Analysis Teil 1

- Gleichungen
- Grundlagen
- Funktionen
- Nullstellen
- Definitionsmengen
- Änderungsraten und Ableitungen
- Tangentengleichungen
- Extrempunkte und Monotonie
- Wendepunkte
- Verhalten um Unendlichen
- Symmetrie
- Funktionsgraphen zeichnen

Gleichungen, your turn!

$$x^2 + x - 2 = 0$$
$$(x^2 - 4)(x - 3) = 0$$
$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$
$$x^4 + 3x^3 = 0$$

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1$$
$$4e^{3x} = 2e^{5x}$$
$$e^{2x} + e^{x} = 6$$

$$\sqrt{4x + 16} - x - 1 = 0$$

$$\ln\left(x^2 - 8\right) = 0$$

Grundlagen

- Binomische Formeln
- Potenzgesetze
- Logarithmengesetze
- Nützliche Umformungen

Binomische Formeln

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

- Links steht die **Nullstellenform**, rechts die **Polynomform**
- **Nullstellenform**: Gut um Gleichungen zu lösen
- **Polynomform**: Gut zum Ableiten/Integrieren
- Generell gilt: Nur *ausmultiplizieren* wenn umbedingt notwendig!

Potenzgesetze

1. $\mathrm{e}^a \cdot \mathrm{e}^b = \mathrm{e}^{a+b}$
2. $\frac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} = \mathrm{e}^{a-b}$
3. $(\mathrm{e}^a)^b = \mathrm{e}^{a \cdot b}$

- Werden fast immer von links nach rechts angewendet
- Funktionieren **nur** bei Mal/Geteilt! Plus/Minus immer nur im Exponenten!
- Nummer 3 wird gerne vergessen
- Alle Regeln gelten natürlich auch mit anderen Basen als *e*

Beispiele

Mit Basis *x* ...

- $x^2 \cdot x^4 = x^{2+4} = x^6$
- $x^2 \cdot x^{-4} = x^{2-4} = x^{-2}$

... und mit Basis *e* (Erinnerung: $\mathrm{e} \approx 2.718$ ist eine Zahl)

- $\mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^{2+4} = \mathrm{e}^6 \approx 403$
- $\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{2x+4x} = \mathrm{e}^{6x}$
- $(\mathrm{e}^2)^3 = \mathrm{e}^{2\cdot 3} = \mathrm{e}^8 \approx 2981$

Fallstricke

$$\mathrm{e}^a + \mathrm{e}^b \neq \mathrm{e}^{a+b}$$
$$\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^b \neq \mathrm{e}^{a+b}$$

- Wenn mehrere Potenzen mit einem Plus oder Minus separiert sind, können wir nichts machen!
- "Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen" ist zwar selber ein dummer Spruch, aber aufpassen muss man hier schon (Stichwort: *Ausklammern* und *Ausmultiplizieren*)
- Besser: "Differenzen und Summen kürzen nur die Dummen, und die ganz Schlauen"

Logarithmengesetze

$\ln(2e^{2x}) =$

$\ln(2) + \ln(e^{2x})$

1. $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$
2. $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
3. $\ln(a^b) = b \ln a$

- Werden fast immer von links nach rechts angewendet
- Funktionieren **nur** bei Mal/Geteilt! Plus/Minus immer nur außerhalb vom Logarithmus!
- Nummer 3 wird gerne vergessen, ist aber besonders wichtig!

Fallstricke

$$\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$$
$$\ln(a+b) \neq \ln a \cdot \ln b$$
$$\ln(a-b) \neq \ln a - \ln b$$

- Wenn in einem Logarithmus mehrere Terme mit Plus oder Minus separiert sind, können wir nichts machen!
- Hier hilft nur noch den Logarithmus ganz los zu werden, in dem wir auf die Gleichung die *e-Funktion* anwenden
- Außerdem: Keinen Logarithmus aus Zahlen ≤ 0 ziehen, hier ist der $\ln$ nicht definiert!

Nützliche Umformungen

Potenzen

- $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$

Wurzeln <-> Potenzen

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1}{x} = x^{-1}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

$\ln$ und e sind Gegenfunktionen

- $\ln \mathrm{e}^x = x$
- $\mathrm{e}^{\ln x} = x$

Umformen der Basis

- $a^x = \mathrm{e}^{\ln(a)x}$

Beispiele

- $x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$
- $\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} = \mathrm{e}^{\frac{2x}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}}$
- $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{2^2}{(\sqrt{3})^2} = \frac{4}{3}$
- $\sqrt[4]{x^2y^4} = x^{\frac{2}{4}}y^{\frac{4}{4}} = x^{\frac{1}{2}}y$
- $\ln 50 - \ln 20 + \ln\frac{2}{5} = \ln\left(\frac{50}{20}\cdot\frac{2}{5}\right) = \ln 1 = 0$

Gleichungen

Fast alle mathematischen Aufgaben beinhalten am Ende eine Gleichung, die gelöst werden muss (z.B Extrempunkt, 3M-Aufgabe, Schnittpunkt von Gerade und Ebene)

Rezept

1. Gleichungstyp erkennen
2. Gleiches zu Gleichem und das Problem isolieren
3. Ausklammern und Kürzen, Brüche auflösen (wenn Variable im Nenner)
4. Nach Bedarf: Substituieren
5. Gleichung lösen
6. Nach Bedarf: Rücksubstituieren

Noch mehr Fallstricke

- Keine Logarithmen oder Wurzeln von Summen oder Brüchen
  $\ln(a+b) \neq \ln a + \ln b$
  $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- Kein Brüche erstellen durch Teilen oder Ausklammern!

Quadratische Gleichungen: $ax^2 + bx + c = 0$

Lösen mit Mitternachtsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x^2 + x - 2 = 0$

Nullprodukt: $Term1 \cdot Term2 = 0$

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

$(x^2 - 4)(x - 3) = 0$

Biquadratische Gleichungen $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Lösen mit Mitternachtsformel und Substitution

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0$$

$u = x^2$

$u^2 - 5u - 36 = 0$

$$u_{1/2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36)}}{2}$$

$u_1 = -9 \qquad u_2 = 4$

$-9 = x^2 \quad | \pm\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{-9}$ ↯

$4 = x^2 \quad | \pm\sqrt{}$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$

x in jedem Summanden

x Ausklammern

$$x^4 + 3x^3 = 0$$

$$x^3(x+3) = 0$$

Exponentialgleichung Typ1: Nur eine Art Exponent

Gleichung sortieren und Logarithmus anwenden

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1 \quad \Big| -3e^{2x+1} \; +3$$

$$2e^{2x+1} = 4 \quad \Big| :2$$

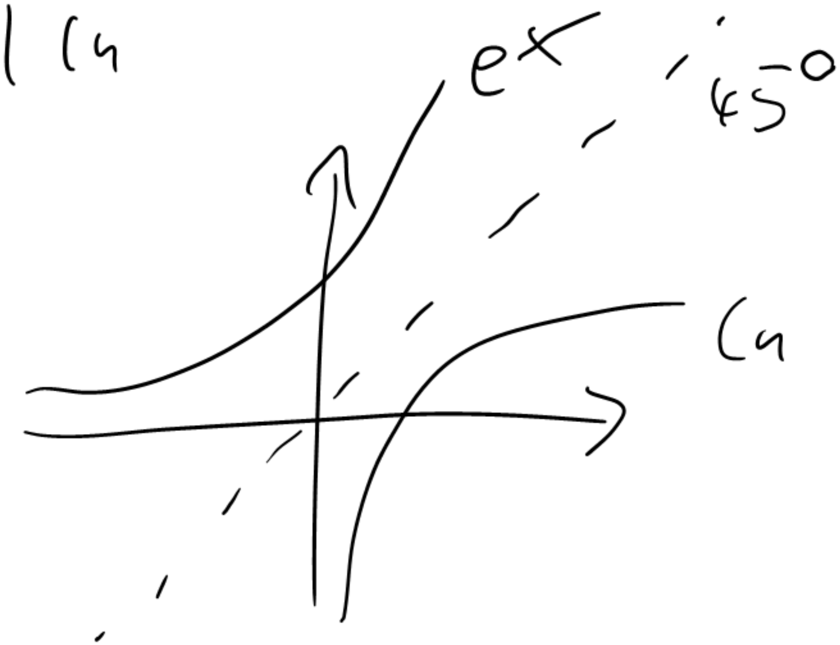
$$e^{2x+1} = 2 \quad \Big| \ln$$

$$2x+1 = \ln(2) \quad \Big| -1$$

$$2x = \ln(2) - 1 \quad \Big| :2$$

$$x = \frac{\ln(2) - 1}{2}$$

$$\ln(2e^{2x+1})$$



Exponentialgleichung Typ2: Zwei Arten Exponenten, aber keine Zahl

Möglichkeit 1: A~~usklammern und Nullprodukt~~

$$4e^{3x} = 2e^{5x} \qquad | :2$$

$$2e^{3x} = e^{5x} \qquad | \ln$$

$$\ln(2e^{3x}) = \ln(e^{5x})$$

$$\ln(2) + \ln(e^{3x}) = \ln(e^{5x})$$

$$\ln(2) + 3x = 5x \qquad | -3x$$

$$\ln(2) = 2x \qquad | :2$$

$$x = \frac{\ln(2)}{2}$$

Möglichkeit 2: Durch *e* teilen

$$4e^{3x} = 2e^{5x}$$

Exponentialgleichung Typ3: Zwei Arten Exponenten, eine Exponent genau das Doppelte des Anderen

Substituieren, dann Mitternachtsformel

$$\ln\left(e^{2x} + e^x\right) = 6$$

$$e^{2x} = (\underbrace{e^x}_{u})^2$$

$$u = e^x$$

$$u^2 + u = 6$$

$$\ln\left(e^{2x} + e^x\right) \neq \ln\left(e^{2x}\right) + \ln\left(e^x\right) \quad ↯$$

Wurzelgleichung

Sortieren, dann Quadrieren

$$\sqrt{4x+16}-x-1=0 \qquad \mid +x+1$$

$$\sqrt{4x+16} = x+1 \qquad \mid (\ )^2$$

$$4x+16 = (x+1)^2$$

$$4x+16 = x^2+2x+1$$

Logarithmusgleichung

Sortieren, dann *e-Funktion*

$$\ln(x^2 - 8) = 0 \qquad | e$$

$$e^{\ln(x^2-8)} = e^0$$

$$x^2 - 8 = 1 \qquad | +8$$

$$x^2 = 9 \qquad | \pm\sqrt{}$$

$$x = \pm 3$$

$$\ln(1) = 0$$

$$\ln(x^2 - 8) = 0$$

$$1 = x^2 - 8$$

Gleichungen: Rechenblock 2

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	1,3,4
mittel	2,5,6,7,8,9,10
schwer	12,13

12 Rechnen!

Für Schnelle und Unterforderte:

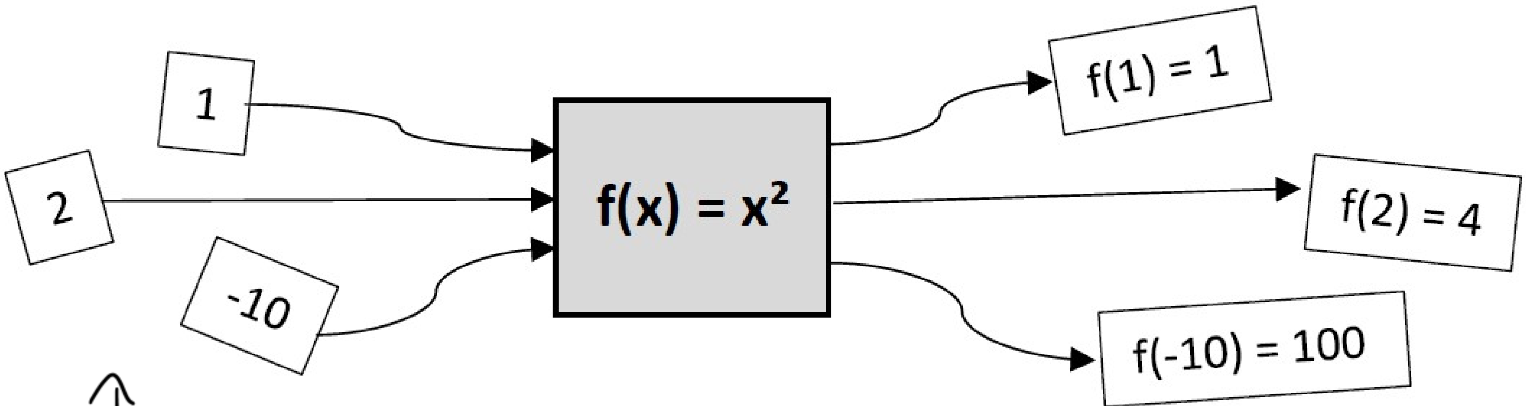
- Aufgabe 87 ff.

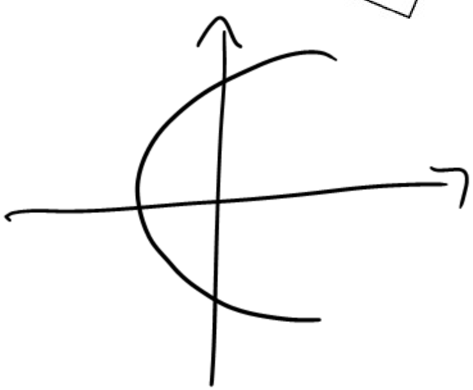
$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{68}} = \sqrt{\frac{17}{68}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$16^{0,25} = 16^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{16} = 2$$

Funktionen

Eine *Funktion* $f(x)$ beschreibt, wie man von einem Eingangswert *x* zu einem Ausgangswert *y* kommt.
Eine *Funktion* ordnet jedem Element $x \in \mathcal{D}$ genau **ein** $y \in \mathcal{W}$ (Funktionswert) zu.



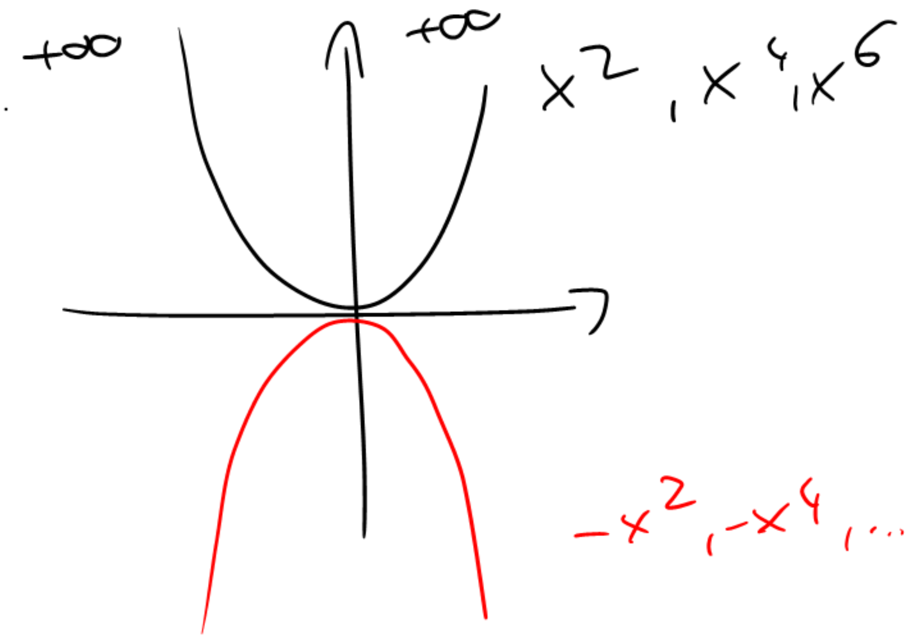


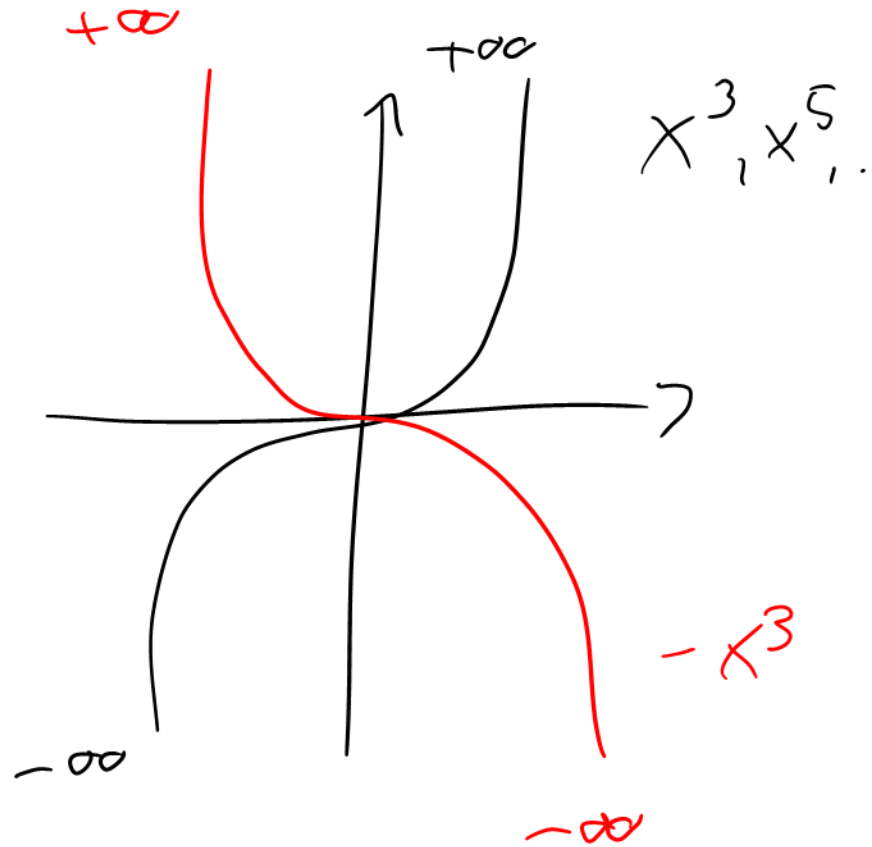
Ganzrationale Funktionen

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots$$

- Funktionsterm heißt Polynom
- a, b, c, ... heißen Koeffizienten
- Höchster Exponent n heißt Grad des Polynoms
- Der Grad des Polynoms kann erst beim vollständig ausmultiplizierten Polynom bestimmt werden.

Ganzrationale Funktionen



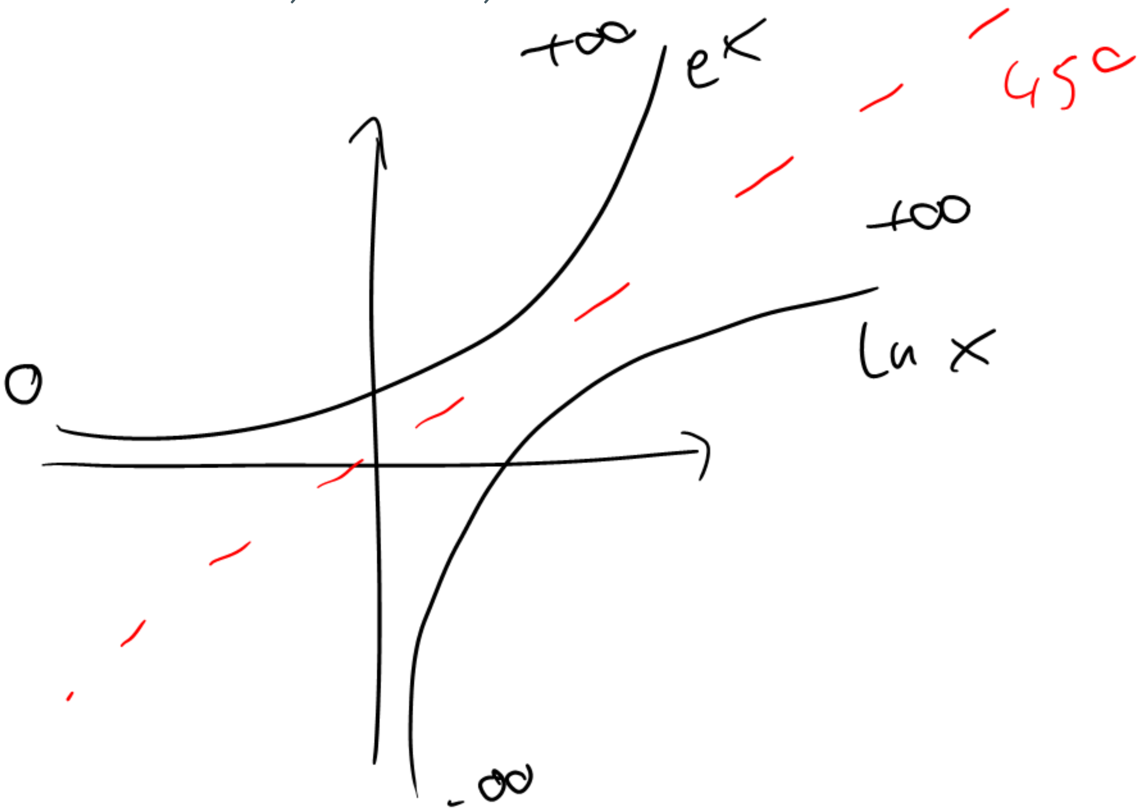


Verschiedene Schreibweisen von ganzrationalen Funktionen

- Polynomform
- Scheitelpunktsform
- Nullstellenform

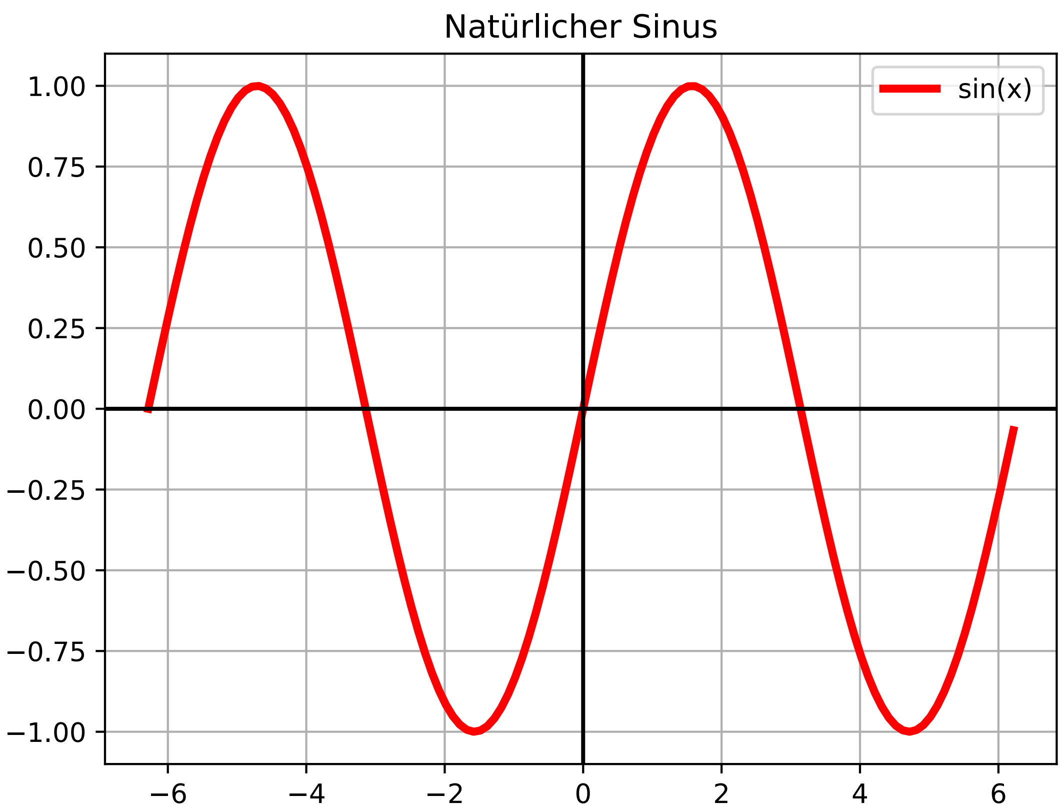
Exponential- und Logarithmusfunktionen

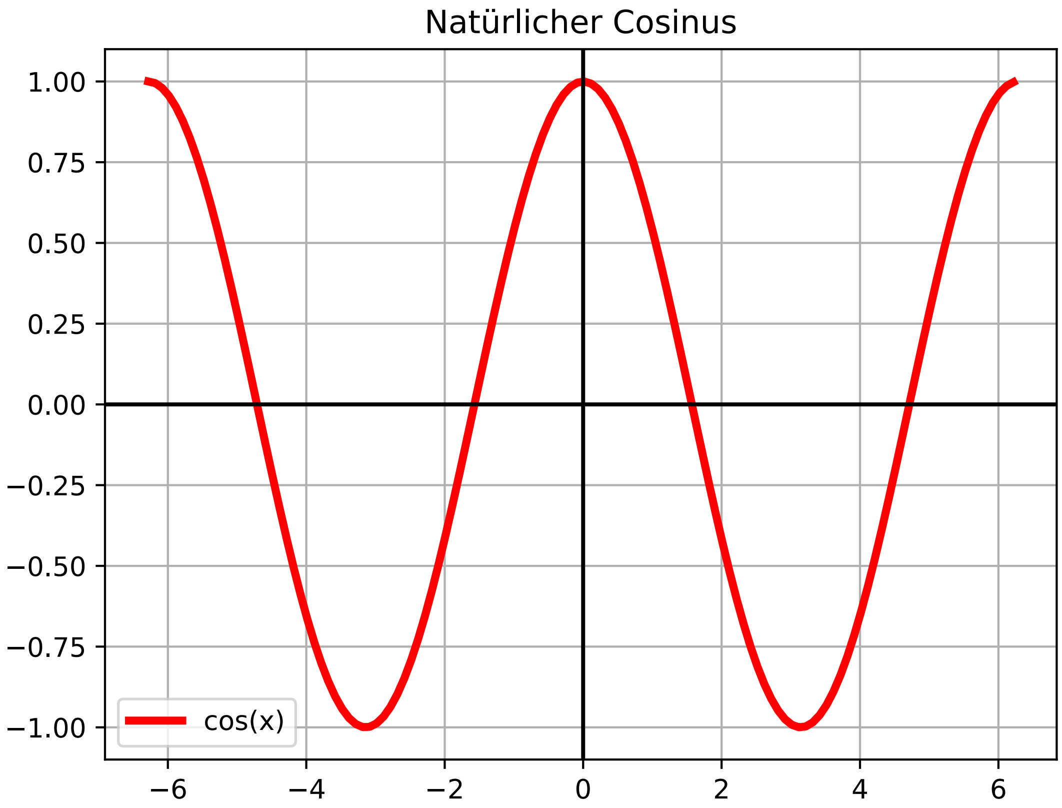
- Sind Gegen-/Umkehrfunktionen
- $\mathrm{e} > 0, \quad \ln x, x > 0$



Funktionen manipulieren

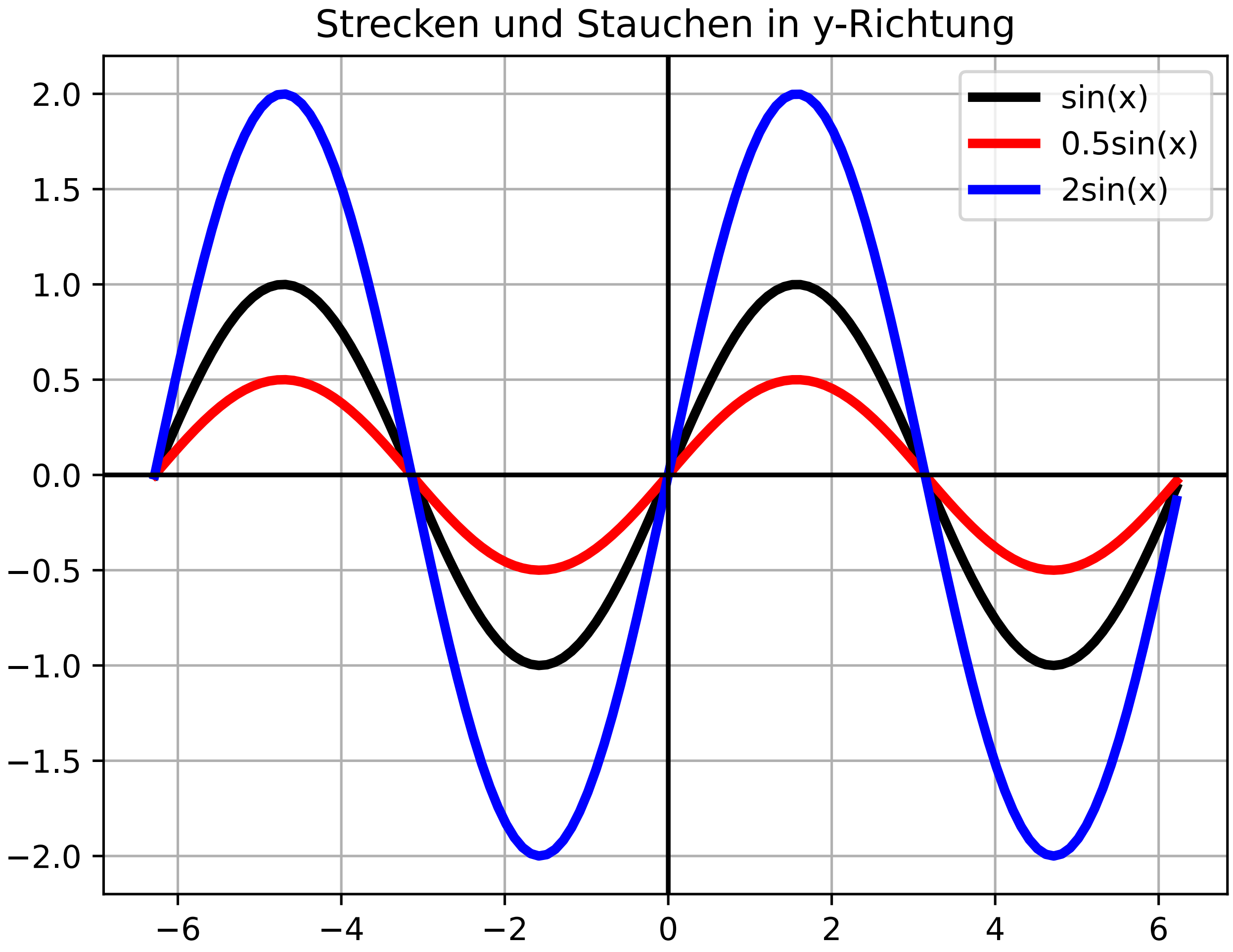
Sinus und Cosinus

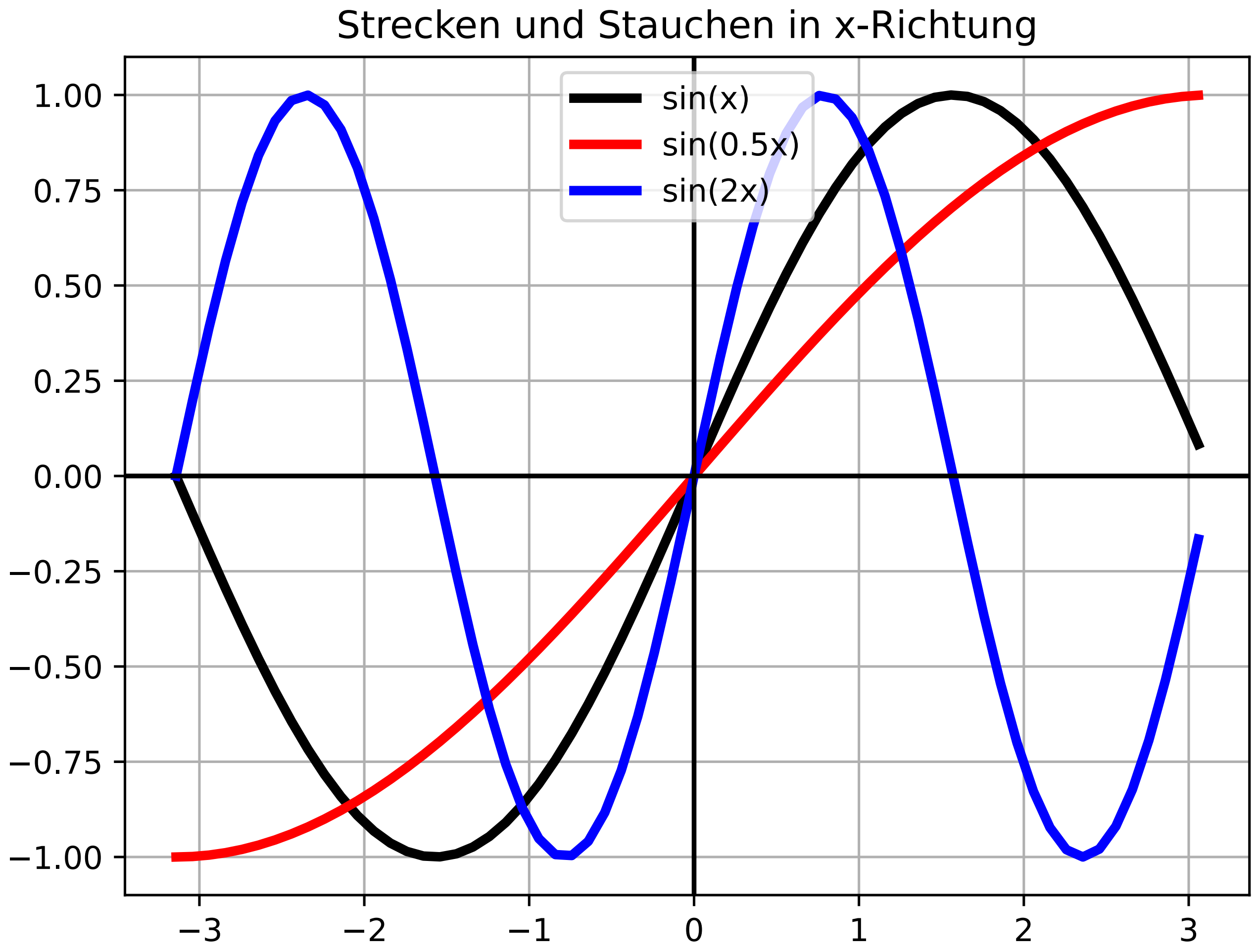




- ~~Amplitude A:~~
- ~~Periode T:~~

Strecken und Stauchen

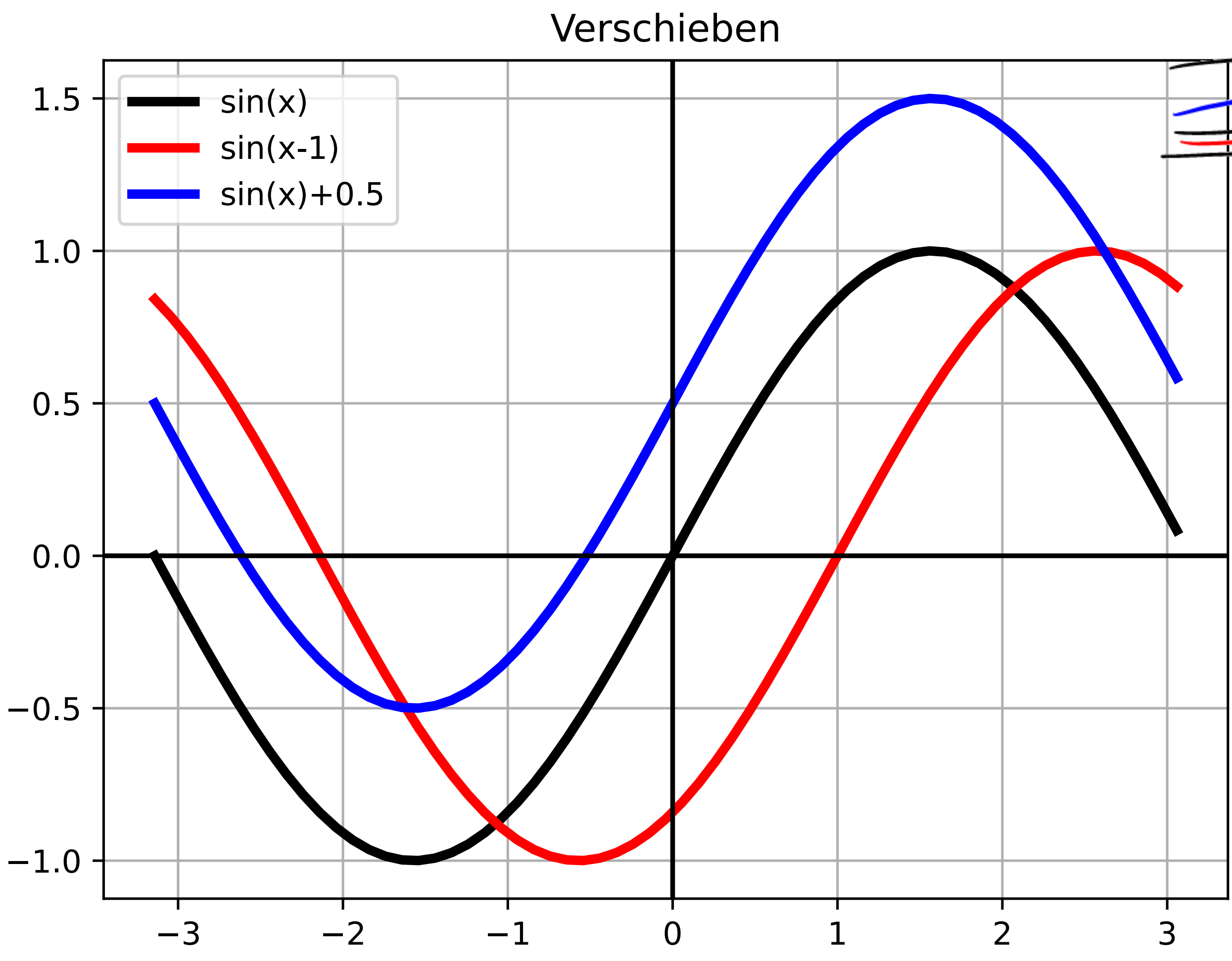


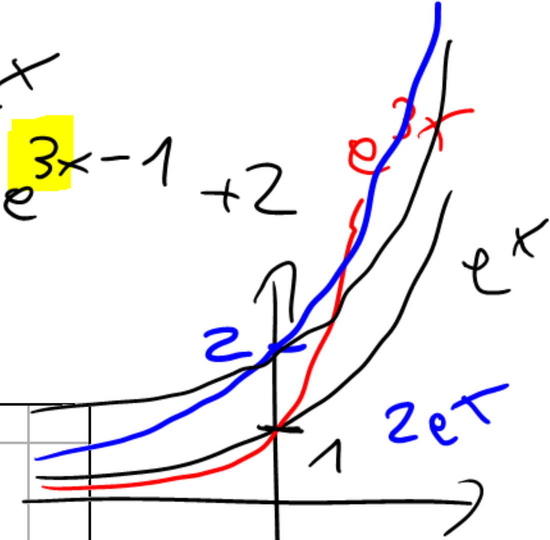

Strecken und Stauchen in x-Richtung
sin(x)
sin(0.5x)
sin(2x)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−3
−2
−1
0
1
2
3

$f(x) = e^x$

$g(x) = 2e^{3x-1} + 2$

Verschieben





$e^x + 1$

$2e^x$

$+1$

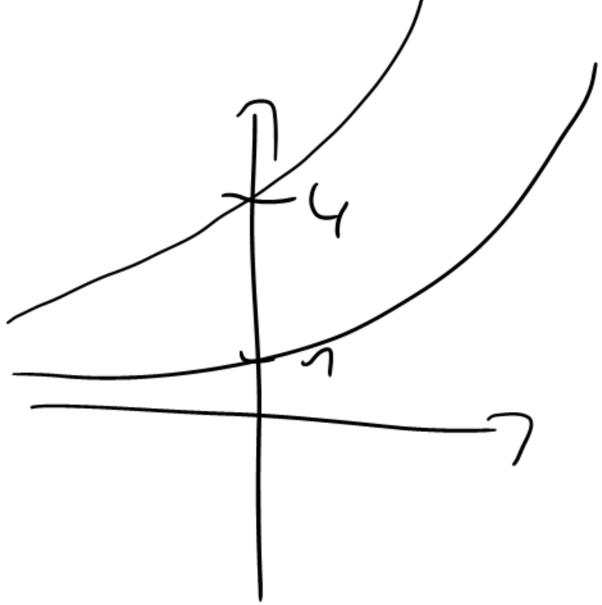
e^{2x} $\Rightarrow$ Stauchung x-Richtung   Bei Zahlen > 1

Streckung um Faktor $\frac{1}{2}$

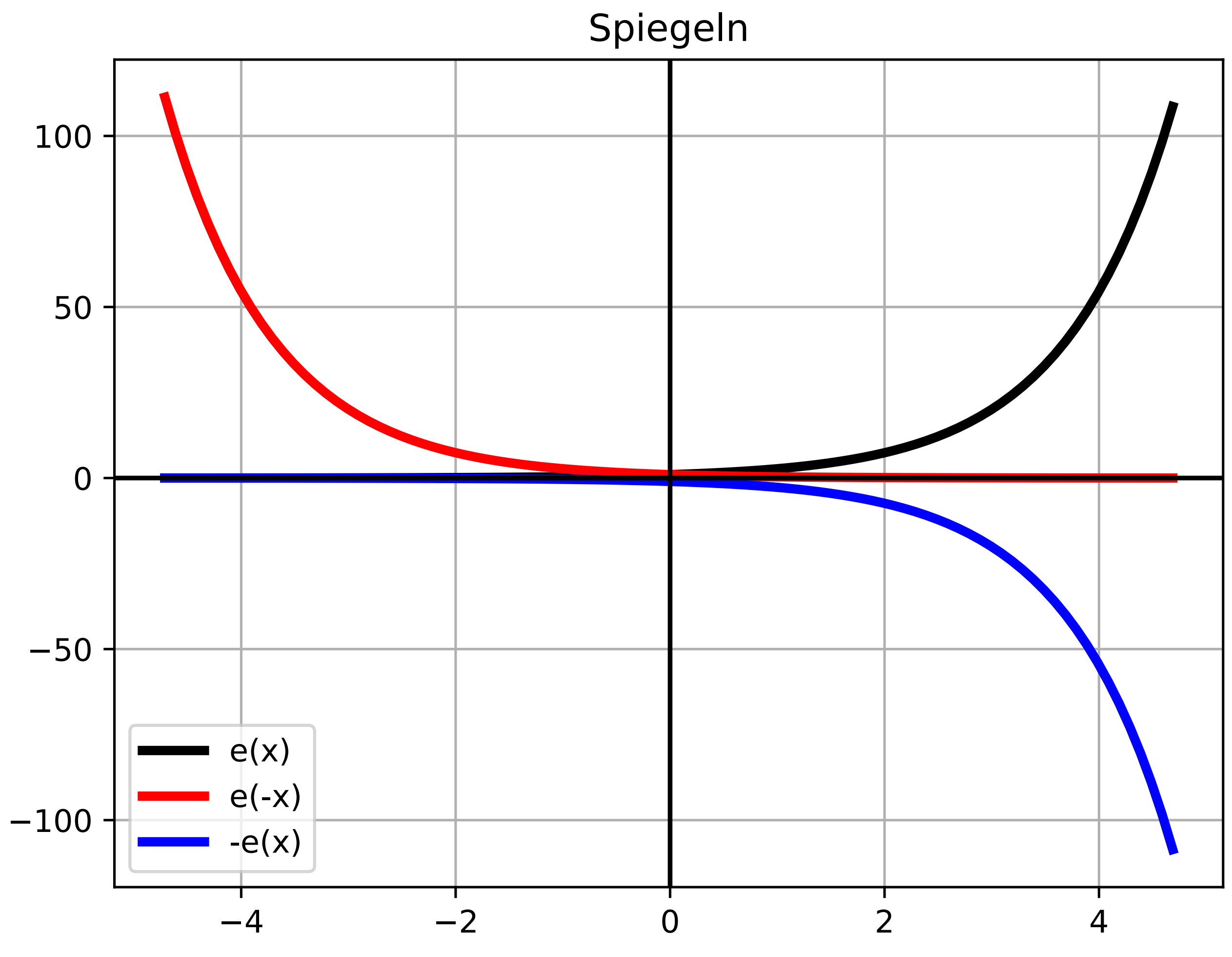
$2e^{x}$ $\Rightarrow$ Streckung y-Richtung Faktor 2   Bei Zahlen > 1

Stauchun um Faktor $\frac{1}{2}$

$4e^{x}$



Spiegeln



Nullstellen

$$f(x_{Nullstellen}) = 0$$

- Ein Polynom vom Grad n besitzt höchstens n Nullstellen (nach Vielfachheit!).
- Einfache Nullstellen: Graph schneidet die x-Achse
- Dreifache, fünffache, ... Nullstellen: Graph schneidet die x-Achse, schmiegt sich aber an die x-Achse an
- Doppelte, vierfache, sechsfache, ... Nullstellen: Graph berührt die x-Achse
- $f(x) = a \cdot (x-\alpha) \cdot (x-\beta) \cdot \ldots \cdot (x-\gamma)^2 \cdot (x-\delta)^2 \cdot \ldots$
  α,β,... einfache Nullstellen und γ,δ,... doppelte Nullstellen

Rezept

Funktion gleich null setzen und Gleichung lösen

$$f(x) = x^5 - 9x^3$$

Nullstellen bei Sinus und Kosinus

- Nullstellen des natürlichen $\sin$: $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$
- Nullstellen des natürlichen $\cos$: $x = \frac{(2n+1)}{2}\pi, n \in \mathbb{Z}$

Rezept: Argument der trigonometrischen Funktion mit der "Nullstelle" gleichsetzen

$$f(x) = 3sin(2x)$$

$$2x = n\pi \qquad | : 2$$
$$x = \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

Da trigonometrische Funktionen periodisch sind, gibt es logischerweise unendlich viele Lösungen!

Kurvendiskussion: Rechenblock Funktionen

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	17, 60, 61
schwer	

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Grundlagen und Funktionsklassen
- Altabitur 2020 Analysis

$$x^2 + x + 1 \Rightarrow (x-a)^2 + (x-a) + 1$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + x - a + 1$$

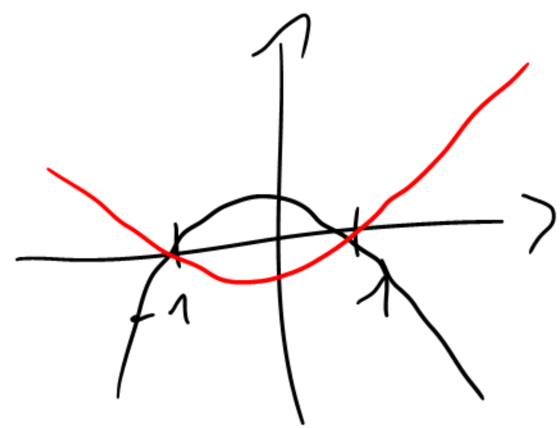
$$x^2 + (1-2a)x + a^2 - a + 1$$

$$1 \cdot x^2 + 2x + \underline{4} = 1 \cdot x^2 + (1-2a)x + \underline{a^2 - a + 1}$$

I, $1 = 1$

II, $2 = 1 - 2a$

III, $4 = a^2 - a + 1$



Definitionsmengen

Definitionsmenge D_f ist die Menge aller Zahlen, die ohne Widerspruch in eine Funktion *f* eingesetzt werden dürfen.

Grundannahme: $D_f = \mathbb{R}$

Ausnahmen:

Funktion	Bruch	Wurzel	Logarithmus
Einschränkung	$\frac{Zähler}{Nenner}$	$\sqrt{Argument}$	$\ln(Argument)$
	$Nenner \neq 0$	$Argument \geq 0$	$Argument > 0$

x^2

e^{x^2-4}

Mengen und Mengenschreibweisen

- Menge der reellen Zahlen: $\mathbb{R}$
  Menge der positiven reellen Zahlen mit der Null: $\mathbb{R}_0^+$
- Menge der rationalen Zahlen: $\mathbb{Q}$
  Alle Zahlen, die als Bruch dargestellt werden können
- Einzelne Zahlen mit Mengenklammern: $D_f = \{1, 2, 3\}$
  (Hier sind nur 1,2 und 3 Teil der Definitionsmenge)
- Einzelne Zahlen *ausschließen* mit Mengenklammern:
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ (Hier sind nur 1,2 und 3 *nicht* Teil der Definitionsmenge)
- Größere Mengen mit Mengenklammern:
  $D_f = \{x | -4 < x < -2 \cup 2 < x < 4\}$ ("Alles zwischen -4 und -2 sowie zwischen 2 und 4")

- Größere Mengen mit Intervallklammern: $D_f = [-4,-2] \cup [2,4]$ ("Alles zwischen -4 und -2 sowie zwischen 2 und 4")
- Abgeschlossen: $[a,b]$ (alle Zahlen zwischen a und b)
- Halboffen $[a,b[$ (alle Zahlen zwischen a und b, aber b nicht mehr)
- Offen $]a,b[$ (alle Zahlen zwischen a und b, aber a und b nicht mehr)
- Merke: Bei $+\infty$ und $-\infty$ zeigen die Klammern immer vom ∞ weg!

Funktion	Bruch	Wurzel	Logarithmus
Einschränkung	$\frac{Zähler}{Nenner}$	$\sqrt{Argument}$	$\ln(Argument)$
	$Nenner \neq 0$	$Argument \geq 0$	$Argument > 0$

Rezept

1. $D_f = \mathbb{R}$
2. Überprüfe, ob Ausnahmen in der Funktion sind
3. Ausnahme prüfen
   3a. Bei Bruch $Nenner = 0$ setzen und lösen. Für gefundene Lösung $x_{Nenner=0}$ gilt: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x_{Nenner=0}\}$
   3b. Bei Wurzel und Logarithmus Ungleichung lösen. Die Lösung dann in Intervall- (z.B $\mathcal{L} =]-\infty, 0]$) oder Mengenschreibweise (z.B $\mathcal{L} = \{x|x < 0\}$ gesprochen: "x mit der Eigenschaft x kleiner als 0") angeben

Brüche

$$f(x) = \frac{Zähler}{Nenner}, Nenner \neq 0$$

$$f(x) = \frac{x^2+3x}{x+7}$$

$x+7 = 0 \quad | -7$

$x = -7$

$D = \underline{\mathbb{R} \setminus} \{-7\}$

$\mathbb{R}$ „ohne" nur bei Brüchen

Wurzeln

$$f(x) = \sqrt{Argument}, Argument \geq 0$$

$$g(x) = 3\underline{\sqrt{x+16}} + e^{3x} + 4$$

$x + 16 \geq 0 \quad |-16$

$x \geq -16$

$D = [-16; +\infty[$

$\geq / \leq$ („gleich“) $\Rightarrow$ eckige Klammer nach innen

$+/- \infty$ Klammer nach außen

Logarithmus

$$f(x) = \ln(Argument), Argument > 0$$

$$h(x) = \ln(x-3)$$

$x - 3 > 0 \quad | +3$

$x > 3$

$D =]3; +\infty[$

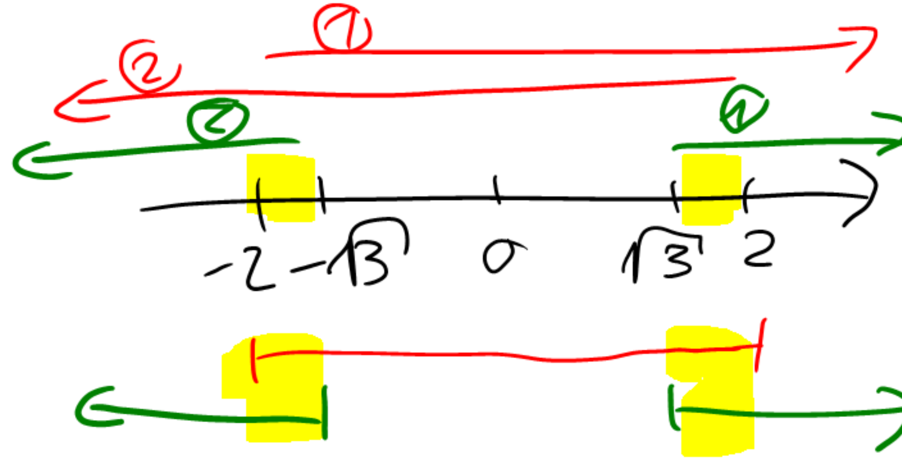
$$f(x) = \ln\left(-\sqrt{4-x^2} + 1\right)$$

$4 - x^2 \geq 0 \quad | +x^2$

$4 \geq x^2 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$+\sqrt{\ }$: $+2 \geq x$ (2)

$-\sqrt{\ }$: $-2 \leq x$ (1)



Zeichen umdrehen!

$-\sqrt{4-x^2} + 1 > 0 \quad | +\sqrt{4-x^2}$

$1 > \sqrt{4-x^2} \quad | (\ )^2$

$1 > 4 - x^2 \quad | +x^2 - 1$

$x^2 > 3 \quad | \pm\sqrt{\ }$

$x > \sqrt{3}$ (1)

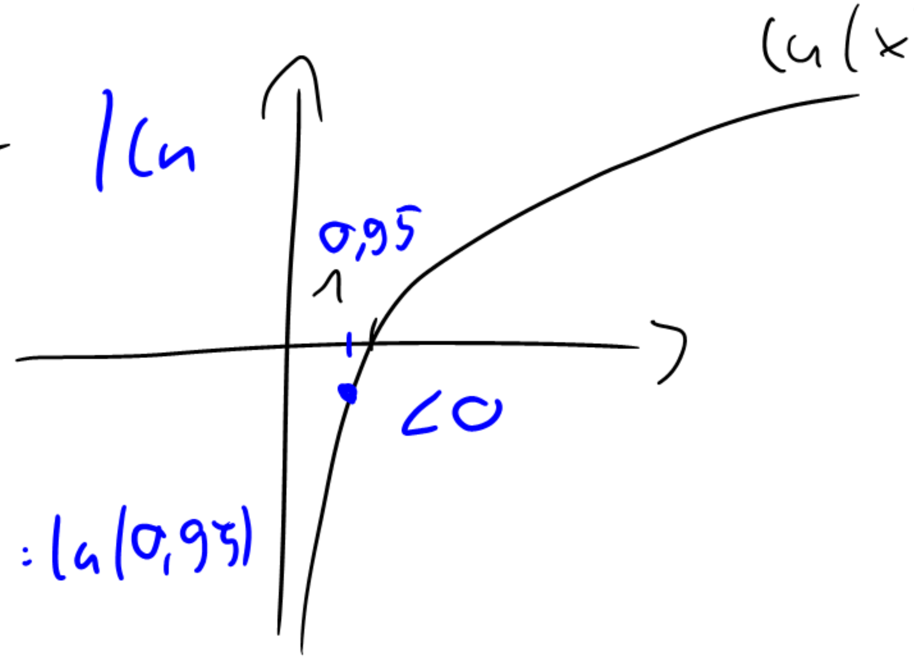
$x < -\sqrt{3}$ (2)

$D = [-2; -\sqrt{3}[$
$\cup\,]\sqrt{3}; 2]$

- $\cdot / :$ negative Zahl
- $-\sqrt{}$ neg. Wurzel
- $\log_{0,95}$ log zu Basis < 1

$$0{,}95^n \le 0{,}01 \quad | \log_{0,95} \quad | \ln$$

$$n \ge \log_{0,95} 0{,}01$$

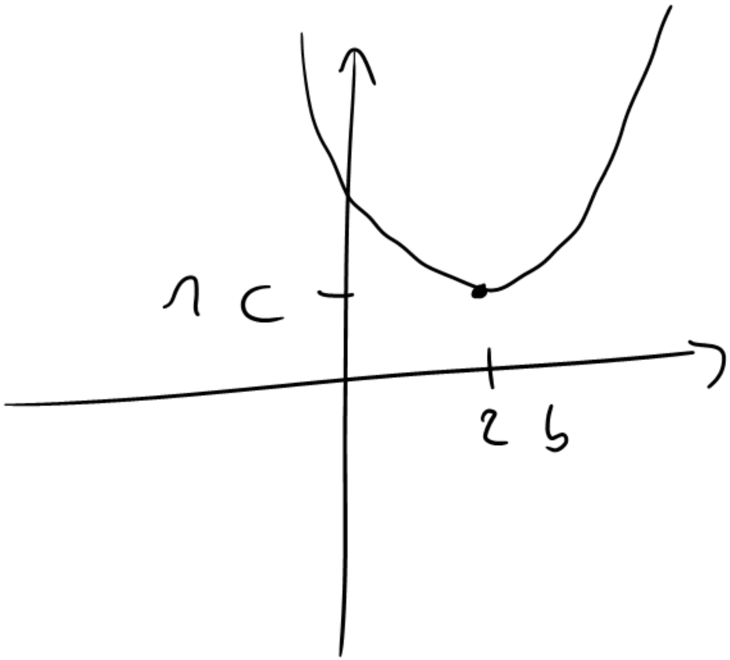


$$\ln(0{,}95^n) \le \ln(0{,}01)$$

$$n \cdot \ln(0{,}95) \le \ln(0{,}01) \quad | : \ln(0{,}95)$$

$$n \ge \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)}$$

$f(x) = a(x-b)^2 + c$



Kurvendiskussion: Rechenblock 1

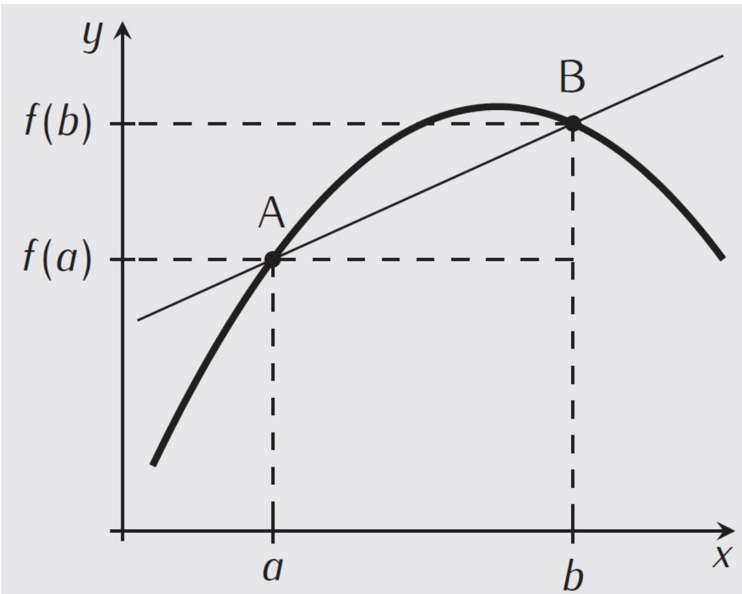
Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	17
schwer	18

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Grundlagen und Funktionsklassen
- Altabitur 2020 Analysis

Änderungsraten

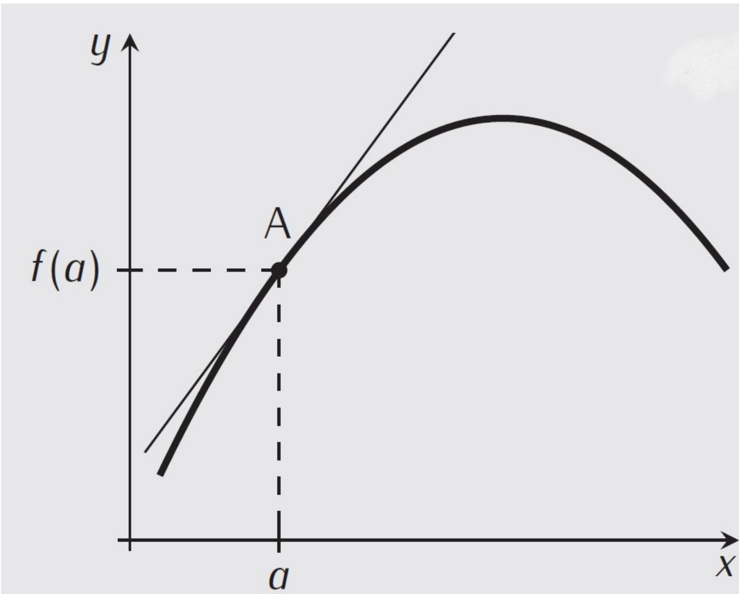
Durchschnittliche oder Mittlere Änderungsrate



Sekante durch zwei Punkte

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Momentane oder aktuelle Änderungsrate



Tangente an einem Punkt

$$m = f'(x)$$

Ableitungen

Funktion	$f(x) = x^n$	e^x	$\ln x$	$\cancel{sin x}$	$\cancel{cos x}$
Ableitung	$f'(x) = nx^{n-1}$	e^x	$\frac{1}{x}$	$\cancel{cos x}$	$\cancel{-sin x}$

Rechenregeln

Kettenregel: $u(v(x)) \implies u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel: $u(x) \cdot v(x) = u(x) \cdot v'(x) + u'(x) \cdot v(x)$

Wurzeln <-> Potenzen (Nur bei Ableitungen und Integration sinnvoll!)

- $\sqrt{x} = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}}$
- $\frac{1}{x} = x^{-1}$
- $\frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$

Rezept

1. Brüche und Wurzeln in Exponenten umwandeln
2. Klammern ausmultiplizieren (Summenregel ist einfacher als Produktregel)
3. Ableiten

Beispiele

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$g(x) = \mathrm{e}^{(x^2+4)}$$

$$g'(x) = e^{x^2+4}(2x)$$

$$h(x) = \sin(e^x + \frac{1}{x})$$

$$i(x) = \cos x \cdot \sin x$$

$$j(x) = -\cancel{\sin x}\, e^x (x^3 + \ln x)$$

$$j'(x) = -e^x \cdot (3x^2 + \frac{1}{x}) + -e^x (x^3 + \ln x) =$$

$$= -e^x (3x^2 + \frac{1}{x} + x^3 + \ln x)$$

$$k(x) = \frac{3}{5\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{5} x^{-\frac{1}{3}}$$

$$l(x) = \frac{x^2+x}{ln x} = (x^2+x) \cdot (\ln x)^{-1}$$

$$k'(x) = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= -\frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{3}}$$

$$l'(x) = (2x+1)(\ln x)^{-1} + (x^2+x) \cdot \left(-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

Kurvendiskussion: Rechenblock 2

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	19, 22, 23, 24
mittel	25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
schwer	20, 21, 33, 34

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Ableitungen
- Aufgabenblatt Analysis Grundlagen und Funktionsklassen
- Altabitur 2020 Analysis

Tangentengleichungen $y = mx + c$

- Tangentengleichung an einem Punkt
- Tangentengleichung mit gegebener Steigung

Tangentengleichung an einem Punkt: Rezept mit Beispiel

$$f(x) = -3x^3 - x, \quad x = -1$$

1. Punkt ausrechnen
   $f(-1) = -3(-1)^3 - (-1) = 4 \implies P(-1|4)$
2. Ableiten und Stelle einsetzen
   $f'(x) = -9x^2 - 1$
   $m = f'(-1) = -9(-1)^2 - 1 = -10$
3. In Geradengleichung einsetzen
   $y = mx + c$
   $4 = (-10)(-1) + c \qquad | - 10$
   $c = -6$
4. Geradengleichung angeben $y = -10x - 6$

Tangentengleichung an einem Punkt: Formel

Mit $f(x), \quad P(a, f(a))$
$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$

$f(x) = -3x^2 - x, \quad x = -1$

1. Punkt ausrechnen
   $f(-1) = -3(-1)^3 - (-1) = 4 \implies P(-1|4)$
2. Ableiten und Stelle einsetzen
   $f'(x) = -9x^2 - 1$
   $m = f'(-1) = -9(-1)^2 - 1 = -10$
3. In Formel einsetzen und vereinfachen
   $y = -10 \cdot (x - (-1)) + 4 = -10x - 10 + 4 = -10x - 6$

Exakt gleiche Lösung, leicht anderer Weg!

Tangentengleichung mit gegebener Steigung

Rezept mit Beispiel

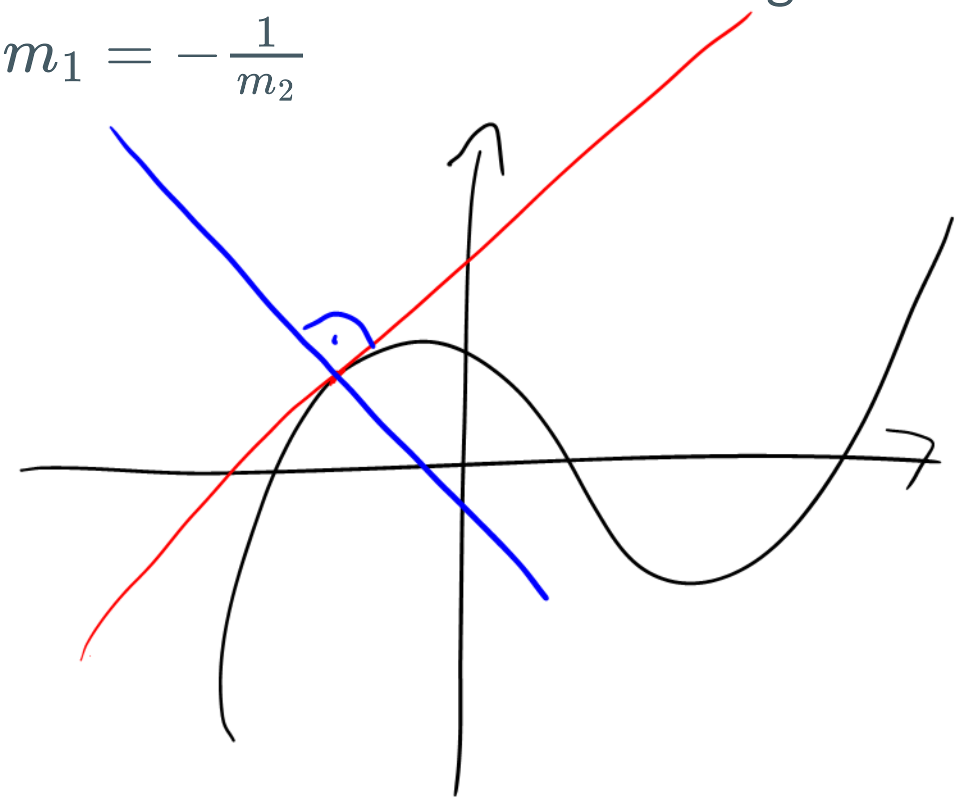
$$f(x) = x^2 + 2x + 1, \quad m = 6$$

1. Ableiten und mit Steigung gleichsetzen
   $f'(x) = 2x + 2 = 6 \qquad | - 2$
   $2x = 4 \qquad | : 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$
2. Punkt ausrechnen
   $f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 \Longrightarrow P(2|9)$
3. In Geradengleichung einsetzen
   $y = mx + c$
   $9 = 6 \cdot 2 + c \qquad | - 12$
   $c = -3$
4. Geradengleichung angeben $y = 6x - 3$

Normale

Zwei Funktionen f_1 mit der Steigung m_1 an der Stelle x_0 und f_2 mit der Steigung m_2 an der Stelle x_0 sind im Punkt x_0 senkrecht zu einander wenn gilt:

$m_1 = -\frac{1}{m_2}$



Rezept für Normalen mit Beispiel

$f(x) = x^3 - 2, \quad P(-1|-3)$: Bestimme Normale im Punkt P

1. Ableiten
   $f'(x) = 3x^2$
2. Gewünschten Punkt in Ableitung einsetzen
   $m_t = f'(-1) = 3(-1)^2 = 3$
3. Steigung der Normalen bestimmen
   $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{3}$
4. Alles in die Geradengeleichung einsetzen und c ausrechnen
   $y = mx + c \implies -3 = -\frac{1}{3} \cdot (-1) + c \implies c = -\frac{10}{3}$
5. Normalengleichung angeben
   $y = -\frac{1}{3}x - \frac{10}{3}$

Kurvendiskussion: Rechenblock 3

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	35, 41
mittel	36, 39, 40
schwer	37, 38, 42

36: $h(x)$ ist $g(x)$

Schreibfehler!

Für Schnelle und Unterforderte:

- Extrablatt zu den Normalen mit Aufgaben 57, 58, 59
- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Ableitungen
- Aufgabenblatt Analysis Kurvendiskussion
- Altabitur 2020 Analysis

Extrempunkte und Monotonie

Rezept mit Beispiel

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

1. Ableiten und gleich null setzen $f'(x) = 0$
   $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$
   Mit Mitternachtsformel: $x_1 = 2, \quad x_2 = 6$
2. Vorzeichentabelle
   Oben die *x-Stellen*, unten die zugehörigen *Funktionswerte*
   Interessant sind die *Extremstellen*, diese in die Tabelle eintragen und dazwischen Platz lassen.

x		**2**		**6**	
$f'(x)$		0		0	

Jetzt beliebige *x-Stellen* zwischen den *Extremstellen* festlegen um das verhalten der Funktion zwischen ihnen zu untersuchen

x	**0**	**2**	**4**	**6**	**8**
$f'(x)$		0		0	

Nun die *Ableitung* (Steigung) an den Zwischenpunkten berechen, der Wert ist dabei nicht entscheidend, nur das Vorzeichen (steigt oder fällt)

$$f'(0) = 3 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 36 = 36 \implies +$$
$$f'(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 36 = -12 \implies -$$
$$f'(8) = 3 \cdot 8^2 - 24 \cdot 8 + 36 = 36 \implies +$$

In die Vorzeichentabelle eintragen

x	0	2	4	6	8
$f'(x)$	+	0	-	0	+

	0	2	4
	+	0	-

3. Funktionswerte ausrechnen!

$f(2) = 32 \implies HP(2|32)$

$f(6) = 0 \implies TP(6|0)$

4. Evtl. Monotonie angeben

$f(x)$ monoton steigend für $I =]-\infty, 2]$

$f(x)$ monoton fallend für $I = [2, 6]$

$f(x)$ monoton steigend für $I = [6, \infty[$

Methode mit der zweiten Ableitung

Extremstellen mit Mitternachtsformel: $x_1 = 2, \quad x_2 = 6$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36 = 0$$

$$f''(x) = 6x - 24$$
$$f''(2) = 6 \cdot 2 - 24 = -12 < 0 \implies HP$$
$$f''(6) = 6 \cdot 6 - 24 = 12 > 0 \implies TP$$

Warum ist die Methode mit der zweiten Ableiten doof?

- Hier muss nochmal abgeleitet werden, beim Ableiten kann mehr schief gehen als beim einsetzen in den Taschenrechner!
- Außerdem funktioniert die Methode nicht immer!

Warum ist die Methode mit der zweiten Ableiten doof?

$$f(x) = x^4$$

$f'(x) = 4x^3 = 0$

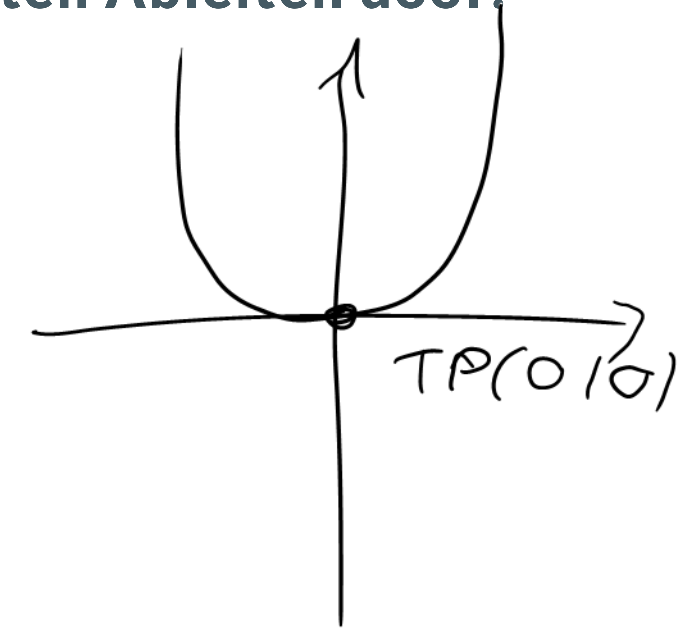
$x_1 = 0$

$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 12 \cdot 0^2 = 0$

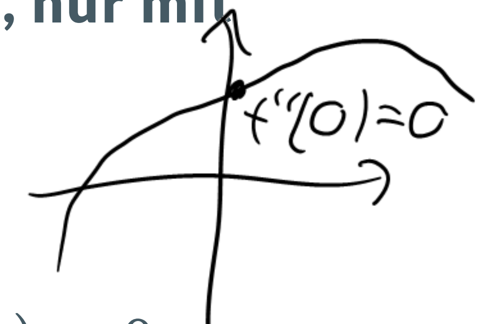
$f'''(x) = 24x$

$f''''(x) = 24 > 0$



Wendestellen und Krümmungsverhalten

Rezept mit Beispiel (genau wie Extrempunkte, nur mit zweiter Ableitung)



$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

1. Zweimal ableiten und gleich null setzen $f''(x) = 0$
   $f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$
   $f''(x) = 6x - 24 = 0 \implies x = 4$
2. Vorzeichentabelle (diesmal mit zweiter Ableitung)
   Hierbei geht es v.a darum, dass ein Vorzeichenwechsel statt findet und es tatsächlich eine Wendestelle ist.

x	3	4	5
$f''(x)$	-	0	+

x	3	4	5
$f''(x)$	-	0	+

3. Funktionswerte ausrechnen!
   $f(4) = 16 \implies WP(4|16)$

4. Evtl. Krümmung angeben
   $+ \implies -$: Wechsel von Links- auf Rechtskrümmung
   $- \implies +$: Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung

Kurvendiskussion: Rechenblock 4

$f''(x) = 2(x-2)^2$

$x_1 = 2$

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	43, 50, 52
mittel	47, 48, 49, 53
schwer	44, 46, 51

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Ableitungen
- Aufgabenblatt Analysis Kurvendiskussion
- Altabitur 2020 Analysis

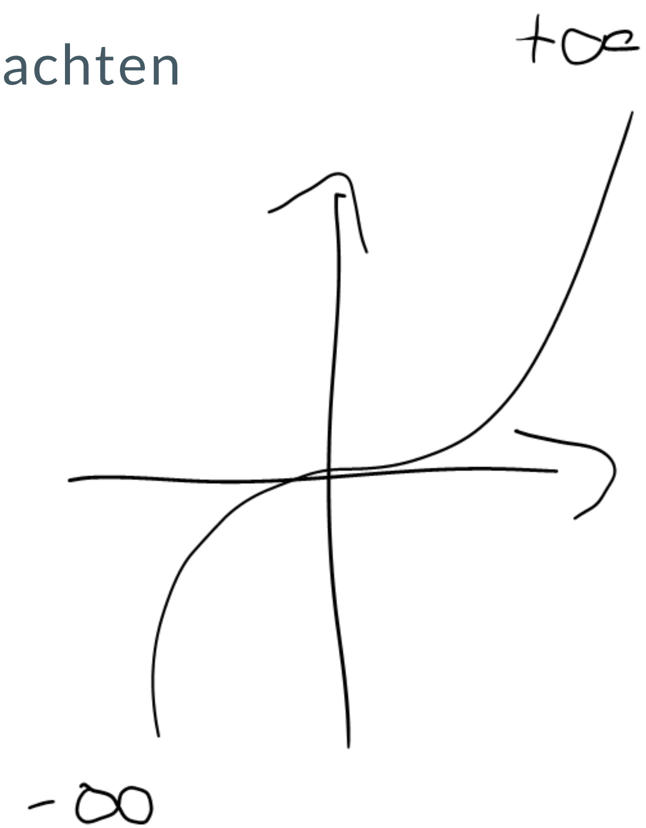
$$e^{3\ln(2)} = e^{\ln(2)\cdot 3} = \left(e^{\ln(2)}\right)^3 = 2^3 = 8$$

Verhalten im Unendlichen

Polynome

- Setze für *x* große positive/negative Zahlen ein
- Alternativ: Höchsten Potenz betrachten
  $f(x) = x^5 + x^4 - x + 7$

$$\lim_{x \to +\infty} = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} = -\infty$$



Gemischte Funktionen

Summanden und Faktoren einzeln betrachten und zusammen rechnen. Bei Unklarheit Dominanzanalyse!
$\ln < Wurzel < x^n < e^x$ (ln verliert, e gewinnt)

$$f(x) = \overset{\to 0}{\mathrm{e}^{-x}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \overset{\to 1}{1}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 + 0 + 1 = 1$$

$$g(x) = \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} \overset{\to +\infty}{\mathrm{e}^{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0 \cdot +\infty = +\infty$$

$$h(x) = \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \overset{\to +\infty}{\ln x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = 0 + \infty = +\infty$$

$$h_2(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(x)$$

$$\lim_{x \to +\infty} h_2(x) = 0$$

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2})$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln\left(\sqrt{(+\infty)^2}\right) = \ln\left(\sqrt{+\infty}\right) =$$

$$= \ln(+\infty) = +\infty$$

Brüche (Gebrochenrationale Funktionen)

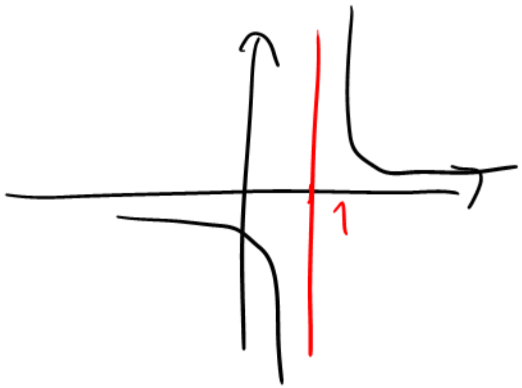
- $f(x) = \frac{Zähler}{Nenner}$, mit Zähler und Nenner Polynom
- Graph heißt Hyperbel
- Brüche können waagrechte, senkrechte und schräge Asymptoten haben

Senkrechte Asymptoten

Definitionsmenge: $Nenner \neq 0$

- Gebrochenrationale Funktionen haben an ihren Definitionslücken Polstellen (senkrechte Asymptoten)
- Es gibt Polstellen mit und ohne Vorzeichenwechsel (so wie Nullstellen)

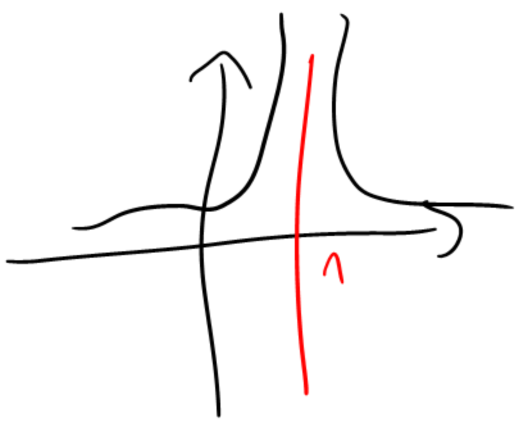
- Polstelle mit Vorzeichenwechsel $f(x) = \frac{1}{x-1}$
  ungerader Exponent



$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$$

- Polstelle ohne Vorzeichenwechsel $g(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$
  gerader Exponent

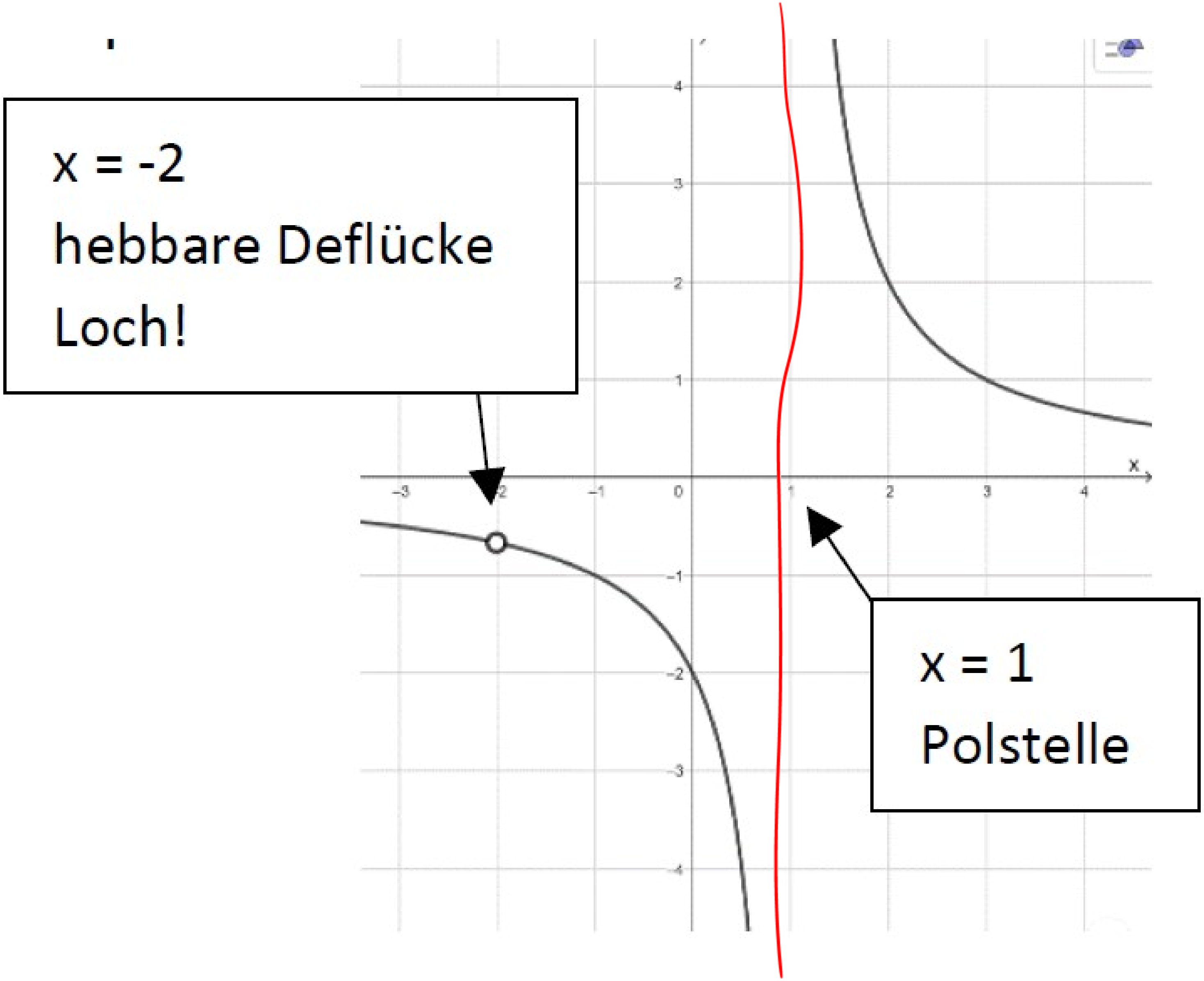


Hebbare Polstellen

- Ist eine Nullstelle des Nenners gleichzeitig auch Nullstelle des Zählers, so ist diese Definitionslücke keine Polstelle, sondern eine hebbare Definitionslücke!
- Es gibt nur ein "Loch" im Graphen

$$f(x) = \frac{2x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{2\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x-1)}$$

- Nullstellen des Zählers: $x = -2$
- Nullstellen des Nenners: $x_1 = -2, x_2 = 1$
  $\implies \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$
  Aber: $x = 1$ ist eine einfache Polstelle und $x = -2$ ist keine Polstelle, sondern eine hebbare Definitionslücke, da sie auch Nullstelle des Zählers ist!


x = -2
hebbare Deflücke
Loch!
x = 1
Polstelle
x

Rezept senkrechte Asymptoten:

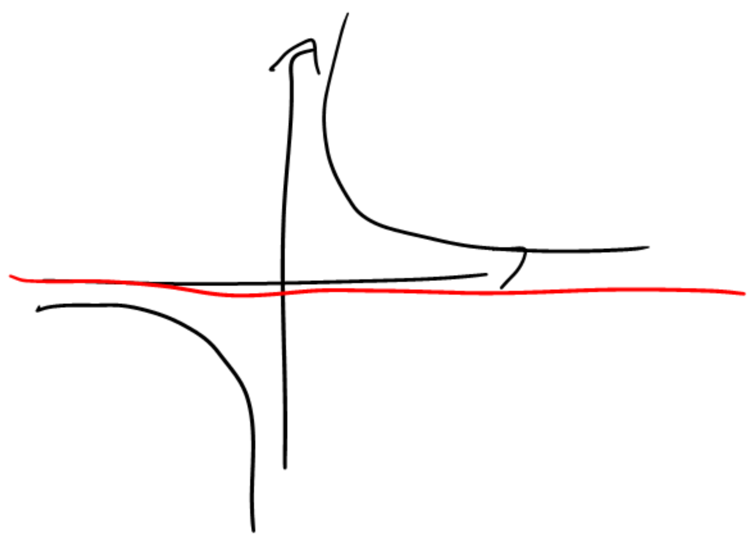
1. Nullstellen von Zähler und Nenner ausrechnen
2. Alle Nullstellen des Nenners, die nicht auch Nullstelle des Zählers sind, sind Polstelle und durch sie verläuft somit eine senkrechte Asymptote
3. Grenzwertbetrachtung durchführen

Waagrechte/Schräge Asymptoten

Zählergrad (ZG) ist der höchste Exponent des Zählers, Nennergrad (NG) der höchste Exponent des Nenners (natürlich in vorständig ausmultiplizierter Form!)

- Fall 1: ZG < NG
  Die waagrechte Asymptote liegt bei $y = 0$ (x-Achse)
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = 0$

$f(x) = \frac{1}{x}$



- Fall 2: ZG = NG
  Mit dem Vorfaktor der höchsten Potenz des Zählers *a* und dem Vorfaktor der höchsten Potenz des Nenners *b*:
  Die waagrechte Asymptote liegt bei $y = \frac{a}{b}$
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \frac{a}{b}$

$$f(x) = \frac{2x-1}{-x+1}$$

waag. Asy.

$$\lim_{x\to\pm\infty} = \frac{2}{-1} = -2 \implies y = -2$$

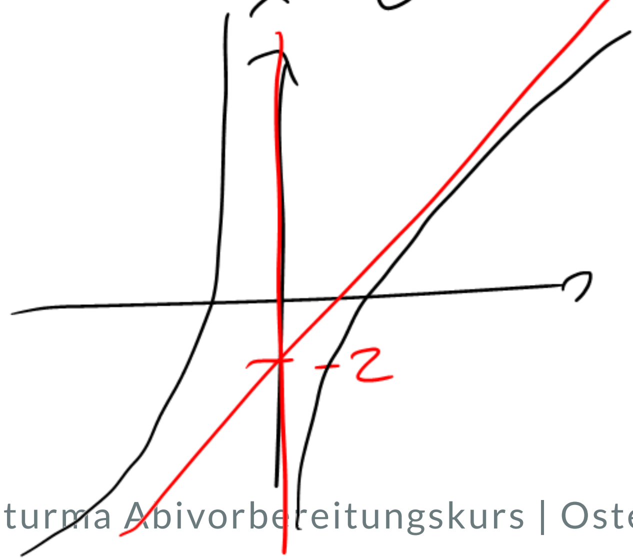
- Fall 3: ZG eins höher als NG
  Es gibt eine schräge Asymptote. ~~Polynomdivision.~~

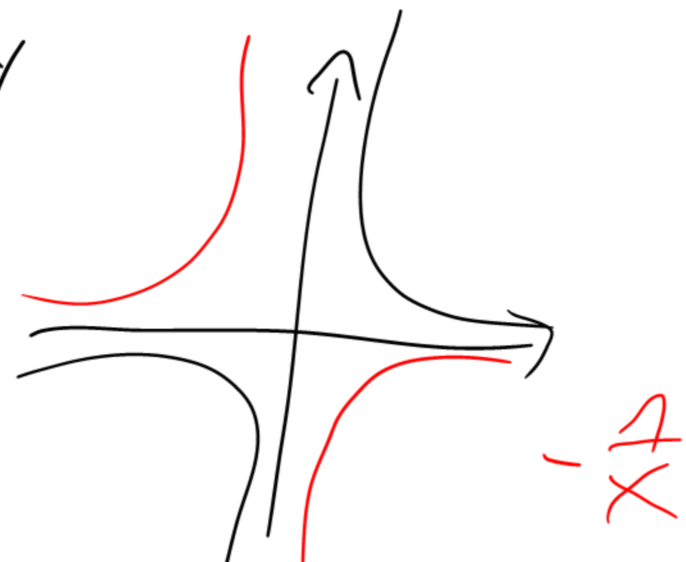
$\cancel{f(x) = \frac{(3+x)^2}{x-1}}$

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x} = x - 2 - \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}$$

$y = x - 2$ schräge Asy.

$x = 0$ senk. Asy





- Fall 4: ZG mehr als eins größer als NG
  Keine waagrechte/~~senkrechte~~ /schräge Asymptote

$$\frac{x^3+1}{x-1}$$

Kurvendiskussion: Rechenblock 5

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	55, 56
schwer	

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgaben im Extradokument zu Gebrochenrationalen Funktionen
- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Ableitungen
- Aufgabenblatt Analysis Kurvendiskussion
- Altabitur 2020 Analysis

Symmetrie

- Achsensymmetrisch, wenn $f(-x) = f(x)$
- Punktsymmetrisch (zum Ursprung), wenn $f(-x) = -f(x)$

Rezept

1. $(-x)$ in die Funktion einsetzten
2. Versuche. ob durch Umformung/Vereinfachung entweder wieder $f(x)$ oder $-f(x)$ erreicht werden kann.
3. Wenn keines davon oder eine Mischvor vorliegt, gibt es keine Symmetrie

Polynome

- Wenn alle Exponenten in einem Polynome gerade sind (z.B $f(x) = x^6 + 3x^4 - 2x^2 + 4$), liegt Achsensymmetrie vor
- Wenn alle Exponenten in einem Polynome ungerade sind (z.B $f(x) = x^7 + 3x^5 - 2x$), liegt Punktsymmetrie vor. Zusätzlich darf hier keine Verschiebung an der y-Achse vorliegen, sonst geht die Funktion schließlich nicht mehr durch den Ursprung

Beispiel

$f(x) = x^3 + 12x^2 + 36x$

0. Mit dem Satz für Polynome folgt sofort keine Symmetrie (Mischform)

1. und 2. $(-x)$ einsetzen

$$f(-x) = (-x)^3 + 12(-x)^2 + 36(-x) =$$
$$= -x^3 + 12x^2 - 36x$$

3. Ist weder $f(x)$ oder $-f(x)$

Funktionen zeichnen

- Immer wichtig grob im Kopf zu haben, wie die Basisfunktionen aussehen.
- Soviele verfügbare Punkte suchen, wie möglich. Diese kommen entweder aus einer Kurvendiskussion oder aus gegebenen Ableitungen/Stammfunktionen

Rezept: Ableitungen/Stammfunktionen zeichnen

1. Markante Punkte in der gegebenen Funktion finden (Nullstellen, Extremstellen, Sattelpunkte, Wendestelle)
2. Mit dem NEW Schema übersetzen
3. Punkte einzeichnen und Graph durchziehen

NEW Schema

N = Nullstelle, E = Extremstelle, W = Wendestelle

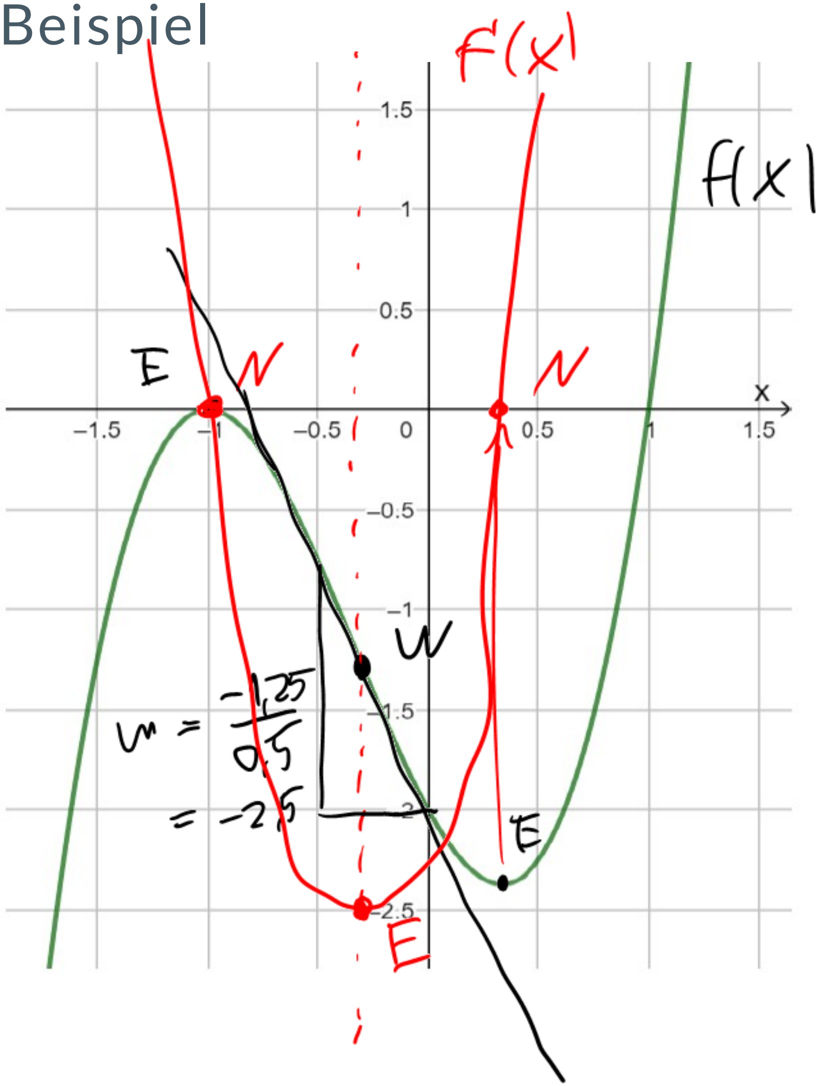
Funktion						
$F(x)$	N	E	W			
$f(x)$		N	E	W		
$f'(x)$			N	E	W	
$f''(x)$				N	E	W

Beispiel: Falls f an der Stelle $x = 0$ eine Wendestelle (W) besitzt, so besitzt $f''(x)$ an dieser Stelle eine Nullstelle (N)!

Zusatzinformationen beim Ableiten

- Extrempunkte $\implies$ Nullstellen mit VZW
- Sattelpunkte $\implies$ Nullstellen ohne VZW
- In allen Abschnitten, in denen der Graph von f steigt, verläuft der Graph von $f'(x)$ oberhalb der x-Achse.
- In allen Abschnitten, in denen der Graph von f fällt, verläuft der Graph von $f'(x)$ unterhalb der x-Achse.

Beispiel



Kurvendiskussion: Rechenblock 6

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	54, 57, 59
mittel	58, 60, 61
schwer	[redacted]

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Kurvendiskussion
- Altabitur 2020 Analysis