Dein Intensivkurs fürs Mathe-Abi

abiturma

Kursbuch

Mathe-Abitur 2020

Gymnasium Niedersachsen
Grundlegendes und erhöhtes
Anforderungsniveau

abiturma

Egerlandstr. 9
71263 Weil der Stadt

info@abiturma.de
www.abiturma.de

abiturmas Unternehmenszweck:

Wir möchten dir ermöglichen, dein bestes Mathe-Abitur zu schreiben, indem wir ein Unterrichtsumfeld schaffen, in welchem du dich gesehen und unterstützt fühlst und in dem du deine natürliche Lernfähigkeit einbringen kannst.

Um dies zu erreichen, bieten wir bundesweit fünftägige Intensivkurse für die Abiturprüfung in Mathematik an. Das Kurskonzept wurde von der Uni Tübingen mitentwickelt und zusammen mit unseren erfahrenen Kursleiter*innen möchten wir vor allem eines: Dich bestmöglich beim Lernen unterstützen.

„Der Mann, der den Berg abtrug, war derselbe, der damit anfing, kleine Steine wegzutragen.“

Chinesisches Sprichwort

Unsere Tipps für ein gutes Mathe-Abi

Lerne kurz, aber regelmäßig

Sogar 10-20 Minuten am Tag genügen, wenn du ausreichend viele Übungseinheiten eingeplant hast und rechtzeitig anfängst. Vermeide mehrstündige Sitzungen, bei denen du irgendwann Konzentration und Motivation verlierst. Übe in kurzen Zeitintervallen und bearbeite dabei viele kleine Übungsaufgaben.

Bleib dran

Am Anfang deiner Abi-Vorbereitung wird es dir vielleicht noch schwer fallen, dich zu motivieren. Du wirst aber sehen: Mit zunehmender Übungsdauer wird sich das Lernen angenehmer anfühlen. Wann dieser Wendepunkt einsetzt, ist typabhängig. Wichtig ist, dass du bis zu diesem Punkt durchhältst.

Mach Lernen zum Ritual

Gewohnheit ist der Schlüssel zum Erfolg. Das behaupten nicht wir, sondern die Wissenschaft.[1] Die Quintessenz: Wenn sich erst einmal eine Gewohnheit etabliert hat, wird das entsprechende Handeln in unserem Gehirn zum Automatismus, ohne dass wir viel Energie dafür aufwenden müssen. Du kannst dir diesen Mechanismus zunutze machen, indem du das Lernen fest in deinen Alltag integrierst und so aus einem anstrengenden Aufraffen-müssen ein einfaches Alltagsritual machst. Wie Zähneputzen. Wähle einen fixen Zeitpunkt aus, an dem du jeden Tag lernst. Und dann: Nimm Schwung auf. Für jeden Tag, an dem du die Routine gemeistert hast, machst du dir ein Kreuzchen in einen Wandkalender. Wenn du keinen hast, mach einfach für jeden Tag des Monats ein Kästchen auf ein Blatt Papier, das du gut sichtbar an deiner Wand befestigst. Wichtig ist nur, dass du deine eigene Kontinuität beobachten kannst und dich daran erfreust. Das Spannende daran: Es kann am Anfang manchmal schwer sein, die Gewohnheit zu etablieren, aber wenn du erst einmal drin bist und dich daran gewöhnt hast – Schwung aufgenommen hast –, wird es dir plötzlich ganz leicht fallen, regelmäßig zu üben.

Mut zu Fehlern

Wenn du eine Aufgabe nicht verstehst, sei nicht frustriert. Notiere dir die Aufgaben, die du nicht lösen konntest, schau dir die Lösungen an und bitte jemanden um Hilfe. Die meisten Menschen freuen sich, wenn sie um Hilfe gebeten werden. Das ist schließlich ein Kompliment.

Wiederhole schwierige Aufgaben so lange, bis du sie ohne Hilfe lösen kannst

Das ist ein echter Top-Tipp, den viele Schülerinnen und Schüler nicht beherzigen: Wenn du bei einer Aufgabe Hilfe in Anspruch genommen hast, bearbeite die Aufgabe unbedingt noch so oft, bis du sie allein lösen konntest – der Lerneffekt wird enorm sein! Aufgabe rechnen – Fehler erkennen – um Hilfe bitten – Aufgabe noch einmal rechnen – Fehler auslassen – freuen.

---

[1] siehe unter anderem: Charles Duhigg. Die Macht der Gewohnheit -– warum wir tun, was wir tun. Piper, München 2014.

Wähle vielfältige Lernwege

Immer auf die gleiche Weise zu lernen, ist langweilig und ineffektiv. Nutze verschiedene Übungsformen und vielfältige Aufgabenformate. Je bunter, desto besser! Bearbeite Übungsaufgaben aus dem Buch, aber auch originale Abituraufgaben. Schau dir Erklärvideos auf Youtube an. Lerne mit Freunden und allein. Auch durch eigenes Erklären wirst du Inhalte festigen. „Wenn man etwas nicht einfach erklären kann, hat man es nicht verstanden". Dieses Zitat von Einstein, der übrigens gar nicht so schlecht im Abi war, wie häufig behauptet wird, passt hier gut. Erstelle eine Liste mit mathematischen Begriffen oder Rezepten und erkläre sie einem Freund oder einer Freundin von Dir. Danach sprecht ihr noch einmal darüber.

Nutze die Schulzeit

Stelle Fragen im Unterricht und schau dir vor und nach der Stunde noch einmal die passenden Seiten im Lehrbuch an. Du erreichst so maximalen Effekt mit minimalem Zeitaufwand.

Sorge für Ausgleich und feier deine Erfolge

Es ist sinnvoll, das Lernen ins Leben zu integrieren – nicht umgekehrt. Gerade nach einer intensiven Übungsphase ist es wichtig, abzuschalten und anderen Aktivitäten nachzugehen. Wenn du dein Trainingspensum erledigt hast, schau dir noch einmal bewusst an, was du gerade geschafft hast, und sei stolz, dass du einen kleinen Schritt weiter gekommen bist.

Halte dein Ziel stets vor Augen

Wenn es dir schwer fällt, dich zu motivieren, geh kurz in dich und frage dich, warum du überhaupt lernen möchtest. Gelingt es dir, aus einem „ich muss" ein „ich möchte, weil..." zu machen? Was ist deine Motivation für die Matheprüfung? Ein guter Abschluss? Ein bestimmtes Berufsziel? Je konkreter und greifbarer du dein Ziel für dich formulieren kannst, je besser du es visualisieren kannst, desto leichter wird es dir fallen, dieses zu erreichen und die dafür notwendigen Schritte zu gehen.

Und vor allem: Glaub an dich!

Du bist wunderbar – mit oder ohne Binomialkoeffizienten (das ist dieses Tool, das man braucht, um den Stochastik-Berg zu erklimmen – Der Ausblick ist super da oben). Du wirst es schaffen! – Du kannst das lernen. Es ist wichtig, dass du daran glaubst!

Über das Kursbuch

In diesem Kursbuch findest du zu jedem Abi-relevanten Thema entsprechende Merkregeln, Rezepte und zahlreiche Übungsaufgaben. Die Übungsaufgaben sind so umfangreich, dass du auch nach deinem Kurs noch damit arbeiten kannst.

Viele der Aufgaben sind mit Abi★★ gekennzeichnet. Ein bis drei Sterne zeigen dabei den Schwierigkeitsgrad der Aufgaben an. Ein Stern steht für eine einfache Aufgabe, drei Sterne für eine komplexe Aufgabe. Das Taschenrechnersymbol 🖩 zeigt an, bei welchen Aufgaben ein grafikfähiger Taschenrechner zwingend erforderlich ist. Die Lösungen aller Aufgaben sind am Ende des Buches abgedruckt. Inhalte und Aufgaben, die nur für das erhöhte Leistungsniveau relevant sind, haben wir gekennzeichnet.

Schreibe uns

Hast du Hinweise, Kritik oder Anmerkungen zu unserem Kursbuch, dann freuen wir uns über eine Email von dir. Wir haben auch sonst ein offenes Ohr für dich. Solltest du vor, während oder nach dem Kurs ein Anliegen haben, wende dich einfach direkt an deine*n Kursleiter*in oder schicke uns eine E-Mail an **info@abiturma.de**.

Viel Erfolg

Wir alle wünschen dir viel Erfolg beim Kurs, dem bevorstehenden Mathe-Abitur und auf deinem zukünftigen Lebensweg.

Aaron	*Alex*	*Christiane*	*Cora-Lis*	*David*
Dr. Aaron Kunert	Alex Bückner	Christiane Schulz	Cora-Lis Grießhaber	David Ewert
Eileen	*Maya*	*Rebecca*	*Rick*	
Eileen George	Maya Biersack	Rebecca Arndt	Rick Kummerow	

Inhaltsverzeichnis

Analysis

1 Grundlagen

1.1 Mengensymbole

Symbole und Mengen

Folgende Mengen und Symbole werden verwendet:

$\mathcal{D}$	Definitionsmenge
$\emptyset$	Leere Menge
$\{a; b; \ldots\}$	Menge bestehend aus a, b, etc.
$A \cup B$	Vereinigung der Mengen A und B
$A \cap B$	Schnittmenge zwischen A und B
$A \setminus B$	Menge A ohne B
$b \in B$	b Element von B
$\mathbb{R}$	Reelle Zahlen: Alle Zahlen, die auf dem Zahlenstrahl darstellbar sind.

1.2 Bruchrechnen

Bruchrechnen

Folgende Rechenregeln gelten für Brüche:

- Brüche multiplizieren:
  Brüche werden multipliziert, indem Zähler und Nenner multipliziert werden:
  $$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}.$$
- Brüche dividieren:
  Brüche werden dividiert, indem der erste Bruch mit dem Kehrbruch des zweiten Bruchs multipliziert wird:
  $$\frac{2}{7} : \frac{3}{5} = \frac{2}{7} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{7 \cdot 3} = \frac{10}{21}.$$
- Brüche addieren:
  - Brüche mit demselben Nenner können einfach addiert werden:
    $$\frac{2}{7} + \frac{3}{7} = \frac{2+3}{7} = \frac{5}{7}$$

– Brüche mit unterschiedlichem Nenner müssen zunächst auf den Hauptnenner gebracht werden:

$$\begin{aligned}\frac{2}{7}+\frac{1}{3} &= \frac{2}{7}\cdot\frac{3}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{7}\\ &= \frac{2\cdot 3}{7\cdot 3}+\frac{1\cdot 7}{3\cdot 7}\\ &= \frac{6}{21}+\frac{7}{21}\\ &= \frac{13}{21}\end{aligned}$$

Beispiel: Es gilt für alle $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-\frac{7}{12} &= \frac{1}{x}\cdot\frac{12}{12}-\frac{7}{12}\cdot\frac{x}{x}\\ &= \frac{1\cdot 12}{x\cdot 12}-\frac{7\cdot x}{12\cdot x}\\ &= \frac{12-7x}{12x}\end{aligned}$$

1.3 Binomische Formeln

Binomische Formeln

Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die folgenden binomischen Formeln.
Erste binomische Formel:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Zweite binomische Formel:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Dritte binomische Formel:

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

Beispiel: Es gilt mit der ersten binomischen Formel:

$$(x+3)^2 = x^2 + 2\cdot 3\cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

Es gilt mit der zweiten binomischen Formel:

$$(5-x)^2 = 5^2 - 2\cdot 5\cdot x + x^2 = 25 - 10x + x^2$$

Es gilt mit der dritten binomischen Formel:

$$(x+8)\cdot(x-8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$$

Aufgabe 1 – ▦ Abi★

Wende die binomischen Formeln bei den folgenden Termen an:

(a) $(x + 8)^2$

(b) $(x - 16)^2$

(c) $(x + 10) \cdot (x - 10)$

(d) $(x - 2) \cdot (x + 2)$

1.4 Potenzgesetze

Potenzgesetze

Es gelten folgende Potenzgesetze:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{m \cdot n} \qquad x^{-m} = \frac{1}{x^m}$$

$$x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m \qquad \frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

Beispiel: Es gelten:

$$x^2 \cdot x^4 = x^{2+4} = x^6$$

$$x^2 \cdot x^{-4} = x^{2-4} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

$$x^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{x^7}$$

Beispiel: Die Potenzgesetze gelten auch für die Exponentialfunktion, hier ist die Basis die eulersche Zahl e.

Es gelten:

$$\mathrm{e}^2 \cdot \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^{2+4} = \mathrm{e}^6$$

$$\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{4x} = \mathrm{e}^{2x+4x} = \mathrm{e}^{6x}$$

$$\mathrm{e}^{\frac{2}{3}x} = \mathrm{e}^{\frac{2x}{3}} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{2x}}$$

Aufgabe 2

Vereinfache die nachfolgenden Terme mithilfe der Potenzgesetze so weit wie möglich:

(a) $\left(\frac{x}{2}\right)^3$

(b) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4$

(c) $\sqrt[3]{x^2}$

(d) $\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 3

Vereinfache die nachfolgenden Terme mithilfe der Potenzgesetze so weit wie möglich:

(a) $e^{2x} \cdot e^{4x} : e^5$

(b) $\dfrac{e^x \cdot e^{3+2x}}{e^{5x-3}}$

1.5 Logarithmengesetze

Logarithmusgesetze

Es gelten folgende Logarithmengesetze:

$$\begin{aligned} \ln(x \cdot y) &= \ln(x) + \ln(y), && \text{falls} \quad x,y > 0 \\ \ln(x : y) &= \ln(x) - \ln(y), && \text{falls} \quad x,y > 0 \\ \ln(x^y) &= y \cdot \ln(x), && \text{falls} \quad x > 0 \end{aligned}$$

Beispiel: Es gilt:

$$\begin{aligned} \ln(18) + \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(9) &= \ln(18) + \ln(x) - \ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \ln(18) + \ln(x) - \ln\left(\sqrt{9}\right) \\ &= \ln(18 \cdot x) - \ln(3) \\ &= \ln\left(\frac{18 \cdot x}{3}\right) \\ &= \ln(6 \cdot x) \end{aligned}$$

Aufgabe 4 – 🖩 Abi★

Vereinfache die Terme durch Anwenden der Logarithmengesetze so weit wie möglich:

(a) $\ln(15) - \ln(5) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$

(b) $\ln\left(e^{5x}\right)$

(c) $\dfrac{\ln\left(e^{2x} \cdot e^{3x}\right) \cdot \ln(2)}{\ln\left(e^{\ln(2)}\right) \cdot x}, \quad x \neq 0$

Analysis

2 Gleichungen

2.1 Quadratische Gleichungen

Quickstart quadratische Gleichung

- ➤ Beispiel: $5x^2 + 7x + 16 = 0$
- Erkennungsmerkmal: Es kommen x^2, x und Zahlen / Konstanten vor
- Lösungsmethode: p-q-Formel

2.1.1 Erkennen von quadratischen Gleichungen

Was ist eine quadratische Gleichung?

Eine quadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

für $a \neq 0$, $b,c \in \mathbb{R}$.
In einer quadratischen Gleichung kommen nur x^2, x und Zahlen / Konstanten vor.
Die Normalform einer quadratischen Gleichung lautet:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Jede quadratische Gleichung kann wie folgt auf Normalform gebracht werden:

$$p = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad q = \frac{c}{a}.$$

Beispiel: Es wird untersucht, ob folgende Gleichung eine quadratische Gleichung ist:

$$7x^2 + 8x - 10 = 0.$$

Die Gleichung ist eine quadratische Gleichung, denn es kommen nur die x^2, x und Zahlen / Konstanten vor.

Die Normalform dieser Gleichung lautet:

$$x^2 + \frac{8}{7}x - \frac{10}{7} = 0.$$

Aufgabe 5

Untersuche, ob folgende Gleichungen quadratische Gleichungen sind:

(a) $7x^2 + 8x - 10 = 0$

(b) $3x^2 + 3x = 21$

(c) $3x^2 + 3x = 21e^x$

(d) $5x^2 + 17x + x^3 = x^3$

2.1.2 Lösen von quadratischen Gleichungen

p-q-Formel

Die Lösungen einer quadratischen Gleichung in Normalform

$$x^2 + px + q = 0$$

können mit der p-q-Formel berechnet werden:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Tipp: Steht vor dem x^2 noch eine Zahl $a \neq 0$, so muss zunächst die Gleichung auf Normalform gebracht werden, indem die gesamte Gleichung durch diese Zahl a dividiert werden.

Rezept zum Lösen einer quadratischen Gleichung

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung:

$$x^2 - 4x + 6 = 3.$$

Schritt 1: Alles auf eine Seite bringen:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Schritt 2: Lösungen mithilfe der p-q-Formel berechnen.
Zunächst quadratische Gleichung auf Normalenform bringen:

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

Es gilt:

$$p = -4 \quad \text{und} \quad q = 3$$

und damit

$$x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\frac{(-4)^2}{4} - 3} = 2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 3} = 2 \pm 1.$$

Die Lösungsmenge ist somit $\mathcal{L} = \{1; 3\}$.

Aufgabe 6 Abi★★

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(a) $x^2 + 4x - 21 = 0$

(b) $3x^2 - 2x + 8 = 0$

(c) $x^2 - x = -\frac{1}{4}$

(d) $x^2 + \sqrt{8}x = -2$

Aufgabe 7 – Abi★★★

Gegeben sind die Funktionen f und g durch

$$f(x) = x^2 - 24 \quad \text{und} \quad g(x) = 3x^2 - 14x.$$

Berechne die Schnittpunkte der Graphen von f und g.

Diskriminante

Die **Diskriminante** der quadratischen Gleichung ist der Term, der in der p-q-Formel unter der Wurzel steht, also

$$D = \frac{p^2}{4} - q.$$

Anhand der Diskriminante kann man erkennen, wie viele Lösungen die quadratische Gleichung hat.

- Ist die Diskriminante $D > 0$, so gibt es zwei Lösungen.
- Ist die Diskriminante $D = 0$, so gibt es genau eine Lösung.
- Ist die Diskriminante $D < 0$, so gibt es keine Lösung.

Beispiel: Die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

hat die Diskriminante

$$D = \frac{(-4)^2}{4} - 3 = \frac{16}{4} - 3 = 1.$$

Es gilt also $D > 0$ und damit besitzt die Gleichung

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

zwei Lösungen.

2.2 Biquadratische Gleichungen

Quickstart biquadratische Gleichung

- Beispiel: $16x^4 + 3x^2 + 10 = 0$
- Erkennungsmerkmal: Es treten ausschließlich die x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten auf
- Lösungsmethode: Substitution $u = x^2$ und anschließend p-q-Formel

2.2.1 Erkennen von biquadratischen Gleichungen

Was ist eine biquadratische Gleichung?

Eine biquadratische Gleichung ist eine Gleichung der Form

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

für $a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$.
In einer biquadratischen Gleichung kommen nur x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten vor.

Beispiel: Folgende Gleichungen sind biquadratische Gleichungen, denn es treten lediglich x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten auf:

$$x^4 + 3x^2 + 16 = 0$$
$$13x^4 + 6x^2 + 28 = 0.$$

2.2.2 Lösen von biquadratischen Gleichungen

Substitution – Hintergrundwissen

Um eine biquadratische Gleichung zu lösen, wird eine Substitution durchgeführt. Hierfür wird eine neue Variable, zum Beispiel u wie folgt definiert:

$$u = x^2.$$

Die entstandene Gleichung in u wird gelöst und anschließend wird die Substitution rückgängig gemacht, indem die Lösungen der Gleichung in u wieder in die Gleichung

$$u = x^2$$

eingesetzt werden.

Rezept zur Lösung einer biquadratischen Gleichung

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^4 - 5x^2 - 36 = 0.$$

Schritt 1: Substitution: Setze $u = x^2$, dann gilt:

$$u^2 - 5u - 36 = 0.$$

Schritt 2: Löse die Gleichung (zum Beispiel mit der p-q-Formel).

$$u_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 36} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = 9, \quad u_2 = -4.$$

Schritt 3: Rücksubstitution: Löse $x^2 = u$, also:

$$u_1 = 9: \quad x^2 = 9 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$
$$u_2 = -4: \quad x^2 = -4 \quad \Longrightarrow \quad \text{keine weiteren Lösungen.}$$

Für die Lösungsmenge gilt also $\mathcal{L} = \{-3; 3\}$.

Aufgabe 8 – Abi★

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

(b) $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$

(c) $2x^4 + 4x^2 - 4 = 0$

2.3 Nullprodukte

Quickstart Nullprodukt

- BEISPIEL: $(5x^2 - 10) \cdot \left(e^{6x} - 1\right) = 0$
- ERKENNUNGSMERKMAL: Es werden zwei Terme, die ein x enthalten, multipliziert und das Ergebnis soll Null ergeben.
- LÖSUNGSMETHODE: Satz vom Nullprodukt.

2.3.1 Erkennen von Nullprodukten

Was ist ein Nullprodukt?

Falls es zwei Terme $A(x)$ und $B(x)$ gibt, sodass die Lösungen der Gleichung

$$A(x) \cdot B(x) = 0$$

bestimmt werden sollen, handelt es sich um eine Nullprodukt. **In einem Nullprodukt werden zwei Terme, die ein x enthalten, multipliziert und das Ergebnis soll Null ergeben**.

Beispiel: Folgende Gleichungen sind Nullprodukte:

$$(x^2 - 4) \cdot (x - 3) = 0$$

$$e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 0.$$

Aufgabe 9

Untersuche, ob es sich bei folgenden Gleichungen um Nullprodukte handelt

(a) $e^x \cdot (x^2 - 16) = 0$

(b) $e^{3x} \cdot (5x^4 - 30) + x = x$

(c) $e^{3x+2} \cdot (4e^x - x) = 0$

(d) $x^2 \cdot (e^x - x^2) = 1$

2.3.2 Lösen von Nullprodukten

Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist.

Rezept zum Lösen eines Nullprodukts

Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$(x^2 - 4) \cdot (x - 3) = 0.$$

Es kann der Satz vom Nullprodukt angewandt werden: Ein Produkt ist genau dann Null, wenn mindestens einer der Faktoren Null ist. Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch die Lösungen der Gleichungen

$$x^2 - 4 = 0 \quad \text{und} \quad x - 3 = 0,$$

also

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = -2, \quad x_2 = 2$$
$$x - 3 = 0 \iff x_3 = 3$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L} = \{-2; 2; 3\}$.

Aufgabe 10 – Abi★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $(x^2 - 9) \cdot (x + 5) = 0$

(b) $(x^2 - 4x + 2) \cdot (x + 3) = 0$

(c) $(x^2 + x + 4) \cdot (x^4 - 81)^2 = 0$

(d) $e^{\frac{1}{2}x} \cdot \left(\frac{1}{2}x + 2\right) = 0$

2.4 Gleichungen mit „x in jedem Summanden“

Quickstart Gleichung mit „x in jedem Summanden“

- ➤ BEISPIEL: $x^4 + 2x^3 + 10x^2 = 0$
- ERKENNUNGSMERKMAL: In jedem Summanden tritt eine Potenz von x auf.
- LÖSUNGSMETHODE: Höchste gemeinsame Potenz von x ausklammern, dann Satz vom Nullprodukt anwenden.

2.4.1 Erkennen von Gleichungen mit „x in jedem Summanden“

Was ist eine Gleichung mit „x in jedem Summanden“?

Das Erkennungsmerkmal für eine Gleichung mit „x in jedem Summanden“ ist: Jeder Summand enthält eine Potenz von x.

Beispiel: Die folgenden Gleichungen sind vom Typ „x in jedem Summanden“:

$$7x^2 + 3x^5 + 43x = 0$$
$$15x^3 + 25x + 16x^5 = 0$$
$$423x^4 + 356x^3 + 55x^2 = 0$$

2.4.2 Lösen von Gleichungen mit „x in jedem Summanden"

Höchste gemeinsame Potenz ausklammern

Falls eine Gleichung eine Gleichung mit „x in jedem Summanden" ist, kann die höchste Potenz von x ausgeklammert werden. Dann erhält man wieder ein Nullprodukt.

Rezept zum Lösen einer Gleichung mit „x in jedem Summanden"

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$x^4 + 3x^3 = 0.$$

Dies ist eine Gleichung mit „x in jedem Summanden", denn : In der Gleichung treten lediglich Summanden auf, die Potenzen von x enthalten.

Schritt 1: Höchste Potenz von x ausklammern Die höchstmögliche Potenz ist x^3, damit kann x^3 ausgeklammert werden:

$$x^3 \cdot (x + 3) = 0.$$

Schritt 2: Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$\begin{aligned} x^3 \cdot (x+3) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 + 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = -3. \end{aligned}$$

Es folgt also $\mathcal{L} = \{0; -3\}$.

Aufgabe 11 – Abi★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der entsprechenden Gleichung.

(a) $12x^2 - 24x = 0$

(b) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = 0$

(c) $20x^3 - 180x^2 = 0$

(d) $8x^2 - 3x^4 = -2x^3$

2.5 Exponentialgleichungen

2.5.1 Überblick über Exponentialgleichungen

Was ist eine Exponentialgleichung?

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung in der ausschließlich Exponentialterme und Zahlen vorkommen.

Beispiel: Die folgenden Gleichungen sind Exponentialgleichungen:

$$\begin{aligned} e^{8x} + 7e^{4x} - 8 &= 0 \\ e^{8x} + 7e^{4x} - e^{3x} &= 0 \\ e^{10x} + 9e^{7x} &= 0. \end{aligned}$$

Welche Typen von Exponentialgleichungen gibt es?

- Typ 1: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten auf. Zum Beispiel:
  $$e^{3x-1} + 2 = 4 - e^{3x-1}.$$
- Typ 2: Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen. Zum Beispiel:
  $$3e^{2x} - 4e^{5x} = 0.$$
- Typ 3: Es tauchen genau zwei unterschiedliche Potenzen von e auf (einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten). Zum Beispiel:
  $$e^{2x} - 5e^{x} = 36.$$

Analysis

2.5.2 Exponentialgleichungen vom Typ 1

Quickstart Exponentialgleichung Typ 1

- Beispiel: $e^{24x-12} = 1$.
- Erkennungsmerkmal: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten auf.
- Lösungsmethode: Isolieren des Exponentialterms und anschließendes Logarithmieren.

Rezept zum Lösen einer Exponentialgleichungen vom Typ 1

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$5e^{2x+1} - 3 = 3e^{2x+1} + 1.$$

Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 1, denn: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten und Zahlen auf.

Schritt 1: Exponentialterm isolieren:

$$\begin{aligned} && 5e^{2x+1} - 3 &= 3e^{2x+1} + 1 \\ &\Longleftrightarrow & 2e^{2x+1} &= 4 \\ &\Longleftrightarrow & e^{2x+1} &= 2. \end{aligned}$$

Schritt 2: Gleichung logarithmieren:

$$\ln\left(e^{2x+1}\right) = \ln(2) \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 1 = \ln(2).$$

Schritt 3: Nach x auflösen:

$$x = \frac{\ln(2) - 1}{2}.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch: $\mathcal{L} = \left\{ \frac{\ln(2)-1}{2} \right\}$

Aufgabe 12 – Abi★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $6e^{2x+1} - 8 = 4 - e^{2x+1}$ (b) $2e^{x^2-4} = e^{x^2-4} + 1$

2.5.3 Exponentialgleichungen vom Typ 2

Quickstart Exponentialgleichung Typ 2

- Beispiel: $7e^{18x} + 3e^{7x} = 0$.
- Erkennungsmerkmal: Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, dafür aber keine Zahlen.
- Lösungsmethode: Potenz mit dem kleinsten Exponenten ausklammern und anschließend Satz vom Nullprodukt anwenden.

Rezept zum Lösen einer Exponentialgleichungen vom Typ 2

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$4e^{3x} = 2e^{5x}.$$

Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 2, denn : Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen.

Schritt 1: Alle Terme auf eine Seite bringen:

$$2e^{5x} - 4e^{3x} = 0.$$

Schritt 2: Potenz mit dem niedrigsten Exponenten ausklammern:

$$e^{3x} \cdot \left(2e^{2x} - 4\right) = 0.$$

Schritt 3: Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$e^{3x} = 0 \quad \text{oder} \quad 2e^{2x} - 4 = 0.$$

Schritt 4: Bestimmung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:

- Die Gleichung $e^{3x} = 0$ besitzt keine Lösung.
- Für die zweite Gleichung gilt:

$$2e^{2x} - 4 = 0 \iff e^{2x} = 2$$
$$\iff x = \frac{1}{2}\ln(2).$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist $\mathcal{L} = \left\{\frac{1}{2}\ln(2)\right\}$

Aufgabe 13 – Abi★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen.

(a) $e^{4x} = e^{3x}$

(b) $e^{2x+2} = e^{x}$

(c) $e^{x^2+2x-4} = 4e^{2x}$

2.5.4 Exponentialgleichungen vom Typ 3

Quickstart Exponentialgleichung Typ 3

- Beispiel: $7e^{18x} + 3e^{9x} = 16$.
- Erkennungsmerkmal: Es tauchen genau zwei unterschiedliche Exponenten von e auf (einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten)
- Lösungsmethode: Substitution, zum Beispiel $u = e^x$, anschließend p-q-Formel anwenden.

Rezept zum Lösen einer Exponentialgleichungen vom Typ 3

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$e^{2x} + e^{x} = 6.$$

Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 3, denn: Es tauchen genau zwei unterschiedliche Potenzen von e auf (einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten).

Schritt 1: Bringe alles auf eine Seite:

$$e^{2x} + e^{x} - 6 = 0.$$

Schritt 2: Substitution, setze $u = e^x$:

$$u^2 + u - 6 = 0.$$

Schritt 3: Löse die entstandene Gleichung mit der p-q-Formel, nachdem sie auf Normalform gebracht wurde:

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} \quad \Longrightarrow \quad u_1 = 2, \quad u_2 = -3.$$

Schritt 4: Rücksubstitution: Löse $e^x = u$:

$$u_1 = 2: \quad e^x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \ln(2)$$

$$u_2 = -3: \quad e^x = -3 \quad \Longrightarrow \quad \text{keine weiteren Lösungen.}$$

Es folgt also $\mathcal{L} = \{\ln(2)\}$.

Tipp: Dieser Aufgabentyp ist seit mehreren Jahren nicht mehr abgefragt worden und nur noch der Vollständigkeit wegen im Kursbuch enthalten.

Aufgabe 14 – Abi★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

(a) $e^{2x} - 4e^x + 2 = 0$

(b) $4e^{6x} + 6e^{3x} = 4$

2.6 Wurzelgleichungen

Quickstart Wurzelgleichung

- Beispiel: $\sqrt{x^2 + 25} = 6$.
- Erkennungsmerkmal: Es treten Terme mit x unter der Wurzel auf.
- Lösungsmethode: Wurzel isolieren und anschließend Gleichung quadrieren.

Was ist eine Wurzelgleichung?

Das Erkennnungsmerkmal für eine Wurzelgleichung ist: Aus einem Term mit x wird die Wurzel gezogen.

Tipp: Beachte, dass ein Wurzelausdruck nur definiert ist, wenn der Term unter der Wurzel, auch Radikand genannt, größer oder gleich 0 ist.

Beispiel: Der Gleichung

$$\sqrt{9 - x^2} = 0$$

ist eine Wurzelgleichung, denn : Aus einem Term mit x, nämlich $9 - x^2$, wird die Wurzel gezogen. Der Ausdruck ist nur für $-3 \leq x \leq 3$ definiert.

Rezept zum Lösen von Wurzelgleichungen

Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sqrt{4x + 16} - x - 1 = 0.$$

Es handelt sich um eine Wurzelgleichung, denn es wird aus einem Term mit x, nämlich $4x + 16$, die Wurzel gezogen. Der Ausdruck ist definiert für alle $x \geq -4$.

Schritt 1: Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{4x + 16} = x + 1.$$

Schritt 2: Quadriere beide Seiten, beachte dabei die binomischen Formeln:

$$4x + 16 = (x + 1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4x + 16 = x^2 + 2x + 1.$$

Schritt 3: Anwenden der *p*-*q*-Formel:

$$x^2 - 2x - 15 = 0 \quad \text{also} \quad x_1 = -3 \quad \text{oder} \quad x_2 = 5$$

Schritt 4: Probe machen, denn durch das Quadrieren können Lösungen dazugekommen sein:

- Für $x_1 = -3$ gilt:

$$\sqrt{4 \cdot (-3) + 16} - (-3) - 1 = 2 + 3 - 1 = 4 \quad \text{keine Lösung}$$

- Für $x_2 = 5$ gilt:

$$\sqrt{4 \cdot 5 + 16} - 5 - 1 = 6 - 5 - 1 = 0 \checkmark$$

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L} = \{5\}$.

Aufgabe 15 Abi★

Finde jeweils alle Lösungen der folgenden Gleichungen:

(a) $\sqrt{x^2 - 4} = 0$

(b) $2 - \sqrt{12 - 2x} = 0$

(c) $\sqrt{4x + 6} + 4 = 5$

(d) $10 + \sqrt{2x - 3} = 5$

2.7 Logarithmische Gleichungen

Quickstart Logarithmische Gleichung

- Beispiel: $\ln(27x + 8) = 6$
- Erkennungsmerkmal: Aus einem Term mit x wird der Logarithmus gebildet.
- Lösungsmethode: Logarithmus isolieren und anschließend Gleichung exponentieren.

Was ist eine logarithmische Gleichung?

Das Erkennungsmerkmal für eine logarithmische Gleichung ist: In der Gleichung wird von einem Ausdruck mit der Variable x der Logarithmus gebildet.

Beispiel: Folgende Gleichungen sind logarithmische Gleichungen;

$$\ln(x^2 + 16) = 8$$
$$\ln(26x + 18) = 8$$
$$\ln(7x^3 + 80x^2 + 60) = 60$$

Logarithmus isolieren und Gleichung exponentieren

Eine logarithmische Gleichung wird gelöst, indem zunächst der Term mit dem Logarithmus auf eine Seite gebracht wird und anschließend die ganze Gleichung exponentiert wird.

Rezept zur Lösung einer logarithmischen Gleichung

Bestimme die Lösungen der Gleichung

$$\ln(x^2 - 8) = 0$$

Es handelt sich um eine logarithmische Gleichung, denn 👁: Aus einem Term mit x wird der Logarithmus gebildet.

Schritt 1: 🔧 Isoliere den Logarithmus:

$$\ln(x^2 - 8) = 0.$$

Schritt 2: 🔧 Exponentiere die Gleichung, das heißt: Schreibe beide Seiten der Gleichung als Exponent von e:

$$\begin{aligned} & e^{\ln(x^2-8)} = e^0 \\ \iff \quad & x^2 - 8 = 1 \\ \iff \quad & x^2 - 9 = 0 \\ \iff \quad & x_1 = -3 \quad \text{und} \quad x_2 = 3. \end{aligned}$$

Es folgt also $\mathcal{L} = \{-3; 3\}$.

Aufgabe 16 – Abi★

Bestimme die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

(a) $\ln(27x - 26) = 0$

(b) $\ln\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0$

2.8 Newtonsches Näherungsverfahren – nur eA

Wann wird ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen verwendet? – nur eA

Falls für eine Funktion f die Nullstellen, also die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0,$$

durch die bisherigen Methoden wie Anwendung der p-q-Formel, des Satzes vom Nullprodukt, Substitution etc. nicht bestimmbar sind, so kann ein Näherungsverfahren zur Bestimmung der Nullstellen angewendet werden.
Bekannte Beispiele für Näherungsverfahren sind das Intervallhalbierungsverfahren oder das Newtonsche Näherungsverfahren.

Quickstart Newtonsches Näherungsverfahren – nur eA

- Startwert: Fertige eine Wertetabelle zur Wahl eines geeignetes Startwertes x_0 an
- Formel für den Wert x_{n+1}: Es gilt: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Tabelle: Fertige eine Tabelle mit den Werten von x_n an, bis die geforderte Genauigkeit erreicht wird.

Was ist das Newtonsche Näherungsverfahren? – nur eA

Das Newtonsche Näherungsverfahren ist ein Verfahren zur Bestimmung der Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Ausgehend von einem Startwert x_0 wird die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f an dieser Stelle und deren Nullstelle x_1 bestimmt.
Es gilt:

$$t_0(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

also:

$$t_0(x_1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 = f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Diese Nullstelle ist die Näherung im ersten Schritt und der Startwert des kommenden Schritts.
Mit der Nullstelle x_1 wird anschließend genauso verfahren wie mit dem Startwert x_0.
Allgemein gilt:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Das Verfahren wird solange weitergeführt bis die geforderte Genauigkeit erreicht wird.

Tipp: Beachte, dass das Newton-Verfahren abbricht, falls bei einem Interationsschritt die Tangente waagrecht ist. Dann muss ein neuer, geeigneterer Startwert gefunden werden.

Rezept zur Anwendung des Newtonsches Näherungsverfahren – nur eA

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = x^3 + 5x - 7.$$

Gesucht ist die Nullstelle der Funktion f im Intervall $[0; 3]$ mit einer Genauigkeit von zwei Nachkommastellen.

Schritt 1: Fertige eine Wertetabelle an. Je nach Intervallgröße kannst du hierbei ganze Zahlen verwenden oder in kleineren Schritten vorgehen:

x	0	1	2	3
$f(x)$	-7	-1	11	35

Schritt 2: Wähle einen geeigneten Startwert x_0 für das Näherungsverfahren, optimalerweise bereits nahe der Nullstelle, zum Beispiel:

$$x_0 = 1.$$

Schritt 3: Stelle eine Formel für die Bestimmung von x_{n+1} auf.

Es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 + 5$$

und damit:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{{x_n}^3 + 5x_n - 7}{3{x_n}^2 + 5}.$$

Schritt 4: Erstelle eine Tabelle mit Näherungswerten:

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	-1	8	1,25
1	1,125	0,049	8,797	1,119
2	1,119	-0,004	8,756	1,119

Hier kann man direkt erkennen, dass sich die dritte Nachkommastelle bereits ab x_2 nicht mehr ändert.

Schritt 5: Eine Näherung der Nullstelle mit der geforderten Genauigkeit von zwei Nachkommastellen lautet damit

$$x^* = 1{,}12.$$

Durch die vorangegangene Wertetabelle wurde der Startwert so gut gewählt, dass nur wenige Iterationsschritte nötig waren.

Aufgabe 17 – nur eA Abi★★

Berechne mithilfe des Newton-Verfahrens näherungsweise (auf zwei Nachkommastellen genau) die Nullstellen der folgenden Funktionen f in den jeweiligen Intervallen I:

(a) $f(x) = x^5 + 5x^3 - 5,\ I = [0; 2]$

(b) $f(x) = 8x^6 + 3x^2 - 3,\ I = [0; 1]$

2.9 Gemischte Gleichungen

Aufgabe 18

Benenne den Gleichungstyp und begründe Deine Entscheidung:

(a) $20x^4 - 26x^2 + 13 = 0$

(b) $x^2 + x - 6 = 10$

(c) $9e^{4x+6} = 9$

(d) $x^8 - 16x^6 = 0$

(e) $2x \cdot e^{x^2+4} = 0$

(f) $\sqrt{x^2 + 5} = 3$

(g) $\ln(25x + 8) = 0$

(h) $e^{7x} + 16e^{14x} - 10 = 0$

Aufgabe 19

Bestimme jeweils, welches Werkzeug 🔧 zur Lösung der jeweiligen Gleichung verwendet wird.

(a) $(4x^2 - 16) \cdot (e^{2x} - 5) = 0$

(b) $-16x^4 + x^6 = -6x^5$

(c) $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$

(d) $4e^{2x} + 6e^x = 4$

(e) $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$

(f) $x^4 = 4 + 3x^2$

Aufgabe 20 – Abi★★

Bestimme jeweils die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen

(a) $x^2 + x - 6 = 0$

(b) $8e^{4x+6} = 8$

(c) $2xe^{x^2+4} = 0$

(d) $4e^{2x} - e^x = 0$

(e) $4xe^{x^2+4} + 2e^{x^2+4} = 0$

Aufgabe 21 – Abi★

Löse die folgenden Gleichungen.

(a) $e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0$

(b) $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$

(c) $4e^{2x} + 6e^x = 4$

(d) $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

(e) $\left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0$

Analysis

3 Funktionen

3.1 Potenzfunktionen

Merke

Die **Standardform** einer Potenzfunktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = x^r$$

- Die Graphen von Potenzfunktionen verlaufen immer durch den Punkt $P(1 \mid 1)$.
- Aus den Potenzfunktionen können durch elementare Verknüpfungen die ganzrationalen Funktionen, die gebrochenrationalen Funktionen und die Wurzelfunktionen gebildet werden.
- Je nach Exponent r können die Graphen von Potenzfunktionen sehr unterschiedliche Gestalt besitzen.

Die drei wichtigsten Untergruppen von Potenzfunktionen werden in den folgenden Merkkästen untersucht.

Tipp: Oft wird in Büchern die Standardform einer Potenzfunktion definiert als $f(x) = ax^r$. In diesem Kapitel betrachten wir nur den Fall $a = 1$, alle Streckungen und Verschiebungen werden in späteren Abschnitten erklärt.

Parabeln n-ter Ordnung

Die einfachsten Potenzfunktionen sind solche mit positiven ganzzahligen Exponenten, also

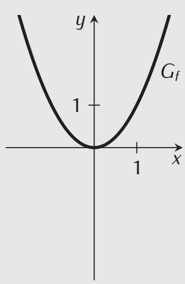
$$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

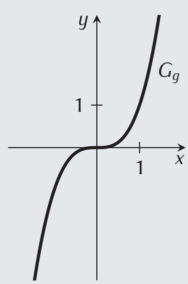
Ihre Graphen nennt man **Parabeln** n-ter Ordnung.

- Parabelfunktionen sind auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- Für $x \to +\infty$ gilt $x^n \to +\infty$.
- Je nachdem ob der Exponent n gerade oder ungerade ist, liegt ein Parabelast im zweiten oder dritten Quadranten, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von

  $$f(x) = x^2 \quad \text{und} \quad g(x) = x^3$$

  erkennen kann.





Entsprechend ergibt sich der Grenzwert für $x \to -\infty$.

Tipp: Die einfachste Parabel erster Ordnung ist die Funktion $f(x) = x^1 = x$. Der Graph entspricht der ersten Winkelhalbierenden.

Hyperbeln n-ter Ordnung

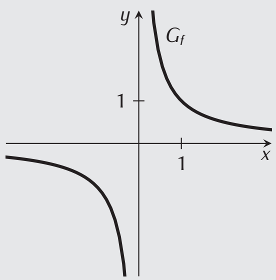
Hyperbelfunktionen n-ter Ordnung sind Potenzfunktionen mit negativem ganzzahligen Exponenten. Man kann sie auch schreiben als

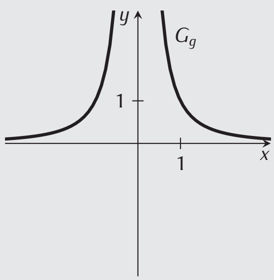
$$f(x) = \frac{1}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- Hyperbelfunktionen n-ter Ordnung sind für $x \neq 0$ definiert.
- Für $x \to \pm\infty$ gilt $\frac{1}{x^n} \to 0$.
- Je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, liegt ein Hyperbelast im zweiten oder dritten Quadranten, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \frac{1}{x^2}$$

sehen kann.





- Hyperbeln n-ter Ordnung besitzen zwei Arten von **Asymptoten**. Als Asymptoten bezeichnet man Geraden, denen sich der Funktionsgraph für bestimmte Bereiche des Definitionsbereiches annähert. Alle nicht verschobenen Hyperbeln n-ter Ordnung besitzen die y-Achse als **senkrechte Asymptote** und die x-Achse als **waagerechte Asymptote**. Man sagt auch, dass die hier betrachteten Funktionen eine **Polstelle** bei $x = 0$ besitzen.

Tipp: Wenn man Hyperbelfunktionen verschiebt, verschieben sich ihre Asymptoten einfach auf die gleiche Art und Weise mit. Dementsprechend kann man auch das Verhalten im Unendlichen von verschobenen Hyperbeln leicht berechnen.

Elementare Wurzelfunktionen

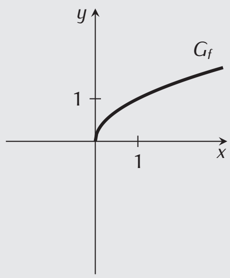
Elementare **Wurzelfunktionen** kann man darstellen als

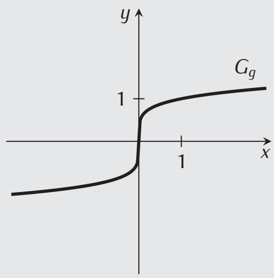
$$f(x) = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{beziehungsweise} \quad f(x) = \sqrt[n]{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Elementare Wurzelfunktionen sind nur für gerade n nur für $x \geq 0$, für ungerade n aber auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.
- Für $x \to +\infty$ gilt $\sqrt[n]{x} \to +\infty$.
- Je nachdem ob n gerade oder ungerade ist, haben elementare Wurzelfunktionen einen oder zwei Äste, wie man im folgenden Schaubild an den Funktionsgraphen von

  $$f(x) = \sqrt[2]{x} \quad \text{und} \quad g(x) = \sqrt[5]{x}$$

  sehen kann.





Aufgabe 22 – Abi★

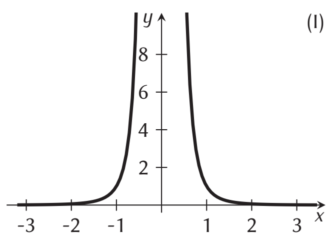
Ordne die Schaubilder den folgenden Funktionen zu und begründe deine Zuordnung.

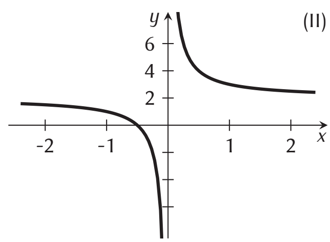
(a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

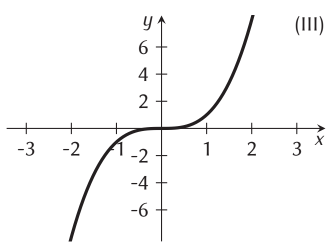
(b) $g(x) = x^3$

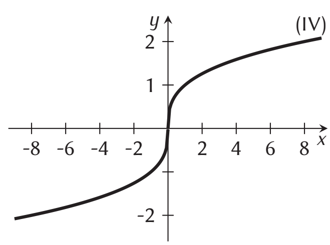
(c) $h(x) = \dfrac{1}{x^4}$

(d) $i(x) = \dfrac{1}{x} + 2$









3.2 Ganzrationale Funktionen

Merke

Die **Standardform** einer ganzrationalen Funktion f ist gegeben durch:

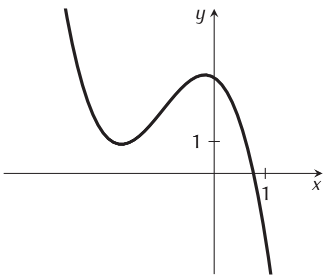
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

- Ganzrationale Funktionen heißen auch **Polynome**.
- Die höchste auftretende Potenz n heißt **Grad** der Funktion f.
- Eine ganzrationale Funktion vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Tipp: Um das Verhalten im Unendlichen zu untersuchen, muss lediglich der Term mit der höchsten Potenz herangezogen werden (Vorzeichen beachten).

- Geht der Term gegen $+\infty$, geht $f(x)$ gegen $+\infty$.
- Geht der Term gegen $-\infty$, geht $f(x)$ gegen $-\infty$.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = -x^3 - 3x^2 - x + 3$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad 3. Also kann f maximal drei Nullstellen haben. Im Schaubild kann man erkennen, dass der Graph von f genau einen Schnittpunkt mit der x-Achse hat und die Funktion f somit genau eine Nullstelle.



Für das Verhalten im Unendlichen wird der Term der höchsten Potenz untersucht, also $-x^3$.

- Für $x \to +\infty$ geht $-x^3 \to -\infty$, also $f(x) \to -\infty$.
- Für $x \to -\infty$ geht $-x^3 \to +\infty$, also $f(x) \to +\infty$.

Das Verhalten im Unendlichen lässt sich zudem am Graphen der Funktion ablesen.

Aufgabe 23 – Abi★

(a) Warum ist $h(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4)$ eine ganzrationale Funktion?

(b) Was ist der Grad von h?

(c) Was sind die Nullstellen von h?

(d) Wie verhält sich die Funktion h im Unendlichen?

Aufgabe 24 – Abi★★

Ordne folgende Funktionsterme den Schaubildern zu und begründe Deine Wahl:

(a) $f(x) = x^5 - x^2 + 1$

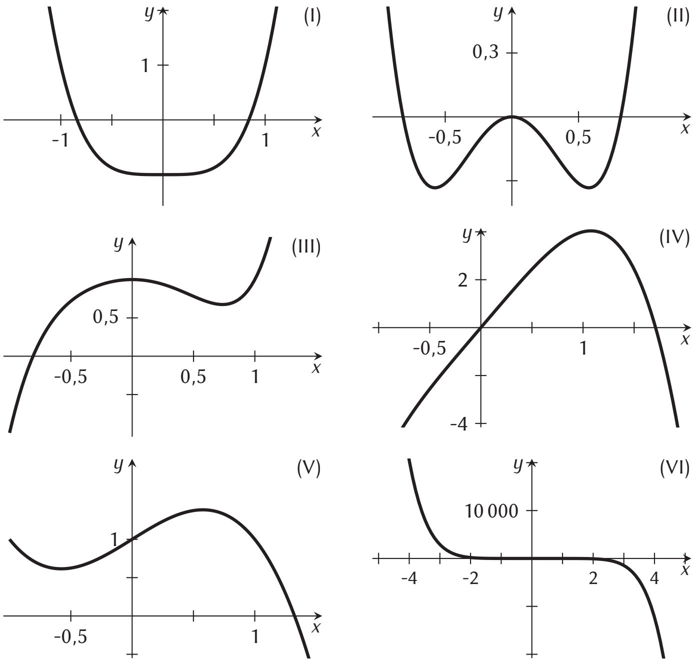
(b) $g(x) = 3x^4 - 2x^2$

(c) $h(x) = -x^3 + x + 1$

(d) $i(x) = 5x - x^4$

(e) $j(x) = -x^7 + x^6 - x$

(f) $k(x) = 2x^4 - 1$



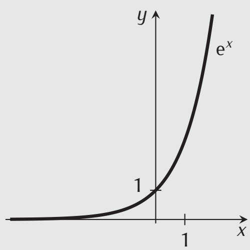
3.3 Exponential- und Logarithmusfunktionen

3.3.1 Die Exponentialfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ nennt man **Exponentialfunktion**.

- Es gilt: $\mathrm{e}^x > 0$ für alle Werte von x. Somit hat die Exponentialfunktion $f(x) = \mathrm{e}^x$ keine Nullstellen.
- Es gilt: $\mathrm{e}^0 = 1$.
- Für $x \to +\infty$ gilt $\mathrm{e}^x \to +\infty$.
- Für $x \to -\infty$ gilt $\mathrm{e}^x \to 0$.



Tipp: Die Exponentialfunktion wächst für $x \to +\infty$ sehr schnell gegen unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere:

$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n} \to +\infty \text{ für } x \to +\infty.$$

Aufgabe 25 – Abi★

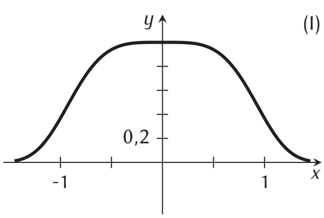
Ordne die Graphen den folgenden Funktionen zu:

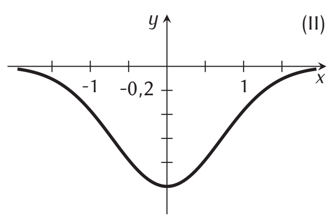
(a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$

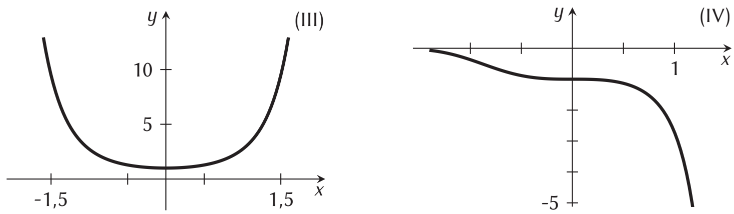
(b) $g(x) = \mathrm{e}^{-x^4}$

(c) $h(x) = -\mathrm{e}^{x^3}$

(d) $i(x) = -\mathrm{e}^{-x^2}$







Aufgabe 26 – Abi★

Untersuche das Verhalten folgender Funktionen für $x \to \pm\infty$:

(a) $f(x) = x^2 e^x$

(b) $g(x) = \dfrac{x^{200}}{e^{-x}}$

(c) $h(x) = x - e^{-x}$

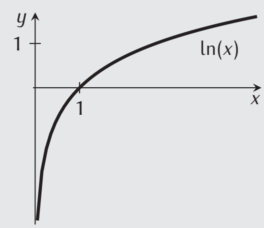
(d) $i(x) = e^{-x^2+x}$

3.3.2 Die Logarithmusfunktion

Merke

Die Funktion $f(x) = \ln(x)$ nennt man (natürliche) **Logarithmusfunktion**.

- Die Logarithmusfunktion ist nur für $x > 0$ definiert.
- Es gelten: $\ln(x) < 0$ für $0 < x < 1$ und $\ln(x) > 0$ für $x > 1$.
- Es gelten: $\ln(1) = 0$ und $\ln(e) = 1$.
- Für $x \to \infty$ gilt $\ln(x) \to \infty$.
- Für $x \to 0$ gilt $\ln(x) \to -\infty$.



Tipp: Die Logarithmusfunktion wächst für $x \to +\infty$ sehr langsam gegen unendlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere:

$$\frac{\ln(x)}{x^n} \to 0 \text{ für } x \to +\infty.$$

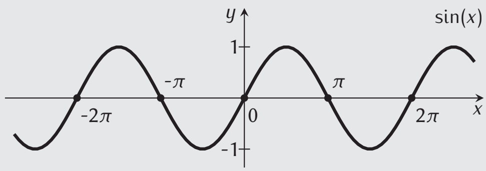
3.4 Trigonometrische Funktionen – nur eA

3.4.1 Die Sinusfunktion – nur eA

Merke – nur eA

Die Funktion $f(x) = \sin(x)$ nennt man **Sinusfunktion**.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \sin(x) \leq 1$.
- Die Sinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$.
- Die Nullstellen von $\sin(x)$ sind $\ldots -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ (allgemein: $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$).



Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = \sin(2x + 4\pi)$ im Intervall $[-2\pi; 0)$. Es gilt:

$$\sin(2x + 4\pi) = 0, \quad \text{also} \quad 2x + 4\pi = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Das ist gleichbedeutend mit:

$$2x = k\pi \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{k\pi}{2}.$$

Im Intervall $[-2\pi; 0)$ ist die Menge N der Nullstellen von f also gegeben durch

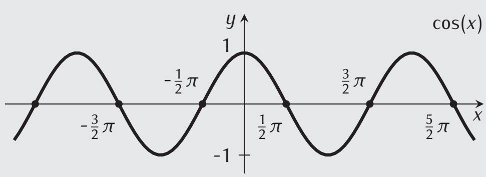
$$N = \left\{-2\pi; -\frac{3}{2}\pi; -\pi; -\frac{1}{2}\pi\right\}.$$

3.4.2 Die Kosinusfunktion – nur eA

Merke – nur eA

Die Funktion $f(x) = \cos(x)$ nennt man **Kosinusfunktion**.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Die Kosinusfunktion hat die Periode 2π. Es gilt also: $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$.
- Die Nullstellen von $\cos(x)$ sind $\ldots -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots$
  $\left(\text{allgemein: } \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right)$.



Tipp: Man erhält den Graphen der Kosinusfunktion, indem der Graph der Sinusfunktion um $\frac{\pi}{2}$ nach links verschoben wird:

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x).$$

Beispiel: Gesucht sind die Nullstellen von $f(x) = 2\cos(x) + 2$ im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$.

$$\begin{aligned} 2\cos(x) + 2 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \cos(x) = -1 \\ &\Longrightarrow \quad x = (2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Die Menge N der Nullstellen von f im Intervall $[-2\pi; 2\pi]$ ist also gegeben durch: $N = \{-\pi; \pi\}$.

Aufgabe 27 – nur eA Abi★

Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen:

(a) $f_1(x) = \sin(4x) - 1$

(b) $f_2(x) = -\cos(3x) + 0{,}5$

3.5 Wurzelfunktionen

Merke

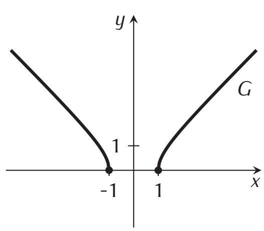
Die **Standardform** einer Wurzelfunktion f ist gegeben durch:

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$$

- Meistens ist dabei die Funktion g unter der Wurzel, auch Radikand genannt, eine ganzrationale Funktion und $n = 2$, also die normale Quadratwurzel.
- Es ist wichtig, bei Wurzelfunktionen auf den Definitionsbereich zu achten.
- Die Nullstellen von f sind die gleichen wie die von g, sofern die letzteren im Definitionsbereich von f liegen.

Beispiel: Die Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ist eine typische Wurzelfunktion. Sie ist zwischen -1 und 1 nicht definiert, da in diesem Fall der Radikand negativ ist. Die Funktion f kann maximal zwei Nullstellen haben.

Der Graph G der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt.



Zu beachten ist, dass die Grenzen des Definitionsbereiches mit ausgefüllten Kreisen gekennzeichnet werden, wenn die Grenzen so wie in diesem Beispiel mit im Definitionsbereich liegen. Falls die Grenzen nicht im Definitionsbereich enthalten sind, werden sie im Graphen mit offenen Kreisen dargestellt.

Aufgabe 28

(a) Skizziere mit Hilfe einer Wertetabelle den Graphen G_f der Funktion $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

(b) Die Funktion f gehört zur Kurvenschar

$$f_a(x) = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Wie kann man den Parameter a geometrisch interpretieren?

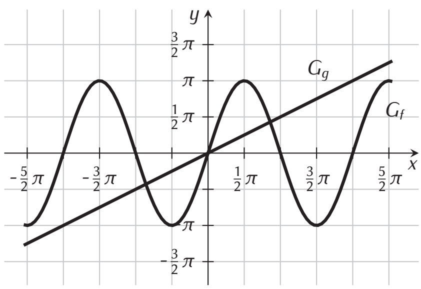
3.6 Zusammengesetzte Funktionen

Merke:

Aus zwei Funktionen f und g kann auf unterschiedliche Arten eine neue Funktion h definiert werden:

- Die Funktionen g und f werden hintereinander ausgeführt.
  Man schreibt: $f\,(g(x))$ oder auch manchmal $\big(f \circ g\big)(x)$.
- Die Funktionen f und g können durch Rechenoperationen wie Addition, Multiplikation die neue Funktion h definieren. Zum Beispiel $h(x) = g(x) \cdot f(x)$.

Beispiel: In der folgenden Abbildung sind die Graphen G_f und G_g zweier Funktionen f und g gegeben.



Auch ohne Kenntnis der Funktionsterme kann man nur aus den Graphen Erkenntnisse über zusammengesetzte Funktionen wie zum Beispiel h_1 und h_2 mit

$$h_1(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) = f\,(g(x))$$

gewinnen.

Beispielsweise:

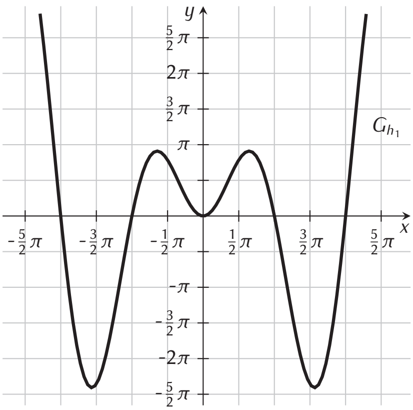
- Bei allen Nullstellen der Funktionen f und g hat auch h_1 eine Nullstelle, da die Funktionswerte von h_1 aus der Multiplikation der Funktionswerte von f und g entstehen. Für h_2 muss dies nicht gelten.
- Es gilt $h_1(0{,}5\pi) = \pi \cdot 0{,}25\pi = 0{,}25\pi^2$
- Es gilt $h_2(\pi) = f\,(g(\pi)) = \pi, \quad \text{da} \quad g(\pi) = 0{,}5\pi \quad \text{und} \quad f(0{,}5\pi) = \pi.$

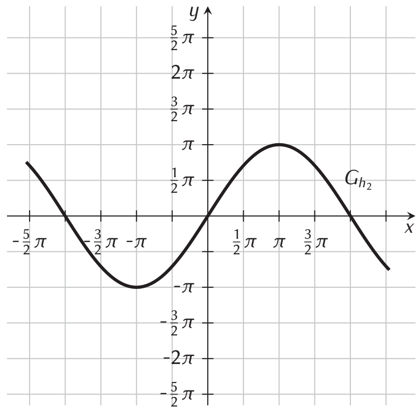
Sind die Funktionsterme von f und g bekannt, kann man auch die Funktionsterme von zusammengesetzten Funktionen wie h_1 und h_2 aufstellen.

In diesem Beispiel gilt $f(x) = \pi \cdot \sin(x)$ und $g(x) = 0{,}5x$. Somit ergeben sich für h_1 und h_2:

$$h_1(x) = 0{,}5\pi x \cdot \sin(x) \quad \text{und} \quad h_2(x) = \pi \sin(0{,}5x).$$

Die zugehörigen Graphen der beiden zusammengesetzten Funktionen h_1 und h_2 sehen ziemlich unterschiedlich aus wie folgende Abbildungen zeigen.





Aufgabe 29

Gegeben sind die Funktionen $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = 2\pi x^2$. Die Funktionen h_1 und h_2 werden wie folgt definiert:

$$h_1(x) = f(g(x)) \quad \text{und} \quad h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$$

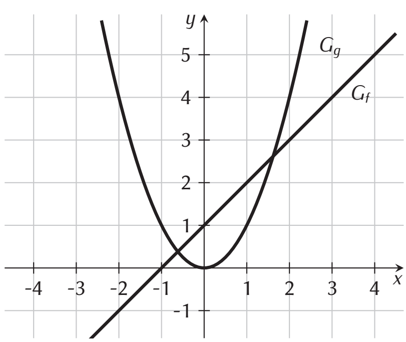
(a) Gib die Funktionsterme von h_1 und h_2 an.

(b) Berechne $h_1(0)$ und $h_2(0)$.

(c) Berechne $h_1(t)$, wobei $t \in \mathbb{N}$ gilt und begründe deine Lösung.

Aufgabe 30

In der Abbildung sind die Graphen G_f und G_g einer linearen Funktionen f und einer ganzrationalen Funktion g zweiten Grades dargestellt.



(a) Bestimme $f(g(2))$.

(b) Bestimme ein x so, dass $f(g(x)) = 2$ gilt.

(c) Entscheide begründet, wie viele Nullstellen die Funktion h_1 mit $h_1(x) = f(x) - g(x)$ besitzt.

(d) Gib den Grad der ganzrationalen Funktionen h_1 und h_2 mit

$$h_2(x) = f(x) \cdot g(x)$$

an. Begründe deine Antwort.

4 Ableitung

4.1 Ableitungsregeln

4.1.1 Elementare Ableitungen

Ableitungen elementarer Funktionen

In der folgenden Tabelle sind die Ableitungen elementarer Funktionen zusammengestellt:

$f(x)$	x^n	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\ln(x)$
$f'(x)$	nx^{n-1}	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\frac{1}{x}$

Beispiel: Es gelten:

$$f(x) = x^6 \implies f'(x) = 6 \cdot x^{6-1} = 6x^5$$
$$f(x) = x^9 \implies f'(x) = 9 \cdot x^{9-1} = 9x^8$$

Konstante Faktoren und Summanden

Für eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ gelten:

$$g(x) = a \cdot f(x) \implies g'(x) = a \cdot f'(x)$$
$$g(x) = f(x) + a \implies g'(x) = f'(x)$$

Konstante Faktoren bleiben beim Ableiten erhalten, konstante Summanden fallen beim Ableiten weg.

Beispiel: Es gelten:

$$f(x) = 3x^2 \implies f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 6x$$
$$f(x) = x^2 + 2 \implies f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$
$$f(x) = \sin(x) + 32 \implies f'(x) = \cos(x)$$

Aufgabe 31

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen durch Anwenden der elementaren Ableitungsregeln

(a) $f(x) = x^3$

(b) $f(x) = x^{-2}$

(c) $f(x) = 4x^{-3}$

(d) $f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x}$

(e) $f(x) = -2\sqrt{x}$

(f) $f(x) = -4\sqrt[3]{x}$

(g) $f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

Aufgabe 32

Bestimme jeweils die Ableitungfunktion der folgenden Funktionen durch Anwenden der elementaren Ableitungsregeln

(a) $f(x) = 3e^x$

(b) $f(x) = 4\sin(x) + 4$

(c) $f(x) = 16\cos(x)$

(d) $f(x) = 7\ln(x) + 15$

Analysis

4.1.2 Summen von Funktionen

Quickstart Ableitung einer Summe von Funktionen

➤ Beispiel: $f(x) = x^4 + 6x^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4x^3 + 12x$

Erkennungsmerkmal: Die Funktion besteht aus einer Summe von mehreren Funktionen

Lösungsmethode: Summenregel für die Ableitung

4.1.3 Erkennen von Summen von Funktionen

Was ist eine Summe von Funktionen?

Das Erkennungsmerkmal für eine Summe von Funktionen ist: Die Funktion kann als Summe von mehreren Funktionen dargestellt werden.

Beispiel: Folgende Funktionen sind Summen von Funktionen, denn : Jede Funktion kann als Summe von mehreren Funktionen dargestellt werden.

$f(x) = x^2 + 7e^x$

$f(x) = \cos(x) - 16x + e^x$

4.1.4 Ableiten von Summen von Funktionen

Summenregel

Die Ableitung einer Summe von Funktionen kann mithilfe der Summenregel bestimmt werden. Es gilt:

$$f(x) = u(x) + v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) + v'(x).$$

Rezept zur Ableitung einer Summe von Funktionen

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x$$

Es handelt sich um eine Summe von Funktionen, denn: Die Funktion kann als Summe von mehreren Funktionen dargestellt werden. Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der Summenregel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot x^{3-1} + 3 \cdot 2 \cdot x^{2-1} + 7 \cdot x^{1-1} \\ &= 3x^2 + 6x + 7. \end{aligned}$$

Aufgabe 33

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = 4x^3 - x$

(b) $f(x) = -5x^4 + x^3$

(c) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 1$

(d) $f(x) = -8x^4 + 6x^2 - x + 3$

(e) $f(x) = \frac{3}{2}x^{-4} - \frac{1}{6}x^{-2}$

4.1.5 Verkettungen von Funktionen

Quickstart Ableitung von verketteten Funktionen

- Beispiel: $f(x) = (3x^2 + 6x)^2 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3 \cdot (3x^2 + 6x) \cdot (6x + 6)$
- Erkennungsmerkmal: Eine innere Funktion wird in eine äußere Funktion eingesetzt
- Lösungsmethode: Kettenregel für die Ableitung

4.1.6 Erkennen von Verkettungen von Funktionen

Was ist eine verkettete Funktion?

Das Erkennungsmerkmal 👁 für eine verkettete Funktion ist: Die Funktion f kann als Hintereinanderausführung oder Verkettung der beiden Funktionen u und v geschrieben werden, also

$$f(x) = u\big(v(x)\big).$$

Alternatives Erkennungsmerkmal 👁 für eine verkettete Funktion ist: Eine Funktion wird in eine weitere Funktion eingesetzt.
In diesem Zusammenhang heißt v die **innere** und u die **äußere Funktion** von f.

Tipp: Statt $u\big(v(x)\big)$ schreibt man auch manchmal $\big(u \circ v\big)(x)$.

Beispiel: Folgende Funktionen sind verkettete Funktionen, denn 👁: Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt.

$$f(x) = \left(x^2 + 3\right)^3$$
$$f(x) = \left(5x^2 + 16\right)^2$$
$$f(x) = \mathrm{e}^{5x+7}$$
$$f(x) = \sin\left(x^3 + 8\right)$$

4.1.7 Ableiten von Verkettungen von Funktionen

🔧 Kettenregel

Die Ableitung einer verketteten Funktion f mit

$$f(x) = u\big(v(x)\big)$$

kann mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt werden. Es gilt:

$$f'(x) = u'\big(v(x)\big) \cdot v'(x).$$

Umgangssprachlich kann man sich die Kettenregel so merken: „Ableitung der äußeren Funktion mal Ableitung der inneren Funktion“.

Rezept zur Ableitung von verketteten Funktionen

Bestimme die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{3x+2}.$$

Es handelt sich um eine verkettete Funktion, denn 👁: Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt.

➤ *Bestimmung der inneren und äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

Innere Funktion:	$v(x) = 3x + 2$	$\Longrightarrow$	$v'(x) = 3$
Äußere Funktion:	$u(v) = \mathrm{e}^v$	$\Longrightarrow$	$u'(v) = \mathrm{e}^v$.

➤ *Anwenden der Kettenregel*
Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{v(x)} \cdot v'(x) = \mathrm{e}^{3x+2} \cdot 3.$$

Aufgabe 34

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^2$

(b) $f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^4$

(c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}}$

Aufgabe 35

Bestimme die Ableitungsfunktion der Funktion f mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x}$$

Aufgabe 36

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \sin\left(x^2 + 3x\right)$

(b) $f(x) = \cos\left(x^2 + 3x\right)$

4.1.8 Produkt von Funktionen

Quickstart Ableitung eines Produkts von Funktionen

➤ BEISPIEL: $f(x) = (2x + 3) \cdot (x^2 + 8) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot \left(x^2 + 8\right) + (2x + 3) \cdot (2x)$

ERKENNUNGSMERKMAL: Die Funktion besteht aus einem Produkt von zwei Funktionen

LÖSUNGSMETHODE: Produktregel für die Ableitung

4.1.9 Erkennen von Produkten von Funktionen

Was ist ein Produkt von Funktionen?

Das Erkennungsmerkmal für ein Produkt von Funktionen ist: Die Funktion kann als Produkt von mehreren Funktionen dargestellt werden.

Beispiel: Folgende Funktionen sind Produkte von Funktionen, denn: Die Funktion kann als Produkt von mehreren Funktionen dargestellt werden.

$$f(x) = \left(x^2 + 3\right) \cdot \mathrm{e}^{7x}$$
$$f(x) = \left(16x + x^2\right) \cdot \left(5 + 13x^2\right)$$

4.1.10 Ableiten von Produkten von Funktionen

Produktregel

Die Ableitung eines Produktes von Funktionen kann mithilfe der Produktregel bestimmt werden. Es gilt:

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

Rezept zur Ableitung eines Produkts von Funktionen

Bestimme die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (x^2 + 5) \cdot e^{3x}$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, denn: Die Funktion kann als Produkt von mehreren Funktionen dargestellt werden.

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\text{Erster Faktor:} \quad u(x) = x^2 + 5 \quad \Longrightarrow \quad u'(x) = 2x$$

$$\text{Zweiter Faktor:} \quad v(x) = e^{3x} \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 3e^{3x}.$$

➤ *Anwenden der Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = (2x) \cdot e^{3x} + (x^2 + 5) \cdot 3 \cdot e^{3x} = 2xe^{3x} + 3(x^2 + 5)e^{3x}$$

Aufgabe 37

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = (4x + 2) \cdot (x^2 + 2x)$

(b) $f(x) = x^3 \cdot \left(x^3 - 4x\right)$

(c) $f(x) = \left(4x^3 - x\right) \cdot e^x$

(d) $f(x) = \sin(x) \cdot e^x$

Aufgabe 38

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = \sin(x) \cdot e^{2x}$

(b) $f(x) = (4x + 2)^2 \cdot \left(x^2 + 2x\right)$

(c) $f(x) = e^{x^2+3x} \cdot (2x^3 + 4x)$

(d) $f(x) = \left(x^2 + 12x\right) \cdot e^{2x^4-2x}$

Analysis

4.1.11 Gemischte Ableitungen

Aufgabe 39

Benenne die übergeordnete Struktur der entsprechenden Funktion und begründe Deine Entscheidung:

(a) $f(x) = 20x^4 - 26x^2$

(b) $f(x) = x^2 + x - 6$

(c) $f(x) = e^{4x+6}$

(d) $f(x) = 2x \cdot e^{2x+4}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$

(f) $f(x) = \ln(25x + 8)$

Aufgabe 40

Benenne die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss:

(a) $f(x) = 4x^2 - 10x$

(b) $f(x) = \left(x^3 + 2\right) \cdot \left(x^2 + 7x\right)$

(c) $f(x) = e^{5x+3}$

(d) $f(x) = 2x \cdot e^{3x^2-2}$

(e) $f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$

(f) $f(x) = \ln(17x + 5)$

Aufgabe 41

Bestimme jeweils die Ableitungsfunktion der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = -2x^5 + x^3 + 3$

(b) $f(x) = \sqrt{4x^2 - 7}$

(c) $f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} + 5$

(d) $f(x) = 3e^{2x}$

(e) $f(x) = 2e^{4x+6}$

(f) $f(x) = (x + 4)\, e^{x^2+4}$

Aufgabe 42 – Abi★

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen.

(a) $f(x) = (3 + \cos(x))^4$

(b) $f(x) = (5x + 1) \cdot \sin(x^2)$

(c) $f(x) = \left(4 + e^{3x}\right)^5$

(d) $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{2x}$

(e) $f(x) = \left(2x^2 + 5\right) \cdot e^{-2x}$

(f) $f(x) = \cos(x) \cdot e^{3x}$

Aufgabe 43 – Abi★

Leite folgende Funktionen ab und vereinfache den entsprechenden Term soweit wie möglich:

(a) $f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - x + 5$

(b) $f(x) = \frac{\sin(2x)}{2\pi}$

(c) $f(x) = e^{-3x}$

(d) $f(x) = (2x - 3) \cdot e^x$

(e) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$

(f) $f(x) = x \cdot \sin(x) + 5x^2$

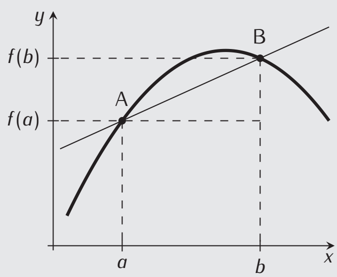
(g) $f(x) = e^{-0{,}3x \cdot \cos(x)}$

4.2 Bedeutung der Ableitung

4.2.1 Mittlere und Momentane Steigung

Merke

➤ Die **durchschnittliche/mittlere Änderungsrate** für eine Funktion f in einem Intervall $I = [a; b]$ entspricht der Steigung der Gerade, die durch die zwei Punkte $A(\,a \mid f(a)\,)$ und $B(\,b \mid f(b)\,)$ verläuft. Man spricht hier auch von der **Sekantensteigung**. Sie lässt sich entsprechend der Betrachtung im Steigungsdreieck über den **Differenzenquotienten** berechnen.



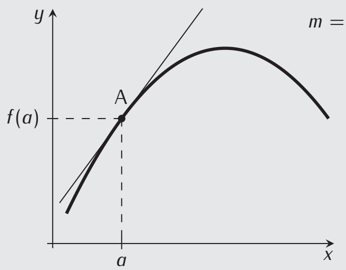
$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Also: Mittlere Änderungsrate = Steigung der Sekante = Differenzenquotient („Quotient aus Differenzen“)

➤ Die **momentane Änderungsrate** ist der Grenzwert des Differenzenquotienten. Falls der Grenzwert existiert, gilt

$$f'(a) = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Der Punkt B rückt dabei immer näher an den Punkt A heran, sodass mit der Ableitung dann die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt A angegeben wird.



$$m = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(a)$$

Also: Ableitung = Momentane Änderungsrate = Steigung der Tangente = Differentialquotient (Grenzwert des Differenzenquotienten)

Tipp:

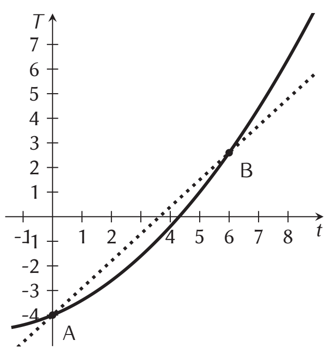
➤ Von einer Änderung spricht man, wenn man nur eine einzelne Variable betrachtet.

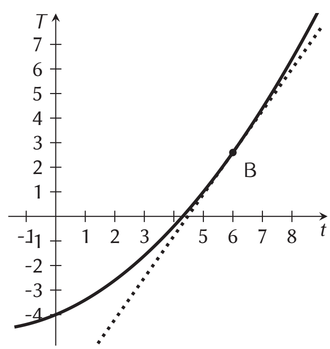
➤ Von einer Änderungsrate spricht man, wenn die Änderung einer (abhängigen) Variable y in Beziehung (Größenverhältnis) zu der Änderung einer (freien) Variable x gesetzt wird.

Beispiel: Ein Temperaturverlauf wird beschrieben durch die Funktion

$$T(t) = \frac{1}{10}t^2 + \frac{1}{2}t - 4$$

mit t in Stunden seit Beginn der Messung und $T(t)$ in °C. Bestimme die mittlere Änderungsrate während der ersten sechs Stunden sowie die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 6$.





Für die mittlere Änderungsrate gilt:

$$\frac{T(6) - T(0)}{6 - 0} = 1{,}1.$$

Im Mittel steigt die Temperatur in den ersten 6 Stunden also um 1,1 °C/h.

Für die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt $t = 6$ gilt:

$$T'(t) = \frac{1}{5}t + \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad T'(6) = 1{,}7.$$

Die momentane Temperaturänderung nach 6 Stunden beträgt damit: 1,7 °C/h.

Aufgabe 44 – ▦ Abi★

Bestimme für folgende Funktionen f die mittlere Änderungsrate auf dem Intervall $I = [-2; 2]$:

(a) $f(x) = -\frac{1}{6}x \cdot (-12 + x^2)$

(b) $f(x) = 2 \cdot (e^{-0{,}8+0{,}4x} + 2xe^{-0{,}4+0{,}3x})$

(c) $f(x) = 5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} \cdot x\right)$

Aufgabe 45 – ▦ Abi★★

Ein Bergprofil wird für $0 \leq x \leq 6$ beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = 0{,}001 \cdot \left(x^3 + 6x^2\right).$$

Dabei entspricht eine Längeneinheit 500 m. Ein Autofahrer möchte die Straße über den Berg nehmen. Davor befindet sich ein Schild, das eine mittlere Steigung von 7,2 % angibt. Überprüfe die Angabe auf dem Schild und finde heraus, ob der Autofahrer über den Berg kommen wird, wenn sein Auto für eine maximale Steigung von 13 % ausgelegt ist.

4.2.2 Interpretation der Ableitung

Merke

Allgemein gilt:

- Ist P ein Punkt auf dem Graphen von f mit x-Wert a, dann ist $f'(a)$ die Steigung der Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

Je nach Kontext hat die Ableitung von f noch weitere Bedeutungen:

- Beschreibt der Funktionswert $f(x)$ den Weg, der seit Beginn in der Zeit x zurückgelegt wurde, dann entspricht der Wert der Ableitung $f'(x)$ der Geschwindigkeit zur Zeit x.
- Beschreibt der Funktionswert $f(x)$ die Geschwindigkeit, die zur Zeit x erreicht wird, dann entspricht der Wert der Ableitung $f'(x)$ der Beschleunigung zur Zeit x.
- Beschreibt der Funktionswert $f(x)$ die Menge einer Flüssigkeit in einem Behälter zur Zeit x, dann entspricht der Wert der Ableitung $f'(x)$ der Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit zur Zeit x.

Tipp: Die mittlere Änderungsrate entspricht (in Anlehnung an die obige Reihenfolge) …

- … der mittleren/durchschnittlichen Geschwindigkeit.
- … der mittleren/durchschnittlichen Beschleunigung.
- … der mittleren/durchschnittlichen Zufluss- bzw. Abflussgeschwindigkeit.

Analysis

Beispiel: Ein Ball wird nach oben geworfen. Seine Höhe wird beschrieben durch die Funktion s mit

$$s(t) = 10t - 5t^2$$

mit t in Sekunden und $s(t)$ in Metern.

Die Ableitung s' beschreibt die Ableitung der Strecke nach der Zeit. Bei verschwindend kleinen Zeitintervallen ergibt sich damit die Momentangeschwindigkeit des Balls. Analog entspricht die mittlere Änderungsrate in diesem Kontext dann der durchschnittlichen Geschwindigkeit des Balls in m/s.

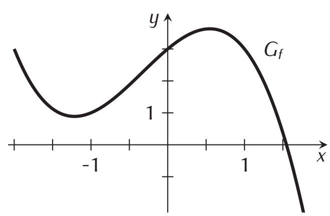
4.3 Graphisches Ableiten

Ableitungsfunktion skizzieren

Gegeben ist der Graph G_f der Funktion f. Beim Skizzieren des Graphen $G_{f'}$ der Ableitung f' kann wie folgt vorgegangen werden:

- Stellen, an denen G_f Extrempunkte hat, werden zu Schnittpunkten mit VZW des Graphen von f' mit der x-Achse.
- Stellen, an denen G_f Sattelpunkte hat, werden zu Berührpunkten von $G_{f'}$ mit der x-Achse.
- Stellen, an denen G_f Wendepunkte hat, werden zu Extrempunkten des Graphen von f'.
- In allen Abschnitten, in denen der Graph von f steigt, verläuft der Graph von f' oberhalb der x-Achse.
- In allen Abschnitten, in denen der Graph von f fällt, verläuft der Graph von f' unterhalb der x-Achse.

Beispiel: Der Graph G_f der Funktion f ist im folgenden Schaubild dargestellt. Skizziere den Graphen der Ableitungsfunktion f'.

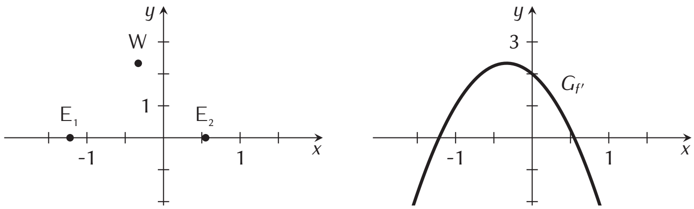


Es gelten:

- Der Graph von f hat etwas links von $x = -1$ und etwas rechts von $x = 0{,}5$ Extrempunkte. Also hat der Graph von f' dort die Nullstellen E_1 und E_2.
- Der Graph G_f hat zwischen den beiden Extrema eine Wendestelle mit maximaler Steigung. Also hat $G_{f'}$ dort einen Hochpunkt W.

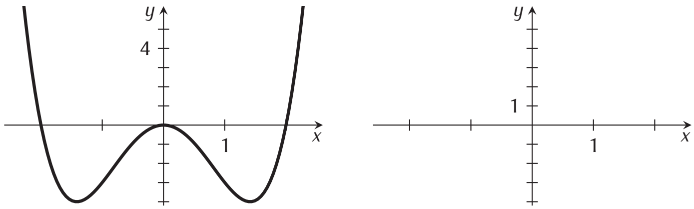
Daraus entsteht die nachfolgende linke Skizze. In allen Intervallen, in denen der Graph von f fällt, liegt der Graph von f' unterhalb der x-Achse. In allen Intervallen, in denen der Graph von f steigt, liegt der Graph von f' oberhalb der x-Achse.

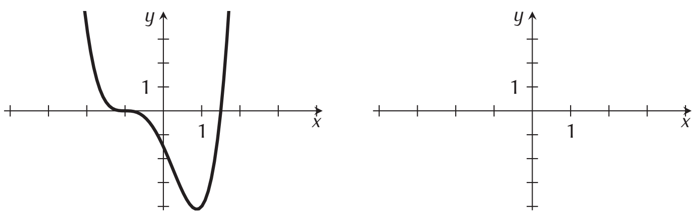
Damit ergibt sich die Skizze des Ableitungsgraphen rechts:

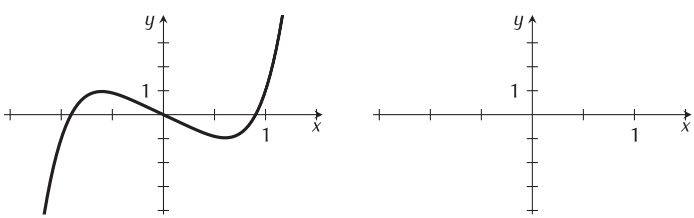


Aufgabe 46 – Abi★★

Gegeben ist jeweils der Graph einer Funktion. Skizziere den dazugehörigen Graphen der Ableitungsfunktion rechts daneben.

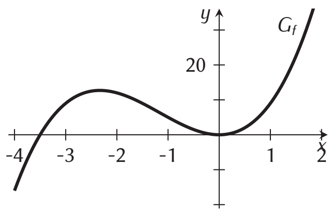






Aufgabe 47 – Abi★★

Gegeben ist der Graph G_f einer Funktion f:



Entscheide, ob folgende Aussagen für eine Stammfunktion F und die Ableitungsfunktion f' wahr, falsch oder unentscheidbar sind. Begründe deine Antwort.

(a) Die Funktion F ist für $-3 \leq x \leq 1$ monoton wachsend.

(b) Die Funktion F hat mindestens eine Nullstelle.

(c) Es gilt $\int_{-3,5}^{0} f'(x)\,dx = 0$.

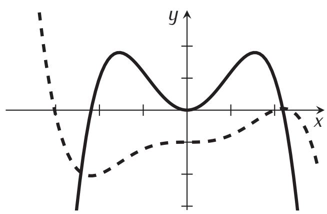
(d) Der Graph von $F(x)$ kann im dargestellten Bereich keinen Sattelpunkt haben.

(e) Es gilt $F(-2) > F(0)$.

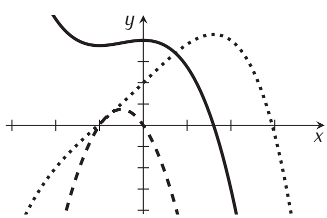
Aufgabe 48 – Abi★★–★★★

Ordne die Graphen der Funktion und der zugehörigen Ableitungsfunktionen jeweils passend zu. Begründe dabei Deine Zuordnung.

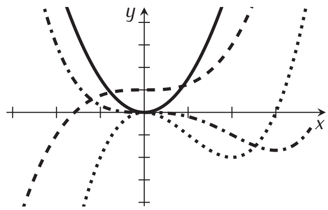
(a) Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und ihrer Ableitung f'.



(b) Gegeben sind der Graph der Funktion f und die Graphen der ersten beiden Ableitungen f' und f''.



(c) Gegeben sind die Graphen der Funktionen f und g und die Graphen der Ableitungen f' und g'.



4.4 Schnittwinkel von Funktionen

Steigungswinkel einer Geraden

Die Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ hat gegenüber der x-Achse einen Steigungswinkel von $\alpha = \tan^{-1}(m)$ Grad.

Tipp:
- Indem man den kleineren vom größeren Winkel abzieht, erhält man auch den Schnittwinkel zweier beliebiger Geraden.
- Nicht vergessen, den Taschenrechner auf *DEG* zu stellen.

Beispiel: Gegeben sind die folgenden beiden Geradengleichungen:

$$f(x) = 2x + 3$$
$$g(x) = x + 2.$$

Die Steigungswinkel der jeweiligen Geraden gegenüber der x-Achse sind gegeben durch:

$$\alpha_f = \tan^{-1}(2) = 63{,}43^\circ$$
$$\alpha_g = \tan^{-1}(1) = 45^\circ.$$

Somit schließt der Graph von f einen Winkel von $63{,}43^\circ$ und der Graph von g einen Winkel von 45° mit der x-Achse ein. Der Schnittwinkel der beiden Geraden beträgt:

$$\alpha = 63{,}43^\circ - 45^\circ = 18{,}43^\circ.$$

Schnittwinkel zwischen zwei Funktionsgraphen

Seien f und g zwei Funktionen, deren Graphen sich im Punkt $\mathrm{P}(\,a \mid f(a)\,)$ schneiden. Dann gilt für den Schnittwinkel α der Graphen von f und g im Punkt P die Formel

$$\alpha = \left|\tan^{-1}(f'(a)) - \tan^{-1}(g'(a))\right|.$$

Beispiel: Gegeben sind die Funktionen f und g mit:

$$f(x) = x^2 + 1$$
$$g(x) = x + 1.$$

Die zugehörigen Graphen schneiden sich in den Punkten $\mathrm{Q}(\,0 \mid 1\,)$ und $\mathrm{P}(\,1 \mid 1\,)$. Für $\mathrm{P}(\,1 \mid 1\,)$ gilt:

$$f'(1) = 2$$
$$g'(1) = 1.$$

Somit gilt für den Schnittwinkel der beiden Graphen im Punkt P(1 | 1):

$$\alpha = \left|\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1)\right| \approx |63{,}43^\circ - 45^\circ| = 18{,}43^\circ.$$

Aufgabe 49 – 🖩 Abi★

Berechne jeweils Schnittpunkt und Schnittwinkel der Graphen folgender Funktionen:

(a) $f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = x^2 + x$

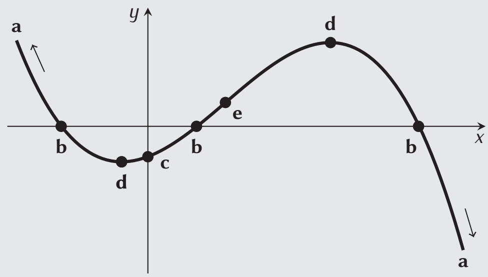
(b) $f(x) = x^3 + 4x, \quad g(x) = x - x^2.$

5 Kurvendiskussion

5.1 Übersicht Kurvendiskussion

Welche besonderen Eigenschaften kann der Graph einer Funktion haben?

Im folgenden Schaubild ist der Graph einer Funktion mit besonderen Punkten, welche im Rahmen einer Kurvendiskussion untersucht werden, dargestellt.



a Grenzverhalten
b Nullstellen / Schnittpunkte mit der x-Achse
c Schnittpunkt mit der y-Achse
d Extrempunkte
e Wendepunkte

Zusätzlich werden im Rahmen einer Kurvendiskussion folgende Eigenschaften untersucht:

- der Definitionsbereich der Funktion,
- die Symmetrie des Graphen,
- das Monotonieverhalten des Graphen und
- das Krümmungsverhalten des Graphen.

Im Anschluss an die Kurvendiskussion kann eine Skizze oder eine Zeichnung des Graphen angefertigt werden.

5.2 Definitionsbereich

Was versteht man unter dem Begriff Definitionsbereich?

Der Definitionsbereich ist die Menge **aller** Werte, die in den Funktionsterm eingesetzt und deren Funktionswerte berechnet werden können (das heißt, ohne dass ein mathematischer Widerspruch erzeugt wird).

Wie bestimmt man den Definitionsbereich?

In der folgenden Tabelle sind typische Funktionen zusammengestellt, bei denen der Definitionsbereich eingeschränkt ist und welche Art der Einschränkung vorliegt:

Funktion	$\frac{\textbf{Zählerterm}}{\textbf{Nennerterm}}$	$\sqrt{\textbf{Term}}$	$\ln(\textbf{Term})$
Einschränkung	**Nennerterm** $\neq 0$	**Term** ≥ 0	**Term** > 0

Beispiel: Betrachtet wird die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion, und damit ist der Definitionsbereich $\mathcal{D}_f$ gegeben durch $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Betrachtet wird die Funktion g mit

$$g(x) = e^{x^2-x}.$$

Die Funktion g ist eine Exponentialfunktion, und damit ist der Definitionsbereich $\mathcal{D}_g$ gegeben durch $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Betrachtet wird die Funktion h mit

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Die Funktion h ist eine Wurzelfunktion. Der Term unter der Wurzel (also der Radikand) darf nicht negativ sein. Man berechnet zunächst die Nullstellen der inneren Funktion:

$$16 - x^2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -4 \quad \text{oder} \quad x_2 = 4.$$

Es gilt:

$$16 - x^2 \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \in [-4; 4].$$

Damit ist der Definitionsbereich der Funktion h gegeben durch $\mathcal{D}_h = [-4; 4]$.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Betrachtet wird die Funktion i mit

$$i(x) = \ln(x^2 + e).$$

ist eine logarithmische Funktion. Die innere Funktion (auch Argument genannt) muss Werte größer als Null liefern, damit man den Logarithmus ausführen kann. Dazu berechnet man zunächst die Nullstellen der inneren Funktion:

$$x^2 + e = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = -e.$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung, und damit ist der Definitionsbereich der Funktion i gegeben durch $\mathcal{D}_i = \mathbb{R}$.

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Betrachtet wird die Funktion j mit

$$j(x) = \frac{2}{x-1}.$$

Die Funktion j ist eine Hyperbelfunktion, der Nenner darf also nicht Null werden. Es gilt:

$$x - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1$$

und damit ist der Definitionsbereich $\mathcal{D}_j$ der Funktion j gegeben durch $\mathcal{D}_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 50

Bestimme den Definitionsbereich $\mathcal{D}$ der folgenden Funktionen:

(a) $g(x) = \sqrt{x^3 + 8}$

(b) $h(x) = \ln(3 - x)$

Aufgabe 51

Für welche x-Werte ihrer maximalen Definitionsmenge schneidet der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = (x^3 + 2x^2 + 2x + 2)(x - 1)$$

die Gerade $y = -2$?

Aufgabe 52

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sqrt{1 - \ln(x)}$ mit maximalem Definitionsbereich $\mathcal{D}$.

(a) Bestimme $\mathcal{D}$.

(b) Bestimme dasjenige $x \in \mathcal{D}$ mit $f(x) = 2$.

5.3 Schnittpunkte mit der *x*-Achse

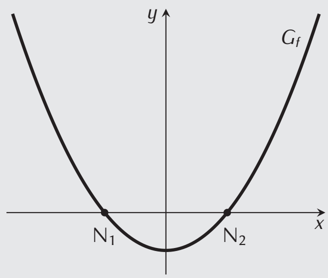
Was versteht man unter dem Begriff Schnittpunkte mit der x-Achse?

Der Graph einer Funktion f besitzt an der Stelle x_N einen Schnittpunkt mit der x-Achse, falls

$$f(x_N) = 0$$

Was bedeuten Schnittpunkte mit der x-Achse für den Graphen?

Im folgenden Schaubild ist der Graph einer Funktion mit seinen Schnittpunkten mit der x-Achse dargestellt.



Wie bestimmt man die Schnittpunkte eines Graphen mit der x-Achse?

Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen G_f einer Funktion f mit der x-Achse sind die Nullstellen der Funktion f, also alle Lösungen der Gleichung

$$f(x_N) = 0.$$

Die y-Werte der Schnittpunkte mit der x-Achse sind Null, denn für alle Punkte der x-Achse gilt $y = 0$.

Beispiel: Bestimme die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Schritt 1: Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Schnittpunktes mit der x-Achse lautet:

$$f(x_N) = 0.$$

Schritt 2: Berechne die Nullstelle von f, also die Lösung der Gleichung:

$$f(x_N) = 0 \iff x_N^3 - 12x_N^2 + 36x_N = 0 \iff x_{N,1} = 0, \quad x_{N,2} = 6.$$

Der Graph von f besitzt folgende Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1(0 \mid 0)$ und $N_2(6 \mid 0)$.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von g mit der x-Achse, wobei

$$g(x) = e^{x^2 - x}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$g(x_N) = 0.$$

Schritt 2: Gleichung lösen:

$$g(x_N) = 0 \iff e^{x_N^2 - x_N} = 0 \text{ diese Gleichung besitzt keine Lösung.}$$

Der Graph von g besitzt keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von h mit der x-Achse, wobei

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$h(x_N) = 0.$$

Schritt 2: Gleichung lösen:

$$h(x_N) = 0 \iff 4 - \sqrt{16 - x_N^2} = 0 \iff 4 = \sqrt{16 - x_N^2}.$$

Quadrieren der beiden Seiten liefert:

$$16 = 16 - x_N^2 \iff x_N^2 = 0 \iff x_N = 0$$

Das Quadrieren beider Seiten vergrößert möglicherweise die Lösungsmenge, deshalb muss eine Probe gemacht werden. Es gilt:

$$h(0) = 4 - \sqrt{16 - 0^2} = 4 - \sqrt{16} = 0,$$

und damit ist $x_N = 0$ eine Lösung der Gleichung $h(x_N) = 0$.

Der Graph von h besitzt folgenden Schnittpunkt mit der x-Achse $N(0 \mid 0)$.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von i mit der x-Achse, wobei

$$i(x) = \ln(x^2 + e).$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$i(x_N) = 0.$$

Schritt 2: Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} i(x_N) = 0 &\iff \ln(x_N^2 + e) = 0 \\ &\iff x_N^2 + e = 1 \\ &\iff x_{N,1} = -\sqrt{1 - e}, \quad x_{N,2} = \sqrt{1 - e} \end{aligned}$$

Der Graph von i besitzt folgende Schnittpunkte mit der x-Achse $N_1\left(-\sqrt{1 - e} \,\middle|\, 0\right)$ und $N_2\left(\sqrt{1 - e} \,\middle|\, 0\right)$.

Analysis

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von j mit der x-Achse, wobei

$$j(x) = \frac{2}{x-1}$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$j(x) = 0.$$

Schritt 2: Gleichung lösen:

$$\begin{aligned} j(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{2}{x-1} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2 = 0 \quad \text{keine Lösung} \end{aligned}$$

Der Graph von j besitzt keine Schnittpunkte mit der x-Achse.

Aufgabe 53

Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der folgenden Funktionen mit der x-Achse

(a) $f(x) = x^2 - 4$

(b) $f(x) = x^3 - 8$

(c) $f(x) = x^3 - 4x$

(d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

Aufgabe 54

Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der folgenden Funktionen mit der x-Achse

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{5x} - 1$

(b) $f(x) = \mathrm{e}^{5x} - \mathrm{e}^{3x}$

5.4 Schnittpunkt mit der y-Achse

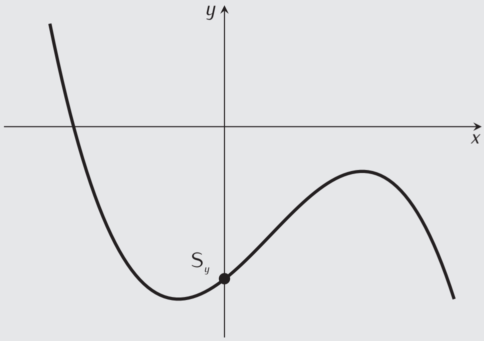
Was versteht man unter dem Begriff Schnittpunkt mit der y-Achse?

Falls die Stelle $x = 0$ im Definitionsbereich liegt, ist der Schnittpunkt des Graphen einer Funktion f mit der y-Achse gegeben durch

$$S_y\,(\,0 \mid f(0)\,)\,.$$

Was bedeutet der Schnittpunkt mit der y-Achse für den Graphen?

Im folgenden Schaubild ist der Graph einer Funktion mit seinem Schnittpunkt mit der y-Achse dargestellt.



Beachte: Der Graph einer Funktion besitzt maximal einen Schnittpunkt mit der y-Achse.

Wie bestimmt man den Schnittpunkt eines Graphen mit der y-Achse?

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. Es wird der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ bestimmt, dies ist der y-Wert des Schnittpunktes mit der y-Achse $S_y(\,0 \mid f(0)\,)$.

Beispiel: Bestimme den Schnittpunkt des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

und der y-Achse. Bestimmt den Funktionswert von f an der Stelle $x = 0$. Es gilt:

$$f(0) = 0^3 - 12 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0 = 0.$$

Der Graph von f besitzt folgenden Schnittpunkt mit der y-Achse $S(\,0 \mid 0\,)$.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von g mit der y-Achse, wobei

$$g(x) = e^{x^2-x}.$$

Es gilt:

$$g(0) = e^{0^2-0} = e^0 = 1$$

und der Graph von g besitzt den Schnittpunkt $S(\,0 \mid 1\,)$ mit der y-Achse.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von h mit der y-Achse, wobei

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Es gilt:

$$h(0) = 4 - \sqrt{16 - 0^2} = 4 - 4 = 0$$

und der Graph von h besitzt den Schnittpunkt $S(\,0 \mid 0\,)$ mit der y-Achse.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von i mit der y-Achse, wobei

$$i(x) = \ln(x^2 + \mathrm{e}).$$

Es gilt:

$$i(0) = \ln(0^2 + \mathrm{e}) = \ln(\mathrm{e}) = 1$$

und der Graph von i besitzt den Schnittpunkt $S(\,0 \mid 1\,)$ mit der y-Achse.

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von j mit der y-Achse, wobei

$$j(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Es gilt:

$$i(0) = \frac{2}{0 - 1} = -2$$

und der Graph von j besitzt den Schnittpunkt $S(\,0 \mid -2\,)$ mit der y-Achse.

Aufgabe 55

Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der folgenden Funktionen mit der y-Achse

(a) $f(x) = x^2 - 4$

(b) $f(x) = x^3 - 8$

(c) $f(x) = x^3 - 4x$

(d) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$

5.5 Symmetrie

Was versteht man unter dem Begriff Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung?

Der Graph einer Funktion f ist

- **achsensymmetrisch** zur y-Achse, falls für alle $x \in \mathcal{D}_f$ gilt

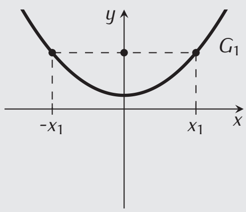
  $f(x) = f(-x)$.

- **punktsymmetrisch** zum Ursprung, falls für alle $x \in \mathcal{D}_f$ gilt

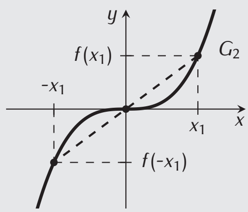
  $f(x) = -f(-x)$.

Was bedeutet Symmetrie zur y-Achse oder zum Ursprung für den Graphen?

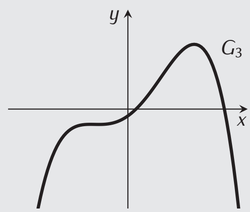
In den folgenden Schaubildern sind Graphen von Funktionen dargestellt.



Achsensymmetrisch zur y-Achse



Punktsymmetrisch zum Ursprung



Nicht symmetrisch

- Der Graph G_1 ist achsensymmetrisch zur y-Achse,
- der Graph G_2 ist punktsymmetrisch zum Ursprung und
- der Graph G_3 ist weder achsen- noch punktsymmetrisch.

Wie untersucht man die Symmetrie eines Graphen zur y-Achse oder zum Ursprung?

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G.
Zunächst wird der Term $f(-x)$ bestimmt und anschließend mit dem Term $f(x)$ verglichen.
Es gilt:

- $f(-x) = f(x)$ so ist G achsensymmetrisch zur y-Achse,
- $f(-x) = -f(x)$, so ist G punktsymmetrisch zum Ursprung,
- $f(-x) \neq f(x)$ und $f(x) \neq -f(x)$, so ist G weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiel: Untersuche den Graphen der Funktion f auf Symmetrie, wobei

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Schritt 1: Bestimme $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 12 \cdot (-x)^2 + 36 \cdot (-x) \\ &= -x^3 - 12x^2 - 36x \end{aligned}$$

Schritt 2: Vergleiche den Term $f(-x)$ mit dem Term $f(x)$.
Es gilt weder $f(-x) = f(x)$ noch $f(-x) = -f(x)$.

Der Graph der Funktion f ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Untersuche den Graphen der Funktion g auf Symmetrie, wobei

$$g(x) = e^{x^2 - x}$$

Schritt 1: Bestimme $g(-x)$:

$$g(-x) = e^{(-x)^2 - (-x)} = e^{x^2 + x}$$

Schritt 2: Vergleiche den Term $g(-x)$ mit dem Term $g(x)$.
Es gilt weder $g(-x) = g(x)$ noch $g(-x) = -g(x)$.

Der Graph der Funktion g ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Untersuche den Graphen der Funktion h auf Symmetrie, wobei

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}$$

Schritt 1: Bestimme $h(-x)$:

$$h(-x) = 4 - \sqrt{16 - (-x)^2} = 4 - \sqrt{16 - x^2}$$

Schritt 2: Vergleiche den Term $h(-x)$ mit dem Term $h(x)$. Es gilt $h(-x) = h(x)$.

Der Graph der Funktion h ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Untersuche den Graphen der Funktion i auf Symmetrie, wobei

$$i(x) = \ln(x^2 + e)$$

Schritt 1: Bestimme $i(-x)$:

$$i(-x) = \ln((-x)^2 + e) = \ln(x^2 + e)$$

Schritt 2: Vergleiche den Term $i(-x)$ mit dem Term $i(x)$. Es gilt $i(-x) = i(x)$.

Der Graph der Funktion i ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Untersuche den Graphen der Funktion j auf Symmetrie, wobei

$$j(x) = \frac{2}{x - 1}$$

Schritt 1: Bestimme $j(-x)$:

$$j(-x) = \frac{2}{(-x) - 1} = \frac{2}{-x - 1}$$

Schritt 2: Vergleiche den Term $j(-x)$ mit dem Term $j(x)$.
Es gilt weder $j(-x) = j(x)$ noch $j(-x) = -j(x)$.

Der Graph der Funktion j ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung.

5.6 Monotonie und Extrempunkte

5.6.1 Monotonie

Was versteht man unter dem Begriff Monotonie?

Gegeben ist eine differenzierbare Funktion f mit zugehörigem Graphen G.
Der Graph G ist im Intervall I **monoton steigend**, falls

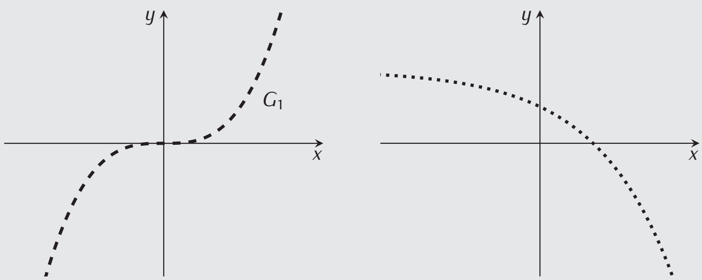
$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Der Graph G ist im Intervall I **monoton fallend**, falls

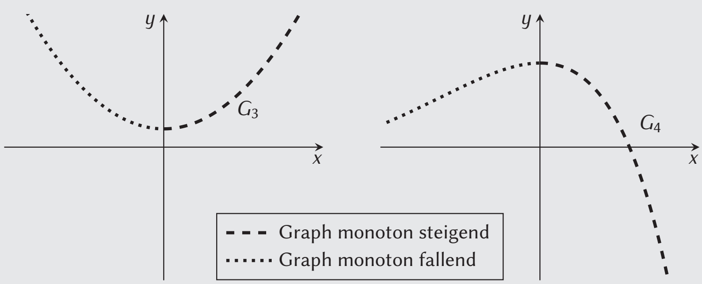
$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I.$$

Was bedeutet Monotonie für den Graphen einer Funktion?

In den folgenden Schaubildern sind Graphen dargestellt, die im dargestellten Bereich beziehungsweise in Teilintervallen dessen monoton sind.



Der Graph G_1 ist monoton steigend im ganzen dargestellten Intervall.
Der Graph G_2 ist monoton fallend im ganzen dargestellten Intervall.



Der Graph G_3 ist monoton fallend im dargestellten Intervall für alle $x \leq 0$ und monoton steigend im dargestellten Intervall für alle $x \geq 0$.
Der Graph G_4 ist monoton steigend im dargestellten Intervall für alle $x \leq 0$ und monoton fallend im dargestellten Intervall für alle $x \geq 0$.

Wie hängt das Monotonieverhalten mit den Extrempunkten eines Graphen zusammen?

An Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen.
Die Untersuchung eines Graphen auf Monotonie unterscheidet sich daher in den wesentlichen Schritten **nicht** von der Bestimmung seiner Extremwerte.

5.6.2 Extrempunkte

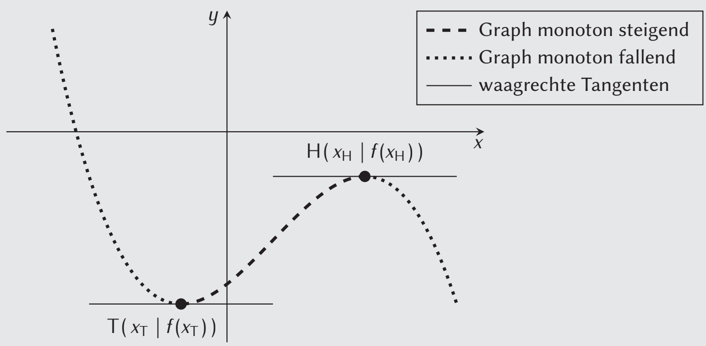
Was versteht man unter dem Begriff Extrempunkt?

Der Graph einer Funktion f besitzt

- an der Stelle x_T einen Tiefpunkt / ein Minimum, wenn in einer kleinen Umgebung von x_T alle Funktionswerte größer sind als $f(x_T)$
- an der Stelle x_H einen Hochpunkt / ein Maximum, wenn in einer kleinen Umgebung von x_H alle Funktionswerte kleiner sind als $f(x_H)$.

Was bedeuten Extrempunkte für den Graphen?

Im folgenden Schaubild ist der Graph einer Funktion mit seinen Extrempunkten dargestellt.



Beachte: An Extrempunkten besitzt der Graph eine waagrechte Tangente und es ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen!

Wie bestimmt man die Extrempunkte eines Graphen? – Hintergrundwissen

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. An allen Extremstellen besitzt der Graph eine waagrechte Tangente, es muss also gelten:

$$f'(x_E) = 0, \quad \textbf{notwendige Bedingung!}$$

Diese Bedingung ist allerdings noch nicht ausreichend für das Vorhandensein einer Extremstelle.
Es gibt zwei Möglichkeiten, diese **hinreichende Bedingung** zu überprüfen.

Möglichkeit 1: An Extremstellen ändert sich das Monotonieverhalten des Graphen. Dies kann zum Beispiel durch eine Vorzeichenwechseltabelle untersucht werden, hierbei muss unbedingt die Definitionsmenge der Funktion f beachtet werden.

Sei $x_1 < x_E < x_2$

x	x_1	x_E	x_2
$f'(x)$	$f'(x_1)$	0	$f'(x_2)$

Die konkreten Werte von $f'(x_1)$ beziehungsweise $f'(x_2)$ sind nicht relevant. Lediglich die Vorzeichen der beiden Funktionswerte sind entscheidend. Es gilt:

- Falls x_E eine Nullstelle von f' mit Vorzeichenwechsel von - nach + ist, so besitzt G an der Stelle x_E einen Tiefpunkt.
- Falls x_E eine Nullstelle von f' mit Vorzeichenwechsel von + nach - ist, so besitzt G an der Stelle x_E einen Hochpunkt.
- Falls die Funktion f' an der Stelle x_E eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel besitzt, hat der Graph an der Stelle x_E keinen Extrempunkt.

Möglichkeit 2: Das Krümmungsverhalten von f ändert sich in einem Intervall um einen Extrempunkt nicht. Es gilt:

- Falls $f''(x_E) > 0$, so besitzt G an der Stelle x_E einen Tiefpunkt.
- Falls $f''(x_E) < 0$, so besitzt G an der Stelle x_E einen Hochpunkt.
- Falls $f''(x_E) = 0$, so kann keine Aussage getroffen werden und die Existenz eines Extrempunkts mithilfe des Vorzeichenwechsels untersucht werden.

Anschließend werden noch die vollständigen Koordinaten des Extrempunkts bestimmt.

Wie bestimmt man die Extrempunkte eines Graphen?

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. Gesucht sind die Extrempunkte von G.

Schritt 1: Es muss gelten:

$$f'(x_E) = 0.$$

Schritt 2: Untersuchung von x_E auf Art des Extremums entweder mithilfe der zweiten Ableitung oder mit dem VZW-Kriterium.

f'': Berechne

$$f''(x_E).$$

Es gilt:

- $f''(x_E) > 0 \implies$ G besitzt an der Stelle x_E einen Tiefpunkt.
- $f''(x_E) < 0 \implies$ G besitzt an der Stelle x_E einen Hochpunkt.
- $f''(x_E) = 0 \implies$ Untersuchung mit dem VZW-Kriterium.

VZW: Sei $x_1 < x_E < x_2$

x	x_1	x_E	x_2
$f'(x)$	$f'(x_1)$	0	$f'(x_2)$

- Ist x_E NST von f' mit VZW von - nach +
  $\implies$ G besitzt an der Stelle x_E einen Tiefpunkt.
- Ist x_E NST von f' mit VZW von + nach -
  $\implies$ G besitzt an der Stelle x_E einen Hochpunkt.
- Ist x_E NST von f' ohne VZW
  $\implies$ G besitzt an der Stelle x_E keinen Extrempunkt.

Schritt 3: Bestimmung des jeweiligen y-Wertes für die einzelnen Extremstellen.

Beispiel: Bestimme die Extrempunkte des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

Schritt 1: Es muss gelten:

$$f'(x) = 0.$$

Bestimme zunächst die Ableitung von f. Es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36.$$

Berechne die Nullstelle von f', also die Lösung der Gleichung:

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 24x + 36 = 0 \iff x_1 = 2, \quad x_2 = 6.$$

Schritt 2: Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

- **Lösungsweg mit f'':**
  Bestimme zunächst die zweite Ableitung von f. Es gilt:

  $$f''(x) = 6x - 24$$

  und damit

  $$f''(2) = -12 < 0$$
  $$f''(6) = 12 > 0.$$

  Der Graph von f besitzt also an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 6$ einen Tiefpunkt.
- **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**
  Es gelten:

x	1	2	3	6	7
$f'(x)$	+	0	-	0	+

  Der Graph von f besitzt also an der Stelle $x = 2$ einen Hochpunkt und an der Stelle $x = 6$ einen Tiefpunkt.

Schritt 3: Es gelten:

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2^2 + 36 \cdot 2 = 32$$
$$f(6) = 6^3 - 12 \cdot 6^2 + 36 \cdot 6 = 0.$$

Der Graph von f besitzt damit den Hochpunkt $\mathrm{H}(2 \mid 32)$ und den Tiefpunkt $\mathrm{T}(6 \mid 0)$.

Beispiel: Bestimme die Intervalle, in denen der Graphen der Funktion f monoton ist, wobei

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Die Extrempunkte des Graphen von f sind gegeben durch:

Hochpunkt $\mathrm{H}(2 \mid 32)$, Tiefpunkt $\mathrm{T}(6 \mid 0)$.

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert und damit ist der Graph von f monoton steigend in den Intervallen I_1 und I_3, wobei

$$I_1 =]-\infty; 2] \quad \text{und} \quad I_3 = [6; \infty[$$

und monoton fallend im Intervall I_2, wobei

$$I_2 =]2; 6[.$$

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Bestimme die Extrempunkte des Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^2-x}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$g'(x) = 0.$$

Bestimme die Ableitung von g.

$$g'(x) = (2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{x^2-x}.$$

Berechne die Nullstellen von g':

$$g'(x) = 0 \iff (2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{x^2-x} = 0 \iff x_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}.$$

Schritt 2: Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

➤ **Lösungsweg mit g'':**
Es gilt:

$$g''(x) = \left(4x^2 - 4x + 3\right) \mathrm{e}^{x^2-x}$$

und damit

$$g''\left(\frac{1}{2}\right) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}} > 0$$

Der Graph von g besitzt also an der Stelle $x_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}$ einen Tiefpunkt.

➤ **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**
Es gelten:

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	-	0	+

Der Graph von g besitzt an der Stelle $x_{\mathrm{E}} = \frac{1}{2}$ einen Tiefpunkt.

Schritt 3: Für den y-Wert des Tiefpunkts gilt:

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}.$$

Der Graph von g besitzt den Tiefpunkt $\mathrm{T}\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right)$.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graphen der Funktion g monoton ist, wobei

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - x}.$$

Der Graph von g besitzt den Tiefpunkt

$$\mathrm{T}\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}}\right).$$

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ definiert und damit ist der Graph von f monoton fallend im Intervall I_1 und monoton steigend im Intervall I_2, wobei

$$I_1 = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right] \quad \text{und} \quad I_2 = [6; \infty[.$$

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Bestimme die Extrempunkte des Graphen der Funktion h mit

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$h'(x) = 0.$$

Bestimme die Ableitung von h.

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}.$$

Berechne die Nullstellen und Definitionslücken von h':

$$h'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}} = 0.$$

Die Stelle $x_{\mathrm{E}} = 0$ eine Nullstelle von h'.

Schritt 2: Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

➤ **Lösungsweg mit h'':**
Es gilt:

$$h''(x) = \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}^3}$$

und damit

$$h''(0) = \frac{16}{\sqrt{16 - 0^2}^3} = \frac{16}{4^3} = \frac{1}{4} > 0$$

Der Graph von h besitzt also an der Stelle $x_{\mathrm{E}} = 0$ einen Tiefpunkt.

➤ **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**
Es gelten:

x	-1	0	1
$h'(x)$	-	0	+

Der Graph von h besitzt an der Stelle $x_E = 0$ einen Tiefpunkt.

Schritt 3: Für den y-Wert des Tiefpunkts gilt:

$$h(0) = 4 - \sqrt{16 - 0^2} = 0.$$

Der Graph von h besitzt den Tiefpunkt $T(0 \mid 0)$.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graphen der Funktion h monoton ist, wobei

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Der Graph von h besitzt den Tiefpunkt $T(0 \mid 0)$. Die Funktion h ist auf $\mathcal{D}_h = [-4; 4]$ definiert und damit ist der Graph von h monoton fallend im Intervall I_1 und monoton steigend im Intervall I_2, wobei

$$I_1 = [-4; 0] \quad \text{und} \quad I_2 = [0; 4].$$

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Bestimme die Extrempunkte des Graphen der Funktion i mit

$$i(x) = \ln\left(x^2 + e\right)$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$i'(x) = 0.$$

Bestimme die Ableitung von i.

$$i'(x) = \frac{2x}{x^2 + e}$$

Berechne die Nullstelle von i':

$$i'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2x}{x^2 + e} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_E = 0.$$

Schritt 2: Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

➤ **Lösungsweg mit i'':**
Es gilt:

$$i''(x) = \frac{-2\left(x^2 - e\right)}{\left(x^2 + e\right)^2}$$

und damit

$$i''(0) = \frac{2e}{e^2} = \frac{2}{e} > 0.$$

Der Graph von i besitzt also an der Stelle $x_E = 0$ einen Tiefpunkt.

➤ **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**

Es gelten:

x	-1	0	1
$i'(x)$	-	0	+

Der Graph von i besitzt an der Stelle $x_E = 0$ einen Tiefpunkt.

Schritt 3: Für den y-Wert des Tiefpunkts gilt:

$$i(0) = \ln\left(0^2 + \mathrm{e}\right) = 1.$$

Der Graph von i besitzt den Tiefpunkt $\mathrm{T}(0 \mid 1)$.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graphen der Funktion i monoton ist, wobei

$$i(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}\right).$$

Der Graph von i besitzt den Tiefpunkt

$$\mathrm{T}(0 \mid 1).$$

Die Funktion i ist auf $\mathbb{R}$ definiert und damit ist der Graph von f monoton fallend im Intervall I_1 und monoton steigend im Intervall I_2, wobei

$$I_1 =]-\infty; 0] \quad \text{und} \quad I_2 = [0; \infty[.$$

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Bestimme die Extrempunkte des Graphen der Funktion j mit

$$j(x) = \frac{2}{x-1}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$j'(x) = 0.$$

Bestimme die Ableitung von j.

$$j'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

Berechne die Nullstelle von j':

$$j'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-2}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{keine Lösung.}$$

Der Graph von j besitzt keine Extrempunkte.

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graphen der Funktion j monoton ist, wobei

$$j(x) = \frac{2}{x - 1}.$$

Der Graph von j besitzt keine Extrempunkte. Das Monotonieverhalten kann sich nur an Definitionslücken von j, also an der Stelle $x = 1$ ändern. Es wird eine Vorzeichentabelle für j' angefertigt

x	0	1	2
$j'(x)$	-	$\lightning$	-

Der Graph von h ist monoton fallend in den Intervallen I_1 und I_2, wobei

$$I_1 =]-\infty; 1[, \quad I_2 =]1; \infty[.$$

Aufgabe 56 Abi★

Bestimme (falls vorhanden) jeweils alle Extrempunkte der zu den folgenden Funktionen gehörenden Graphen:

(a) $f(x) = x^5 - 15x^4$

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x$

Aufgabe 57 – nur eA Abi★★★

Gegeben ist für $t \in \mathbb{R}$ die Funktionenschar f_t durch

$$f_t(x) = e^{x-t} - x.$$

Der Graph der Funktion f_t wird mit G_t bezeichnet. Die Tiefpunkte aller Kurven der Schar f_t liegen auf einer Kurve. Gib eine Funktionsgleichung dieser Kurve an.

Aufgabe 58 – nur eA Abi★★

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t(x) = 3x^2 - 12x + 4t^2 - 6t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Der Graph der Funktion f_t wird mit G_t bezeichnet. Für welchen Parameter t ist der y-Wert des Tiefpunktes von G_t am kleinsten?

5.7 Krümmung und Wendepunkte

5.7.1 Krümmung

Was versteht man unter dem Begriff Krümmung?

Gegeben ist eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G.
Der Graph G ist im Intervall I **linksgekrümmt**, falls für alle $x \in I$ gilt

$$f''(x) > 0.$$

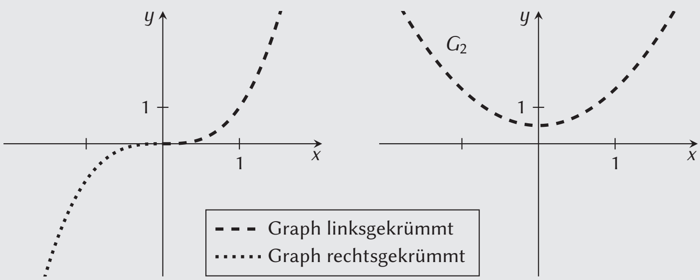
Der Graph G ist im Intervall I **rechtsgekrümmt**, falls für alle $x \in I$ gilt

$$f''(x) < 0.$$

Man kann sich vorstellen, dass man mit einem Fahrrad den Graphen der Funktion von kleinen x-Werten zu großen x-Werten abfährt. Der Stand des Lenkers entspricht dann der Krümmung des Graphen in diesem Bereich.

Was bedeutet Krümmung für den Graphen einer Funktion?

In den folgenden Schaubildern sind Graphen und deren Krümmungsintervalle dargestellt.



Der Graph G_1 ist rechtsgekrümmt im dargestellten Intervall für alle $x \leq 0$ und linksgekrümmt im dargestellten Intervall für alle $x \geq 0$.
Der Graph G_2 ist linksgekrümmt im ganzen dargestellten Intervall.

Wie hängt das Krümmungsverhalten mit den Wendepunkten eines Graphen zusammen?

Krümmung und Wendepunkte sind zwei Eigenschaften eines Graphen, die sehr eng miteinander verknüpft sind. An Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen.
Die Untersuchung eines Graphen auf Krümmung unterscheidet sich daher in den wesentlichen Schritten **nicht** von der Bestimmung seiner Wendepunkte.

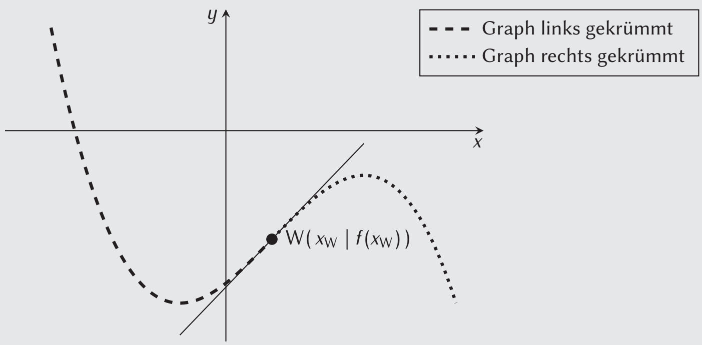
5.7.2 Wendepunkte

Was versteht man unter dem Begriff Wendepunkt?

Der Graph einer Funktion f besitzt an der Stelle x_W einen Wendepunkt, falls sich die Krümmung des Graphen in diesem Punkt ändert.

Was bedeuten Wendepunkte für den Graphen?

Im folgenden Schaubild ist der Graph einer Funktion mit seinen Wendepunkten dargestellt.



Im Wendepunkt ist die Steigung der Tangente minimal / maximal, je nach Änderung des Krümmungsverhaltens.

Zusammenhang Wendestellen ⟷ Extremstellen

Gegeben ist eine Funktion f mit Graph G. Im Wendepunkt ist die Steigung der Tangente an G minimal beziehungsweise maximal.
Die Wendestelle entspricht daher der Extremstelle des Schaubildes von f'.
Die Berechnung von Wendestellen entspricht also der Berechnung von Extremstellen der ersten Ableitungfunktion.

Wie bestimmt man die Wendepunkte eines Graphen? – Hintergrundwissen

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. An allen Wendestellen besitzt der Graph von f einen Wechsel des Krümmungsverhaltens, es muss also gelten

$f''(x_W) = 0$ **notwendige Bedingung!**

Diese Bedingung ist allerdings noch nicht ausreichend für das Vorhandensein eines Wendepunktes. Es gibt zwei Möglichkeiten, diese **hinreichende Bedingung** zu überprüfen.

Möglichkeit 1: An Wendestellen ändert sich das Krümmungsverhalten des Graphen. Dies kann zum Beispiel durch eine Vorzeichenwechseltabelle untersucht werden.

Sei $x_1 < x_W < x_2$

x	x_1	x_W	x_2
$f''(x)$	$f''(x_1)$	0	$f''(x_2)$

Es gilt:

- Falls x_W eine Nullstelle von f'' mit Vorzeichenwechsel besitzt, hat der Graph an der Stelle x_W einen Wendepunkt.
- Falls die Funktion f'' an der Stelle x_W eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel besitzt, hat der Graph an der Stelle x_W keinen Wendepunkt.

Möglichkeit 2: Es gilt:

- Falls $f'''(x_W) \neq 0$, so besitzt G an der Stelle x_W einen Wendepunkt.
- Falls $f'''(x_W) = 0$, so kann keine Aussage getroffen werden und die Existenz eines Wendepunkts muss mithilfe des Vorzeichenwechsels untersucht werden.

Wie bestimmt man die Wendepunkte eines Graphen?

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G. Gesucht sind die Wendepunkte von G.

Schritt 1: Es muss gelten:

$$f''(x_W) = 0.$$

Schritt 2: Untersuchung von x_W auf Existenz eines Wendepunkts entweder mithilfe der dritten Ableitung oder mit dem VZW-Kriterium.

f''': Berechne

$$f'''(x_W).$$

Es gilt:

- $f'''(x_W) \neq 0 \implies$ G besitzt an der Stelle x_W einen Wendepunkt.
- $f'''(x_W) = 0 \implies$ Untersuchung mit dem VZW-Kriterium.

VZW: Sei $x_1 < x_W < x_2$

x	x_1	x_W	x_2
$f''(x)$	$f''(x_1)$	0	$f''(x_2)$

- Ist x_W NST von f'' mit VZW
  $\implies$ G besitzt an der Stelle x_W einen Wendepunkt.
- Ist x_W NST von f'' ohne VZW
  $\implies$ G besitzt an der Stelle x_W keinen Wendepunkt.

Schritt 3: Bestimmung des jeweiligen y-Wertes für die einzelnen Wendestellen.

Beispiel: Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

Schritt 1: Die notwendige Bedingung für das Vorhandensein eines Wendepunktes lautet:

$$f''(x) = 0.$$

Bestimme die ersten beiden Ableitungen von f. Es gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$
$$f''(x) = 6x - 24$$

Berechne die Nullstelle von f'', also die Lösung der Gleichung:

$$f''(x) = 0 \iff 6x - 24 = 0 \iff x_W = 4.$$

Schritt 2: Untersuche, ob ein Wendepunkt vorliegt.

➤ **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**
Untersuche, ob die Ableitung f'' an der Stelle $x_W = 4$ einen Vorzeichenwechsel aufweist. Es gelten:

x	3	4	5
$f''(x)$	-	0	+

Der Graph von f besitzt damit an der Stelle $x_W = 4$ einen Wendepunkt.

➤ **Lösungsweg mit f''':**
Bestimme zunächst die dritte Ableitung von f. Es gilt:

$$f'''(x) = 6$$

und damit

$$f'''(4) = 6 \neq 0$$

Der Graph von f besitzt also an der Stelle $x_W = 4$ einen Wendepunkt.

Schritt 3: Bestimme die vollständigen Koordinaten des Wendepunkts. Es gilt:

$$f(4) = 4^3 - 12 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 = 16.$$

Der Graph von f besitzt damit den Wendepunkt $\mathrm{W}(4 \mid 16)$.

Beispiel: Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

linksgekrümmt beziehungweise rechtsgekrümmt ist.

Der Wendepunkt des Graphen von f ist gegeben durch:

$$\mathrm{W}(4 \mid 16).$$

Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ definiert und aus an der Vorzeichenwechseltabelle kann das Krümmungsverhalten des Graphen abgelesen werden. Der Graph von f ist rechtsgekrümmt im Intervall I_1 und linksgekrümmt im Intervall I_2, wobei

$$I_1 =]-\infty; 4[\quad \text{und} \quad I_2 =]4; \infty[.$$

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - x}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$g''(x) = 0.$$

Bestimme die ersten beiden Ableitungen von g.

$$g'(x) = (2x - 1) \cdot \mathrm{e}^{x^2-x}$$
$$g''(x) = \left(4x^2 - 4x + 3\right) \cdot \mathrm{e}^{x^2-x}$$

Berechne die Nullstellen von g'':

$$g''(x) = 0 \iff \left(4x^2 - 4x + 3\right) \cdot \mathrm{e}^{x^2-x} = 0.$$

Analysis

Diese Gleichung besitzt keine Lösung und der Graph von g besitzt daher auch keine Wendepunkte.

Der Graph von g besitzt keine Wendepunkte.

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion g linksgekrümmt beziehungweise rechtsgekrümmt ist, wobei

$$g(x) = \mathrm{e}^{x^2 - x}.$$

Die Funktion g ist auf $\mathbb{R}$ definiert und der Graph von g besitzt keine Wendepunkte. Es gilt:

$$g''(0) = \left(4 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 + 3\right) \cdot \mathrm{e}^{0^2 - 0} = 3 > 0.$$

Der Graph von g ist damit auf ganz $\mathbb{R}$ linksgekrümmt.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion h mit

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen:

$$h''(x) = 0.$$

Bestimme die ersten beiden Ableitungen von h.

$$h'(x) = \frac{x}{\sqrt{16 - x^2}}$$

$$h''(x) = \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}^3}$$

Berechne die Nullstellen von h'':

$$h''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{16}{\sqrt{16 - x^2}^3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt keine Lösung und der Graph von h besitzt daher auch keine Wendepunkte.

Der Graph von h besitzt keine Wendepunkte.

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion h linksgekrümmt beziehungsweise rechtsgekrümmt ist, wobei

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Der Graph von h besitzt keine Wendepunkte. Die Funktion h ist auf $\mathcal{D}_h = [-4; 4]$ definiert und es gilt

$$h''(0) = \frac{16}{\sqrt{16 - 0^2}^3} = \frac{4}{4^3} = \frac{1}{16} > 0$$

Der Graph von h ist linksgekrümmt im Intervall $]-4; 4[$.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion i mit

$$i(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}\right).$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$i''(x) = 0.$$

Bestimme die ersten beiden Ableitung von i.

$$i'(x) = \frac{2x}{x^2 + \mathrm{e}}$$

$$i''(x) = \frac{-2\left(x^2 - \mathrm{e}\right)}{\left(x^2 + \mathrm{e}\right)^2}$$

Berechne die Nullstelle von i'':

$$i''(x) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{-2\left(x^2 - \mathrm{e}\right)}{\left(x^2 + \mathrm{e}\right)^2} = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad x_{W,1} = -\sqrt{\mathrm{e}}, \quad x_{W,2} = \sqrt{\mathrm{e}}$$

Schritt 2: Untersuche, ob eine Wendestelle vorliegt

- **Lösungsweg mit i''':**
  Es gilt:

$$i'''(x) = \frac{4x\left(x^2 - 3\mathrm{e}\right)}{\left(x^2 + \mathrm{e}\right)^3}$$

und damit

$$i'''\left(-\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{-4\sqrt{\mathrm{e}}\left(\left(-\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - 3\mathrm{e}\right)}{\left(\left(-\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 + \mathrm{e}\right)^3} = \frac{8\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{8\mathrm{e}^3} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^2} \neq 0$$

$$i'''\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \frac{4\sqrt{\mathrm{e}}\left(\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 - 3\mathrm{e}\right)}{\left(\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 + \mathrm{e}\right)^3} = \frac{-8\mathrm{e}\sqrt{\mathrm{e}}}{8\mathrm{e}^3} = \frac{-\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}^2} \neq 0.$$

  Die Stelle $x_{W,1}$ und die Stelle $x_{W,2}$ sind also beide Wendestellen von i.

- **Lösungsweg mit Vorzeichenwechseltabelle:**
  Es gelten:

x	-2	$-\sqrt{\mathrm{e}}$	0	$\sqrt{\mathrm{e}}$	2
$i''(x)$	-	0	+	0	-

  Die Stelle $x_{W,1}$ und die Stelle $x_{W,2}$ sind also beide Wendestellen von i.

Schritt 3: Für die y-Werte der Wendepunkte gelten:

$$i\left(-\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\left(-\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 + \mathrm{e}\right) = \ln(2) + 1$$

$$i\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = \ln\left(\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)^2 + \mathrm{e}\right) = \ln(2) + 1.$$

Der Graph von i besitzt die Wendepunkte $W_1\left(-\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right)$.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion i linksgekrümmt beziehungsweise rechtsgekrümmt ist, wobei

$$i(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}\right).$$

Der Graph von i besitzt die Wendepunkte

$$W_1\left(-\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right) \quad \text{und} \quad W_2\left(\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right).$$

Die Funktion i ist auf $\mathbb{R}$ definiert und aus an der Vorzeichenwechseltabelle kann das Krümmungsverhalten des Graphen abgelesen werden. Der Graph von i ist rechtsgekrümmt in den Intervallen I_1 und I_3 und linksgekrümmt im Intervall I_2, wobei

$$I_1 = \left]-\infty; -\sqrt{\mathrm{e}}\right[, \quad I_3 = \left]-\sqrt{\mathrm{e}}; \sqrt{\mathrm{e}}\right[\quad \text{und} \quad I_2 = \left]\sqrt{\mathrm{e}}; \infty\right[.$$

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Bestimme die Wendepunkte des Graphen der Funktion j mit

$$j(x) = \frac{2}{x-1}.$$

Schritt 1: Notwendige Bedingung aufstellen

$$j''(x) = 0.$$

Bestimme die ersten beiden Ableitungen von j.

$$j'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$j''(x) = \frac{4}{(x-1)^3}$$

Berechne die Nullstelle von j'':

$$j''(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{4}{(x-1)^2} = 0 \quad \text{keine Lösung.}$$

Der Graph von j besitzt keine Wendepunkte.

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Bestimme die Intervalle, in denen der Graph der Funktion j linksgekrümmt beziehungsweise rechtsgekrümmt ist, wobei

$$j(x) = \frac{2}{x-1}.$$

Der Graph von j besitzt keine Wendepunkte Die Funktion j ist auf $\mathcal{D}_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ definiert. Das Krümmungsverhalten kann sich nur an Definitionslücken von j, also an der Stelle $x = 1$ ändern. Es wird eine Vorzeichentabelle für j'' angefertigt

x	0	1	2
$j''(x)$	-	$\lightning$	+

Der Graph von j rechtsgekrümmt im Intervall I_1 und linksgekrümmt im Intervall I_2, wobei

$$I_1 =]-\infty; 1[\quad \text{und} \quad I_2 =]1; \infty[.$$

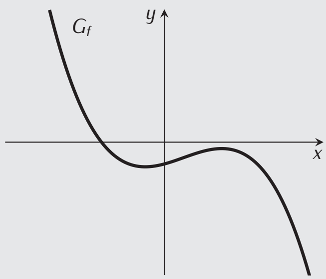
5.8 Verhalten im Unendlichen

Was versteht man unter dem Begriff Verhalten im Unendlichen?

Gegeben ist eine Funktion f mit zugehörigem Graph G. Das Verhalten der Funktion f im Unendlichen ist das Verhalten der Funktionswerte für $x \to +\infty$ beziehungweise $x \to -\infty$.

Was bedeutet das Verhalten im Unendlichen für den Graphen?

Streng genommen kann das Verhalten im Unendlichen in einem Schaubild nicht dargestellt werden, da der Graph immer nur in einem kleinen Intervall dargestellt wird. Man kann aus dem Verhalten am Rand des dargestellten Bereichs zusammen mit der Kenntnis des Monotonie- und Krümmungsverhaltens jedoch trotzdem das Verhalten im Unendlichen ablesen. Im folgenden Schaubild ist der Graph G einer Funktion f dargestellt.



Falls außerhalb des dargestellten Bereichs keine Änderung des Monotonie- oder Krümmungsverhaltens vorliegt (also keine Extrem- oder Wendepunkte), gilt:

$$f(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty$$
$$f(x) \to -\infty \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$

Wie bekommt man eine Idee für das Verhalten eines Graphen im Unendlichen?

Gegeben sei eine Funktion f mit zugehörigem Graphen G.
Um eine Idee für das Verhalten von G im Unendlichen zu bekommen, kann man zunächst immer kleiner beziehungsweise größer werdende Werte für x in den Funktionsterm einsetzen. Zum Nachweis des Verhaltens von G im Unendlichen werden meist weitere „Rechenregeln“ benötigt, die in den folgenden Kästen erklärt werden.

Analysis

„Rechnen“ in der Unendlichkeit

Mit sehr großen und sehr kleinen Größen und einer Zahl $c > 0$ können folgende Ausdrücke vereinfacht werden:

$$+\infty + (+\infty) = +\infty \qquad c + \infty = +\infty$$

$$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty \qquad -\infty \cdot (+\infty) = +\infty \qquad c \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\frac{c}{+\infty} = 0 \qquad \frac{+\infty}{c} = +\infty$$

Folgende Ausdrücke sind **unbestimmte Ausdrücke** und ergeben ohne weitere Informationen keinen Sinn:

$$+\infty - \infty \qquad \frac{+\infty}{+\infty} \qquad 0 \cdot (+\infty) \qquad \frac{0}{0}$$

Dominanzordnung elementarer Funktionen

Zum Vergleich wesentlicher Funktionstypen gilt folgende Dominanzordnung für $x \to +\infty$:

$$\ln(x) \ll \sqrt{x} \ll x \ll x^2 \ll \cdots \ll x^{100} \ll e^x \ll e^{2x} \ll \cdots \ll e^{x^2}.$$

Grenzwertsätze

Für stetige Funktionen f und g gelten folgende Grenzwertsätze, falls $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ existieren:

➤ **Summenregel**

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) + \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

➤ **Produktregel**

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \cdot \lim_{x\to+\infty} g(x)$$

➤ **„Kettenregel“**

$$\lim_{x\to+\infty} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to+\infty} g(x)\right)$$

Tipp: Die Sätze gelten natürlich auch für $\lim\limits_{x\to-\infty}$

Wie ermittelt man das Grenzverhalten einer Funktion?

Gegeben ist eine Funktion f.
Untersuche das Verhalten von f für $x \to +\infty$. Benutze folgende Regeln:

➤ Ist f eine ganzrationale Funktion, so betrachte nur den Term mit der höchsten Potenz:

$$f(x) = -x^5 + 1200x^4 - x^2 + 1 \approx -x^5 \to -\infty.$$

➤ Ist f eine zusammengesetzte Funktion, so berechne das Grenzwertverhalten jedes Ausdrucks und verrechne sie nach obigen Regeln:

$$f(x) = e^{-x} + \frac{1}{x} + 1 \to 0 + 0 + 1 = 1.$$

- Tritt ein unbestimmter Ausdruck auf, so hilft oftmals eine Termumformung, zum Beispiel Kürzen mit höchster Potenz.

$$f(x) = \frac{e^x - e^{2x}}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - e^x)}{e^x(1 + e^{-x})} = \frac{1 - e^x}{1 + e^{-x}}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \to \frac{1 - \infty}{1 + 0} = -\infty.$$

- Tritt ein unbestimmter Ausdruck auf und hilft keine Termumformung, so geht der Grenzwert dahin, wohin die dominanteste Komponente strebt, siehe Dominanzordnung oben.

$$f(x) = \frac{e^x}{x} \to \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\Longrightarrow \quad f(x) \to +\infty \quad (\text{da } e^x \text{ dominanter als } x).$$

Beispiel: Betrachte die Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x.$$

Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion. Betrachtet wird nur die höchste Potenz, im Unendlichen gilt also

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x \approx x^3.$$

Damit gelten:

$$f(x) \to -\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty$$

$$f(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to +\infty.$$

Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Betrachte die Funktion g mit

$$g(x) = e^{x^2 - x}.$$

Die Funktion g ist eine Exponentialfunktion. Es gelten:

$$x \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x \to +\infty \quad \text{und damit} \quad g(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$

$$x \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x \to +\infty \quad \text{und damit} \quad g(x) \to +\infty \quad \text{für} \quad x \to -\infty.$$

Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Betrachte die Funktion h mit

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}.$$

Die Funktion h ist eine Wurzelfunktion mit Definitionsbereich $\mathcal{D}_h = [-4; 4]$. Damit kann die Funktion h nicht auf ihr Verhalten im Unendlichen untersucht werden.

Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Betrachte die Funktion i mit

$$i(x) = \ln(x^2 + \mathrm{e}).$$

Die Funktion i ist eine logarithmische Funktion. Es gelten:

$$x \to +\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \mathrm{e} \to +\infty \quad \text{und damit} \quad i(x) \to +\infty.$$
$$x \to -\infty \quad \Longrightarrow \quad x^2 + \mathrm{e} \to +\infty \quad \text{und damit} \quad i(x) \to +\infty.$$

Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Betrachtre die Funktion j mit

$$j(x) = \frac{2}{x - 1}.$$

Es gilt:

$$j(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to +\infty$$
$$j(x) \to 0 \quad \text{für} \quad x \to -\infty.$$

Aufgabe 59 – Abi*

Wie verhalten sich die folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$?

(a) $f(x) = -6x^2 + 5x^5 - 2$

(b) $f(x) = -x^3 \mathrm{e}^{-x}$

(c) $f(x) = \mathrm{e}^x - x$

(d) $f(x) = -x^5 \mathrm{e}^{-3x^2+2}$

(e) $f(x) = 100 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,35x}\right)$

Aufgabe 60 – Abi*

Die Wirkstoffmenge eines Medikamentes im Blut lässt sich durch die folgende Funktion f beschreiben:

$$f(t) = 55 \cdot (2 - \mathrm{e}^{-0,1t^2}),\ t \geq 0,$$

mit t in Minuten und $f(t)$ in mg.
Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?

5.9 Zeichnen von Funktionengraphen

Merke

Um den Graphen G_f einer Funktion zu zeichnen werden folgende, in der Kurvendiskussion untersuchten, Eigenschaften genutzt:

- Definitionsbereich
- Schnittpunkte mit der x-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse
- Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
- Monotonie und Extrempunkte
- Krümmung und Wendepunkte.

Empfehlenswert ist es, am Ende 5 bis 10 Punkte zur Verfügung zu haben, bevor man den Graphen zeichnet.
Zusätzlich zu oben genannten Eigenschaften kann es daher notwendig sein, dass die Koordinaten weiterer Kurvenpunkte berechnet werden sollten.
Hierzu **wählt** man einige x-Werte **frei aus** und bestimmt die y-Koordinate des Punktes, indem die gewählten x-Werte in die Funktionsgleichung **eingesetzt** werden. Der entstandene Punkt $P(\,x \mid y\,)$ liegt dann auf dem Graphen der Funktion.

Beispiel: Zeichne den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

in ein geeignetes Koordinatensystem. Im Rahmen der Kurvendiskussion wurden folgende Eigenschaften des Graphen bestimmt:

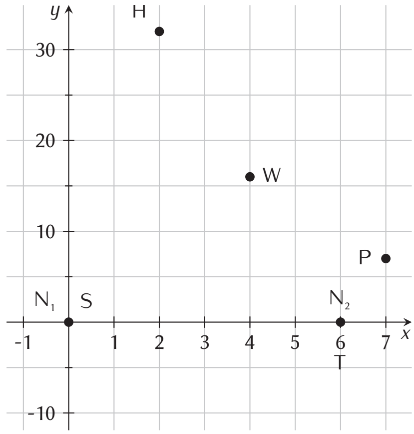
- Definitionsbereich: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_1(\,0 \mid 0\,)$, $N_2(\,6 \mid 0\,)$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S(\,0 \mid 0\,)$
- Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse: Keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
- Monotonie und Extrempunkte: $H(\,2 \mid 32\,)$, $T(\,6 \mid 0\,)$
- Krümmung und Wendepunkte: $W(\,4 \mid 16\,)$

Zunächst wird untersucht, was ein geeignetes Koordinatensystem ist. Die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Extrem- und Wendepunkte sollten auf dem Schaubild dargestellt sein. Es gelten außerdem:

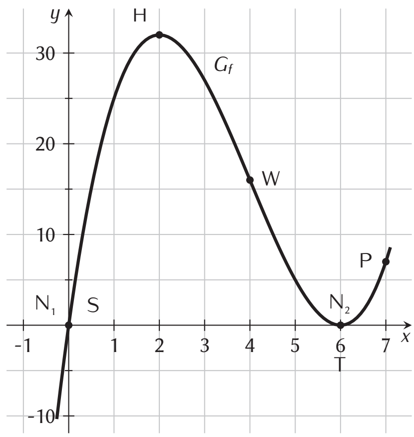
$$f(-1) = (-1)^3 - 12 \cdot (-1)^2 + 36 \cdot (-1) = -49$$

$$f(7) = 7^3 - 12 \cdot 7^2 + 36 \cdot 7 = 7$$

Der Graph der Funktion verläuft damit im Bereich $[-1; 0]$ sehr steil. Es bietet sich beispielsweise an, ein Koordinatensystem zu wählen, welches für die x-Achse das Intervall $[-1; 7]$ enthält und für die y-Achse das Intervall $[-10; 32]$. Zunächst werden die Punkte N_1, N_2, S, H, T, W und der gerade eben berechnete Punkt $P(\,7 \mid 7\,)$ in ein Koordinatensystem eingezeichnet.



Anschließend können die Punkte miteinander verbunden werden.



Zusatzbeispiel für Exponentialfunktion

Zeichne den Graphen der Funktion g mit

$$g(x) = e^{x^2-x}$$

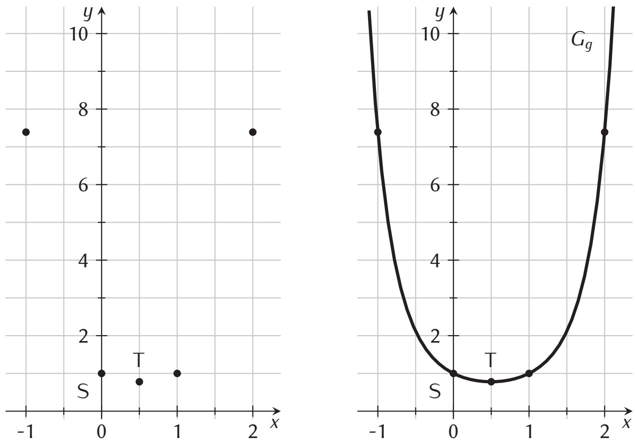
in ein geeignetes Koordinatensystem. Im Rahmen der Kurvendiskussion wurden folgende Eigenschaften des Graphen bestimmt:

- Definitionsbereich: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- keine Schnittpunkte mit der x-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0 \mid 1)$
- Keine Symmetrie zum Ursprung oder zur y-Achse
- Extrempunkte: $T\left(\frac{1}{2} \,\middle|\, e^{-\frac{1}{4}}\right)$
- keine Wendepunkte

Der Graph verläuft ganz oberhalb der x-Achse, des Weiteren gelten zum Beispiel:

x	-2	-1	1	2	3
$g(x)$	$\mathrm{e}^6 \approx 403{,}43$	$\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$	$\mathrm{e} = 0$	$\mathrm{e}^2 \approx 7{,}39$	$\mathrm{e}^6 \approx 403{,}43$

Es bietet sich beispielsweise an, ein Koordinatensystem zu wählen, welches für die x-Achse das Intervall [-1; 2] enthält und für die y-Achse das Intervall [0; 10]. Zunächst werden alle gerade eben bestimmten Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet und diese anschließend miteinander verbunden.



Zusatzbeispiel für Wurzelfunktion

Zeichne den Graphen der Funktion h mit

$$h(x) = 4 - \sqrt{16 - x^2}$$

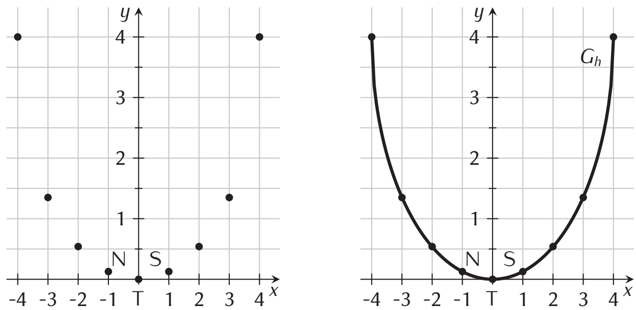
in ein geeignetes Koordinatensystem. Im Rahmen der Kurvendiskussion wurden folgende Eigenschaften des Graphen bestimmt:

- Definitionsbereich: $\mathcal{D}_f = [-4; 4]$
- Schnittpunkte mit der x-Achse $\mathrm{N}(0 \mid 0)$
- Schnittpunkt mit der y-Achse $\mathrm{S}(0 \mid 0)$
- Symmetrie zur y-Achse
- Extrempunkte: $\mathrm{T}(0 \mid 0)$
- keine Wendepunkte

Der Graph verläuft oberhalb der x-Achse, des Weiteren gelten zum Beispiel:

x	-4	-3	-2	-1
$h(x)$	4	$4 - \sqrt{7} \approx 1{,}35$	$4 - \sqrt{12} \approx 0{,}54$	$4 - \sqrt{15} \approx 0{,}127$

Aufgrund der Symmetrie bietet es sich beispielsweise an, ein Koordinatensystem zu wählen, welches für die x-Achse das Intervall [-4; 4] enthält und für die y-Achse das Intervall [0; 4]. Zunächst werden alle gerade eben bestimmten Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet und diese anschließend miteinander verbunden.



Zusatzbeispiel für Logarithmusfunktion

Zeichne den Graphen der Funktion i mit

$$i(x) = \ln\left(x^2 + \mathrm{e}\right)$$

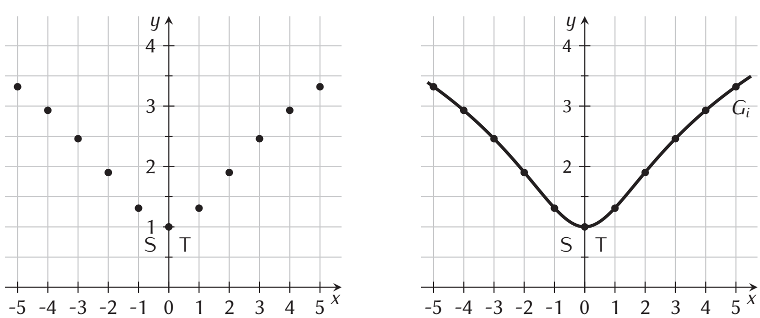
in ein geeignetes Koordinatensystem. Im Rahmen der Kurvendiskussion wurden folgende Eigenschaften des Graphen bestimmt:

- Definitionsbereich: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$
- keine Schnittpunkte mit der x-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0 \mid 1)$
- Symmetrie zur y-Achse
- Extrempunkte: $T(0 \mid 1)$
- Wendepunkte $W_1\left(-\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right)$ und $W_2\left(\sqrt{\mathrm{e}} \mid \ln(2) + 1\right)$

Der Graph verläuft oberhalb der x-Achse, des Weiteren gelten zum Beispiel:

x	-5	-4	-3	-2	-1
$i(x)$	$\ln(25 + \mathrm{e})$ $\approx 3{,}32$	$\ln(16 + \mathrm{e})$ $\approx 2{,}93$	$\ln(9 + \mathrm{e})$ $\approx 2{,}46$	$\ln(4 + \mathrm{e})$ $\approx 1{,}90$	$\ln(1 + \mathrm{e})$ $\approx 1{,}31$

Aufgrund der Symmetrie bietet es sich beispielsweise an, ein Koordinatensystem zu wählen, welches für die x-Achse das Intervall $[-5; 5]$ enthält und für die y-Achse das Intervall $[0; 4]$. Zunächst werden alle gerade eben bestimmten Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet und diese anschließend miteinander verbunden.



Zusatzbeispiel für Hyperbelfunktion

Zeichne den Graphen der Funktion j mit

$$j(x) = \frac{2}{x - 1}$$

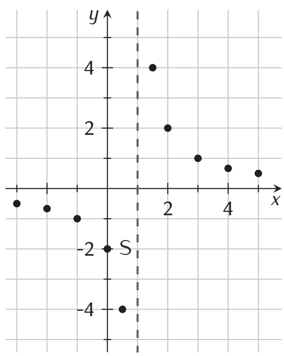
in ein geeignetes Koordinatensystem. Im Rahmen der Kurvendiskussion wurden folgende Eigenschaften des Graphen bestimmt:

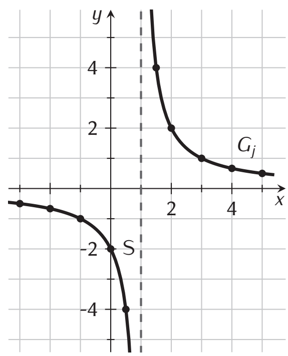
- Definitionsbereich: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- keine Schnittpunkte mit der x-Achse
- Schnittpunkt mit der y-Achse $S(0 \mid -2)$
- keine Symmetrien zu Ursprung oder y-Achse
- keine Extrempunkte
- keine Wendepunkte

Der Graph der Funktion j besitzt eine senkrechte Asymptote an der Stelle $x = 1$. Des Weiteren gelten zum Beispiel:

x	-3	-2	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	4	5
$j(x)$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	-1	-4	4	2	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$

Es bietet sich beispielsweise an, ein Koordinatensystem zu wählen, welches für die x-Achse das Intervall [-3; 5] enthält und für die y-Achse das Intervall [-5; 5]. Zunächst werden alle gerade eben bestimmten Punkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet und diese anschließend miteinander verbunden.





5.9.1 Strecken und Stauchen von Funktionengraphen

Merke

Für einen Parameter $a > 0$ und den Graphen G_f einer Funktion f gilt:
Veränderung bezüglich der y-Richtung:

$a \cdot f(x), \quad a > 1 \quad \Longrightarrow$ **Streckung** von G_f in y-Richtung

$a \cdot f(x), \quad a < 1 \quad \Longrightarrow$ **Stauchung** von G_f in y-Richtung

Veränderung bezüglich der x-Richtung:

$f(a \cdot x), \quad a > 1 \quad \Longrightarrow$ **Stauchung** von G_f in x-Richtung

$f(a \cdot x), \quad a < 1 \quad \Longrightarrow$ **Streckung** von G_f in x-Richtung

Tipp: Man kann sich Streckungen und Stauchungen so vorstellen, als wäre der Graph der Funktion f auf eine elastische Unterlage gezeichnet worden. Für beispielsweise eine Streckung in x-Richtung kann man dann die Unterlage gleichzeitig nach rechts und nach links ziehen.

Beispiel: Gegeben ist eine Funktion f durch $f(x) = x^3 - x + 0{,}5$.

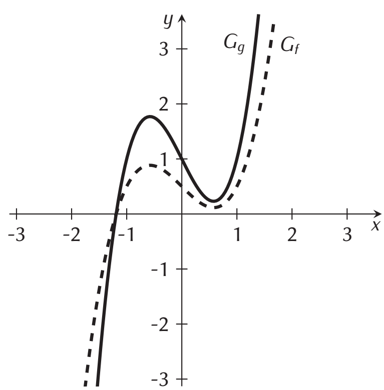
Der Graph dieser Funktion soll um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt werden und ist anschließend der Graph der Funktion g, es gilt also:

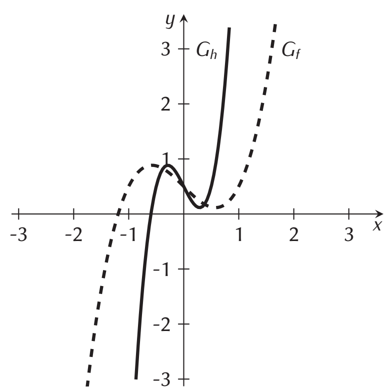
$$\begin{aligned} g(x) &= 2 \cdot f(x) \\ &= 2\left(x^3 - x + 0{,}5\right) \\ &= 2x^3 - 2x + 1. \end{aligned}$$

Der um den Faktor 2 in x-Richtung gestauchte Graph von f entspricht dem Graphen der Funktion h. Dann gilt:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(2 \cdot x) \\ &= (2x)^3 - (2x) + 0{,}5 \\ &= 8x^3 - 2x + 0{,}5 \end{aligned}$$

Die Graphen der Funktionen f und g beziehungsweise f und h sind in den nachfolgenden Schaubildern dargestellt.





5.9.2 Verschieben von Funktionengraphen

Merke

Für $b \geq 0$ und eine Funktion $f(x)$ gilt:
Verschiebung auf der y-Achse:

$f(x) + b \implies$ **Verschiebung** von $f(x)$ um b nach **oben**

$f(x) - b \implies$ **Verschiebung** von $f(x)$ um b nach **unten**

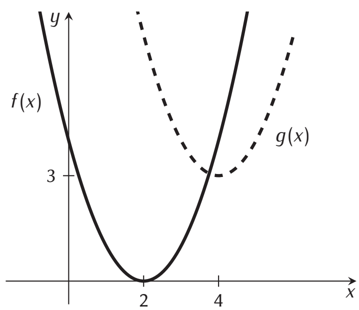
Verschiebung auf der x-Achse:

$f(x + b) \implies$ **Verschiebung** von $f(x)$ um b nach **links**

$f(x - b) \implies$ **Verschiebung** von $f(x)$ um b nach **rechts**

Beispiel: Sei $f(x) = x^2 - 4x + 4$. Diese Funktion soll um 2 nach rechts und um 3 nach oben verschoben werden. Bezeichne die verschobene Funktion als $g(x)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-2) + 3 \\ &= (x-2)^2 - 4(x-2) + 4 + 3 \\ &= x^2 - 4x + 4 - 4x + 8 + 4 + 3 \\ &= x^2 - 8x + 19. \end{aligned}$$



Aufgabe 61 Abi★

(a) Bestimme die Funktion $g(x)$, die man erhält, indem man die Funktion

$$f(x) = x^2 + 4x - 3$$

um 3 Längeneinheiten nach rechts und um eine Längeneinheit nach oben verschiebt.

(b) Verschiebe die Funktion $f(x) = e^{x^2+x}$ um jeweils eine Längeneinheit nach unten und nach links und gib den Funktionsterm der resultierenden Funktion an.

(c) Die Funktion

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 1}$$

wird um 3 Längeneinheiten nach links und um eine Längeneinheit nach oben verschoben. Ermittle den Funktionsterm der resultierenden Funktion.

(d) Die Funktion $g(x) = \sin(x^2 + 1)$ erhält man, indem man die Funktion $f(x)$ jeweils um zwei Längeneinheiten nach rechts und nach oben verschiebt. Ermittle $f(x)$.

5.9.3 Spiegeln von Funktionengraphen

Merke

- Spiegelt man $f(x)$ an der x-Achse, so erhält man $-f(x)$.
- Spiegelt man $f(x)$ an der y-Achse, so erhält man $f(-x)$.

Tipp: Beim Spiegeln muss man besonders auf die Klammersetzung und die Vorfahrtsregeln achten.

Beispiel: Gegeben ist

$$f(x) = e^{7x^2}.$$

Bestimme die beiden Funktionsterme, die man erhält, wenn man den Graphen von f an der y-Achse bzw. and der x-Achse spiegelt.

- Sei $g(x)$ der Funktionsterm, welcher zum an der x-Achse gespiegelten Graphen gehört. Dann gilt:
$$g(x) = -f(x) = -e^{7x^2}.$$
- Sei $h(x)$ der Funktionsterm, welcher zum an der y-Achse gespiegelten Graphen gehört. Dann gilt
$$h(x) = f(-x) = e^{7\cdot(-x)^2} = e^{7x^2}$$

Aufgabe 62 Abi★

Spiegle folgende Funktionen an der x-Achse. Vereinfache den entstehenden Funktionsterm so weit wie möglich.

(a) $f(x) = (-x^2 + 2x)(x - 5)$

(b) $f(x) = \sin(x) + x^2$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x + 2} - 5$

Aufgabe 63 Abi★

Spiegle folgende Funktionen an der y-Achse. Vereinfache den entstehenden Funktionsterm so weit wie möglich.

(a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$

(b) $f(x) = \cos(x) + e^x$

(c) $f(x) = e^x + e^{-x}$

(d) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{x^3 - x}$

Hinweis: Was fällt bei den letzten beiden Teilaufgaben auf?

5.10 Aufgaben zur Kurvendiskussion

Aufgabe 64 Abi★–★★

Monika ist krank und möchte eine Tasse Tee trinken. Leider ist der Tee wie immer erst einmal viel zu heiß. Ihr kleiner Bruder hat vor kurzem gelesen, dass sich eine Tasse Tee gemäß der Gesetzmäßigkeit

$$f(t) = 23 + 67e^{-0,2t}$$

mit t in Minuten und $f(t)$ in °C abkühlt. Er misst alle 5 Minuten die tatsächliche Temperatur des Tees $T(t)$ und erhält folgende Tabelle

t	5	10	15	20	25
$T(t)$	47,6	32,5	27,4	24,2	23,5

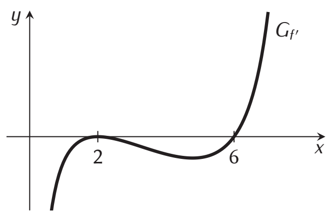
.

(a) Entscheide, ob das Modell den Temperaturverlauf der Tasse Tee von Monika gut beschreibt.

(b) Bestimme denjenigen Messwert, der prozentual die höchste Abweichung vom Modell hat.

Aufgabe 65 – Abi★★

Im Schaubild ist der Graph $G_{f'}$ der ersten Ableitung der auf dem Intervall $I = [0; 8]$ definierten Funktion f zu sehen.



(a) Bestimme alle Hoch-, Tief- und Sattelstellen des Graphen von f im Intervall I.

(b) Diskutiere, ob die identifizierten Extremstellen zu lokalen oder globalen Extrempunkten gehören.

Aufgabe 66 – Abi★★

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$ mit zugehörigem Graphen G_f.

(a) Untersuche den Graphen G_f auf Extrempunkte und Wendepunkte.

(b) Untersuche das Verhalten von f im Unendlichen.

(c) Untersuche den Graphen G_f auf Monotonie.

(d) Zeige ohne Verwendung eines Taschenrechners, dass f an der Stelle $x_1 = -2$ eine einfache Nullstelle und an der Stelle $x_2 = 2$ eine doppelte Nullstelle hat.

(e) Skizziere unter Verwendung der vorherigen Resultate G_f.

Aufgabe 67 Abi★★

Eine Firma stellt LED-Glühbirnen her, die sie zu einem Stückpreis von vier Euro verkauft. Die Herstellungskosten für die Birnen lassen sich durch die Funktion K mit

$$K(x) = 51 + 0{,}44x + 0{,}005x^2$$

beschreiben. Dabei beschreibt x die Anzahl an Glühbirnen und $K(x)$ wird in Euro angegeben.

(a) Stelle den Term der Gewinnfunktion G auf.

(b) Errechne die Gewinnzone.

(c) Errechne die Stückzahl, bei der der maximale Gewinn erwirtschaftet wird. Wie hoch ist der maximale Gewinn?

(d) Erläutere, was es bedeutet, wenn über diese Stückzahl hinaus weiter produziert wird.

(e) Für welche Stückzahl sind die Stückkosten minimal?

6 Tangenten

6.1 Tangente an einen Kurvenpunkt

Rezept

Gegeben sind der Graph G der Funktion f mit

$$f(x) = -3x^3 - x$$

und ein Kurvenpunkt $\mathrm{P}(-1 \mid 4)$.
Bestimme eine Gleichung der Tangente an G im Punkt P.

Schritt 1: Die allgemeine Geradengleichung lautet:

$$y = mx + c.$$

Dabei entspricht der Parameter m der Steigung und der Parameter c dem y-Achsenabschnitt der Geraden.

Schritt 2: Bestimme die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = -9x^2 - 1.$$

Schritt 3: Setze den x-Wert von P in die Ableitung f' ein, das liefert die Steigung m:

$$m = f'(-1) = -10.$$

Schritt 4: Damit ist ein Ansatz für die Tangentengleichung:

$$y = -10x + c.$$

Schritt 5: Setze P in die Tangentengleichung ein, das liefert den y-Achsenabschnitt c:

$$4 = (-10) \cdot (-1) + c \quad \Longrightarrow \quad c = -6.$$

Damit ist eine Gleichung der Tangente gegeben durch

$$y = -10x - 6.$$

Tipp: Es gibt auch eine Formel für die Gleichung der Tangente t an den Graphen einer Funktion f im Kurvenpunkt $\mathrm{P}(b \mid f(b))$:

$$t(x) = f'(b) \cdot (x - b) + f(b).$$

Aufgabe 68 – Abi★

Bestimme eine Gleichung der Tangente an den entsprechenden Graphen im jeweiligen Kurvenpunkt:

(a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 3x^2 + 1, \quad \mathrm{P}(\,2\,|\,-7\,)$

(b) $g(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \mathrm{Q}\left(\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\middle|\,\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\right)$

(c) $h(x) = (x - 1)\mathrm{e}^{-x}, \quad \mathrm{R}(\,1\,|\,h(1)\,)$

Aufgabe 69 Abi★★

Bestimme eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen G der Funktion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2.$$

Aufgabe 70 Abi★★

Ein Deich wird durch den Graphen G der Funktion

$$f(x) = -2x^2 + 8 \quad \text{für} \quad -2 \leq x \leq 2$$

beschrieben. Die x-Achse kann dabei als Erdboden angesehen werden. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter. Im Punkt $\mathrm{P}(\,-1\,|\,6\,)$ des Deiches soll tangential eine Leiter angelegt werden.

(a) Wie weit vom Deichrand muss die Leiter aufgestellt werden?

(b) Wie lang muss die Leiter mindestens sein?

Aufgabe 71 – nur eA Abi★★

Für $z > 0$ ist die folgende Funktionenschar gegeben:

$$f_z(x) = z \cos\left(\frac{x}{z}\right) + z.$$

Der Graph der Funktion f_z wird dabei mit G_z bezeichnet.
Bestimme in Abhängigkeit von z die Gleichung der Tangente in demjenigen Wendepunkt von G_z, der die kleinste positive x-Koordinate besitzt.

Zwischenergebnis: Der Wendepunkt hat die Koordinaten $\mathrm{W}_z\left(\,\frac{1}{2}\pi z\,\middle|\,z\,\right)$

Aufgabe 72 – nur eA Abi★★★

Gegeben ist die folgende Funktionenschar:

$$f_t(x) = \mathrm{e}^x + tx + 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mit g_t werden in Abhängigkeit von t alle Tangente an die Graphen von f_t an der Stelle $x = 1$ bezeichnet. Bestimme g_t und zeige, dass sich alle Geraden g_t in einem Punkt schneiden.

Aufgabe 73 – Abi★

Die Funktion f ist für $x \leq 2$ definiert durch

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4.$$

Im Punkt $P(2 \mid f(2))$ soll an den Graphen von f eine lineare Funktion ohne Knick angeschlossen werden.
Gib eine Gleichung dieser linearen Funktion an.

6.2 Tangente mit gegebener Steigung

Rezept

Gegeben ist der Graph G der Funktion f mit

$$f(x) = x^2 + 2x + 1.$$

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten an G mit der Steigung $m = 6$.

Schritt 1: Bestimme die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2x + 2.$$

Schritt 2: Löse die Gleichung $f'(x) = m$. Das liefert die x-Koordinate des Berührpunktes:

$$2x + 2 = 6 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Schritt 3: Bestimme den Funktionswert an der Berührstelle:

$$f(2) = (2)^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 9 \quad \Longrightarrow \quad P(2 \mid 9).$$

Schritt 4: Ein Ansatz für die Tangentengleichung ist also gegeben durch:

$$y = 6x + c.$$

Schritt 5: Setze die Koordinaten von P in die Tangentengleichung ein, das liefert c:

$$9 = 6 \cdot 2 + c \quad \Longrightarrow \quad c = -3.$$

Damit ist die Gleichung der gesuchten Tangente gegeben durch

$$y = 6x - 3.$$

Aufgabe 74 Abi★

Wie viele Tangenten an den Graphen der Funktion f mit

$$f(x) = 3x^3 - 5$$

haben die Steigung $m = 18$ und wie lauten ihre Funktionsgleichungen?

Aufgabe 75 Abi★

Die NASA hat wieder einmal eine Rakete ins All geschossen, um einen zusätzlichen Satelliten in die Erdumlaufbahn zu bringen, der dort für die nächsten 12 Jahre im Dienste der Navigationsgeräte herumkreisen soll. Beim Start wurden die Messdaten an die Zentrale gesendet. Diese Messdaten geben die zurückgelegte Strecke ausgehend von der Erde (in km) in Abhängigkeit von der Zeit (in s) seit Start der Rakete an. Für die ersten 20 Sekunden kann dieser Vorgang näherungsweise durch die Funktion

$$f(t) = \frac{1}{3}t^2$$

beschrieben werden. Wann hatte die Rakete eine Geschwindigkeit von 4 km/s?

Aufgabe 76 Abi★★

Der Querschnitt eines Hügels wird für $0 \leq x \leq 9$ beschrieben durch die Funktion

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 2x.$$

mit x und $f(x)$ in Metern. Die x-Achse beschreibt dabei den Erdboden.
Der Hügel soll von einem Geländewagen überquert werden. Der Wagen kann nur Steigungen bis 50 % bewältigen. Deswegen muss für Stellen, die zu steil sind, eine Rampe angesetzt werden, die so steil ist, dass der Geländewagen sie gerade noch bewältigen kann.

(a) Wo liegt diese Rampe auf dem Berg auf?

(b) Wie weit ist die Rampe vom Fuß des Berges entfernt?

Aufgabe 77 Abi★★

In 10 km Höhe wird ein Stein fallengelassen. Die Höhe des Steins wird zunächst näherungsweise beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = 10\,000 - 4{,}8t^2,$$

dabei entspricht t der Zeit ab Loslassen des Steins in s und Höhe $f(t)$ der Höhe des Steins zum Zeitpunkt t in m über dem Erdboden.
Sobald der Stein eine Geschwindigkeit von 60 m/s erreicht hat, wird der Stein aufgrund des Luftwiderstands nicht mehr weiter beschleunigt, sondern behält diese Geschwindigkeit bei.
Wie lange benötigt der Stein, um den Boden zu erreichen?

Aufgabe 78 Abi★★★

Zwei Leiterbahnen auf einer Platine lassen sich durch die Graphen der Funktionen f und g beschreiben, wobei

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$g(x) = 2x - 4.$$

Die Größen x, $f(x)$ und $g(x)$ sind jeweils in µm angegeben.

An die Leiterbahnen wird eine Spannung von 200 V angelegt. Bei dieser Spannung kommt es zum Funkenüberschlag, wenn Leiter weniger als einen µm entfernt sind. Wird es zu einem Funkenüberschlag kommen?

Hinweis: Eine Skizze hilft zur Ideenfindung.

Analysis

6.3 Tangente durch Fernpunkt – nur eA

Rezept – nur eA

Gegeben sind der Graph G der Funktion f mit

$$f(x) = x^2 + 2$$

und ein Punkt $\mathrm{P}(2 \mid -3)$, welcher nicht auf G liegt. Bestimme die Gleichungen aller Tangenten an den Graph von f, welche durch den Punkt P verlaufen.

Schritt 1: Bestimme die Ableitung der Funktion f:

$$f'(x) = 2x$$

Schritt 2: Die allgemeine Gleichung einer Tangente an den Graphen von f an der Stelle u lautet:

$$y = f'(u)(x - u) + f(u)$$

Schritt 3: Setze $f(u)$ und $f'(u)$ in die allg. Tangentengleichung ein.

$$y = 2u(x - u) + u^2 + 2$$

Schritt 4: Bestimme die Beührstellen. Setze dazu die Koordinaten von P als x und y in die Gleichung ein und löse nach u auf:

$$\begin{aligned} & -3 = 2u(2 - u) + u^2 + 2 \\ \iff \quad & -3 = 4u - u^2 + 2 \\ \iff \quad & u_1 = -1, \quad u_2 = 5 \end{aligned}$$

Schritt 5: Setze die soeben ermittelten Werte von u in die allgemeine Tangentengleichung ein, dies liefert die Gleichungen der gesuchten Tangenten:

$$u_1 : y = -2x + 1$$
$$u_2 : y = 10x - 23.$$

Aufgabe 79 – nur eA Abi★

Bestimme die Gleichungen aller Tangenten an den entsprechenden Graphen, welche durch den gegebenen Punkt verlaufen:

(a) $f(x) = x^2 - 4x + 6, \quad \mathrm{P}(2 \mid -7)$

(b) $g(x) = x^2 - 2x + 5, \quad \mathrm{Q}(0 \mid 1)$

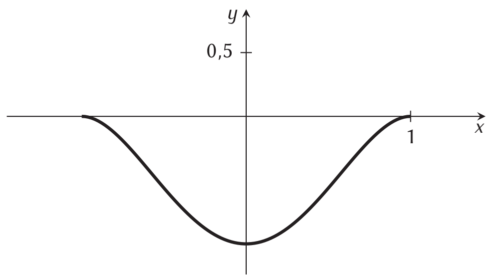
(c) $h(x) = \mathrm{e}^x, \quad \mathrm{R}(0 \mid 0)$

Aufgabe 80 – nur eA Abi★★★

Der Querschnitt eines 20 Meter breiten Grabens wird für $-1 \leq x \leq 1$ beschrieben durch:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$$

Eine Längeneinheit entspricht 10 Metern.
Für $x < -1$ bzw. $x > 1$ wird im unten dargestellten Schaubild die Erdoberfläche durch die x-Achse beschrieben.
Wie weit darf eine Person (Augenhöhe 170 cm) höchstens vom Rand des Grabens entfernt stehen, damit sie gerade noch den tiefsten Punkt sehen kann?



7 Integration

7.1 Grundlagen

Merke

Eine Funktion F ist eine **Stammfunktion** einer Funktion f, wenn für alle $x \in \mathcal{D}$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Das **unbestimmte Integral** von f ist dann die Menge aller Stammfunktionen von f. Es gilt:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C$$

mit einer beliebigen Zahl $C \in \mathbb{R}$.

Tipp: Eine Stammfunktion ist also bis auf eine Konstante C eindeutig.

Beispiel: Die Funktion $F(x) = x^2 - 3x$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x - 3$, denn es gilt:

$$F'(x) = 2x - 3 = f(x) \quad \Longrightarrow \quad \int (2x - 3)\;\mathrm{d}x = x^2 - 3x + C.$$

Aufgabe 81 – Abi*

Zeige jeweils, dass F eine Stammfunktion von f ist:

(a) $f(x) = 12x^2 - 4x, \quad F(x) = 4x^3 - 2x^2 + 1.$

(b) $f(x) = 30x - 3, \quad F(x) = 15x^2 - 3x + 12.$

Aufgabe 82 – Abi*

Zeige jeweils, dass F eine Stammfunktion von f ist:

(a) $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}(1 + 2x^2), \quad F(x) = x\mathrm{e}^{x^2}.$

(b) $f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x}, \quad F(x) = -(x^2 + 2x + 2)\mathrm{e}^{-x}.$

(c) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x), \quad F(x) = 0{,}5 \cdot \sin^2(x).$

7.2 Integrationsregeln

Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$x^n, n \neq -1$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\frac{1}{x}$
$F(x)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	e^x	$-\cos(x)$	$\sin(x)$	$\ln\|x\|$

Merke

Summen und Differenzen von Funktionen werden getrennt aufgeleitet. Konstante Faktoren bleiben stehen.

Beispiel: Gesucht ist eine Stammfunktion von

$$f(x) = 10x^4 + \frac{3}{x}.$$

Entsprechend obiger Regel werden beide Summanden getrennt aufgeleitet. Die Faktoren 10 und 3 bleiben einfach stehen, also

$$F(x) = 10 \cdot \frac{1}{5}x^5 + 3\ln(x) = 2x^5 + 3\ln(x).$$

Aufgabe 83

Bestimme jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = 8x^7 - 21x^2 + 2$

(b) $f(x) = 15x^2 - 2x + 1$

(c) $f(x) = 4x^3 - 6x$

(d) $f(x) = 42x^6 + 8$

(e) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$

(f) $f(x) = \frac{5}{2}x + 8x^5 + 7$

(g) $f(x) = 500x^4 - 156x^3 + 6x^2 - 50x + 2$

Aufgabe 84

Finde jeweils die Stammfunktion zur Funktion f, deren Graph durch den Punkt P verläuft.

(a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1, \mathrm{P}(0 \mid 1)$

(b) $f(x) = 2x^3 - 3x^2, \mathrm{P}(0 \mid 4)$

(c) $f(x) = 6x^5 - 6x^3, \mathrm{P}(1 \mid 1)$

(d) $f(x) = 0, \mathrm{P}(7 \mid 8)$

Aufgabe 85 – Abi★

Gib jeweils eine Stammfunktion von f an:

(a) $f(x) = -5x^4 - 3x^3$

(b) $f(x) = \frac{-7}{x^5} + 3x^2 - 4$

(c) $f(x) = \frac{2}{3\sqrt{x}}$

(d) $f(x) = -\cos(x) + 5\sin(x)$

(e) $f(x) = (x^2 - 2)^2$.

(f) $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x}{2x}$

Aufgabe 86 – nur eA Abi★★

Bestimme eine Stammfunktion der Kurvenschar $f_t(x) = -t\cos(tx) - \sin(t)$.

Aufgabe 87 Abi★

Finde eine Stammfunktion folgender Kurvenschar

$$f_a(x) = x^4 + (3 - a)x^2 + 4x + a - 1$$

Lineare Substitution

Eine Verkettung der Form $f(x) = g(mx + c)$ wird nach folgender Regel aufgeleitet:

$$F(x) = \frac{1}{m} G(mx + c).$$

Tipp: In Worten: „Äußere Aufleitung mal den Kehrwert der inneren Ableitung."

Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-3x+2}$. Mit der Notation wie im Merksatz gilt:

$$g(x) = e^x, \quad m = -3, \quad c = 2,$$

Demnach gilt:

$$F(x) = -\frac{1}{3}e^{-3x+2}.$$

Aufgabe 88 – Abi★

Finde jeweils eine Stammfunktion von $f(x)$:

(a) $f(x) = \sqrt{4x + 2}$

(b) $f(x) = e^{-x}$

(c) $f(x) = \frac{3}{(5x - 2)^4}$

(d) $f(x) = \frac{7}{x^2 - 2x + 1}$

(e) $f(x) = \frac{1}{e^{7x+1}}$

Analysis

Aufgabe 89 – Abi★

Finde jeweils die Stammfunktion zu $f(x)$, deren Graph durch den Punkt $P(0 \mid 1)$ geht.

(a) $f(x) = \sin(x) + x^2$

(b) $f(x) = \sqrt{x+3}$

(c) $f(x) = x^2 + 7x - 3$

7.3 Bestimmte Integrale und Flächeninhalte

7.3.1 Flächeninhalte

Merke

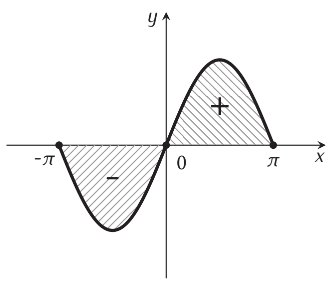
Das **bestimmte Integral** drückt den orientierten Flächeninhalt aus, den der Graph von f im Intervall $[a; b]$ mit der x-Achse einschließt. Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

falls F eine Stammfunktion von f ist.

Hinweis: Der Flächeninhalt ist orientiert. Das bedeutet, dass Flächen oberhalb der x-Achse positiv und Flächen unterhalb der x-Achse negativ gewertet werden.

Beispiel: Das Integral von $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $[-\pi; \pi]$ hat den Wert 0, da sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse genau aufheben.



Dies lässt sich auch wie folgt nachrechnen:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = -(-1) + (-1) = 0.$$

Ist man stattdessen am Flächeninhalt A interessiert, der im Bereich $-\pi \leq x \leq \pi$ zwischen $f(x) = \sin(x)$ und der x-Achse eingeschlossen wird, so muss man das Integral entsprechend aufteilen und jeden Bereich getrennt ausrechnen. Dort, wo die Funktion unterhalb der x-Achse verläuft, wird das Integral mit einem Minuszeichen versehen.

Es gilt:

$$\begin{aligned} A = -\int_{-\pi}^{0} \sin(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= -\left[-\cos(x)\right]_{-\pi}^{0} + \left[-\cos(x)\right]_{0}^{\pi} \\ &= -(-\cos(0) - (-\cos(-\pi))) + (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \\ &= \cos(0) - \cos(-\pi) - \cos(\pi) + \cos(0) \\ &= 1 - (-1) - (-1) + 1 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Aufgabe 90 – Abi★

Berechne folgende bestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^4 - 3x^2 + 1)\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-5}^{0} (x^2 - x + 3)\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 91 – Abi★

Bestimme mithilfe des GTR/CAS den Flächeninhalt, den diese Kurven mit der x-Achse einschließen.

(a) $f(x) = 3x^3 e^{-x} - 1$

(b) $f(x) = \dfrac{-3x^2 + 10}{1 + e^x} - 1$

(c) $f(x) = -x^2 \cdot (e^x + e^{-x}) + 2$

(d) $f(x) = \sin(x) - 0{,}125 e^{x^2}$

Aufgabe 92 – nur eA Abi★

Bestimme die folgenden Integrale ohne Rechnung. Betrachte hierfür die Symmetrie der zu integrierenden Funktionen:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x}{7} \cdot e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$

(b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{x^3}{x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$

Aufgabe 93 Abi★★

Auf einer Fahrradrennstrecke wird die Geschwindigkeit eines Radlers gemessen. Für eine Runde, die er innerhalb von 2 Minuten absolviert, wird die Geschwindigkeit beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = t \cdot (t - 1)^2.$$

Hierbei wird t in Minuten und $f(t)$ in Kilometern pro Minute gemessen. Bestimme die Länge der Rennstrecke.

Aufgabe 94 Abi★★

Das Wachstum einer Alge wird für die ersten 8 Monate näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben:

$$f(t) = 0{,}5e^{1{,}1t}$$

Hierbei wird t in Monaten, und $f(t)$ in Zentimeter pro Monat gemessen.

(a) Wie groß ist die Alge nach 3 Monaten?

(b) Die Alge wächst auf dem Grund eines Sees in 5 Metern Tiefe. Beim Brustschwimmen hängen die Zehen einer etwa 1,70 m großen Person bis zu einem Meter unter der Oberfläche. Nach wie vielen Tagen könnte ein Schwimmer mit dem Fuß gegen die Alge stoßen?

Merke

Verläuft der Graph der Funktion f im Intervall $[a; b]$ oberhalb des Graphen der Funktion g, so kann man die Fläche zwischen den Graphen von f und g mit der folgenden Formel bestimmen:

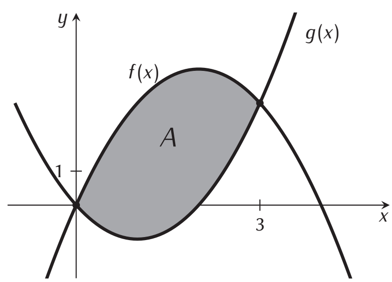
$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx.$$

Tipp: Bei dieser Formel ist es irrelevant, ob Teile des Graphen von f oder g unterhalb der x-Achse verlaufen.

Beispiel: Gegeben sind die Funktionen

$$f(x) = -x^2 + 4x$$
$$g(x) = x^2 - 2x.$$

Es soll der Flächeninhalt A, der von den Graphen der Funktionen f und g eingeschlossen wird, berechnet werden.



Zunächst bestimmt man die Integrationsgrenzen. Dazu berechnet man die Schnittstellen von f und g. Es folgt

$$-x^2 + 4x = x^2 - 2x \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 0, x_2 = 3.$$

Da der Graph von f oberhalb des Graphen von g verläuft, gilt:

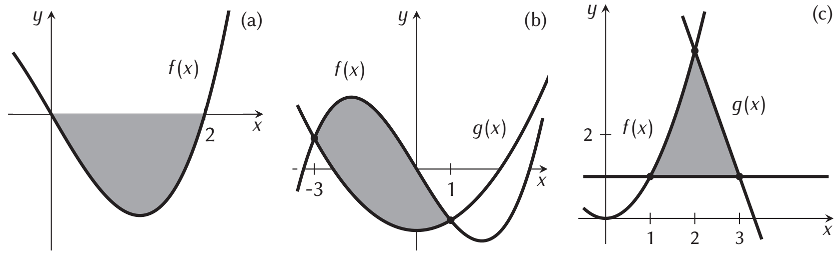
$$A = \int_0^3 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x = \int_0^3 \left(-x^2 + 4x - (x^2 - 2x)\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^3 \left(-2x^2 + 6x\right)\ \mathrm{d}x$$

$$= \left[-\frac{2}{3}x^3 + 3x^2\right]_0^3 = -\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^2 - 0 = 9.$$

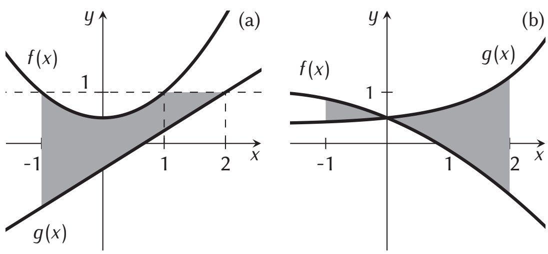
Aufgabe 95 –

Schreibe zu allen drei Schaubildern jeweils die markierten Flächen als Integral der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.



Aufgabe 96 –

Schreibe zu beiden Schaubildern jeweils die markierten Flächen als Integral der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$.



Aufgabe 97 – Abi★

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = 3 \cdot (x - 2)^2 \cdot (x + 1).$$

Wie groß ist die Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird?

Aufgabe 98 Abi★

Berechne die Flächen, die die Graphen der folgenden Funktionen einschließen:

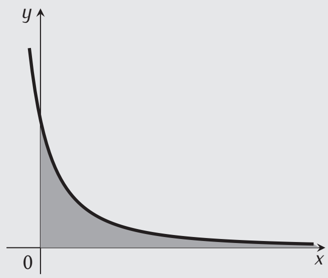
(a) $f(x) = 2x^2$, $g(x) = x + 3$

(b) $f(x) = x^2 + 3x - 5$, $g(x) = -x^2$

7.3.2 Uneigentliche Integrale – nur eA

Merke – nur eA

Eine Fläche kann ins Unendliche reichen und dennoch endlichen Flächeninhalt besitzen. In diesem Fall spricht man von einem **uneigentlichen Integral**.



Rezept — Berechnung uneigentliches Integral – nur eA

Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion $f(x) = e^{-x}$ und der x-Achse für $x \geq 0$.

Schritt 1: Führe eine variable rechte Grenze z ein und stelle einen Term $A(z)$ für den Flächeninhalt auf:

$$A(z) = \int_0^z e^{-x}\,dx.$$

Schritt 2: Berechne das Integral in Abhängigkeit von z:

$$A(z) = \int_0^z e^{-x}\,dx = [-e^{-x}]_0^z = -e^{-z} + 1.$$

Schritt 3: Bestimme den Grenzwert für $z \to \infty$:

$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty} -e^{-z} + 1 = 1.$$

Der Flächeninhalt beträgt genau 1.

Aufgabe 99 – nur eA Abi★★

Überprüfe, ob folgende Funktionen im ersten Quadranten einen endlichen Flächeninhalt mit der x-Achse einschließen. Ist dies der Fall, so gib den Flächeninhalt an.

(a) $f(x) = \dfrac{1}{(x+5)^3}$

(b) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

Aufgabe 100 – nur eA Abi★★★

Ein Heliumballon startet am Erdboden senkrecht nach oben. Seine Geschwindigkeit lässt sich durch die Funktion $v(t)$ beschreiben.

$$v(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 1}$$

Dabei ist t in Stunden nach Start und $v(t)$ in km/h angegeben.

(a) Mit welcher Geschwindigkeit steigt der Ballon zu Beginn?

(b) Zeige, dass sich der Ballon zu jedem Zeitpunkt aufwärts bewegt.

(c) Welche Höhe kann der Ballon maximal erreichen?

(d) Wie lange dauert es, bis der Ballon die Hälfte der Maximalhöhe erreicht hat Welche Geschwindigkeit hat er zu diesem Zeitpunkt?

7.4 Mittelwert von Funktionen

Merke

Sei f eine Funktion. Der **Mittelwert** M von f auf dem Intervall $[a; b]$ berechnet sich als

$$M = \frac{1}{b - a} \cdot \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel: Ein Auto beschleunigt 30 Sekunden lang. Die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$f(t) = \frac{5}{4}t,$$

t in Sekunden, $f(t)$ in m/s.

Es soll berechnet werden, wie groß die Durchschnittsgeschwindigkeit während dieser 30 Sekunden ist. Für die Durchschnittsgeschwindigkeit M gilt

$$M = \frac{1}{30 - 0} \int_0^{30} \frac{5}{4}t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{30}\left[\frac{5}{8}t^2\right]_0^{30} = \frac{1}{30} \cdot \frac{5}{8} \cdot 30^2 = \frac{75}{4} = 18{,}75$$

Im Schnitt ist das Auto also mit einer Geschwindigkeit von 18,75 m/s gefahren.

Aufgabe 101 – 🖩 Abi★★

Eine Wetterstation misst zwischen 6 Uhr und 18 Uhr die Außentemperatur, die an einem Tag näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben wird:

$$f(t) = \frac{1}{24}t^3 - t^2 + 6t + 5,$$

t in Stunden seit 6 Uhr, $f(t)$ in Grad Celsius.

(a) Wie hoch war die Temperatur zu Beobachtungsbeginn und um 12 Uhr mittags?

(b) Was war die Tageshöchstemperatur?

(c) Wie hoch war die Durchschnittstemperatur im Beobachtungszeitraum.

Aufgabe 102 Abi★

Die Funktion f mit

$$f(t) = e^t + 1$$

beschreibt die Wassermenge in einem Teich während eines immer stärker werdenden Wolkenbruchs in Tausenden von Litern mit t in Stunden. Wieviel Liter Wasser befinden sich während der ersten zwei Stunden durchschnittlich in dem Teich?

7.5 Rotationskörper – nur eA

Merke – nur eA

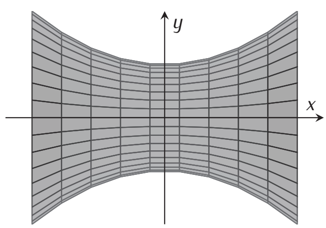
Lässt man eine Funktion $f(x)$ im Bereich $[a; b]$ um die x-Achse rotieren entsteht ein **Rotationskörper**. Für das Volumen V des Rotationskörpers gilt:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx.$$

Tipp:

- Achtung: Erst quadrieren, dann aufleiten!
- Beim Rechnen das π nicht vergessen!

Beispiel: Bei der Rotation der Funktion $f(x) = x^2 + 1$ um die x-Achse im Intervall $[-1; 1]$ entsteht ein Rotationskörper. Dessen Volumen V soll bestimmt werden.



Mit obiger Formel gilt dann für das Volumen:

$$V = \pi \int_{-1}^{1} (x^2 + 1)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (x^4 + 2x^2 + 1) \, dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 + x \right]_{-1}^{1} = \pi \left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{5} - \frac{2}{3} - 1 \right) \right) = \frac{56}{15}\pi.$$

Aufgabe 103 – nur eA Abi★

Folgende Funktionen rotieren im Intervall $[0; 2]$ um die x-Achse. Bestimme die Volumina der entstehenden Rotationskörper.

(a) $f(x) = x^2 - 2x$

(b) $f(x) = x^2 - x + 1$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

(d) $f(x) = e^{2x} - e^x + 1$

Aufgabe 104 – nur eA Abi★★★

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

Die Funktion $f(x)$ rotiert um die x-Achse. Welches Intervall von 4 Längeneinheiten mit positiven Grenzen muss gewählt werden, damit das Volumen des Rotationskörpers der Funktion $f(x)$ über diesem Intervall den Wert 500 hat?

Aufgabe 105 – nur eA 🖩 Abi★★-★★★

Für $a > 0$ ist folgende Funktionenschar gegeben:

$$f_a(x) = \frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a.$$

Ein Hersteller von Glasvasen möchte eine Vase herstellen, deren Innenwand sich durch die Rotation einer Funktion der Schar $f_a(x)$ im Intervall $[0; 2]$ um die x-Achse beschreiben lässt. Die Größen x und $f(x)$ sind hierbei in Dezimetern gegeben.

(a) Die Vase soll einen Inhalt von 1 Litern fassen. Bestimme a auf drei Nachkommastellen genau.

(b) Die Außenwand wird durch die Funktion $f_{0,25}(x)$ beschrieben. Aus wie vielen Kubikzentimetern Glas besteht die Vase?

8 Besondere Aufgabentypen

8.1 Extremwertaufgaben

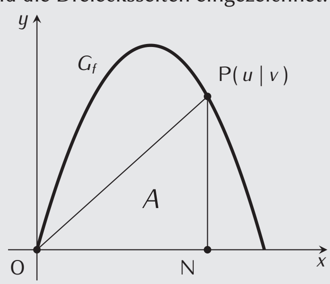
Rezept

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -x^2 + 4x.$$

Sei $P(u \mid v)$ ein Punkt auf dem Graphen von f mit $0 \leq u \leq 3$. Der Ursprung O, der Punkt P und der Punkt $N(u \mid 0)$ begrenzen ein Dreieck. Welchen Flächeninhalt A kann dieses Dreieck maximal haben?

Schritt 1: Fertige zunächst eine Skizze an, die den Sachverhalt verdeutlicht. Hierzu werden der Graph G_f von f und die Dreiecksseiten eingezeichnet.



Schritt 2: Finde genau eine Variable, die das gesamte Problem beschreibt. In diesem Fall ist das die Variable u. Denn wenn u bekannt ist, können auch P und N bestimmt werden.

➤ *Definitionsbereich*

Bestimme den Definitionsbereich von u. Es gilt:

$$0 \leq u \leq 3$$

➤ *Bestimmung der Zielfunktion*

Stelle einen Funktionsterm für die zu maximierende Größe auf. Diese Funktion nennt man auch **Zielfunktion**. In diesem Fall entspricht die Zielfunktion dem Flächeninhalt A des eingezeichneten Dreiecks. Es gilt:

$$\begin{aligned} A(u) &= \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe} \\ &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) \\ &= \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-u^2 + 4u\right) \\ &= -\frac{1}{2}u^3 + 2u^2 \end{aligned}$$

Schritt 3: Gesucht sind die lokalen Extrempunkte des Graphen der Funktion A. Hierzu wird die Ableitung der Funktion A bestimmt und deren Nullstellen berechnet:

$$A'(u) = -\frac{3}{2}u^2 + 4u = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad u_1 = 0, \quad u_2 = \frac{8}{3} \approx 2{,}67.$$

Bestimme die Funktionswerte von A an den soeben berechneten Extremstellen und den Rändern des Definitionsbereichs:

$$A(0) = 0$$
$$A(2{,}66) = 4{,}74\checkmark$$
$$A(3) = 4{,}5.$$

Der Flächeninhalt ist höchstens 4,74 FE. In diesem Fall ist $u = 2{,}66$.

Tipp: Die Ränder des Definitionsbereichs müssen deshalb untersucht werden, weil die Funktionswerte der Funktion A am Rand größer sein könnten als am lokalen Extremum. Dies kann auch passieren, ohne dass die Ableitung an dieser Stelle eine Nullstelle hat.

Aufgabe 106 Abi★

Mit einem Zaun von 100 Metern Länge soll eine rechteckige Weide mit möglichst großer Fläche abgespannt werden. Glücklicherweise ist die Weide an einer Seite schon von einem (gerade verlaufenden) Fluss begrenzt. Wie groß kann die Fläche der Weide werden?

Aufgabe 107 Abi★

Auf dem Intervall $I = [0; 2]$ sind folgende beide Funktionen f und g gegeben:

$$f(x) = x^2 - 4x$$
$$g(x) = -2x^2 + 4x$$

An welcher Stelle haben die beiden Funktionswerte den größten Abstand?

Aufgabe 108 – nur eA Abi★★

Für $t \in \mathbb{R}$ wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_t mit

$$f_t(x) = 3x^2 - 12x + 4t^2 - 6t$$

betrachtet.
Für welches t hat der Tiefpunkt des Graphen G_{f_t} von f_t den niedrigsten Funktionswert?

Aufgabe 109 – nur eA Abi★★★

Ein Computer zeichnet auf, mit welcher Durchflussgeschwindigkeit das Wasser eines Stausees durch eine Staudammöffnung fließt. Für die Monate Januar bis Dezember wird die Durchflussgeschwindigkeit beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + 3t$$

mit t in Monaten seit dem 1. Januar und $f(t)$ in m^3/Monat. In welchem Zeitabschnitt von 2 Monaten ist das meiste Wasser durch die Staudammöffnung geflossen?

8.2 Steckbriefaufgaben

8.2.1 Bestimmung ganzrationaler Funktionen

Rezept — Bestimmung von ganzrationalen Funktionen

Aufgabe: Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades, die am Ursprung einen Extrempunkt und einen Wendepunkt in W(1 | 1) hat.

Schritt 1: Schreibe die allgemeine Funktionsgleichung 3. Grades und ihre Ableitungen auf:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\ f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\ f''(x) &= 6ax + 2b. \end{aligned}$$

Schritt 2: Schreibe alle Informationen in Formelschreibweise. Achtung: Manche Informationen ergeben zwei Gleichungen.:

$$\begin{aligned} &f(x) \text{ geht durch Ursprung} &&\Longrightarrow && f(0) = 0 \quad \text{(I)} \\ &f(x) \text{ hat Extrempunkt am Ursprung} &&\Longrightarrow && f'(0) = 0 \quad \text{(II)} \\ &f(x) \text{ hat Wendepunkt in W(1 | 1)} &&\Longrightarrow && f''(1) = 0 \quad \text{(III)} \\ &f(x) \text{ geht durch Punkt W(1 | 1)} &&\Longrightarrow && f(1) = 1 \quad \text{(IV)} \end{aligned}$$

Schritt 3: Setze die Gleichungen in die allgemeine Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned} 0 &= 0a + 0b + 0c + d && \text{(I)} \\ 0 &= 0a + 0b + c && \text{(II)} \\ 0 &= 6a + 2b && \text{(III)} \\ 1 &= a + b + c + d && \text{(IV)} \end{aligned}$$

Schritt 4: Löse das entstehende LGS:

$$c = 0, \quad d = 0, \quad , a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{3}{2}.$$

Die gesuchte Funktion lautet damit

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2.$$

Aufgabe 110 – Abi★

Finde eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph durch den Ursprung verläuft, einen Extrempunkt P(1 | 10) hat, und bei $x = -1$ eine Wendestelle besitzt.

Aufgabe 111 – Abi★

Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades berührt die x-Achse im Ursprung. Die Tangente im Punkt P(-2 | 1) verläuft parallel zur Geraden $y = 2x - 2$. Finde eine Funktionsgleichung der gesuchten Funktion.

Aufgabe 112 – Abi★★

Bestimme die Gleichung einer ganzrationalen Funktion, deren Graph den Sattelpunkt S(1 | 8) besitzt und punktsymmetrisch zum Ursprung ist. Die Funktion soll einen möglichst kleinen Grad besitzen.

8.2.2 Bestimmung beliebiger Funktionen

Rezept

Aufgabe: Ein radioaktiver Zerfallsvorgang von 100 Gramm eines Isotops wird beschrieben durch die Funktion

$$B(t) = a\mathrm{e}^{-bt},$$

t in Jahren seit Beobachtungsbeginn, $B(t)$ in Gramm. Die Halbwertszeit des Isotops beträgt 10 Jahre. Bestimme a und b.

Schritt 1: Schreibe die Bedingungen als Gleichungen:

Zu Beginn 100 Gramm $\Longrightarrow$ $B(0) = 100$

Nach 10 Jahren nur noch 50 Gramm $\Longrightarrow$ $B(10) = 50.$

Schritt 2: Löse die Gleichungen

$$100 = a\mathrm{e}^{0} \quad \Longrightarrow \quad a = 100$$

$$50 = 100\mathrm{e}^{-10b} \quad \Longrightarrow \quad b = -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}069.$$

Die gesuchte Funktion lautet $B(t) = 100\mathrm{e}^{-0{,}069t}$.

Tipp: Oft muss man die Bedingungen statt aus einem Text aus einer Skizze ablesen.

Aufgabe 113 Abi★

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = a \cdot \mathrm{e}^{bx}$ berührt die Gerade $y = 3x - 5$ im Punkt P(2 | 1). Bestimme den Wert der Paramter a und b.

8.3 Scharen

8.3.1 Grundprinzip einer Schar

Merke

Eine **Funktionenschar** f_t ist eine Menge von Funktionen. Für jedes $t \in I$, hierbei ist I ein Teilintervall von $\mathbb{R}$, bzw. $t \in \mathbb{R}$ ist dabei eine Funktion gegeben. Mit dem Parameter t rechnet man dabei so, als wäre t eine fixierte reelle Zahl, die für den Moment noch nicht genauer bekannt ist.

Beispiel: Betrachtet wird die Schar der Funktionen f_t mit:

$$f_t(x) = x^2 - 2xt + t^2 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das Schaubild der Funktion f_t heißt G_t. Da man mit dem Parameter t wie mit einer normalen Zahl rechnet, folgt beispielsweise für die Ableitung f_t':

$$f_t'(x) = 2x - 2t.$$

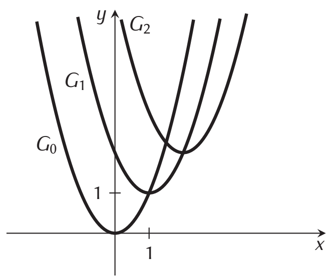
Setzt man für t einige Beispielwerte (z. B. $t = 0$, $t = 1$, $t = 2$) ein, so erhält man die Funktionen:

$$f_0(x) = x^2$$

$$f_1(x) = x^2 - 2x + 2$$

$$f_2(x) = x^2 - 4x + 6$$

Die zugehörigen Graphen G_0, G_1 und G_2 sind im folgenden Schaubild dargestellt.



Aufgabe 114 Abi★-★★

Gegeben ist für $a < 0$ die Funktionenschar f_a mit

$$f_a(x) = \frac{a}{7}x^3 + \frac{3a}{7}x^2.$$

Der Graph der Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.

(a) Bestimme alle Extrempunkte von G_a.

(b) Bestimme alle Wendepunkte von G_a.

(c) Bestimme die Gleichung der Tangente im Wendepunkt von G_a.

(d) Bestimme den Flächeninhalt, welchen G_a mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 115 – nur eA Abi★★★

Betrachtet wird für $a,k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die Schar der Funktionen $f_{a,k}$ mit

$$f_{a,k}(x) = ax^2 + (4a - 2ak)x - 8ak.$$

Der Graph der Funktion $f_{a,k}$ heißt dabei $G_{a,k}$.
Bestimme in Abhängigkeit von a und k die Extrempunkte von $G_{a,k}$. Beschreibe den Einfluss der Parameter a und k auf den Graphen von $f_{a,k}$.

8.3.2 Gemeinsamer Schnittpunkt – nur eA

Bestimmung gemeinsamer Schnittpunkte einer Schar – nur eA

Gegeben ist die Funktionenschar

$$f_t(x) = x^2 + tx + 1 - t.$$

Zeige, dass alle Kurven durch einen gemeinsamen Punkt P verlaufen und ermittle diesen Punkt.

Schritt 1: Schnittstellen zweier Scharkurven

Bestimme den Schnittpunkt der Graphen zweier beliebig gewählter Funktionen der Kurvenschar. Zum Beispiel die Schnittpunkte für die Parameter $t = 0$ und $t = 1$:

$$\begin{aligned} f_0(x) = f_1(x) \quad &\iff \quad x^2 + 1 = x^2 + x \\ &\iff \quad x = 1. \end{aligned}$$

Schritt 2: Bestimmung des Funktionswertes

Setze das ermittelte x in eine beliebige Funktion f_t der Schar ein. Ist das Ergebnis unabhängig vom Parameter t, so gibt es einen gemeinsamen Schnittpunkt. Es gilt:

$$f_t(1) = 1 + t + 1 - t = 2.$$

Schritt 3: Gemeinsamer Schnittpunkt

Die errechneten Werte ergeben die Koordinaten des gemeinsamen Schnittpunkts:

$$\mathrm{P}(\,1\,|\,2\,)\,.$$

Aufgabe 116 – nur eA Abi★

Untersuche folgende Scharen f_t auf gemeinsame Punkte.

(a) $f_t(x) = te^{-2x+4} + 4 - t$

(b) $f_t(x) = \dfrac{-2tx - 2x}{tx^2 + 1}$

(c) $f_t(x) = e^{2x} - te^x$.

Analysis

8.3.3 Ortskurve – nur eA

Bestimmung der Ortskurve – nur eA

Gegeben ist die Funktionenschar f_t mit

$$f_t(x) = x^2 + 2tx + 2x + 1, \; t \geq 0.$$

Bestimme die Ortskurve der Tiefpunkte.

Schritt 1: Bestimmung der Minimumstelle

Zunächst werden die ersten beiden Ableitungen der Funktion f_t bestimmt:

$$f_t'(x) = 2x + 2t + 2 = 0$$
$$f_t''(x) = 2.$$

Nun werden Nullstellen der ersten Ableitung berechnet:

$$f_t'(x) = 2x + 2t + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -t - 1$$

Wegen $f_t''(-t-1) = 2 > 0$ hat der Graph der Funktion f_t an der Stelle $x = -t - 1$ ein Minimum.

Schritt 2: Bestimmung der Koordinaten des Tiefpunktes

Bestimme den Funktionswert von $f_t(-t-1)$. Dies liefert den y-Wert des Tiefpunkts:

$$\begin{aligned} f_t(-t-1) &= (-t-1)^2 + 2t(-t-1) + 2(-t-1) + 1 \\ &= -t^2 - 2t. \end{aligned}$$

Der Tiefpunkt hat also die Koordinaten $T_t\left(-t-1 \,\middle|\, -t^2 - 2t\right)$

Schritt 3: Bestimmung der Gleichung der Ortskurve

Schreibe Gleichungen für x und y hin und löse die x-Gleichung nach t auf:

$$x = -t - 1 \quad \Longrightarrow \quad t = -x - 1$$
$$y = -t^2 - 2t.$$

Die Gleichung des Parameters t in Abhängigkeit der Variable x wird in die Gleichung für die Variable y eingesetzt:

$$\begin{aligned} & y = -(-x-1)^2 - 2(-x-1) \\ \Longleftrightarrow \quad & y = -x^2 + 1. \end{aligned}$$

Schritt 4: Bestimmung des Definitionsbereichs

Bestimme gegebenenfalls den Definitionsbereich der Ortskurve mithilfe des Definitionsbereichs von t und der x-Gleichung. Es gelten:

$$x = -t - 1 \quad \text{und} \quad t \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad x \leq -1.$$

Die Ortskurve der Tiefpunkte lautet also:

$$y = -x^2 + 1, \; x \leq -1.$$

Tipp: Dieses Rezept lässt sich mit der entsprechenden Modifikation auch für die Ortskurve der Hochpunkte und Wendepunkte anwenden.

Aufgabe 117 – nur eA Abi★★

Ermittle für folgende Scharen f_t die Ortskurve aller Extrempunkte.

(a) $f_t(x) = x^2 - 2xt + t^2 + t, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $f_t(x) = e^{2x} - 2te^x + 1, \quad t \geq 1$

(c) $f_t(x) = \dfrac{x+t}{e^x}, \quad t \geq 1$

Aufgabe 118 – nur eA Abi★★

Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist die Schar der Funktionen f_t gegeben durch:

$$f_t(x) = x^3 + 3tx^2 - x + 1.$$

Ermittle die Ortskurve aller Wendepunkte der Scharkurven.

8.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit – nur eA

Merke – nur eA

Gegeben sind zwei stetige bzw. differenzierbare Funktionen f und g. Der Graph der Funktion f soll an der Stelle $x = a$ an den Graphen der Funktion g angeschlossen werden. Dabei heißt der Übergang an der Stelle $x = a$:

- **stetig**, falls $f(a) = g(a)$ gilt.
- **differenzierbar**, falls zusätzlich $f'(a) = g'(a)$ gilt.
- **zweimal differenzierbar** bzw. **krümmungsruckfrei**, falls zusätzlich $f''(a) = g''(a)$ gilt.

Beispiel: Betrachtet werden die folgenden beiden Funktionen

$$f(x) = x^2, \quad \text{für} \quad x \leq 0$$
$$g(x) = -x^2, \quad \text{für} \quad x > 0.$$

An der Stelle $x = 0$ geht der Graph der Funktion f in den Graphen der Funktion g über.

Es gelten:

$$f(0) = 0 = g(0)$$
$$f'(0) = 0 = g'(0)$$
$$f''(0) = 2 \neq -2 = g''(0).$$

Somit ist der Übergang der Graphen f und g zwar stetig und differenzierbar, aber nicht krümmungsruckfrei.

Aufgabe 119 – nur eA Abi$^{\star-\star\star}$

Gegeben ist die Funktion

$$h(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 + x, & x < 0 \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion h an der Stelle $x = 0$ einmal differenzierbar ist, jedoch nicht zweimal.

Aufgabe 120 – nur eA Abi*

Gegeben ist für $x \leq 0$ die Funktion f mit

$$f(x) = 2\mathrm{e}^{2x} + \ln(1 - x) + 2.$$

(a) Zeige, dass die Funktion g mit

$$g(x) = 4\sqrt{x+1} + 4x^2 + x, \quad x \geq 0$$

an der Stelle $x = 0$ denselben Wert, dieselbe Steigung und dieselbe Krümmung wie die Funktion f besitzt.

(b) Bestimme eine ganzrationale Funktion 2. Grades, welche die gleichen Bedingungen erfüllt.

Aufgabe 121 – nur eA Abi**

Gegeben sind für $k \in \mathbb{R}$ folgende zwei Funktionenscharen f_k und g_k:

$$f_k(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2kx + 1, \quad x \geq 0$$

$$g_k(x) = -5x^3 - 3x^2 - 2kx + 1, \quad x \leq 0$$

Überprüfe, ob ein k existiert, so dass die Graphen von f_k und g_k an der Stelle $x = 0$ krümmungsruckfrei ineinander übergehen. Bestimme den Wert von k, falls eines existiert.

8.5 Wachstum – nur eA

Merke – nur eA

- Nimmt eine Größe B in gleichen Zeitabschnitten um stets den gleichen Faktor zu oder ab, so liegt **exponentielles Wachstum** vor. Für die Bestandsfunktion B gilt dann:

  $$B(t) = B_0 \cdot \mathrm{e}^{k \cdot t}.$$

  Dabei ist B_0 der Anfangsbestand und k die Wachstumskonstante. Exponentielles Wachstum erfüllt die **Differentialgleichung**

  $$B'(t) = k \cdot B(t).$$

- Liegt **beschränktes Wachstum vor**, so ist der Bestand durch eine Sättigungsgrenze S nach oben beschränkt. Für die Bestandsfunktion B gilt:

  $$B(t) = S - (S - B_0) \cdot \mathrm{e}^{-kt}.$$

Dabei ist S die Sättigungsgrenze, B_0 der Anfangsbestand und $k > 0$ die Wachstumskonstante. Beschränktes Wachstum erfüllt die Differentialgleichung

$$B'(t) = k(S - B(t)).$$

➤ Liegt **logistisches Wachstum vor**, so ist der Bestand durch eine Sättigungsgrenze S nach oben beschränkt. Für die Bestandsfunktion gilt:

$$B(t) = \frac{B_0 \cdot S}{B_0 + (S - B_0)\,\mathrm{e}^{-Skt}}.$$

Dabei ist S die Sättigungsgrenze, B_0 der Anfangsbestand und $k > 0$ die Wachstumskonstante. Logistisches Wachstum erfüllt die Differentialgleichung

$$B'(t) = k \cdot B(t) \cdot (S - B(t)).$$

Beispiel: Ein Patient hängt am Tropf. Die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten wird dabei beschrieben durch die Funktion B mit

$$B(t) = 100 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-0,1t})$$

wobei t in Minuten nach Behandlungsbeginn und $B(t)$ in Milligramm. Bestimme die Sättigungsgrenze S und die Wachstumkonstante k. Zeige außerdem, dass die Funktion B die Differentialgleichung für beschränktes Wachstum erfüllt.

Die Wachstumskonstante lässt sich direkt ablesen als $k = 0,1$. Für die Berechnung der Sättigungsgrenze bestimmt man den Grenzwert für $t \to \infty$.

$$S = \lim_{t\to\infty} B(t) = \lim_{t\to\infty} 100 - 100\underbrace{\mathrm{e}^{-0,1t}}_{\to 0} = 100.$$

Alternativ kann man auch die Gleichung solange umformen, bis sie die Form der allgemeinen Formel hat:

$$100 \cdot (1 - \mathrm{e}^{-kt}) = 100 - (100 - 0)\mathrm{e}^{-0,1t}.$$

Ein Vergleich mit der Formel liefert: $S = 100$, $B_0 = 0$ und $k = 0,1$. Nun kann gezeigt werden, dass die Funktion B die Differentialgleichung erfüllt, indem man die Funktion B in obige Differentialgleichung einsetzt. Hierzu berechnet man zunächst die Ableitung B' der Funktion B:

$$B'(t) = 10\mathrm{e}^{-0,1t}.$$

Eingesetzt in obige Gleichung folgt:

$$\begin{aligned}
B'(t) &= k(S - B(t)) \\
10\mathrm{e}^{0,1t} &= 0,1 \cdot \left(100 - 100 \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-0,1t}\right)\right) \\
10\mathrm{e}^{-0,1t} &= 0,1 \cdot (100 - 100 + 100\mathrm{e}^{-0,1t}) \\
10\mathrm{e}^{-0,1t} &= 10\mathrm{e}^{-0,1t} \\
0 &= 0 \checkmark
\end{aligned}$$

Aufgabe 122 – nur eA 🖩 Abi★–★★

In einem Laborschrank wurde im Jahr 1960 eine Menge von 10 Gramm des Kohlenstoffisotops ^{14}C eingeschlossen. Dieses hat eine Halbwertszeit von 5730 Jahren.

(a) Stelle die Bestandsfunktion auf.

(b) Wieviel ^{14}C befindet sich im Jahr 2015 im Schrank?

(c) Kurz nach der Auslöschung der Menschheit finden Außerirdische den Laborschrank. Dort befinden sich noch 7 Gramm ^{14}C. Wie viele Jahre bleiben uns noch?

Aufgabe 123 – nur eA Abi★★

Zum Neujahr 2015 betritt ein neuer Mobilfunkanbieter den Markt. Durch radikales Marketing gewinnt er monatlich 5000 Neukunden. Aufgrund des schlechten Kundenservices verliert der Anbieter jedoch jeden Monat ein Prozent seiner Kunden. Die Anzahl der Kunden wird durch die Funktion B beschrieben, wobei $B(t)$ die Anzahl der Kunden t Monate nach Markteinführung beschreibt.

(a) Stelle eine Formel für die Änderungsrate der Kundenzahl auf.

(b) Bestimme eine Gleichung für die Funktion B.

(c) Wie viele Kunden hat der Anbieter nach 10 Jahren?

(d) Wie viele Kunden hat der Anbieter langfristig?

Aufgabe 124 – nur eA

Auf einer einsamen Insel, bislang unentdeckt, und so wunderschön, dass sie noch niemals von einem Bewohner verlassen wurde, breitet sich eine Seuche aus. Insgesamt leben 6500 Einwohner auf der Insel. Zunächst hatte sich nur ein Fischer infiziert, welcher einen bis dahin unbekannten Fisch erbeutet hatte. Nach 5 Tagen waren jedoch schon 300 Einwohner erkrankt. Insgesamt lässt sich die Zahl der Erkrankten durch logistisches Wachstum beschreiben.

(a) Stelle die Funktionsgleichung für die Anzahl B der erkrankten Einwohner auf.

(b) Wann sind 1000 Menschen erkrankt?

(c) Wann ist nur noch ein einziger Mensch gesund?

(d) Wie viele Kranke gibt es nach 10 Tagen?

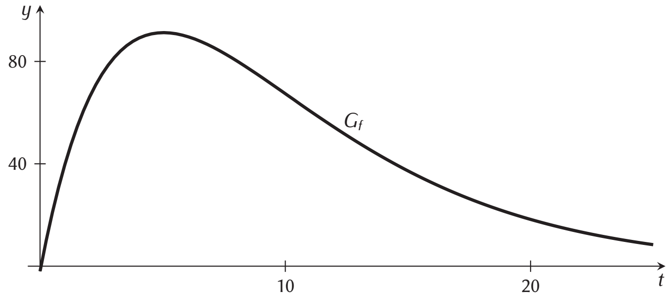
8.6 Änderungsraten und Bestände

Beispiel: Die momentane Neuerkrankungsrate einer Läuse-Epidemie in den Schulen eines Landkreises wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(t) = e^{-0,2t} \cdot (50t - 2) + 2,$$

wobei t der Anzahl in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ der Anzahl der Neuerkrankungen pro Woche entspricht. Bei Beobachtungsbeginn sind schon 45 Schüler erkrankt. Jede Erkrankung wird dem Gesundheitsamt gemeldet.

Im folgenden Schaubild ist der Graph G_f von f dargestellt.



Bestimmte Größe der Änderungsrate

Fragestellung: In welchem Zeitraum ist diese Erkrankungsrate größer als 80 Neuerkrankungen pro Woche?

➤ *Bestimmung der Zeitpunkte, an denen die Neuerkrankungsrate* 80 *Neuerkrankungen pro Woche entspricht*

Setze $f(t) = 80$ und bestimme die Lösungen:

$$e^{-0,2t} \cdot (50t - 2) + 2 = 80 \quad \Longrightarrow \quad t_1 \overset{\text{GTR}}{\approx} 2,74, \quad t_2 \overset{\text{GTR}}{\approx} 8,38.$$

➤ *Zeitraum, in dem die Erkrankungsrate größer als* 80 *ist*

Es gilt:

$$f(4) > 80 \quad \Longrightarrow \quad \text{Zeitraum: } 2,74 \leq t \leq 8,38.$$

Somit ist die Erkrankungsrate im Zeitraum von ungefähr 2,74 bis 8,38 Wochen nach Beobachtungsbeginn größer als 80 Neuerkrankungen pro Woche.

Extremum der Änderungsrate

Fragestellung: Wann erkranken die meisten Schüler pro Woche? Wie viele sind das?

➤ *Bestimmung der Extremstellen von G_f*

Zunächst wird die Ableitung der Funktion f bestimmt. Es gilt:

$$f'(t) = -e^{-0,2t} \cdot (10t - 50,4).$$

Die Nullstellen der Ableitung werden bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(t) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -e^{-0,2t} \cdot (10t - 50,4) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = 5,04. \end{aligned}$$

Die Existenz eines Maximums an dieser Stelle kann mithilfe des Vorzeichenwechselkriteriums oder mit der zweiten Ableitung bestimmt werden. Die zweite Ableitung der Funktion f lautet

$$f''(t) = e^{-0,2t} \cdot (2t - 20,08).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f''(5,04) &= e^{-0,2 \cdot 5,04} \cdot (2 \cdot 5,04 - 20,08) \\ &= -10 \cdot e^{-1,008} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Damit hat G_f an der Stelle $t = 5,04$ einen Hochpunkt.

➤ *Bestimmung der Koordinaten des Hochpunktes*
Bestimme die Funktionswert der soeben berechneten Extremstelle:

$$f\,(5{,}04) = \mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 5{,}04} \cdot (50 \cdot 5{,}04 - 2) = 250 \cdot \mathrm{e}^{-1{,}008} \approx 91{,}24.$$

Somit erkranken die meisten Schüler zu Beginn der sechsten Woche. Das sind ungefähr 91 Schüler in dieser Woche.

Schnellste Abnahme der Änderungsrate

Fragestellung: Wann nimmt die momentane Erkrankungsrate am stärksten ab?
Die ersten beiden Ableitungen der Funktion f wurden bereits bestimmt und es gilt:

$$f'(t) = -\mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot (10t - 50{,}4)$$
$$f''(t) = \mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot (2t - 20{,}08).$$

➤ *Bestimmung des Minimums des Graphen von f'*
Zunächst wird die Nullstelle der Ableitung f'' bestimmt:

$$\begin{aligned} f''(t) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot (2t - 20{,}08) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad t = 10{,}04. \end{aligned}$$

Die Existenz des Tiefpunktes kann mit dem Vorzeichenwechselkriterium oder über die dritte Ableitung bestimmt werden. Es gilt:

$$f'''(t) = -\mathrm{e}^{-0{,}2t} \cdot (0{,}4t - 6{,}016)$$

und damit

$$f'''\,(10{,}04) = -\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 10{,}04} \cdot (0{,}4 \cdot 10{,}04 - 6{,}016) = 2\mathrm{e}^{-2{,}008} > 0.$$

Die Funktion f' hat damit an der Stelle $t = 10{,}04$ ein Minimum. Die Erkrankungsrate nimmt zu Beginnn der elften Wochen nach Beobachtungsbeginn am stärksten ab.

Bestimmung des Gesamtbestands

Eine Stammfunktion F von f ist gegeben durch:

$$F(t) = -\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,(250t + 1240) + 2t.$$

Fragestellung: Wie viele Schüler wurden nach 6 Wochen dem Gesundheitsamt gemeldet?
➤ *Berechnung der Anzahl der Neuerkrankungen*
Die Fläche unter der Kurve von f im Intervall $[0; 6]$ entspricht der Anzahl der Schüler, die dem Gesundheitsamt in den ersten 6 Wochen dem Gesundheitsamt gemeldet wurden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t &= F(6) - F(0) \\ &= -\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 6}\,(250 \cdot 6 + 1240) + 2 \cdot 6 - \left(-\mathrm{e}^{-0{,}2\cdot 0}\,(250 \cdot 0 + 1240) + 2 \cdot 0\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-1{,}2}\,(2740) + 12 + 1240 \\ &\approx 426{,}73. \end{aligned}$$

In den ersten 6 Wochen nach Beobachtungsbeginn sind ungefähr 427 Schüler neu erkrankt.
➤ *Bestimmung der Anzahl der Gesamterkrankungen*
Die Anzahl der Gesamterkrankungen setzt sich zusammen aus der Anzahl der Neuerkrankungen in den ersten 6 Wochen und der Anzahl der zu Beginn der Beobachtung bereits erkrankten

Schüler. Es gilt also:

$$427 + 45 = 472.$$

Nach 6 Wochen wurden dem Gesundheitsamt 472 Schüler gemeldet.

Mittlere Änderungsrate

Fragestellung: Wie groß ist die mittlere Erkrankungsrate während der ersten 10 Wochen?

➤ *Berechnung der Anzahl an Neuerkrankungen in den ersten 10 Wochen*

Die Anzahl der Neuerkrankungen in den ersten 10 Wochen ist gegeben durch:

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t &= F(10) - F(0)\\ &= -e^{-0{,}2\cdot 10}(250\cdot 10 + 1240) + 2\cdot 10 - \left(-e^{-0{,}2\cdot 0}(250\cdot 0 + 1240) + 2\cdot 0\right)\\ &= -e^{-2}(3740) + 20 + 1240\\ &\approx 753{,}85\end{aligned}$$

In den ersten 10 Wochen nach Beobachtungsbeginn sind ungefähr 754 Schüler erkrankt.

➤ *Bestimmung der durchschnittlichen Erkrankungsrate*

Für die mittlere Erkrankungsrate gilt:

$$\frac{1}{10}\cdot\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 75{,}4.$$

Die mittlere Erkrankungsrate während der ersten 10 Wochen liegt bei etwa 75,4 Neuerkrankungen pro Woche.

Gesamtzahl der Erkrankungen

Bestimme eine Funktion B, welche die Gesamtanzahl der gemeldeten Schüler nach t Wochen angibt. Wann werden 700 Schüler beim Gesundheitsamt gemeldet sein?

➤ *Bestimmung der Funktion B*

Es gilt:

$$\begin{aligned}B(t) &= B_0 + \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= 45 + F(t) - F(0).\end{aligned}$$

Bestimme das Integral nun unter Verwendung der angegebenen Stammfunktion:

$$\begin{aligned}B(t) &= 45 + \left(-e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t\right) - \left(-e^{-0{,}2\cdot 0}(250\cdot 0 + 1240) + 2\cdot 0\right)\\ &= 45 + \left(-e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t\right) + 1240\\ &= 1285 - e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t.\end{aligned}$$

Als Funktion für die Gesamtzahl der, nach t Wochen nach Beobachtungbeginn, gemeldeten Schülern ergibt sich:

$$B(t) = 1285 - e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t.$$

➤ *Bestimmung des Zeitpunktes, an dem 700 Schüler gemeldet wurden*

Es gilt:

$$B(t) = 700 \quad\Longrightarrow\quad t \overset{\text{GTR}}{\approx} 8{,}66.$$

Zu Beginn des zweiten Drittels der 9. Woche werden dem Gesundheitsamt 700 Schüler gemeldet sein.

Einführung einer Abbaurate

Eine Expertin für Entlausung kommt drei Wochen nach Beobachtungsbeginn in einige Schulen. Sie schafft es, bei 10 Schülern pro Tag die Läuse zu bekämpfen.
Wie viele Schüler werden in den ersten 10 Wochen von ihren Läusen befreit? Die Anzahl der Wochen, in denen die Expertin aktiv ist, ist gegeben durch:

$$10 - 3 = 7.$$

Die Anzahl der Schüler, bei denen sie die Läuse in den 7 Wochen bekämpft:

$$7 \cdot 7 \cdot 10 = 490.$$

In den ersten 10 Wochen werden 490 Schüler von ihren Läusen befreit.

Tipp: Beachte, dass bei Rechnungen mit Abbaurate der momentane Bestand niemals negativ sein kann. Wird der Bestand zu einem Zeitpunkt 0, so fällt in diesem Moment auch die Abbaurate auf 0. Logisch: Gibt es keine Läuse mehr, hört die Entlauserin auf zu arbeiten.

Vollständiger Abbau

Wann hat die Expertin alle Läuse bekämpft?

➤ *Anzahl der Erkrankten nach t Wochen*

Die Gesamtanzahl an erkrankten Schülern wurde bereits bestimmt und es gilt:

$$B(t) = 1285 - e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t.$$

➤ *Anzahl der Geheilten nach t Wochen*

Die Anzahl der Geheilten G nach t Wochen ist gegeben durch:

$$G(t) = 70 \cdot (t - 3), \quad t \geq 3.$$

➤ *Bestimmung des Zeitpunktes, an dem alle geheilt sind*

Bestimme den Zeitpunkt t, an dem $B(t) = G(t)$ gilt:

$$\begin{aligned} 70 \cdot (t - 3) &= 1285 - e^{-0{,}2t}(250t + 1240) + 2t \\ \Longrightarrow \qquad t &\overset{\text{GTR}}{\approx} 20{,}41. \end{aligned}$$

Nach etwas mehr als 20 Wochen hat die Expertin alle Läuse bekämpft.

Tipp: In dieser Konstellation geht man davon aus, dass die Schüler nur geheilt werden, wenn sie von der Expertin behandelt werden. Eine Heilung aus eigener Kraft ist nicht vorgesehen.

Aufgabe 125 – Abi★★

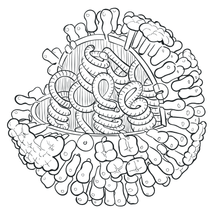
Betrachtet wird die Funktionenschar f_a mit $f_a(t) = \frac{1}{4}t^3 - at^2 + a^2t$ für $a > 0$. Die Funktionen dieser Schar werden verwendet, um die Durchflussgeschwindigkeiten an einer bestimmten Stelle eines Flusses für die ersten 8 Monate nach Beobachtungsbeginn zu modellieren. Dabei ist t in Monaten und $f_a(t)$ in Mrd. Kubikmetern pro Monat gegeben.

➤ Wie viel Wasser fließt in den ersten 6 Monaten durch einen Fluss, dessen Durchflussgeschwindigkeit durch die Funktion f_3 der oben genannten Funktionenschar modelliert werden kann?

➤ Die Durchflussgeschwindigkeit eines weiteren Flusses kann für den gleichen Zeitraum durch die Funktion f_2 der oben angegebenen Funktionenschar dargestellt werden. Zu welchem Zeitpunkt ist durch beide Flüsse gleich viel Wasser geflossen?

Aufgabe 126 – Abi★★

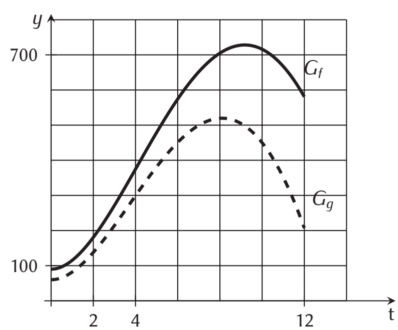
Es ist Erkältungszeit und die Rate der Impfversager bei der Grippeschutzimpfung ist in diesem Jahr ungewöhnlich hoch. Deshalb hat die Grippe ganz Deutschland fest im Griff. Besonders heftig ist ist die Situation in der Stadt Essen. Die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag kann ab dem 20. Februar ($t = 0$) für die nächsten 12 Tage modelliert werden durch die Funktion f mit:



$$f(t) = 0{,}3 \cdot \left(0{,}2t^4 - 9{,}3t^3 + 93{,}2t^2\right) + 90$$

mit t in Tagen seit dem 20. Februar und $f(t)$ in Neuerkrankungen pro Tag.

Die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag in Dortmund lässt sich modellieren durch die Funktion g. Die Graphen der Funktionen f und g sind in unten stehendem Schaubild dargestellt und dabei mit G_f und G_g bezeichnet.



(a) Essen und Dortmund haben in etwa gleich viele Einwohner. Vergleiche die Graphen von f und g und interpretiere das Schaubild im Sachzusammenhang.

(b) Erkläre die Bedeutung der Ausdrücke $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$ und $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(c) Berechne $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$.

(d) Gib an, wie viele Neuerkrankungen es in Essen am 25. Februar gibt.

(e) Angenommen, das Modell gilt auch für $t > 12$. Wie viele Neuerkrankungen gäbe es dann am 16. Tag? Begründe, warum das Modell nicht für beliebige Zeiten $t > 0$ gelten kann.

Analysis

9 Umfangreiche Aufgaben

9.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 127

Bilde die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{\ln x}\right) - e^{x^2}.$$

Aufgabe 128

Begründe anhand des Graphen der Funktion $f(x) = \sin(x)$, dass der Wert des Integrals

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx$$

Null ist und weise dies rechnerisch nach.

Aufgabe 129

Löse die Gleichung

$$(x^2 - 2x - 3) \cdot \ln(x - 2) = 0$$

für $x > 2$.

Aufgabe 130

Gegeben ist eine Funktion der Form

$$f(x) = \frac{a - x}{1 + x^2} + b$$

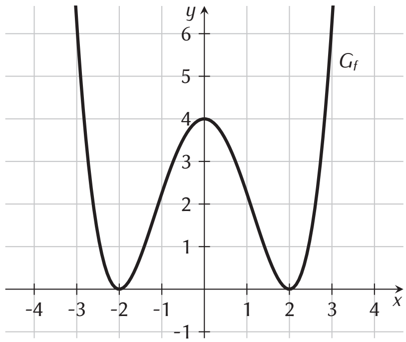
mit Parametern $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Überprüfe, ob es Parameterwerte $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung, bzw. achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

(b) Der Graph einer solchen Funktion f schneidet die y-Achse im Punkt $S(0 \mid 7)$ und besitzt eine waagrechte Asymptote bei $y = 2$. Bestimme die Parameter a und b.

Aufgabe 131

Die Abbildung zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.



Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie jeweils deine Antwort.

(1) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat im dargestellten Bereich genau drei Nullstellen.

(2) Der Graph der Ableitungsfunktion f' hat im dargestellten Bereich genau einen Hoch- und einen Tiefpunkt.

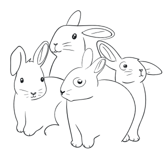
(3) Der Grad der Ableitungsfunktion f' ist höchstens drei.

(4) Es gilt $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$ für alle $a \neq 0$.

9.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 132

Durch eine Handelsflotte wurden Hasen auf eine bis dahin hasenfreie Insel gebracht. Die Regierung dieser Insel beauftragt einen Biologen mit der Beobachtung der Hasenpopulation. Die folgende Tabelle spiegelt seine Aufzeichnungen wider:



Zeit in Wochen	0	2	5	10	15	20	30
Anzahl der Hasen	30	34	43	60	80	105	180

Eine Mathematikerin versucht die Vermehrung des Hasen anhand eines mathematischen Modells zu beschreiben. Ihre erste Arbeitshypothese ist, dass sich die Population der Hasen gemäß einer Funktion f entwickelt mit

$$f(t) = a\mathrm{e}^{bt},$$

hierbei entspricht t in Wochen seit Beobachtungsbeginn und $f(t)$ der Anzahl der Hasen auf der Insel zum Zeitpunkt t.

(a) Bestimme aus der Hasenpopulation zu Beginn der Aufzeichnung ($t = 0$) und nach 5 Wochen ($t = 5$) die Werte der Parameter a und b im obigen Modell. Runde diese auf zwei Nachkommastellen.

(b) Vergleiche die in obigem Modell zu erwartende Anzahl an Hasen mit der tatsächlich beobachteten nach 20 Wochen.

(c) Wann ist in dem durch f beschriebenen Modell die momentane Zuwachsrate größer als 8 Hasen pro Woche?

(d) Bestimme, wann es nach diesem Modell erstmalig mehr als 150 Hasen auf der Insel gibt.

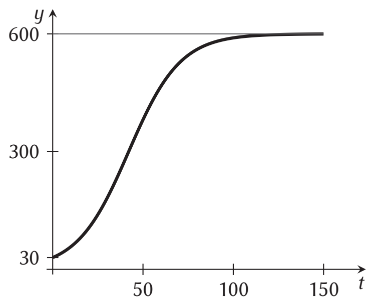
(e) Begründe, weshalb dieses Modell nicht die Realität abbilden kann.

Die Mathematikerin korrigiert aufgrund der Überlegungen in Aufgabenteil (e) ihre Aussage und vermutet, dass sich die Hasenpopulation der Insel näherungsweise gemäß der Funktion g mit

$$g(t) = \frac{600}{1 + 19e^{-0{,}07t}}$$

entwickelt. Dabei bezeichnet t die Anzahl der Wochen nach Beobachtungsbeginn und $g(t)$ die Anzahl der Hasen auf der Insel zum Zeitpunkt t.

(f) Im folgenden Schaubild ist der Graph G der Funktion g mitsamt seinen Asymptoten eingezeichnet.



Gib an, welche Eigenschaften der Funktion g sich direkt aus dem Schaubild entnehmen lassen und erläutere ihre Bedeutung bezogen auf die Entwicklung der Hasenpopulation.

(g) Bestimme welche Anzahl von Hasen langfristig auf der Insel zu erwarten ist, wenn man das durch die Funktion g beschriebene Modell zugrunde legt.

(h) Bestimme zu welchem Zeitpunkt laut dem zweiten Modell 90 % der langfristigen Anzahl an Hasen die Insel bevölkern.

(i) Welche Bedeutung hat der Ausdruck $g'(20)$ im Sachzusammenhang?

Gegeben ist die Funktionenschar g_k durch

$$g_k(x) = x^3 + kx^2 - x - k, k \in \mathbb{R}.$$

Ihr Schaubild sei G_k.

(j) Bestimme den Wendepunkt der Funktionenschar in Abhängigkeit von k.

(k) **nur eA** – Gib eine Gleichung für eine Kurve an, auf der alle Wendepunkte von G_k liegen.

Aufgabe 133 – nur eA

Gegeben ist die Funktion $f(x)$ mit

$$f(x) = x(\ln(x))^2 + x + 1,\ x \in D.$$

Das Schaubild der Funktion $f(x)$ heiße K.

(a) Bestimme den maximalen Definitionsbereich $\mathcal{D}$ von $f(x)$.

(b) Zeige, dass für die Ableitung $f'(x)$ gilt:

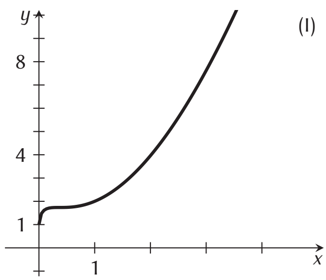
$$f'(x) = (1 + \ln(x))^2.$$

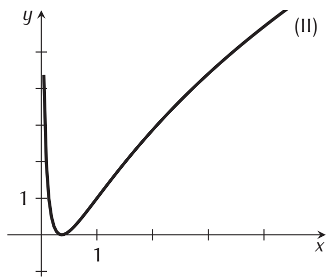
(c) Begründe ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass K keine Extrempunkte haben kann.

(d) Untersuche das Krümmungsverhalten und bestimme den Sattelpunkt von K.

(e) Untersuche das Verhalten von $f(x)$ für $x \to \infty$

(f) Nachstehend sind die Graphen der Funktion $f(x)$ und der Ableitung $f'(x)$ gegeben. Ordne diese Graphen den jeweiligen Funktionen zu und begründe deine Zuordnung.





(g) Bestimme eine Gleichung der Tangente $t(x)$ an K im Punkt $\mathrm{P}(\,\mathrm{e} \mid 2\mathrm{e} + 1\,)$.

(h) Zeige, dass die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{3}{4}x^2 + x$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

(i) Berechne die Fläche, die von der Senkrechten $x = 1$, der Funktion $f(x)$ und der Tangente $t(x)$ eingeschlossen wird.

In einem Zoo werden Heimchen als Nahrungsmittel für andere Tiere gezüchtet. Der Bestand lässt sich beschreiben durch eine Funktion der Form

$$B(t) = B_0 \mathrm{e}^{kt},$$

mit t in Tagen nach Zuchtbeginn und $B(t)$ als Anzahl Heimchen.

(j) Zu Beginn der Aufzeichnung gab es 150 Heimchen. Nach 5 Tagen befinden sich 380 Heimchen in der Zuchtbox. Bestimme mittels dieser Werte die Parameter B_0 und k.

(k) Wie viele Heimchen können höchstens nach dem 10. Tag ab Aufzeichnungsbeginn verfüttert werden, ohne dass die Anzahl an Heimchen in der Zuchtbox unter die Anzahl am Ende des 9. Tages fällt.

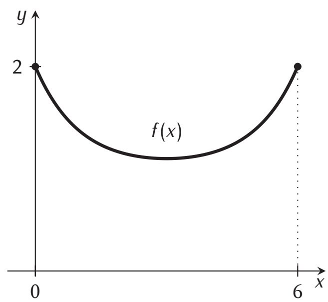
(l) Zu einem nicht näher bezeichneten Zeitpunkt t_1 werden 90 % der in der Zuchtbox vorhanden Heimchen verfüttert. Wie lange dauert es, bis der ursprüngliche Bestand zum Zeitpunkt t_1 wieder erreicht wird, unter der Voraussetzung, dass keine weiteren Heimchen verfüttert werden?

Aufgabe 134 – nur eA

Auf einem Spielplatz ist an einem Klettergerüst ein durchhängendes Seil angebracht. Die Enden des Seils sind auf einer Höhe von zwei Metern und einem Abstand von sechs Metern befestigt. Die Höhe des Seils kann in Abhängigkeit des Abstands x vom linken Pfosten durch die Funktion $f(x)$ beschrieben werden, wobei gilt:

$$f(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) + 1, \quad x \in [0; 6].$$

Eine Längeneinheit entspricht 1 m. Die Funktion $f(x)$ wird auch Kettenlinie genannt. Der Graph der Funktion $f(x)$ ist im folgenden Schaubild dargestellt.



(a) Zeige, dass die Funktion die geforderten Eigenschaften bzgl. der Befestigungen erfüllt.

(b) An welchen Punkten ist die Krümmung des Seils am stärksten, und an welchen am schwächsten?

(c) Erik behauptet, dass sein kleiner Bruder Felix gerade noch unter dem Seil durchlaufen kann. Felix ist 108 cm groß. Überprüfe Eriks Behauptung.

(d) Verschiebe nun die Funktion $f(x)$ um 3 LE (=Längeneinheiten) nach links. Wie lautet der Funktionsterm der so entstandenen Funktion $g(x)$? Untersuche die Funktion $g(x)$ auf Symmetrie. Welche Konsequenzen ergeben sich damit für die Symmetrie der Funktion $f(x)$?

(e) Eriks Papa gibt dem Kletterseil genug Schwung, damit es sich einmal um seine Aufhängung dreht. Welches Luftvolumen wird von dem rotierenden Kletterseil eingeschlossen?

Ein weiteres Seil des Klettergerüstes kann mittels der Funktion $h(x)$ beschrieben werden. Hierbei gilt:

$$h(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + e^{-x+1}\right), \quad x \in [0; 2].$$

(f) Wie weit ist der tiefste Punkt des Seils vom Boden entfernt?

(g) Die Länge dieses Seils kann mittels der folgenden Formel berechnet werden:

$$L = \int_0^2 \sqrt{1 + h'(x)^2}\,dx.$$

Bestimme die Länge des Seils und gib das exakte Ergebnis an.

Geometrie

10 Grundlagen der Vektorrechnung

10.1 Lineare Gleichungssysteme

10.1.1 Lösungsverfahren

Merke

Ein **lineares Gleichungssystem (LGS)** wird gelöst, indem man es durch Zeilenumformungen auf Stufenform bringt.

Beispiel: Gesucht sind die Lösungen des folgenden LGS:

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \qquad \text{(I)}\\
x_1 - x_2 - x_3 &= 3 \qquad \text{(II)}\\
2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \qquad \text{(III)}
\end{aligned}
$$

Gleichung (I) wird behalten. Durch Zeilenumformungen wird in den Gleichungen (II) und (III) die Variable x_1 eliminiert.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 2x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \qquad \text{(I)}\\
\text{(I)} - 2 \cdot \text{(II)} & 3x_2 + x_3 &=& -5 \qquad \text{(II}')\\
\text{(I)} - \text{(III)} & -x_2 - 2x_3 &=& 0 \qquad \text{(III}')
\end{array}
$$

Gleichungen (I) und (II′) werden behalten. Durch Zeilenumformungen wird in Gleichung (III′) die Variable x_2 eliminiert.

$$
\begin{array}{lrcl}
 & 2x_1 + x_2 - x_3 &=& 1 \qquad \text{(I)}\\
 & 3x_2 + x_3 &=& -5 \qquad \text{(II}')\\
\text{(II}') + 3 \cdot \text{(III}') & -5x_3 &=& -5 \qquad \text{(III}'')
\end{array}
$$

Jetzt hat das LGS Stufenform und es können nacheinander die Lösungen für x_3, x_2 und x_1 abgelesen werden.

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{(III}'') & -5x_3 = -5 & \Longrightarrow & x_3 = 1\\
\text{(II}'),\ x_3 = 1 & 3x_2 + 1 = -5 & \Longrightarrow & x_2 = -2\\
\text{(I)},\ x_3 = 1,\ x_2 = -2 & 2x_1 - 2 - 1 = 1 & \Longrightarrow & x_1 = 2
\end{array}
$$

Aufgabe 135 – Abi★

Bestimme die Lösungen des linearen Gleichungssystems.

$$
\begin{aligned}
10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 80\\
3x_1 + x_2 - x_3 &= 110\\
7x_1 - x_2 + x_3 &= -10
\end{aligned}
$$

Aufgabe 136 Abi★★

Im Baumarkt werden drei unterschiedliche Päckchen bestehend aus baugleichen Schrauben, Unterlegscheiben und Muttern verkauft. Im ersten Päckchen befinden sich 100 Schrauben, 50 Unterlegscheiben und 10 Muttern. Es wiegt 1155 g. Das zweite Päckchen wiegt genau 1 kg. Darin befinden sich 20 Muttern, 100 Unterlegscheiben und 69 Schrauben. Das dritte Päckchen wiegt 155 g und besteht aus jeweils 10 Schrauben, Unterlegscheiben und Muttern. Bestimme jeweils das Gewicht der drei Bauteile.

10.1.2 Lösungsmöglichkeiten

Merke

Es gibt drei Lösungsmöglichkeiten für ein lineares Gleichungssystem.

- **Eindeutige Lösung.** Jede Unbekannte kann eindeutig und ohne Widerspruch gelöst werden (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich in genau einem Punkt).
- **Keine Lösung.** Die Lösung enthält einen Widerspruch (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich nicht).
- **Lösungsschar.** Es gibt mehrere Lösungen (Geometrische Interpretation: Objekte schneiden sich in einer Geraden oder Ebene).

Geometrie

Beispiel: Löse folgendes LGS:

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= -1 \\ 2x_1 + 6x_2 &= 10 \\ x_1 - 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Das LGS wird auf Stufenform gebracht und liefert eine eindeutige Lösung.

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &= -1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2 \\ 8x_2 &= 8 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 1 \\ -x_2 &= -1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Beispiel: Gegeben ist folgendes LGS:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 &= 11 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Das LGS hat keine Lösung, denn es entsteht folgender Widerspruch:

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 6x_2 &= 12 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 2 \\ 7x_2 &= 7 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = 1 \end{aligned}$$

Beispiel: Gesucht ist die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Das LGS wird auf Stufenform gebracht.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_2 - 2x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Da das LGS unterbestimmt ist, existieren mehrere Lösungen beziehungsweise eine Lösungsschar. Setze

$$x_3 = t \quad \text{mit} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus der zweiten Gleichung des LGS folgt

$$2x_2 - 2t = -2 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = t - 1.$$

Dies zusammen mit $x_3 = t$ und der ersten Gleichung ergibt:

$$x_1 + t - 1 - t = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 3.$$

Die Lösung kann in Vektorschreibweise dargestellt werden:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ t - 1 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist $t \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Aufgabe 137 – Abi★

(a) Löse das LGS:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 6x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 &= -10 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

(b) Löse das LGS:

$$\begin{aligned} -x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 &= -4 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= -2 \\ -2x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 20 \end{aligned}$$

(c) Löse das LGS:

$$\begin{aligned} -12x_1 + 24x_2 - 32x_3 &= 4 \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

10.2 Rechnen mit Vektoren

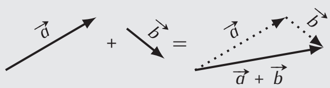
10.2.1 Addition und Länge

Merke

- Zwei Vektoren werden **rechnerisch addiert**, indem jede Komponente der Vektoren einzeln addiert wird:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 \\ -2+0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- **Geometrisch** werden zwei Vektoren **addiert**, indem man den Schaft eines Vektors an die Spitze des anderen Vektors verschiebt.



Der Vektor $\overrightarrow{a+b}$ ist dabei der direkte Weg, den man erhält, wenn man zunächst entlang $\vec{a}$ und dann entlang $\vec{b}$ (oder umgekehrt) geht.

- Der **Verbindungsvektor** zwischen zwei Punkten P und Q ist:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P}.$$

- Die **Länge** eines Vektors berechnet man wie folgt:

$$|\vec{x}| = \left| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

Beispiel: Um den Abstand der Punkte P(1 | 2 | -4) und Q(-3 | 5 | -4) zu bestimmen, wird zunächst der Verbindungsvektor zwischen diesen Punkten aufgestellt:

$$\overrightarrow{PQ} = \vec{Q} - \vec{P} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Der Abstand zwischen P und Q entspricht der Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ und berechnet sich wie folgt:

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2 + 0^2} = 5.$$

Aufgabe 138 Abi★

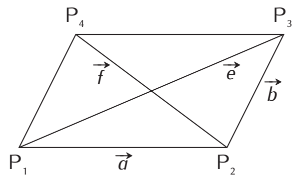
Ermittle den Ergebnisvektor:

(a) $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 139 – Abi★–★★

Die Punkte $P_1(1\,|\,2\,|\,0)$, $P_2(2\,|\,4\,|\,0)$, $P_3(2\,|\,5\,|\,2)$, P_4 sind die Ecken eines Parallelogramms, bei dem die Punkte P_1 und P_3 und die Punkte P_2 und P_4 sich jeweils gegenüberliegen.



(a) Berechne die Koordinaten von Punkt P_4.

(b) Berechne die Länge der beiden Diagonalen des Parallelogramms.

(c) Allgemein gilt für ein Parallelogramm mit den Seitenlängen a und b und den Längen e und f der Diagonalen:

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

Bestätige diese Formel beispielhaft mit dem gegebenen Parallelogramm.

Aufgabe 140 Abi★

Gegeben ist der Punkt $P_1(2\,|\,3\,|\,1)$. Gib Punkte mit ausschließlich positiven Koordinaten an, die zusammen mit P_1 ...

(a) ... einen Würfel mit Kantenlänge 2 bilden.

(b) ... einen Quader mit drei unterschiedlich langen Kanten $a = 2$, $b = 3$ und $c = 4$ bilden.

Aufgabe 141 – Abi★–★★

Auf einer Messe wird ein Tanzroboter vorgeführt. Dieser soll als verlässlicher Tanzpartner zu Trainingszwecken in Tanzschulen eingesetzt werden. Beim Robo-Tanz verfügt der Tanzroboter über folgende Tanzschritte:

- Tanzschritt (I): Einen Schritt von 30 cm Länge nach rechts
- Tanzschritt (II): Einen Schritt von 30 cm Länge nach links
- Tanzschritt (III): Einen Schritt von 20 cm Länge nach vorne
- Tanzschritt (IV): Einen Schritt von 15 cm Länge nach hinten
- Tanzschritt (V): Einen diagonalen Schritt mit 10 cm vor und 20 cm nach rechts.

Der Roboter ist auf folgende Schrittfolge programmiert:

$$(\mathrm{I}) \to (\mathrm{I}) \to (\mathrm{III}) \to (\mathrm{IV}) \to (\mathrm{II}) \to (\mathrm{V}) \to (\mathrm{II})$$

(a) Ermittle, wie weit der Tanzroboter nach dieser Schrittfolge von seinem Startpunkt entfernt ist.

(b) Der Tanzroboter tanzt auf einer rechteckigen Fläche. Bestimme den minimalen Platzbedarf, den er für diese Schrittfolge benötigt.

(c) Es soll eine zweite Schrittfolge programmiert werden, die mit Schritt (V) beginnt und exakt am Ausgangspunkt endet. Kläre, ob eine solche Schrittfolge möglich ist. Falls ja, gib eine solche an.

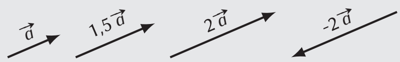
10.2.2 Skalarmultiplikation

Merke

- Ein Skalar ist eine reelle Zahl.
- Vektoren werden mit Skalaren wie folgt multipliziert:

$$4\begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\cdot 2\\4\cdot(-3)\\4\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\-12\\0\end{pmatrix}.$$

- Graphisch wird der Vektor dabei gestreckt.



Aufgabe 142 Abi★–★★

Eine T-förmige Antenne besteht aus einem vertikalen und einem horizontalen Antennenstück. Die Antenne ist am Bodenpunkt $B(\,10 \mid 10 \mid 0\,)$ verankert und fünf Längeneinheiten hoch. Das obere horizontale Antennenstück ist mittig auf dem vertikalen Antennenstück befestigt, fünf Längeneinheiten lang und zeigt in Richtung

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die Koordinaten des Auflagepunktes, auf dem das horizontale Antennenstück auf dem vertikalen Antennenstück liegt.

(b) Bestimme die Koordinaten der beiden Enden des horizontalen Antennenstücks.

(c) Fertige eine Skizze der Antenne an.

10.2.3 Linearkombination

Merke

Wenn man beliebige Vielfache von Vektoren addiert, so erhält man eine **Linearkombination** aus diesen Vektoren:

$$\vec{v}=r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}.$$

Dasselbe kann man auch mit drei, vier oder noch mehr Vektoren machen. Findet man eine Linearkombination für $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Zahlen r und s, von denen mindestens eine ungleich 0 ist, sodass

$$r\cdot\vec{a}+s\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

gilt, so nennt man die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **linear abhängig**, ansonsten heißen sie **linear unabhängig**. Auch dies kann man mit beliebig vielen Vektoren machen.

Um zu prüfen, ob die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, stellt man ein LGS auf:

$$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} r \cdot a_1 + s \cdot b_1 + t \cdot c_1 &= 0 \\ r \cdot a_2 + s \cdot b_2 + t \cdot c_2 &= 0 \\ r \cdot a_3 + s \cdot b_3 + t \cdot c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Erhält man als einzige Lösung $r = 0$, $s = 0$ und $t = 0$, so sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig, ansonsten sind sie linear abhängig.

Beispiel: Die folgenden drei Vektoren werden auf lineare Abhängigkeit geprüft:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als erstes versucht man, den Nullvektor als Linearkombination aus den drei Vektoren darzustellen.

$$x \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wenn man die Zeilen einzeln aufschreibt, erhält man ein LGS:

$$\begin{aligned} 3x + y - 6z &= 0 \\ 2y &= 0 \\ 4x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$

Dessen einzige Lösung ist: $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$. Also sind die Vektoren linear unabhängig.

Aufgabe 143 Abi★

Untersuche die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ auf lineare Abhängigkeit.

(a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$

Aufgabe 144 Abi★★-★★★

Bestimme einen Vektor $\vec{c}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{c}$

(a) linear abhängig beziehungsweise

(b) linear unabhängig sind.

Aufgabe 145 Abi★★★

Wenn man ein beliebiges Dreieck in ein dreidimensionales Koordinatensystem einzeichnet und die Seiten als Vektoren auffasst, sind diese drei Vektoren dann linear abhängig, linear unabhängig oder kann je nach Dreieck beides auftreten?

Geometrie

10.2.4 Skalarprodukt

Merke

- Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert als:

  $$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

- Zwei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ stehen genau dann **senkrecht (rechtwinklig, orthogonal, im Lot)** aufeinander, wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0$:

  $$\vec{a} \perp \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{a} \circ \vec{b} = 0.$$

Beispiel: Die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sind nicht orthogonal, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 = 3 \neq 0.$$

Aufgabe 146 – nur eA Abi★

Die Punkte A(1 | 2 | 1), B(-1 | 4 | 2), C(2 | 3 | 1) beschreiben die Eckpunkte eines Dreiecks.

(a) Zeige, dass das Dreieck rechtwinklig ist und bestimme die Ecke des rechten Winkels.

(b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks.

(c) Bestimme einen Punkt $D \neq C$, so dass das Dreieck ABD rechtwinklig mit rechtem Winkel am Punkt A ist.

10.2.5 Kreuzprodukt

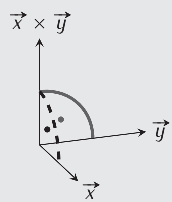
Merke

- Das **Kreuzprodukt (Vektorprodukt)** zweier Vektoren $\vec{x}$, $\vec{y}$ ist definiert als:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

- Das Kreuzprodukt $\vec{x} \times \vec{y}$ ist ein Vektor, der jeweils senkrecht zu den Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ steht:

$$\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y} \quad \Longrightarrow \quad \vec{z} \perp \vec{x} \quad \text{und} \quad \vec{z} \perp \vec{y}.$$



- Ist ABC ein Dreieck, so ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ gerade der doppelte Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Eselsbrücke Berechnung Kreuzprodukt

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 10 - (-2) \cdot (-1) \\ -2 \cdot 2 - 3 \cdot 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 8 \\ -34 \end{pmatrix}$$

- Schreibe Vektoren zwei mal untereinander.
- Streiche oberste und unterste Zeile.
- Rechne kreuzweise.

$$\begin{array}{cc}
\cancel{-2} & \cancel{-10} \\
3 & 2 \\
1 & -1 \\
\hdashline
-2 & 10 \\
3 & 2 \\
\cancel{1} & \cancel{-1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
\big(3 \cdot (-1)\big) - \big(1 \cdot 2\big) \\
\big(1 \cdot 10\big) - \big((-2) \cdot (-1)\big) \\
\big((-2) \cdot 2\big) - \big(10 \cdot 3\big)
\end{array}$$

Aufgabe 147 Abi★

Gegeben sind die Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne $\vec{a} \times \vec{b}$.

(b) Bestimme einen Vektor, der orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.

(c) Bestimme alle Vektoren, die orthogonal zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind.

11 Geometrische Objekte

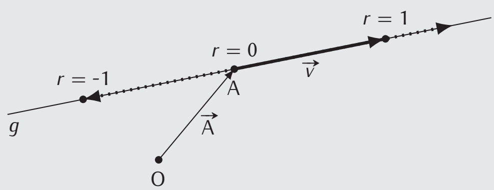
11.1 Geraden

Parameterdarstellung einer Gerade

Eine Gerade wird beschrieben durch

$$g: \ \vec{x} = \vec{A} + r \cdot \vec{v}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{A}$ wird **Stützvektor** und der Vektor $\vec{v}$ **Richtungsvektor** der Geraden genannt.



Tipp: Häufig wird zur besseren Übersicht keine nähere Angabe zu dem Skalar vor dem Richtungsvektor gemacht. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: $r \in \mathbb{R}$.

Tipp: Die Parameterform einer Geraden ist nicht eindeutig. Die folgenden Geradengleichungen beschreiben dieselbe Gerade:

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Der Stützvektor ist der Ortsvektor zum Aufpunkt der Geraden, hier A. Für den Ortsvektor eines Punktes A gibt es mehrere Bezeichnungen, zum Beispiel $\vec{A}$, $\overrightarrow{OA}$ oder auch $\vec{a}$.

Aufgabe 148

Gegeben ist die Geradengleichung

$$g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Finde zwei weitere Darstellungen von g mit jeweils anderem Stütz-und Richtungsvektor.

Aufgabe 149 –

Gegeben ist die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Entscheide, welche der Punkte

$$\mathrm{A}(5 \mid 14 \mid -4),\ \mathrm{B}(-3 \mid -4 \mid -5) \quad \text{und} \quad \mathrm{C}\left(-\frac{5}{3} \,\middle|\, 4 \,\middle|\, \frac{8}{3}\right)$$

auf g liegen.

Aufgabe 150 – Abi★

Gegeben sind die Punkte

$$\mathrm{A}\left(-3 \,\middle|\, \frac{3}{2} \,\middle|\, \frac{1}{2}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{B}\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -2 \,\middle|\, -1\right).$$

Finde die Gleichung einer Geraden g, die beide Punkte A und B enthält.

Aufgabe 151 – Abi★

Gegeben sind die Punkte

$$\mathrm{A}(1 \mid 2 \mid 3), \quad \mathrm{B}(2 \mid 0 \mid 7) \quad \text{und} \quad \mathrm{C}(-2 \mid 1 \mid -9).$$

Zeige, dass die Punkte A, B und C ein Dreieck bilden.

Aufgabe 152 – nur eA Abi★★

Gibt es einen Parameter t, so dass die Punkte

$$\mathrm{A}(-2 \mid 4 \mid 1),\ \mathrm{B}\left(-1 \,\middle|\, 2 \,\middle|\, \frac{5}{2}\right) \text{ und } \mathrm{C}(-4 \mid 2t \mid -2)$$

auf einer Gerade liegen?

Geometrie

11.2 Ebenen

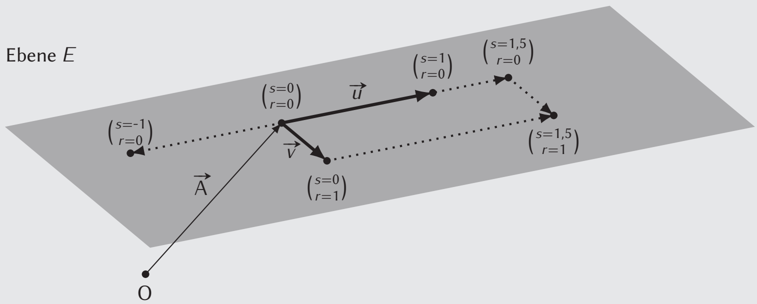
11.2.1 Die Parameterform einer Ebene

Merke

Die Parameterform einer Ebene wird beschrieben durch

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Der Vektor $\vec{A}$ ist der **Stützvektor** und die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die **Spannvektoren** der Ebene E. Die Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ dürfen dabei keine Vielfachen voneinander sein.



Tipp: Häufig wird zur besseren Übersicht keine nähere Angabe zu dem Skalaren vor dem Spannvektoren gemacht. Dann gilt mit obigen Bezeichnungen: $s,t \in \mathbb{R}$.

Tipp: Die Parameterform einer Ebene ist nicht eindeutig. Die beiden folgenden Parametergleichungen beschreiben dieselbe Ebene:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}$$

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad p,t \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 153

Gegeben ist die Parameterform

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s,r \in \mathbb{R}.$$

Finde eine weitere Darstellung von E mit anderen Stütz- und Spannvektoren.

Aufgabe 154 – Abi★

Gegeben ist die Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad p,r \in \mathbb{R}.$$

Entscheide, ob folgende Punkte in der Ebene E liegen:

(a) A(2 | 2 | 1)

(b) B(-2 | 3 | -4)

(c) C(-10 | -10 | -5)

Aufgabe 155 – Abi★

Bestimme jeweils eine Parameterform der Ebene, in der die entsprechenden drei Punkte liegen:

(a) A(-2 | 3 | -4), B(0 | 1 | -3), C(1 | 2 | 0)

(b) P(1 | -2 | 3), Q(2 | -4 | 5), R(4 | -5 | 9).

Aufgabe 156 – Abi★

Die x_1,x_2-Ebene beschreibt die Oberfläche eines Grundstücks auf der eine rechteckige Pferdekoppel steht. Diese wird durch die Ecken A(0 | 0 | 0), B(0 | 40 | 0), C(100 | 40 | 0) und D(100 | 0 | 0) begrenzt. Bestimme in einer mathematischen Formel diejenigen Punkte, die innerhalb der Pferdekoppel liegen.

Aufgabe 157 Abi★

Ein Hausdach hat die Eckpunkte A(1 | 1 | 1), B(1 | 1 | 6), C(1 | 6 | 1) und D(1 | 6 | 6).

(a) Stelle eine Gleichung der Ebene E auf, in der das Hausdach liegt.

(b) Da das Haus in einer sonnigen Gegend liegt, soll eine Solarzelle montiert werden. Diese wird parallel zum Hausdach angebracht und verläuft durch den Punkt S(2 | 3 | 3). Stelle eine Gleichung der Ebene F auf, in der die Solarzelle liegen wird.

Aufgabe 158 – Abi★

Gegeben sind die parallelen und nicht identischen Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimme eine Parametergleichung der Ebene E, in der beide Geraden liegen.

11.2.2 Die Koordinatenform einer Ebene

Merke

Die Koordinatenform einer Ebene E lautet:

$$E:\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$$

- Der **Normalenvektor** von $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$ ist

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}.$$

  Der Normalenvektor steht senkrecht auf der Ebene.

- Die **Spurpunkte** sind die Schnittpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen. Durch Berechnung der Spurpunkte lässt sich die Ebene in einem Koordinatensystem darstellen.

Tipp: Koordinatengleichungen, welche dieselbe Ebene beschreiben, sind Vielfache voneinander. Zum Beispiel:

$$E:\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad -6x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 12$$

Beispiel: Anhand der Koordinatenform einer Ebene kann man leicht feststellen, ob ein beliebiger Punkt in der gegebenen Ebene liegt oder nicht. Gegeben sind die Ebene E und die Punkte P_1 und P_2 durch:

$$E:\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6,$$

$$P_1(2\,|\,0\,|\,1) \quad \text{und} \quad P_2(2\,|\,1\,|\,1).$$

Nun setzt man die Punkte in die Ebenengleichung ein. Für P_1 gilt:

$$2 \cdot 2 - 0 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 6$$

Für P_2 gilt:

$$2 \cdot 2 - 1 + 3 \cdot 1 = 6$$

Also liegt P_2 in der Ebene, P_1 aber nicht.

Aufgabe 159 Abi★

Kläre, ob der Punkt $P(-1\,|\,-2\,|\,0)$ auf der Ebene $E:\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1$ liegt. Bestimme zudem einen Punkt mit ausschließlich positiven Koordinaten, der in der Ebene E liegt.

Aufgabe 160 Abi★

Ein Blatt Papier wird frontal auf einen spitzen Bleistift gesteckt. Der Bleistift liegt auf der Geraden g mit:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -12 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Das Papier wird so weit auf den Bleistift geschoben, bis es den Punkt $P(1\,|\,2\,|\,4)$ beinhaltet. Bestimme eine Gleichung der Ebene E, in welcher das Papier liegt.

Aufgabe 161 Abi★★

Der Hang eines Weinberges wird durch die Ebene

$$E:\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 6$$

beschrieben. Eine Längeneinheit entspricht dabei einem Meter.
Um die Trauben vor Vögeln zu schützen, soll ein parallel zum Hang verlaufendes Netz gespannt werden. Hierzu werden zahlreiche 3 m lange Pfosten senkrecht zum Hang befestigt. Das Netz wird zwischen den Enden der Pfosten befestigt. Der Fußpunkt des ersten Pfostens befindet sich im Punkt $P(1 \mid 0{,}5 \mid 0)$.

(a) Bestimme die Koordinaten des oberen Endes des ersten Pfostens.

(b) Ermittle eine Koordinatendarstellung der Ebene F, in der das Netz liegt.

11.2.3 Die Normalenform einer Ebene

Merke

Die Normalenform einer Ebene E lautet:

$$E:\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$$

Hierbei ist der Vektor $\vec{P}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes P der Ebene E, also zum Beispiel der Ortsvektor des Aufpunkts und der Vektor $\vec{n}$ ein Normalenvektor der Ebene.

Tipp: Die Normalenform ist nicht eindeutig.

Tipp: Koordinatenform und Normalenform können einfach ineinander überführt werden.

Beispiel: Eine Ebene E beinhaltet den Punkt $A(2 \mid -2 \mid 1)$ und besitzt den Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Eine Normalenform der Ebene lautet dann:

$$E:\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Ausführung des Skalarproduktes erhält man eine Koordinatenform der Ebene:

$$E:\ ((x_1 - 2) \cdot 3) + ((x_2 + 2) \cdot 0) + ((x_3 - 1) \cdot 4) = 0$$
$$\Longrightarrow\quad 3x_1 - 6 + 4x_3 - 4 = 0$$
$$\Longrightarrow\quad 3x_1 + 4x_3 = 10$$

Um von der Koordinatenform zur Normalenform zu gelangen, muss man den Normalenvektor ablesen und einen beliebigen Punkt der Ebene wählen, hier zum Beispiel $P_1(0 \mid 0 \mid 2{,}5)$.

Dann erhält man für diese Ebene die Normalenform:

$$E: \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

An dieser Stelle kann man noch einmal erkennen, dass die Normalenform einer Ebene nicht eindeutig ist, sondern mit jedem Punkt, der in der Ebene liegt, gebildet werden kann.

Die Hessesche Normalenform

Eine spezielle Form der Normalenform ist die **Hessesche Normalenform**. Hierbei benutzt man einen normierten Normalenvektor $\vec{n_0}$, also einen Normalenvektor der Länge 1. Aus einem beliebigen Normalenvektor erhält man einen solchen Vektor $\vec{n_0}$ durch folgende Rechnung:

$$\vec{n_0} = \frac{1}{\sqrt{{n_1}^2 + {n_2}^2 + {n_3}^2}} \cdot \vec{n}$$

Mit diesem Vektor $\vec{n_0}$ kann man dann die Hessesche Normalenform aufstellen:

$$E: \left(\vec{x} - \vec{\mathrm{P}}\right) \circ \vec{n_0} = 0$$

Diese Form der Ebenengleichung eignet sich gut zur Abstandsberechnung von Punkt und Ebene.

Aufgabe 162

Ein Laserpointer strahlt senkrecht aus einer Richtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ auf den Mittelpunkt $\mathrm{M}(\,2\,|\,0\,|\,1\,)$ einer aufgehängten Platte.

(a) Bestimme eine Normalenform der Ebene E, in welcher die Platte liegt.

(b) Bestimme eine Hessesche Normalenform dieser Ebene.

(c) Gib eine Koordinatenform dieser Ebene an.

11.2.4 Umwandlung Parameterform → Koordinatenform

Merke

Gegeben ist die Parameterform

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist die Koordinatenform von E.

Schritt 1: Berechne das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren. Das liefert den Normalenvektor $\vec{n}$):

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \vec{n}.$$

Schritt 2: Schreibe einen Ansatz der Ebenengleichung hin:

$$E: \; 4x_1 + x_2 + 4x_3 = a.$$

Schritt 3: Setze den Stützpunkt der Ebene ein, um a zu erhalten:

$$4 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = 7 = a$$

Somit lautet die gesuchte Ebenengleichung

$$E: \; 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 7.$$

Tipp: Mit Koordinatenformen kann viel einfacher gerechnet werden als mit Parameterformen. Eine Umwandlung in die Koordinatenform ist für anschließende Teilaufgaben daher meist sinnvoll.

Geometrie

Aufgabe 163 Abi★

Wandle folgende Ebenengleichungen in Koordinatenform um:

(a) $E_1: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$

(b) $E_2: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$

(c) $E_3: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$

Aufgabe 164 – Abi★

Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene, die jeweils die folgenden Objekte enthält:

(a) die Punkte A(-1 | 0 | 2), B(-2 | 3 | 1) und C(2 | 2 | -1)

(b) den Punkt A(-1 | 2 | 4) und die Gerade

$$g: \; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

(c) den Ursprung und die Gerade

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

11.2.5 Umwandlung Koordinatenform → Parameterform

Merke

Gegeben ist die Koordinatenform

$$E:\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 12.$$

Gesucht ist die Parameterform von E.

Schritt 1: Bestimme drei beliebige Punkte auf E, beispielsweise die Spurpunkte:

$$A(0\,|\,0\,|\,-4), \quad B(0\,|\,3\,|\,0), \quad C(6\,|\,0\,|\,0).$$

Schritt 2: Stelle die Parameterform auf:

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}.$$

Tipp: In der Abiturprüfung wird die Umwandlung von Koordinatenform in Parameterform nur sehr selten abgefragt.

Beispiel: Wandle die Ebene E in Parameterform um:

$$E:\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5.$$

Bestimme zunächst drei Punkte auf der Ebene. Hierfür werden x_1 und x_2 frei gewählt und x_3 berechnet. Drei beliebige Punkte auf der Ebene sind $P_1(1\,|\,0\,|\,1)$, $P_2(4\,|\,1\,|\,1)$ und $P_3(2\,|\,-1\,|\,0)$.

Daraus ergibt sich die Parameterform:

$$\begin{aligned} E:\ \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad r,s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Aufgabe 165 Abi★

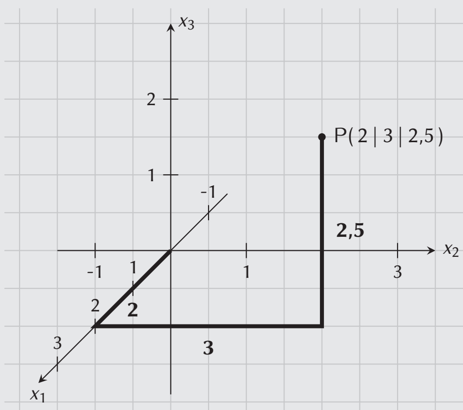
Bestimme eine Koordinaten- und eine Parameterform der folgenden Ebene:

$$E:: \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right) = 0.$$

11.3 Zeichnen geometrischer Objekte

Dreidimensionales Koordinatensystem

Um geometrische Objekte dreidimensional darzustellen zeichnet man ein Koordinatensystem wie es in der untenstehenden Abbildung zu sehen ist. Wichtig ist dabei, dass die Einheiten auf der x_1-Achse kürzer sind als die auf der x_2- und der x_3-Achse.
Auf kariertem Papier bedeutet das, dass man vom Koordinatenursprung schräg nach links unten zeichnet und die erste Einheit genau auf das nächste Karokreuz macht. Die Einheiten auf der x_2- und der x_3-Achse müssen dann zwei Kästchen lang sein.
Um Punkte in das Koordinatensystem einzuzeichnen geht man nun vor wie in der Abbildung für den Punkt $P(2\,|\,3\,|\,2{,}5)$ dargestellt. Es werden also alle Koordinaten der Reihenfolge nach abgearbeitet.



Beispiel: Um die Ebene

$$E: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$

im Koordinatensystem darzustellen, bietet es sich an, die Spurpunkte zu berechnen:

➤ Spurpunkt S_1: Setze $x_2 = x_3 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \quad\Longrightarrow\quad x_1 = 1 \quad\Longrightarrow\quad S_1(1\,|\,0\,|\,0)\,.$$

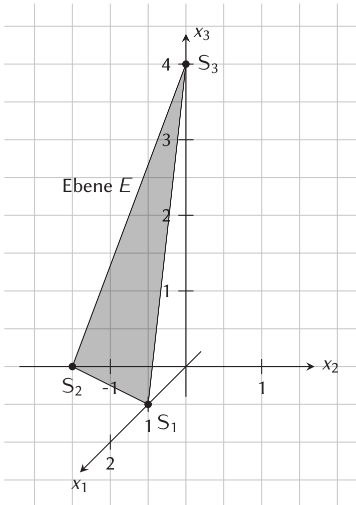
➤ Spurpunkt S_2: Setze $x_1 = x_3 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \quad\Longrightarrow\quad x_2 = -2 \quad\Longrightarrow\quad S_2(0\,|\,-2\,|\,0)\,.$$

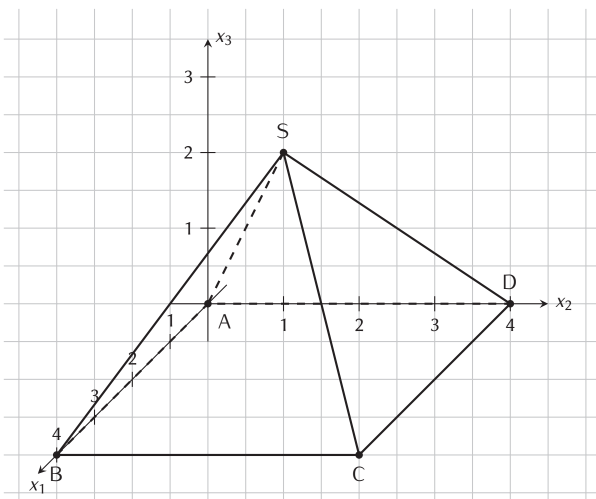
➤ Spurpunkt S_3: Setze $x_1 = x_2 = 0$:

$$4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = 4 \quad \Longrightarrow \quad S_3(0\,|\,0\,|\,4)$$

Jetzt können die drei Spurpunkte in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden. Das Dreieck $S_1S_2S_3$ visualisiert die Ebene E.



Beispiel: Eine Pyramide besitzt die Eckpunkte $A(0\,|\,0\,|\,0)$, $B(4\,|\,0\,|\,0)$, $C(4\,|\,4\,|\,0)$ und $D(0\,|\,4\,|\,0)$ sowie die Spitze $S(2\,|\,2\,|\,3)$. Wie in der Abbildung zu sehen ist, werden zunächst die gegebenen Punkte eingezeichnet und dann dem Objekt entsprechend verbunden. Nicht sichtbare Verbindungslinien werden gestrichelt dargestellt.



Aufgabe 166

(a) Ein durchsichtiger Würfel besitzt unter anderem die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 0)$, $B(5 \mid 0 \mid 0)$, $C(5 \mid 5 \mid 0)$, $D(0 \mid 5 \mid 0)$ und $G(5 \mid 5 \mid 5)$. Zeichne den Würfel in ein geeignetes Koordinatensystem und gib die Koordinaten der restlichen Eckpunkte an.

(b) Eine Ebene, welche die x_3-Achse und die durch die Punkte C und G verlaufende Gerade beinhaltet, schneidet den Würfel. Stelle die Schnittfläche in der Zeichnung gut erkennbar dar.

Aufgabe 167 Abi★

Skizziere folgende Ebenen jeweils in einem Koordinatensystem:

(a) $E:\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$

(b) $E:\ 2x_1 + x_2 = 2$

(c) $E:\ 3x_1 = 1$

12 Lagebeziehungen und Schnitt

12.1 Lagebeziehung Gerade-Gerade

Lagebeziehung Gerade-Gerade

Gegeben sind zwei Geraden g und h

$$g: \vec{x} = \vec{P} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \vec{Q} + s\vec{u}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist die Lagebeziehung der beiden Geraden.

Fall 1: Es gilt $\vec{v} \parallel \vec{u}$. Dann teste, ob P auf der Geraden h liegt.

Fall 1.a: Es gilt zusätzlich: P liegt auf h. Dann sind g und h **identisch**.

Fall 1.b: Es gilt: P liegt nicht auf h. Dann sind g und h **echt parallel**.

Fall 2: Es gilt $\vec{v} \nparallel \vec{u}$. Dann teste, ob die Gleichung $\vec{P} + t\vec{v} = \vec{Q} + s\vec{u}$ eine Lösung hat.

Fall 2.a: Die Gleichung besitzt eine Lösung. Dann **schneiden sich** g und h **in genau einem Punkt**.

Fall 2.b: Die Gleichung besitzt keine Lösung. Dann sind g und h **windschief**.

Beispiel: Betrachte die beiden Geraden g und h:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind parallel, denn es gilt:

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit sind g und h entweder echt parallel oder identisch.

Der Punkt $P(1 \mid 0 \mid 5)$ (Aufpunkt von h) liegt nicht auf g, denn eine Punktprobe von P in g führt zu:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \quad t = 1 \\ \Longrightarrow \quad t = 2 \\ \Longrightarrow \quad t = -3 \end{array}$$

Damit fällt die Punktprobe negativ aus. Die Geraden g und h sind also echt parallel.

12.2 Schnitt Gerade-Gerade

Schnitt Gerade-Gerade

Gegeben sind zwei sich schneidende Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$$

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.

Schritt 1: Setze Geradengleichungen gleich und löse das LGS:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} -1 + 2t &= 1 \\ -2 + 2t &= 3 + s \\ 6 - t &= 11 + 2s \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 2t \phantom{{}-s} &= 2 & \Longrightarrow t &= 1 \\ 2t - s &= 5 & \Longrightarrow s &= -3 \\ -t - 2s &= 5 & \Longrightarrow s &= -3 \end{aligned}$$

Schritt 2: Setze einen gewonnenen Parameter in die Geradengleichung ein und lies den Schnittpunkt S ab:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Schnittpunkt $S(1\,|\,0\,|\,5)$ gefunden.

Aufgabe 168 Abi★

Untersuche die Lagebeziehung der folgenden Geraden zueinander und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

(a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$

(b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$

Geometrie

(c) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$

Aufgabe 169 – Abi★

Unter einem Haus sollen neue Leitungen verlegt werden. Eine Wasserleitung gibt es bereits und ihr Verlauf wird beschrieben durch die Geradengleichung

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Es soll neben der Wasserleitung eine Stromleitung verlegt werden. Diese soll parallel zu der vorhandenen Wasserleitung liegen und durch den Punkt $P(0 \mid -3 \mid 0)$ verlaufen. Bestimme eine Geradengleichung der Stromleitung.

(b) Zudem wird ein Blitzableiter in das Haus eingebaut. Der Verlauf des Blitzableiters wird beschrieben durch die Gerade

$$b:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimme, ob der Blitzableiter eine der beiden Leitungen schneidet.

Aufgabe 170 Abi★–★★★

Für die Zeit $t > 0$ (in Minuten) werden die Positionen zweier Kampfjets A und B beschrieben durch:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ 2{,}0 \\ 3{,}0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4{,}0 \\ 6{,}0 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 5{,}6 \\ 5{,}0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3{,}0 \\ 4{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix}.$$

Die Flugzeuge werden als punktförmig angenommen. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer. Die x_1,x_2-Ebene beschreibt dabei die Erdoberfläche.

(a) Bestimme die Geschwindigkeit von Flugzeug A sowohl in m/s als auch in km/h. Kläre, welches der Flugzeuge ab $t > 0$ an Flughöhe gewinnt.

(b) Zeige, dass die beiden Flugbahnen nicht rechtwinklig zueinander stehen.

(c) Kläre, ob sich die Flugbahnen der beiden Flugzeuge kreuzen. Wenn ja, berechne den Schnittpunkt der Flugbahnen.

(d) Besteht die Gefahr, dass die beiden Flugzeuge miteinander kollidieren?

(e) Flugzeug A befindet sich an dem Koordinatenpunkt $P(22 \mid 32 \mid 8)$. An welchem Punkt befindet sich Flugzeug B zum gleichen Zeitpunkt? Berechne den Abstand der beiden Flugzeuge zu diesem Zeitpunkt.

(f) Stelle in Abhängigkeit der Zeit t einen Ausdruck auf, der den Abstand der beiden Flugzeuge beschreibt. Zu welchem Zeitpunkt ist der Abstand der beiden Flugzeuge am geringsten? Wie groß ist der geringste Abstand? Interpretiere dieses Ergebnis im Sachkontext.

Hinweis: Die Wurzel eines Ausdrucks wird genau dann minimal, wenn der Term unter der Wurzel minimal wird.

12.3 Lagebeziehung Gerade-Ebene – nur eA

Lagebeziehung Gerade-Ebene

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E:

$$g: \vec{x} = \vec{P} + t\vec{v}, \quad t \in \mathbb{R}$$
$$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d.$$

Gesucht ist die Lagebeziehung zwischen g und E.

Fall 1: $\vec{n} \circ \vec{v} \neq 0$. Dann **schneiden sich** g und E in **genau einem Punkt**.

Fall 2: $\vec{n} \circ \vec{v} = 0$. Dann teste, ob P in E liegt.

Fall 2.a: P liegt in E. Dann **liegt** g **in** E.

Fall 2.b: P liegt nicht in E. Dann sind g und E **echt parallel**.

Tipp: Man kann natürlich auch direkt die Schnittmenge der beiden Objekte berechnen.

Beispiel: Die Lagebeziehung von

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$
$$E: 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 10$$

soll bestimmt werden. Betrachte dazu zuerst das Skalarprodukt aus Normalen- und Richtungsvektor:

$$\vec{n} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Damit sind g und E entweder echt parallel oder g liegt in E. Kläre nun, ob der Aufpunkt $P(2 \mid 1 \mid 4)$ von g in E liegt:

$$4 \cdot 2 + 1 - 2 \cdot 4 = 1 \neq 10.$$

Damit liegt P nicht in E. Also sind g und E echt parallel.

12.4 Schnitt Gerade-Ebene – nur eA

Schnitt Gerade-Ebene

Gegeben sind eine Gerade g und eine Ebene E, die sich in einem Punkt schneiden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

$$E: x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 10.$$

Gesucht ist der Schnittpunkt von g und E.

Schritt 1: Setze die Geradengleichung in die Ebenengleichung ein und bestimme den Parameter r:

$$(0 + r \cdot 0) + 3\,(1 + r \cdot (-1)) - 2\,(0 + r \cdot 2) = 10$$
$$\Longrightarrow \quad r = -1.$$

Schritt 2: Setze den berechneten Parameter r in die Geradengleichung ein und lies den Schnittpunkt S ab:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Der Schnittpunkt von g und E ist also $S(\,0\,|\,2\,|\,-2\,)$.

Aufgabe 171 – nur eA Abi★

Untersuche die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E und ermittle gegebenenfalls den Schnittpunkt.

(a) $E:\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = -3$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

(b) $$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 14 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

(c) $E:\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 1$

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

Hinweis: Wandle die Ebenengleichungen immer zunächst in Koordinatenform um.

Aufgabe 172 – nur eA Abi★★

Gegeben sind die Gerade g und die Geradenschar h_t:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$h_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(a) Bestimme den Parameter t so, dass sich die Geraden g und h_t senkrecht schneiden.

(b) Gib eine Gleichung einer Ebene E an, die von der Geraden g im Punkt $P(3\,|\,3\,|\,6)$ senkrecht geschnitten wird.

(c) Überprüfe, ob die Gerade g vollständig in der Ebene F verläuft mit:

$$F: 4x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6.$$

Wenn nein, bestimme die Lagebeziehung der Ebene F und der Geraden g.

Aufgabe 173 – nur eA Abi★–★★

Gegeben ist folgende Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Ermittle die Lage der Ebene E und der Gerade g und bestimme gegebenenfalls den Schnittpunkt.

(a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

(b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

(c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$

Geometrie

Aufgabe 174 – nur eA Abi★

Gegeben ist eine Ebene

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}$$

und eine Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass die Gerade senkrecht auf der Ebene steht.

12.5 Lagebeziehung Ebene-Ebene – nur eA

Lagebeziehung Ebene-Ebene – nur eA

Gegeben sind zwei Ebenen E und F mit Normalenvektoren $\vec{n}_E$ bzw. $\vec{n}_F$. Gesucht ist die Lagebeziehung zwischen E und F.

Fall 1: $\vec{n}_E \nparallel \vec{n}_F$. Dann **schneiden sich** E und F in **einer Schnittgeraden**.

Fall 2: $\vec{n}_E \parallel \vec{n}_F$. Dann überprüfe, ob Koordinatengleichungen der Ebenen ein Vielfaches voneinander sind.

Fall 2.a: Vielfaches. Dann sind E und F **identisch**.

Fall 2.b: Kein Vielfaches. Dann sind E und F **echt parallel**.

Tipp: Soll die Lagebeziehung von Ebenen in Parameterform bestimmt werden, dann rechne diese zuerst in Koordinatenform um.

Beispiel: Die Ebenen

$$E: 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 3$$
$$F: -6x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -6$$

haben parallele Normalenvektoren, denn

$$(-2) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Zudem sind die Ebenengleichungen Vielfache voneinander:

$$E: 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 3 \quad \underset{\cdot(-2)}{\Longrightarrow} \quad F: -6x_1 + 8x_2 + 2x_3 = -6$$

Daher sind E und F identisch.

12.6 Schnitt Ebene-Ebene – nur eA

Schnitt Ebene-Ebene – nur eA

Gegeben sind zwei sich schneidende Ebenen E und F durch

$$E : 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 4$$
$$F : 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 3.$$

Gesucht ist eine Gleichung der Schnittgeraden g von E und F.

Schritt 1: Stelle ein LGS auf und bringe es auf Stufenform.

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 4x_2 - x_3 &=& 4 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 &=& 3 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcll} 3x_1 - 4x_2 - x_3 &=& 4 & \text{(I)} \\ - x_2 - 2x_3 &=& 1 & \text{(II)} \end{array}$$

Schritt 2: Setze $x_3 = t$ und bestimme x_1 und x_2 in Abhängigkeit von t.

$$\text{(II)} \quad \text{und} \quad x_3 = t \quad \Longrightarrow \quad x_2 = -1 - 2t$$

$$\text{(I)}, \quad x_3 = t \quad \text{und} \quad x_2 = -1 - 2t \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\frac{7}{3}t$$

Schritt 3: Stelle eine Geradengleichung für g auf:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{7}{3}t \\ -1 - 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7/3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Für diese Methode müssen Ebenen zunächst in Koordinatenform umgerechnet werden. Wenn eine Ebene in Parameter- und eine in Koordinatenform gegeben ist, kann man auch analog zum weiter vorne im Buch dargestellten Verfahren zur Bestimmung der Schnittmenge von Gerade und Ebene vorgehen.

Aufgabe 175 – nur eA Abi★

Gegeben sind:

$$E_1 : 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 4$$
$$E_2 : -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2$$
$$E_3 : -2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$
$$E_4 : -2x_1 + 3x_2 + x_3 = -2.$$

(a) Bestimme für alle Paare jeweils ihre Lagebeziehung.

(b) Bestimme die Schnittmenge von E_1 und E_3.

(c) Ermittle $E_3 \cap E_4$.

Geometrie

Aufgabe 176 – nur eA Abi★

Bestimme die Lagebeziehung der Ebenen zueinander und ermittle die Schnittmenge.

(a) $E_1 : -3x_1 - 9x_2 - x_3 = 5$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$E_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) $E_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_2 : 12x_1 + 26x_2 + 4x_3 = 10$

Hinweis: Wandle die Ebenen in Koordinatenform um.

Aufgabe 177 – nur eA Abi★-★★

Ein Gebäude hat die Form einer Pyramide. Die Ecken der dreieckigen Grundfläche werden durch die Punkte $A(1\,|\,1\,|\,1)$, $B(7\,|\,9\,|\,1)$ und $C(1\,|\,9\,|\,1)$ beschrieben. Die Spitze der Pyramide ist im Punkt $S(1\,|\,5\,|\,9)$.

(a) Die Seitenwand ABS liegt in der Ebene E. Bestimme eine Gleichung der Ebene E.

(b) Bestimme die Schnittgerade von E und der Grundfläche der Pyramide.

(c) Ein Holzträger soll in die Pyramide eingebaut werden. Der Träger startet in der Ecke C und trifft senkrecht auf die Seitenwand ABS. Bestimme die Länge des Holzträgers.

Aufgabe 178 – nur eA Abi★★-★★★

Ein Kunstwerk aus massivem Fichtenholz hat die Form einer Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. Die Ecken des Kunstwerkes sind $A(-3\,|\,-2\,|\,-4)$, $B(3\,|\,-4\,|\,-4)$, $C(-1\,|\,4\,|\,-4)$ und $D(1\,|\,0\,|\,5)$.

(a) Bestimme, welche der Kanten des Objekts in der Ebene E liegen:

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

(b) Im Rahmen einer Kunstperformance soll das Objekt mit einer Holzsäge in zwei Teile geteilt werden. Geschnitten wird entlang der Ebene F mit

$$F : \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -54 \\ 18 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Die Säge soll auf der Seitenfläche ACD angesetzt werden. Damit der Schnitt korrekt erfolgen kann, soll eine Linie auf der Seitenfläche ACD eingezeichnet werden, entlang welcher der Schnitt erfolgen soll. Bestimme eine Gleichung der Geraden, in der diese Linie liegt.

(c) Die Zuschauer sind vor Aufregung außer sich. Ein Zuschauer mutmaßt, dass durch den Schnitt zwei Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche entstehen werden. Nimm Stellung zu dieser Aussage.

Hinweis: Wandle E in Koordinatenform um.

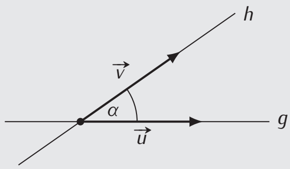
Geometrie

12.7 Schnittwinkel

Merke

Der Schnittwinkel α zwischen zwei Geraden g und h ist der spitze Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \circ \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$



Tipp: Mit dem Schnittwinkel ist immer der spitze Winkel zwischen zwei Objekten und nie der stumpfe Winkel gemeint. Also: $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$. Aus diesem Grund wird im Zähler der Winkelformel auch der Betrag verwendet.

Aufgabe 179 Abi★

Bestimme den Schnittwinkel folgender beider Geraden g und h.

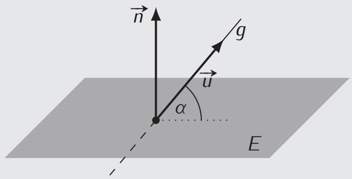
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Merke

Der Schnittwinkel α zwischen einer Geraden und einer Ebene ist der Komplementärwinkel des spitzen Winkels zwischen dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden. Es gilt

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{n} \circ \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|}.$$



Aufgabe 180 Abi★

Berechne jeweils den Schnittwinkel zwischen den folgenden Objekten:

(a) $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 17 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$

$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$

(b) $E_1 : -3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4$

$E_2 : x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$

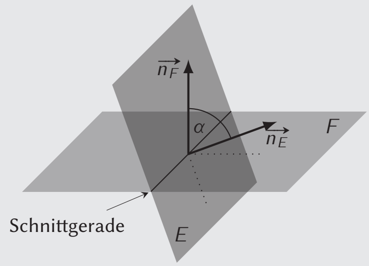
(c) $E : -4x_1 + 6x_3 = 2$

$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$

Merke

Der Schnittwinkel α zwischen zwei Ebenen E und F ist der spitze Winkel zwischen ihren Normalenvektoren $\vec{n}_E$ und $\vec{n}_F$. Es gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_E \circ \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|}.$$



Winkel zwischen Vektoren/Stumpfe Winkel

Möchte man keinen Schnittwinkel berechnen, sondern beispielsweise den Winkel eines Dreiecks, der gegebenenfalls auch stumpf sein kann, so ist es wichtig, dass die Vektoren so gewählt werden, dass sie vom Scheitel des Winkels wegzeigen. In der Winkelformel darf dann kein Betrag verwendet werden.

Beispiel: Gegeben sind die drei Punkte $A(1\,|\,1\,|\,1)$, $B(2\,|\,1\,|\,1)$ und $C(0\,|\,0\,|\,1)$. Gesucht ist der Innenwinkel α des Dreiecks ABC am Punkt A. Zunächst werden dazu die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ berechnet. Es gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schließlich wird die Winkelformel berechnet.

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Somit ergibt sich $\alpha = 135°$.

Aufgabe 181 Abi$^{\star-\star\star}$

Alice und Bob wohnen in derselben Straße. Diese verläuft schnurgerade. Der Eingang von Bobs Haustür liegt bei $B(-15\,|\,3\,|\,7)$ und die Haustür von Alice bei $A(21\,|\,11\,|\,9)$. Eine Längeneinheit entspricht hierbei einem Meter.

(a) Entlang welcher Gerade verläuft die Straße, in der Alice und Bob wohnen?

(b) Wie weit muss Alice laufen, wenn sie Bob besuchen möchte?

(c) Angenommen Alice und Bob laufen gleich schnell und gleichzeitig los, um sich zu besuchen. An welcher Stelle treffen sie sich?

(d) Wie steil ist die Straße? Eine Angabe des Steigungswinkels genügt hier.

Geometrie

13 Abstand

13.1 Abstand Punkt-Punkt

Merke

Der Abstand zwischen zwei Punkten ist die Länge ihres Verbindungsvektors. Der Abstand von A(3 | 1 | 2) und B(6 | 5 | 2) ist also gegeben durch:

$$d(\mathrm{A};\mathrm{B}) = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(6-3)^2 + (5-1)^2 + (2-2)^2} = 5.$$

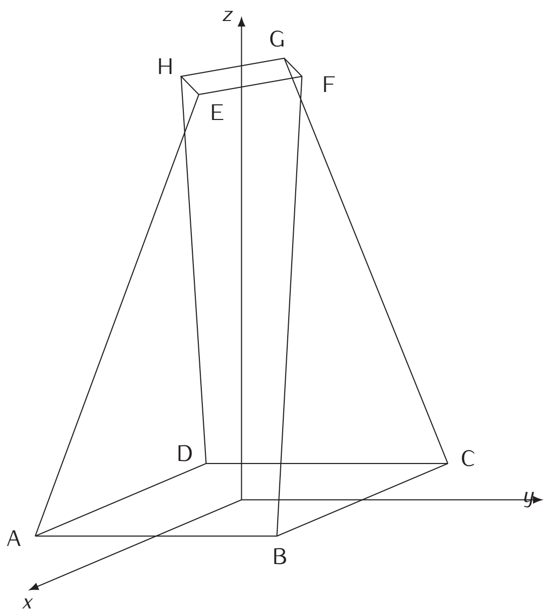
Aufgabe 182 Abi★

Berechne den Abstand zwischen

$$\mathrm{A}\left(\frac{4}{3} \,\middle|\, 2 \,\middle|\, -\frac{1}{2} \right) \text{ und } \mathrm{B}\left(\frac{1}{3} \,\middle|\, \frac{1}{2} \,\middle|\, 1 \right).$$

Aufgabe 183 Abi★

Eine Vase besteht aus einer quadratischen Grundfläche und einer quadratischen Öffnung oben. Allerdings sind die beiden Quadrate um 45° zueinander verdreht. Die Mittelpunkte der beiden Quadrate liegen übereinander. Eine Skizze der Vase ist hier zu sehen:



Gegeben sind folgende Punkte

$$A(6\,|\,-6\,|\,0),\ B(6\,|\,6\,|\,0),\ E(3\,|\,0\,|\,21),\ F(0\,|\,3\,|\,21).$$

(a) Bestimme die Koordinaten der fehlenden Punkte C,D,G und H.

(b) Bestimme eine Gleichung der Geraden, in welcher die Strecke $\overline{AE}$ liegt.

(c) Berechne die Länge dieser Kante.

13.2 Abstand Punkt-Gerade – nur eA

Merke – nur eA

Gesucht ist der Abstand zwischen dem Punkt $P(5\,|\,1\,|\,1)$ und der Geraden

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Schritt 1: Bestimme eine Hilfsebene H mit folgenden Eigenschaften: Der Normalenvektor von H ist Richtungsvektor von g und der Punkt $P(5\,|\,1\,|\,1)$ liegt in H.

$$H:\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = a.$$

Setze P in diese Ebenengleichung ein, um a zu erhalten:

$$3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 = 13 \quad \Longrightarrow \quad H:\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 13.$$

Schritt 2: Bestimme den Schnittpunkt (Lotfußpunkt) von g und H:

$$3(-5+3s)+2(-5+2s)-4(5-4s)=13 \quad \Longrightarrow \quad s=2.$$

Dies in g eingesetzt ergibt den Schnittpunkt

$$S(1\,|\,-1\,|\,-3).$$

Schritt 3: Berechne den Abstand zwischen Schnittpunkt S und P:

$$d(P;g)=d(P;S)=\left|\begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\-1\\-3\end{pmatrix}\right|=6.$$

Damit ist der Abstand zwischen P und g bestimmt: $d(P;g)=6$.

Aufgabe 184 – nur eA Abi★★

Gegeben sind die Geraden

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+j\begin{pmatrix}1\\-5\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h:\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

Zu welcher Gerade hat $P(-2\,|\,1\,|\,2)$ den kürzeren Abstand?

Aufgabe 185 – nur eA Abi★★

Yannick möchte seine Freundin Lara von seinen Schwimmkünsten überzeugen. Lara sitzt am Punkt $P(3\,|\,-2\,|\,5)$ und Yannick schwimmt entlang der Geraden

$$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\-7\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\5\\3\end{pmatrix}.$$

(a) Lara ist kurzsichtig und trägt im Schwimmbad ihre Brille nicht. Sie kann ohne Brille nur 5 m weit gucken. Ein Meter entspricht dabei einer Längeneinheit. Kann Lara Yannick beim Schwimmen erkennen?

(b) An dem Punkt $M(3\,|\,-1\,|\,15)$ steht eine Gruppe von Mädchen. An welchem Punkt auf seiner Schwimmbahn kommt Yannick der Gruppe Mädchen am nächsten? Wie groß ist der Abstand zwischen Yannick und der Gruppe Mädchen an diesem Punkt?

13.3 Abstand Punkt-Ebene

Merke

Der Abstand eines Punktes $\mathrm{P}(\,p_1 \mid p_2 \mid p_3\,)$ zu einer Ebene E

$$E:\; n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = a$$

ist gegeben durch:

$$d(\mathrm{P}; E) = \frac{|n_1p_1 + n_2p_2 + n_3p_3 - a|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}.$$

Beispiel: Der Abstand von $\mathrm{P}(\,1 \mid 4 \mid 0\,)$ zu der Ebene

$$E:\; 3x_1 + 4x_2 = 4$$

lässt sich errechnen durch

$$d(\mathrm{P}; E) = \frac{|3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 - 4|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2}} = \frac{|15|}{5} = 3.$$

Aufgabe 186 – Abi★

Wie groß ist der Abstand von $\mathrm{P}(\,-1 \mid 3 \mid -2\,)$ zur jeweiligen Ebene?

(a) $E_1:\; 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

(b) $E_2:\; x_3 = 0$

(c) $E_3:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$

(d) $E_4:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 187 – Abi★★

Gegeben sind die Gerade g und die Ebene E:

$$g:\; \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E:\; 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1.$$

Bestimme alle Punkte der Geraden g, die den Abstand $3\sqrt{14}$ zur Ebene E haben.

Geometrie

Aufgabe 188 – Abi★★-★★★

Gegeben ist der Punkt $\mathrm{P}(6 \mid 5 \mid 1)$ und die Ebenenschar

$$E_t: \; tx_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8.$$

Bestimme alle Ebenen der Ebenenschar E_t, die zum Punkt P einen Abstand von zwei Längeneinheiten haben. Kläre zudem, welche Werte der Abstand zwischen E_t und P annehmen kann.

13.4 Abstand Ebene-Ebene

Merke

Der Abstand zwischen zwei parallel verlaufenden Ebenen E und F ist der Abstand zwischen E und einem beliebigen Punkt auf F.

Beispiel: Berechne den Abstand der parallelen Ebenen E und F:

$$E: \; -2x_1 + x_2 + x_3 = 3$$
$$F: \; -6x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3.$$

Der Punkt $\mathrm{P}(0 \mid 0 \mid 1)$ befindet sich auf der Ebene F und der Abstand lässt sich errechnen aus:

$$d(E;F) = d(\mathrm{P};E) = \frac{|-2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{|-2|}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Aufgabe 189 – Abi★★

Heribert und sein Schwarm Louise befinden sich in einem Zauberschloss mit vielen verschiedenen parallelen Stockwerken. Heribert befindet sich auf dem Stockwerk, welches in der Ebene E_H liegt und Louise auf dem Stockwerk in der Ebene E_L. Jedes Stockwerk ist genau eine Längeneinheit hoch.

$$E_H: \; -4x_1 - 3x_2 = 100$$
$$E_L: \; 16x_1 + 12x_2 = 20$$

(a) Wie weit ist Heribert zu jedem Zeitpunkt mindestens von Louise entfernt?

(b) Um seinem Schwarm näher zu kommen, steigt Heribert am Punkt $\mathrm{P}(-10 \mid -20 \mid 10)$ in einen Aufzug. Der Aufzug fährt entlang einer Geraden, die orthogonal zu den Stockwerken verläuft. Stelle eine Gleichung der Geraden auf, innerhalb derer der Aufzug sich bewegt.

(c) Heribert fährt in dem Aufzug 10 Stockwerke in Richtung von Louise. Gib die Ebenengleichung des Stockwerks an, in dem sich Heribert jetzt befindet. Wie weit ist Heribert jetzt mindestens von Louise entfernt?

(d) Louise steht nun direkt am Fahrstuhlausgang auf ihrem Stockwerk. An welchem Koordinatenpunkt befindet sich Louise?

13.5 Abstand Gerade-Gerade – nur eA

Merke – nur eA

Der Abstand zwischen zwei parallel verlaufenden Geraden g und h ist der Abstand eines beliebigen Punktes P auf der Geraden h zur Geraden g.

Beispiel: Berechne den Abstand der beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -6 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

Berechne hierzu den Abstand zwischen g und P(0 | 7 | 0).

Schritt 1: Hilfsebene H mit P(0 | 7 | 0) und Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

lautet:

$$H: 4x_2 + 3x_3 = 28.$$

Schritt 2: Schnittpunkt S von g und H berechnen. Hierzu g in H einsetzen:

$$4(0 + 4s) + 3(1 + 3s) = 28 \quad \Longrightarrow \quad s = 1.$$

Damit gilt: S(-3 | 4 | 4).

Schritt 3: Abstand von S zu P berechnen:

$$d(g; h) = d(\mathrm{P}; \mathrm{S}) = \left\| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{34}.$$

Der Abstand zwischen g und h beträgt $\sqrt{34}$ Längeneinheiten.

Geometrie

14 Schattenpunkte

Rezept

Fall 1: Aufgabe mit Schatten einer **punktförmigen Lichtquelle** (Lampe).

- **Schritt 1:** Stelle Hilfsgeraden auf, welche die Lichtquelle mit den Eckpunkte der Objekte, die Schatten werfen, verbinden.
- **Schritt 2:** Schneide die Hilfsgeraden mit der Ebene, auf die die Schatten fallen.

Fall 2: Aufgabe mit Schatten einer **weit entfernten Lichtquelle** (Sonne).

- **Schritt 1:** Stelle Hilfsgeraden auf, die durch die Eckpunkte der Objekte, die Schatten werfen, gehen und in Richtung der Sonnenstrahlen verlaufen.
- **Schritt 2:** Schneide die Hilfsgeraden mit der Ebene, auf die die Schatten fallen.

Beispiel: Im Punkt $\mathsf{L}(1 \mid 2 \mid 4)$ befindet sich eine Lampe. Gesucht ist der Schattenpunkt des Punktes $\mathsf{P}(2 \mid 0 \mid 2)$ auf der x_1,x_2- Ebene.

➤ *Hilfsgerade aufstellen*

Eine Gleichung der Hilfsgeraden durch L und P lautet:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

➤ *Bestimmung des Schnittpunktes*

Die x_1,x_2-Ebene hat die Darstellung $x_3 = 0$. Für die Ermittlung des Schnittpunktes S dieser Ebene mit g setze:

$$4 - 2r = 0 \quad \Longrightarrow \quad r = 2.$$

Damit gilt für den Schattenpunkt S:

$$\vec{\mathsf{S}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also lautet der gesuchte Schattenpunkt $\mathsf{S}(3 \mid -2 \mid 0)$.

Aufgabe 190 Abi★★-★★★

In einem Freibad befindet sich eine leicht schiefe Liegewiese. Diese hat eine viereckige Form und wird durch die Ecken $O(0 \mid 0 \mid 0)$, $A(20 \mid 0 \mid 0)$, $B(20 \mid -10 \mid 2)$, $C(0 \mid -10 \mid 2)$ begrenzt. Das anschließende Schwimmbecken wird durch die Punkte O, A, $D(20 \mid 10 \mid 0)$, $E(0 \mid 10 \mid 0)$ begrenzt. Um die Badegäste im Hochsommer vor der starken Sonneneinstrahlung zu schützen, wird ein dreieckiges Segeltuch an umgrenzenden Gebäuden aufgespannt. Die Eckpunkte des Segeltuchs sind dabei $P(10 \mid -4 \mid 6)$, $Q(5 \mid -4 \mid 6)$, $R(6 \mid -8 \mid 12)$. Die Sonne scheint in Richtung

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

(a) Fertige eine Skizze der Liegewiese und des Schwimmbads in einem geeigneten Koordinatensystem an und zeige, dass die Liegewiese eine rechteckige Form hat. Berechne den Flächeninhalt und den Steigungswinkel der Liegewiese.

(b) Zeige, dass der Schatten des Segeltuchs ein rechtwinkliges Dreieck ist und nicht über die Liegewiese hinausragt. Bestimme zudem den Anteil der sonnengeschützten Fläche der Liegewiese.

15 Umfangreiche Aufgaben

15.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 191

Gegeben sind die Punkte $A(-5 \mid 2 \mid 3)$ und $B(1 \mid 2 \mid 3)$.

(a) Bestimme einen Punkt C so, dass A, B und C keine Ebene festlegen.

(b) Gib Punkte C und D so an, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.

Aufgabe 192

Gegeben ist die Ebene $E : x_1 + 2x_2 = 3$.

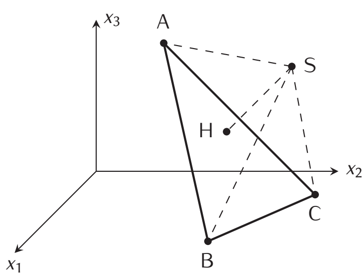
(a) Stelle E in einem Koordinatensystem dar.

(b) Gib die Gleichung einer Geraden an, die senkrecht auf E steht und E in einem Punkt schneidet, dessen Koordinaten identisch sind.

15.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 193 – nur eA

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(2 \mid 3 \mid 5)$, $B(6 \mid 6 \mid 0)$ und $C(2 \mid 8 \mid 0)$ gegeben. Die drei Punkte liegen in einer Ebene E.



(a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E.

(b) Bestimme die Spurpunkte der Ebene E und zeichne das Spurdreieck von E in ein geeignetes Koordinatensystem ein.

(c) Zeige, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist.

(d) Beschreibe zwei unterschiedliche Verfahren, um die Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks zu bestimmen, wenn nur die Koordinaten der Eckpunkte gegeben sind.

(e) Das Dreieck ABC stellt die Grundfläche einer Pyramide dar. Die Spitze der Pyramide befindet sich im Punkt S(4 | 8 | 5). Berechne die Koordinaten des Punktes H, welcher der Lotfußpunkt der Spitze S ist und begründe, warum dieser innerhalb der Dreiecksfläche ABC liegt. Berechne das Volumen der so gebildeten Pyramide.

(f) Wo müsste bei gleichem Lotfußpunkt H und gleicher Grundfläche ABC die Spitze S_* der Pyramide liegen, wenn das Volumen der Pyramide 15 VE betragen soll?

(g) Die Gerade g enthält die Punkte A und B. Zeige, dass der Punkt P(6 | 3,5 | -6,5) nicht auf der Geraden g liegt. Bezeichne M den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Durch Rotation der Strecke $\overline{MP}$ um die Gerade g entsteht ein Kegel. Berechne das Volumen dieses Kegels.

Aufgabe 194

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3 | -1 | 2), B(1 | 1 | 1), C(-1 | 6 | 2) und D(7 | -2 | 6) gegeben.

(a) Zeige, dass die Punkte A,B,C und D in einer Ebene E liegen und gib eine Koordinatengleichung von E an.

(b) Zeige, dass das Viereck ABCD ein Trapez, jedoch kein Parallelogramm ist. Überprüfe, ob dieses Trapez zwei gleich lange gegenüberliegende Seiten hat.

(c) Bestimme den Diagonalenschnittpunkt M des Trapezes.

(d) Der Flächeninhalt eines Trapezes ist gegeben durch

$$A = \frac{1}{2}(a+b)\,h.$$

Hierbei bezeichnet h die Höhe des Trapezes und a und b die Längen der beiden parallelen Seiten. Bestimme den Flächeninhalt des Trapezes ABCD.

(e) Zeige, dass der Punkt M die Strecke $\overline{AC}$ im Verhältnis 1 : 4 teilt.

(f) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene F, deren Punkte von U(3 | 2,5 | -1) und V(3 | 3,5 | 1) denselben Abstand haben. Es gibt eine Gerade g, die in der Ebene E liegt und deren Punkte von U und V jeweils den gleichen Abstand haben. Bestimme eine Gleichung von g.

Aufgabe 195 – nur eA

In einem Freizeitpark für Kinder steht ein 60 m hoher Freifall-Turm. Die gesamte Parkfläche liegt in der x_1x_2-Ebene. Nun wird in der Nähe des Freifall-Turmes ein Hang aufgeschüttet, der als Grundfläche für große Rutschen dienen soll. Der Hang liegt in der Ebene E mit

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{R}.$$

Die senkrechte Mittelachse des Freifall-Turmes ist im Punkt F(3 | 2 | 0) verankert. Eine Längeneinheit entspricht 10 m.

(a) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene E und den Neigungswinkel des Hanges.

(b) Bestimme die Spurpunkte von E und skizziere die Ebene in einem geeigneten Koordinatensystem. Zeichne zusätzlich die Mittelachse des Freifall-Turmes ein.

(c) Das Fundament des Freifall-Turmes hat einen Durchmesser von 10 m. Für Warteschlangen, Wege und Grünflächen sollen zwischen dem Fuß des Hanges und dem Freifall-Turm mindestens 20 m Abstand sein. Kann dieser Mindestabstand hier eingehalten werden?

(d) Paralleles Sonnenlicht fällt in Richtung

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

ein. Bestimme den Schattenpunkt S_* der Spitze des Freifall-Turmes auf der Ebene E.

(e) Bestimme den genauen Verlauf des Schattens der Mittelachse. An welcher Stelle geht der Schatten vom Boden auf den Hang über?

Stochastik

16 Wichtige Grundbegriffe

16.1 Der Wahrscheinlichkeitsraum

16.1.1 Ergebnisse und Ereignisse

Merke

Als **Stichprobenmenge** Ω bezeichnet man die Menge aller möglichen **Ergebnisse** eines Zufallsexperiments. Teilmengen von Ω werden als **Ereignisse** bezeichnet.

Tipp:
- Oft werden Ereignisse nicht als Menge, sondern in Worten beschrieben.
- Man schreibt $|\Omega|$ für die Anzahl der Elemente in Ω.

Beispiel: Ein Würfel wird gewürfelt. Entsprechend der Augenzahl gibt es 6 mögliche Ergebnisse. Die Stichprobenmenge ist somit

$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}.$$

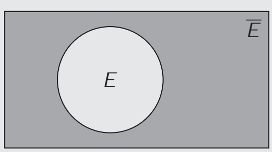
- $E_1 = \{2; 4; 6\}$: gerade Augenzahl.
- $E_2 = \{4; 5; 6\}$: Augenzahl > 3.
- $E_3 = \{3; 6\}$: Augenzahl durch 3 teilbar.

Beispiel: Eine Münze wird dreimal hintereinander geworfen. In diesem Fall ist ein Ergebnis eine dreifache Abfolge von Kopf (K) und Zahl (Z). Ein mögliches Ergebnis wäre beispielsweise (ZKK), also zuerst Zahl und dann zweimal Kopf. Mögliche Ereignisse sind:

- $E_1 = \{(ZZZ); (KZZ); (KKZ); (KKK)\}$: Kein K nach einem Z.
- $E_2 = \{(ZZZ); (ZZK); (ZKZ); (KZZ)\}$: mindestens 2 Mal Z.
- $E_3 = \{(KKZ); (KZK); (ZKK)\}$: genau 2 Mal K.

Merke

Als **Gegenereignis** $\overline{E}$ eines Ereignisses E bezeichnet man das Ereignis, welches alle Ergebnisse enthält, die nicht in E enthalten sind.



Beispiel: Zurück zum Würfelbeispiel: Die zugehörigen Gegenereignisse zu den obigen Ereignissen sind:

- $\overline{E_1} = \{1; 3; 5\}$: ungerade Augenzahl.
- $\overline{E_2} = \{1; 2; 3\}$: Augenzahl ≤ 3.
- $\overline{E_3} = \{1; 2; 4; 5\}$: Augenzahl nicht durch 3 teilbar.

Beispiel: Zurück zum Münzwurf: Die zugehörigen Gegenereignisse zu den obigen Ereignissen sind:

- $\overline{E_1} = \{(ZZK); (ZKZ); (ZKK); (KZK)\}$: mindestens ein K folgt auf ein Z.
- $\overline{E_2} = \{(KKK); (KKZ); (KZK); (ZKK)\}$: höchstens 1 mal Z.
- $\overline{E_3} = \{(KKK); (KZZ); (ZKZ); (ZZK); (ZZZ)\}$: nicht 2 mal K.

Aufgabe 196 Abi*

Was ändert sich bei obigem Münzwurfbeispiel, wenn man die Münzen gleichzeitig wirft? Wie sieht der Stichprobenraum aus? Welche der obigen Ereignisbeschreibungen geben immer noch Sinn, welche nicht? Gib Beispiele von Ereignissen und Gegenereignissen an.

Aufgabe 197

In einer Urne befinden sich fünf Kugeln. Zwei davon sind schwarz. Jeweils eine Kugel ist blau, grün bzw. weiß. Es werden gleichzeitig drei Kugeln gezogen. Gib die Stichprobenmenge Ω an.

Aufgabe 198 Abi*

(a) Es wird nacheinander mit zwei Würfeln gewürfelt. Welche Teilmenge von Ω entspricht dem Ereignis, eine Augensumme von 9 zu erhalten?

(b) Bestimme das Ereignis (als Teilmenge von Ω), dass beim gleichzeitigen Werfen von vier Münzen mehr als zwei Mal Kopf geworfen wurde.

(c) In einem Kasten befinden sich neun Kugeln, die von 1 bis 9 durchnummeriert sind. Bestimme die Teilmenge E von Ω, die dem Ereignis entspricht, dass eine Primzahl gezogen wird.

16.1.2 Der Begriff der Wahrscheinlichkeit

Merke

Jedem Ereignis einer Stichprobenmenge Ω lässt sich eine Wahrscheinlichkeit zuordnen. Die **Wahrscheinlichkeit** für ein beliebiges Ereignis $E \subseteq \Omega$ wird dann mit $P(E)$ bezeichnet. Es gilt:

- $0 \leq P(E) \leq 1$.
- $P(\Omega) = 1$ und $P(\emptyset) = 0$.
- $P(\overline{E}) = 1 - P(E)$.

Tipp:

- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses über das Gegenereignis zu berechnen kann sinnvoll sein, wenn die Ereignisse schwierig abzugrenzen sind und es einfacher ist die Ereignisse zu definieren, die **nicht** eintreten sollen.
- Prozentzahlen werden in Dezimalzahlen ≤ 1 umgewandelt: Tritt ein Ereignis E mit 60 %-iger Wahrscheinlichkeit ein, dann schreibe $P(E) = 0{,}6$.

Beispiel: Beim Münzwurf besteht die Stichprobenmenge aus den zwei Ereignissen Kopf (K) und Zahl (Z). Somit ist $\Omega = \{K; Z\}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf oder Zahl geworfen wird ist $P(\Omega) = 1$, die Wahrscheinlichkeit, dass weder Kopf noch Zahl geworfen wird ist $P(\emptyset) = 0$.

Da Kopf das Gegenereignis zu Zahl ist und wir annehmen können, dass beide Ereignisse mit gleicher Wahrscheinlichkeit eintreten, muss gelten:

$$P(Z) = P(K) = \frac{1}{2}.$$

Es gilt $P(Z) = P(\overline{K}) = 1 - P(K)$.

16.2 Laplace-Experimente

Merke

Ein **Laplace-Experiment** ist ein Zufallsversuch, bei dem alle Ergebnisse aus Ω **gleichwahrscheinlich** sind. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses E gilt:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{\text{Anzahl der günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ergebnisse}}.$$

Beispiel: Aus einem Deck von 52 Spielkarten wird eine Karte gezogen. Jede Karte hat dabei die gleiche Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden. Sei E_1 das Ereignis, dass ein König gezogen wird. Dann gilt:

$$P(E_1) = \frac{|E_1|}{|\Omega|} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

Denn es befinden sich 4 Könige von insgesamt 52 Karten im Deck.

Aufgabe 199 Abi★

Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es

(a) eine Herz-Karte (H) ist?

(b) eine Dame (D) ist?

(c) eine Herz-Karte (H) oder eine Dame (D) ist?

Aufgabe 200 Abi★★

Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Summe der Augenzahlen größer als 7 ist?

(b) das Produkt der Augenzahlen größer als 16 ist?

(c) zwei verschiedene Zahlen gewürfelt werden?

Aufgabe 201 Abi★

Aus einem Kartenspiel mit 52 Karten wird eine Karte gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es

(a) eine Herz-Karte (H) ist?

(b) eine Dame (D) ist?

(c) eine Herz-Karte (H) oder eine Dame (D) ist?

Aufgabe 202 Abi★★

Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) die Summe der Augenzahlen größer als 7 ist?

(b) das Produkt der Augenzahlen größer als 16 ist?

(c) zwei verschiedene Zahlen gewürfelt werden?

Aufgabe 203 Abi★★★

In einem Wahlbezirk wurde nach der letzten Wahl analysiert, ob die Stimmabgabe für einen Bürgermeisterkandidaten mit der für einen Kreistagsabgeordneten zusammenhängt. Jeder Wähler hat auf seinem Wahlzettel eine Stimme für den Bürgermeisterkandidaten und eine Stimme für den Kreistagskandidaten abgegeben. Die Parteien A, B und C haben jeweils einen Bürgermeisterkandidaten und einen diesen Bezirk vertretenden Kreistagskandidaten gestellt, Partei D stellte lediglich einen Kandidaten für den Kreistag auf. Von den 250 Wählern stimmten 60 für Bürgermeisterkandidat A, 90 für Bürgermeisterkandidat B, 100 für Bürgermeisterkandidat C. Jeweils die Hälfte stimmte für den Kreistagsabgeordneten derselben Partei. Für den Kreistagsabgeordneten der Partei D stimmten 30 Wähler, die den Bürgermeisterkandidaten von A, 25 die den Bürgermeisterkandidaten von B und 30 die den von C gewählt haben. Der Kreistagskandidat von B erhielt keine Fremdstimmen, die Kreiskandidaten von A und C erhielten jeweils die Hälfte der verbleibenden Stimmen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus allen Wahlzetteln einen zu ziehen,

Stochastik

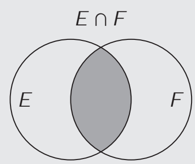
(a) auf dem mindestens einmal für B gestimmt wurde.
(b) auf dem keine der Stimmen für C abgegeben wurde.
(c) auf dem für den Bürgermeisterkandidaten von A und den den Kreistagskandidaten von D gestimmt wurde.
(d) auf dem für den Bürgermeisterkandidaten von B, aber nicht für den Kreistagskandidaten von B gestimmt wurde.
(e) auf dem die Stimmen für zwei unterschiedliche Parteien abgegeben wurden.

16.3 Vereinigung und Schnitt von Ereignissen

16.3.1 Schnitt zweier Ereignisse

Merke

Seien E und F zwei Ereignisse. Die **Schnittmenge** $E \cap F$ bezeichnet die Menge aller Ergebnisse, die gleichzeitig sowohl in E als auch in F enthalten sind.



Beispiel: Zwei Würfel werden geworfen. Betrachte folgende Ereignisse:

E: Die Augensumme ist durch 4 teilbar.
F: Die Augensumme ist durch 6 teilbar.

Dann enthält das Ereignis $E \cap F$ genau alle Würfelergebnisse, die durch 4 und durch 6 teilbar sind. Es gilt:

$$E = \{4; 8; 12\}$$
$$F = \{6; 12\}.$$

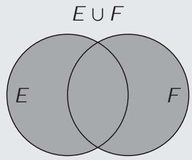
Somit ist

$$E \cap F = \{12\}.$$

16.3.2 Vereinigung zweier Ereignisse

Merke

Seien E und F zwei Ereignisse. Die **Vereinigungsmenge** $E \cup F$ bezeichnet die Menge aller Ergebnisse, die in mindestens einem der beiden Ereignisse E und F enthalten sind.



Beispiel: Zwei Würfel werden geworfen. Betrachte folgende Ereignisse:

E: Die Augensumme ist durch 4 teilbar.

F: Die Augensumme ist durch 6 teilbar.

Dann enthält das Ereignis $E \cup F$ genau alle Würfelergebnisse, die durch 4 oder durch 6 teilbar sind. Es gilt:

$$E = \{4; 8; 12\}$$
$$F = \{6; 12\}.$$

Somit ist

$$E \cup F = \{4; 6; 8; 12\}.$$

Additionssatz oder Satz von Sylvester

Für Ereignisse E und F gilt

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F).$$

Tipp: Schließen sich E und F gegenseitig aus (d.h. $P(E \cap F) = 0$), so gilt insbesondere

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F).$$

Beispiel: Es wird mit einem Würfel geworfen. Betrachtet werden die Ereignisse:

E: Augenzahl ≥ 4.

F: Augenzahl ≤ 2.

Die Ereignisse E und F schließen sich jeweils gegenseitig aus. Daher gilt

$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

Beispiel: Eine Lostrommel enthält eine unbestimmte Anzahl Lose. Es gibt Nieten und Gewinne. Unter den Nieten und Gewinnen gibt es jeweils solche, bei denen man nochmal ziehen darf und solche, bei denen das nicht der Fall ist. Das Werbeschild gibt an, dass man mit einer Wahrscheinlichkeit von 40 % einen Gewinn zieht, in 30 % der Fälle nochmal neu ziehen darf und jeder Zehnte sogar nach einem Gewinn nochmal ziehen darf. Es soll die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden, dass man beim Kauf eines Loses einen Gewinn erhält oder noch einmal ziehen darf.

Stochastik

Man definiert folgende Ereignisse:

G: Das Los ist ein Gewinn.

N: Das Los ist eine Niete.

Z: Man darf noch einmal ziehen

Aus dem Werbeschild entnimmt man

$$P(G) = 0{,}4, \quad P(Z) = 0{,}3, \quad P(G \cap Z) = 0{,}1.$$

Somit gilt:

$$P(G \cup Z) = P(G) + P(Z) - P(G \cap Z) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}1 = 0{,}6.$$

Aufgabe 204 – Abi*

Beim Lotto befinden sich 49 durchnummerierte Kugeln in der Lottotrommel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Nummer

(a) durch drei teilbar oder eine Primzahl ist?

(b) kleiner als 20 oder gerade ist?

(c) durch 7 oder durch 9 teilbar ist?

Aufgabe 205 – Abi*

Ein Glücksrad hat zwölf Felder. Die Felder sind abwechselnd in der Reihenfolge (blau, gelb, rot) eingefärbt. Beginnend bei der Farbe blau sind die Felder mit 1 bis 12 durchnummeriert. Das Glücksrad wird einmal gedreht. Dabei betrachtet man folgende Ereignisse:

B: Der Zeiger zeigt auf ein blaues Feld.

G: Der Zeiger zeigt auf ein Feld mit einer geraden Zahl.

(a) Bestimme $P(B)$ und $P(G)$.

(b) Bestimme $P(B \cap G)$.

(c) Bestimme $P(B \cup G)$.

(d) Bestimme das Gegenereignis zu $B \cup G$ und deute es im Kontext. Welche Wahrscheinlichkeit hat es?

Aufgabe 206 Abi$^{\star-\star\star}$

Gib jeweils die Mengen der Vereinigung und des Schnitts an. Berechne die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten.

(a) H ist das Ereignis, dass beim Ziehen aus einem Kartenspiel mit 52 Karten eine Herz-Karte gezogen wird, K das Ereignis, dass aus diesem Spiel ein König gezogen wird.

(b) Beim Wurf mit zwei Würfeln ist das Wurfergebnis die kleinste aus den Ziffern zu bildende zweistellige Zahl. A beschreibt das Ereignis, dass diese Zahl kleiner als 30 ist, B, dass sie durch drei teilbar ist.

Aufgabe 207 Abi★★

In einem Reiseführer ist zu lesen:

> Die örtliche Fressmeile ist besonders zu empfehlen. Dort findet man fein säuberlich aufgereiht fünfzig Restaurants. In dreißig dieser Restaurants wird die lokale Spezialität „Verkohltes Allerlei“ angeboten. Die Getränke-Spezialität „Grünkohl-Schwefel-Saft“ steht in vierzig der Restaurants auf der Getränkekarte. Lediglich fünf Restaurants verwehren sich den örtlichen kulinarischen Vorlieben und bieten weder „Verkohltes Allerlei“ noch „Grünkohl-Schwefel-Saft“ an.

Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man beim Besuch eines zufällig ausgewählten Restaurants dieser örtlichen Fressmeile sowohl die Speise „Verkohltes Allerlei“ als auch das Getränk „Grünkohl-Schwefel-Saft“ bestellen kann.

16.4 Stochastische Unabhängigkeit

Merke

Zwei Ereignisse A und B heißen **(stochastisch) unabhängig**, falls das Eintreten von A keinen Einfluss auf das Eintreten von B hat (und umgekehrt). Es gilt:

$$A, B \text{ unabhängig} \quad \Longleftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Beispiel: Bei einem Spiel werden ein roter und ein grüner Würfel gleichzeitig geworfen. Sind die Ereignisse

A: Der rote Würfel ist eine 5 oder eine 6.

B: Es wird ein Pasch gewürfelt, d. h. beide Würfel haben dieselbe Augenzahl.

stochastisch unabhängig? Es gilt:

- $P(A) = \frac{2}{6}$
- $P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
- $P(A \cap B) = \frac{2}{36}$ (Denn $A \cap B = \{(5{,}5), (6{,}6)\}$).

Damit gilt

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{36} = P(A \cap B).$$

Also sind A und B unabhängig.

Stochastik

Aufgabe 208

Nachfolgend sind zwei Zitate abgebildet. Bestimme jeweils das zugrundeliegende Verständnis des jeweiligen Autors bezüglich der stochastischen Unabhängigkeit der Ereignisse W (Eine Person ist weiblich.) und N (Eine Person ist naturwissenschaftlich begabt.).

(a) Aus einer Zeitung aus dem 19. Jahrhundert: „Es liegt in der Natur, dass Männer die besseren Naturwissenschaftler sind. Als Frau geboren zu sein bedeutet, dass von dieser Person bis auf wenige Ausnahmen keine naturwissenschaftlichen Leistungen zu erwarten sind."

(b) Aus einer aktuellen Fachzeitschrift: „Hinsichtlich des Geschlechts und der naturwissenschaftlichen Begabung einer Person wurde in der vorliegenden Studie kein Zusammenhang entdeckt."

Aufgabe 209 Abi★

Es wird mit zwei Würfeln gewürfelt. Untersuche folgende Ereignisse auf stochastische Unabhängigkeit:

A: Die Augensumme ist gerade.

B: Das Produkt der Augenzahlen beider Würfel ist gerade.

16.5 Die Vierfeldertafel

Merke

In einer **Vierfeldertafel** werden die Wahrscheinlichkeiten von zwei Ereignissen A und B inklusive Gegenereignissen und deren Schnitte übersichtlich dargestellt:

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \cap B)$	$P\left(\overline{A} \cap B\right)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P\left(A \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$	$P\left(\overline{B}\right)$
	$P(A)$	$P\left(\overline{A}\right)$	1

Die Summe über die ersten beiden Elemente einer Spalte/Zeile ergibt immer das letzte Element in der Spalte/Zeile.

Beispiel: In einer Schulklasse gibt es 12 weibliche und 8 männliche Schüler. Zwei Jungs sind Raucher. Insgesamt raucht ein Fünftel aller Schüler dieser Klasse. Wie viele Mädchen sind Nichtraucher? Mit den Bezeichnungen $W =$ weiblich und $R =$ Raucher gilt: Gegeben:

$$P(W) = \frac{12}{20} = 0{,}6; \quad P\left(\overline{W}\right) = \frac{8}{20} = 0{,}4;$$
$$P\left(\overline{W} \cap R\right) = \frac{2}{20} = 0{,}1; \quad P(R) = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Gesucht:

$$P\left(W \cap \overline{R}\right).$$

Diese Werte in die Vierfeldertafel eingetragen, ergibt:

	W	$\overline{W}$	
R		0,1	0,2
$\overline{R}$			
	0,6	0,4	1

Die verbleibenden Werte können nacheinander bestimmt werden, indem man beachtet, dass die Spalten und Zeilen sich aufsummieren:

$\Longrightarrow$

	W	$\overline{W}$	
R		0,1	0,2
$\overline{R}$		0,3	0,8
	0,6	0,4	1

$\Longrightarrow$

	W	$\overline{W}$	
R	0,1	0,1	0,2
$\overline{R}$	0,5	0,3	0,8
	0,6	0,4	1

Jetzt kann abgelesen werden: $P\left(W \cap \overline{R}\right) = 0{,}5$. Da es insgesamt 20 Schüler gibt, gibt es also 10 Mädchen, die Nichtraucher sind.

Aufgabe 210 Abi★

Nachdem von beiden Mannschaften jeweils 5 Schützen ihre Elfmeter sicher verwandelt hatten, sind die nächsten Schützen Arjen Robben für den FC Bayern München und Pierre-Emerick Aubameyang für Borussia Dortmund. Wenn ein Schütze trifft und der andere nicht, dann hat die Mannschaft des erfolgreichen Schützen gewonnen. Treffen beide oder trifft keiner, dann müssen zwei weitere Schützen antreten. Der Reporter spricht: „Robben und Aubameyang, beide sind sichere Schützen. Zu 75 % treffen beide. Robben ist mittlerweile auch vom Elfmeterpunkt sehr stark. Er verwandelt 8 von 10 Schüssen. Aubameyang ist ein noch besserer Schütze und versagt in nur 10 % aller Versuche.“

(a) Stelle eine vollständige Vierfeldertafel auf, die die Trefferwahrscheinlichkeiten von Robben und Aubameyang beschreibt.

(b) Ermittle die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Spiel nach den Schüssen von Robben und Aubameyang beendet ist.

Stochastik

16.6 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Merke

Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A unter der Bedingung/Voraussetzung eines Ereignisses B schreibt man $P_B(A)$ oder alternativ $P(A|B)$. Es gilt die Formel:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Beispiel: In einer Schulklasse befinden sich 10 Jungen und 15 Mädchen Dabei sind 4 der 10 Jungs und 3 der 15 Mädchen blond. Für die Ereignisse J (Schüler ist ein Junge) und B (Schüler ist blond) gilt:

$$P(J) = \frac{10}{25} = 0{,}4; \quad P(B) = \frac{4+3}{25} = 0{,}28; \quad P(J \cap B) = \frac{4}{25} = 0{,}16.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewählter Junge blond ist, beträgt

$$P_J(B) = \frac{P(B \cap J)}{P(J)} = \frac{0{,}16}{0{,}4} = 0{,}4.$$

Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich, denn $\frac{4}{10} = 0{,}4$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass hingegen ein zufällig ausgewählter blonder Schüler ein Junge ist, beträgt

$$P_B(J) = \frac{P(J \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}16}{0{,}28} \approx 0{,}57.$$

Auch dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich, denn $\frac{4}{7} \approx 0{,}57$.

Merke

- Es gilt:

$$A, B \text{ stochastisch unabhängig} \iff P_B(A) = P(A).$$

- Satz von Bayes:

$$P_B(A) = P_A(B) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}.$$

Aufgabe 211 Abi★★★

Beweise die beiden Aussagen des Satzes von Bayes.

Aufgabe 212 Abi★★

Peter hat 10 % seiner Lebenszeit Hunger. In 2 % seiner Lebenszeit knurrt sein Magen. Wenn sein Magen knurrt, dann hat er in 90 % aller Fälle auch Hunger. Peter ist jetzt hungrig. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass sein Magen knurrt.

Aufgabe 213

Auf einer Truthahnfarm leben insgesamt fünfzig Tiere, dreißig davon sind schwarz gefärbt, alle anderen weiß. Insgesamt wiegen 60 % der schwarzen Truthähne wiegen weniger als 10 kg. Der Ausbruch einer Infektionskrankheit macht der Population zu schaffen. Drei der weißen Truthähne erkranken, einer davon wiegt mindestens 10 kg.
Betrachte folgende Ereignisse:

S : Ein zufällig gewählter Truthahn hat eine schwarze Färbung

G : Ein zufällig gewählter Truthahn wiegt weniger als 10 kg

K : Ein zufällig gewählter Truthahn ist krank.

(a) Wie viele Tiere der Farm wiegen weniger als 10 kg und haben eine schwarze Färbung?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig gewählter weißer Truthahn krank und wiegt weniger als 10kg?

(c) Beschreibe die folgenden Wahrscheinlichkeiten im Sachzusammenhang:
- $P(S \cap K)$,
- $P_{\overline{K}}(\overline{G} \cap S)$,
- $P_{G \cup S}(\overline{K})$.

Aufgabe 214 Abi★★★

Ein HIV-Test ist insofern sehr sicher, dass das Testergebnis, ob die getestete Person infiziert ist oder nicht, zu 99 % Wahrscheinlichkeit korrekt ist. In Deutschland leben 80 Millionen Menschen. Darunter sind 80 000 Personen HIV-positiv. Mit H wird das Ereignis bezeichnet, dass eine Person mit dem HI-Virus infiziert ist. Mit T wird das Ereignis bezeichnet, dass eine Person als HIV-positiv getestet wird.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person HIV-positiv ist.

(b) Berechne $P(H \cap T)$ und $P\left(\overline{H} \cap T\right)$.

(c) Ermittle hieraus $P_T(H)$.

(d) Interpretiere die Bedeutung des in der vorherigen Teilaufgabe bestimmten Wertes. Folgere praktische Konsequenzen für einen Umgang bei einem positiven Test und erkläre, wie dieser überraschende Wert zustanden kommen kann.

17 Mehrstufige Wahrscheinlichkeiten

17.1 Baumdiagramme

Merke

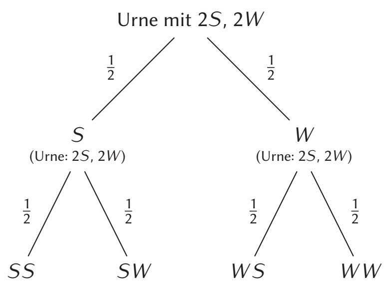
Rechenregeln in einem Baumdiagramm:

- Um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu berechnen, werden die Wahrscheinlichkeiten entlang des Pfades multipliziert, der zu dem Ergebnis führt.
- Gehören zu einem Ereignis mehrere Pfade, so werden die Ergebniswahrscheinlichkeiten der betreffenden Pfade addiert.

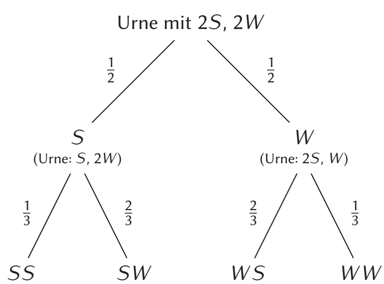
Tipp: Im Prinzip lässt sich jedes mehrstufige Wahrscheinlichkeitsproblem durch ein Baumdiagramm lösen, allerdings eignen sich Baumdiagramme nur für einfachere Probleme, weil sie sehr schnell sehr unübersichtlich werden.

Beispiel: In einer Urne befinden sich zwei weiße und zwei schwarze Kugeln.

- Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



- Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Betrachte das Ereignis

E : Es werden eine schwarze (S) und eine weiße (W) Kugel gezogen.

Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt

- beim Ziehen mit Zurücklegen:

$$P(E) = P(SW) + P(WS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

- beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(E) = P(SW) + P(WS) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Aufgabe 215

Auf einer Kirmes soll eine Glücksspielbude damit beworben werden, dass die Gewinnwahrscheinlichkeit 60 % beträgt. Welches der vorgeschlagenen Gewinnspiele bietet sich an? Warum?

(a) Glücksrad drehen: 6 von 10 gleichgroßen Feldern führen zum Gewinn.

(b) Lose ziehen: Zu Beginn sind unter 1000 Losen 600 Gewinnlose.

Aufgabe 216 Abi★

In einer Urne befinden sich drei blaue, zwei rote und eine gelbe Kugel.

(a) Zeichne das Baumdiagramm für den Fall, dass zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen?

(b) Zeichne das Baumdiagramm für den Fall, dass zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zwei verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen?

Aufgabe 217 Abi★★

In einer Urne befinden sich drei schwarze, zwei grüne und fünf blaue Kugeln. Es werden ohne Zurücklegen nacheinander zwei Kugeln gezogen und sich entsprechend der Reihenfolge die Farben notiert. Diese beiden Kugeln werden zurückgelegt und schließlich danach noch eine dritte Kugel gezogen. Bestimme folgende Wahrscheinlichkeiten

(a) Alle gezogenen Kugeln sind von der gleichen Farbe.

(b) Alle gezogenen Kugeln sind verschiedenfarbig.

(c) Alle Kugeln sind grün.

(d) Es werden genau zwei blaue Kugeln gezogen und dies hintereinander.

Aufgabe 218 Abi★★

Ein Lieferant bestellt 1000 Mikrochips, von denen 200 defekt sind. Bei der Lieferung wird die Ware geprüft. Dazu wird ein Chip entnommen. Ist dieser defekt, so wird eine weitere Stichprobe von 2 Chips entnommen. Ist davon mindestens ein Chip defekt, so wird die Ware nicht angenommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass die Ware zurückgewiesen wird.

Aufgabe 219 – Abi★★★

Auf einem Tisch stehen zwei Urnen U_1 und U_2, in denen sich Kugeln folgender Farben befinden:

U_1 : 2 schwarze, 2 weiße, 2 grüne

U_2 : 4 schwarze, 2 weiße.

Aus U_2 werden zwei Kugeln entnommen und in U_1 gelegt. Daraufhin wird eine Kugel aus U_1 entnommen. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Kugel…

(a) … grün ist.

(b) … weiß ist.

(c) … schwarz ist.

Aufgabe 220 – nur eA Abi★★★

In einer Umfrage unter Schülern soll herausgefunden werden, wer schon einmal bei einer Klassenarbeit beim Nachbarn abgeschrieben hat. Um den Schülern möglichst viel Anonymität zu gewährleisten, verläuft die Umfrage wie folgt:

Aus einer Urne mit vier schwarzen, drei weißen und einer gelben Kugel zieht die befragte Person eine Kugel (mit Zurücklegen). Dabei erfährt nur die Person selbst die Farbe der Kugel. Wird eine schwarze Kugel gezogen, so antwortet man pauschal mit *nein*. Wird eine weiße Kugel gezogen, so antwortet man pauschal mit *ja*. Wird die gelbe Kugel gezogen, so wird wahrheitsgemäß geantwortet. Es werden insgesamt 3000 Schüler nach diesem Verfahren befragt. Davon antworten genau 1457 mit *ja*. Gib eine möglichst präzise Schätzung, wie viel Prozent aller Schüler schon einmal abgeschrieben haben.

Hinweis: Bei der Lösung soll davon ausgegangen werden, dass sich alle Befragten an die Regeln der Umfrage halten.

17.2 Kombinatorische Abzählverfahren

Einleitung

Häufig ergibt sich die Fragestellung, wie viele Gesamtmöglichkeiten es zu einer bestimmten Ausgangslage gibt. Hierzu gibt es je nach Zufallsversuch bestimmte kombinatorische Abzählverfahren, die einfache Antworten liefern. Teilweise kann man diese auch benutzen, um Laplace-Wahrscheinlichkeiten auszurechnen.

Kombinatorische Produktregel

Wenn ein Zufallsversuch in mehreren Stufen k durchgeführt wird und die Anzahl n_k der möglichen Ausgänge von Stufe zu Stufe unterschiedlich ist gilt für die Anzahl der möglichen Ergebnisse N des Zufallsversuches:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Beispiel: Ein Kleidungshersteller bietet T-Shirts in fünf verschiedenen Farben, vier verschiedenen Größen und mit sieben unterschiedlichen Aufdrucken an. Wie viele unterschiedliche T-Shirts gibt es?

$$N = 5 \cdot 4 \cdot 7 = 140$$

Es gibt also 140 verschiedene Varianten des T-Shirts.

Geordnete Stichproben

Für den Fall, dass die Stufen eines Zufallsexperimentes in gleicher Weise ablaufen, entstehen zwei wichtige Unterarten der kombinatorischen Produktregel. Den ersten Fall kann man sich an einer Urne verdeutlichen, aus der mit Zurücklegen gezogen wird. Dann ergibt sich für die Anzahl N der Möglichkeiten:

$$N = n^k$$

Der zweite Fall entspricht einer Urne, aus der ohne Zurücklegen gezogen wird. Dann gilt:

$$N = n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - k + 1)$$

Bei beiden Fällen ist die Reihenfolge zu beachten.

Beispiel: Der Pincode einer Kreditkarte besteht aus vier Ziffern von jeweils 0 bis 9. Wie viele unterschiedliche Pincodes gibt es?

$$N = 10^4 = 10000$$

Es gibt also 10000 verschiedene Pincodes.

Beispiel: Beim olympischen Hundertmeterlauf starten im Finale neun Teilnehmer. Wie viele unterschiedliche Besetzungen des Siegertreppchens gibt es?

$$N = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$$

Es gibt also 504 unterschiedliche Besetzungen des Siegertreppchens.

Die Fakultät

Wenn im zweiten Fall alle Kugeln aus der Urne gezogen werden ergibt sich für die Anzahl der Möglichkeiten N:

$$N = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Man definiert hierüber den Begriff der **Fakultät**:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Ungeordnete Stichproben und Binomialkoeffizient

Es gilt nicht immer, dass die Reihenfolge der Ergebnisse der einzelnen Stufen von Bedeutung ist. Wenn man die Reihenfolge nicht beachtet, gibt es nur für das Modell einer Urne, aus der ohne Zurücklegen unterscheidbare Kugeln gezogen werden, eine einfache kombinatorische Abzählregel. Hier muss zusätzlich zur im vorigen Abschnitt kennengelernten Ziehung unter Berücksichtigung der Reihenfolge noch durch die Anzahl der ununterscheidbaren Ergebnisse des Zufallsversuch geteilt werden. Es ergibt sich für die Anzahl N der Möglichkeiten bei n Kugeln und k-maligem Ziehen:

$$N = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Hierüber wird der **Binomialkoeffizient** „n über k“ definiert:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dies entspricht gerade der Anzahl der Möglichkeiten genau k Objekte aus einer Menge von n Objekten auszuwählen.

Tipp: Auf dem Taschenrechner berechnet man den Binomialkoeffizenten in der Regel mit dem Befehl `nCr`.

Beispiel: Aufgrund einer Gutscheinaktion hat eine Person die Möglichkeit zusammen mit zwei Freunden kostenlos ins Kino zu gehen. Vier Freunde der Person würden gerne mitkommen. Es soll berechnet werden wie viele Möglichkeiten es gibt zwei aus den vier Freunden auszuwählen. Der Binomialkoeffizient $\binom{4}{2}$ hat den Wert

$$\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 6.$$

Die Anzahl der Möglichkeiten 2 aus 4 Objekten auszuwählen ist also 6. Es gibt somit 6 verschiedene Möglichkeiten die Freunde für den kostenlosen Kinobesuch auszuwählen.

Rechenregeln für den Binomialkoeffizienten

- $\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n.$
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$
- $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}.$

Beispiel: Der Wert des Binomialkoeffizienten $\binom{10}{7}$ lässt sich mit obigen Regeln wie folgt ohne Taschenrechner bestimmen:

$$\begin{aligned}\binom{10}{7} = \binom{10}{3} &= \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10 \cdot (10-1) \cdot (10-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{720}{6} \\ &= 120.\end{aligned}$$

Aufgabe 221 – 🖩 Abi★★

Einige Komponisten des letzten Jahrhunderts haben mit der sogenannten Zwölftonmethode komponiert. Das Grundprinzip besagt, dass jeder der zwölf Töne einer Oktave erst dann wieder erklingen darf, wenn die anderen erklungen sind. Daher wurde stets eine Reihe aus zwölf Tönen gebildet, die als Grundgerüst für die Komposition genommen wurde.

(a) Wie viele verschiedene Zwölftonreihen gibt es?

(b) Ein Komponist hat bereits sieben Töne der Reihe geschrieben und möchte jetzt einen Dreiklang schreiben, das heißt drei der verbleibenden Töne sollen gleichzeitig erklingen. Wie viele Möglichkeiten hat er drei Töne auszuwählen?

18 Zufallsvariablen

18.1 Grundbegriffe

Zufallsvariable und Wahrscheinlichkeitsverteilung

Jedes Ergebnis eines Zufallsexperiments wird mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit angenommen. Eine **Zufallsvariable** ordnet jedem Ergebnis eine reelle Zahl $x_1, x_2, x_3, \ldots$ zu. Die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** der Zufallsvariable gibt die Wahrscheinlichkeit $p_1, p_2, p_3, \ldots$ zu jeder dieser Zahlen (und damit den zugehörigen Ergebnissen) an. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt, ist dann die Wahrscheinlichkeit $P(X = x_i) = p_i$, dass die Zufallsvariable den zugehörigen Wert x_i annimmt.

Tipp:

➤ $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, d.h. die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist stets 1.

Beispiel: Ein Glücksrad hat drei Sektoren, einer ist genau ein Grad und ein zweiter 29 Grad groß. Wenn man das Glücksrad dreht und es bleibt in dem kleinsten Sektor stehen, gewinnt man 100 Euro, wenn es in dem 29°-Sektor stehen bleibt, gewinnt man 10 Euro. In dem Sektor mit den übrigen 330° gewinnt man nichts. Die Zufallsvariable X wird definiert als Gewinn in Euro, sie kann die Werte 0, 10 und 100 annehmen:

$$X : \text{Gewinn in Euro}, \quad X \in \{0, 10, 100\}$$

Für die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt:

$$\begin{aligned} p_1 : P(X = x_1) &= P(X = 0) = \frac{330}{360}, \\ p_2 : P(X = x_2) &= P(X = 10) = \frac{29}{360}, \\ p_3 : P(X = x_3) &= P(X = 100) = \frac{1}{360}. \end{aligned}$$

Bemerkung: In der Stochastik ist es manchmal praktisch, Brüche nicht zu kürzen, da man dann leichter überblicken kann, ob die Summe aller Wahrscheinlichkeiten tatsächlich 1 ergibt. Endgültige Ergebnisse, zum Beispiel in Antwortsätzen, müssen aber natürlich gekürzt sein.

Aufgabe 222 Abi*

Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung der folgenden Zufallsvariablen an.

(a) X: Augensumme beim Würfeln mit einem Würfel.

(b) X: Augensumme beim Würfeln mit zwei Würfel.

Aufgabe 223 – Abi★

Zwei Glücksräder tragen in gleich großen Abschnitten die Zahlen 1 bis 4. Beide Glücksräder werden gedreht und die Zahlen addiert. Ist das Ergebnis 8, dann wird der Hauptgewinn von 50 Euro ausgeschüttet. Ist das Ergebnis eine Primzahl, bekommt man einen Trostpreis von 2 Euro. In allen anderen Fällen bekommt man keinen Preis. Die Zufallsvariable X gibt den Gewinn des Glücksspiels an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

Aufgabe 224 Abi★★

Ein Zufallsgenerator liefert mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % eine 2 und mit einer Wahrscheinlichkeit von 80 % eine 3. Es wird zunächst eine Zufallszahl generiert, dann eine Münze geworfen und dann eine weitere Zufallszahl generiert. Zeigt die Münze *Kopf*, wird die erste Zufallszahl von der zweiten subtrahiert, zeigt sie *Zahl*, werden die Zahlen addiert. Die Zufallsvariable X gebe das Ergebnis dieser „zufälligen Rechnung“ an. Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

18.2 Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung

Merke

Der **Mittelwert** der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariable X wird **Erwartungswert** $E(X)$ genannt. Nimmt X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an, so gilt:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n).$$

Tipp:
- $E(X)$ muss kein Wert sein, den X auch tatsächlich annimmt.
- Ein Spiel ist fair, wenn $E(X)$ dem Einsatz entspricht.

Tipp: Ist X binomialverteilt mit den Parametern n und p, so gilt $E(X) = n \cdot p$.

Beispiel: Bei einem Gewinnspiel kann man für einen Einsatz von 1 € von einem Zufallsgenerator Zufallszahlen von 1 bis 100 generieren lassen. Bei der 55 erhält man 50 € Gewinn, bei 11, 22 und 33 nur 5 € , bei 44, 66, 77, 88 jeweils 3 € und bei 99, 1 und 100 je 1 €. Ansonsten verliert man seinen Einsatz. Es soll geprüft werden, ob sich eine Teilnahme an dem Spiel lohnt. Man berechnet dazu den Erwartungswert wie folgt:

$$E(X) = 50 \cdot \frac{1}{100} + 5 \cdot \frac{3}{100} + 3 \cdot \frac{4}{100} + 1 \cdot \frac{3}{100} = 0{,}8.$$

Also kann man im Schnitt einen Gewinn von 80 Cent erwarten. Dem steht ein Einsatz von einem Euro gegenüber. Das Spiel ist also nicht fair. Auf lange Sicht verliert der Teilnehmer.

Stochastik

Merke

Die Streuung einer Zufallsvariable X um ihren Erwartungswert wird **Varianz** $\text{Var}(X)$ genannt. Nimmt X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an und hat X den Erwartungswert E, so gilt:

$$\text{Var}(X) = (E - x_1)^2 \cdot P(X = x_1) + (E - x_2)^2 \cdot P(X = x_2) + \cdots + (E - x_n)^2 \cdot P(X = x_n).$$

Oftmals ist auch nach der **Standardabweichung** $\sigma(X)$ gefragt. Diese ist die Wurzel der Varianz. Es gilt also

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Tipp: Ist X binomialverteilt mit den Parametern n, p, so gilt

- $E(X) = n \cdot p$
- $\text{Var}(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$

Beispiel: Betrachtet man nochmal obiges Gewinnspiel mit Erwartungswert $E = 0{,}8$, so folgt:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= (0{,}8 - 0)^2 \cdot \frac{89}{100} + (0{,}8 - 50)^2 \cdot \frac{1}{100} + (0{,}8 - 5)^2 \cdot \frac{3}{100} \\ &\quad + (0{,}8 - 3)^2 \cdot \frac{4}{100} + (0{,}8 - 1)^2 \cdot \frac{3}{100} \\ &= 25{,}5.\end{aligned}$$

Zieht man die Wurzel, erhält man die Standardabweichung $\sigma(X) = 5{,}04975$.

Aufgabe 225 Abi★

Berechne den Erwartungswert $E(X)$. Dabei bezeichnet X die Augenzahl beim …

(a) … Würfeln mit einem Würfel.

(b) … Würfeln mit zwei Würfeln.

Aufgabe 226 Abi★★

Die Firma Supersicherundbillig möchte eine Haftpflichtversicherung BeCareful mit einem monatlichen Beitrag von 4,49 Euro anbieten. Der Vorstand verfügt über folgende Tabelle jährlicher Versicherungsfälle einer Person:

Höhe Versicherungsfall in Euro	50	100	1.000	10.000
Wahrscheinlichkeit in %	20	5	2	0,2

Zeige, dass diese Versicherung zu billig ist.

Aufgabe 227 Abi★★–★★★

Die Pfarrgemeinde hat für ihr Gemeindefest ein Glücksrad bestellt. Es wird erwartet, dass 1000 Personen am Glücksspiel teilnehmen.

(a) Das gelieferte Glücksrad besitzt 9 gleichgroße, durchnummerierte Felder, der Gewinn soll sich an der Nummer der Felder orientieren, d. h. für Feld 1 gibt es einen, für Feld 2 zwei Euro, usw. Bei der letzten Pfarrgemeinderatssitzung kam vom Kassenwart der Einwand, dass der Einsatz mindestens so hoch sein muss, dass kein Verlust zu erwarten ist. Wie hoch muss der Einsatz sein?

(b) Die Nachbargemeinde hat den großen Erfolg des Glücksrades mitbekommen und möchte die Idee für ihr Gemeindefest kopieren, beschließt allerdings, den Einsatz um 1 Euro zu verringern. Auch diese Gemeinde möchte keinen Verlust mit dem Spiel machen. Wie viele gleichgroße Felder muss das Glücksrad haben, das diese Gemeinde bestellen muss?

Aufgabe 228

Auf einem Jahrmarkt wird folgendes Spiel angeboten: Der Spieleinsatz beträgt drei Euro. Durch Drehen an einem kreisförmigen Glücksrad wird der Gewinn ermittelt. Je nachdem, an welcher Stelle das Rad anhält, wird ein bestimmter Betrag ausgezahlt. Es wird nur genau einmal gedreht. Die möglichen Gewinnbeträge sind auf Kreissektoren aufgeteilt, die jeweils unterschiedlich groß sind.
Der Kreissektor mit der Niete, also keiner Auszahlung, nimmt genau $\frac{3}{8}$ der gesamten Kreisfläche ein. Die Sektoren mit einer Auszahlung von 10€, 5€ und 2€ haben jeweils einen Mittelpunktswinkel von 45°. Die restliche Fläche nimmt der Kreissektor mit einer Auszahlung von einem Euro ein.
Die Zufallsvariable X bezeichne den Gewinn in Euro.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.

(b) Bestimme den Erwartungswert von X. Ist das Glücksspiel fair?

(c) Wie verändert sich der Erwartungswert qualitativ bei zweimaligem Drehen und
  - ➤ einem einmaligem Einsatz von 3€?
  - ➤ jeweils einem Einsatz von 3€?

  Tipp: Hier ist keine weitere Rechnung notwendig.

(d) Berechne die Varianz und die Standardabweichung von X.

Der Betreiber möchte das Spiel folgendermaßen verändern: Anstatt 10€ Auszahlung sollen bei gleich großen Kreissektoren nun 58€ erzielt werden können. Allerdings wird bei einer Niete eine Zahlung des Spielers an den Betreiber von 16€ fällig. Die Zufallsvariable Y bezeichne den Gewinn in Euro dieser neuen Spielvariante.

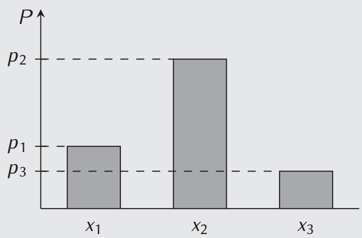
(e) Zeige, dass sich dadurch der Erwartungswert nicht verändert.

(f) Begründe ohne weitere Rechnung, inwiefern sich die Varianz verändert hat. Interpretiere diese Veränderung im Sachzusammenhang!

18.3 Histogramme

Merke

Ein **Histogramm** ist ein Hilfsmittel, um Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu veranschaulichen. Es handelt sich dabei um ein Säulendiagramm: Jedem auf der x-Achse eines Koordinatensystems aufgetragenen Wert der Zufallsvariable wird eine Säule in y-Richtung zugeschrieben. Die Höhe der Säule ist die Wahrscheinlichkeit, mit der dieser Wert angenommen wird.



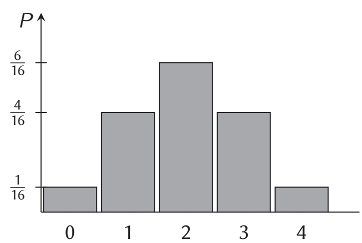
Tipp:

- Ein Histogramm kann auch für Häufigkeitsverteilungen verwendet werden. Dann werden auf der senkrechten Achse die relativen Häufigkeiten abgetragen.
- Ist das Histogramm symmetrisch um einen Wert, so ist dieser Wert der Erwartungswert.

Beispiel: Ein Histogramm soll die Verteilung für die Anzahl an *Kopf* für den gleichzeitigen Wurf von vier Münzen beschreiben.

x_n	0	1	2	3	4
$P(x = x_n)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

Damit ergibt sich folgendes Histogramm:

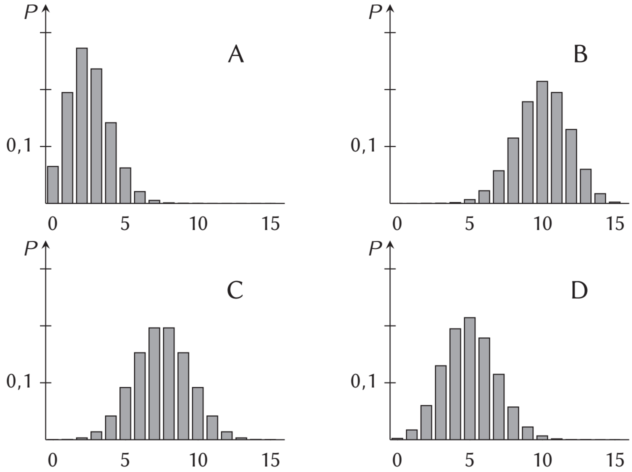


Aufgabe 229 Abi★

Ein Würfel wird sieben Mal geworfen. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der gewürfelten Sechsen. Zeichne ein Histogramm von X.

Aufgabe 230 – Abi★★

Die folgenden Histogramme *A*, *B*, *C* und *D* zeigen die Häufigkeitsverteilung von vier Binomialverteilungen mit jeweils $n = 15$ und verschiedenen Trefferwahrscheinlichkeiten.



(a) Ordne die Histogramme nach aufsteigender Trefferwahrscheinlichkeit.

(b) Eines der obigen Histogramme beschreibt die Anzahl von *Kopf* bei fünfzehn Würfen einer Münze. Welches?

(c) Eines der obigen Histogramme beschreibt die Anzahl der gewürfelten Sechsen bei fünfzehn Mal würfeln. Welches?

Aufgabe 231 – Abi★★

Peter hat sich ein Spiel ausgedacht, um der Langeweile in den Pausen Herr zu werden. Es wird ein Würfel und eine Münze geworfen. Zeigt die Münze Zahl, so wird der Wert des Würfels verdoppelt, zeigt sie Kopf, so wird von der Augenzahl Eins abgezogen. Die Zufallsvariable X bezeichne das Ergebnis dieser Rechnung.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X und zeichne das Histogramm dazu.

(b) Schnell hat sich eine Gruppe um Peter geschart und er wittert das Geschäft. Frei heraus sagt er:

„Der Einsatz beträgt nur 3 Euro! Erzielt ihr eine größere Zahl als 6, bekommt ihr 5 Euro, ansonsten nichts!“

Macht Peter damit langfristig Gewinn?

19 Binomialverteilung

19.1 Bernoulli–Ketten

Merke

Eine Folge von Zufallsexperimenten, die jeweils nur zwei Ausgänge (Treffer/Niete) haben, und deren Trefferwahrscheinlichkeit immer gleich ist, nennt man **Bernoulli-Kette**. Die Verteilung der Anzahl der Treffer in solch einer Kette nennt man **Binomialverteilung**. Ist die Trefferwahrscheinlichkeit p und wird das Experiment n mal durchgeführt, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau k Treffer erzielt werden gleich:

$$P(\text{genau } k \text{ Treffer}) = B(n; p; k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}.$$

Tipp: Das Modell der Binomialverteilung ist immer dann geeignet, wenn n Versuche durchgeführt werden, die

- genau zwei verschiedene Ausgänge (Treffer/Niete) haben,
- voneinander unabhängig sind.

Beispiel: Ein Würfel wird 10 mal gewürfelt. Man betrachtet die Ereignisse

E_1: Es wird genau zweimal eine 6 gewürfelt.

E_2: Es wird mindestens zweimal eine 6 gewürfelt.

Es sollen die Wahrscheinlichkeiten von E_1 und E_2 ermittelt werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(E_1) &= \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \\ &= 45 \cdot \frac{1}{36} \cdot \frac{390625}{1679616} \\ &= 0{,}291. \end{aligned}$$

Um das Ereignis E_2 direkt mit der Binomialverteilung zu berechnen, müsste man die Wahrscheinlichkeiten von $k = 2$ bis $k = 10$ aufaddieren. Da dies sehr umständlich ist, kann man mit dem Gegenereignis arbeiten:

$$\begin{aligned} P(E_2) &= 1 - P(\text{höchstens eine 6}) \\ &= 1 - (P(\text{keine 6}) + P(\text{genau eine 6})) \\ &= 1 - \left(\binom{10}{0} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^9\right) \\ &= 1 - (0{,}1615 + 0{,}3231) \\ &= 0{,}5155. \end{aligned}$$

Aufgabe 232 –

Berechne die Wahrscheinlichkeiten für die folgenden Angaben der jeweiligen Binomialverteilung:

(a) $n = 19; \quad p = 0{,}6; \quad k = 9$

(b) $n = 10; \quad p = 0{,}3; \quad k \leq 6$

(c) $n = 22; \quad p = 0{,}7; \quad 6 \leq k \leq 9.$

Aufgabe 233 – Abi★

Ein Glücksrad besteht aus zwei Segmenten; einem grauen und einem goldenen. Das goldene Segment deckt einen Winkelbereich von 72° ab. Bei einem Glücksspiel wird dieses Rad fünf mal gedreht. Die Wahrscheinlichkeit für einen Trostpreis ist

$$5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2^4.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Hauptgewinn beträgt

$$0{,}2^5.$$

Wie lauten die Spielregeln des Glücksspiels?

Aufgabe 234 Abi★

Eine faire Münze wird 15 Mal geworfen.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit exakt fünf mal *Zahl* zu werfen?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit höchstens zwei mal *Kopf* zu werfen?

Aufgabe 235 Abi★–★★

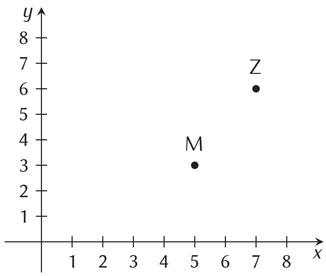
Kevin ist am Boden zerstört: Heute wird in Physik ein Test geschrieben und er hat überhaupt nicht gelernt. Der Test besteht aus 20 Multiple-Choice-Aufgaben. Jede Aufgabe bietet vier Antwortmöglichkeiten, von denen exakt eine richtig ist. Da Kevin überhaupt keine Ahnung hat beschließt er, blind zu raten.

(a) Um den Test zu bestehen, muss mindestens die Hälfte aller Aufgaben richtig beantwortet werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kevin den Test besteht?

(b) Alle, die weniger als fünf Fragen richtig beantwortet haben, sollen zu einer Wiederholungsstunde kommen. Alle, die keine Frage richtig beantworten, müssen nachsitzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss Kevin zur Wiederholungsstunde? Mit welcher Wahrscheinlichkeit muss er nachsitzen?

Aufgabe 236 – 🖩 Abi★★-★★★

Eine kleine Werkstatthalle soll durch das untere Koordinatensystem vereinfacht werden. Ein Roboter beginnt im Koordinatenursprung sich auf den Weg zu seiner Ladestation zu machen. Einmal pro Minute macht der Roboter einen Schritt. Dabei bewegt er sich jeweils einen Meter weiter und zwar entweder nach rechts (d.h. in x-Richtung) oder nach oben (d.h. in y-Richtung). Der Roboter entscheidet bei jedem Schritt neu in welche Richtung er sich bewegt. Die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts beträgt dabei $p = 0{,}65$.



(1 LE enspricht 1 m)

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt der Roboter zur Ladestation, die sich bei $Z(\,7 \mid 6\,)$ befindet?

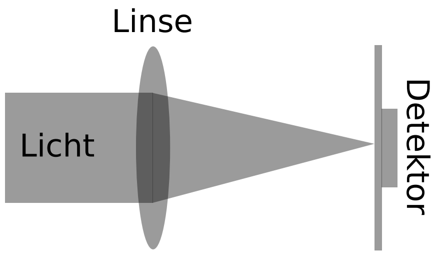
(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit gelangt der Roboter dabei über die Messstation $M(\,5 \mid 3\,)$ zur Ladestation Z?

Aufgabe 237 – 🖩 Abi★★-★★★

Bad Max öffnet den Kofferraum des großen grauen Lieferwagens und wendet sich Really Bad John zu: „Da hast du's! Einen ganzen Lieferwagen voller Päckchen mit feinstem weißen Zeug. Jetzt sind wir quitt". Really Bad John knurrt: „Du weißt, Bad Max, wenn mehr als zehn Prozent der Beutel kein feines weißes Zeug beinhalten, dann mach' ich dich platt. Darum machen wir jetzt Folgendes: Ich überprüfe fünf Päckchen. Und wenn darunter ein oder mehrere Päckchen kein feines weißes Zeug enthalten, dann…" Während Really Bad John sich symbolisch mit einem Finger über die Kehle streicht mischt sich Really Bad Johns Freundin Evil Emma ein: „Ich habe eine bessere Idee. Du überprüfst zwanzig Beutel. Wenn darunter drei oder mehr kein feines weißes Zeug enthalten, dann …" Und auch Evil Emma streicht mit ihrem Zeigefinger über ihre Kehle. Bad Max schwitzt wie ein Hund, denn er hat tatsächlich zehn Prozent der Päckchen nicht mit feinem weißen Zeug befüllt. Bad Max überlegt. Bad Max rechnet. Soll er sich für Really Bad Johns oder für Evil Emmas Vorschlag entscheiden?

Aufgabe 238 – 🖩 Abi★★★

Seit dem Jahre 2000 sind Kamerasysteme in kommerziellen Handys erhältlich. Eine Handykamera besteht in der Regel aus einer gepressten Glaslinse sowie einem photosensitiven digitalen Detektor. Im Photodetektor werden Photonen (Lichtteilchen) mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit in Elektronen (Strom) umgewandelt. Die Stärke des erzeugten Stroms kann als Bild decodiert werden.



Ein Gütemerkmal eines Detektors ist die Quanteneffizienz p, die beschreibt mit welcher Wahrscheinlichkeit ein auf einem Pixel einfallendes Photon absorbiert und in ein Elektron umgewandelt wird. Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption aufeinanderfolgender Photonen ist unabhängig.

(a) Welche Teile der Beschreibung im Text erlauben es, die Detektion von Photonen als Binomialprozess zu modelieren?

(b) Nimm an, dass die Wahrscheinlichkeit für die Messung von k Elektronen bei n einfallenden Photonen beschrieben wird durch

$$B\,(n;\ p;\ k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k},$$

wobei typische Quanteneffizienzen bei 85 % liegen und 200 Photonen auf den Detektor einfallen. Wie groß ist die Wahrsscheinlichkeit, dass 170 Elektronen gemessen werden? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 165 und maximal 170 Photonen gemessen werden?

[Hinweis: $B\,(n;\ p;\ k) = B\,(n;\ 1 - p;\ n - k)$]

(c) Bei kurzer Belichtung ist die Bildqualität vermindert. Das Signal-Rausch-Verhältnis (SNR) eines Detektors ist definiert als das Verhältnis von Erwartungswert zu Standardabweichung (SNR $= \mu/\sigma$). Leite eine allgemeine Formel für das SNR von binomialverteilen Detektionsprozesse her. Wie groß ist das SNR mit den Werten aus Aufgabenteil (b)?

(d) Wie viele Photonen müssen mindestens einfallen, damit der Detektionsprozess näherungsweise durch eine Gaußverteilung beschrieben werden kann?

19.2 Kumulierte Binomialverteilung

Definition

Mit Hilfe der Formel für die Trefferwahrscheinlichkeit in einer Bernoulli-Kette kann man es sich ersparen, große Baumdiagramme zu zeichnen. Oft muss man allerdings trotzdem noch sehr viele einzelne Trefferwahrscheinlichkeiten ausrechnen und addieren, beispielsweise wenn man sich für eine Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 24)$ interessiert.
Für solche Fälle wird die **kumulierte Binomialverteilung** $F(n; p; k)$ wie folgt definiert:

$$F(n; p; k) = P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} B(n; p; i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1 - p)^{n-i}$$

Beispiel: Ein Würfel wird fünfzigmal geworfen. Wie wahrscheinlich ist es, dass höchstens zehnmal eine 4 geworfen wird?

Gegeben:

- X: Anzahl der geworfenen Vieren
- $n = 50$
- $p = \frac{1}{6}$

Gesucht:

- $P(X \leq 10)$

Anstatt nun mühsam

$$P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 10)$$

auszurechnen, kann man das gesuchte Ergebnis einfach mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung mit $n = 50$ bestimmen:

$$P(X \leq 10) = F\left(50; \frac{1}{6}; 10\right) = 0{,}7986.$$

Rechenregeln zur kumulierten Binomialverteilung

Die kumulierte Binomialverteilung liefert nur Antworten auf Fragestellungen wie:

„Wie groß ist, die Wahrscheinlichkeit, dass man **höchstens** zehn Treffer erzielt?“

also wenn nach $P(X \leq k)$ gefragt ist.
Man benötigt aber auch ein Verfahren für die Fragestellungen **weniger als**, also $P(X < k)$, **mehr als**, also $P(X > k)$ und **mindestens**, also $P(X \geq k)$.

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten über alle Trefferanzahlen k ist gleich eins, schließlich erhält man bei n Versuchen stets irgendeine Anzahl von Treffern. Damit ergeben sich folgende einfache Regeln:

- $P(X < k) = P(X \leq k - 1) = F(n; p; k - 1)$
- $P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 1 - F(n; p; k)$
- $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1) = 1 - F(n; p; k - 1)$

Mit Hilfe dieser Regeln kann man sich dann auch Fragestellungen wie

„Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für mehr als vier und höchstens elf Treffer?“

erschließen.

Beispiel: Eine faire Münze wird hundertmal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass

- mehr als 48-mal Kopf erscheint?
- mindestens 54-mal Kopf erscheint?
- mehr als 43-mal und weniger als 57-mal Kopf erscheint?

Alle diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich mit den gerade gelernten Regeln einfach bestimmen:

- $P(X > 48) = 1 - P(X \leq 47) = 1 - F(100; 0{,}5; 47) = 1 - 0{,}3086 = 0{,}6914$
- $P(X \geq 54) = 1 - P(X \leq 53) = 1 - F(100; 0{,}5; 53) = 1 - 0{,}7579 = 0{,}2421$
- Es gilt:

$$\begin{aligned} P(43 < X < 57) &= P(X \leq 56) - P(X \leq 43) \\ &= F(100; 0{,}5; 56) - F(100; 0{,}5; 43) \\ &= 0{,}9033 - 0{,}0967 \\ &= 0{,}8066 \end{aligned}$$

Aufgabe 239

Ein Bogenschütze trifft das Zentrum der Zielscheibe mit einer Wahrscheinlichkeit von $p = 0{,}3$. Während einer Trainingseinheit schießt er fünfzig Pfeile auf die Zielscheibe.

(a) Wie wahrscheinlich ist es, dass er genau 15-mal trifft?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass er höchstens 15-mal trifft?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, dass er mindestens 13-mal trifft?

(d) Wie wahrscheinlich ist es, dass er mehr als 16-mal und höchstens 21-mal trifft?

(e) Wie wahrscheinlich ist es, dass er beim 14. und beim 17. Mal trifft?

(f) Gib ein Argument an, welches gegen eine Verwendung der Binomialverteilung bei dieser Bogenschützenaufgabe spricht.

Aufgabe 240

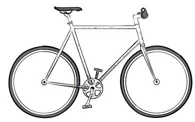
Zwanzig Prozent der Menschen in Deutschland, die älter als vierzig Jahre sind, können sich etwas unter dem Begriff „Hashtag“ vorstellen. Man wählt zufällig eine Gruppe von 20 dieser Menschen aus.

(a) Warum kann man bei dieser Aufgabenstellung nur näherungsweise von einer Binomialverteilung ausgehen?

(b) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich mindestens vier dieser Menschen etwas unter dem Begriff vorstellen können?

(c) Wie wahrscheinlich ist es, dass sich mindestens neun und höchstens siebzehn dieser Menschen nichts unter dem Begriff vorstellen können?

Aufgabe 241 – 🖩 Abi★★



In der Stadt Fietshausen wird bekanntlich viel Fahrrad gefahren. Laut einer Statistik eines deutschlandweiten Fahrradclubs sind ein Drittel aller Fahrräder in Deutschland codiert, d. h. mit einem Code versehen, welcher der Polizei Auskunft über den Besitzer gibt, um es bei Diebstahl wiederfinden zu können.
Der Fahrradverband Fietshausen möchte in Zusammenarbeit mit der örtlichen Polizei mit einer Aktion auf die Vorteile einer Codierung aufmerksam machen und führt an einer Hauptstraße eine 3-stündige Kontrolle durch. Hierbei werden 100 Fahrräder gesichtet.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass genau 33 der gesichteten Fahrräder codiert sind. Bestimme zudem die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 50 Fahrräder codiert sind.

(b) Bei der Kontrolle besteht die Möglichkeit, das Fahrrad direkt im Anschluss codieren zu lassen. Bei einer ähnlichen Aktion in der ebenso fahrradbegeisterten Nachbarstadt Velokirchen wurde die Erfahrung gemacht, dass 50 % der kontrollierten Fahrradfahrer, die keine Codierung haben, dieses Angebot in Anspruch nehmen. Mit wie vielen Neucodierung kann die Polizei im Schnitt bei solch einer Kontrolle rechnen?

19.3 3M-Aufgaben

3M-Aufgabe

Beispiel: Bei einem Glücksspiel gewinnt man mit einer Chance von 5 %. Wie oft muss man *mindestens* spielen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von *mindestens* 99 % *mindestens* einmal zu gewinnen?

Schritt 1: Schreibe die Aufgabe als Formel auf:

$$P_n(\text{mindestens 1 Treffer}) \geq 0{,}99.$$

Schritt 2: Gehe zum Gegenereignis über. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen um:

$$P_n(\text{kein Treffer}) \leq 0{,}01.$$

Schritt 3: Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P_n(\text{kein Treffer}) = (1 - 0{,}05)^n.$$

Schritt 4: Setze die Gleichung und die Ungleichung zusammen. Es soll also gelten:

$$(1 - 0{,}05)^n \leq 0{,}01.$$

Löse diese Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach n auf. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen beim Teilen durch $\ln 0{,}95$ erneut um:

$$\begin{aligned} 0{,}95^n \leq 0{,}01 \quad &\Longrightarrow \quad \ln(0{,}95^n) \leq \ln 0{,}01 \\ &\Longrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}95 \leq \ln 0{,}01 \\ &\overset{\ln 0{,}95<0}{\Longrightarrow} \quad n \geq \frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}95} \approx 90. \end{aligned}$$

Man muss mindestens 90 mal spielen.

Aufgabe 242 – ▦ Abi★★

In einer Stadt haben erfahrungsgemäß 94 % aller Fahrgäste der S-Bahn einen gültigen Fahrausweis.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer S-Bahn mit 70 Fahrgästen
  - genau drei
  - mindestens drei

  Schwarzfahrer befinden?

(b) Wie viele Fahrgäste muss der Kontrolleur mindestens überprüfen, damit er mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90 % auf mindestens einen Schwarzfahrer trifft?

Aufgabe 243 – ▦ Abi★★

Ein Mathematik-Wettbewerb verläuft in drei Runden. Man wird zur nächsten Runde nur zugelassen, wenn man die vorherige Runde bestanden hat. Einem Mathe-Überflieger gelingt eine erfolgreiche Teilnahme an der 2. Runde in 85 % aller Versuche. An wie vielen Mathewettbewerben muss dieser Schüler mindestens teilnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens einmal in der 2. Runde ausscheidet mindestens 95 % beträgt?

Aufgabe 244 – nur eA ▦ Abi★★★

Bei dem Spiel „Mensch ärgere Dich nicht" muss man eine 6 würfeln um anzufangen. Man hat dabei stets drei Versuche (3-er Versuch). Wie viele 3-er Versuche muss man mindestens durchführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 98 % mindestens einmal eine 6 gewürfelt zu haben?

Aufgabe 245 – ▦ Abi★★

Ein Orchester macht während einer Sinfonieaufführung pro Minute zu 0,5 % einen für das Publikum hörbaren Fehler. In der nächsten Spielsaison soll die neunte Sinfonie von Dvořák mit einer Spielzeit von 42 Minuten aufgeführt werden.

(a) Wie häufig muss das Orchester das Werk mindestens aufführen, sodass zu mehr als 95 % nicht alle Aufführungen fehlerfrei sind?

(b) Da der Dirigent vor Beginn der Spielzeit schwer krank wird, muss dieser ersetzt werden. Erfahrungsgemäß erhöht das die Fehlerquote des Orchesters. Begründe ohne weitere Rechnung, ob die Anzahl der Aufführungen aus Teilaufgabe (a) steigen, fallen oder identisch sein muss, sodass zu mehr als mehr als 95 % nicht alle Aufführungen fehlerfrei sind.

Das Orchester wird die Sinfonie in dieser Saison zehn mal aufführen.

(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als achtzig Prozent der Aufführungen fehlerfrei sind.

20 Normalverteilung – nur eA

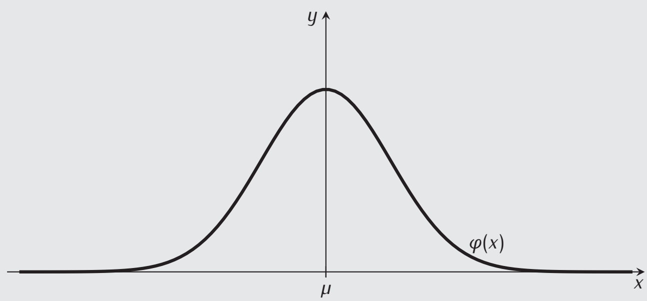
20.1 Grundlagen – nur eA

Merke – nur eA

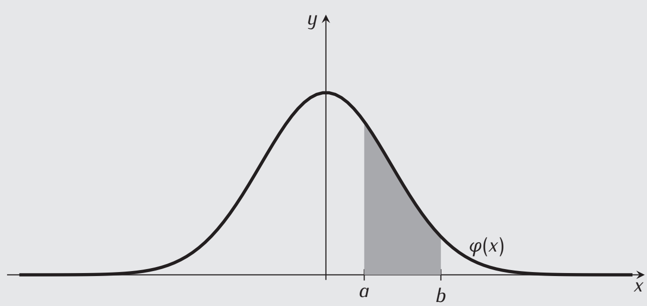
Viele in der Natur auftretende Zufallsgrößen (Messfehler, Körpergröße, IQ) sind **normalverteilt**. Die Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ ist gegeben durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Alle Fragestellungen lassen sich stets auf die **Standardnormalverteilung** (d. h. $\mu = 0$ und $\sigma = 1$) zurückführen. Die Dichtefunktion bildet eine Glockenkurve deren Maximum beim Erwartungswert μ liegt und deren Breite mit der Standardabweichung wächst.



Die Wahrscheinlichkeit $P(a \leq X \leq b)$ ist gerade die Fläche unter $\varphi(x)$ zwischen a und b:



Da sich $\varphi(x)$ nicht einfach aufleiten lässt, arbeitet man oft mit der Funktion $\Phi(x)$. Diese gibt die Fläche unter der Glockenkurve der Standardnormalverteilung zwischen $-\infty$ und x an. Es gilt:

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = P(X \leq x).$$

Tipp: Die Φ-Funktion ist auf einem GTR/CAS oft unter dem Namen *NormCDF* zu finden.

Beispiel: Sei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Es soll die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, dass X zwischen 1 und 2 liegt. Dann gilt:

$$P(1 \leq X \leq 2) = P(X \leq 2) - P(X \leq 1) = \Phi(2) - \Phi(1) = 0{,}977 - 0{,}841 = 0{,}136.$$

Zurückführung auf die Standardnormalverteilung – nur eA

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Dann gilt:

$$P(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

Beispiel: Sei X normalverteilt mit $\mu = 15$ und $\sigma = 5$. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass X zwischen 20 und 25 liegt. Es folgt

$$\begin{aligned} P(21 \leq X \leq 25) &= P(X \leq 25) - P(X \leq 20) \\ &= \Phi\left(\frac{25 - 15}{5}\right) - \Phi\left(\frac{20 - 15}{5}\right) \\ &= \Phi(2) - \Phi(1) \\ &= 0{,}977 - 0{,}841 \\ &= 0{,}136. \end{aligned}$$

Aufgabe 246 – nur eA Abi★-★★

Beschreibe X die Körpergröße eines zufällig ausgewählten 18-jährigen Mannes. Aufgrund von statistischen Erhebungen ist bekannt, dass X in etwa normalverteilt mit $\mu = 180$ cm und $\sigma = 7{,}5$ cm ist.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein zufällig ausgewählter Mann größer als 180 cm? Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist er kleiner als 170 cm?

(b) Wie viel Prozent aller 18-jährigen sind größer als 2 m groß?

(c) Wie groß muss ein 18-jähriger sein, damit nur 5 % aller Männer kleiner als er sind.

Aufgabe 247 – nur eA Abi★★-★★★

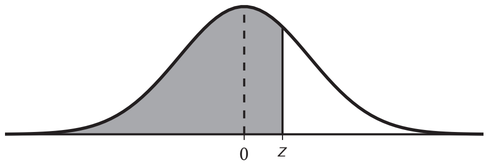
Ein Mathelehrer prüft die Schnellrechenfähigkeit seiner Schüler indem er eine langes Aufgabenblatt mit vielen (aber einfachen) Rechenaufgaben austeilt. Dabei wird die Zeit gemessen, die ein Schüler zur Bearbeitung benötigt. Die Bearbeitungszeit X kann als normalverteilt angenommen werden. Im Durchschnitt benötigt ein Schüler 60 Minuten zur vollständigen Bearbeitung. Ein Zehntel aller Schüler benötigt mehr als 90 Minuten.

(a) Berechne die Standardabweichung der Zufallsvariable X.

(b) Der Lehrer möchte gerne die Noten 1, 2, 3 und 4 verteilen. Dies soll so geschehen, dass je ein Viertel aller Schüler die gleiche Note haben. Für welche Bearbeitungszeit gibt es welche Note?

20.2 Tabelle: Normalverteilung – nur eA

Die Zahl in der Tabelle
ist der Wert $P(Z \leq z)$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5792	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9762	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999

20.3 Approximation der Binomialverteilung durch die Normalverteilung – nur eA

Laplace-Bedingung – nur eA

Eine Binomialverteilung mit den Parametern n und p lässt sich durch eine Normalverteilung annähern, falls gilt:

$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3.$$

Approximation der Binomialverteilung: Moivre-Laplace – nur eA

Gegeben: Binomialverteilung mit $p = 0{,}1$ und $n = 10.000$.
Fragestellung: Wie groß ist die ungefähre Wahrscheinlichkeit höchstens 950 Treffer zu erzielen?

Schritt 1: Laplace-Bedingung prüfen:

$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{10.000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 30 > 3 \checkmark.$$

Schritt 2: Bestimme Erwartungswert μ und Standardabweichung σ:

$$\mu = np = 10.000 \cdot 0{,}1 = 1000$$
$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = 30.$$

Schritt 3: Benutze die Formel

$$P(X \leq k) = \Phi\left(\frac{k - \mu + 0{,}5}{\sigma}\right).$$

Schritt 4: Setze die Werte in die Formel ein:

$$P(X \leq 950) = \Phi\left(\frac{950 - 1000 + 0{,}5}{30}\right) = \Phi(-1{,}65) \approx 0{,}05.$$

Tipp: Die Werte der Φ-Funktion findest Du in Tabellen. Alternativ kannst Du auch die Funktion `normCDF` des Taschenrechners verwenden.

Aufgabe 248 – nur eA 🖩 Abi★★

Es bezeichne X die Anzahl der Sechsen in 1 000 000 Würfen eines fairen Würfels.

(a) Überprüfe die Laplace-Bedingung.

(b) Berechne $P(X \leq 166\,000)$.

(c) Berechne $P(X \geq 167\,000)$.

(d) Berechne $P(166\,000 < X < 167\,000)$.

Stochastik

21 Konfidenzintervalle

21.1 Konfidenzintervall verstehen

Konfidenzintervall

Für eine normalverteilte oder binomialverteilte Zufallsvariable X mit erfüllter Laplace-Bedingung sei der Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ gegeben. Das Intervall um μ, in dem ein Stichprobenergebnis mit einer Wahrscheinlichkeit von α liegt, heißt **Konfidenzintervall** zum **Konfidenzniveau** α.

Beispiel: Die Schuhgröße von deutschen Frauen ist normalverteilt mit Erwartungswert 39. Ein Hersteller möchte nun für 80 % aller Frauen Schuhe anbieten können. Die angebotenen Schuhgrößen befinden sich dann alle innerhalb des Konfidenzintervalls zum Konfidenzniveau 80 % um die Schuhgröße 39 herum.

Die 68-95,5-99,7-Regel

Ist die Zufallsvariable X normalverteilt oder unter Erfüllung der Laplace-Bedingung binomialverteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, so gilt die 68 - 95 - 99,7-Regel, das heißt

$[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$ ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 68 %

$[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]$ ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95,5 %

$[\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]$ ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 99,7 %

Tipp:
- Konfidenzintervalle zu anderen Konfidenzniveaus müssen berechnet werden.

Beispiel: Felix besitzt eine Chocolaterie und verkauft pro Tag durchschnittlich 800 Pralinen. Die Standardabweichung beträgt 70 Stück. Das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95,5 % entspricht $[800 - 2 \cdot 70; 800 + 2 \cdot 70] = [660; 940]$. Das heißt, die Anzahl der verkauften Pralinen an einem Tag liegt zu 95,5 % zwischen 660 Pralinen und 940 Pralinen.

Aufgabe 249 Abi★

Die Montagezeit eines Bauteils in Minuten ist binomialverteilt mit erfüllter Laplace-Beidngung mit Erwartungswert $\mu = 60$ und Standardabweichung $\sigma = 5$. Bestimme in welchem Zeitraum um 60 Minuten 95,5 % aller Bauteile montiert werden.

Merke

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ. Dann ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau α gegeben durch

$$[\mu - z\sigma; \mu + z\sigma].$$

Dabei wird z gerade so gewählt, dass gilt:

$$\Phi(z) = \frac{1+\alpha}{2}.$$

Tipp: In der konkreten Rechnung muss also die Tabelle „rückwärts“ gelesen bzw. der passende Wert für die Φ-Funktion gefunden werden.

Rezept — Konfidenzintervall bestimmen

Gegeben ist eine normalverteilte Zufallsvariable X mit $\mu = 15$, $\sigma = 3$. Gesucht ist das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau $\alpha = 80\,\%$.

Schritt 1: Man berechnet zunächst

$$\frac{1+\alpha}{2} = \frac{1+0{,}8}{2} = 0{,}900.$$

Schritt 2: Dann ermittelt man in der Normalverteilungstabelle den zugehörigen z-Wert. Man liest ab:

$$\Phi(1{,}28) = 0{,}9 \quad \Longrightarrow \quad z \approx 1{,}28.$$

Schritt 3: Das gesuchte Intervall ist dann gegeben durch

$$[15 - 1{,}28 \cdot 3\,;\ 15 + 1{,}28 \cdot 3].$$

Somit liegen 80 % aller Werte der Zufallsvariable X im Intervall $[11{,}16; 18{,}84]$.

Aufgabe 250 Abi★

Der Intelligenzquotient (IQ) deutscher Erwachsener ist normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 100$ und Standardabweichung $\sigma = 15$. Finde das kleinste Intervall um 100, in dem sich die Intelligenzquotienten von 90 % aller deutscher Erwachsenen befinden?

21.2 Häufigkeiten/Wahrscheinlichkeiten schätzen – nur eA

Rezept — Häufigkeit mit Konfidenzintervall schätzen – nur eA

Gegeben ist eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit genau 110 günstigen Ereignissen bei $n = 1000$ Versuchen. Schätze die Trefferwahrscheinlichkeit p von X und gib ein Konfidenzintervall für p zum Niveau $\alpha = 0{,}997$ an.

Schritt 1: Die Häufigkeit h eines günstigen Ereignisses beträgt laut Aufgabenstellung:

$$h = \frac{110}{1000} = 0{,}11.$$

Schritt 2: Nun lässt sich die Standardabweichung von X gemäß folgender Formel bestimmen

$$\sigma_0 = \sqrt{h \cdot (1 - h) \cdot n} = 9{,}89.$$

Wegen $\sigma > 3$ lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung annähern.

Schritt 3: Für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 99,7 % kann die 3σ-Umgebung verwendet werden. Das heißt, die Anzahl der gezählten Ereignisse E_0 liegt in einer 3σ-Umgebung um den Erwartungswert der tatsächlichen Trefferwahrscheinlichkeit. Dieser Erwartungswert ist gegeben durch $E = n \cdot p = 1000p$. Es gilt also:

$$\begin{aligned} & |E - E_0| \leq 3\sigma \\ \iff \quad & (E - E_0)^2 \leq 3^2 \cdot \sigma^2 \\ \iff \quad & (E - E_0)^2 \leq 9 \cdot p \cdot (1 - p) \cdot n \end{aligned}$$

oder für die Wahrscheinlichkeiten:

$$(p \cdot n - h \cdot n)^2 \leq 9 \cdot p \cdot (1 - p) \cdot n \quad \iff \quad (p - h)^2 \leq 9\frac{p(1 - p)}{n}.$$

Beziehungsweise:

$$(p - 0{,}11)^2 \leq 9 \cdot \frac{p(1 - p)}{1000}.$$

Schritt 4: Zum Lösen dieser Gleichung können mit dem GTR die Schnittpunkte der beiden Funktionen:

$$y_1 = (x - 0{,}11)^2$$
$$y_2 = 9 \cdot \frac{x(1 - x)}{1000}$$

berechnet werden. Die beiden Lösungen sind gegeben durch $x_1 \approx 0{,}0837$ und $x_2 \approx 0{,}1432$.

Die Trefferwahrscheinlichkeit liegt mit 99,7 %-iger Sicherheit zwischen 0,08 und 0,14.

Aufgabe 251 – nur eA Abi★★★

Punker Kalle möchte gerne wissen, wie viele Mercedes es in Hannover-Nordstadt gibt. Daher läuft er montags quer durch Nordstadt und bricht bei 100 Mercedes den Stern ab. Am Samstag läuft er nochmal quer durch Nordstadt und zählt die Mercedes, denen der Stern fehlt. Von 120 Mercedes, die er zählt, sind 17 ohne Stern. Kalle möchte einen Bereich für die Anzahl der Mercedes in Hannover-Nordstadt angeben, der mit einer 68 %-igen Sicherheit die wahre Anzahl widerspiegelt. Er geht davon aus, dass niemand außer ihm in der Nordstadt Mercedes-Sterne abbricht. Welchen Bereich wird er angeben?

22 Umfangreiche Aufgaben

22.1 Hilfsmittelfreie Aufgaben

Aufgabe 252

In einer Urne liegen drei rote, drei blaue und drei gelbe Kugeln. Es wird zehnmal mit Zurücklegen eine Kugel gezogen.
Die Zufallsvariable X gibt an, wie viele Kugeln gezogen werden, bis die erste blaue Kugel gezogen wird. Die Zufallsvariable Y gibt an, wie viele rote Kugeln gezogen werden.

(a) Untersuche jeweils, ob X beziehungsweise Y binomialverteilt sind.

(b) Gib einen Term zur Berechnung von $P(X \leq 9)$ an.

22.2 Aufgaben mit Hilfsmitteln

Aufgabe 253

Im oberen Verlauf der Donau sind im Sommerhalbjahr zahlreiche Weißstörche anzutreffen. Die Störche verbringen das Winterhalbjahr in Afrika. Die sogenannten „Weststörche“ nehmen einen Zugweg über die Iberische Halbinsel und die Meerenge von Gibraltar nach Afrika. Die sogenannten „Oststörche“ wählen einen Zugweg über den Bosporus, das Jordantal und die Sinaihalbinsel nach Afrika. Nur sehr wenige Störche wagen einen direkten Weg über Italien, einer langen Strecken über das offene Mittelmeer nach Tunesien. Störche, die diesen Zugweg nehmen, werden als „Mittelstörche“ bezeichnet. Sehr wenige Störche, die sogenannten „Winterstörche“ verzichten jedoch auf eine Reise in den Süden und bleiben das ganze Jahr über in ihrem Revier im Gebiet der oberen Donau. Die aktuelle Lehrmeinung geht von folgender Verteilung aus:

Typ	Zugweg	Anteil
Weststorch	Iberische Halbinsel, Gibraltar	54 %
Oststorch	Bospurus, Sinaihalbinsel	41 %
Mittelstorch	Italien, Tunesien	3 %
Winterstorch	-	2 %

Vier weitere Störche werden mit Peilsendern ausgestattet. Diese Störche werden unter den Nummern 201, 202, 203 und 204 geführt. Es wird vorausgesetzt, dass die aktuelle Lehrmeinung weiterhin korrekt ist.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Störche Weststörche sind?

(b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass Nummer 201 und 202 Weststörche und Nummer 203 und 204 Oststörche sind.

Stochastik

(c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den vier Störchen genau zwei Mittelstörche befinden?

(d) Wie viele Störche müssen mindestens beobachtet werden, damit sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens ein Winterstorch unter den beobachteten Störchen befindet?

Anfang März befinden sich schon 40 % der Weststörche in ihrem Sommerquartier. Von den Oststörchen sind zu diesem Zeitpunkt bereits 60 % im Sommerquartier anzutreffen. Bei den Mittelstörchen sind Anfang März die Hälfte der Störche in ihrem Sommerquartier.

(e) Anfang März bekommt ein Wanderer an der oberen Donau einen Storch zu sehen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich hierbei um einen Oststorch handelt?

Aufgabe 254 – nur eA

Die Firma Badeschaum und Co füllt ihre flüssigen Produkte in Flaschen ab. Der Bestseller *Traumschaum*, ein Badezusatz, wird in Verpackungsgrößen zu einem Liter verkauft. Die Menge des eingefüllten Badezusatzes ist normalverteilt mit Mittelwert 1,05 L. Produktionstechnisch bedingt gibt es in der Abfüllanlage eine Standardabweichung von 0,04 L.

(a) Bestimme den Anteil der abgefüllten Flaschen, die weniger als 1 L Füllmenge beinhalten.

(b) Bestimme den Anteil derjenigen Flaschen, welche eine Füllmenge von mindestens 1,1 L aufweisen.

(c) Der Anteil der Flaschen, die weniger als 1 L Füllmenge enthalten, muss auf weniger als 4 % reduziert werden. Bestimme die größtmögliche Standardabweichung σ, sodass diese Vorgabe mit demselben Mittelwert wie oben eingehalten werden kann.

Außerdem stellt Badeschaum und Co Badekugeln her. Diese werden in unterschiedlichen Maschinen produziert. Maschine 1 produziert 45 % der Gesamtproduktion und Maschine 2 die verbleibenden 55 %. Für den Verkauf geeignet sind die Badekugeln von Maschine 1 zu 93 % und die Badekugeln von Maschine 2 zu 89 %. Nicht zum Verkauf geeignet sind Badekugeln, bei denen ein Teil abgebrochen ist. Diese werden im Weiteren als brüchig bezeichnet. Die Qualitätskontrolle entnimmt der laufenden Produktion eine Badekugel, die brüchig ist.

(a) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass diese Badekugel von Maschine 1 produziert wurde.

Trotz sorgfältiger Endkontrolle sind 2 % der Badekugeln, die in den Handel gelangen, brüchig. Die Herstellung einer Badekugel kostet die Firma 2,90 Euro. Verkauft werden diese an den Handel für 6,50 Euro. Falls ein Kunde mit der Badekugel nicht zufrieden ist, kann er diese im Handel reklamieren und erhält den Kaufpreis von 6,50 Euro von Badeschaum und Co zurück. Erfahrungsgemäß werden 35 % der brüchigen Badekugeln reklamiert.

(b) Bestimme, welchen Gewinn die Firma Badeschaum und Co pro an den Handel gelieferte Badekugel erwarten kann.

Bei Markteinführung der Bodylotion von Badeschaum und Co wird diese in einer deutschen Drogeriemarktkette durch einen Mitarbeiter vor Ort mit Flyern beworben. Erfahrungsgemäß interessieren sich 40 % der Kunden dieser Drogeriemarktkette für ein solches Produkt und nehmen einen Flyer mit. Von den interessierten Kunden kaufen 35 % direkt eine Bodylotion. Von allen Drogeriemarktkunden kaufen erfahrungsgemäß 20 % während der Werbeaktion eine Bodylotion.

(c) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 100 Kunden mehr Kunden einen Flyer mitnehmen, als zu erwarten ist.

(d) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, welcher keine Bodylotion gekauft hat, auch keinen Flyer mitgenommen hat.

Lösungen

Lösung 1

(a) Es gilt mit der 1. Binomischen Formel:

$$\begin{aligned}(x+8)^2 &= x^2 + 2\cdot 8\cdot x + 8^2\\ &= x^2 + 16x + 64\end{aligned}$$

(b) Mithilfe der 2. Binomischen Formel gilt:

$$\begin{aligned}(x-16)^2 &= x^2 - 2\cdot x\cdot 16 + 16^2\\ &= x^2 - 32x + 256\end{aligned}$$

(c) Die 3. Binomische Formel liefert:

$$\begin{aligned}(x+10)\cdot(x-10) &= x^2 - 10^2\\ &= x^2 - 100\end{aligned}$$

(d) Die 3. Binomische Formel liefert auch hier:

$$\begin{aligned}(x-2)\cdot(x+2) &= x^2 - 2^2\\ &= x^2 - 4\end{aligned}$$

Lösung 2

(a) Es gilt:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{x^3}{2^3} = \frac{x^3}{8}$$

(b) Es gilt:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^4 = \frac{\sqrt{2}^4}{3^4} = \frac{\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4}{3^4} = \frac{2^2}{3^4} = \frac{4}{81}.$$

(c) Es gilt:

$$\sqrt[3]{x^2} = \left(x^2\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{2}{3}}$$

(d) Es gilt:

$$\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{6}}$$

Lösung 3

(a) Es gilt:

$$e^{2x}\cdot e^{4x} : e^5 = e^{2x+4x-5} = e^{6x-5}.$$

(b) Es gilt:

$$\frac{e^x\cdot e^{3+2x}}{e^{5x-3}} = \frac{e^{x+3+2x}}{e^{5x-3}} = e^{3x+3-(5x-3)} = e^{-2x+6}$$

Lösung 4

(a) Es gilt:

$$\ln(15) - \ln(5) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(15 : 5 \cdot \frac{1}{3}\right) = \ln(1) = 0.$$

(b) Es gilt:

$$\ln\left(\mathrm{e}^{5x}\right) = 5x \cdot \ln(\mathrm{e}) = 5x.$$

(c) Es gilt:

$$\frac{\ln\left(\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{3x}\right) \cdot \ln(2)}{\ln\left(\mathrm{e}^{\ln(2)}\right) \cdot x} = \frac{\ln\left(\mathrm{e}^{5x}\right) \cdot \ln(2)}{\ln(2) \cdot x} = \frac{5x \cdot \ln(2)}{x \cdot \ln(2)} = 5.$$

Lösung 5

(a) Die Gleichung

$$7x^2 + 8x - 10 = 0$$

ist eine quadratische Gleichung, denn es kommen nur die x^2, x und Zahlen / Konstanten vor.

Die Normalform dieser Gleichung lautet:

$$x^2 + \frac{8}{7}x - \frac{10}{7} = 0.$$

(b) Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$$3x^2 + 3x - 21 = 0.$$

In dieser umgeformten Gleichung kommen nur die Potenzen x^2 und x vor, daher ist die Gleichung eine quadratische Gleichung.

Die Normalform dieser Gleichung lautet:

$$x^2 + x - 7 = 0.$$

(c) Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$$x^2 - 12x = 0.$$

In dieser umgeformten Gleichung kommen nur die Potenzen x^2 und x vor, daher ist die Gleichung eine quadratische Gleichung.

Die quadratische Gleichung liegt bereits in Normalform vor.

(d) Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht:

$$5x^2 + 17x = 0.$$

In dieser umgeformten Gleichung kommen nur die Potenzen x^2 und x vor, daher ist die Gleichung eine quadratische Gleichung.

Die Normalform dieser Gleichung lautet:

$$x^2 + \frac{17}{5}x = 0.$$

Lösung 6

Es handelt sich bei allen Gleichungen um eine quadratische Gleichung, denn es treten lediglich x^2, x und Zahlen / Konstanten auf.

(a) ➤ *Alles auf eine Seite bringen:*

Es sind bereits alle Terme auf einer Seite

$$x^2 + 4x - 21 = 0.$$

➤ *Gleichung auf Normalenform bringen und p-q-Formel anwenden:*

Die Gleichung liegt bereits in Normalform vor, und für die Parameter p und q in der p-q-Formel gilt

$$p = 4 \quad \text{und} \quad q = -21.$$

Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch:

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\frac{(4)^2}{4} - (-21)} = -2 \pm \sqrt{25} = -2 \pm 5$$

Die Lösungsmenge ist daher gegeben durch

$$\mathcal{L}_1 = \{-7; 3\}$$

(b) ➤ *Alles auf eine Seite bringen:*

Es sind bereits alle Terme auf einer Seite

$$3x^2 - 2x + 8 = 0.$$

➤ *Gleichung auf Normalenform bringen und p-q-Formel anwenden:*

Zunächst muss die Gleichung auf Normalform gebracht werden:

$$3x^2 - 2x + 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{8}{3} = 0$$

Für die Parameter p und q in der p-q-Formel gilt also

$$p = -\frac{2}{3} \quad \text{und} \quad q = \frac{8}{3}.$$

Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch:

$$x_{1,2} = -\frac{-\frac{2}{3}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^2}{4} - \frac{8}{3}} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{23}{9}}$$

Die Wurzel ist nur für positive Zahlen definiert. Die Gleichung hat also keine Lösung und es gilt:

$$\mathcal{L}_2 = \emptyset$$

(c) ➤ *Alles auf eine Seite bringen:*

Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht.

$$x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

➤ *Gleichung auf Normalenform bringen und p-q-Formel anwenden:*

Die Gleichung ist schon in Normalenform gegeben, hier muss also nichts getan werden. Für die Parameter p und q in der p-q-Formel gilt also

$$p = -1, q = \frac{1}{4}.$$

Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch:

$$x_{1,2} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{\frac{(-1)^2}{4} - \frac{1}{4}} = -\frac{-1}{2} \pm \sqrt{0}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also:

$$\mathcal{L}_3 = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

(d) ➤ *Alles auf eine Seite bringen:*

Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht

$$x^2 + \sqrt{8}x + 2 = 0$$

➤ *Gleichung auf Normalform bringen und p-q-Formel anwenden:*

Die Gleichung ist schon in Normalform gegeben, hier muss also nichts getan werden. Für die Parameter p und q in der p-q-Formel gilt also

$$p = \sqrt{8},\ q = 2.$$

Die Lösungen der Gleichung sind damit gegeben durch:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{\sqrt{8}}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\sqrt{8}\right)^2}{4} - 2} \\ &= -\frac{\sqrt{8}}{2} \pm \sqrt{2-2} \\ &= \frac{-\sqrt{8}}{2} \\ &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also:

$$\mathcal{L}_4 = \left\{-\sqrt{2}\right\}$$

Lösung 7

Um die Schnittstellen zu berechnen, werden zunächst die Gleichungen der beiden Funktionen gleichgesetzt:

$$f(x) = g(x) \iff x^2 - 24 = 3x^2 - 14x.$$

Gesucht sind also die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 24 = 3x^2 - 14x$$

Dies ist eine quadratische Gleichung, denn es treten nur x^2, x und Zahlen / Konstanten auf.

➤ *Alles auf eine Seite bringen:*

Zunächst werden alle Terme auf eine Seite gebracht

$$2x^2 - 14x + 24 = 0.$$

➤ *Gleichung auf Normalform bringen und p-q-Formel anwenden:*

Die Normalform der Gleichung lautet:

$$x^2 - 7x + 12 = 0.$$

Anwendung der 🔧 p-q-Formel liefert $x_1 = 3$ und $x_2 = 4$.

Lösungen

➤ *Funktionswerte bestimmen:*
Da laut Aufgabenstellung die Schnittpunkte berechnet werden sollen, müssen nun noch die Funktionswerte zu den beiden x-Werten bestimmt werden. Hierfür werden x_1 und x_2 entweder in die Gleichung von f oder g eingesetzt. Es gelten:

$$f(3) = -15 \quad \text{und} \quad f(4) = -8.$$

Die Schnittpunkte der Graphen von f und g sind damit gegeben durch:

$$S_1(3\,|\,-15) \quad \text{und} \quad S_2(4\,|\,-8)\,.$$

Lösung 8

Es handelt sich bei allen Gleichungen um biquadratische Gleichungen, denn es treten lediglich x^4, x^2 und Zahlen / Konstanten auf. Die Lösungen der Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt:

(a) ➤ Substitution $u = x^2$:

$$u^2 + u - 2 = 0.$$

➤ Anwendung der p-q-Formel:

$$u_1 = 1 \quad \text{und} \quad u_2 = -2.$$

➤ Rücksubstitution liefert:

$$u_1 = 1: \quad x^2 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1$$
$$u_2 = -2: \quad x^2 = -2 \quad \Longrightarrow \quad \text{keine weiteren Lösungen.}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $\mathcal{L}_1 = \{-1; 1\}$.

(b) ➤ Substitution mit $u = x^2$:

$$u^2 - 4u + 4 = 0.$$

➤ Anwendung der p-q-Formel:

$$u_1 = 2$$

➤ Rücksubstitution liefert:

$$u_1 = 2: \quad x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2}, \quad x_2 = \sqrt{2}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $\mathcal{L}_2 = \{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

(c) ➤ Substitution mit $u = x^2$:

$$2u^2 + 4u - 4 = 0.$$

➤ Anwendung der p-q-Formel, nachdem die Gleichung auf Normalform gebracht wurde:

$$u_1 = -1 + \sqrt{3} \quad \text{und} \quad u_1 = -1 - \sqrt{3}$$

➤ Rücksubstitution liefert:

$$u_1 = -1 + \sqrt{3}: \quad x^2 = -1 + \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{-1 + \sqrt{3}}, \quad x_2 = \sqrt{-1 + \sqrt{3}}$$
$$u_2 = -1 - \sqrt{3}: \quad x^2 = -1 - \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad \text{keine weiteren Lösungen.}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also $\mathcal{L}_3 = \left\{-\sqrt{-1 + \sqrt{3}}; \sqrt{-1 + \sqrt{3}}\right\}$.

Lösung 9

(a) Die Gleichung

$$e^x \cdot (x^2 - 16) = 0$$

ist ein Nullprodukt, denn es werden zwei Terme, die ein x enthalten, multipliziert und das Ergebnis soll Null ergeben.

(b) Bringe zunächst alles auf eine Seite:

$$e^{3x} \cdot (5x^4 - 30) = 0.$$

Diese Gleichung ist ein Nullprodukt, denn es werden zwei Terme, die ein x enthalten, multipliziert und das Ergebnis soll Null ergeben.

(c) Die Gleichung

$$e^{3x+2} \cdot (4e^x - x) = 0$$

ist ein Nullprodukt, denn es werden zwei Terme, die ein x enthalten, multipliziert und das Ergebnis soll Null ergeben.

(d) Bringe zunächst alles auf eine Seite:

$$x^2 \cdot (e^x - x^2) - 1 = 0.$$

Die Gleichung ist also kein Nullprodukt.

Lösung 10

Es handelt sich bei allen Gleichungen um Nullprodukte, denn in jeder Gleichung gibt es mindestens zwei Ausdrücke mit x, die miteinander multipliziert werden und deren Produkt Null ergeben soll. Es kann also jeweils der Satz vom Nullprodukt angewandt werden.

(a) Es gilt:

$$(x^2 - 9) \cdot (x + 5) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 9 = 0 \quad \text{oder} \quad x + 5 = 0,$$

und

$$x^2 - 9 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -3, \quad x_2 = 3$$
$$x + 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -5.$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathcal{L}_1 = \{-5; -3; 3\}$

(b) Es gilt:

$$(x^2 - 4x + 2) \cdot (x + 3) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \text{oder} \quad x + 3 = 0.$$

Die erste Gleichung ist eine quadratische Gleichung in Normalenform und damit können die Lösung dieser Gleichung mithilfe der p-q-Formel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 2 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

Desweiteren gilt:

$$x + 3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_3 = -3.$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathcal{L}_2 = \{-3; 2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$

Lösungen

(c) Es gilt:

$$(x^2+x+4)\cdot(x^4-81)^2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad x^2+x+4=0 \quad \text{oder} \quad (x^4-81)^2=0$$

Die erste Gleichung ist eine quadratische Gleichung in Normalenform und damit können die Lösung dieser Gleichung mithilfe der p-q-Formel bestimmt werden:

$$\begin{aligned} x^2+x+4=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2-4} \\ &\Longleftrightarrow \quad x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{-\frac{15}{4}} \end{aligned}$$

Die Wurzel ist nur für nichtnegative Werte definiert, die quadratische Gleichung hat also keine Lösung. Desweiteren gilt:

$$\begin{aligned} (x^4-81)^2=0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x^4-81=0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^4=81 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2=9 \quad \text{oder} \quad x^2=-9. \end{aligned}$$

Die Gleichung

$$x^2=-9$$

besitzt keine Lösungen und für die verbleibende Gleichung gilt

$$x^2=9 \quad\Longleftrightarrow\quad x_1=-3, \quad x_2=3$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathcal{L}_3=\{-3;3\}$

(d) Es gilt:

$$e^{\frac{1}{2}x}\cdot\left(\frac{1}{2}x+2\right)=0 \quad\Longleftrightarrow\quad e^{\frac{1}{2}x}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{2}x+2=0$$

Die Gleichung

$$e^{\frac{1}{2}x}=0$$

besitzt keine Lösung. Desweiteren gilt:

$$\frac{1}{2}x+2=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \frac{1}{2}x=-2 \quad\Longleftrightarrow\quad x=-4.$$

Damit ist die Lösungsmenge gegeben durch $\mathcal{L}_4=\{-4\}$.

Lösung 11

Bei allen Gleichungen handelt es sich um Gleichungen mit „x in jedem Summanden“, denn 👁: In jedem Summanden taucht eine Potenz von x auf. Die Lösungsmengen der jeweiligen Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$12x^2-24x=0$$

➤ 🔧 Höchste gemeinsame Potenz ausklammern: Die größte Potenz von x, die in jedem Summanden der Gleichung auftaucht, ist x, damit kann x ausgeklammert werden:

$$x\cdot(12x-24)=0.$$

➤ Satz vom Nullprodukt anwenden

$$x \cdot (12x - 24) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad 12x_2 - 24 = 0$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 12x_2 = 24$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit $\mathcal{L}_1 = \{0; 2\}$.

(b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}x = 0.$$

➤ Höchste gemeinsame Potenz ausklammern: Die größte Potenz von x, die in jedem Summanden der Gleichung auftaucht, ist x, damit kann x ausgeklammert werden:

$$x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}\right) = 0.$$

➤ Satz vom Nullprodukt anwenden

$$x \cdot \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}\right) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3} = 0$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{1}{3}x^2 = \frac{4}{3}$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = -2 \quad x_3 = 2.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit $\mathcal{L}_2 = \{0; -2; 2\}$.

(c) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$20x^3 - 180x^2 = 0.$$

➤ Höchste gemeinsame Potenz ausklammern: Die größte Potenz von x, die in jedem Summanden der Gleichung auftaucht, ist x^2, damit kann x^2 ausgeklammert werden:

$$x^2 \cdot (20x - 180) = 0.$$

➤ Satz vom Nullprodukt anwenden

$$x^2 \cdot (20x - 180) = 0 \iff x = 0 \quad \text{oder} \quad 20x - 180 = 0$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 20x_2 = 180$$
$$\iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = 9$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit $\mathcal{L}_3 = \{0; 9\}$.

(d) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$8x^2 - 3x^4 = -2x^3$$

➤ Höchste gemeinsame Potenz ausklammern: Die größte Potenz von x, die in jedem Summanden der Gleichung auftaucht, ist x^2, damit kann x^2 ausgeklammert werden:

$$x^2 \cdot (8 - 3x^2 + 2x) = 0.$$

➤ Satz vom Nullprodukt anwenden

$$x \cdot (12x - 24) = 0 \iff x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 8 - 3x^2 + 2x = 0$$

Die zweite Gleichung ist eine quadratische Gleichung, deren Lösung mithilfe der *p-q*-Formel bestimmt werden können:

Zunächst muss die Gleichung auf Normalform gebracht werden, anschließend kann die

Lösungen

p-q-Formel angewendet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned}
8 - 3x^2 + 2x = 0 \quad &\iff \quad -3x^2 + 2x + 8 = 0 \\
&\iff \quad x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{3} = 0 \\
&\iff \quad x_{2,3} = -\frac{-\frac{2}{3}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-\frac{2}{3}}{2}\right)^2 - \left(-\frac{8}{3}\right)} \\
&\iff \quad x_{2,3} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{8}{3}} \\
&\iff \quad x_{2,3} = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{25}{9}} \\
&\iff \quad x_{2,3} = \frac{1}{3} \pm \frac{5}{3}
\end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit $\mathcal{L}_4 = \left\{0; -\frac{4}{3}; 2\right\}$.

Lösung 12

Es handelt sich bei den Gleichungen um Exponentialgleichungen vom Typ 1, denn 👁: Es tauchen nur Potenzen von e mit gleichem Exponenten auf. Die Lösungen der Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$6e^{2x+1} - 8 = 4 - e^{2x+1}$$

➤ 🔧 Exponentialterm isolieren

$$\begin{aligned}
& 6e^{2x+1} - 8 = 4 - e^{2x+1} \\
\iff \quad & 7e^{2x+1} = 12 \\
\iff \quad & e^{2x+1} = \frac{12}{7}
\end{aligned}$$

➤ 🔧 Gleichung logarithmieren

$$\ln\left(e^{2x+1}\right) = \ln\left(\frac{12}{7}\right) \quad \iff \quad 2x + 1 = \ln\left(\frac{12}{7}\right)$$

➤ Nach x auflösen:

$$x = \frac{\ln\left(\frac{12}{7}\right) - 1}{2}.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_1 = \left\{\frac{\ln\left(\frac{12}{7}\right)-1}{2}\right\}$

(b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$2e^{x^2-4} = e^{x^2-4} + 1$$

➤ 🔧 Exponentialterm isolieren

$$\begin{aligned}
& 2e^{x^2-4} = e^{x^2-4} + 1 \\
\iff \quad & e^{x^2-4} = 1
\end{aligned}$$

➤ 🔧 Gleichung logarithmieren

$$\ln\left(e^{x^2-4}\right) = \ln(1) \iff x^2 - 4 = 0.$$

➤ Nach x auflösen:

$$x^2 - 4 = 0 \iff x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_2 = \{-2; 2\}$

Lösung 13

Es handelt sich bei allen Gleichungen um Exponentialgleichungen vom Typ 2, denn 👁: Es tauchen ausschließlich Potenzen von e mit unterschiedlichen Exponenten auf, aber dafür keine Zahlen. Die Lösungen der Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$e^{4x} = e^{3x}$$

➤ Alle Exponentialterme auf eine Seite bringen:

$$e^{4x} - e^{3x} = 0.$$

➤ 🔧 Ausklammern der Potenz mit dem niedrigsten Exponenten

$$e^{3x} \cdot (e^x - 1) = 0.$$

➤ 🔧 Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$e^{3x} \cdot (e^x - 1) = 0 \iff e^{3x} = 0 \quad \text{oder} \quad e^x - 1 = 0$$

➤ Bestimmung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:
- ➤ Die Gleichung $e^{3x} = 0$ besitzt keine Lösung.
- ➤ Für die zweite Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} e^x - 1 = 0 &\iff e^x = 1 \\ &\iff x = \ln(1). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge lautet damit $\mathcal{L}_1 = \{0\}$

(b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$e^{2x+2} = e^x$$

➤ Alle Exponentialterme auf eine Seite bringen:

$$e^{2x+2} - e^x = 0$$

➤ 🔧 Ausklammern der Potenz mit dem niedrigsten Exponenten

$$e^x \cdot \left(e^{x+2} - 1\right) = 0.$$

➤ 🔧 Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$e^x \cdot \left(e^{x+2} - 1\right) = 0 \iff e^x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{x+2} - 1 = 0$$

➤ Bestimmung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:
- ➤ Die Gleichung $e^x = 0$ besitzt keine Lösung.

Lösungen

➤ Für die zweite Gleichung gilt:

$$e^{x+2} - 1 = 0 \iff e^{x+2} = 1$$
$$\iff x + 2 = \ln(1)$$
$$\iff x = -2$$

Die Lösungsmenge lautet damit $\mathcal{L}_2 = \{-2\}$

(c) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$e^{x^2+2x-4} = 4e^{2x}$$

➤ Alle Exponentialterme auf eine Seite bringen:

$$e^{x^2+2x-4} - 4e^{2x} = 0$$

➤ Ausklammern der Potenz mit dem niedrigsten Exponenten

$$e^{2x} \cdot \left(e^{x^2-4} - 4\right) = 0.$$

➤ Satz vom Nullprodukt anwenden:

$$e^{2x} \cdot \left(e^{x^2-4} - 4\right) = 0 \iff e^{2x} = 0 \quad \text{oder} \quad e^{x^2-4} - 4 = 0$$

➤ Bestimmung der Lösungsmengen der beiden Gleichungen:

➤ Die Gleichung $e^{2x} = 0$ besitzt keine Lösung.

➤ Für die zweite Gleichung gilt:

$$e^{x^2-4} - 4 = 0 \iff e^{x^2-4} = 4$$
$$\iff x^2 - 4 = \ln(4)$$
$$\iff x^2 = \ln(4) + 4$$
$$\iff x_1 = -\sqrt{\ln(4) + 4} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{\ln(4) + 4}$$

Die Lösungsmenge lautet damit $\mathcal{L}_3 = \left\{-\sqrt{\ln(4) + 4}; \sqrt{\ln(4) + 4}\right\}$

Lösung 14

Es handelt sich bei allen Gleichungen um Exponentialgleichungen vom Typ 3, denn : Es tauchen genau zwei unterschiedliche Potenzen von e auf, einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten. Die Lösungen der Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$e^{2x} - 4e^{x} + 2 = 0.$$

➤ Alle Terme auf eine Seite bringen:

$$e^{2x} - 4e^{x} + 2 = 0.$$

➤ Substitution $e^{x} = u$

$$u^2 - 4u + 2 = 0.$$

➤ Da die quadratische Gleichung bereits in Normalenform vorliegt, kann die *p-q-*

Formel angewandt werden:

$$u_{1,2} = -\frac{-4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-4}{2}\right)^2 - 2}$$
$$= 2 \pm \sqrt{2}$$

➤ Rücksubstitution:

$$u_1 = 2 - \sqrt{2}: \quad e^{x_1} = 2 - \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \ln\left(2 - \sqrt{2}\right)$$
$$u_2 = 2 + \sqrt{2}: \quad e^{x_2} = 2 + \sqrt{2} \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \ln\left(2 + \sqrt{2}\right)$$

Für die Lösungsmenge gilt also: $\mathcal{L}_1 = \left\{\ln\left(2 - \sqrt{2}\right); \ln\left(2 + \sqrt{2}\right)\right\}$

(b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$4e^{6x} + 6e^{3x} = 4.$$

➤ Alle Terme auf eine Seite bringen:

$$4e^{6x} + 6e^{3x} - 4 = 0.$$

➤ 🔧 Substitution $e^{3x} = u$

$$4u^2 + 6u - 4 = 0.$$

➤ Quadratische Gleichung auf Normalenform bringen:

$$u^2 + \frac{3}{2}u - 1 = 0.$$

➤ 🔧 p-q-Formel anwenden:

$$u_{1,2} = -\frac{\frac{3}{2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - (-1)}$$
$$u_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}$$
$$u_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$$
$$u_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$$

➤ Rücksubstitution:

$$u_1 = -2: \quad e^{3x_1} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \text{keine Lösung}$$
$$u_2 = \frac{1}{2}: \quad e^{3x_2} = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad 3x_2 = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

Für die Lösungsmenge gilt also: $\mathcal{L} = \left\{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$

Lösung 15

Bei allen Gleichungen handelt es sich um Wurzelgleichungen, denn 👁: Aus einem Ausdruck mit x wird die Wurzel gezogen. Die Lösungen der jeweiligen Gleichung werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Es sollen die Lösungen der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0$$

➤ 🔧 Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0.$$

➤ 🔧 Quadriere beide Seiten:

$$x^2 - 4 = 0.$$

➤ Löse die entstandene Gleichung

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2.$$

➤ 🔧 Probe machen, denn durch das Quadrieren können Lösungen dazugekommen sein:

➤ Für $x_1 = -2$ gilt:

$$\sqrt{(-2)^2 - 4} = \sqrt{0} = 0 \checkmark$$

➤ Für $x_2 = 5$ gilt:

$$\sqrt{2^2 - 4} = \sqrt{0} = 0 \checkmark$$

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_1 = \{-2; 2\}$.

(b) Es sollen die Lösungen der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$2 - \sqrt{12 - 2x} = 0$$

➤ 🔧 Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{12 - 2x} = 2.$$

➤ 🔧 Quadriere beide Seiten:

$$12 - 2x = 4.$$

➤ Löse die entstandene Gleichung

$$12 - 2x = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x = 8 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 4.$$

➤ 🔧 Probe machen, denn durch das Quadrieren können Lösungen dazugekommen sein: Es gilt:

$$\sqrt{12 - 2 \cdot 4} = \sqrt{12 - 8} = \sqrt{4} = 2.$$

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_2 = \{4\}$.

(c) Es sollen die Lösungen der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$\sqrt{4x + 6} + 4 = 5.$$

➤ 🔧 Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{4x + 6} = 1.$$

➤ 🔧 Quadriere beide Seiten:

$$4x + 6 = 1.$$

➤ Löse die entstandene Gleichung

$$4x+6=1 \iff 4x=-5 \iff x=-\frac{5}{4}.$$

➤ Probe machen, denn durch das Quadrieren können Lösungen dazugekommen sein: Es gilt:

$$\sqrt{4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+6}+4=\sqrt{1}+4=5\,\checkmark.$$

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_3=\left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

(d) Es sollen die Lösungen der folgenden Gleichung bestimmt werden

$$10+\sqrt{2x-3}=5.$$

➤ Isoliere die Wurzel:

$$\sqrt{2x-3}=-5.$$

➤ Quadriere beide Seiten:

$$2x-3=25.$$

➤ Löse die entstandene Gleichung

$$2x-3=25 \iff 2x=28 \iff x=14.$$

➤ Probe machen, denn durch das Quadrieren können Lösungen dazugekommen sein: Es gilt:

$$10+\sqrt{2\cdot 14-3}=10+\sqrt{25}=10+5=15 \implies \text{keine Lösung}$$

Also gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_4=\emptyset$.

Lösung 16

Es handelt sich bei beiden Gleichungen um logarithmische Gleichungen, denn : Aus einem Ausdruck mit x wird der Logarithmus gebildet. Die Lösungsmengen der jeweiligen Gleichungen werden wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$\ln(27x-26)=0.$$

➤ Logarithmus isolieren:

$$\ln(27x-26)=0.$$

➤ Gleichung exponentieren

$$\begin{aligned} e^{\ln(27x-26)} &= e^0 \\ \iff\quad 27x-26 &= 1 \\ \iff\quad 27x-27 &= 0 \\ \iff\quad x &= 1. \end{aligned}$$

Es gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_1=\{1\}$.

(b) Gesucht sind die Lösungen der Gleichung

$$\ln\left(x^2-4x+5\right)=0.$$

Lösungen

➤ 🔧 Logarithmus isolieren:

$$\ln\left(x^2 - 4x + 5\right) = 0.$$

➤ 🔧 Gleichung exponentieren:

$$\begin{aligned} & e^{\ln\left(x^2-4x+5\right)} = e^0 \\ \iff \quad & x^2 - 4x + 5 = 1 \\ \iff \quad & x^2 - 4x + 4 = 0 \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, die Lösungen können mit der 🔧 *p-q*-Formel bestimmt werden:

$$x^2 - 4x + 4 = 0 \quad \iff \quad x_{1,2} = 2 \pm 0$$

Es gilt für die Lösungsmenge $\mathcal{L}_2 = \{2\}$.

Lösung 17

Die Nullstellen der Funktionen werden wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = x^5 + 5x^3 - 5.$$

➤ *Wertetabelle anfertigen*

Zunächst wird eine Wertetabelle angefertigt. Es gilt:

x	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	-5	-4,34	1	19,47	67

➤ *Startwert wählen*

Die Nullstelle liegt vermutlich in der Nähe von $x_0 = 1$.

➤ *Formel für den Wert x_{n+1} aufstellen*

Es gilt:

$$f'(x) = 5x^4 + 15x^2$$

und somit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^5 + 5x_n^3 - 5}{5x_n^4 + 15x_n^2}.$$

➤ *Tabelle mit Näherungswerten*

Es ergeben sich damit folgende Werte

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	1	-5	20	1,25
1	1,25	7,817	35,645	1,031
2	1,031	1,644	21,594	0,955
3	0,955	0,149	17,839	0,947
4	0,947	0,008	17,473	0,947

➤ *Näherungswert*

Nach dem vierten Iterationsschritt ändert sich die zweite Nachkommastelle nicht mehr und die Näherung der Nullstelle mit der gesuchten Genauigkeit lautet somit

$$x^* = 0{,}95.$$

(b) Gesucht sind die Nullstellen der Funktion

$$f(x) = 8x^6 + 3x^2 - 3.$$

➤ *Wertetabelle anfertigen*

x	0	0,5	1
$f(x)$	-5	-2,125	8

➤ *Startwert wählen*

Die Nullstelle liegt vermutlich in der Nähe von $x_0 = 0{,}5$.

➤ *Tangente an den Graphen und deren Nullstelle berechnen*

Es gilt:

$$f'(x) = 48x^5 + 6x$$

und somit

$$x_{n+1} = x_n - \frac{8x_n^6 + 3x_n^2 - 3}{48x_n^5 + 6x_n}.$$

➤ *Tabelle mit Näherungswerten*

Es ergeben sich damit folgende Werte

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}
0	0,5	-2,125	4,5	0,972
1	0,972	6,581	47,478	0,833
2	0,833	1,754	24,250	0,761
3	0,761	0,291	16,817	0,744
4	0,744	0,017	15,406	0,743
5	0,743	0,002	15,327	0,743

➤ *Näherungswert*

Nach dem fünften Iterationsschritt ändert sich die zweite Nachkommastelle nicht mehr und die Näherung der Nullstelle mit der gesuchten Genauigkeit lautet somit

$$x^* = 0{,}74.$$

Lösung 18

(a) Bei der Gleichung

$$20x^4 - 26x^2 + 13 = 0$$

handelt es sich um eine biquadratische Gleichung, denn 👁: Es treten lediglich x^4, x^2 und eine Zahl auf.

(b) Bei der Gleichung

$$x^2 + x - 6 = 10$$

handelt es sich um eine quadratische Gleichung, denn 👁: x^2 ist die höchste Potenz.

(c) Bei der Gleichung

$$9e^{4x+6} = 9$$

handelt es sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 1, denn : Es tauchen lediglich Potenzen von e mit dem gleichen Exponenten und Zahlen auf.

(d) Bei der Gleichung

$$x^8 - 16x^6 = 0$$

handelt es sich um eine Gleichung mit „x in jedem Summanden", denn : In jedem Summanden taucht ein x auf.

(e) Bei der Gleichung

$$2x \cdot \mathrm{e}^{x^2+4} = 0$$

handelt es sich um ein Nullprodukt, denn : Die Gleichung besteht aus einem Produkt aus zwei Faktoren, welches Null ergeben soll.

(f) Bei der Gleichung

$$\sqrt{x^2+5} = 3$$

handelt es sich um eine Wurzelgleichung, denn : Aus einem Ausdruck mit x wird die Wurzel gezogen.

(g) Bei der Gleichung

$$\ln(25x+8) = 0$$

handelt es sich um eine Logarithmusgleichung, denn : Aus einem Ausdruck mit x wird der Logarithmus gebildet.

(h) Bei der Gleichung

$$\mathrm{e}^{7x} + 16\mathrm{e}^{14x} - 10 = 0$$

handelt es sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 3, denn : Es tauchen genau zwei unterschiedliche Potenzen von e auf (einer der beiden Exponenten ist das Doppelte des anderen Exponenten).

Lösung 19

(a) Die Gleichung

$$(4x^2 - 16) \cdot (\mathrm{e}^{2x} - 5) = 0$$

ist ein Nullprodukt und wird mithilfe des Satzes vom Nullprodukt gelöst

(b) Die Gleichung

$$-16x^4 + x^6 = -6x^5$$

ist eine Gleichung mit „x in jedem Summanden", es wird die höchste Potenz von x ausgeklammert.

(c) Die Gleichung

$$(2x^2 - 8) \cdot (\mathrm{e}^{2x} - 6) = 0$$

ist ein Nullprodukt und wird mithilfe des Satzes vom Nullprodukt gelöst

(d) Die Gleichung

$$4\mathrm{e}^{2x} + 6\mathrm{e}^{x} = 4$$

ist eine Exponentialgleichung vom Typ 1, hier wird eine Substitution $u = \mathrm{e}^x$ durchgeführt.

(e) Die Gleichung

$$2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$$

ist eine Bruchgleichung und wird 🔧 mit dem Hauptnenner multipliziert.

(f) Die Gleichung

$$x^4 = 4 + 3x^2$$

ist eine biquadratische Gleichung und wird mit einer 🔧 Substitution $u = x^2$ gelöst.

Lösung 20

(a) Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, also 🔧 p-q-Formel:

$$x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L}_1 = \{-3; 2\}$.

(b) Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 1, also 🔧 Exponentialterm isolieren und anschließend logarithmieren:

$$\begin{aligned} 8e^{4x+6} = 8 \quad &\iff \quad e^{4x+6} = 1 \\ &\iff \quad \ln\left(e^{4x+6}\right) = \ln(1) \\ &\iff \quad 4x + 6 = 0 \\ &\iff \quad x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L}_2 = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

(c) Es handelt sich um ein Nullprodukt, also 🔧 Satz vom Nullprodukt

$$\begin{aligned} 2xe^{x^2+4} = 0 \quad &\iff \quad 2x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad e^{x^2+4} = 0 \\ &\iff \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad e^{x^2+4} = 0 \quad \text{(keine weitere Lösung)} \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L}_3 = \{0\}$.

(d) Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 3, also 🔧 Substitution $u = e^x$

$$4e^{2x} - e^x = 0 \quad \iff \quad 4u^2 - u = 0.$$

Das ist eine Gleichung mit „u in jedem Summanden", also:

$$\begin{aligned} 4u^2 - u = 0 \quad &\iff \quad u \cdot (4u - 1) = 0 \\ &\iff \quad u_1 = 0 \quad \text{oder} \quad 4u_2 - 1 = 0 \\ &\iff \quad u_1 = 0 \quad \text{oder} \quad u_2 = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert:

- $u_1 = 0 \implies e^x = 0$ keine Lösung
- $u_1 = \frac{1}{4} \implies e^x = \frac{1}{4} \iff x = \ln\left(\frac{1}{4}\right)$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L}_4 = \left\{\ln\left(\frac{1}{4}\right)\right\}$.

(e) Die folgende Gleichung

$$4xe^{x^2+4} + 2e^{x^2+4} = 0$$

ist in keinen der bisherigen Gleichungstypen einteilbar. Man kann erkennen, dass in

Lösungen

beiden Summanden der Term e^{x^2+4} enthalten ist. Dieser Term kann also ausgeklammert werden:

$$4xe^{x^2+4} + 2e^{x^2+4} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x^2+4} \cdot (4x+2) = 0$$

Mithilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man:

$$e^{x^2+4} \cdot (4x+2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{x^2+4} = 0 \quad \text{oder} \quad 4x+2=0.$$

Es gelten:

- $e^{x^2+4} = 0$ keine Lösung
- $4x + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist also gegeben durch $\mathcal{L}_5 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Lösung 21

(a) Es handelt sich um eine Bruchgleichung, daher wird die Gleichung zunächst mit dem Hauptnenner e^x durchmultipliziert:

$$e^x - 2 - \frac{15}{e^x} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$$

Die Exponentialgleichung vom Typ 3 wird mithilfe der Substitution $u = e^x$ und anschließender Anwendung der p-q-Formel gelöst:

$$u^2 - 2u - 15 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u_{1,2} = 1 \pm 4.$$

Rücksubstitution liefert:

$$\begin{aligned} e^x = u_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = -3 \quad \text{keine Lösung} \\ e^x = u_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln(5). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_1 = \{\ln(5)\}$.

(b) Es handelt sich um ein Nullprodukt, daher wird der Satz vom Nullprodukt angewandt:

$$\begin{aligned} (2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2x^2 - 8 = 0 \quad \text{oder} \quad e^{2x} - 6 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \text{oder} \quad e^{2x} = 6 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = -2,\ x_2 = 2 \quad \text{oder} \quad x_3 = \frac{1}{2}\ln(6). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_2 = \left\{-2; \frac{\ln(6)}{2}; 2\right\}$.

(c) Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 3, es wird daher zunächst eine Substitution $u = e^x$ durchgeführt und anschließend die p-q-Formel angewandt.

$$\begin{aligned} 4e^{2x} + 6e^x = 4 \quad &\Longleftrightarrow \quad 4u^2 + 6u = 4 \\ &\Longleftrightarrow \quad 4u^2 + 6u - 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u_{1,2} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert:

$$\begin{aligned} e^x = u_1 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = -2 \quad \text{keine Lösung} \\ e^x = u_2 \quad &\Longleftrightarrow \quad e^x = \frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \ln\left(\frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_3 = \left\{\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$.

(d) Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 3, es wird daher zunächst eine Substitution $u = e^{2x}$ durchgeführt und anschließend die p-q-Formel angewandt.

$$\begin{aligned} e^{4x} - 5 = 4e^{2x} \quad &\Longleftrightarrow \quad u^2 - 5 = 4u \\ &\Longleftrightarrow \quad u^2 - 4u - 5 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u_{1,2} = 2 \pm 3 \end{aligned}$$

Rücksubstitution liefert:

$$e^{2x} = u_1 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = -1 \quad \text{keine Lösung}$$

$$e^{2x} = u_2 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ln(5)\,.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_5 = \left\{\frac{1}{2}\ln(5)\right\}$.

(e) Es handelt sich um ein Nullprodukt, daher wird der Satz vom Nullprodukt angewandt:

$$\left(x^3 - 3x\right) \cdot \left(e^{2x} - 5\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 3x = 0 \quad \text{oder} \quad e^{2x} - 5 = 0.$$

Die erste Gleichung ist eine Gleichung mit „x in jedem Summanden", es kann also die höchste gemeinsame Potenz von x ausgeklammert werden:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = \sqrt{3} \quad \text{oder} \quad x_3 = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung ist eine Exponentialgleichung vom Typ 1 und es gilt:

$$e^{2x} - 5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{2x} = 5 \quad \Longleftrightarrow \quad x_4 = \frac{1}{2}\ln(5)$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist damit gegeben durch $\mathcal{L}_6 = \left\{-\sqrt{3}; 0; \sqrt{3}; \frac{1}{2}\ln(5)\right\}$.

Lösung 22

Es gilt:

- Der Graph in Schaubild (I) besitzt die Form einer Hyperbel mit geradem n, insofern kann es sich nur um den Graphen, der zur Funktion h gehört, handeln.
- Der Graph in Schaubild (II) zeigt ebenfalls eine Hyperbel, diesmal mit ungeradem n und nach oben verschoben, insofern handelt es sich um den Graphen, der zur Funktion i gehört.
- Der Graph in Schaubild (III) stellt eine Parabel mit ungeradem n dar. Insofern gehört der Graph zu zur Funktion g.
- Der Graph in Schaubild (IV) hat die Form einer Wurzelfunktion mit ungeradem n, es bleibt nur noch die Funktion f als Lösung.

Lösung 23

(a) Ausmultiplizieren des Terms liefert die Standardform einer ganzrationalen Funktion:

$$h(x) = (x - 2)(x - 3)(x - 4) = x^3 - 9x^2 + 26x - 24.$$

(b) Der Grad von h ist 3.

(c) Zur Bestimmung der Nullstellen verwendet man am besten die ursprüngliche Darstellung. Mit dem Satz vom Nullprodukt kann direkt abgelesen werden: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$.

(d) Für das Verhalten im Unendlichen ist die höchste Potenz von $h(x)$ maßgeblich. Betrachte also x^3:

- Für $x \to +\infty$ geht $x^3 \to +\infty$, also $f(x) \to +\infty$
- Für $x \to -\infty$ geht $x^3 \to -\infty$, also $f(x) \to -\infty$

Lösung 24

- Graph (I) geht nicht durch den Koordinatenursprung P(O) 0,0. Also kommen hierfür nur die Funktionen f, h, k in Frage, denn alle anderen haben an der Stelle 0 den Funktionswert 0. Es ist $f(0) = 1$, $h(0) = 1$ und $k(0) = -1$. Also gehört der Graph (I) zur Funktion k.
- Graph (II) ist achsensymmetrisch. Lediglich die beiden Funktionsterme für k und g haben ausschließlich gerade Exponenten. Da der Graph von (II) durch den Ursprung verläuft, gehört er zur Funktion $g(x)$.
- Für den Graphen (III) gilt: Für $x \to \infty$ geht er gegen unendlich und für $x \to -\infty$ geht er ins negative Unendliche. Daher muss die höchste Potenz von x ungerade sein und ein positives Vorzeichen haben. Dies hat nur die Funktion $f(x)$.
- Der Graph (IV) geht für $x \to \pm\infty$ ins negative Unendliche. Dies ist nur bei der Funktion $i(x)$ der Fall.
- Das Verhalten im Unendlichen des Graphen (V) entspricht nur dem der Funktionen $h(x)$ und $j(x)$. Da $h(0) = 1$ und $j(0) = 0$ gehört zum Graphen (V) die Funktion $h(x)$.
- Es bleibt übrig: Der Graph (VI) gehört zur Funktion $j(x)$.

Lösung 25

(a) Für die Funktion f und deren Graph G_f gelten folgende Eigenschaften:

- Der Graph G_f ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

  $$f(-x) = e^{(-x)^2} = e^{x^2} = f(x).$$

  Damit können nur die Graphen (I), (II) oder (III) zur Funktion f gehören.
- Für die Ableitung f' gilt:

  $$f'(x) = 2xe^{x^2}.$$

  Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ positive Werte an und G_f ist damit für $x > 0$ monoton steigend. Damit kann der Graph (I) nicht zur Funktion f gehören. Es bleiben also noch die Graphen (II) oder (III) übrig.
- Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Der Graph (III) gehört also zur Funktion f.

(b) Für die Funktion g und deren Graph G_g gelten folgende Eigenschaften:

- Der Graph G_g ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

  $$g(\text{-}x) = \mathrm{e}^{\text{-}(\text{-}x)^4} = \mathrm{e}^{\text{-}x^4} = g(x).$$

  Damit können nur die Graphen (I), (II) oder (III) zur Funktion g gehören.
- Für die Ableitung g' gilt:

  $$g'(x) = \text{-}4x^3\mathrm{e}^{\text{-}x^4}.$$

  Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ negative Werte an und G_g ist damit für $x > 0$ monoton fallend. Damit muss der Graph (I) zur Funktion g gehören.

(c) Für die Funktion h und deren Graph G_h gelten folgende Eigenschaften:

- Es gilt $h(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit können nur die Graphen (II) oder (IV) zur Funktion h gehören.
- Für die Ableitung h' gilt:

  $$f'(x) = \text{-}3x^2\mathrm{e}^{x^3}.$$

  Die Ableitung nimmt damit für $x > 0$ positive Werte an und G_h ist damit für $x > 0$ monoton fallend. Der Graph (IV) gehört also zur Funktion h.

(d) Für die Funktion i und deren Graph G_i gelten folgende Eigenschaften:

- Es gilt $i(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Damit können nur die Graphen (II) oder (IV) zur Funktion i gehören.
- Der Graph G_i ist symmetrisch zur y-Achse, denn es gilt:

  $$i(\text{-}x) = \text{-}\mathrm{e}^{(\text{-}x)^2} = \mathrm{e}^{\text{-}x^2} = i(x).$$

  Der Graph (II) gehört also zur Funktion i.

Lösung 26

(a) Für $x \to +\infty$ gehen x^2 und e^x gegen unendlich. Also:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = +\infty.$$

Für $x \to \text{-}\infty$ geht e^x jedoch schneller gegen 0 als x^2 gegen unendlich. Also gilt:

$$\lim_{x\to\text{-}\infty} x^2\mathrm{e}^x = \lim_{x\to\text{-}\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^{\text{-}x}} = \lim_{x\to\text{-}\infty} \frac{(\text{-}x)^2}{\mathrm{e}^{\text{-}x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0.$$

(b) Es ist

$$g(x) = \frac{x^{200}}{\mathrm{e}^{\text{-}x}} = x^{200}\mathrm{e}^x.$$

Da e^x dominiert, folgt wie in Teil (a): $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to\text{-}\infty} g(x) = 0$.

(c) Da $\mathrm{e}^{\text{-}x} \to 0$ für $x \to +\infty$ gilt:

$$\lim_{x\to+\infty} x - \mathrm{e}^{\text{-}x} = +\infty.$$

Für $x \to \text{-}\infty$ wächst $\mathrm{e}^{\text{-}x}$ sehr schnell gegen Unendlich. Also:

$$\lim_{x\to\text{-}\infty} x - \mathrm{e}^{\text{-}x} = \text{-}\infty.$$

(d) Es ist

$$\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\text{-}x^2+x} = \lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{e}^{\text{-}x^2} = 0.$$

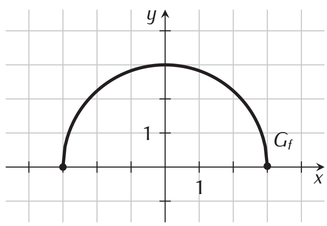
Lösung 27

(a) $$\begin{aligned} \sin(4x) - 1 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \sin(4x) = 1 \\ &\Longrightarrow \quad 4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} -\cos(3x) + 0{,}5 = 0 \quad &\Longrightarrow \quad \cos(3x) = 0{,}5 \\ &\Longrightarrow \quad 3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ oder } 3x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ oder } x = \frac{5\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösung 28

(a) Skizze des Graphen



(b) Die Funktionenschar beschreibt außer für $a = 0$ immer Halbkreise. Der Parameter a beschreibt dabei den Radius des Halbkreises.

Lösung 29

(a) $h_1(x) = \cos(2\pi x^2)$; $\quad h_2(x) = 2\pi x^2 \cos(x)$

(b) $h_1(0) = 1$; $\quad h_2(0) = 0$

(c) Alle Quadrate natürlicher Zahlen sind ganze Zahlen, einige gerade, einige ungerade. Mit zwei multipliziert ergeben sich nur noch gerade ganze Zahlen. Das Argument des Cosinus ist also immer ein gerades ganzzahliges Vielfaches von π, insofern gilt:

$$h_1(t) = 1 \quad \text{für} \quad t \in \mathbb{N}.$$

Lösung 30

(a) Aus dem Graphen von g kann man $g(2) = 4$ ablesen. Danach braucht man nur noch $f(4)$ aus dem Graphen von f abzulesen und erhält als Lösung $f(g(2)) = 5$.

(b) Da das Endergebnis zwei sein soll, muss man zunächst die Stelle suchen an der $f(x) = 2$ gilt. Dies ist der Fall an der Stelle eins. Jetzt muss man einen x-Wert suchen, so dass gilt $g(x) = 1$. Dies ist bei $x = -1$ und $x = 1$ der Fall.

(c) Da die Graphen der Funktionen f und g genau zwei Schnittpunkte haben, ergibt sich aus der Definition von h_1, dass der Graph von h_1 genau zwei Nullstellen besitzen muss.

(d) Die Funktion h_1 entsteht durch eine Subtraktion einer linearen Funktion von einer quadratischen Funktion. Der Grad von h_1 ist also zwei. Die Funktion h_2 entsteht durch eine Multiplikation der genannten Funktionen, es ergibt sich also der Grad drei, da die höchste Potenz somit $x^2 \cdot x = x^3$ ist.

Lösung 31

(a) Die Funktion f ist eine Potenzfunktion mit $n = 3$, es gilt also:

$$f(x) = x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 3x^2.$$

(b) Die Funktion f ist eine Potenzfunktion mit $n = -2$, es gilt also:

$$f(x) = x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -2x^{-3}.$$

(c) Die Funktion f ist das Produkt einer Konstanten mit einer Potenzfunktion mit $n = -3$, es gilt also:

$$f(x) = 4x^{-3} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot (-3) \cdot x^{-4} = -12x^{-4}.$$

(d) Zunächst wird der Funktionsterm umgeformt, es gilt:

$$f(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} = 2 \cdot x^{-1}.$$

Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Potenzfunktion $n = -1$, es gilt zusammen mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f(x) = 2 \cdot x^{-1} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 2 \cdot (-1) \cdot x^{-2} = -2 \cdot x^{-2}.$$

(e) Zunächst wird der Funktionsterm umgeformt, es gilt:

$$f(x) = -2\sqrt{x} = -2 \cdot x^{\frac{1}{2}}.$$

Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Potenzfunktion $n = \frac{1}{2}$, es gilt zusammen mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f(x) = -2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} = -x^{-\frac{1}{2}}.$$

(f) Zunächst wird der Funktionsterm umgeformt, es gilt:

$$f(x) = -4\sqrt[3]{x} = -4 \cdot x^{\frac{1}{3}}.$$

Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Potenzfunktion $n = \frac{1}{3}$, es gilt zusammen mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f(x) = -4 \cdot x^{\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3}x^{-\frac{2}{3}}.$$

(g) Zunächst wird der Funktionsterm umgeformt, es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}}$$

Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Potenzfunktion $n = -\frac{1}{3}$, es gilt zusammen mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{3}} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{6} \cdot x^{-\frac{4}{3}}.$$

Lösung 32

(a) Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Exponentialfunktion, es gilt mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f'(x) = 3e^x.$$

(b) Die Funktion f ist das Summe eines Produkts eines konstanten Faktors mit einer Sinusfunktion und eines konstanten Summanden, es gilt mit der Regel des konstanten Faktors und des konstanten Summanden:

$$f'(x) = 4\cos(x).$$

(c) Die Funktion f ist das Produkt eines konstanten Faktors mit einer Cosinusfunktion, es gilt mit der Regel des konstanten Faktors:

$$f'(x) = -16\sin(x).$$

(d) Die Funktion f ist das Summe eines Produkts eines konstanten Faktors mit einer Logarithmusfunktion und eines konstanten Summanden, es gilt mit der Regel des konstanten Faktors und des konstanten Summanden:

$$f'(x) = \frac{7}{x}.$$

Lösung 33

Es handelt sich bei allen Funktionen um Summen von Potenzfunktionen. Die Ableitungsfunktionen können daher mithilfe der Summenregel und der Ableitunsregel für Potenzfunktionen bestimmt werden.

(a) Es gilt:

$$f(x) = 4x^3 - x \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 4 \cdot 3 \cdot x^2 - 1$$
$$f'(x) = 12x^2 - 1$$

(b) Es gilt:

$$f(x) = -5x^4 + x^3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -5 \cdot 4 \cdot x^3 + 3 \cdot x^2$$
$$f'(x) = -20x^3 + 3x^2$$

(c) Es gilt:

$$f(x) = -4x^3 + 2x^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -4 \cdot 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x$$
$$f'(x) = -12x^2 + 4x$$

(d) Es gilt:

$$f(x) = -8x^4 + 6x^2 - x + 3 \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = -8 \cdot 4 \cdot x^3 + 6 \cdot 2 \cdot x - 1$$
$$f'(x) = -32x^3 + 12x - 1$$

(e) Es gilt:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^{-4} - \frac{1}{6}x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = \frac{3}{2} \cdot (-4) \cdot x^{-5} - \frac{1}{6} \cdot (-2) \cdot x^{-3}$$
$$f'(x) = -6x^{-5} + \frac{1}{3} \cdot x^{-3}$$

Lösung 34

Es handelt sich bei allen Funktionen um verkettete Funktionen, denn 👁: Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt. Die Ableitung der entsprechenden Funktion wird wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^2.$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

Innere Funktion: $v(x) = x^2 + 3x \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 2x + 3$

Äußere Funktion: $u(v) = v^2 \quad \Longrightarrow \quad u'(v) = 2v.$

➤ *Anwenden der 🔧 Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der 🔧 Kettenregel:

$$f'(x) = 2 \cdot (v(x)) \cdot v'(x) = 2 \cdot \left(x^2 + 3x\right) \cdot (2x + 3).$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \left(x^2 + 3x\right)^4.$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

Innere Funktion: $v(x) = x^2 + 3x \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 2x + 3$

Äußere Funktion: $u(v) = v^4 \quad \Longrightarrow \quad u'(v) = 4v^3.$

➤ *Anwenden der 🔧 Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der 🔧 Kettenregel:

$$f'(x) = 4 \cdot (v(x))^3 \cdot v'(x) = 4 \cdot \left(x^2 + 3x\right)^3 \cdot (2x + 3).$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}.$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

Innere Funktion: $v(x) = x^2 + 3x \quad \Longrightarrow \quad v'(x) = 2x + 3$

Äußere Funktion: $u(v) = \sqrt{v} = v^{\frac{1}{2}} \quad \Longrightarrow \quad u'(v) = \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{v}}.$

Lösungen

➤ *Anwenden der 🔧 Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der 🔧 Kettenregel:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{v(x)}} \cdot v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x}} \cdot (2x + 3).$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3x}}.$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

$$\begin{array}{llcl} \text{Innere Funktion:} & v(x) = x^2 + 3x & \Longrightarrow & v'(x) = 2x + 3 \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \frac{1}{\sqrt{v}} = v^{-\frac{1}{2}} & \Longrightarrow & u'(v) = -\frac{1}{2}v^{-\frac{3}{2}}. \end{array}$$

➤ *Anwenden der 🔧 Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der 🔧 Kettenregel:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}v(x)^{-\frac{3}{2}} \cdot v'(x) = -\frac{1}{2}\left(x^2 + 3x\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot (2x + 3).$$

Lösung 35

Es handelt sich um eine verkettete Funktionen, denn 👁: Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt. Die Ableitung wird wie im Rezept bestimmt. Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x}.$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

$$\begin{array}{llcl} \text{Innere Funktion:} & v(x) = x^2 + 3x & \Longrightarrow & v'(x) = 2x + 3 \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \mathrm{e}^v & \Longrightarrow & u'(v) = \mathrm{e}^v. \end{array}$$

➤ *Anwenden der 🔧 Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der 🔧 Kettenregel:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{v(x)} \cdot v'(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x} \cdot (2x + 3).$$

Lösung 36

Es handelt sich bei allen Funktionen um verkettete Funktionen, denn 👁: Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt. Die Ableitung der entsprechenden Funktion wird wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sin\left(x^2 + 3x\right).$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

$$\begin{array}{llcl} \text{Innere Funktion:} & v(x) = x^2 + 3x & \Longrightarrow & v'(x) = 2x + 3 \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \sin(v) & \Longrightarrow & u'(v) = \cos(v). \end{array}$$

➤ *Anwenden der Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = \cos(v(x)) \cdot v'(x) = \cos\left(x^2 + 3x\right) \cdot (2x + 3).$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \cos\left(x^2 + 3x\right).$$

➤ *Bestimmung der inneren / äußeren Funktion und deren Ableitung*

Es gilt:

Innere Funktion: $v(x) = x^2 + 3x \implies v'(x) = 2x + 3$

Äußere Funktion: $u(v) = \cos(v) \implies u'(v) = -\sin(v).$

➤ *Anwenden der Kettenregel*

Für die Ableitung der Funktion f gilt nach der Kettenregel:

$$f'(x) = -\sin(v(x)) \cdot v'(x) = -\sin\left(x^2 + 3x\right) \cdot (2x + 3).$$

Lösung 37

Es handelt sich bei allen Funktionen um ein Produkt von Funktionen, denn: Jede Funktion kann als Produkt von mehreren Funktionen dargestellt werden. Die Ableitung der entsprechenden Funktion wird wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (4x + 2) \cdot (x^2 + 2x).$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

Erster Faktor: $u(x) = 4x + 2 \implies u'(x) = 4$

Zweiter Faktor: $v(x) = x^2 + 2x \implies v'(x) = 2x + 2.$

➤ *Anwenden der Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = 4 \cdot (x^2 + 2x) + (4x + 2) \cdot (2x + 2).$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^3 \cdot \left(x^3 - 4x\right).$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

Erster Faktor: $u(x) = x^3 \implies u'(x) = 3x^2$

Zweiter Faktor: $v(x) = x^3 - 4x \implies v'(x) = 3x^2 - 4.$

➤ *Anwenden der Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = 3x^2 \cdot (x^3 - 4x) + x^3 \cdot (3x^2 - 4).$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left(4x^3 - x\right) \cdot e^x$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = 4x^3 - x & \Longrightarrow & u'(x) = 12x^2 - 1 \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = e^x & \Longrightarrow & v'(x) = e^x. \end{array}$$

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = \left(12x^2 - 1\right) \cdot e^x + \left(4x^3 - x\right) \cdot e^x.$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^x$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = \sin(x) & \Longrightarrow & u'(x) = \cos(x) \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = e^x & \Longrightarrow & v'(x) = e^x. \end{array}$$

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = \cos(x) \cdot e^x + \sin(x) \cdot e^x.$$

Lösung 38

Es handelt sich bei allen Funktionen um ein Produkt von Funktionen, denn 👁: Jede Funktion kann als Produkt von mehreren Funktionen dargestellt werden. Die Ableitung der entsprechenden Funktion wird wie im Rezept bestimmt.

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sin(x) \cdot e^{2x}.$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = \sin(x) & \Longrightarrow & u'(x) = \cos(x) \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = e^{2x} & \Longrightarrow & v'(x) = 2e^{2x}. \end{array}$$

Für die Bestimmung der Ableitung des zweiten Faktors wurde die 🔧 Kettenregel verwendet.

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = \cos(x)e^{2x} + \sin(x) \cdot 2e^{2x}$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (4x + 2)^2 \cdot \left(x^2 + 2x\right).$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

$$\begin{array}{lllll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = (4x + 2)^2 & \Longrightarrow & u'(x) = 2 \cdot (4x + 2) \cdot 4 \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = x^2 + 2x & \Longrightarrow & v'(x) = 2x + 2. \end{array}$$

Für die Bestimmung der Ableitung des ersten Faktors wurde die 🔧 Kettenregel verwendet.

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = 8 \cdot (4x+2) \cdot \left(x^2+2x\right) + (4x+2)^2 \cdot (2x+2)\,.$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x} \cdot (2x^3+4x)$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

Erster Faktor: $u(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x} \implies u'(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x} \cdot (2x+3)$

Zweiter Faktor: $v(x) = 2x^3+4x \implies v'(x) = 6x^2+4.$

Für die Bestimmung der Ableitung des ersten Faktors wurde die 🔧 Kettenregel verwendet.

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2+3x} \cdot (2x+3) \cdot \left(2x^3+4x\right) + \mathrm{e}^{x^2+3x} \cdot \left(6x^2+4\right).$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left(x^2+12x\right) \cdot \mathrm{e}^{2x^4-2x}$$

➤ *Bestimmung der beiden Faktoren und deren Ableitung*

Es gilt mit obigen Bezeichnungen:

Erster Faktor: $u(x) = x^2+12x \implies u'(x) = 2x+12$

Zweiter Faktor: $v(x) = \mathrm{e}^{2x^4-2x} \implies v'(x) = \mathrm{e}^{2x^4-2x} \cdot \left(8x^3-2\right).$

Für die Bestimmung der Ableitung des zweiten Faktors wurde die 🔧 Kettenregel verwendet.

➤ *Anwenden der 🔧 Produktregel*

Die Ableitung der Funktion f kann mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt werden:

$$f'(x) = (2x+12) \cdot \mathrm{e}^{2x^4-2x} + \left(x^2+12x\right) \cdot \mathrm{e}^{2x^4-2x} \cdot \left(8x^3-2\right).$$

Lösung 39

(a) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = 20x^4 - 26x^2$$

ist eine Summe, denn 👁: Die Funktion kann als Summe zweier Funktionen geschrieben werden.

(b) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

ist eine Summe, denn 👁: Die Funktion kann als Summe zweier Funktionen geschrieben werden.

(c) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = e^{4x+6}$$

ist eine Kette, denn : Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt.

(d) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = 2x \cdot e^{2x+4}$$

ist eine Produkt, denn : Die Funktion kann als Produkt zweier Funktionen geschrieben werden.

(e) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$$

ist eine Kette, denn : Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt.

(f) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = \ln(25x + 8)$$

ist eine Kette, denn : Eine Funktion wird in eine andere Funktion eingesetzt.

Lösung 40

(a) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = 4x^2 - 10x$$

ist eine Summe, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Summenregel

(b) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = \left(x^3 + 2\right) \cdot \left(x^2 + 7x\right)$$

ist ein Produkt, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Produktregel

(c) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = e^{5x+3}$$

ist eine Kette, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Kettenregel

(d) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = 2x \cdot e^{3x^2-2}$$

ist ein Produkt, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Produktregel

(e) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 8}$$

ist eine Kette, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Kettenregel

(f) Die übergeordete Struktur der Funktion

$$f(x) = \ln(17x + 5)$$

ist eine Kette, die Ableitungsregel, die zuerst angewandt werden muss, ist daher die Kettenregel

Lösung 41

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = -2x^5 + x^3 + 3.$$

Es handelt sich um eine Summe von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Summenregel bestimmt. Es gilt:

$$f'(x) = -2 \cdot 5 \cdot x^{5-1} + 3 \cdot x^{3-1} = -10x^4 + 3x^2.$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{4x^2 - 7}.$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{lll} \text{Innere Funktion:} & v(x) = 4x^2 - 7 & \Longrightarrow \quad v'(x) = 8x \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \sqrt{v} & \Longrightarrow \quad u'(v) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}. \end{array}$$

und damit:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4x^2 - 7}} \cdot (8x).$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + 4} + 5.$$

Nach der Regel für konstante Summanden entspricht die Ableitung der Funktion f der Ableitung von

$$g(x) = \sqrt{2x^2 + 4}.$$

Bei der Funktion g handelt es sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{lll} \text{Innere Funktion:} & v(x) = 2x^2 + 4 & \Longrightarrow \quad v'(x) = 4x \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \sqrt{v} & \Longrightarrow \quad u'(v) = \dfrac{1}{2\sqrt{v}}. \end{array}$$

und damit:

$$f'(x) = g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x^2 + 4}} \cdot (4x).$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = 3e^{2x}.$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{lll} \text{Innere Funktion:} & v(x) = 2x & \Longrightarrow \quad v'(x) = 2 \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = e^v & \Longrightarrow \quad u'(v) = e^v. \end{array}$$

und damit:

$$f'(x) = 3 \cdot e^{2x} \cdot 2 = 6e^{2x}.$$

(e) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = 2e^{4x+6}.$$

Lösungen

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{llll} \text{Innere Funktion:} & v(x) = 4x + 6 & \Longrightarrow & v'(x) = 4 \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = \mathrm{e}^v & \Longrightarrow & u'(v) = \mathrm{e}^v. \end{array}$$

und damit:

$$f'(x) = 2 \cdot \mathrm{e}^{4x+6} \cdot 4 = 8\mathrm{e}^{4x+6}.$$

(f) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = (x + 4)\,\mathrm{e}^{x^2+4}.$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt. Es gilt für die Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{llll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = x + 4 & \Longrightarrow & u'(x) = 1 \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = \mathrm{e}^{x^2+4} & \Longrightarrow & v'(x) = (2x)\,\mathrm{e}^{x^2+4}. \end{array}$$

Die Ableitung des zweiten Faktors wurde mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt:

$$f'(x) = 1 \cdot \mathrm{e}^{x^2+4} + (x + 4) \cdot (2x) \cdot \mathrm{e}^{x^2+4}.$$

Lösung 42

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (3 + \cos(x))^4$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt.

Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{llll} \text{Innere Funktion:} & v(x) = 3 + \cos(x) & \Longrightarrow & v'(x) = -\sin(x) \\ \text{Äußere Funktion:} & u(v) = v^4 & \Longrightarrow & u'(v) = 4v^3. \end{array}$$

und damit:

$$f'(x) = 4\,(3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = (5x + 1) \cdot \sin(x^2)$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der 🔧 Produktregel bestimmt.

Es gilt für die beiden Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{array}{llll} \text{Erster Faktor:} & u(x) = 5x + 1 & \Longrightarrow & u'(x) = 5 \\ \text{Zweiter Faktor:} & v(x) = \sin(x^2) & \Longrightarrow & v'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x). \end{array}$$

Die Ableitung des zweiten Faktors wurde mithilfe der 🔧 Kettenregel bestimmt. Es gilt:

$$f'(x) = 5 \cdot \sin(x^2) + (5x + 1) \cdot \cos(x^2) \cdot (2x).$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left(4 + \mathrm{e}^{3x}\right)^5$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Kettenregel bestimmt.

Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\text{Innere Funktion:} \quad v(x) = 4 + \mathrm{e}^{3x} \implies v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}$$
$$\text{Äußere Funktion:} \quad u(v) = v^5 \implies u'(v) = 5v^4.$$

Die Ableitung der inneren Funktion wurde mithilfe der Kettenregel bestimmt. Es gilt:

$$f'(x) = 5\left(4 + \mathrm{e}^{3x}\right)^4 \cdot 3\mathrm{e}^{3x}.$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{2x}$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt.

Es gilt für die beiden Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\text{Erster Faktor:} \quad u(x) = \sqrt{x} \implies u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\text{Zweiter Faktor:} \quad v(x) = \mathrm{e}^{2x} \implies v'(x) = 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Die Ableitung des zweiten Faktors wurde mithilfe der Kettenregel bestimmt.
Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \mathrm{e}^{2x} + \sqrt{x} \cdot \mathrm{e}^{2x} \cdot 2.$$

(e) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \left(2x^2 + 5\right) \cdot \mathrm{e}^{-2x}$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt.

Es gilt für die beiden Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\text{Erster Faktor:} \quad u(x) = 2x^2 + 5 \implies u'(x) = 4x$$
$$\text{Zweiter Faktor:} \quad v(x) = \mathrm{e}^{-2x} \implies v'(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}.$$

Die Ableitung des zweiten Faktors wurde mithilfe der Kettenregel bestimmt.
Es gilt:

$$f'(x) = (4x) \cdot \mathrm{e}^{-2x} + \left(2x^2 + 5\right) \cdot \mathrm{e}^{-2x} \cdot (-2).$$

(f) Gesucht ist die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{3x}$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt.

Es gilt für die beiden Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\text{Erster Faktor:} \quad u(x) = \cos(x) \implies u'(x) = -\sin(x)$$
$$\text{Zweiter Faktor:} \quad v(x) = \mathrm{e}^{3x} \implies v'(x) = 3\mathrm{e}^{3x}.$$

Die Ableitung des zweiten Faktors wurde mithilfe der Kettenregel bestimmt.
Es gilt:

$$f'(x) = -\sin(x) \cdot \mathrm{e}^{3x} + \cos(x) \cdot \mathrm{e}^{3x} \cdot 3.$$

Lösung 43

(a) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + 5x^2 - x + \frac{7}{2}$$

Es handelt sich um eine Summe von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Summenregel bestimmt. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{2}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} + 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} - 1 \\ &= -2x^2 + 10x - 1. \end{aligned}$$

(b) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\sin(2x)}{2\pi}.$$

Es gilt:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\sin(2x).$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned} &\text{Innere Funktion:} && v(x) = 2x && \Longrightarrow && v'(x) = 2 \\ &\text{Äußere Funktion:} && u(v) = \frac{1}{2\pi}\sin(v) && \Longrightarrow && u'(v) = \frac{1}{2\pi}\cos(v). \end{aligned}$$

und damit:

$$f'(x) = \frac{1}{2\pi}\cos(2x) \cdot 2 = \frac{\cos(2x)}{\pi}.$$

(c) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = e^{-3x}.$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned} &\text{Innere Funktion:} && v(x) = -3x && \Longrightarrow && v'(x) = -3 \\ &\text{Äußere Funktion:} && u(v) = e^{v} && \Longrightarrow && u'(v) = e^{v}. \end{aligned}$$

und damit:

$$f'(x) = e^{-3x} \cdot (-3) = -3e^{-3x}.$$

(d) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = (2x - 3)\, e^{x}.$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt. Es gilt für die Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned} &\text{Erster Faktor:} && u(x) = 2x - 3 && \Longrightarrow && u'(x) = 2 \\ &\text{Zweiter Faktor:} && v(x) = e^{x} && \Longrightarrow && v'(x) = e^{x}. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2e^{x} + (2x - 3) \cdot e^{x} \\ &= (2 + 2x - 3) \cdot e^{x} \\ &= (2x - 1) \cdot e^{x}. \end{aligned}$$

(e) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x).$$

Es handelt sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt. Es gilt für die Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\text{Erster Faktor:} \quad && u(x) = \sin(x) \quad && \Longrightarrow \quad && u'(x) = \cos(x) \\
&\text{Zweiter Faktor:} \quad && v(x) = \cos(x) \quad && \Longrightarrow \quad && v'(x) = -\sin(x).
\end{aligned}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\sin(x) \cdot \sin(x) + \cos(x) \cdot \cos(x) \\
&= -\sin^2(x) + \cos^2(x).
\end{aligned}$$

(f) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = x \cdot \sin(x) + 5x^2.$$

Es handelt sich um eine Summe von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Summenregel bestimmt. Es gilt:

$$f(x) = x \cdot \sin(x) + 5x^2 = g(x) + h(x),$$

wobei

$$g(x) = x \cdot \sin(x) \quad \text{und} \quad h(x) = 5x^2$$

gelten. Bei der Funktion g handelt es sich um ein Produkt von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Produktregel bestimmt. Es gilt für die Faktoren der Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\text{Erster Faktor:} \quad && u(x) = x \quad && \Longrightarrow \quad && u'(x) = 1 \\
&\text{Zweiter Faktor:} \quad && v(x) = \sin(x) \quad && \Longrightarrow \quad && v'(x) = \cos(x).
\end{aligned}$$

und damit:

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 1 \cdot \sin(x) + x \cdot (\cos(x)) \\
&= \sin(x) - x \cdot \cos(x)
\end{aligned}$$

Für die Ableitung der Funktion f gilt:

$$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x) + 10x$$

(g) Gesucht ist die Ableitung der Funktion f mit

$$f(x) = e^{-0{,}3x \cdot \cos(x)}.$$

Es handelt sich um eine Verkettung von Funktionen, die Ableitung wird daher mithilfe der Kettenregel bestimmt. Es gilt für die innere / äußere Funktion und deren Ableitung:

$$\begin{aligned}
&\text{Innere Funktion:} \quad && v(x) = -0{,}3x\cos(x) \\
&\qquad \Longrightarrow \quad && v'(x) = -0{,}3\cos(x) - 0{,}3x \cdot (-\sin(x)) \\
&\text{Äußere Funktion:} \quad && u(v) = e^v \quad \Longrightarrow \quad u'(v) = e^v.
\end{aligned}$$

Für die Ableitung der inneren Funktion wurde die Produktregel verwendet.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{-0{,}3x \cdot \cos(x)} \cdot (-0{,}3\cos(x) - 0{,}3x \cdot (-\sin(x))) \\
&= e^{-0{,}3x \cdot \cos(x)} \cdot (-0{,}3\cos(x) + 0{,}3x\sin(x))
\end{aligned}$$

Lösung 44

(a) $\dfrac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \dfrac{4}{3}$

(b) $\dfrac{14{,}31}{4} \approx 3{,}58$

(c) $\dfrac{5\sqrt{3}}{4} \approx 2{,}17$

Lösung 45

Zunächst berechnet man die mittlere Steigung m zwischen $x = 0$ und $x = 6$. Es gilt

$$m = \frac{f(6) - f(0)}{6} = \frac{0{,}432}{6} = 0{,}072.$$

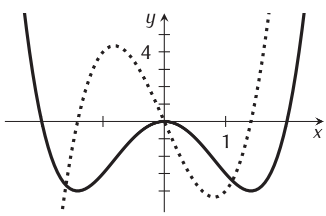
Eine Steigung von $m = 0{,}072$ entspricht einer Steigung von 7,2 %. Somit ist das Schild korrekt. Um zu überprüfen, wie groß die Steigung an einem Punkt ist, bildet man die erste Ableitung der Funktion f. Es gilt:

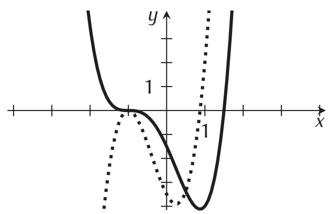
$$f'(x) = 0{,}001 \cdot (3x^2 + 12x).$$

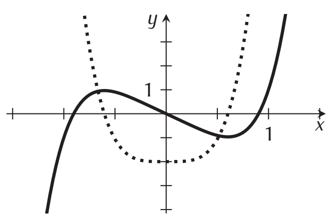
An der Stelle $x = 5$ gilt $f'(5) = 0{,}135$, was einer Steigung von 13,5 % entspricht. Somit ist schon an dieser Stelle die Steigung des Hangs so groß, dass das Auto nicht mehr den Berg hinaufkommt. (Die Steigung wird für größere x-Werte noch größer.)

Lösung 46

Der Graph der Ableitung ist jeweils gepunktet eingezeichnet.







Lösung 47

(a) Wahr: Denn die dargestellte Funktion ist der Graph der Ableitung von F. Man sieht deutlich, dass sie in diesem Intervall oberhalb der x-Achse verläuft.

(b) Unentscheidbar: Die Anzahl der Nullstellen einer Funktion sind am Graphen der Ableitung nicht ablesbar.

(c) Wahr: Denn es gilt:

$$\int_{-3{,}5}^{0} f'(x)\,\mathrm{d}x = f(-3{,}5) - f(0) = 0 - 0 = 0.$$

(d) Falsch: Der Graph der Funktion f berührt die x-Achse bei $x = 0$. Also hat der Graph von F einen Sattelpunkt an der Stelle $x = 0$.

(e) Falsch: Es gilt $F'(x) = f(x) \geq 0$ für $-2 \leq x \leq 0$. Daher ist die Funktion F zwischen $x = -2$ und $x = 0$ monoton steigend und es folgt $F(-2) \leq F(0)$.

Lösung 48

(a) Der durchgezogene Graph hat bei $x = 0$ eine doppelte Nullstelle, während der gestrichelte Graph dort einen Sattelpunkt besitzt.

Der Graph von f ist also gestrichelt und der Graph von f' ist durchgezogen.

(b) An der Maximumstelle des gestrichelten Graphen hat der durchgezogene Graph eine Nullstelle. Der durchgezogene Graph hat im negativen Bereich einen Tiefpunkt und bei $x = 0$ einen Hochpunkt. Exakt an diesen Stellen hat der gestrichelte Graph jeweils eine Nullstelle.

Der Graph von f ist gepunktet, der Graph von f' ist durchgezogen und der Graph von f'' ist gestrichelt.

(c) Der gepunktete Graph gehört zu einer Ableitungsfunktion, weil es keinen Funktionsgraphen gibt, der bei dessen Tiefpunkt bei $x = 2$ eine Nullstelle hat. Dann muss die Funktion f im dargestellten Bereich fallend sein bis $x = 2$. Dies trifft genau auf den gestrichelt-gepunkteten Graphen zu.

Der Graph der Funktion f ist gestrichelt-gepunktet und der Graph der Funktion f' ist gepunktet.

Weiter sieht man, dass der gestrichelte Graph zur Funktion g gehört und der durchgezogene Graph zur Funktion g' gehört.

Der gestrichelte Graph hat einen Sattelpunkt bei $x = 0$ und der gestrichelte Graph berührt bei $x = 0$ die x-Achse. Also gehört der gestrichelte Graph zur Funktion g und der durchgezogene Graph zur Funktion g'.

Lösung 49

(a) Schnittpunkt: $\mathrm{P}(\,2 \mid 6\,)$. Schnittwinkel: $\alpha = 2{,}72^\circ$.

(b) Schnittpunkt: $\mathrm{P}(\,0 \mid 0\,)$. Schnittwinkel: $\alpha = 30{,}96^\circ$.

Lösung 50

(a) Zunächst muss man die Nullstellen der inneren Funktion bestimmen:

$$\begin{aligned} & x^3 + 8 = 0 \\ \iff\quad & x^3 = -8 \\ \iff\quad & x = -2. \end{aligned}$$

Es handelt sich um eine einfache Nullstelle mit Vorzeichenwechsel. Daher bildet man jetzt zum Beispiel:

$$0^3 + 8 = 8 > 0.$$

Damit ergibt sich:

$$\mathcal{D} = [-2; \infty].$$

(b) Es gilt:

$$\mathcal{D} = [-\infty; 3[.$$

Lösung 51

Die maximale Definitionsmenge lautet $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Den x-Wert des Schnittpunkts der beiden Graphen erhält man durch Gleichsetzen der Funktionsterme:

$$-2 = (x^3 + 2x^2 + 2x + 2)(x - 1)$$

Ausmultiplizieren der rechten Seite führt zu:

$$\begin{aligned} -2 &= x^4 + x^3 - 2 \\ 0 &= x^4 + x^3 \\ 0 &= x^3(x + 1) \end{aligned}$$

Dadurch ergeben sich die beiden Lösungen $x_1 = 0$ und $x_2 = -1$.

Lösung 52

(a) Die Einschränkungen des Definitionsbereichs werden sowohl von der Wurzelfunktion als auch der Logarithmusfunktion verursacht.

Das Argument im ln muss positiv sein. Damit sind alle negativen Zahlen und die 0 bereits ausgeschlossen und es bleibt maximal $\mathbb{R}^+$.

Für die Wurzelfunktion gilt: Der Radikand muss nichtnegativ sein. Es muss also gelten:

$$1 - \ln(x) \geq 0 \quad \iff \quad 1 \geq \ln(x) \quad \iff \quad e \geq x.$$

Also gilt für den Definitionsbereich $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ \cap]-\infty; e] =]0; e].$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 2 &= \sqrt{1 - \ln(x)} \\ 4 &= 1 - \ln(x) \\ \ln(x) &= -3 \\ x &= e^{-3} = \frac{1}{e^3}. \end{aligned}$$

Weil quadriert wurde, muss eine Probe durchgeführt werden. Es gilt:

$$f(e^{-3}) = \sqrt{1 - \ln(e^{-3})} = \sqrt{4} = 2.$$

Damit ist das gesuchte x gerade $x = e^{-3}$.

Lösung 53

Gesucht sind jeweils die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit der x-Achse. Diese werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = x^2 - 4.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 - 4 = 0$$

➤ Es handelt sich um eine quadratische Gleichung, denn 👁: x^2 ist die höchste Potenz, die Lösung der Gleichung kann mithilfe der 🔧 p-q-Formel bestimmt werden und es gilt:

$$x_1 = -2 \quad \text{und} \quad x_2 = 2$$

➤ Die Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse sind damit:

$$N_1(-2\,|\,0) \quad \text{und} \quad N_2(2\,|\,0).$$

(b) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = x^3 - 8.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 8 = 0$$

➤ Die Lösung der Gleichung kann direkt bestimmt werden und es gilt:

$$x_N = 2.$$

➤ Der Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist damit:

$$N(2\,|\,0).$$

(c) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - 4x = 0$$

➤ Es handelt sich um eine Gleichung mit x in jedem Summanden, denn 👁: In jedem Summanden tritt eine Potenz von x auf, daher wird 🔧 zunächst die kleinste gemeinsame Potenz ausgeklammert und anschließend der Satz vom Nullprodukt angewandt.

$$\begin{aligned} x^3 - 4x = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad x \cdot \left(x^2 - 4\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2 - 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = 0 \quad \text{oder} \quad x_2 = -2, x_3 = 2 \end{aligned}$$

Lösungen

➤ Die Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse sind damit:

$$N_1(0\,|\,0),\ N_2(-2\,|\,0) \quad \text{und} \quad N_3(2\,|\,0).$$

(d) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^4 - 4x^2 + 4 = 0$$

➤ Es handelt sich um eine biquadratische Gleichung, denn 👁: Es treten lediglich x^4, x^2 und Zahlen auf. Die Lösung der Gleichung kann mithilfe der 🔧 Substitution $u = x^2$ und anschließender Anwendung der p-q-Formel bestimmt werden und es gilt:

$$\begin{aligned} x^4 - 4x^2 + 4 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u^2 - 4u + 4 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u = 2 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 = -\sqrt{2} \quad \text{und} \quad x_2 = \sqrt{2} \end{aligned}$$

➤ Die Schnittpunkte von G_f mit der x-Achse sind damit:

$$N_1\left(-\sqrt{2}\,\middle|\,0\right) \quad \text{und} \quad N_2\left(\sqrt{2}\,\middle|\,0\right).$$

Lösung 54

Gesucht sind jeweils die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit der x-Achse. Diese werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = e^{5x} - 1.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{5x} - 1 = 0$$

➤ Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 1, denn 👁: Es treten nur eine Potenz von e und Zahlen auf. Es wird der 🔧 Exponentialterm isoliert und die Gleichung anschließend logarithmiert.

$$e^{5x} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{5x} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 5x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 0.$$

➤ Der Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist damit:

$$N(0\,|\,0).$$

(b) Gesucht sind die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse, wobei

$$f(x) = e^{5x} - e^{3x}.$$

➤ Die x-Werte der Schnittpunkte des Graphen von f mit der x-Achse sind gegeben durch die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad e^{5x} - e^{3x} = 0$$

➤ Es handelt sich um eine Exponentialgleichung vom Typ 2, denn 👁: Es treten unterschiedliche Potenzen von e, aber keine Zahlen auf. Es wird die 🔧 Potenz mit dem kleinsten gemeinsamen Exponenten von e ausgeklammert und der Satz vom Nullprodukt angewendet:

$$e^{5x} - e^{3x} = 0 \iff e^{3x} \cdot \left(e^{2x} - 1\right) = 0$$
$$\iff e^{3x} = 0 \quad \text{oder} \quad e^{2x} - 1 = 0$$

Es gilt:

- $e^{3x} = 0$ besitzt keine Lösung für $x \in \mathbb{R}$
- $e^{2x} - 1 = 0 \iff e^{2x} = 1 \iff x = 0.$

➤ Der Schnittpunkt von G_f mit der x-Achse ist damit:

$$N(0 \mid 0)\,.$$

Lösung 55

Gesucht sind jeweils die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen mit der y-Achse. Diese werden wie im Rezept bestimmt:

(a) Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse, wobei

$$f(x) = x^2 - 4.$$

Es gilt:

$$f(0) = 0^2 - 4 = -4.$$

Der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse ist damit:

$$S(0 \mid -4)\,.$$

(b) Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse, wobei

$$f(x) = x^3 - 8.$$

Es gilt:

$$f(0) = 0^3 - 8 = -8.$$

Der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse ist damit:

$$S(0 \mid -8)\,.$$

(c) Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse, wobei

$$f(x) = x^3 - 4x.$$

Es gilt:

$$f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 = 0.$$

Der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse ist damit:

$$S(0 \mid 0)\,.$$

(d) Gesucht ist der Schnittpunkt des Graphen von f mit der y-Achse, wobei

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + 4.$$

Es gilt:

$$f(0) = 0^4 - 4 \cdot 0^2 + 4 = 4.$$

Der Schnittpunkt von G_f mit der y-Achse ist damit:

$$S(0 \mid 4)\,.$$

Lösung 56

(a) ➤ *Bestimmung der Ableitung*

Leite die Funktion f ab:

$$f'(x) = 5x^4 - 60x^3.$$

➤ *Bestimmung der Nullstelle*

Berechne die Nullstelle von f':

$$f'(x) = 5x^4 - 60x^3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 12.$$

➤ *Untersuchung der Art des Extremums*

Untersuche, ob und welche Art von Extremum vorliegt.

➤ **Lösungsweg mit f'':**

Es gilt:

$$f''(x) = 20x^3 - 180x^2.$$

Da

$$f''(x_1) = f''(0) = 0$$

ist der Test mit der zweiten Ableitung erfolglos und es muss der Lösungsweg mit VZW eingeschlagen werden.
An der Stelle x_2 gilt jedoch:

$$f''(x_2) = f''(12) > 0.$$

Also besitzt der Graph von f an der Stelle $x_2 = 12$ ein Minimum.

➤ **Lösungsweg mit VZW:**

Hier werden Werte links und rechts von den Nullstellen $x_{1,2}$ eingesetzt und die jeweiligen Funktionswerte für f' verglichen. Es gilt:

x	-1	0	1	12	13
f'(x)	65	0	-55	0	10985

An der Stelle $x_1 = 0$ wechselt f' das Vorzeichen von + nach -. Deshalb liegt dort ein Maximum vor.
An der Stelle $x_2 = 12$ wechselt f' das Vorzeichen von - nach +. Daher liegt dort ein Minimum vor.
Jetzt können noch die y-Werte der Extremstellen bestimmt werden:

$$f(0) = 0, \quad f(12) = -62208.$$

Damit hat der Graph von f den Hochpunkt $H(\,0\,|\,0\,)$ und den Tiefpunkt $T(\,12\,|\,-62208\,)$.

(b) Lösungsweg wie in Teil (a):

$$f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$$

$$\Longrightarrow \quad \text{Hochpunkt } H(\,-3\,|\,18\,), \text{ Tiefpunkt } T\left(\frac{1}{3}\,\middle|\,-\frac{14}{27}\right).$$

Lösung 57

Gegeben ist die Funktionenschar f_t. Gesucht ist die Funktionsgleichung der Kurve, auf der alle Tiefpunkte der Schar f_t liegen. Zunächst wird die Ableitung von f_t bestimmt. Es gilt:

$$f_t'(x) = \mathrm{e}^{x-t} - 1.$$

Die Nullstellen der Ableitung sind gegeben durch die Lösung der Gleichung

$$\mathrm{e}^{x-t} - 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = t.$$

Mit dem VZW-Kriterium wird bestätigt, dass der Graph G_t an der Stelle $x = t$ einen Tiefpunkt besitzt. Dessen Koordinaten werden nun berechnet:

$$f_t(t) = \mathrm{e}^{t-t} - t = 1 - t.$$

Der Tiefpunkt hat also folgende Koordinaten:

$$x = t$$

$$y = 1 - t.$$

Setzt man $x = t$ in die zweite Gleichung ein, so erhält man $y(x) = 1 - x$. Dies ist die Gleichung der Kurve, auf welcher alle Tiefpunkte der Schar f_t liegen.

Lösung 58

Gegeben ist die Funktionenschar $f_t(x)$ und gesucht ist der Parameter t, für den der Wert des Tiefpunktes von $f_t(x)$ am kleinsten ist.
Es wird zuerst die Ableitung von $f_t(x)$ bestimmt und gleich Null gesetzt:

$$f_t'(x) = 6x - 12 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2.$$

Mit dem VZW-Kriterium wird nachgewiesen, dass an der Stelle $x = 2$ ein Tiefpunkt ist. Nun wird bestimmt für welches t die Funktion

$$f_t(2) = g(t) = 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 4t^2 - 6t = 4t^2 - 6t - 12$$

minimal wird. Zuerst wird die Ableitung bestimmt und gleich Null gesetzt:

$$g'(t) = 8t - 6 = 0 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{3}{4}$$

$$g''(t) = 8 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \text{an dieser Stelle ist der } y\text{-Wert des Tiefpunkts minimal.}$$

Die Funktionenschar $f_t(x)$ nimmt also für $t = \frac{3}{4}$ den kleinsten Wert an der Stelle $x = 2$ an. An dieser Stelle befindet sich jeweils der Tiefpunkt.

Lösungen

Lösung 59

(a) Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion. Also betrachtet man nur den Term mit der höchsten Potenz.

Für $x \to +\infty$ gilt:

$$f(x) = -6x^2 + 5x^5 - 2 \approx 5x^5 \to +\infty.$$

Für $x \to -\infty$ gilt:

$$f(x) = -6x^2 + 5x^5 - 2 \approx 5x^5 \to -\infty.$$

(b) Der Funktionsterm von f ist ein Produkt einer ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion. Für den Fall $x \to +\infty$ handelt es sich um einen unbestimmten Ausdruck, bei der keine Termumformung hilft. Gesucht ist also die dominanteste Komponente des Terms, das ist hier e^{-x}.

Für $x \to +\infty$ gilt daher

$$f(x) = -x^3 e^{-x} \to 0.$$

Für $x \to -\infty$ liegt kein unbestimmter Ausdruck vor. Es gilt:

$$f(x) = -x^3 e^{-x} \to +\infty \cdot (+\infty) = +\infty.$$

(c) Der Funktionsterm von f ist ein Produkt einer ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion. Für $x \to +\infty$ tritt ein unbestimmter Ausdruck auf, bei der keine Termumformung hilft. Gesucht ist also die dominanteste Komponente des Terms, das ist hier e^x. Also gilt:

$$f(x) = e^x - x \to +\infty.$$

Für $x \to -\infty$ wird das Grenzwertverhalten jedes Ausdrucks bestimmt. Es gilt:

$$f(x) = e^x - x \to 0 + \infty = +\infty.$$

(d) Der Funktionsterm von f ist ein Produkt einer ganzrationalen Funktion und einer Exponentialfunktion. Für $x \to +\infty$ tritt ein unbestimmter Ausdruck auf, bei der keine Termumformung hilft. Gesucht ist also die dominanteste Komponente des Terms, das ist hier e^{-3x^2+2}.

Für $x \to +\infty$ gilt:

$$f(x) = -x^5 e^{-3x^2+2} \to 0.$$

Für $x \to -\infty$ gilt:

$$f(x) = -x^5 e^{-3x^2+2} \to 0.$$

(e) Für $x \to +\infty$ wird das Grenzwertverhalten jedes Ausdrucks berechnet. Es gilt:

$$f(x) = 100 \cdot \left(1 - e^{-0,35x}\right) \to 100(1 - 0) = 100.$$

Für $x \to -\infty$ gilt:

$$f(x) = 100 \cdot \left(1 - e^{-0,35x}\right) \to -\infty.$$

Lösung 60

Gesucht ist die langfristige Menge des Wirkstoffes im Blut, also das Verhalten von f für $t \to +\infty$. Es wird das Grenzwertwertverhalten jedes einzelnen Ausdrucks bestimmt. Es gilt:

$$f(t) = 55 \cdot (2 - e^{-0,1t^2})$$
$$f(t) \to 55 \cdot (2 - 0) = 110 \quad \text{für} \quad t \to \infty.$$

Langfristig wird sich eine Wirkstoffmenge von 110 mg im Blut befinden.

Lösung 61

(a) Gegeben ist $f(x) = x^2 + 4x - 3$ und gesucht ist die Funktionsgleichung der um 3 LE nach rechts und um 1 LE nach oben verschobenen Funktion.

$$g(x) = f(x-3) + 1 = x^2 - 2x - 5.$$

(b) $g(x) = f(x+1) - 1 = \mathrm{e}^{2+3x+x^2} - 1.$

(c) $g(x) = f(x+3) + 1 = \dfrac{x^2 + 8x + 14}{x^2 + 6x + 8}.$

(d) Gegeben ist $g(x) = \sin(x^2 + 1)$ und gesucht ist die Funktion $f(x)$, die aus $g(x)$ durch eine Verschiebung um 2 LE nach links und um 2 LE nach unten hervorgeht. Es muss also gelten:

$$f(x) = g(x+2) - 2 = \sin(5 + 4x + x^2) - 2.$$

Lösung 62

(a) Gegeben ist $f(x) = (-x^2 + 2x)(x - 5)$ und gesucht ist der Funktionsterm der an der x-Achse gespiegelten Funktion von $f(x)$.

$$g(x) = -f(x) = -(-x^2 + 2x)(x-5) = 10x - 7x^2 + x^3.$$

(b) $g(x) = -f(x) = -\sin(x) - x^2.$

(c) $g(x) = -f(x) = 5 - \dfrac{x^2 + 3x - 7}{2x + 2}.$

Lösung 63

(a) Gegeben ist $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$ und gesucht ist der Funktionsterm der an der y-Achse gespiegelten Funktion von $f(x)$.

$$g(x) = f(-x) = -x^3 - 3x^2 - 5x + 1.$$

(b) $g(x) = f(-x) = \cos(-x) + \mathrm{e}^{-x} = \cos(x) + \mathrm{e}^{-x}.$

(c) Es gilt:

$$g(x) = f(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}.$$

Es fällt auf, dass gilt: $g(x) = f(-x) = f(x)$, d. h. $f(x)$ ist achsensymmetrisch.

(d) Es gilt:

$$g(x) = f(-x) = \frac{(-x)^3 + 3(-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - 3x}{-x^3 + x} = \frac{x^3 + 3x}{x^3 - x}.$$

Es fällt auf, dass gilt: $g(x) = f(-x) = f(x)$, d. h. $f(x)$ ist achsensymmetrisch.

Lösung 64

(a) Falls die Tasse Tee exakt nach dem Modell abkühlen würde, müsste sich die Temperatur $f(t)$ einstellen. Vergleicht man die beiden Werte zu gegebenem Zeitpunkt t, erhält man folgende Tabelle:

t	5	10	15	20	25
$f(t)$	47,65	32,07	26,33	24,23	23,45
$T(t)$	47,6	32,5	27,4	24,2	23,5

Man sieht, dass das Modell den tatsächlichen Temperaturverlauf sehr gut beschreibt. Es gibt nur wenige Abweichungen, die aber so klein sind, dass sie auch Messfehler sein könnten.

(b) Die prozentuale Abweichung $A(t)$ eines Messwertes vom Modell erhalten wir durch die Gleichung

$$A(t) = \frac{T(t) - f(t)}{f(t)}.$$

Betrachtet man die Werte dieser Gleichung nun auch wieder in einer Tabelle, so sieht man hier:

t	5	10	15	20	25
$A(t)$	-0,10	1,32	4,06	-0,12	0,21

Somit erkennt man, dass die prozentuale Abweichung nach 15 Minuten am höchsten ist. Dort beträgt sie 4,06 %.

Lösung 65

(a) Die Funktion $f(x)$ hat nur an den Stellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 6$ Punkte mit der Steigung 0, da $f'(x)$ hier Nullstellen hat:

$$f'(2) = 0,$$
$$f'(6) = 0.$$

- Stelle $x_1 = 2$:
  Dort liegt eine Sattelstelle von $f(x)$ vor, da $f'(x)$ das Vorzeichen an der Stelle $x = 2$ nicht wechselt.
- Stelle $x_2 = 6$:
  Dort liegt ein Tiefpunkt von $f(x)$, denn links von $x_2 = 6$ ist $f'(x)$ negativ, rechts von $x_2 = 6$ ist $f'(x)$ positiv. Damit liegt ein Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung von - nach + vor.

(b) Zu klären ist, ob der Tiefpunkt an der Stelle $x_2 = 6$ lokal oder global ist. Aus dem Schaubild kann abgelesen werden:

$$f'(x) \leq 0 \quad \text{für} \quad x < 6$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ für $0 < x < 6$ monoton fallend. Zudem ist dem Schaubild folgendes zu entnehmen:

$$f'(x) \geq 0 \quad \text{für} \quad x > 6$$

Damit ist die Funktion $f(x)$ für $6 < x < 8$ monoton steigend.

Da $f(x)$ nur im Intervall $(0; 8)$ definiert ist, hat $f(x)$ an der Stelle $x_2 = 6$ somit ein globales Minimum.

Lösung 66

(a) Mit dem Ansatz $f'(x) = 0$ werden potenzielle Extremstellen bestimmt:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{2}{3} \text{ oder } x = 2.$$

Mit dem Kriterium der zweiten Ableitung wird der Typ der Extrema erkannt. Es ist

$$f''\left(-\frac{2}{3}\right) < 0, \quad f''(2) > 0.$$

Die Funktion $f(x)$ hat damit den Hochpunkt

$$\mathrm{H}\left(-\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{256}{27}\right)$$

und den Tiefpunkt

$$\mathrm{T}(2 \,|\, 0).$$

Mit dem Ansatz $f''(x) = 0$ werden potenzielle Wendestellen bestimmt:

$$f''(x) = 6x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$$

Da

$$f'''\left(\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

hat die Funktion $f(x)$ den Wendepunkt

$$\mathrm{W}\left(\frac{2}{3} \,\middle|\, \frac{128}{27}\right).$$

(b) Die Funktion $f(x)$ ist eine ganzrationale Funktion. Also genügt es den Term mit der höchsten Potenz von x zu betrachten. Dies ist x^3. Also gilt:

$$f(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty$$
$$f(x) \to -\infty \text{ für } x \to -\infty.$$

(c) Für die Ableitung von $f(x)$ gilt:

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \begin{cases} \leq 0 \text{ für } -\frac{2}{3} \leq x \leq 2 \\ \geq 0 \text{ für } x \leq -\frac{2}{3} \text{ oder } x \geq 2 \end{cases}$$

Für $-\frac{2}{3} \leq x \leq 2$ ist $f(x)$ damit monoton fallend. Für $x \leq -\frac{2}{3}$ und für $x \geq 2$ ist $f(x)$ monoton steigend.

Alternativ kann man auch argumentieren, dass vor dem Hochpunkt H die Funktion $f(x)$ monoton steigt, dann bis zum Tiefpunkt T wieder fällt und anschließend wieder steigt.

(d) Der Grad von $f(x)$ ist 3. Also hat $f(x)$ hat an der Stelle $x_1 = -2$ eine einfache Nullstelle und an der Stelle $x_2 = 2$, falls

$$f(x) = a \cdot (x + 2) \cdot (x - 2)^2.$$

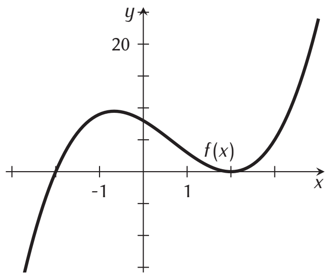
Da der Leitkoeffizient (die Zahl vor x^3) im gegebenen Funktionsterm gleich 1 ist, folgt

Lösungen

$a = 1$. Ausmultiplizieren führt zu:

$$f(x) = (x + 2) \cdot (x - 2)^2 = x^3 - 2x^2 - 4x + 8.$$

(e) In der folgenden Skizze kann man alle vorherigen Resultate ablesen:



Lösung 67

(a) Die Gewinnfunktion G ergibt sich aus der Differenz der Einnahmen (E) und der Herstellungskosten (K). Damit gilt:

$$\begin{aligned} G(x) = E(x) - K(x) &= 4x - (51 + 0{,}44x + 0{,}005x^2) \\ &= -0{,}005x^2 + 3{,}56x - 51. \end{aligned}$$

(b) Um die Gewinnzone zu bestimmen, wird der Bereich bestimmt, in dem $G(x) > 0$. Dafür werden die Nullstellen von G bestimmt:

$$G(x) = -0{,}005x^2 + 3{,}56x - 51 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \approx 15 \text{ und } x \approx 697.$$

Die Gewinnzone liegt zwischen 15 und 697 verkauften Birnen.

(c) Um die Stückzahl zu ermitteln, bei der der maximale Gewinn erwirtschaftet wird, muss der Hochpunkt von $G(x)$ ermittelt werden. Dazu wird die erste Ableitung gleich Null gesetzt:

$$G'(x) = -0{,}01x + 3{,}56 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 356$$

Da ein VZW von + zu - stattfindet, liegt an der Stelle $x = 356$ ein Hochpunkt. Der Gewinn wird berechnet, indem $x = 356$ in $G(x)$ eingesetzt wird:

$$G(356) = 582{,}68.$$

Bei einer Stückzahl von 356 Birnen wird der maximale Gewinn von 582,68 Euro gemacht.

(d) Wenn über diese Stückzahl hinaus produziert wird, werden die Herstellungskosten größer als die Einnahmen. Der Gewinn nimmt also wieder ab.

(e) Die Stückkosten werden durch die Funktion

$$S(x) = \frac{K(x)}{x}, x > 0$$

beschrieben. Um zu erfahren, wann die Stückkosten minimal sind, wird das Minimum von $S(x)$ bestimmt. Mit

$$S(x) = \frac{51 + 0{,}44x + 0{,}005x^2}{x} = \frac{51}{x} + 0{,}44 + 0{,}005x$$

folgt:

$$S'(x) = 0{,}005 - \frac{51}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x \overset{x>0}{\approx} 101.$$

Mit dem VZW-Kriterium wird gezeigt, dass ein Tiefpunkt vorliegt.
Die Stückkosten sind bei ungefähr 101 Birnen minimal.

Lösung 68

(a) Lösungsweg wie im Rezept:

➤ *Geradengleichung*

Die allgemeine Geradengleichung ist gegeben durch:

$$y = mx + c.$$

➤ *Ableitung von f:*

Die Ableitung von f ist gegeben durch:

$$f'(x) = x^3 - 6x.$$

➤ *Bestimmung der Steigung*

Setze $x = 2$ (x-Wert von P) in die Ableitung f' ein:

$$m = f'(2) = -4.$$

➤ *Ansatz für Tangentengleichung:*

Ein Ansatz für die Tangentengleichung ist also gegeben durch:

$$y = -4x + c.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts*

Setz die Koordinaten von P in die Tangentengleichung und erhalte c:

$$-7 = -4 \cdot 2 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 1.$$

Die gesuchte Tangente hat die Gleichung

$$y = -4x + 1.$$

(b) Lösungsweg wie in Teil (a):

$$y = -x + \sqrt{2}.$$

(c) Lösungsweg wie in Teil (a):

$$y = \frac{1}{\mathrm{e}}x - \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Lösung 69

Zunächst bestimmt man den Wendepunkt von G. Dazu bildet man die zweite Ableitung von f und bestimmt deren Nullstellen.
Es gelten:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$$
$$f''(x) = 6x - 6 = 0$$

Die Nullstelle der zweiten Ableitung ist also $x = 1$. Den y-Wert des Wendepunkts erhält man, wenn man den gefunden x-Wert in die Funktion f einsetzt. Es gilt:

$$f(1) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{W}(1 \mid 2).$$

Nun kann man wie im Rezept eine Tangente durch den Punkt $\mathrm{W}(1 \mid 2)$ legen.

Lösungen

➤ *Bestimmung der Steigung*
Es gilt:

$$m = f'(1) = -1.$$

➤ *Ansatz für die Tangentengleichung*
Somit ist der Ansatz für die Gleichung der Tangente:

$$y = -x + c.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts*
Einsetzen der Koordinaten von W liefert dann c:

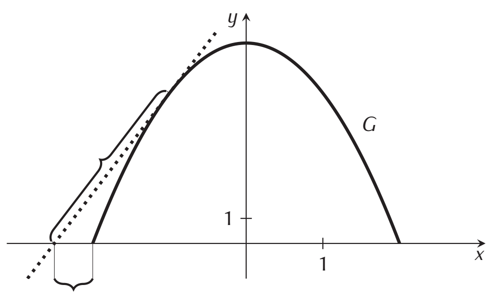
$$2 = -1 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 3.$$

Die Gleichung der Wendetangente ist also

$$y = -x + 3.$$

Lösung 70

Im nachfolgenden Schaubild sind sowohl der Deich als auch die Leiter eingezeichnet. Der Graph G beschreibt den Deich, an den die Leiter (gepunktet) tangential angelegt werden soll. Die beiden Klammern markieren die in beiden Aufgabenteilen gesuchten Längen:



(a) Zuerst wird die Gleichung zur Beschreibung der Leiter über das Rezept zur Bestimmung einer Tangente in einem Kurvenpunkt aufgestellt:

➤ *Ableitung der Funktion f:*

Es gilt:

$$f'(x) = -4x$$

➤ *Bestimmung der Steigung:*

Setze $x = -1$ in f' ein:

$$m = f'(-1) = -4(-1) = 4.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts:*

Setze P in die Tangentengleichung $y = 4x + c$ ein und erhalte c:

$$6 = 4(-1) + c \quad \Longrightarrow \quad c = 10.$$

➤ *Bestimmung der Tangentengleichung:*

Somit ist die Gleichung der Tangente durch P an G gegeben durch:

$$y = 4x + 10.$$

Um den Abstand von der Leiter zum Deichrand zu bestimmen, muss zunächst der Rand des Deiches gefunden werden. Dazu werden die Nullstellen der Funktion f im Intervall $-2 \leq x \leq 2$ bestimmt:

$$0 = -2x^2 + 8 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2, x_2 = -2$$

Außerdem wird noch die Nullstelle der Tangente benötigt:

$$0 = 4x + 10 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{5}{2}.$$

Da der Abstand zwischen dem linken Deichrand und der Nullstelle der Tangente (Leiter) 0,5 beträgt, ist der Fuß der Leiter somit 0,5 Meter vom Deichrand entfernt. Die Leiter muss also 50 cm entfernt vom Deichrand aufgestellt werden.

(b) Um zu erfahren, wie lang die Leiter mindestens sein muss, wird der Satz von Pythagoras genutzt. Der Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse, der Punkt $\mathrm{P}(-1\,|\,6)$ und der Punkt $\mathrm{Q}(-1\,|\,0)$ bilden ein rechtwinkliges Dreieck. Die Länge der Hypothenuse ist die Länge h der Leiter. Mit Pythagoras folgt:

$$h^2 = (1{,}5)^2 + 6^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{38{,}25} \approx 6{,}2$$

Die Leiter muss eine Länge von mindestens 6,2 m haben.

Lösung 71

Gesucht ist die Tangente (in Abhängigkeit von z) an den Wendepunkt mit der kleinsten positiven x-Koordinate von G_z. Hierfür wird zunächst die gesuchte Wendestelle von G_z bestimmt. Dafür werden die Nullstellen der zweiten Ableitung von f_z bestimmt und diejenige Stelle x_z mit dem kleinsten positiven x-Wert gesucht. Es gelten:

$$f_z'(x) = -\sin\left(\frac{x}{z}\right)$$

$$f_z''(x) = -\frac{1}{z} \cdot \cos\frac{x}{z}$$

und damit

$$f_z''(x) = -\frac{1}{z} \cdot \cos\frac{x}{z} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_z = \frac{1}{2}\pi z,$$

da bei $\frac{\pi}{2}$ die kleinste positive Nullstelle des Kosinus ist. Damit kann dann der Funktionswert des Wendepunktes bestimmt werden:

$$f_z\left(\frac{1}{2}\pi z\right) = z\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + z = 0 + z$$

$$\Longrightarrow \quad \mathrm{W}_z\left(\frac{1}{2}\pi z \,\middle|\, z\right).$$

Nun kann das Rezept zum Bestimmen einer Tangente in einem Kurvenpunkt angewendet werden:

➤ *Bestimmung der Tangentensteigung*

Setze $x_z = \frac{1}{2}\pi z$ (x-Wert von W_z) in f_z' ein:

$$m = f_z'\left(\frac{1}{2}\pi z\right) = -\sin\frac{1}{2}\pi = -1.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts*
Setze W_z in die Tangentengleichung $y = -x + c$ ein und erhalte c:

$$z = -\left(\frac{1}{2}\pi \cdot z\right) + c$$
$$\Longrightarrow \quad c = z + \frac{1}{2}\pi \cdot z = z \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Somit ist die Gleichung der Tangente durch denjenigen Wendepunkt W_z mit dem kleinsten positiven x-Wert an G_z gegeben durch:

$$y_z = -x + z \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\pi\right).$$

Lösung 72

Gegeben ist die Funktionsschar f_t und gesucht ist eine Gleichung der Tangente g_t an der Stelle $x = 1$. Für den Funktionswert von f_t an der Stelle $x = 1$ gilt:

$$f_t(1) = \mathrm{e} + t + 1.$$

Finden der Tangente mit Rezept:
➤ Allgemeine Geradengleichung:

$$g_t = mx + c.$$

➤ Ableitung von f_t:

$$f_t'(x) = \mathrm{e}^x + t.$$

➤ Einsetzen von $x = 1$ in f_t':

$$m = f_t'(1) = \mathrm{e} + t.$$

➤ Ansatz für die Tangentengleichung:

$$g_t(x) = (\mathrm{e} + t)x + c.$$

➤ Punkt P in die Tangentengleichung einsetzen und c bestimmen:

$$\mathrm{e} + t + 1 = (\mathrm{e} + t) \cdot 1 + c \quad \Longrightarrow \quad c = 1$$

Damit ist $g_t(x) = (\mathrm{e} + t)x + 1$ die Gleichung der Tangente.
Mit $g_t(x) = (\mathrm{e} + t)x + 1$ werden alle Tangenten an $f_t(x)$ an der Stelle $x = 1$ erfasst. Alle Tangenten schneiden sich in ihrem y-Achsenabschnitt, d. h. in $S(0 \mid 1)$.

Lösung 73

Gegeben sind

$$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 4, \quad \text{für} \quad x \leq 2.$$

und $P(2 \mid f(2))$.
Gesucht ist die Tangente durch den Kurvenpunkt $P(2 \mid f(2))$ für $x > 2$. Es wird wie im Rezept zur Bestimmung einer Tangente im Kurvenpunkt vorgegangen:
➤ *Allgemeine Geradengleichung:*
Die allgemeine Geradengleichung ist gegeben durch:

$$y = mx + c.$$

➤ *Ableitung von f:*
Für die Ableitung von f gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x.$$

➤ *Bestimmung der Steigung:*
Setze $x = 2$ (x-Wert von P) in f' ein:

$$m = f'(2) = -2.$$

➤ *Ansatz für Tangentengleichung:*
Ein Ansatz für die Tangentengleichung ist damit:

$$y = -2x + c.$$

➤ *Bestimmung des y-Achsenabschnitts:*
Setze P in die Tangentengleichung ein und erhalte c:

$$f(2) = \frac{4}{3} = -2 \cdot 2 + c \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{16}{3}.$$

Damit ist

$$y = -2x + \frac{16}{3}$$

für $x > 2$ die Gleichung der linearen Funktion, deren Graph ohne Knick in P an den Graphen von f angeschlossen werden kann.

Lösung 74

Lösungsweg wie im Rezept:
➤ *Ableitung bestimmen*
Für die Ableitung von f gilt:

$$f'(x) = 9x^2.$$

➤ *Bestimmung der Berührstellen*
Löse die Gleichung $f'(x) = 18$ (liefert die x-Koordinaten der Berührpunkte):

$$f'(x) = 18 \quad \Longleftrightarrow \quad 9x^2 = 18 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

➤ *Bestimmung der Berührpunkte*
Setze die x-Werte in die Funktion f ein, das liefert die y-Koordinaten der Berührpunkte.
Für $x_1 = \sqrt{2}$ gilt:

$$f\left(\sqrt{2}\right) = 3\left(\sqrt{2}\right)^3 - 5 = 6\sqrt{2} - 5 \quad \Longrightarrow \quad P_1\left(\sqrt{2} \,\middle|\, 6\sqrt{2} - 5\right).$$

Analog gilt für $x_2 = -\sqrt{2}$:

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = 3\left(-\sqrt{2}\right)^3 - 5 = -6\sqrt{2} - 5 \quad \Longrightarrow \quad P_2\left(-\sqrt{2} \,\middle|\, -6\sqrt{2} - 5\right).$$

➤ *Ansatz für die Tangentengleichungen*
Ein Ansatz für Tangenten mit der gegebenen Steigung ist dann gegeben durch:

$$y = 18x + c$$

➤ *Bestimmung der y-Achsenabschnitte*
Setze P_1 und P_2 jeweils in Tangentengleichung ein, das liefert jeweils den y-Achsenabschnitt c.

Lösungen

Für P_1 gilt:

$$6\sqrt{2} - 5 = 18 \cdot \sqrt{2} + c_1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = -12\sqrt{2} - 5.$$

Genauso gilt für P_2:

$$-6\sqrt{2} - 5 = 18 \cdot \left(-\sqrt{2}\right) + c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad c_2 = 12\sqrt{2} - 5.$$

Es gibt somit genau zwei Tangenten mit einer Steigung von $m = 18$ und ihre Gleichungen lauten

$$y_1 = 18x - 12\sqrt{2} - 5$$

beziehungsweise

$$y_2 = 18x + 12\sqrt{2} - 5.$$

Lösung 75

Gegeben ist

$$f(t) = \frac{1}{3} \cdot t^2 \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq 20.$$

Die Funktion f' gibt für $0 \leq t \leq 20$ die Geschwindigkeit der Rakete an.
Gesucht ist damit die Stelle, an welcher $f'(t) = 4$ gilt. Die Ableitung der Funktion f ist gegeben durch:

$$f'(t) = \frac{2}{3} \cdot t.$$

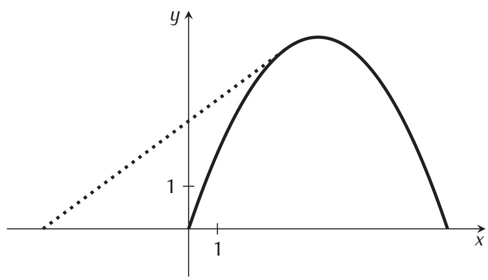
Um zu erfahren, wann die Rakete eine Geschwindigkeit von 4 km/s hatte, wird das t ermittelt, für das $f'(t) = 4$ gilt:

$$\frac{2}{3} \cdot t = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad t = 6.$$

Die Rakete hatte also 6 Sekunden nach Start eine Geschwindigkeit von 4 km/s.

Lösung 76

Der Graph von f beschreibt den Querschnitt des Hügels, an den eine Rampe (gepunktet) tangential angelegt werden soll:



(a) Um herauszufinden, an welcher Stelle des Hügels die Rampe aufliegt, muss ermittelt werden, an welcher Stelle die Steigung von 50 %, also $m = 0{,}5$, nicht mehr überschritten wird. Dazu wird zunächst die Ableitung der Funktion f bestimmt:

$$f'(x) = 2 - \frac{4}{9} \cdot x.$$

Nun wird diejenige Stelle bestimmt, an welcher die Tangente an den Graphen genau die Steigung $m = 0{,}5$ ist, also:

$$2 - \frac{4}{9}x = 0{,}5 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{27}{8} = 3{,}375.$$

Um die genaue Stelle auf dem Berg zu ermitteln wird $x = \frac{27}{8}$ noch in f eingesetzt:

$$-\frac{2}{9} \cdot \left(\frac{27}{8}\right)^2 + 2\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{135}{32}.$$

Die Rampe liegt also im Punkt $\mathrm{A}\left(\frac{27}{8} \,\middle|\, \frac{135}{32}\right)$ auf dem Berg.

(b) Um zu ermitteln, wie weit die Rampe vom Fuß des Berges entfernt liegt, wird zunächst die Tangentengleichung bestimmt, welche die Rampe beschreibt. Dazu wird A in die Tangentengleichung $y = 0{,}5x + c$ eingesetzt um c zu erhalten:

$$\frac{135}{32} = 0{,}5 \cdot \frac{27}{8} + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = \frac{81}{32}.$$

Somit ist die Tangentengleichung der Rampe durch A an den Graphen von f gegeben durch:

$$y = 0{,}5x + \frac{81}{32}.$$

Als nächstes wird für die Abstandsberechnung die Nullstelle der Tangente bestimmt:

$$0{,}5x + \frac{81}{32} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{81}{16} \approx -5{,}065.$$

Da der Graph von f durch den Ursprung verläuft, ist der Abstand vom Berg zur Rampe damit $\frac{81}{16}$.

Die Rampe steht also etwas über 5 m vom Fuß des Berges entfernt auf dem Erdboden.

Lösung 77

Zunächst wird der Zeitpunkt ermittelt, an welchem der Stein eine Geschwindigkeit von 60 m/s erreicht. Dazu wird zunächst die Ableitung der Funktion f bestimmt. Diese beschreibt die Geschwindigkeit des Steins. Es gilt:

$$f'(t) = -9{,}6t$$

Der Zeitpunkt, an dem der Stein eine Geschwindigkeit von 60 m/s erreicht, entspricht der Lösung der Gleichung $f'(t_1) = -60$. Das Vorzeichen ist negativ, da der Stein fällt. Also:

$$-9{,}6t_1 = -60 \quad \Longleftrightarrow \quad t_1 = \frac{25}{4} = 6{,}25.$$

Nun wird berechnet, in welcher Höhe sich der Stein dann befindet:

$$f\left(\frac{25}{4}\right) = 10\,000 - 4{,}8\left(\frac{25}{4}\right)^2 = 9812{,}5.$$

Von nun an fällt der Stein mit einer konstanten Geschwindigkeit von 60 m/s. Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $\mathrm{P}(6{,}25 \mid 9812{,}5)$ hat die Gleichung:

$$y = -60t + c.$$

Der Punkt P liegt auf der Tangente, damit kann der y-Achsenabschnitt c bestimmt werden:

$$9812{,}5 = -60 \cdot \frac{25}{4} + c \quad \Longrightarrow \quad c = 10187{,}5.$$

Lösungen

Damit erhält man für den weiteren Fall des Steins die Tangentengleichung

$$y = -60t + 10187{,}5.$$

Von dieser muss nun noch die Nullstelle bestimmt werden:

$$-60t + 10187{,}5 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{4075}{24} \approx 169{,}79.$$

Der Stein kommt also nach ungefähr 170 s auf dem Boden an.
☞ *Alternative:* Die Geschwindigkeit des Steins liegt nach 6,25 s bei 60 m/s. Dann hat der Stein eine Höhe von 9812,5 m. Weil der Stein danach mit der konstanten Geschwindigkeit von 60 m/s weiterfällt, kann diejenige Zeit, die der Stein dann benötigt, berechnet werden durch:

$$t_2 = \frac{9812{,}5}{60} = \frac{3925}{24}.$$

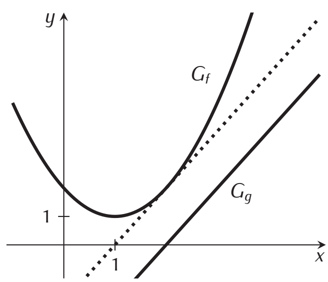
Die Zeit t, die der Stein benötigt, um auf dem Erdboden aufzutreffen, setzt sich dann zusammen aus der Zeit t_1, in welcher der Stein beschleunigt und der Zeit t_2, in welcher der Stein mit konstanter Geschwindigkeit fällt. Es gilt also:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{25}{4} + \frac{3925}{24} = \frac{4075}{24} \approx 169{,}79.$$

Der Stein kommt also nach ungefähr 170 s auf dem Boden an.

Lösung 78

Zuerst hilft eine Skizze der beiden Leiterbahnen.



Am nächsten kommen sich die beiden Bahnen an der Stelle, an welcher die beiden Graphen dieselbe Steigung haben. Da der Graph von g konstant die Steigung $m = 2$ hat, wird diejenige Stelle gesucht, an welcher auch der Graph von f eine Steigung von $m = 2$ hat. Für die Ableitung von f gilt:

$$f'(x) = 2x - 2.$$

Nun wird die Stelle gesucht, für die $f'(x) = 2$ gilt, also

$$2x - 2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2.$$

Um nun den Abstand zwischen beiden Bahnen zu bestimmen, wird zunächst die Gleichung der Tangente t an den Graphen von f an der Stelle $x = 2$ bestimmt. Diese hat die Gleichung

$$t(x) = x + c.$$

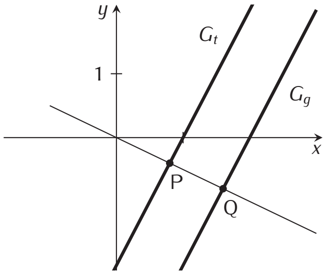
Es gilt:

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 2 = 2.$$

Durch Einsetzen des Punktes P(2 | 2) kann nun die Tangentengleichung bestimmt werden:

$$2 = 2 \cdot 2 + c \quad \Longleftrightarrow \quad c = -2.$$

Damit ist die Gleichung der Tangente t gegeben durch $t(x) = 2x - 2$.
Eine Skizze der Graphen von g und der Tangente t ist im unten stehenden Schaubild dargestellt.



Schließlich muss noch der Abstand zwischen der Gerade g und der Tangente t bestimmt werden.
Dazu benötigt man eine Gerade, die senkrecht auf der Tangente t steht; der y-Achsenabschnitt dieser Geraden ist dafür unerheblich. Daher arbeitet man der Einfachheit halber mit der Gerade

$$h(x) = -\frac{1}{2}x.$$

Nun werden die Schnittpunkte der Gerade h wird mit der Tangente t und mit g bestimmt. Diese sind gegeben durch:

$$\mathrm{P}\left(\frac{8}{5} \,\middle|\, -\frac{4}{5}\right) \quad \text{und} \quad \mathrm{Q}\left(\frac{4}{5} \,\middle|\, -\frac{2}{5}\right).$$

Schließlich berechnet man den Abstand d beider Schnittpunkte mit dem Satz von Pythagoras:

$$d = \sqrt{\left(\frac{8}{5} - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0{,}89.$$

Da der Abstand zwischen den beiden Graphen von f und g kleiner als 1 µm wird, kommt es zum Funkenüberschlag.

Lösung 79

(a) Lösungsweg wie im Rezept:

➤ *Ableitung:*

Es gilt:

$$f'(x) = 2x - 4.$$

➤ *Allgemeine Tangentengleichung:*

Die allgemeine Tangentengleichung lautet:

$$y = f'(u)(x - u) + f(u).$$

➤ *Einsetzen des Funktionswertes und der Ableitung*

Setze die Werte $f(u)$ und $f'(u)$ ein. Das liefert:

$$y = (2u - 4)(x - u) + u^2 - 4u + 6.$$

➤ *Bestimmung der Berührstellen*

Setze die Koordinaten von P ein und löst nach u auf:

$$-7 = (2u-4)(2-u) + u^2 - 4u + 6$$

$$\Longrightarrow \quad u^2 - 4u - 5 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad u_1 = -1, \quad u_2 = 5.$$

➤ *Bestimmung der Tangentengleichungen*

Setze die gefundenen Werte in allgemeine Tangentengleichung ein. Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle u_1:

$$y = -6x + 5$$

Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle u_2:

$$y = 6x - 19.$$

(b) Lösungsweg wie in Teil (a)

$$u_1 = -2: \quad y = -6x + 1$$

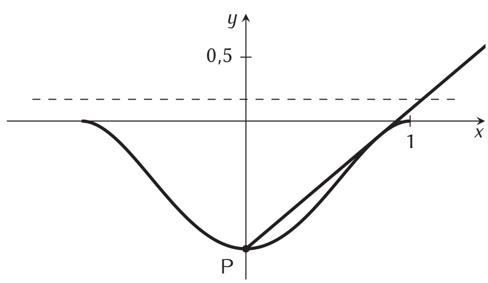
$$u_2 = 2: \quad y = 2x + 1.$$

(c) Lösungsweg wie in Teil (a)

$$u_1 = 1: \quad y = \mathrm{e} \cdot x.$$

Lösung 80

Die Sichtlinie wird beschrieben durch eine Gerade ausgehend vom tiefsten Punkt P des Grabens. Wenn der Punkt P gerade noch gesehen werden soll, berührt diese Gerade den Graphen.



Gesucht ist also zunächst diejenige Tangente an den Graphen von f, welche durch den Punkt $P(0 \mid -1)$ verläuft. Es gelten:

$$f(x) = -x^4 + 2x^2 - 1$$

$$f(x) = -4x^3 + 4x$$

Einsetzen von $f(u)$ und $f'(u)$ in die allgemeine Tangentengleichung liefert:

$$y = (-4u^3 + 4u)(x - u) - u^4 + 2u^2 - 1.$$

Einsetzen von $P(0 \mid -1)$:

$$-1 = (-4u^3 + 4) \cdot (-u) - u^4 + 2u^2 - 1 = u^2(3u^2 - 2).$$

Ausklammern von u^2 liefert die Lösungen

$$u_1 = 0, \quad u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad u_3 = -\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Die Lösung $u_1 = 0$ liefert die Tangente im Tiefpunkt, welche zur Lösung der Aufgabe nicht weiterhilft. Aufgrund der Symmetrie genügt es mit der Lösung $u = u_3$ weiterzuarbeiten.

Einsetzen von $u = \sqrt{\frac{2}{3}}$ in die allgemeine Tangentengleichung liefert:

$$y = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot x - 1 = \frac{4}{9}\sqrt{6}x - 1.$$

Steht eine Person an dem Punkt, an dem man gerade noch den Punkt P sehen kann, so hat in diesem Punkt die Tangente die Höhe von 170 cm über dem Boden. Unter Beachtung der Einheiten erhält man folgende Gleichung:

$$\frac{4}{9}\sqrt{6} \cdot x - 1 = 0{,}17 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 1{,}075.$$

Da sich der Rand des Grabens an der Stelle $x = 1$ befindet, muss die Person einen Abstand von 0,075 Längeneinheiten von diesem haben.
Die Person darf also höchstens 75 cm vom Rand des Grabens entfernt stehen, um den tiefsten Punkt des Grabens sehen zu können.

Lösung 81

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Man leitet also die Funktion F ab und überprüft dann, ob dabei f herauskommt.

(a) Es gilt:

$$F'(x) = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x = 12x^2 - 4x = f(x)$$

(b) Es gilt:

$$F'(x) = 15 \cdot 2x - 3 = 30x - 3 = f(x)$$

Lösung 82

Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt. Man leitet also F ab und überprüft dann, ob dabei f herauskommt.

(a) Hier kann man $F(x)$ mit der Produktregel ableiten:

$$F'(x) = 1 \cdot e^{x^2} + x \cdot 2xe^{x^2} = (1 + 2x^2)e^{x^2} = f(x).$$

(b) Mit der Produktregel ergibt sich:

$$F'(x) = -(2x + 2) \cdot e^{-x} - (x^2 + 2x + 2) \cdot (-1)e^{-x} = x^2e^{-x} = f(x).$$

(c) Hier lautet das Stichwort „Kettenregel“. Mit

$$F(x) = 0{,}5 \cdot \sin^2(x) = 0{,}5 \cdot (\sin(x))^2$$

ist eine Verkettung zweier Funktionen gegeben. Die innere Funktion ist $\sin x$, die äußere Funktion ist x^2. Die Ableitung von $F(x)$ ist also:

$$F'(x) = 0{,}5 \cdot 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) = \sin(x) \cos x.$$

Lösung 83

(a) $F(x) = x^8 - 7x^3 + 2x$

(b) $F(x) = 5x^3 - x^2 + x$

(c) $F(x) = x^4 - 3x^2$

(d) $F(x) = 6x^7 + 8x$

(e) $F(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x$

(f) $F(x) = \frac{5}{4}x^2 + \frac{4}{3}x^6 + 7x$

(g) $F(x) = 100x^5 - 39x^4 + 2x^3 - 25x^2 + 2x$

Lösung 84

Um die Stammfunktion durch den Punkt P zu finden, bildet man zunächst eine allgemein Stammfunktion mit konstantem Term c und setzt dann die Werte von P ein, um herauszufinden, was c ist.

(a) Es gilt:

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x + c \quad \Longrightarrow \quad F(0) = c.$$

Nach Aufgabenstellung soll gelten:

$$F(0) = 1, \quad \text{also} \quad c = 1$$

und damit:

$$F(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$$

(b) Es gilt:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + c \quad \Longrightarrow \quad F(0) = c.$$

Nach Aufgabenstellung soll gelten:

$$F(0) = 4, \quad \text{also} \quad c = 4$$

und damit:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 + 4.$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} & F(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + c \\ \Longrightarrow \quad & F(1) = 1^6 - \frac{3}{2} \cdot 1^4 + c = 1 - \frac{3}{2} + c = -\frac{1}{2} + c. \end{aligned}$$

Nach Aufgabenstellung soll gelten:

$$F(1) = 1, \quad \text{also} \quad c = \frac{3}{2}$$

und damit:

$$F(x) = x^6 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{3}{2}.$$

(d) Es gilt:

$$F(x) = c \quad \Longrightarrow \quad F(7) = c.$$

Nach Aufgabenstellung soll gelten:

$$F(x) = 8 \quad \Longrightarrow \quad c = 8$$

und damit:

$$F(x) = 8$$

Lösung 85

(a) $F(x) = -x^5 - \frac{3}{4}x^4$.

(b) $F(x) = \frac{7}{4x^4} + x^3 - 4x$.

(c) $F(x) = \frac{4\sqrt{x}}{3}$.

(d) $F(x) = -\sin(x) - 5\cos(x)$.

(e) Zunächst multipliziert man den Term aus und erhält

$$f(x) = (x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4.$$

Damit folgt

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x.$$

(f) Hier kürzt man zunächst einmal den Bruch mit x durch:

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 - x}{2x} = \frac{x^2 + 2x - 1}{2} = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}.$$

Es folgt

$$F(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x.$$

Lösung 86

Die Zahl t wird wie eine gewöhnliche Zahl behandelt. Beachte, dass $\sin(t)$ nicht von x abhängt. Es gilt:

$$F_t(x) = -\sin(tx) - x\sin(t)$$

Lösung 87

Der Parameter a wird wie eine gewöhnliche Zahl behandelt. Daher ergibt sich für die Stammfunktion

$$F_a(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{3-a}{3}x^3 + 2x^2 + ax - x.$$

Lösung 88

(a) Die Stammfunktion von $\sqrt{x} = x^{1/2}$ ist $\frac{2}{3}x^{3/2}$. Mit dem Merksatz und $m = 4$ ergibt sich:

$$F(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3}(4x+2)^{3/2} = \frac{1}{6}(4x+2)^{3/2} = \frac{1}{6}\sqrt{(4x+2)^3}.$$

(b) $F(x) = -e^{-x}$.

(c) $F(x) = -\dfrac{1}{5(5x-2)^3}$.

(d) Den Nenner mit der zweiten Binomischen Formel umschreiben liefert

$$f(x) = \frac{7}{x^2 - 2x + 1} = \frac{7}{(x-1)^2}.$$

Mit dem Merksatz und $m = 1$ ergibt sich die Lösung

$$F(x) = -\frac{7}{x-1}.$$

(e) Man führt zunächst folgende Umformung durch:

$$\frac{1}{e^{7x+1}} = \left(e^{7x+1}\right)^{-1} = e^{-7x-1}.$$

Dann kann man nach dem Merksatz mit $m = -7$ aufleiten:

$$F(x) = -\frac{1}{7}e^{-7x-1}.$$

Lösung 89

(a) Die Menge *aller* Stammfunktionen von $f(x)$ ist:

$$F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}x^3 + C.$$

Mit $F(0) = 1$ folgt

$$1 = -\cos(0) + C \quad \Longrightarrow \quad C = 2 \quad \Longrightarrow \quad F(x) = -\cos(x) + \frac{1}{3}x^3 + 2.$$

(b) $F(x) = \dfrac{2}{3}(x+3)^{3/2} + \left(1 - 2\sqrt{3}\right)$.

(c) $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{7}{2}x^2 - 3x + 1$.

Lösung 90

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (3x^4 - 3x^2 + 1)\,dx = \frac{69}{5}$

(b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{2}{x+1}\,dx = 2\ln(2)$

(c) $\displaystyle\int_{-5}^{0} (x^2 - x + 3)\,dx = \frac{415}{6}$

Lösung 91

(a) Grenzen: $x_1 = 0{,}952$, $x_2 = 6{,}89$. Wert des Integrals: 10,2

(b) Grenzen: $x_1 = -1{,}71$, $x_2 = 1{,}32$. Wert des Integrals: 8,85

(c) Grenzen: $x_1 = -0{,}85$, $x_2 = 0{,}85$. Wert des Integrals: 2,4

(d) Grenzen: $x_1 = 0{,}127$, $x_2 = 1{,}44$. Wert des Integrals: 0,435

Lösung 92

(a) Der Integrand $f(x)$ (d.h. die zu integrierende Funktion) ist punktsymmetrisch zum Ursprung, da

$$f(-x) = \frac{-x}{7} \cdot \mathrm{e}^{-(-x)^2} = -\frac{x}{7} \cdot \mathrm{e}^{-x^2} = -f(x).$$

Da der orientierte Flächeninhalt zwischen den Grenzen -1 und 1 bestimmt werden soll, heben sich die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse auf. Damit gilt:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x}{7} \cdot \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0$$

(b) Wie im Teil (a) ist das Ergebnis auch hier 0. Auch hier ist der Integrand wieder punktsymmetrisch zum Ursprung.

Lösung 93

Da Geschwindigkeit die Änderungsrate des zurückgelegten Weges ist, erhält man den zurückgelegten Weg durch Integration. Die Strecke, die der Radfahrer während 2 Minuten zurücklegt, beträgt

$$S = \int_0^2 t \cdot (t-1)^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4 - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2\right]_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Also ist die Rennstrecke etwa 666,7 m lang.

Lösung 94

Da es sich bei der gegebenen Funktion um eine Wachstums*rate* handelt, erhält man die jeweilige Größe der Alge durch Integration.

(a) Die Größe der Alge beträgt nach 3 Monaten

$$S = \int_0^3 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^3 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}1t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{0{,}5}{1{,}1}\mathrm{e}^{1{,}1t}\right]_0^3 = \frac{5}{11}\left(\mathrm{e}^{3{,}3} - 1\right) \approx 11{,}87.$$

Nach 3 Monaten hat die Alge also eine Höhe von ca. 12 cm.

(b) Der gesuchte Zeitpunkt T berechnet sich aus:

$$\begin{aligned}
\int_0^T 0{,}5\mathrm{e}^{1{,}1t}\,\mathrm{d}t = 500 - 100 \quad &\Longrightarrow \quad \left[\frac{5}{11}\mathrm{e}^{1{,}1t}\right]_0^T = 400 \\
&\Longrightarrow \quad \frac{5}{11}\left(\mathrm{e}^{1{,}1T} - 1\right) = 400 \\
&\Longrightarrow \quad 5\mathrm{e}^{1{,}1T} = 4405 \\
&\Longrightarrow \quad T = \frac{\ln(881)}{1{,}1} \approx 6{,}16
\end{aligned}$$

Nach circa 6,2 Monaten, genauer nach etwa 184 Tagen hat die Alge eine Höhe erreicht, sodass ein Schwimmer an sie stoßen kann.

Lösung 95

(a) Der Flächeninhalt liegt unterhalb der x-Achse zwischen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$. Damit gilt für den Flächeninhalt:

$$A = -\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) Der Flächeninhalt zwischen $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[-3; 1]$ beträgt:

$$A = \int_{-3}^1 (f(x) - g(x))\ \mathrm{d}x.$$

(c) Die schraffierte Fläche lässt sich in einen linken und einen rechten Teil aufteilen. Der linke Teil wird von $f(x)$ und der Geraden $h(x) = 1$ begrenzt und erstreckt sich über das Intervall $[1; 2]$. Der Flächeninhalt des linken Teils beträgt:

$$A_1 = \int_1^2 (f(x) - h(x))\ \mathrm{d}x = \int_1^2 (f(x) - 1)\ \mathrm{d}x.$$

Für den rechten Teil gilt entsprechend:

$$A_2 = \int_2^3 (g(x) - 1)\ \mathrm{d}x.$$

Also beträgt der gesamte Flächeninhalt:

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 (f(x) - 1)\ \mathrm{d}x + \int_2^3 (g(x) - 1)\ \mathrm{d}x.$$

Lösung 96

(a) Es gilt für den schraffierten Flächeninhalt:

$$A = \int_{-1}^1 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (1 - g(x))\,\mathrm{d}x.$$

(b) Hier ist der Flächeninhalt gegeben durch

$$A = \int_{-1}^0 (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x + \int_0^2 (g(x) - f(x))\,\mathrm{d}x.$$

Lösung 97

Anhand der Produktdarstellung von f lassen sich die Nullstellen der Funktion f ohne Rechnung direkt ablesen:

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2.$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt somit

$$A = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{81}{4}.$$

Da der berechnete Wert positiv ist, folgert man, dass f zwischen den beiden Nullstellen oberhalb der x-Achse verläuft. Das berechnete Integral entspricht also dem tatsächlichen Flächeninhalt.

Lösung 98

(a) Berechne zunächst die Schnittpunkte

$$2x^2 = x + 3 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1,\, x_2 = \frac{3}{2}$$

Es gilt für $x \in \left[-1, \frac{3}{2}\right]$: $g(x) \geq f(x)$. Somit gilt für den Flächeninhalt A:

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-2x^2 + x + 3\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \frac{125}{24}$$

(b) Analog zu Aufgabenteil (a) gilt hier

$$x_1 = -2{,}5,\, x_2 = 1$$

$$A = \int_{-2{,}5}^{1} \left(-2x^2 - 3x + 5\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x\right]_{-2{,}5}^{1} = \frac{343}{24}$$

Lösung 99

(a) Betrachte

$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{(x+5)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2(x+5)^2}\right]_0^z = -\frac{1}{2(z+5)^2} + \frac{1}{50}.$$

Der Flächeninhalt ist endlich und beträgt:

$$A = \lim_{z\to\infty} A(z) = \lim_{z\to\infty}\left(-\frac{1}{2(z+5)^2} + \frac{1}{50}\right) = 0 + \frac{1}{50} = \frac{1}{50}.$$

(b) Mit der selben Vorgehensweise erhalten wir hier:

$$A(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{z+1} - 2.$$

Hier gilt jedoch

$$A(z) \to +\infty \text{ für } z \to +\infty.$$

Daher ist der eingeschlossenen Flächeninhalt nicht endlich groß.

Lösung 100

(a) $v(0) = 10\,\text{km/h}$.

(b) Der Nenner von $v(t)$ ist eine binomische Formel. Daher gilt:

$$v(t) = \frac{10}{t^2 + 2t + 1} = \frac{10}{(t+1)^2}.$$

Nun erkennt man, dass stets $v(t) > 0$ gilt. Also ist die Geschwindigkeit stets positiv und der Ballon bewegt sich daher immer aufwärts.

(c) Für die Höhe H zum Zeitpunkt T gilt:

$$H(T) = \int_0^T \frac{10}{t^2 + 2t + 1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{10}{t+1}\right]_0^T = -\frac{10}{T+1} + 10$$

Da $\lim\limits_{T\to+\infty} H(T) = 10$ beträgt die maximale Steighöhe des Ballons 10 km. Diese Höhe wird der Ballon allerdings nie erreichen, er wird sich dieser nur beliebig nahe annähern.

(d) Gesucht ist der Zeitpunkt T, für den $H(T) = 5$ gilt. Mit den Ergebnissen der letzten Teilaufgabe folgt:

$$-\frac{10}{T+1} + 10 = 5 \quad\Longrightarrow\quad T = 1.$$

Nach einer Stunde hat der Ballon die halbe Maximalhöhe erreicht. Seine Geschwindigkeit beträgt dann

$$v(1) = \frac{10}{1+2+1} = 2{,}5\,\text{km/h}.$$

Lösung 101

(a) Der Beobachtungsbeginn ist um 6 Uhr morgens, dies entspricht also $t = 0$. Analog entspricht 12 Uhr mittags dem Zeitpunkt $t = 6$. Es gilt

$$f(0) = 5, \quad f(6) = 14.$$

Die Temperatur um 6 Uhr morgens betrug 5 °C. Die Temperatur am Mittag betrug 14 °C.

(b) Um das Maximum zu finden, bildet man die beiden ersten Ableitungen:

$$f'(t) = \frac{1}{8}t^2 - 2t + 6$$
$$f''(t) = \frac{1}{4}t - 2$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung berechnen sich mit der pq-Formel zu

$$t_1 = 4, \quad t_2 = 12.$$

Eingesetzt in die zweite Ableitung ergibt sich

$$f''(4) = -1 < 0$$
$$f''(12) = 1 > 0.$$

Somit liegt bei $t = 4$ ein Maximum vor. Einsetzen von $t = 4$ in $f(t)$ liefert die Maximaltemperatur:

$$f(4) = \frac{47}{3} = 15{,}67.$$

Die Maximaltemperatur wurde um 10 Uhr morgens ($t = 4$) angenommen, sie lag bei 15,67 °C.

(c) Beobachtungsbeginn ist bei $t = 0$, Beobachtungsende ist bei $t = 12$. Somit gilt für die mittlere Temperatur T:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{12}\int_0^{12}\left(\frac{1}{24}t^3 - t^2 + 6t + 5\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{12}\cdot\left[\frac{1}{96}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 5t\right]_0^{12} \\ &= \frac{1}{12}\cdot 132 \\ &= 11 \end{aligned}$$

Die Durchschnittstemperatur an diesem Tag betrug 11 °C.

Lösung 102

Es gilt:

$$M = \frac{1}{2-0}\int_0^2 \mathrm{e}^t + 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^t + t\right]_0^2 = \frac{1}{2}((\mathrm{e}^2 + 2) - (\mathrm{e}^0 + 0)) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^2 + 1) \approx 4{,}195.$$

Es befinden in den ersten zwei Stunden des Wolkenbruchs also durchschnittlich 4195 Liter Wasser in dem Teich.

Lösung 103

(a) $V = \frac{16}{15}\pi$

(b) $V = \frac{22}{5}\pi$

(c) $V = \ln(3)\pi$

(d) $V \approx 1716{,}3$

Lösung 104

Gesucht ist Intervall Intervall $[a; b]$, wobei a und b positiv sind und $b - a = 4$ sowie $V = 500$ gilt.
Allgemein lautet das Volumen des Rotationskörpers im Intervall $[a; b]$:

$$V = \pi\int_a^b \left(\sqrt{x+1}\right)^2\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_a^b = \pi\left(\frac{1}{2}b^2 + b - \frac{1}{2}a^2 - a\right).$$

Man setzt $b = a + 4$ und $V = 500$ in die Gleichung ein:

$$500 = \pi\left(\frac{1}{2}(a+4)^2 + (a+4) - \frac{1}{2}a^2 - a\right) \quad\Longrightarrow\quad a = \frac{125}{\pi} - 3 \approx 36{,}8.$$

Also $b = a + 4 \approx 40{,}8$. Damit ist das gesuchte Intervall gefunden:

$$[36{,}8; 40{,}8].$$

Lösungen

Lösung 105

(a) Beachte, dass bei einer Längeneinheit von einem Dezimeter 1 Volumeneinheit einem Volumen von 1 Liter entspricht. Der Parameter a kann aus folgendem Ansatz ermittelt werden:

$$V_a = \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right)^2 \, \mathrm{d}x = 1$$

Ein Computeralgebrasystem kann hier sofort die Lösung finden. Will man es von Hand finden, müssen einige Rechenschritte ausgeführt werden:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^2 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right) \cdot \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + a \right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \int_0^2 \left(\frac{x^2}{100} + \frac{x}{100} + a^2 + \frac{x \cdot \sqrt{x}}{50} + \frac{\sqrt{x} \cdot a}{5} + \frac{ax}{5} \right) \mathrm{d}x \\
&= \pi \left[\frac{x^3}{300} + \frac{x^2}{200} + a^2 x + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{125} + \frac{2ax^{\frac{3}{2}}}{15} + \frac{ax^2}{10} \right]_0^2 \\
&= \pi \left(\frac{2}{75} + \frac{1}{50} + 2a^2 + \frac{4\sqrt{2}}{125} + \frac{4\sqrt{2}}{15} \cdot a + \frac{2}{5} \cdot a \right) \\
&= 6{,}2832a^2 + 2{,}4414a + 0{,}2888
\end{aligned}$$

Setzt man dies gleich 1, so folgt

$$6{,}2382a^2 + 2{,}441a + 0{,}2888 = 1 \quad \Longrightarrow \quad a_1 = -0{,}583, \quad a_2 = 0{,}194.$$

Wegen $a > 0$ ist die Lösung $a = a_2 = 0{,}194$.

(b) Um das Volumen des Glases zu bestimmen, wird das Volumen des inneren Rotationskörpers vom Volumen des äußeren Rotationskörpers subtrahiert.

$$V_{\text{Glas}} = V_{0,25} - V_{0,194} = \pi \int_0^3 \left(\frac{x}{10} + \frac{\sqrt{x}}{10} + 0{,}222 \right)^2 \mathrm{d}x - 1 \approx 0{,}2918.$$

Da eine Volumeneinheit ein Liter dm^3 beträgt und nach Kubikzentimeter cm^3 gefragt ist, muss man mit dem Faktor 1000 multiplizieren. Somit erhält man das gesuchte Volumen des Glases:

$$V_{\text{Glas}} \approx 292\,\mathrm{cm}^3.$$

Lösung 106

➤ *Skizze*
Eine Skizze ist hier hilfreich, aber nicht unbedingt notwendig.
➤ *Variable*
Die Variable, die das Problem beschreibt, wird im Folgenden a genannt und bezeichnet die Länge der kürzeren Rechtsecksseite. Die Länge der verbleibenden Seite wird b genannt.
➤ *Definitionsbereich*
Es gilt: $0 \leq a \leq 50$, denn es gibt zwei kurze Rechteckseiten und insgesamt stehen 100 Meter Zaun zur Verfügung. Die Grenzfälle sind allerdings uninteressant: Bei $a = 0$ entsteht kein Rechteck, bei $a = 50$ auch nicht (denn dann ist $b = 0$), sondern jeweils nur eine Linie.
➤ *Zielfunktion*
Die Zielfunktion erhält man in drei Schritten. Der Flächeninhalt A des Rechtecks mit den Seiten a und b ist gegeben durch:

$$A = a \cdot b.$$

Die Zaunlänge beträgt 100 m, wobei eine Seite der Fläche durch den Fluss begrenzt werden kann. Es gilt also:

$$2a + b = 100 \quad \Longrightarrow \quad b = 100 - 2a.$$

Somit kann die Funktionsgleichung der Zielfunktion A aufgestellt werden:

$$A(a) = 100a - 2a^2.$$

➤ *Extremwertbestimmung*
Hierzu werden zunächst die Ableitung A' der Funktion A und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt. Es gilt:

$$\begin{aligned} A'(a) = -4a + 100A'(a) = -4a + 100 = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a = 25 \\ f''(25) = -4 < 0 \quad &\Longrightarrow \quad \mathrm{H}(\,25 \mid A(25)\,)\,. \end{aligned}$$

Es gilt:

$$A(25) = 1250.$$

Wie oben schon erwähnt sind die Definitionsränder in diesem Kontext keine sinnvollen Lösungen. Die Fläche ist maximal, wenn die kurzen Seiten des Rechtecks 25 m und die lange Seite 50 m lang sind. Die Fläche beträgt dann $A = 1250\,\mathrm{m}^2$.

Lösung 107

➤ *Skizze*
Eine Skizze kann hier hilfreich sein, ist aber nicht unbedingt notwendig.
➤ *Zielfunktion*
Der Abstand der beiden Funktionswerte wird beschrieben durch die Funktion d mit:

$$d(x) = g(x) - f(x) = -3x^2 + 8x.$$

➤ *Extremwertbestimmung*
Hierzu werden zunächst die Ableitung d' der Funktion d und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt. Es gilt:

$$d'(x) = -6x + 8 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{4}{3}.$$

Eine Untersuchung der Funktionswerte an der soeben berechneten Stelle und der Randwerte

Lösungen

liefert :

$$d(0) = 0$$
$$d\left(\frac{4}{3}\right) = 5{,}33$$
$$d(2) = 4$$

An der Stelle $x = \frac{4}{3}$ haben die Funktionswerte der Funktionen f und g den größten Abstand. Dieser beträgt $d = 5{,}33$ LE. Beachte: Falls die Funktion $h(x) = f(x) - g(x)$ betrachtet wurde, müssen zum Schluss noch Beträge genommen werden, da nach dem Abstand gefragt wurde. Für diesen Fall gilt hier gerade $|h(x)| = -h(x)$.

Lösung 108

➤ *Skizze*
Eine Skizze ist hier nicht notwendig und wenig hilfreich.
➤ *Variable*
Die untersuchte Variable ist der Parameter t der Funktionenschar.
➤ *Definitionsbereich*
Der Definitionsbereich von t kann der Aufgabenstellung entnommen werden. Es gilt $t \in \mathbb{R}$.
➤ *Zielfunktion*
Der Funktionswert $f(x_{\mathrm{TP}})$ des Tiefpunktes $\mathrm{T}_t(\,x_{\mathrm{TP}} \mid f_t(x_{\mathrm{TP}})\,)$ soll minimal werden. Zunächst müssen also die Koordinaten des Tiefpunktes von G_{f_t} bestimmt werden. Hierzu werden zunächst die Ableitung f_t' der Funktion f_t und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

$$f_t'(x_{\mathrm{TP}}) = 6x - 12 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{\mathrm{TP}} = 2$$
$$f_t''(2) = 6 > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}_t(\,2 \mid f_t(2)\,)\,.$$

Nun kann eine Gleichung der Zielfunktion z aufgestellt werden:

$$z(t) = f_t(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 4t^2 - 6t = 4t^2 - 6t - 12.$$

➤ *Extremwertbestimmung*
Hierzu werden zunächst die Ableitung z' der Funktion z und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

$$0 = 8t - 6 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{3}{4}$$
$$z''\left(\frac{3}{4}\right) = 8 > 0.$$

Also befindet sich an der Stelle $t = \frac{3}{4}$ ein Minimum. Die Randbetrachtung entfällt hier, da $t \in \mathbb{R}$ gilt. Somit hat für $t = \frac{3}{4}$ der Tiefpunkt der Funktionenschar f_t den kleinsten Funktionswert. Dieser ist gegeben durch:

$$f_{\frac{3}{4}}(2) = -14{,}25.$$

Lösung 109

➤ *Skizze*
Eine Skizze ist hier nicht notwendig.
➤ *Variable*
Die gewählte Variable wird hier x genannt. Sie soll den Anfang des betrachteten zweimonatigen Zeitabschnitts beschreiben.
➤ *Definitionsbereich*
Der Definitionsbereich der Variable x ist gegeben durch:

$$0 \leq x \leq 10.$$

Die Funktion f ist definiert für $0 \leq t \leq 12$ und die Variable x definiert einen zweimonatigen Zeitabschnitt.
➤ *Zielfunktion*
Die Funktion f beschreibt die Durchflussgeschwindigkeit an der Staudammöffnung. Die im Zeitraum von a bis b in den Stausee geflossene Wassermenge ist gegeben durch das Integral:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Die Dauer des Zeitraums beträgt 2 Monate, daher gilt für die Integralgrenzen:

$$a = x$$
$$b = x + 2$$

Nun kann eine Gleichung der Zielfunktion g bestimmt werden:

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{x+2} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= F(x+2) - F(x) \\ &= -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{16}{3} \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet F eine Stammfunktion von f. Diese Funktion F beschreibt die Menge an Wasser, die in zwei Monaten ab dem Zeitpunkt x durch die Staudammöffnung geflossen ist.
➤ *Extremwertbestimmung*
Hierzu werden zunächst die Ableitung g' der Funktion g und deren Nullstellen bestimmt. Anschließend wird untersucht, ob es sich um ein Minimum oder ein Maximum handelt.

$$g'(x) = -x + 5$$
$$g'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 5$$

Eine Untersuchung der Funktionswerte an der soeben berechneten Stelle und der Randwerte liefert :

$$\begin{aligned} g(0) &= 5{,}3 \\ g(5) &= 17{,}8 \checkmark \\ g(10) &= 5{,}3. \end{aligned}$$

Damit beginnt am 1. Juni der Zweimonatszeitraum, in welchem das meiste Wasser durch die Staudammöffnung fließt.

Lösung 110

➤ Ganzrationale Funktion dritten Grades und alle nötigen Ableitungen:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$
$$f''(x) = 6ax + 2b.$$

➤ In der Aufgabe sind vier Bedingungen gegeben:

- Nullstelle bei $x = 0 \implies f(0) = 0$.
- Lokaler Extrempunkt $\mathrm{P}(1 \mid 10) \implies f(1) = 10$ und $f'(1) = 0$.
- Wendepunkt bei $x = -1 \implies f''(-1) = 0$.

➤ Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0^3 \cdot a + 0^2 \cdot b + 0 \cdot c + d = 0\\
f(1) &= 1^3 \cdot a + 1^2 \cdot b + 1 \cdot c + d = 10\\
f'(1) &= 3 \cdot 1^2 \cdot a + 2 \cdot 1 \cdot b + c = 0\\
f''(-1) &= 6 \cdot (-1) \cdot a + 2 \cdot b = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d &= 0\\
a + b + c + d &= 10\\
3a + 2b + c &= 0\\
-6a + 2b &= 0
\end{aligned}$$

➤ Nach Auflösung des LGS erhält man:

$$a = -2, \quad b = -6, \quad c = 18, \quad d = 0.$$

Die gesuchte Funktion lautet also

$$f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 18x.$$

Lösung 111

➤ *Ganzrationale Funktion dritten Grades und Ableitung:*

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

➤ *Gleichungen aufstellen:*

- berührt die x-Achse im Ursprung $\implies f(0) = 0$ und $f'(0) = 0$.
- Punkt $\mathrm{P}(-2 \mid 1) \implies f(-2) = 1$.
- Tangente in $\mathrm{P}(-2 \mid 1)$ parallel zu $y = 2x - 2 \implies f'(-2) = 2$.

➤ *Gleichungssystem aufstellen:*

$$\begin{aligned}
d &= 0\\
c &= 0\\
-8a + 4b - 2c + d &= 1\\
12a - 4b + c &= 2
\end{aligned}$$

➤ Als Lösung des LGS erhält man:

$$a = \frac{3}{4}, \quad b = \frac{7}{4}, \quad c = 0, \quad d = 0.$$

Die gesuchte Funktion lautet:

$$f(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{7}{4}x^2.$$

Lösung 112

➤ Da $f(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung sein soll, hat $f(x)$ nur ungerade Exponenten. Um den Grad zu bestimmen, zählt man zunächst die gestellten Bedingungen.

➤ Gleichungen aufschreiben:

- Punkt $S(1\,|\,8) \implies f(1) = 8$.
- $S(1\,|\,8)$ ist ein Sattelpunkt $\implies f'(1) = 0$ und $f''(1) = 0$.

➤ Da drei Bedingungen an $f(x)$ gestellt werden, benötigt man drei Freiheitsgrade. Somit ist eine Funktion vom Grad 5 der passende Ansatz:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^5 + bx^3 + cx \\ f'(x) &= 5ax^4 + 3bx^2 + c \\ f''(x) &= 20ax^3 + 6bx. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen der Bedingungen erhält man:

$$\begin{aligned} f(1) &= a + b + c = 8 \\ f'(1) &= 5a + 3b + c = 0 \\ f''(1) &= 20a + 6b = 0. \end{aligned}$$

Dies führt auf das folgende LGS:

$$\begin{array}{rcl} a + b + c &=& 8 \\ 5a + 3b + c &=& 0 \\ 20a + 6b &=& 0. \end{array}$$

➤ Gleichungssystem lösen. Ergebnis:

$$a = 3, \quad b = -10, \quad c = 15.$$

Die gesuchte Funktion lautet also:

$$f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 15x.$$

Lösung 113

➤ Gleichungen aufstellen:

- ➤ Punkt $\mathrm{P}(2\,|\,1)$ $\implies$ $f(2) = 1$
- ➤ Funktion berührt die Gerade $y = 3x - 5$ im Punkt $\mathrm{P}(2\,|\,1)$ $\implies$ $f'(2) = 3$.

Damit erhält man die Gleichungen:

$$f(2) = a \cdot \mathrm{e}^{b \cdot 2} = 1$$
$$f'(2) = a \cdot b \cdot \mathrm{e}^{b \cdot 2} = 3.$$

➤ Gleichungen lösen:
Löst man die erste Gleichung nach a auf, erhält man:

$$a = \mathrm{e}^{-2b}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert:

$$b \cdot \mathrm{e}^{2b} \cdot \mathrm{e}^{-2b} = 3 \quad \implies \quad b = 3.$$

Den Wert von b eingesetzt in die erste Gleichung liefert:

$$a = \mathrm{e}^{-6}.$$

Die gesuchte Funktion lautet also:

$$f(x) = \mathrm{e}^{-6} \cdot \mathrm{e}^{3 \cdot x} = \mathrm{e}^{3x-6}.$$

Lösung 114

Für die Bestimmung der Extrem- und Wendestellen leitet man die Funktion f_a zunächst drei mal ab.
Es gilt:

$$f_a'(x) = \frac{3a}{7}x^2 + \frac{6a}{7}x$$
$$f_a''(x) = \frac{6a}{7}x + \frac{6a}{7}$$
$$f_a'''(x) = \frac{6a}{7}$$

(a) Für die Berechnung der Extremstellen bestimmt man die Nullstellen der ersten Ableitung f_a'

$$f_a'(x) = \frac{3a}{7}x^2 + \frac{6a}{7}x = 0 \quad \iff \quad x_1 = -2,\ x_2 = 0.$$

Um zu entscheiden, ob ein Hoch- oder Tiefpunkt vorliegt, setzt man die soeben berechneten Werte in die Funktion f_a'' ein. Es gelten:

$$f_a''(-2) = -\frac{6a}{7} \quad \text{und} \quad f_a''(0) = \frac{6a}{7}.$$

Laut Aufgabenstellung gilt $a < 0$ und somit besitzt G_a an der Stelle $x = -2$ einen Tiefpunkt und an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.
Man erhält:

$$f_a(-2) = \frac{4a}{7} \quad \implies \quad \text{Minimum} \quad \mathrm{T}_a\left(-2 \,\middle|\, \frac{4a}{7}\right)$$
$$f_a(0) = 0 \quad \implies \quad \text{Maximum} \quad \mathrm{H}_a(0\,|\,0).$$

(b) Für die Berechnung Wendestellen bestimmt man die Nullstellen der zweiten Ableitung f_a'':

$$f_a''(x) = \frac{6a}{7}x + \frac{6a}{7} = 0 \quad\iff\quad x = -1.$$

Es gilt:

$$f_a'''(-1) = \frac{6a}{7} \neq 0 \quad \text{wegen} \quad a \neq 0.$$

Damit hat G_a an der Stelle $x = -1$ einen Wendepunkt. Es gilt:

$$f_a(-1) = \frac{2a}{7} \quad\Longrightarrow\quad \text{Wendepunkt} \quad \mathrm{W}_a\left(-1 \,\middle|\, \frac{2a}{7}\right)$$

(c) Die Tangente im Wendepunkt von G_a hat die Steigung $m_a = f_a'(-1)$, also

$$m_a = f_a'(-1) = -\frac{3a}{7}.$$

Ein Ansatz für die Gleichung der Wendetangente t_a ist damit gegeben durch:

$$t_a(x) = -\frac{3a}{7}x + c_a.$$

Der y-Achsenabschnitt c_a wird durch Punktprobe mit W_a bestimmt:

$$\frac{2a}{7} = -\frac{3a}{7} \cdot (-1) + c_a \quad\iff\quad c_a = -\frac{a}{7}.$$

Die Gleichung der Wendetangente ist also gegeben durch:

$$t_a(x) = -\frac{3a}{7}x - \frac{a}{7}.$$

(d) Um den Flächeninhalt A_a zu berechnen, der vom Graphen von f_a und der x-Achse eingeschlossen wird, werden zunächst die Schnittpunkte von G_a und der x-Achse bestimmt und dann das Integral berechnet:

$$f_a(x) = 0 \quad\iff\quad x_3 = -3,\ x_2 = 0,$$

also

$$\int_{-3}^{0} \left(\frac{a}{7}x^3 + \frac{3a}{7}x^2\right) \mathrm{d}x = \left[\frac{a}{28}x^4 + \frac{a}{7}x^3\right]_{-3}^{0} = \frac{27a}{28}.$$

Wegen $a < 0$ ist der Flächeninhalt daher gegeben durch

$$A_a = -\frac{27a}{28}.$$

Lösung 115

Zunächst werden die ersten beiden Ableitungen von $f_{a,k}$ bestimmt. Es gelten:

$$f_{a.k}'(x) = 2ax + 4a - 2ak$$
$$f_{a,k}''(x) = 2a$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung $f_{a,k}$ sind wegen $a \neq 0$gegeben durch:

$$f_{a.k}'(x) = 2ax + 4a - 2ak = 0 \quad\iff\quad x = k - 2$$

Somit hat $G_{a,k}(x)$ an der Stelle $x = k - 2$ ein Maximum, falls $a < 0$ gilt und ein Minimum, falls $a > 0$ gilt. Für den Funktionswert an dieser Stelle gilt:

$$f_{a,k}(k-2) = a \cdot (k-2)^2 + (4a - 2ak) \cdot (k-2) - 8ak = -ak^2 - 4ak - 4a.$$

Die Parameter a bzw k beeinflussen also den Verlauf von $G_{a,k}$ insofern, dass an der Stelle

$x = k - 2$ ein Extrempunkt liegt, welcher in Abhängigkeit von a ein Hoch- oder Tiefpunkt ist und folgende Koordinaten hat:

$$H_{a,k}\left(k-2 \,\middle|\, -ak^2-4ak-4a\right), \quad \text{für} \quad a<0$$
$$T_{a,k}\left(k-2 \,\middle|\, -ak^2-4ak-4a\right), \quad \text{für} \quad a>0.$$

Lösung 116

(a) ➤ *Schnittstellenbestimmung für zwei Graphen*

Bestimme die Schnittstellen der Graphen für von $t = 0$ und $t = 1$. Es gilt:

$$4 = e^{-2x+4} + 3 \iff 1 = e^{-2x+4}$$
$$\iff x = 2.$$

➤ *Bestimmung des Funktionswertes*

Setze den Wert $x = 2$ in die allgemeine Funktionsgleichung f_t ein:

$$f_t(2) = te^{-2\cdot 2+4} + 4 - t = t + 4 - t = 4.$$

➤ *Schnittpunkt*

Somit gehen alle Funktionen der Schar f_t durch den Punkt $P(2 \mid 4)$.

(b) ➤ *Schnittstellenbestimmung für zwei Graphen*

Bestimme die Schnittstellen der Graphen für von $t = 0$ und $t = 1$. Es gilt:

$$-2x = \frac{-4x}{x^2+1} \iff -2x^3 - 2x = -4x$$
$$\iff x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

➤ *Bestimmung des Funktionswertes*

Setze den Wert $x = 2$ in die allgemeine Funktionsgleichung f_t ein:

$$f_t(0) = 0$$
$$f_t(1) = \frac{-2t-2}{t+1} = -2 \cdot \frac{t+1}{t+1} = -2$$
$$f_t(-1) = 2.$$

➤ *Schnittpunkte*

Somit haben die Graphen der Schar f_t die folgenden gemeinsamen Punkte:

$$P(0 \mid 0),\ Q(1 \mid -2),\ R(-1 \mid 2).$$

(c) ➤ *Schnittstellenbestimmung für zwei Graphen*

Bestimme die Schnittstellen der Graphen für von $t = 0$ und $t = 1$. Es gilt:

$$e^{2x} = e^{2x} - e^x \iff e^x = 0$$

Diese Gleichung ist nicht lösbar. Damit gibt es keinen gemeinsamen Schnittpunkt.

Lösung 117

(a) ➤ *Bestimmung der Extrempunkte*

Es gelten:

$$f_t'(x) = 2x - 2t = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = t$$
$$f_t''(t) = 2 \quad \Longrightarrow \quad \text{Tiefpunkt.}$$

Der Graph von f_t hat an der Stelle $x = t$ einen Tiefpunkt T_t. Es gilt:

$$f_t(t) = t \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}_t(\,t \mid t\,)\,.$$

➤ *Bestimmung der Ortskurve*

Schreibe die Gleichungen für x und y in Abhängigkeit von t auf und löse die x-Gleichung nach t auf:

$$x = t$$
$$y = t.$$

Es gilt also $y = x$.

➤ *Definitionsbereich*

Da $t \in \mathbb{R}$ ist, gilt auch $x \in R$ und die Gleichung der Ortskurve lautet:

$$y = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(b) ➤ *Bestimmung der Extrempunkte*

Es gelten:

$$f_t'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2t\mathrm{e}^{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \ln t$$
$$f_t''(x) = 4\mathrm{e}^{2x} - 2t\mathrm{e}^{x} \quad \Longrightarrow \quad f_t''(\ln t) = 2t^2$$

Der Graph von f_t hat an der Stelle $x = \ln t$ einen Tiefpunkt. Es gilt:

$$f_t(\ln t) = -t^2 + 1 \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{T}_t\left(\,\ln t \,\middle|\, -t^2 + 1\,\right).$$

➤ *Bestimmung der Ortskurve*

Schreibe die Gleichungen für x und y in Abhängigkeit von t auf und löse die x-Gleichung nach t auf:

$$x = \ln t \quad \Longrightarrow \quad t = \mathrm{e}^{x}$$
$$y = -t^2 + 1.$$

Es gilt also $y = -\mathrm{e}^{2x} + 1$.

➤ *Definitionsbereich*

Da $t \geq 1$ ist, gilt $x = \ln t \geq 0$ und die Gleichung der Ortskurve lautet:

$$y = -\mathrm{e}^{2x} + 1, \quad x \geq 0.$$

(c) ➤ *Bestimmung der Extrempunkte*

Es gelten:

$$f_t'(x) = \frac{1 - x - t}{\mathrm{e}^{x}} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 - t$$
$$f_t''(x) = \frac{x + t - 2}{\mathrm{e}^{x}} \quad \Longrightarrow \quad f_t''(1 - t) = \frac{-1}{\mathrm{e}^{t-1}} < 0$$

Der Graph von f_t hat an der Stelle $x = 1 - t$ einen Hochpunkt. Es gilt:

$$f_t(1 - t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{1-t}} = \mathrm{e}^{t-1} \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{H}_t\left(\,1 - t \,\middle|\, \mathrm{e}^{t-1}\,\right).$$

Lösungen

➤ *Bestimmung der Ortskurve*

Schreibe die Gleichungen für x und y in Abhängigkeit von t auf und löse die x-Gleichung nach t auf:

$$x = 1 - t \quad \Longrightarrow \quad t = 1 - x$$
$$y = \mathrm{e}^{t-1}.$$

Es gilt also $y = \mathrm{e}^{-x}$.

➤ *Definitionsbereich*

Da $t \geq 1$ ist, gilt $x = 1 - t \leq 0$ und die Gleichung der Ortskurve lautet:

$$y = \mathrm{e}^{-x}, \quad x \leq 0.$$

Lösung 118

Zunächst bestimmt man die Koordinaten des Wendepunktes des Graphen von f_t. Die ersten drei Ableitungen von f_t sind gegeben durch:

$$f_t'(x) = 3x^2 + 6tx - 1$$
$$f_t''(x) = 6x + 6t$$
$$f_t'''(x) = 6$$

Die Nullstellen der zweiten Ableitung sind gegeben durch:

$$f_t''(x) = 6x + 6t = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = -t$$

Wegen $f_t'''(-t) = 6 \neq 0$ besitzt der Graph von f_t an der Stelle $x = -t$ einen Wendepunkt. Es gilt:

$$f_t(-t) = (-t)^3 + 3t \cdot (-t)^2 - (-t) + 1 = 2t^3 + t + 1$$

Der Wendepunkt hat also die Koordinaten $\mathrm{W}_t\left(-t \mid 2t^3 + t + 1\right)$. Also:

$$x = -t \quad \Longrightarrow \quad t = -x$$
$$y = 2t^3 + t + 1.$$

Damit kann die Gleichung der Ortskurve ermittelt werden:

$$y = -2x^3 - x + 1.$$

Wegen $t \in \mathbb{R}$ ist die Ortskurve der Wendepunkte für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert.

Lösung 119

Definiere die Funktionen f und g folgendermaßen:

$$f(x) = \mathrm{e}^x - 1$$
$$g(x) = x^2 + x$$

Dann gelten

$$f(0) = \mathrm{e}^0 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad g(0) = 0^2 + 0 = 0.$$

Die Funktion h ist als Zusammensetzung der beiden Funktionen an der Stelle $x = 0$ stetig. Weiter gilt

$$f'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 1,$$
$$g'(x) = 2x + 1 \quad \Longrightarrow \quad g'(0) = 1.$$

Da die Funktion h an der Übergangsstelle stetig ist und die Funktionenswerte der Ableitungen f' und g' an der Stelle $x = 0$ übereinstimmen, ist die Funktion h einmal differenzierbar an der Stelle $x = 0$ und damit für alle $x \in \mathbb{R}$. Nun gilt weiter:

$$f''(x) = e^x \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 1,$$
$$g''(x) = 2 \quad \Longrightarrow \quad g''(0) = 2.$$

Die zweiten Ableitungen der Funktionen f und g stimmen an der Stelle $x = 0$ nicht überein und somit ist die Funktion h nicht zweimal differenzierbar an der Stelle $x = 0$.

Lösung 120

(a) Es gelten:

$$f(x) = 2e^{2x} + \ln(1 - x) + 2 \quad \Longrightarrow \quad f(0) = 4$$
$$f'(x) = 4e^{2x} - \frac{1}{1 - x} \quad \Longrightarrow \quad f'(0) = 3$$
$$f''(x) = 8e^{2x} - \frac{1}{(1 - x)^2} \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 7.$$

Ausserdem:

$$g(x) = 4\sqrt{x + 1} + 4x^2 + x \quad \Longrightarrow \quad g(0) = 4$$
$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 + x}} + 8x + 1 \quad \Longrightarrow \quad g'(0) = 3$$
$$g''(x) = -\frac{1}{\sqrt{(x + 1)^3}} + 8 \quad \Longrightarrow \quad g''(0) = 7.$$

Somit gelten an der Stelle $x = 0$ folgende Beziehungen:

$$f(0) = g(0),\ f'(0) = g'(0), \quad f''(0) = g''(0).$$

Daher sind Funktionswerte, Steigung und Krümmung der beiden Funktionen f und g an der Stelle $x = 0$ gleich.

(b) Eine ganzrationale Funktion zweiten Grades hat die allgemeine Funktionsgleichung

$$h(x) = ax^2 + bx + c$$

Es gelten:

$$h(0) = c,\ h'(0) = b \quad \text{und} \quad h''(0) = 2a.$$

Somit erhält man folgende Gleichungen:

$$h(0) = f(0) \quad \Longrightarrow \quad c = 4,$$
$$h'(0) = f'(0) \quad \Longrightarrow \quad b = 3,$$
$$h''(0) = f''(0) \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{7}{2}.$$

Die gesuchte Funktion h zweiten Grades hat folgende Funktionsgleichung:

$$h(x) = \frac{7}{2}x^2 + 3x + 4.$$

Lösungen

Lösung 121

Folgende Bedingungen müssen erfüllt sein:

$$f_k(0) = g_k(0), \quad f'_k(0) = g'_k(0), \quad f''_k(0) = g''_k(0).$$

Die erste Bedingung ist für jedes $k \in \mathbb{R}$ erfüllt, da beide Funktionen den gleichen y-Achsenabschnitt haben.
Um die anderen beiden Bedingungen zu prüfen, bildet man die ersten beiden Ableitungen der Funktionen f_k und g_k.

$$f'_k(x) = 15x^2 - 6x + 2k$$
$$g'_k(x) = -15x^2 - 6x - 2k$$
$$f''_k(x) = 30x - 6$$
$$g''_k(x) = -30x - 6$$

Es muss also gelten:

$$f'_k(0) = g'_k(0) \quad \Longleftrightarrow \quad 2k = -2k \quad \Longleftrightarrow \quad k = 0.$$

Somit muss $k = 0$ gelten, damit der Übergang knickfrei ist.
Desweiteren muss gelten:

$$f''_k(0) = -6 = g''_k(0).$$

Somit ist der Übergang an der Stelle $x = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$ krümmungsruckfrei. Der Übergang der Graphen der Funktionen f_0 und g_0 ist stetig, knickfrei und krümmungsruckfrei.

Lösung 122

Bei diesem Vorgang handelt es sich um exponentielles Wachstum. Der korrekte Ansatz lautet also:

$$B(t) = B_0 e^{kt}.$$

(a) Eine Halbwertszeit von 5730 Jahren bedeutet, dass nach 5730 Jahren genau die Hälfte des anfänglichen Bestandes übrig ist. Es gilt also:

$$\frac{1}{2}B_0 = B_0 \cdot e^{k \cdot 5730}.$$

Nach Division durch B_0 folgt:

$$0{,}5 = e^{k \cdot 5730}$$
$$\frac{\ln(0{,}5)}{5730} = k \approx -0{,}00012.$$

Eine Gleichung der Bestandsfunktion B lautet also

$$B(t) = B_0 \cdot e^{-0{,}00012t}.$$

(b) Zwischen 1960 und 2015 liegen 55 Jahre. Der ursprüngliche Bestand aus dem Jahr 1960 war 10 Gramm. Nach 55 Jahren gilt:

$$B(55) = 10 \cdot e^{-0{,}00012 \cdot 55} \approx 9{,}93.$$

Es sind also noch etwa 9,93 Gramm vorhanden.

(c) Gegeben sind der Anfangsbestand B_0 und der aktuelle Bestand $B(t*)$. Gesucht ist $t*$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} B(t^*) &= B_0 e^{kt^*} \\ 7 &= 10e^{-0{,}00012t^*} \\ t^* &= -\frac{\ln(0{,}7)}{0{,}00012} \approx 2972{,}29. \end{aligned}$$

Gerechnet vom Jahr 1960 verbleiben uns also noch gut 2972 Jahre. Somit steht uns die Auslöschung erst im April 4932 bevor.

Lösung 123

(a) Der Anbieter gewinnt monatlich 5000 Kunden und verliert 1 % seines Kundenbestands. Jeden Monat gilt daher:

$$\begin{aligned} \text{Zuwachs: } & 5000 \\ \text{Verlust: } & 0{,}01 \cdot B(t). \end{aligned}$$

Somit ist die Änderungsrate gegeben durch:

$$B'(t) = 5000 - 0{,}01 \cdot B(t).$$

(b) Man vergleicht die soeben berechnete Änderungsrate B' mit der Formel für beschränktes Wachstum. Diese lautet:

$$B'(t) = -k(S - B(t)).$$

Klammert man in obigem Ausdruck die den Faktor 0,01 aus, so erhält man

$$B'(t) = 0{,}01 \cdot (500\,000 - B(t)).$$

Somit liegt beschränktes Wachstum vor mit $S = 500\,000$ und $k = 0{,}01$. Wegen $B_0 = 0$ lautet die Bestandsgleichung:

$$B(t) = 500\,000 - 500\,000 \cdot e^{-0{,}01 \cdot t}.$$

(c) Nach zehn Jahren sind 120 Monate vergangen. Somit ist der Bestand nach 10 Jahren gegeben durch:

$$B(120) = 349\,403.$$

Nach 10 Jahren hat der Anbieter knapp 350 000 Kunden.

(d) Um den langfristigen Bestand zu bestimmen, berechnet man den Grenzwert des Funktionswertes $B(t)$ für $t \to +\infty$.
Es gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{t\to+\infty} B(t) &= \lim_{t\to+\infty} \left(500\,000 - 500\,000 \cdot e^{-0{,}01\cdot t}\right) \\ &= \lim_{t\to+\infty} 500\,000 - \lim_{t\to+\infty} \left(500\,000 \cdot e^{-0{,}01\cdot t}\right) \\ &= 500\,000 - 0 \\ &= 500\,000. \end{aligned}$$

Auf lange Sicht kann der Anbieter also 500 000 Kunden binden.

Lösungen

Lösung 124

(a) Der Anfangsbestand ist $B_0 = 1$, denn zunächst ist nur ein Mann erkrankt. Die Sättigungsgrenze ist 6500, denn mehr als 6500 Menschen können nicht erkranken. Somit gilt für die Anzahl B der kranken Einwohner:

$$B(t) = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-kt}}.$$

Um die Konstante k zu ermitteln, setzt man nun noch die verbleibende Information ein:

$$B(5) = 300$$
$$300 = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-5k}} \quad \Longleftrightarrow \quad k \approx 1{,}15.$$

Also:

$$B(t) = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-1{,}15t}}.$$

(b) Gesucht ist diejenige Zeit t, für die gilt: $B(t) = 1000$. Also:

$$1000 = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-1{,}15t}} \quad \Longrightarrow \quad t \approx 6{,}15.$$

Nach ca. 6 Tagen sind 1000 Inselbewohner erkrankt.

(c) Genau wie im vorangegangenen Teil erhält man:

$$6499 = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-1{,}15t}} \quad \Longrightarrow \quad t \approx 15{,}27.$$

Nach ca. 15 Tagen sind alle bis auf einen Inselbewohner infiziert.

(d) Es gilt:

$$B(10) = \frac{6500}{1 + 6499\mathrm{e}^{-11{,}5}} \approx 6098{,}5.$$

Nach 10 Tagen sind bereits 6099 Einwohner krank.

Lösung 125

(a) Zunächst wird der Wert des folgenden Integrals bestimmt:

$$\int_0^6 f_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^6 \left(\frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t\right)\mathrm{d}t = 27.$$

Somit sind in den ersten 6 Monaten 27 Mrd. Kubikmeter Wasser durch den Fluss geflossen.

(b) Bezeichne x den gesuchten Zeitpunkt. Dann muss folgende Gleichung erfüllt sein:

$$\int_0^x f_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f_2(t)\,\mathrm{d}t$$
$$\Longleftrightarrow \quad \int_0^x \left(\frac{1}{4}t^3 - 3t^2 + 9t\right)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\frac{1}{4}t^3 - 2t^2 + 4t\right)\mathrm{d}t.$$

Bringt man die beiden Ausdrücke auf eine Seite, so vereinfacht sich die Gleichung. Dieser Schritt ist nicht notwendig, spart aber viel Arbeit. Es folgt:

$$\int_0^x \left(-t^2 + 5t\right)\mathrm{d}t = 0$$
$$-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 = 0.$$

Nach Ausklammern von x^2 erhält man die Lösungen:

$$x_1 = 0 \text{ (uninteressant)}, \quad x_2 = 7{,}5.$$

Somit haben beide Flüsse nach 7,5 Monaten die gleiche Menge Wasser transportiert.

Lösung 126

(a) Am 20. Februar ($t = 0$) erkranken in Essen 90 Menschen neu und in Dortmund ca. 60 Personen. In den nächsten Tagen steigt in beiden Städten die Anzahl der Neuerkrankungen an. Zunächst in ähnlichem Umfang. Ab dem 4. Tag jedoch ist die Neuerkrankungsrate in Dortmund geringer als in Essen. Am 8. Tag ist in Dortmund die Anzahl der Neuerkrankungen am höchsten und liegt bei ca. 520 Neuerkrankungen pro Tag. In Essen steigt zu diesem Zeitpunkt die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag noch an. In Essen erreicht sie am 9. Tag ihr Maximum mit ca 730 Neuerkrankungen. Da die Anzahl der Neuerkrankungen in Dortmund länger steigt, wird die Differenz zwischen den Neuerkrankungen pro Tag in beiden Städten zunächst immer größer. Aber auch nach dem 9. Tag wächst die Differenz weiter an. Am Ende des Beobachtungszeitraums liegt die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag in Essen bei ca. 600, hingegen in Dortmund scheint mit ca. 200 Neuerkrankungen pro Tag die Grippewelle fast überstanden zu sein. Insgesamt ist die Anzahl der Neuerkrankungen in Dortmund stets kleiner als in Essen. Die Grippewelle verlief hier also deutlich milder.

(b) Der Term $\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt die Anzahl der ab dem 20. Februar bis zum Ende der Beobachtungen erkrankten Personen. Der Term $\frac{1}{12}\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t$ beschreibt den Mittelwert der Funktion f im Intervall von $t = 0$ bis $t = 12$, also wie viele Neuerkrankungen es im Schnitt pro Tag in den ersten 12 Tagen in Essen gab.

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
N &= \int_0^{12} 0{,}3 \cdot \left(0{,}2t^4 - 9{,}3t^3 + 93{,}2t^2\right) + 90\,\mathrm{d}t \\
&= \left[0{,}3 \cdot \left(0{,}04t^5 - 2{,}325t^4 + \frac{466}{15}t^3\right) + 90t\right]_0^{12} \\
&= 5707{,}584
\end{aligned}$$

Am 20. Februar und in den kommenden 12 Tagen erkranken ca. 5708 Personen neu an der Grippe.

(d) Die Anzahl der Neuerkrankungen am 25. Februar entspricht genau dem Funktionswert für $t = 5$, also

$$f(5) = 0{,}3 \cdot \left(0{,}2 \cdot 5^4 - 9{,}3 \cdot 5^3 + 93{,}2 \cdot 5^2\right) + 90 = 477{,}75.$$

Es gibt also etwa 478 Neuerkrankungen am 5. Tag.

(e) Es gilt:

$$f(16) = 0{,}3 \cdot \left(0{,}2 \cdot 16^4 - 9{,}3 \cdot 16^3 + 93{,}2 \cdot 16^2\right) + 90 = -247{,}92.$$

Am 16. Tag würden -247,95 Personen neu erkranken. Dies macht keinen Sinn, denn die Anzahl der Neuerkrankungen pro Tag kann niemals negativ sein. Daher kann das obige Modell nicht für beliebige Zeiten $t > 0$ gelten.

Lösungen

Lösung 127

Der vordere Teil der Funktion f ist eine Verkettung von Funktionen $u\left(v(x)\right)$. Die Funktionen u und v sind dabei gegeben durch

$$u(x) = \sin(x) \quad \text{und} \quad v(x) = (\ln x)^{-1}.$$

Es gilt

$$u'(x) = \cos(x) \quad \text{und} \quad v'(x) = -(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x},$$

wobei auch v' durch Anwendung der Kettenregel gebildet wird. Auch der zweite Summand der Funktion f ist eine Verkettung von Funktionen und die Ableitung kann mit der Kettenregel bestimmt werden. Damit gilt

$$f'(x) = \cos\left(\frac{1}{\ln x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{(\ln x)^2}\right) \cdot \frac{1}{x} - e^{x^2} \cdot 2x = -\frac{\cos\left(\frac{1}{\ln x}\right)}{x(\ln x)^2} - 2xe^{x^2}.$$

Lösung 128

Der Graph der Funktion f ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Dadurch sind die Flächen, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt für $x < 0$, bzw. $x > 0$ jeweils gleich groß. Für $x > 0$ liegt die Fläche jedoch oberhalb und für $x < 0$ unterhalb der x-Achse. Daher ist der Wert des Integrals gleich Null. Da $F(x) = -\cos(x)$ eine Stammfunktion von f ist, gilt

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(x)\,dx = [-\cos(x)]_{-\pi}^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(-\pi) = 1 - 1 = 0.$$

Lösung 129

Hierbei handelt es sich um ein Nullprodukt, das genau dann gleich Null ist, falls einer der Faktoren gleich Null ist. Es gilt

$$(x^2 - 2x - 3) \cdot \ln(x - 2) = 0 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \text{oder} \quad \ln(x - 2) = 0,$$

Die erste Gleichung ist eine quadratische Gleichung. Mit der p-q-Formel erhält man $x_1 = -1$ und $x_2 = 3$. Beachte, dass nur Werte $x > 2$ zugelassen sind und somit nur $x = 3$ eine Lösung der Gleichung darstellt.
Die zweite Gleichung ist eine logarithmische Gleichung. Exponentiert man beide Seiten, gilt:

$$\ln(x - 2) = 0 \iff e^{\ln(x-2)} = e^0 \iff x - 2 = 1$$

Damit ergibt sich die Lösung $x = 3$. Also ist $x = 3$ die einzige Lösung der Aufgabe.

Lösung 130

(a) Es gilt

$$f(-x) = \frac{a + x}{1 + x^2} + b.$$

- Wenn sowohl $a = 0$ als auch $b = 0$ gilt: $f(-x) = -f(x)$ und der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.
- Es gibt keine Wahl von a und b, sodass $f(-x) = f(x)$ gilt, da das positive Vorzeichen von x nicht durch a beeinflusst und somit auch nicht negativ werden kann. Folglich gibt es keine Parameterwerte, für die der Graph achsensymmetrisch zum Ursprung ist.

(b) Da der Nennergrad der gebrochenrationalen Funktion

$$g(x) = \frac{a - x}{1 + x^2}$$

größer ist als der Zählergrad, gilt $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Damit ist

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) + \lim_{x\to\infty} b = 0 + b = b$$

und f hat eine waagrechte Asymptote bei $y = b$. Daher ist $b = 2$.

Um den Schnittpunkt mit der y-Achse zu erhalten, berechne

$$f(0) = a + b = 7.$$

Mit $b = 2$ folgt dann $a = 5$.

Lösung 131

(1) Die Aussage ist wahr, denn die Nullstellen der Ableitungsfunktion f' ergeben sich aus den Stellen mit waagrechter Tangente, also den Extremstellen von f. Diese liegen bei $x = -2$, $x = 0$ und $x = 2$.

(2) Die Aussage ist wahr. Die Extremstellen der Ableitungsfunktion f' ergeben sich aus den Wendepunkten von f. Diese liegen ungefähr bei $x = 1{,}2$ und $x = -1{,}2$.

Der Graph von f ist für $x < -1{,}2$ und $x > 1{,}2$ linksgekrümmt, also gilt $f''(x) > 0$ und für $-1{,}2 < x < 1{,}2$ rechtsgekrümmt, also gilt $f''(x) < 0$. Somit ist der Graph von f' für $x < -1{,}2$ und $x > 1{,}2$ monoton steigend und für $-1{,}2 < x < 1{,}2$ monoton fallend und hat bei $x \approx -1{,}2$ einen Hoch- und für $x \approx 1{,}2$ einen Tiefpunkt.

(3) Die Aussage ist falsch. Da der Graph von f im dargestellten Bereich drei Extrema hat, ist der Grad von f mindestens vier. Der Grad der Ableitung ist dann mindestens drei und nicht höchstens drei.

(4) Die Aussage ist wahr. Der Graph von f liegt ausschließlich oberhalb der x-Achse. Für $a > 0$ entstehen dadurch positive Werte des Integrals und für $a < 0$ negative Werte. Insbesondere ist der Wert des Integrals nur für $a = 0$ gleich Null.

Lösung 132

(a) Für die Funktion

$$f(t) = ae^{bt}$$

sind die Parameter a und b gesucht, so dass gilt $f(0) = 30$ und $f(5) = 43$:

$$f(0) = a = 30$$

$$f(5) = ae^{5b} = 30e^{5b} = 43 \quad \Longrightarrow \quad b = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{43}{30}\right) \approx 0{,}07.$$

Die Funktionsgleichung für das erste Modell ist damit

$$f(t) = 30e^{0{,}07t}.$$

(b) Wegen

$$f(20) = 30e^{1{,}4} \approx 121{,}7$$

wären nach dem Modell nach 20 Wochen 121 Hasen auf der Insel zu erwarten. Laut Aufgabenstellung sind es aber tatsächlich nur 105 Hasen, also 16 Hasen weniger.

(c) Es gilt:

$$f'(t) = 30 \cdot 0{,}07e^{0{,}07t} = 2{,}1e^{0{,}07t}.$$

Durch Lösen der Gleichung $f'(t) = 8$ wird nun ermittelt, wann die Zuwachsrate erstmals den Wert von 8 Hasen pro Woche erreicht:

$$f'(t) = 30 \cdot 0{,}07e^{0{,}07t} = 8$$

$$\Longrightarrow \quad e^{0{,}07t} = \frac{8}{2{,}1} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{1}{0{,}07}\ln\frac{8}{2{,}1} \approx 19{,}11.$$

Weiter wird nun die zweite Ableitung von f untersucht. Diese ist gegeben durch

$$f''(t) = 2{,}1 \cdot 0{,}07e^{0{,}07t} = 0{,}147e^{0{,}07t}.$$

Da diese stets größer als 0 ist, nimmt f' stets zu. Also ist in dem Modell die Zuwachsrate nach ca. 19,11 Wochen, also ab dem ersten Tag der 20. Woche, größer als 8 Hasen pro Woche.

(d) Gesucht ist der Zeitpunkt, an dem es nach dem Modell erstmalig mehr als 150 Hasen auf der Insel gibt. Dafür wird die Ungleichung $f(t) > 150$ nach t aufgelöst:

$$f(t) = 30e^{0{,}07t} > 150$$

$$\Longrightarrow \quad e^{0{,}07t} > 5 \quad \Longrightarrow \quad t > \frac{1}{0{,}07}\ln 5 \approx 22{,}992.$$

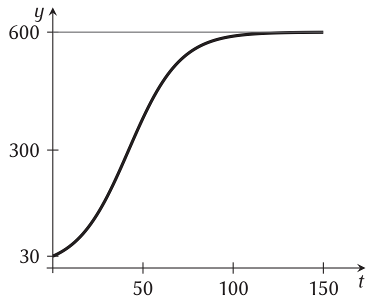
Nach dem Modell sollte es dann nach 23 Wochen erstmals mehr als 150 Hasen auf der Insel geben.

(e) Das Modell kann nicht die Realität abbilden, da mit diesem gelten würde

$$t \to \infty \quad \Longrightarrow \quad f(t) \to \infty.$$

Die Anzahl der Hasen auf der Insel ist aber zumindest durch das endliche Nahrungsangebot begrenzt.

(f) Gesucht sind Aussagen über die Funktion g beziehungsweise die Entwicklung der Hasenpopulation, die sich direkt aus dem gegebenen Schaubild G des korrigierten Modells ablesen lassen.



- Der Funktionswert an der Stelle $x = 0$ beträgt $g(0) = 30$. Das ist der Bestand an Hasen bei Beobachtungsbeginn.
- Der Graph ist streng monoton steigend, die Funktion ist also streng monoton wachsend. Das bedeutet, dass die Hasenanzahl ständig zunimmt.
- Der Graph der Funktion hat einen Wendepunkt. Bis zu diesem nimmt die Steigung des Graphen der Funktion ständig zu, danach nimmt sie wieder ab. Somit vergrößert sich die Anzahl der Hasen zunächst immer schneller, danach verlangsamt sich der Zuwachs dann aber stetig.
- Für $t \to \infty$ nähert sich der Graph der Funktion der Asymptote $y = 600$ an. Das ist die Anzahl der Hasen, die die Population langfristig umfassen wird.

(g) Gesucht ist die langfristige Größe der Hasenpopulation im korrigierten Modell

$$g(t) = \frac{600}{1 + 19e^{-0,07t}}.$$

Dafür muss das Verhalten von g für $t \to \infty$ untersucht werden. Es gilt

$$e^{-0,07t} \to 0 \text{ für } t \to \infty$$

und damit

$$t \to \infty \quad \Longrightarrow \quad g(t) \to \frac{600}{1+0} = 600.$$

Mit dem korrigierten Modell umfasst die Hasenpopulation langfristig 600 Hasen.

(h) Gesucht ist der Zeitpunkt, zu dem erstmalig mehr als 90 % der langfristigen Anzahl an Hasen auf der Insel leben. Die langfristige Anzahl Hasen wurde bereits mit 600 Hasen ermittelt und 90 % davon sind $0{,}9 \cdot 600 = 540$. Damit muss die Gleichung $g(t) = 540$ gelöst werden:

$$g(t) = \frac{600}{1 + 19e^{-0,07t}} = 540 \quad \Longrightarrow \quad 10 = 9 + 9 \cdot 19e^{-0,07t}$$

$$\Longrightarrow \quad e^{-0,07t} = \frac{1}{171} \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-1}{0{,}07} \ln \frac{1}{171} \approx 73{,}45.$$

Nach ungefähr 73,5 Wochen gibt es auf der Insel erstmalig mehr als 90 % der langfristigen Anzahl an Hasen.

(i) Der Ausdruck $g'(20)$ ist die, nach dem korrigierten Modell berechnete und in Hasen pro Woche angegebene, momentane Zuwachsrate 20 Wochen nach der Ankunft der Hasen auf der Insel.

(j) Gesucht sind die Wendepunkte der Funktionenschar

$$g_k(x) = x^3 + kx^2 - x - k, \; k \in \mathbb{R}.$$

Hierfür werden die zweite Ableitung zur Bestimmung möglicher Wendestellen und die

Lösungen

dritte Ableitung zum Nachweis, dass eine Wendestelle vorliegt, benötigt:

$$g_k'(x) = 3x^2 + 2kx - 1$$
$$g_k''(x) = 6x + 2k$$
$$g_k'''(x) = 6 > 0.$$

Da die dritte Ableitung stets größer als Null ist, liegt für die Lösung der Gleichung $g_k''(x) = 0$ eine Wendestelle vor. Zu dieser muss dann noch der zugehörige Funktionswert berechnet werden:

$$g_k''(x) = 6x + 2k = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_W = -\frac{1}{3}k$$
$$g_k(x_W) = x_W^3 + kx_W^2 - x_W - k = \frac{2}{27}k^3 - \frac{2}{3}k.$$

Die Wendepunkte der Funktionenschar befinden sich also bei

$$W_k\left(-\frac{1}{3}k \,\middle|\, \frac{2}{27}k^3 - \frac{2}{3}k\right).$$

(k) Es soll eine Ortskurve bestimmt werden, auf der alle Wendepunkte $W_k\left(-\frac{1}{3}k \,\middle|\, \frac{2}{27}k^3 - \frac{2}{3}k\right)$ liegen:

$$x = -\frac{1}{3}k \quad \Longrightarrow \quad k = -3x$$
$$y = \frac{2}{27}k^3 - \frac{2}{3}k = \frac{2}{27}(-3x)^3 - \frac{2}{3}(-3x) = -2x^3 + 2x.$$

Die Gleichung der Kurve, auf der alle Wendepunkte der Funktionenschar g_k liegen, lautet

$$y = -2x^3 + 2x.$$

Lösung 133

(a) Da der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist, ist der maximale Definitionsbereich Funktion $f(x)$ gegeben durch die Menge

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \colon x > 0\}.$$

(b) Die Ableitung der Funktion $f(x)$ erhält man durch Anwendung der Produkt- und der Kettenregel. Dazu wird zunächst

$$f(x) = xg(x) + x + 1 \quad \text{mit} \quad g(x) = (\ln(x))^2$$

gesetzt und mittels der Produktregel abgeleitet:

$$f'(x) = g(x) + xg'(x) + 1.$$

Für die jetzt noch fehlende Ableitung von $g(x)$ benötigt man dann die Kettenregel:

$$g'(x) = 2\ln(x) \cdot \frac{1}{x}.$$

Nun können $g(x)$ und $g'(x)$ in die Gleichung für $f'(x)$ eingesetzt werden.

$$f'(x) = (\ln(x))^2 + 2\ln(x) + 1$$

Jetzt kann man noch die binomische Formel $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ anwenden und erhält

$$f'(x) = (1 + \ln(x))^2.$$

(c) Mit der Umformung aus (b) schließt man: Da das Quadrat einer reellen Zahl nie negativ ist, gilt

$$f'(x) = (1 + \ln(x))^2 \geq 0.$$

Es gibt also an keiner Stelle von $f'(x)$ einen VZW. Somit hat K keine Extrempunkte.

(d) Um das Krümmungsverhalten der Funktion zu untersuchen und den Sattelpunkt zu bestimmen, wird die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ benötigt. Die erste Ableitung ist mit

$$f'(x) = (1 + \ln(x))^2$$

schon bekannt und man erhält daraus mit der Kettenregel

$$f''(x) = \frac{2(\ln(x) + 1)}{x} = \frac{2\ln(x) + 2}{x}.$$

Dadurch, dass der maximale Definitionsbereich $D = \mathbb{R}_+$ ist, ist der Nenner der zweiten Ableitung stets positiv. Es gilt daher:

$$f''(x) > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x) + 1 > 0$$
$$f''(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(x) + 1 < 0.$$

gilt. Also ist K linksgekrümmt für $x > 1/\mathrm{e}$ und rechtsgekrümmt für $x < 1/\mathrm{e}$. Damit einher geht dann auch die Lage eines Sattelpunktes:

$$f''(x) = \frac{2\ln(x) + 2}{x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \ln(x) + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_w = \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Jetzt fehlt noch der Funktionswert an der Stelle des Sattelpunktes. Es folgt:

$$f(x_w) = \frac{1}{\mathrm{e}}(-1)^2 + \frac{1}{\mathrm{e}} + 1 = \frac{2}{\mathrm{e}} + 1.$$

Das Schaubild K hat also einen Sattelpunkt bei $\mathrm{W}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} \;\middle|\; \frac{2}{\mathrm{e}} + 1\right)$.

(e) Wie x, so strebt auch der natürliche Logarithmus für $x \to \infty$ gegen unendlich. Damit gilt

$$f(x) \to \infty \text{ für } x \to \infty.$$

(f) Folgende Informationen können für die Zuordnung der Graphen zu $f(x)$ und $f'(x)$ genutzt werden. Dabei wird ausgenutzt wird, dass einer der beiden $f(x)$ und der andere dann $f'(x)$ sein muss:

- ➤ $f(x)$ hat keine Extrempunkte. $\Longrightarrow$ Schaubild (I) ist $f(x)$, Schaubild (II) ist $f'(x)$.
- ➤ $f(x)$ hat einen Sattelpunkt bei $\mathrm{W}\left(\frac{1}{\mathrm{e}} \;\middle|\; \frac{2}{\mathrm{e}} + 1\right)$ und $f'(x)$ hat für $x = \frac{1}{\mathrm{e}}$ einen Extrempunkt, da die zweite Ableitung an dieser Stelle einen VZW aufweist. $\Longrightarrow$ Schaubild (I) ist $f(x)$, Schaubild (II) ist $f'(x)$.
- ➤ Der Anstieg der Funktion $f(x)$ ist nie negativ. Der Anstieg der ersten Ableitung ist dagegen für $x < \frac{1}{\mathrm{e}}$ kleiner als Null. $\Longrightarrow$ Schaubild (I) ist $f(x)$, Schaubild (II) ist $f'(x)$.

Damit stellt das linke Schaubild die Funktion $f(x)$ und das rechte Schaubild die zugehörige Ableitung $f'(x)$ dar.

(g) Gesucht ist die Gleichung der Tangente $t(x)$ im Punkt $\mathrm{P}(\,\mathrm{e} \mid 2\mathrm{e} + 1\,)$. Sie hat die Form

$$t(x) = mx + c.$$

Im Berührpunkt P sind zum einen die Funktionswerte von $t(x)$ und $f(x)$ gleich. Zum anderen haben dort die Tangente $t(x)$ und der Graph K die gleiche Steigung. Damit

Lösungen

ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen:

$$t(\mathrm{e}) = f(\mathrm{e}) \quad \Longrightarrow \quad m\mathrm{e} + c = 2\mathrm{e} + 1$$
$$m = f'(\mathrm{e}) \quad \Longrightarrow \quad m = 4.$$

Wird die zweite Gleichung in die erste eingesetzt, ergibt sich die gesuchte Tangentengleichung im Punkt $\mathrm{P}(\,\mathrm{e} \mid 2\mathrm{e}+1\,)$ mit

$$t(x) = 4x + 1 - 2\mathrm{e}.$$

(h) Um zu zeigen, dass die Funktion

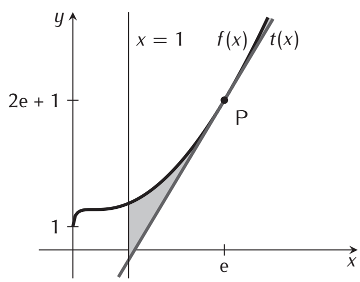
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{3}{4}x^2 + x$$

eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, leitet man $F(x)$ ab. Dafür werden Produkt- und Kettenregel benötigt:

$$\begin{aligned} F'(x) &= x(\ln(x))^2 + x^2\ln(x)\frac{1}{x} - x\ln(x) - \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x} + \frac{3}{2}x + 1 \\ &= x(\ln(x))^2 + x\ln(x) - x\ln(x) - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x + 1 \\ &= x(\ln(x))^2 + x + 1 \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Also ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$.

(i) Gesucht ist der Inhalt A der Fläche, die von der Senkrechten $x = 1$, der Funktion $f(x)$ und der vorher ermittelten Tangente $t(x) = 4x + 1 - 2\mathrm{e}$ eingeschlossen wird. Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellung werden in eine Skizze, die auf Schaubild (I) aus der Aufgabenstellung basiert, noch die Gerade $x = 1$ und die Tangente $t(x)$ eingezeichnet und die gesuchte Fläche markiert.



Damit lässt sich der gesuchte Flächeninhalt als bestimmtes Integral der Differenz aus $f(x)$ und $t(x)$ zwischen 1 und e berechnen:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - t(x))\,\mathrm{d}x = \int_1^{\mathrm{e}} (f(x) - 4x - 1 + 2\mathrm{e})\,\mathrm{d}x = \left[F(x) - 2x^2 - x + 2\mathrm{e}x\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \left[\frac{1}{2}x^2(\ln(x))^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{5}{4}x^2 + 2\mathrm{e}x\right]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{3}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{5}{4} - 2\mathrm{e} \\ &\approx 1{,}36. \end{aligned}$$

Der Inhalt der Fläche, die von der Senkrechten $x = 1$ sowie $f(x)$ und $t(x)$ begrenzt wird, beträgt ca. 1,36 FE.

(j) Für die Funktion

$$B(t) = B_0 e^{kt}$$

sind die Parameter B_0 und k gesucht, so dass gilt $B(0) = 150$ und $B(5) = 380$. Also gilt:

$$B(0) = B_0 = 150$$

$$B(5) = B_0 e^{5k} = 150 e^{5k} = 380 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{1}{5} \ln\left(\frac{380}{150}\right) \approx 0{,}19.$$

Die Funktionsgleichung für den Heimchenbestand ist damit

$$B(t) = 150 e^{0{,}19t}.$$

(k) Gesucht ist die Differenz der Heimchen zwischen dem Ende des 10. Tages und dem Ende des 9. Tages, also die Differenz zwischen $B(10)$ und $B(9)$. Dabei ist zu beachten, dass diese Differenz auf die nächste ganze Zahl abgerundet werden muss:

$$B(10) - B(9) = 150(e^{1,9} - e^{1,71}) \approx 173.$$

Nach dem 10. Tag können also höchstens 173 Heimchen verfüttert werden, ohne dass der Bestand unter den nach dem 9. Tag fällt.

(l) Gesucht ist die Zeitdauer zwischen dem Verfüttern von 90 % des Heimchenbestandes zum Zeitpunkt t_1 bis zum Wiedererreichen der gleichen Bestandszahl.

Vor dem Verfüttern sind $B(t_1) = 150e^{0{,}19t_1}$ vorhanden, während danach noch 10 % davon übrig sind. Bezeichne $A(t)$ den Heimchenbestand t Tage nach der Verfütterung. Man stellt zunächst einen Term für $A(t)$ auf. Entscheidend ist, dass die Vermehrungsrate durch die Entnahme nicht verändert wird, nur der Ausgangsbestand reduziert sich. Es gilt also:

$$A(t) = A_0 e^{0{,}19t} \quad \text{mit} \quad A_0 = 0{,}1B(t_1) = 15e^{0{,}19t_1}$$

$$\Longrightarrow \quad A(t) = 15e^{0{,}19(t+t_1)}.$$

Es soll gelten:

$$A(t) = B(t_1)$$

$$15e^{0{,}19(t+t_1)} = 150e^{0{,}19t_1} \quad \Longrightarrow \quad e^{0{,}19t} = 10 \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{\ln(10)}{0{,}19} \approx 12{,}12.$$

Nach dem Verfüttern von 90 % des Heimchenbestandes dauert es also ungefähr 12,12 Tage, das sind 12 Tage und etwas weniger als 3 Stunden, bis dieser Bestand wieder erreicht wird, solange keine weiteren Heimchen verfüttert werden.

Lösung 134

(a) Die Funktion ist definiert für $x \in [0; 6]$. An den Endpunkten soll das eine Höhe von 2 m haben. Es muss also überprüft werden, ob gilt:

$$f(0) = 2, \quad f(6) = 2.$$

Es gilt:

$$f(0) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{0-3} + e^{-0+3}\right) + 1 = \frac{e^{-3} + e^{3}}{e^{-3} + e^{3}} + 1 = 2,$$

$$f(6) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{6-3} + e^{-6+3}\right) + 1 = \frac{e^{3} + e^{-3}}{e^{-3} + e^{3}} + 1 = 2.$$

Lösungen

Die geforderte Höhe von 2 m wird also an den beiden Befestigungspunkten erreicht.

(b) Die Krümmung des Seils wird durch die zweite Ableitung der Funktion $f(x)$ beschrieben. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} - e^{-x+3}\right)$$
$$f''(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right)$$

Die Funktion $k(x)$ mit

$$k(x) = f''(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right)$$

beschreibt also die Krümmung des Seils. Nun ist aber die maximale bzw. minimale Krümmung gesucht, also die Stelle, an der die Funktion $k(x)$ ein Maximum bzw. Minimum besitzt. Es gilt:

$$k'(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} - e^{-x+3}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad e^{x-3} = e^{-x+3} \quad \Longrightarrow \quad x = 3.$$

Außerdem gilt für alle anderen Werte:

$$k''(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) > 0.$$

An der Stelle $x = 3$ ist die Krümmung also minimal. Ein weiteres lokales Extremum (d.h. ein Extremum mit waagrechter Tangente) existiert nicht. Die Funktion $k(x)$ ist allerdings im Intervall $[0; 6]$ definiert. Daher müssen hier noch die Randwerte betrachtet werden. Es gelten:

$$k(0) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{-3} + e^{3}\right) = 1,$$
$$k(3) = \frac{2}{e^{-3} + e^{3}} \approx 0{,}099,$$
$$k(6) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{3} + e^{-3}\right) = 1.$$

Die Krümmung ist also maximal an den Stellen $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ und minimal an der Stelle $x_3 = 3$.

(c) Gesucht ist das Minimum der Funktion $f(x)$. Es gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} - e^{-x+3}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 3.$$
$$f''(x) > 0, \quad f(3) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} + 1 \approx 1{,}099$$

Der Tiefpunkt der Funktion ist also

$$\mathrm{T}\left(3 \,\middle|\, \frac{2}{e^{-3} + e^{3}} + 1\right).$$

Wegen

$$\frac{2}{e^{-3} + e^{3}} + 1 \approx 1{,}099 > 1{,}08$$

kann Felix unter dem Seil durchlaufen und Erik hat Recht.

(d) Die verschobene Funktion $g(x)$ hat die Gleichung

$$g(x) = f(x+3) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x} + e^{-x}\right) + 1.$$

Es gilt:

$$g(-x) = \frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{-x} + e^{x}\right) + 1 = g(x).$$

Die Funktion $g(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse. Damit ist die Funktion $f(x)$ symmetrisch zur Achse $x = 3$.

(e) Gesucht ist also das Volumen des Rotationskörpers. Allerdings muss beachtet werden, dass die Rotationsachse hier die Achse $y = 2$ ist. Zu berechnen ist also das folgende Integral:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^6 (f(x) - 2)^2 \, dx \\ &= \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) - 1 \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^6 \left(\left(\frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) \right) + 1 \right) dx \end{aligned}$$

Zur besseren Übersichtlichkeit wird im weiteren Verlauf das Integral in drei Teilintegrale aufgeteilt:

$$\begin{aligned} V_1 &= \pi \int_0^6 \left(\frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) \right)^2 dx \\ &= \frac{\pi}{(e^{-3} + e^{3})^2} \int_0^6 \left(e^{2x-6} + 2 + e^{-2x+6}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{(e^{-3} + e^{3})^2} \left[\frac{1}{2} e^{2x-6} + 2x - \frac{1}{2} e^{-2x+6} \right]_0^6 \\ &= \frac{\pi \left(e^{6} + 12 - e^{-6}\right)}{(e^{-3} + e^{3})^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2 &= -2\pi \int_0^6 \left(\frac{1}{e^{-3} + e^{3}} \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) \right) dx \\ &= -\frac{2\pi}{e^{-3} + e^{3}} \int_0^6 \left(e^{x-3} + e^{-x+3}\right) dx \\ &= -\frac{2\pi}{e^{-3} + e^{3}} \left[e^{x-3} - e^{-x+3}\right]_0^6 \\ &= -\frac{4\pi \left(e^{3} - e^{-3}\right)}{e^{-3} + e^{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \pi \int_0^6 1 \, dx \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

Insgesamt schließt das Kletterseil also folgendes Volumen ein:

$$V = \frac{\pi \left(e^{6} + 12 - e^{-6}\right)}{(e^{-3} + e^{3})^2} - \frac{4\pi \left(e^{3} - e^{-3}\right)}{e^{-3} + e^{3}} + 6\pi \approx 9{,}564.$$

(f) Gesucht ist das Minimum der Funktion $h(x)$. Es gelten:

$$h'(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} - e^{-x+1}\right)$$
$$h''(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x-1} + e^{-x+1}\right) > 0.$$

Also:

$$h'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1, \quad h''(x) > 0.$$

Damit ist der Tiefpunkt gegeben durch $T_h(\,1 \mid 1\,)$.

(g) Es gilt

$$\begin{aligned} L &= \int_0^2 \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{x-1} - e^{-x+1}\right)^2}\,dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\frac{1}{4}\left(e^{2x-2} + 2 + e^{-2x+2}\right)}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \sqrt{\left(e^{x-1} + e^{-x+1}\right)^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(e^{x-1} + e^{-x+1}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{x-1} - e^{-x+1}\right]_0^2 \\ &= e^1 - e^{-1} \approx 2{,}35. \end{aligned}$$

Das Seil ist also ca. 2,35 m lang.

Lösung 135

Gesucht sind die Lösungen von:

$$\begin{array}{rcrcrcrl} 10x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 80 & \quad (\mathrm{I}) \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 110 & \quad (\mathrm{II}) \\ 7x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & -10 & \quad (\mathrm{III}) \end{array}$$

Vorgehen wie im Beispiel liefert $x_1 = 10$, $x_2 = -60$, $x_3 = -140$.
☞ *Alternative:* Hier können die Variablen auch in der umgekehrten Reihenfolge eliminiert werden. Gleichung (I) wird behalten. Durch Zeilenumformungen wird in den Gleichungen (II) und (III) die Variable x_3 eliminiert.

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} & 10x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 80 & \quad (\mathrm{I}) \\ (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) & 13x_1 & - & x_2 & & & = & 190 & \quad (\mathrm{II})_a \\ (\mathrm{I}) - (\mathrm{III}) & 3x_1 & - & x_2 & & & = & 90 & \quad (\mathrm{III})_a \end{array}$$

Gleichungen (I) und $(\mathrm{II})_a$ werden behalten. Durch Zeilenumformungen wird in Gleichung (III) die Variable x_2 eliminiert.

$$\begin{array}{lrcrcrcrl} & 10x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 80 & \quad (\mathrm{I}) \\ & 13x_1 & - & x_2 & & & = & 190 & \quad (\mathrm{II})_a \\ (\mathrm{II})_a - (\mathrm{III})_a & 10x_1 & & & & & = & 100 & \quad (\mathrm{III})_b \end{array}$$

Jetzt können nacheinander die Lösungen für x_1, x_2 und x_3 abgelesen werden.

$$\begin{array}{lrcl}
(\mathrm{III})_b & 10x_1 = 100 & \Longrightarrow x_1 = & \mathbf{10} \\
(\mathrm{II})_a & 13 \cdot \mathbf{10} - x_2 = 190 & \Longrightarrow x_2 = & \mathbf{-60} \\
(\mathrm{I}) & 10 \cdot \mathbf{10} - 2 \cdot (\mathbf{-60}) + x_3 = 80 & \Longrightarrow x_3 = & -140
\end{array}$$

Lösung 136

Diese Aufgabe kann als LGS formuliert werden. Hierfür werden zunächst Variablen eingeführt:

s : Gewicht einer Schraube

u : Gewicht einer Unterlegscheibe

m : Gewicht einer Mutter

Das LGS hat die Form:

$$\begin{aligned}
100s + 50u + 10m &= 1155 \\
69s + 100u + 20m &= 1000 \\
10s + 10u + 10m &= 155
\end{aligned}$$

Das LGS wird auf Stufenform gebracht und anschließend werden nacheinander die Lösungen für die Variablen abgelesen. Man erhält $s = 10$, $u = 2{,}5$ und $m = 3$.
Eine Schraube wiegt also 10 g, eine Unterlegscheibe 2,5 g und eine Mutter 3 g.

Lösung 137

(a) Das LGS wird auf Stufenform gebracht und man erhält die eindeutige Lösung $P(3 \mid -5 \mid 3)$.

(b) Gesucht ist die Lösung von:

$$\begin{array}{rcl}
-x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 = -4 & & (\mathrm{I}) \\
3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 & & (\mathrm{II}) \\
-2x_1 - 6x_2 + 8x_3 = 20 & & (\mathrm{III})
\end{array}$$

Es wird versucht, das LGS in Stufenform zu bringen. Dafür wird Gleichung (I) behalten und durch Zeilenumformungen wird in den Gleichungen (II) und (III) die Variable x_1 eliminiert:

$$\begin{array}{lrl}
 & -x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 = -4 & (\mathrm{I}) \\
3 \cdot (\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) & 3{,}5x_2 - 7x_3 = -14 & (\mathrm{II}') \\
2 \cdot (\mathrm{I}) - (\mathrm{III}) & 7x_2 - 14x_3 = -28 & (\mathrm{III}')
\end{array}$$

Gleichungen (I) und (II′) werden behalten. Der Versuch durch Zeilenumformungen die Variable x_2 in Gleichung (III′) zu eliminieren liefert eine Trivialzeile:

$$\begin{array}{lrl}
 & -x_1 + 0{,}5x_2 - 3x_3 = -4 & (\mathrm{I}) \\
 & 3{,}5x_2 - 7x_3 = -14 & (\mathrm{II}') \\
2 \cdot (\mathrm{II}') - (\mathrm{III}') & 0 = 0 & (\mathrm{III}'')
\end{array}$$

Das LGS ist folglich unterbestimmt.

- ➤ Setze $x_3 = t$.
- ➤ Aus (II′) folgt $x_2 = 2t - 4$.
- ➤ Gleichung (I) liefert $x_1 = 2 - 2t$.

Lösungen

Das LGS hat unendlich viele Lösungen. In Vektorschreibweise sind diese gegeben durch

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2t \\ -4 + 2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Gesucht ist die Lösung von:

$$\begin{aligned} -12x_1 + 24x_2 - 32x_3 &= 4 \qquad \text{(I)} \\ -3x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \qquad \text{(II)} \\ 3x_1 - 6x_2 + 8x_3 &= 1 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Der Versuch, das LGS auf Stufenform zu bringen, liefert einen Widerspruch in Gleichung (III′):

$$\begin{array}{lrcl} & -12x_1 + 24x_2 - 32x_3 &=& 4 \qquad \text{(I)} \\ \text{(I)} - 4 \cdot \text{(II)} & 20x_2 - 28x_3 &=& -4 \qquad \text{(II)} \\ \text{(I)} + 4 \cdot \text{(III)} & 0 &=& 8 \qquad \text{(III′)} \end{array}$$

Das LGS hat damit keine Lösung.

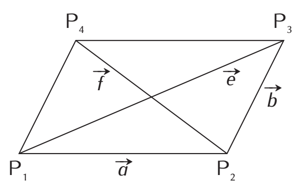
Lösung 138

Komponentenweise Addition liefert jeweils den Summenvektor:

(a) $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 9 \end{pmatrix}$

Lösung 139



(a) Gegeben sind die Koordinaten der Punkte P_1,P_2,P_3. Gesucht sind die Koordinaten des Punktes P_4. Die Koordinaten des Punktes P_4 lassen sich wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_4} &= \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_3} + \overrightarrow{P_2P_1} = \overrightarrow{P_3} + (\overrightarrow{P_1} - \overrightarrow{P_2}) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Der Punkt P_4 hat die Koordinaten $P_4(\,1 \mid 3 \mid 2\,)$.

(b) Die Diagonalen des Parallelogramms sind

$$\vec{e} = \overrightarrow{P_1P_3} = \vec{P_3} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\vec{f} = \overrightarrow{P_2P_4} = \vec{P_4} - \vec{P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Für die Länge der Diagonalen ergibt sich

$$e = |\vec{e}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14},$$
$$f = \left|\vec{f}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{6}.$$

(c) Um die Formel

$$e^2 + f^2 = 2\left(a^2 + b^2\right)$$

anhand des gegebenen Parallelogramms beispielhaft zu überprüfen, werden zunächst die Seiten $\vec{a}$ und $\vec{b}$ des Parallelogramms bestimmt.

$$\vec{a} = \overrightarrow{P_1P_2} = \vec{P_2} - \vec{P_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{P_2P_3} = \vec{P_3} - \vec{P_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Es können nun die dazugehörigen Seitenlängen berechnet werden:

$$a = |\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{5}, \quad b = \sqrt{5}.$$

Nun kann die Formel durch Einsetzen überprüft werden:

$$e^2 + f^2 = 14 + 6 = 20$$
$$2\left(a^2 + b^2\right) = 2(5 + 5) = 20.$$

Damit wurde die Formel beispielhaft an diesem Parallelogramm bestätigt.

Lösung 140

(a) Für die Punkte der Grundfläche lassen wir zunächst die x_3-Koordinate fix und verschieben den Punkt P_1 um zwei Einheiten in x_1-Richtung.

Die so erhaltenen Punkte P_1 und P_2 verschieben wir um zwei Einheiten in x_2-Richtung und erhalten so P_3 und P_4.

Um aus der Grundfläche den Würfel zu generieren, verschieben wir die vier Punkte um zwei Einheiten in x_3-Richtung.

$$P_1(2\,|\,3\,|\,1) \quad P_2(4\,|\,3\,|\,1) \qquad P_3(2\,|\,5\,|\,1) \quad P_4(4\,|\,5\,|\,1)$$
$$P_5(2\,|\,3\,|\,3) \quad P_6(4\,|\,3\,|\,3) \qquad P_7(2\,|\,5\,|\,3) \quad P_8(4\,|\,5\,|\,3)$$

(b) Ein Quader mit den Seitenlängen $a = 2$ in x_1-Richtung, $b = 3$ in x_2-Richtung und $c = 4$

in x_3-Richtung hat zum Beispiel die folgenden Eckpunkte:

$$P_1(2\,|\,3\,|\,1)\quad P_2(4\,|\,3\,|\,1)\qquad P_3(2\,|\,6\,|\,1)\quad P_4(4\,|\,6\,|\,1)$$
$$P_5(2\,|\,3\,|\,5)\quad P_6(4\,|\,3\,|\,5)\qquad P_7(2\,|\,6\,|\,5)\quad P_8(4\,|\,6\,|\,5)$$

Lösung 141

Zunächst werden die Tanzschritte (I)-(V) als Vektoren geschrieben. Beachte dabei, dass die Vektoren nur zwei Einträge haben, da der Roboter nicht hüpft:

$$(\mathrm{I}): \ \vec{r} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{II}): \ \vec{l} = \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{III}): \ \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$(\mathrm{IV}): \ \vec{h} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad (\mathrm{V}): \ \vec{d} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

(a) Um die Entfernung des Roboters vom Ausgangspunkt festzustellen, muss zunächst ermittelt werden, wo sich der Roboter am Ende der Schrittfolge befindet. Sei $P_0(0\,|\,0)$ der Ausgangspunkt, dann ist der Zielpunkt P_1 gegeben durch

$$\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_0} + \vec{r} + \vec{r} + \vec{v} + \vec{h} + \vec{l} + \vec{d} + \vec{l} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\left|\overrightarrow{P_0P_1}\right| = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25.$$

Die Entfernung vom Startpunkt beträgt folglich 25 cm.

(b) Ausgehend von der Startposition $P_0(0\,|\,0)$ werden alle Positionen des Roboters berechnet.

$$\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_0} + \vec{r} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_1} + \vec{r} = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_3} = \overrightarrow{P_2} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{P_4} = \overrightarrow{P_3} + \vec{h} = \begin{pmatrix} 60 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_5} = \overrightarrow{P_4} + \vec{l} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_6} = \overrightarrow{P_5} + \vec{d} = \begin{pmatrix} 50 \\ 15 \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{P_7} = \overrightarrow{P_6} + \vec{l} = \begin{pmatrix} 20 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Nun kann man die maximale Entfernung des Roboters vom Startpunkt $P_0(0\,|\,0)$ ablesen. In x_1-Richtung ist die Position, die am weitesten rechts ist

$$P_2 = \begin{pmatrix} 60 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Position am weitesten vorne, also in x_2-Richtung ist

$$P_3 = \begin{pmatrix} 60 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Die rechteckige Tanzfläche für den Roboter muss mindestens 60 cm (x_1-Richtung) mal 20 cm (x_2-Richtung) groß sein.

(c) Um festzustellen, ob eine solche Schrittfolge existieren kann, überlegt man sich, ob eine Kombination der Vektoren den Zielpunkt $P_1(0\,|\,0)$ erreicht, in der mindestens einmal der $\vec{d}$ vorkommt.

Da $\vec{d}$ nach vorne rechts geht, werden die Schritte $\vec{h}$ und $\vec{l}$ betrachtet. Gesucht sind also ganzzahlige, positive Werte der Parameter k, i, j, so dass gilt:

$$k \cdot \vec{d} + i \cdot \vec{h} + j \cdot \vec{l} = \mathrm{P}_1(0 \mid 0)\,.$$

Das bedeutet, dass der Roboter wieder am Punkt $\mathrm{P}_1(0 \mid 0)$ ist, nachdem er k diagonale Schritte, i Schritte nach hinten und j Schritte nach rechts getanzt ist. Einsetzen liefert:

$$k \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \end{pmatrix} + j \begin{pmatrix} -30 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Das dazugehörige LGS lautet

$$\begin{array}{rcrcrcl} 20k & & & - & 30j & = & 0 \\ 10k & - & 15i & & & = & 0 \end{array}$$

und hat unendlich viele Lösungen. Umstellen zeigt, dass

$$i = \frac{2}{3}k \quad \text{und} \quad j = \frac{2}{3}k$$

gelten muss. Nun kann k, die Anzahl der diagonalen Schritte so gewählt werden, dass j und i ganzzahlig sind. Eine mögliche Lösung lautet $k = 3$, $j = 2$, $i = 2$.
Die dazugehörige Tanzfolge könnte so:

(V) → (V) → (V) → (IV) → (IV) → (II) → (II)

oder so:

(V) → (IV) → (II) → (V) → (II) → (IV) → (V)

aussehen. Viel Spaß beim Nachtanzen!

Lösung 142

(a) Um den Auflagepunkt des horizontalen Antennenstücks zu bestimmen, bewegt man sich vom Bodenpunkt fünf Längeneinheiten nach oben

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{B}} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Das obere Stück liegt also am Punkt $\mathrm{A}(10 \mid 10 \mid 5)$ auf.

(b) Der Vektor $\vec{a}$ hat die Länge fünf, denn

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

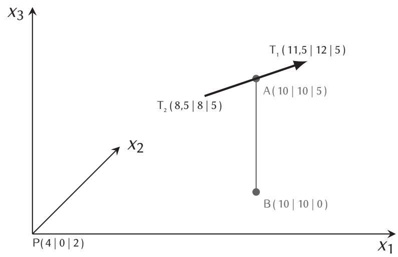
Die Endpunkte des oberen Antennenstücks bestimmt man, indem man einen Vektor der Länge 2,5 einmal in Richtung $\vec{a}$ und einmal in die entgegengesetzte Richtung auf den Punkt A addiert. Auf diese Weise erhält man

$$\vec{\mathrm{T}_1} = \vec{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$\vec{\mathrm{T}_2} = \vec{\mathrm{A}} - \frac{1}{2}\vec{a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Endpunkte der Antenne sind also $T_1\left(\frac{23}{2} \,\middle|\, 12 \,\middle|\, 5\right)$ und $T_2\left(\frac{17}{2} \,\middle|\, 8 \,\middle|\, 5\right)$.

(c) Eine Skizze der Situation ist unten dargestellt:



Lösung 143

(a) Das zugehörige LGS lautet:

$$\begin{aligned} 2r + 3s + 5t &= 0 \\ 4r + 2s + t &= 0 \\ 9r + 8s + 2t &= 0 \end{aligned}$$

Nach Lösung des LGS mit Hilfe des Gaußverfahrens ergibt sich als einzige Lösung

$$r = 0, \quad s = 0 \quad \text{und} \quad t = 0.$$

Die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind also linear unabhängig.

(b) Das zugehörige LGS lautet:

$$\begin{aligned} r + 2s + 5t &= 0 \\ 3r + 2s + 7t &= 0 \\ 3r + 4s + 11t &= 0 \end{aligned}$$

Im Verlauf des Gaußverfahrens entsteht eine Nullzeile.
Das LGS ist also unterbestimmt ist und hat unendliche viele Lösungen, zum Beispiel

$$r = -1, \quad s = -2 \quad \text{und} \quad t = 1.$$

Damit sind die Vektoren linear abhängig.

Lösung 144

Bei dieser Aufgabe gibt es viele Lösungsmöglichkeiten, im Folgenden wird eine einfache dargestellt.

(a) Einen weiteren linear abhängigen Vektor zu finden ist immer leicht, man kann einfach ein Vielfaches von einem der Ausgangsvektoren bilden, also zum Beispiel:

$$\vec{c} = 2 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

(b) Für einen weiteren linear unabhängigen Vektor ist es praktisch, einen Vektor auszuprobieren, bei dem zwei Komponenten gleich 0 sind, also zum Beispiel:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Mit diesem ergibt sich zum Prüfen der linearen Unabhängigkeit das LGS

$$\begin{aligned} 2r + s &= 0 \\ r + s &= 0 \\ 4r + 2s + c_3 \cdot t &= 0 \end{aligned}$$

aus dem sofort $r = 0$ und $s = 0$ folgt. Somit erhält man in der dritten Zeile die Gleichung:

$$c_3 \cdot t = 0.$$

Damit $t = 0$ gelten muss, kann man nun also ein beliebiges c_3 wählen mit der Eigenschaft $c_3 \neq 0$. Damit erhält man als mögliche Lösung:

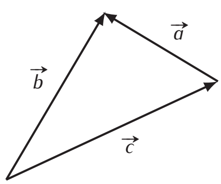
$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für diesen Vektor $\vec{c}$ sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig. Dieses Verfahren funktioniert nur dann nicht, wenn sich in der dritten Zeile des LGS eine Nullzeile ergibt. Dann müsste man das Verfahren mit einem weiteren Vektor wiederholen, zum Beispiel mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 145

Zunächst beschriftet man ein (beliebiges) Dreieck wie folgt:



Beliebig deswegen, weil man das für alle Dreiecke machen kann. Es spielt in diesem Fall keine Rolle, welche Seite wie lang ist, solange nur ein Dreieck dabei entsteht. Aus der Vektoraddition weiß man, dass

$$\vec{c} + \vec{a} = \vec{b}$$

gilt. Wenn man nun auf beiden Seiten $\vec{b}$ subtrahiert, erhält man

$$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösungen

Die Koeffizienten, die zuvor r, s und t genannt wurden, sind hier alle ungleich 0. Damit hat man eine Möglichkeit gefunden, den Nullvektor als Linearkombination aus den drei Vektoren zu erhalten.
Also sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, die man aus den Seiten eines Dreiecks erhält, immer linear abhängig.

Lösung 146

(a) Zunächst werden die Verbindungsvektoren der drei Seiten des Dreiecks berechnet:

$$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nun kann auf Orthogonalität geprüft werden:

$$\vec{c} \circ \vec{a} = -2 \cdot 3 + 2(-1) + 1(-1) = -9 \neq 0$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} = 3(-1) - 1(-1) - 1 \cdot 0 = -2 \neq 0$$
$$\vec{b} \circ \vec{c} = -1(-2) - 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0.$$

Der rechte Winkel ist also bei Punkt A.

(b) Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks lässt sich durch

$$F = \frac{1}{2} b \cdot c$$

berechnen, wenn b und c die Schenkel am rechten Winkel sind. In diesem Fall ergibt sich

$$F = \frac{1}{2} \left|\vec{b}\right| \cdot |\vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{9} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2{,}12.$$

(c) Einen solchen Punkt D erhält man beispielsweise, indem man den Punkt C am Punkt A spiegelt:

$$\vec{D} = \vec{A} + \overrightarrow{CA} = \vec{A} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Das Dreieck mit den Eckpunkten A, B und D(0 | 1 | 1) ist rechtwinklig am Punkt A.

Lösung 147

(a) $\vec{z} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(b) Für den in (a) errechneten Vektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}$ gilt $\vec{z} \perp \vec{a}$ und $\vec{z} \perp \vec{b}$.

(c) Alle Vektoren, die gleichzeitig senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ stehen, haben die gleiche Richtung. Sie unterscheiden sich nur in der Länge und im Vorzeichen. Aus Teil (b) folgt somit, dass die Menge aller auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrechten Vektoren beschrieben ist durch:

$$k \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -13 \\ 15 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Lösung 148

Zwei Geraden verlaufen parallel, wenn ihre Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind. Zwei Geraden sind identisch, wenn zudem beide Aufpunkte auf der Geraden liegen. Um weitere Darstellungen zu finden, setze für r also eine beliebige Zahl ein, um einen weiteren Punkt auf der Geraden zu finden und nimm ein Vielfaches des Richtungsvektors. Zwei mögliche Darstellungen sind:

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 149

(a) Punktprobe durchführen, indem für $\vec{x}$ der Ortsvektor des Punktes eingesetzt wird und anschließend nach r aufgelöst wird:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Lösen des enstandenen LGS:

$$\begin{aligned} -1 - 2r &= 5 && \Longrightarrow && r = -3 \\ 5 - 3r &= 14 && \Longrightarrow && r = -3 \\ 1 + 5r &= -4 && \Longrightarrow && r = -1 \neq -3. \end{aligned}$$

Das LGS hat keine Lösung, also liegt der Punkt A nicht auf der Geraden g. Zu beachten ist, dass der Parameter r in alle drei Gleichungen eingesetzt werden muss und sich dabei für alle Gleichungen gleichzeitig eine wahre Aussagen ergeben müssen.

(b) B liegt nicht auf der Geraden g.

(c) C liegt auf der Geraden g mit $r = \frac{1}{3}$.

Lösung 150

Verwende einen der Punkte als Aufpunkt und finde den Verbindungsvektor zwischen den beiden Punkten, dieser wird zum Richtungsvektor der Geraden. Die Geradengleichung lautet somit:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass die Darstellung der Geraden nicht eindeutig ist.

Lösung 151

Es genügt zu zeigen, dass die drei Punkte *nicht* auf einer Geraden liegen. Dazu kann man zunächst eine Gleichung für die Gerade g durch A und B aufstellen:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nun überprüft man, ob der Punkt C auf g liegt:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

In der ersten Zeile folgt $t = -3$. Aus der zweiten Zeile folgt $t = \frac{1}{2}$. Dies zeigt, dass C nicht auf g liegt. Somit sind die drei Punkte A, B und C nicht kollinear und bilden ein echtes Dreieck.

Lösung 152

Zunächst wird die Gleichung für die Gerade g durch die Punkte A und B aufgestellt. Die Geradengleichung lautet:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Dann wird der Punkt C für $\vec{x}$ eingesetzt und das LGS gelöst:

$$\begin{aligned} -2 + r &= -4 &\implies& \quad r = -2 \\ 4 - 2r &= 2t &\implies& \quad 4 - 2(-2) = 2t \quad \implies \quad t = 4 \\ 1 + \tfrac{3}{2}r &= -2 &\implies& \quad r = -2. \end{aligned}$$

Folglich liegen die Punkte $A(-2 \mid 4 \mid 1)$, $B\left(-1 \mid 2 \mid \frac{5}{2}\right)$, $C(-4 \mid 8 \mid -2)$ auf einer Geraden.

Lösung 153

Für r und s werden beliebige Zahlen eingesetzt (z. B. $r = s = 1$), um einen weiteren Punkt auf der Ebene zu finden. Dieser Punkt wird als Stützvektor benutzt und zusammen mit Vielfachen der Spannvektoren erhält man eine weitere mögliche Darstellung der Ebene:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}, \quad s,r \in \mathbb{R}.$$

Beachte: Die Parameterform ist nicht eindeutig.

Lösung 154

(a) Um zu bestimmen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt, wird dieser für $\vec{x}$ eingesetzt. Dabei entsteht ein LGS:

$$\begin{aligned} 1 + 3p + r &= 2 \qquad \text{(I)} \\ 0 + 2p + 2r &= 2 \qquad \text{(II)} \\ -2 - p + 3r &= 1 \qquad \text{(III)} \end{aligned}$$

Das LGS lösen:

$$-2(\text{I}) + (\text{II}) \quad \Longrightarrow \quad -2 - 4p = -2 \quad \Longrightarrow \quad p = 0.$$

Einsetzen in (I):

$$1 + 0 + r = 2 \quad \Longrightarrow \quad r = 1.$$

Probe mit (III)

$$-2 - 0 + 3 = 1.$$

Folglich liegt A in der Ebene. Ein Probe kann gemacht werden, indem man $p = 0$ und $r = 1$ in die Ebenengleichung einsetzt und dann A erhält.

(b) Der Punkt B liegt nicht auf der Ebene.

(c) Der Punkt C liegt in der Ebene ($p = -3$, $r = -2$).

Lösung 155

Es wird einer der drei Punkte als Stützvektor verwendet und jeweils der Verbindungsvektor zu den beiden anderen Punkten berechnet.

(a) Berechnung der beiden Spannvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Man kann erkennen, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ keine Vielfachen voneinander sind und somit eine Ebene aufspannen. Die Ebenengleichung E lautet:

$$E:\ \vec{x} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Lösungen

(b) Die Ebenengleichung E lautet:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 156

Zunächst wird die Ebenengleichung aufgestellt. Um nur die Pferdekoppel zu beschreiben, werden dann die Parameter s und t begrenzt. Die Ebenengleichung lautet:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Normalerweise gilt $s, t \in \mathbb{R}$. Da die Pferdekoppel allerdings genau 40×100 Einheiten lang ist, gilt:

$$0 \leq s,t \leq 1.$$

☞ *Alternative:* Dieselbe Ebene wird auch beschrieben durch die Parametergleichung

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

In diesem Fall gilt dann:

$$0 \leq s \leq 40, \quad 0 \leq t \leq 100.$$

Lösung 157

(a) Wähle beliebig drei der vier Punkte aus und stelle die Ebenengleichung auf:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Der Punkt S wird zum Aufpunkt der Ebene. Da die Spannvektoren parallel verlaufen, kann man die Spannvektoren der Ebene E verwenden:

$$F:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung 158

Eine Ebenengleichung wird bestimmt durch drei Punkte beziehungsweise eine Gerade und einen Punkt. Die Ebene E wird somit definiert über die Gerade g und einem Punkt auf h. Stelle den Verbindungsvektor zwischen dem Aufpunkt A von g und einem beliebigen Punkt B auf h auf.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Ebenengleichung lautet dann:

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s,t \in \mathbb{R}.$$

Lösung 159

Setze den Punkt in die Ebenengleichung ein:

$$E:\ -2 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 0 = -8 \neq 1.$$

Also liegt der Punkt nicht auf der Ebene.
Der Punkt $P(\,3\,|\,1\,|\,1\,)$ ist einer der vielen Punkte mit positiven Koordinaten in der Ebene E.

Lösung 160

Der Richtungsvektor der Geraden wird zum Normalenvektor der Ebene E. Der erste Ansatz für die Ebenengleichung von E lautet:

$$E:\ x_1 - 8x_2 - 12x_3 = a.$$

Zudem ist der Punkt $P(\,1\,|\,2\,|\,4\,)$ in der Ebene gegeben. Punkt in die Ebene einsetzen:

$$1 - 8 \cdot 2 - 12 \cdot 4 = -63.$$

Die Ebenengleichung von E lautet somit:

$$E:\ x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -63.$$

Lösung 161

(a) Der Normalenvektor der Ebene E wird zum Richtungsvektor der Geraden, in welcher der Pfosten liegt. Die Geradengleichung, in der der Pfosten liegt, wird somit beschrieben durch:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Lösungen

Die Länge des Richtungsvektors beträgt:

$$\left|\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4^2+4^2+7^2} = 9.$$

Also wird $r = \frac{1}{3}$ in die Geradengleichung eingesetzt, denn $\frac{1}{3}\cdot 9 = 3$. Somit hat der Pfosten die gewünschte Länge.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}4\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{7}{3}\\\frac{11}{6}\\\frac{7}{3}\end{pmatrix}.$$

Also liegt das obere Ende des Pfosten bei $\mathrm{P}\left(\frac{7}{3} \mid \frac{11}{6} \mid \frac{7}{3}\right)$.

(b) Da die Ebene F parallel zur Ebene E liegt, verlaufen die Normalenvektoren parallel, das heißt sie sind Vielfache voneinander. Zudem ist der Punkt $\mathrm{P}\left(\frac{7}{3} \mid \frac{11}{6} \mid \frac{7}{3}\right)$ in F gegeben. Der erste Ansatz für die Koordinatenform ist:

$$F:\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = a.$$

Der Punkt Punkt P wird eingesetzt, um a zu berechnen:

$$4\cdot\frac{7}{3} + 4\cdot\frac{11}{6} + 7\cdot\frac{7}{3} = 33.$$

Die Ebenengleichung F lautet:

$$F:\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 33.$$

Lösung 162

(a)

$$E:\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = 0$$

(b)

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{\sqrt{0^2+8^2+(-6)^2}}\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = \frac{1}{10}\cdot\begin{pmatrix}0\\8\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0{,}8\\-0{,}6\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow\quad E:\ \left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix}0\\0{,}8\\-0{,}6\end{pmatrix} = 0$$

(c)

$$\begin{aligned}
& E:\ ((x_1-2)\cdot 0) + ((x_2-0)\cdot 0{,}8) + ((x_3-1)\cdot -0{,}6) = 0\\
\Longleftrightarrow\quad & E:\ 0{,}8x_2 - 0{,}6x_3 + 0{,}6 = 0\\
\Longleftrightarrow\quad & E:\ 0{,}8x_2 - 0{,}6x_3 = -0{,}6
\end{aligned}$$

Lösung 163

(a) Wie im Merksatz werden folgende Schritte gemacht:

Schritt 1: Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -14 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{n}.$$

Schritt 2: Ansatz der Ebenengleichung:

$$E_1: \; -9x_1 - 14x_2 - 6x_3 = a.$$

Schritt 3: Stützpunkt einsetzen:

$$-9 \cdot (-2) - 14 \cdot 3 - 6 \cdot (-1) = -18 = a.$$

Die Koordinatenform lautet somit

$$E_1: \; -9x_1 - 14x_2 - 6x_3 = -18.$$

(b) Die Koordinatenform lautet:

$$E_2: \; 5x_1 + 17x_2 - 4x_3 = -11.$$

(c) Die Koordinatenform lautet:

$$E_3: \; -6x_1 + 7x_2 - 5x_3 = -24.$$

Lösung 164

(a) Der Punkt A wird zum Stützpunkt und die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ zu den Spannvektoren der Ebene. Die Parameterform der Ebene lautet somit:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Kreuzprodukt der Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ -11 \end{pmatrix} = \vec{n}.$$

Den Punkt A in den Ansatz der Koordinatenform einsetzen. Die Koordinatenform lautet dann

$$E: \; -7x_1 - 6x_2 - 11x_3 = -15.$$

(b) Berechne den zweiten Spannvektor:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Lösungen

Die Parameterform der Ebene lautet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Umformen in Koordinatengleichung ergibt:

$$E: \; -27x_1 - 6x_2 + x_3 = 19.$$

(c) Berechne den zweiten Spannvektor:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die Parameterform der Ebene lautet:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Umformen in Koordinatenform ergibt:

$$E: \; -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0.$$

Lösung 165

Ausmultiplizieren gibt die Koordinatenform der Ebene:

$$E: \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ -10 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad -3x_1 - x_2 + 2x_3 = (-3) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-10) + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

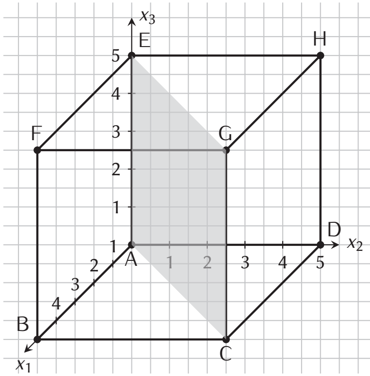
$$\Longrightarrow \quad E: \; -3x_1 - x_2 + 2x_3 = 17.$$

Wähle drei beliebige Punkte in der Ebene, wie zum Beispiel $A(-6 \mid 1 \mid 0)$, $B(1 \mid 0 \mid 10)$, $C(0 \mid -17 \mid 0)$ und bilde die Parameterform:

$$E: \vec{x} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 10 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -18 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Beachte, dass die Parameterform nicht eindeutig ist.

Lösung 166



Die fehlenden Koordinaten lauten E(0 | 0 | 5), F(5 | 0 | 5) und H(0 | 5 | 5).

Lösung 167

(a) Spurpunkt S_1: Setze $x_2 = x_3 = 0$:

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -1.$$

Also: $S_1(-1 \mid 0 \mid 0)$.

Spurpunkt S_2: Setze $x_1 = x_3 = 0$:

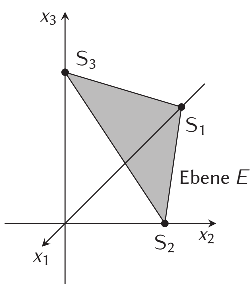
$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

Also: $S_2\left(0 \mid \frac{1}{3} \mid 0\right)$.

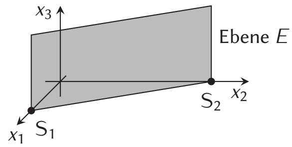
Spurpunkt S_3: Setze $x_1 = x_2 = 0$:

$$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{1}{2}.$$

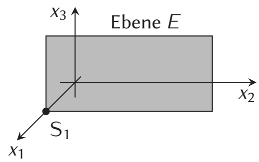
Also: $S_3\left(0 \mid 0 \mid \frac{1}{2}\right)$.



(b) Die Spurpunkte sind $S_1(1 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 2 \mid 0)$ und die Ebene E verläuft parallel zur x_3-Achse, da diese nicht geschnitten wird.



(c) Der Spurpunkt ist $S_1\left(\frac{1}{3} \mid 0 \mid 0\right)$ und E verläuft parallel zur x_2-Achse und zur x_3-Achse.



Lösung 168

(a) Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Gleichsetzen der Geradengleichungen liefert:

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} -3 + 2t &= 1 + 4s \\ -1 - t &= -9 - 5s \\ 5 - t &= 5 + 2s \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 2t - 4s &= 4 \\ -t + 5s &= -8 \\ -t - 2s &= 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 6s &= -12 & \Longrightarrow s &= -2 \\ -t + 5s &= -8 & \Longrightarrow t &= -2 \\ -t - 2s &= 0 & \Longrightarrow t &= 4 \end{aligned}$$

Es ergibt sich keine Lösung, damit sind die Geraden windschief.

(b) Die Richtungsvektoren von g und h sind parallel, denn es gilt:

$$-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Punktprobe mit $P\left(-\frac{1}{2} \mid 0 \mid -\frac{1}{2}\right)$ (Aufpunkt von h) und der Geraden g ergibt:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{aligned} &\Longrightarrow \quad t = 1 \\ &\Longrightarrow \quad t = 1 \\ &\Longrightarrow \quad t = 1 \end{aligned}$$

Damit fällt die Punktprobe positiv aus. Die Geraden g und h sind also identisch.

(c) Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig. Das Gleichsetzen der Geradengleichungen führt ohne Widerspruch zu $s = \frac{29}{7}$ und $t = 7$. Einsetzen des Wertes $t = 7$ in die Geradengleichung von g ergibt:

$$\vec{S} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{145}{7} \\ -20 \\ -28 \end{pmatrix}.$$

Damit ist der Schnittpunkt $S\left(-\frac{145}{7} \,\middle|\, -20 \,\middle|\, -28\right)$ gefunden.

Lösung 169

(a) Die Stromleitung h verläuft parallel zur Wasserleitung g, somit sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander. Der Aufpunkt von h ist der vorgegebene Punkt $P(0 \mid -3 \mid 0)$. Also ergibt sich:

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Gleichsetzen der Geradengleichungen des **Blitzableiters und der Stromleitung** ergibt:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\iff \begin{aligned} 6 + 3r &= \quad + 2s \\ 1 + r &= -3 \\ 2 + r &= \quad\quad s \end{aligned}$$

$$\iff \begin{aligned} 3r - 2s &= -6 &&\Longrightarrow s = -3 \\ r \phantom{{}-2s} &= -4 &&\Longrightarrow r = -4 \\ r - s &= -2 &&\Longrightarrow s = -2 \end{aligned}$$

Es gibt keine Lösung, also schneiden sich der Blitzableiter und die Stromleitung nicht. Gleichsetzen der Geradengleichungen des **Blitzableiters und der Wasserleitung** führt ohne Widerspruch zu $t = 0$ und $r = -2$. Einsetzen der Parameter in die Geradengleichungen liefert den Schnittpunkt $S(0 \mid -1 \mid 0)$ von Blitzableiter und Wasserleitung.

Lösung 170

(a) In einer Minute bewegt sich das Flugzeug A genau um die Länge des Richtungsvektors fort.

$$\left|\begin{pmatrix}4{,}0\\6{,}0\\1{,}0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4{,}0^2 + 6{,}0^2 + 1{,}0^2} \approx 7{,}28.$$

In einer Minute legt A also etwa 7,28 km zurück. Die Geschwindigkeit von A beträgt folglich

$$7{,}28\,\text{km/min} = 436{,}8\,\text{km/h} = 121{,}33\,\text{m/s}.$$

Die x_3-Koordinate des Richtungsvektors von A ist positiv, das Flugzeug A steigt also. Die x_3-Koordinate des Richtungsvektors von B ist 0, das Flugzeug B fliegt demnach auf gleichbleibender Höhe.

(b) Die Richtungsvektoren von A und B sind nicht senkrecht, da

$$\begin{pmatrix}4{,}0\\6{,}0\\1{,}0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3{,}0\\4{,}0\\0{,}0\end{pmatrix} = 36{,}0 \neq 0.$$

Damit sind die Flugbahnen nicht rechtwinklig zueinander.

(c) Gesucht ist die Lagebeziehung der Flugbahnen. Es sollen also die gesamten Geraden und nicht nur der Ort der beiden Flugzeuge zu gleichen Zeitpunkten untersucht werden. Daher dürfen die Parameter in den Geradengleichung nicht gleich heißen. Gleichsetzen ergibt:

$$\begin{pmatrix}2{,}0\\2{,}0\\3{,}0\end{pmatrix} + t_1\begin{pmatrix}4{,}0\\6{,}0\\1{,}0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}7\\5{,}6\\5{,}0\end{pmatrix} + t_2\begin{pmatrix}3{,}0\\4{,}0\\0{,}0\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 4t_1 - 3t_2 &= 1{,}7 & \Longrightarrow\ t_2 &= 2{,}1\\ 6t_1 - 4t_2 &= 3{,}6 & \Longrightarrow\ t_2 &= 2{,}1\\ t_1 &= 2 & \Longrightarrow\ t_1 &= 2{,}0 \end{aligned}$$

Einsetzen der Parameter in die Geradengleichungen ergibt den Schnittpunkt $S(\,10 \mid 14 \mid 5\,)$ der beiden Flugbahnen.

(d) Aus dem vorherigen Aufgabenteil ist bekannt, dass die Flugbahnen sich bei $t_1 = 2\,\text{min}$ und $t_2 = 2{,}1\,\text{min}$ schneiden. Da t_1 und t_2 am Schnittpunkt nicht gleich sind, befinden sich die Flugzeuge nie zum gleichen Zeitpunkt am gleichen Ort. Die Flugzeuge kollidieren also nie.

(e) Zunächst wird der Zeitpunkt berechnet, zu welchem sich Flugzeug A im Punkt $P(\,22 \mid 32 \mid 8\,)$ befindet.

$$\begin{pmatrix}22\\32\\8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2{,}0\\2{,}0\\3{,}0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}4{,}0\\6{,}0\\1{,}0\end{pmatrix} \quad \begin{matrix}\Longrightarrow t = 5\\ \Longrightarrow t = 5\\ \Longrightarrow t = 5\end{matrix}$$

Einsetzen von $t = 5$ in die Geradengleichung von B ergibt:

$$\begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 5{,}6 \\ 5{,}0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 3{,}0 \\ 4{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18{,}7 \\ 25{,}6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Flugzeug B befindet sich zum Zeitpunkt $t = 5$ min folglich im Punkt Q(18,7 | 25,6 | 5). Der Abstand zwischen Q(18,7 | 25,6 | 5) und P(22 | 32 | 8) ist

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right| \approx 7{,}8\,\mathrm{km}.$$

(f) Die Geradengleichungen können umgeschrieben werden:

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 2{,}0 \\ 2{,}0 \\ 3{,}0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4{,}0 \\ 6{,}0 \\ 1{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ 2 + 6t \\ 3 + t \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 5{,}6 \\ 5{,}0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3{,}0 \\ 4{,}0 \\ 0{,}0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}7 + 3t \\ 5{,}6 + 4t \\ 5 \end{pmatrix}$$

Zum Zeitpunkt t befindet sich das Flugzeug A im Punkt A(2 + 4t | 2 + 6t | 3 + t) und B im Punkt B(3,7 + 3t | 5,6 + 4t | 5). Der Abstand der beiden Punkte lässt sich wie folgt ausdrücken:

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| &= \left| \begin{pmatrix} 3{,}7 + 3t \\ 5{,}6 + 4t \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 + 4t \\ 2 + 6t \\ 3 + t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 1{,}7 - t \\ 3{,}6 - 2t \\ 2 - t \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{(1{,}7 - t)^2 + (3{,}6 - 2t)^2 + (2 - t)^2} = a(t) \end{aligned}$$

Gesucht ist das Minimum der Funktion a. Diese wird minimal, wenn der Ausdruck unter der Wurzel minimal wird. Es soll also das Minimum von:

$$(1{,}7 - t)^2 + (3{,}6 - 2t)^2 + (2 - t)^2$$

berechnet werden. Hierfür wird unter Berücksichtigung der Kettenregel die erste Ableitung berechnet und dann gleich Null gesetzt:

$$-2 \cdot (1{,}7 - t) - 4 \cdot (3{,}6 - 2t) - 2 \cdot (2 - t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t \approx 1{,}8.$$

Einsetzen liefert $a(1{,}817) \approx 0{,}22$.

Die Flugzeuge haben also nach 1,8 min= 108 s den geringsten Abstand von 0,22 km.

Lösungen

Lösung 171

(a) Das Skalarprodukt aus Normalen- und Richtungsvektor ist

$$\vec{n} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0.$$

Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung ergibt:

$$3 \cdot (3 + s \cdot 2) - (3 + s \cdot (-1)) + 5 \cdot (-1 + s \cdot (-1)) = -3$$
$$\Longrightarrow \quad s = -2.$$

Einsetzen von s in die Geradengleichung ergibt den Schnittpunkt $S(-1 \mid 5 \mid 1)$.

(b) Zunächst wird die Ebene in Koordinatenform umgeschrieben. Hierfür wird der Normalenvektor als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnet:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{n}.$$

Das Einsetzen des Stützpunktes der Ebene E in den Ansatz der Ebenengleichung ($E:$ $4x_1 - 9x_2 - 6x_3 = d$) ergibt

$$4x_1 - 9x_2 - 6x_3 = 2.$$

Das Skalarprodukt aus Normalenvektor von E und Richtungsvektor von g ist

$$\vec{n} \circ \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = 0.$$

Wird der Aufpunkt $P(8 \mid -2 \mid 14)$ von g in die Koordinatengleichung von E eingesetzt, ergibt sich ein Widerspruch. Damit sind g und E echt parallel.

(c) Das Skalarprodukt aus Normalen- und Richtungsvektor ist 0. Das Einsetzen des Aufpunkts $P(3 \mid 13 \mid 2)$ von g in E ergibt keinen Widerspruch. Damit liegt g in E.

Lösung 172

(a) Die Geraden schneiden sich in ihrem gemeinsamen Aufpunkt $S(3 \mid 3 \mid 6)$. Sie schneiden sich senkrecht, wenn ihre Richtungsvektoren senkrecht zueinander sind. Dies ist der Fall, wenn gilt

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist für $t = -4{,}5$ erfüllt.

(b) Die gesuchte Ebene E enthält den Aufpunkt von g als Stützvektor und den Richtungsvektor von g als Normalenvektor. Einsetzen des Normalenvektors und anschließende Punktprobe mit S liefert die Ebenengleichung

$$E:\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 = -21.$$

(c) Die Geradengleichung von g in F eingesetzt führt zu einem Widerspruch:

$$4 \cdot (3 + r \cdot 3) - 2 \cdot (3 + r \cdot (-2)) + 4 \cdot (6 + r \cdot (-4)) = 6 \quad \Longleftrightarrow \quad 24 = 0$$

Damit haben g und F keine gemeinsamen Punkte, das heißt g muss echt parallel zu F sein.

Lösung 173

Man setzt Gerade und Ebene jeweils gleich. Angegeben ist das LGS, das man erhält, wenn man alle Unbekannten auf die linke Seite bringt.

(a) Man erhält das LGS

$$\begin{aligned} s + 2t - r &= 1 \\ s \quad\quad + r &= -7 \\ s + t \quad\quad &= -3 \end{aligned}$$

Addiert man die ersten beiden Zeilen, so erhält man

$$2s + 2t = -6.$$

Dies ist ein Vielfaches der dritten Zeile. Somit hat das LGS unendlich viele Lösungen und g liegt in E.

(b) In diesem Fall sieht das LGS wie folgt aus:

$$\begin{aligned} s + 2t - r &= -6 \\ s \quad\quad\quad &= -2 \\ s + t - 2r &= -7 \end{aligned}$$

Hier kann direkt abgelesen werden, dass $s = -2$ gilt. Daraus folgt dann schließlich $t = -1$ und $r = 2$. Also gibt es einen Schnittpunkt. Setzt man $r = 2$ in die Geradengleichung ein, so erhält man den Punkt

$$S(1 \mid -1 \mid 3)$$

als Schnittpunkt.

(c) Hier erhält man folgendes LGS:

$$\begin{aligned} s + 2t + r &= -4 \\ s \quad\quad - 5r &= 0 \\ s + t - 2r &= -4 \end{aligned}$$

Eliminiert man mithilfe der ersten und letzten Gleichung die Variable t, so erhält man die Gleichung

$$-s + 5r = 4.$$

Diese steht im Widerspruch zur zweiten Zeile des LGS. Also ist das LGS nicht lösbar, woraus folgt, dass Gerade und Ebene parallel sein müssen.

Lösung 174

Damit die Gerade senkrecht auf der Ebene steht, muss sie senkrecht zu beiden Spannvektoren stehen. Daher berechnet man jeweils das Skalarprodukt des Richtungsvektors mit einem Spannvektor. Man erhält:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Da beide Skalarprodukte 0 ergeben, steht g in der Tat senkrecht auf E.

Lösung 175

(a) Die Normalenvektoren der Ebenen lauten:

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{n}_{E_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}_{E_4} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

$$\vec{n}_{E_1} \parallel \vec{n}_{E_2} \parallel \vec{n}_{E_4} \nparallel \vec{n}_{E_3}.$$

Die Ebene E_3 schneidet die anderen drei Ebenen in einer Schnittgeraden. Die Koordinatengleichungen von E_1 und E_4 sind Vielfache voneinander, das heißt E_1 und E_4 sind identisch. Die Koordinatengleichungen von E_2 und E_1 (bzw. E_4) sind keine Vielfache voneinander, also ist E_2 echt parallel zu E_1 und zu E_4.

(b) Die Schnittmenge von E_1 und E_3 ist eine Schnittgerade, welche man durch Lösen folgendes Gleichungssystems erhält:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} 4x_1 - 6x_2 - 2x_3 &= 4 \\ -12x_2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad x_2 = -2/3$$

Setzt man nun $x_1 = t$ und $x_2 = -2/3$ in die erste Zeile ein, ergibt sich $x_3 = 2t$ und damit die Schnittgerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(c) Da E_1 und E_4 identisch sind, ergibt sich aus $E_3 \cap E_4$ dieselbe Schnittgerade wie für $E_3 \cap E_4$ im vorherigem Aufgabenteil.

Lösung 176

(a) Die Normalenvektoren der Ebenen

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Die Koordinatengleichung von E_2 lautet

$$E_2 : -3x_1 - 9x_2 - x_3 = 0.$$

Die Koordinatengleichungen von E_1 und E_2 sind keine Vielfachen voneinander, das heißt die Ebenen sind echt parallel.

(b) Die Normalenvektoren der Ebenen

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig, d.h. die Ebenen schneiden sich. Die Koordinatengleichungen der Ebenen lauten

$$E_1 : x_1 + x_3 = 4 \quad \text{und} \quad E_2 : -x_2 - x_3 = -12.$$

Aus dem LGS der beiden Koordinatengleichungen folgt mit $x_3 = r$ die Schnittgerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Die Normalenvektoren der Ebenen

$$\vec{n}_{E_1} = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{n}_{E_2} = \begin{pmatrix} 12 \\ 26 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig. Die Koordinatengleichung von E_1 lautet

$$E_1 : 6x_1 + 13x_2 + 2x_3 = 5.$$

Die Koordinatengleichungen von E_1 und E_2 sind Vielfache voneinander, d.h. die Ebenen sind identisch.

Lösung 177

(a) $E : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$

(b) Die Schnittgerade der Seitenwand ABS und der Grundfläche ABC ist die Gerade durch A und B:

$$g : \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} [r]1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} [r]6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Der Normalenvektor der Ebene E, die ABS enthält, lautet

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Die Gerade h verläuft durch den Punkt C und besitzt $\vec{n_E}$ als Richtungsvektor:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} [r]1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} [r]8 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Um den Schnittpunkt von h und E zu erhalten, wird E in Koordinatenform umgeschrieben ($E : 8x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 5$) und anschließend die Geradengleichung von h in die Koordinatengleichung von E eingesetzt. Daraus folgt $r = \frac{48}{109}$ und damit schließlich der Schnittpunkt

$$\mathrm{P}\left(\frac{493}{109} \middle| \frac{693}{109} \middle| \frac{253}{109} \right).$$

Der Abstand zwischen P und C beträgt

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right| \approx 4{,}6.$$

Die Länge des Holzträgers beträgt also circa 4,6 Längeneinheiten.

Lösung 178

(a) Wandle die Gleichung der Ebene E in Koordinatenform um:

$$E = -27x_1 + 9x_2 + 10x_3 = 23.$$

Überprüfe, welche der Punkte A, B, C, D in der Ebene E liegen. Durch Punktprobe erhält man:

$$\mathrm{A}, \mathrm{C}, \mathrm{D} \in E.$$

Somit liegt die gesamte Seitenfläche ACD in der Ebene E und damit natürlich auch alle Kanten, die zwei der drei Punkte enthalten.

(b) Aus vorherigem Aufgabenteil ist bekannt, dass das Dreieck ACD in der Ebene E liegt. Die gesuchte Gerade ist also die Schnittgerade der Ebenen E und F.

$$\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad F : x_1 + 3x_2 = 1.$$

Das LGS aus den Koordinatengleichungen von E und F ergibt mit $x_2 = r$ die Schnittgerade g mit

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

(c) Beim Zerschneiden der Pyramide entstehen nur dann zwei Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche, wenn der Schnitt durch genau zwei Eckpunkte geht. Das heißt, die Aussage des Mannes würde stimmen, wenn genau zwei der Eckpunkte (A, B, C oder D) in der Schnittebene F liegen. Durch Einsetzen der Punkte in die Koordinatengleichung von F

ergibt sich

$A(-3\,|\,-2\,|\,-4) \notin F,\quad B(3\,|\,-4\,|\,-4) \notin F,$

$C(-1\,|\,4\,|\,-4) \notin F,\quad D(1\,|\,0\,|\,5) \in F.$

Nur D liegt in der Schnittebene, das heißt, der Mann hatte unrecht und durch den Schnitt entstehen keine zwei Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche.

Lösung 179

Für den Schnittwinkel α zwischen den Geraden g und h gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right|} = \frac{|12+18+12|}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{54}} \quad \text{also} \quad \alpha \approx 40{,}2^\circ.$$

Lösung 180

(a) Für den Schnittwinkel α zwischen den Geraden g und h gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}4\\6\\2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\right|} = \frac{|12+18+12|}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{54}} \quad \text{also} \quad \alpha \approx 40{,}2^\circ.$$

(b) Für den Schnittwinkel α zwischen den Ebenen E_1 und E_2 gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-3-6-4|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{26}} \quad \text{also} \quad \alpha \approx 47{,}0^\circ.$$

(c) Für den Schnittwinkel α zwischen der Ebene E und der Geraden g gilt:

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-4\\0\\6\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|8+0+6|}{\sqrt{52}\cdot\sqrt{5}} \quad \text{also} \quad \alpha \approx 60{,}3^\circ.$$

Lösung 181

(a) Eine mögliche Geradengleichung ist beispielsweise

$$S : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

(b) Die Strecke d, die Alice zurücklegen muss, entspricht gerade dem Abstand der beiden Haustüren, also

$$d = \left| \begin{pmatrix} -15 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 21 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -36 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1364} \approx 37.$$

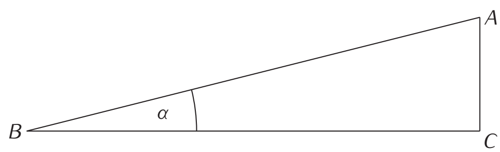
Alice muss also ca. 37 m weit laufen.

(c) Sie treffen sich beim Mittelpunkt M der Strecke. Es gilt

$$\vec{M} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-15+21) \\ \frac{1}{2}(3+11) \\ \frac{1}{2}(7+9) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Sie treffen sich also im Punkt M(3 | 7 | 8).

(d) Offensicht geht es von Bob bis Alice bergauf (die x_3-Koordinate vergrößert sich um 2 Einheiten). Wäre die Straße eben, so würde sie stattdessen im Punkt C(21 | 11 | 7) enden. Man erhält also folgendes Dreieck:



Nun kann man den Winkel α des Dreiecks ABC bestimmen. Es gilt:

$$\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 38 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Schließlich wird der Winkel bestimmt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 36 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1360}{\sqrt{1364} \cdot \sqrt{1360}} \approx 0{,}99853.$$

Somit ergibt sich ein Steigungswinkel von ca. $\alpha = 3{,}1°$.

Lösung 182

Der Abstand zwischen den Punkten A und B entspricht der Länge des Verbindungsvektors.

$$d(\mathrm{A};\mathrm{B}) = \left|\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\ \frac{1}{2}\\ 1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{4}{3}\\ 2\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}-2\right)^2 + \left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{22}{4}} = \frac{\sqrt{22}}{2} \approx 2{,}35.$$

Lösung 183

(a) Für die fehlenden Punkte gilt:

$$\mathrm{C}(-6\,|\,6\,|\,0),\ \mathrm{B}(-6\,|\,-6\,|\,0),\ \mathrm{G}(-3\,|\,0\,|\,21),\ \mathrm{H}(0\,|\,-3\,|\,21).$$

(b) Die Gerade, in welcher die Strecke $\overline{\mathrm{AE}}$ liegt, hat zum Beispiel die Darstellung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\-6\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-3\\6\\21\end{pmatrix},\ s \in \mathbb{R}$$

(c) Die Länge der Kante entspricht gerade dem Abstand der beiden Punkte A und E, also

$$l = \left|\begin{pmatrix}-3\\6\\21\end{pmatrix}\right| = \sqrt{3^2+6^2+21^2} \approx 22{,}05.$$

Lösung 184

Wie im Merksatz werden die Abstände $d(\mathrm{P};g)$ und $d(\mathrm{P};h)$ berechnet. Für die Gerade g erhält man:

Schritt 1: die Ebene $H_g:\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -3$,

Schritt 2: $\left(\text{mit } j = \frac{1}{5}\right)$ den Lotfußpunkt $\mathrm{S}_g\left(\frac{6}{5}\,\middle|\,1\,\middle|\,\frac{2}{5}\right)$,

Schritt 3: den Abstand

$$d(\mathrm{P};g) = \sqrt{\frac{64}{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} = \frac{8\sqrt{5}}{5} \approx 3{,}58.$$

Und analog für die Gerade h:

Schritt 1: die Ebene $H_h:\ x_2 - 2x_3 = -3$,

Schritt 2: $\left(\text{mit } k = -\frac{6}{5}\right)$ den Lotfußpunkt $\mathrm{S}_h\left(2\,\middle|\,\frac{9}{5}\,\middle|\,\frac{12}{5}\right)$,

Schritt 3: den Abstand

$$d(\mathrm{P};h) = \sqrt{\frac{84}{5}} \approx 4{,}1.$$

Die Gerade g ist also näher am Punkt P als die Gerade h.

Lösung 185

(a) Wenn Lara Yannick zu irgendeinem Zeitpunkt erkennen soll, muss Yannick während des Schwimmens weniger als 5 m von ihr entfernt sein. Wir berechnen also den Abstand von Laras Sitzplatz zu Yannicks Schwimmbahn. Der berechnete Abstand ist der minimale Abstand zwischen Lara und Yannick, während er schwimmt.

Schritt 1: Die Ebene, die senkrecht zur Geraden g ist und durch den Punkt P geht, ist $H: \ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 8$.

Schritt 2: Der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden ist $\mathrm{S}(\,9 \mid -2 \mid 3\,)$.

Schritt 3: Der Abstand ist $d(\mathrm{P}; g) = \left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right| = \sqrt{40} \approx 6{,}32$.

Wie Yannick auch schwimmt, er wird Lara nie näher als 6,32 m kommen, wenn er seine Schwimmbahn nicht verlässt. Er wird sie also nicht beeindrucken können.

(b) Der Punkt auf der Geraden, der dem Punkt M am nächsten ist, ist der Lotfußpunkt. Das Vorgehen entspricht also wieder obigem Rezept.

Schritt 1: Die Ebenengleichung, die durch M geht, ist $H: \ x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 43$.

Schritt 2: Den Lotfußpunkt, also der Punkt, an dem Yannick den Mädchen am nächsten ist, erhält man, wenn man $s = 2$ in die Geradengleichung einsetzt: $\mathrm{S}(\,10 \mid 3 \mid 6\,)$.

Schritt 3: Der Abstand zwischen der Gruppe und Yannick beträgt dann

$$d(\mathrm{M}; g) = \left|\overrightarrow{\mathrm{MS}}\right| = \sqrt{146} \approx 12{,}08,$$

also 12,08 m.

Lösung 186

(a)

$$d(\mathrm{P}; E_1) = \frac{|3 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 + (-2) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{14}} = \frac{15}{\sqrt{14}}.$$

(b)

$$d(\mathrm{P}; E_2) = \frac{|1 \cdot (-2)|}{\sqrt{1^2}} = \frac{2}{1} = 2.$$

(c) Die Ebene in Parameterform wird in Koordinatenform umgewandelt.

Schritt 1: Berechnung des Normalenvektors $\vec{n}$ als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} = \vec{n}.$$

Schritt 2: Ansatz für Ebenengleichung:

$$E_3: \ -16x_1 + 2x_2 + 8x_3 = a.$$

Schritt 3: Einsetzen des Stützpunkts $\mathrm{P}(\,-1 \mid 0 \mid 3\,)$ liefert a:

$$-16 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 3 = 40 = a.$$

Nun kann der Abstand berechnet werden:

$$d(\mathrm{P}; E_3) = \frac{|-16 \cdot (-1) + 2 \cdot (3) + 8 \cdot (-2) - 40|}{\sqrt{(-16)^2 + (2)^2 + (8)^2}} = \frac{|-34|}{\sqrt{324}} = \frac{34}{18} = \frac{17}{9}.$$

(d) Wie in (c) wird die Ebene zunächst in Koordinatenform umgewandelt. Man erhält

$$E_4: \ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 7.$$

Dann ist

$$d(\mathrm{P}; E_4) = \frac{|2 \cdot (-1) + 5 \cdot (3) + 3 \cdot (-2) - 7|}{\sqrt{(2)^2 + (5)^2 + (3)^2}} = \frac{0}{\sqrt{38}} = 0.$$

Folglich liegt der Punkt P in der Ebene E_4.

Lösung 187

Gesucht sind diejenigen Punkte P_r von g mit $d(\mathrm{P}_r; E) = 3\sqrt{14}$. Die Punkte der Gerade sind gegeben durch $\mathrm{P}_r(\,r \mid 2r \mid 1\,)$. Der Abstand zwischen einem solchen Punkt und der Ebene E kann in Abhängigkeit von r berechnet werden:

$$d(\mathrm{P}_r; E) = \frac{|3 \cdot r + 2 \cdot 2r + 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|7r|}{\sqrt{14}}.$$

Es soll gelten

$$d(\mathrm{P}_r; E) = \frac{|7r|}{\sqrt{14}} = 3\sqrt{14}.$$

Daraus folgt $r = \pm 6$ und demnach sind die beiden gesuchten Punkte $\mathrm{P}(\,6 \mid 12 \mid 1\,)$ und $\mathrm{P}(\,-6 \mid -12 \mid 1\,)$.

Lösung 188

Gesucht sind diejenigen Ebenen E_t mit $d(\mathrm{P}; E_t) = 2$. Der Abstand zwischen der Ebenenschar und dem Punkt P in Abhängigkeit von t ist gegeben durch:

$$d(\mathrm{P}; E_t) = \frac{|t \cdot 6 - 4 \cdot 5 + 4 \cdot 1 - 8|}{\sqrt{t^2 + (-4)^2 + 4^2}} = \frac{|6t - 24|}{\sqrt{t^2 + 32}}.$$

Nun kann gleichgesetzt werden:

$$d(\mathrm{P}; E_t) = \frac{|6t - 24|}{\sqrt{t^2 + 32}} = 2.$$

Multiplikation mit $\sqrt{t^2 + 32}$ und Division durch 2 liefert:

$$|3t - 12| = \sqrt{t^2 + 32}.$$

Nun werden beide Seiten quadriert, dadurch fallen die Betragsstriche weg:

$$\begin{aligned} & (3t - 12)^2 = t^2 + 32 \\ \iff\ & 9t^2 - 72t + 144 = t^2 + 32 \qquad \big| -(t^2 + 32) \\ \iff\ & 8t^2 - 72t + 112 = 0 \\ \iff\ & t^2 - 9t + 14 = 0. \end{aligned}$$

Die Lösungen der quadratischen Gleichung können mit der p-q-Formel bestimmt werden:

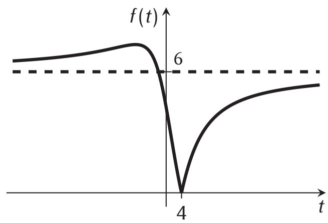
$t = 2$ und $t = 7$. Folglich haben die Ebenen

$$E_2: \; 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8 \quad \text{und}$$
$$E_7: \; 7x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 8$$

einen Abstand von zwei Längeneinheiten zum Punkt P. Um zu sehen, welche Werte der Abstand zwischen E_t und P annehmen kann, fassen wir $d(\mathrm{P}; E_t)$ als Funktion von t auf:

$$f(t) = \frac{|6t - 24|}{\sqrt{t^2 + 32}}.$$

Eine Kurvendiskussion zeigt: die Funktion hat eine Nullstelle bei $t = 4$. Für $t > 4$ ist f monoton wachsend und es ist $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 6$. Für $t < 4$ ist die Funktion monoton wachsend bis $t = -8$ und danach monoton fallend ($f'(t)$ hat VZW von + nach -), hat also ein Maximum bei $t = -8$. Der maximale Abstand ist $f(-8) = 3\sqrt{6}$. Es handelt sich hierbei um ein globales Maximum, denn $\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = 6$.



Der Abstand von der Ebenenschar zum Punkt P nimmt Werte zwischen 0 LE und $3\sqrt{6} \approx 7{,}35$ LE an.

Lösung 189

(a) Gesucht ist der Abstand der Ebenen E_H und E_L. Der Punkt $\mathrm{P}(\,-25 \mid 0 \mid 0\,)$ liegt in E_H und es gilt:

$$d(E_H; E_L) = d(\mathrm{P}; E_L) = \frac{|16 \cdot (-25) + 12 \cdot 0 - 20|}{\sqrt{16^2 + 12^2}} = \frac{420}{\sqrt{400}} = 21.$$

Der Abstand zwischen den beiden beträgt mindestens 21 LE.

(b) Da sich der Aufzug senkrecht zu den Stockwerken bewegt, entspricht der Richtungsvektor der Geraden dem Normalenvektor der Ebenen, in welchen sich die Stockwerke befinden. Diesen kann man beispielsweise bei E_H ablesen:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Als Aufpunkt der Gerade kann Heriberts Startpunkt $\mathrm{H}(\,-10 \mid -20 \mid 10\,)$ gewählt werden. Die Geradengleichung lautet:

$$g: \; \vec{x} = \vec{\mathrm{H}} + \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(c) Um herauszufinden, in welche Richtung Heribert fahren muss, werden zwei beliebige Punkte in den jeweiligen Ebenen betrachtet. Setzt man beispielsweise $x_2 = 0$, so kann man erkennen, dass sich in Heriberts Ebene der Punkt P(-25 | 0 | 0) und in Louises Ebene der Punkt $\mathrm{L}\left(\frac{5}{4} \mid 0 \mid 0\right)$ befindet. Folglich muss sich Heribert entlang der (positiven) Richtung des Vektors $\vec{v}$ bewegen. Die Länge von $\vec{v}$ ist gegeben durch:

$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Heribert bewegt sich zehn Stockwerke in Louises Richtung, also ist seine neue Position A gegeben durch:

$$\vec{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -14 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Um herauszufinden, in welchem Stockwerk seine neue Position ist, wird eine Punktprobe mit A durchgeführt:

$$E_{\mathrm{A}}: \ 4x_1 + 3x_2 = 4(-2) + 3(-14) = -50 = a.$$

Heribert befindet sich nun in der Ebene

$$E_{\mathrm{A}}: \ 4x_1 + 3x_2 = -50.$$

Da er sich zehn Längeneinheiten in Louises Richtung bewegt hat und vorher mindestens 21 Längeneinheiten von ihr entfernt war, ist er jetzt noch mindestens 11 Längeneinheiten von ihr entfernt.

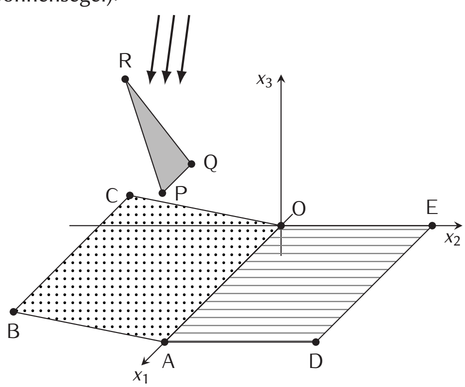
(d) In Heriberts Etage hält der Fahrstuhl am Punkt H_2(-10 | -20 | 10). Um die Position des Fahrstuhls auf Louises Etage zu berechnen, muss der Geradenvektor mit Länge 21 auf den Punkt H_2(-10 | -20 | 10) addiert werden. Da $|\vec{v}| = 5$ erhält man den Punkt, an dem Louise wartet wie folgt:

$$\mathrm{L}_2 = \begin{pmatrix} -10 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix} + \frac{21}{5} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6{,}8 \\ -7{,}4 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Louise wartet also im Punkt L_2(6,8 | -7,4 | 10).

Lösung 190

(a) Skizze (inklusive Sonnensegel):



Um zu zeigen, dass die Liegewiese rechteckig ist, genügt es zu zeigen, dass der Winkel an O und an B jeweils 90° beträgt. Es gilt:

$$\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}.$$

Somit beträgt der Innenwinkel an der Ecke O genau 90°. Weiter gilt:

$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}.$$

Somit ist auch der Innenwinkel an der Ecke B ein rechter Winkel. Also muss das Viereck OABC ein Rechteck sein. Der Flächeninhalt wird berechnet, indem die Länge des Vektors $\overrightarrow{OA}$ mit der Länge des Vektors $\overrightarrow{AB}$ multipliziert wird:

$$\left| \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 20 \quad \text{und} \quad \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{104}.$$

Der Flächeninhalt beträgt also:

$$20\,\text{m} \cdot \sqrt{104}\,\text{m} \approx 204\,\text{m}^2.$$

Als nächstes wird der Steigungswinkel der Liegewiese bestimmt. Eine Parametergleichung der Ebene E_L, in welcher die Liegewiese liegt, ist gegeben durch:

$$E_\text{L}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad m,n \in \mathbb{R}$$

Durch Umformung erhält man die Koordinatengleichung der Ebene E_L als:

$$E_\text{L}: \ : x_2 + 5x_3 = 0.$$

Der Steigungswinkel ist der spitze Winkel zwischen der Ebene E_L, in welcher die Liegewiese liegt und der x_1,x_2-Ebene. Die Koordinatenformen dieser Ebenen lauten:

$$E_\text{L}: \ x_2 + 5x_3 = 0$$
$$E_{x_1,x_2}: \ x_3 = 0.$$

Der spitze Winkel zwischen den Ebenen entspricht dem spitzen Winkel zwischen ihren Normalenvektoren. Es folgt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|5|}{\sqrt{26}} \quad \text{also} \quad \alpha = 11{,}31°.$$

(b) Zunächst werden die Schattenpunkte auf der Liegewiese berechnet. Die Hilfsgeraden durch die Punkte P, Q und R lauten:

$$g_{\mathrm{P}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

$$g_{\mathrm{Q}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}$$

$$g_{\mathrm{R}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Bestimme die Schnittpunkte der Geraden mit der Ebene E_{L}, in der sich die Liegewiese befindet. Durch Einsetzen der Geraden- in die Ebenengleichung werden Schnittpunkte für $r = 1$, $s = 1$ und $t = 2$ erhalten, also sind die Schattenpunkte auf der Liegewiese:

$$\mathrm{P}_2(9 \mid -5 \mid 1),\, \mathrm{Q}_2(4 \mid -5 \mid 1),\, \mathrm{R}_2(4 \mid -10 \mid 2).$$

Im Punkt $\mathrm{Q}_2(4 \mid -5 \mid 1)$ liegt der rechte Winkel des Dreiecks $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2$ vor, denn

$$\overrightarrow{\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_2} \circ \overrightarrow{\mathrm{Q}_2\mathrm{R}_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Für alle Punkte auf der Liegewiese gilt:

$$0 \leq x_1 \leq 20,\ -10 \leq x_2 \leq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq x_3 \leq 2.$$

Da $\mathrm{P}_2, \mathrm{Q}_2, \mathrm{R}_2$ diese Bedingungen erfüllen, ragt das Dreieck nicht über die Liegewiese hinaus. Die Fläche dieses Dreiecks beträgt

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{QP}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\mathrm{QR}}\right| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{26} \approx 12{,}75.$$

Der Anteil an der Gesamtfläche beträgt dann:

$$\frac{12{,}75}{204} \approx 0{,}06.$$

Also liegen ungefähr 6 % der Liegewiese im Schatten.

Lösung 191

(a) Es muss hierfür ein Punkt C so bestimmt werden, dass A, B und C auf einer Geraden liegen. Der Punkt $\mathrm{C}(7 \mid 2 \mid 3)$ ergibt sich beispielsweise, indem man vom Punkt B aus in Richtung $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ geht:

$$\vec{\mathrm{C}} = \vec{\mathrm{B}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Es müssen hierfür Punkte C und D so bestimmt werden, dass alle Seiten des Vierecks ABCD gleich lang sind und senkrecht zueinander stehen. Alle Vektoren $\vec{v}$ mit

Lösungen

Komponente $v_1 = 0$ stehen senkrecht auf

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

da $\overrightarrow{AB} \circ \vec{v} = 0$.

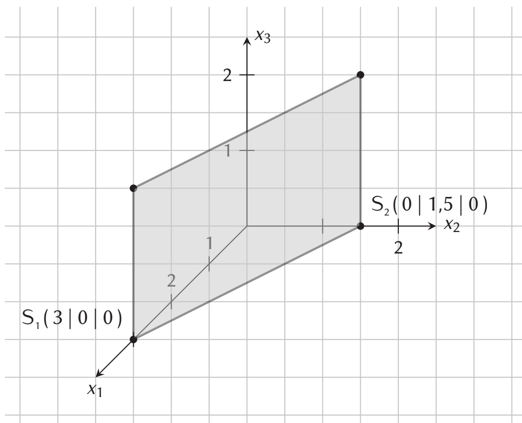
Außerdem hat der Vektor $\overrightarrow{AB}$, und somit die Seiten im Quadrat, eine Länge von 6 Längeneinheiten. Mithilfe des Vektors

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

können somit Punkte C und D berechnet werden, indem man von A bzw. B in Richtung $\vec{v}$ geht und man erhält C(1 | 8 | 3) und D(-5 | 8 | 3).

Lösung 192

(a) Da in der Ebenengleichung der Koeffizient vor x_3 in diesem Fall 0 ist, verläuft die Ebene parallel zur x_3-Achse.
Für $x_3 = 0$ und $x_1 = 0$, bzw. $x_2 = 0$ erhält man die beiden Spurpunkte S_2(0 | 1,5 | 0) und S_1(3 | 0 | 0). Dadurch kann man E folgendermaßen darstellen:



(b) Für einen Punkt P mit identischen Koordinaten gilt $p_1 = p_2 = p_3$.
Da P auf E liegen soll, folgt:

$$\begin{aligned} p_1 + 2p_2 = 3 \quad &\Longleftrightarrow \quad p_1 + 2p_1 = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad 3p_1 = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad p_1 = 1. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes P lautenalso P(1 | 1 | 1). Der Normalenvektor lässt sich aus der Koordinatenform der Ebene ablesen als

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Eine Gerade g, die senkrecht zur Ebene E und durch den Punkt P verläuft, lässt sich also bestimmen als:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Lösung 193

(a) Gesucht ist eine Koordinatengleichung für die Ebene E, welche die Punkte A(2 | 3 | 5), B(6 | 6 | 0) und C(2 | 8 | 0) enthält. Dafür werden zunächst zwei Spannvektoren der Ebene E bestimmt. Es gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Über das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren wird ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene ermittelt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} = 10 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich als Ansatz für die Ebenengleichung

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = d.$$

Setzt man jetzt die Koordinaten eines der gegebenen Punkte ein, erhält man $d = 18$. Eine Koordinatengleichung der Ebene E ist also:

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18.$$

(b) Gesucht sind die Spurpunkte der Ebene E, also die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen. Um den Spurpunkt S_1 zu ermitteln, werden in der Ebenengleichung $x_2 = x_3 = 0$ gesetzt. Man erhält:

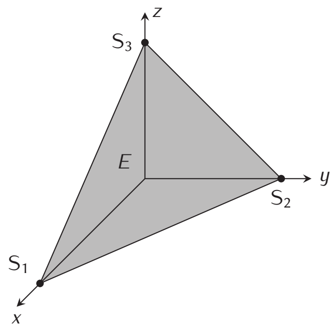
$$x_1 = 18 \quad \Longrightarrow \quad S_1(18 \mid 0 \mid 0).$$

Analog ergeben sich für $x_1 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = 0$ die Spurpunkte S_2 und S_3:

$$0 + 2x_2 + 0 = 18 \quad \Longrightarrow \quad S_2(0 \mid 9 \mid 0),$$
$$0 + 0 + 2x_3 = 18 \quad \Longrightarrow \quad S_3(0 \mid 0 \mid 9).$$

Die Ebene E hat die drei Spurpunkte $S_1(18 \mid 0 \mid 0)$, $S_2(0 \mid 9 \mid 0)$ und $S_3(0 \mid 0 \mid 9)$. Trägt man diese Punkte in ein Koordinatensystem ein, kann man die Ebene E visualisieren.

Lösungen



(c) Es soll nachgewiesen werden, dass das Dreieck ABC gleichschenklig ist, also mindestens zwei Seiten des Dreiecks gleich lang sind. Deshalb werden die Abstände der Punkte untereinander berechnet und verglichen:

$$\begin{aligned} & d(\mathrm{A};\mathrm{B}) = \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} = \sqrt{50}, \\ & d(\mathrm{A};\mathrm{C}) = \sqrt{0 + 5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}, \\ & d(\mathrm{B};\mathrm{C}) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2 + 0} = \sqrt{20} \\ \Longrightarrow \quad & d(\mathrm{A};\mathrm{B}) = d(\mathrm{A};\mathrm{C}) \neq d(\mathrm{B};\mathrm{C}). \end{aligned}$$

Da die Abstände $d(\mathrm{A};\mathrm{B})$ und $d(\mathrm{A};\mathrm{C})$ gleich groß sind und damit die entsprechenden Strecken gleich lang sind, ist das Dreieck ABC gleichschenklig. Die Strecke $\overline{\mathrm{BC}}$ hat dagegen eine andere Länge und ist somit die Basis des gleichschenkligen Dreiecks.

(d)
- ➤ Eine Möglichkeit für die Berechnung der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks ist die Bestimmung des Abstandes der Spitze, also des Schnittpunktes der beiden gleichlangen Schenkel, zur Geraden durch die beiden anderen Eckpunkte des Dreiecks.
- ➤ Die Berechnung der Höhe eines gleichschenkligen Dreiecks kann auch über die Ermittlung der Seitenlängen und die Verwendung des Satzes des Pythagoras erfolgen. Dabei wird ausgenutzt, dass die Höhe zum einen senkrecht auf der Basis steht und dass sie zum anderen die Basis in einem gleichschenkligen Dreieck genau halbiert. Wenn h die Höhe, a die Länge eines Schenkels und c die Länge der Basis ist, gilt dann im gleichschenkligen Dreieck:

$$h^2 = a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}.$$

(e)
- ➤ Zunächst sind die Koordinaten des Lotfußpunktes H der Pyramidenspitze S in der Ebene E gesucht. Dazu muss der Schnittpunkt der Ebene mit der Geraden l bestimmt werden, die S enthält und den Richtungsvektor $\vec{n}$ hat. Es gelten:

$$l : \vec{x} = \vec{S} + t\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}$$

$$E : x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18.$$

Wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt, lässt sich der Parameter t für den gesuchten Schnittpunkt H berechnen:

$$4 + t + 2(8 + 2t) + 2(5 + 2t) = 18 \quad \Longrightarrow \quad t = -\frac{4}{3}.$$

und damit die Koordinaten des Punktes H:

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Der Lotfußpunkt der Pyramidenspitze S auf die Ebene E ist $H\left(\frac{8}{3} \mid \frac{16}{3} \mid \frac{7}{3}\right)$.

➤ Es soll nachgewiesen werden, dass der Punkt H innerhalb des Dreieckes ABC liegt. Dafür wird die Parameterform der Dreiecksfläche ABC verwendet. Sie entspricht der Parameterform der Ebene E mit dem Stützvektor $\vec{A}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$:

$$E : \vec{x} = \vec{A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}$$

mit den zusätzlichen Bedingungen:

$$0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq s \leq 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq r + s \leq 1.$$

Nun werden die Koordinaten von H in die Parameterform eingesetzt:

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4r \\ 3 + 3r + 5s \\ 5 - 5r - 5s \end{pmatrix}$$

und das entstandene Gleichungssystem gelöst:

$$\begin{aligned}
\frac{8}{3} &= 2 + 4r \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{1}{6} \\
\frac{16}{3} &= 3 + 3r + 5s = 3 + \frac{3}{6} + 5s \quad \Longrightarrow \quad s = \frac{11}{30} \\
\frac{7}{3} &= 5 - 5r - 5s = 5 - \frac{5}{6} - \frac{55}{30} = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

Für den Punkt H erfüllen also die berechneten Parameter die, für die Dreiecksfläche gestellten, Bedingungen und somit liegt der Punkt H in der Dreiecksfläche ABC.

➤ Weiterhin ist das Volumen der Pyramide gesucht. Die entsprechende Formel ist:

$$V = \frac{1}{3} Ah,$$

wobei A die Fläche des Dreiecks ABC und h der Abstand der Spitze S von dieser Fläche ist. Da die Seitenlängen des Dreiecks bereits in einer vorhergehenden Teilaufgabe bestimmt wurden, empfiehlt sich die Berechnung der Dreieckshöhe über den Satz des Pythagoras. Für die Dreiecksfläche gilt dann:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2} d(B; C) \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4(d(A; B))^2 - (d(B; C))^2} \\
&= \frac{1}{4} \sqrt{20} \sqrt{200 - 20} = \frac{1}{4} \sqrt{20} \sqrt{20 \cdot 9} = 15.
\end{aligned}$$

Die Höhe der Pyramide ist gleich dem Abstand der Spitze S vom Lotfußpunkt H in der Ebene E:

$$h = d(S; H) = \sqrt{\left(4 - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(8 - \frac{16}{3}\right)^2 + \left(5 - \frac{7}{3}\right)^2} = 4.$$

Lösungen

Eingesetzt in die Formel für das Volumen einer Pyramide ergibt sich dann:

$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3} \cdot 15 \cdot 4 = 20.$$

Das Volumen der Pyramide mit den Eckpunkten A, B, C und S beträgt 20 VE.

(f) Wenn das Volumen V_* bei gleicher Grundfläche A und gleichem Lotfußpunkt H 15 VE beträgt, dann gilt

$$V_* : V = h_* : h = d(\mathrm{H}; \mathrm{S}_*) : d(\mathrm{H}; \mathrm{S}) = \frac{3}{4}.$$

Die Strecke $\overline{\mathrm{HS}_*}$ entspricht also der mit dem Faktor $\frac{3}{4}$ gestauchten Strecke $\overline{\mathrm{HS}}$. Damit erhält man den Punkt S_* über

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{S}_*} &= \overrightarrow{\mathrm{H}} + \frac{3}{4} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HS}}\\ &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 7 \end{pmatrix} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Die Spitze der Pyramide mit gleicher Grundfläche und gleichem Lotfußpunkt, aber einem Volumen von 15 VE, liegt also bei $\mathrm{S}_*\left(\frac{11}{3} \mid \frac{22}{3} \mid \frac{13}{3} \right)$.

(g)
- ➤ Es ist zu zeigen, dass der Punkt P(6 | 3,5 | -6,5) nicht auf der Geraden g durch die Punkte A und B liegt. Die Gleichung der Geraden ist gegeben durch:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}.$$

Werden die Koordinaten des Punktes P in diese Gleichung eingesetzt, erhält man:

$$\begin{aligned} 6 = 2 + 4s &\quad\Longrightarrow\quad s = 1 \\ 3{,}5 = 3 + 3s &\quad\Longrightarrow\quad s = \frac{1}{6} \\ -6{,}5 = 5 - 5s &\quad\Longrightarrow\quad s = \frac{23}{10}. \end{aligned}$$

Es gibt also keinen Parameter s für den gilt $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{P}}$. Somit liegt P nicht auf der Geraden g.

- ➤ Gesucht ist das Volumen des Kegels, der entsteht, wenn man P um die Gerade g rotieren lässt und dessen Spitze die Mitte der Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ ist. Die Spitze des Kegels befindet sich somit im Punkt M:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}} = \overrightarrow{\mathrm{A}} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{B}} - \overrightarrow{\mathrm{A}}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$$

Die Volumenformel eines Kegels ist gegeben durch:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

wobei V das gesuchte Volumen ist, r der Radius der Grundfläche und h die Höhe des Kegels. Wenn der Punkt L der Lotfußpunkt von P auf der Geraden g ist, dann gelten:

$$r = d(\mathrm{P}; \mathrm{L}) \quad \text{und} \quad h = d(\mathrm{M}; \mathrm{L}).$$

Um den Lotfußpunkt L zu bestimmen, wird eine Hilfsebene H verwendet, deren Normalenvektor dem Richtungsvektor von g entspricht:

$$H : 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = a$$

und die den Punkt P(6 | 3,5 | -6,5) enthält:

$$4 \cdot 6 + 3 \cdot 3{,}5 + 5 \cdot 6{,}5 = 67,$$

also

$$H : 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 67.$$

Der Lotfußpunkt L ist dann der Schnittpunkt der Ebene H mit der Geraden g. Für L gilt also:

$$4(2 + 4s) + 3(3 + 3s) - 5(5 - 5s) = 67 \quad \Longrightarrow \quad s = 1{,}5.$$

Durch Einsetzen des Parameters s in die Geradengleichung g erhält man dann den Lotfußpunkt L(8 | 7,5 | -2,5). Damit ergeben sich für den Radius der Kegelgrundfläche

$$r = d(\mathrm{P}; \mathrm{L}) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = 6$$

und für die Höhe des Kegels

$$h = d(\mathrm{M}; \mathrm{L}) = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{50}.$$

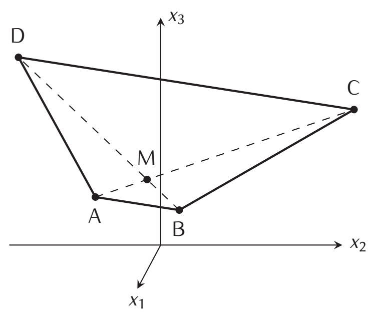
Daraus lässt sich dann das Kegelvolumen berechnen:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 36 \cdot \sqrt{50} = 12\sqrt{50}\pi \approx 266{,}6.$$

Das Volumen des Kegels, der durch Rotation des Punktes P(6 | 3,5 | -6,5) um die Gerade g mit der Spitze im Mittelpunkt der Strecke $\overline{\mathrm{AB}}$ entsteht, beträgt $12\sqrt{50}\pi$ VE, also näherungsweise 266,6 VE.

Lösung 194

Zur Veranschaulichung der Aufgabenstellungen folgt hier erstmal eine einfache, nicht maßstäbliche Skizze.



(a) Gesucht ist zunächst eine Koordinatengleichung für die Ebene E, in der alle vier Punkte A, B, C und D liegen. Dafür werden zwei Spannvektoren benötigt. Möglich sind beispielsweise

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Durch Berechnung des Kreuzproduktes dieser beiden Vektoren lässt sich ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ermitteln:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ein Ansatz für die Ebenengleichung ist damit

$$E: 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 = d.$$

Setzt man nun einen der drei für die Spannvektoren verwendeten Punkte A, B und C in die Gleichung ein, erhält man $d = 5$. Jetzt muss noch durch Einsetzen in die Koordinatengleichung überprüft werden, ob der Punkt D ebenfalls in dieser Ebene liegt.

$$7 \cdot 7 + 4 \cdot (-2) - 6 \cdot 6 = 5 \quad \checkmark$$

Eine Koordinatengleichung für die Ebene E, in der alle vier gegebenen Punkte liegen, ist somit gegeben durch:

$$E: 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 5.$$

(b) Um zu zeigen, dass die Punkte A, B, C und D ein Trapez, aber kein Parallelogramm beschreiben, müssen zunächst die Verbindungsvektoren zwischen den Punkten bestimmt werden. Es gelten:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix} = -4\,\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{CD}$ unterscheiden sich nur durch einen Faktor. Somit sind sie parallel. Da sich ihre Längen um den Faktor 4 unterscheiden, ist das Viereck ABCD ein Trapez, aber kein Parallelogramm. Nun muss noch untersucht werden, ob die beiden Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{BC}$ gleich lang sind. Dazu werden die Beträge der entsprechenden Vektoren ermittelt:

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{33}$$

$$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{30}$$

Da auch die Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ unterschiedlich lang sind, besitzt das Trapez keine sich gegenüberliegenden gleich langen Seiten.

(c) Gesucht ist der Schnittpunkt M der beiden Diagonalen im Trapez ABCD. Dazu wird der Schnittpunkt der beiden Geraden e und f ermittelt, in denen die Diagonalen liegen. Es gelten:

$$e: \vec{x} = \vec{A} + r\,\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -4 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f: \vec{x} = \vec{B} + s\,\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die beiden Geradengleichungen werden nun gleichgesetzt:

$$\begin{aligned} 3 - 4r &= 1 + 6s \\ -1 + 7r &= 1 - 3s \\ 2 &= 1 + 5s \end{aligned}$$

Dieses LGS wird gelöst und man erhält $r = 0{,}2$ und $s = 0{,}2$. Setzt man jetzt r in die Gleichung der Geraden e oder s in die Gleichung der Geraden f ein, erhält man den Schnittpunkt der beiden Diagonalen $\mathrm{M}(2{,}2 \mid 0{,}4 \mid 2)$.

(d) Gesucht ist der Abstand zwischen den beiden parallelen Seiten des Trapezes, also die Höhe h des Trapezes. Sie entspricht dem Abstand eines beliebigen Punktes auf der Geraden durch C und D zur Geraden g durch A und B. Deshalb wird zunächst eine Koordinatengleichung für die Hilfsebene H ermittelt, die senkrecht zur Geraden g steht und den Punkt C enthält. Als Normalenvektor dieser Hilfsebene wird $\overrightarrow{AB}$ verwendet. Damit ergibt sich als Ansatz für H:

$$H: -2x_1 + 2x_2 - x_3 = a.$$

Durch Einsetzen der Koordinaten von C erhält man dann:

$$H: -2x_1 + 2x_2 - x_3 = 12.$$

Die Gerade g durch die Punkte A und B hat die Gleichung:

$$g: \vec{x} = \vec{A} + r\,\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Durch das Einsetzen der Geradengleichung in die Ebenengleichung lässt sich der Schnittpunkt von beiden bestimmen, der gleichzeitig auch der Lotfußpunkt L des Punktes C auf die Gerade g ist. Es gilt:

$$-2(3 - 2r) + 2(-1 + 2r) - (2 - r) = 12 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{22}{9}.$$

Damit liegt der Schnittpunkt der Geraden g mit der Hilfsebene bei $\mathrm{L}\left(-\tfrac{17}{9} \mid \tfrac{35}{9} \mid -\tfrac{4}{9}\right)$. Die Höhe des Trapezes lässt sich nun als $d(\mathrm{C};\mathrm{L})$ berechnen:

$$h = d(\mathrm{C};\mathrm{L}) = \frac{1}{9}\sqrt{(-8)^2 + (-19)^2 + (-22)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{101} \approx 3{,}35.$$

Der Abstand zwischen den beiden parallelen Seiten des Trapezes beträgt ungefähr 3,35 LE. Mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Formel

$$A = \frac{1}{2}(a + b)\,h.$$

soll der Flächeninhalt des Trapezes berechnet werden. Dabei gilt:

$$a = d(\mathrm{A};\mathrm{B}) = 3$$
$$b = d(\mathrm{C};\mathrm{D}) = 12$$
$$h = d(\mathrm{C};\mathrm{L}) = \frac{1}{3}\sqrt{101}.$$

und damit

$$A = \frac{1}{2}\,(a+b)\,h = \frac{1}{2}\,(3+12)\cdot\frac{1}{3}\sqrt{101} = \frac{5}{2}\sqrt{101} \approx 25{,}12.$$

Der Flächeninhalt des Trapezes ABCD beträgt ungefähr 25,12 FE.

(e) Um zu zeigen, dass der Punkt $\mathrm{M}(\,2{,}2 \mid 0{,}4 \mid 2\,)$ die Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ im Verhältnis 1 : 4 teilt, wird das Verhältnis der Strecke $\overline{\mathrm{AM}}$ zur Strecke $\overline{\mathrm{MC}}$ berechnet. Es gilt:

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right| : \left|\overrightarrow{\mathrm{MC}}\right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2 + 0} : \sqrt{\left(\frac{-16}{5}\right)^2 + \left(\frac{28}{5}\right)^2 + 0}$$
$$= \sqrt{\frac{13}{5}} : \sqrt{\frac{208}{5}} = 1 : \sqrt{16} = 1 : 4.$$

Damit teilt M die Strecke $\overline{\mathrm{AC}}$ im Verhältnis 1 : 4.

(f) Wenn alle Punkte der Ebene F von $\mathrm{U}(\,3 \mid 2{,}5 \mid -1\,)$ und $\mathrm{V}(\,3 \mid 3{,}5 \mid 1\,)$ den gleichen Abstand haben sollen, dann steht zum einen die Gerade h durch die Punkte U und V senkrecht auf der Ebene F und zum anderen liegt der Mittelpunkt W der Strecke $\overline{\mathrm{UV}}$ in der Ebene F. Für die Gerade h gilt:

$$h : \vec{x} = \vec{\mathrm{U}} + r\,\overrightarrow{\mathrm{UV}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2{,}5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Koordinaten des Mittelpunkts $\mathrm{W}(\,3 \mid 3 \mid 0\,)$ der Strecke $\overline{\mathrm{UV}}$ erhält man für $r = 0{,}5$. Ein Ansatz für die Koordinatengleichung von F ist damit

$$F : x_2 + 2x_3 = a$$

und das Einsetzen von $\mathrm{W}(\,3 \mid 3 \mid 0\,)$ in diese Gleichung liefert $a = 3$. Eine Gleichung für die Ebene F ist also

$$F : x_2 + 2x_3 = 3.$$

Wenn nun die Gerade g in der Ebene E liegt und ihre Punkte ebenfalls den gleichen Abstand von den Punkten U und V haben, dann ist g die Schnittgerade der Ebenen E und F. Damit ist folgendes lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Jetzt wird $x_3 = t$ gesetzt und anschließend werden x_1 und x_2 in Abhängigkeit von t bestimmt. Es ergeben sich:

$$x_2 = 3 - 2t$$
$$x_1 = \frac{5 + 6t - 4(3-2t)}{7} = -1 + 2t.$$

Eine Geradengleichung für g ist also gegeben durch:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1+2t \\ 3-2t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 195

(a) Zunächst ist eine Koordinatengleichung der Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad r, s \in \mathbb{R}$$

gesucht. Zum Bestimmen eines Normalenvektors der Ebene wird das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnet:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ein Ansatz für eine Koordinatengleichung der Ebene E ist also

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = a.$$

Durch Einsetzen eines Punktes der Ebene E wird $a = 2$ ermittelt und somit ist

$$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

eine Koordinatengleichung der Ebene E, in der die Oberfläche des aufgeschütteten Hangs liegt. Jetzt lässt sich der Neigungswinkel des Hanges gegenüber der x_1x_2-Ebene bestimmen. Es gilt:

$$\cos\alpha = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\sqrt{1^2}} = \frac{2}{3} \quad \text{also} \quad \alpha \approx 48{,}2^\circ.$$

Der Neigungswinkel des Hanges beträgt also etwa 48,2°.

(b) Gesucht sind die Spurpunkte der Ebene E, also die Schnittpunkte von E mit den Koordinatenachsen. Um den Spurpunkt S_1 zu ermitteln, werden in der Ebenengleichung $x_2 = x_3 = 0$ gesetzt. Man erhält:

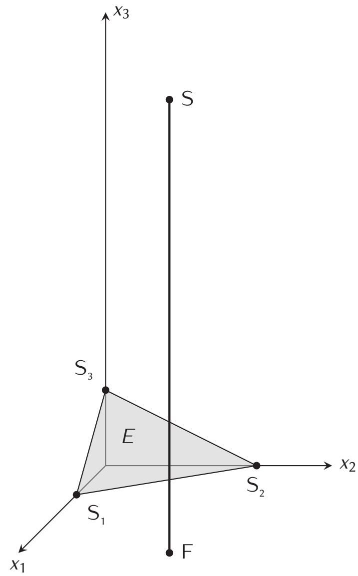
$$2x_1 = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_1(1\,|\,0\,|\,0).$$

Analog ergeben sich für $x_1 = x_3 = 0$ und $x_1 = x_2 = 0$ die Spurpunkte S_2 und S_3:

$$x_2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_2(0\,|\,2\,|\,0),$$
$$2x_3 = 2 \quad \Longrightarrow \quad S_3(0\,|\,0\,|\,1).$$

Mit Hilfe der Spurpunkte lässt sich dann die Ebene E skizzieren:

Lösungen



(c) Gesucht ist der Abstand des Freifall-Turmes zum Fuß des Hanges. Es muss somit der Abstand des Punktes $F(3 \mid 2 \mid 0)$ von der Geraden h durch die Punkte $S_1(1 \mid 0 \mid 0)$ und $S_2(0 \mid 2 \mid 0)$ berechnet werden. Für h gilt:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Als erster Schritt wird nun eine Hilfsebene H definiert, die den Punkt F enthält und für die der Richtungsvektor von h ein Normalenvektor ist. Dann ist

$$H : -x_1 + 2x_2 = a$$

ein Ansatz für die Koordinatengleichung der Ebene H. Setzt man F ein, ergibt sich $a = 1$. Eine Koordinatengleichung von H ist also

$$H : -x_1 + 2x_2 = 1.$$

Nun wird die Gleichung der Geraden h in die Ebenengleichung eingesetzt

$$-1 + r + 4r = 1 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{2}{5}.$$

Damit ist dann

$$K\left(\frac{3}{5} \,\middle|\, \frac{4}{5} \,\middle|\, 0 \right)$$

der Schnittpunkt der Geraden durch den Fuß des Hanges mit der Hilfsebene H. Jetzt kann der Abstand zwischen dem Mittelpunkt F des Turmfundamentes in der x_1x_2-Ebene und dem Punkt K berechnet werden:

$$d(F; K) = \sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}\sqrt{20} \approx 2{,}68.$$

Der Abstand zwischen der Mitte des Turmfundamentes und der Hangkante beträgt also ungefähr 2,68 LE beziehungsweise 26,8 m. Da das Fundament einen Durchmesser von 10 m hat, sind zwischen Hangkante und Freifallturm noch etwa 21,8 m Abstand für Warteschlangen, Wege und Grünflächen. Der Mindestabstand wird also eingehalten.

(d) Gesucht ist der Schattenpunkt S_* der Turmspitze auf der Ebene E. Es muss also der Schnittpunkt der Ebene

$$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$

mit der Geraden g, die den Lichtstrahl von der Turmspitze zur Ebene enthält, berechnet werden. Es gilt

$$g : \vec{x} = \vec{F} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r\,\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Zur Bestimmung des Parameters r für den Schattenpunkt S_* wird die Geradengleichung in die Ebenengleichung eingesetzt:

$$2(3 - 3r) + 2 - r + 2(6 - 4r) = 2 \quad \Longrightarrow \quad r = \frac{6}{5}.$$

Damit ist dann

$$S_*\left(-\frac{3}{5} \,\middle|\, \frac{4}{5} \,\middle|\, \frac{6}{5} \right)$$

der Schattenpunkt der Spitze des Freifallturmes auf der Ebene E.

(e) Gesucht ist der genaue Verlauf des Schattens der Turmmittelachse. Dieser liegt vom Fuß der Mittelachse bis zur Hangkante in der x_1x_2-Ebene und danach bis zum Schattenpunkt der Spitze $S_*(-0{,}6 \mid 0{,}8 \mid 1{,}2)$ in der Ebene E. Die Projekton des Schattenpunktes S_* in die x_1x_2-Ebene ist $V(-0{,}6 \mid 0{,}8 \mid 0)$. Der Schatten verläuft also am Fuß des Turmes auf der Geraden:

$$g_1 : \vec{x} = \vec{F} + k\,\overrightarrow{FV} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{18}{5} \\ -\frac{6}{5} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{5}k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Für die weitere Rechnung ist es geschickt, den Richtungsvektor mit $\frac{5}{6}$ zu strecken. Dann gilt für die Gerade g_1, die den Schatten enthält:

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Jetzt wird der Punkt berechnet, an dem der Schatten auf die Hangkante trifft, also der Schnittpunkt der Geraden g_1 mit der Ebene

$$E : 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 2.$$

Diesen erhält man durch Einsetzen der Geraden- in die Ebenengleichung. Es gilt:

$$2(3 - 3k) + 2 - k = 2 \quad \Longrightarrow \quad k = \frac{6}{7}.$$

Der Turmschatten trifft also im Punkt

$$G\left(\frac{3}{7} \,\middle|\, \frac{8}{7} \,\middle|\, 0 \right)$$

auf die Hangkante. Der restliche Teil des Schattens verläuft in der Ebene E und dort auf der Geraden g_2 durch G und den Schattenpunkt der Turmspitze S_*. Es gilt:

$$g_2 : \vec{x} = \vec{G} + k\,\overrightarrow{GS_*} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -\frac{36}{35} \\ -\frac{12}{35} \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{6}{35}k \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Den Richtungsvektor dieser Geraden streckt man am besten wiederum mit $\frac{35}{6}$. Dann ist:

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{R}$$

eine Gleichung für die Gerade, in der der Schatten auf dem Hang liegt. Der Schatten des Turmes verläuft also ausgehend vom Fuß der Mittelachse des Turmes zunächst auf der Strecke

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad k \in \left[0; \frac{6}{7}\right],$$

trifft dann im Punkt

$$G\left(\frac{3}{7} \,\middle|\, \frac{8}{7} \,\middle|\, 0 \right)$$

auf die Hangkante und verläuft anschließend auf dem Hang auf der Strecke

$$g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{8}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad k \in \left[0; \frac{6}{35}\right].$$

Lösung 196

Werden die Münzen gleichzeitig geworfen, dann gehören beispielsweise (ZZK) und (ZKZ) zu einem Ereignis. Der Stichprobenraum kann beispielsweise als die Anzahl der geworfenen Köpfe beschrieben werden:

$$\Omega = \{0; 1; 2; 3\}.$$

Ereignisse sind beispielsweise:

- $E_1 = \{2; 3\}$: Es wird mindestens zweimal Kopf geworfen.
- $E_1 = \{0\}$: Es wird kein Kopf geworden.

Die dazugehörigen Gegenereignisse sind:

- $\overline{E_1} = \{0; 1\}$: Es wird höchstens einmal Kopf geworfen.
- $\overline{E_2} = \{1; 2; 3\}$: Es wird mindestens einmal Kopf geworfen.

Lösung 197

$$\Omega = \big\{\{S,S,B\}; \{S,S,W\}; \{S,S,G\}; \{S,B,G\}; \{S,B,W\}; \{S,G,W\}; \{B,G,W\}\big\}.$$

Lösung 198

(a) Die Augensumme 9 wird mit folgenden Ereignissen erzeugt:

$$(6{,}3), (5{,}4), (4{,}5), (3{,}6).$$

Anmerkung: Da nacheinander gewürfelt wird, sind die Ereignisse (5,4) und (4,5) unterschiedlich.

(b) Die gesuchte Menge ist:

$$\big\{\{K,K,K,Z\}; \{K,K,K,K\}\big\} \subset \Omega$$

(c) $E = \{2; 3; 5; 7\}$. Anmerkung: 1 ist keine Primzahl.

Lösung 199

(a) Es befinden sich 13 Herz-Karten im Deck, damit ist

$$P(H) = \frac{13}{52}.$$

(b) Es befinden sich 4 Damen im Deck, damit ist

$$P(D) = \frac{4}{52}.$$

(c) Es gibt insgesamt 13 Herz-Karten im Deck. In diesen ist schon eine Dame enthalten. Es gibt daher noch 3 weitere Damen, die noch nicht gezählt wurden. Insgesamt gibt es also 16 „günstige“ Karten im Deck. Damit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Lösung 200

(a) E: Die Augensumme ist größer als 7. Es gilt:

$$E = \big\{\{6,2\}; \{6,3\}; \{6,4\}; \{6,5\}; \{6,6\}; \{5,3\}; \{5,4\};$$
$$\{5,5\}; \{5,6\}; \{4,4\}; \{4,5\}; \{4,6\}; \{3,5\}; \{3,6\}; \{2,6\}\big\}.$$

Also $P(E) = \frac{15}{36}$.

(b) E: Das Produkt der Augenzahlen ist größer als 16. Es gilt:

$$E = \big\{\{6,3\}; \{6,4\}; \{6,5\}; \{6,6\}; \{5,4\};$$
$$\{5,5\}; \{5,6\}; \{4,5\}; \{4,6\}; \{3,6\}\big\}.$$

Also: $P(E) = \frac{10}{36}$

(c) E: Es werden zwei verschiedene Zahlen gewürfelt. $\overline{E}$: Es wird ein Pasch gewürfelt.

$$\overline{E} = \big\{\{6,6\}; \{5,5\}; \{4,4\}; \{3,3\}; \{2,2\}; \{1,1\}\big\} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{E}) = \frac{6}{36}$$

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = \frac{30}{36}$$

Lösungen

Lösung 201

(a) Es befinden sich 13 Herz-Karten im Deck, damit ist

$$P(H) = \frac{13}{52}.$$

(b) Es befinden sich 4 Damen im Deck, damit ist

$$P(D) = \frac{4}{52}.$$

(c) Es gibt insgesamt 13 Herz-Karten im Deck. In diesen ist schon eine Dame enthalten. Es gibt daher noch 3 weitere Damen, die noch nicht gezählt wurden. Insgesamt gibt es also 16 „günstige“ Karten im Deck. Damit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

Lösung 202

(a) E: Die Augensumme ist größer als 7. Es gilt:

$$E = \big\{(6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); (4,4); (4,5); (4,6); (3,5); (3,6); (2,6)\big\}.$$

Also $P(E) = \frac{15}{36}$.

(b) E: Das Produkt der Augenzahlen ist größer als 16. Es gilt:

$$E = \big\{(6,3); (6,4); (6,5); (6,6); (5,4); (5,5); (5,6); (4,5); (4,6); (3,6)\big\}.$$

Also: $P(E) = \frac{10}{36}$

(c) E: Es werden zwei verschiedene Zahlen gewürfelt. $\overline{E}$: Es wird ein Pasch gewürfelt.

$$\overline{E} = \big\{(6,6); (5,5); (4,4); (3,3); (2,2); (1,1)\big\} \quad \Longrightarrow \quad P(\overline{E}) = \frac{6}{36}$$

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = \frac{30}{36}$$

Lösung 203

Zunächst werden ein paar Schreibweisen eingeführt. Bürgermeisterkandidat von A wurde gewählt: B_A, Kreistagskandidat von D wurde gewählt: K_D. Die Stimmen für die Bürgermeisterkandidaten sind:

$$|B_A| = 60, \quad |B_B| = 90, \quad |B_C| = 100.$$

Die Stimmen für die Kreistagskandidaten ergeben sich aus den Eigenstimmen und den Fremdstimmen:

$$|K_A| = 30 + 20, \quad |K_B| = 45 + 0, \quad |K_C| = 50 + 20.$$

Die Stimmen für den Kreistagskandidat von D ergeben sich aus den Fremdstimmen von A, B und C:

$$|K_D| = 30 + 25 + 30.$$

Damit können die Aufgaben gelöst werden.

(a) Es wurde mindestens einmal für B gestimmt, wenn der Bürgermeisterkandidat oder der Kreistagskandidat von B gewählt wurde. Da der Kreistagskandidat von B keine Fremdstimmen bekommen hat, folgt

$$P(B_B \cup K_B) = \frac{90}{250}.$$

(b) Dies wird über das Gegenereignis, dass mindestens einmal für C gestimmt wurde, wie in vorigem Aufgabenteil bestimmt. Es gilt $|B_C| = 100$, weiter hat der Kreistagsabgeordnete noch 20 Fremdstimmen erhalten. Also gilt:

$$P(\overline{B_C \cup K_C}) = 1 - P(B_C \cup K_C) = 1 - \frac{120}{250} = \frac{130}{250}.$$

(c) Für den Kreistagsabgeordneten der Partei D stimmten 30 Wähler, die den Bürgermeisterkandidaten von A gewählt haben:

$$P(B_A \cap K_D) = \frac{30}{250}.$$

(d) Die Hälfte der Wähler des Bürgermeisterkandidaten von B stimmten für den Kreistagskandidaten von B. Daraus folgt:

$$P(B_B \cap \overline{K_B}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{90}{250} = \frac{45}{250}.$$

(e) Die Wahrscheinlichkeit, dass Kandidaten unterschiedlicher Parteien gewählt wurden, ergibt sich aus den Fremdstimmen für die Kreistagskandidaten A, B und C plus allen Stimmen für D:

$$P(\text{unterschiedliche Parteien gewählt}) = \frac{20}{250} + \frac{0}{250} + \frac{20}{250} + \frac{85}{250} = \frac{125}{250}.$$

Alternativ kann dies auch so berechnet werden:

$$P(B_A \cap \overline{K_A}) + P(B_B \cap \overline{K_B}) + P(B_C \cap \overline{K_C}) = \frac{30}{250} + \frac{45}{250} + \frac{50}{250} = \frac{125}{250}.$$

Lösung 204

(a) Mit E_1: Durch drei teilbar, E_2: Primzahl gilt dann:

$$E_1 = \{3,6,9,12,15,18,21,24,27,30,33,36,39,42,45,48\},$$
$$E_2 = \{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,37,41,43,47\}.$$

Damit gilt:

$$P(E_1) = \frac{16}{49}, \quad P(E_2) = \frac{15}{49}, \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{49}.$$

Also kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmt werden:

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{16}{49} + \frac{15}{49} - \frac{1}{49} = \frac{30}{49}.$$

(b) E_1: Kleiner als 20, E_2: Gerade Zahl. Es gilt:

$$P(E_1) = \frac{19}{49}, \quad P(E_2) = \frac{24}{49}, \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{9}{49}$$
$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{19}{49} + \frac{24}{49} - \frac{9}{49} = \frac{34}{49}.$$

(c) E_1: Durch 7 teilbar, E_2: Durch 9 teilbar. Es gilt:

$$P(E_1) = \frac{7}{49}, \quad P(E_2) = \frac{5}{49} \quad , \quad P(E_1 \cap E_2) = \frac{0}{49}$$

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2) = \frac{7}{49} + \frac{5}{49} - \frac{0}{49} = \frac{12}{49}.$$

Lösung 205

(a) $P(G) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}.$

(b) $P(B \cap G) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$

(c) $P(B \cup G) = P(G) + P(B) - P(B \cap G) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$

(d) $P(\overline{B \cup G}) = 1 - P(B \cup G) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$. Mit dieser Wahrscheinlichkeit zeigt der Zeiger auf ein Feld, das weder blau ist noch eine gerade Zahl zeigt. Das heißt ein Drittel der Felder zeigen ungerade Zahlen und sind gelb oder rot.

Lösung 206

(a) $P(H) = \frac{1}{4}, \quad P(K) = \frac{4}{52}$ Es gibt nur einen Herz-König, also ist der Schnitt

$$P(H \cap K) = \frac{1}{52}.$$

Die Vereinigung berechnet sich mit dem Additionssatz:

$$P(H \cup K) = P(H) + P(K) - P(H \cap K) = \frac{1}{4} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

(b) Zu A gehören alle Paare, in denen mindestens eine 1 oder 2 enthalten ist:

$$P(A) = \frac{20}{36}.$$

Zur Berechnung von $P(B)$ ist zunächst eine Liste hilfreich. Hier wurde die Augenzahl des einen Würfels immer zuerst geschrieben, um zu erkennen, dass einige Kombinationen doppelt auftreten (z.B. $\{2{,}4\} = \{4{,}2\}$).

$$B = \big\{\{1,2\},\{1,5\},\{2,1\},\{2,4\},\{3,3\},\{3,6\},$$
$$\{4,2\},\{4,5\},\{5,1\},\{5,4\},\{3,6\},\{6,6\}\big\} \quad \Longrightarrow \quad P(B) = \frac{12}{36}.$$

Schnitt und Vereinigung ergeben sich zu

$$P(A \cap B) = \frac{6}{36}, \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{20}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{26}{36}.$$

Lösung 207

Zu Beginn werden folgenden Bezeichnungen eingeführt:

V : Ereignis, dass in einem zufällig ausgewählten Restaurant „Verkohltes Allerlei“ angeboten wird.

G : Ereignis, dass in einem zufällig ausgewählten Restaurant „Grünkohl-Schwefel-Saft“ angeboten wird.

Gegeben ist:

$$P(V) = \frac{30}{50}, \quad P(G) = \frac{40}{50}, \quad P\left(\overline{V \cup G}\right) = \frac{5}{50}$$

Gesucht ist $P(V \cap G)$ Der Additionssatz besagt:

$$P(V \cup G) = P(V) + P(G) - P(V \cap G)$$

Es gibt nur 5 Restaurants, in denen keine der beiden Spezialitäten angeboten wird. Daher wird in 45 der Restaurants mindestens eine der Spezialitäten angeboten:

$$P(V \cup G) = 1 - P\left(\overline{V \cup G}\right) = \frac{45}{50}$$

Dies zusammen mit den Angaben in den Additionssatz einsetzten.

$$\begin{aligned} P(V \cup G) &= P(V) + P(G) - P(V \cap G) \\ \frac{45}{50} &= \frac{30}{50} + \frac{40}{50} - P(V \cap G) \\ P(V \cap G) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 50 % wird in einem zufällig ausgewählten Restaurant „Verkohltes Allerlei“ und „Grünkohl-Schwefel-Saft“ angeboten.

Lösung 208

(a) Der Autor geht von einer stochastischen Abhängigkeit aus. Männlich zu sein impliziert für den Autor, dass die Wahrscheinlichkeit, naturwissenschaftlich begabt zu sein, steigt.

(b) Hier geht der Autor von einer stochastischen Unabhängigkeit aus.

Lösung 209

$$P(A) = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{27}{36} = \frac{3}{4} \quad \Longrightarrow \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8}.$$

Die Schnittmenge sind alle Paare gerader Zahlen:

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{8} = P(A) \cdot P(B)$$

Damit sind A und B nicht stochastisch unabhängig.

Lösungen

Lösung 210

(a) Mit den Bezeichnungen R (Robben trifft) und A (Aubameyang trifft) kann die Vierfeldertafel mit den Angaben befüllt und die fehlenden Werte abgeleitet werden:

	R	$\overline{R}$	
A	0,75		
$\overline{A}$			0,1
	0,8		1

$\Longrightarrow$

	R	$\overline{R}$	
A	0,75	0,15	0,9
$\overline{A}$	0,05	0,05	0,1
	0,8	0,2	1

(b) Das Spiel ist zu Ende, falls nur einer der beiden Spieler trifft. Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt

$$P\left(R \cap \overline{A}\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right) = 0{,}05 + 0{,}15 = 0{,}2.$$

Lösung 211

(a) Es gilt: Die Ereignisse A und B sind stochastisch unabhängig, genau dann wenn

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Also:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A)$$

(b) Es ist

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = P_B(A) \cdot P(B).$$

Ebenso gilt

$$P_A(B) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \Longrightarrow \quad P(B \cap A) = P_A(B) \cdot P(A).$$

Wegen $A \cap B = B \cap A$ können die Gleichungen gleichgesetzt werden. Hieraus folgt die Formel von Bayes:

$$P_B(A) \cdot P(B) = P_A(B) \cdot P(A) \quad \Longrightarrow \quad P_B(A) = P_A(B)\frac{P(A)}{P(B)}.$$

Lösung 212

Mit den Ereignissen H (Peter ist hungrig) und K (Peters Magen knurrt) ist gegeben:

$$P(H) = 0{,}1; \quad P(K) = 0{,}02; \quad P_K(H) = 0{,}9$$

Mit der Formel von Bayes kann die gesuchte Wahrscheinlichkeit ausgerechnet werden:

$$P_H(K) = P_K(H) \cdot \frac{P(K)}{P(H)} = 0{,}9 \cdot \frac{0{,}02}{0{,}1} = 0{,}18.$$

Ist Peter hungrig, dann knurrt sein Magen mit einer Wahrscheinlichkeit von 18 %.

Lösung 213

(a) Zuerst wird die Wahrscheinlichkeit $P(S \cap G)$ bestimmt, dass ein zufällig gewählter Truthahn sowohl schwarz ist, als auch weniger als 10 kg wiegt. Diese ergibt sich durch Umstellen der Formel der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} P(S \cap G) &= P_S(G) \cdot P(S) \\ &= 0{,}6 \cdot \frac{30}{50} \\ &= 0{,}36. \end{aligned}$$

Diese Wahrscheinlichkeit wird nun mit der Gesamtzahl der Truthähne multipliziert, um die Anzahl A der schwarzen Truthähne zu bestimmen, die weniger als 10 kg wiegen:

$$A = 0{,}36 \cdot 50 = 18.$$

Somit wiegen achtzehn Truthähne weniger als 10 kg und haben eine schwarze Färbung.

(b) Gesucht ist hier die Wahrscheinlichkeit $P_{\overline{S}}(K \cap G)$. Mithilfe der Daten aus der Aufgabenstellung ergibt sich:

$$P(\overline{S} \cap K) = \frac{3}{50} = 0{,}06 \quad \text{und} \quad P(\overline{S} \cap K \cap \overline{G}) = \frac{1}{50} = 0{,}02$$

Damit gilt:

$$P(\overline{S} \cap K \cap G) = P(\overline{S} \cap K) - P(\overline{S} \cap K \cap \overline{G}) = 0{,}04.$$

Nach der Formel für die bedingte Wahrscheinlichkeit gilt:

$$P_{\overline{S}}(K \cap G) = \frac{P(\overline{S} \cap K \cap G)}{P(\overline{S})} = \frac{P(\overline{S} \cap K \cap G)}{1 - P(S)} = \frac{0{,}04}{0{,}4} = 0{,}1.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 10 % ist also ein zufällig gewählter weißer Truthahn krank und wiegt weniger als 10 kg.

(c) Es gilt:

- Der Term $P(S \cap K)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Truthahn sowohl schwarz als auch krank ist.
- Der Term $P_{\overline{K}}(\overline{G} \cap S)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter gesunder Truthahn mindestens 10 kg wiegt und eine schwarze Färbung hat.
- Der Term $P_{G \cup S}(\overline{K})$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig gewählter Truthahn, der schwarz ist oder weniger als 10 kg wiegt, gesund ist.

Lösung 214

(a) Aus den Angaben des Textes kann man ablesen:

$$P(H) = \frac{80\,000}{80\,000\,000} = 0{,}001.$$

(b) Da der Test in 99 % aller Fälle korrekt ist, gilt:

$$P\,(H \cap T) = 0{,}001 \cdot 0{,}99 = 0{,}00099.$$

Mit $P\left(\overline{H}\right) = 1 - P(H) = 0{,}999$ und der Tatsache, dass der HIV-Test in 1 % aller Fälle falsch liegt, gilt

$$P\left(\overline{H} \cap T\right) = 0{,}999 \cdot 0{,}01 = 0{,}00999.$$

(c) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person HIV-positiv getestet wird, ist

$$P(T) = P(H \cap T) + P\left(\overline{H} \cap T\right) = 0{,}00099 + 0{,}00999 = 0{,}01098.$$

Mit der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit folgt damit:

$$P_T(H) = \frac{P(H \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}00099}{0{,}01098} \approx 0{,}09.$$

(d) $P_T(H) \approx 0{,}09$ bedeutet, dass eine positiv getestete Person nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 9 % HIV-positiv ist. Als praktische Konsequenz ergibt sich, dass ein positiver HIV-Test kein ausreichender Grund ist, von einer HIV-Infektion auszugehen. Im Falle eines positiven Tests sind weitere Tests nötig, um eine verlässliche Aussage treffen zu können. Die geringe Wahrscheinlichkeit ist nur auf den ersten Blick überraschend. Würde man alle in Deutschland lebenden Personen auf eine HIV-Infektion testen, dann würde der Test bei 1 % aller HIV-negativen Personen fälschlicher Weise ein positives Ergebnis anzeigen. Und dies wären

$$(80\,000\,000 - 80\,000) \cdot 0{,}01 = 799\,200$$

Personen. Dies sind fast 10 Mal so viele wie die Anzahl der tatsächlich HIV-positiven Personen.

Lösung 215

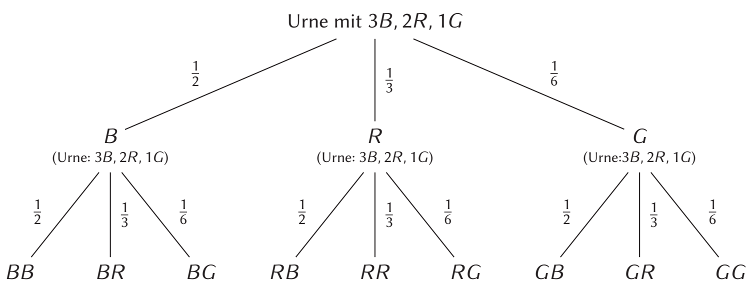
Es bietet sich nur Variante (a) an, da sich die Wahrscheinlichkeit beim Ziehen der Lose (ohne Zurücklegen) ständig verändert. Beim Glücksrad bleiben die Bedingungen bei jeder Drehung die selben.

Lösung 216

In beiden Teilaufgaben soll das folgende Ereignis betrachtet werden:

E : Es werden zwei verschiedenfarbige Kugeln gezogen.

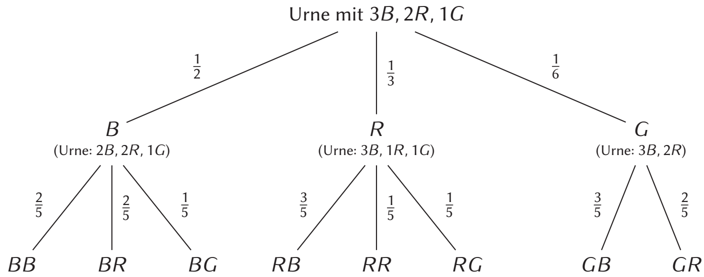
(a) Es werden nacheinander zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt beim Ziehen mit Zurücklegen:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(BR) + P(BG) + P(RB) + P(RG) + P(GB) + P(GR) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{11}{18}. \end{aligned}$$

(b) Es werden nacheinander zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Das Baumdiagramm dafür sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ beträgt beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$\begin{aligned} P(E) &= P(BR) + P(BG) + P(RB) + P(RG) + P(GB) + P(GR) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{3}{5} + \frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5} = \frac{11}{15}. \end{aligned}$$

Lösung 217

Bei der Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten in dieser Urnenaufgabe muss beachtet werden, dass die beiden zuerst gezogenen Kugeln bei der dritten Ziehung wieder zurückgelegt werden.

(a) Für das erste Ergnis gilt:

$$P(E_1) = P(SSS) + P(GGG) + P(BBB).$$

Zur Berechnung der einzelnen Wahrscheinlichkeiten wird exemplarisch $P(SSS)$ bestimmt:

$$P(SSS) = \frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{10} = \frac{1}{50}.$$

Schließlich ergibt sich:

$$P(E_1) = \frac{1}{50} + \frac{1}{225} + \frac{1}{9} = \frac{61}{450}.$$

(b) $P(E_2) = \frac{1}{5}$.

(c) $P(E_3) = \frac{1}{225}$.

(d) $P(E_4) = P(\overline{B}BB) + P(BB\overline{B}) = \frac{1}{4}$.

Lösung 218

Die Kontrolle entspricht dem Ziehen aus einer Urne ohne Zurücklegen. Ein funktionstüchtiger Mikrochip wird mit F bezeichnet. Ein defekter Mikrochip entspricht dann dem Gegenereignis $\overline{F}$. Die Ware wird in drei Fällen zurückgewiesen. Die Summe der dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle ergibt die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P(\overline{F}F\overline{F}) + P(\overline{F}\,\overline{F}\,F) + P(\overline{F}\,\overline{F}\,\overline{F}) \approx 0{,}071777$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Ware zurückgewiesen wird, beträgt etwa 7,2 %.

Lösungen

Lösung 219

Da zwei der Kugeln von U_2 in U_1 umgelegt werden, befinden sich in U_1 zum Zeitpunkt der Ziehung $6 + 2 = 8$ Kugeln. Zuerst werden die Wahrscheinlichkeiten für die Ziehungen in U_2 berechnet. Dabei gilt beim Ziehen ohne Zurücklegen:

$$P(2S) = \frac{2}{5}$$
$$P(2W) = \frac{1}{15}$$
$$P(1S,1W) = \frac{8}{15}$$

(a) Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die gezogene Kugel grün ist: Da sich in U_2 keine grünen Kugeln befanden, sind zwei der acht Kugeln grün. Also gilt für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit:

$$P(G) = \frac{1}{4}.$$

(b) Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die gezogene Kugel weiß ist: Da sich auch zwei weiße Kugeln in U_2 befanden, werden nun alle Möglichkeiten durchgespielt und folgendes gerechnet:

$$P(W) = P(2S) \cdot \frac{2}{8} + P(2W) \cdot \frac{4}{8} + P(1S,1W) \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{3}.$$

(c) Es soll die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass die gezogene Kugel schwarz ist: Da sich auch zwei schwarze Kugeln in U_2 befanden, werden nun alle Möglichkeiten durchgespielt und folgendes gerechnet:

$$P(S) = P(2S) \cdot \frac{4}{8} + P(2W) \cdot \frac{2}{8} + P(1S,1W) \cdot \frac{3}{8} = \frac{5}{12}.$$

Lösung 220

➤ Zuerst wird berechnet bei wie vielen Schülern erwartet wird, dass sie aufgrund einer weißen Kugel mit *ja* antworten:

$$\frac{3}{8} \cdot 3000 = 1125.$$

➤ Mit dem gleichen Rechenweg wird berechnet, von wie vielen Schülern erwartet wird, dass sie wahrheitsgemäß antworten:

$$\frac{1}{8} \cdot 3000 = 375.$$

➤ Um zu erfahren wie viele der *ja*'s tatsächlich „echte" *ja*'s waren, wird folgende Subtraktion durchgeführt:

$$1457 - 1125 = 332.$$

➤ Von den Schülern, die wahrheitsgemäß geantwortet haben, lässt sich damit der Anteil an Schülern bestimmen, der angegeben hat schon einmal abgeschrieben zu haben:

$$\frac{332}{375} \approx 0{,}89.$$

Es haben ungefähr 89 % aller Schüler schon einmal bei ihrem Nachbarn abgeschrieben.

Lösung 221

(a) Es gibt $12! = 479001600$ verschiedene Zwölftonreihen, da der erste Ton einer von zwölf sein kann, der zweite dann noch einer der übrigen elf usw.

(b) Da er schon sieben Töne verwendet hat bleiben ihm 12 - 7 = 5 Töne für den Dreiklang. Für die Anzahl der Möglichkeiten des Dreiklangs gilt dann:

$$\binom{5}{3} = 10.$$

Lösung 222

(a) Hier ist $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Da alle Zahlen mit einer Wahrscheinlichkeit von 1/6 gewürfelt werden, gilt:

$$P(X = 1) = P(X = 2) = P(X = 3) = P(X = 4) = P(X = 5) = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

(b) Die Augensumme zweier Würfel beträgt mindestens 2 und höchstens 12. Hier gilt $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Die Augensumme 2 kann nur erreicht werden, wenn beide Würfel eine 1 anzeigen. Also:

$$P(X = 2) = P\left(\{\text{Würfel A} = 1; \text{Würfel B} = 1\}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

Die Augensumme 3 hingegen wird erreicht, wenn der Würfel A eine 1 und Würfel B eine 2 oder wenn Würfel A eine 2 und Würfel B eine 1 anzeigt. Also:

$$P(X = 3) = P\left(\{A = 1; B = 2\}, \{A = 2; B = 1\}\right) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36}.$$

Mit diesen Überlegungen erhält man folgende Tabelle:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

Lösung 223

Die Zufallsvariable X kann die Werte 0,2 und 50 annehmen. Also $X \in \{0, 2, 50\}$. Der Hauptgewinn wird nur dann erreicht, wenn beide Glücksräder eine 4 anzeigen. Also:

$$P(X = 50) = P\big((4,4)\big) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für einen Trostpreis in Höhe von 2 Euro beträgt:

$$P(X = 2) = P\big((1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), (3, 4), (4, 3)\big) = \frac{9}{16}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für keinen Gewinn kann man über das Gegenereignis bestimmen:

$$P(X = 0) = 1 - P(X = 50) - P(X = 2) = \frac{6}{16}.$$

Lösungen

Lösung 224

In einem ersten Schritt wird der Wahrscheinlichkeitsraum bestimmt, d. h. es wird bestimmt, welche Werte X annehmen kann. Zeigt die Münze *Zahl*, dann werden die Zahlen addiert. Mögliche Ergebnisse sind hier

$$4, 5, 6.$$

Wird *Kopf* angezeigt, dann wird die erste Zahl von der zweiten Zahl subtrahiert. Mögliche Ergebnisse sind nun

$$-1, 0, 1.$$

Damit ist die Stichprobenmenge, d.h. die Wertemenge von X, bestimmt:

$$\Omega = \{-1, 0, 1, 4, 5, 6\}.$$

Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zu bestimmen, muss für jedes Ereignis von X die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden:

$$P(X = -1) = P\big((3, K, 2)\big) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$$
$$P(X = 0) = P\big((2, K, 2), (3, K, 3)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}34$$
$$P(X = 1) = P\big((2, K, 3)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$$
$$P(X = 4) = P\big((2, Z, 2)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}02$$
$$P(X = 5) = P\big((2, Z,3),(3,Z,2)\big) = 0{,}2 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}16$$
$$P(X = 6) = P\big((3, Z, 3)\big) = 0{,}8 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}32$$

Lösung 225

(a) $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3{,}5$

(b) $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + \ldots + 7 \cdot \frac{6}{36} + \ldots + 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = 7$

Lösung 226

Es wird der Erwartungswert der jährlich auszuzahlenden Versicherungssumme pro Person berechnet:

$$E(X) = 50 \cdot 0{,}2 + 100 \cdot 0{,}05 + 1.000 \cdot 0{,}02 + 10.000 \cdot 0{,}002 = 55.$$

Die Versicherung würde demnach erst ab einem jährlichen Beitrag von mindestens 55 Euro Gewinn machen. Dies entspricht einem monatlichen Beitrag von etwa 4,58 Euro, d. h. mit dem aktuell geplanten Beitrag von 4,49 Euro macht die Versicherung Verlust.

Lösung 227

(a) Zunächst wird berechnet, welche Ausschüttung (X) pro Spiel zu erwarten ist:

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{9} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{9} + 5 \cdot \frac{1}{9} + 6 \cdot \frac{1}{9} + 7 \cdot \frac{1}{9} + 8 \cdot \frac{1}{9} + 9 \cdot \frac{1}{9} = 5.$$

Im Schnitt gewinnt ein Spieler also 5 Euro pro Spiel, d.h. der Einsatz muss mindestens 5 Euro betragen, damit die Gemeinde keinen Verlust macht.

(b) Der Einsatz soll jetzt 4 Euro betragen. Die unbekannte Feldanzahl sei k.

$$\begin{aligned} E(X) = 4 &= 1 \cdot \frac{1}{k} + 2 \cdot \frac{1}{k} + 3 \cdot \frac{1}{k} + \cdot + (k - 1) \cdot \frac{1}{k} + k \cdot \frac{1}{k} \\ 4 &= \frac{1}{k} \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + k) \\ 4 &= \frac{1}{k} \cdot \left(\frac{k+1}{2} \cdot k \right) \\ 4 &= \frac{k+1}{2} \\ k &= 7 \end{aligned}$$

Hat das Glücksrad 7 Felder, so macht die Gemeinde weder Gewinn noch Verlust. Dies wäre ein faires Spiel. Hat das Glücksrad weniger als 7 Felder, so würde die Gemeinde mit dem Glücksspiel Geld einnehmen.

Hinweis: Bei der Lösung wurde die Gaussche Summenformel benutzt. Diese findet sich in der Formelsammlung und lautet:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Hat man diese Formel nicht zur Hand, so kann man alternativ das Ergebnis auch durch Probieren bestimmen. Da man davon ausgehen kann, dass das neue Glücksrad weniger als 9 Felder besitzen wird, ist die Anzahl an Möglichkeiten, die man durchprobieren müsste, stark begrenzt.

Lösung 228

(a) Der Gewinn berechnet sich aus der Differenz des erzielten Ergebnisses und dem Spieleinsatz von 3€. Die Zufallsvariable X kann also die Werte -3, -2, -1, 2 und 7 annehmen. Um die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X zu bestimmen, muss für jedes Ereignis von X die Wahrscheinlichkeit ermittelt werden:

$$P(X = -3) = \frac{3}{8}$$

$$P(X = -1) = P(X = 2) = P(X = 7) = \frac{45^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{8}$$

$$P(X = -2) = 1 - \frac{3}{8} - 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

(b) Um den Erwartungswert zu erhalten, wird über alle Werte summiert, die X annehmen kann, jeweils multipliziert mit der zugehörigen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned} E(X) &= (-3) \cdot \frac{3}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 7 \cdot \frac{1}{8} = \\ &= -\frac{5}{8} = -0{,}625 \end{aligned}$$

Im Mittel verliert man also etwa 0,63€. Somit ist das Glücksspiel nicht fair.

(c) Hier wird nur die Definition und die anschauliche Bedeutung des Erwartungswertes benötigt.

- Bei einmaligem Drehen und einem einmaligem Einsatz ergibt sich nach Teilaufgabe (b) ein Erwartungswert von -0,625. Dreht man nun einmal (kostenfrei) mehr, so kann der Erwartungswert nur steigen, da keine negativen Auszahlungen vorkommen können.
- Dies entspricht einer doppelten Ausführung des Zufallsexperimentes. Sei Z die Zufallsvariable, die den Gewinn bei dieser Variante beschreibt, so gilt: $Z = 2X$. Damit kann der Erwartungswert in diesem Fall sogar direkt angegeben werden mit

  $$E(Z) = 2 \cdot (-0{,}625) = -1{,}25.$$

  Verlangt wäre nach Aufgabenstellung nur die qualitative Veränderung gewesen, also dass der Erwartungswert sinkt.

(d) Durch Anwenden der Formel ergibt sich:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(X) &= (-0{,}625 + 3)^2 \cdot \frac{3}{8} + (-0{,}625 + 2)^2 \cdot \frac{1}{4} + (-0{,}625 - 1)^2 \cdot \frac{1}{8} + \\ &\quad + (-0{,}625 - 2)^2 \cdot \frac{1}{8} + (-0{,}625 - 7)^2 \cdot \frac{1}{8} \\ &\approx 11{,}05\end{aligned}$$

Die Standardabweichung ergibt sich aus der Wurzel der Varianz, also $\sigma(X) \approx 3{,}32$.

(e) Die Bestimmung des Erwartungswerts von Y verläuft analog zur Teilaufgabe (b):

$$\begin{aligned}E(Y) &= (-19) \cdot \frac{3}{8} + (-2) \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{8} + 2 \cdot \frac{1}{8} + 55 \cdot \frac{1}{8} \\ &= -0{,}625 \\ &= E(X).\end{aligned}$$

(f) Die Varianz beschreibt die Streuung einer Zufallsvariable um den Erwartungswert. Da die möglichen Werte für Y im Bereich zwischen -19 und 55 weiter entfernt vom gleichen Erwartungswert liegen als diejenigen von X und die restlichen Werte gleich sind, muss die Varianz von Y größer sein als die von X. Durch die Veränderung des Spiels steigt die Varianz also.

Die veränderte Variante bietet durch die extremeren Werte (und der dadurch größeren Varianz) einen höheren möglichen Gewinn. Allerdings ist auch der maximale Verlust größer. Insgesamt führt die Veränderung daher zu einem riskanteren Spiel.

Lösung 229

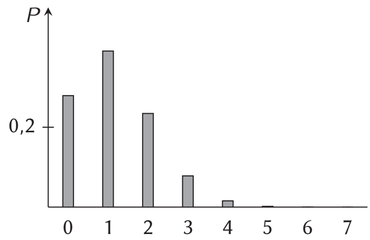
Die Wahrscheinlichkeit, in 7 Würfen k Sechsen zu würfeln ist

$$P(X = k) = \binom{7}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{7-k}.$$

Damit wurden die Wahrscheinlichkeiten in folgender Tabelle berechnet:

x_n	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x = x_n)$	0,28	0,39	0,23	0,078	0,016	0,0019	0,00013	≈ 0

Damit ergibt sich folgendes Histogramm:



Lösung 230

(a) Je höher die Trefferwahrscheinlichkeit ist, desto mehr wandert der „Gipfel" des Histogramms nach rechts. Damit sind die Trefferwahrscheinlichkeiten in aufsteigender Reihenfolge

$$p_A < p_D < p_C < p_B.$$

(b) Die Wahrscheinlichkeit, *Kopf* zu werfen, ist $p = \frac{1}{2}$. Der Erwartungswert bei $n = 15$ Würfen ist:

$$E(X) = n \cdot p = \frac{1}{2} \cdot 15 = 7{,}5$$

Das Histogramm C ist um den größten Wert von $X = 7{,}5$ symmetrisch, also beschreibt Histogramm C die Anzahl von *Kopf* bei fünfzehn Würfen.

(c) Die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs zu werfen, ist $p = \frac{1}{6}$. Der Erwartungswert bei $n = 15$ Würfen ist:

$$E(X) = n \cdot p = \frac{1}{6} \cdot 15 = 2{,}5$$

Das gesuchte Diagramm hat seinen Gipfel also bei $x = 2{,}5$. Also gehört das Histogramm A zu diesem Zufallsexperiment.

Lösung 231

(a) In einem ersten Schritt wird der Wahrscheinlichkeitsraum bestimmt, d. h. es wird bestimmt, welche Werte X annehmen kann. Zeigt die Münze *Zahl*, dann wird der Wert des Würfels verdoppelt. Mögliche Ergebnisse sind hier

$$2, 4, 6, 8, 10, 12.$$

Wird *Kopf* angezeigt, dann wird von der Augenzahl Eins abgezogen. Mögliche Ergebnisse sind nun

$$0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Damit ist der Ereignisraum bestimmt:

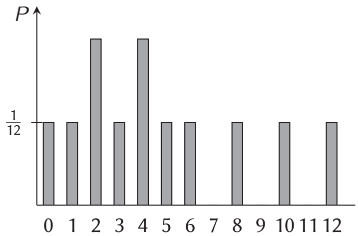
$$\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}.$$

Ergebnisse, die sowohl bei *Zahl* als auch bei *Kopf* vorkommen, treten mit der Wahrscheinlichkeit $2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$ auf, die anderen mit $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}$.

$$P(X = 2) = P(X = 4) = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{12}.$$

$$P(X = 0) = P(X = 1) = P(X = 3) = P(X = 5) = P(X = 6)$$
$$= P(X = 8) = P(X = 10) = P(X = 12) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

Damit ergibt sich folgendes Histogramm:



(b) Ist das Ergebnis kleiner oder gleich 6, so verliert der Spieler seinen Einsatz. Ist das Ergebnis größer als 6, gewinnt der Spieler effektiv 2 Euro (also 5 Euro abzüglich des Einsatzes von 3 Euro). Der Erwartungswert des Gewinns Y eines Spielers berechnet sich wie folgt:

$$E(Y) = (0 - 3) \cdot P(X \leq 6) + (5 - 3) \cdot P(X > 6)$$
$$= -3 \cdot (1 - P(X > 6)) + 2 \cdot P(X > 6)$$

Mit $P(X > 6) = P(X = 8) + P(X = 10) + P(X = 12) = \frac{3}{12}$ ergibt sich

$$E(Y) = -3 \cdot \frac{9}{12} + 2 \cdot \frac{3}{12} = \frac{-21}{12} = -1{,}75.$$

Ein Spieler verliert also im Schnitt 1,75 Euro pro Spiel, d. h. Peter gewinnt 1,75 Euro. Damit macht Peter langfristig Gewinn.

Lösung 232

(a) $P(k = 9) = b(19; 0{,}6; 9) = \binom{19}{9} \cdot 0{,}6^9 \cdot 0{,}4^{10} \approx 0{,}0976$

(b) $P(k \leq 6) \approx 0{,}989$

(c) $P(6 \leq k \leq 9) \approx 0{,}004$

Lösung 233

Die Wahrscheinlichkeit bei einmaligem Drehen das goldene Segment zu treffen ist

$$P = \frac{72^\circ}{360^\circ} = 0{,}2.$$

Entsprechend ist die Wahrscheinlichkeit das graue Segment zu treffen

$$1 - 0{,}2 = 0{,}8.$$

Der Ausdruck für den Trostpreis ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass bei fünfmaligem Drehen genau viermal das goldene Segment getroffen wird. Der Ausdruck für den Hauptgewinn ist gerade die Wahrscheinlichkeit, dass das goldene Feld bei allen fünf Versuchen getroffen wird.

Lösung 234

(a) $P(k = 5) = b(15; 0{,}5; 5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}5^5 \cdot 0{,}5^{10} \approx 0{,}0916$

(b) $P(k \leq 2) = b(15; 0{,}5; 0) + b(15; 0{,}5; 1) + b(15; 0{,}5; 2) \approx 0{,}0037$

Lösung 235

Es handelt sich um eine Binomialverteilung, da nur interessiert, ob eine Frage richtig oder falsch beantwortet wird. Es ist immer nur eine der vier Antworten richtig ist. Es gilt $n = 20$ und $p = 0{,}25$.

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass Kevin mindestens zehn Aufgaben richtig rät, ergibt mit obigen Werten:

$$P(k \geq 10) = 1 - P(k \leq 9) \approx 0{,}0139.$$

Kevin besteht den Test durch bloßes Raten zu 1,39 %.

(b) Es werden folgende Wahrscheinlichkeiten berechnet:

$$P(k \leq 4) \approx 0{,}4148,$$

$$P(k = 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^{20} \approx 0{,}00317.$$

Kevin muss mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 41,5 % in die Wiederholungsstunde und mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 0,32 % nachsitzen.

Lösung 236

Es handelt sich um eine Binomialverteilung, da nur interessiert, ob der Roboter nach rechts ($p = 0{,}65$) oder nach oben geht. Die Wahrscheinlichkeit bleibt die ganze Zeit über gleich.

(a) Um nach Z zu gelangen muss der Roboter insgesamt 7 Schritte nach rechts und 6 Schritte nach oben gehen. Damit ergibt sich:

$$n = 7 + 6 = 13.$$

Bei einer Ausführung von 13 Schritten muss er also 7 Schritte in x-Richtung gehen. Damit lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er zu Z gelangt, wie folgt berechnen:

$$P(k = 7) = b(13; 0{,}65; 7) = \binom{13}{7} \cdot 0{,}65^7 \cdot 0{,}35^6 \approx 0{,}1546.$$

Der Roboter gelangt mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 15 % zur Ladestation.

(b) Der Weg des Roboters muss nun in zwei Teilwege zerlegt werden. Der Weg zur Messstation erfordert $n = 5 + 3 = 8$ Schritte, von denen 5 nach rechts gesetzt werden müssen. Damit ergibt sich:

$$P(k = 5) = b(8; 0{,}65; 5) = \binom{8}{5} \cdot 0{,}65^5 \cdot 0{,}35^3 \approx 0{,}2786.$$

Für den zweiten Teilweg verbleiben nun $n = 13 - 8 = 5$ Schritte, von denen $k = 7 - 5 = 2$ nach rechts gesetzt werden müssen. Dann gilt:

$$P(k = 2) = b(5; 0{,}65; 2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}65^2 \cdot 0{,}35^3 \approx 0{,}1811.$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Roboter beide Wege geht, ergibt sich dann aus dem Produkt beider Wahrscheinlichkeiten:

$$0{,}2786 \cdot 0{,}1811 \approx 0{,}0505.$$

Der Roboter kommt mit einer Wahrscheinlichkeit von 5 % sowohl bei M als auch bei Z vorbei.

Lösung 237

Die Wahrscheinlichkeit für ein Päckchen ohne feines weißes Zeug beträgt $p = 0{,}1$. Damit lassen sich die Wahrscheinlichkeiten berechnen, dass Really Bad John und Evil Emma davon ausgehen, dass sich in mehr als 10 % der Beutel kein feines weißes Zeug befindet.

- Really Bad John überprüft $n = 5$ Beutel. Dann gilt:

  $$P(k \geq 1) = 1 - P(k = 0) \approx 1 - 0{,}59 \approx 0{,}41$$

  Die Wahrscheinlichkeit, dass Really Bad John dann Bad Max an den Kragen möchte, beträgt also ungefähr 41 %.

- Evil Emma überprüft $n = 20$ Beutel. Dann gilt:

  $$P(k \geq 3) = 1 - P(k \leq 2) \approx 1 - 0{,}6769 \approx 0{,}3231$$

  Die Wahrscheinlichkeit, dass Evil Emma dann Bad Max an den Kragen möchte, beträgt also ungefähr 32 %.

Bad Max sollte damit die Variante von Evil Emma wählen.

Lösung 238

(a) Folgende Eigenschaften sind erfüllt:
- Es gibt nur zwei mögliche Ausgänge: Entweder wird das Photon absorbiert oder nicht.
- Die einzelnen Photonen (Versuche) sind unabhängig von einander.
- Die Wahrscheinlichkeit für die Absorption eines Photons bleibt gleich.

Damit sind alle Bedingungen dafür erfüllt, dass die Detektion von Photonen als Binomialprozess modelliert werden kann.

(b) Für die Wahrscheinlichkeit, dass genau 170 Elektronen gemessen werden, gilt:

$$B(200;\ 0{,}85;\ 170) = B(200;\ 0{,}15;\ 30) \approx 0{,}0788$$

und für die Wahrscheinlichkeit P, dass mindestens 165 und höchstens 170 Elektronen gemessen werden:

$$\begin{aligned} P &= B(200;\ 0{,}85;\ 165) + \ldots + B(200;\ 0{,}85;\ 170) \\ &= B(200;\ 0{,}15;\ 30) + \ldots + B(200;\ 0{,}15;\ 35) \\ &= 0{,}3915. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 170 Elektronen gemessen werden, beträgt ungefähr 7,9 % und die Wahrescheinlichkeit, dass mindestens 165 und höchstens 170 Elektronen gemessen werden, beträgt ungefähr 39,2 %.

(c) Für binomialverteilte Zufallsvariablen gilt

$$\mu = n \cdot p \quad \text{und} \quad \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}.$$

Daraus folgt:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\mu}{\sigma} = \frac{np}{\sqrt{np\,(1-p)}} = \frac{\sqrt{np}}{\sqrt{1-p}}.$$

Man benötigt also möglichst viele Photonen, um ein hohes SNR zu erhalten. Mit den Werten in Aufgabenteil (b) folgt:

$$\mathrm{SNR} = \frac{\sqrt{200 \cdot 0{,}85}}{\sqrt{0{,}15}} \approx 33{,}6.$$

(d) Die Bedingung von De-Moivre und Laplace liefert $\sqrt{np\,(1-p)} > 3$. Durch Umformung folgt $n > 70{,}6$, das heißt, es müssen mindestens 71 Photonen einfallen, damit der Prozess durch eine Gaußverteilung angenähert werden kann.

Lösung 239

Gegeben:
- X: Anzahl der Treffer
- $n = 50$
- $p = 0{,}3$

(a) $P(X = 15) = \binom{50}{15} \cdot 0{,}3^{15} \cdot 0{,}7^{35} = 0{,}1223$

(b) $P(X \leq 15) = \sum_{i=0}^{15} \binom{50}{i} \cdot 0{,}3^{i} \cdot 0{,}7^{50-i} = F(50; 0{,}3; 15) = 0{,}5692$

(c) $P(X \geq 13) = \sum_{i=13}^{50} \binom{50}{i} \cdot 0{,}3^{i} \cdot 0{,}7^{50-i} = 1 - F(50; 0{,}3; 12) = 0{,}7771$

Lösungen

(d) $P(16 < X \leq 21) = \sum\limits_{i=17}^{21} \binom{50}{i} \cdot 0{,}3^i \cdot 0{,}7^{50-i} = F(50; 0{,}3; 21) - F(50; 0{,}3; 16) = 0{,}2910$

(e) Sobald die Reihenfolge der Versuche wichtig wird, kann man nicht mehr mit der Binomialverteilung argumentieren. Die Wahrscheinlichkeiten beim 14. und beim 17. Mal sind unabhängig von den 48 anderen Versuchen, insofern gilt:

P(Treffer beim 14. und 17. Mal)$= 0{,}3 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$

(f) Bei der Binomialverteilung wird davon ausgegangen, dass sich die Trefferwahrscheinlichkeit p von Versuch zu Versuch nicht ändert. Während einer Trainingseinheit kann dies allerdings durchaus passieren, zum Beispiel durch Windeinfluss, Ermüdung oder Steigerung der Leistung nach einigen Schüssen.

Lösung 240

(a) Die zwanzig Menschen werden aus einer sehr großen Gruppe ausgesucht. Trotzdem handelt es sich im Prinzip um ein Ziehen ohne Zurücklegen, das heißt, die Wahrscheinlichkeit verändert sich, sobald man eine Person gewählt hat. Genauer gesagt sinkt die Wahrscheinlichkeit minimal, wenn man eine Person ausgesucht hat, die nichts mit dem Begriff anfangen kann, dass es der nächsten Person genau so geht.

Da der Unterschied jedoch bei einer so großen „Urne" derartig gering ist, kann man in ausgezeichneter Näherung mit der Binomialverteilung arbeiten.

(b) $P(X \geq 4) = \sum\limits_{i=4}^{20} \binom{20}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{20-i} = 1 - F(20; 0{,}2; 3) = 0{,}5886$

(c) Hier muss man die Fragestellung beachten, es geht plötzlich um die Menschen, die nichts mit dem Begriff anfangen können. Insofern gilt hier $p = 0{,}8$.

$P(9 \leq X \leq 17) = \sum\limits_{i=9}^{17} \binom{20}{i} \cdot 0{,}8^i \cdot 0{,}2^{20-i} = F(20; 0{,}8; 17) - F(20; 0{,}8; 8) = 0{,}7938$

Lösung 241

(a) X: Anzahl codierter Fahrräder.

$$P(X = 33) = \binom{100}{33} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{33} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{67} = 0{,}084$$

$$P(X \geq 50) = 1 - P(X \leq 49) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{49} \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{100-k}\right)$$

$$\approx 0{,}00042.$$

(b) Sei Y: Anzahl der nicht-codierten Fahrräder. Zunächst bestimmt man den Erwartungswert von Y. Dieser beträgt für eine binomialverteilte Zufallsvariable np. Also folgt:

$$E(Y) = n \cdot p = 100 \cdot \frac{2}{3} = \frac{200}{3}.$$

Weiter weiß man, dass die Hälfte aller nicht-codierten Fahrräder neucodiert werden. Die Anzahl der erwarteten Neucodierungen ist daher:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{200}{3} = \frac{100}{3} \approx 33{,}3.$$

Im Schnitt ist also etwa mit 33 Neucodierungen zu rechnen.

Lösung 242

(a) Es wird die Binomialverteilung mit $n = 70$ und $p = 0{,}06$ verwendet:

$$P(k=3) = b(70; 0{,}06; 3) = \binom{70}{3} \cdot 0{,}06^3 \cdot 0{,}94^{67} \approx 0{,}187$$

$$P(k \geq 3) = 1 - P(k \leq 2) \approx 0{,}7987$$

(b) Lösungsweg wie im Rezept:

➤ Schreibe die Aufgabe als Formel auf:

$$P_n(\text{mindestens 1 Schwarzfahrer}) \geq 0{,}90$$

➤ Gehe zum Gegenereignis über. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen um.

$$P_n(\text{kein Schwarzfahrer}) \leq 0{,}1$$

➤ Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.

$$P_n(\text{kein Schwarzfahrer}) = (1 - 0{,}06)^n$$

➤ Setze die Gleichung und die Ungleichung zusammen. Es soll also gelten:

$$(1 - 0{,}06)^n \leq 0{,}1$$

Löse diese Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach n auf. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen erneut um.

$$\begin{aligned} 0{,}94^n \leq 0{,}1 \quad &\Longrightarrow \quad \ln(0{,}94^n) \leq \ln 0{,}1 \\ &\Longrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}94 \leq \ln 0{,}1 \\ &\overset{\ln 0{,}94<0}{\Longrightarrow} \quad n \geq \frac{\ln 0{,}1}{\ln 0{,}94} \approx 37{,}2. \end{aligned}$$

Der Kontrolleur muss mindestens 38 Fahrgäste überprüfen.

Lösung 243

Lösungsweg wie im Rezept:

➤ Schreibe die Aufgabe als Formel auf:

$$P_n(\text{mindestens einmal Ausscheiden}) \geq 0{,}95.$$

➤ Gehe zum Gegenereignis über. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen um:

$$P_n(\text{keinmal Ausscheiden}) \leq 0{,}05.$$

➤ Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P_n(\text{keinmal Ausscheiden}) = 0{,}85^n.$$

➤ Setze die Gleichung und die Ungleichung zusammen. Es soll also gelten:

$$0{,}85^n \leq 0{,}05.$$

Löse diese Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach n auf. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen erneut um.

$$\begin{aligned} 0{,}85^n \leq 0{,}05 \quad &\Longrightarrow \quad \ln(0{,}85^n) \leq \ln 0{,}05 \\ &\Longrightarrow \quad n \cdot \ln 0{,}85 \leq \ln 0{,}05 \\ &\overset{\ln 0{,}85<0}{\Longrightarrow} \quad n \geq \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}85} \approx 18{,}4. \end{aligned}$$

Der Mathe-Überflieger muss an mindestens 19 Wettbewerben teilnehmen.

Lösung 244

Zuerst wird berechnet, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist keine 6 bei einem 3-er Wurf zu werfen:

$$P(\text{keine 6 bei 3-er Wurf}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216} \approx 0{,}58.$$

Im Folgenden ist der Lösungsweg wie im Rezept:

➤ Schreibe die Aufgabe als Formel auf:

$$P_n(\text{mindestens einmal eine 6 im 3-er Versuch}) \geq 0{,}98.$$

➤ Gehe zum Gegenereignis über. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen um:

$$P_n(\text{keinmal eine 6 im 3-er Versuch}) \leq 0{,}02.$$

➤ Berechne die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P_n(\text{keinmal eine 6 im 3-er Versuch}) = 0{,}58^n.$$

➤ Setze die Gleichung und die Ungleichung zusammen. Es soll also gelten:

$$0{,}58^n \leq 0{,}02.$$

Löse diese Gleichung mit dem natürlichen Logarithmus nach n auf. Dabei dreht sich das Größer-als-Zeichen erneut um.

$$\begin{aligned} 0{,}58^n \leq 0{,}02 \quad &\Longrightarrow \quad \ln(0{,}58^n) \leq \ln 0{,}02 \\ &\Longrightarrow \quad n \cdot \ln(0{,}58) \leq \ln 0{,}02 \\ &\overset{\ln(0{,}58)<0}{\Longrightarrow} \quad n \geq \frac{\ln 0{,}02}{\ln(0{,}58)} \approx 7{,}15. \end{aligned}$$

Es müssen mindestens 8 der 3-er Versuche durchgeführt werden.

Lösung 245

Bezeichne F die Anzahl an fehlerfrei gespielten Minuten.
Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit p^* bestimmt, dass das Orchester bei einer Aufführung der Sinfonie keine Fehler macht. Diese lässt sich über eine Binomialverteilung mit $n = 42$ und $p = 0{,}005$ bestimmen:

$$p^* = P(F = 0) \approx 0{,}810.$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 81 % macht das Orchester bei einer Aufführung keinen. für das Publikum hörbaren, Fehler. Sei X im Folgenden die Anzahl an fehlerfrei gespielten Aufführungen.

(a) Damit nicht alle Aufführungen fehlerfrei sind, muss mindestens ein hörbarer Fehler in einer Vorstellung gemacht werden. Gesucht ist die Anzahl an Aufführungen n^*.

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &> 0{,}95 \\ P(X = 0) &< 0{,}05 \\ 0{,}81^{n^*} &< 0{,}05 \\ \Longrightarrow \quad n^* &> \frac{\ln 0{,}05}{\ln 0{,}81} \\ n^* &\approx 14{,}2 \end{aligned}$$

Das Orchester muss die Sinfonie also mindestens fünfzehn mal aufführen, sodass zu mehr als 95 % nicht alle Aufführungen fehlerfrei sind.

(b) Durch die erhöhte Fehlerquote pro Minute erhöht sich auch die Fehlerwahrscheinlichkeit pro Aufführung. Falls diese nur unwesentlich ist, so wird die Zahl der Aufführungen gleich bleiben. Andernfalls wird die Anzahl sinken, da potenziell pro Vorführung mehr Fehler gemacht werden und dadurch mit einer höheren Wahrscheinlichkeit als zu zuvor unter n Aufführungen mindestens eine fehlerhaft ist. Lediglich steigen kann die Anzahl der Aufführungen durch dieses Szenario nicht.

(c) Achtzig Prozent aller Aufführungen entsprechen genau

$$0{,}80 \cdot 10 = 8.$$

Gesucht ist also die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als acht Vorführungen fehlerfrei stattfinden:

$$\begin{aligned} P(X > 8) &= P(X = 9) + P(X = 10) \\ &= 0{,}28518 + 0{,}12158 \\ &\approx 0{,}407. \end{aligned}$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von ungefähr 40,7 % sind mehr als achtzig Prozent der Aufführungen fehlerfrei.

Lösung 246

(a) Wegen $\mu = 180$ und $\sigma = 7{,}5$ folgt

$$P(X \geq 180) = 1 - P(X \leq 180) = 1 - \Phi\left(\frac{180 - 180}{7{,}5}\right) = 1 - \Phi(0) = 0{,}5.$$

Somit ist also die Hälfte aller 18-jährigen Männer größer als 180 cm. Weiter gilt

$$P(X \leq 170) = \Phi\left(\frac{170 - 180}{7{,}5}\right) = \Phi(-1{,}333) = 0{,}091.$$

Also sind etwa 9 % aller Männer kleiner als 170 cm.

(b) Hierzu rechnet man wie folgt:

$$P(X \geq 200) = 1 - P(X \leq 200) = 1 - \Phi\left(\frac{200 - 180}{7{,}5}\right) = 1 - \Phi(2{,}667) = 0{,}0038.$$

Also sind nur knapp 0,4 % aller Männer größer als 2 m.

(c) Beschreibe t die gesuchte Größe. Dann gilt

$$0{,}05 = P(X \leq t) = \Phi\left(\frac{t - 180}{7{,}5}\right).$$

Diese Gleichung kann direkt mit dem GTR/CAS gelöst werden. Alternativ kann mit einer Tabelle der Standardnormalverteilung gearbeitet werden. Dazu setzt man

$$x = \frac{t - 180}{7{,}5}.$$

Gesucht ist somit x mit $\Phi(x) = 0{,}05$. Da die Tabellen oft erst bei einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 anfangen, arbeitet man mit der Gegenwahrscheinlichkeit. Gesucht ist also x mit

$$1 - \Phi(x) = 0{,}95.$$

Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung gilt

$$1 - \Phi(x) = \Phi(-x).$$

Somit sucht man x mit $\Phi(-x) = 0{,}95$. Ein Blick in die Tabelle verrät $x = -1{,}64$. Nun rechnet man den Wert auf t zurück:

$$-1{,}64 = x = \frac{t - 180}{7{,}5} \quad \Longrightarrow \quad 167{,}7.$$

Etwa 5 % aller 18-jährigen sind kleiner als 168 cm.

Lösung 247

(a) Aus der Aufgabe liest man heraus, dass $\mu = 60$ Minuten ist. Sei σ die noch unbekannte Standardabweichung. Es gilt folgende Gleichung

$$0{,}1 = P(X \geq 90) \quad \Longrightarrow \quad P(X \leq 90) = 0{,}9.$$

Nun lässt sich folgende Gleichung für σ aufstellen.

$$0{,}9 = P(X \leq 90) = \Phi\left(\frac{90 - 60}{\sigma}\right).$$

Ein Blick in die Tabelle verrät

$$\frac{30}{\sigma} = 1{,}28 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 23{,}4.$$

Die Standardabweichung beträgt also 23,4 Minuten.

(b) Es sind also Zeitpunkte t_1, t_2, t_3 gesucht, so dass gilt

$$P(X \leq t_1) = 0{,}25, \quad P(X \leq t_2) = 0{,}5 \quad P(X \leq t_3) = 0{,}75.$$

Aufgrund der Symmetrie der Normalverteilung gilt $t_2 = 60$. Kennt man t_1, so lässt sich damit auch t_3 bestimmen. Es gilt

$$0{,}25 = P(X \leq t_1) = \Phi\left(\frac{t_1 - 60}{23{,}4}\right).$$

Aus der Tabelle erfährt man, dass $\Phi(-0{,}68) = 0{,}25$ gilt. Damit folgt

$$\frac{t_1 - 60}{23{,}4} = -0{,}68 \quad \Longrightarrow \quad t_1 = 44.$$

Aufgrund der Symmetrie lässt sich damit auch t_3 berechnen, denn t_3 hat denselben Abstand vom Erwartungswert $\mu = 60$ wie t_2. Es folgt $t_3 = 76$.

Alle Schüler, die den Test in weniger als 44 Minuten schaffen, bekommen eine 1. Alle die für den Test zwischen 45 und 60 Minuten benötigen, bekommen eine 2. Die Schüler die mehr als 60 aber weniger als 76 Minuten benötigen, bekommen eine 3. Alle anderen bekommen eine 4.

Lösung 248

Man stellt zunächst fest:

$$\mu = np = 1\,000\,000 \cdot \frac{1}{6} \approx 166\,666{,}7$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 372{,}7.$$

(a) Es gilt:

$$\sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \approx 372{,}7 > 3 \checkmark .$$

Also ist die Laplace-Bedingung erfüllt.

(b) Es gilt:

$$P(X \leq 166\,000) = \Phi\left(\frac{166\,000 - 166\,666{,}7 + 0{,}5}{372{,}7}\right) = \Phi(-1{,}78) \approx 0{,}037.$$

(c) Es gilt:

$$\begin{aligned} P(X \geq 167\,000) &= 1 - P(X \leq 166\,999) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{166\,999 - 166\,666{,}7 + 0{,}5}{372{,}7}\right) \\ &= 1 - \Phi(0{,}89) \approx 0{,}186. \end{aligned}$$

(d) Diese Aufgabe lässt sich leicht mit den vorherigen Ergebnissen lösen. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(166\,000 < X < 167\,000) &= 1 - P(X \leq 166\,000) - P(X \geq 167\,000) \\ &= 1 - 0{,}037 - 0{,}186 \\ &\approx 0{,}78. \end{aligned}$$

Lösung 249

Das Konfidenzintervall zum Konfidenzniveau 95,5 % ist gegeben durch $[60 - 2 \cdot 5;\ 60 + 2 \cdot 5]$, also $[50;\ 70]$. Damit haben zu etwa 95,5 % alle Bauteile eine Montagezeit zwischen 50 und 70 Minuten.

Lösung 250

Es gilt

$$P\,(100 - 1{,}64 \cdot 15;\ 100 + 1{,}64 \cdot 15) \approx 0{,}9.$$

Etwa 90 % aller Deutschen haben einen IQ zwischen 75,4 und 124,6.

Lösung 251

Zunächst betrachtet man nur den zweiten Teil der Aufgabe. Dort beträgt die Stichprobengröße $n = 120$ und die geschätzte Trefferwahrscheinlichkeit $h = {}^{17}/_{120} = 0{,}142$. Als Standardabweichung ergibt sich:

$$\sigma = \sqrt{h \cdot (1 - h) \cdot n} = 3{,}82.$$

Wegen $\sigma > 3$ ist die Laplace-Bedingung erfüllt und man kann mit der Normalverteilung rechnen. Für eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von 68 % wird die 1σ-Umgebung um den Erwartungswert der gesuchten Wahrscheinlichkeit p herum betrachtet. Es gilt:

$$(p \cdot n - h \cdot n)^2 \leq \sigma^2 = p(1 - p)n.$$

Beziehungsweise:

$$(p - 0{,}142)^2 \leq \frac{p(1 - p)}{120}.$$

Zum Lösen dieser Gleichung werden mit dem GTR die Schnittpunkte der beiden Funktionen:

$$y_1 = (x - 0{,}142)^2$$
$$y_2 = \frac{x(1 - x)}{120}$$

berechnet. Die beiden Lösungen sind gegeben durch $x_1 \approx 0{,}113$ und $x_2 \approx 0{,}177$.
Bezeichne nun m die Gesamtzahl an Mercedes in Hannover. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mercedes keinen Stern mehr hat, beträgt $p = \frac{100}{m}$. Da der Größenbereich von p bekannt ist, folgt:

$$0{,}113 \leq \frac{100}{m} \leq 0{,}177 \quad \Longrightarrow \quad 565 \leq m \leq 885$$

Mit 68 %-iger Wahrscheinlichkeit gibt es zwischen 565 und 885 Mercedes in Hannover-Nordstadt.

Lösung 252

(a)
- Die Zufallsvariable X ist nicht binomialverteilt, da die Ausgänge nach einer blauen gezogenen Kugeln ignoriert werden. Die einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Ziehungen sind also nicht unabhängig voneinander.
- Die Zufallsvariable Y ist binomialverteilt. Das Ziehen einer roten Kugel kann dabei als Treffer und das Ziehen einer blauen oder gelben Kugel als Niete betrachtet werden. Zusätzlich bleibt die Trefferwahrscheinlichkeit konstant und die Bedingungen einer Binomialverteilung sind erfüllt.

(b) Hier ist es nützlich das Gegenereignis zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} P(X \leq 9) &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}. \end{aligned}$$

Lösung 253

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein einzelner Storch ein Weststorch ist, beträgt 54 %. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_1, dass alle vier Störche Weststörche sind, kann dann berechnet werden als:

$$p_1 = (0{,}54)^4 \approx 0{,}085.$$

Díe Wahrscheinlichkeit, dass alle vier Störche den Weg über die Iberische Halbinsel und Gibraltar nehmen, liegt also bei ungefähr 8,5 %.

(b) Die Störche sind unabhängig von ihren Artgenossen Weststörche, Oststörche, Mittelstörche oder Winterstörche. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_2 kann also als das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden. Es gilt:

$$p_2 = 0{,}54 \cdot 0{,}54 \cdot 0{,}41 \cdot 0{,}41 \approx 0{,}049.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Störche mit den Nummern 201 und 202 Weststörche und die Störche mit den Nummern 203 und 204 Oststörche sind, beträgt also circa 4,9 %.

(c) Hier spielt es keine Rolle, welche der Störche Mittelstörche sind. Deshalb kann das Modell der Bernoulli-Kette verwendet werden und die gesuchte Wahrscheinlichkeit p_3 kann berechnet werden als:

$$p_3 = \binom{4}{2} \cdot 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^2 \approx 0{,}005.$$

Die Wahrscheinlichkeit unter den 4 Störchen genau zwei Mittelstörche anzutreffen, liegt also bei ungefähr 0,5 %.

(d) Sei X die Anzahl der Winterstörche. Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl n der zu beobachtenden Störche, für welche die Gleichung

$$P(X \geq 1) \geq 0{,}85$$

erfüllt ist. Mit $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$ folgt

$$1 - P(X = 0) \geq 0{,}85 \quad \Longleftrightarrow \quad P(X = 0) \leq 0{,}15.$$

Die Wahrscheinlichkeit unter n Störchen keinen Winterstorch zu beobachten beträgt:

$$P(X = 0) = 0{,}98^n.$$

Zu Lösen ist also die Gleichung:

$$0{,}98^n \leq 0{,}15.$$

Logarithmieren der Ungleichung führt zu

$$n \cdot \ln(0{,}98) \leq \ln(0{,}15).$$

Da $\log(0{,}98)$ negativ ist, dreht sich im folgenden Schritt das Ungleichheitszeichen herum:

$$n \geq \frac{\ln(0{,}15)}{\ln(0{,}98)} \approx 93{,}9.$$

Es müssen also mindestens 94 Störche beobachtet werden, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 85 % mindestens einen Winterstorch zu sehen.

(e) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit einen Oststorch zu sehen unter der Annahme, dass

Anfang März ist. Angenommen, es gibt 100 Störche, so ergibt sich folgende Tabelle:

Typ	**Anzahl gesamt**	**Anteil A. März**	**Anzahl A. März**
Weststorch	54	40 %	21,6
Oststorch	41	60 %	24,6
Mittelstorch	3	50 %	1,5
Winterstorch	2	100 %	2

Die Anteile Anfang März wurden der Aufgabenstellung entnommen. Da die Winterstörche nicht in den Süden ziehen, liegt ihr Anteil Anfang März bei 100 %.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt nun

$$\frac{24{,}6}{21{,}6 + 24{,}6 + 1{,}5 + 2} \approx 0{,}495.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anfang März beobachteter Storch ein Oststorch ist, beträgt also ungefähr 49,5 %.

Lösung 254

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Flasche weniger als ein Liter Badezusatz enthalten ist, kann berechnet werden als:

$$\begin{aligned} P(I < 1\,\mathrm{L}) &= \Phi\left(\frac{1 - 1{,}05}{0{,}04}\right) \\ &= \Phi\,(-1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}8944 \\ &= 0{,}1056. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Flasche weniger als 1 L enthalten ist, beträgt also 10,56 %.

(b) Für die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche mit mindestens 1,1 L befüllt ist, gilt:

$$\begin{aligned} P(I \geq 1{,}1\,\mathrm{L}) &= 1 - P(I < 1{,}1\,\mathrm{L}) \\ &= 1 - \Phi\left(\frac{1{,}1 - 1{,}05}{0{,}04}\right) \\ &= 1 - \Phi\,(1{,}25) \\ &= 1 - 0{,}8944 \\ &= 0{,}1056. \end{aligned}$$

Auch hier liegt die Wahrscheinlichkeit wieder bei 10,56 %. Dies kann auch so begründet werden, dass die beiden Werte 1 L und 1,1 L symmetrisch zum Erwartungswert liegen.

(c) Es soll gelten:

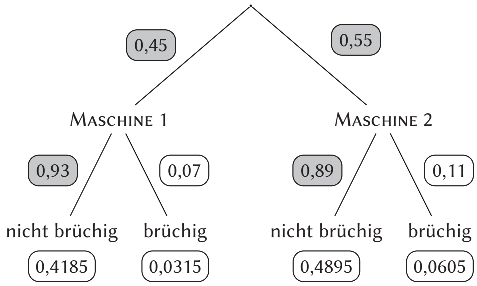
$$\begin{aligned} P(I < 1\,\mathrm{L}) &= 0{,}04 \\ &= 1 - 0{,}96 \\ &= \Phi\left(\frac{1 - 1{,}05}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Es muss also gelten:

$$\frac{1 - 1{,}05}{\sigma} = -1{,}76 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 0{,}0284.$$

Mit einer Standardabweichung von 0,0284 L kann die geforderte Bedingung eingehalten werden.

(d) Zur Veranschaulichung wird das folgende Baumdiagramm gezeichnet. Die in der Aufgabenstellung gegebenen Wahrscheinlichkeiten sind hier grau hinterlegt. Alle anderen wurden aus diesen berechnet.



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine brüchige Badekugel von Maschine 1 produziert wurde, kann somit berechnet werden als:

$$\frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}07}{0{,}45 \cdot 0{,}07 + 0{,}55 \cdot 0{,}11} \approx 0{,}342.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine brüchige Kugel von Maschine 1 hergestellt wurde, liegt bei circa 34,2 %.

(e) Sei X die Anzahl der an den Handel gelieferten Menge an Badekugeln. Dann setzt sich der erwartete Gewinn G zusammen aus:

- den unversehrten Kugeln: $0{,}98 \cdot X \cdot (6{,}50 - 2{,}90)$,
- den brüchigen Kugeln, die nicht reklamiert werden: $0{,}02 \cdot 0{,}65 \cdot X \cdot (6{,}50 - 2{,}90)$,
- und den brüchigen Kugeln, die reklamiert werden: $-0{,}02 \cdot 0{,}35 \cdot X \cdot 2{,}90$.

Für die brüchigen Kugeln entstehen die Kosten für die Herstellung und die Rückzahlung an den Kunden. Es gilt also:

$$\begin{aligned} G &= 0{,}98 \cdot X \cdot (6{,}50 - 2{,}90) \\ &\quad + 0{,}02 \cdot 0{,}65 \cdot X \cdot (6{,}50 - 2{,}90) - 0{,}02 \cdot 0{,}35 \cdot X \cdot 2{,}90 \\ &= 3{,}55 \cdot X. \end{aligned}$$

Pro an den Handel gelieferte Badekugel macht die Firma Badeschaum und Co also ungefähr 3,55 Euro Gewinn.

(f) Laut Aufgabenstellung nehmen 40 % aller Kunden einen Flyer mit. Da es sich um ein Bernoulli-Experiment handelt, lässt sich der Erwartungswert E berechnen als:

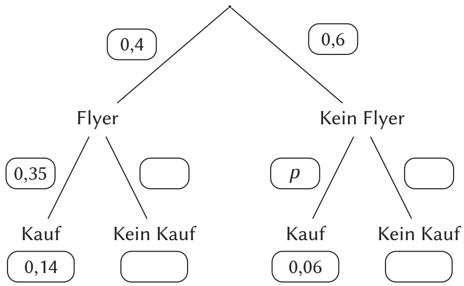
$$E = 100 \cdot 0{,}4 = 40.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von 100 Kunden mehr Kunden als zu erwarten einen Flyer mitnehmen, ist dann gegeben durch

$$P(X > 40) = 1 - P(X \leq 40) = 0{,}457.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei 100 Kunden mehr Flyer benötigt werden als zu erwarten ist, liegt bei ca. 45,7 %.

(g) Zur Veranschaulichung wird das folgende Baumdiagramm gezeichnet. Es sind nur die Wahrscheinlichkeiten eingetragen, die für die Aufgabenstellung benötigt werden.



Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der keinen Flyer mitgenommen hat, eine Bodylotion kauft. Dann gilt

$$0{,}06 = 0{,}6 \cdot p \quad \Longrightarrow \quad p = 0{,}1.$$

Also kaufen 10 % der Kunden, die keinen Flyer mitnehmen, trotzdem eine Bodylotion. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kunde, der keine Bodylotion gekauft hat, auch keinen Flyer mitgenommen hat, lässt sich dann folgendermaßen berechnen:

$$\frac{\text{Anzahl der günstigen Ereignisse}}{\text{Anzahl der möglichen Ereignisse}} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}9}{0{,}6 \cdot 0{,}9 + 0{,}4 \cdot 0{,}65} = 0{,}675.$$

Die Wahrscheinlichkeit für diese Konstellation beträgt also 67,5 %.