信物第四次作业答案

2025 年 10 月 27 日

10.20 日作业:

1. 习题2-32

2-32. 质量为 7.2×10^{-23} kg、速度为 6.0×10^{7} m/s 的粒子 A,与另一个质量为其一半而静止的粒子 B 相碰,假定此碰撞是完全弹性碰撞,碰撞后粒子 A 的速率为 5×10^{7} m/s,求:(1) 粒子 B 的速率及偏转角;(2) 粒子 A 的偏转角。

解: 设粒子 A 的质量为 m_A, 粒子 B 的质量为 m_B。根据题意:

- $m_A = 7.2 \times 10^{-23}$ kg
- $m_B = \frac{1}{2}m_A = 3.6 \times 10^{-23}$ kg, 即 $\frac{m_A}{m_B} = 2$
- 初始速度 $v_A = 6.0 \times 10^7$ m/s, $v_B = 0$
- 碰撞后速率 $v'_A = 5.0 \times 10^7$ m/s

设 v'_B 为粒子 B 碰撞后的速率, θ_A 和 θ_B 分别为粒子 A 和 B 的偏转角。

因为碰撞是完全弹性的, 所以系统动能守恒:

$$\frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2 = \frac{1}{2}m_A (v'_A)^2 + \frac{1}{2}m_B (v'_B)^2$$

解得

$$v'_B = \sqrt{22} \times 10^7 \text{ m/s} \approx 4.69 \times 10^7 \text{ m/s}$$

设 $\vec{v}_A$ 的方向为 x 轴正方向。根据动量守恒定律: $m_A\vec{v}_A = m_A\vec{v}'_A + m_B\vec{v}'_B$。移项得:

$$m_B\vec{v}'_B = m_A\vec{v}_A - m_A\vec{v}'_A$$

将此向量方程两边各自作点积 (取平方):

$$
\begin{aligned}
(m_B\vec{v}'_B)\cdot(m_B\vec{v}'_B) &= (m_A\vec{v}_A - m_A\vec{v}'_A)\cdot(m_A\vec{v}_A - m_A\vec{v}'_A)\\
m_B^2(v'_B)^2 &= m_A^2v_A^2 - 2m_A^2(\vec{v}_A\cdot\vec{v}'_A) + m_A^2(v'_A)^2\\
m_B^2(v'_B)^2 &= m_A^2(v_A^2 + (v'_A)^2 - 2v_Av'_A\cos(\theta_A))
\end{aligned}
$$

我们从动能守恒中已知 $m_B(v'_B)^2 = m_A(v_A^2-(v'_A)^2)$, 所以 $m_B^2(v'_B)^2 = m_B\cdot m_A(v_A^2-(v'_A)^2)$。令两个 $m_B^2(v'_B)^2$ 的表达式相等:

$$
m_Am_B(v_A^2 - (v'_A)^2) = m_A^2(v_A^2 + (v'_A)^2 - 2v_Av'_A\cos(\theta_A))
$$

两边同除以 m_A:

$$
m_B(v_A^2 - (v'_A)^2) = m_A(v_A^2 + (v'_A)^2 - 2v_Av'_A\cos(\theta_A))
$$

代入 $m_B = m_A/2$:

$$
\frac{m_A}{2}(v_A^2 - (v'_A)^2) = m_A(v_A^2 + (v'_A)^2 - 2v_Av'_A\cos(\theta_A))
$$

两边同除以 m_A 并展开:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}v_A^2 - \frac{1}{2}(v'_A)^2 &= v_A^2 + (v'_A)^2 - 2v_Av'_A\cos(\theta_A)\\
2v_Av'_A\cos(\theta_A) &= (v_A^2 - \frac{1}{2}v_A^2) + ((v'_A)^2 + \frac{1}{2}(v'_A)^2)\\
2v_Av'_A\cos(\theta_A) &= \frac{1}{2}v_A^2 + \frac{3}{2}(v'_A)^2\\
\cos(\theta_A) &= \frac{v_A^2 + 3(v'_A)^2}{4v_Av'_A}
\end{aligned}
$$

代入速度值 (10^7 因子可以消去):

$$
\begin{aligned}
\cos(\theta_A) &= \frac{(6.0)^2 + 3\times(5.0)^2}{4\times 6.0\times 5.0}\\
&= \frac{36 + 3\times 25}{120} = \frac{36+75}{120}\\
&= \frac{111}{120} = \frac{37}{40} = 0.925\\
\theta_A &= \arccos(0.925) \approx 22.33^\circ
\end{aligned}
$$

根据 x 轴和 y 轴的动量守恒:

$$
\begin{aligned}
\text{x-轴:}\quad m_Av_A &= m_Av'_A\cos(\theta_A) + m_Bv'_B\cos(\theta_B)\\
\text{y-轴:}\quad 0 &= m_Av'_A\sin(\theta_A) + m_Bv'_B\sin(\theta_B)
\end{aligned}
$$

从 y 轴方程可得: $m_Bv'_B\sin(\theta_B) = -m_Av'_A\sin(\theta_A)$ 从 x 轴方程可得: $m_Bv'_B\cos(\theta_B) = m_Av_A - m_Av'_A\cos(\theta_A)$

代入数值 (10^7 因子可以消去):

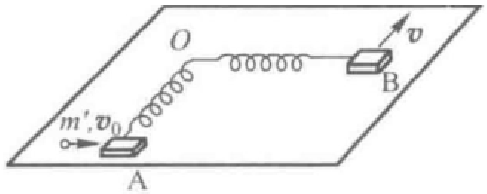
$$\tan(\theta_B) \approx -1.3818; \quad \theta_B = \arctan(-1.3818) \approx -54.09°$$

(负号表示与粒子 A 偏向相反的一侧)

综上

1. 粒子 B 的速率 $v'_B \approx 4.69 \times 10^7$ m/s, 偏转角为 54.1°。
2. 粒子 A 的偏转角 $\theta_A \approx 22.3°$。

0.1 习题 2-48



习题 2-48 图

2-48. 如习题 2-48 图所示，在光滑水平桌面上，有一质量为 m 的物体，物体与一轻弹簧相连，弹簧的另一端固定在桌面上 O 点，其劲度系数为 k。一质量为 m' 的子弹以速度 $\boldsymbol{v}_0$ 射向物体，并嵌入物体内。如开始时弹簧的长度为原长 l_0，子弹射入后，物体从 A 点运动到 B 点，此时弹簧长度为 l。求物体在 B 点的速度(大小及方向)。

解: 设物理在 A 点的速度为 v_A, 则

$$(m+m')v_A = m'v_0$$

注意到角动量守恒，设在 B 点的速度为 v_r, v_τ，则有

$$(m+m')v_A l_0 = (m+m')v_\tau l$$

解得

$$v_\tau = \frac{l_0}{l} \cdot \frac{m'}{m+m'} v_0$$

由能量守恒:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - k(l-l_0)^2/(m+m')}$$

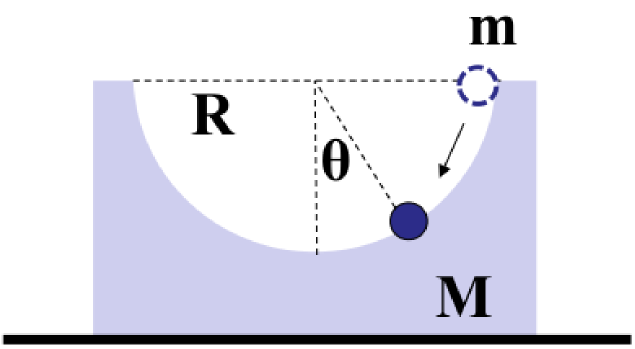
所以：

$$v_r = \sqrt{v_B^2 - v_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{m'}{m+m'}v_0\right)^2 - \frac{k(l-l_0)^2}{m+m'} - \left(\frac{l_0}{l} \cdot \frac{m'}{m+m'}v_0\right)^2}$$

我们求出了 v_r 和 v_τ，所以偏转角为

$$\theta = \arctan\frac{v_\tau}{v_r} = \arctan\frac{\frac{l_0}{l} \cdot \frac{m'}{m+m'}v_0}{\sqrt{\left(\frac{m'}{m+m'}v_0\right)^2 - \frac{k(l-l_0)^2}{m+m'} - \left(\frac{l_0}{l} \cdot \frac{m'}{m+m'}v_0\right)^2}}$$

地面上放置静止的滑块，质量为M，上部有界面为半圆，半径为R的凹槽。质量为m的小球从半圆凹槽的一端的最高点从静止开始下滑，忽略过程中各种摩擦阻力。



当小球处于如图θ角的位置时，求（1）滑块M的速度以及（2）小球与滑块之间的压力N

3*

解:

解: 设地面为惯性参考系, y 轴竖直向上, x 轴水平向右。设小球 m 运动到 θ 角时, 滑块 M 的速度为 $\vec{V} = V\hat{i}$ (向右, $V > 0$)。小球 m 的速度为 $\vec{v}_m = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$。

1. 水平方向动量守恒系统初始水平动量为 0。

$$mv_x + MV = 0 \implies v_x = -\frac{M}{m}V$$

2. 速度约束小球 m 的坐标为 $x_m = x_M + R\sin\theta$, $y_m = R - R\cos\theta$。对时间求导 (注意 θ 从 90° 减小, $\dot{\theta} < 0$):

$$v_x = \dot{x}_m = \dot{x}_M + R\cos\theta\cdot\dot{\theta} = V + R\cos\theta\cdot\dot{\theta}$$

$$v_y = \dot{y}_m = R\sin\theta\cdot\dot{\theta}$$

联立 v_x 和 v_y 消去 $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} = \frac{v_y}{R\sin\theta}$$

$$v_x = V + R\cos\theta\left(\frac{v_y}{R\sin\theta}\right) \implies v_x = V + v_y\cot\theta$$

代入 $v_x = -MV/m$:

$$-\frac{M}{m}V = V + v_y\cot\theta \implies v_y = -V\left(1 + \frac{M}{m}\right)\tan\theta = -V\left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\theta$$

3. 机械能守恒小球 m 下落高度为 $R\cos\theta$。

$$mgR\cos\theta = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2)$$

带入解得

$$V=\sqrt{\frac{2m^2gR\cos^3\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$$

在惯性系中, 对小球 m 应用牛顿第二定律 $\sum\vec{F}=m\vec{a}$。法向力 N 指向圆心 (左上方), $\vec{N}=-N\sin\theta\hat{i}+N\cos\theta\hat{j}$。重力 $\vec{F}_g=-mg\hat{j}$。x 方向:

$$-N\sin\theta=ma_x=m\dot{v}_x$$

y 方向:

$$N\cos\theta-mg=ma_y=m\dot{v}_y$$

由 x 方向方程:

$$N=-\frac{ma_x}{\sin\theta}$$

其中 $a_x=\dot{v}_x=\dfrac{d}{dt}\left(-\dfrac{M}{m}V\right)=-\dfrac{M}{m}\dot{V}$。令 $A=\dot{V}$ (滑块 M 的加速度)。

$$N=-\frac{m(-\frac{M}{m}A)}{\sin\theta}=\frac{MA}{\sin\theta}$$

由 y 方向方程:

$$N=\frac{m(g+a_y)}{\cos\theta}$$

联立两式:

$$\frac{MA}{\sin\theta}=\frac{m(g+a_y)}{\cos\theta}\implies MA\cos\theta=mg\sin\theta+ma_y\sin\theta$$

我们需要 $a_y=\dot{v}_y$。$a_y=\dfrac{dv_y}{dt}=\dfrac{d}{dt}\left[-V\left(\dfrac{M+m}{m}\right)\tan\theta\right]$ $a_y=-\left(\dfrac{M+m}{m}\right)\left[\dot{V}\tan\theta+V\sec^2\theta\cdot\dot{\theta}\right]$

代入 $A=\dot{V}$ 和 $\dot{\theta}=\dfrac{v_y}{R\sin\theta}=\dfrac{-V(M+m)\tan\theta}{mR\sin\theta}=-\dfrac{V(M+m)}{mR\cos\theta}$

$$a_y=-\left(\frac{M+m}{m}\right)\left[A\tan\theta+V\frac{1}{\cos^2\theta}\left(-\frac{V(M+m)}{mR\cos\theta}\right)\right]$$

$$a_y=-A\left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\theta+\frac{V^2(M+m)^2}{m^2R\cos^3\theta}$$

将 V^2 的结果代入第二项: 第二项 $=\dfrac{\left[\frac{2m^2gR\cos^3\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}\right](M+m)^2}{m^2R\cos^3\theta}=\dfrac{2g(M+m)}{M+m\sin^2\theta}$

$$a_y=-A\left(\frac{M+m}{m}\right)\tan\theta+\frac{2g(M+m)}{M+m\sin^2\theta}$$

代入 $MA\cos\theta=mg\sin\theta+ma_y\sin\theta, N=\dfrac{MA}{\sin\theta}$ 解得:

$$N=\frac{M}{\sin\theta}\left[\frac{mg\sin\theta\cos\theta(3M+2m+m\sin^2\theta)}{(M+m\sin^2\theta)^2}\right]$$

综上：

$$V = \sqrt{\frac{2m^2 gR\cos^3\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$$

$$N = \frac{M}{\sin\theta}\left[\frac{mg\sin\theta\cos\theta(3M+2m+m\sin^2\theta)}{(M+m\sin^2\theta)^2}\right]$$

10.22 日作业:

0.2 习题 3-1

3-1. 一飞轮直径为 0.30 m，质量为 5.00 kg，边缘绕有绳子，现用恒力拉绳子的一端，使其由静止均匀地加速，经 0.50 s 转速达 10 r/s。假定飞轮可看作实心圆柱体，求：(1) 飞轮的角加速度及在这段时间里转过的转数；(2) 拉力及拉力所做的功；(3) 拉动后 10 s 时飞轮的角速度及轮边缘上一点的速度和加速度。

解：

- (1) 设角加速度 β，则有

$$\beta = \frac{10\cdot 2\pi}{0.5} = 40\pi\mathrm{rad/s}^2$$

  转过的圈数为：

$$N = \frac{1}{2}\cdot\frac{\beta t^2}{2\pi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{40\pi\cdot(0.5)^2}{2\pi} = 2.5$$

- (2) 设拉力为 F, 飞轮的转动惯量为 I，则有

$$F\cdot r = I\cdot\beta$$

$$I = \frac{1}{2}mr^2$$

  带入 $r = 0.15m, m = 5kg$，解得

$$I = 0.056kg\cdot m^2 F = 47.12N$$

  拉力做功为

$$W = \frac{1}{2}I\omega^2 = 111J$$

- (3) 不难发现，$10s$ 时的角速度为

$$\omega = \beta t = 40\pi\cdot 10 = 400\pi\mathrm{rad/s}$$

边缘上一点的线速度为

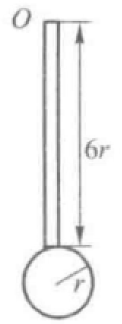
$$v = \omega r = 400\pi \cdot 0.15 = 60\pi m/s$$

加速度为:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \frac{(60\pi)^2}{0.15} = 236870.51 m/s^2 a_\tau = \beta r = 40\pi \cdot 0.15 = 18.85 m/s^2$$

习题 3-8

3-8. 如习题 3-8 图所示，钟摆由一根均匀细杆和匀质圆盘构成，圆盘的半径为 r，质量为 4 m，细杆长为 $6r$，质量为 m，试求这钟摆对端点 O 轴的转动惯量。

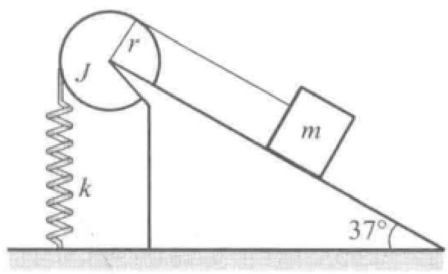


解： 叠加即可

$$I_O = \frac{1}{3} m (6r)^2 + \frac{1}{2} 4mr^2 + 4m(6r)^2 = 158mr^2$$

习题 3-13

3-13. 如习题3-13图所示，滑轮的转动惯量为$J=0.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，半径$r=30\ \mathrm{cm}$，弹簧的劲度系数 $k=20\ \mathrm{N/m}$，重物的质量$m=2.0\ \mathrm{kg}$。当此滑轮-重物系统从静止开始启动，开始时弹簧没有伸长。如摩擦可忽略，问物体能沿斜面滑下多远？当物体沿斜面滑下1.00 m时，它的速率有多大？



习题 3-13 图

解： 依题意，滑轮与绳子之间无相对滑动，设物体速度为 v, 滑轮角速度为 ω，则有

$$v = r\omega$$

由能量守恒:

$$mgl\cdot\frac{3}{5}=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2+\frac{1}{2}kl^2$$

当 $v=0$ 时，带入解得

$$l_{max}=1.18m$$

带入 $l=1.00m$, 解得

$$v=0.68m/s$$