# 第一次习题课答案

VioletHan

2025 年 9 月 15 日

## 题 1：略

## 题 2：证明存在正无理数 $a, b$ 使得 $a^b$ 是有理数

*证明.* 我们考虑数 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$。该数只可能是有理数或无理数。

- **情况一**：若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为有理数。

  成立。

- **情况二**：若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为无理数。

  我们取 $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$。则 $a, b$ 均为正无理数。我们有：

  $$a^b = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

  成立。

综上所述，无论 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是有理数还是无理数，总能找到满足条件的正无理数 $a, b$ 使得 $a^b$ 是有理数。

□

## 题 3：证明 $\lim_{n\to\infty} \sin n$ 不存在

*证明.* 我们证明该数列的上极限不等于下极限。

- 取子序列 $\{n_k\}$ 满足 $n_k$ 接近 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$。对于该子序列，$\lim_{k\to\infty} \sin(n_k) = 1$。即 $sup\{\sin n\} = 1$ （注意，$n_k$ 为正整数，因此不能取其为 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$）

  因此，$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sin n = 1$。

- 我们也总能找到子序列 $\{n_p\}$ 使得 $n_p$ 接近 $\frac{3\pi}{2}+2p\pi$。对于该子序列,$\lim_{p\to\infty} \sin(n_p) = -1$。即 $inf\{\sin n\} = -1$ 因此，$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sin n = -1$。

由于 $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sin n = 1 \neq -1 = \underline{\lim}_{n\to\infty} \sin n$，故极限不存在。

□

## 题 4：证明数列 $a_n = \frac{1}{\sin(cn\pi)}$ 无界

*证明.* 要证数列 $\{a_n\}$ 无界，只需证其分母 $|\sin(cn\pi)|$ 可以任意接近于 0。

即证：对于任意无理数 $c$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，存在 $k_n, N \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$|cn - k_n| < \frac{1}{N}$$

我们取 $k_n = \lfloor cn \rfloor$，则 $cn - k_n = \{cn\}$，并且将区间 $[0, 1)$ 等分为 $N$ 份，得到 $N$ 个子区间：

$$\left[0, \frac{1}{N}\right), \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \ldots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$$

随后我们取 $n = 1, 2, \ldots, N+1$，则有 $N+1$ 个数 $\{c\}, \{2c\}, \ldots, \{(N+1)c\}$ 落在上述 $N$ 个子区间中。

根据鸽笼原理，必然存在 $i, j$ $(1 \le i < j \le N+1)$ 使得 $\{ci\}, \{cj\}$ 落在同一子区间中。即：

$$|\{cj\} - \{ci\}| < \frac{1}{N}$$

带入化简可得：

$$|c(j-i) - (k_j - k_i)| < \frac{1}{N}$$

令 $n = j - i$，$k_n = k_j - k_i$，则 $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ 且 $k_n \in \mathbb{Z}$。因此对于任意 $N$，都存在 $n, k_n$ 使得 $|cn - k_n| < \frac{1}{N}$。

□

## 题 5：

该命题为真。若 $\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$ 且 $\lim_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。

*证明.* 根据极限定义，对任意 $\epsilon > 0$：

- 存在 $N_1$，当 $k > N_1$ 时，有 $|a_{2k-1} - a| < \epsilon$。
- 存在 $N_2$，当 $k > N_2$ 时，有 $|a_{2k} - a| < \epsilon$。

我们取 $N = \max\{2N_1 + 1, 2N_2\}$。当 $n > N$ 时：

- 若 $n$ 为奇数，则 $n = 2m-1$。$n > 2N_1 + 1 \implies 2m - 1 > 2N_1 + 1 \implies m > N_1 + 1$。此时 $|a_n - a| = |a_{2m-1} - a| < \epsilon$。
- 若 $n$ 为偶数，则 $n = 2m$。$n > 2N_2 \implies 2m > 2N_2 \implies m > N_2$。此时 $|a_n - a| = |a_{2m} - a| < \epsilon$。

综上，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 $N$，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \epsilon$ 恒成立。故 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$。 □

# 题 6：

解：

- **第一个命题**：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+\cdots+a_np_n}{p_1+\cdots+p_n}=a$ **不成立**

  （根据 Stolz 定理，该命题成立要求 $\sum p_n$ 发散。若 $\sum p_n$ 收敛，则结论不一定成立。）

  **反例**：令 $p_n=(\frac{1}{2})^n$，则 $\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i}=0$，且 $\sum_{n=1}^\infty p_n=1$ 收敛。令 $a_1=1,a_n=2$ 对于 $n\geq 2$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=2=a$。此时极限为：

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum a_kp_k}{\sum p_k}=\frac{a_1p_1+\sum_{k=2}^\infty a_kp_k}{1}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{k=2}^\infty(\frac{1}{2})^k=0.5+2\cdot 0.5=1.5\neq a$$

- **第二个命题**：$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$ **成立**

  令 $S_n=\sum_{i=1}^n p_i$，$y_n=a_n-a$, 则 $\lim_{n\to\infty}y_n=0$。

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+a_2p_{n-1}+\cdots+a_np_1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(y_1+a)p_n+(y_2+a)p_{n-1}+\cdots+(y_n+a)p_1}{S_n}$$

  $$=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{y_1p_n+y_2p_{n-1}+\cdots+y_np_1}{S_n}\right)=a+\lim_{n\to\infty}\frac{y_1p_n+y_2p_{n-1}+\cdots+y_np_1}{S_n}$$

  不妨设 $a=0$，则只需证

  $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}=0$。

  注意到以下不等式：

  $$0\leq\left|\sum_{i=1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|+\left|\sum_{i=N+1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|$$

  $$\leq\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|\cdot\sum_{i=N+1}^n\frac{p_{n-i+1}}{S_n}\leq\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|$$

  再注意到：

  $$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{i=1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\leq\sup_{i\geq N+1}|a_i|$$

  取 $N\to\infty$，由于 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$，故 $\lim_{N\to\infty}\sup_{i\geq N+1}|a_i|\to 0$。

  则

  $$\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|\to 0^+$$

  因此 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}=0$ ，从而 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$ 成立。

## 题 7：了解常见函数增长速度的阶次

略，得到以下结论：

$$\begin{aligned}\ln^c n &= o(n^b)\\ n^b &= o(a^n)\\ a^n &= o(n!)\\ n! &= o(n^n)\end{aligned}$$

## 题 8：关于两个多项式 $p(n)$ 与 $q(n)$ 的商的极限

**解：** 设 $p(n) = a_s n^s + \cdots + a_0$ 且 $q(n) = b_t n^t + \cdots + b_0$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)} \overset{\text{洛}}{=} \begin{cases} 0 & \text{若} s<t \\ \frac{a_s}{b_t} & \text{若} s=t \\ \infty & \text{若} s>t \end{cases}$$

## 题 9：等价函数替换

**解：** 若 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 1$，则 $f(n) = g(n) + o(g(n))$。

替换规则为：乘除法中可以替换，但加减法中不可随意替换。

## 题 10：证明 $e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

**解：** 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 且 $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

- 证明. $e \le S$

  根据二项式定理展开 $e_n$：

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k}\\ &\le \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = S_n \end{aligned}$$

  对 $e_n \le S_n$ 两边取极限，得 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} S_n = S$。 □

- 证明. $e \geq S$

  对于任意固定的 $m$，我们有 $S_m = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!}$。

  考虑 $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$ 的前 m+1 项，则有

  $$e_n > 2 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!n^m}$$

  保持 $m$ 固定，令 $n \to \infty$，则不等式右侧趋向于 $S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$。因此 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq S_m$。由于该式对任意 $m$ 成立，令 $m \to \infty$，我们得到 $e \geq \lim_{m\to\infty} S_m = S$。

  □

综上，我们有 $e \leq S$ 且 $e \geq S$，因此 $e = S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$。

## 题 11：证明 $e$ 是无理数

证明. 假设 $e$ 是有理数，则存在正整数 $p, q$ 使得 $e = \frac{p}{q}$。同时，我们有 $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$。

注意到 $2 < e < 3$，因此 $p > q > 0$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} = e - 2 = \frac{p-2q}{q} < 1$。

我们在等式两边同时乘上 $q!$，得到：

$$(p-2q)(q-1)! = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=2}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

其中 $(p-2q)(q-1)!, \sum_{k=2}^{q} \frac{q!}{k!}$ 是整数。

显然 $q \geq 2$, 所以我们有：

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} < e - 2 < 1$$

显然整数无法等于一个小数，假设不成立，因此 $e$ 是无理数。

□