第八次习题课答案

VioletHan

2025 年 11 月 4 日

8.2.1 极限计算

题 136.

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n}=0$$

证明. 考虑斯特林公式

$$n!\sim\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

则

$$\frac{2^n n!}{n^n}\sim\frac{2^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n}=\sqrt{2\pi n}\left(\frac{2}{e}\right)^n=0$$

□

题 137.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

解： 显然为 0

题 138.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{-1}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}$$

解： 由对称性，先考虑 $x\in(0,1]$ 的部分

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{0}^{\delta}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx+\int_{\delta}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}$$

对于第二项，有

$$0\le\int_{\delta}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx\le\int_{\delta}^{1}\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^n\,dx=(1-\delta)\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^n\to 0$$

因此只需考虑第一项

$$\int_{0}^{\delta}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx=\int_{0}^{\delta}\mathrm{e}^{n\ln\frac{\sin x}{x}}\,dx=\int_{0}^{\delta}\mathrm{e}^{n(-\frac{x^2}{6})}\,dx$$

由 δ 的任意性，有

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{-1}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(2\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{n(-\frac{x^2}{6})}\,dx)^{1/n}$$

计算得

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{6\pi}{n}})^{1/n}=1$$

题 139

若 $f(x)$ 以 T 为周期，且在 $\mathbb{R}$ 上可积，求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(t)\,dt$$

证明. 设 $x=nT+\delta$，其中 $n=\lfloor\frac{x}{T}\rfloor$，$\delta\in[0,T)$，则

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{nT+\delta}\left(n\int_{0}^{T}f(t)\,dt+\int_{0}^{\delta}f(t)\,dt\right)$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积，故 $\int_{0}^{T}f(t)\,dt$ 存在有限值，且 $\int_{0}^{\delta}f(t)\,dt$ 有界，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n\int_0^T f(t)\,dt+\int_0^\delta f(t)\,dt}{nT+\delta}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(t)\,dt$$

□

题 140

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，求证

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = f(b)-f(a)$$

证明. 由 h 的任意性，有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{a+h} + \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt$$

$$+\int_{a+h}^{a+2h} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt + \cdots + \lim_{h\to 0}\int_{b-h}^{b} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt$$

我们改变积分变量, 得到

$$= \lim_{h\to 0}\int_a^{a+h} \frac{f(t+b-a)-f(t)}{h}\,dt$$

由积分中值定理

$$= \lim_{h\to 0}[f(c+b-a)-f(c)] = f(b)-f(a)$$

□

8.2.2 积分中值定理

题 142

若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx = \int_0^\pi f(x)\cos x\,dx = 0$$

证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点

证明. 若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则 $f(x)$ 恒为正或恒为负，故

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx > 0 \quad 或 \quad \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx < 0$$

矛盾，故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有一个零点。设该零点为 c_1，则在 $(0,c_1)$ 或 (c_1,π) 上 $f(x)$ 恒为正或恒为负，

$$\int_0^{c_1} f(x)\cos x\,dx = f(\xi_1)\sin c_1 \quad \text{and} \quad \int_{c_1}^{\pi} f(x)\cos x\,dx = f(\xi_2)(-\sin c_1)$$

不难发现，和式非负，因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点。

□

题 143

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续非负且以 2π 为周期，计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx$$

解： 置 $y=nx$，则有

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f(\frac{y}{n})g(y)\,dy$$

做变量替换得：

$$=\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{n}f(\frac{y+2k\pi}{n})]g(y)\,dy$$

将内部转化为定积分的黎曼和，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\cdot g(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\cdot\int_0^{2\pi} g(y)\,dy$$

题 144

若 $f(x)$ 以 T 为周期，在 $\mathbb{R}$ 上连续，假设其满足

$$\int_0^T f(x)\,dx = 0$$

证明对任何 x_0,$f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 中至少有两个零点。

证明. 由积分中值定理，存在 $c_1\in(x_0,x_0+T)$，使得

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = f(c_1)T = 0$$

因此 $f(c_1)=0$。若 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 中只有一个零点 c_1，则 $f(x)$ 在 (x_0,c_1) 或 (c_1,x_0+T) 上恒为正或恒为负，矛盾。故 $f(x)$ 在 $[x_0,x_0+T]$ 中至少有两个零点。

□

8.3.1 等式证明

题 145

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(x)f(a-x)=1$，计算

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx$$

解： 由 $f(x)f(a-x)=1$，有 $\dfrac{1}{f(x)}=f(a-x)$，因此

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx=\int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+1}\,dx$$

令 $t=a-x$，则

$$=\int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+1}\,dt$$

将两式相加，得到

$$2\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx=\int_0^a 1\,dx=a$$

因此

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx=\frac{a}{2}$$

题 146

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 证明

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}\,dx=\int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}\,dx$$

证明. 置换 $t\to x^2$，则

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}\,dx=\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt$$

注意到

$$\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt=2\cdot\int_1^{a} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt=RHS;$$

□

题 147

证明

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx=0$$

证明. 分部分项积分，得

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx=0-\int_0^{2\pi}\sin t\,dt=0$$

□

8.3.2 积分估算

题 148

证明对 $x \in [0,1]$，有

$$\ln(1+x) \le \arctan x$$

证明. 考虑函数 $f(x) = \arctan x - \ln(1+x)$，则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{x-x^2}{(1+x^2)(1+x)} \ge 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，故 $f(x) \ge 0$，即 $\ln(1+x) \le \arctan x$。

□

题 149

计算极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$$

解： 拆分：

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \int_0^\delta \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx + \int_\delta^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx$$

对于第二项，有

$$0 \le \int_\delta^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx \le \int_\delta^1 \frac{1}{(1+\delta^2)^n}\, dx = (1-\delta)\frac{1}{(1+\delta^2)^n} \to 0$$

因此只需考虑第一项，有

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \mathrm{e}^{-n\ln(1+x^2)}\, dx$$

由 δ 的任意性, 和 $\ln(1+x^2) \sim x^2$，故

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\, dx = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = 0$$

题 150

已知 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 且在 $(1,+\infty)$ 上可导，导函数满足

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

证明极限

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

存在

证明. 由于 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。又由于

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}<\frac{1}{x^2}$$

因此对任意 $x>1$，有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,dt<\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt=1-\frac{1}{x}<1$$

故 $f(x)$ 有上界。由单调有界定理，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在。

□

题 151

已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续非负函数 $f(x),g(x)$ 满足：

$$f(x)\leq A+\int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

其中 A 为正常数，求证：

$$f(x)\leq A\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$$

证明. 设

$$F(x)=A+\int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

则 $F'(x)=f(x)g(x)$, 且 $f(x)\leq F(x)$，因此

$$F'(x)\leq F(x)g(x)$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)}\leq g(x)$$

对上式两边积分，得到

$$\ln F(x)-\ln F(0)\leq\int_0^x g(t)\,dt$$

因此

$$F(x)\leq F(0)\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)=A\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$$

□

8.3.3 抽象函数

题 152

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx\geq\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$$

证明. 唉，柯西

考虑 $[tf(x)-g(x)]^2$

$$\int_a^b (t^2f^2(x)-2tf(x)g(x)+g^2(x))\,dx \geq 0$$

则 $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx\cdot\int_a^b g^2(x)\,dx \leq 0$ 即得证。

□

题 153

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且恒正，证明

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \geq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{-1}$$

证明. 考虑柯西不等式

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx\cdot\int_0^1 f(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 1\,dx\right)^2 = 1$$

即得证。

□

题 154

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且导函数连续，若 $a<b$ 且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \geq 2(M-m)$$

此处 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

证明. 设最大值点为 c_1，最小值点为 c_2, 不妨设 $c_1<c_2$，则有

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx = \int_a^{c_1} |f'(x)|\,dx + \int_{c_1}^{c_2} |f'(x)|\,dx + \int_{c_2}^b |f'(x)|\,dx$$

$$\geq \int_a^{c_1} f'(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} -f'(x)\,dx + \int_{c_2}^b f'(x)\,dx = f(c_1)-f(a)+f(c_1)-f(c_2)+f(b)-f(c_2) = 2(M-m)$$

□

题 155

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调连续递增，设

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

证明 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调增函数，且若 f 在 $+\infty$ 的极限为 l，则 F 在 $+\infty$ 的极限也为 l。

证明.

$$F'(x)=\frac{f(x)}{x}-\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$$

只需证 $F'(x)\geq 0$，即证

$$xf(x)\geq\int_0^x f(t)\,dt$$

由积分中值定理，存在 $c\in(0,x)$，使得

$$\int_0^x f(t)\,dt=xf(c)$$

由于 f 单调递增，故 $f(x)\geq f(c)$，因此不等式成立，$F(x)$ 单调递增。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l,$ □

9.2.1 极限计算

题 156 .

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|$$

解： 注意到

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|=\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})|=\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi n+\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n}))|$$

$$=\lim_{n\to\infty}|\cos(\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n}))|=1$$

题 159

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{1}{8}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$$

解： 注意到

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}=\frac{\sin 1}{1+o(1)}=\sin 1$$

题 160

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)$$

解： 展开得到

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{n}\cos\frac{1}{kn^k}+\sin\frac{k}{n}\sin\frac{1}{kn^k}\right)$$

注意到

$$=\int_0^1\cos x\,dx=\sin 1$$

题 161

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{1}{2}\ln n\right)$$

解： 注意到

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})-\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx=\frac{1}{4}$$

题 162

已知定义在 $[-1,1]$ 上的函数 f 满足 $f'(0)$ 存在，计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})-nf(0)$$

解： 注意到

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-nf(0)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(f'(0)\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+no(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{f'(0)}{2}$$

题 163

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^3}$$

解： 显然为 0

题 164

设 $0 < b_1 < a_1$, 且

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{和} \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

存在且相等

证明. 不难发现，a_n 递减，b_n 递增，且 $a_n \geq b_n$。因此，a_n 有下界，b_n 有上界，故两极限均存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则由递推关系，有

$$A = \frac{A+B}{2}, \quad B = \sqrt{AB}$$

解得 $A = B$，即两极限相等。

□

题 165

设 $x_1 > 0$，且

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n$$

存在并计算

证明. 不妨设 $x_1 \geq 1$，则不难发现 x_n 递减且有下界 1，因此极限存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = L$，则由递推关系，有

$$L = \frac{1}{2}\left(L + \frac{1}{L}\right)$$

解得 $L = 1$。

□

题 166

证明或否定: 存在数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^n = 1.001$$

解： 考虑 $a_n = 1 + \frac{\ln(0.001)}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{\ln(0.001)}{n})^n = \mathrm{e}^{\ln(0.001)} = 0.001$$

题 167

证明或否定: 对 $f(x) = x\ln x$，存在数列 a_n 使得

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - \mathrm{e}^n) = 0, \quad \lim_{n\to\infty} (f(a_n) - f(\mathrm{e}^n)) \neq 0;$$

解： 考虑 $a_n = \mathrm{e}^n + \frac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - \mathrm{e}^n) = 0$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (f(a_n) - f(\mathrm{e}^n)) &= \lim_{n\to\infty} \left((\mathrm{e}^n + \frac{1}{n})\ln(\mathrm{e}^n + \frac{1}{n}) - \mathrm{e}^n n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left((\mathrm{e}^n + \frac{1}{n})(n + \ln(1 + \frac{1}{n\mathrm{e}^n})) - \mathrm{e}^n n\right) = 1\end{aligned}$$

题 168

证明或否定: 若存在 $l \in \mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = l$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

解： 显然成立

题 169

对 $\lambda \in (0,1)$, 与极限为 a 的数列 $\{a_n\}$，证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} a_1 = \frac{a}{1-\lambda}$$

证明. 令 $b_n = a_n - a$，则 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$，只需证

$$\lim_{n\to\infty} b_n + \lambda b_{n-1} + \lambda^2 b_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} b_1 = 0$$

随后应用 Toplitz 定理即可。

□

题 170

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k=a$$

$$\lim_{n\to\infty}n(x_n-x_{n-1})=0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a$$

证明. 不妨设 $a=0$, 对于第二项，对于任意的 $\varepsilon>0$，存在一个 N，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n-x_{n-1}|<\frac{\varepsilon}{n}$$

考虑

$$|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_n)|$$

$$\leq|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(x_k-x_n)|+|\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(x_k-x_n)|$$

显然第一项趋于 0，第二项

$$\leq\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}|\sum_{k=N+1}^{n}\frac{(n-k)\varepsilon}{n}|$$

取 $N\to\infty$，即可得证。

□

题 171

给定 $\beta>0$，已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=1$$

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^{\beta+1}}$$

解： stolz

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{\beta+1}-n^{\beta+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{(n+1)^{\beta+1}-n^{\beta+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^\beta}{(n^{\beta+1}+n^\beta-n^{\beta+1})}=1$$