第七次习题课答案

VioletHan

2025 年 10 月 28 日

我们要先统计一些常用的积分公式:

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,\\
&\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C,\\
&\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\\
&\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

不定积分计算

- (111) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

  解:

$$
=\int \frac{d(\sqrt{x^2-1})}{x^2}=\int \frac{d(\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})^2+1}=\arctan(\sqrt{x^2-1})+C
$$

- (112) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$

  解:

$$
=\int (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\,dx=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C
$$

- (113) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\,dx$

解： 考虑万能公式

$$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

则原式化为

$$\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int\frac{2(1-t^2)}{2(1-t^2)+10t}dt=\int\frac{2-2t^2}{2-2t^2+10t}dt$$

分离常数项

$$=\int\frac{-10t+(2+10t-2t^2)}{2-2t^2+10t}dt=\int\left(-1+\frac{5t}{-t^2+5t+1}\right)dt$$

$$=-t-\frac{5}{2}\int\frac{d[(t-\frac{5}{2})^2]}{(t-\frac{5}{2})^2-\frac{29}{4}}-\frac{25}{2}\int\frac{dt}{(t-\frac{5}{2})^2-\frac{29}{4}}$$
$$=......$$

- (114) $\displaystyle\int\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$

解： 设 $I_n=\displaystyle\int\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx$，则

$$I_n-I_{n-2}=\int\frac{\sin nx-\sin{(n-2)x}}{\sin x}\,dx=\int\frac{2\sin x\cos(n-1)x}{\sin x}\,dx=2\int\cos(n-1)x\,dx$$

$$=\frac{2}{n-1}\sin(n-1)x+C$$

- (115) $\displaystyle\int\frac{dx}{e^x-1}$

解：

$$=\int\frac{e^{-x}dx}{1-e^{-x}}=\int\frac{d(1-e^{-x})}{1-e^{-x}}=\ln|1-e^{-x}|+C$$

- (117) $\displaystyle\int\frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$

解： 设 $t=\arctan x$，则 $dt=\dfrac{1}{1+x^2}dx$，且 $1+x^2=\sec^2 t$，所以原式化为

$$\int e^t\cos^3 t\,dt$$

反复分部即可

- (118) $\displaystyle\int\frac{x\tan x}{\cos^2 x}\,dx$

解： 分部积分，注意到 $\dfrac{1}{\cos^2 x}$ 的原函数为 $\tan x$，所以

$$= x\tan^2 x - \int \tan^2 x\, dx$$

$$= x\tan^2 x - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = x\tan^2 x - \tan x + x + C$$

- (119) $\displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\, dx$

解： 设 $I = \displaystyle\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\, dx$，分部积分

$$I = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$$

令 $t = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $dt = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$，且 $x = \sinh t$，所以

$$I = xt^2 - 2\int \sinh t \cdot t\, dt$$

继续分部积分

$$= xt^2 - 2(t\cosh t - \int \cosh t\, dt) + C$$

$$= xt^2 - 2t\cosh t + 2\sinh t + C$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2} + 2x + C$$

- (120) $\displaystyle\int \sin^n x\, dx$(求出关于 n 的递推关系)

解： 设 $I_n = \displaystyle\int \sin^n x\, dx$，则

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\, dx$$

分部积分得

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\, dx$$

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$$

整理得

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} + C$$

- (121) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^3}\, dx$

解： 分解因式

$$=\int \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}\,dx$$

设

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}=\frac{A}{1+x}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

解得 $A=\frac{1}{3},B=-\frac{1}{3},C=\frac{2}{3}$，所以原式化为

$$=\frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,dx+\frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx$$

易解

- (122) $\int \frac{1}{1+x^4}\,dx$

解： 分解因式

$$=\int \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,dx$$

设

$$\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}=\frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

解得 $A=\frac{1}{2\sqrt{2}},B=\frac{1}{2},C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},D=\frac{1}{2}$，所以原式化为

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$$

解答

- (123) $\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

解： 万能公式：

$$\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow \sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

则原式化为

$$\int \frac{(1+t^2)^3}{16t^4}dt$$

trivial

定积分计算

- (126) $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

解： $\sin x\,dx=-d(\cos x)$，所以原式化为

$$=\int_1^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{-d(\cos x)}{1+\cos^2 x}=\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\frac{du}{1+u^2}=\arctan u|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^1=\arctan 1-\arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- (127) $\displaystyle\int_0^t[\sqrt{x}]\,dx\quad(t\in\mathbb{R}^+)$

解： 设 $n=[\sqrt{t}]$，则

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k^2}^{(k+1)^2}k\,dx+\int_{n^2}^t n\,dx=\sum_{k=0}^{n-1}k((k+1)^2-k^2)+n(t-n^2)$$

- (128) $\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$

解： 设 $I_n=\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$，则

$$I_n-I_{n-1}=\int_0^\pi\frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}]-\sin[\frac{(2n-1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\int_0^\pi\frac{2\cos(nx)\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\int_0^\pi 2\cos(nx)\,dx=0$$

所以 $I_n=I_0=\displaystyle\int_0^\pi\frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx=\pi$

- (129) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,dx$

解： 设 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\ln\sin x\,dx$，分部积分得

$$I=-\cos x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin x}-\sin x\right)\,dx$$

trivial

- (130) $\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx\quad(m,n\in\mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(m,n)=\displaystyle\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$，则

$$I(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx=x^{m-1}\cdot\frac{-(1-x)^n}{n}\Big|_0^1+\frac{m-1}{n}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n\,dx$$

$$=\frac{m-1}{n}\left(\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n-1}\,dx-\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx\right)$$

$$= \frac{m-1}{n}(I(m-1,n) - I(m,n))$$

整理得

$$I(m,n) = \frac{m-1}{m+n-1} I(m-1,n)$$

重复使用该关系式，直到 $m=2$，则

$$I(m,n) = \frac{(m-1)!n!}{(m+n-1)!} \cdot I(1,n)$$

注意到 $I(1,n) = \displaystyle\int_0^1 (1-x)^{n-1}\, dx = \frac{1}{n}$，所以

$$I(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

- (131) $\displaystyle\int_0^1 x^m \ln^n x\, dx \quad (m,n \in \mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(m,n) = \displaystyle\int_0^1 x^m \ln^n x\, dx$，则分部积分得

$$I(m,n) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \ln^n x \bigg|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m \ln^{n-1} x\, dx = -\frac{n}{m+1} I(m,n-1)$$

重复使用该关系式，直到 $n=0$，则

$$I(m,n) = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

- (132) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(n) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \cos(nx)\, dx$，分部积分得

$$I(n) = \cos^n x \cdot \frac{\sin(nx)}{n}\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \sin x \sin(nx)\, dx$$

积化和差得

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x[\cos((n-1)x) - \cos((n+1)x)]\, dx$$

$$= \frac{1}{2} I(n-1) - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos((n+1)x)\, dx$$

对于右侧第二项，我们展开 $\cos(n+1)x$，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x \cos((n+1)x)\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x[\cos(nx)\cos x - \sin(nx)\sin x]\, dx = I_n - I_n = 0$$

所以

$$I(n) = \frac{1}{2}I(n-1)$$

重复使用该关系式，直到 $n=0$，则

$$I(n) = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$

- (133) $\displaystyle\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx$

解： 设 $I = \displaystyle\int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx$，则

$$I = \int_{-2}^{2} x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx = \int_{-2}^{2}(-x)\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x[\ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^{-x})]\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$$

注意到

$$\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \mathrm{e}^x$$

所以

$$I = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

- (134) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

解： 设 $I = \displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x}$，则

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^\alpha x} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}\,dx$$

两式相加得

$$2I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

- (135) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

解： 设 $I=\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$，则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - I \end{aligned}$$

所以

$$2I=\pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

trivial