第六次习题课答案

VioletHan

2025 年 10 月 27 日

题 90 略

题 91

证明不存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

证明. 反证法，假设存在 $F(x)$ 使得 $F'(x)=f(x)$。则对于 $x\neq 0$，有 $F'(x)=0$，所以 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 时为常数函数。又有 $F'(0)=1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=1$$

不妨设 $F(0)=0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x}=1$$

然而由于 $F(x)$ 在 $x\neq 0$ 时为常数函数，若其为 0，则 $\dfrac{F(x)}{x}=0$，若其为非零常数 c，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}$ 不存在。综上，均与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}=1$ 矛盾，因此不存在这样的函数 $F(x)$。

□

题 92

求所有函数 $f(x)$ 使得其在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$xf'(x)+f(x)=x^3+1$$

解： 观察到：

$$(xf(x))' = xf'(x) + f(x) = x^3 + 1$$

积分得到：

$$xf(x) = \int (x^3+1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x\,(\text{此处认为}C=0)$$

所以

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + 1$$

题 94

若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(x)$ 恒等于 0，则 $f(x)$ 为常数函数。

证明. 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，不妨设 $x_1 < x_2$。由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

由于 $f'(\xi) = 0$，所以

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_2) = f(x_1)$$

因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为常数函数。

□

题 95

求所有函数 $f(x)$ 使得其在 $\mathbb{R}*$ 上满足 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

解： 积分得到：

$$f(x) = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

题 97

证明 [a,b] 上的黎曼可积函数必有界。

证明. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，取分割 $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, i = 0, 1, \ldots, n$，则 $\exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使得 $f(x)$在$[x_k, x_{k+1}]$ 上无界。则我们取 $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ 使得 $|f(\xi_k)| > n^2$，则对于该分割，有

$$|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i| \geq n^2 \cdot \frac{b-a}{n} = (b-a)n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积矛盾，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

□

题 102

证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积且

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

证明. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P 使得

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

由于 $|f(x)|$ 的上、下和 $f(x)$ 的上、下和的关系，我们有

$$U(|f|,P) - L(|f|,P) \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

因此 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积。

又由于对于任意 $x \in [a,b]$，都有 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

从而得到

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

□

题 103

计算以下函数在任何闭区间 $[a,b]$ 上的积分：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

解： 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅在 $x = 0$ 处取非零值，对于任意分割 P，取任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

因此

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

题 104

考虑函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] 0, & x=0\end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在包含 0 的区间不可积。

证明. 首先证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。对于 $x\neq 0$，显然 $f(x)$ 可导，且

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^+}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x^2}=0$$

因此 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。且 $f'(x)$ 为

$$f'(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0\\[2ex] 0, & x=0\end{cases}$$

注意到

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}\right)\text{不存在}$$

不存在，因此 $f'(x)$ 在包含 0 的区间不可积。

□

题 105

证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对 $x\in(a,b)$ 有

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)'=f(x)$$

证明. 设 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$，则对于任意 $x\in(a,b)$，有

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)\,dt-\int_a^x f(t)\,dt}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)\,dt}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)\,dt=f(x)\end{aligned}$$

题 107

计算导数

$$\left(\int_0^x \sin xt\,dt\right)'$$

解： 设 $F(x) = \int_0^x \sin xt\,dt$，则

$$F(x) = \int_0^x \sin xt\,dt = \left[-\frac{1}{x}\cos xt\right]_0^x = -\frac{1}{x}\cos x^2 + \frac{1}{x}$$

因此

$$F'(x) = \frac{1}{x^2}\cos x^2 + \sin x^2 - \frac{1}{x^2}$$

□