高数 A 第 3 次作业

2025 年 9 月 23 日

9.23 日作业

习题 1.4:5

给出

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \text{及} \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

的严格定义。

解：

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ 的定义：对于任意给定的正数 M，都存在一个对应的正数 δ，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，就有 $f(x) > M$。
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ 的定义：对于任意给定的负数 N，都存在一个对应的负数 M，当 $x < N$ 时，就有 $f(x) < M$。

习题 1.5:4　适当选取 a，使下列函数处处连续

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0; \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 1, \\ a\cos(\pi x), & x < 1. \end{cases}$

解：　对于（1），由连续性的定义，需满足

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

注意到

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{1+0^2} = 1, \quad f(0) = a + 0 = a,$$

所以 $a=1$ 时，函数处处连续。

对于（2），同样由连续性的定义，需满足

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

注意到

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a\cos(\pi\cdot 1) = -a, \quad f(1) = \ln(1+1) = \ln 2,$$

所以 $a=-\ln 2$ 时，函数处处连续。

习题 1.5:5 利用初等函数的连续性及定理 3 求下列极限

- **(2)** $\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}}$

  解：

$$\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 2}\sqrt{x}\ln x} = e^{\sqrt{2}\ln 2} = 2^{\sqrt{2}}.$$

- **(5)** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|}$

  解：

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3|x|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

习题 1.5 :7 指出下列函数的间断点及其类型，若是可去间断点，请去掉间断性

- **(1)** $f(x) = \cos\big(\pi\,(x-\lfloor x\rfloor)\big)$

  解： 第一类不可去间断点，间断点为 $x\in\mathbb{Z}$。

- **(2)** $f(x) = sgn(\sin x)$

  解： 第一类不可去间断点，间断点为 $x=n\pi$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。

例 3

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续。若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一一映射，即

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调的。

证明. 反证法。假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上不严格单调，则存在 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，使得 $x_1 < x_2 < x_3$ 且

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad f(x_2) \geq f(x_3).$$

或

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad f(x_2) \leq f(x_3).$$

不妨假设是前者，取 y 使得 $max\{f(x_1), f(x_3)\} < y < f(x_2)$，则由介值定理，存在 $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f(c_1) = y = f(c_2) \geq max\{f(x_1), f(x_3)\}$

我们发现，这与 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一一映射矛盾，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调的。 □

习题 1.6:1

证明：任意一个奇数次实数系多项式至少有一个实根

证明. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，其中 n 为奇数，$a_n \neq 0$。

$f(x)$ 可化为：

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$；当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$。由介值定理，存在 $c \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(c) = 0$。因此，任意一个奇数次实数系多项式至少有一个实根。 □

习题 1.6:2

设 $0 < \epsilon < 1$, 证明：对于任意一个实数 y_0, 方程

$$y_0 = x - \epsilon \sin x$$

有解，并且解是唯一的。

证明. 定义函数 $f(x) = x - \epsilon \sin x$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$；当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$。由介值定理，存在 $c \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(c) = y_0$，即方程 $y_0 = x - \epsilon \sin x$ 有解。

下证解的唯一性，等价于证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一一映射。

我们任取 $x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)-\epsilon(\sin x_2-\sin x_1).$$

由于 $\epsilon\in(0,1)$，所以 $|\sin x_2-\sin x_1|\leq|x_2-x_1|$，因此

$$f(x_2)-f(x_1)\geq(x_2-x_1)-\epsilon|x_2-x_1|=(1-\epsilon)(x_2-x_1)>0.$$

这说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调的，因此解是唯一的。

□