Aufgabe 102 Abi★

Die Funktion f mit

$$f(t) = \mathrm{e}^t + 1$$

beschreibt die Wassermenge in einem Teich während eines immer stärker werdenden Wolkenbruchs in Tausenden von Litern mit t in Stunden. Wieviel Liter Wasser befinden sich während der ersten zwei Stunden durchschnittlich in dem Teich?

7.5 Rotationskörper – nur eA

Merke – nur eA

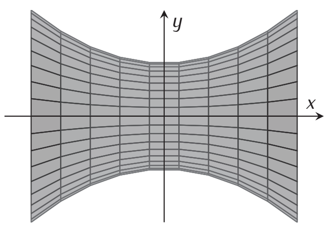
Lässt man eine Funktion $f(x)$ im Bereich $[a; b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein **Rotationskörper**. Für das Volumen V des Rotationskörpers gilt:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, \mathrm{d}x.$$

Tipp:

- Achtung: Erst quadrieren, dann aufleiten!
- Beim Rechnen das π nicht vergessen!

Beispiel: Bei der Rotation der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ um die x-Achse im Intervall $[-1; 1]$ entsteht ein Rotationskörper. Dessen Volumen V soll bestimmt werden.



Mit obiger Formel gilt dann für das Volumen:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, \mathrm{d}x$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right) = \frac{56}{15}\pi.$$

Aufgabe 103 – nur eA Abi★

Folgende Funktionen rotieren im Intervall $[0; 2]$ um die x-Achse. Bestimme die Volumina der entstehenden Rotationskörper.

(a) $f(x) = x^2 - 2x$

(b) $f(x) = x^2 - x + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(d) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$

Aufgabe 104 – nur eA Abi★★★

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Die Funktion $f(x)$ rotiert um die x-Achse. Welches Intervall von 4 Längeneinheiten mit positiven Grenzen muss gewählt werden, damit das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x)$ über diesem Intervall den Wert 500 hat?

Aufgabe 105 – nur eA 🖩 Abi★★-★★★

Für $a > 0$ ist folgende Funktionenschar gegeben:

$$f_a(x) = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a.$$

Ein Hersteller von Glasvasen möchte eine Vase herstellen, deren Innenwand sich durch die Rotation einer Funktion der Schar $f_a(x)$ im Intervall $[0; 2]$ um die x-Achse beschreiben lässt. Die Größen x und $f(x)$ sind hierbei in Dezimetern gegeben.

(a) Die Vase soll einen Inhalt von 1 Litern fassen. Bestimme a auf drei Nachkommastellen genau.

(b) Die Außenwand wird durch die Funktion $f_{0,25}(x)$ beschrieben. Aus wie vielen Kubikzentimetern Glas besteht die Vase?

Analysis

(c) Beobachtungsbeginn ist bei $t = 0$, Beobachtungsende ist bei $t = 12$. Somit gilt für die mittlere Temperatur T:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{12}\int_0^{12}\left(\frac{1}{24}t^3 - t^2 + 6t + 5\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{1}{96}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t\right]_0^{12} \\ &= \frac{1}{12}\cdot 132 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Die Durchschnittstemperatur an diesem Tag betrug 11 °C.

Lösung 102

Es gilt:

$$M = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \mathrm{e}^t + 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t + t\right]_0^2 = \frac{1}{2}((\mathrm{e}^2 + 2) - (\mathrm{e}^0 + 0)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 + 1) \approx 4{,}195.$$

Es befinden in den ersten zwei Stunden des Wolkenbruchs also durchschnittlich 4195 Liter Wasser in dem Teich.

Lösung 103

(a) $V = \frac{16}{15}\pi$

(b) $V = \frac{22}{5}\pi$

(c) $V = \ln(3)\pi$

(d) $V \approx 1716{,}3$

Lösung 104

Gesucht ist Intervall Intervall $[a; b]$, wobei a und b positiv sind und $b - a = 4$ sowie $V = 500$ gilt.
Allgemein lautet das Volumen des Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$:

$$V = \pi\int_a^b\left(\sqrt{x+1}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_a^b = \pi\left(\frac{1}{2}b^2 + b - \frac{1}{2}a^2 - a\right).$$

Man setzt $b = a + 4$ und $V = 500$ in die Gleichung ein:

$$500 = \pi\left(\frac{1}{2}(a+4)^2 + (a+4) - \frac{1}{2}a^2 - a\right) \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{125}{\pi} - 3 \approx 36{,}8.$$

Also $b = a + 4 \approx 40{,}8$. Damit ist das gesuchte Intervall gefunden:

$$[36{,}8; 40{,}8].$$

Lösung 105

(a) Beachte, dass bei einer Längeneinheit von einem Dezimeter 1 Volumeneinheit einem Volumen von 1 Liter entspricht. Der Parameter a kann aus folgendem Ansatz ermittelt werden:

$$V_a = \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right)^2 \mathrm{d}x = 1$$

Ein Computeralgebrasystem kann hier sofort die Lösung finden. Will man es von Hand finden, müssen einige Rechenschritte ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right) \cdot \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{100} + \frac{x}{100} + a^2 + \frac{x \cdot \sqrt{x}}{50} + \frac{\sqrt{x} \cdot a}{5} + \frac{ax}{5} \right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{300} + \frac{x^2}{200} + a^2 x + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{125} + \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{15} + \frac{ax^2}{10} \right]_0^2 \\
&= \pi \left(\frac{2}{75} + \frac{1}{50} + 2a^2 + \frac{4\sqrt{2}}{125} + \frac{4\sqrt{2}}{15} \cdot a + \frac{2}{5} \cdot a \right) \\
&= 6{,}2832a^2 + 2{,}4414a + 0{,}2888
\end{aligned}$$

Setzt man dies gleich 1, so folgt

$$6{,}2382a^2 + 2{,}441a + 0{,}2888 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = -0{,}583, \quad a_2 = 0{,}194.$$

Wegen $a > 0$ ist die Lösung $a = a_2 = 0{,}194$.

(b) Um das Volumen des Glases zu bestimmen, wird das Volumen des inneren Rotationskörpers vom Volumen des äußeren Rotationskörpers subtrahiert.

$$V_{\text{Glas}} = V_{0,25} - V_{0,194} = \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + 0{,}222 \right)^2 \mathrm{d}x - 1 \approx 0{,}2918.$$

Da eine Volumeneinheit ein Liter dm^3 beträgt und nach Kubikzentimeter cm^3 gefragt ist, muss man mit dem Faktor 1000 multiplizieren. Somit erhält man das gesuchte Volumen des Glases:

$$V_{\text{Glas}} \approx 292\,\mathrm{cm}^3.$$