高数 A 第一次作业

2025 年 9 月 16 日

定理 4(3)

定理 1. *设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限分别为 L_1 和 L_2。如果 $L_2 \neq 0$, 那么*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}.$$

证明. 我们的证明分两步：首先证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L_2}$，然后利用极限的乘法法则得到结论。

因为 $\lim_{n\to\infty} b_n = L_2 \neq 0$, 故对于 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_1$ 时, $|b_n - L_2| < \frac{|L_2|}{2}$。根据三角不等式,

$$|L_2| = |b_n - (b_n - L_2)| \leq |b_n| + |b_n - L_2| < |b_n| + \frac{|L_2|}{2},$$

这蕴含 $|b_n| > \frac{|L_2|}{2}$。现在，我们考察差值 $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right|$：

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = \left|\frac{L_2 - b_n}{b_n L_2}\right| = \frac{|b_n - L_2|}{|b_n||L_2|} < \frac{|b_n - L_2|}{(|L_2|/2)|L_2|} = \frac{2}{|L_2|^2}|b_n - L_2|.$$

由于 $\lim_{n\to\infty} |b_n - L_2| = 0$, 因此 $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{L_2}\right| = 0$, 即 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{L_2}$. 最后，根据极限的乘法法则，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n}\right) = L_1 \cdot \frac{1}{L_2} = \frac{L_1}{L_2}.$$

□

例 7

定理 2. *设 $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N}^+)$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = a \geq 0$. 证明 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$.*

证明. 根据定义, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ 使得当 $n > N_0$ 时, $|a_n - a| < \varepsilon$. 考察 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}|$:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \left|\frac{(\sqrt{a_n} - \sqrt{a})(\sqrt{a_n} + \sqrt{a})}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}\right| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}}.$$

- **情况一：当 $a > 0$ 时**

  由于 $\sqrt{a_n} + \sqrt{a} \geq \sqrt{a} > 0$, 我们有

  $$\frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}}.$$

  因为 $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$, 故 $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} = 0$. 根据夹逼准则, $\lim_{n\to\infty} |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = 0$.

- **情况二：当 $a = 0$ 时**

  $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使得当 $n > N$ 时, $|a_n - 0| < \varepsilon^2$, 从而 $a_n < \varepsilon^2$. 则有 $|\sqrt{a_n} - \sqrt{0}| = \sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$.

综上，我们得出 $\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$. □

习题

题 1：证明 $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$

证明. 我们需证明对任意 $\epsilon > 0$, 存在 N 使得当 $n > N$ 时, $\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| < \epsilon$. 考察差值：

$$\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3n+1) - 3(2n-3)}{2(2n-3)}\right| = \left|\frac{6n+2-6n+9}{4n-6}\right| = \frac{11}{|4n-6|}.$$

当 $n \geq 2$ 时, $4n - 6 > 0$, 故 $\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| = \frac{11}{4n-6}$. 令 $\frac{11}{4n-6} < \epsilon$, 解得 $n > \frac{11}{4\epsilon} + \frac{3}{2}$. 取 $N = \max\left\{2, \left\lceil\frac{11}{4\epsilon} + \frac{3}{2}\right\rceil\right\}$. 当 $n > N$ 时, $\left|\frac{3n+1}{2n-3} - \frac{3}{2}\right| < \epsilon$.

因此, $\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{2n-3} = \frac{3}{2}$. □

题 2：证明 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

题目： 设 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 又设 $\{b_n\}$ 是有界序列，即存在一个常数 M 使得 $|b_n| < M$ $(n = 1, 2, \dots)$. 证明：$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$.

证明. 根据有界序列的定义，存在一个常数 $M > 0$ 使得对所有 n, $|b_n| \leq M$. 我们考察 $|a_n b_n|$：

$$|a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq |a_n| M.$$

因为 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 故 $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. 所以 $\lim_{n\to\infty} M|a_n| = M \cdot \lim_{n\to\infty} |a_n| = M \cdot 0 = 0$. 由于 $0 \leq |a_n b_n| \leq M|a_n|$ 且 $\lim_{n\to\infty} M|a_n| = 0$, 根据夹逼准则 (Squeeze Theorem), 我们有

$$\lim_{n\to\infty} |a_n b_n| = 0,$$

因此 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$. □

题 3：计算下列极限

1. $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

   解：

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

2. $\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4}{n^4+n^3}$

   解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^4}{n^4+n^3} = \lim_{n\to\infty}\frac{16n^4+32n^3+24n^2+8n+1}{n^4+n^3}.$$

   分子和分母同除以最高次幂 n^4:

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{16+\frac{32}{n}+\frac{24}{n^2}+\frac{8}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{16+0+0+0+0}{1+0} = 16.$$