高数 A 第 5 次作业

2025 年 10 月 16 日

10.14 日作业

§9. 例 3

求函数：

$$F(x) = \int_{x^2}^{x} \sqrt{1+t}\,dt$$

的导数。

解：

$$F(x) = \int_{0}^{x} \sqrt{1+t}\,dt + \int_{x^2}^{0} \sqrt{1+t}\,dt$$

所以 $F'(x) = \sqrt{1+x} - 2x\sqrt{1+x^2}$。

§9. 例 4

设函数 $G(x) = \int_1^x xf(t)\,dt$，其中 $f(t)$ 连续，求 $G'(x)$。

解：

$$G'(x) = \int_1^x f(t)\,dt + xf(x)$$

习题 2.9.1

求导数：

- (2)

$$G(x) = \int_0^{1+x^2} \sin t^2\,dt;$$

解：

$$G'(x) = 2x\sin(1+x^2)^2.$$

- (4)

$$L(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt.$$

解：

$$L(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt - \int_0^{x} e^{-t^2}\,dt$$

所以：

$$L'(x) = 2xe^{-x^4} - e^{-x^2}.$$

习题 2.9.6

求函数

$$G(x) = \int_0^x \left(e^t \int_0^t \sin z\,dz \right) dt$$

的二阶导数。

解：

$$G'(x) = e^x \int_0^x \sin z\,dz;$$

$$G''(x) = e^x \int_0^x \sin z\,dz + e^x \sin x.$$

§10. 例 2

验证

$$F(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x)$$

是 $f(x) = e^x \sin x$ 的一个原函数，并计算定积分 $\displaystyle\int_0^\pi e^x \sin x\,dx$。

解： 不难发现：

$$F'(x) = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + \frac{1}{2}e^x(\cos x + \sin x) = e^x \sin x.$$

所以 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数。由牛顿-莱布尼茨公式可得：

$$\int_0^\pi e^x \sin x\,dx = F(\pi) - F(0) = \frac{1}{2}e^\pi(\sin\pi - \cos\pi) - \frac{1}{2}e^0(\sin 0 - \cos 0) = \frac{1}{2}(e^\pi + 1).$$

§10. 例 4

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)^3\frac{1}{n}$。

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}+1\right)^3\frac{1}{n}=\int_0^1(x+1)^3\,dx=\left.\frac{(x+1)^4}{4}\right|_0^1=\frac{16-1}{4}=\frac{15}{4}.$$

§10. 例 5

求定积分 $\int_{-1}^{2}|x|\lfloor x\rfloor\,dx$。

解： 考虑几何意义

$$\int_{-1}^{2}|x|\lfloor x\rfloor\,dx=\int_{-1}^{0}|x|\lfloor x\rfloor\,dx+\int_{0}^{1}|x|\lfloor x\rfloor\,dx+\int_{1}^{2}|x|\lfloor x\rfloor\,dx.$$

$$=\int_{-1}^{0}-x\cdot(-1)\,dx+\int_0^1 x\cdot 0\,dx+\int_1^2 x\cdot 1\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0}+0+\left.\frac{x^2}{2}\right|_{1}^{2}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1.$$

§10. 例 7

求曲线 $y^2=4x$ 和直线 $4x-3y=4$ 所围成图形的面积。

解： 解方程组得交点 $(\frac{1}{4},-1)$ 和 $(4,4)$。可知所求面积为

$$\int_{-1}^{4}\left(\frac{3y+4}{4}-\frac{y^2}{4}\right)\,dy=\left.\left(\frac{3}{8}y^2+y-\frac{1}{12}y^3\right)\right|_{-1}^{4}=\left(6+4-\frac{64}{12}\right)-\left(\frac{3}{8}-1+\frac{1}{12}\right)=\frac{125}{24}.$$

习题 2.10.2

验证 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ 是 $x+\frac{1}{x^2}$ 的一个原函数，并计算定积分 $\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$。试问等式

$$\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)\,dx=\left.\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)\right|_{-1}^{1}$$

是否成立？为什么？

解： 不难发现：

$$\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)'=x+\frac{1}{x^2}.$$

所以 $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}$ 是 $x+\frac{1}{x^2}$ 的一个原函数。由牛顿-莱布尼茨公式可得：

$$\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\int_{-1}^{-\epsilon}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx+\int_{\epsilon}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx\right).$$

$$=\lim_{\epsilon\to 0^+}\left(\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{-\epsilon}+\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\epsilon}^{1}\right)=\lim_{\epsilon\to 0^+}(\frac{2}{\epsilon}-2)=+\infty.$$

但等式

$$\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{1}$$

不成立，因为被积函数 $x+\frac{1}{x^2}$ 在区间 $[-1,1]$ 上不连续。

习题 2.10.3(3)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$。

解：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx=\ln(1+x)|_0^1=\ln 2.$$

习题 2.10.4(3)

将下列定积分改写成若干区间上定积分之和，然后使用牛顿-莱布尼茨公式求出其值：

$$\int_0^1 x\left|\frac{1}{2}-x\right|dx$$

解： 注意到当 $x\in[0,\frac{1}{2}]$ 时，$\left|\frac{1}{2}-x\right|=\frac{1}{2}-x$；当 $x\in[\frac{1}{2},1]$ 时，$\left|\frac{1}{2}-x\right|=x-\frac{1}{2}$。所以

$$\int_0^1 x\left|\frac{1}{2}-x\right|dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\left(\frac{1}{2}-x\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx.$$

$$=\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\left(\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^2\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{48}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{24}-\frac{1}{16}\right)\right)=\frac{1}{48}+\frac{5}{48}=\frac{1}{8}.$$

10.16 日作业

§1. 例 8

求不定积分 $\int\frac{dx}{\sin x}$。

解：
$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\, dx.$$
置 $t \to \cos x$，则 $dt = -\sin x\, dx$，所以
$$\int \frac{dx}{\sin x} = -\int \frac{dt}{1-t^2} = -\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{1-t} + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t| + C.$$

§1. 例 14

求不定积分 $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}\,(a>0)$。

解： 置 $t \to \frac{x}{a}$，则 $x = at$，$dx = a\,dt$，所以
$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\,dt}{\sqrt{a^2t^2-a^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \ln|t+\sqrt{t^2-1}|+C = \ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}\right|+C.$$

习题 3.1

求不定积分

- (4) $\int (2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}\,dx$。

  解： 置 $t \to 2x^{\frac{3}{2}}+1$，则 $dt = 3x^{\frac{1}{2}}\,dx$，所以
  $$\int (2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x}\,dx = \int t^{\frac{2}{3}}\cdot\frac{dt}{3} = \frac{1}{5}t^{\frac{5}{3}}+C = \frac{1}{5}(2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{5}{3}}+C.$$

- (8) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}}$。

  解： 置 $t \to \frac{x}{\sqrt{\frac{7}{3}}}$，则 $x = \sqrt{\frac{7}{3}}t$，$dx = \sqrt{\frac{7}{3}}\,dt$，所以
  $$\int \frac{dx}{\sqrt{7-3x^2}} = \int \frac{\sqrt{\frac{7}{3}}\,dt}{\sqrt{7-7t^2}} = \int \frac{\sqrt{3}dt}{3\sqrt{1-t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin t + C = \frac{\sqrt{3}}{3}\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{7}{3}}}\right)+C.$$

- (12) $\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$。

  解： 置 $t \to \mathrm{e}^x$，则 $dt = \mathrm{e}^x\,dx$，所以
  $$\int \frac{dx}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}} = \int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{\mathrm{e}^{2x}-1} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| + C.$$

- (16) $\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}\,dx$。

解： 置 $t \to x^5+1$，则 $dt = 5x^4\,dx$，所以

$$\int \frac{x^{14}}{(x^5+1)^4}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{(t-1)^2}{t^4}\,dt = \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{2}{t^3}+\frac{1}{t^4}\right)dt = \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}-\frac{1}{3t^3}\right)+C.$$

- (20) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$。

解： 置 $t \to \arctan x$，则 $dt = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx$，所以

$$\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}+x\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx = \int \mathrm{e}^t\,dt + \int \ln(1+x^2)\cdot\frac{2x}{2(1+x^2)}\,dx = \mathrm{e}^t + \frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\,d(\ln(1+x^2)).$$

$$= \mathrm{e}^{\arctan x} + \frac{1}{4}(\ln(1+x^2))^2 + C.$$

- (24) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$。

解： 置 $t \to 1-x^2$，则 $dt = -2x\,dx$，所以

$$\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int\frac{dt}{\sqrt{t}} - \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -2\sqrt{t}-\arcsin x + C = -2\sqrt{1-x^2}-\arcsin x + C.$$

- (28) $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx\ (a>0)$。

解： 置 $t \to \dfrac{x}{a}$，则 $x = at$，$dx = a\,dt$，所以

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \int \frac{a^2t^2}{\sqrt{a^2-a^2t^2}}a\,dt = a^3\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2(1-t^2)}}\,dt = a^2\int\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

置 $t \to \sin u$，则 $dt = \cos u\,du$，所以

$$= a^2\int \frac{\sin^2 u}{\sqrt{1-\sin^2 u}}\cos u\,du = a^2\int \sin^2 u\,du = a^2\int\frac{1-\cos 2u}{2}\,du = \frac{a^2}{2}\left(u-\frac{1}{2}\sin 2u\right)+C.$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin t - t\sqrt{1-t^2}\right)+C = \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C.$$

- (32) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt[3]{1+\mathrm{e}^x}}\,dx$。置 $t \to \mathrm{e}^x$，则 $dt = \mathrm{e}^x\,dx$，所以

$$= \int \frac{t^2}{\sqrt[3]{1+t}}\cdot\frac{dt}{t} = \int \frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{3}}}\,dt = \int t(1+t)^{-\frac{1}{3}}\,dt.$$

分部积分：

$$= \frac{3}{2}t(1+t)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}\int(1+t)^{\frac{2}{3}}\,dt = \frac{3}{2}t(1+t)^{\frac{2}{3}} - \frac{9}{10}(1+t)^{\frac{5}{3}}+C.$$

§2. 例 8

求不定积分 $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx$。

解： 令 $I=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx$，则

$$I=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,dx.$$

$$=\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}I\right).$$

解得：

$$I=\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,dx=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C.$$

习题 3.2

- (3) 求不定积分 $\int x\sin 2x\,dx$。

  解： 令 $I=\int x\sin 2x\,dx$，则

  $$=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx=-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

- (6) 求不定积分 $\int e^{2x}\cos 3x\,dx$。

  解： 令 $I=\int e^{2x}\cos 3x\,dx$，则

  $$I=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

  $$=\frac{1}{2}e^{2x}\cos 3x+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin 3x-\frac{3}{2}I\right).$$

  解得：

  $$I=\int e^{2x}\cos 3x\,dx=\frac{e^{2x}}{13}(2\cos 3x+3\sin 3x)+C.$$

- (9) 求不定积分 $\int\sqrt{1+9x^2}\,dx$。

解： 置 $t \to 3x$，则 $x = \dfrac{t}{3}$，$dx = \dfrac{1}{3}\,dt$，所以

$$\int \sqrt{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{1+t^2}\,dt.$$

分部积分得：

$$= \frac{1}{3}\left(t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right) = \frac{1}{3}\left(t\sqrt{1+t^2} - \int \frac{1+t^2-1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt\right).$$

$$= \frac{1}{3}\left(t\sqrt{1+t^2} - \int \sqrt{1+t^2}\,dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

解得：

$$\int \sqrt{1+t^2}\,dt = \frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln|t+\sqrt{1+t^2}| + C.$$

所以最终结果为：

$$\int \sqrt{1+9x^2}\,dx = \frac{1}{6}\left(3x\sqrt{1+9x^2} + \ln|3x+\sqrt{1+9x^2}|\right) + C.$$

- (12) 求不定积分 $\displaystyle\int (\arccos x)^2\,dx$。

解： 置 $t \to \arccos x$，则 $dt = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$，所以

$$\int (\arccos x)^2\,dx = -\int t^2\sqrt{1-x^2}\,dt = -\int t^2 \sin t\,dt.$$

分部积分得：

$$= -\left(-t^2\cos t + 2\int t\cos t\,dt\right) = t^2\cos t - 2\left(t\sin t + \cos t\right) + C.$$

所以最终结果为

$$\int (\arccos x)^2\,dx = (\arccos x)^2 x - 2\arccos x\sqrt{1-x^2} - 2x + C.$$

- (15) 求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$。

解：

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

置 $\sin t \to x$，则 $dx = \cos t\,dt$，所以

$$= -\frac{\arcsin x}{x} + \int \frac{1}{\sin t}\,dt = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln|\tan\frac{t}{2}| + C = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\tan\frac{\arcsin x}{2}\right| + C.$$

- (18) 求不定积分 $\displaystyle\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$。

解：

$$\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\,dx.$$

置 $t \to \sqrt{1+x^2}$，则 $x=\sqrt{t^2-1}$，$dx=\dfrac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$，所以

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{t}\cdot\frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\,dt = \frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{2}\int\sqrt{t^2-1}\,dt$$

设 $I=\displaystyle\int\sqrt{t^2-1}\,dt$，则分部积分得：

$$2I = t\sqrt{t^2-1} - \ln|t+\sqrt{t^2-1}| + C.$$

所以

$$\int x\ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{4}\left(t\sqrt{t^2-1} - \ln|t+\sqrt{t^2-1}|\right) + C.$$

$$= \frac{1}{2}x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}) - \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+x^2}\cdot x - \ln|\sqrt{1+x^2}+x|\right) + C.$$