Analysis Teil 2

- Integration
- Flächeninhalte
- Integralfunktion
- Uneigentliche Integrale
- Umkehrfunktionen

Integration

- Eine Funktion F ist eine Stammfunktion einer Funktion f, wenn gilt: $F'(x) = f(x)$
- Eine Stammfunktion ist bis auf eine Konstante C eindeutig (diese fällt beim Ableiten weg)
- Wenn Nachgewiesen werden soll, dass eine Funktion F Stammfunktion einer anderen Funktion f ist, ist es immer einfache F abzuleiten als f zu integrieren
- Unbestimmtes Integral (Gegenstück von Ableitung): $\int f(x)dx = F(x) + C$
- Um zu testen, ob ein Integral richtig gerechnet wurde, zum Test Ableiten
- Vor dem Integrieren ausmultiplizieren! Produkte können nicht integriert werden

Integrationsregeln

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	e^x	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{x} = x^{-1}$
$F(x)$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	e^x	$-\cos x$	$\sin x$	$ln\|x\|$

$$f(x) = 10x^4 + 3x^2$$

$$\frac{10}{5}x^5 + \frac{3}{3}x^3 = 2x^5 + x^3$$

$$g(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cancel{- 5\sin x} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}}$$

Lineare Substitution

$$f(x) = g(mx + c) \quad \Longrightarrow \quad F(x) = \frac{1}{m} G(mx + c)$$

$$f(x) = \mathrm{e}^{-3x+2}$$

$$F(x) = \frac{1}{-3} e^{-3x+2}$$

$$g(x) = \sqrt{4x - 3} = (4x-3)^{\frac{1}{2}}$$

$$G(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}} (4x-3)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} (4x-3)^{\frac{3}{2}}$$

Logarithmische Substitution

$$f(x) = a \cdot \frac{g'(x)}{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad F(x) = a \cdot \ln(g(x))$$

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x^2-3x+1}$$

$\to 4x-3$

$F(x) = \ln(2x^2-3x+1)$

$$g(x) = \frac{4e^{2x}+6}{e^{2x}+3x-1}$$

$\to 2e^{2x}+3$

$$= 2\,\frac{2e^{2x}+3}{e^{2x}+3x-1}$$

$G(x) = 2 \cdot \ln(e^{2x}+3x-1)$

Integration: Rechenblock 1

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	64, 66
mittel	63, 67, 68
schwer	65

- Extrablatt Integralrechnung Website

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.

Aufgabe 68 Abi★

Finde jeweils eine Stammfunktion von $f(x)$:

(a) $f(x) = \dfrac{12x^3 - 51x^2 + 5}{3x^4 - 17x^3 + 5x - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 4e^{2x}}{4\sin(x) + 8e^{2x}}$

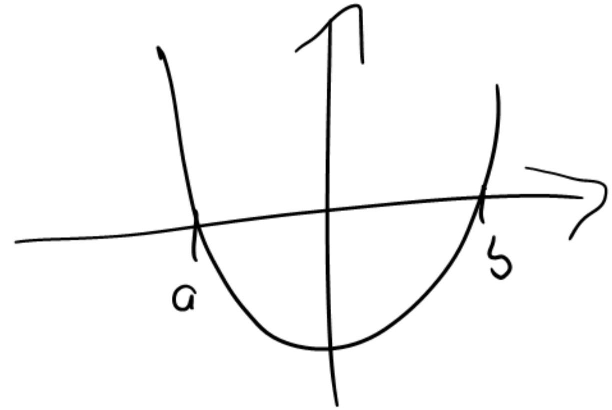
(d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Flächeninhalte

Flächeninhalt unter einem Graphen

- Bestimmtes Integral $\int_a^b f(x)dx$ drückt den Flächeninhalt zwischen Graphen und x-Achse aus. Positive Flächen sind über der x-Achse, negative darunter.
- $A = \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$
- Bei Flächeninhalt unter Graphen von Nullstelle zu Nullstelle integrieren

Rezept mit Beispiel

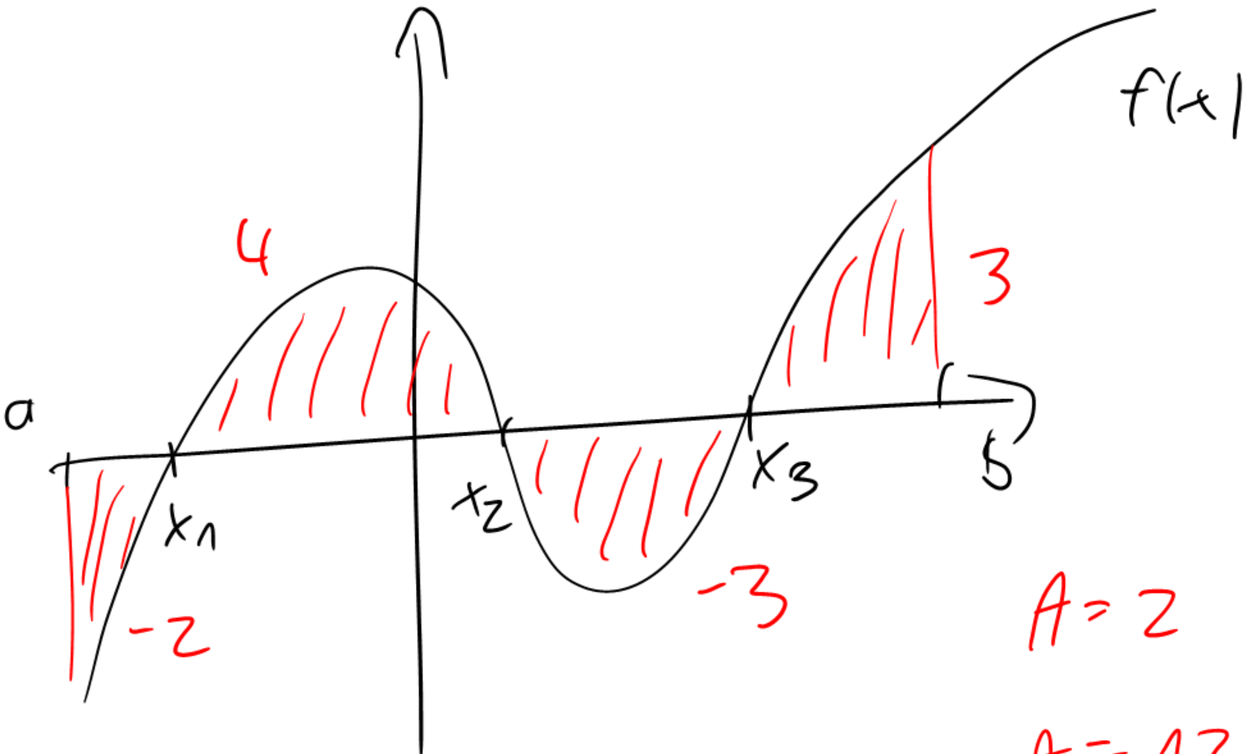


$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$$

1. Nullstellen berechnen
   $$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 = 0 \implies x_1 = -2, x_2 = 2$$
2. Einzeln von Nullstelle zu Nullstelle integrieren

$$A = \int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2\right) dx = \left[\frac{1}{6}x^3 - 2x\right]_{-2}^{2} =$$

$$\left(\frac{1}{6}(2)^3 - 2\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{6}(-2)^3 - 2(-2)\right) =$$

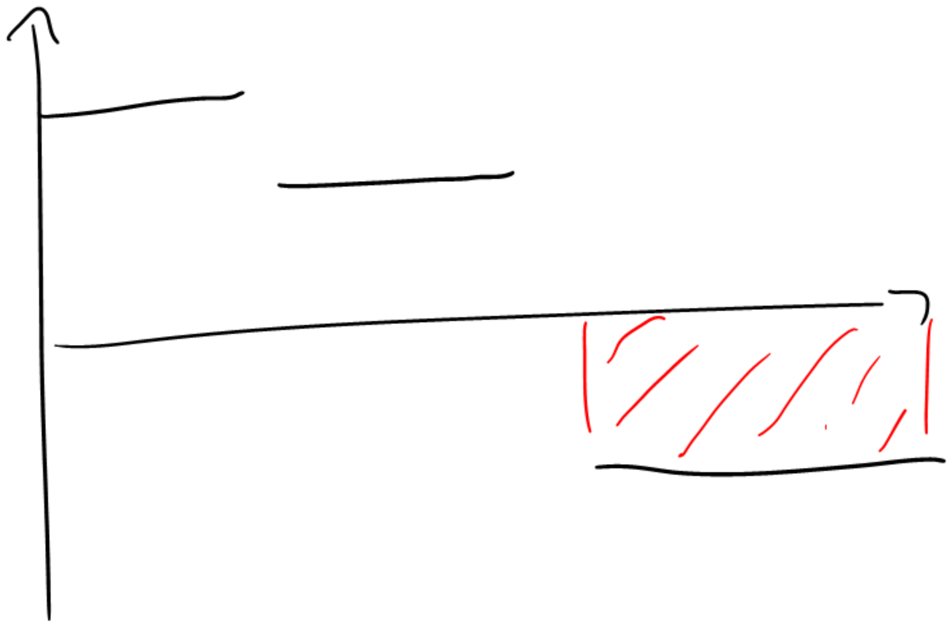


$A = 2$

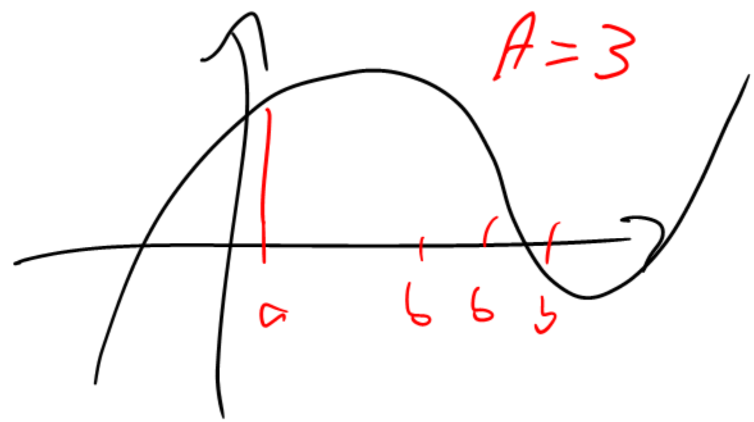
$A = 12$

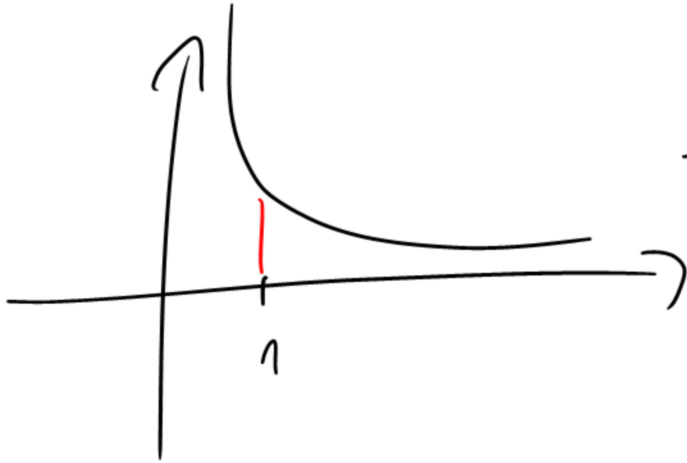
$$A = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x) \, dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \, dx \right| + \ldots$$



$$A = \int_0^x f(x)\,dx$$





$\frac{1}{x}$

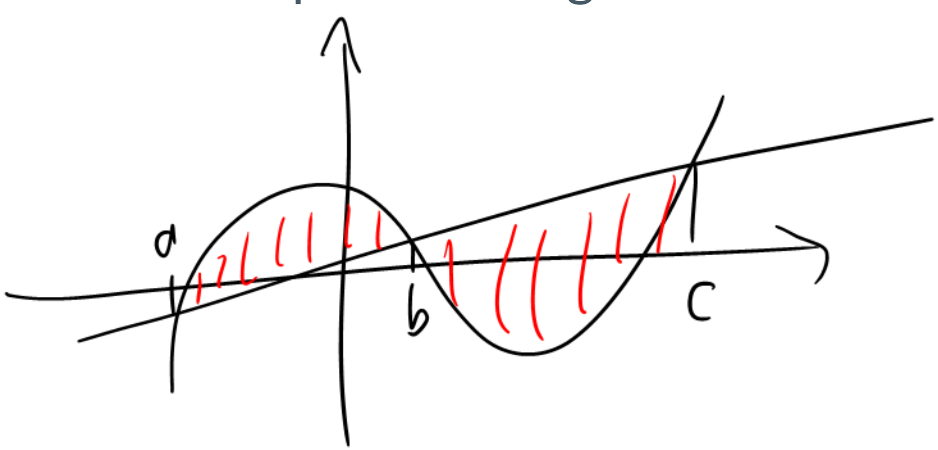
$A_{[1; +\infty[}$

$$\lim_{a \to +\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a \to +\infty} \left[\ln|x| \right]_1^a =$$

$$= \lim_{a \to +\infty} \left(\ln|a| - \ln|1| \right) = \lim_{a \to +\infty} \ln|a| = +\infty$$

Flächeninhalt zwischen zwei Graphen

- $A = \left| \int_a^b (f(x) - g(x))dx \right|$
- Erst die beiden Funktionen verrechnen, dann integrieren
- Welche Funktion von welcher abgezogen wird, ist egal solange am Ende der Betrag genommen wird
- Bei Flächeninhalt zwischen Graphen von Schnittpunkt zu Schnittpunkt integrieren



$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| + \left| \int_b^c f(x)\,dx \right|$$

Rezept mit Beispiel

$$f(x) = -x^2 + 4x, \quad g(x) = x^2 - 2x$$

1. Schnittpunkte durch gleichsetzen finden
   $-x^2 + 4x = x^2 - 2x \implies x_1 = 0, x_2 = 3$
2. Einzeln von Schnittpunkt zu Schnittpunkt integrieren

$\int f(x)\,dx = F(x) + c$

Rotationskörper

Lässt man eine Funktion $f(x)$ im Bereich $[a;b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein Rotationskörper. Für das Volumen V des Rotationskörpers gilt:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Rezept mit Beispiel

$f(x) = x^2 + 1$ um die x-Achse im Intervall $[-1;1]$

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2+1)^2 dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) dx =$$

$$\pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1\right)\right) = \frac{56}{15}\pi$$

Integration: Rechenblock 2

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	70
mittel	71a, 74, 75
schwer	72

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- ~~Aufgaben vom Extrablatt zu Rotationskörpern~~
- Aufgabenblatt Analysis Integralrechnung
- Altabitur 2020 Analysis

Integralfunktion

$$f(x) = \int_1^x g(t)dt$$

- Ein Integral mit variabler oberer oder unterer Grenze heißt Integralfunktion.
- Das Integral berechnet hier keinen Flächeninhalt mit gegebenen Grenzen, sondern beantwortet die Frage: "Wie weit muss ich integrieren, um einen bestimmten Flächeninhalt einzuschließen?"

Rezept mit Beispiel

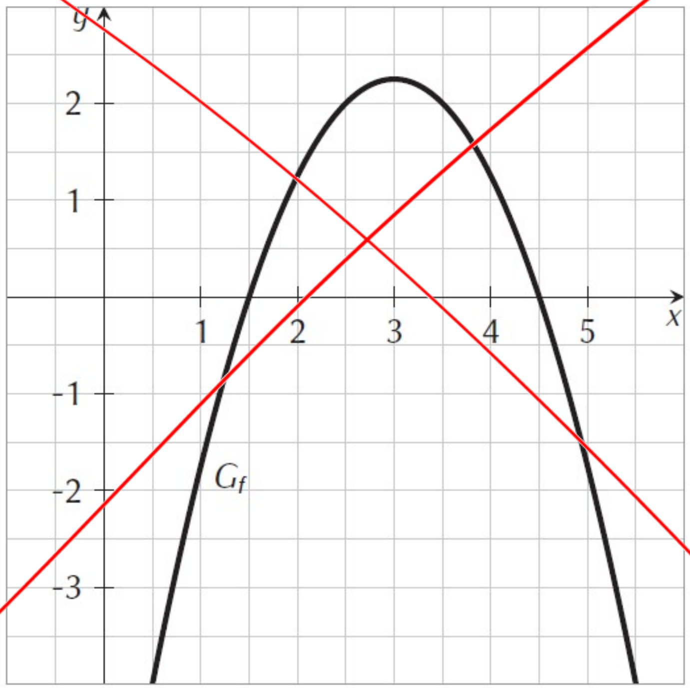
$f(x) = \int_2^x (2t+4)dt, x > 2$, gewünschter Flächeninhalt: 9

Bonus: Es gilt $f(2) = 0$. Warum?

1. Integral ausformulieren
   $f(x) = \int_2^x (2t+4)dt = [t^2 + 4t]_2^x = x^2 + 4x - (2^2 + 4 \cdot 2) =$
   = $x^2 + 4x - 12$
2. Integral mit dem gewünschten Flächeninhalt gleichsetzen
   $x^2 + 4x - 12 = 9 \implies x_1 = -7, x_2 = 3$
   Obere Grenze ist somit $x = 3$

Aufgabe 73 – **originale Abiaufgabe**

Die Abbildung zeigt eine nach unten geöffnete Parabel, die zu einer Funktion f mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ gehört. Der Scheitel der Parabel hat die x-Koordinate 3.



Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Integralfunktion $F : x \mapsto \int_3^x f(t)\,dt$.
Wie viele Nullstellen hat F? Mache deine Antwort ohne Rechnung plausibel.

(Abi 2018)

Uneigentliche Integrale

- Eine Fläche kann ins Unendliche reichen und dennoch endlichen Flächeninhalt besitzen. Das heißt dann uneigentliches Integral.

$f(x) = \mathrm{e}^{-x}$, Bestimme Fläche unter Graphen für $x \geq 0$

1. Integral mit einer variablen Grenze aufstellen
   $A(z) = \int\limits_0^z \mathrm{e}^{-x} dx = [-\mathrm{e}^{-x}]_0^z = -\mathrm{e}^{-z} + 1$
2. Grenzwertbetrachtung
   $A(+\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} A(z) = \lim\limits_{z \to \infty} -\mathrm{e}^{-z} + 1 = \lim\limits_{z \to \infty} -\frac{1}{\mathrm{e}^z} + 1 =$
   $= \lim\limits_{z \to \infty} -0 + 1 = 1$

Integration: Rechenblock 3

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	
schwer	76

- Aufgaben vom Extrablatt zu Integralfunktionen

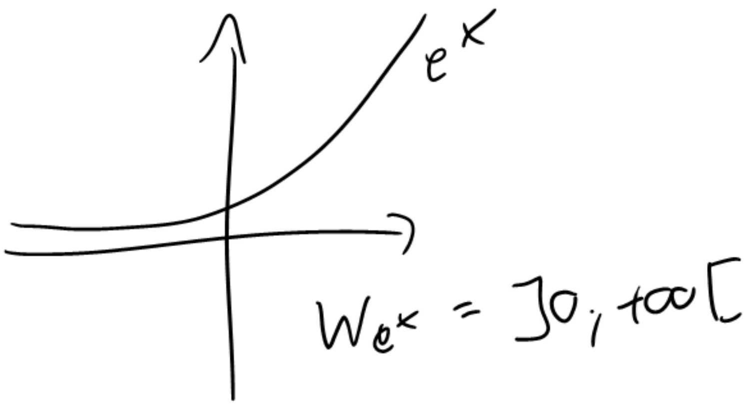
Für Schnelle und Unterforderte:

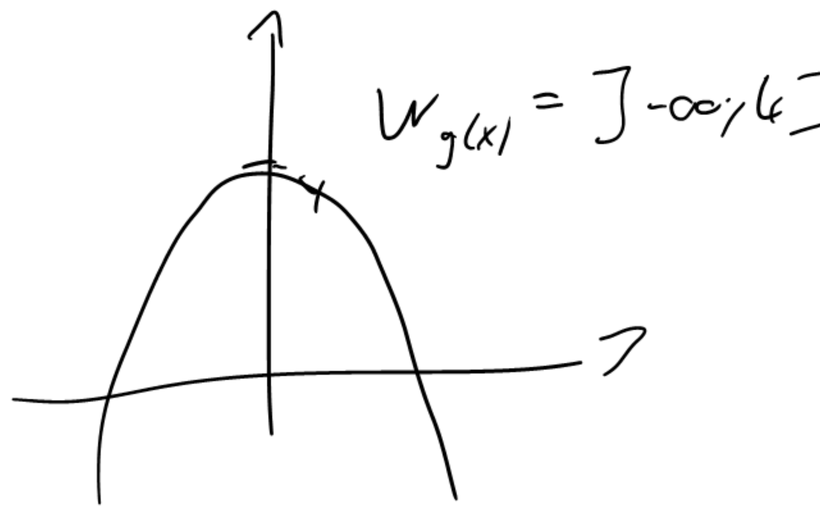
- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Integralrechnung
- Altabitur 2020 Analysis

Umkehrfunktionen

Definitions- und Wertemenge

- Die Wertemenge $\mathcal{W}$ ist die Menge aller Zahlen, die aus einer Funktion rauskommen können
- Die Wertemenge wird begrenzt durch das Verhalten im Unendlichen und Extrempunkte
  $f(x) = \mathrm{e}^x, \quad g(x) = -x^2 + 4$





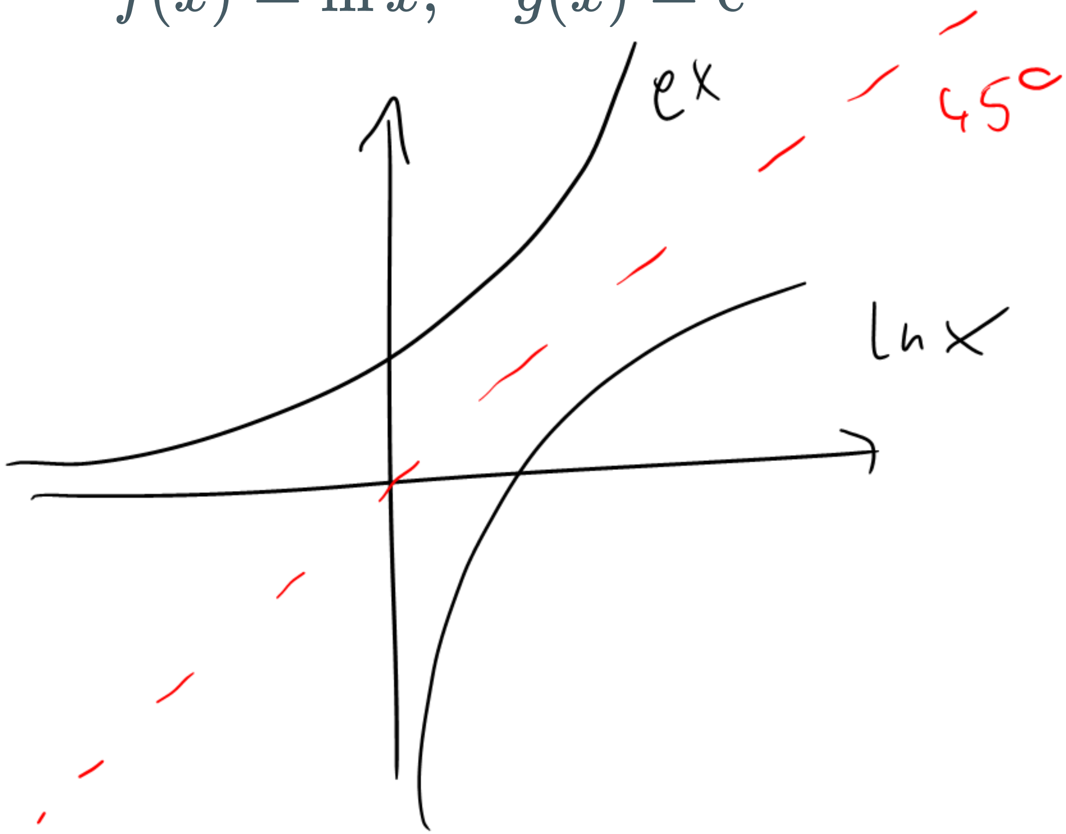
Bestimmmung Wertemenge mit Rezept

$$f(x) = -x^2 + 4$$

1. Verhalten im unendlichen und Extremstellen finden
   $$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$$
   $$f'(x) = -2x \implies HP(0|4)$$
2. Alle dazwischen befindlichen Werte angeben
   $$\mathcal{W}_f =]-\infty, 4]$$

Was ist eine Umkehrfunktion?

- Im Koordinatensystem sind die Graphen an der 45° Grad Linie gespiegelt
  $f(x) = \ln x, \quad g(x) = \mathrm{e}^x$



- $g(x)$ ist Umkehrfunktion vom $f(x)$ wenn $g(f(x)) = x$ und $f(g(x)) = x$ gilt (heben sich auf)
- Für Werte- und Definitionsmengen gilt: $\mathcal{D}_f = \mathcal{W}_g$ und $\mathcal{W}_f = \mathcal{D}_g$, sie werden also getauscht
- Somit kann man die Wertemenge einer Funktion auf durch die Definitionsmenge der Umkehrfunktion bestimmen (ist aber sehr umständlich)
- Funktionen sind nur auf Intervallen umkehrbar, in denen sie entweder nur streng monoton fallend oder nur streng monoton steigend sind! Denn: Jedem y-Wert muss hierbei genau ein x-Wert zugeordnet werden, somit können Funktionen, die für einen y-Wert mehrere x-Werte haben nicht umgekehrt werden!

Rezept mit Beispiel: Umkehren

$$f(x) = 2\sqrt{x-1} + 4 = 2(x-1)^{\frac{1}{2}} + 4$$

1. Monotonie überprüfen
   $f'(x) = (x-1)^{-\frac{1}{2}} = 0 \implies$ Keine Lösung, umkehrbar
2. *x* und *y* vertauschen
   $x = 2\sqrt{y-1} + 4$
3. Nach *y* auflösen
   $x = 2\sqrt{y-1} + 4 \qquad | -4$
   $x - 4 = 2\sqrt{y-1} \qquad | : 2$
   $\frac{x-4}{2} = \sqrt{y-1} \qquad |()^2$
   $(\frac{x-4}{2})^2 = y - 1 \qquad | + 1$
   $y = (\frac{x-4}{2})^2 + 1$

4. y durch $f^{-1}(x)$ ersetzen
   $f^{-1}(x) = (\frac{x-4}{2})^2 + 1$
5. Neuen Definitionsbereich überprüfen
   Ausmultiplizieren: $f^{-1} = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 5$
   Keine Ausnahmen $\implies \mathcal{D} = \mathbb{R}$

Umkehrfunktion: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	86
schwer	

Für Schnelle und Unterforderte:

- Wertemengen von: $f(x) = \mathrm{e}^x + 4, \quad g(x) = 3x^2 - 2$
  $h(x) = \sqrt{x-4} - 1, \quad i(x) = \frac{1}{x}, \quad j(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$
- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Umkehrfunktion
- Altabitur 2020 Analysis

Lösungen der Wertemengen:

$f(x) = \mathrm{e}^x + 4 \implies \mathcal{W} =]4, +\infty[$

$g(x) = 3x^2 - 2 \implies \mathcal{W} = [-2], +\infty[$

$h(x) = \sqrt{x-4} - 1 \implies \mathcal{W} = [-1], +\infty[$

$i(x) = \frac{1}{x} \implies \mathcal{W} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$j(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \implies \mathcal{W} = \mathbb{R}^+$