信物第一次作业答案

2025 年 9 月 17 日

0915 日作业

例题 1-1 补充问题：求从时刻 $t_1 = 1\text{s}$ 到时刻 $t_2 = 2\text{s}$ 之间的路程 Δs。（只需写出积分形式，不需要最终的数值结果）

解：

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2t \\
y(t) &= 6 - 2t^2 \\
\Delta s &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\
&= \int_1^2 \sqrt{4 + (-4t)^2} dt
\end{aligned}
$$

例题 1-2 补充问题：一只狗（TG）距离一个人（NS）6 m，在 t = 0 s 时刻以 5 m/s 的初速度 v0 以及 1 m/s2 的恒定加速度 a_1 向人追去，人的初速度为 0，以 a_2 的恒定加速度逃离狗。求人避免被狗追上的 a_2 最小值。

解： 设狗和人的位置分别为 x_1 和 x_2，则有

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= 5t + \frac{1}{2}a_1 t^2 \\
x_2(t) &= 6 + \frac{1}{2}a_2 t^2
\end{aligned}
$$

要避免被追上，需满足 $x_2(t) > x_1(t)$，即

$$
\begin{aligned}
6 + \frac{1}{2}a_2 t^2 &> 5t + \frac{1}{2}a_1 t^2 \\
(a_2 - a_1)t^2 - 10t + 12 &> 0
\end{aligned}
$$

令 $f(t)=(a_2-a_1)t^2-10t+12$，则 $f(t)$ 为二次函数，开口向上。要使 $f(t)>0$ 对任意 $t>0$ 成立，只需有 $\Delta<0$，即

$$\Delta=(-10)^2-4(a_2-a_1)\cdot 12<0$$

解得

$$a_2>\frac{25}{12}+a_1=\frac{37}{12}\ \mathrm{m/s^2}$$

0917 日作业

1. 例题 1-18

一电子在电场中运动，其运动学方程为

$$x=3t,\quad y=12-3t^2,$$

其中 x,y 以 m 为单位，t 以 s 为单位。计算 $t=1\,\mathrm{s}$ 时电子的切向加速度、法向加速度以及轨迹上该点处的曲率半径。

解：

$$v_x=\frac{dx}{dt}=3\,\mathrm{m/s},\quad v_y=\frac{dy}{dt}=-6t\,\mathrm{m/s}$$
$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=0\,\mathrm{m/s^2},\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=-6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$v(t)=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=\sqrt{9+36t^2}\,\mathrm{m/s}$$
$$a(t)=\sqrt{a_x^2+a_y^2}=6\,\mathrm{m/s^2}$$

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{36t}{\sqrt{9+36t^2}}\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_n=\sqrt{a^2-a_\tau^2}=\frac{18}{\sqrt{9+36t^2}}\,\mathrm{m/s^2}$$
$$\rho=\frac{v^2}{a_n}=\frac{(9+36t^2)^{3/2}}{18}\,\mathrm{m}$$

代入 $t=1\,\mathrm{s}$，得

$$\rho=\frac{(9+36)^{3/2}}{18}=\frac{45\sqrt{45}}{18}=\frac{5\sqrt{45}}{2}\,\mathrm{m}$$
$$a_\tau=\frac{36}{\sqrt{45}}=\frac{12\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{m/s^2}$$
$$a_n=\frac{18}{\sqrt{45}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}\,\mathrm{m/s^2}$$

2. 习题 1-24（相对运动）

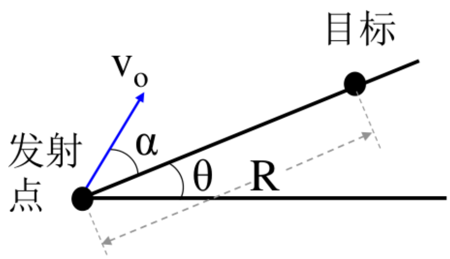
设有一架飞机从 A 处向东飞到 B 处，然后又向西飞回 A 处，飞机相对于空气的速率为 v'，空气相对于地面的速率为 v_r，A、B 之间的距离为 l，且飞机相对于空气的速率 v' 保持不变。试计算来回飞行时间：

解：

1. 空气静止时（即 $v_r = 0$）；
$$t = \frac{l}{v'} + \frac{l}{v'} = \frac{2l}{v'}$$
2. 空气速度方向向东时；
$$t = \frac{l}{v' + v_r} + \frac{l}{v' - v_r}$$
3. 空气速度方向向北时。不难发现必定有 $v' > v_r$，否则飞机无法到达 B 处。
$$t = \frac{l}{\sqrt{v'^2 - v_r^2}} + \frac{l}{\sqrt{v'^2 - v_r^2}} = \frac{2l}{\sqrt{v'^2 - v_r^2}}$$

3*

在倾角为θ的斜坡上发射一枚炮弹，目标距射点的直线距离为R。求炮弹命中目标所需的最小速度v_o和此时对应的发射仰角α。



解： 我们将 x' 轴设为沿斜坡向上，y' 轴垂直于斜坡向上。

- 重力加速度 g 的分量为：
$$a_{x'} = -g\sin\theta$$
$$a_{y'} = -g\cos\theta$$
- 根据新定义，初速度 v_0 的分量为：
$$v_{0x'} = v_0\cos\alpha$$
$$v_{0y'} = v_0\sin\alpha$$

炮弹击中目标时，

$$0 = (v_0 \sin\alpha)t - \frac{1}{2}(g\cos\theta)t^2$$

解出飞行时间 t (取 $t \neq 0$ 的解):

$$t = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g\cos\theta}$$

射程 R 是 x' 方向的位移，根据位移公式 $R = v_{0x'}t + \frac{1}{2}a_{x'}t^2$：

$$\begin{aligned}
R &= (v_0\cos\alpha)\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}\right) - \frac{1}{2}(g\sin\theta)\left(\frac{2v_0\sin\alpha}{g\cos\theta}\right)^2 \\
&= \frac{2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g\cos\theta} - \frac{2v_0^2\sin^2\alpha\sin\theta}{g\cos^2\theta} \\
&= \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}[2\sin\alpha\cos\alpha\cos\theta - 2\sin^2\alpha\sin\theta] \\
&= \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}[\sin(2\alpha)\cos\theta - (1-\cos(2\alpha))\sin\theta] \\
&= \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}[\sin(2\alpha)\cos\theta + \cos(2\alpha)\sin\theta - \sin\theta] \\
&= \frac{v_0^2}{g\cos^2\theta}[\sin(2\alpha+\theta) - \sin\theta]
\end{aligned}$$

因此，射程公式为：

$$R = \frac{v_0^2[\sin(2\alpha+\theta) - \sin\theta]}{g\cos^2\theta}$$

从射程公式中解出 v_0^2：

$$v_0^2 = \frac{gR\cos^2\theta}{\sin(2\alpha+\theta) - \sin\theta}$$

要使 v_0 最小，需要使分母 $D(\alpha) = \sin(2\alpha+\theta) - \sin\theta$ 最大。这当且仅当 $\sin(2\alpha+\theta)$ 取其最大值 1 时发生。令 $\sin(2\alpha+\theta) = 1$，则此时的最优角度满足：

$$2\alpha + \theta = \frac{\pi}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$

将分母的最大值 $(1 - \sin\theta)$ 代入，得到最小初速度的平方 $(v_0^2)_{\min}$：

$$\begin{aligned}
(v_0^2)_{\min} &= \frac{gR\cos^2\theta}{1-\sin\theta} \\
&= \frac{gR(1-\sin^2\theta)}{1-\sin\theta} \\
&= \frac{gR(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}{1-\sin\theta} \\
&= gR(1+\sin\theta)
\end{aligned}$$

所以，最终答案为：

$$v_{0,\min} = \sqrt{gR(1+\sin\theta)}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$$