高数 A 第 4 次作业

2025 年 10 月 16 日

9.30 日作业

2.5_1

当 $x \to 0$ 时，下列函数是 x 的几阶无穷小量？

$$\begin{aligned}&(1)\quad y = x + 10x^2 + 100x^3,\\ &(2)\quad y = (\sqrt{x+2} - \sqrt{2}) \sin x,\\ &(3)\quad y = x\,(1 - \cos x).\end{aligned}$$

解： (1) 显然，y 是 x 的一阶无穷小量。

(2) 我们有

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{2} = \frac{x}{2} + ox = O(x).$$

且

$$\sin x = O(x).$$

因此

$$y = \left(\sqrt{x+2} - \sqrt{2}\right) \cdot O(x) = O(x^2).$$

所以当 $x \to 0$ 时，y 是 x 的 2 阶无穷小量。

(3) 我们有

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + O(x^4).$$

因此

$$y = x \cdot (1 - \cos x) = x \cdot \left(\frac{x^2}{2} + O(x^4)\right) = O(x^3).$$

2.5_8(3)

求由下列方程所确定的隐函数的导数：

$$\arctan \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}.$$

解： 两边对 x 求导，得到

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\cdot\frac{x\frac{dy}{dx}-y}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{x+y\frac{dy}{dx}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

整理得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{x-y}.$$

2.5_10(2)

设函数 $y=f(x)$ 由下列参数方程所确定，求 $y'=\frac{dy}{dx}$：

$$\begin{cases} x=t\ln t, \\ y=\mathrm{e}^t. \end{cases}$$

解： 由参数方程可得

$$\frac{dx}{dt}=\ln t+1,\quad \frac{dy}{dt}=\mathrm{e}^t.$$

因此

$$y'=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{\mathrm{e}^t}{\ln t+1}.$$

2.5_11

试求椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线方程与法线方程，并证明：从一个焦点射到椭圆上某点的光线，经该点反射后，必经过另一个焦点。

解： 不妨设 $x_0,y_0>0$，则椭圆在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的切线斜率, 求导得到：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

切线方程为

$$y-y_0=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}(x-x_0).$$

法线方程为

$$y-y_0=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}(x-x_0).$$

接下来，我们只需证明从 M_0 点到两个焦点的光线关于法线对称即可。设椭圆的两个焦点分别为 $F_1(-c,0)$ 和 $F_2(c,0)$，其中 $c^2=a^2-b^2$。

两光线斜率分别为

$$k_1=\frac{y_0}{x_0+c},\quad k_2=\frac{y_0}{x_0-c}.$$

法线斜率为

$$k_n=\frac{a^2y_0}{b^2x_0}.$$

根据对称条件，我们需要验证

$$\frac{k_2-k_n}{1+k_2k_n}=\frac{k_n-k_1}{1+k_1k_n}.$$

带入化简：

$$LHS=\frac{\frac{y_0}{x_0-c}-\frac{a^2y_0}{b^2x_0}}{1+\frac{y_0}{x_0-c}\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0}}=\frac{\frac{b^2x_0y_0-a^2y_0(x_0-c)}{b^2x_0(x_0-c)}}{\frac{b^2x_0(x_0-c)+a^2y_0^2}{b^2x_0(x_0-c)}}=\frac{b^2x_0y_0-a^2y_0(x_0-c)}{b^2x_0(x_0-c)+a^2y_0^2}.$$

$$RHS=\frac{\frac{a^2y_0}{b^2x_0}-\frac{y_0}{x_0+c}}{1+\frac{y_0}{x_0+c}\cdot\frac{a^2y_0}{b^2x_0}}=\frac{\frac{a^2y_0(x_0+c)-b^2x_0y_0}{b^2x_0(x_0+c)}}{\frac{b^2x_0(x_0+c)+a^2y_0^2}{b^2x_0(x_0+c)}}=\frac{a^2y_0(x_0+c)-b^2x_0y_0}{b^2x_0(x_0+c)+a^2y_0^2}.$$

注意到椭圆方程 $\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1$，即 $b^2x_0^2+a^2y_0^2=a^2b^2$ ，因此

$$LHS=\frac{\frac{y_0c(a^2-cx_0)}{b^2x_0(x_0-c)}}{\frac{a^2-cx_0}{x_0(x_0-c)}}=\frac{y_0c}{b^2},\quad RHS=\frac{\frac{y_0c(a^2+cx_0)}{b^2x_0(x_0+c)}}{\frac{a^2+cx_0}{x_0(x_0+c)}}=\frac{y_0c}{b^2}.$$

所以 $LHS=RHS$，证毕。

2.6_ 例 6

设 $y=f(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 所确定的隐函数，求 y''。

解： 两边对 x 求导，得到

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3y-3x\frac{dy}{dx}=0.$$

整理得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}.$$

两边再对 x 求导，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'-2x)(y^2-x)-(y-x^2)(2y\frac{dy}{dx}-1)}{(y^2-x)^2}.$$

带入 $\frac{dy}{dx},x^3+y^3-3xy=0$，化简得

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2xy}{(x-y^2)^3}.$$

2.6_ 例 7

设函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t-\sin t,\\ y=1-\cos t.\end{cases}$ 所确定，求 y''。

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(1-\cos t)\Big/\frac{d}{dt}(t-\sin t) = \frac{\sin t}{1-\cos t}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\frac{dy}{dx}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t - 1}{(1-\cos t)^3} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$

2.6_8

设函数 $y = x^2 \ln x$，求 $y^{(50)}$

解：　解答有误

$$y' = 2x\ln x + x$$

$$y'' = 2\ln x + 3$$

$$y''' = \frac{2}{x}$$

所以 $y^{(n)} = (-1)^{n-3}\frac{2(n-3)!}{x^{n-2}}$，因此

$$y^{(50)} = (-1)^{47}\frac{2\cdot 47!}{x^{48}} = -\frac{2\cdot 47!}{x^{48}}.$$

10.9 日作业

2.7_2

$$\int (1+\sqrt{x})^2\,dx = \int (1+2\sqrt{x}+x)\,dx = x + \frac{4}{3}x^{3/2} + \frac{1}{2}x^2 + C.$$

2.7_4

$$\int \tan^2 t\,dt = \int (\sec^2 t - 1)\,dt = \tan t - t + C.$$

2.7_6

$$\int \frac{X^2+3}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x^2+1+2}{1+x^2}\,dx = \int 1\,dx + 2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = x + 2\arctan x + C.$$

2.7_8

$$\int (1+\cos^2 x)\sec^2 x\,dx = \tan x + x + C.$$

2.7_10

$$\int (\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3})\, dx = \ln|x| - \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + C.$$

2.7_12

$$\int (2\cosh x - \sinh x)\, dx = 2\sinh x - \cosh x + C.$$

2.7_14

$$\int \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^2 x}\, d\tan x = -\frac{1}{\tan x} + \tan x + C.$$

2.7_16

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx$$

置 $t = \frac{1}{x}$，则 $dt = -\frac{1}{x^2}\, dx$，所以

$$\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\, dx = -\int \frac{t^2}{1+t^2}\, dt = -(t - \arctan t) + C = -\left(\frac{1}{x} - \arctan\frac{1}{x}\right) + C.$$

2.7_18

设 $f(x)$ 满足微分方程

$$xf'(x) + f(x) = x^3 + 1$$

求 $f(x)$。

解： 观察到

$$(xf(x))' = xf'(x) + f(x),$$

所以

$$(xf(x))' = x^3 + 1.$$

积分得

$$xf(x) = \frac{x^4}{4} + x + C,$$

即

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + 1 + \frac{C}{x}.$$

2.8_1(2)

$$\int_a^b x\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2}$$

2.8_6

判别下列各题中两个定积分值的大小

- (1)$\int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx$ 与 $\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,dx$；
- (2)$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx$ 与 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\,dx$；
- (3)$\int_0^1 x\,dx$ 与 $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$。

- (1) 由于在区间 $[0,1]$ 上，$x^2 \le x$，所以 $\mathrm{e}^{x^2} \le \mathrm{e}^x$，且当 $x \in (0,1)$ 时不等式成立。因此
$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,dx < \int_0^1 \mathrm{e}^x\,dx.$$
- (2) 由于在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上，$\sin x \le x$，所以 $(\sin x)^2 \le x^2$，且当 $x \in (0,\frac{\pi}{2})$ 时不等式成立。因此
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^2\,dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\,dx.$$
- (3) 由于在区间 $[0,1]$ 上，$\sqrt{1+x^2} > x$，所以
$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx > \int_0^1 x\,dx.$$