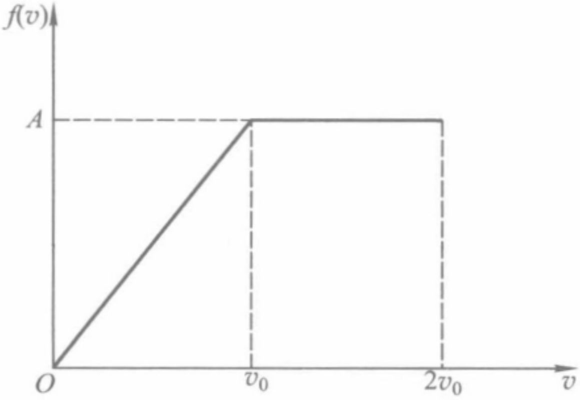
信物第七次作业答案

2025 年 11 月 25 日

11.17 日作业:

5-13

5-13　设某系统中 N 个粒子的速率分布曲线如习题 5-13 图所示. 试求:(1) 常量 A 以 v_0 表示;(2) 速率在 $0\sim v_0$ 之间,$1.5v_0\sim 2v_0$ 之间的粒子数;(3) 粒子的平均速率;(4) 速率在 $0\sim v_0$ 之间粒子的平均速率.



习题 5-14 图

解:

- (1) 归一化得:

$$\frac{3}{2}Av_0 = 1 \Rightarrow A = \frac{2}{3v_0}$$

- (2) 由图像得:

$$P_1 = \frac{1}{3}, \quad p_2 = \frac{1}{3}$$

所以

$$N_1 = NP_1 = \frac{N}{3}, \quad N_2 = Np_2 = \frac{N}{3}$$

- (3) 计算平均速率：

$$\bar{v} = \int_0^{2v_0} vf(v)dv = \int_0^{v_0} \frac{2}{3v_0^2}v^2 dv + \int_{v_0}^{2v_0} \frac{2}{3v_0}v = \frac{11}{9}v_0$$

- (4) 计算得：

$$\bar{v'} = \int_0^{v_0} \frac{2}{v_0^2}v^2 dv = \frac{2}{3}v_0$$

5-14

5-14 导体中自由电子的运动类似于气体分子的运动，电子气中电子的最大速率 v_F 叫做费米速率．设导体中共有 N 个自由电子，电子的速率在 $v \sim v+dv$ 之间的概率为

$$\frac{dN}{N} = \begin{cases} \dfrac{4\pi v^2 A dv}{N} & (v_F > v > 0) \\ 0 & (v > v_F) \end{cases}$$

式中 A 为常量．(1) 由归一化条件求 A；(2) 证明电子气中电子的平均动能 $\bar{\varepsilon} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}mv_F^2\right) = \frac{3}{5}E_F$，此处 E_F 叫做费米能．

解：

- (1) 归一化得：

$$\int_0^{v_F} \frac{4\pi v^2 A dv}{N} = 1 \Rightarrow A = \frac{3N}{4\pi v_F^3}$$

- (2) 计算平均动能：

$$\bar{E} = \int_0^{v_F} \frac{1}{2}mv^2 f(v)dv = \int_0^{v_F} \frac{1}{2}mv^2 \frac{4\pi v^2 A}{N} dv = \frac{3}{5}E_F$$

5-15

5-15 求速度大小在 v_p 与 $1.01v_p$ 之间的气体分子数占总分子数的百分率．（提示：先把麦克斯韦速率分布函数改写成 $f(v_p)\Delta v = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{vp^3} e^{-v^2/v_p^2} \Delta v$）

解： 注意到

$$f(v)dv = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_p^3} e^{-v^2/v_p^2} dv$$

所以

$$N_p = N\int_{v_p}^{1.01v_p} f(v)dv = N\int_1^{1.01} \frac{4}{\sqrt{\pi}} x^2 e^{-x^2} dx \approx 0.0083N$$

题：

假设有某个系统，其允许的 7 个能级的能量值分别为 $0,\epsilon,2\epsilon,3\epsilon,4\epsilon,5\epsilon,6\epsilon$。系统有 4 个可分辨的粒子，总的能量为 $E=6\epsilon$。(1) 对这样的 4 个粒子分布到各个能级的 9 种可能的分布进行列表；(2) 求出每一宏观态分布对应的微观态数目，并计算总数目；(3) 计算在各个能级的平均粒子数。

解：

- (1) 列表如下（能级分布）：

  (1) 6,0,0,0

  (2) 5,1,0,0

  (3) 4,2,0,0

  (4) 4,1,1,0

  (5) 3,3,0,0

  (6) 3,2,1,0

  (7) 3,1,1,1

  (8) 2,2,2,0

  (9) 2,2,1,1

- (2) 微观态数目计算如下（对于可分辨粒子 $W=\dfrac{N!}{\prod n_i!}$）：

  (1) $4!/(1!3!)=4$

  (2) $4!/(1!1!2!)=12$

  (3) $4!/(1!1!2!)=12$

  (4) $4!/(1!2!1!)=12$

  (5) $4!/(2!2!)=6$

  (6) $4!/(1!1!1!1!)=24$

  (7) $4!/(1!3!)=4$

  (8) $4!/(3!1!)=4$

  (9) $4!/(2!2!)=6$

  总数目为：$4+12+12+12+6+24+4+4+6=84$

- (3) 各能级平均粒子数计算如下：

$$\bar{n}_0 = \frac{4\times3+12\times2+12\times2+12\times1+6\times2+24\times1+4\times0+4\times1+6\times0}{84} = 1.33$$

$$\bar{n}_1 = \frac{4\times0+12\times1+12\times0+12\times2+6\times0+24\times1+4\times3+4\times0+6\times2}{84} = \frac{84}{84} = 1.00$$

类似地计算其他能级，结果为：

$$\bar{n}_2 = \frac{60}{84} = \frac{5}{7} \approx 0.71, \quad \bar{n}_3 = \frac{40}{84} = \frac{10}{21} \approx 0.48$$

$$\bar{n}_4 = \frac{24}{84} = \frac{2}{7} \approx 0.29, \quad \bar{n}_5 = \frac{12}{84} = \frac{1}{7} \approx 0.14, \quad \bar{n}_6 = \frac{4}{84} = \frac{1}{21} \approx 0.05$$

11.18 日作业:

题 1

已知某一个系统中允许的能量（能级）可以写为 $E_n = (n+\frac{1}{2})\epsilon_0$，其中 n=0,1,2,...，$\epsilon_0$ 为常数。若系统的温度足够低（假设服从 MB 分布），(1) 求系统处于第一激发态（n=1）与基态（n=0）的概率之比；(2) 如果系统仅可能占据基态和第一激发态，计算平均能量。

解:

- (1) 概率之比为：

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{e^{-3\epsilon_0/2kT}}{e^{-\epsilon_0/2kT}} = e^{-\epsilon_0/kT}$$

- (2) 计算平均能量：

$$\bar{E} = \frac{E_0P_0+E_1P_1}{P_0+P_1} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon_0 e^{-\epsilon_0/2kT} + \frac{3}{2}\epsilon_0 e^{-\epsilon_0/kT}}{e^{-\epsilon_0/2kT}+e^{-\epsilon_0/kT}} = \epsilon_0\frac{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}e^{-\epsilon_0/kT}}{1+e^{-\epsilon_0/kT}}$$

题 2

有 N 个质量为 m 的单原子分子组成的理想气体，它们被装在边长为 L 的立方容器内，其上下底与地球表面平行，设在容器的范围内重力场是均匀的，若气体处于温度为 T 的平衡态，服从 MB 分布，计算：(1) 分子的平均动能；(2) 分子的平均势能。

解:

- (1) 平均动能为：

$$\bar{E_k} = \frac{3}{2}kT$$

- (2) 平均势能为：

$$\bar{E_p} = mg\bar{h} = mg\frac{\int_0^L he^{-mgh/kT}dh}{\int_0^L e^{-mgh/kT}dh} = \frac{kT-(Lmg+kT)e^{-mgL/kT}}{1-e^{-mgL/kT}}$$

题 3

有 N 个单原子分子组成的理想气体，每个分子只能处于能量为 ϵ_1 和 ϵ_2 的两个能级之一，且 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ，(1) 计算平均能量，并讨论低温和高温两种极限的情况；(2) 画出平均能量-温度的曲线的大致形状。

解：

- (1) 平均能量为：

$$\bar{E} = \frac{\epsilon_1 e^{-\epsilon_1/kT} + \epsilon_2 e^{-\epsilon_2/kT}}{e^{-\epsilon_1/kT} + e^{-\epsilon_2/kT}} = \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{1 + e^{(\epsilon_2-\epsilon_1)/kT}}$$

  低温极限 $(T \to 0)$ 时，$\bar{E} \to \epsilon_1$；高温极限 $(T \to \infty)$ 时，$\bar{E} \to \dfrac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2}$

- (2) 如图