# Stochastik

- Grundlagen
- Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme
- Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung
- Binomialkoeffizient
- Binomialverteilung
- 3M-Aufgaben
- Hypothesentests

# Grundlagen

- Ergebnis: Ausgangsmöglichkeit eines Zufallsexperiments
- Ergebnismenge $\Omega$: Menge aller Ergebnisse
- Ereignis: Teilmenge von $\Omega$ (Teilmenge bedeutet entweder keines, eines oder viele Elemente aus einer anderen Menge)
- Mächtigkeit $|A|$: Anzahl der Elemente in der Menge $A$
- Gegenereignis $\overline{A}$: Menge aller Ergebnisse, die nicht in $A$ enthalten sind
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- Bei Ereignissen der Art „mindestens ein…“ ist es fast immer leichter, die Wahrscheinlichkeit über das Gegenereignis zu bestimmen!

## Laplace-Experiment

$$P(A) = \frac{|GünstigeErgebnisse|}{|AlleErgebnisse|} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

- Würfeln
- Glücksrad mit gleich großen Sektoren drehen
- Zufallsexperimente, bei denen alle Ergebnisse die selbe Wahrscheinlichkeit haben

Beispiel: Wahrscheinlichkeit eine gerade Augenzahl zu würfeln
$P(geradeAugenzahl) = \frac{3}{6}$

## Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Stochastische Unabhängigkeit:
A, B unabhängig $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

- Wenn stochastische Unabhängigkeit gezeigt werden soll: Berechne $P(A \cap B)$, dann berechne $P(A) \cdot P(B)$, schließlich zeige, dass $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ gilt!
- Wenn bekannt ist, dass zwei Ereignisse unabhängig sind: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ darf als Formel verwendet werden!

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ **darf nur verwendet werden, wenn die Ereignisse auch wirklich stochastisch unabhängig sind!**

## Vierfeldertafel

Vergleich von zwei binären Ereignissen

Beispiel: In einer Schulklasse haben 12 SchülerInnen mindestens ein Haustier und 8 haben keines. Zwei der haustierbesitzenden SchülerInnen sind Raucher. Insgesamt raucht ein Fünftel aller SchülerInnen dieser Klasse.

| | $A$ | $\overline{A}$ | |
|---|---|---|---|
| $B$ | $P(A \cap B)$ | $P(\overline{A} \cap B)$ | $P(B)$ |
| $\overline{B}$ | $P(A \cap \overline{B})$ | $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $P(\overline{B})$ |
| | $P(A)$ | $P(\overline{A})$ | $P(\Omega) = 1$ |

| | $H$ | $\overline{H}$ | |
|---|---|---|---|
| $R$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{2}{20}$ | $\frac{4}{20}$ |
| $\overline{R}$ | $\frac{10}{20}$ | $\frac{6}{20}$ | $\frac{16}{20}$ |
| | $\frac{12}{20}$ | $\frac{8}{20}$ | $1$ |

# Grundlagen: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
|---|---|
| leicht | 162, 163, 164, 165, 166 |
| mittel | 167, 169, 170 |
| schwer | |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Stochastik Grundlagen (2018 A1, 2015 B2)
- Altabitur 2020 Stochastik
- Altabitur 2021 Stochastik

# Motivation

E „Steve ist sehr schüchtern und zurückgezogen, immer hilfsbereit, aber wenig interessiert an Menschen oder der Welt der Realität. Als sanftmütige und ordentliche Seele hat er ein Bedürfnis nach Ordnung und Struktur und eine Leidenschaft fürs Detail."

Ist Steve eher ein Bibliothekar oder ein Bauer?

$P_{Bi}(E) = 0{,}4$

$P_{Ba}(E) = 0{,}2$

$$P_E(Bi) = \frac{P(E \cap Bi)}{P(E)}$$

$$\sim P_{Bi}(E) \cdot P(Bi)$$

# Bedingte Wahrscheinlichkeit versus Schnittwahrscheinlichkeit

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Beispiel: In einer Schulklasse befinden sich 10 blauäugige und 15 SchülerInnen mit anderer Augenfarbe. Dabei sind 4 blauäugige und 3 nicht blauäugige SchülerInnen blond. Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein zufällig ausgewählte blauäugige Person blond ist.

1. Teilwahrscheinlichkeiten berechnen/auslesen

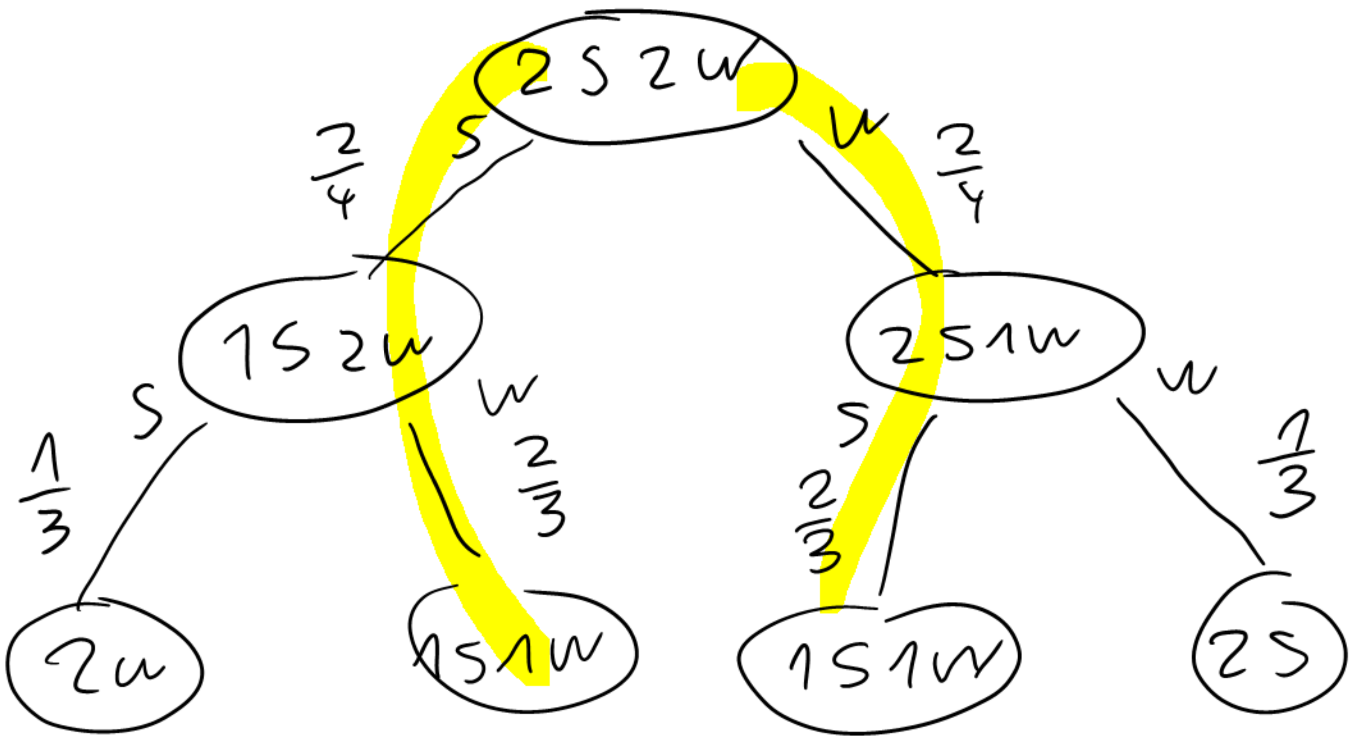
$$P_{blau}(blond) = \frac{P(blau \cap blond)}{P(blau)} = \frac{\frac{4}{25}}{\frac{10}{25}} = 0{,}4$$

2. Formel anwenden

## Baumdiagram zeichnen

- Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten
- Die Gesamtwahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller günstigen Pfade.

Weiteres Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln. Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit zwei unteschiedliche Kugeln zu ziehen?

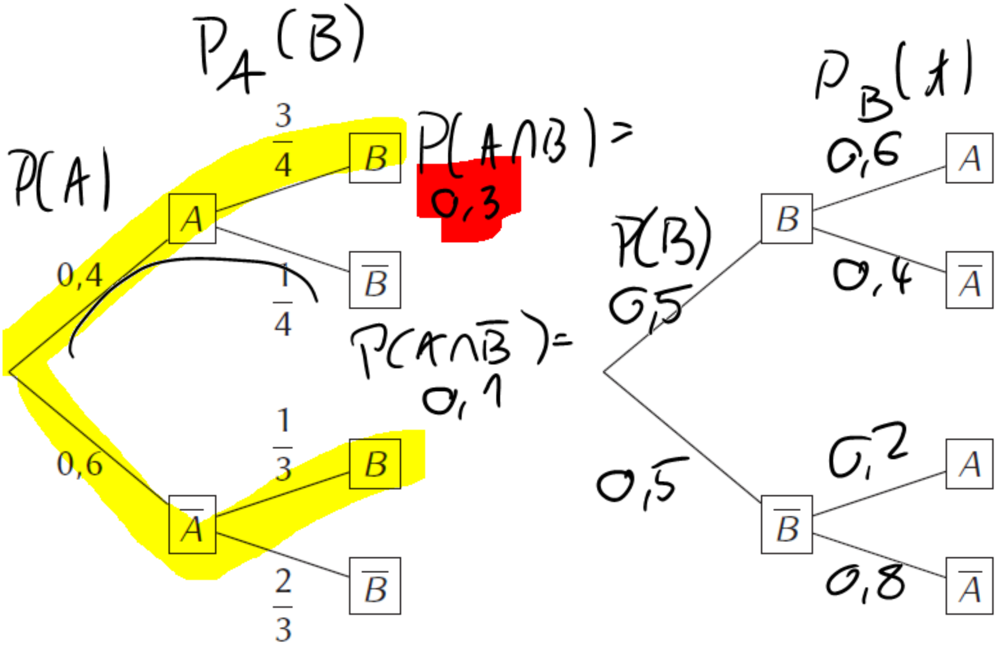



$$P(\text{unterschiedlich}) = \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

## Ziehen mit und ohne zurücklegen

- Ziehen mit Zurücklegen: Die Kugeln nach dem Ziehen zurückgelegt, die Wahrscheinlichkeiten verändern sich nicht. Die Äste des Baumdiagramms sehen in jeder Ebene gleich aus. Die Ereignisse auf verschiedenen Ebenen sind stochastisch unabhängig voneinander.
- Ziehen ohne Zurücklegen: Werden die Kugeln nicht zurückgelegt, so verändern sich die Wahrscheinlichkeiten. Die Anzahl aller Möglichkeiten verringert sich pro Ebene um eins. Entsprechend des vorherigen Zuges verändert sich auch die Anzahl der günstigen Möglichkeiten. Die Ereignisse der verschiedenen Ebenen sind daher stochastisch abhängig voneinander.

## Aufgabe 175




$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}5 \Leftrightarrow P(\bar{B}) = 0{,}5$$

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$$

$$P_{\bar{B}}(A) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{0{,}1}{0{,}5} = 0{,}2$$

## Stochastische Abhängigkeit erkennen

Am Baumdiagramm kann man ebenfalls erkennen, ob die Ereignisse A und B unabhängig sind, falls gilt:
$P_A(B) = P_{\overline{A}}(B)$

## Abhängigkeit umdrehen

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})}$$
da $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$

## Satz von Bayes (NICHT Abirelevant, aber spannend)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \implies P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$$
$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Einsetzen:
$$P_A(B) = \frac{P_B(A)P(B)}{P(A)}$$

Die bedingte Wahrscheinlichkeit kann also ganz einfach umgedreht werden!

## Bedingte Wahrscheinlichkeit vs Schnitt erkennen

Die Wahrscheinlichkeit …

- … dass jemand ein rauchender Junge ist
- … dass ein Junge raucht
- … dass ein Raucher ein Junge ist
- … einen Jungen zu erwischen, der raucht
- … unter den Nichtrauchern einen Jungen zu erwischen
- … ein rauchendes Mädchen zu treffen
- … dass ein zufällig ausgewähltes Mädchen nicht raucht
- … eine Person raucht und ist ein Junge
- … eine zufällig ausgewählte Person, die ein Junge ist, raucht

## Schlagworte

Schnittwahrscheinlichkeiten:

- "und"
- Adjektiv

Bedingte Wahrscheinlichkeiten:

- Relativsatz
- Nomen + Verb

# Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Baumdiagramme: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
| --- | --- |
| leicht | |
| mittel | 171, 172, 173 |
| schwer | 174 |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Stochastik Grundlagen
- Altabitur 2020 Stochastik
- Altabitur 2021 Stochastik

# Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

## Zufallsvariablen

- Eine Zufallsvariable ordnet allen Ergebnissen des Experiments reelle Zahlen zu
- Man schreibt daher für die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses $P(X = x_1) = p_1$. Die Variable X ist hierbei die Zufallsvariable. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis $x_1$ auftritt, liegt bei $p_1$.
- Die Verteilung derWahrscheinlichkeiten $p_1, p_2, ...$ auf die Ergebnisse $x_1, x_2, ...$ nennt man Wahrscheinlichkeitsverteilung.

## Beispiel Glücksrad

- Drei Sektoren, einer davon ist genau 1° und ein zweiter 29° groß
- Gewinn: kleinster Sektor 100€, 29°-Sektor 10€, Rest 0€
  X: Gewinn in Euro, $X \in \{0, 10, 100\}$
  $p_1 : P(X = x_1) = P(X = 0) = \frac{330}{360}$
  $p_2 : P(X = x_2) = P(X = 10) = \frac{29}{360}$
  $p_3 : P(X = x_3) = P(X = 100) = \frac{1}{360}$

$$E(x) = \frac{1}{360} \cdot 100€ + \frac{29}{360} \cdot 10€ + \frac{330}{360} \cdot 0€$$

$$= \frac{13}{12}€$$

## Erwartungwert (Mittelwert)

- Den Mittelwert, den man erhält, wenn man das Experiment oft durchführt, nennt man Erwartungswert E(X). Es ist der Wert, den man durchschnittlich erwartet.

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

- Der Erwartungswert E(X) muss kein Wert sein, den X auch tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist fair, wenn E(X) dem Einsatz entspricht.

## Erwartungswert beim Würfeln (d6)

$$E(X) = 1 \cdot P(X = 1) + 2 \cdot P(X = 2) + ... + 6 \cdot P(X = 6) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3.5$$

## Rezept: Ist ein Spiel fair?

1. Bestimme den Erwartungswert des Gewinns
2. Vergleiche den zu erwartenden Gewinn mit dem Einsatz

## Varianz

- Die Streuung einer Zufallsvariable X um ihren Erwartungswert $E[X]$ wird Varianz $Var[X]$

$$Var[X] = (E[X] - x_1)^2 \cdot P(X = x_1) + (E[X] - x_2)^2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + (E[X] - x_n)^2 \cdot P(X = x_n)$$

- Standardabweichung $\sigma$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var[X]}$$

## Varianz beim Würfeln

$$Var[X] = (E[X] - x_1)^2 \cdot P(X = x_1) + (E[X] - x_2)^2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + (E[X] - x_n)^2 \cdot P(X = x_n) =$$

$$Var[X] = (3.5 - 1)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3.5 - 2)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3.5 - 3)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3.5 - 4)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3.5 - 5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (3.5 - 6)^2 \cdot \frac{1}{6} =$$

$$= 2.92$$

$$\sigma(X) = \sqrt{Var[X]} = \sqrt{2.92} = 1.71$$

## Bestimmen der Wahrscheinlichkeit

Es werden Lose gezogen. Ein Sieg bringt 20€, eine Niete
1€ ~~nichts~~. Bestimme die Gewinn-zu-Nieten Quote im Topf, damit
ein Lospreis von 2€ fair ist.

$E(x) = 2€$

$20€ \cdot p_1 + 1€ \cdot p_2 = 2€$

$20€ p_1 + 1€ (1 - p_1) = 2€ \quad | -1$

$20 p_1 - p_1 = 1$

$19 p_1 = 1 \quad | : 19$

$p_1 = \frac{1}{19}$

$0 = 18 \cdot p_1 + (-1) \cdot (1 - p_1)$

$= 18 p_1 - 1 + p_1 \quad | +1$

$1 = 19 p_1 \quad | : 19$

$p_1 = \frac{1}{19}$

$p_2 = \frac{18}{19}$

# Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
| --- | --- |
| leicht | 179, 182 |
| mittel | 181 |
| schwer | 180 |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Stochastik Grundlagen
- Aufgabenblatt Zufallsgrößen
- Altabitur 2020 Stochastik, 2021 Stochastik

$$\frac{10!}{8!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot\ldots}{8\cdot 7\cdot\ldots} = \frac{10\cdot 9\cdot 8!}{8!} = 10\cdot 9 = 90$$

$$8! = 8\cdot 7!$$

# Kombinatorik: Wie viele Möglichkeiten gibt es?

## Mit Reihenfolge, mit Zurücklegen

z.B PIN-Code, Fahrradschloss, Passwörter

n ist die Anzahl an Möglichkeiten (z.B Zahlen am Schloss), k sagt wie oft aus den Möglichkeiten gewählt wird (z.B Vier Zahlen)

$$N = n^k$$

Beispiel: Schloss mit 5 Zahlen
$N = 10^5 = 100000$

## Mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen

z.B Menschen auf Stühle anordnen

Beispiel: 5 Personen nehmen auf 5 Stühlen platz
$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$

Beispiel: 3 Personen nehmen auf 5 Stühlen platz
$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = 60$

Allgemein: n ist die Anzahl an Möglichkeiten (z.B Zahlen am Schloss), k sagt wie oft aus den Möglichkeiten gewählt wird (z.B Vier Zahlen)

$N = \frac{n!}{(n-k)!}$

Wenn es etwas komplizierter wird: Immer vorstellen mit: Menschen gehen in einen Raum, wie viele Plätze sind noch frei? Immer zuerst die Menschen mit den meisten Einschränkungen in den Raum "schicken".

Beipiel: Talkshow; Ein Moderator in der Mitte, eine Journalistin, die neben dem Moderator sitzen will, ein Ehepaar, das zusammen sitzen will, ein Manager, dem es egal ist

Ma J M E

$$\underset{M}{1} \cdot \underset{J}{2} \cdot \underset{E}{2!} \cdot \underset{Ma}{1} = 4$$

5 Freunde → 3 nebeneinander

$3 \cdot 3! \cdot 2!$

| x | x | x |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 3 | 2 |
| 2 | 3 | 1 |
| 2 | 1 | 3 |
| ⋮ | | |

**2** Ein Moderator lädt zu seiner Talkshow drei Politiker, eine Journalistin und zwei Mitglieder einer Bürgerinitiative ein. Für die Diskussionsrunde ist eine halbkreisförmige Sitzordnung vorgesehen, bei der nach den Personen gruppen unterschieden wird und der Moderator den mittleren Platz einnimmt.

**a)** Geben Sie einen Term an, mit dem die Anzahl der möglichen Sitzordnungen berechnet werden kann, wenn keine weiteren Einschränkungen berücksichtigt werden.

**b)** Der Sender hat festgelegt, dass unmittelbar neben dem Moderator auf einer Seite die Journalistin und auf der anderen Seite einer der Politiker sitzen soll. Berechnen Sie unter Berücksichtigung dieser weiteren Einschränkung die Anzahl der möglichen Sitzordnungen.

_ _ J Mo Po[1] _ _
2
3

3 Politiker
1 Journa.
2 Bürger
1 Moderator

a, $N = 1 \cdot 6!$

b, $N = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!$

Mod. Journ

$1 \cdot 2 \cdot (1 \cdot 4! + 1 \cdot 4! + 1 \cdot 4!)$

$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4!$

## Ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

Beispiel: 3 Personen nehmen auf 5 Stühlen platz

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Problem: Wenn wir eineiige Drillinge habe, können wir sie eh nicht unterscheiden! 60 beinhaltet auch Permutationen der Drillinge!

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| x | x | x | _ | _ | 1 |
| 1 | 2 | 3 | | | |
| 1 | 3 | 2 | | | |
| 2 | 3 | 1 | | | |
| ⋮ | | | | | |

$$N = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

$$N = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k} \implies \text{Binomialkoeffizient}$$

Beispiel: Peter besitzt 6 Pullover. Von diesen möchte er 2 mit in den Urlaub nehmen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten für seine Wahl gibt es?

$$N = \binom{6}{2} = 15$$

## Rechenregeln für Binomialkoeffizienten

Nicht um bedingt relevant, tragen aber zum Verständnis bei!

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\binom{5}{2} = \binom{5}{3}$$

$$\binom{n}{1} = n = \binom{n}{n-1}$$

## Hypergeometrische Verteilung (nicht Abirelevant)

- ohne Zurücklegen
- ohne Beachtung der Reihenfolge
- $N$ ist die Anzahl der Elemente einer Grundgesamtheit
- $M \leq N$ ist die Anzahl der Elemente mit einer bestimmten Eigenschaft in dieser Grundmenge (die Anzahl möglicher Erfolge)
- $n \leq N$ ist die Anzahl der Elemente in einer Stichprobe

$$h(k|N;M;n) = h_{N;M;n}(k) = P(X=k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

# Kombinatorik und Binomialkoeffizient: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
|---|---|
| leicht | |
| mittel | 183, 184 |
| schwer | |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Stochastik Grundlagen
- Aufgabenblatt Zufallsgrößen
- Altabitur 2020 Stochastik, 2021 Stochastik

# Binomialverteilung

Eigenschaften einer Binomialverteilung:

- Es gibt ein Experiment mit nur zwei möglichen Ergebnissen
- Das Experiment wird insgesamt n Mal durchgeführt
- Die Wahrscheinlichkeit, einen Treffer zu erzielen, beträgt p und bleibt bei jeder Durchführung gleich
- Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, eine vorgegebene Anzahl an Treffern zu erzielen, diese wird mit k bezeichnet. Somit ist die Reihenfolge egal

## Werfen einer Münze

Eine Münze wird 5 Mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Mal *hintereinander* Kopf fällt, und dann 2 Mal *hintereinander* Zahl? Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $P(K) = 0.4$ $= p$
Somit: n = 5, p = 0.4, k = 3

$$P(KKKZZ) = 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.4 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.4^3 \cdot 0.6^2 =$$
$$= p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Hier ist die Reihenfolge noch wichtig!

Eine Münze wird 5 Mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 Mal Kopf fällt? Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $P(K) = 0.4$
Somit: n = 5, p = 0.4, k = 3

$$P(3K) = P(KKKZZ) + P(KKZKZ) + P(KZKKZ) + \ldots$$

$$P(KKKZZ) = P(KKZKZ) = 0.4^3 \cdot 0.6^2$$

$$P(3K) = N \cdot P(KKKZZ) = N \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Was ist N? N ist der Binomialkoeffizient!

$$B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$E[X] = n \cdot p, \quad Var[X] = n \cdot p \cdot (1-p)$$

# Kumulierten Binomialverteilung

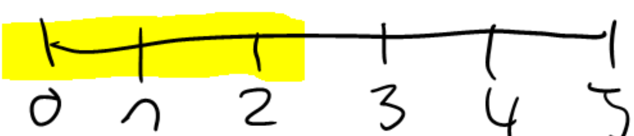
## Fall 1: Höchstens

Bisher: Genau k Treffer
Jetzt: höchstens / mindestens k Treffer

Eine Münze wird 5 Mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass *höchstens* 2 Mal Kopf fällt? Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $P(K) = 0.4$
Somit: n = 5, p = 0.4, k $\leq$ 2

$$F(5; 0.4; k \leq 2) = B(5; 0.4; 0) + B(5; 0.4; 1) + B(5; 0.4; 2)$$

$P(n; p; k \leq 2)$



## Fall 2: Mindestens

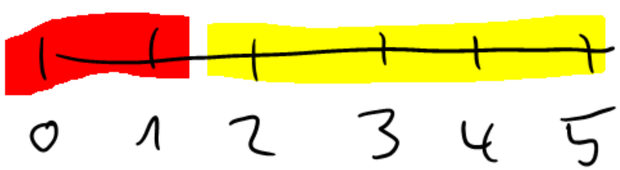
Kumuliert funktioniert nur mit *höchstens*. *Mindestens* muss mit dem Gegenereignis in *höchstens* umgeformt werden.

Eine Münze wird 5 Mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass *mindestens* 2 Mal Kopf fällt? Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist $P(K) = 0.4$
Somit: n = 5, p = 0.4, k $\geq$ 2

$k < 2$

$$F(5; 0.4; k \geq 2) = 1 - F(5; 0.4; k \leq 1)$$

Gegenereignis von *mindestens* 2 Mal Kopf ist *höchstens* 1 Mal Kopf



## Fall 3: Höchstens und Mindestens

Eine Münze wird 5 Mal geworfen. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass *mindestens* 2 Mal, aber *höchstens* 4 Mal Kopf fällt? Die Wahrscheinlichkeit für Kopf ist
$P(K) = 0.4$
Somit: n = 5, p = 0.4, $2 \leq k \leq 4$

$$F(5; 0.4; 2 \leq k \leq 4) = F(5; 0.4; k \leq 4) - F(5; 0.4; k \leq 1)$$

# Binomialverteilung: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
|---|---|
| leicht | 187, 194 |
| mittel | 188, 189, 190, 195, 196 |
| schwer | 191, 193, ~~197~~, 198, 199 |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Binomialverteilung
- Altabitur 2020 Stochastik
- Altabitur 2021 Stochastik

**Aufgabe 172 – 🖩 Abi★★-★★★**

Bad Max öffnet den Kofferraum des großen grauen Lieferwagens und wendet sich Really Bad John zu: „Da hast du's! Einen ganzen Lieferwagen voller Päckchen mit feinstem weißen Zeug. Jetzt sind wir quitt“. Really Bad John knurrt: „Du weißt, Bad Max, wenn mehr als zehn Prozent der Beutel kein feines weißes Zeug beinhalten, dann mach' ich dich platt. Darum machen wir jetzt Folgendes: Ich überprüfe fünf Päckchen. Und wenn darunter ein oder mehrere Päckchen kein feines weißes Zeug enthalten, dann…“ Während Really Bad John sich symbolisch mit einem Finger über die Kehle streicht mischt sich Really Bad Johns Freundin Evil Emma ein: „Ich habe eine bessere Idee. Du überprüfst zwanzig Beutel. Wenn darunter drei oder mehr kein feines weißes Zeug enthalten, dann …“ Und auch Evil Emma streicht mit ihrem Zeigefinger über ihre Kehle. Bad Max schwitzt wie ein Hund, denn er hat tatsächlich zehn Prozent der Päckchen nicht mit feinem weißen Zeug befüllt. Bad Max überlegt. Bad Max rechnet. Soll er sich für Really Bad Johns oder für Evil Emmas Vorschlag entscheiden?

abiturma.de/fb/ah7w2

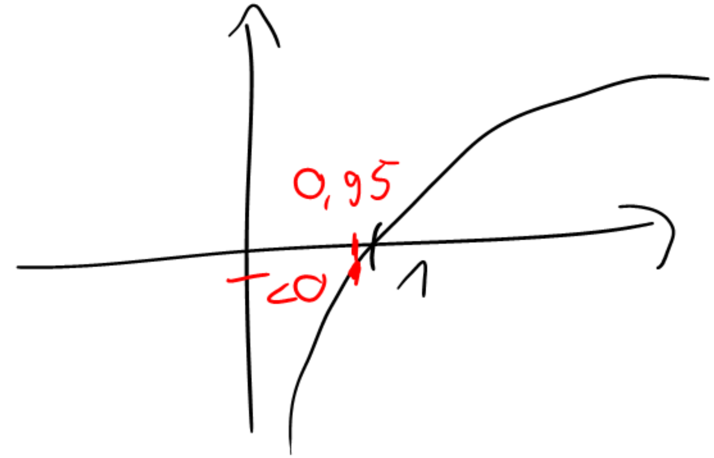
# 3M-Aufgaben

## Rezept mit Beispiel Typ 1

Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Chance von 5%. Wie oft muss man mindestens spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mindestens einmal zu gewinnen?

1. Aufgabe als Ungleichung schreiben
   P(min. 1 Treffer)$\geq 0.99$
2. Ins Gegenereignis umschreiben (kleiner gleich notwendig)
   P(kein Treffer)$\leq 0.01$
3. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
   P(kein Treffer)$= \binom{n}{0} \cdot 0.05^0 \cdot (1-0.05)^n = (0.95)^n$

$\ln = \log_e$




4. In Ungleichung einsetzen

$$(0.95)^n \leq 0.01 \qquad | \log_{0.95}$$

$$n \geq log_{0.95}(0.01) = 89.78$$

Also mindestens 90 Mal

Reminder: Beim Multiplikation und Division mit negativen Zahlen muss das Ungleichheitszeichen umgedreht werden! Gleiches gilt für Logarithmen zu einer Basis kleiner als 1 (da der ln von Zahlen kleiner als eins negativ ist!)

P(min. 1 Treffer) $\geq 0.99$

$$1 - P(k=0) \geq 0{,}99 \qquad | + P(k=0) \quad -0{,}99$$

$$0{,}01 \geq P(k=0)$$

$$P(k=0) \leq 0{,}01$$

$$(0{,}95)^n \leq 0{,}01 \qquad | \ln$$

$$\ln(0{,}95^n) \leq \ln(0{,}01)$$

$$n \ln(0{,}95) \leq \ln(0{,}01) \qquad | : \ln(0{,}95)$$

$$n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)} = \log_{0{,}95}(0{,}01)$$

## Rezept mit Beispiel Typ 2

Bei einem Glücksspiel wird 100 Mal gespielt. Wie hoch muss die Gewinnwahrscheinlichkeit in Prozent auf zwei Dezimalen genau mindestens sein, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens einmal zu gewinnen?

1. Aufgabe als Ungleichung schreiben
   P(min. 1 Treffer)$\geq 0.95$
2. Ins Gegenereignis umschreiben (kleiner gleich notwendig)
   P(kein Treffer)$\leq 0.05$
3. Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses
   P(kein Treffer)$= \binom{100}{0} \cdot p^0 \cdot (1-p)^{100} = (1-p)^{100}$

4. In Ungleichung einsetzen

$$(1-p)^{100} \leq 0.05 \qquad \mid \sqrt[100]{\phantom{x}}$$

$$1-p \leq \sqrt[100]{0.05} \qquad \mid -1$$

$$-p \leq \sqrt[100]{0.05} - 1 \qquad \mid \cdot (-1)$$

$$p \geq 1 - \sqrt[100]{0.05} = 0.030$$

# 3M-Aufgaben: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
|---|---|
| leicht | |
| mittel | 200, ~~201~~, 202 |
| schwer | |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.
- Aufgabenblatt Binomialverteilung
- Altabitur 2020 Stochastik
- Altabitur 2021 Stochastik

Kasino: Im Roulette gibt es 36 Zahlen. Wie viele Nullen (0, 00, 000) müssen dem Rad hinzugefügt werden, damit das Kasino bei einem Spieler, der 20 mal spielt, mit mind. 95% mind. einmal gewinnt?

# Hypothesentests

Eine Hypothese $H_0$ (Nullhypothese) ist eine Behauptung, die aufgrund einer Beobachtung abgelehnt oder angenommen werden soll.

| | $H_0$ ist wahr | $H_0$ ist falsch |
|---|---|---|
| Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Annahmebereich von $H_0$. | Richtige Entscheidung ($H_0$ ist wahr und die Hypothese wird angenommen.) | Falsche Entscheidung ($H_0$ ist falsch, aber die Hypothese wird angenommen.) Dies entspricht einem **Fehler zweiter Art.** |
| Das Ergebnis der Stichprobe liegt im Ablehnungsbereich von $H_0$ | Falsche Entscheidung ($H_0$ ist korrekt, aber die Hypothese wird abgelehnt.) Dies entspricht einem **Fehler erster Art.** | Richtige Entscheidung ($H_0$ ist falsch und die Hypothese wird abgeleht. |

## Fehler 1. Art berechnen

Fall 1: $H_0 : p \geq p_0$ (Linkseitiger Hypothesentest). Dann gilt: $\alpha = P(X \leq k)$
Fall 2: $H_0 : p \leq p_0$ (Rechtsseitiger Hypothesentest). Dann gilt: $\alpha = P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$

Bevor ein Großkunde eine sehr große Menge an Schokoladentafeln abnimmt, wird die Hypothese $H_0$ (Weniger als 10 % der Schokoladentafeln sind beschädigt) getestet. Hierzu wird folgende Entscheidungsregel festgesetzt: Es werden 10 Tafeln gesichtet. Werden darunter 2 oder mehr Tafeln als fehlerhaft bemerkt, wird die $H_0$-Hypothese abgelehnt und der Kauf findet nicht statt. Bestimme die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art.

- $H_0$ : p ≤ 0,1 (Rechtsseitiger Hypothesentest mit $p_0$ = 0,1)
- n = 10 (Stichprobenlänge)
- k = 2 (Entscheidungsregel: Ab k = 2 wird H0 abgelehnt.)
- Gesucht: α (Irrtumswahrscheinlichkeit, Wahrscheinlichkeit für Fehler 1. Art.)

α = P(X ≥ 2) = 1 - P(X ≤ 1)

= 1 - P (0 oder 1 Tafel sind nicht ok)

= 1 - $\left(\binom{10}{0} \cdot 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0.1^1 \cdot 0.9^9\right) = 0.26$

# Hypothesentests: Rechenblock

| Schwierigkeit | Aufgaben |
|---|---|
| leicht | |
| mittel | 203, 204 |
| schwer | |

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben 205 ff.