

# 信物第三次作业答案

2025 年 10 月 14 日

## 1013 日作业:

### 2-10

两个质量同为  $m$  的小孩，站在质量为  $m_0$  的平板车上，开始时平板车静止于光滑的直轨道上。他们以相对于车的速度  $u$  向后跳离平板车。

- (1) 若两人同时跳离，则平板车的速度是多少？
- (2) 若两人一个一个地跳离，则平板车的速度是多少？
- (3) 以上两种情形中哪一种的速度大些？

解：

1. 设平板车的速度为  $v$ ，则由动量守恒定律可得：

$$0 = m_0 v + 2m(v - u) \implies v = \frac{2mu}{m_0 + 2m}$$

2. 设第一次跳离后平板车和剩下一个小孩组成的系统质量为  $m_0 + m$ ，速度为  $v_1$ 。由动量守恒定律：

$$0 = (m_0 + m)v_1 + m(v_1 - u) \implies v_1 = \frac{mu}{m_0 + 2m}$$

第二次跳离时，系统质量为  $m_0$ ，设最终平板车速度为  $v_2$ 。再次应用动量守恒：

$$(m_0 + m)v_1 = m_0 v_2 + m(v_2 - u)$$

$$v_2 = \frac{mu}{m_0 + m} + \frac{mu}{m_0 + 2m}$$

将  $v_1$  代入得：

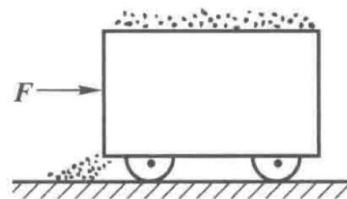
$$v_2 = \frac{mu}{m_0 + 2m} + \frac{mu}{m_0 + m}$$

3. 实际上，分开跳离时平板车的最终速度更大。因为

$$\frac{2m_0 + 3m}{m_0 + m} > 2 \implies \frac{mu(2m_0 + 3m)}{(m_0 + 2m)(m_0 + m)} > \frac{2mu}{m_0 + 2m}$$

## 2-11

2-11. 如习题 2-11 图所示,一工人以水平恒力  $F$  推一煤车,由于煤车底部有一小洞,出现漏煤粉的现象,其漏煤速率为  $\frac{dm}{dt} = q$ 。设煤车原来静止,质量为  $m_0$ 。自  $t=0$  开始推车,试求  $t$  时刻煤车的速度。



解: 不难计算得:

$$m = m_0 - qt$$

我们有:

$$Fdt = (m - dm)(v + dv) + vdm - mv$$

带入  $\frac{dm}{dt} = q, m = m_0 - qt$  可得:

$$F = (m_0 - qt) \frac{dv}{dt}$$

$$dv = \frac{F}{m_0 - qt} dt$$

$$v = \int_0^t \frac{F}{m_0 - qt} dt = -\frac{F}{q} \ln \frac{m_0 - qt}{m_0}$$

2-44. 当地球处于远日点时,到太阳的距离为  $1.52 \times 10^{11} \text{ m}$ ,轨道速度为  $2.93 \times 10^4 \text{ m/s}$ 。半年后,地球处于近日点,到太阳的距离为  $1.47 \times 10^{11} \text{ m}$ 。求:  
(1) 地球在近日点时的轨道速度;(2) 两种情况下,地球的角速度。

解:

1. 设  $v_0 = 2.93 \times 10^4 \text{ m/s}, r_0 = 1.52 \times 10^{11} \text{ m}$  为远日状态, 设  $v, r = 1.47 \times 10^{11} \text{ m}$  为近日状态, 根据角动量守恒

$$mv_0 r_0 = mvr \implies v = \frac{r_0}{r} v_0 = 3.03 \times 10^4 \text{ m/s}$$

其中  $v_0$  与  $v$  速度方向相反。

2. 计算得

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{v}{r} = \frac{3.03 * 10^4 m/s}{1.47 * 10^{11} m} = 2.06 * 10^{-7} rad/s \\ \omega_0 &= \frac{v_0}{r_0} = \frac{2.93 * 10^4 m/s}{1.52 * 10^{11} m} = 1.93 * 10^{-7} rad/s\end{aligned}$$

证明. 我们有一个向量组  $B = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_n\}$ , 且  $V = \mathbf{Span} B$

设  $\dim V = r$ , 取  $V$  的一个基为  $A = \{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_r\}$ , 则向量组  $A$  中的任意向量必可以由  $B$  中的向量线性表示, 而  $A$  线性无关, 则有  $r \leq n$ , 即  $\dim V \leq n$ .  $\square$