Demnach gilt:

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+2}.$$

Aufgabe 66 – Abi★

Finde jeweils eine Stammfunktion von f:

(a) $f(x) = -e^{-\frac{1}{2}x}$ (b) $f(x) = \sqrt{\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}}$

Aufgabe 67 – Abi★

Finde jeweils eine Stammfunktion von f:

(a) $f(x) = -\frac{2}{4x^2 - 12x + 9}$ (b) $f(x) = \frac{-2}{(-3x - 2)^5}$

6.2.1 Logarithmische Substitution

Logarithmische Substitution

Sei f eine Funktion der folgenden Bauart:

$$f(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Dann ist eine Stammfunktion von $f(x)$ gegeben durch

$$F(x) = \ln|g(x)|.$$

Tipp: Die Betragsstriche können oftmals weggelassen werden.

Beispiel: Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 3x^2}.$$

Der Zähler ist „fast“ die Ableitung des Nenners. Nach einer kleinen Umformung gilt

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2}.$$

Somit ist eine Stammfunktion von f gegeben durch

$$F(x) = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + 3x^2|.$$

Aufgabe 68 Abi★

Finde jeweils eine Stammfunktion von $f(x)$:

(a) $f(x) = \dfrac{12x^3 - 51x^2 + 5}{3x^4 - 17x^3 + 5x - 1}$

(b) $f(x) = \dfrac{2e^{2x} + e^{-x}}{e^{2x} - e^{-x}}$

(c) $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 4e^{2x}}{4\sin(x) + 8e^{2x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

6.3 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte

6.3.1 Flächeninhalte

Merke

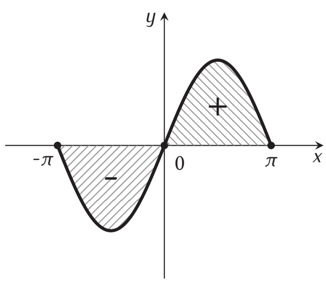
Das **bestimmte Integral** drückt den orientierten Flächeninhalt aus, den der Graph von f im Intervall $[a; b]$ mit der x-Achse einschließt. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

falls F eine Stammfunktion von f ist.

Hinweis: Der Flächeninhalt ist orientiert. Das bedeutet, dass Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.

Beispiel: Das Integral von $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[-\pi; \pi]$ hat den Wert 0, da sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse genau aufheben.



Dies lässt sich auch wie folgt nachrechnen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.$$

Ist man stattdessen am Flächeninhalt A interessiert, der im Bereich $-\pi \leq x \leq \pi$ zwischen $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird, so muss man das Integral entsprechend aufteilen und jeden Bereich getrennt ausrechnen. Dort, wo die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft, wird das Integral mit einem Minuszeichen versehen.

Lösung 66

(a) $F(x) = 2e^{-\frac{1}{2}x}$.

(b) Die Stammfunktion von $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist $\frac{2}{3}x^{3/2}$. Mit dem Merksatz von oben und $m = \frac{3}{2}$ ergibt sich:

$$F(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)^{3/2} = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}x + \frac{5}{2}\right)^{3/2}.$$

Lösung 67

(a) Den Nenner mit der zweiten binomischen Formel umschreiben liefert:

$$f(x) = -\frac{2}{4x^2 - 12x + 9} = -\frac{2}{(2x-3)^2}.$$

Mit dem Merksatz und $m = 2$ ergibt sich die Lösung

$$F(x) = \frac{1}{2x - 3}.$$

(b) $F(x) = -\dfrac{1}{6(-3x-2)^4}$.

Lösung 68

(a) Man setzt $g(x) = 3x^4 - 17x^3 + 5x - 1$. Dann ist $g'(x) = 12x^3 - 51x^2 + 5$ und mit dem Merksatz zu logarithmischer Substitution erhält man

$$F(x) = \ln\left|3x^4 - 17x^3 + 5x - 1\right|.$$

(b) Der Zähler ist gerade die Ableitung des Nenners. Also gilt $F(x) = \ln\left|e^{2x} - e^{-x}\right|$.

(c) Es gilt

$$f(x) = \frac{\cos(x) + 4e^{2x}}{4\sin(x) + 8e^{2x}} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos(x) + 4e^{2x}}{\sin(x) + 2e^{2x}}.$$

Im hinteren Bruch steht im Zähler die Ableitung des Nenners. Es folgt

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot \ln\left|\sin(x) + 2e^{2x}\right|.$$

(d) Es gilt

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}$$

Im hinteren Bruch steht im Zähler die Ableitung des Nenners. Es folgt

$$F(x) = -\ln|\cos(x)|$$

Lösungen