高数 A 第 9 次作业

韩雨潜

2025 年 11 月 24 日

11.18 日作业

例 1

求出函数 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 4$ 的极大值点和极小值点。

解： $f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x-5)(x+1)$，解得零点 $x = 5$ 和 $x = -1$。
$f''(x) = 6x - 12$，则 $f''(5) = 18 > 0$，$f''(-1) = -18 < 0$。
所以 $x = 5$ 为极小值点；$x = -1$ 为极大值点。

例 2

求函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ 的极值点。

解： $f'(x) = \dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，在 $x = 0$ 处无定义。
当 $x < 0$ 时，$f'(x) < 0$；当 $x > 0$ 时，$f'(x) > 0$。
所以 $x = 0$ 为极小值点。

例 3

研究函数 $f(x) = x^3\mathrm{e}^{-x}$ 的极值点。

解： $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x^2 - x^3) = x^2\mathrm{e}^{-x}(3-x)$，解得零点 $x = 0$ 和 $x = 3$。
当 $x < 0$ 时，$f'(x) > 0$；当 $0 < x < 3$ 时，$f'(x) > 0$；当 $x > 3$ 时，$f'(x) < 0$。
所以 $x = 3$ 为极大值点，$x = 0$ 不是极值点。

例 4

求函数 $f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的最大值和最小值。

解： 考虑

$$f'(x) = \frac{5x-2}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

解得零点 $x = \dfrac{2}{5}$。

在区间 $[-1,1]$ 上，比较 $f(-1) = -2$，$f(1) = 0$，$f(\dfrac{2}{5}) = -\dfrac{54}{125}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$。

所以最大值为 0，最小值为 -2。

例 5

根据折射定律，证明：光走的路径的时间是最短的。

证明. 考虑点 A, P, B，设 $A(0,a), P(x,0), B(d-x,-b)$。

光从 A 到 P 的时间为 $t_1 = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1}$，光从 P 到 B 的时间为 $t_2 = \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$。

则总时间 $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{v_1} + \dfrac{\sqrt{b^2+(d-x)^2}}{v_2}$。

对 t 求导，得

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}}$$

$$t''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{v_2(b^2+(d-x)^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

令 $t'(x) = 0$，解得

$$\frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

由 $t''(x) > 0$ 可知，t 在该点取得极小值，即光走的路径的时间是最短的。

□

例 6

找出一个值 x_0，使得平方和函数 $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$ 在 x_0 处取得最小值。

解： $f'(x) = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(x-a_i) = 2(nx - \sum\limits_{i=1}^{n}a_i)$，解得零点 $x = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$。

$f''(x) = 2n > 0$，所以 $x_0 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$ 使得 $f(x)$ 取得最小值。

4.5.7

在一个半径为 a 的求内，做一个内接圆锥体，要使圆锥体的体积最大，问：圆锥体的高及底半径是多少?、

解： 设圆锥体的高为 h，底半径为 r，则有

$$r^2 + (a-h)^2 = a^2$$

即 $r = \sqrt{2ah - h^2}$。
圆锥体的体积为

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2ah^2 - h^3)$$

对 V 求导，得

$$V'(h) = \frac{1}{3}\pi h(4a - 3h)$$

解得零点 $h = 0$ 和 $h = \frac{4a}{3}$。
$V''(h) = \frac{4}{3}\pi(a-h)$，则 $V''(\frac{4a}{3}) = -\frac{4}{9}\pi a < 0$。
所以当 $h = \frac{4a}{3}$ 时，圆锥体的体积最大，此时底半径 $r = \frac{2\sqrt{2}a}{3}$。

4.5.9

在曲线 $y^2 = 4x$ 上求出到点 $(18, 0)$ 距离最近的点。

解： 设点 (x, y) 在曲线上，则距离的平方为

$$d^2 = (x-18)^2 + y^2 = (x-18)^2 + 4x = x^2 - 32x + 324$$

对 d^2 求导，得

$$\frac{d(d^2)}{dx} = 2x - 32$$

解得零点 $x = 16$。
$\frac{d^2(d^2)}{dx^2} = 2 > 0$，所以当 $x = 16$ 时，距离最近，此时 $y = 8$。
所以距离点 $(18, 0)$ 最近的点为 $(16, 8)$。

11.20 日作业

例 1

设函数 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a, b, c, d \in \mathbb{R}, a > 0)$, 研究其凹凸性

解： $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$，$f''(x) = 6ax + 2b$。
解得 $f''(x) = 0$ 的零点 $x = -\frac{b}{3a}$。
当 $x < -\frac{b}{3a}$ 时，$f''(x) < 0$，函数在该区间上凸；当 $x > -\frac{b}{3a}$ 时，$f''(x) > 0$，函数在该区间下凸。

例 3

试作函数 $y=\dfrac{x^2}{x-1}$ 的简图。

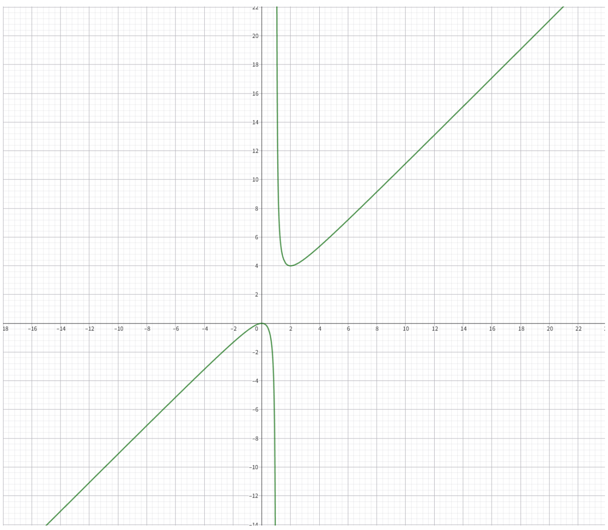
解： 定义域：$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$。

$$f'(x)=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

解得零点 $x=0$ 和 $x=2$。
当 $x<0$ 时，$f'(x)>0$；当 $0<x<1$ 时，$f'(x)<0$；当 $1<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$。
所以 $x=0$ 为极小值点，$x=2$ 为极大值点。

$$f''(x)=\frac{2}{(x-1)^3}$$

解得 $f''(x)=0$ 无零点。
当 $x<1$ 时，$f''(x)<0$，函数在该区间上凸；当 $x>1$ 时，$f''(x)>0$，函数在该区间下凸。
渐近线：$x=1$，$y=x+1$。
函数图像如下：



4.6.3

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有二阶导数 $f''(x)$，且在区间 (a,b) 内上凸，证明：

$$f''(x)\le 0,\quad \forall x\in(a,b).$$

证明. 由定义可知，$f(x)$ 在区间 (a,b) 内上凸，则有

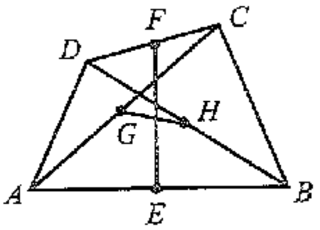
$$f''(x)<0,\quad \forall x\in(a,b).$$

即

$$f''(x) \le 0, \quad \forall x \in (a,b).$$

$\square$

例题



例 设 $ABCD$ 是一个四边形，E，F 分别为边 AB，CD 的中点，G，H 分别为对角线 AC，BD 的中点（见图 5.3），证明：

(1) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{EF}$；

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{GH}$.

证明. • (1)

$$2\vec{EF} = \vec{AD} + \vec{BC} + \vec{EA} + \vec{EB} + \vec{CF} + \vec{DF}$$

考虑 E, F 分别为 AB, CD 的中点，有

$$\vec{EA} + \vec{EB} = \vec{0}, \quad \vec{CF} + \vec{DF} = \vec{0}$$

所以

$$2\vec{EF} = \vec{AD} + \vec{BC}$$

(2) 考虑

$$4\vec{GH} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD} + 2(\vec{GA} + \vec{GC} + \vec{BH} + \vec{DH})$$

由 G, H 分别为 AC, BD 的中点，有

$$\vec{GA} + \vec{GC} = \vec{0}, \quad \vec{BH} + \vec{DH} = \vec{0}$$

所以

$$4\vec{GH} = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{CB} + \vec{CD}$$

$\square$

5.1.1

设平行四边形 $ABCD$ 中 $\vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{AD} = \mathbf{b}$，试用 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 表示 $\vec{AC}, \vec{DB}, \vec{MA}$，其中 M 为对角线交点。

解:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$
$$\vec{DB} = \vec{DA} + \vec{AB} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$$
$$\vec{MA} = -\frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

5.1.3

设 M 为 $\triangle ABC$ 的重心，O 为空间中任意一点，证明：

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

证明. 考虑 $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$，又因为 M 为重心，有

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}) = \frac{1}{3}(\vec{OB} - \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OA}) = \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA})$$

所以

$$\vec{OM} = \vec{OA} + \frac{1}{3}(\vec{OB} + \vec{OC} - 2\vec{OA}) = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$$

□

5.1.7

利用向量证明: (1) 菱形的对角线互相垂直；
(2) 勾股定理。

证明. (1) 设菱形 $ABCD$ 中 $\vec{AB} = \mathbf{a}, \vec{AD} = \mathbf{b}$，则有

$$\vec{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \vec{BD} = \vec{BC} + \vec{CD} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

因为菱形的四条边相等，所以 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$，则

$$\vec{AC} \cdot \vec{BD} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2 = 0$$

所以菱形的对角线互相垂直。

(2) 设直角三角形 ABC 中，$\angle ABC = 90^\circ$，则有

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

则

$$|\vec{AC}|^2 = \vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC}) \cdot (\vec{AB} + \vec{BC}) = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC}$$

因为 $\angle ABC = 90^\circ$，所以 $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$，则

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2$$

□

5.1.8

对于任意两个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$，证明：

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$$

证明. 设 θ 为向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的夹角，则有

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin\theta$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos\theta$$

则

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \sin^2\theta + |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \cos^2\theta = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2$$

□