Geometrie

- Lineare Gleichungssysteme
- Vektorgrundlagen
- Geraden, Ebenen und Kugeln
- Lagebeziehungen und Schnittmengen
- Winkel
- Abstände
- Schattenpunkte
- Spiegelpunkte

Lineare Gleichungssysteme

Wie löse ich ein LGS?

$$I, x_1 + x_2 = 0$$
$$II, x_1 - x_2 = 2$$

- Addieren/Subtrahieren (Immer beider Seiten!):
  $I + II : x_1 + x_2 + x_1 - x_2 = 0 + 2$
  $2x_1 = 2 \qquad | : 2$
  $x_1 = 1 \implies x_2 = -1$
- Einsetzen (Nach einer Variable auflösen und einsetzen):
  $I : x_1 + x_2 = 0 \qquad | - x_2$
  $x_1 = -x_2$
  in $II : -x_2 - x_2 = 2$
  $-2x_2 = 2 \qquad | : (-2)$
  $x_2 = -1 \implies x_1 = 1$

$$I, x_1 + x_2 = 0$$
$$II, x_1 - x_2 = 2$$

- Gleichsetzen (Beide Gleichungen brauchen eine identische Seite, z.B mit Null)
  $II: x_1 - x_2 = 2 \qquad | - 2$
  $x_1 - x_2 - 2 = 0$
  $I = II: x_1 + x_2 = x_1 - x_2 - 2 \qquad | - x_1$
  $x_2 = -x_2 - 2 \qquad | + x_2$
  $2x_2 = -2 \qquad | : 2$
  $x_2 = -1 \implies x_2 = -1$

Lösungsmöglichkeiten

- Genau eine Lösung
- Keine Lösung
- Unendlich viele Lösungen

Was sind LGS?

- Interpretation der Lösung
- Interpretation der Addition
  $I, x_1 - x_2 = 0$
  $II, x_1 + x_2 = 2$

Lineare Gleichungssysteme: Rechenblock

Aufgabe 99

Aufgabe 24J / 14S. Ein altes Dampfschiff der Donaudampfschifffahrtsgesellschaft fährt gemütlich mit gleichmäßiger Geschwindigkeit den Donau-Kanal entlang. Simon möchte herausfinden, wie lang das Schiff ist, gemessen in seinen Schritten. Während das Schiff langsam vorwärts fährt, schreitet er dazu am Ufer mit gleichmäßigen Schritten vom Heck des Schiffes zum Bug, wobei er 240 Schritte zählt. Am Bug angekommen dreht er sofort um und schreitet wieder zum Heck des Dampfschiffes zurück, wobei er nun 60 Schritte zählt. Wie lang ist das alte Dampfschiff in Simons Schritten?

$$I, x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$II, x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$III, 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 0$$

$$I, 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$$
$$II, x_1 - x_2 - 2x_3 = 2$$
$$III, 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$$

Lösungen:

- $x_1 = 3, x_2 = -0.6, x_3 = -1.4$
- $x_1 = 1.6, x_2 = -1.2, x_3 = 0.4$

Vektorgrundlagen

- Vektoren funktionieren wie Wegbeschreibungen
- Ortsvektoren (Koordinaten), Vektor vom Ursprung zum Punkt, ein Großbuchstabe $\vec{A}$
- Alle anderen Vektoren mit zwei Großbuchstaben $\vec{A}B$ oder einem Kleinbuchstaben $\vec{a}$
- Vektoren haben eine Länge, eine Orientierung und eine Richtung

- Kolinearität: Ein Vektor ist das Vielfache eines Anderen
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -21 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$
- Betrag: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \implies |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (Länge des Vektors)
- Normierter Vektor (Vektor mit der Länge 1): $\vec{a_0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Einheitsvektoren
$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Mittelpunkt zwischen $\vec{A}$ und $\vec{B}$: $\vec{M} = \frac{1}{2}(\vec{B} + \vec{A})$
- Lineare Abhängigkeit:
  "Kann man einen Vektor durch andere Vektoren ausdrücken? Kann ich das Ziel auf mit anderen gestückelten Teilwegbeschreibungen erreichen?"

- Lineare Abhängigkeit:
  Rezept:
  2-dimensional: Ein Vektor ist zu einem anderen nur lin. Abh., wenn die beiden kolinear sind. Bei drei oder mehr Vektoren herrscht immer lin. Abh.
  3-dimensional: Ein Vektor ist zu einem anderen nur lin. Abh., wenn die beiden kolinear sind. Drei Vektoren sind lin. Abh., wenn das Spatprodukt aus ihnen null ergibt (die Vektoren spannen kein Volumen auf). Bei vier oder mehr Vektoren sind immer min. zwei lin. Abh.

- Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

- Kreuzprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{c}, \vec{b} \perp \vec{c}$$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- Volumina:

  $A_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

  $A_{\square} = |\vec{a} \times \vec{b}|$

  $V_{Pyramide} = \frac{1}{6}|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

  $V_{Spat} = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$

Vektorgrundlagen: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	100, 103, 105, 108, 109, 110, 113, 115
mittel	101, 102, 106, 111, 112, 114
schwer	104

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 107
- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- Aufgabenblatt Geo Vektorbasics
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo

Geraden, Ebenen und Kugeln

Geradengleichung

$$g : \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{v}$$

Geradengleichungen sind nicht eindeutig!

Rezept Gerade aufstellen mit Beispiel

$$A(3|2|0), B(8|3|1)$$

1. Bestimme Stützvektor $\vec{A}$ als einen Beliebigen der Punkte

   $$\vec{A} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Bestimme Spannvektor $\vec{v}$ als Verbindungsvektor der beiden Punkte

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Gleichung angeben

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Rezept Punktprobe Gerade mit Beispiel

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Entscheide, ob $A(9|7|20)$ auf der Gerade liegt.

1. Ersetze $\vec{X}$ durch den Punkt
   $$\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 17 \end{pmatrix}$$
2. LGS aufstellen und lösen
   $3 + 2r = 9 \implies r = 3$
   $7 = 7$
   $1 + 17r = 20 \implies r = \frac{19}{17} \implies$ Keine Lösung, A nicht auf g

Ebenengleichung in Parameterform

$g : \vec{X} = \vec{A} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$

Ebenengleichung sind nicht eindeutig!
Die Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen dabei keine Vielfaches voneinander sein!

Rezept Ebene aufstellen

1. Bestimme Stützvektor $\vec{A}$ als einen Beliebigen der Punkte
2. Bestimme die Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Verbindungsvektor jeweils zweier Punkte
3. Gleichung angeben

Ebenengleichung in Koordinatenform

$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$$

Auch Koordinatenformen sind nicht eindeutig!

Rezept Parameterform in Koordinatenform mit Beispiel

$A(2|3|-1), B(3|3|-2), C(-1|7|1)$

1. Parameterform aufstellen

$$E: \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Normalenvektor mit Kreuzprodukt berechnen

$$n_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

3. Ansatz für Ebene aufstellen
   $E : 4x_1 + x_2 + 4x_3 = a$
4. Aufpunkt einsetzen und a ausrechnen
   $E : 4 \cdot 2 + 3 + 4 \cdot (-1) = 7 = a$
5. Fertige Ebene angeben
   $E : 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7$

Rezept Punktprobe in Ebene

Wenn Ebene in Parameterform, versuch LGS zu lösen wie mit Gerade

Wenn in Koordinatenform:
$E: 2x_1 + -x_2 + 3x_3 = 6, P(2|0|1)$

1. Punkt einsetzen und Gleichheit überprüfen
   $E: 2 \cdot 2 + -0 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 6$
   $\implies$ Bei Ungleichheit liegt der Punkt nicht in der Ebene

Besondere Ebenen

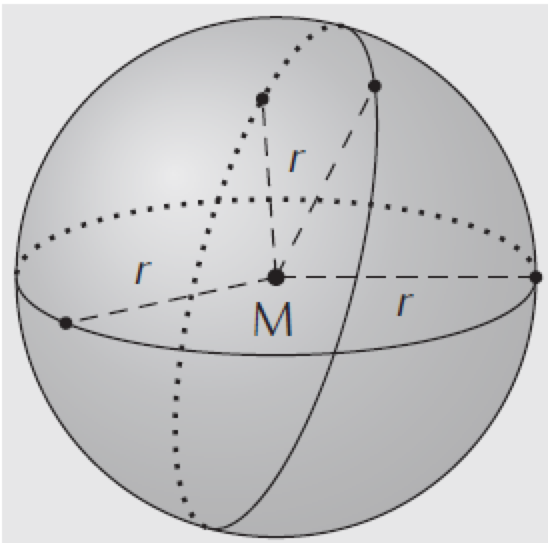
- x_1x_2-Ebene: $x_3 = 0$
- x_2x_3-Ebene: $x_1 = 0$
- x_1x_3-Ebene: $x_2 = 0$

Besondere Lagen: Parallelität von Ebene und Koordinatenachse/-ebene

Die Ebene $E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ ist parallel zur...

- x_1-Achse, wenn $n_1 = 0$
- x_2-Achse, wenn $n_2 = 0$
- x_3-Achse, wenn $n_3 = 0$
- x_1x_2-Ebene, wenn $n_1 = n_2 = 0$
- x_2x_3-Ebene, wenn $n_2 = n_3 = 0$
- x_1x_3-Ebene, wenn $n_1 = n_3 = 0$

Kugeln



Eine Kugel mit Mittelpunkt M und Radius r ist die Menge aller Punkte, die von M den Abstand r haben.

Koordinatengleichung

$K: (x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$
mit Mittelpunkt $M(m_1|m_2|m_3)$ und Radius r

Rezept Kugelgleichung aufstellen

1. Für Kugelgleichung einfach M und r in die Formel einsetzen
   $M(2|4|1)$ und Radius $r = 6$
   $K: (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 4)^2 + (x_3 - 1)^2 = 6^2 = 36$

Geraden, Ebenen und Kugeln: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	116, 122, 124, 127
mittel	117, 118, 119, 120, 121, 125
schwer	123, 126

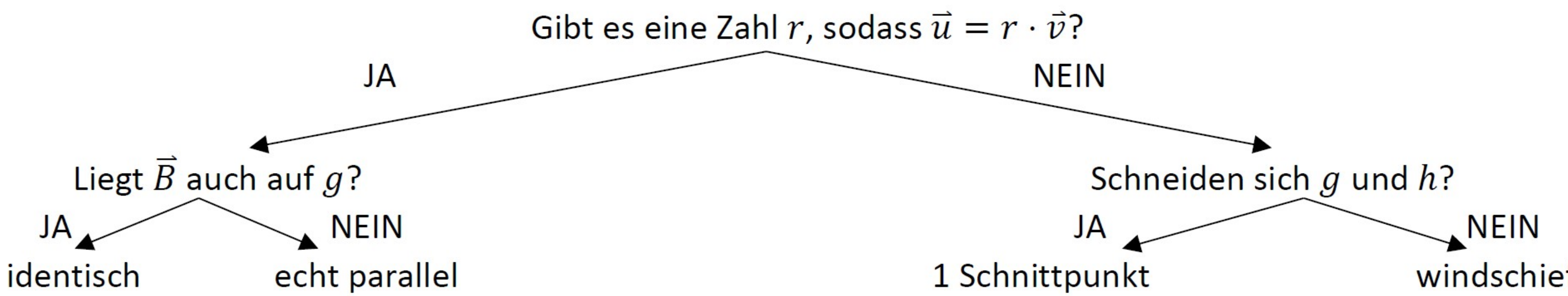
Für Schnelle und Unterforderte:

- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- Aufgabenblatt Geo Vektorbasics
- (Aufgabenblatt Geo Kugeln)
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo

Lagebeziehungen und Schnittmengen

Gerade und Gerade

Es seien $g\colon \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}$ und $h\colon \vec{X} = \vec{B} + \mu \cdot \vec{v}$.



Rezept mit Beispiel

$$g : \vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h : \vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Überprüfe Kolinearität der Richtungsvektoren

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =? \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \text{Kein Wert geht für alle Zeilen}$$

2. Schnittpunkt bestimmen durch LGS lösen

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$I, -1 + 2r = 1$$
$$II, -2 + 2r = 3 + s$$
$$III, 6 - r = 11 + 2s$$

$$I, -1 + 2r = 1$$
$$II, -2 + 2r = 3 + s$$
$$III, 6 - r = 11 + 2s$$

Einschub: Wie löse ich ein LGS mit zwei Variablen, aber drei Gleichungen? Erst das Gleichungssystem mit nur zwei Gleichungen lösen, dann die Gleichung an der dritten, noch ungesehenen, Gleichung testen.

$$I, -1 + 2r = 1 \implies r = 1$$
$$II, -2 + 2r = 3 + s \implies s = -3$$

in $III : 6 - 1 = 11 + 2(-3) \implies 5 = 5 \implies$ Lösung gültig!

3. Schnittpunkt durch einsetzen in Geradengleichung bestimmen (es ist egal, welche der Gleichungen verwendet wird)

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ebene und Ebene

$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0; \qquad F: m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + m_0 = 0$$

Sind die Normalenvektoren der Ebenen Vielfache voneinander?

JA

Gilt für einen Punkt A in E auch, dass er in F liegt?

JA

identisch

NEIN

echt parallel

NEIN

Schnittgerade

Rezept mit Beispiel

$$E: 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4, \quad F: 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

1. Sind die Normalenvektoren kolinear?

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} =? \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \text{Kein Wert geht für alle Zeilen}$$

2. Bestimme Schnittmenge durch LGS der Ebenen

$$I, 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4$$
$$II, 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

$$I, 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4$$
$$II, 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3$$

Einschub: Wie löse ich ein LGS mit drei Variablen, aber zwei Gleichungen? Hier kann es keine eindeutige Lösung geben (Entspräche einem Schnittpunkt), nur der Fall keine Lösung (Ebenen sind parallel) oder viele Lösungen (Schnittgerade) kommt in Frage.
Man setzt nun eine Variable zu einem Parameter (z.B r) und behandelt durch diesen Trick das LGS wie den Fall zwei Variablen, zwei Gleichungen.
Am Ende kann man dann das Ergebnis umformen um wie eine Gerade auszusehen.

2. Bestimme Schnittmenge durch LGS der Ebenen

mit $x_3 = r$

$$I, 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4 \implies 3x_1 - 4x_2 - r = 4$$
$$II, 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3 \implies 3x_1 - 3x_2 + r = 3$$

Lösen:

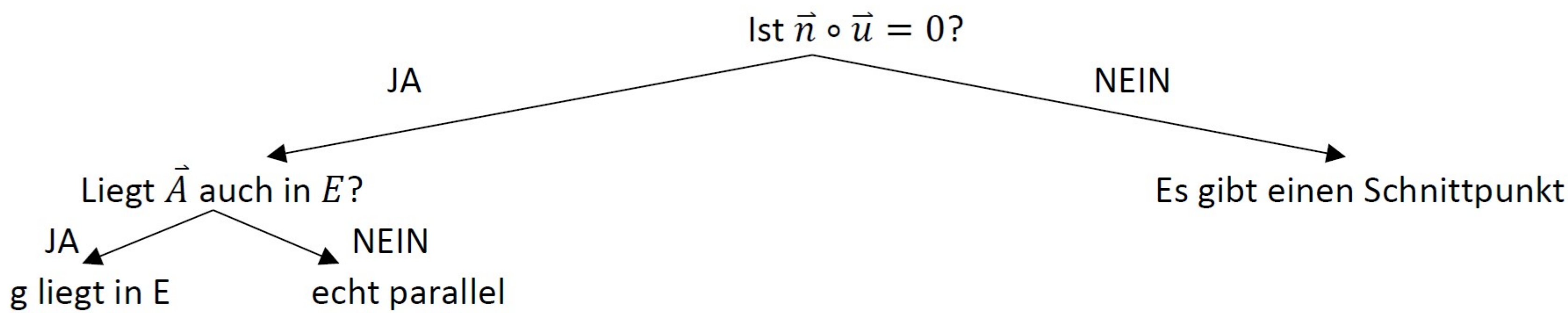
$$I - II : 3x_1 - 4x_2 - r - (3x_1 - 3x_2 + r) = 4 - 3$$
$$x_2 - 2r = 1 \implies x_2 = -1 - 2r$$
$$\text{in } I : 3x_1 - 4x(-1 - 2r) - r = 4 \implies x_1 = -\frac{7}{3}r$$

3. Geradengleichung aufstellen

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}r \\ -1 - 2r \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -\frac{7}{3} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gerade und Ebene

$$g: \vec{X} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{u}; \qquad E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_0 = 0$$



- Man kann den Schnittpunkt auch mit Ebenen in Parameterform ausrechnen. Allerdings muss dann ein LGS mit drei Variablen und drei Gleichungen gelöst werden, was mühseelig und fehleranfällig ist. Daher mein Tipp: In Koordinatenform umformen und damit weiter rechnen!

Rezept mit Beispiel

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10$$

1. Sind Gerade und Ebene parallel?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-2) = -7 \neq 0$$

2. Geradengleichung in Ebenengleichung einsetzen

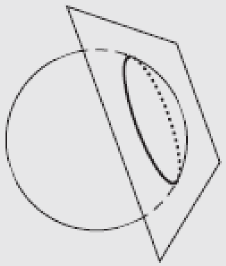
$$(0 + r \cdot 0) + 3(1 + r \cdot (-1)) - 2(0 + r \cdot 2) = 10$$
$$3 - 3r - 4r = 10 \implies r = -1$$

3. r in Gerade einsetzen um Schnittpunkt zu bestimmen

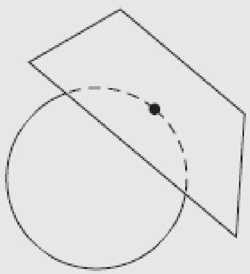
$$\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies S(0|2|-2)$$

Kugel und Ebene

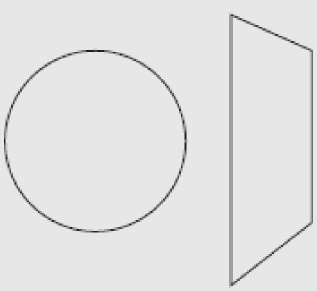
- Die Ebene schneidet die Kugel in einem Schnittkreis.



- Die Ebene berührt die Kugel in einem Punkt, die Ebene ist also eine Tangentialebene.



- Die Ebene und die Kugel haben keine gemeinsamen Punkte.



Lagebeziehungen und Schnittmengen: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	128, 129, ~~131~~, 133, 134, 135, 136
mittel	130, 132, 137

ohne Schnittgerade

Für Schnelle und Unterforderte:

- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- (Aufgabenblatt Geo Kugeln)
- Aufgabenblatt Geo Geraden Ebenen Lagebeziehungen
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo

Winkel

Zwei Vektoren

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Achtung: Beide Vektoren müssen von gemeinsamen Punkt wegezeigen

Zwei schneidende Geraden

Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{a}\circ\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Mit Schnittwinkel ist immer der spitze Winkel gemeint!

Gerade und Ebene

Richtungsvektor $\vec{a}$ und Normalenvektor $\vec{n}$

$\sin\alpha = \frac{|\vec{a} \circ \vec{n}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}$

Warum $\sin$ und nicht $\cos$?

$\sin(\alpha) = \cos(90^\circ - \alpha)$

Zwei Ebenen

Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{\underbrace{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}(\ldots)$$

Winkel: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	138, 139, 140, 142, 143
mittel	141
schwer	144

Für Schnelle und Unterforderte:

- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- Aufgabenblatt Geo Geraden Ebenen Lagebeziehungen
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo

Abstände

Es gibt nur drei Grundfälle, alle anderen lassen sich auf diese drei zurückführen!

Punkt - Punkt

Mit zwei Punkten A und B ist der Abstand der Betrag des Verbindungsvektors

$$d(A,B) = |\vec{AB}|$$

Beispiel: $A(3|1|2), \quad B(6|5|2)$

$$d(A,B) = |\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \sqrt{(6-3)^2 + (5-1)^2 + (2-2)^2} = 5$$

Punkt - Ebene

Der Abstand eines Punktes $P(p_1|p_2|p_3)$ zu einer Ebene E
$E : n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ ist

$$d(P, E) = \frac{|n_1p_1+n_2p_2+n_3p_3-a|}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}$$

Beispiel: $P(1|4|0), \quad E : 3x_1 + 4x_2 = 4$

$$d(P, E) = \frac{|3\cdot 1+4\cdot 4-4|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} = \frac{|15|}{5} = 3$$

Punkt - Gerade

$d = |\vec{PS}|$

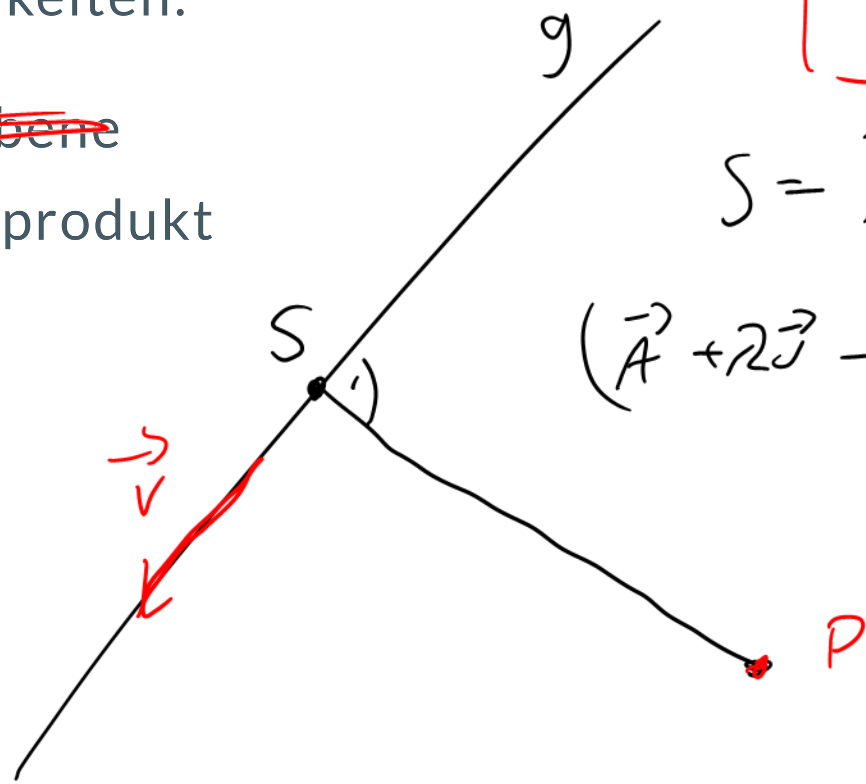
Zwei Möglichkeiten:

- ~~Mit Hilfsebene~~
- Mit Skalarprodukt

$$\boxed{\vec{PS} \circ \vec{v} = 0}$$

$S = \vec{A} + \lambda \vec{v}$

$(\vec{A} + \lambda \vec{v} - \vec{P}) \circ \vec{v} = 0$



$g: \vec{x} = \vec{A} + \lambda \cdot \vec{v}$

Rezept Punkt - Gerade mit Hilfsebene mit Beispiel

$$P(5|1|1), \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

1. Hilfsebene H aufstellen, Richtungsvektor ist Normalenvektor von H, P liegt in H

$$H: 3x_1 + 2x_2 + -4x_3 = a$$
$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 + -4 \cdot 1 = a = 13$$

$$H: 3x_1 + 2x_2 + -4x_3 = 13$$

2. Bestimme Schnitpunkt von Gerade und Ebene

$$3(-5 + 3r) + 2(-5 + 2r) - 4(5 - 4r) = 13 \implies r = 2$$

Mit r in g: $S(1|-1|-3)$

3. Berechne den Abstand zwischen S und P

$$d(A,B) = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 6$$

Rezept Punkt - Gerade mit Hilfsebene mit Beispiel

$$P(5|1|1), \quad g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$$

1. Allgemeinen Vektor $\vec{PS}$ aufstellen. Über den Punkt S ist bekannt, dass er auf g liegt, nutze also die Darstellung in der Geradengleichung.

$$\vec{PS} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right]}_{\vec{s} = \vec{x}} - \underbrace{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{p}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. Skalarprodukt aus $\vec{PS}$ und dem Richtungsvektor von g aufstellen und gleich null setzen. Der kürzeste Abstand impliziert r~~echten Winkel~~ Lot fällen

$$\vec{PS} \circ \vec{v} = 0 = \left[\begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} =$$

$$(-30 + 9r) + (-12 + 4r) + (-16 + 16r) = -58 + 29r$$

$$-58 + 29r = 0 \qquad | + 58$$

$$29r = 58 \qquad | : 29 \implies r = 2 \implies S(1|-1|-3)$$

3. Berechne den Abstand zwischen S und P

$$d(A, B) = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 6$$

Ebene - Ebene

- Nur sinnvoll, wenn Ebenen parallel sind!
- Der Abstand von zwei Ebenen ist das gleiche wie der Abstand eines beliebigen Punktes der einen Ebene zur anderen Ebene
- Ist also nichts anderes als Punkt - Ebene

Gerade - Ebene

- Nur sinnvoll, wenn Gerade und Ebene parallel sind!
- Der Abstand einer Geraden zur Ebene ist das gleiche wie der Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden zur Ebene (meistens nimmt man den Aufpunkt)
- Ist also nichts anderes als Punkt - Ebene

Parallele Geraden

- Der Abstand zweier paralleler Geraden ist das gleiche wie der Abstand eines beliebigen Punktes auf der ersten Geraden zur anderen Geraden (meistens nimmt man den Aufpunkt)
- Ist also nichts anderes als Punkt - Gerade

~~Windschiefe Geraden~~

- ~~Hilfsebene aufstellen~~
- ~~Abstand Punkte Ebene ausrechnen~~

Rezept Windschiefe Geraden mit Beispiel

$$g: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{X} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

1. Hilfsebene H aus beiden Richtungsvektoren aufstellen und in Koordinatenform umwandeln

$$H: \vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\implies H: -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 31$$

2. Abstand zwischen H und Aufpunkt von h ausrechnen

$$d(P,H) = \frac{|-2\cdot 12 - 3\cdot 0 + 6\cdot 1 - 31|}{\sqrt{22+32+62}} = \frac{49}{7} = 7$$

Abstände: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	146, 147, 148, 149
mittel	150, 151
schwer	

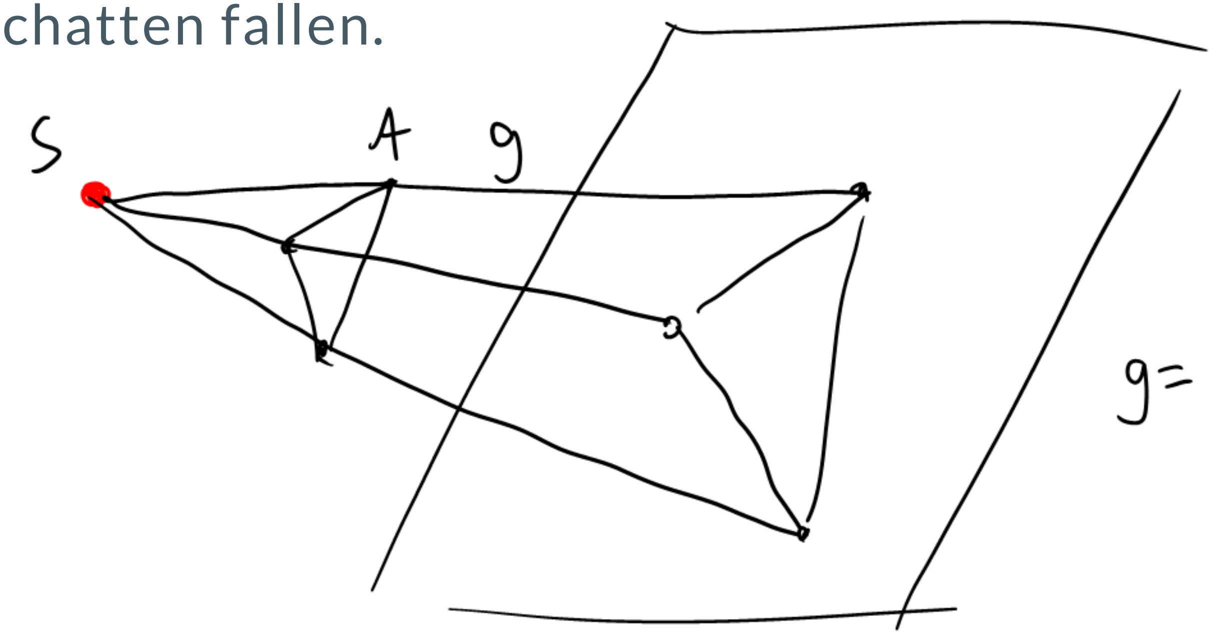
Für Schnelle und Unterforderte:

- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- Aufgabenblatt Geo Geraden Ebenen Lagebeziehungen
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo

Schattenpunkte

Fall 1: Aufgabe mit einer punktförmigen Lichtquelle (Lampe).

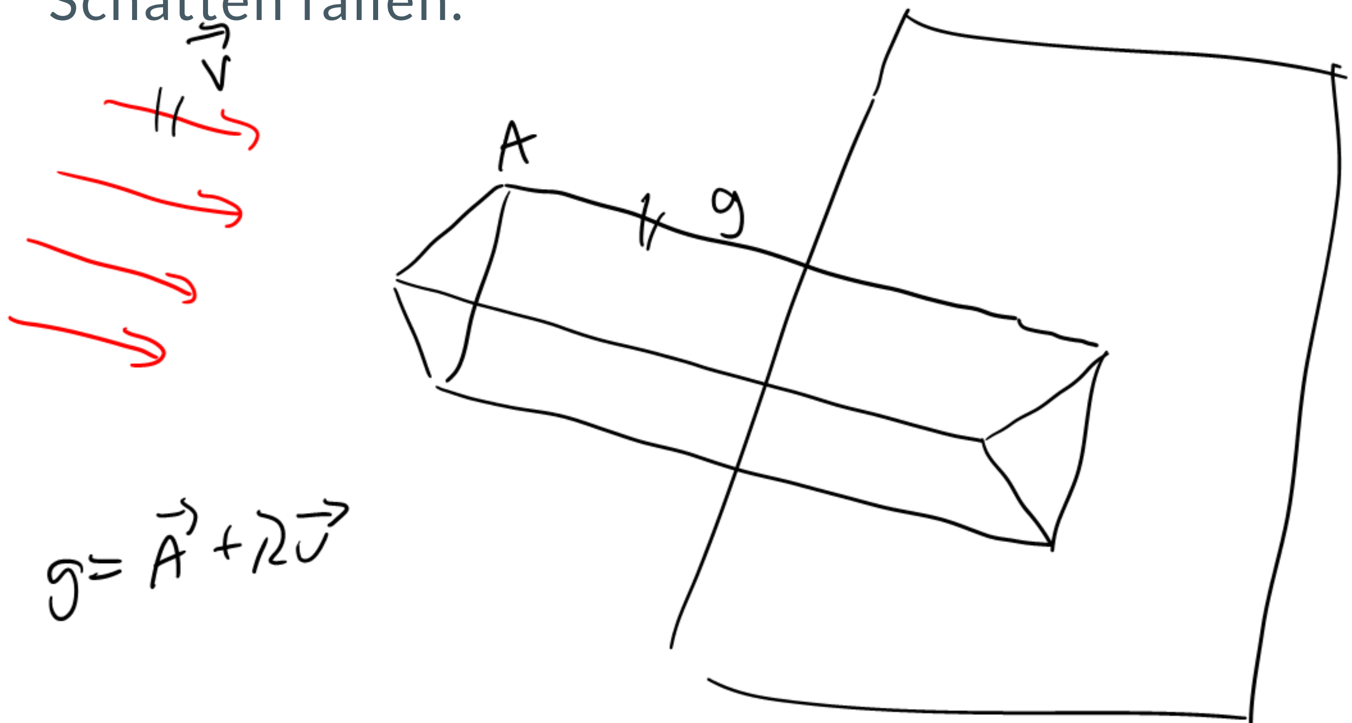
1. Stelle Hilfsgeraden auf, welche die Lichtquelle mit den Eckpunkte der Objekte, die Schatten werfen, verbinden.
2. Schneide die Hilfsgeraden mit der Ebene, auf welche die Schatten fallen.



$g = \vec{S} + \lambda \cdot \vec{SA}$

Fall 2: Aufgabe mit einer weit entfernten Lichtquelle (Sonne).

1. Stelle Hilfsgeraden auf, die durch die Eckpunkte der Objekte, die Schatten werfen, gehen und in Richtung der Sonnenstrahlen verlaufen.
2. Schneide die Hilfsgeraden mit der Ebene, auf welche die Schatten fallen.



Einfaches Beispiel

Lampe $L(1|2|4)$, Bestimme den Schattenpunkt des Punktes $P(2|0|2)$ auf der x_1x_2- Ebene.

1. Hilfsgerade

$$g: \vec{X} = \vec{L} + r \cdot \vec{LP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

2. Schnittpunkt mit $x_3 = 0$

$$4 - 2r = 0 \implies r = 2 \implies \vec{S}(3| - 2|0)$$

Spiegelpunkte

Punkt an Punkt spielgeln

$$\vec{B} = \vec{P} + 2\vec{PS}$$

Punkt an Ebene spiegeln

1. Hilfsgerade durch P senkrecht zu E (Normalenvektor als richtungsvektor)
2. Schnittpunkt bestimmen
3. Punkt and Punkt spiegeln

Punkt an Gerade spiegeln

1. Hilfsebene senkrecht zu g mit P in ihr (Richtungsvektor als Normalenvektor)
2. Schnittpunkt bestimmen
3. Punkt and Punkt spiegeln

Schattenpunkte und Spiegelpunkte: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	153
schwer	154

Für Schnelle und Unterforderte:

- Umfangreiche Aufgaben 155ff.
- Aufgabenblatt Geo Geraden Ebenen Lagebeziehungen
- Altabitur 2020 Geo
- Altabitur 2021 Geo