第五次习题课答案

VioletHan

2025 年 10 月 17 日

题 68.

若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f 存在反函数，证明 f 严格单调。

证明. 若存在反函数，则 f 在 $[a,b]$ 上必为单射。

□

题 69.

考虑定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，证明对任何正整数 n，存在 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{n} = f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi)$$

且 ξ 与 $\xi + \dfrac{b-a}{n}$ 都在 $[a,b]$ 中。

证明. 我们考虑反证法，假设不存在这样的 ξ，即对任意 $x \in [a, b - \dfrac{b-a}{n}]$，都有

$$f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x) \neq \frac{f(b)-f(a)}{n}.$$

取 $g(x) = f\left(x + \dfrac{b-a}{n}\right) - f(x)$，则 g 在 $[a, b - \dfrac{b-a}{n}]$ 上连续，且

$$g(a) + g(a + \frac{b-a}{n}) + \cdots + g\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) = f(b) - f(a).$$

由假设，$g(x)$ 要么始终大于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{n}$，要么始终小于 $\dfrac{f(b)-f(a)}{n}$。显然这是不可能的。

因此，存在 $\xi \in [a, b - \dfrac{b-a}{n}]$ 使得

$$f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{n}.$$

□

题 70 (附加).

考虑定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，是否对任何大于 1 的正数 t，一定存在 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{t}=f\left(\xi+\frac{b-a}{t}\right)-f(\xi)$$

且 ξ 与 $\xi+\dfrac{b-a}{t}$ 都在 $[a,b]$ 中？

证明. (其实我不会构造)

反例：取 $f(x)=x^2$，$[a,b]=[0,1]$，$t=1.5$。则

$$\frac{f(b)-f(a)}{t}=\frac{1^2-0^2}{1.5}=\frac{2}{3}.$$

假设存在 $\xi\in[0,1-\dfrac{1}{1.5}]=[0,\dfrac{1}{3}]$ 使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{1.5}\right)-f(\xi)=\frac{2}{3}.$$

则

$$(\xi+\frac{2}{3})^2-\xi^2=\frac{2}{3}\implies\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\xi=\frac{2}{3}\implies\xi=-\frac{1}{6},$$

这与 ξ 应在 $[0,\dfrac{1}{3}]$ 中矛盾。

因此，并非对任何大于 1 的正数 t 都存在这样的 ξ。

□

题 71.

证明 $\sin x=100(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ 在 $x\geq 0$ 上有无穷多个根。

证明. 考虑 $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin x=100$，令 $g(x)=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin x$，则 $g(x)$ 在 $x\geq 0$ 上连续且对于 $x=k\pi$（k 为非负整数）时，$g(k\pi)=0$，而对于 $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ (k足够大) 时，

$$g\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi+1}+\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi})\cdot 1>100,$$

因此由介值定理，$g(x)=100$ 在每个区间 $(k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$ 内至少有一个解, 故原方程有无穷多个根。

□

题 72.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+2} = a \cdot a_{n+1} + b \cdot a_n$$

给出 a_n 存在非零极限的充要条件 (用 a, b, a_0, a_1 表示)。

解： 我们考虑强求通项，

$$x^2 = ax + b = 0 \implies x = \frac{a \pm \sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

设 $x_1 = \dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}, x_2 = \dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$

我们得到第一个条件：$a^2+4b \geq 0$，否则数列振荡无极限。

情况 1： $a^2+4b=0$，则

$$a_n = (A+Bn)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

带入初值，解得

$$A = a_0, \quad B = \frac{2}{a}(a_1 - \frac{a}{2}a_0).$$

若数列存在非零极限，则必有 $\dfrac{a}{2}=1$ 且 $B=0$，即

$$a = 2, \quad a_1 = a_0.$$

情况 2： $a^2+4b>0$，则

$$a_n = A(x_1)^n + B(x_2)^n.$$

带入初值，解得

$$A = \frac{a_1 - a_0x_2}{x_1 - x_2}, \quad B = \frac{a_0x_1 - a_1}{x_1 - x_2}.$$

此时必有 $x_1 = 1$ 且 $|x_2|<1$，否则数列无极限或极限为零。解得

$$a+b=1, \quad |b|<1.$$

综上，数列 a_n 存在非零极限的充要条件为满足以下条件之一

$$\begin{cases} a=2, \quad a_1=a_0, \qquad a^2+4b=0; \\ a+b=1, \quad |b|<1, \quad a^2+4b>0. \end{cases}$$

题 73.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$$

对不同的 $a_0 \geq 0$，讨论数列的极限。

解： 我们考虑函数 $f(x)=\sqrt{2x}$，则数列 a_n 为 f 的迭代。
$f(x)$ 在 $x\geq 0$ 上单调递增，且 $f(x)\geq 0$。
所以 a_n 单调递增。
我们计算不动点得到：

$$x_1=0,\quad x_2=2.$$

情况 1： $a_0=0\,or\,2$，则 $a_n=0\,or\,2$，数列极限为 0 or 2。
情况 2： $a_0>2$，数列极限为 2。
情况 3： $0<a_0<2$，
不难发现 $a_1=\sqrt{2a_0}>a_0$，注意到如下递推关系：

$$a_{n+1}=f(a_n)>a_n;$$

$$a_{n+2}=f(a_{n+1})>fa_n=a_{n+1};$$

归纳得到 a_n 单调递增，趋近于不动点 2，故极限为 2。

题 74.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1}=\sin a_n$$

证明

$$\lim_{n\to\infty}a_n=0$$

并计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$。

证明. 不妨设 $a_1<1$，设 $f(x)=\sin x$，则数列 a_n 为 f 的迭代。$f(x)$ 在 $x\geq 0$ 上单调递增，且 $f(x)\geq 0$。
考虑唯一的不动点 0, 且 $f(x)<x$，所以 a_n 单调递减且收敛于 0.

下面估计 a_n 的阶。

我们考虑 $\dfrac{1}{\sin x}$ 在 $x=0$ 处的泰勒展开：

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

取 $x=a_n$，则

$$\lim_{x\to\infty}na_n^2=\lim_{x\to\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 a_n}-\frac{1}{a_n^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}}$$

注意到如下结果：

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3}+\frac{x^2}{15}+o(x^2).$$

因此

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t}-\frac{1}{t^2}}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{3}+o(1)}=3.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\sqrt{3}$

□

题 75.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1}=ba_n(1-a_n)$$

且 $a_1=\dfrac{1}{2}, b\in(2,3]$, 计算

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

解： 我们考虑函数 $f(x)=bx(1-x)$，则数列 a_n 为 f 的迭代。计算一阶不动点：

$$x=bx(1-x)\implies x_1=0\,and\,x_2=\frac{b-1}{b}.$$

计算二阶不动点：

$$x=f(f(x))\implies x=b^2x(1-x)(1-bx(1-x)).$$

化简得到

$$(b^2-b)x^3+(-2b^2+b)x^2+(b^2-1)x=0.$$

显然 $x=0$ 是一个解，另外两个解为

$$x=\frac{b-1\pm\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}.$$

我们舍去负值的解，记为 $x_3=\dfrac{b-1+\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}>\dfrac{b-1}{b}$。

计算得到

$$a_1=\frac{1}{2}.$$

$$a_2=\frac{b}{4}.$$

$$a_3=\frac{b^2}{4}-\frac{b^3}{16}.$$

$$a_4=\frac{b^3}{16}-\frac{b^4}{32}-\frac{b^5}{64}+\frac{b^6}{256}.$$

简单的比较可知：

$$a_4-a_2=\frac{b^3}{16}-\frac{b^4}{32}-\frac{b^5}{64}+\frac{b^6}{256}-\frac{b}{4}<0,$$

考虑奇子列，不难发现 $a_1 < \dfrac{b-1}{b}$，由前述可知，奇子列收敛于 $\dfrac{b-1}{b}$。
考虑偶子列，$a_2 = \dfrac{b}{4} > \dfrac{b-1}{b}$，并且注意到 $\dfrac{b}{4} < x_3 = \dfrac{b-1+\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}$, 结合 $a_4 < a_2$，由前述可知，偶子列递减收敛于 $\dfrac{b-1}{b}$。

题 76，77 略

题 78

证明可导的周期函数导数为周期函数。
另问：若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 f' 为周期为 T 的函数，是否 f 必有周期 T?

证明. 设 f 的周期为 T，则对任意 $x \in \mathbb{R}$，都有

$$f'(x+T) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

因此 f' 为周期为 T 的函数。

反例：取 $f(x) = x + \sin x$，则 $f'(x) = 1 + \cos x$，显然 f' 为周期为 2π 的函数，但 f 无周期。

□

题 79

举例说明, 若 f 在 (a,b) 上可导

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to b^-} f'(x) = +\infty$$

无法互相推出

解:

- 首先，右无法推左

  取 $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$

  $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to 1^-} f'(x) = +\infty$$

- 其次，左无法推右取 $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{\sin x}$

  $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty, \quad \text{其导函数在 } 0^- \text{ 处极限不存在}$$

题 80.

若 f 在 x_0 处可导，设

$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

证明 $l(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的最佳一次逼近，即对任何一个一次函数 $l_0(x)$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-l(x)|\leq|f(x)-l_0(x)|$$

证明. 自然地，我们考虑 $l_0(x)$ 的形式为 $l_0(x)=m(x-x_0)+f(0)$，其中 m 为常数。由 f 在 x_0 处可导，存在 $\delta_1>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时

$$\mathrm{LHS}=|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|=|x-x_0|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$$\mathrm{RHS}=|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|=|x-x_0|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|.$$

由极限的定义，存在 $\delta_2>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|.$$

□

题 81.

若 $|f(x)|\leq|g(x)|$ 在 $(-1,1)$ 恒成立，且 g 在 0 处可导，$g(0)=g'(0)=0$，证明 f 在 0 处可导并计算 $f'(0)$。

证明. 不难发现 $f(0)=0$，由夹逼准则，$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，所以 f 在 0 处连续。由 $f(0)=g(0)=0$，我们考虑

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}.$$

由 $|f(x)|\leq|g(x)|$，我们有

$$\lim_{x\to0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leq\lim_{x\to0^+}\left|\frac{g(x)}{x}\right|=|g'(0)|=0.$$

所以

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=0.$$

同理我们有

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x}=0.$$

因此 f 在 0 处可导，且 $f'(0)=0$。

□

题 82.

设

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\mathbb{Q}\\ x^2+x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

计算 $f'(0)$。

解： 考虑海涅准则，我们将定义域内收敛于 0 的序列分为两种，分别为有理数列和无理数列。

- 对于有理序列 $\{x_n\}$，则

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-0}{x_n-0}=1.$$

- 对于无理序列 $\{y_n\}$，则

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n^2+y_n-0}{y_n-0}=\lim_{n\to\infty}(y_n+1)=1.$$

综上，$f'(0)=1$。

题 83 (附加).

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

解：

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i/n}=\int_1^2\frac{1}{x}\,dx=\ln 2.$$

题 84

计算 $f(x)=\arctan x$ 在 0 处的 n 阶导数值。

解： 我们将 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开为几何级数

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}=1-x^2+x^4-x^6+\cdots$$

积分得到

$$\arctan x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$$

所以 n 阶导数值即为：

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ (-1)^k\cdot(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$$

题 85

计算 $f(x)=\arcsin x$ 在 0 处的 n 阶导数值。

解： 我们将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 展开为二项式级数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}x^{2k}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots$$

积分得到

$$\arcsin x=\int_0^x\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!x^{2k+1}}{4^k(k!)^2(2k+1)}=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{40}x^5+\cdots$$

所以 n 阶导数值即为：

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k\\ \dfrac{((2k)!)^2}{4^k(k!)^2}, & n=2k+1\end{cases}$$

题 86

设

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$$

计算 $f^{(n)}(0)$。

解： 我们先计算 $f'(x)$：

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}, & x\neq 0\end{cases}$$

同理可得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ P_n(x)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$$

其中 $P_n(x)$ 为 n 阶多项式。因此

$$f^{(n)}(0)=0.$$

题 87

对正整数 n, 设 $f_n(x)=x^n\ln x$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$$

解： 我们先计算 $f_n^{(n)}(x)$，由莱布尼兹公式可得

$$f_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}.$$

注意到

$$(x^n)^{(k)}=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, & k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

$$(\ln x)^{(n-k)}=\begin{cases}(-1)^{n-k-1}\dfrac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}, & n-k\ge 1\\ \ln x, & n-k=0\end{cases}$$

所以

$$f_n^{(n)}(x)=n!\ln x+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}.$$

$$=n!\ln x+n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\binom{n}{k}.$$

因此

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}=\ln\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\binom{n}{k}.$$

$$=-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$$

我们考虑和式

$$\frac{1-(1-x)^n}{x}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}x^{k-1}.$$

对上式两边积分，得到

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}.$$

注意到

$$\int_0^1\frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx=\int_0^1\frac{1-t^n}{1-t}\,dt=\int_0^1(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})\,dt=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

所以

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = -\ln n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

由前述可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = \gamma,$$

其中 γ 为欧拉常数。

题 88

设 $y = f(x)$ 是由

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

确定的函数，计算 $f''(x)$。

解： 由 $x = \ln(1+t^2)$，我们有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

由 $y = t - \arctan t$，我们有

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

题 89

设 $y = f(x)$ 是由

$$x^2 + y^2 + xy = 1$$

确定的可导函数，计算 $f''(x)$。

解： 对 x 求导，得到

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{2y+x}.$$

对 x 再次求导，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2+\frac{dy}{dx})(2y+x) - (2x+y)(\frac{dy}{dx}+1)}{(2y+x)^2}.$$

带入 $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{2y+x}$ 得到:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3(2y^2+2xy+2x^2)}{(2y+x)^3} = -\frac{6}{(2y+x)^3}.$$