Aufgaben zu Kapitel 7

Abitur 2021 B1

1 Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{6x}{x^2-4}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet und ist symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

2 Betrachtet wird die Schar der Funktionen $f_{a,b,c}: x \mapsto \frac{ax+b}{x^2+c}$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}$ und maximaler Definitionsmenge $D_{a,b,c}$.

1 **a)** Die Funktion f aus Aufgabe 1 ist eine Funktion dieser Schar. Geben Sie die zugehörigen Werte von a, b und c an.

2 **b)** Begründen Sie: Wenn $a = 0$ und $b \neq 0$ gilt, dann ist der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich der y-Achse und schneidet die x-Achse nicht.

3 **c)** Geben Sie für a, b und c alle Werte an, sodass sowohl $D_{a,b,c} = \mathbb{R}$ gilt als auch, dass der Graph von $f_{a,b,c}$ symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs, aber nicht identisch mit der x-Achse ist.

4 **d)** Für die erste Ableitung von $f_{a,b,c}$ gilt: $f'_{a,b,c}(x) = -\frac{ax^2+2bx-ac}{(x^2+c)^2}$.

Zeigen Sie: Wenn $a \neq 0$ und $c > 0$ gilt, dann besitzt der Graph von $f_{a,b,c}$ genau zwei Extrempunkte.

Abitur 2019 B1

3 Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_k: x \mapsto kx^3 + 3\cdot(k+1)x^2 + 9x$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und den zugehörigen Graphen G_k. Für jedes k besitzt der Graph G_k genau einen Wendepunkt W_k.

2 **a)** Geben Sie das Verhalten von g_k an den Grenzen des Definitionsbereichs in Abhängigkeit von k an.

3 **b)** Bestimmen Sie die x-Koordinate von W_k in Abhängigkeit von k.

(zur Kontrolle: $x = -\frac{1}{k} - 1$)

4 **c)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der zugehörige Wendepunkt W_k auf der y-Achse liegt. Zeigen Sie, dass in diesem Fall der Punkt W_k im Koordinatenursprung liegt und die Wendetangente, d. h. die Tangente an G_k im Punkt W_k, die Steigung 9 hat.

Abitur 2019 A2

3 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $p_k: x \mapsto kx^2 - 4x - 3$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, deren Graphen Parabeln sind.

2 **a)** Bestimmen Sie den Wert von k so, dass der Punkt $(2|-3)$ auf der zugehörigen Parabel liegt.

3 **b)** Ermitteln Sie diejenigen Werte von k, für die die jeweils zugehörige Funktion p_k keine Nullstelle besitzt.

Abitur 2018 A1

5 Für jeden Wert von a mit $a \in \mathbb{R}^+$ ist eine Funktion f_a durch $f_a(x) = \frac{1}{a} \cdot x^3 - x$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

2 **a)** Eine der beiden Abbildungen stellt einen Graphen von f_a dar. Geben Sie an, für welche Abbildung dies zutrifft. Begründen Sie Ihre Antwort.

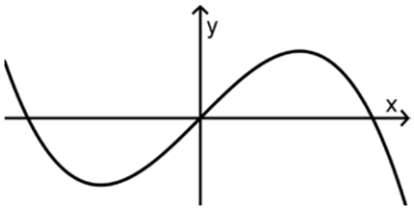

Abb. 1

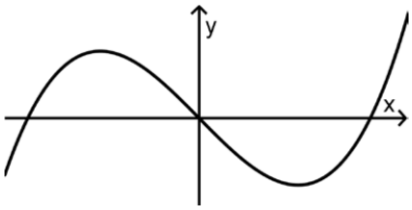

Abb. 2

3 **b)** Für jeden Wert von a besitzt der Graph von f_a genau zwei Extrempunkte. Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den der Graph der Funktion f_a an der Stelle $x = 3$ einen Extrempunkt hat.

Abitur 2015 A2

4 **4** Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_a : x \mapsto xe^{ax}$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die erste Ableitung von f_a an der Stelle $x = 2$ den Wert 0 besitzt.

Abitur 2020 B1

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+1}$; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen G_f.

3 Für jeden Wert $k > 0$ legen die auf G_f liegenden Punkte $P_k(-k \mid f(-k))$ und $Q_k(k \mid f(k))$ gemeinsam mit dem Punkt $R(0 \mid 1)$ ein gleichschenkliges Dreieck P_kQ_kR fest.

5 **a)** Berechnen Sie für $k = 2$ den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_2Q_2R (vgl. Abbildung 3).

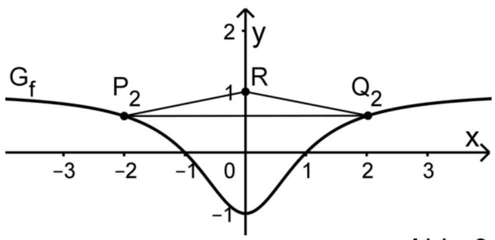

Abb. 3

Zeigen Sie anschließend, dass der Flächeninhalt des Dreiecks P_kQ_kR allgemein durch den Term $A(k) = \frac{2k}{k^2+1}$ beschrieben werden kann.

6 **b)** Zeigen Sie, dass es einen Wert von $k > 0$ gibt, für den $A(k)$ maximal ist. Berechnen Sie diesen Wert von k sowie den Flächeninhalt des zugehörigen Dreiecks P_kQ_kR.

Abitur 2020 B2

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 1 + 7e^{-0,2x}$ mit Definitionsbereich $\mathbb{R}_0^+$; die Abbildung 1 zeigt ihren Graphen G_f.

3 **1 a)** Begründen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 1$ waagrechte Asymptote von G_f ist.
Zeigen Sie rechnerisch, dass f streng monoton abnehmend ist.

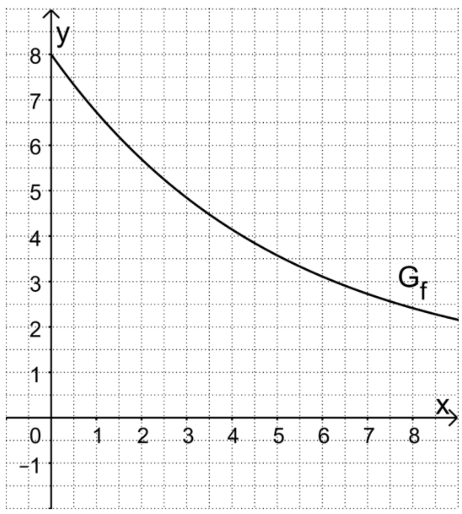

Abb. 1

Für jeden Wert $s > 0$ legen die Punkte $(0 \mid 1)$, $(s \mid 1)$, $(s \mid f(s))$ und $(0 \mid f(s))$ ein Rechteck mit dem Flächeninhalt $R(s)$ fest.

7 **b)** Zeichnen Sie dieses Rechteck für $s = 5$ in die Abbildung 1 ein.
Zeigen Sie, dass $R(s)$ für einen bestimmten Wert von s maximal ist, und geben Sie diesen Wert von s an.

(zur Kontrolle: $R(s) = 7s \cdot e^{-0,2s}$)

Abitur 2018 B2

1 Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$. G_f schneidet die x-Achse bei $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ und verläuft durch den Punkt $(1|2)$.

4 **a)** Ermitteln Sie einen Funktionsterm von f.

(zur Kontrolle: $f(x) = \frac{1}{18} \cdot (x^3 - 15x^2 + 50x)$*)*

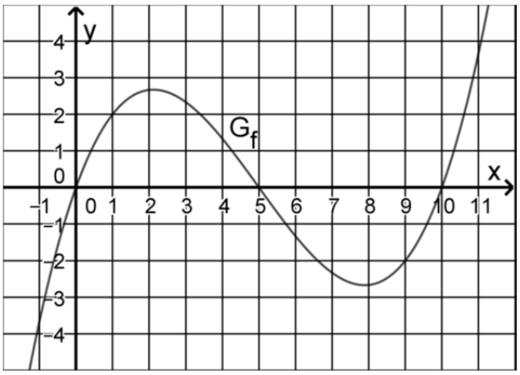

Abb. 1