高数 A 第 3 次作业

2025 年 9 月 25 日

9.23 日作业

习题 1.4:5

给出

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty 及 \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$$

的严格定义。

解：

- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ 的定义：对于任意给定的正数 M，都存在一个对应的正数 δ，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，就有 $f(x) > M$。
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ 的定义：对于任意给定的负数 N，都存在一个对应的负数 M，当 $x < M$ 时，就有 $f(x) < N$。

习题 1.5:4　适当选取 a，使下列函数处处连续

(1) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+x^2}, & x < 0, \\ a + x, & x \geq 0; \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} \ln(1+x), & x \geq 1, \\ a\cos(\pi x), & x < 1. \end{cases}$

解：　对于（1），由连续性的定义，需满足

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0).$$

注意到

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \sqrt{1+0^2} = 1, \quad f(0) = a + 0 = a,$$

所以 $a=1$ 时，函数处处连续。

对于（2），同样由连续性的定义，需满足

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

注意到

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a\cos(\pi\cdot 1) = -a, \quad f(1) = \ln(1+1) = \ln 2,$$

所以 $a=-\ln 2$ 时，函数处处连续。

习题 1.5:5 利用初等函数的连续性及定理 3 求下列极限

- **(2)** $\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}}$

  解：

$$\lim_{x\to 2} x^{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 2} e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 2}\sqrt{x}\ln x} = e^{\sqrt{2}\ln 2} = 2^{\sqrt{2}}.$$

- **(5)** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|}$

  解：

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-2})|x|} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{3|x|}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-2}}}$$
$$= \sqrt{\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}}} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

习题 1.5 :7 指出下列函数的间断点及其类型，若是可去间断点，请去掉间断性

- **(1)** $f(x) = \cos\big(\pi\,(x-\lfloor x\rfloor)\big)$

  解： 第一类不可去间断点，间断点为 $x\in\mathbb{Z}$。

- **(2)** $f(x) = sgn(\sin x)$

  解： 第一类不可去间断点，间断点为 $x=n\pi$，其中 $n\in\mathbb{Z}$。

例 3

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续。若 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一一映射，即

$$x \neq x' \implies f(x) \neq f(x'),$$

则 $f(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调的。

证明. 反证法。假设 $f(x)$ 在 (a,b) 上不严格单调，则存在 $x_1, x_2, x_3 \in (a,b)$，使得 $x_1 < x_2 < x_3$ 且

$$f(x_1) \leq f(x_2), \quad f(x_2) \geq f(x_3).$$

或

$$f(x_1) \geq f(x_2), \quad f(x_2) \leq f(x_3).$$

不妨假设是前者，取 y 使得 $max\{f(x_1), f(x_3)\} < y < f(x_2)$，则由介值定理，存在 $c_1 \in (x_1, x_2), c_2 \in (x_2, x_3)$，使得 $f(c_1) = y = f(c_2) \geq max\{f(x_1), f(x_3)\}$

我们发现，这与 $f(x)$ 在 (a,b) 上是一一映射矛盾，因此 $f(x)$ 在 (a,b) 上是严格单调的。 □

习题 1.6:1

证明：任意一个奇数次实数系多项式至少有一个实根

证明. 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，其中 n 为奇数，$a_n \neq 0$。

$f(x)$ 可化为：

$$f(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$；当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$。由介值定理，存在 $c \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(c) = 0$。因此，任意一个奇数次实数系多项式至少有一个实根。

□

习题 1.6:2

设 $0 < \epsilon < 1$, 证明：对于任意一个实数 y_0, 方程

$$y_0 = x - \epsilon \sin x$$

有解，并且解是唯一的。

证明. 定义函数 $f(x) = x - \epsilon \sin x$，显然 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续。

当 $x \to +\infty$ 时，$f(x) \to +\infty$；当 $x \to -\infty$ 时，$f(x) \to -\infty$。由介值定理，存在 $c \in (-\infty, +\infty)$ 使得 $f(c) = y_0$，即方程 $y_0 = x - \epsilon \sin x$ 有解。

下证解的唯一性，等价于证明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是一一映射。

我们任取 $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$，且 $x_1 \neq x_2$，不妨设 $x_1 < x_2$，则

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) - \epsilon(\sin x_2 - \sin x_1).$$

由于 $\epsilon \in (0,1)$，所以 $|\sin x_2 - \sin x_1| \leq |x_2 - x_1|$，因此

$$f(x_2) - f(x_1) \geq (x_2 - x_1) - \epsilon|x_2 - x_1| = (1-\epsilon)(x_2 - x_1) > 0.$$

这说明 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调的，因此解是唯一的。

$\square$

1 9.25 日作业

习题 2.1:6

离地球中心 r 处的重力加速度 g 是 r 的函数，其表达式为

$$g(r)=\begin{cases}\dfrac{GM}{R^3}r, & r<R,\\ \dfrac{GM}{r^2}, & r\geq R,\end{cases}$$

其中 R 是地球半径，M 是地球质量，G 为万有引力常数。

- **(1)** 问:$g(r)$ 在 $r=R$ 处连续吗？

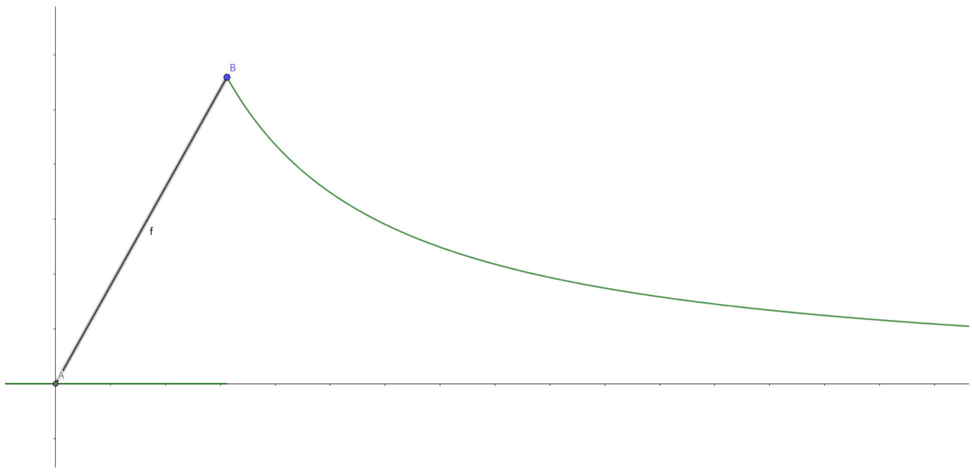
  解： $g(R)=\frac{GM}{R^2}$，计算左极限和右极限：

$$\lim_{r\to R^-} g(r)=\frac{GM}{R^3}R=\frac{GM}{R^2},$$

$$\lim_{r\to R^+} g(r)=\frac{GM}{R^2}.$$

  因此 $g(r)$ 在 $r=R$ 处连续。

- **(2)** 做出 $g(r)$ 的草图。



- **(3)**$g(r)$ 是否为 r 的可导函数？

  解： 只需考虑 $r=R$ 处的可导性，计算左导数和右导数：

$$\lim_{r\to R^-}\frac{g(r)-g(R)}{r-R}=\lim_{r\to R^-}\frac{\frac{GM}{R^3}r-\frac{GM}{R^2}}{r-R}=\lim_{r\to R^-}\frac{GM}{R^3}=\frac{GM}{R^3},$$

$$\lim_{r\to R^+}\frac{g(r)-g(R)}{r-R}=\lim_{r\to R^+}\frac{\frac{GM}{r^2}-\frac{GM}{R^2}}{r-R}=\lim_{r\to R^+}GM\frac{R^2-r^2}{r^2R^2(r-R)}=\lim_{r\to R^+}GM\frac{-(r+R)}{r^2R^2}=-\frac{2GM}{R^3}.$$

  由于左导数和右导数不相等，$g(r)$ 在 $r=R$ 处不可导，因此 $g(r)$ 不是 r 的可导函数。

习题 2.1:10

若函数 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 上有定义，并且满足 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数。设 $f(x)$ 是偶函数，且 $f'(0)$ 存在，证明：$f'(0)=0$。

证明. 我们计算左导数和右导数：

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-(f(-h)-f(0))}{-h}=-\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}.$$

由于 $f'(0)$ 存在，左导数和右导数相等，因此

$$f'(0)=-f'(0)\implies f'(0)=0.$$

□

习题 2.1:13

求函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

在点 $x=0$ 处的左、右导数

解： 计算左导数：

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=1.$$

计算右导数：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{h}{1+e^{\frac{1}{h}}}-0}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}}=0.$$

例 11，例 12

- **例 11** 求函数 $y=x^x$ 的导数

  解：

  $$y=x^x=e^{x\ln x}$$

  $$\frac{dy}{dx}=e^{x\ln x}(\ln x+1)=x^x(\ln x+1).$$

- **例 12** 设函数

  $$y=\sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2\,(x-4)}},$$

  求 y'。

解： 取对数：

$$\ln y = \frac{1}{3}\left(2\ln(x+1) + \ln(2-x) - 2\ln(3-x) - \ln(x-4)\right).$$

两边求导：

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4}\right).$$

因此

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4}\right)$$

$$= \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2(2-x)}{(3-x)^2\,(x-4)}} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{2-x} + \frac{2}{3-x} - \frac{1}{x-4}\right).$$

习题 2.2:3

求下列函数的导数：

- **(8)** $y = \cos\left(\sqrt[5]{1+x^2}\right)$

解：

$$\frac{dy}{dx} = -\sin\left(\sqrt[5]{1+x^2}\right) \cdot \frac{1}{5}(1+x^2)^{-\frac{4}{5}} \cdot 2x = -\frac{2x\sin\left(\sqrt[5]{1+x^2}\right)}{5(1+x^2)^{\frac{4}{5}}}.$$

- **(9)** $y = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

习题 2.2:4

求下列函数的导数：

- **(5)** 设 $a > 0$，函数

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} \quad (a > 0).$$

解：

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{x}{2} \cdot \frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{a^2}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{a^2-x^2} \quad (|x| < a).$$

- **(6)** 设 $a > 0$，函数

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{a} \quad (a > 0).$$

解:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}=\sqrt{x^2+a^2}\quad(x\in\mathbb{R}).$$

- **(8)** 设 $a>b\geq 0$，函数

$$y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\Big(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\ \tan\frac{x}{2}\Big),\quad (a>b\geq 0).$$

解: 设 $u=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\ \tan\frac{x}{2}$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{1}{1+u^2}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\cdot\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\frac{\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\sec^2\frac{x}{2}}{1+\frac{a-b}{a+b}\tan^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{a+b\cos x}.$$

习题 2.2:6

6. 在图 2.8 的装置中，飞轮的半径为 2 m，且以每秒旋转 4 圈的匀角速度按顺时针方向旋转. 问：当飞轮的旋转角 $\alpha(t)=\frac{\pi}{2}$ 时，活塞向右移动的速度是多少？

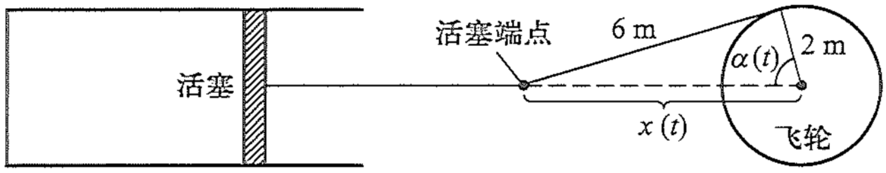


图 2.8

解: 角速度 $\dot{\alpha}$ 为:

$$\dot{\alpha}=4\cdot 2\pi=8\pi\ \text{rad/s}$$

由余弦定理得:

$$6^2=x^2+2^2-2\cdot x\cdot 2\cdot\cos\alpha,$$

即

$$x^2-4x\cos\alpha-32=0.$$

对上式求导:

$$2x\dot{x}-4\dot{x}\cos\alpha+4x\sin\alpha\dot{\alpha}=0,$$

注意到此时 $\alpha=\frac{\pi}{2},\dot{\alpha}=8\pi,x=4\sqrt{2}$，解得

$$\dot{x}=-16\pi\ \text{m/s}.$$

解得速度大小为 16π m/s。