高数 A 第 6 次作业

韩雨潜

2025 年 10 月 26 日

10.21 日作业

例 1

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}\,dx$。

解： 分解分母得 $x^3-2x^2-3x=x(x-3)(x+1)$，故

$$\frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}.$$

解得 $A=1,B=\dfrac{3}{2},C=-\dfrac{1}{2}$，故

$$\int \frac{5x-3}{x^3-2x^2-3x}\,dx=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{3/2}{x-3}-\frac{1/2}{x+1}\right)dx$$

$$=\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-3|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C.$$

例 2

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx$。

解： 分解分母得 $x(x-1)^3$，故

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}.$$

解得 $A=-1,B=2,C=1,D=2$，故

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}\,dx=\int\left(\frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2}{(x-1)^3}\right)dx$$

$$=-\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+C.$$

例 3

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx$。

解： 分解分母得 $x^3+4x=x(x^2+4)$，故

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

解得 $A=1,B=-1,C=0$，故

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{x^3+4x}\,dx&=\int\left(\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+4}\right)dx\\&=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+4|+C.\end{aligned}$$

例 4

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}\,dx$。

解： 分解分母得 $x(x^2+2)^2$，故

$$\frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}.$$

解得 $A=\frac{1}{2},B=-\frac{1}{2},C=1,D=0,E=-2$，故

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2+2)^2}\,dx&=\int\left(\frac{1/2}{x}+\frac{-1/2x+1}{x^2+2}+\frac{-2}{(x^2+2)^2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln|x^2+2|+\frac{1}{x(x^2+2)}-\frac{1}{2x}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

例 5

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx$。

解： 注意到 $\dfrac{x^3}{x^2+x-2}=x-1+\dfrac{3x+2}{x^2+x-2}$，分解分母得 $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$，故

$$\frac{3x+2}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}.$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=\frac{8}{3}$，故

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{x^2+x-2}\,dx&=\int\left(x-1+\frac{1/3}{x-1}+\frac{8/3}{x+2}\right)dx\\&=\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{8}{3}\ln|x+2|+C.\end{aligned}$$

例 6

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1}\, dx$。

解： 置 $t \to \tan\frac{x}{2}$，则 $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$，且 $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$，故

$$\int \frac{\cot x}{\sin x + \cos x - 1}\, dx = \int \frac{1+t}{2t^2}dt = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right) dt$$
$$= -\frac{1}{2t} + \frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2\tan\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}\ln|\tan\frac{x}{2}| + C.$$

例 7

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$。

解： 置 $t \to \sin x$，则 $dt = \cos x\, dx$，故

$$\int \frac{\sin x \cos x}{1+\sin^2 x}\, dx = \int \frac{t}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{1+t^2}\, dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1+t^2| + C = \frac{1}{2}\ln(1+\sin^2 x) + C.$$

例 8

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$。

解： 置 $t \to \tan x$

$$= \int \frac{dx}{1+\tan x} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t} - \frac{t-1}{1+t^2}dt$$
$$= \frac{1}{2}\ln|1+t| - \frac{1}{4}\ln|1+t^2| + \frac{1}{2}\arctan t + C$$
$$= \frac{1}{2}(\ln|\sin x + \cos x| + x) - C$$

例 9

求不定积分 $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$。

解： 利用降幂公式，得

$$\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx$$
$$= \frac{1}{8}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)(1+\cos 2x)\, dx$$
$$= \frac{1}{16}(x - \frac{1}{3}\sin^3 2x - \frac{1}{4}\sin 4x) + C$$

例 10

求不定积分 $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}$。

解： 置 $t=\sqrt[3]{3x+2}$，则 $dt=\dfrac{1}{t^2}dx$，且 $3x+\sqrt[3]{3x+2}=t^3-2+t=t^3+t-2$，故

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}=\int \frac{t^2}{t^3+t-2}\,dt.$$

分解分母得 $t^3+t-2=(t-1)(t^2+t+2)$，故

$$\frac{t^2}{t^3+t-2}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2}.$$

解得 $A=\dfrac{1}{4},B=\dfrac{3}{4},C=\dfrac{1}{2}$，故

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}=\int\left(\frac{1/4}{t-1}+\frac{(3/4)t+1/2}{t^2+t+2}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\ln|t-1|+\frac{3}{8}\ln|t^2+t+2|+\frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

带入 $t=\sqrt[3]{3x+2}$，得

$$\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{3x+2}}=\frac{1}{4}\ln|\sqrt[3]{3x+2}-1|+\frac{3}{8}\ln|(\sqrt[3]{3x+2})^2+\sqrt[3]{3x+2}+2|+\frac{1}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2\sqrt[3]{3x+2}+1}{\sqrt{7}}+C.$$

例 11

求不定积分 $\displaystyle\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$。

解： 置 $t=\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$，则 $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$，且 $dx=\dfrac{4t}{(1-t^2)^2}dt$，故

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot t\cdot\frac{4t}{(1-t^2)^2}dt=4\int\frac{t^2(1+t^2)}{(1-t^2)^3}dt.$$

解得

$$\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx=\frac{x-2}{2}\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C$$

10.23 日作业

例 2

求定积分

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$$

解： 利用分部积分法，得

$$\begin{aligned}I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx \\ &= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \\ &\Rightarrow I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.\end{aligned}$$

解得

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为奇数}. \end{cases}$$

例 7

求定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx$$

解： 注意到

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x e^x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx,$$

$$\Rightarrow 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx.$$

得

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

例 8

求定积分 $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$。

解： 注意到被积函数为奇函数，故

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx = 0.$$

例 10

求定积分 $\displaystyle\int_{-2}^{2} (x\sin^4 x + x^3 - x^4)\,dx$。

解： 注意到 $x\sin^4 x$ 和 x^3 为奇函数，$-x^4$ 为偶函数，故

$$\int_{-2}^{2}(x\sin^4 x + x^3 - x^4)\,dx = \int_{-2}^{2} -x^4\,dx = -2\int_0^2 x^4\,dx = -\frac{64}{5}.$$

例 12

求定积分 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin 2x|\,dx$。

解： 注意到在区间 $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ 上，$\sin 2x \le 0$，故

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} |\sin 2x|\,dx = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin 2x\,dx = \frac{1}{2}\cos 2x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1.$$

习题 17

计算定积分

$$\int_0^{\pi} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\,dx \quad (a > 0).$$

解： 分部积分得

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\,dx &= x\ln(x + \sqrt{x^2+a^2})\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx \\ &= \pi\ln(\pi + \sqrt{\pi^2+a^2}) - \left(\sqrt{x^2+a^2}\Big|_0^{\pi}\right) \\ &= \pi\ln(\pi + \sqrt{\pi^2+a^2}) - (\sqrt{\pi^2+a^2} - a).\end{aligned}$$

习题 21

利用定积分的分部积分公式证明：若函数 $f(x)$ 连续，则

$$\int_0^x (\int_0^t f(x)\,dx)\,dt = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt.$$

证： 设 $F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$，则由分部积分公式得

$$\begin{aligned}\int_0^x F(t)\,dt &= F(t)\cdot t\Big|_0^x - \int_0^x f(t)\cdot t\,dt \\ &= x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x f(t)\cdot t\,dt = \int_0^x f(t)(x-t)\,dt.\end{aligned}$$

习题 23

求定积分 $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$。

解： 利用对称性，得

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_0^\pi \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

$$\Rightarrow 2\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx.$$

利用置换 $t=\cos x$，得

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \int_1^{-1} \frac{-dt}{1+t^2} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t\big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}.$$

故

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}.$$