Statique des solides indéformables

Nous allons nous intéresser aux solides dans le domaine statique, juste avant qu'ils ne bougent. Il s'agit de répondre aux questions, est-ce que le solide va se mettre à bouger ? Est-ce que le solide peut supporter cette contrainte sans casser ? Si on ne veut pas qu'il casse, jusqu'où peut-on le déformer ?

Les attendus en BTS CPRP

• Comportement mécanique des pièces et des systèmes • Isolement d'une pièce ou d'un système de solides • Équilibre statique des solides, principe fondamental de la statique	Modélisation des actions mécaniques

1 Rappel

1.1 Torseur

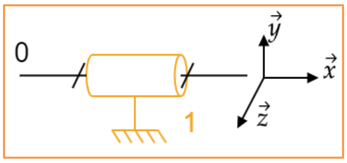
Ecriture d'un torseur :

Les actions mécaniques

$$\left\{\overrightarrow{T_{1\to 0}}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\boxed{\overrightarrow{\mathcal{R}_{1\to 0}}}\\ \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{P\,\mathcal{R}_{1\to 0}}}}\end{array}\right\}_{P(\Re_0,\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

P est le point d'application du torseur

Le couple (ou moment), au point ***P***, engendré par le bras de levier



1.2 Torseur statique

$$\{T_{j\to i}\} = \{T_{ji}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} X_{ji}\overrightarrow{x_0} + Y_{ji}\overrightarrow{y_0} + Z_{ji}\overrightarrow{z_0} \\ L_{ji}\overrightarrow{x_0} + M_{ji}\overrightarrow{y_0} + N_{j/i}\overrightarrow{z_0} \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$$

$\overrightarrow{R_{ji}}$ est appelé la résultante du torseur, c'est aussi la résultante en statique. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont X_{ji}, Y_{ji} et Z_{ji}

$\overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}})$ est appelé le moment du torseur, c'est aussi le moment en statique. Ses composantes dans la base $\mathfrak{B}_0$ sont L_{ji}, M_{ji} et N_{ji}

La notation $\{T_{j\to i}\}$ est indépendante du point où sera exprimé le torseur.

La notation vectorielle $\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M$ a l'obligation d'être exprimée en un point qu'il faut préciser.

La notation verticale $\begin{Bmatrix} X_{ji} & L_{ji} \\ Y_{ji} & M_{ji} \\ Z_{ji} & N_{ji} \end{Bmatrix}_M^{\mathfrak{B}_0}$ doit être utilisée en précisant la base.

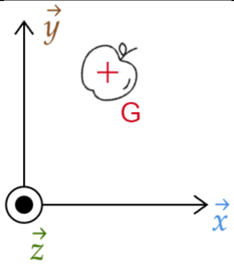
Quel que soit le point où le torseur est exprimé, le vecteur résultante reste constant.

Selon le point choisi, le vecteur moment change et est exprimé à l'aide de la formule de changement de Varignon :

$$\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_M = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_N}(\overrightarrow{R_{ji}}) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ji}} \\ \overrightarrow{M_M}(\overrightarrow{R_{ji}}) + \overrightarrow{NM} \wedge \overrightarrow{R_{ji}} \end{Bmatrix}_N$$

1.3 Torseurs connus

Soit le repère suivant :

	$\{\mathcal{P}_{terre \to pomme}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -g & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{G}^{\mathfrak{B}_0}$ Torseur du poids $\{\mathcal{P}_{terre \to pomme}\} = \begin{Bmatrix} -g\overrightarrow{y_0} \\ 0 \end{Bmatrix}_{G}$

1.4 Torseurs particuliers

Le poids par exemple, il n'a, en théorie (et en pratique aussi normalement) qu'une seule composante (si le repère est bien choisi). On dit qu'il tend à faire glisser le système. Les torseurs qui possèdent un moment résultant nul sont appelés **Torseur glisseurs**. Au contraire, ceux qui ont une résultante nulle sont appelés **Torseur couple**.

$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{A_{2\to1}} \\ 0 \end{Bmatrix}_{P}$	Torseur glisseurs *[Une seule action mécanique : une **Force** appelé ici $\vec{A}$]*
$\{\mathcal{T}_{2\to1}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \overrightarrow{M_P} \end{Bmatrix}_{P}$	Torseur couple *[Une seule action mécanique : Un **Moment** appelé ici $\vec{M}$]*

1.5 Point sur les notations

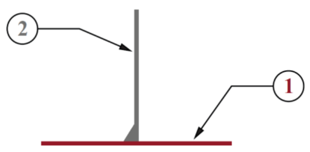
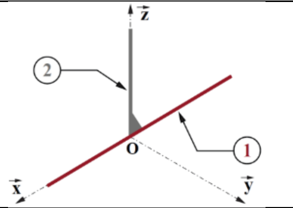
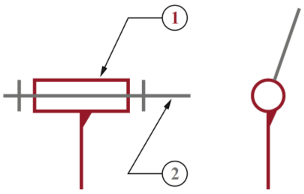
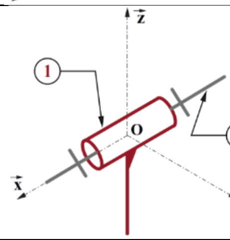
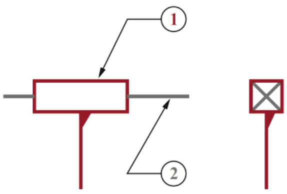
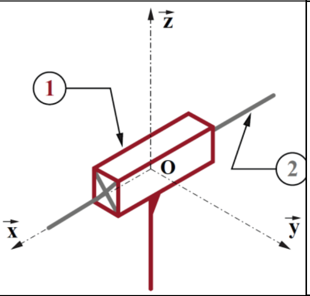
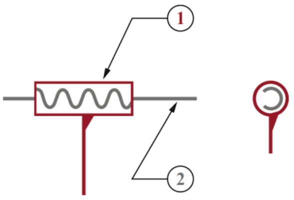
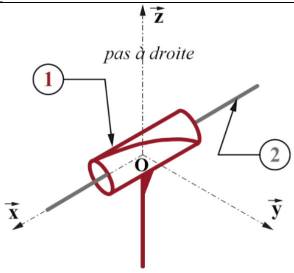
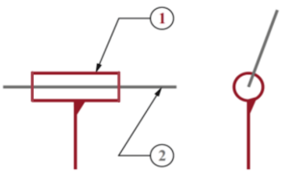
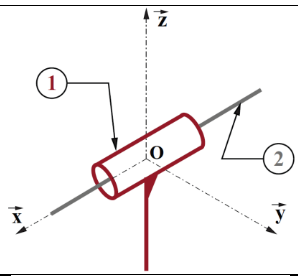
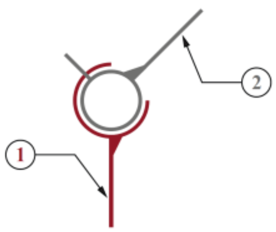
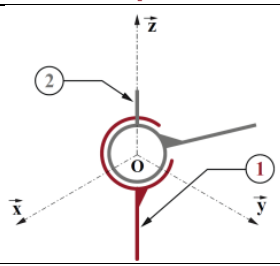
1.5.1 Les Forces

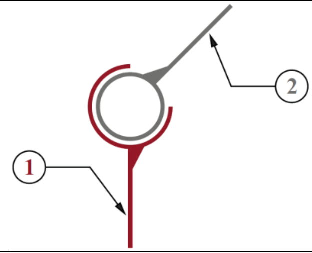
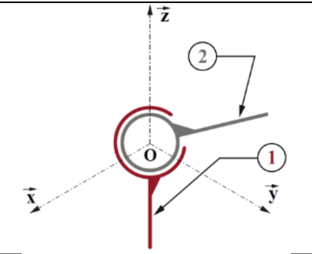
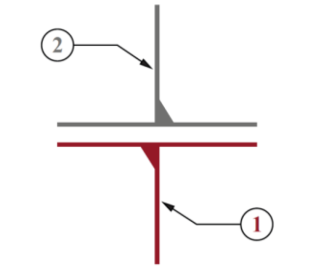
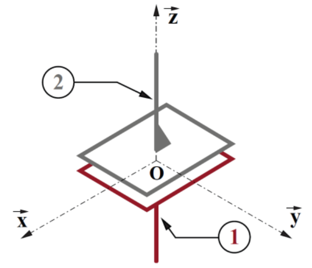
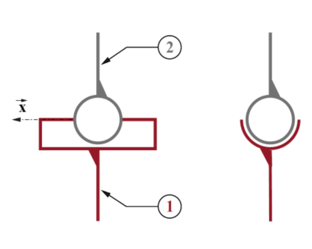
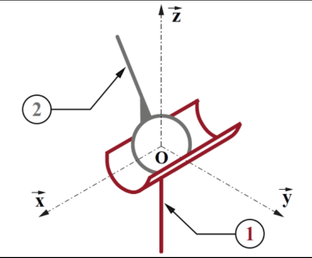
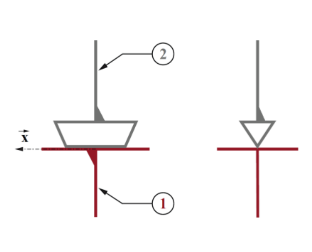
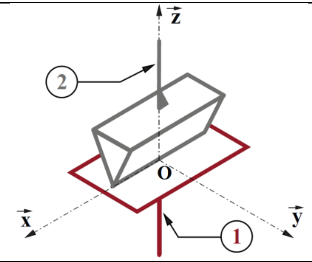
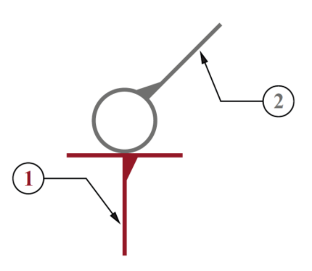
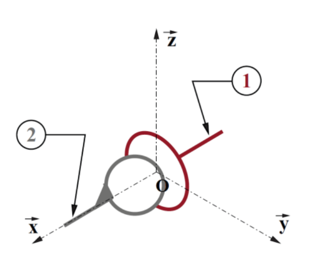
En fonction des sujets et exercices, les forces des actions mécaniques peuvent être à peu près n'importe quelle lettre, mais souvent en majuscule.

1.5.2 Les Moments

En fonction des sujets et exercices, les actions mécaniques de moment s'appelleront souvent par les lettres M (moment) ou C (couple) : $\overrightarrow{\mathcal{M}_p}$ ou $\overrightarrow{C_p}$

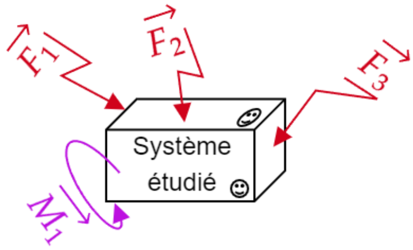
1.6 Rappel sur les liaisons

Liaison	*Elem Géom*	*2D*	*3D*	$\{T_{21}\}$ *Forme canonique*	*Validité*	$\mathfrak{B}$	I_c
Encastrement E	RAS			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ – –	6
Pivot P	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ – –	5
Glissière Gl	$\vec{x}$			$\begin{Bmatrix} 0 & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	$\vec{x}$ – –	5
Hélicoïdale He	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $L_{2/1} = -\frac{pas}{2\pi} X_{2/1}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ – –	5
Pivot Glissant PG	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & N_{2/1} \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ – –	4
Rotule à doigt Sphérique à doigt	O Rainure $(O,\vec{x},\vec{z})$ Doigt $\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & L_{2/1} \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	O	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	4

Rotule S Sphérique S	O			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	O	— — —	3
Appui plan AP	$\vec{z}$			$\begin{Bmatrix} 0 & L_{2/1} \\ 0 & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$	$\forall P$	— — —	3
Linéaire annulaire LA Sphère cylindre SC	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{2/1} & 0 \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	O	$\vec{x}$ — —	2
Linéaire rectiligne LR Cylindre Plan CP	$\{(O,\vec{x}),\vec{z}\}$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{2/1} \\ Z_{2/1} & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1\ \&\ \mathfrak{B}_2$	$(O,\vec{x},\vec{z})$	$\vec{x}$ $\vec{y}$ $\vec{z}$	2
Ponctuelle Pct Sphère-plan SP	$(O,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} X_{2/1} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_P^{\mathfrak{B}}$ $Ref\ \mathfrak{B}_1$	$(O,\vec{x})$	$\vec{x}$ — —	1

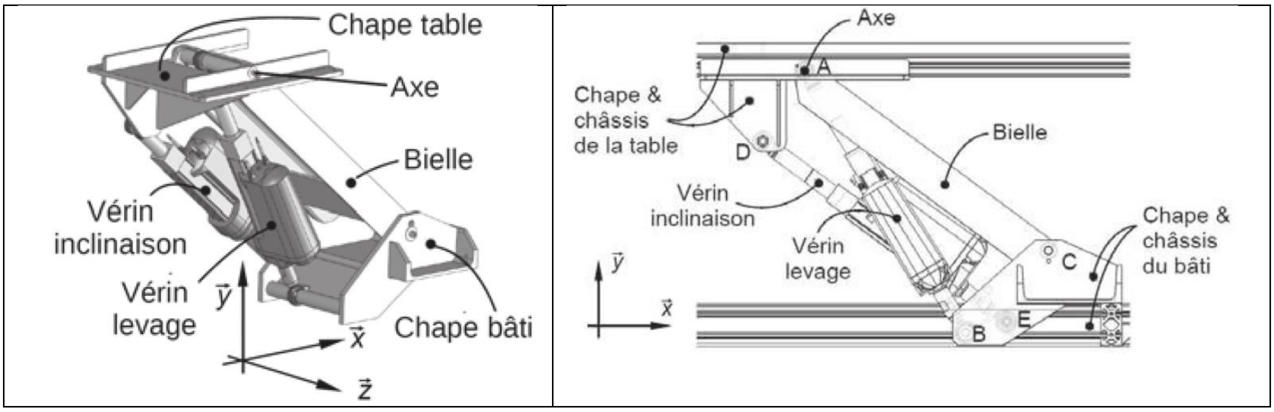
2 Principe fondamental de la statique

Pour le BTS, on cherchera à calculer des actions mécaniques inconnues, mais qui, parce que nous ferons l'hypothèse que le solide est à l'équilibre peuvent être calculées. Par exemple, sur la figure ci-dessous, nous avons trois Forces et un Moment ; on s'arrangera pour avoir au moins, un nombre d'équation égale au nombre d'inconnues statiques.

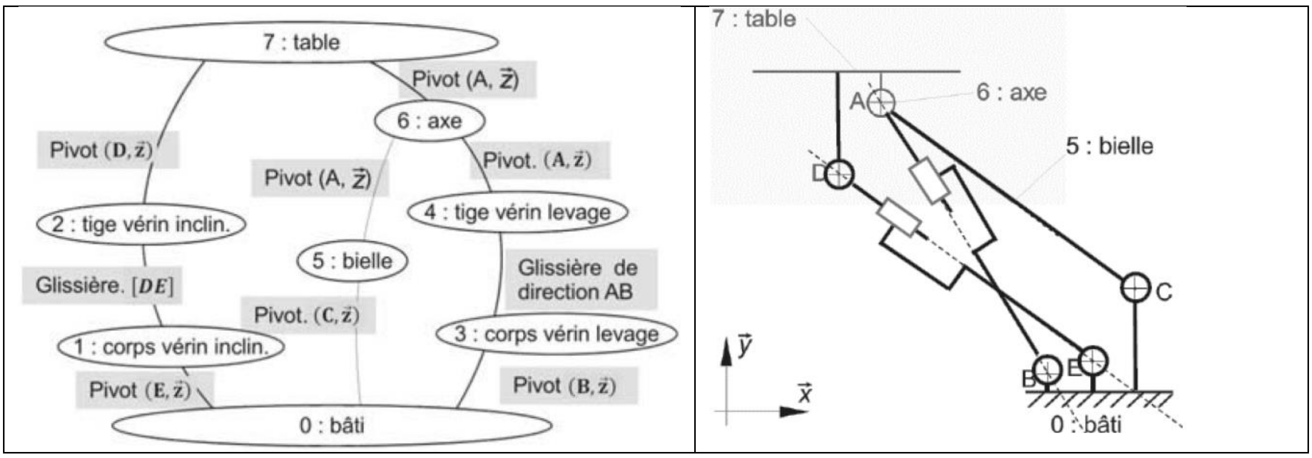


Exemple : Système tangible déployable *Airbus-IRT-CNRS*.

On vous demandera, sachant certaines informations (ex :la puissance délivrée par le vérin de levage ou d'inclinaison), de retrouver par le calcul un effort en un point (ex : en B). Puis, la suite de l'examen pourra consister à savoir si la limite à la rupture a été dépassé.



Les étapes seront celles des cours vus précédemment, avec le graphe des liaisons et le schéma cinématique.



2.1 Résolution statique

Plaçons-nous dans le cas où toutes les liaisons usuelles vues précédemment sont parfaites, c’est-à-dire sans adhérence/frottement, et étudions des mécanismes composés de pièces supposées indéformables.

Le but est de déterminer les actions mécaniques dans les différentes liaisons d’un mécanisme connaissant les actions extérieures qui s’appliquent dessus.

Il existe deux grandes méthodes pour déterminer ces actions :

- Une méthode analytique (calcul)
- Une méthode graphique

La méthode graphique est souvent demandée à l’examen du BTS.