高数 A 第 8 次作业

韩雨潜

2025 年 11 月 17 日

11.11 日作业

例 4

证明不等式:$\mathrm{e}^x > 1 + x$, $(x \neq 0)$

证明. 设函数 $f(x) = \mathrm{e}^x - (1 + x)$, 则

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$$

当 $x > 0$ 时,$f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0$; 当 $x < 0$ 时,$f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0$. 综上所述, 当 $x \neq 0$ 时,$f(x) > 0$, 即 $\mathrm{e}^x > 1 + x$.

□

4.1.4

应用拉格朗日中值定理证明下列不等式:

- (1)$|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$;
- (2)$|\tan y - \tan x| \geq |y - x|, \quad x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
- (3)$\frac{b-a}{b} < \ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{a}, \quad 0 < a < b.$

证明. (1) 设 $f(x) = \sin x$, 则 $f'(x) = \cos x$, 由拉格朗日中值定理, 存在 ξ 介于 x 与 y 之间, 使得

$$\frac{\sin x - \sin y}{x - y} = f'(\xi) = \cos \xi$$

所以 $|\sin x - \sin y| = |\cos \xi||x - y| \leq |x - y|$.

(2) 设 $f(x) = \tan x$, 则 $f'(x) = \sec^2 x$, 由拉格朗日中值定理, 存在 η 介于 x 与 y 之间, 使得

$$\frac{\tan y - \tan x}{y - x} = f'(\eta) = \sec^2 \eta$$

所以 $|\tan y - \tan x| = |\sec^2 \eta||y - x| \geq |y - x|$.

(3) 设 $f(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, 由拉格朗日中值定理, 存在 ζ 介于 a 与 b 之间, 使得

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} = f'(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$$

所以

$$\frac{\ln b - \ln a}{b - a} < \frac{1}{a}, \quad \frac{\ln b - \ln a}{b - a} > \frac{1}{b}$$

即

$$\frac{b - a}{b} < \ln \frac{b}{a} < \frac{b - a}{a}, \quad 0 < a < b.$$

□

4.1.6

设 $c_1, c_2, \ldots, c_n$ 为任意实数，证明：函数 $f(x) = c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \cdots + c_n \cos nx$ 在区间 $(0, \pi)$ 内必有根。

证明. 考虑函数 $g(x) = c_1 \sin x + \dfrac{c_2}{2} \sin 2x + \cdots + \dfrac{c_n}{n} \sin nx$, 且

$$g(0) = g(\pi) = 0$$

由罗尔定理, 存在 $\xi \in (0, \pi)$, 使得 $g'(\xi) = 0$, 即

$$c_1 \cos \xi + c_2 \cos 2\xi + \cdots + c_n \cos n\xi = 0$$

所以函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内必有根。

□

4.1.7

设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内可微，且 $g'(x) \neq 0$，且

$$\begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in (a, b)$$

证明：存在常数 c，使得 $f(x) = cg(x)$，$\forall x \in (a, b)$。

证明. 由行列式的性质, 有

$$f(x)g'(x) - f'(x)g(x) = 0$$

即

$$(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} = 0$$

所以 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在区间 (a,b) 内为常数, 即存在常数 c, 使得 $f(x) = cg(x), \forall x \in (a,b)$.

□

4.1.10

证明不等式

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x, \quad \forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$$

证明. 设 $f(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x$, 则

$$f'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

因为 $\cos x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 且 $\cos 0 = 1 > \frac{2}{\pi}$, $\cos\frac{\pi}{2} = 0 < \frac{2}{\pi}$, 所以存在唯一的 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_0) = 0$. 当 $x \in (0, x_0)$ 时,$f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 0$, 所以 $f(x) > 0$; 当 $x \in (x_0, \frac{\pi}{2})$ 时,$f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, 且 $f(\frac{\pi}{2}) = 1 - 1 = 0$, 所以 $f(x) > 0$. 综上所述,$f(x) > 0$, 即 $\sin x > \frac{2}{\pi}x$.

设 $g(x) = x - \sin x$, 则

$$g'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 且 $g(0) = 0$, 所以 $g(x) > 0$, 即 $\sin x < x$.

□

4.1.11

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可微，证明：对于任意一点 $x_0 \in (a,b)$，若极限 $\lim_{x\to 0} f'(x)$ 存在，则该极限等于 $f'(x_0)$。

证明. 由拉格朗日中值定理, 对于任意 $x \in (a,b)$, 存在 ξ 介于 x 与 x_0 之间, 使得

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi)$$

当 $x \to x_0$ 时,$\xi \to x_0$, 所以

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\xi\to x_0} f'(\xi) = \lim_{x\to 0} f'(x)$$

即 $f'(x_0) = \lim_{x\to 0} f'(x)$.

□

11.13 日作业

例 9

求极限 $\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$

解： 通分，洛必达，得到：

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x\ln x+x-1}=\frac{1}{2}$$

例 10

求极限 $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

解： 取对数得到

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\sin x-\ln x}{x^2}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cot x-\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^2\sin x}$$

继续洛必达

$$=\lim_{x\to 0^+}-\frac{1}{6}\frac{\sin x}{x}=-\frac{1}{6}$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

例 11

求极限 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{\cos x}$

解： 取对数得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\cos x\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\sec x}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x/\tan x}{\sec x\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x}=0$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^0=1$.

习题

4.2.8 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\tan x)^{2x-\pi}$

解　取对数得到

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2x-\pi)\ln(\tan x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\frac{1}{2x-\pi}}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec^2 x/\tan x}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot 2}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}-\frac{(2x-\pi)^2\sec^2 x}{2\tan x}=0$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^0=1$.

4.2.9 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a^{\frac{1}{x}}-1\right)x$

解

$$=\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to 0}a^x\ln a=\ln a$$

4.2.14 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

解　取对数得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln x}\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{\frac{\pi}{2}-\arctan x}\cdot\frac{x}{1}=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x}{(1+x^2)\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}$$

注意到 $\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\ \dfrac{1}{x}$ 当 $x\to+\infty$ 时, 所以

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{x^2}{1+x^2}=-1$$

所以原极限为 e^{-1}.

4.2.18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^x$

解　取对数得到

$$\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}{\frac{1}{x}}$$

洛必达

$$=\lim_{x\to+\infty}-\frac{\frac{1}{1+x^2}}{\arctan x}\cdot x^2=-\frac{2}{\pi}$$

所以原极限为 $\mathrm{e}^{-\frac{2}{\pi}}$.

例 8

设 $m \in \mathbb{N}, m > 1$，求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}\right]$

解： 注意到

$$(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} = x + \frac{1}{m} + o(1)$$
$$(x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}} = x - \frac{1}{m} + o(1)$$

所以

$$\lim_{x\to\infty}\left[(x^m + x^{m-1})^{\frac{1}{m}} - (x^m - x^{m-1})^{\frac{1}{m}}\right] = \frac{2}{m}$$

例 9

求函数 $f(x) = \cos 2x \cdot \ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开，至 x^4 项。

解： 计算得到

$$f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + o(x^4)$$

例 10

设 $f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$, 求 $f^{(4)}(0)$.

解：

$$f(x) = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{\cos x - 1} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}x^2 + \frac{\mathrm{e}}{6}x^4 + o(x^4)$$

所以 $f^{(4)}(0) = \dfrac{4!}{6}\mathrm{e} = 4\mathrm{e}$.