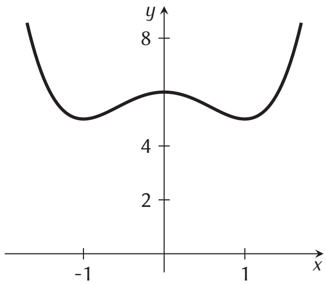
Aufgabe 3

Entscheide, welche der folgenden Funktionen hier jeweils graphisch dargestellt ist. Begründe deine Entscheidung.

(a)



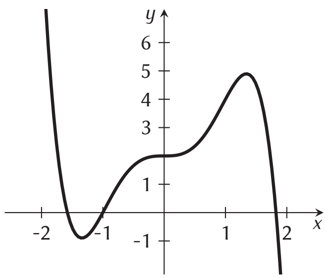
$f_1(x) = x^3 + x + 6$

$f_2(x) = 4x^2 + 6$

$f_3(x) = x^4 + 9$

$f_4(x) = x^4 - 2x^2 + 6$

(b)



$f_1(x) = -x^5 + 3x^3 + 2$

$f_2(x) = -x^3 + 2$

$f_3(x) = x^3 - 4x^5 + 1$

$f_4(x) = -x^5 + 2$

1.3 Gebrochenrationale Funktionen

1.3.1 Nullstellen von Zähler und Nenner

Merke

Die **Standardform** einer gebrochenrationalen Funktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

Dabei sind g und h ganzrationale Funktionen.

- Eine Stelle $x = a$ ist **Nullstelle** der Funktion f, falls $g(a) = 0$ und gleichzeitig $h(a) \neq 0$ gilt.
- Ist $h(a) = 0$, so ist $x = a$ eine **Definitionslücke** von f.
- Gilt $h(a) = 0$ und $g(a) \neq 0$, so ist die Definitionslücke $x = a$ eine **Polstelle** von f.

Beispiel: Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{2x + 6}{x^2 - 4}.$$

Die Nullstellen des Zählers sind gegeben durch:

$$2x + 6 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -3.$$

Die Nullstellen des Nenners sind gegeben durch:

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_3 = -2.$$

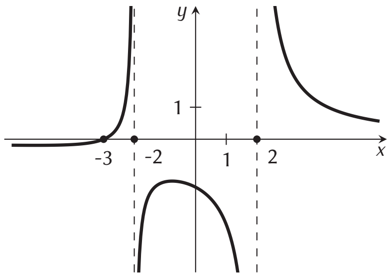
Es gilt also:

- Da die Nullstelle x_1 des Zählers keine Nullstelle des Nenners ist, hat f an der Stelle $x_1 = -3$ eine Nullstelle.
- Die Funktion f hat Definitionslücken bei $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$. Die Definitionsmenge ist daher gegeben durch:

  $$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

- Da die Definitionslücken keine Nullstellen des Zählers sind, hat f an den Stellen $x_2 = 2$ und $x_3 = -2$ Polstellen.

Der Graph von f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



Aufgabe 4 –

Warum sind die Nullstellen des Zählers keine Nullstellen der Funktion, wenn sie auch Nullstellen des Nenners sind? Was bedeutet das für die Suche nach Extrem- bzw. Wendestellen?

Aufgabe 5 – Abi★

Bestimme Definitionsmenge, Nullstellen und Polstellen der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}.$$

Aufgabe 6 – Abi★★

Die Funktion f hat nur an der Stelle $x_0 = -2$ eine Nullstelle und an den Stellen $x_1 = -3$ und $x_2 = 4$ eine Polstelle. Gib eine mögliche Funktionsgleichung der Funktion f an.

1.3.2 Verhalten an Definitionslücken, Senkrechte Asymptoten

Merke

Es gibt zwei Arten von Definitionslücken einer gebrochenrationalen Funktion

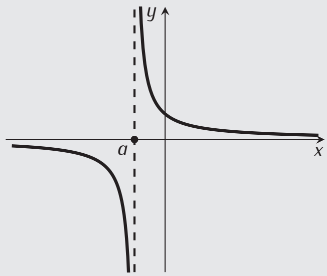
$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}.$$

- Gilt an einer Stelle

  $$h(a) = 0 \quad \text{und} \quad g(a) \neq 0,$$

  so hat die Funktion f an der Stelle $x = a$ eine **Polstelle**. Der Graph von f hat dort eine **senkrechte Asymptote**.

  Nähert sich x der Polstelle a an, so gilt $f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$.



- Gilt an einer Stelle

  $$h(a) = 0 \quad \text{und} \quad g(a) = 0,$$

  so kann der Term $(x - a)$ aus

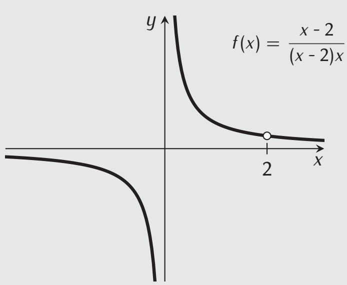
  $$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

  gekürzt werden.

  Falls $x = a$ weiterhin Zähler- und Nennernullstelle ist, muss noch einmal der Term $(x - a)$ gekürzt werden. Dies wird so lange durchgeführt, bis $x = a$ keine Zähler- oder Nennernullstelle mehr ist.

  Der „gekürzte" Term muss dann erneut auf eine Definitionslücke an der Stelle $x = a$ untersucht werden.

  - Ist $x = a$ nach dem Kürzen weiterhin eine Nennernullstelle, so hat f an der Stelle $x = a$ eine **Polstelle** und der Graph von f hat dort eine **senkrechte Asymptote**.
  - Ist $x = a$ nach dem Kürzen keine Nennernullstelle mehr, so hat f an der Stelle $x = a$ eine **hebbare Definitionslücke**.



Beispiel: Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}.$$

Die Funktion f hat Definitionslücken an den Nullstellen des Nenners, also

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Damit ist die Definitionsmenge von f:

$$\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$$

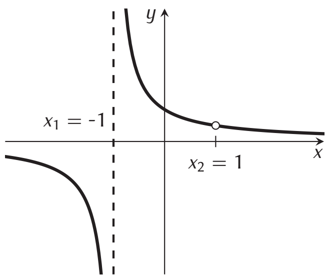
Der Zähler hat nur die Nullstelle $x_3 = 1$. Daraus folgt:

- Die Stelle $x_1 = -1$ ist eine Nullstelle des Nenners und keine Nullstelle des Zählers. An der Stelle $x_1 = -1$ hat f also eine **Polstelle** und der Graph von f eine senkrechte Asymptote.
- Die Stelle $x_2 = 1$ ist sowohl eine Nullstelle des Zählers als auch eine Nullstelle des Nenners. Also kann der Funktionsterm von f gekürzt werden. Mit der dritten Binomischen Formel gilt:

  $$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{x - 1}{(x - 1) \cdot (x + 1)} = \frac{1}{x + 1}.$$

  Im gekürzten Term ist $x_2 = 1$ keine Nullstelle des Zählers mehr, damit hat f an der Stelle $x_2 = 1$ eine **hebbare Definitionslücke**.

Der Graph der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



Aufgabe 7 Abi★★

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = \frac{2}{x - 2} + \frac{2}{x + 2} - \frac{-x^2 + 5x + 2}{x^2 - 4}$$

mit maximalem Definitionsbereich.
Kläre, welche Definitionslücken hebbar sind und bestimme den Funktionsterm einer Funktion g, die mit f auf dem Definitionsbereich von f übereinstimmt und keine hebbaren Definitionslücken aufweist.

Aufgabe 8 –

Gibt es gebrochenrationale Funktionen mit unendlich vielen Polstellen?

- Wenn nein: Wieso nicht?
- Wenn ja: Wie könnte eine solche Funktion aussehen?

1.3.3 Verhalten im Unendlichen, waagrechte Asymptoten

Merke

Das Verhalten einer gebrochenrationalen Funktion f und deren Graph G_f **im Unendlichen** wird durch deren Zählergrad (ZG) und den Nennergrad (NG) bestimmt.

- $ZG < NG$

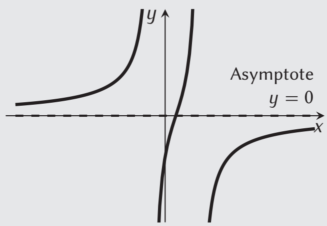
  In diesem Fall gilt:

  $$f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

  und die x-Achse ($y = 0$) ist eine waagrechte Asymptote von G_f.

  Zum Beispiel:

  $$f(x) = \frac{-2x + 1}{x^2 - x - 1} \quad \Longrightarrow \quad \text{Asymptote } y = 0.$$

- $ZG = NG$

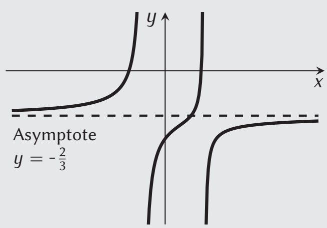
  Sind a und b die Koeffizienten vor den höchsten Potenzen in Zähler und Nenner, so gilt:

  $$f(x) \to \frac{a}{b} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

  und G_f hat eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{a}{b}$.

  Zum Beispiel:

  $$f(x) = \frac{-2x^2 + 1}{3x^2 - x - 1} \quad \Longrightarrow \quad \text{Asymptote } y = \frac{-2}{3}.$$

- $ZG > NG$

  In diesem Fall gibt es keine waagrechte Asymptote. Ist die Funktionsgleichung von f von der Form

  $$f(x) = mx + c + g(x)$$

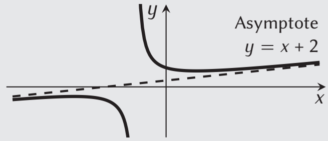
  und gilt

  $$g(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty,$$

  so hat G_f eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $y = mx + c$.

Zum Beispiel:

$$f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+1} \quad \Longrightarrow \quad \text{schiefe Asymptote } y = x + 2.$$



Aufgabe 9 – Abi★

Untersuche das Verhalten für $x \to \pm\infty$ für folgende Funktionen:

(a) $f(x) = \dfrac{(x^2+2)(4-x^2)}{(5-x)^5}$

(b) $f(x) = \dfrac{2-3x^3}{8x^3-1}$

Aufgabe 10 – Abi★

Bestimme alle Asymptoten des Graphen von

$$f(x) = \frac{5x^2+2x-7}{x}.$$

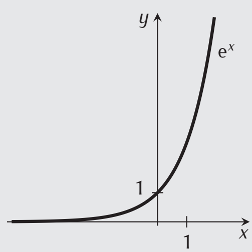
1.4 Exponential- und Logarithmusfunktionen

1.4.1 Die Exponentialfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = e^x$ nennt man **Exponentialfunktion**.

- Es gilt: $e^x > 0$ für alle Werte von x. Somit hat die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ keine Nullstellen.
- Es gilt: $e^0 = 1$.
- Für $x \to +\infty$ gilt $e^x \to +\infty$.
- Für $x \to -\infty$ gilt $e^x \to 0$.



Sattelpunkt. Die Ableitung der dargestellten Funktion muss also mindestens drei Nullstellen haben. Der Grad dieser Funktion ist also mindestens 3. Wenn aber nun die Ableitung mindestens Grad 3 hat, muss die Funktion selbst mindestens Grad 4 haben und damit entfällt f_2. Folgende Funktionen sind also noch übrig:

$$f_1(x) = -x^5 + 3x^3 + 2$$

$$f_4(x) = -x^5 + 2$$

Als letzten Schritt betrachtet man die Schnittpunkte mit der x-Achse. Diese muss man hier nicht zwingend ausrechnen. Es genügt, zu überlegen, wie viele Nullstellen die beiden Funktionen haben. Eine der beiden Funktionen muss die Funktion auf dem Schaubild sein, und daher drei Nullstellen haben. Die Nullstellen von f_4 sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} -x^5 + 2 &= 0 \\ x^5 &= 2 \\ x &= \sqrt[5]{2} \end{aligned}$$

Wie man sieht, hat f_4 nur eine Nullstelle. Im Schaubild ist also der Graph der Funktion

$$f_1(x) = -x^5 + 3x^3 + 2$$

abgebildet.

Lösung 4

Die Division durch 0 ist nicht erlaubt. Nullstellen des Nenners sind daher Definitionslücken. Bei der Bestimmung von Extrem- bzw. Wendestellen einer gebrochenrationalen Funktion $f(x)$ setzt man $f'(x) = 0$ bzw. $f''(x) = 0$. Es muss überprüft werden, ob die Lösungen dieser Gleichung im Definitionsbereich sind, d. h. keine Nullstellen des Nenners sind.

Lösung 5

- Die Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners. Es gilt:

  $$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

  Also: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.
- Die einzige Nullstelle des Zählers ist $x = 0$. Diese liegt im Definitionsbereich und ist daher eine Nullstelle von f.
- Da die Definitionslücke keine Nullstelle des Zählers ist, liegt dort eine Polstelle vor.

Lösung 6

Damit die Funktion f an der Stelle $x_0 = -2$ eine Nullstelle hat, muss $x_0 = -2$ eine Nullstelle des Zählers sein, darf aber keine Nullstelle des Nenners sein. Somit muss der Zähler den Faktor $(x+2)$ enthalten. Polstellen sind Nullstellen des Nenners, die keine Nullstellen des Zählers sind. Also muss der Nenner den Faktor $(x+3)\cdot(x-4)$ enthalten und eine mögliche Funktionsgleichung für f ist gegeben durch

$$f(x) = \frac{x+2}{(x+3)(x-4)}.$$

☞ *Alternative:* Ebenso könnte folgende Funktionsgleichung gewählt werden:

$$f(x) = \frac{6(x+2)^2}{5(x+3)^2(x-4)^5}.$$

Lösung 7

Zunächst muss die Funktion auf Standardform gebracht werden, indem man die Brüche addiert. Der gesuchte gemeinsame Nenner ist $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ (dritte binomische Formel). Es gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+2} - \frac{-x^2+5x+2}{x^2-4} \\ &= \frac{2(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{2(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{-x^2+5x+2}{(x-2)(x+2)} \\ &= \frac{2x+4+2x-4-(-x^2+5x+2)}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)} \end{aligned}$$

- Die Nullstellen des Nenners kann man direkt ablesen: $x_1 = 2$ und $x_2 = -2$.
- Die Nullstellen des Zählers werden bestimmt als:

  $$x^2 - x - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = 2, \quad x_4 = -1.$$

  Damit kann der Zähler auch geschrieben werden als

  $$x^2 - x - 2 = (x-2)(x-(-1)) = (x-2)(x+1).$$

Der Funktionsterm von f kann somit gekürzt werden:

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{(x+2)(x-2)} = \frac{(x-2)(x+1)}{(x+2)(x-2)} = \frac{x+1}{x+2}.$$

Damit gilt für die Funktion f:

$x_2 = -2$ Polstelle

$x_1 = x_3 = 2$ eine hebbare Definitionslücke.

Der Term einer Funktion g, welche mit f übereinstimmt und auch an der Stelle $x = 2$ definiert ist, ist gerade der gekürzte Bruch. Es gilt also:

$$g(x) = \frac{x+1}{x+2}.$$

Lösung 8

Nein, es gibt keine gebrochenrationale Funktion mit unendlich vielen Polstellen. Denn bei einer gebrochenrationalen Funktion sind sowohl Zähler als auch Nenner Polynome endlichen Grades. Die Anzahl der Polstellen ist damit höchstens so groß wie der Grad des Polynoms im Nenner.

Lösung 9

(a) Fall $ZG < NG$. Es gilt also:

$$f(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Der Graph von f hat also eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = 0$ (x-Achse).

(b) Fall $ZG = NG$. Es gilt:

$$f(x) \to \frac{-3}{8} \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Der Graph von f hat also eine waagrechte Asymptote mit der Gleichung $y = \frac{-3}{8}$.

Lösung 10

Nach Aufspalten des Bruches folgt

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x^2}{x} + \frac{2x}{x} - \frac{7}{x} \\ &= 5x + 2 - \frac{7}{x}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$-\frac{7}{x} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty.$$

Für die Asymptoten des Graphen von f gilt:

- Es gibt eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $y = 5x + 2$.
- Weiter ist $x = 0$ eine Nullstelle des Nenners aber keine Nullstelle des Zählers. Daher ist $x = 0$ eine senkrechte Asymptote des Graphen von f.

Lösung 11

(a) Für die Funktion f gilt: $f(0) = 1$. Damit kann nur der Graph (IV) zur Funktion f gehören.

(b) Für die Funktion g gilt: $g(0) = 2$.

Damit können nur die Graphen (II) oder (III) zur Funktion g gehören. Desweiteren gilt für die Ableitung von g:

$$g'(x) = -6x^2 e^{-x^3}.$$

Damit nimmt die Funktion g' nur negative Werte an. Der Graph von g ist also monoton fallend. Somit kann zur Funktion g nur der Graph (III) gehören.

(c) Für die Funktion h gilt: $h(0) = 2$.

Damit können nur die Graphen (II) oder (III) zur Funktion h gehören. Der Graph (III) gehört zur Funktion g, damit kann nur der Graph (II) zur Funktion h gehören.