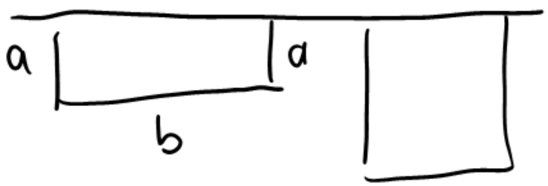
Analysis Teil 3

- Extremwertaufgaben
- Steckbriefaufgaben
- Funktionsscharen
- Diskriminantenaufgaben

Extremwertaufgaben

Kaninchengehege

1



8m

$2 + 2 + 4 \Rightarrow 8$

$3 + 3 + 2 \Rightarrow 6$

$4 + 4 + 0 \Rightarrow 4 \cdot 0 = 0$

2 $A = a \cdot b$

$A(a) = a(8 - 2a)$

$= -2a^2 + 8a$

3 $A'(a) = -4a + 8 = 0$

$\Rightarrow a = 2$

$A''(a) = -4 < 0 \Rightarrow HP$

$2a + b = 8$

$b = 8 - 2a$

$b = 8 - 2 \cdot 2$

$= 4$

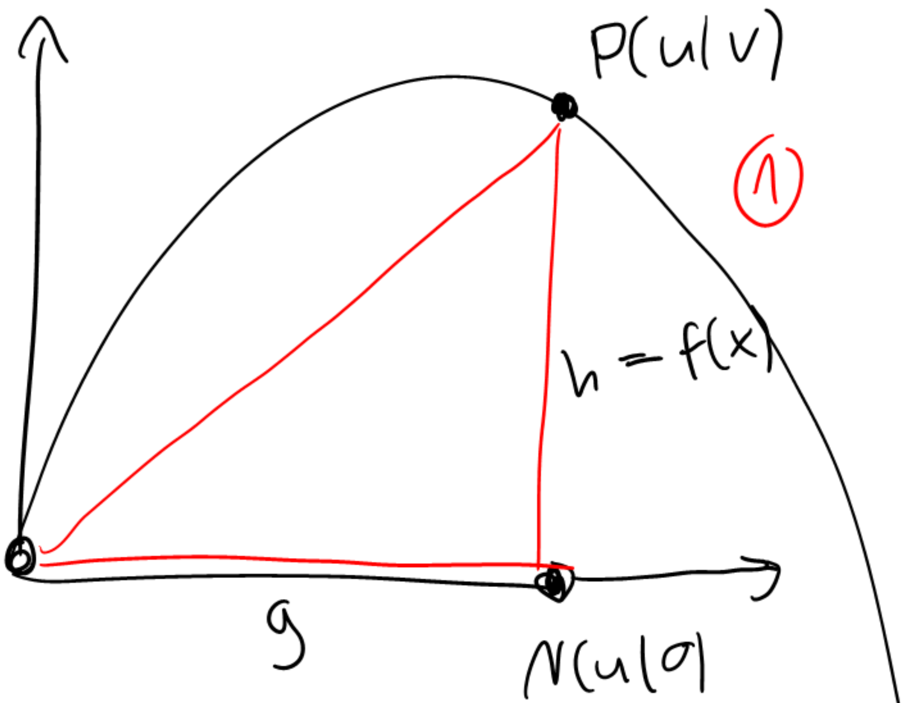
$A = 2 \cdot 4 = 8\,m^2$ 4

Rezept

1. Skizze anfertigen, falls nicht in der Aufgabenstellung vorhanden
2. Funktionsterm für die zu maximierende/minimierende Größe mit *einer* Variable aufstellen
3. Extrema bestimmen
4. Ergebnis im Kontext interpretieren

Weiteres Beispiel

Sei P(u|v) ein Punkt auf dem Graphen von $f(x) = -x^2 + 4x$ mit $0 \leq u \leq 3$. Der Ursprung O, der Punkt P und der Punkt N(u|0) begrenzen ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt A kann dieses Dreieck maximal haben?



2

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$
$$= \frac{1}{2} \cdot u \cdot v$$
$$= \frac{1}{2} \cdot u \cdot (-u^2 + 4u)$$

Extremwertaufgaben: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	
schwer	77, 78

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Altabitur 2020 Analysis
- Altabitur 2021 Analysis
- Aufgabenblatt Umfangreiche Aufgaben

Steckbriefaufgaben

1. Allgemeinen Funktionsterm der gesuchten Funktionsart aufstellen und Ableitungen bilden
2. Informationen aus dem Aufgabentext in Gleichungen übersetzen und damit
   ein Gleichungssystem aufstellen
3. Gleichungssystem lösen

Beispiel

Bestimme den Term einer ganzrationalen Funktion 3. Grades, deren Graph Gf am Ursprung einen Extrempunkt und einen Wendepunkt in $W(1|1)$ hat.

1. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
   $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
   $f''(x) = 6ax + 2b$

2. G_f geht durch Ursprung
   G_f hat Extrempunkt am Ursprung
   G_f hat Wendepunkt in $W(1|1)$
   G_f geht durch Punkt $W(1|1)$

G_f geht durch Ursprung $\implies f(0) = 0$
G_f hat Extrempunkt am Ursprung $\implies f'(0) = 0$
G_f hat Wendepunkt in $W(1|1) \implies f''(1) = 0$
G_f geht durch Punkt $W(1|1) \implies f(1) = 1$

3. $f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 0 \quad \Rightarrow d = 0$

$f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

$f''(1) = 6a + 2b = 0$

$f(1) = a + b = 1$

$\boxed{f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2}$

I, $6a + 2b = 0$

II, $a + b = 1$

I − 2II, $= 4a = -2 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow b = \frac{3}{2}$

Beispielhaft Informationen

- "enthält den Punkt $P(a|b)$": $f(a) = b$
- "hat bei $x = a$ eine einfache NST": $f(a) = 0$
- "hat bei $x = a$ eine doppelte NST": $f(a) = 0$ und $'(a) = 0$
- "hat bei $P(a|b)$ einen Extrempunkt": $f(a) = b$ und $f'(a) = 0$
- "hat an der Stelle $x = a$ die Steigung m": $f'(a) = m$

Steckbriefe: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	
schwer	79, 80, 81, 85

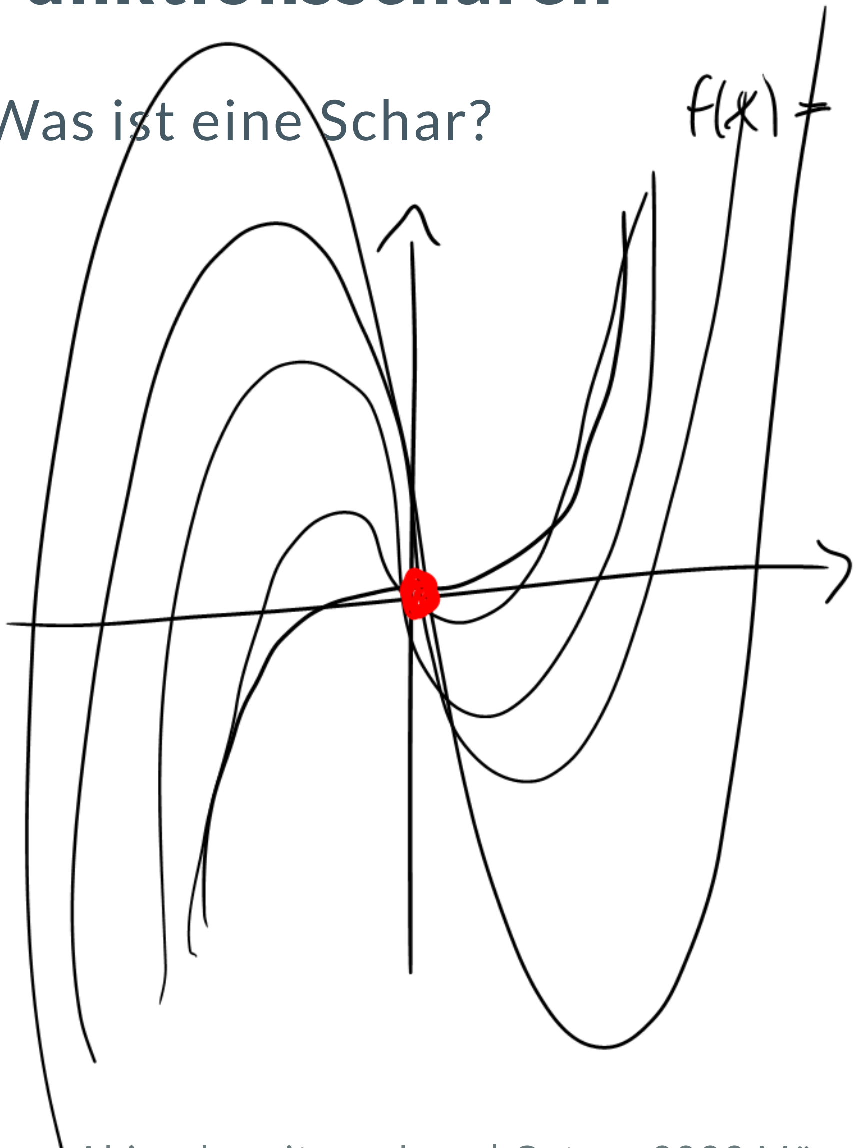
Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Besondere Aufgabentypen
- Altabitur 2020 Analysis
- Altabitur 2021 Analysis

Funktionsscharen

Was ist eine Schar?

$f(x) = x^3 - ax$



Extrempunkte einer Schar

$$f_t(x) = x^2 + 2tx + 2x + 1, \quad t \geq 0.$$

$$f_t'(x) = 2x + 2t + 2 = 0 \qquad | -2t-2$$

$$2x = -2t - 2 \qquad | :2$$

$$x = -t - 1$$

$$f_t''(x) = 2 > 0 \qquad TP(-t-1 \,|\, -t^2-2t)$$

$$y = f_t(-t-1) = (-t-1)^2 + 2t(-t-1) + 2(-t-1) + 1$$

$$= t^2 + 2t \cancel{+1} - 2t^2 - 2t - 2t \cancel{-2} \cancel{+1}$$

$$= -t^2 - 2t$$

Gemeinsame Schnittpunkte

$$f_t(x) = x^2 + tx + 1 - t$$

Suche ein x, sodass t aus der Funktion verschwindet

$\underline{x = 1}$ $\quad P(1|2)$

$f_t(1) = x^2 + t + 1 - t = 1^2 + 1 = 2$

$x^2 + tx + 1 - t = x^2 + 1 \quad | -x^2 - 1$

$tx - t = 0 \quad | +t$

$tx = t \quad | :t$

$$\underline{x = \frac{t}{t} = 1}$$

Scharen: Rechenblock

Schwierigkeit	Aufgaben
leicht	
mittel	
schwer	82, 83, 84

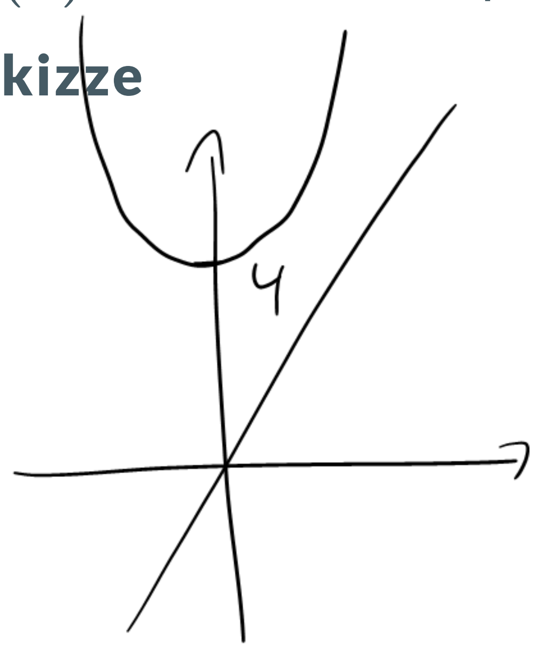
Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Besondere Aufgabentypen
- Altabitur 2020 Analysis
- Altabitur 2021 Analysis

Bestimme einen Parameter so, dass ein Problem keine/eine/zwei Lösungen hat

Gegeben sind die Funktion $f(x) = x^2 + 4$ und die Geradenschar $g_a(x) = ax$. Bestimme alle a für die $f(x)$ und $g(x)$ keinen Schnittpunkt haben.

Skizze



Berechnung

$f(x) = g(x)$

$x^2 + 4 = ax$

$x^2 - ax + 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{(-a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 16}}{2}$$

$a^2 - 16 < 0 \quad | +16$

$a^2 < 16 \quad | \pm\sqrt{}$

$\downarrow +\sqrt{} \qquad \searrow -\sqrt{}$

$a < 4 \qquad a > -4$

$a \in \,]-4; 4[$

Diskriminante

Die Wurzel in der Mitternachtsformel $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ heißt Diskriminante. Der Term $b^2 - 4ac$ unter der Wurzel entscheidet darüber, wie viele Lösungen die Gleichung hat.

- $b^2 - 4ac < 0 \implies$ keine Lösung
- $b^2 - 4ac = 0 \implies$ eine Lösung
- $b^2 - 4ac > 0 \implies$ zwei Lösungen

Es muss also eine Ungeichung, wie bei den Definitionsbereichen gelöst werden!

Rezept

1. Allgemein Lösungsgleichung aufstellen
2. Nach dem "Problemfall" in der Gleichung suchen (eingeschränkter Definitionsbereich)
3. Ungleichung je nach Lösung gewünscht oder unerwünscht aufstellen und Lösen (wie mit Definitionsbereichen)

Lösungsmengen: Rechenblock

- Bestimme einen Bereich für a, sodass $f(x) = \frac{1}{x} - 2$ und $g_a(x) = ax$ keinen Schnittpunkt haben
- Bestimme einen Bereich für a, sodass $f(x) = \sqrt{x-1}$ und $g_a(x) = ax$ mindestens einen Schnittpunkt haben

Für Schnelle und Unterforderte:

- Aufgabe 87 ff.
- Aufgabenblatt Analysis Besondere Aufgabentypen
- Altabitur 2020 Analysis
- Altabitur 2021 Analysis