信物第三次作业答案

2025 年 10 月 22 日

1013 日作业:

2-10

两个质量同为 m 的小孩，站在质量为 m_0 的平板车上，开始时平板车静止于光滑的直轨道上。他们以相对于车的速度 u 向后跳离平板车。

(1) 若两人同时跳离，则平板车的速度是多少？

(2) 若两人一个一个地跳离，则平板车的速度是多少？

(3) 以上两种情形中哪一种的速度大些？

解：

1. 设平板车的速度为 v，则由动量守恒定律可得：

$$0 = m_0 v + 2m(v - u) \implies v = \frac{2mu}{m_0 + 2m}$$

2. 设第一次跳离后平板车和剩下一个小孩组成的系统质量为 $m_0 + m$，速度为 v_1。由动量守恒定律：

$$0 = (m_0 + m)v_1 + m(v_1 - u) \implies v_1 = \frac{mu}{m_0 + 2m}$$

第二次跳离时，系统质量为 m_0，设最终平板车速度为 v_2。再次应用动量守恒：

$$(m_0 + m)v_1 = m_0 v_2 + m(v_2 - u)$$
$$v_2 = \frac{mu}{m_0 + m} + \frac{mu}{m_0 + 2m}$$

将 v_1 代入得：

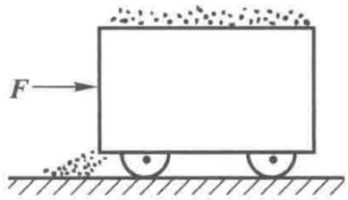
$$v_2 = \frac{mu}{m_0 + 2m} + \frac{mu}{m_0 + m}$$

3. 实际上，分开跳离时平板车的最终速度更大。因为

$$\frac{2m_0 + 3m}{m_0 + m} > 2 \implies \frac{mu(2m_0 + 3m)}{(m_0 + 2m)(m_0 + m)} > \frac{2mu}{m_0 + 2m}$$

2-11

2-11. 如习题 2-11 图所示，一工人以水平恒力 $\boldsymbol{F}$ 推一煤车，由于煤车底部有一小洞，出现漏煤粉的现象，其漏煤速率为 $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=q$。设煤车原来静止，质量为 m_0。自 $t=0$ 开始推车，试求 t 时刻煤车的速度。



解： 不难计算得；

$$m = m_0 - qt$$

我们有:

$$Fdt = (m - dm)(v + dv) + vdm - mv$$

带入 $\frac{dm}{dt} = q, m = m_0 - qt$ 可得:

$$F = (m_0 - qt)\frac{dv}{dt}$$

$$dv = \frac{F}{m_0 - qt}dt$$

$$v = \int_0^t \frac{F}{m_0 - qt}dt = -\frac{F}{q}\ln\frac{m_0 - qt}{m_0} \quad (t < \frac{m_0}{q})$$

2-44. 当地球处于远日点时，到太阳的距离为 1.52×10^{11} m，轨道速度为 2.93×10^{4} m/s。半年后，地球处于近日点，到太阳的距离为 1.47×10^{11} m。求：（1）地球在近日点时的轨道速度；（2）两种情况下，地球的角速度。

解：

1. 设 $v_0 = 2.93 * 10^4\,\mathrm{m/s}, r_0 = 1.52 * 10^{11}\,\mathrm{m}$ 为远日状态，设 $v, r = 1.47 * 10^{11}\,\mathrm{m}$ 为近日状态，根据角动量守恒

   $$mv_0r_0 = mvr \implies v = \frac{r_0}{r}v_0 = 3.03 * 10^4\,\mathrm{m/s}$$

   其中 v_0 与 v 速度方向相反。

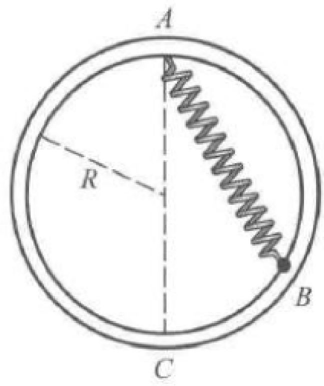
2. 计算得

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{3.03 * 10^4\,\mathrm{m/s}}{1.47 * 10^{11}\,\mathrm{m}} = 2.06 * 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$$
$$\omega_0 = \frac{v_0}{r_0} = \frac{2.93 * 10^4\,\mathrm{m/s}}{1.52 * 10^{11}\,\mathrm{m}} = 1.93 * 10^{-7}\,\mathrm{rad/s}$$

10.15 日作业:

2-19

2-19. 一根原长 l_0 的弹簧，当下端悬挂质量为 m 的重物时，弹簧长 $l=2l_0$。现将弹簧一端悬挂在竖直放置的圆环上端 A 点，设环的半径 $R=l_0$，把弹簧另一端所挂重物放在光滑圆环的 B 点，如习题 2-19 图所示。已知 AB 长为 $1.6R$。当重物在 B 无初速地沿圆环滑动时，试求：(1) 重物在 B 点的加速度和对圆环的正压力；(2) 重物滑到最低点 C 时的加速度和对圆环的正压力。



习题 2-19 图

解:

- (1) 劲度系数 k:

  $$k(2l_0 - l_0) = mg$$

  此时弹力为:

  $$F_k = k\left(1.6l_0 - l_0\right)$$

  重力与支持力夹角为:

  $$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \frac{7}{25}$$

  则可得

  $$N = F_k \cdot \frac{4}{5} - \frac{7mg}{25} = \frac{mg}{5}\,(\text{方向指向圆心外})$$

  切向力为:

  $$F_\tau = mg \cdot \frac{24}{25} - F_k \cdot \frac{3}{5} = \frac{3mg}{5}$$

  故加速度为:

  $$a = \frac{F_\tau}{m} = \frac{3g}{5}$$

- (2) 能量守恒得：

$$\frac{1}{2}k(1.6l_0 - l_0)^2 + mg(2l_0 - (1.6l_0 \cdot \frac{4}{5})) = \frac{1}{2}k(2l_0 - l_0)^2 + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

  解得：

$$v = \frac{2\sqrt{5gl_0}}{5}$$

  向心加速度为：

$$a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{4g}{5}$$

  正压力：

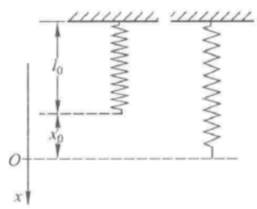
$$N - mg + F_k = m\frac{v^2}{r} = \frac{4mg}{5}$$
$$F_k = mg$$

  解得：

$$N = \frac{4mg}{5}\text{方向指向圆心。}$$

2-21

2-21. 一弹簧，原长为 l_0，劲度系数为 k，上端固定，下端挂一质量为 m 的物体，先用手托住，使弹簧不伸长。（1）如将物体托住慢慢放下，达静止（平衡位置）时，弹簧的最大伸长和弹性力是多少？（2）如将物体突然放手，物体到达最低位置时，弹簧的伸长和弹性力各是多少？物体经过平衡位置时的速度是多少？



解：

- (1)

$$k\Delta l = mg$$

  解得

$$\Delta l = \frac{mg}{k}$$

  弹力为 mg

- (2) 由对称性可知：

$$\Delta l' = 2\Delta l = \frac{2mg}{k}$$

  弹力为 $2mg$ 能量守恒得：

$$mg\Delta l = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 + 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

  解得：

$$v = \sqrt{\frac{mg^2}{km}} = g\sqrt{\frac{m}{k}}$$

开普勒第三定律证明

设角动量为 L, 远日点速度为 v_1，角速度为 ω_1，近日点速度为 v_2，角速度为 ω_2，远日点与近日点距离分别为 r_1 与 r_2，则由角动量守恒：

$$mv_1r_1 = mv_2r_2 \implies v_1r_1 = v_2r_2 = \frac{L}{m}$$

我们得到：

$$\omega_1 r_1^2 = \omega_2 r_2^2$$

由开普勒第二定律可知：

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \frac{L}{2m} \implies T = \frac{2mS}{L}$$

其中 S 为椭圆面积，$S = \pi ab$，a, b 分别为椭圆长短半轴，而由能量守恒可得：

$$E = -\frac{GMm}{a+c} + \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{GMm}{a-c} + \frac{1}{2}mv_2^2$$

带入角动量守恒，解得：

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

结合角动量满足的方程：

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{GMm}{r_1} = \frac{L^2}{2mr_1^2} - \frac{GMm}{r_1} = -\frac{GMm}{2a}$$

解得：

$$L = m\sqrt{\frac{GMb^2}{a}}$$

带入周期公式得：

$$T = 2\pi ab\sqrt{\frac{a}{GMb^2}} = 2\pi \cdot \frac{a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

即：

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$