第四次习题课答案

VioletHan

2025 年 10 月 1 日

题 17. 证明对任何 $a>1, b>0, c>0$ 有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^c}{x^b}=0$$

证明. 对于第一个极限，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^x}{x^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a}{x}\right)^x=0$$

对于第二个极限，我们有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^b}{a^x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^{b/x}}{a}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{b\ln x}{x}}}{a}\right)^x=0$$

第三个极限类比第二个极限即可

□

题 18. 证明

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=1$$

证明. 考虑题 17.3，置 $y=\frac{1}{x}$, 取 $c=1, b=1$，则有 $\lim_{y\to 0^+}y\ln y=0$，所以我们有

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$$

□

题 19. 证明对多项式 f 有

$$\lim_{x\to 0} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

证明. 不难发现，对任意多项式 $f(x)$，$\lim_{x\to 0} f(x) = C$，其中 C 为常数。又因为 $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = C \cdot 0 = 0$$

□

题 20. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$$

证明. 我们考虑 $x = n + \{x\}$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$，则有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\{x\}}\right)^{n+\{x\}} \le \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \mathrm{e}$$

我们还有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\{x\}}\right)^{n+\{x\}} \ge \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} = \mathrm{e}$$

□

题 21. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

解： 置 $y = \frac{1}{x}$, 则有

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})} = \lim_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = \mathrm{e}^0 = 1$$

题 22. 对于关于 x 的两个多项式 $p(x), q(x)$，计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

解： 类别整数情况即可

题 23.

证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在，以此证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

证明. 考虑 $n+1$ $-n$ ，我们有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

利用不等式 $ln(1+x)>\frac{x}{1+x}$，我们有

$$\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=0$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ 是递减序列，考虑

$$\ln n=\ln 1+\ln\frac{2}{1}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n$ 有下界，故极限存在。

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$

□

题 24. 对连续函数 $f(x)$，若 (这里 a 为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

证明. 取 $M>0$，当 $x>M$ 时，有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{M,\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil\}$，即

$$A-\varepsilon<f(x+1)-f(x)<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<f(x)-f(x-1)<A+\varepsilon$$

$$\cdots$$

$$A-\varepsilon<f(\{x\}+N+1)-f(\{x\}+N)<A+\varepsilon$$

累加得到

$$(A-\varepsilon)(x-(\{x\}+N+1))<f(x)-f(\{x\}+N+1)<(A+\varepsilon)(x-(\{x\}+N+1))$$

即

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\{x\}+N+1)}{x-(\{x\}+N+1)}<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\{x\}+N+1)}{x}}{1-\frac{\{x\}+N+1}{x}}<A+\varepsilon$$

不难发现，此即等价于

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

□

注：此后我们将自由使用 **Stolz 公式**

题 25. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}$$

解： 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3(1+\frac{1}{x^3})}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$$

另解）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})}{x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})}=1$$

题 26. 计算

考虑满足递推关系

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 > 0,$$

的数列 $\{a_n\}$。证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

并进一步证明 a_n 是一个 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大。

证明. 取 $b_n = \frac{1}{a_n}$，则有

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n}} = \frac{b_n}{1+b_n^2} < b_n$$

故 a_n 递增，且注意到 $a_1 > 0$，所以 $a_n > 0$。

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$$

所以 $a_n^2 > 2n - 2 + a_1^2$，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 观察到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} > \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-2+a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

取 $t = \max\{3, 2 + \frac{1}{a_1^2}\}$，则有

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} \le a_n^2 + t$$

所以 $a_n^2 \le tn - t + a_1^2$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{tn-t+a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t}$$

t 为有限值，则 $a_n = O(\sqrt{n})$

□

题 27. 对正实数 a 与实数 α，计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

解: 略

题 28. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

解：

- 对于第一个极限，考虑

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} a\exp\left(\frac{\ln\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} a\exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}+o(x)\right)}{x}\right)$$

$$= a\exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}+o(x)}{x}\right) = a\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}\right) = \sqrt{ab}$$

- 对于第二个极限，不妨设 $a > b$，考虑

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} a\exp\left(\frac{\ln\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x}\right) = a\exp(0) = a$$

  所以极限为 $max\{a, b\}$

题 29. 计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln\left(1-x^2\right)}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}.$$

解：

- 对于第一个极限，考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln\left(1-x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)}{x-x^2+o(x^2)} = lim_{x\to 0}\frac{5x+o(x)}{x+o(x)} = 5$$

- 对于第二个极限，考虑

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)-2(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{8x^3}{6}+\frac{2x^3}{6}+o(x^3)}{x^3} = -1$$

题 30.

若对任何实数 x 有

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)| \leq |\sin x|$$

证明

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \leq 1$$

证明. 考虑 $x \to 0^+$，则有

$$\lim_{x \to 0^+} \left| \frac{a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)}{\sin x} \right| = |a_1 + 2a_2 + 3a_3| \leq 1$$

□

题 31.

若 f, g 为连续函数，且 (A, B, C为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x \to A} f(x) = B, \lim_{t \to C} g(t) = A,$$

则

$$\lim_{t \to C} f(g(t)) = B$$

证明. trivial

□

题 32.

设 A, B为实数或确定符号的无穷，则

$$\lim_{x \to A} f(x) = B$$

当且仅当对任何数列满足

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A$$

且 $a_n \neq A$(若 A 为无穷，不等直接成立) 的数列 a_n，都有

$$\lim_{n \to \infty} f(a_n) = B$$

证明. • 必要性证明略

- 充分性证明

  我们假设 $\lim_{x\to A} f(x) \neq B$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意 $\delta > 0$，都存在 x_0 使得 $|x_0 - A| < \delta$ 且 $|f(x_0) - B| \geq \varepsilon$。

  取 $\delta = \frac{1}{n}$，则存在 x_n 使得 $|x_n - A| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - B| \geq \varepsilon$，则有 $\lim_{n\to\infty} x_n = A$，但 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，与题意矛盾。

无穷情况同理))

$\square$

题 33. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$$

解： 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\exp[\sqrt{n+1}\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})] = \lim_{n\to\infty}\exp[\sqrt{n+1}(-\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}}))] = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

题 34. 计算

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x)^{\tan x}$$

解： 考虑

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x)^{\tan x} = \lim_{x\to 0^-}(\cos x)^{\cot x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-}\exp(\cot x\ln(\cos x)) = \lim_{x\to 0^-}\exp(\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(\sqrt{1-x^2})}{x}) = \exp(0) = 1$$

题 35. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)(\ln(x^2+x)-2\ln(x+1))$$

解： 考虑

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)(2\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})-2\ln x-2\ln(1+\frac{1}{x})) = \lim_{x\to+\infty}-(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$

$$= \lim_{x\to+\infty}-(x+1)(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x})) = -1$$

题 36. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

并找正实数 k 使得极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

为非零常数

证明. 和差化积

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}x^k 2\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})=\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})=0$$

所以极限为 0 对于后者，笔者不会了，怎么看都震荡（哭了

□