MathA 习题课答案汇编

VioletHan

2025 年 11 月 6 日

目录

1 第一次习题课答案

题 1. **略**

题 2. **略**

题 3. **证明对任何 $a < b$，存在有理数 $x \in (a, b)$**

略

题 4. **证明对任何 $a < b$，存在无理数 $x \in (a, b)$**

略

题 5. **证明存在正无理数 a, b 使得 a^b 是有理数**

证明. 我们考虑数 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$。该数只可能是有理数或无理数。

- **情况一：**若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为有理数。

  成立。

- **情况二：**若 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 为无理数。

  我们取 $a = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}}, b = \sqrt{2}$。则 a, b 均为正无理数。我们有：

$$a^b = \left((\sqrt{2})^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

  成立。

综上所述，无论 $(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$ 是有理数还是无理数，总能找到满足条件的正无理数 a, b 使得 a^b 是有理数。

□

题 6. **证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n$ 不存在**

证明. 我们证明该数列的上极限不等于下极限。

- 取子序列 $\{n_k\}$ 满足 n_k 接近 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$。对于该子序列，$\lim\limits_{k\to\infty} \sin(n_k) = 1$。即 $sup\{\sin n\} = 1$（注意，n_k 为正整数，因此不能取其为 $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$）

  因此，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n = 1$。

- 我们也总能找到子序列 $\{n_p\}$ 使得 n_p 接近 $\frac{3\pi}{2} + 2p\pi$。对于该子序列，$\lim\limits_{p\to\infty} \sin(n_p) = -1$。即 $inf\{\sin n\} = -1$ 因此，$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n = -1$。

由于 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n = 1 \neq -1 = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sin n$，故极限不存在。

□

题 7. **证明数列 $a_n = \frac{1}{\sin(cn\pi)}$ 无界**

证明. 要证数列 $\{a_n\}$ 无界，只需证其分母 $|\sin(cn\pi)|$ 可以任意接近于 0。

即证：对于任意无理数 c 和 $n \in \mathbb{Z}$，存在 $k_n, N \in \mathbb{Z}^+$，使得

$$|cn - k_n| < \frac{1}{N}$$

我们取 $k_n = \lfloor cn \rfloor$，则 $cn - k_n = \{cn\}$，并且将区间 $[0,1)$ 等分为 N 份，得到 N 个子区间：

$$\left[0, \frac{1}{N}\right), \left[\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \ldots, \left[\frac{N-1}{N}, 1\right)$$

随后我们取 $n = 1, 2, \ldots, N+1$，则有 $N+1$ 个数 $\{c\}, \{2c\}, \ldots, \{(N+1)c\}$ 落在上述 N 个子区间中。

根据鸽笼原理，必然存在 i, j $(1 \leq i < j \leq N+1)$ 使得 $\{ci\}, \{cj\}$ 落在同一子区间中。即：

$$|\{cj\} - \{ci\}| < \frac{1}{N}$$

带入化简可得：

$$|c(j-i) - (k_j - k_i)| < \frac{1}{N}$$

令 $n = j - i$，$k_n = k_j - k_i$，则 $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ 且 $k_n \in \mathbb{Z}$。因此对于任意 N，都存在 n, k_n 使得 $|cn - k_n| < \dfrac{1}{N}$。

□

题 8. 判断正误：n 趋于无穷时，若 a_n 的奇数项构成的数列与偶数项构成的数列极限均为 a，则 a_n 的极限为 a。

该命题为真。若 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$ 且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

证明. 根据极限定义，对任意 $\epsilon > 0$：

- 存在 N_1，当 $k > N_1$ 时，有 $|a_{2k-1} - a| < \epsilon$。
- 存在 N_2，当 $k > N_2$ 时，有 $|a_{2k} - a| < \epsilon$。

我们取 $N = \max\{2N_1 + 1, 2N_2\}$。当 $n > N$ 时：

- 若 n 为奇数，则 $n = 2m-1$。$n > 2N_1+1 \implies 2m-1 > 2N_1+1 \implies m > N_1+1$。此时 $|a_n - a| = |a_{2m-1} - a| < \epsilon$。
- 若 n 为偶数，则 $n = 2m$。$n > 2N_2 \implies 2m > 2N_2 \implies m > N_2$。此时 $|a_n - a| = |a_{2m} - a| < \epsilon$。

综上，对于任意 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $n > N$ 时，$|a_n - a| < \epsilon$ 恒成立。故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。□

题 9.

若满足 $p_1>0$ 的非负数列 p_n 与数列 a_n 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i}=0,\quad \lim_{n\to\infty}a_n=a$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_1+\cdots+a_np_n}{p_1+\cdots+p_n}=a$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$$

解:

- **第一个命题:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1p_1+\cdots+a_np_n}{p_1+\cdots+p_n}=a$ **不成立**

  （根据 Stolz 定理，该命题成立要求 $\sum p_n$ 发散。若 $\sum p_n$ 收敛，则结论不一定成立。）

  反例: 令 $p_n=(\frac{1}{2})^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{\sum_{i=1}^n p_i}=0$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}p_n=1$ 收敛。令 $a_1=1,a_n=2$ 对于 $n\geq 2$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2=a$。此时极限为:

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum a_kp_k}{\sum p_k}=\frac{a_1p_1+\sum_{k=2}^{\infty}a_kp_k}{1}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\sum_{k=2}^{\infty}(\frac{1}{2})^k=0.5+2\cdot 0.5=1.5\neq a$$

- **第二个命题:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$ **成立**

  令 $S_n=\sum\limits_{i=1}^n p_i$，$y_n=a_n-a$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$。

  $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+a_2p_{n-1}+\cdots+a_np_1}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(y_1+a)p_n+(y_2+a)p_{n-1}+\cdots+(y_n+a)p_1}{S_n}$$

  $$=\lim_{n\to\infty}\left(a+\frac{y_1p_n+y_2p_{n-1}+\cdots+y_np_1}{S_n}\right)=a+\lim_{n\to\infty}\frac{y_1p_n+y_2p_{n-1}+\cdots+y_np_1}{S_n}$$

  不妨设 $a=0$，则只需证

  $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^n\dfrac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}=0$。

  注意到以下不等式:

  $$0\leq\left|\sum_{i=1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|+\left|\sum_{i=N+1}^n\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\right|$$

  $$\leq\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|\cdot\sum_{i=N+1}^n\frac{p_{n-i+1}}{S_n}\leq\sum_{i=1}^N\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|$$

再注意到：

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}\leq\sup_{i\geq N+1}|a_i|$$

取 $N\to\infty$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，故 $\lim\limits_{N\to\infty}\sup\limits_{i\geq N+1}|a_i|\to 0$。

则

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}+\sup_{i\geq N+1}|a_i|\to 0^+$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_ip_{n-i+1}}{S_n}=0$ ，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1p_n+\cdots+a_np_1}{p_1+\cdots+p_n}=a$ 成立。

题 10. 了解常见函数增长速度的阶次

略，得到以下结论：

$$\begin{aligned}\ln^c n&=o(n^b)\\ n^b&=o(a^n)\\ a^n&=o(n!)\\ n!&=o(n^n)\end{aligned}$$

题 11. 关于两个多项式 $p(n)$ 与 $q(n)$ 的商的极限

解： 设 $p(n)=a_sn^s+\cdots+a_0$ 且 $q(n)=b_tn^t+\cdots+b_0$。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}\overset{\text{洛}}{=}\begin{cases}0 & 若s<t\\ \dfrac{a_s}{b_t} & 若s=t\\ \infty & 若s>t\end{cases}$$

题 12. 等价函数替换

解： 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=1$，则 $f(n)=g(n)+o(g(n))$。

替换规则为：乘除法中可以替换，但加减法中不可随意替换。

题 13. 证明 $e=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$

解： 令 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ 且 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$。

- 证明. $e\leq S$

根据二项式定理展开 e_n：

$$\begin{aligned}
e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\
&\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n
\end{aligned}$$

对 $e_n \le S_n$ 两边取极限，得 $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n \le \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$。 □

- 证明. $e \ge S$

  对于任意固定的 m，我们有 $S_m = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!}$。

  考虑 $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$ 的前 m+1 项，则有

  $$e_n > 2 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!n^m}$$

  保持 m 固定，令 $n \to \infty$，则不等式右侧趋向于 $S_m = \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$。因此 $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n \ge S_m$。由于该式对任意 m 成立，令 $m \to \infty$，我们得到 $e \ge \lim\limits_{m\to\infty} S_m = S$。

  □

综上，我们有 $e \le S$ 且 $e \ge S$，因此 $e = S = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$。

题 14. (附加)

考虑有两个下标的数列 $a_{n,k}$, 我们进行如三个假设：

- 对任何自然数 n，k 有 $a_{n,k} \ge 0$。
- 固定 k，则 $a_{n,k}$ 对 n 单调递增且有界，设

  $$\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = \alpha_k$$

- 求和 $\sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k$ 对 m 有上界。

则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

证明. 显然有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \geq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

下证明反向不等式。

考虑对于给定的 M ，有

$$\sum_{k=0}^{M} \alpha_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{M} a_{n,k} \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

由于 $\sum_{k=0}^{m} \alpha_k$ 对 m 有上界，因此令 $M \to \infty$，则有

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

得证

□

题 15. 证明 e 是无理数

证明. 假设 e 是有理数，则存在正整数 p, q 使得 $e = \dfrac{p}{q}$。同时，我们有 $e = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k!}$。

注意到 $2 < e < 3$，因此 $p > q > 0$, $\sum_{k=2}^{\infty} \dfrac{1}{k!} = e - 2 = \dfrac{p-2q}{q} < 1$。

我们在等式两边同时乘上 $q!$，得到：

$$(p-2q)(q-1)! = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \sum_{k=2}^{q} \frac{q!}{k!} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!}$$

其中 $(p-2q)(q-1)!, \sum_{k=2}^{q} \dfrac{q!}{k!}$ 是整数。

显然 $q \geq 2$, 所以我们有：

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{q!}{k!} = \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k!} < e - 2 < 1$$

显然整数无法等于一个小数，假设不成立，因此 e 是无理数。

□

题 16. 略

2 第四次习题课答案

题 17.

证明若

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

则对任何满足 $a_n \neq a$ 的数列 a_n，若

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

则

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = b$$

略

题 18. 略

题 19. 略

题 20. 略

题 21. 略

题 22. 略

题 23. 略

题 24. 略

题 25. 略

题 26. **证明对任何** $a > 1, b > 0, c > 0$ **有**

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^c}{x^b} = 0$$

证明. 对于第一个极限，我们有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{a}{x}\right)^x = 0$$

对于第二个极限，我们有

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^{b/x}}{a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{b\ln x}{x}}}{a}\right)^x = 0$$

第三个极限类比第二个极限即可

□

题 27. 略

题 28. 证明

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = 1$$

证明. 考虑题 17.3，置 $y=\dfrac{1}{x}$, 取 $c=1,b=1$，则有 $\lim\limits_{y\to 0^+} y\ln y=0$，所以我们有

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^0=1$$

$\square$

题 29. 证明对多项式 f 有

$$\lim_{x\to 0} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

证明. 不难发现,对任意多项式 $f(x)$,$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=C$,其中 C 为常数。又因为 $\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=0$，所以

$$\lim_{x\to 0} f(x)\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}=C\cdot 0=0$$

$\square$

题 30. 证明

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$$

证明. 我们考虑 $x=n+\{x\}$, 其中 $n=\lfloor x\rfloor$，则有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\{x\}}\right)^{n+\{x\}}\le\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}$$

我们还有

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+\{x\}}\right)^{n+\{x\}}\ge\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\mathrm{e}$$

$\square$

题 31. 计算

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

解： 置 $y=\dfrac{1}{x}$, 则有

$$\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln(1+\frac{1}{x})}=\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{\frac{\ln(1+y)}{y}}=\mathrm{e}^0=1$$

题 32. 对于关于 x 的两个多项式 $p(x),q(x)$，计算极限

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}$$

解： 类别整数情况即可

题 33.

证明极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)$$

存在，以此证明

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

证明. 考虑 $n+1$ $-n$ ，我们有

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}-\ln(n+1)-\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n\right)=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

利用不等式 $ln(1+x)>\dfrac{x}{1+x}$，我们有

$$\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n+1}-\frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}=0$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$ 是递减序列，考虑

$$\ln n=\ln 1+\ln\frac{2}{1}+\cdots+\ln\frac{n}{n-1}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

所以 $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}-\ln n$ 有下界，故极限存在。

又因为

$$\lim_{n\to\infty}\ln n=+\infty$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}=+\infty$

□

题 34. 对连续函数 $f(x)$，若 (这里 a 为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x+1)-f(x))=A$$

证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

证明. 取 $M>0$，当 $x>M$ 时，有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\varepsilon$$

取 $N=\max\{M,\lceil\frac{1}{\varepsilon}\rceil\}$，即

$$A-\varepsilon<f(x+1)-f(x)<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<f(x)-f(x-1)<A+\varepsilon$$

$$\cdots$$

$$A-\varepsilon<f(\{x\}+N+1)-f(\{x\}+N)<A+\varepsilon$$

累加得到

$$(A-\varepsilon)(x-(\{x\}+N+1))<f(x)-f(\{x\}+N+1)<(A+\varepsilon)(x-(\{x\}+N+1))$$

即

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(\{x\}+N+1)}{x-(\{x\}+N+1)}<A+\varepsilon$$

$$A-\varepsilon<\frac{\frac{f(x)}{x}-\frac{f(\{x\}+N+1)}{x}}{1-\frac{\{x\}+N+1}{x}}<A+\varepsilon$$

不难发现，此即等价于

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)}{x}<A+\varepsilon$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=A$$

□

注：此后我们将自由使用 **Stolz 公式**

题 35. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}$$

解： 我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^3(1+\frac{1}{x^3})}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$$

另解）

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})}{x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})}=1$$

题 36. 计算

考虑满足递推关系

$$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n},\quad a_1>0,$$

的数列 $\{a_n\}$。证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

并进一步证明 a_n 是一个 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大。

证明. 取 $b_n = \dfrac{1}{a_n}$，则有

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n}} = \frac{b_n}{1+b_n^2} < b_n$$

故 a_n 递增，且注意到 $a_1 > 0$，所以 $a_n > 0$。

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$$

所以 $a_n^2 > 2n - 2 + a_1^2$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, 观察到

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} > \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n-2+a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

取 $t = \max\{3, 2 + \dfrac{1}{a_1^2}\}$，则有

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} \leq a_n^2 + t$$

所以 $a_n^2 \leq tn - t + a_1^2$，所以

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{tn-t+a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t}$$

t 为有限值，则 $a_n = O(\sqrt{n})$

□

题 37. 对正实数 a 与实数 α，计算

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

解： 略

题 38. 计算

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

解：

- 对于第一个极限，考虑

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}a\exp\left(\frac{\ln\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}a\exp\left(\frac{\ln\left(1+\frac{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}+o(x)\right)}{x}\right)$$

$$=a\exp\left(\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{x\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}+o(x)}{x}\right)=a\exp\left(\frac{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}{2}\right)=\sqrt{ab}$$

- 对于第二个极限，不妨设 $a>b$，考虑

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}a\exp\left(\frac{\ln\frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x}\right)=a\exp(0)=a$$

  所以极限为 $max\{a,b\}$

题 39. 计算

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln\left(1-x^2\right)},\quad \lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}.$$

解：

- 对于第一个极限，考虑

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan(5x)}{\sin x+\ln\left(1-x^2\right)}=\lim_{x\to0}\frac{5x+o(x)}{x-x^2+o(x^2)}=lim_{x\to0}\frac{5x+o(x)}{x+o(x)}=5$$

- 对于第二个极限，考虑

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(2x)-2\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{2x-\frac{(2x)^3}{3!}+o(x^3)-2(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3))}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{8x^3}{6}+\frac{2x^3}{6}+o(x^3)}{x^3}=-1$$

题 40.

若对任何实数 x 有

$$|a_1\sin x+a_2\sin(2x)+a_3\sin(3x)|\le|\sin x|$$

证明

$$a_1+2a_2+3a_3\le1$$

证明. 考虑 $x \to 0^+$，则有

$$\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{a_1\sin x + a_2\sin(2x) + a_3\sin(3x)}{\sin x}\right| = |a_1 + 2a_2 + 3a_3| \le 1$$

□

题 41.

若 f, g 为连续函数，且 $(A, B, C$为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x\to A} f(x) = B, \lim_{t\to C} g(t) = A,$$

则

$$\lim_{t\to C} f(g(t)) = B$$

证明. trivial

□

题 42.

设 A, B为实数或确定符号的无穷，则

$$\lim_{x\to A} f(x) = B$$

当且仅当对任何数列满足

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A$$

且 $a_n \ne A$(若 A 为无穷，不等直接成立) 的数列 a_n，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = B$$

证明.

- 必要性证明略
- 充分性证明

  我们假设 $\lim\limits_{x\to A} f(x) \ne B$，则存在 $\varepsilon > 0$，使得对任意 $\delta > 0$，都存在 x_0 使得 $|x_0 - A| < \delta$ 且 $|f(x_0) - B| \ge \varepsilon$。

  取 $\delta = \dfrac{1}{n}$，则存在 x_n 使得 $|x_n - A| < \dfrac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - B| \ge \varepsilon$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，但 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ 不存在，与题意矛盾。

无穷情况同理))

□

题 43. 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$$

解: 考虑

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\exp[\sqrt{n+1}\ln(1-\frac{1}{\sqrt{n}})]=\lim_{n\to\infty}\exp[\sqrt{n+1}(-\frac{1}{\sqrt{n}}+o(\frac{1}{\sqrt{n}}))]=\exp(-1)=\frac{1}{e}$$

题 44. 计算

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x)^{\tan x}$$

解: 考虑

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}(\sin x)^{\tan x}=\lim_{x\to0^-}(\cos x)^{\cot x}$$

$$=\lim_{x\to0^-}\exp(\cot x\ln(\cos x))=\lim_{x\to0^-}\exp(\frac{\sqrt{1-x^2}\ln(\sqrt{1-x^2})}{x})=\exp(0)=1$$

题 45. 计算

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)(\ln(x^2+x)-2\ln(x+1))$$

解: 考虑

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)(2\ln x+\ln(1+\frac{1}{x})-2\ln x-2\ln(1+\frac{1}{x}))=\lim_{x\to+\infty}-(x+1)\ln(1+\frac{1}{x})$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-(x+1)(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x}))=-1$$

题 46. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$$

并找正实数 k 使得极限

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$$

为非零常数

证明. 和差化积

$$\lim_{x\to+\infty}x^k(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=\lim_{x\to+\infty}x^k2\cos(\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2})\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})$$

注意到

$$\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2})=\lim_{x\to+\infty}\sin(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})})=0$$

所以极限为 0 对于后者，笔者不会了，怎么看都震荡（哭了

□

3 第五次习题课答案

题 47.

若定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f 存在反函数，证明 f 严格单调。

证明. 若存在反函数，则 f 在 $[a,b]$ 上必为单射。 $\square$

题 48.

考虑定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，证明对任何正整数 n，存在 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{n} = f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi)$$

且 ξ 与 $\xi + \frac{b-a}{n}$ 都在 $[a,b]$ 中。

证明. 我们考虑反证法，假设不存在这样的 ξ，即对任意 $x \in [a, b - \frac{b-a}{n}]$，都有

$$f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x) \neq \frac{f(b)-f(a)}{n}.$$

取 $g(x) = f\left(x + \frac{b-a}{n}\right) - f(x)$，则 g 在 $[a, b - \frac{b-a}{n}]$ 上连续，且

$$g(a) + g(a + \frac{b-a}{n}) + \cdots + g\left(a + (n-1)\frac{b-a}{n}\right) = f(b) - f(a).$$

由假设，$g(x)$ 要么始终大于 $\frac{f(b)-f(a)}{n}$，要么始终小于 $\frac{f(b)-f(a)}{n}$。显然这是不可能的。

因此，存在 $\xi \in [a, b - \frac{b-a}{n}]$ 使得

$$f\left(\xi + \frac{b-a}{n}\right) - f(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{n}.$$

$\square$

题 49. (附加).

考虑定义在 $[a,b]$ 上的连续函数 f，是否对任何大于 1 的正数 t，一定存在 ξ 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{t} = f\left(\xi + \frac{b-a}{t}\right) - f(\xi)$$

且 ξ 与 $\xi + \frac{b-a}{t}$ 都在 $[a,b]$ 中？

证明. (其实我不会构造)

反例：取 $f(x)=x^2$，$[a,b]=[0,1]$，$t=1.5$。则

$$\frac{f(b)-f(a)}{t}=\frac{1^2-0^2}{1.5}=\frac{2}{3}.$$

假设存在 $\xi\in[0,1-\frac{1}{1.5}]=[0,\frac{1}{3}]$ 使得

$$f\left(\xi+\frac{1}{1.5}\right)-f(\xi)=\frac{2}{3}.$$

则

$$(\xi+\frac{2}{3})^2-\xi^2=\frac{2}{3}\implies\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\xi=\frac{2}{3}\implies\xi=-\frac{1}{6},$$

这与 ξ 应在 $[0,\frac{1}{3}]$ 中矛盾。

因此，并非对任何大于 1 的正数 t 都存在这样的 ξ。

□

题 50.

证明 $\sin x=100(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ 在 $x\geq 0$ 上有无穷多个根。

证明. 考虑 $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin x=100$，令 $g(x)=(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\sin x$，则 $g(x)$ 在 $x\geq 0$ 上连续且对于 $x=k\pi$（k 为非负整数）时，$g(k\pi)=0$，而对于 $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ ((k足够大) 时，

$$g\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi+1}+\sqrt{\frac{\pi}{2}+k\pi})\cdot 1>100,$$

因此由介值定理，$g(x)=100$ 在每个区间 $(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ 内至少有一个解, 故原方程有无穷多个根。

□

题 51.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+2}=a\cdot a_{n+1}+b\cdot a_n$$

给出 a_n 存在非零极限的充要条件 (用 a,b,a_0,a_1 表示)。

解： 我们考虑强求通项，

$$x^2=ax+b=0\implies x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

设 $x_1=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2},x_2=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$

我们得到第一个条件：$a^2+4b\geq 0$，否则数列振荡无极限。

情况 1： $a^2+4b=0$，则

$$a_n=(A+Bn)\left(\frac{a}{2}\right)^n.$$

带入初值，解得

$$A=a_0,\quad B=\frac{2}{a}(a_1-\frac{a}{2}a_0).$$

若数列存在非零极限，则必有 $\frac{a}{2}=1$ 且 $B=0$，即

$$a=2,\quad a_1=a_0.$$

情况 2： $a^2+4b>0$，则

$$a_n=A(x_1)^n+B(x_2)^n.$$

带入初值，解得

$$A=\frac{a_1-a_0x_2}{x_1-x_2},\quad B=\frac{a_0x_1-a_1}{x_1-x_2}.$$

此时必有 $x_1=1$ 且 $|x_2|<1$，否则数列无极限或极限为零。解得

$$a+b=1,\quad |b|<1.$$

综上，数列 a_n 存在非零极限的充要条件为满足以下条件之一

$$\begin{cases} a=2, \quad a_1=a_0, \qquad a^2+4b=0; \\ a+b=1, \quad |b|<1, \quad a^2+4b>0. \end{cases}$$

题 52.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$$

对不同的 $a_0\geq 0$，讨论数列的极限。

解： 我们考虑函数 $f(x)=\sqrt{2x}$，则数列 a_n 为 f 的迭代。
$f(x)$ 在 $x\geq 0$ 上单调递增，且 $f(x)\geq 0$。
所以 a_n 单调递增。
我们计算不动点得到：

$$x_1=0,\quad x_2=2.$$

情况 1： $a_0=0\,or\,2$，则 $a_n=0\,or\,2$，数列极限为 0 or 2。
情况 2： $a_0>2$，数列极限为 2。

情况 3： $0 < a_0 < 2$，

不难发现 $a_1 = \sqrt{2a_0} > a_0$，注意到如下递推关系：

$$a_{n+1} = f(a_n) > a_n;$$

$$a_{n+2} = f(a_{n+1}) > fa_n = a_{n+1};$$

归纳得到 a_n 单调递增，趋近于不动点 2，故极限为 2。

题 53.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1} = \sin a_n$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

并计算 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n$。

证明. 不妨设 $a_1 < 1$，设 $f(x) = \sin x$，则数列 a_n 为 f 的迭代。$f(x)$ 在 $x \geq 0$ 上单调递增，且 $f(x) \geq 0$。

考虑唯一的不动点 0, 且 $f(x) < x$，所以 a_n 单调递减且收敛于 0.

下面估计 a_n 的阶。

我们考虑 $\dfrac{1}{\sin x}$ 在 $x = 0$ 处的泰勒展开：

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

取 $x = a_n$，则

$$\lim_{x\to\infty} na_n^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{n+1}^2} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 a_n} - \frac{1}{a_n^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}}$$

注意到如下结果：

$$\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + \frac{x^2}{15} + o(x^2).$$

因此

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 t} - \frac{1}{t^2}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\frac{1}{3} + o(1)} = 3.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n}a_n = \sqrt{3}$

□

题 54.

考虑数列 a_n 满足

$$a_{n+1} = ba_n(1 - a_n)$$

且 $a_1 = \dfrac{1}{2}, b \in (2, 3]$, 计算

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

解： 我们考虑函数 $f(x)=bx(1-x)$，则数列 a_n 为 f 的迭代。计算一阶不动点：

$$x=bx(1-x) \implies x_1=0\,and\,x_2=\frac{b-1}{b}.$$

计算二阶不动点：

$$x=f(f(x)) \implies x=b^2x(1-x)(1-bx(1-x)).$$

化简得到

$$(b^2-b)x^3+(-2b^2+b)x^2+(b^2-1)x=0.$$

显然 $x=0$ 是一个解，另外两个解为

$$x=\frac{b-1\pm\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}.$$

我们舍去负值的解，记为 $x_3=\dfrac{b-1+\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}>\dfrac{b-1}{b}$。

计算得到

$$a_1=\frac{1}{2}.$$

$$a_2=\frac{b}{4}.$$

$$a_3=\frac{b^2}{4}-\frac{b^3}{16}.$$

$$a_4=\frac{b^3}{16}-\frac{b^4}{32}-\frac{b^5}{64}+\frac{b^6}{256}.$$

简单的比较可知：

$$a_4-a_2=\frac{b^3}{16}-\frac{b^4}{32}-\frac{b^5}{64}+\frac{b^6}{256}-\frac{b}{4}<0,$$

考虑奇子列，不难发现 $a_1<\dfrac{b-1}{b}$，由前述可知，奇子列收敛于 $\dfrac{b-1}{b}$。

考虑偶子列，$a_2=\dfrac{b}{4}>\dfrac{b-1}{b}$，并且注意到 $\dfrac{b}{4}<x_3=\dfrac{b-1+\sqrt{(b-1)(b+3)}}{2b}$，结合 $a_4<a_2$，由前述可知，偶子列递减收敛于 $\dfrac{b-1}{b}$。

题 55.，77 略

题 56.

证明可导的周期函数导数为周期函数。

另问：若 f 在 $\mathbb{R}$ 上可导且 f' 为周期为 T 的函数，是否 f 必有周期 T?

证明. 设 f 的周期为 T，则对任意 $x\in\mathbb{R}$，都有

$$f'(x+T)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+T+h)-f(x+T)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

因此 f' 为周期为 T 的函数。

反例：取 $f(x)=x+\sin x$，则 $f'(x)=1+\cos x$，显然 f' 为周期为 2π 的函数，但 f 无周期。

□

题 57.

举例说明, 若 f 在 (a,b) 上可导

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to b^-} f'(x)=+\infty$$

无法互相推出

解:

- 首先，右无法推左

  取 $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=0,\quad \lim_{x\to 1^-} f'(x)=+\infty$$

- 其次，左无法推右取 $f(x)=-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sin x}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=+\infty,\quad \text{其导函数在 } 0^- \text{ 处极限不存在}$$

题 58.

若 f 在 x_0 处可导，设

$$l(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

证明 $l(x)$ 是 $f(x)$ 在 x_0 处的最佳一次逼近，即对任何一个一次函数 $l_0(x)$，存在 $\delta>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-l(x)|\le|f(x)-l_0(x)|$$

证明. 自然地，我们考虑 $l_0(x)$ 的形式为 $l_0(x)=m(x-x_0)+f(0)$，其中 m 为常数。由 f 在 x_0 处可导，存在 $\delta_1>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时

$$\text{LHS}=|f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)|=|x-x_0|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|$$

$$\text{RHS}=|f(x)-f(x_0)-m(x-x_0)|=|x-x_0|\cdot\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|.$$

由极限的定义，存在 $\delta_2>0$ 使得当 $|x-x_0|<\delta_2$ 时

$$\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-m\right|.$$

□

题 59.

若 $|f(x)|\le|g(x)|$ 在 $(-1,1)$ 恒成立，且 g 在 0 处可导，$g(0)=g'(0)=0$，证明 f 在 0 处可导并计算 $f'(0)$。

证明. 不难发现 $f(0)=0$，由夹逼准则，$\lim_{x\to 0} f(x)=0$，所以 f 在 0 处连续。
由 $f(0)=g(0)=0$，我们考虑

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}.$$

由 $|f(x)|\le |g(x)|$，我们有

$$\lim_{x\to 0^+}\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le \lim_{x\to 0^+}\left|\frac{g(x)}{x}\right|=|g'(0)|=0.$$

所以

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=0.$$

同理我们有

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=0.$$

因此 f 在 0 处可导，且 $f'(0)=0$。

□

题 60.

设

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\mathbb{Q} \\ x^2+x, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

计算 $f'(0)$。

解： 考虑海涅准则，我们将定义域内收敛于 0 的序列分为两种，分别为有理数列和无理数列。

- 对于有理序列 $\{x_n\}$，则

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-0}{x_n-0}=1.$$

- 对于无理序列 $\{y_n\}$，则

$$f'(0)=\lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(0)}{y_n-0}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n^2+y_n-0}{y_n-0}=\lim_{n\to\infty}(y_n+1)=1.$$

综上，$f'(0)=1$。

题 61. (附加).

计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)$$

解：

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=n+1}^{2n}\frac{1}{i/n} = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2.$$

题 62.

计算 $f(x) = \arctan x$ 在 0 处的 n 阶导数值。

解： 我们将 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开为几何级数

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

积分得到

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

所以 n 阶导数值即为：

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k \cdot (2k)!, & n = 2k+1 \end{cases}$$

题 63.

计算 $f(x) = \arcsin x$ 在 0 处的 n 阶导数值。

解： 我们将 $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 展开为二项式级数

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{4^k(k!)^2}x^{2k} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

积分得到

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!x^{2k+1}}{4^k(k!)^2(2k+1)} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^5 + \cdots$$

所以 n 阶导数值即为：

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ \dfrac{((2k)!)^2}{4^k(k!)^2}, & n = 2k+1 \end{cases}$$

题 64.

设

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \end{cases}$$

计算 $f^{(n)}(0)$。

解： 我们先计算 $f'(x)$：

$$f'(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\dfrac{2}{x^3}, & x\neq 0\end{cases}$$

同理可得

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ P_n(x)\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\end{cases}$$

其中 $P_n(x)$ 为 n 阶多项式。因此

$$f^{(n)}(0)=0.$$

题 65.

对正整数 n, 设 $f_n(x)=x^n\ln x$, 求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}$$

解： 我们先计算 $f_n^{(n)}(x)$，由莱布尼兹公式可得

$$f_n^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(x^n)^{(k)}(\ln x)^{(n-k)}.$$

注意到

$$(x^n)^{(k)}=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, & k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

$$(\ln x)^{(n-k)}=\begin{cases}(-1)^{n-k-1}\dfrac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}, & n-k\geq 1\\ \ln x, & n-k=0\end{cases}$$

所以

$$f_n^{(n)}(x)=n!\ln x+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}(-1)^{n-k-1}\frac{(n-k-1)!}{x^{n-k}}.$$

$$=n!\ln x+n!\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\binom{n}{k}.$$

因此

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!}=\ln\frac{1}{n}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\binom{n}{k}.$$

$$=-\ln n+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}$$

我们考虑和式

$$\frac{1-(1-x)^n}{x}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}x^{k-1}.$$

对上式两边积分，得到

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}.$$

注意到

$$\int_0^1 \frac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \int_0^1 (1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})\,dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

所以

$$\frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

由前述可知

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n^{(n)}(1/n)}{n!} = \gamma,$$

其中 γ 为欧拉常数。

题 66.

设 $y=f(x)$ 是由

$$\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$$

确定的函数，计算 $f''(x)$。

解： 由 $x=\ln(1+t^2)$，我们有

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2t}{1+t^2}.$$

由 $y = t-\arctan t$，我们有

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \frac{1}{1+t^2} = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \frac{t}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+t^2}{2t} = \frac{1+t^2}{4t}.$$

题 67.

设 $y=f(x)$ 是由

$$x^2+y^2+xy=1$$

确定的可导函数，计算 $f''(x)$。

解： 对 x 求导，得到

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} = 0.$$

所以

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x+y}{2y+x}.$$

对 x 再次求导，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{(2+\frac{dy}{dx})(2y+x) - (2x+y)(\frac{dy}{dx}+1)}{(2y+x)^2}.$$

带入 $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{2x+y}{2y+x}$ 得到:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{3(2y^2+2xy+2x^2)}{(2y+x)^3} = -\frac{6}{(2y+x)^3}.$$

4 第六次习题课答案

题 68. 略

题 69.

证明不存在函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$，其中

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

证明. 反证法，假设存在 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$。则对于 $x \neq 0$，有 $F'(x) = 0$，所以 $F(x)$ 在 $x \neq 0$ 时为常数函数。又有 $F'(0) = 1$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0} = 1$$

不妨设 $F(0) = 0$，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)}{x} = 1$$

然而由于 $F(x)$ 在 $x \neq 0$ 时为常数函数，若其为 0，则 $\dfrac{F(x)}{x} = 0$，若其为非零常数 c，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{c}{x}$ 不存在。综上，均与 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x} = 1$ 矛盾，因此不存在这样的函数 $F(x)$。

□

题 70.

求所有函数 $f(x)$ 使得其在 $\mathbb{R}$ 上满足

$$xf'(x) + f(x) = x^3 + 1$$

解： 观察到：

$$(xf(x))' = xf'(x) + f(x) = x^3 + 1$$

积分得到：

$$xf(x) = \int (x^3+1)\,dx = \frac{x^4}{4} + x \,(\text{此处认为}C=0)$$

所以

$$f(x) = \frac{x^3}{4} + 1$$

题 71.

若函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导，且 $f'(x)$ 恒等于 0，则 $f(x)$ 为常数函数。

证明. 任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$，不妨设 $x_1 < x_2$。由拉格朗日中值定理，存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使得

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi)$$

由于 $f'(\xi) = 0$，所以

$$f(x_2) - f(x_1) = 0 \implies f(x_2) = f(x_1)$$

因此 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上为常数函数。

□

题 72.

求所有函数 $f(x)$ 使得其在 $\mathbb{R}*$ 上满足 $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

解： 积分得到：

$$f(x) = \ln|x| + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

题 73.

证明 [a,b] 上的黎曼可积函数必有界。

证明. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积，取分割 $x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}, i = 0, 1, \ldots, n$，则 $\exists k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 使得 $f(x)$在$[x_k, x_{k+1}]$ 上无界。则我们取 $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ 使得 $|f(\xi_k)| > n^2$，则对于该分割，有

$$|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i| \geq n^2 \cdot \frac{b-a}{n} = (b-a)n \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积矛盾，因此 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

□

题 74.

证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也可积且

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

证明. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则对于任意 $\varepsilon > 0$，存在分割 P 使得

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

由于 $|f(x)|$ 的上、下和 $f(x)$ 的上、下和的关系，我们有

$$U(|f|,P) - L(|f|,P) \le U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$$

因此 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上可积。

又由于对于任意 $x \in [a,b]$，都有 $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$，所以

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

从而得到

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

□

题 75.

计算以下函数在任何闭区间 $[a,b]$ 上的积分：

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

解： 由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上仅在 $x = 0$ 处取非零值，对于任意分割 P，取任意 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$，则

$$S(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = 0$$

因此

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$

题 76.

考虑函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在包含 0 的区间不可积。

证明. 首先证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。对于 $x \neq 0$，显然 $f(x)$ 可导，且

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} x \sin \frac{1}{x^2} = 0$$

因此 $f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导。且 $f'(x)$ 为

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x} \cos \dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

注意到

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2} \right) \text{不存在}$$

不存在，因此 $f'(x)$ 在包含 0 的区间不可积。

□

题 77.

证明若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则对 $x \in (a,b)$ 有

$$\left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

证明. 设 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$，则对于任意 $x \in (a,b)$，有

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x) \end{aligned}$$

题 78.

计算导数

$$\left(\int_0^x \sin xt\,dt \right)'$$

解： 设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin xt\,dt$，则

$$F(x) = \int_0^x \sin xt\,dt = \left[-\frac{1}{x} \cos xt \right]_0^x = -\frac{1}{x} \cos x^2 + \frac{1}{x}$$

因此

$$F'(x) = \frac{1}{x^2} \cos x^2 + \sin x^2 - \frac{1}{x^2}$$

□

5 第七次习题课答案

5.1 我们要先统计一些常用的积分公式：

$$
\begin{aligned}
&\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,\\
&\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{a}+C,\\
&\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C,\\
&\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\\
&\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C
\end{aligned}
$$

5.2 不定积分计算

- (111) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$

  解：

$$
=\int \frac{d(\sqrt{x^2-1})}{x^2}=\int \frac{d(\sqrt{x^2-1})}{(\sqrt{x^2-1})^2+1}=\arctan(\sqrt{x^2-1})+C
$$

- (112) $\displaystyle\int \sqrt{1+\sin x}\,dx$

  解：

$$
=\int (\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2})\,dx=-2\cos\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+C
$$

- (113) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{2\cos x+5\sin x}\,dx$

  解： 考虑万能公式

$$
\tan\frac{x}{2}=t\Rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\sin x=\frac{2t}{1+t^2},dx=\frac{2}{1+t^2}dt
$$

则原式化为

$$
\int \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2\frac{1-t^2}{1+t^2}+5\frac{2t}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2(1-t^2)}{2(1-t^2)+10t}dt=\int \frac{2-2t^2}{2-2t^2+10t}dt
$$

分离常数项

$$= \int \frac{-10t + (2 + 10t - 2t^2)}{2 - 2t^2 + 10t} dt = \int \left(-1 + \frac{5t}{-t^2 + 5t + 1} \right) dt$$

$$= -t - \frac{5}{2} \int \frac{d[(t - \frac{5}{2})^2]}{(t - \frac{5}{2})^2 - \frac{29}{4}} - \frac{25}{2} \int \frac{dt}{(t - \frac{5}{2})^2 - \frac{29}{4}}$$

$$= ......$$

- (114) $\int \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$

  解： 设 $I_n = \int \frac{\sin nx}{\sin x}\, dx$，则

  $$I_n - I_{n-2} = \int \frac{\sin nx - \sin (n-2)x}{\sin x}\, dx = \int \frac{2\sin x \cos(n-1)x}{\sin x}\, dx = 2\int \cos(n-1)x\, dx$$

  $$= \frac{2}{n-1} \sin(n-1)x + C$$

- (115) $\int \frac{dx}{e^x - 1}$

  解：

  $$= \int \frac{e^{-x} dx}{1 - e^{-x}} = \int \frac{d(1 - e^{-x})}{1 - e^{-x}} = \ln|1 - e^{-x}| + C$$

- (117) $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx$

  解： 设 $t = \arctan x$，则 $dt = \frac{1}{1 + x^2} dx$，且 $1 + x^2 = \sec^2 t$，所以原式化为

  $$\int e^t \cos^3 t\, dt$$

  反复分部即可

- (118) $\int \frac{x \tan x}{\cos^2 x}\, dx$

  解： 分部积分，注意到 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 的原函数为 $\tan x$，所以

  $$= x \tan^2 x - \int \tan^2 x\, dx$$

  $$= x \tan^2 x - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = x \tan^2 x - \tan x + x + C$$

- (119) $\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2})\, dx$

解： 设 $I = \int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})\,dx$，分部积分

$$I = x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

令 $t = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $dt = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$，且 $x = \sinh t$，所以

$$I = xt^2 - 2\int \sinh t \cdot t\,dt$$

继续分部积分

$$= xt^2 - 2(t\cosh t - \int \cosh t\,dt) + C$$

$$= xt^2 - 2t\cosh t + 2\sinh t + C$$

$$= x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2}) - 2\ln(x+\sqrt{1+x^2})\sqrt{1+x^2} + 2x + C$$

- (120) $\int \sin^n x\,dx$(求出关于 n 的递推关系)

解： 设 $I_n = \int \sin^n x\,dx$，则

$$I_n = \int \sin^{n-1} x \cdot \sin x\,dx$$

分部积分得

$$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx$$

$= -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx = -\sin^{n-1} x\cos x + (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n$

整理得

$$I_n = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}I_{n-2} + C$$

- (121) $\int \dfrac{1}{1+x^3}\,dx$

解： 分解因式

$$= \int \frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)}\,dx$$

设

$$\frac{1}{(1+x)(x^2-x+1)} = \frac{A}{1+x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

解得 $A = \dfrac{1}{3}, B = -\dfrac{1}{3}, C = \dfrac{2}{3}$，所以原式化为

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1+x}\,dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{x^2-x+1}\,dx$$

易解

- (122) $\int \dfrac{1}{1+x^4}\,dx$

解： 分解因式

$$= \int \frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)}\,dx$$

设

$$\frac{1}{(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2-\sqrt{2}x+1} + \frac{Cx+D}{x^2+\sqrt{2}x+1}$$

解得 $A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, B=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, D=\frac{1}{2}$，所以原式化为

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,dx - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,dx$$

解答

- (123) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^4 x}$

解： 万能公式：

$$\tan\frac{x}{2} = t \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

则原式化为

$$\int \frac{(1+t^2)^3}{16t^4}dt$$

trivial

5.3 定积分计算

- (126) $\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

解： $\sin x\,dx = -d(\cos x)$，所以原式化为

$$= \int_1^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-d(\cos x)}{1+\cos^2 x} = \int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{du}{1+u^2} = \arctan u\big|_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \arctan 1 - \arctan\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

- (127) $\displaystyle\int_0^t [\sqrt{x}]\,dx \quad (t\in\mathbb{R}^+)$

解： 设 $n=[\sqrt{t}]$，则

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k^2}^{(k+1)^2} k\,dx + \int_{n^2}^t n\,dx = \sum_{k=0}^{n-1} k((k+1)^2-k^2) + n(t-n^2)$$

- (128) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$

解： 设 $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx$，则

$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin[\frac{(2n+1)x}{2}] - \sin[\frac{(2n-1)x}{2}]}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{2\cos(nx)\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \int_0^{\pi} 2\cos(nx)\,dx = 0$$

所以 $I_n = I_0 = \int_0^{\pi} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\,dx = \pi$

- (129) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln\sin x\,dx$

解： 设 $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \ln\sin x\,dx$，分部积分得

$$I = -\cos x \ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin x} - \sin x\right)\,dx$$

trivial

- (130) $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$，则

$$\begin{aligned}
I(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx &= x^{m-1}\cdot\frac{-(1-x)^n}{n}\Big|_0^1 + \frac{m-1}{n}\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^n\,dx \\
&= \frac{m-1}{n}\left(\int_0^1 x^{m-2}(1-x)^{n-1}\,dx - \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx\right) \\
&= \frac{m-1}{n}(I(m-1,n) - I(m,n))
\end{aligned}$$

整理得

$$I(m,n) = \frac{m-1}{m+n-1} I(m-1,n)$$

重复使用该关系式，直到 $m = 2$，则

$$I(m,n) = \frac{(m-1)!n!}{(m+n-1)!}\cdot I(1,n)$$

注意到 $I(1,n) = \int_0^1 (1-x)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n}$，所以

$$I(m,n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

- (131) $\int_0^1 x^m \ln^n x\,dx \quad (m, n \in \mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(m,n)=\int_0^1 x^m\ln^n x\,dx$，则分部积分得

$$I(m,n)=\frac{x^{m+1}}{m+1}\ln^n x\Big|_0^1-\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m\ln^{n-1}x\,dx=-\frac{n}{m+1}I(m,n-1)$$

重复使用该关系式，直到 $n=0$，则

$$I(m,n)=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

- (132) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos(nx)\,dx \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

解： 设 $I(n)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cos(nx)\,dx$，分部积分得

$$I(n)=\cos^n x\cdot\frac{\sin(nx)}{n}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin x\sin(nx)\,dx=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\sin x\sin(nx)\,dx$$

积化和差得

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x[\cos((n-1)x)-\cos((n+1)x)]\,dx$$

$$=\frac{1}{2}I(n-1)-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos((n+1)x)\,dx$$

对于右侧第二项，我们展开 $\cos(n+1)x$，得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\cos((n+1)x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x[\cos(nx)\cos x-\sin(nx)\sin x]\,dx=I_n-I_n=0$$

所以

$$I(n)=\frac{1}{2}I(n-1)$$

重复使用该关系式，直到 $n=0$，则

$$I(n)=\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

- (133) $\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx$

解： 设 $I=\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx$，则

$$I=\int_{-2}^{2}x\ln(1+\mathrm{e}^x)\,dx=\int_{-2}^{2}(-x)\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x[\ln(1+\mathrm{e}^x) - \ln(1+\mathrm{e}^{-x})]\,dx = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\,dx$$

注意到

$$\frac{1+\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^{-x}} = \frac{(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1} = \mathrm{e}^x$$

所以

$$I = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} x^2\,dx = \frac{8}{3}$$

- (134) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

解: 设 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\tan^\alpha x}$，则

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot^\alpha x} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan^\alpha x}{1+\tan^\alpha x}\,dx$$

两式相加得

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

- (135) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$

解: 设 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$，则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi} \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx \\ &= \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx - I \end{aligned}$$

所以

$$2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,dx$$

trivial

6 第八次习题课答案

8.2.1

极限计算

题 79.

证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n n!}{n^n} = 0$$

证明. 考虑斯特林公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

则

$$\frac{2^n n!}{n^n} \sim \frac{2^n\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{2}{e}\right)^n = 0$$

□

题 80.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

解： 显然为 0

题 81.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{-1}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}$$

解: 由对称性，先考虑 $x\in(0,1]$ 的部分

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{0}^{\delta}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx+\int_{\delta}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}$$

对于第二项，有

$$0\le\int_{\delta}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx\le\int_{\delta}^{1}\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^n dx=(1-\delta)\left(\frac{\sin\delta}{\delta}\right)^n\to 0$$

因此只需考虑第一项

$$\int_{0}^{\delta}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx=\int_{0}^{\delta}\mathrm{e}^{n\ln\frac{\sin x}{x}}\,dx=\int_{0}^{\delta}\mathrm{e}^{n(-\frac{x^2}{6})}\,dx$$

由 δ 的任意性，有

$$\lim_{n\to\infty}(\int_{-1}^{1}\frac{\sin^n x}{x^n}\,dx)^{1/n}=\lim_{n\to\infty}(2\int_{0}^{\infty}\mathrm{e}^{n(-\frac{x^2}{6})}\,dx)^{1/n}$$

计算得

$$=\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\frac{6\pi}{n}})^{1/n}=1$$

题 82.

若 $f(x)$ 以 T 为周期，且在 $\mathbb{R}$ 上可积，求证

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(t)\,dt$$

证明. 设 $x=nT+\delta$，其中 $n=\lfloor\frac{x}{T}\rfloor$，$\delta\in[0,T)$，则

$$\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\frac{1}{nT+\delta}\left(n\int_{0}^{T}f(t)\,dt+\int_{0}^{\delta}f(t)\,dt\right)$$

由于 f 在 $\mathbb{R}$ 上可积，故 $\int_{0}^{T}f(t)\,dt$ 存在有限值，且 $\int_{0}^{\delta}f(t)\,dt$ 有界，因此

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(t)\,dt=\lim_{n\to\infty}\frac{n\int_0^T f(t)\,dt+\int_0^\delta f(t)\,dt}{nT+\delta}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}f(t)\,dt$$

□

题 83.

若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，求证

$$\lim_{h\to 0}\int_{a}^{b}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx=f(b)-f(a)$$

证明. 由 h 的任意性，有

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b \frac{f(x+h)-f(x)}{h}\,dx = \lim_{h\to 0}\int_a^{a+h} + \frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt$$

$$+\int_{a+h}^{a+2h}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt+\cdots+\lim_{h\to 0}\int_{b-h}^{b}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}\,dt$$

我们改变积分变量, 得到

$$=\lim_{h\to 0}\int_a^{a+h}\frac{f(t+b-a)-f(t)}{h}\,dt$$

由积分中值定理

$$=\lim_{h\to 0}[f(c+b-a)-f(c)]=f(b)-f(a)$$

□

8.2.2
积分中值定理

题 84.

若 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx=\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx=0$$

证明 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点

证明. 若 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上无零点，则 $f(x)$ 恒为正或恒为负，故

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx>0 \quad 或 \quad \int_0^\pi f(x)\sin x\,dx<0$$

矛盾，故 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有一个零点。设该零点为 c_1，则在 $(0,c_1)$ 或 (c_1,π) 上 $f(x)$ 恒为正或恒为负，

$$\int_0^{c_1} f(x)\cos x\,dx=f(\xi_1)\sin c_1 \quad \text{and} \quad \int_{c_1}^{\pi} f(x)\cos x\,dx=f(\xi_2)(-\sin c_1)$$

不难发现，和式非负，因此 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上至少有两个零点。

□

题 85.

设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，$g(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续非负且以 2π 为周期，计算

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx$$

解： 置 $y=nx$，则有

$$\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{2n\pi} f(\frac{y}{n})g(y)\,dy$$

做变量替换得：

$$= \int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{n-1}[\frac{1}{n}f(\frac{y+2k\pi}{n})]g(y)\,dy$$

将内部转化为定积分的黎曼和，得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)g(nx)\,dx = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\cdot g(y)\,dy = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\cdot\int_0^{2\pi} g(y)\,dy$$

题 86.

若 $f(x)$ 以 T 为周期，在 $\mathbb{R}$ 上连续，假设其满足

$$\int_0^T f(x)\,dx = 0$$

证明对任何 x_0,$f(x)$ 在 $[x_0, x_0+T]$ 中至少有两个零点。

证明. 由积分中值定理，存在 $c_1\in(x_0, x_0+T)$，使得

$$\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,dx = f(c_1)T = 0$$

因此 $f(c_1)=0$。若 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+T]$ 中只有一个零点 c_1，则 $f(x)$ 在 (x_0, c_1) 或 (c_1, x_0+T) 上恒为正或恒为负，矛盾。故 $f(x)$ 在 $[x_0, x_0+T]$ 中至少有两个零点。

□

8.3.1
等式证明

题 87.

设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，且 $f(x)f(a-x)=1$，计算

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx$$

解： 由 $f(x)f(a-x)=1$，有 $\dfrac{1}{f(x)} = f(a-x)$，因此

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+1}\,dx$$

令 $t=a-x$，则

$$= \int_0^a \frac{f(t)}{f(t)+1}\,dt$$

将两式相加，得到

$$2\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx = \int_0^a 1\,dx = a$$

因此

$$\int_0^a \frac{1}{f(x)+1}\,dx = \frac{a}{2}$$

题 88.

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 证明

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}\,dx = \int_1^a f(x+\frac{a^2}{x})\frac{1}{x}\,dx$$

证明. 置换 $t \to x^2$，则

$$\int_1^a f(x^2+\frac{a^2}{x^2})\frac{1}{x}\,dx = \int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt$$

注意到

$$\int_1^{a^2} f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt = 2\cdot\int_1^a f(t+\frac{a^2}{t})\frac{1}{2t}\,dt = RHS;$$

□

题 89.

证明

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx = 0$$

证明. 分部分项积分，得

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\right)dx = 0-\int_0^{2\pi}\sin t\,dt = 0$$

□

8.3.2 积分估算

题 90.

证明对 $x\in[0,1]$，有

$$\ln(1+x)\le\arctan x$$

证明. 考虑函数 $f(x)=\arctan x-\ln(1+x)$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}=\frac{x-x^2}{(1+x^2)(1+x)}\ge 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调递增，且 $f(0)=0$，故 $f(x)\ge 0$，即 $\ln(1+x)\le\arctan x$。

□

题 91.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

解： 拆分：

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\int_0^\delta \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx+\int_\delta^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx$$

对于第二项，有

$$0\le\int_\delta^1 \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx\le\int_\delta^1 \frac{1}{(1+\delta^2)^n}\,dx=(1-\delta)\frac{1}{(1+\delta^2)^n}\to 0$$

因此只需考虑第一项，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \frac{1}{(1+x^2)^n}\,dx=\lim_{n\to\infty}\int_0^\delta \mathrm{e}^{-n\ln(1+x^2)}\,dx$$

由 δ 的任意性, 和 $\ln(1+x^2)\sim x^2$，故

$$=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-nx^2}\,dx=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4n}}=0$$

题 92.

已知 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上连续, 且在 $(1,+\infty)$ 上可导，导函数满足

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}$$

证明极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

存在

证明. 由于 $f'(x)>0$，故 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调递增。又由于

$$f'(x)=\frac{1}{x^2+f^2(x)}<\frac{1}{x^2}$$

因此对任意 $x>1$，有

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,dt<\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt=1-\frac{1}{x}<1$$

故 $f(x)$ 有上界。由单调有界定理，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在。

□

题 93.

已知定义在 $[0,+\infty)$ 上的连续非负函数 $f(x),g(x)$ 满足：

$$f(x) \le A + \int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

其中 A 为正常数，求证：

$$f(x) \le A\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$$

证明. 设

$$F(x) = A + \int_0^x f(t)g(t)\,dt$$

则 $F'(x) = f(x)g(x)$, 且 $f(x) \le F(x)$，因此

$$F'(x) \le F(x)g(x)$$

即

$$\frac{F'(x)}{F(x)} \le g(x)$$

对上式两边积分，得到

$$\ln F(x) - \ln F(0) \le \int_0^x g(t)\,dt$$

因此

$$F(x) \le F(0)\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right) = A\exp\left(\int_0^x g(t)\,dt\right)$$

□

8.3.3

抽象函数

题 94.

设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，证明

$$\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \ge \left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2$$

证明. 唉，柯西

考虑 $[tf(x)-g(x)]^2$

$$\int_a^b (t^2f^2(x) - 2tf(x)g(x) + g^2(x))\,dx \ge 0$$

则 $\Delta = 4\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 - 4\int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \le 0$ 即得证。

□

题 95.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且恒正，证明

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \geq \left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)^{-1}$$

证明. 考虑柯西不等式

$$\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx \cdot \int_0^1 f(x)\,dx \geq \left(\int_0^1 1\,dx\right)^2 = 1$$

即得证。

□

题 96.

设 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可导且导函数连续，若 $a<b$ 且 $f(a)=f(b)=0$，证明

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx \geq 2(M-m)$$

此处 $M=\max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

证明. 设最大值点为 c_1，最小值点为 c_2, 不妨设 $c_1<c_2$，则有

$$\int_a^b |f'(x)|\,dx = \int_a^{c_1} |f'(x)|\,dx + \int_{c_1}^{c_2} |f'(x)|\,dx + \int_{c_2}^b |f'(x)|\,dx$$

$$\geq \int_a^{c_1} f'(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} -f'(x)\,dx + \int_{c_2}^b f'(x)\,dx = f(c_1)-f(a)+f(c_1)-f(c_2)+f(b)-f(c_2) = 2(M-m)$$

□

题 97.

若 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调连续递增，设

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

证明 $F(x)$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调增函数，且若 f 在 $+\infty$ 的极限为 l，则 F 在 $+\infty$ 的极限也为 l。

证明.

$$F'(x) = \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)\,dt$$

只需证 $F'(x)\geq 0$，即证

$$xf(x) \geq \int_0^x f(t)\,dt$$

由积分中值定理，存在 $c\in(0,x)$，使得

$$\int_0^x f(t)\,dt = xf(c)$$

由于 f 单调递增，故 $f(x)\geq f(c)$，因此不等式成立，$F(x)$ 单调递增。

若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, □

9.2.1

极限计算

题 98.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|$$

解： 注意到

$$\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi\sqrt{n^2+1})|=\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}})|=\lim_{n\to\infty}|\cos(\pi n+\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n}))|$$

$$=\lim_{n\to\infty}|\cos(\frac{\pi}{2n}+o(\frac{1}{n}))|=1$$

题 99.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{4}\cdot\cos\frac{1}{8}\cdots\cos\frac{1}{2^n}$$

解： 注意到

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin 1}{2^n\sin\frac{1}{2^n}}=\frac{\sin 1}{1+o(1)}=\sin 1$$

题 100.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)$$

解： 展开得到

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{n}\cos\frac{1}{kn^k}+\sin\frac{k}{n}\sin\frac{1}{kn^k}\right)$$

注意到

$$=\int_0^1\cos x\,dx=\sin 1$$

题 101.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k\ln(n+k)-\frac{1}{2}\ln n\right)$$

解： 注意到

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\ln(1+\frac{k}{n})-\frac{1}{n}\ln n\right)$$

$$= \int_0^1 x\ln(1+x)\,dx = \frac{1}{4}$$

题 102.

已知定义在 $[-1,1]$ 上的函数 f 满足 $f'(0)$ 存在，计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2}) - nf(0)$$

解： 注意到

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(f(0)+f'(0)\frac{k}{n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)-nf(0)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(f'(0)\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+no(\frac{1}{n^2})\right)=\frac{f'(0)}{2}$$

题 103.

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n+k)^3}$$

解： 显然为 0

题 104.

设 $0 < b_1 < a_1$, 且

$$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n \quad 和 \quad \lim_{n\to\infty} b_n$$

存在且相等

证明. 不难发现，a_n 递减，b_n 递增，且 $a_n \geq b_n$。因此，a_n 有下界，b_n 有上界，故两极限均存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，则由递推关系，有

$$A = \frac{A+B}{2}, \quad B = \sqrt{AB}$$

解得 $A = B$，即两极限相等。

□

题 105.

设 $x_1>0$，且

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$$

证明极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n$$

存在并计算

证明. 不妨设 $x_1\geq 1$，则不难发现 x_n 递减且有下界 1，因此极限存在。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=L$，则由递推关系，有

$$L=\frac{1}{2}\left(L+\frac{1}{L}\right)$$

解得 $L=1$。

□

题 106.

证明或否定: 存在数列 $\{a_n\}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}a_n^n=1.001$$

解： 考虑 $a_n=1+\dfrac{\ln(0.001)}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}a_n=1,\quad \lim_{n\to\infty}a_n^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{\ln(0.001)}{n})^n=\mathrm{e}^{\ln(0.001)}=0.001$$

题 107.

证明或否定: 对 $f(x)=x\ln x$，存在数列 a_n 使得

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\mathrm{e}^n)=0,\quad \lim_{n\to\infty}(f(a_n)-f(\mathrm{e}^n))\neq 0;$$

解： 考虑 $a_n=\mathrm{e}^n+\dfrac{1}{n}$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-\mathrm{e}^n)=0$$

但

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f(a_n)-f(\mathrm{e}^n))&=\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{e}^n+\frac{1}{n})\ln(\mathrm{e}^n+\frac{1}{n})-\mathrm{e}^n n\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\left((\mathrm{e}^n+\frac{1}{n})(n+\ln(1+\frac{1}{n\mathrm{e}^n}))-\mathrm{e}^n n\right)=1\end{aligned}$$

题 108.

证明或否定: 若存在 $l\in\mathbb{R}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_k=l$$

则

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

解： 显然成立

题 109.

对 $\lambda \in (0,1)$, 与极限为 a 的数列 $\{a_n\}$，证明

$$\lim_{n\to\infty} a_n + \lambda a_{n-1} + \lambda^2 a_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} a_1 = \frac{a}{1-\lambda}$$

证明. 令 $b_n = a_n - a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，只需证

$$\lim_{n\to\infty} b_n + \lambda b_{n-1} + \lambda^2 b_{n-2} + \cdots + \lambda^{n-1} b_1 = 0$$

随后应用 Toplitz 定理即可。

□

题 110.

设数列 $\{a_n\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = a$$

$$\lim_{n\to\infty} n(x_n - x_{n-1}) = 0$$

证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

证明. 不妨设 $a = 0$, 对于第二项，对于任意的 $\varepsilon > 0$，存在一个 N，当 $n > N$ 时，有

$$|x_n - x_{n-1}| < \frac{\varepsilon}{n}$$

考虑

$$|\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_n)|$$

$$\leq |\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N}(x_k - x_n)| + |\frac{1}{n}\sum_{k=N+1}^{n}(x_k - x_n)|$$

显然第一项趋于 0，第二项

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}|\sum_{k=N+1}^{n} \frac{(n-k)\varepsilon}{n}|$$

取 $N \to \infty$，即可得证。

□

题 111.

给定 $\beta > 0$，已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^\beta}=1$$

计算极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n^{\beta+1}}$$

解： stolz

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{(n+1)^{\beta+1}-n^{\beta+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^\beta}{(n+1)^{\beta+1}-n^{\beta+1}}=\frac{1}{\beta+1}$$

题 112.

求实数 a,b 使得

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax+b}{\sin(x^2-1)}=\frac{4}{9}$$

解： 我们有 $a+b+1=0$, 且

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)+a(x-1)+a+b+1}{(x^2-1)}=\lim_{x\to1}\frac{x+1+a}{(x+1)}=\frac{4}{9}$$

解得 $a=-\dfrac{10}{9},b=\dfrac{1}{9}$

题 113.

计算

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+2\sin^2x}{\cos 2x}\right)^{\csc^2x}$$

解： 取对数

$$=\lim_{x\to0}\exp\left[\csc^2x\cdot\ln\left(\frac{1+2\sin^2x}{\cos 2x}\right)\right]=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+2\sin^2x)-\ln(\cos 2x)}{\sin^2x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2x+o(\sin^2x)+2\sin^2x+o(\sin^2x)}{\sin^2x}\right)=\mathrm{e}^4$$

题 114.

给定 $a>0$，计算极限

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}$$

解： 置 $t = x - a$，则

$$= \lim_{t \to 0} \frac{a^{a+t} - (a+t)^a}{t}$$

提出 a^a，得到

$$= a^a \lim_{t \to 0} \frac{a^t - (1 + \frac{t}{a})^a}{t} = a^a \lim_{t \to 0} \frac{a^t - 1 - at/a + o(t)}{t} = a^a(\ln a - 1)$$

题 115.

计算极限

$$\lim_{x \to \infty} \sin\left(\pi\left(\sqrt{x^2 + [x]} - \sqrt{x^2 - [x]}\right)\right)$$

解： 有理化

$$= \lim_{x \to \infty} \sin\left(\pi \frac{2[x]}{\sqrt{x^2 + [x]} + \sqrt{x^2 - [x]}}\right) = \lim_{x \to \infty} \sin\left(\pi \frac{2[x]}{2x + o(x)}\right) = \sin(\pi) = 0$$

题 116.

证明 $x^{18} + x^{12} - \cos x$ 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有两个根

证明. 偶函数，考虑 $x \geq 0$ 的情况。令 $f(x) = x^{18} + x^{12} - \cos x$，注意到 $f(0) = -1 < 0$, 且

$$f'(x) = 18x^{17} + 12x^{11} + \sin x > 0$$

因此 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增，故仅有一个根。由偶函数性质，$x^18 + x^12 - \cos x = 0$ 在 $\mathbb{R}$ 上有且仅有两个根。

□

题 117.

设 $f(x)$ 在开区间 (c, d) 连续，证明对任何 $x_1, \cdots, x_n \in (c, d)$，存在 $\xi \in (c, d)$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$$

证明. 数学归纳法：

- 当 $n = 1$ 时，显然成立，取 $\xi = x_1$；
- 假设当 $n = m$ 时结论成立，考虑 $n = m + 1$ 的情况。由归纳假设，存在 $\eta \in (c, d)$，使得

$$f(\eta) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} f(x_k)$$

对于

$$\frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} f(x_k) = \frac{1}{m+1}\left(mf(\eta) + f(x_{m+1})\right)$$

不妨设 $M = \max f, m = \min f$，则

$$m \le \frac{1}{m+1}\left(mf(\eta) + f(x_{m+1})\right) \le M$$

由介值定理，存在 $\xi \in (c,d)$，使得

$$f(\xi) = \frac{1}{m+1}\left(mf(\eta) + f(x_{m+1})\right)$$

□

题 118.

设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且

$$f(0) = g(0), \quad \sin f(1) = \sin g(1), \quad \cos f(1) = \cos g(1)$$

且

$$\forall x \in [0,1], \quad (\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 > 0$$

证明 $f(1) = g(1)$

证明. 不难发现，必有 $f(1) = g(1) + 2k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$。

考虑函数 $h(x) = f(x) - g(x)$，则 $h(0) = 0, h(1) = 2k\pi$。则必有 $c \in (0,1)$, 使得

$$h(x) = \pm\pi$$

再考虑条件 2，则

$$(\cos f(c) + \cos g(c))^2 + (\sin f(c) + \sin g(c))^2 = 0$$

矛盾。故 $k = 0$，即 $f(1) = g(1)$。

□

题 119.

对给定实数 k, 证明或否定以下两句话

- 若 $f'(a)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+kh) - f(a-h)}{h}$ 存在.
- 若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+kh) - f(a-h)}{h}$ 存在，则 $f'(a)$ 存在.

解： 注意到：

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+kh)-f(a-h)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(k\cdot\frac{f(a+kh)-f(a)}{kh}+\frac{f(a)-f(a-h)}{h}\right)$$

$$=kf'(a)+f'(a)=(k+1)f'(a)$$

对于第二个论断，考虑 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处，显然极限存在，但导数不存在。

题 120.

定于

$$f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

已知 $f''(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，求 m 的取值范围

解： 计算得到

$$f'(x)=mx^{m-1}\sin\frac{1}{x}-x^{m-2}\cos\frac{1}{x},\ (x\neq 0)$$

$$f''(x)=m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}-2(m-1)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-x^{m-4}\sin\frac{1}{x},\ (x\neq 0)$$

为了使 $f''(x)$ 在 $x=0$ 处连续，需

$$\lim_{x\to 0}f''(x)=f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=0$$

且

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{m-1}\sin\frac{1}{x}$$

注意到, 当 $m>1$ 时，$f'(0)=0$。因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\left(mx^{m-2}\sin\frac{1}{x}-x^{m-3}\cos\frac{1}{x}\right)$$

为了使极限存在且等于 0，需 $m-3>0$，即 $m>3$。

而对于 $\lim\limits_{x\to 0}f''(x)$

$$=\lim_{x\to 0}\left(m(m-1)x^{m-2}\sin\frac{1}{x}-2(m-1)x^{m-3}\cos\frac{1}{x}-x^{m-4}\sin\frac{1}{x}\right)$$

为了使极限存在且等于 0，需 $m-4>0$，即 $m>4$。

题 121.

若 f 在 $\mathbb{R}$ 上有定义且 $f''(x_0)$ 存在，证明存在 $\delta>0$，使得 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时 f 连续

证明. 略

□

题 122.

对

$$f(x)=\int_0^{x^3} t\sin x\sin\frac{x}{t}\,dt$$

计算 $f'(x)$

解:

$$f(x)=x^2\sin x\int_0^{x^2} u\sin\frac{1}{u}\,du$$

求导得

$$f'(x)=2x\sin x\int_0^{x^2} u\sin\frac{1}{u}\,du+x^2\cos x\int_0^{x^2} u\sin\frac{1}{u}\,du+x^2\sin x\cdot 2x\cdot x^2\sin\frac{1}{x^2}$$

题 123.

对

$$f(x)=(x^2-3x+2)^{100}\cos\frac{\pi x^2}{4}$$

计算 $f^{(50)}(1),f^{(100)}(1),f^{(101)}(2)$

解: 反复求导展开即可

题 124.

设 $f(x)=x^n(1-x)^n$

$$F(x)=f(x)-f''(x)+f^{(4)}(x)-\cdots+(-1)^n f^{(2n)}(x)$$

计算

$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)$$

解: 注意到

$$\frac{d}{dx}\left(F'(x)\sin x-F(x)\cos x\right)=\left(F''(x)+F(x)\right)\sin x$$

而

$$F''(x)+F(x)=f(x)+(-1)^n f^{(2n+2)}(x)=f(x)$$

因此

$$=f(x)\sin x=x^n(1-x)^n\sin x$$

题 125.

计算

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\,dx$$

解： 注意到

$$= 2\int x d\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\, dx = 2x\sqrt{\mathrm{e}^x - 1} - 2\int \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}\, dx$$

而对于后半部分

$$= 2\int \frac{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}{\mathrm{e}^x}\, d(\mathrm{e}^x) =$$

置 $t \to \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$，得到

$$= 2\int \frac{t^2}{t^2 + 1}\, dt = 2t - 2\arctan t + C$$

题 126.

计算

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$$

解：

$$= \int \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \frac{1}{(x-1)^2}\, dx$$

置 $t = \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$，则

$$= \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^3}\, dt = -\frac{1}{4t^2} + C$$

题 127.

计算

$$\int_0^2 |x^2 - 1|\mathrm{e}^{-|x-1|}\, dx$$

解： 注意到

$$= \int_0^1 (1 - x^2)\mathrm{e}^{-(1-x)}\, dx + \int_1^2 (x^2 - 1)\mathrm{e}^{-(x-1)}\, dx$$

计算即可

题 128.

计算

$$\int_{-1}^1 \frac{x^2 + x^4 \arctan x}{x^2 + 1}\, dx$$

解： 只需考虑前半部分

$$= 2\int_0^1 \frac{x^2}{x^2 + 1}\, dx$$

易得

题 129.

计算

$$\int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\cos^2 t}{\pi - t}\, dt\right) dx$$

解： 分部积分得

$$= \pi \int_0^\pi \frac{\cos^2 t}{\pi - t}\,dt - \int_0^\pi x\frac{\cos^2 x}{\pi - x}\,dx$$

$$= \int_0^\pi \cos^2 x\,dx$$

易得

题 130.

已知 $y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y)=x^2$ 确定的隐函数，求

$$\int \frac{dx}{y^2(x)}$$

解： 解得

$$x = \frac{y^2 \pm \sqrt{y^4 - 4y^3}}{2}$$

带入积分

题 131.

求所有在 R 上满足

$$g(x) + g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

的函数 $g(x)$

解： 注意到

$$(g(x)\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x + 1$$

因此

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x + x + C}{\mathrm{e}^x}$$

题 132.

求所有在 R 上满足

$$h(x) - h''(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

的函数 $h(x)$

解： 令 $g(x) = h(x) - h'(x)$，则

$$g(x) + g'(x) = 1 + \mathrm{e}^{-x}$$

由上题可得

$$g(x) = \frac{\mathrm{e}^x + x + C}{\mathrm{e}^x}$$

因此

$$h(x) - h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + x + C}{\mathrm{e}^x}$$

注意到

$$(h(x)\mathrm{e}^{-x})' = x\mathrm{e}^{-x} + C\mathrm{e}^{-x} + 1$$

因此

$$h(x) = \frac{-x\mathrm{e}^{-x} + (C-1)\mathrm{e}^{-x} + D}{\mathrm{e}^{-x}}$$

题 133.

设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln\left(1 - 2r\cos x + r^2\right)\, dx$$

证明对 $r \in (0,1)$，有 $A(r^2) = 2A(r)$，并通过证明 $A(r)$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 有界计算 $A(r)$.

证明.

$$A(r) =$$

□

题 134.

证明对 $[a,b]$ 上的单调增函数 $f(x)$，有

$$\int_a^b x f(x)\, dx \geq \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)\, dx$$

证明. 做差，只需证

$$\int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\, dx \geq 0$$

拆分

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\, dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\, dx$$

注意到

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\, dx = \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f(a+b-x)\, dx$$

因此只需证

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(x - \frac{a+b}{2}\right) f(x)\, dx + \int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right) f(a+b-x)\, dx \geq 0$$

即证

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} \left(\frac{a+b}{2} - x\right) \left(f(a+b-x) - f(x)\right)\, dx \geq 0$$

由于 f 单调递增，故不等式成立。

□