois valeurs scalaires. Sur un repère à deux, nous n'aurions eu que deux valeurs.

Verticalement :

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix}_{(\vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$$

2.2.2 Norme d'un vecteur

Pour noter la longueur d'un vecteur (sa norme) on écrit : $||\overrightarrow{Vecteur}||$

Pour n'importe quel vecteur, on calcul sa norme grâce à ses composantes. Si $\vec{u} = a\vec{x} + b\vec{y} + c\vec{z}$, la norme d'un vecteur est égale à :
$||\vec{u}|| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

1. Un vecteur inséré dans un repère à trois dimensions (trois axes) pourra être décomposé en trois valeurs : trois composantes.

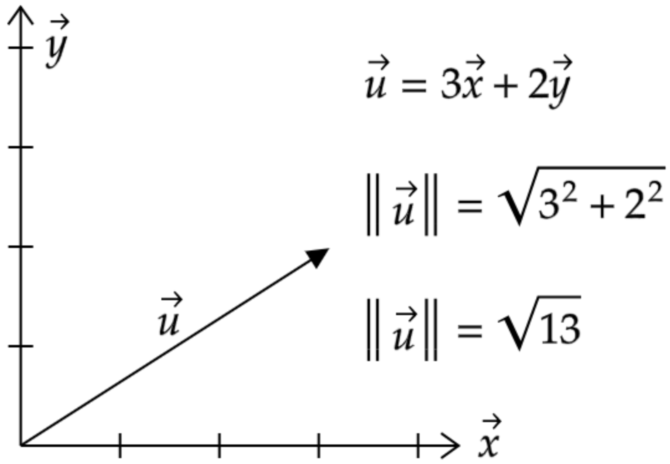
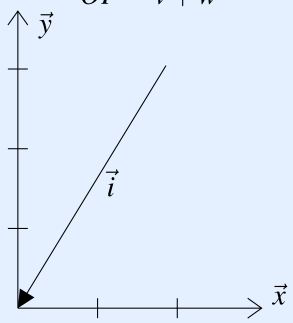


FIGURE 2.2 – Calcul de la norme d'un vecteur.

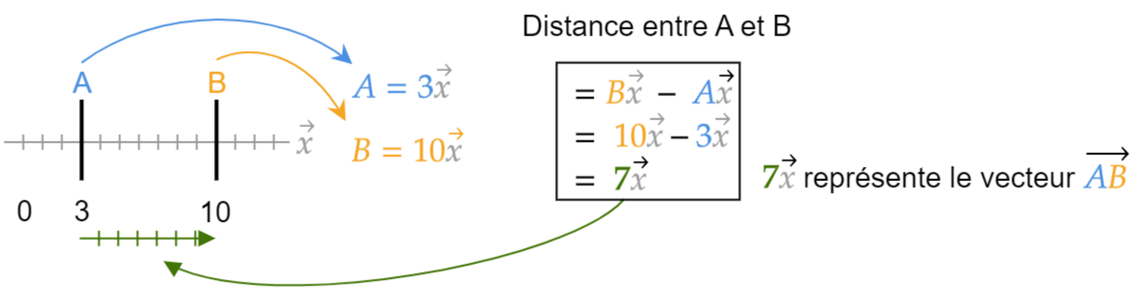
Exercice 2.2.1

Calculez la norme des vecteurs suivants :

— $\vec{u} = 8\vec{x} + 4\vec{y} + \vec{z}$
— $\vec{w} = -\vec{x} + 6\vec{y} - 2\vec{z}$
— $\overrightarrow{OP} = \vec{v} + \vec{w}$

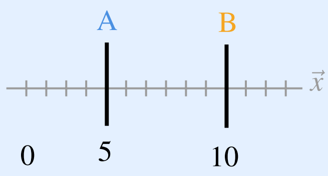


R Attention, il ne faut pas confondre la position des points et un vecteur qui peut y être associé. On peut construire un vecteur avec la position d'un point et d'une origine, ou de deux points.



Exercice 2.2.2

Distance entre A et B ? $\overrightarrow{AB}$?



2.2.3 Composantes d'un vecteur

A retenir 2.1 Lorsqu'on place un vecteur dans un plan cartésien, on peut reporter sa longueur sur les différents axes du repères. Les nouvelles longueurs que l'on voit sur les axes du repère son ses **composantes**. Un vecteur projeté sur un repère à deux axes aura deux composantes, trois si c'est un repère à trois axes, etc.

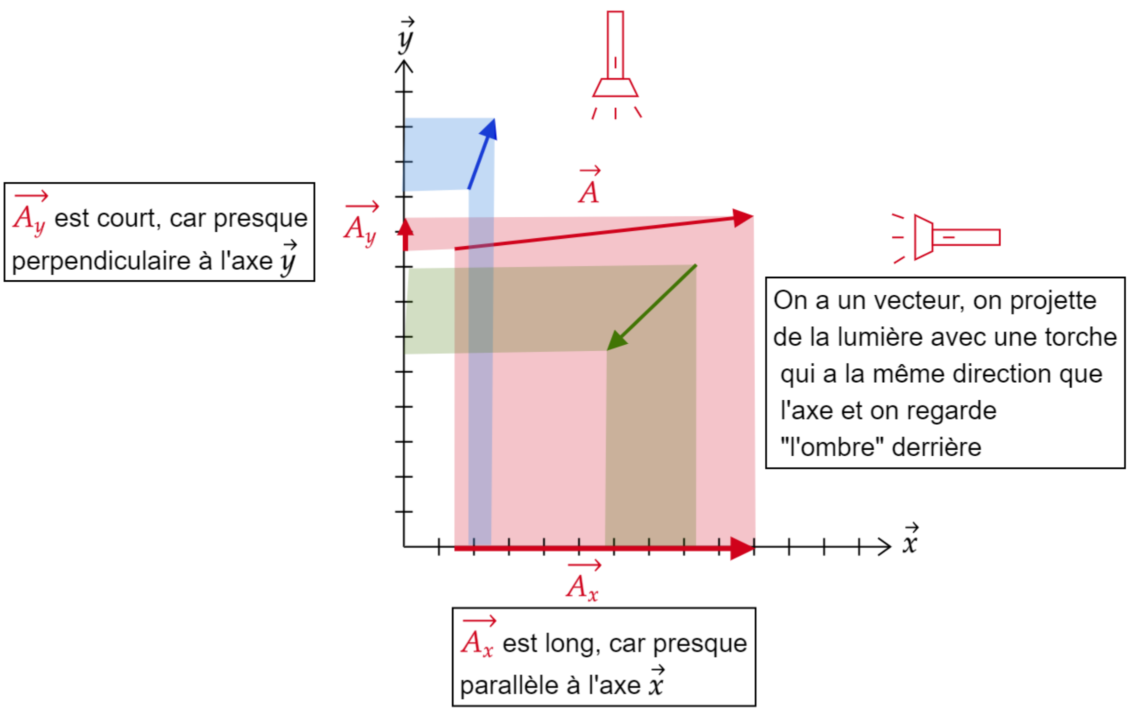
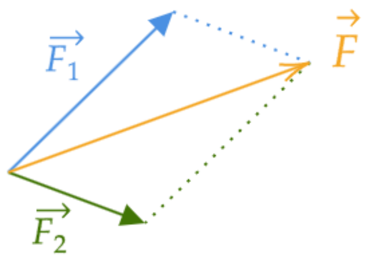
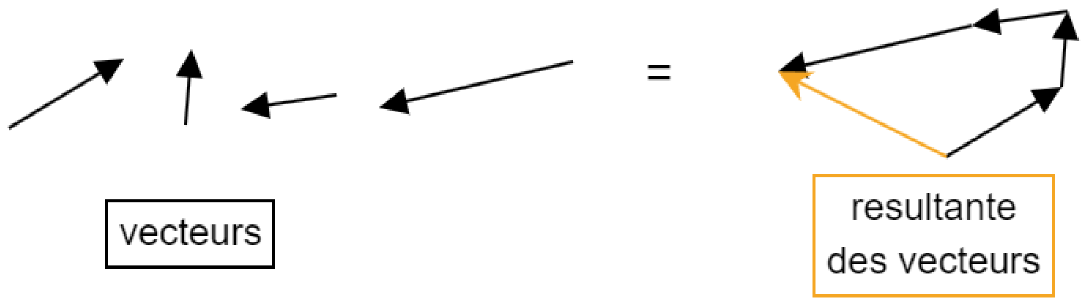


FIGURE 2.3 – Représentation des composantes d'une vecteur.

2.2.4 Résultante



Le vecteur ou la force résultante, est la somme vectorielle de toutes les forces que subit un corps. Tout comme les autres forces, la force résultante possède une grandeur et une orientation. Elle peut aussi être définie comme étant la force globale agissant sur un objet, quand toutes les forces agissant sur celui-ci sont ajoutées. A part lorsqu'une seule force agit sur un objet, la force résultante ne correspond pas à une force "réelle" mais nous permet de faciliter les calculs.



La notion de résultante des forces nous servira pour le chapitre sur les torseurs.

2.2.5 Opérations vectorielles

Somme

Soit le vecteur $\vec{u}$ obtenu par somme de deux vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_2}$.
$\vec{u} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$

Pour calculer $\vec{u}$:

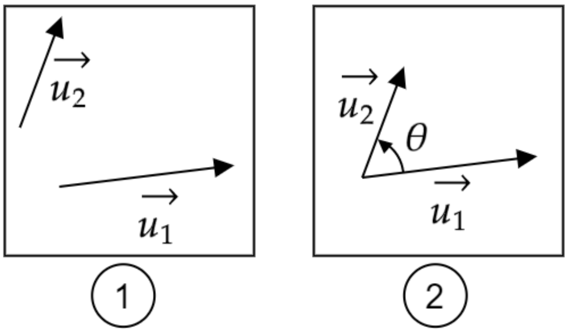
— graphiquement, il faut mettre les vecteurs bout à bout ;
— analytiquement, il suffit d'ajouter les composantes des vecteurs.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaire** s'il ont la même direction. Si deux vecteur sont portés par le même axe, ils sont colinéaires.

2.2.6 Produit scalaire

Le produit scalaire du vecteur $\vec{u_1}$ avec le vecteur $\vec{u_2}$ noté $\vec{u_1} \cdot \vec{u_2}$ est égal au produit des normes des 2 vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle θ entre les deux directions, quel que soit le sens pris pour l'angle.



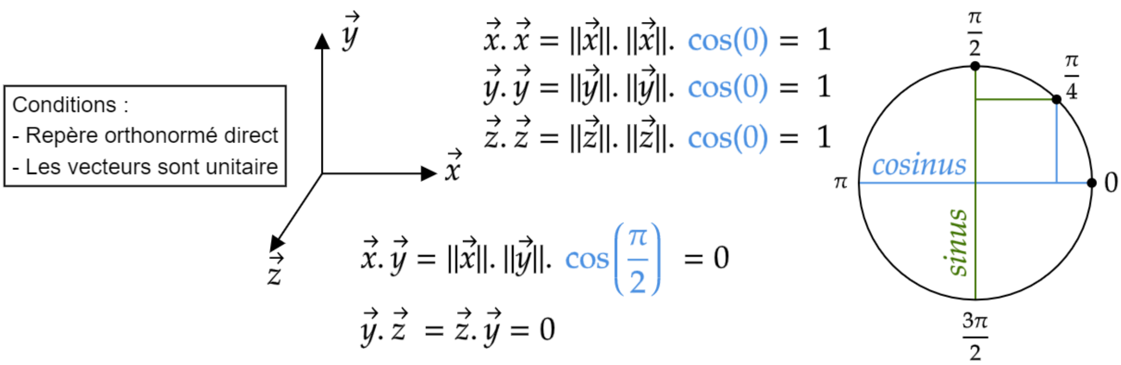
On a $\theta = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ un angle orienté.

Definition 2.2 Le produit scalaire de deux vecteurs est noté avec un point : $\vec{u}_1 \centerdot \vec{u}_2$ et il est égale à : $\vec{u}_1 \centerdot \vec{u}_2 = \|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\| \times \cos(\widehat{\vec{u}_1, \vec{u}_2})$

Il peut être noté :
$\vec{u}_1 \centerdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1 \vec{u}_2| \cos(\theta)$
Un produit scalaire est un nombre réel. Un nombre n'est pas un vecteur.

A retenir 2.2 Dans les exercices, il arrivera souvent qu'on vous demande de vérifier que deux vecteurs sont perpendiculaires. Or, sur le cercle trigonométrique le cosinus d'un angle de $\frac{\pi}{2}$ (donc perpendiculaire) est égale à 0.
Finalement, si $\vec{u}_1 \perp \vec{u}_2$ on a :
$\vec{u}_1 \centerdot \vec{u}_2 = |\vec{u}_1 \vec{u}_2| \cos(\frac{\pi}{2}) = \|\vec{u}_1\| \times \|\vec{u}_2\| \times 0 = 0$

Dans les repères qu'on utilise, on peut aussi effectuer le produit scalaire des vecteurs entre eux.



Pour éviter les erreurs de signes avec l'angle entre les deux vecteurs, on peut retenir une formule plus complète. Si deux vecteur $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont portés par deux vecteurs unitaires $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$, pour éviter de se demander si l'angle est positif ou négatif on peut retenir que :
$\vec{u}_1 \centerdot \vec{u}_2 = u_1\vec{x}_1 \centerdot u_2\vec{x}_2 = u_1 u_2 \centerdot \vec{x}_1\vec{x}_2 = u_1 u_2 \|\vec{x}_1\| \|\vec{x}_2\| \cos(\widehat{\vec{x}_1, \vec{x}_2})$
Ainsi, il n'y a ni valeurs absolues, ni discussion sur l'angle.

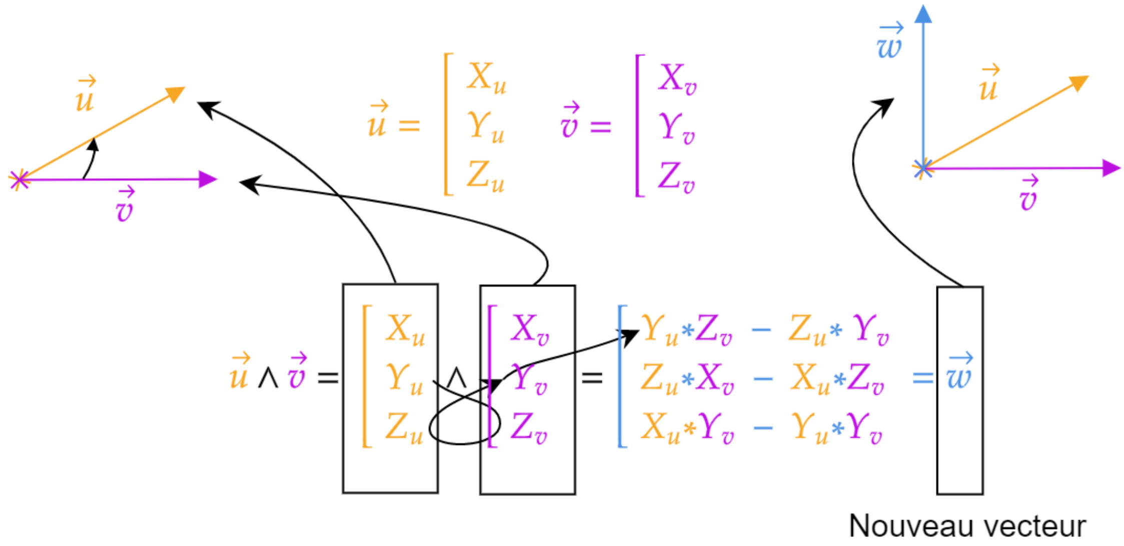
2.2.7 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs sera fréquemment utilisé dans les exercices et à l'examen. On peut le présenter sous deux formes. La première ressemble beaucoup au produit scalaire, mais attention, le **produit vectoriel** donnera un **vecteur** avec plusieurs composantes, alors que le *produit scalaire* nous donne *un seul nombre* qui n'est pas un vecteur.

Definition 2.3 Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormé direct, le produit vectoriel noté "$\wedge$" donnera un nouveau vecteur $\vec{w}$
$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

Un produit vectoriel est donc un vecteur $\vec{w}$, dont la direction est orthogonale à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

L'autre façon d'exprimer un produit vectoriel est verticale. Nous aurons l'occasion de faire plusieurs exercice pour nous habituer à se genre de calcul car il est incontournable pour le BTS.



2.2.8 Résumé vecteurs

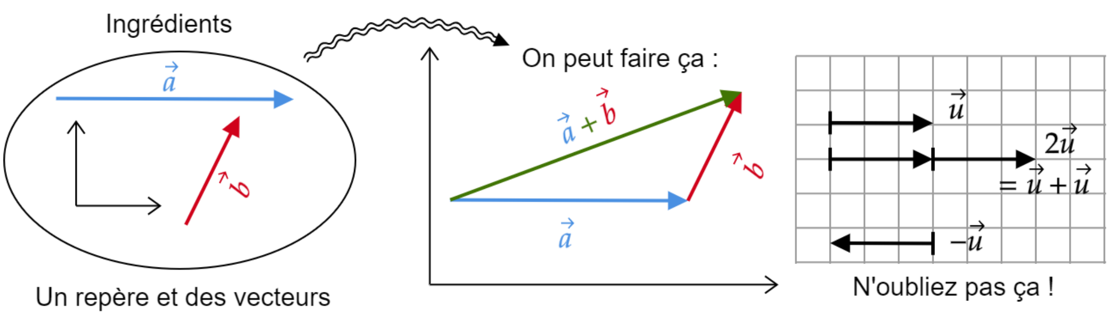


FIGURE 2.4 – Former des vecteurs.

Attention, on ne prend pas les vecteurs dans n'importe quel sens.

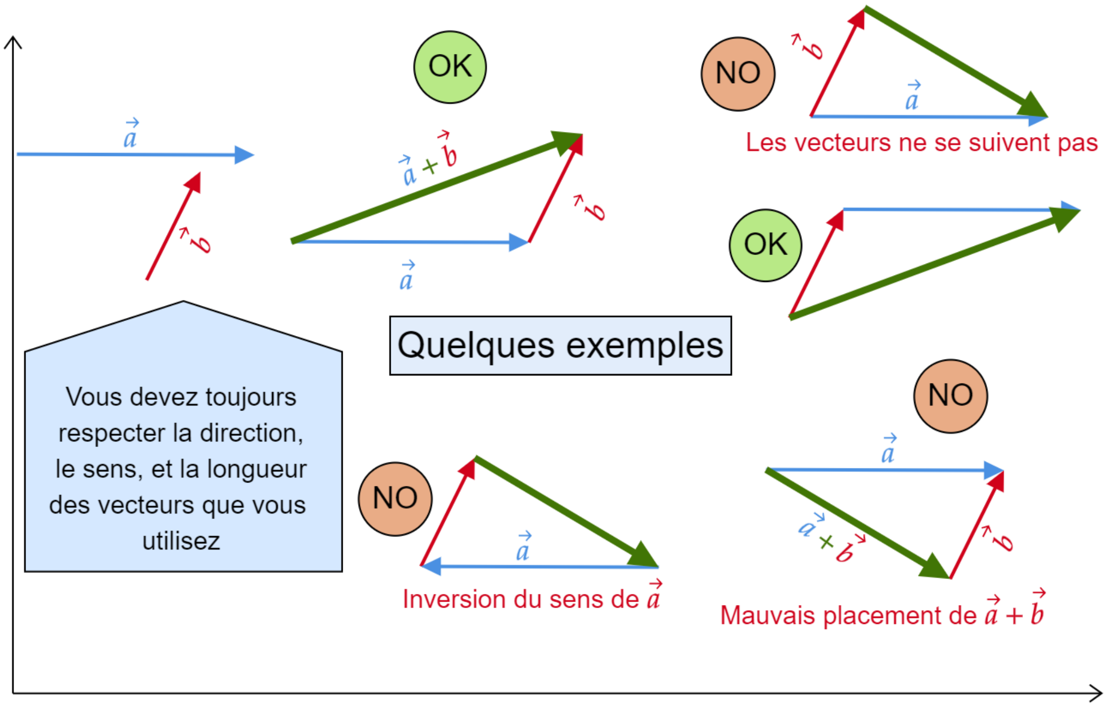


FIGURE 2.5 – Former des vecteurs (2).

2.3 Vitesse d'un point

Les vecteurs pourront être utile pour représenter la vitesse ou accélération des outils ou tout autre élément des MOCN. Un éléments incontournable en usinage est la vitesse d'avance de l'outil : $\mathscr{V}_f$. Incontournable car elle dépend du type d'opération effectuée, de l'outil, de l'état de surface souhaité, etc. Elle représente aussi la vitesse de table par rapport à la vitesse de pénétration. On a pour habitude de l'exprimer en millimètre pour une minute (mm/min).

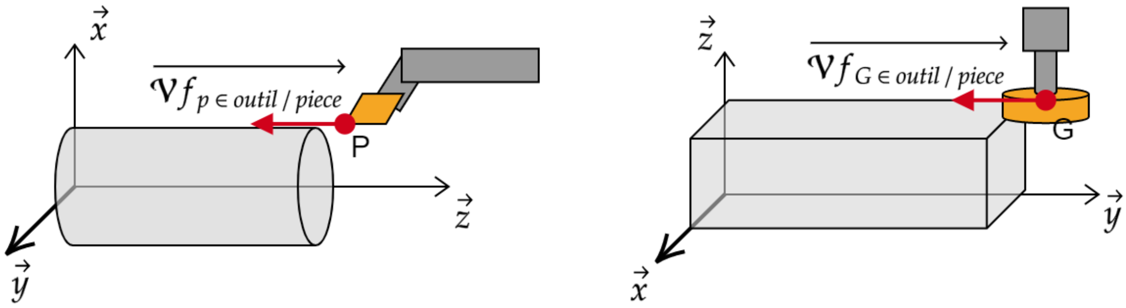


FIGURE 2.6 – Représentation de la vitesse d'avance ($\mathscr{V}_f$)

Remarquez qu'en science de l'ingénieur, le simple nom du vecteur $\mathscr{V}_f$ ne suffira plus pour exprimer une vitesse. Lors des études, nous aurons beaucoup de vecteurs représentants différents éléments, le choix du nom est très important. Ici nous voulons que le vecteur choisi traduise la phrase : "Ceci représente la vitesse du point P qui lui même appartient à l'outil, et qui se déplace par rapport à notre repère, donc à la pièce". Heureusement on traduit cette phrase par $\overrightarrow{\mathscr{V}f_{p\in outil/piece}}$. Les étudiants peuvent avoir du mal à faire le lien entre l'écriture mathématique et le lien physique, pourtant ces notations seront **toujours** utilisées que ce soit en exercice ou l'examen du BTS. Pour s'entraîner traduisez ces notations dans votre tête dès que vous en voyez une.

2.3.1 Notation

Nous avons vu qu'un point s'exprime dans un repère. Le vecteur position définissant la position du point P d'un outil dans un repère $\mathscr{R}_0$ est noté $\overrightarrow{OP}$ et est défini tel que : $\overrightarrow{OP} = X_p\vec{x}_0 + Y_p\vec{y}_0 + Z_p\vec{z}_0$.

De la même manière on décrira la vitesse d'un point P par rapport à un repère $\mathscr{R}_0$ comme :

$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{V}_{p\in outil/MOCN}} = V_{Xp}.\vec{x}_0 + V_{Yp}.\vec{y}_0 + V_{Zp}.\vec{z}_0}$. En effet, un outil qui se déplace dans une MOCN quelconque aura trois composantes sur trois axes.

On peut aussi noté le vecteur vitesse en colonne : $\boxed{\overrightarrow{\mathscr{V}_{p\in outil/MOCN}} = \begin{bmatrix} V_{xp} \\ V_{yp} \\ V_{zp} \end{bmatrix}_{(\vec{x}_0,\, \vec{y}_0,\, \vec{z}_0)}}$

Note sur la trajectoire

La trajectoire du point P dans $\mathscr{R}_0$ est l'ensemble de ses positions au cours de son mouvement. La **vitesse** d'un point est toujours **tangente** à sa trajectoire.

2.4 Accélération d'un point

La notion d'accélération doit être comprise même si en pratique, les calculs d'accélérations sont peu, voir non présents dans l'examen du BTS.

L'accélération du point P dans une base $\mathscr{B}_0$ est notée par la lettre grec Gamma majuscule, $\Gamma_{(P/0)}$.

2.5 Représentation des Actions Mécaniques (AM) par les vecteurs

Les vecteurs seront la plupart du temps utilisés pour décrire des **actions mécaniques** qui nous permettent d'effectuer des calculs sur les systèmes voulus, dans l'objectif de dimensionner, prédire le réel. Même dans les calculs on s'autorise une tolérance précisée dans le cahier des charges.

Une action mécanique, souvent appelée "force", est un phénomène qui a la capacité de déformer un corps ou de changer sa vitesse ou sa trajectoire dans un référentiel Galiléen.

On distingue trois grands types d'actions :
— Les actions volumiques à distance (gravité, forces électromagnétiques) ;
— Les actions surfaciques de contact (contact réel entre deux solides ou un solide et un fluide)
— Les actions linéiques et ponctuelles (modèle d'un contact réel entre deux solides)

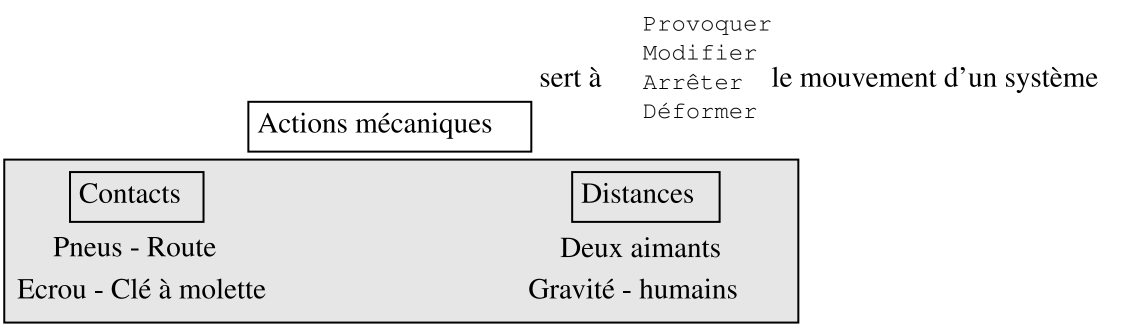


FIGURE 2.7 – Si le système est une pièce à usiner, on pourrait considérer l'action mécanique d'un forêt sur celle-ci.

A retenir 2.3 Une action mécanique est la donnée de deux éléments :
- Une force ;
- Un moment.

Elle s'applique sur un corps, que ce soit sur son volume V, sa surface S, une ligne ou en un point.

2.5.1 Forces

Une force ponctuelle est une force "simple", qui est le résultat :
- Soit d'un modèle de contact entre deux solides indéformables ;
- Soit d'une simplification d'une force linéique, surfacique ou volumique pour traiter un modèle simplifié dans lequel on fait apparaître de simples forces plutôt que leur répartition

Une action mécanique est composée d'une **force** représentée par un vecteur (direction, sens, longueur) exprimée en **Newton** [2] (N).
On appelle **résultante** d'une force, la force *totale* générée par l'ensemble des forces sur le volume, la surface ou la ligne considérés.

D'un point de vue mathématique, on écrivait un vecteur comme suit : $\vec{i} = \begin{Bmatrix} a \\ b \\ c \end{Bmatrix}$ maintenant, nous concrétisons cette notation pour être plus précis. Il conviendra de noter les forces (toujours avec des vecteurs) comme suit : $\overrightarrow{\mathscr{F}_{moteur}} = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix}_{(\mathscr{B}_1,\ \vec{x},\ \vec{y},\vec{z})}$;

On traduit : La Force du moteur possède trois composantes, dirigées respectivement sur les vecteurs $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ dans un base nommée $\mathscr{B}_1$.

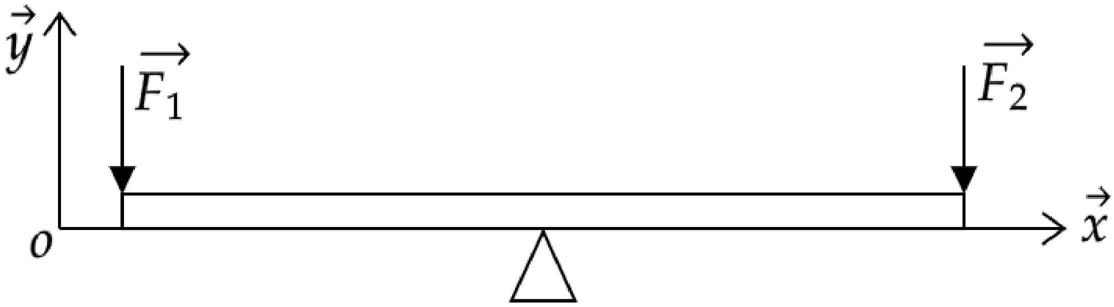


FIGURE 2.8 – Représentation de deux forces

2.5.2 Moments / Couples

Lorsqu'une force s'applique sur un **solide**, le point d'application de cette force induit un effet différent sur la pièce sollicitée, un effet qui est proportionnel à une distance, qui tend à *faire tourner* la pièce sollicitée et qui dépend du lieu où s'applique cette force et de sa direction. On parle souvent d'*effet levier*. La grandeur qui caractérise cet effet est le **moment**. Un moment est une grandeur exprimée en Newton mètre (N.m). C'est le produit d'une force par une distance. Prenons l'exemple d'un bâton sous l'action de deux masses égales à une distance différentes du centre A.

2. Le Newton (symbole : N) est l'unité de mesure de la force nommée ainsi en l'honneur d'Isaac Newton pour ses travaux en mécanique classique. Il équivaut à un kilogramme par mètre carré (1 kg/m2).

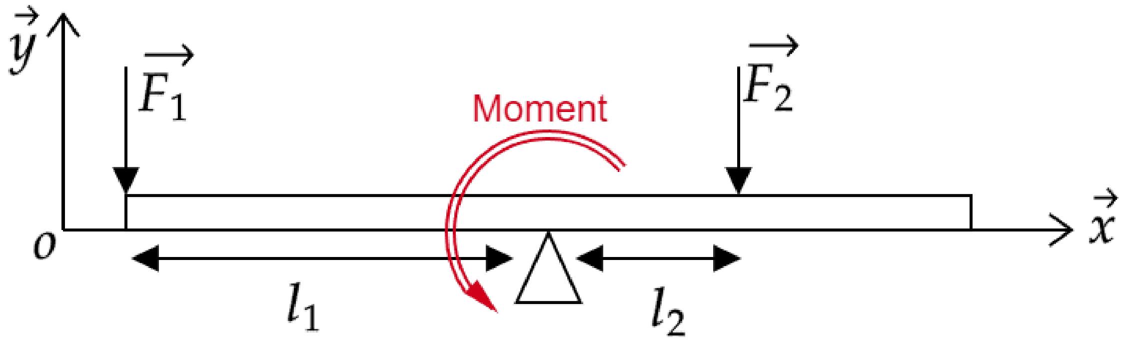


FIGURE 2.9 – Moment engendré par les bras de leviers différents.

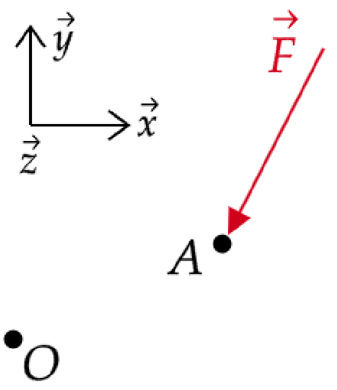
Si on fait l'expérience, le bâton tombera vers la gauche. L'origine du basculement est une différence de moment des deux forces F_1 et F_1. L'action en A s'oppose toujours au poids des deux forces et ne change pas de valeur, mais il existe une *force en rotation*, appelée **moment**, qui tend à faire basculer l'ensemble vers la gauche.

Graphiquement, on représente en général les moments par des doubles flèches même si cela n'est pas toujours le cas.

L'écriture d'un moment qui *ouvre* une porte quand on la pousse peut s'écrire :

— $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(main \to porte)}}$ On lit : Moment au point O de la main sur la porte.
— $\overrightarrow{\mathcal{M}_O(F)}$ On lit : Moment au point O de la force F.

2.5.3 Calculs avec des moments



A retenir 2.4 On peut calculer simplement le moment d'une force en un point quelconque de l'espace à l'aide d'un produit vectoriel[a] : $\overrightarrow{\mathcal{M}_{O(main \to porte)}} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}$.

Un incontournable du BTS CPRP est de savoir calculer le moment d'une force F sachant le moment en un autre point :
$\overrightarrow{\mathcal{M}_B(F)} = \overrightarrow{\mathcal{M}_A(F)} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}$
On retient souvent cette formule par le mot **BABAR**. C'est la formule de **Varignon**, à connaître par coeur.

a. voir chap. 2.2.7

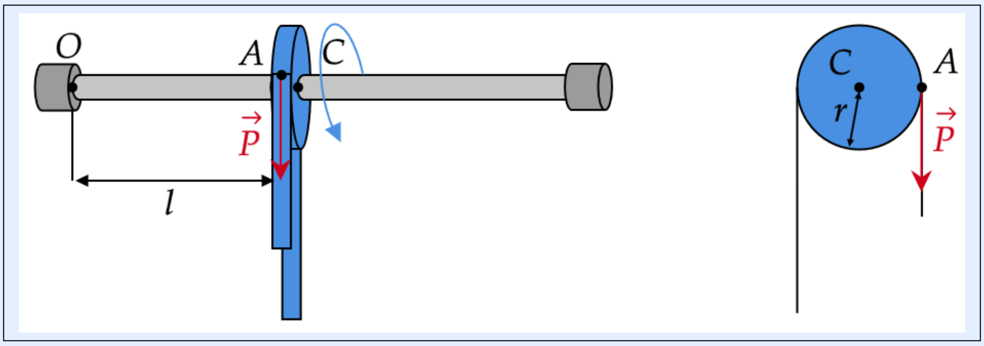
Exercice 2.5.1

Calculez le moment en O de la force F du dessin ci-dessus, sachant que $\overrightarrow{OA} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 2 \end{Bmatrix}_{\vec{x},\, \vec{y}}$ et que $\vec{F} = \begin{Bmatrix} -2 \\ -4 \end{Bmatrix}_{\vec{x},\, \vec{y}}$ N.m

Sachant le moment en O de la force $\vec{F}$, calculez le moment en un point B de la force $\vec{F}$, où $\overrightarrow{BO} = \begin{Bmatrix} -3 \\ 1 \end{Bmatrix}_{\vec{x},\, \vec{y}}$

Exercice 2.5.2

Dans un but d'améliorer l'ergonomie, un treuil simple à tambour actionné par un moteur monophasé de 230V est envisager dans l'atelier du lycée pour monter certaines pièces lourdes sur les plateaux d'usinage. Pour un treuil soulevant jusqu'à 500 kg, on trouve des prix d'environ 400€.



Pour notre atelier, on voudrait soulever des pièces de 200kg maximum (c'est déjà beaucoup). Notre tambour à un rayon $r = 10$ cm et la distance entre le milieu et l'extrémité est $l = 3$ m.

Question : En utilisant les deux formules vues plus haut, quels seront les moments en C puis en O ?

2.5.4 Équiprojectivité des champ des moments

La notion d'équiprojectivité des champs indique comment les moments se comportent. Plus on s'éloigne de la force engendré, plus la *tendance à tourner* sera grande. En effet, pour ouvrir une porte, si on la pousse à l'extrémité, l'ouverture sera plus facile que proche des gonds.

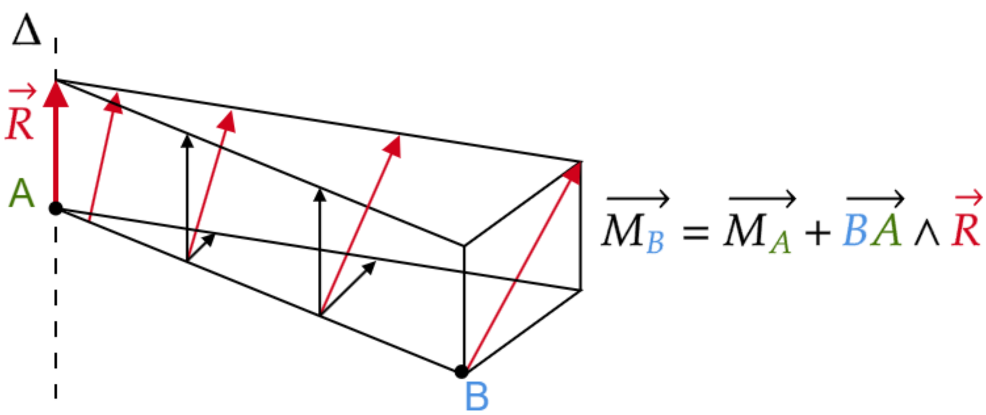


FIGURE 2.10 – Incidence de la longueur (bras de levier) sur le moment.

2.5.5 Notation de Torseurs

Nous avons vu sur l'exemple du treuil qu'il est intéressant d'avoir les informations des forces appliquées (la barre ne doit pas fléchir) et des moments (la barre ne doit pas se tordre). Nous avons aussi admis qu'une **action mécanique** contient deux informations, une force et un moment sur un certain volume.
En science de l'ingénieur, il existe une notation pour parler d'une action mécanique, écrire ses éléments, et expliquer sur quoi elle s'applique. Nous utilisons les **torseurs**.

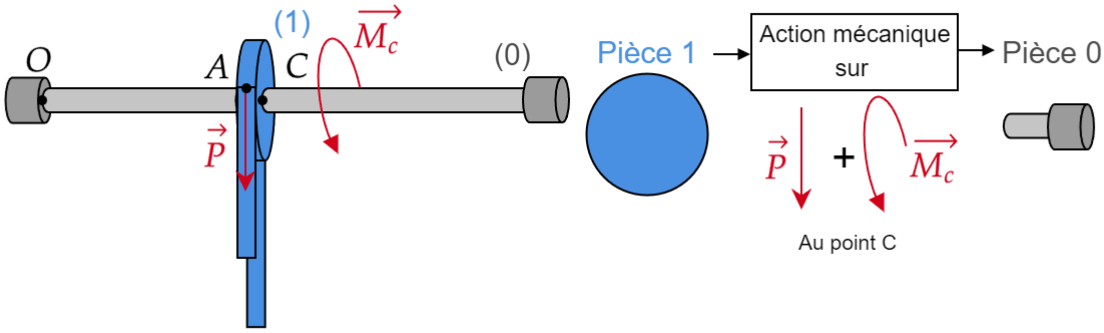


FIGURE 2.11 – Bilan des actions mécaniques qui s'applique sur la pièce (0) au point C.

Un torseur quelconque s'écrit en général par la lettre $\mathscr{T}$ comme torseur. Mais nous verrons des torseurs très communs, si bien qu'on les nomme toujours par la même lettre (ex. torseur cinématique très souvent noté $\mathscr{V}$).

Nous pouvons écrire le torseur (fig. 2.11) des actions mécaniques de la pièce (1) : le tambour, sur la pièce (0) : la barre, en un point choisi, disons C. Il devra indiquer : les forces, les moments, le point d'application et la base dans laquelle nous nous trouvons.

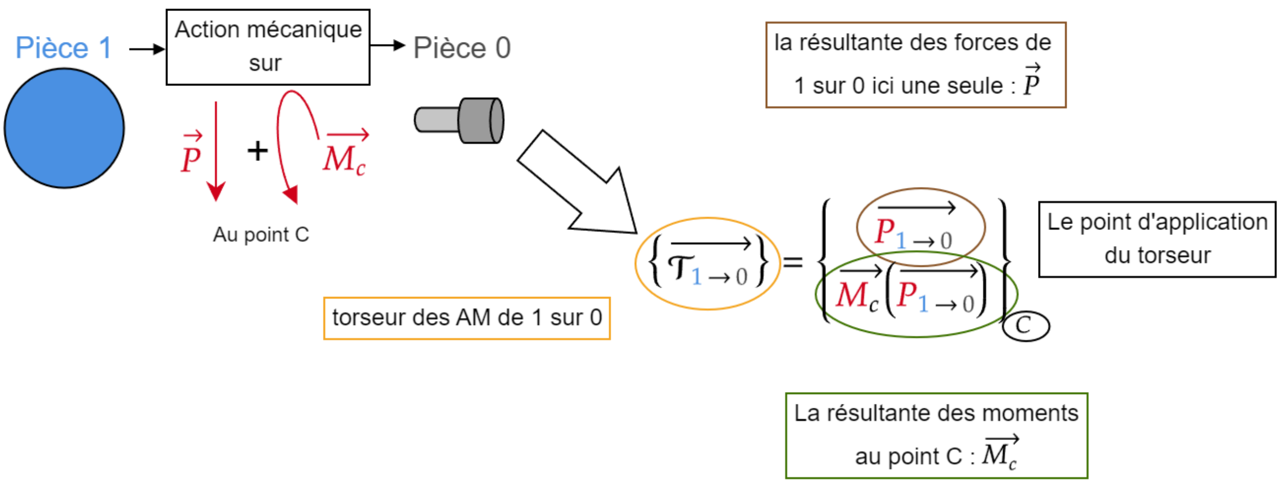


FIGURE 2.12 – Écriture du torseur des actions mécanique de (1) sur (0), au point C.

Exercice 2.5.3

Écrire le torseur des actions mécaniques de la pièce (1) sur la pièce (0) au point O avec les données numériques que vous avez trouvé dans l'exercice 2.5.3.

Le torseur des actions mécaniques de (1) sur (0) nous indique, pour un point donné, l'état des forces et des moments, ce qui nous sera très utile pour connaître les efforts d'outil sur les pièces à usiner. De plus, comme nous connaissons la formule pour déplacer le moment d'une force en n'importe quel point, nous pouvons connaître le torseur partout où nous le souhaitons. En simulation numérique, la formules de Varignon est très utile, une fois entrée dans les logiciels, l'ordinateur peut calculer la répartition des forces et moments partout sur un système si on lui donne les premières informations. Beaucoup de métier découle des formules de sciences de l'ingénieur et vous pouvez aussi vous lancer dans une carrière info-mécanique, mécatronique.

Extrait d'une thèse sur la simulation avec la formule de Varignon. "*le champ des moments d'un torseur est défini en tout point de l'espace, ce champ est équiprojectif, les deux champs sont reliés par la relation de Varignon. Ainsi les petits déplacements sont calculables en tout point.*"

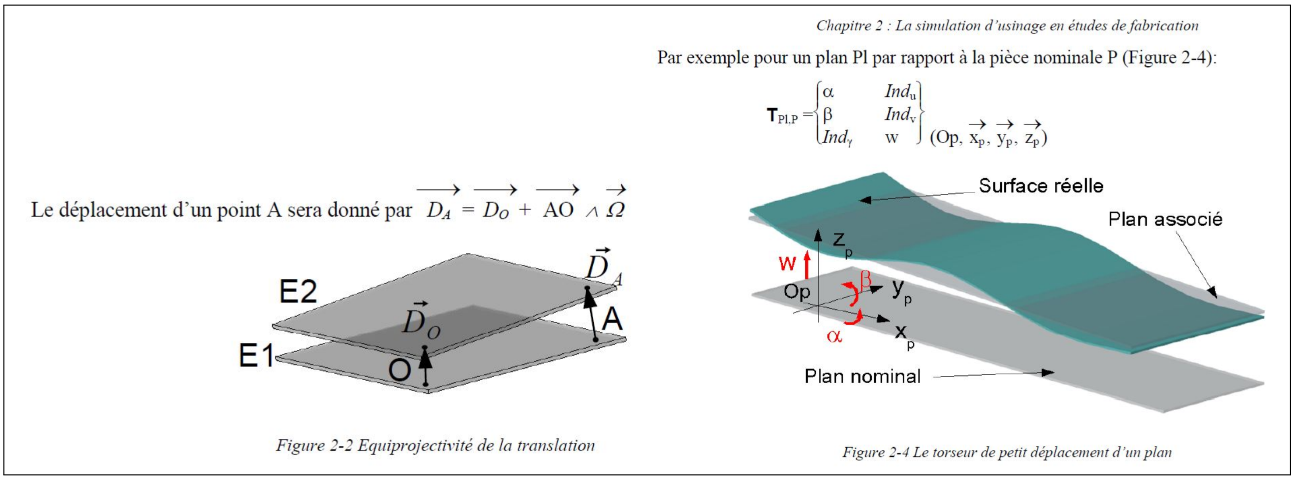
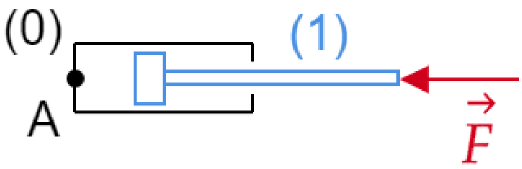


FIGURE 2.13 – Crédit : ÉCOLE DOCTORALE centrale nantes. MECANIQUE, THERMIQUE ET GENIE CIVIL. Modélisation et quantification tridimensionnelles des écarts de fabrication pour la simulation d'usinage. STEPHANE TICHADOU 2016.

2.5.6 Torseurs particuliers

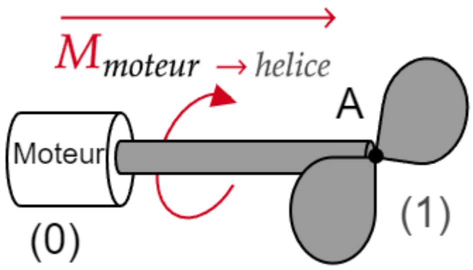
2.5.6.1 Torseurs glisseurs



$$\left\{\overrightarrow{\mathcal{T}_{1\rightarrow 0}}\right\} = \left\{\begin{matrix} \overrightarrow{F_{1\rightarrow 0}} \\ 0 \end{matrix}\right\}_A$$

FIGURE 2.14 – Écriture du torseur des actions mécanique de (1) sur (0), au point C.

2.5.6.2 Torseurs couples



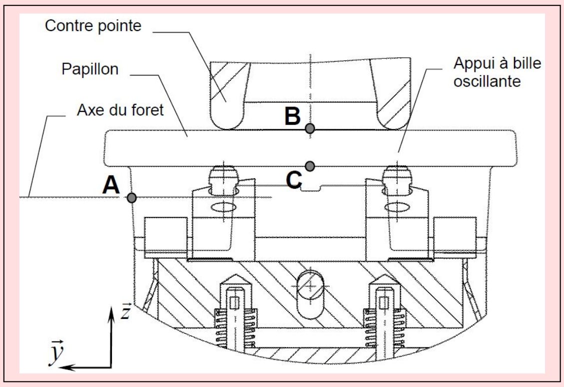
$$\left\{\overrightarrow{\mathcal{T}_{1\to 0}}\right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \overrightarrow{M_{moteur \to helice}} \end{array} \right\}_A$$

FIGURE 2.15 – Écriture du torseur des actions mécanique de (1) sur (0), au point C.

Pour aller plus loin sur les *tenseurs* et en parler lors du cours : `https://www.youtube.com/watch?v=zPRbbM4KJBY&t=1066s`

Extrait BTS 2.5.1

TS CPRP 2015
On se propose d'estimer l'effort maxi que doit appliquer la contre-pointe sur le papillon lors de l'opération de perçage.



Hypothèses :

- Le problème possède un plan de symétrie mécanique $(\mathscr{B}, \vec{y}, \vec{z})$;
- L'ensemble des contacts entre solide se fait avec adhérence. On prendra $tan(\phi_0) = 0,1.$;
- L'étude est menée à la « limite du glissement » ;
- L'action de la pesanteur est négligée ;
- Pour l'étude, l'effort de pénétration notée $\overrightarrow{\mathscr{A}_{(f\to p)}}$ aura une intensité de : $\|\overrightarrow{\mathscr{A}_{(f\to p)}}\| = 2000N$

On notera : $\{A_{f\to p}\} = \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{A_{f\to p}} = 2000.\vec{y} \\ \overrightarrow{\mathscr{M}_{A(f\to p)}} = \vec{0} \end{array} \right\}_{A,\ (\mathscr{R},\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})}$

Concernant l'action de posage, on considère que la liaison entre les supports à bille oscillante et le papillon est une liaison appui plan. En l'absence de mouvement, le torseur modélisant l'action mécanique transmissible comporte 3 inconnues Yc, Zc et Lc. Comme la liaison est unilatérale, ZC > 0.

$$\{C_{pp\to papillon}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & L_c \\ Y_c & 0 \\ Z_c & 0 \end{array} \right\}_{C,\ (\mathscr{R},\ \vec{x},\ \vec{y},\ \vec{z})} \qquad avec\ Y_c = Z_c.\tan(\phi_0)$$

2.6 Solides indéformables

2.6.1 Hypothèses du dimensionnement

2.6.2 Définition

Definition 2.4 Un solide $\mathscr{S}$ est appelé indéformable s'il est caractérisé par un ensemble de points et que la distance entre deux points reste invariante au cours du temps. Mathématiquement, on écrit :

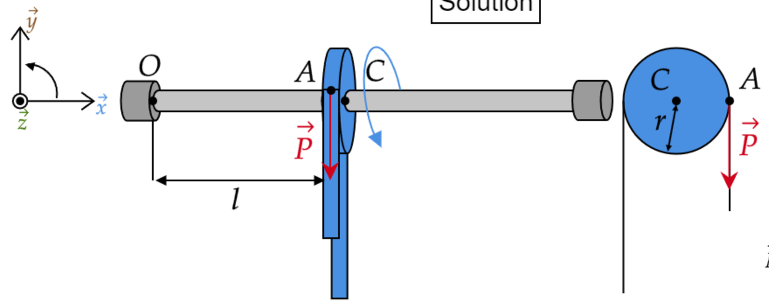
$\forall\, t, \forall A \ \in S,\ \forall B \ \in S\ :\ \|\overrightarrow{AB}\| = C^{cte}$

On lit la ligne du dessus comme suit : Quelque chose est un solide si, pour tout instant t, pour tous points A d'un solide $\mathscr{S}$, pour tout point B appartenant aussi à $\mathscr{S}$, la distance entre les points A et B reste constant au cours du temps.

2.7 ANNEXE

Solution exercice 2.5.3

Solution



$$\overrightarrow{M_c} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{P} = \begin{Bmatrix} 0\,\vec{x} \\ 0\,\vec{y} \\ 0,1\vec{z} \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0\,\vec{x} \\ -2000\,\vec{y} \\ 0\vec{z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +200\,N.m \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_c} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \overrightarrow{M_c} + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{P}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} +3000 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \wedge \begin{Bmatrix} 0 \\ -2000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_o} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -6000 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ -6000 \end{Bmatrix}$$

$$\boxed{\overrightarrow{M_O} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 0 \\ -6000 \end{Bmatrix}_{(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}}$$

Index