

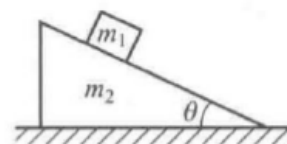
信物第二次作业答案

2025 年 9 月 22 日

0922 日作业:

1.33

1-33. 质量为 m_2 的三角形木块, 倾角为 θ , 放在光滑的水平面上。另有一质量为 m_1 的滑块放在斜面上, 如习题 1-33 图所示。如果接触面的摩擦忽略不计。试求两物体的加速度。



解: 设 m_2 的加速度为 a_2 , m_1 相对于 m_2 的加速度为 a'_1 。

水平方向动量守恒:

$$m_2 a_2 = m_1 * (a'_1 \cos \theta - a_2)$$

同时, 以 m_2 为参考系, 对 m_1 的受力分析可得:

$$a_2 \cos \theta + g \sin \theta = a'_1$$

联立以上两式, 解得

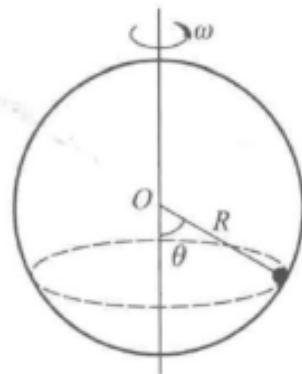
$$a_2 = \frac{m_1 g \sin \theta \cos \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$
$$a'_1 = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$

所以对于 a_1 , 我们有

$$a_1 = \sqrt{(a'_1 \sin \theta)^2 + (a_2 - a'_1 \cos \theta)^2} = \frac{m_2 g \sin \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$

1.38

1-38. 如习题 1-38 图所示, 半径为 R 的空心球壳绕竖直直径作匀速转动, 其内壁有一质量为 m 的小物体, 随球壳在一定的水平面内作匀速圆周运动。小物体与内壁间的摩擦因素为 μ 。试求小物体能稳定在该平面转动的转速范围。



习题 1-38 图

解: 设小球的质量为 m , 半径为 R , 离心力为 f_c , 法向力为 N , 摩擦系数为 μ , 重力加速度为 g , 小球与球从下到上的夹角为 θ 。则离心力为:

$$f_c = m\omega^2 R \sin \theta$$

平衡方程:

$$mg \cos \theta + f_c \sin \theta = N$$

- 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

$$-\mu N \leq f_c \cos \theta - mg \sin \theta \leq \mu N$$

解出 ω 的范围为

$$\sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta + \mu \sin^2 \theta)}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{g(\mu \cos \theta + \sin \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta - \mu \sin^2 \theta)}}$$

注意, 当 $\mu \geq \tan \theta$ 时, ω 无下限。

- 当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

$$-f_c \cos \theta + mg \sin \theta \leq \mu N$$

且 $N \geq 0$ 。

$$N = mg \cos \theta + f_c \sin \theta \geq 0$$

解出 ω 的范围为

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta + \mu \sin^2 \theta)}}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{-g \cos \theta}{R \sin^2 \theta}}$$

注意, 当 $\mu > -\cot \theta$ 时, 该情况无法成立

3.

抛射质量为 m 的小球，抛射倾角为 θ ，初速度大小为 v_0 ，所受空气阻力与速度成反比，即

$$\vec{F} = -k\vec{v},$$

求小球在空气中运行的轨迹曲线。

解： 我们分解公式：

$$F_x = -kv_x = m \frac{dv_x}{dt}$$

$$F_y = -kv_y - mg = m \frac{dv_y}{dt}$$

移项得方程组：

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = dt$$

初值为 $v_x(0) = v_0 \cos \theta, v_y(0) = v_0 \sin \theta$ 。 带入积分得：

$$\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = \int_0^t dt$$

解得：

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} + (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

积分得位移：

$$x(t) = \int_0^t v_x(t) dt = \frac{mv_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = -\frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$