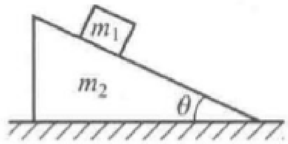
信物第二次作业答案

2025 年 9 月 22 日

0922 日作业:

1.33

1-33. 质量为 m_2 的三角形木块，倾角为 θ，放在光滑的水平面上。另有一质量为 m_1 的滑块放在斜面上，如习题 1-33 图所示。如果接触面的摩擦忽略不计。试求两物体的加速度。



解： 设 m_2 的加速度为 a_2，m_1 相对于 m_2 的加速度为 a_1'。

水平方向动量守恒：

$$m_2 a_2 = m_1 * (a_1' \cos\theta - a_2)$$

同时，以 m_2 为参考系，对 m_1 的受力分析可得：

$$a_2 \cos\theta + g \sin\theta = a_1'$$

联立以上两式，解得

$$a_2 = \frac{m_1 g \sin\theta \cos\theta}{m_2 + m_1 \sin^2\theta}$$

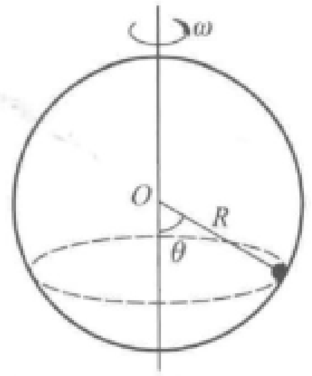
$$a_1' = \frac{(m_1 + m_2) g \sin\theta}{m_2 + m_1 \sin^2\theta}$$

所以对于 a_1，我们有

$$a_1 = \sqrt{(a_1' \sin\theta)^2 + (a_2 - a_1' \cos\theta)^2} = \frac{m_2 g \sin\theta}{m_2 + m_1 \sin^2\theta}$$

1.38

1-38. 如习题 1-38 图所示，半径为 R 的空心球壳绕竖直直径作匀速转动，其内壁有一质量为 m 的小物体，随球壳在一定的水平面内作匀速圆周运动。小物体与内壁间的摩擦因素为 μ。试求小物体能稳定在该平面转动的转速范围。



习题 1-38 图

解： 设小球的质量为 m，半径为 R，离心力为 f_c，法向力为 N，摩擦系数为 μ，重力加速度为 g，小球与球从下到上的夹角为 θ。则离心力为：

$$f_c = m\omega^2 R\sin\theta$$

平衡方程：

$$mg\cos\theta + f_c\sin\theta = N$$

- 当 $\theta < \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

  $$-\mu N \le f_c\cos\theta - mg\sin\theta \le \mu N$$

  解出 ω 的范围为

  $$\sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{R(\sin\theta\cos\theta + \mu\sin^2\theta)}} \le \omega \le \sqrt{\frac{g(\mu\cos\theta + \sin\theta)}{R(\sin\theta\cos\theta - \mu\sin^2\theta)}}$$

  注意，当 $\mu \ge \tan\theta$ 时，ω 无下限。

- 当 $\theta \ge \frac{\pi}{2}$ 时, 我们有如下方程

  $$-f_c\cos\theta + mg\sin\theta \le \mu N$$

  且 $N \ge 0$。

  $$N = mg\cos\theta + f_c\sin\theta \ge 0$$

  解出 ω 的范围为

  $$\omega \ge \sqrt{\frac{g(\sin\theta - \mu\cos\theta)}{R(\sin\theta\cos\theta + \mu\sin^2\theta)}}$$

  $$\omega \ge \sqrt{\frac{-g\cos\theta}{R\sin^2\theta}}$$

  注意，当 $\mu > -\cot\theta$ 时，该情况无法成立

3.

抛射质量为 m 的小球，抛射倾角为 θ，初速度大小为 v_0，所受空气阻力与速度成反比，即

$$\vec{F} = -k\vec{v},$$

求小球在空气中运行的轨迹曲线。

解： 我们分解公式：

$$F_x = -kv_x = m\frac{dv_x}{dt}$$

$$F_y = -kv_y - mg = m\frac{dv_y}{dt}$$

移项得方程组：

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}dt$$

$$\frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = dt$$

初值为 $v_x(0) = v_0\cos\theta, v_y(0) = v_0\sin\theta$。带入积分得：

$$\int_{v_x(0)}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt$$

$$\int_{v_y(0)}^{v_y(t)} \frac{dv_y}{-\frac{k}{m}v_y - g} = \int_0^t dt$$

解得：

$$v_x(t) = v_0\cos\theta e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} + (v_0\sin\theta + \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t}$$

积分得位移：

$$x(t) = \int_0^t v_x(t)dt = \frac{mv_0\cos\theta}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

$$y(t) = \int_0^t v_y(t)dt = -\frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}(v_0\sin\theta + \frac{mg}{k})(1 - e^{-\frac{k}{m}t})$$

消去 t，得轨迹方程：

$$y = \frac{m}{k}(v_0\sin\theta + \frac{mg}{k})\ln(1 - \frac{kx}{mv_0\cos\theta}) + \frac{mgx}{kv_0\cos\theta}$$