

# 编程基础 II - 可计算性

刘 钦

# Reference

- 《逻辑的引擎》 Martin Davis
- 《Turing, His Machine and Computability》 J"urg Kohlas
- 《Register Machines are Turing Machines》 Colin B.Price
- 《A Relatively Small Turing Machine Whose Behavior Is Independent of Set Theory》 Adam Yedidia Scott Aaronson

# 知识点

- 停机问题的证明 (P16-18)
- 图灵机的理解 (P23)
- 通用图灵机的定义 (P24)
- 图灵机的等价模型 (P28)
- 可计算函数 vs 实际可计算函数 (P31)
- 加法的递归定义 (P55)
- 图灵机的定义 (P64)
- 图灵机的数字表示 (P71)
- RegisterMachine的最小组成：两条指令和两个寄存器 (P84)

# Outline

- 可计算性
- 可计算模型

# Outline

- 可计算性
  - 逻辑发展简史
  - 罗素悖论
  - 停机问题
  - 哥德尔不完备性定理
  - 邱奇-图灵论题
  - 不可计算
- 可计算模型

为什么计算机可以计算？

哪些是计算机可以计算的？

可不可以用数学方法来证明？

# 莱布尼兹之梦 & 布尔代数

- 莱布尼兹
  - 1. 创造涵盖人类知识全部范围的百科全书
  - 2. 对其背后的关键概念提供合适的符号
  - 3. 推理演算 (calculus ratiocinator)
- 布尔
  - 布尔代数
  - 布尔的伟大成就是证明了逻辑演绎可以成为数学的一个分支
  - 离完备性的目标还有距离

# 数理逻辑

- 弗雷格
  - 形式化的句法
    - 全称量词 (All) 、存在量词 (exist) 、如果，那么、非、或、且
- 第一次有一个精确的数理逻辑系统至少在原则上包含了数学家们通常使用的全部推理。
- 希望能够为自然数提出一种纯粹逻辑的理论，从而证明一切数学是逻辑的一个分支。



# 无穷集和对角线法

康托尔

- 无穷集的大小是不同的。
- 只要一个集合中的元素可以同另一个集合中的元素一一对应起来，我们就可以说这个集合的元素数目相等。
- 对角线法
  - （包裹上的标签，就是包裹的东西）（可以找出一个新包裹和任何贴标签的包裹都不一样）
- 一切自然数集所组成的集合的基数要大于自然数的基数

$s_1$	=	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	...
$s_2$	=	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	...
$s_3$	=	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	...
$s_4$	=	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	...
$s_5$	=	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	...
$s_6$	=	0	0	1	1	0	1	1	0	1	1	...
$s_7$	=	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	...
$s_8$	=	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	...
$s_9$	=	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	...
$s_{10}$	=	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	...
$s_{11}$	=	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	...
$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$$s = 10111010011\dots$$

# 希尔伯特判定问题

- 希尔伯特：
  - 判定问题：
    - 试图找到清楚明白的验算程序， 只要用所谓的一阶逻辑的符号系统写出来的某些前提和所提出的结果给定， 那么通过这些程序就是可以判定的。
- 希尔伯特是乐观的， 他的墓碑上刻着两行字
  - 我们必须知道
  - 我们将会知道

# 理发师悖论

- 在某个城市中有一位理发师，他的广告词是这样写的：“本人的理发技艺十分高超，誉满全城。我将为本城所有不给自己刮脸的人刮脸，我也只给这些人刮脸。我对各位表示热诚欢迎！”来找他刮脸的人络绎不绝，自然都是那些不给自己刮脸的人。
- 可是，有一天，这位理发师从镜子里看见自己的胡子长了，他本能地抓起了剃刀，你们看他能不能给他自己刮脸呢？
- 如果他不给自己刮脸，他就属于“不给自己刮脸的人”，他就要给自己刮脸，而如果他给自己刮脸呢？他又属于“给自己刮脸的人”，他就不该给自己刮脸。于是产生矛盾。

# 罗素悖论

- 设命题函数 $P(x)$ 表示“ $x \notin x$ ”，现假设由性质 $P$ 确定了一个类 $A$ ——也就是说“ $A = \{x | x \notin x\}$ ”。
- 那么现在的问题是：
  - $A \in A$ 是否成立？
    - 首先，若 $A \in A$ ，则 $A$ 是 $A$ 的元素，那么 $A$ 不具有性质 $P$ ，由命题函数 $P$ 知 $A \notin A$ ；
    - 其次，若 $A \notin A$ ，也就是说 $A$ 具有性质 $P$ ，而 $A$ 是由所有具有性质 $P$ 的类组成的，所以 $A \in A$ 。

# 停机问题

- 不存在这样一个程序（算法），它能够计算任何程序（算法）在给定输入上是否会结束（停机）。

# 哥德尔使得计划落空

- 和爱因斯坦是挚友，常一起散步（1906-1978）
- 1930年博士论文中证明了弗雷格的规则是完备的。
- 哥德尔的不完备定理
  - 这个是假命题
    - 皮亚诺算术（PA）的自然数公理系统中，任何一个可以在其中表出的命题，后者可以在PA中被证明为真，或者可以在PA中表出为假
- 冯诺依曼意识到希尔伯特纲领是错的。

# 停机问题解决了希尔伯特判定问题

- 对角线方法将允许我们构造出一个与图灵机的任何停机集合都不同的自然数集合，我们称它为D。
- 集合D不是任何图灵机的停机集合。
- 希尔伯特判定问题：
  - 试图找到清楚明白的验算程序， 只要用所谓的一阶逻辑的符号系统写出来的某些前提和所提出的结果给定， 那么通过这些程序就是可以判定的。
    - 判定稳定的解答将会为解决所有数学问题提供一种算法
    - 但是蕴含着只要有一个数学问题可以被证明在算法上试不可解的， 那么判定问题本身就必定不可解
    - “找到一种算法， 判定一个给定的自然数是否属于集合D。”这个问题就是一个不可解问题的例子。
      - 假设存在这样的算法， 则存在这样的图灵机
      - 把输入的数属于D， 那么按以前运转， 否则将永远右移（2个五元组即可表达）
      - 新机器的停机集合就是D。然而这时不可能的。

# 证明停机问题 - 1

- 那么，如何来证明这个停机问题呢？反证。假设我们某一天真做出了这么一个极度聪明的万能算法（就叫 God\_algo 吧），你只要给它一段程序（二进制描述），再给它这段程序的输入，它就能告诉你这段程序在这个输入上会不会结束（停机），我们来编写一下我们的这个算法吧：
- ```
bool God_algo(char* program, char* input)
```
- ```
{
```
- ```
    if(<program> halts on <input>)
```
- ```
        return true;
```
- ```
    return false;
```
- ```
}
```
- 这里我们假设 if 的判断语句里面是你天才思考的结晶，它能够像上帝一样洞察一切程序的宿命。



# 证明停机问题 - 2

- 现在，我们从这个God\_algo出发导出一个新的算法：

- `bool Satan_algo(char* program)`

- `{`

```
    if( God_algo(program, program) ){
```

```
        while(1); // loop forever!
```

```
        return false; // can never get here!
```

```
    }
```

```
    else
```

```
        return true;
```

- `}`

-

# 证明停机问题 - 3

- 正如它的名字所暗示的那样，这个算法便是一切邪恶的根源了。当我们把这个算法运用到它自身身上时，会发生什么呢？
  - `Satan_algo(Satan_algo);`
- 我们来分析一下这行简单的调用：
- 总之，我们有：
  - `Satan_algo(Satan_algo)`能够停机  $\Rightarrow$  它不能停机
  - `Satan_algo(Satan_algo)`不能停机  $\Rightarrow$  它能够停机
- 所以它停也不是，不停也不是。左右矛盾。
- 于是，我们的假设，即`God_algo`算法的存在性，便不成立了。正如拉格朗日所说：“陛下，我们不需要（上帝）这个假设”。

# 补充阅读：Lambdar演算的证明

- Now we show a simple contradiction, which proves that the magical solver Halting cannot really exist. This question is: Does the following expression E returns True or False?
  - $E = \text{Halting}(\lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m)), \lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m)))$
- It turns out that this question cannot be answered. If E returns True, then we apply the function  $\lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m))$  to its argument  $\lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m))$ , and we get
  - $\text{not}(\text{Halting}(\lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m)), \lambda m. \text{not}(\text{Halting}(m, m))))$
- Alas, this is exactly the negation of the original expression E, which means E should be False. This is a contradiction (or call it a “paradox” if you like), which shows that the halting problem solver Halting cannot exist, which means that the halting problem cannot be solved.

# 哥德尔不完备性定理

- 任何相容的形式系统，只要蕴涵皮亚诺算术公理，就可以在其中构造在体系中既不能证明也不能否证的命题（即体系是不完备的）。
- 任何相容的形式系统，只要蕴涵皮亚诺算术公理，它就不能用于证明它本身的相容性。

# 哥德尔不完备性定理的证明 - 1

- 要证明哥德尔的不完备性定理，只需在假定的形式系统T内表达出一个为真但无法在T内推导出（证明）的命题。于是哥德尔构造了这样一个命题，用自然语言表达就是：
  - 命题P说的是“P不可在系统T内证明”（这里的系统T当然就是我们的命题P所处的形式系统了），也就是说“我不可以被证明”，跟著名的说谎者悖论非常相似，只是把“说谎”改成了“不可以被证明”。我们注意到，一旦这个命题能够在T内表达出来，我们就可以得出“P为真但无法在T内推导出来”的结论，从而证明T的不完备性。为什么呢？我们假设T可以证明出P，而因为P说的就是P不可在系统T内证明，于是我们又得到T无法证明出P，矛盾产生，说明我们的假设“T可以证明P”是错误的，根据排中律，我们得到T不可以证明P，而由于P说的正是“T不可证明P”，所以P就成了一个正确的命题，同时无法由T内证明！
- 如果你足够敏锐，你会发现上面这番推理本身不就是证明吗？其证明的结果不就是P是正确的？然而实际上这番证明是位于T系统之外的，它用到了一个关于T系统的假设“T是一致（无矛盾）的”，这个假设并非T系统里面的内容，所以我们刚才其实是在T系统之外推导出了P是正确的，这跟P不能在T之内推导出来并不矛盾。所以别担心，一切都正常。
- 那么，剩下来最关键的问题就是如何用形式语言在T内表达出这个P

# 哥德尔不完备性定理的证明 - 2

- 哥德尔构造了这样一个公式：
  - $N(n)$  is unprovable in  $T$
- 我们用  $UnPr(X)$  来表达“ $X$  is unprovable in  $T$ ”，于是哥德尔的公式变成了：
  - $UnPr( N(n) )$
- 现在，到了最关键的部分，首先我们把这个公式简记为  $G(n)$ ——别忘了  $G$  内有一个自由变量  $n$ ，所以  $G$  现在还不是一个命题，而只是一个公式，所以谈不上真假：
  - $G(n): UnPr( N(n) )$
- 又由于  $G$  也是个 wff (well-formed formula)，所以它也有自己的编码  $g$ ，当然  $g$  是一个自然数，现在我们把  $g$  作为  $G$  的参数，也就是说，把  $G$  里面的自由变量  $n$  替换为  $g$ ，我们于是得到一个真正的命题：
  - $G(g): UnPr( G(g) )$
- 用自然语言来说，这个命题  $G(g)$  说的就是“我是不可在  $T$  内证明的”。看，我们在形式系统  $T$  内表达出了“我是不可在  $T$  内证明的”这个命题。而我们一开始已经讲过了如何用这个命题来推断出  $G(g)$  为真但无法在  $T$  内证明，于是这就证明了哥德尔的不完备性定理

# 图灵构想通用计算机

- 受哥德尔的不完备定理启发
- 图灵的通用计算机
  - 五元组（初始状态，注视符号，改写符号，移动方向，变化状态）
- 停机问题解决了希尔伯特判定问题
- 一台图灵机单凭自身就可以完成任何图灵机可能做到的任何事情。
- 图灵提出了机器、程序、数据观念的融合与替换
- 图灵很快证明了他的可计算性概念与丘奇的lambda可定义性是等价的

# 通用图灵机

- 任何图灵机都能表示为一串字符串M。
- I是输入数据
- 通用图灵机 U 能够在任意输入 I 上模拟任意图灵机 M 。
- 如果 $M \langle I \rangle$ 接受，则  $U \langle M, I \rangle$  接受
- 如果 $M \langle I \rangle$ 拒绝，则  $U \langle M, I \rangle$  拒绝



# 邱奇-图灵论题 (Church–Turing thesis)

- is a combined hypothesis ("thesis") about the nature of functions whose values are effectively calculable;
- or, in more modern terms, functions whose values are algorithmically computable.
- In simple terms, the Church–Turing thesis states that a function is algorithmically computable if and only if it is computable by a Turing machine.

# Church–Turing thesis

- According to the Church–Turing thesis, computable functions are exactly the functions that can be calculated using a mechanical calculation device given unlimited amounts of time and storage space.
- Equivalently, this thesis states that any function which has an algorithm is computable.
- Note that an algorithm in this sense is understood to be a sequence of steps a person with unlimited time and an infinite supply of pen and paper could follow.

# 邱奇-图灵论题 (Church–Turing thesis)

- Several independent attempts were made in the first half of the 20th century to formalize the notion of computability:
  - American mathematician Alonzo Church created a method for defining functions called the  $\lambda$ -calculus,
  - British mathematician Alan Turing created a theoretical model for machines, now called Turing machines, that could carry out calculations from inputs,
  - Austrian-American mathematician Kurt Gödel, with Jacques Herbrand, created a formal definition of a class of functions whose values could be calculated by recursion.
- All three computational processes (recursion, the  $\lambda$ -calculus, and the Turing machine) were shown to be equivalent

# Equivalent Models

- The class of computable functions can be defined in many equivalent models of computation, including
  - Turing machines
  - $\mu$ -recursive functions
  - Lambda calculus
  - Post machines (Post–Turing machines and tag machines).
  - Register machines

有没有注意到重要的假设

..., given unlimited amounts of  
time and storage space

可计算函数不一定实际可计算

有没有理论上不可计算函数？

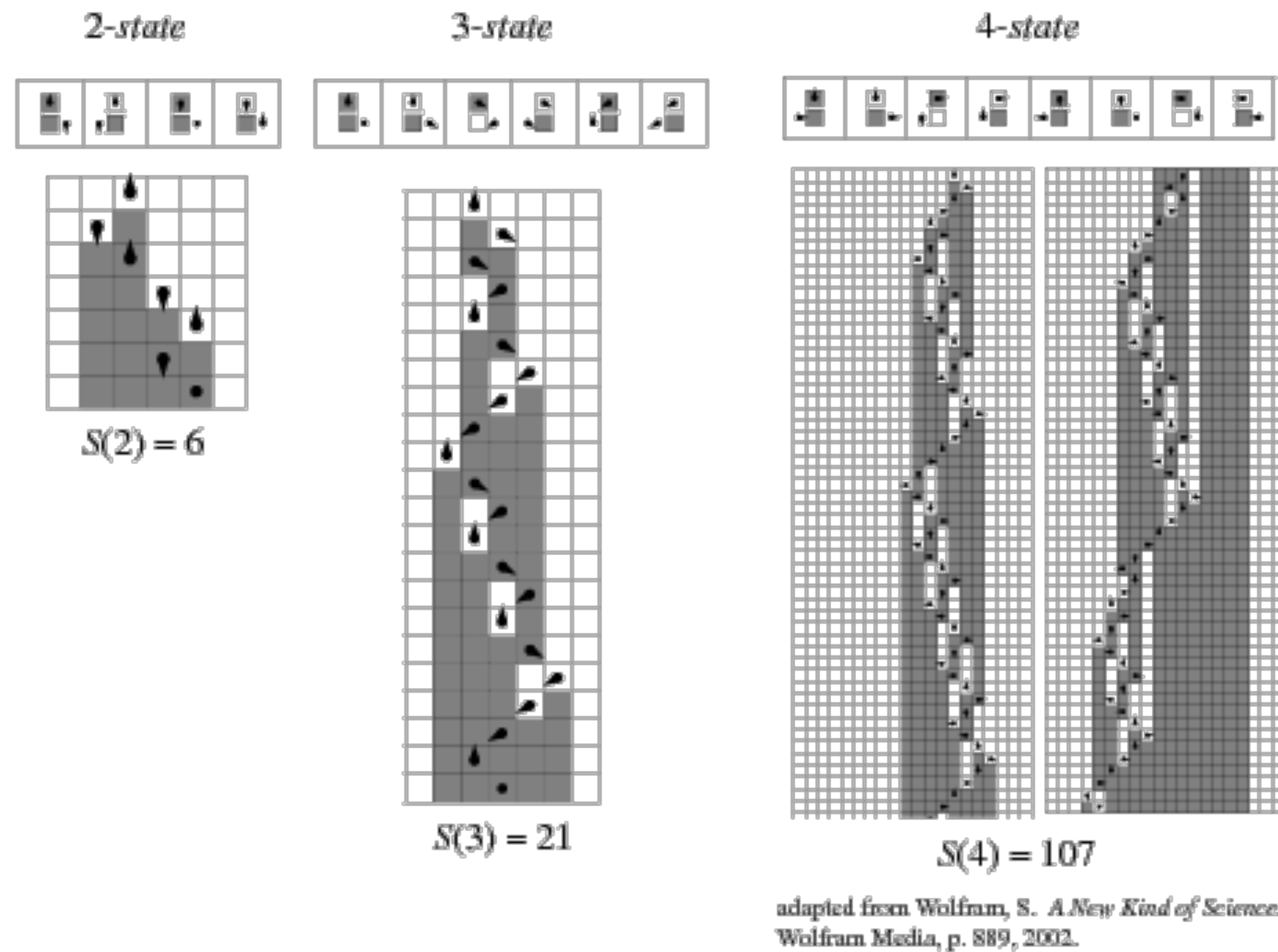


# 忙碌的海狸

- busy beaver是符合以下几个性质的图灵机：
  - 第一：符号数，或叫色数，为2。上一期讲过，图灵机有两大属性，符号数和状态数。而符号中至少有一种是空白符。所以对一台有意义的图灵机，其色数最小值就是2。
  - 第二：初始输入全为空白，“接受状态”仅有“停机状态”。
  - 第三：对以上这种2色，初始输入全为空白的图灵机，我们考虑某个状态数 $n$ 。对所有这种2色- $n$ 状态的图灵机，我们知道其中有些能停机，有些则不会停机。考察其中所有能停机的图灵机，如果其中某台图灵机运行时间最久，或者说，在停机前运行的步数最多，我们就叫这种图灵机为busy beaver-“忙碌海狸”。
- 拉多还把 $n$ -状态的busy beaver图灵机停机前，所能执行的步数称为“busy beaver函数”，简称为 $BB(n)$ ， $n$ 是这个图灵机的状态数。所以函数 $BB(n)$ ，就是2色- $n$ 状态的可停机的图灵机的最大运行步数。

# 哥德巴赫猜想的证明

- 这次在Adam Yedidia的论文中，他给出了一个程序，把哥德巴赫猜想编码为有4888个状态的Busy Beaver图灵机。编码逻辑很简单，就是从小到大验证每一个偶数。如果发现某个偶数可以表示成两个质数之和，则考察下一个偶数。如果发现某个偶数不能表示成两个质数之和，则停机。
- States: 4888
- START start\_read\_:
- a -> start\_write\_next; R; b
- b -> ERROR; -; b
- start\_write\_next:
- a -> write\_var\_counter\_1\_read\_; R; b
- b -> ERROR; -; b
- write\_var\_counter\_H\_read\_:
- a -> write\_var\_counter\_H\_move; R; b
- b -> ERROR; -; b
- write\_var\_counter\_H\_move:
- a -> write\_var\_counter\_out\_read\_; R; a
- b -> write\_var\_counter\_out\_read\_; R; b
- (Yedidia对判定哥德巴赫猜想所设计的图灵机的状态转移表的开头部分，一共有4888个状态)
- 对这个程序，其含义就是，如果我们让这台图灵机跑起来，只要跑了BB(4888)步后，如果它还没有停机，那它就证明了哥德巴赫猜想为真！因为BB(4888)是4888个状态的可以停机的Busy Beaver图灵机所能运行的最大步数。那既然这台图灵机跑过了BB(4888)步，那我们可以断定这台图灵机不会停机，所以哥德巴赫猜想为真。如果在那个步数之前停机，则哥德巴赫猜想为假。
- 他还写了一个验证黎曼猜想的图灵机，有5372个状态。这两个程序其实是告诉我们世界上存在有限时间内可以证明哥德巴赫猜想和黎曼猜想的程序，光想到这一点就很让人遐想联翩了。



# BB(n)是一个快速增长序列

目前只算出来4个值

# Outline

- 可计算性
- 可计算模型
  - $\mu$ -递归函数
- 图灵机
- Register Machine

目标：

建立一整套形式化的可计算模型

什么是自然数？

如何用形式化方法来定义自然  
数？

# 自然数的皮亚诺公理系统 - from wiki

- 皮亚诺的这五条公理用非形式化的方法叙述如下：
  - i) 1是自然数；
  - ii) 每一个确定的自然数 $a$ ，都有一个确定的后继数 $a'$ ， $a'$ 也是自然数（一个数的后继数就是紧接在这个数后面的数，例如，1的后继数是2，2的后继数是3等等）；
  - iii) 如果自然数 $b$ 、 $c$ 的后继数都是自然数 $a$ ，那么 $b = c$ ；
  - iv) 1不是任何自然数的后继数；
  - v) 任意关于自然数的命题，如果证明了它对自然数1是对的，又假定它对自然数 $n$ 为真时，可以证明它对 $n'$ 也真，那么，命题对所有自然数都真。（这条公理保证了数学归纳法的正确性）
- 若将0也视作自然数，则公理中的1要换成0。



# 自然数的公理系统 - from wiki

- 更正式的定义如下：
- 一个戴德金-皮亚诺结构为一满足下列条件的三元组  $(X, x, f)$  ：
  - $X$  是一集合， $x$  为  $X$  中一元素， $f$  是  $X$  到自身的映射。
  - $x$  不在  $f$  的值域内。（对应上面的公理4）
  - $f$  为一单射。（对应上面的公理3）
  - 若  $A$  为  $X$  的子集并满足：
    - $x$  属于  $A$ , 且
    - 若  $a$  属于  $A$ , 则  $f(a)$  亦属于  $A$
  - 则  $A = X$ 。

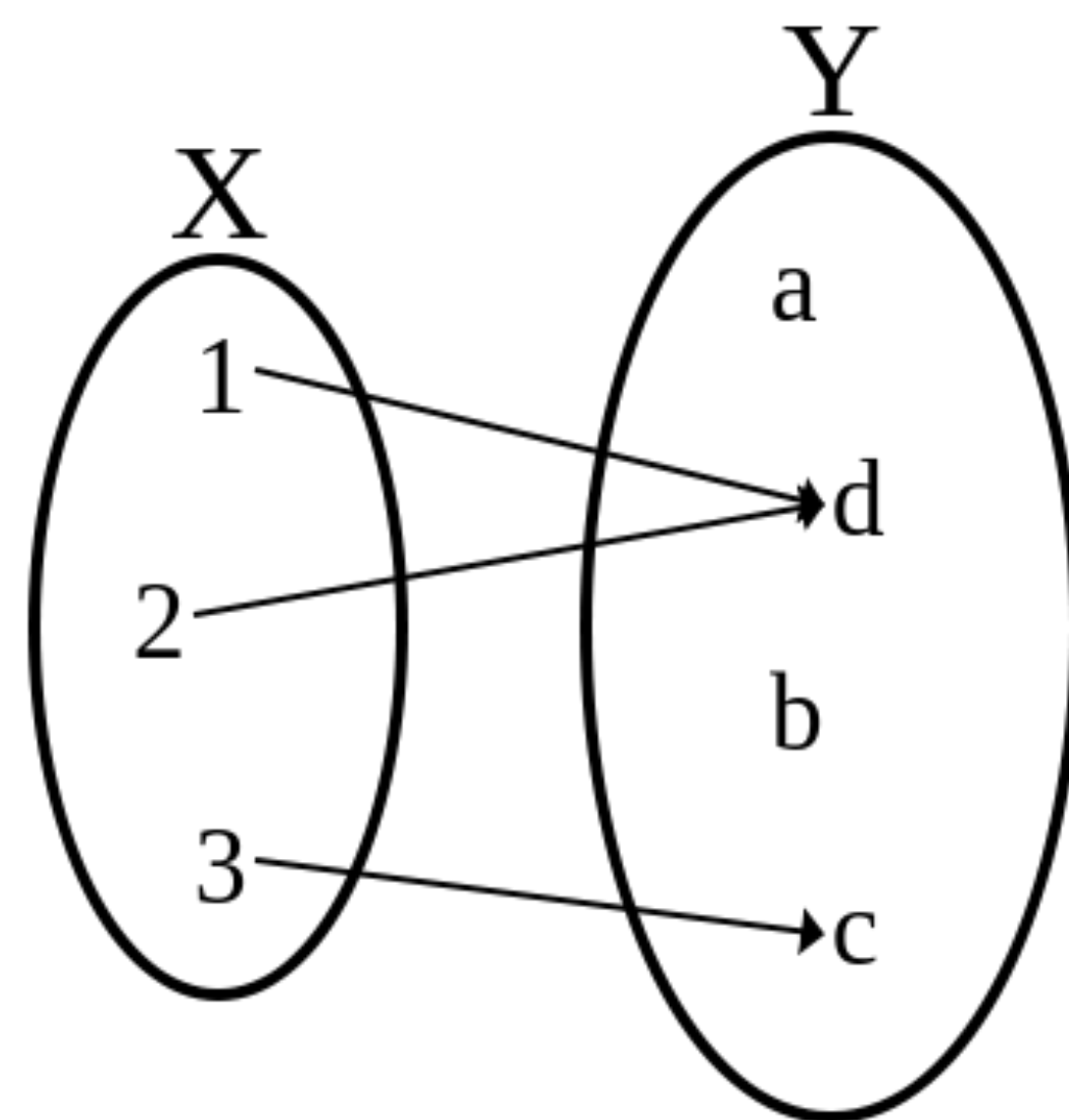
# 函数 - from wiki

从输入值集合  $X$  到可能的输出值集合  $Y$  的函数  $f$  (记作  $f : X \rightarrow Y$ ) 是  $X$  与  $Y$  的[关系](#)，满足如下条件：

1.  $f$  是完全的：对集合  $X$  中任一元素  $x$  都有集合  $Y$  中的元素  $y$  满足  $xfy$  ( $x$  与  $y$  是  $f$  相关的)。即，对每一个输入值， $Y$  中都有与之对应的输出值。
2.  $f$  是多对一的：若  $f(x) = y$  且  $f(x) = z$ ，则  $y = z$ 。即，多个输入可以映射到一个输出，但一个输入不能映射到多个输出。

定义域中任一  $x$  在到达域中唯一对应的  $y$  记为  $f(x)$ 。

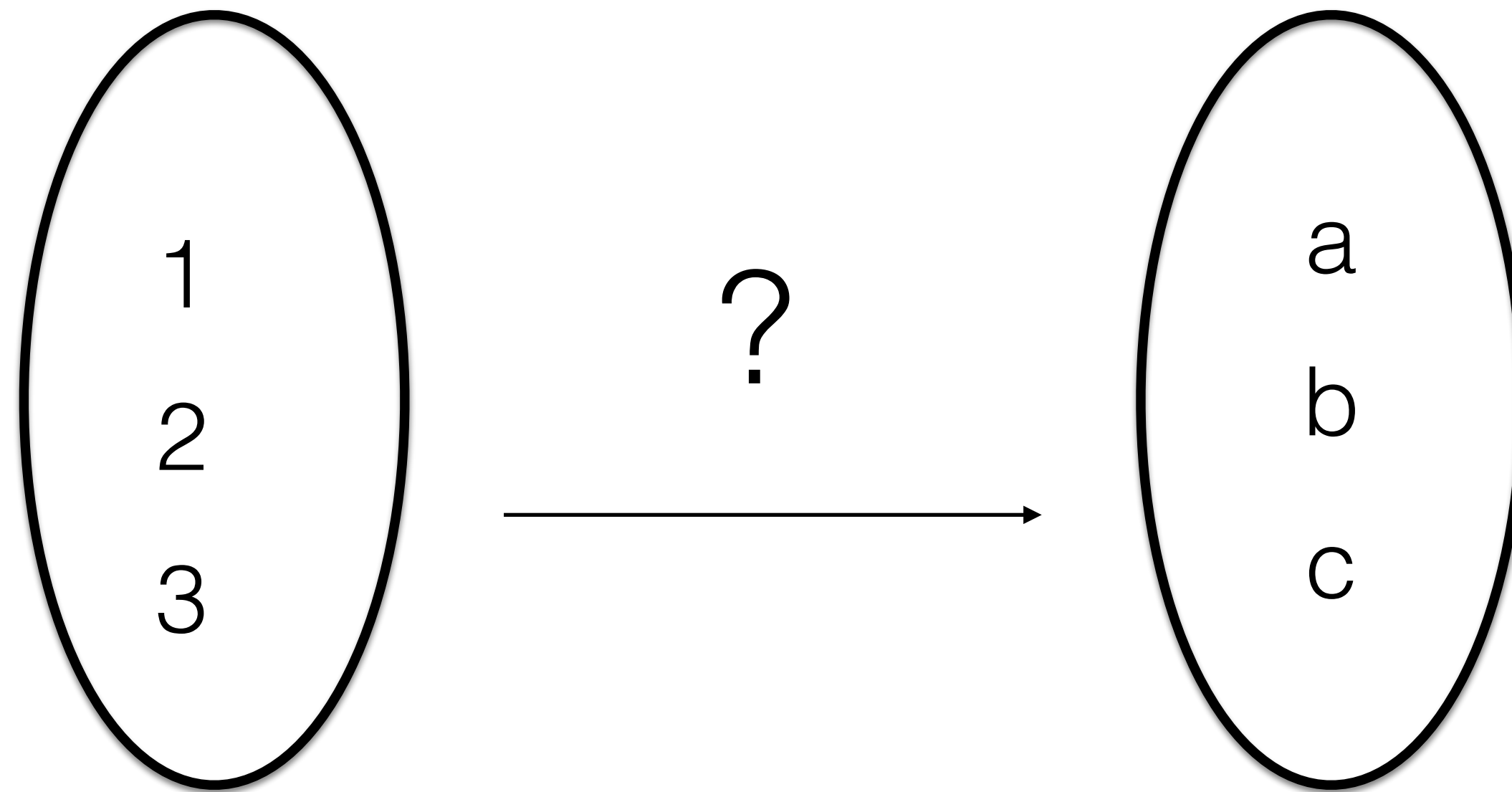
比上面定义更简明的表述如下：从  $X$  映射到  $Y$  的函数  $f$  是  $X$  与  $Y$  的[直积](#)  $X \times Y$  的[子集](#)。 $X$  中任一  $x$  都与  $Y$  中的  $y$  唯一对应，且[有序对](#)  $(x, y)$  属于  $f$ 。



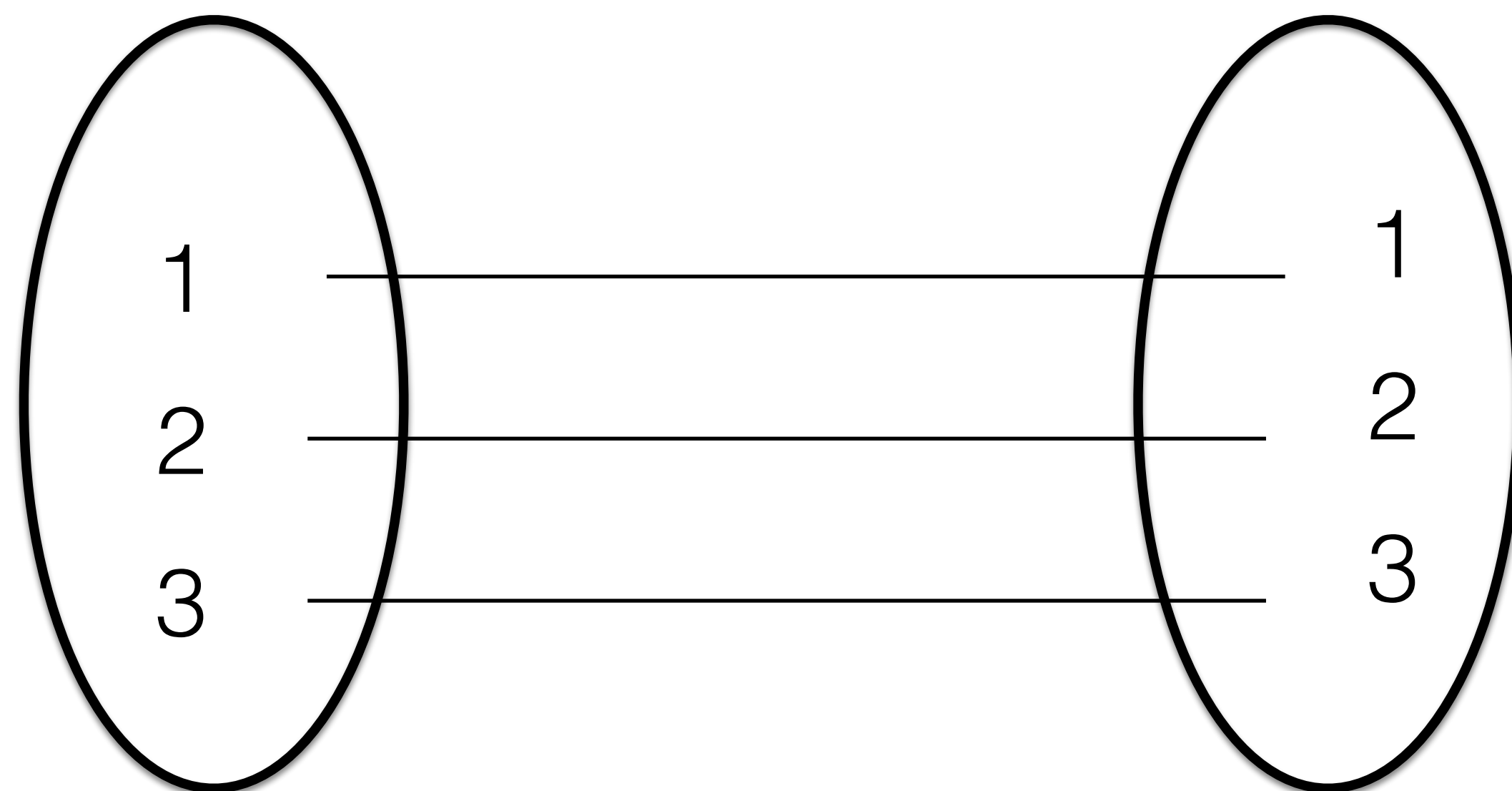
函数是一种映射关系

什么样的函数看上去可以计算？

我们能表达什么样的映射?

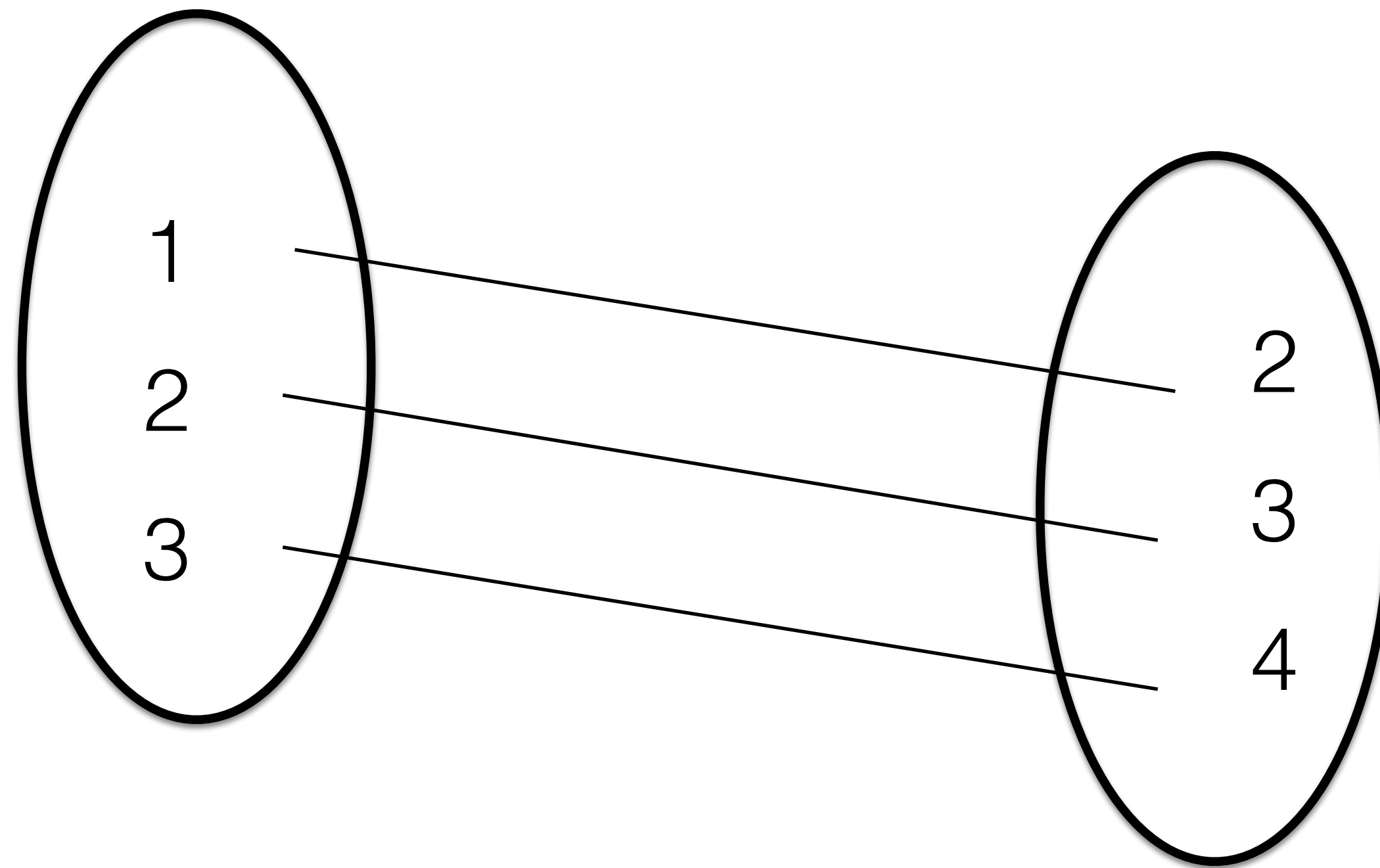


我们能表达什么样的映射?



$$f(x) = x$$

我们能表达什么样的映射?





$$f(x) = S(x)$$

//S(x)表示x的后继

$$f(x) = S( S(x) )$$

$$f(1) = 1$$
$$f(x) = S(f(P(x)))$$

//P(x)表示x的前继

递归函数感觉上是可计算的函数？

1923年，斯科朗提出并初步证明一切初等数论中的函数都可以由原始递归式作出，即都是原始递归函数。

# 原始递归函数 - from wiki

- 原始递归函数接受自然数或自然数的元组作为参数并生成自然数。接受  $n$  个参数的函数叫做  $n$ -元函数。基本原始递归函数用如下公理给出：
  - **常数函数**: 0 元常数函数 0 是原始递归的。
  - **后继函数**: 1 元后继函数  $S$ ，它接受一个参数并返回皮亚诺公理给出的后继数，是原始递归的。
  - **投影函数**: 对于所有  $n \geq 1$  和每个  $1 \leq i \leq n$  的  $i$ ， $n$  元投影函数  $P_i$ ，它接受  $n$  个参数并返回它们中的第  $i$  个参数，是原始递归的。
- 更加复杂的递归函数可以通过应用下列公理给出的运算来获得：
  - **复合**: 给定  $k$  元原始递归函数  $f$ ，和  $k$  个  $m$  元原始递归函数  $g_1, \dots, g_k$ ， $f$  和  $g_1, \dots, g_k$  的复合，也就是  $m$  元函数  $h(x_1, \dots, x_m) = f(g_1(x_1, \dots, x_m), \dots, g_k(x_1, \dots, x_m))$ ，是原始递归的。
  - **原始递归**: 给定  $k$  元原始递归函数  $f$ ，和  $k+2$  元原始递归函数  $g$ ，定义为  $f$  和  $g$  的原始递归的  $k+1$  元函数，也就是函数  $h$  这里的  $h(0, x_1, \dots, x_k) = f(x_1, \dots, x_k)$  并且  $h(S(n), x_1, \dots, x_k) = g(h(n, x_1, \dots, x_k), n, x_1, \dots, x_k)$ ，是原始递归的。
- 服从这些公理的函数是原始递归的，如果它是上述基本函数之一，或者它可以通过应用有限次数的运算获得自基本函数。

# 加法 - from wiki

直觉上我们会把加法递归的定义为:

$$\text{add}(0, x) = x$$

$$\text{add}(n+1, x) = \text{add}(n, x) + 1$$

为了使它适合于严格的原始递归定义,我们定义:

$$\text{add}(0, x) = P_1^1(x)$$

$$\text{add}(S(n), x) = S(P_1^3(\text{add}(n, x), n, x))$$

(注意: 这里的  $P_1^3$  是一个函数, 它接受 3 个参数并返回第一个。)

$P_1^1$  是简单的[恒等函数](#); 包含它是上述原始递归运算定义的要求; 它扮演了  $f$  的角色。 $S$  和  $P_1^3$  的复合, 它是原始递归的, 它扮演了  $g$  的角色。

# 减法

我们可以定义 *有限减法*，就是说，截止到 0 的减法(因为我们还没有负数的概念呢)。首先我们必须定义"前驱" 函数，它担任后继函数的对立物。

直觉上我们会把前驱定义为：

$$\text{pred}(0)=0$$

$$\text{pred}(n+1)=n$$

为了使它适合正式的原始递归定义，我们写：

$$\text{pred}(0)=0$$

$$\text{pred}(S(n))=P_2^2(\text{pred}(n),n)$$

现在我们以类似加法的方式定义减法。

$$\text{sub}(0,x)=P_1^1(x)$$

$$\text{sub}(S(n),x)=\text{pred}(P_1^3(\text{sub}(n,x),n,x))$$



1931年，哥德尔在证明其著名的不完全性定理时，以原始递归式为主要工具把所有元数学的概念都算术化了。原始递归函数的重要性日益受到人们的重视，人们开始猜测，原始递归函数可能穷尽一切可计算的函数。

1928年, Wilhelm Ackermann (1896 - 1962, David Hilbert的学生) 发现 $x$ 的 $y$ 次幂的 $z$ -重积分  $A(x,y,z)$ 是递归的但不是原始递归的。Rosza Peter将 $A(x,y,z)$ 简化到二元函数, 初始条件由Raphael Robinson简化。

# 阿克曼函数

$$A(m, n) = \begin{cases} n + 1 & \text{if } m = 0 \\ A(m - 1, 1) & \text{if } m > 0 \text{ and } n = 0 \\ A(m - 1, A(m, n - 1)) & \text{if } m > 0 \text{ and } n > 0. \end{cases}$$

- 非原始递归函数

$A(m, n)$  的值

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	$n$
0	1	2	3	4	5	$n + 1$
1	2	3	4	5	6	$n + 2$
2	3	5	7	9	11	$2 \cdot (n + 3) - 3$
3	5	13	29	61	125	$2^{(n+3)} - 3$
4	13	65533	$2^{65536} - 3$	$A(3, 2^{65536} - 3)$	$A(3, A(4, 3))$	$\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n+3 \text{ twos}} - 3$
5	65533	$A(4, 65533)$	$A(4, A(5, 1))$	$A(4, A(5, 2))$	$A(4, A(5, 3))$	
6	$A(5, 1)$	$A(5, A(5, 1))$	$A(5, A(6, 1))$	$A(5, A(6, 2))$	$A(5, A(6, 3))$	

# 证明思路简介

- Ackermann函数对两个变元都是单调增
- 对任意的原始递归函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , 存在一个仅仅依赖于 $f$ 的常数 $M$ 使得 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < A(M, \max\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$
- Ackermann函数不具有上述性质 (即Ackermann函数不是原始递归函数)

前三个函数叫做"初始"或"基本"函数：（Kleene (1952) p. 219）：

- (1) 常数函数：对于每个自然数 $n$ 和所有的 $k$ ：

$$f(x_1, \dots, x_k) = n.$$

有时这个常数通过重复使用后继函数和叫做"初始对象0（零）"的对象来生成（Kleene (1952) p.?)

- (2) 后继函数 $S$ ："从已经生成的对象到另一个对象 $n+1$ 或 $n'$ （ $n$ 的后继者）"（ibid）。

$$S(x) \equiv_{\text{def}} f(x) = x' = x + 1$$

- (3) 投影函数 $P_i^k$ （也叫做恒等函数 $I_i^k$ ）：对于所有自然数使得 $1 \leq i \leq k$ ：

$$P_i^k(x_1, \dots, x_k) \equiv_{\text{def}} f(x_1, \dots, x_k) = x_i.$$

- (4) 复合算子：复合也叫做代换，接受一个函数 $h(x_1, \dots, x_m)$ 和函数 $g_i(x_1, \dots, x_k)$ 对每个有 $1 \leq i \leq m$ ，并返回映射 $x_1, \dots, x_k$ 到

$$f(x_1, \dots, x_k) = h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k))$$
的一个函数。

- (5) 原始递归算子：接受函数 $g(x_1, \dots, x_k)$ 和 $h(y, z, x_1, \dots, x_k)$ 并返回唯一的函数 $f$ 使得

$$f(0, x_1, \dots, x_k) = g(x_1, \dots, x_k),$$

$$f(y + 1, x_1, \dots, x_k) = h(y, f(y, x_1, \dots, x_k), x_1, \dots, x_k).$$

- (6)  $\mu$ 算子： $\mu$ 算子接受一个函数 $f(y, x_1, \dots, x_k)$ 并返回函数 $\mu y f(y, x_1, \dots, x_k)$ ，它的参数是 $x_1, \dots, x_k$ 。这个函数 $f$ 要么是从自然数 $\{0, 1, \dots, n\}$ 到自然数 $\{0, 1, \dots, n\}$ 的数论函数，要么是运算于谓词(输出 $\{t, f\}$ )上生成 $\{0, 1\}$ 的表示函数。

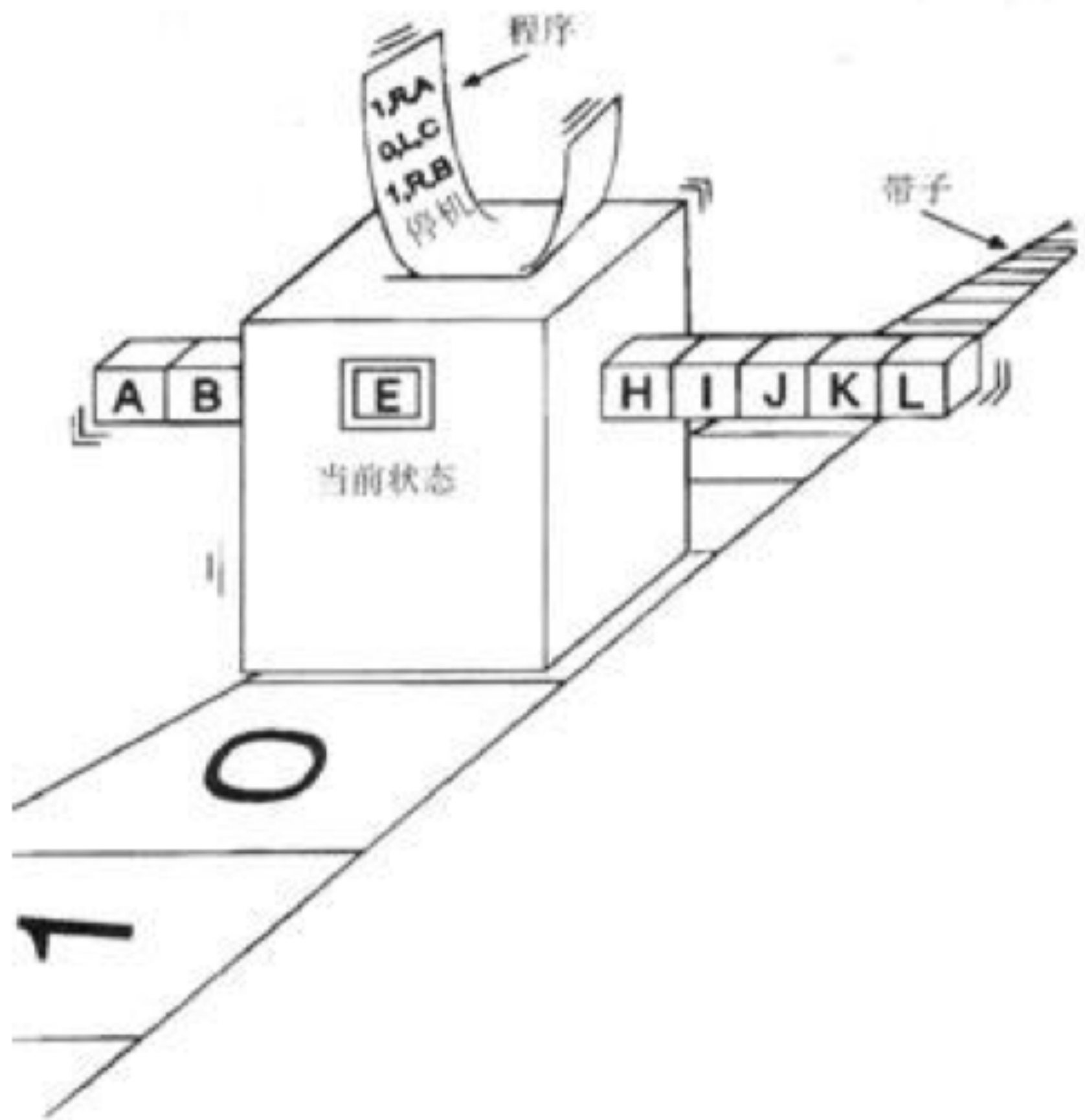
在任何一个情况下：这个函数 $\mu y f$ 返回最小的自然数 $y$ 使得，如果这样的 $y$ 存在，则 $f(0, x_1, x_2, \dots, x_k), f(1, x_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f(y, x_1, x_2, \dots, x_k)$ 都是有定义的，并且 $f(y, x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$ ；如果这样的 $y$ 不存在，则 $\mu y f$ 是对特定参数 $x_1, \dots, x_k$ 是未定义的。

# $\mu$ -递归函数

# Outline

- 可计算性
- 可计算模型
- $\mu$ -递归函数
- 图灵机
- Register Machine

# 图灵机



当前内部状态 s	输入数值 i	输出动作 o	下一时刻的内部状态 s'
B	1	前移	C
A	0	往纸带上写 1	B
C	0	后移	A
...	...	...	...



# 图灵机的定义

一台图灵机是一个七元有序组 $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$ ，其中 $Q, \Sigma, \Gamma$ 都是有限集合，且满足：

1.  $Q$ 是非空有穷状态集合；
2.  $\Sigma$ 是非空有穷输入字母表，其中不包含特殊的空白符 $\square$ ；
3.  $\Gamma$ 是非空有穷带字母表且 $\Sigma \subset \Gamma$ ； $\square \in \Gamma - \Sigma$ 为空白符，也是唯一允许出现无限次的字符；
4.  $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R, -\}$ 是转移函数，其中 $L, R$ 表示读写头是向左移还是向右移， $-$ 表示不移动；
5.  $q_0 \in Q$ 是起始状态；
6.  $q_{accept} \in Q$ 是接受状态。
7.  $q_{reject} \in Q$ 是拒绝状态，且 $q_{reject} \neq q_{accept}$ 。



# 图灵机运行模式

图灵机  $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{accept}, q_{reject})$  将以如下方式运作：

开始的时候将输入符号串  $\omega = \omega_0\omega_1 \dots \omega_{n-1} \in \Sigma^*$  从左到右依此填在纸带的第  $0, 1, \dots, n-1$  号格子上，其他格子保持空白（即填以空白符  $\square$ ）。 $M$  的读写头指向第 0 号格子， $M$  处于状态  $q_0$ 。机器开始运行后，按照转移函数  $\delta$  所描述的规则进行计算。例如，若当前机器的状态为  $q$ ，读写头所指的格子中的符号为  $x$ ，设  $\delta(q, x) = (q', x', L)$ ，则机器进入新状态  $q'$ ，将读写头所指的格子中的符号改为  $x'$ ，然后将读写头向左移动一个格子。若在某一时刻，读写头所指的是第 0 号格子，但根据转移函数它下一步将继续向左移，这时它停在原地不动。换句话说，读写头始终不移出纸带的左边界。若在某个时刻  $M$  根据转移函数进入了状态  $q_{accept}$ ，则它立刻停机并接受输入的字符串；若在某个时刻  $M$  根据转移函数进入了状态  $q_{reject}$ ，则它立刻停机并拒绝输入的字符串。

注意，转移函数  $\delta$  是一个部分函数，换句话说对于某些  $q, x$ ， $\delta(q, x)$  可能没有定义，如果在运行中遇到下一个操作没有定义的情况，机器将立刻停机。

# 图灵机程序例子 - 3+2

设 $M = (\{0, 1, 10, 11\}, \{0, 1\}, \{0, 1, \square\}, \delta, 0, , )$ 和 $\delta : \{0, 1, 10, 11\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, 1, 10, 11\} \times \{0, 1\} \times \{R, L, E, S\}$ . 比如做一个以1的个数表示数值的加法运算，在磁带上的数据是0000001110110000，就是3+2的意思。程序 $\delta$ 如下：

- 0,0 → 0,0R
- 0,1 → 1,1R
- 1,0 → 10,1R
- 1,1 → 1,1R
- 10,0 → 11,0L
- 10,1 → 10,1R
- 11,0 → E
- 11,1 → 0,0S

虽然这里给出与上面不同形式的定义，但两者是等价的，这里的定义能完成的工作并不比上面的定义多。

步数	状态	磁带		步数	状态	磁带
1	0	0000001110110000		9	1	0000001110110000
2	0	0000001110110000		10	1	0000001110110000
3	0	0000001110110000		11	10	0000001111110000
4	0	0000001110110000		12	10	0000001111110000
5	0	0000001110110000		13	10	0000001111110000
6	0	0000001110110000		14	11	0000001111110000
7	0	0000001110110000		15	0	0000001111100000（停机）
8	1	0000001110110000		-- 停机 --		

# 图灵机程序例子 - $f(x)=x+1$

- $q1, 0, 1, l, q2;$
- $q1, 1, 0, l, q3;$
- $q1, b, b, n, q4;$
- $q2, 0, 0, l, q2;$
- $q2, 1, 1, l, q2;$
- $q2, b, b, n, q4;$
- $q3, 0, 1, l, q2;$
- $q3, 1, 0, l, q3;$
- $q3, b, b, n, q4.$
- 五元组  $(q1, s1, s2, r, q2)$  分别表示：
  - $q1$ : 当前状态
  - $s1$ : 读写头从当前读入的数据 (0 或者 1)
  - $s2$ : 读写头即将写入当前方格的数据
  - $r/l/n$ : 读写头向右移动一格/向左移动一格/保持不动
  - $q2$ : 新状态
- 读写头一开始位于数据最右边一位， $b$  表示空格， $q1$  为初始状态， $q4$  为结束状态。
- 例子： 0000 0001 1110 0111



# 图灵机程序例子 - $f(x)=2^x$

读入数据 当前状态	B	0	1
q1	1, L, q7	0, R, q1	1, R, q2
q2	B, R, q3	0, R, q2	1, R, q2
q3	0, L, q4	0, R, q3	Error
q4	B, L, q5	0, L, q4	Error
q5	Error	1, L, q5	0, L, q6
q6	B, R, q1	0, L, q6	1, L, q6
q7	Halt	B, L, q7	Error

# 另一个例子，是实现 $f(x)=2^x$ 的

- 约定：

- 1.开始时，纸带上只有一连续的方格串上放入相应于 $x$ 的二进制值的符号，其余方格均为空白（用B表示）；
- 2.读写头一开始位于表示 $x$ 的方格的**最左边**一位所在方格；
- 3.停机时，纸带上非空方格串所组成的二进制值即为所求结果。

- 程序的实现思想：

- 我们知道，在二进制表示下，只要在原数后面添上一个0，就是原来的数乘以二。根据这个思想，我们每次在写一个0，同时原数减一，直到原数减为0，再在所写的0前面添加上一个1，就能得出所求函数的答案了。

- 状态含义：

- q1: 起始状态；忽略前导0，寻找该数的真正起始位置；如果出现\_00.....00\_0..... 00的情况，则转入q7；
- q2: 读写头向右移动直到遇到空格；
- q3: 此空格后0的数目加1；
- q4: 回到原来数的最右端；
- q5: 该数减1；
- q6: 回到数的开头，转入q1；
- q7:结束状态。
- 可以看到，q1到q7,7个状态，相当于一个个标志，而整个程序也相当于是一句句的goto语句。

# 2的2次方

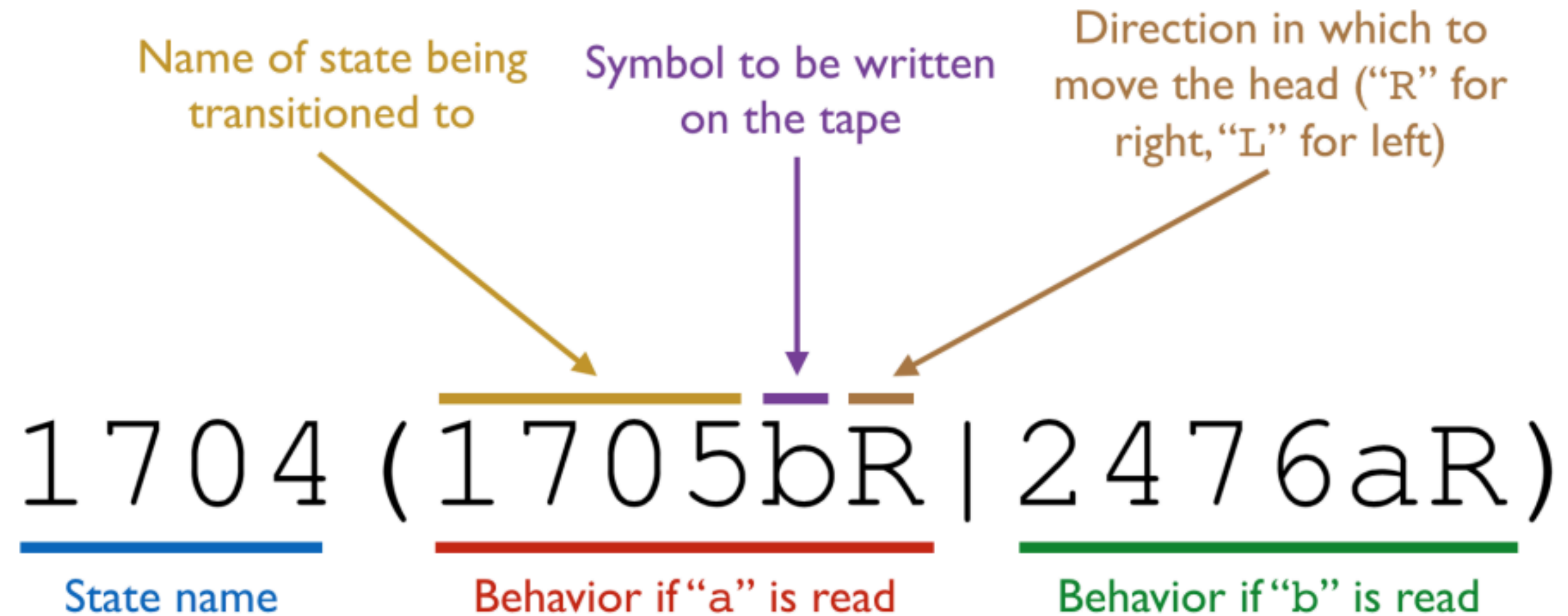
1. 0010 R,q1  
2. 0010 R,q1  
3. 0010 R,q2  
4. 0010 R,q2  
5. 0010B R,q3  
6. 0010B0 L,q4  
7. 0010B0 L,q5  
8. 0011B0 L,q5  
9. 0001B0 L,q6  
10. 0001B0 L,q6  
11. B0001B0 R,q1  
12. B0001B0 R,q1  
13. B0001B0 R,q1  
14. B0001B0 R,q1  
15. B0001B0 R,q2  
16. B0001B0 R,q3  
17. B0001B0 R,q3

18. B0001B00 L,q4  
19. B0001B00 L,q4  
20. B0001B00 L,q5  
21. B0000B00 L,q6  
22. B0000B00 L,q6  
23. B0000B00 L,q6  
24. B0000B00 L,q6  
25. B0000B00 R,q1  
26. B0000B00 R,q1  
27. B0000B00 R,q1  
28. B0000B00 R,q1  
29. B0000B00 R,q1  
30. B0000100 L,q7  
31. B0000100 L,q7  
32. B0000100 L,q7  
33. B0000100 L,q7  
34. B0000100 L,q7  
35. B0000100 HLT

思考题：

如果用数字表达一个图灵机？

## A description of a single state in Z

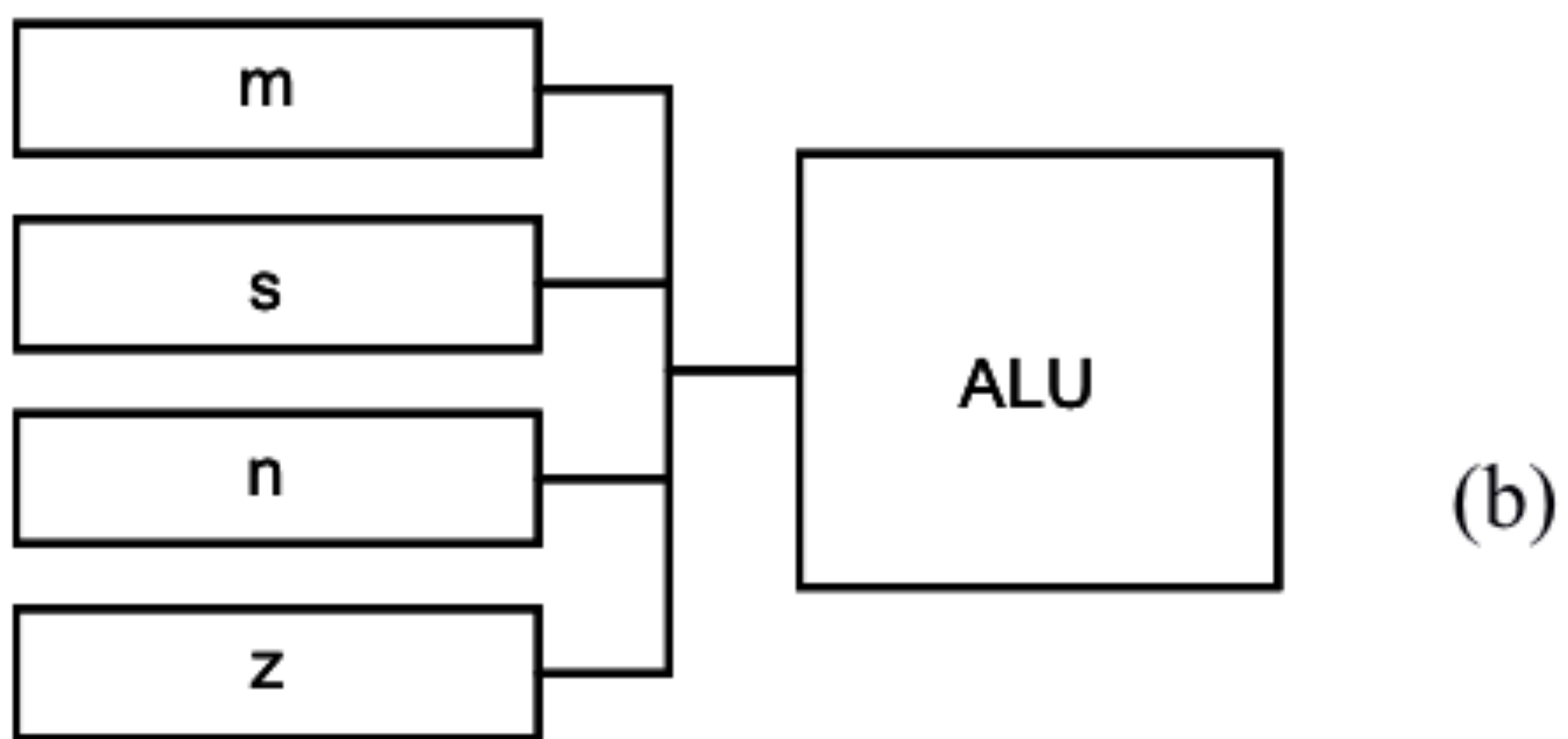


# An example

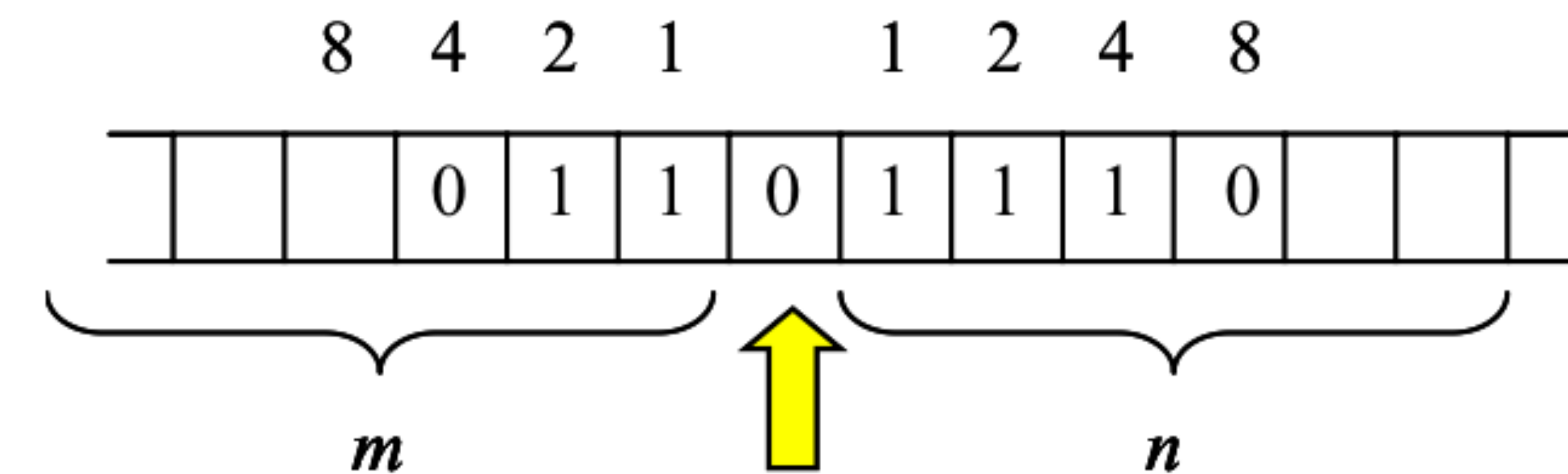


# Outline

- 可计算函数
- 不可计算函数
- $\mu$ -递归函数
- 图灵机
- Register Machine



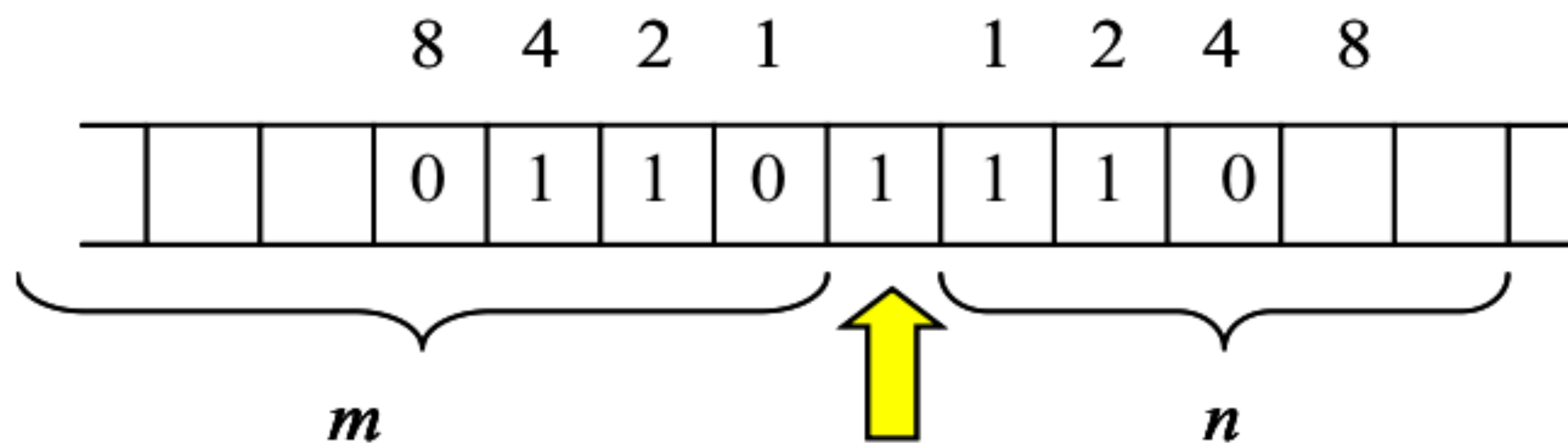
图灵机 对应 寄存器机



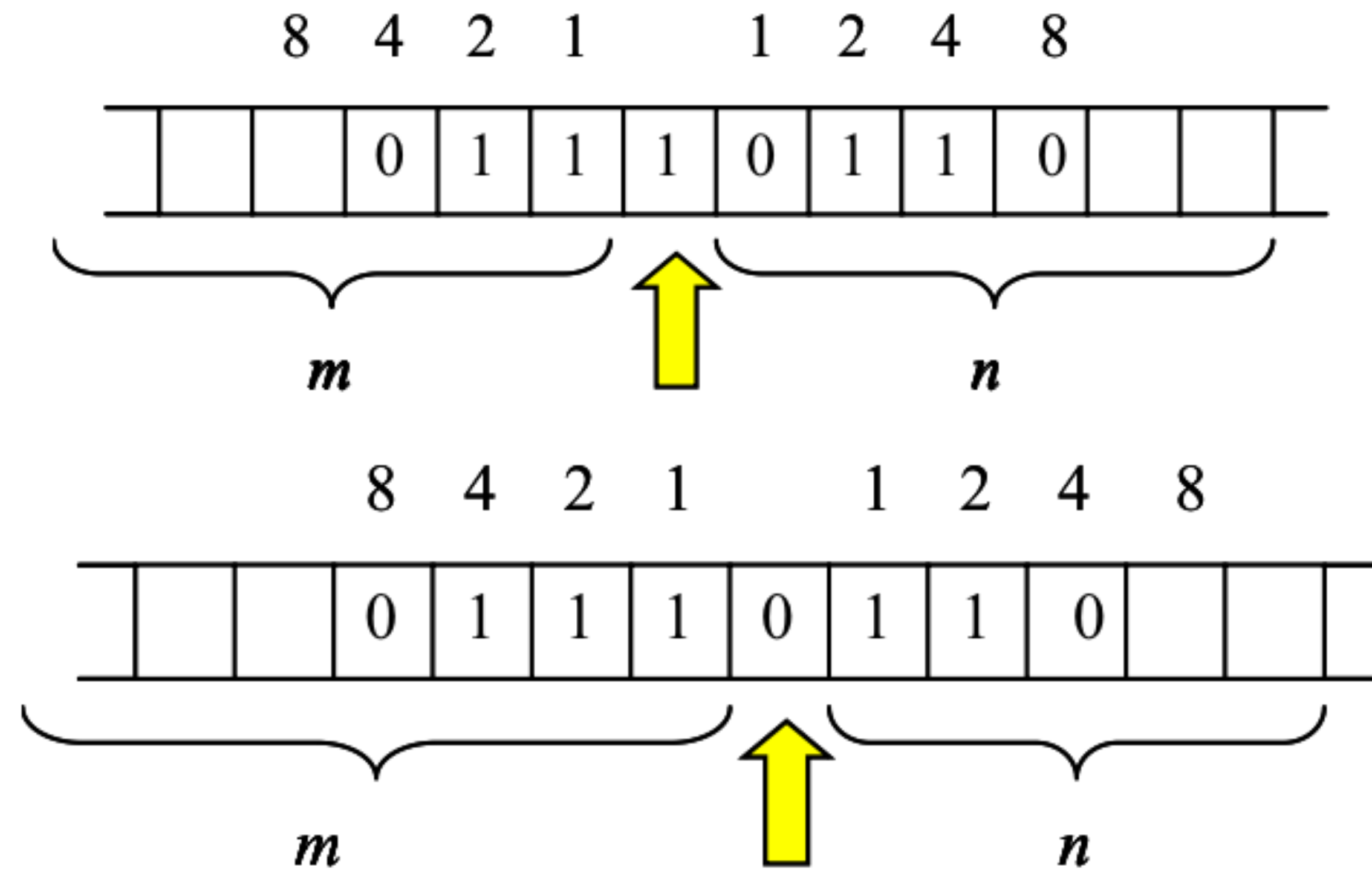
$$m' = 2 \times m \quad 6 = 2 \times 3$$

$$n' = n/2 \quad (\text{whole number division}) \quad 3 = 7/2 \quad (\text{remainder } 1)$$

$$s' = \text{remainder } n/2 \quad \text{remainder } 7/2 = 1$$



读写头右移  $s=0$



$$n' = n/2 \text{ (whole number)} \quad 3 = 6/2 \text{ (remainder 0)}$$

$$s' = \text{remainder } n/2 \text{ remainder } 6/2 = 0$$

$$m' = 2 \times m + s \quad 7 = 2 \times 3 + 1$$

右移  $s=1$

# 右移

- We have discovered that the movement of the read/write head to the right on a Turing Machine tape is equivalent to the following three basic arithmetic calculations.

$$s^* = \text{rem}(n / 2)$$

- 

$$m^* = s + 2m$$

$$n^* = n / 2$$

<code>mov reg, 0</code>	Put 0 into register “reg”
<code>inc reg</code>	Add 1 to the contents of register “reg”
<code>decjmpreg reg, lab</code>	If register “reg” is zero, jump to the instruction labelled “lab” else subtract 1 from “reg” and do the next instruction
<code>jmp lab</code>	Jump to the instruction labelled “lab”
<code>hlt</code>	Halt

## A Set of Minimal Instructions

```

    mov ecx, 3
    mov ebx, 0
L3:  decjmpreg ecx, L4
    inc ebx
    inc ebx
    jmp L3
L4:  hlt

```

e a x	e b x	e c x	e d x	e a x	e b x	e c x	e d x	e a x	e b x	e c x	e d x
		3									
	0										
		2				1				0	
	1				3				5		
	2				4				6		

$$m^* = s + 2m$$

m乘2

```

    mov ecx, 5
    mov eax, 0
L3:  mov ebx, 0
      decjmpreg ecx, L4
      inc ebx
      decjmpreg ecx, L4
      inc eax
      jmp L3
L4:  hlt

```

a	b	c	d	a	b	c	d	a	b	c	d
x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
		5									
0											
0					0				0		
		4				2				0	
	1				1				1		
		3				1					
1				2							

$$s^* = \text{rem}(n/2)$$

$$n^* = n/2$$

It starts off with 5 in ecx and ends up with 2 in eax and 1 in ebx.



The complete code for  
the Turing machine  
when the read/write  
head moves once space  
to the right

```
:    decjmpreg eax,L1
      inc edx
      inc edx           $z = 2m$ 
      jmp L2

:    decjmpreg ebx,L3
      inc edx          If s is 1  $z = z + 1$ 

:    decjmpreg edx,L4
      inc eax
      jmp L3           $m^* = z$ 

:    mov ebx,0
      decjmpreg ecx,L6
      inc ebx
      decjmpreg ecx,L6
      inc edx           $s^* = \text{rem}(n/2)$ 
                         $z = n/2 \text{ whole}$ 
      jmp L4

:    decjmpreg edx,L7
      inc ecx
      jmp L6           $n^* = z$ 

:    hlt
```

eax holds m ebx holds s ecx holds n edx holds z
--

Current State $S$	Symbol read $s$	Symbol to write $s^*$	Direction to move $d$	New state $S^*$
$S0$	$s1$	$s^*1$	$R$	$S1$
$S0$	$s2$	$s^*2$	$L$	$S1$
$S0$	$s3$	$s^*3$	$R$	$S2$

Current State $S$	Symbol read $s$	Symbol to write $s^*$	Direction to move $d$	New state $S^*$
$Even$	$0$	$0$	$R$	$Even$
$Even$	$1$	$0$	$R$	$Odd$
$Even$	$@$	$0$	$N$	$Halt$

# 状态的转移

State  
Even

```
read the symbol s
store s
if(s == 0), set s = 0 and
jmp to move-right code
if(s == 1), set s = 0 and
jmp to move-right code
```

Head  
move  
left code

Head  
move  
right code

```
use the stored s
if(s == 0), jump to the
even state code
if(s == 1), jump to the
odd state code
```

# 只用两条指令 do a shift to the right

- L2: `decjmpreg` eax,L1
- `inc` edx
- `inc` edx
- `; jmp` L2
- `decjmpreg` esi, L2
- `;`
- L1: `decjmpreg` ebx,L3
- `inc` edx
- `;`
- L3: `decjmpreg` edx,L4
- `inc` eax
- `; jmp` L3
- `decjmpreg` esi, L3
- `;`
- L4: `mov` ebx,0
- `decjmpreg` ecx,L6
- `inc` ebx
- `decjmpreg` ecx,L6
- `inc` edx
- `; jmp` L4
- `decjmpreg` esi,L4
- `;`
- L6: `decjmpreg` edx,L7
- `inc` ecx
- `; jmp` L6
- `decjmpreg` esi, L6
- `;`
- L7: `hlt`

# 只用两个寄存器

- register r
  - Then we Godelize these numbers (3D-space) as above to produce a single number  $r$  which we put into a single register  $r$ , like this:
  - $$r = GS(a,b,c) = 2^a.3^b5^c$$
- register z
  - the need to have a register with initial value zero. Let' call this register  $z$
  - Then, the instruction `decjmpreg z,L` will make an unconditional jmp (jump) to the label  $L$ .

Theorem 1.

For every Turing Machine  $T$  there exists a register-based machine  $R$  which exhibits **the same behaviour** as  $T$ . This register-based machine consists of **two registers and two instructions**.