Aufgabe 55 Abi★

Die NASA hat wieder einmal eine Rakete ins All geschossen, um einen zusätzlichen Satelliten in die Erdumlaufbahn zu bringen, der dort für die nächsten 12 Jahre im Dienste der Navigationsgeräte herumkreisen soll. Beim Start wurden die Messdaten an die Zentrale gesendet. Diese Messdaten geben die zurückgelegte Strecke ausgehend von der Erde (in km) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) seit Start der Rakete an. Für die ersten 20 Sekunden kann dieser Vorgang näherungsweise durch die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{3}t^2$$

beschrieben werden. Wann hatte die Rakete eine Geschwindigkeit von $4\,\mathrm{km/s}$?

Aufgabe 56 Abi★

Bei Schießübungen der Polizei wird der Umgang mit Pistolen geübt.
Für die ersten 0,3 Sekunden kann die zurückgelegte Strecke der Kugel (in m) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) näherungsweise durch die Funktion

$$f(t) = -7t^2 + 350t$$

beschrieben werden.

(a) Welche Geschwindigkeit hat die Kugel zu Beginn?

(b) Wann hat diese Geschwindigkeit um $1\,\mathrm{m/s}$ abgenommen?

4.3 Normale

Merke

Gegeben sind die Geraden g_1 und g_2 durch

$$g_1 : y = m_1x + c_1 \quad \text{und} \quad g_2 : y : m_2x + c_2.$$

Die Geraden g_1 und g_2 stehen genau dann orthogonal zueinander, wenn gilt:

$$m_1 = -\frac{1}{m_2}.$$

Tipp: Dies ist gleichbedeutend mit der Bedingung $m_1m_2 = -1$.

Rezept

Gegeben sind der Graph G der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 2$$

und ein Kurvenpunkt $\mathrm{P}(-1 \mid -3)$. Bestimme eine Gleichung der Normalen an G im Punkt P.

Schritt 1: Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$$y = mx + c.$$

Schritt 2: Leite die Funktion f ab:

$$f'(x) = 3x^2.$$

Schritt 3: Setze den x-Wert von P in f' ein und berechne die Tangentensteigung m_t

$$m_t = f'(-1) = 3.$$

Damit kann die Steigung der Normalen bestimmt werden:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}.$$

Schritt 4: Damit ist ein Ansatz für die Normalengleichung:

$$y = -\frac{1}{3}x + c.$$

Schritt 5: Setze P in die Normalengleichung ein, das liefert den y-Achsenabschnitt c:

$$-3 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + c \quad \Longrightarrow \quad c = -\frac{10}{3}.$$

Damit ist eine Gleichung der Normalen gegeben durch

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}.$$

Tipp: Die Berechnung der Normalengleichung in einem Kurvenpunkt unterscheidet sich nur bei der Berechnung der Steigung von der Berechnung einer Tangentengleichung in diesem Punkt.

Aufgabe 57 – Abi★

Der Graph einer Funktion f hat im Punkt $\mathrm{P}(0 \mid 3)$ eine Tangente mit der Gleichung

$$t(x) = 7x + 3.$$

Wie lautet die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt P?

Aufgabe 58 – Abi★

Bestimme zu folgenden Funktionen die Normale im angegebenen Kurvenpunkt:

(a) $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 13, \quad \mathrm{P}(3 \mid 13)$

(b) $g(x) = x^2e^x, \quad \mathrm{Q}(1 \mid e)$

(c) $h(x) = \sin(2x), \quad \mathrm{R}(\pi \mid 0)$

Aufgabe 59 – Abi★★★

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} + 2.$$

Zeige, dass alle Normalen an den Graphen von f durch einen gemeinsamen Punkt gehen und ermittle diesen.

Lösung 56

Die Funktion f beschreibt die Strecke der Kugel in Abhängigkeit der Zeit. Damit beschreibt die Ableitung f' der Funktion f die Geschwindigkeit der Kugel in Abhängigkeit der Zeit. Es gilt:

$$f'(t) = -14t + 350$$

für $0 \leq t \leq 0{,}3$.

(a) Gesucht ist die Geschwindigkeit der Kugel zu Beginn, also $f'(0)$. Es gilt:

$$f'(0) = 350.$$

Zu Beginn hat die Kugel also eine Geschwindigkeit von 350 m/s.

(b) Gefragt ist nun nach dem Zeitpunkt, an dem die Kugel noch eine Geschwindigkeit von 349 m/s hat. Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung $f'(t) = 349$.

$$-14t + 350 = 349 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{14} \approx 0{,}0714$$

Nach etwa 0,0714 s hat die Geschwindigkeit der Kugel um 1 m/s abgenommen.

Lösung 57

Der Graph von f hat im Punkt P eine Tangente mit der Gleichung

$$t(x) = 7x + 3.$$

Die Steigung der Tangente ist also $m_t = f'(0) = 7$. Damit kann die Steigung der Normalen bestimmt werden:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{7}.$$

Es kann dann bereits ein Ansatz für die Normalengleichung hingeschrieben werden:

$$n(x) = -\frac{1}{7}x + c.$$

Dann wird P in die Normalengleichung eingesetzt:

$$3 = -\frac{1}{7} \cdot 0 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 3.$$

Damit hat die Normale die Gleichung

$$n(x) = -\frac{1}{7}x + 3.$$

☞ *Alternative:* Nach Berechnung der Steigung m kann die Gleichung der Normalen auch sofort hingeschrieben werden, denn beide Geraden haben den y-Achsenabschnitt 3, da beide durch den Punkt $P(0 \mid 3)$ verlaufen. Also

$$n(x) = -\frac{1}{7}x + 3.$$

Lösung 58

(a) Lösungsweg wie im Rezept:

➤ *Allgemeine Geradengleichung*

Die allgemeine Geradengleichung ist gegeben durch:

$$y = mx + c$$

➤ *Bestimmung der Ableitung*

Für die Ableitung f' gilt:

$$f'(x) = 12x^2 - 24x$$

➤ *Bestimmung der Normalensteigung*

Bestimme zunächst die Steigung m_t der Tangente im entsprechenden Kurvenpunkt. Es gilt:

$$m_t = f'(2) = 36.$$

Damit kann die Steigung m_n der Normalen bestimmt werden.

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{36}.$$

➤ *Ansatz für die Normalengleichung*

Ein Ansatz für die Normalengleichung ist also:

$$y = -\frac{1}{36}x + c.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts*

Setze P in die Normalengleichung ein, das liefert c:

$$13 = -\frac{1}{36} \cdot 3 + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{157}{12}.$$

Damit hat die Normale n die Gleichung

$$n(x) = -\frac{1}{36}x + \frac{157}{12}.$$

(b) Lösungsweg wie in Teil (a):

$$n(x) = -\frac{1}{3\mathrm{e}}x + \mathrm{e} + \frac{1}{3\mathrm{e}}$$

(c) Lösungsweg wie in Teil (a):

$$n(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{2}$$

Lösungen