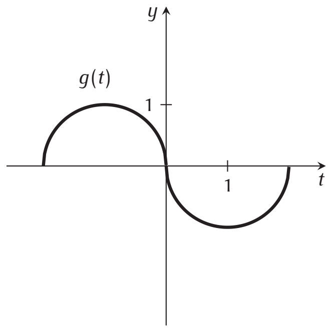
Aufgabe 74 Abi★★

Der Grap der Funktion g besteht aus zwei aneinandergesetzten Halbkreisen (siehe Zeichnung).



Betrachtet wird die Integralfunktion

$$f(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t, \qquad -2 \leq x \leq 2.$$

(a) Bestimme die Werte von $f(-2)$, $f(0)$ und $f(2)$.

(b) Bestimme die Werte von $f(-1)$ und $f(1)$.

(c) Untersuche f auf Wendepunkte.

(c) Der Flächeninhalt zwischen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0; 1]$ beträgt:

$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\, \mathrm{d}x.$$

Lösung 72

Betrachte

$$A(z) = \int_0^z \mathrm{e}^{-3x+2}\, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x+2}\right]_0^z = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3z+2} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^2.$$

Der Flächeninhalt ist endlich und beträgt:

$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3z+2} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^2\right) = 0 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^2 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^2.$$

Lösung 73

Betrachte

$$A(z) = \int_0^z \frac{x+1}{x^2+2x+1}\, \mathrm{d}x = \int_0^z \frac{1}{x+1}\, \mathrm{d}x = \ln(z+1).$$

Hier gilt jedoch

$$A(z) \to +\infty \text{ für } z \to +\infty.$$

Daher ist der eingeschlossene Flächeninhalt nicht endlich groß.

Lösung 74

(a) Da es sich jeweils um Halbkreise mit Radius 1 handelt, betragen die Flächeninhalte zwischen 0 und -2 bzw. zwischen 0 und 2 jeweils genau $\frac{\pi}{2}$. Untersucht werden muss noch das jeweilige Vorzeichen. Für negative t liegt der Graph der Funktion zwar oberhalb der x-Achse, aber die untere Grenze des Integrals ($x = 0$) ist größer als die obere Grenze ($x = -2$), daher gilt:

$$f(-2) = -\frac{\pi}{2}.$$

Für positive t liegt der Graph von $g(t)$ unterhalb der x-Achse, woraus folgt, dass

$$f(2) = -\frac{\pi}{2}$$

gilt. Schließlich ist $x = 0$ die untere Grenze der Integralfunktion, woraus

$$f(0) = 0$$

folgt.

(b) Liegen die Grenzen an den Stellen $x = -1$ bzw. $x = 1$, so betrachtet man Viertelkreise. Die Vorzeichen ermittelt man wie in Teil (a). Es folgt

$$f(-1) = f(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

(c) Die Funktion g hat auf ihrem Definitionsbereich genau zwei Extrempunkte. Diese sind Wendepunkte von f. Somit hat f genau die zwei Wendestellen $x = -1$ und $x = 1$.