

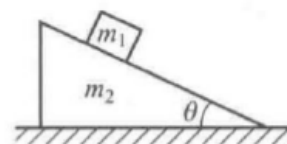
信物第二次作业答案

2025 年 9 月 24 日

0922 日作业:

1.33

1-33. 质量为 m_2 的三角形木块, 倾角为 θ , 放在光滑的水平面上。另有一质量为 m_1 的滑块放在斜面上, 如习题 1-33 图所示。如果接触面的摩擦忽略不计。试求两物体的加速度。



解: 设 m_2 的加速度为 a_2 , m_1 相对于 m_2 的加速度为 a'_1 。

水平方向动量守恒:

$$m_2 a_2 = m_1 * (a'_1 \cos \theta - a_2)$$

同时, 以 m_2 为参考系, 对 m_1 的受力分析可得:

$$a_2 \cos \theta + g \sin \theta = a'_1$$

联立以上两式, 解得

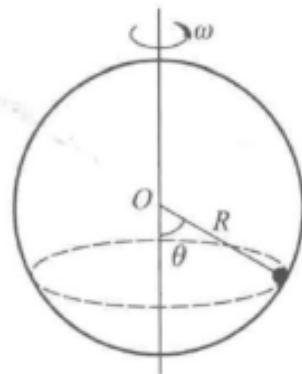
$$a_2 = \frac{m_1 g \sin \theta \cos \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$
$$a'_1 = \frac{(m_1 + m_2) g \sin \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$

所以对于 a_1 , 我们有

$$a_1 = \sqrt{(a'_1 \sin \theta)^2 + (a_2 - a'_1 \cos \theta)^2} = \frac{m_2 g \sin \theta}{m_2 + m_1 \sin^2 \theta}$$

1.38

1-38. 如习题 1-38 图所示, 半径为 R 的空心球壳绕竖直直径作匀速转动, 其内壁有一质量为 m 的小物体, 随球壳在一定的水平面内作匀速圆周运动。小物体与内壁间的摩擦因素为 μ 。试求小物体能稳定在该平面转动的转速范围。



习题 1-38 图

解: 设小球的质量为 m , 半径为 R , 离心力为 f_c , 法向力为 N , 摩擦系数为 μ , 重力加速度为 g , 小球与球从下到上的夹角为 θ 。则离心力为:

$$f_c = m\omega^2 R \sin \theta$$

平衡方程:

$$mg \cos \theta + f_c \sin \theta = N$$

- 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

$$-\mu N \leq f_c \cos \theta - mg \sin \theta \leq \mu N$$

解出 ω 的范围为

$$\sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta + \mu \sin^2 \theta)}} \leq \omega \leq \sqrt{\frac{g(\mu \cos \theta + \sin \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta - \mu \sin^2 \theta)}}$$

注意, 当 $\mu \geq \tan \theta$ 时, ω 无下限。

- 当 $\theta \geq \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

$$-f_c \cos \theta + mg \sin \theta \leq \mu N$$

且 $N \geq 0$ 。

$$N = mg \cos \theta + f_c \sin \theta \geq 0$$

解出 ω 的范围为

$$\omega \geq \sqrt{\frac{g(\sin \theta - \mu \cos \theta)}{R(\sin \theta \cos \theta + \mu \sin^2 \theta)}}$$

$$\omega \geq \sqrt{\frac{-g \cos \theta}{R \sin^2 \theta}}$$

注意, 当 $\mu > -\cot \theta$ 时, 该情况无法成立

3.

抛射质量为 m 的小球，抛射倾角为 θ ，初速度大小为 v_0 ，所受空气阻力与速度成反比，即

$$\vec{F} = -k\vec{v},$$

求小球在空气中运行的轨迹曲线。

解： 我们分解公式：

$$F_x = -kv_x = m \frac{dv_x}{dt}$$

$$F_y = -kv_y - mg = m \frac{dv_y}{dt}$$

移项得方程组：

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt$$

$$\frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = dt$$

初值为 $v_x(0) = v_0 \cos \theta, v_y(0) = v_0 \sin \theta$ 。 带入积分得：

$$\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} \int_0^t dt$$

$$\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = \int_0^t dt$$

解得：

$$v_x(t) = v_0 \cos \theta e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} + (v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

积分得位移：

$$x(t) = \int_0^t v_x(t) dt = \frac{mv_0 \cos \theta}{k} (1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(t) dt = -\frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

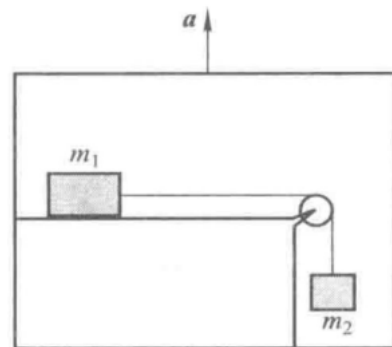
消去 t ，得轨迹方程：

$$y = \frac{m^2g}{k^2} \ln(1 - \frac{kx}{mv_0 \cos \theta}) + \frac{m}{k}(v_0 \sin \theta + \frac{mg}{k})(\frac{kx}{mv_0 \cos \theta})$$

0924 日作业:

1.43

1-43. 如习题 1-43 图所示, 在升降机内两物体质量分别为 $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.2 \text{ kg}$, 用细绳跨过滑轮连接。当升降机以加速度 $a = g/2$ 上升时, 机内和地面上的两人观察到两物体的加速度分别是多少? (略去各处的摩擦)



解: 首先考虑机内人员观察的加速度:

惯性系中考虑 $g' = \frac{3}{2}g$, 设绳中张力为 T , 由加速度约束得:

$$a'_1 = a'_2 = a'$$

由牛顿第二定律得:

$$T = m_1 a' \quad m_2 g' - T = m_2 a'$$

带入 $m_1 = 0.1 \text{ kg}$, $m_2 = 0.2 \text{ kg}$ $g = 9.8$ 解得:

$$a' = \frac{2}{3}g' = g = 9.8 \text{ m/s}^2$$

方向分别水平向右, 竖直向下。从地面观察的加速度为:

$$a_1 = \sqrt{(a')^2 + \left(\frac{1}{2}g\right)^2} = \sqrt{(9.8)^2 + (4.9)^2} = 11.7 \text{ m/s}^2$$

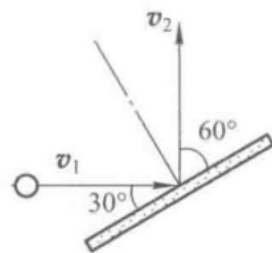
方向斜向右上方, 夹地面角度为 $\theta_1 = \arctan \frac{1}{2} = 26.6^\circ$

$$a_2 = a' - \frac{1}{2}g = 9.8 - 4.9 = 4.9 \text{ m/s}^2$$

方向竖直向下

2.3

2-3. 一质量为 50 g 的乒乓球, 以速率 $v_1 = 10 \text{ m/s}$ 飞向乒乓板, 接触板后又以速率 $v_2 = 8 \text{ m/s}$ 飞出。设乒乓球触板前后的运动方向与板的夹角分别为 30° 和 60° , 如习题 2-3 图所示。(1) 求乒乓球得到的冲量; (2) 如碰撞时间为 0.1 s, 求板施于乒乓球的平均冲力。



解:

- (1) 设乒乓球质量为 $m = 0.05 \text{ kg}$, 速度前后互相垂直, 乒乓球动量改变量为:

$$\Delta p = m\sqrt{(v_1)^2 + (v_2)^2} = m\sqrt{(10)^2 + (8)^2} = 0.64 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

则冲量 $I = \Delta p = 0.64 \text{ N} \cdot \text{s}$

- (2) 设乒乓球与拍接触时间为 $\Delta t = 0.1 \text{ s}$, 则平均作用力为:

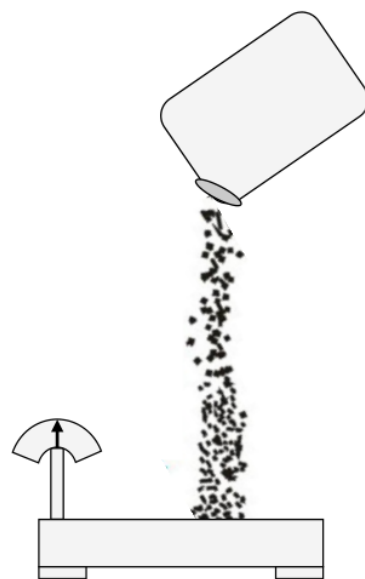
$$F = \frac{I}{\Delta t} = 6.4 \text{ N}$$

3

3.大聪明小王的实验室日常

实验室的博士生小王想称取 100g 的 NaCl 粉末。他将药品瓶口置于距离电子秤 0.5m 高的位置, 以 10 g/s 的均匀流量让粉末流下。当他看到电子秤示数达到 100g 的一瞬间将瓶口堵住。求最后留在电子秤上粉末的实际质量是多少?

注: 小王由于长年摸鱼打 LOL, 反应速度可达 0.2 s。



解： 设高度 $h = 0.5m$ 氯化钠下落速度为:

$$v = \sqrt{2gh} = 3.13m/s$$

设氯化钠质量为 m ，流量为 $\dot{m} = 10g/s$ 则落地时动量为 mv ，落地后静止动量为 0，动量改变量为 mv 。落地时间为 dt ，则

$$(N - mg)dt = \dot{m}vdt$$

当 $N = 0.98N$ 时，解得

$$m = \frac{N - \dot{m}v}{g} = 0.097kg$$

但由于小王有 0.2s 的反应速度，所以还需要加上这段时间落下的氯化钠质量

$$m' = \dot{m} * 0.2s = 0.002kg$$

再考虑空中的氯化钠质量，下落时间为 $\sqrt{\frac{2h}{g}} = 0.32s$ ，则空中氯化钠质量为

$$m'' = \dot{m} * 0.32s = 0.0032kg$$

所以总质量为

$$m_{\text{total}} = m + m' + m'' = 0.102kg$$