高数 A 第 2 次作业

2025 年 9 月 21 日

9.16 日作业

7.4

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n}$

解： 注意到 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}=\frac{1}{e^2}.$$

7.5

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

解： 注意到 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left((1-\frac{1}{n})^n\right)^n=\left(\frac{1}{e}\right)^n=0.$$

7.6

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$

解：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}.$$

等价无穷小替换：

$$\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1.$$

8.1

利用单调有界序列有极限证明下列数列的极限存在：

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

证明. 显然该数列单调递增，并且我们有裂项如下：

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)*n} < 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

因此该数列有上界 2，单调有界数列必有极限。

□

8.4

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

证明. 显然该数列单调递增，并注意到：

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

因此该数列有上界 3，单调有界数列必有极限。

□

9.10

证明：

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}).$$

证明. 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 且 $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$。

- 证明. $e \le S$

  根据二项式定理展开 e_n：

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n \end{aligned}$$

  对 $e_n \le S_n$ 两边取极限，得 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \le \lim_{n\to\infty} S_n = S$。 □

- 证明. $e \geq S$

  对于任意固定的 m，我们有 $S_m = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!}$。

  考虑 $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$ 的前 m+1 项，则有

  $$e_n > 2 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!n^m}$$

  保持 m 固定，令 $n \to \infty$，则不等式右侧趋向于 $S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$。因此 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq S_m$。由于该式对任意 m 成立，令 $m \to \infty$，我们得到 $e \geq \lim_{m\to\infty} S_m = S$。

  □

综上，我们有 $e \leq S$ 且 $e \geq S$，因此 $e = S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$。

□

9.18 日作业

定理 3 和定理 4

设函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 定义在点 a 的一个空心邻域内，且

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \ell_2.$$

若 $\ell_1 > \ell_2$，则存在 $\delta > 0$，使得当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有

$$f(x) > g(x).$$

证明. 由 $\lim_{x\to a} f(x) = \ell_1$，对 $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} > 0$，存在 $\delta_1 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_1$ 时，有

$$|f(x) - \ell_1| < \varepsilon,$$

即

$$\ell_1 - \varepsilon < f(x) < \ell_1 + \varepsilon.$$

同理，由 $\lim_{x\to a} g(x) = \ell_2$ ，对 $\varepsilon = \frac{\ell_1 - \ell_2}{2} > 0$，存在 $\delta_2 > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta_2$ 时，有

$$|g(x) - \ell_2| < \varepsilon,$$

即

$$\ell_2 - \varepsilon < g(x) < \ell_2 + \varepsilon.$$

取 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有

$$f(x) > \ell_1 - \varepsilon = \frac{\ell_1 + \ell_2}{2} > \ell_2 + \varepsilon > g(x).$$

□

例 10

求极限

- 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{a^x}(a>1)$

  解： 已知整数形式下存在极限 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{a^n}=0$，我们设 $x=n+t$，其中 $n=\lfloor x\rfloor$，$t=x-\lfloor x\rfloor$，则 $t\in[0,1)$。

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{a^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+t)^{10}}{a^{n+t}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{10}}{a^n}=0.$$

  同时，我们有

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{a^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+t)^{10}}{a^{n+t}}\ge\lim_{n\to\infty}\frac{n^{10}}{a^{n+1}}=0.$$

  因此，$\lim_{x\to\infty}\frac{x^{10}}{a^x}=0$。

- 求 $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x^\beta}(\beta>0)$

  解： 取 $x=\mathbf{e}^y$，则 $y=\ln x$，当 $x\to\infty$ 时，$y\to\infty$。

  $$\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x^\beta}=\lim_{y\to\infty}\frac{y^{10}}{\mathbf{e}^{\beta y}}.$$

  由 (1) 可知，$\lim_{y\to\infty}\frac{y^{10}}{\mathbf{e}^{\beta y}}=0$，因此 $\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)^{10}}{x^\beta}=0$。

习题 1.2

用 $\varepsilon-\delta$ 语言证明下列极限：

$$\lim_{x\to a}x^2=a^2.$$

证明. 对于任意 $\varepsilon>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有

$$|x^2-a^2|=|x-a||x+a|<\delta(2|a|+\delta)\le\varepsilon,$$

只需有 $\delta^2+2|a|\delta-\varepsilon\le0$，即 $\delta\le\sqrt{a^2+\varepsilon}-|a|$。因此，$\lim_{x\to a}x^2=a^2$。 □

习题 3.2

求极限：

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

解：

$$1-\cos x = 1-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = \frac{x^2}{2}-o(x^2).$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}-o(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}-\frac{o(x^2)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

习题 3.7

求极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

解：

$$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = (1+\frac{x}{2}+o(x))-(1-\frac{x}{2}+o(x)) = x+o(x).$$

因此，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{x} = \lim_{x\to 0}(1+\frac{o(x)}{x}) = 1.$$

利用 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ $\lim_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ 求下列极限：

习题 4.5

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

解： 置 $y=x-a$，则当 $x\to a$ 时，$y\to 0$。

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin(a+y)-\sin a}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{\sin a\cos y+\cos a\sin y-\sin a}{y}.$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{\sin a(\cos y-1)+\cos a\sin y}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\sin a\cdot\frac{\cos y-1}{y}+\cos a\cdot\frac{\sin y}{y}\right).$$

注意到 $\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$，且

$$\lim_{y\to 0}\frac{\cos y-1}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{1-\frac{y^2}{2}+o(y^2)-1}{y} = 0$$

所以

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \sin a\cdot 0+\cos a\cdot 1 = \cos a.$$

习题 4.7

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{\frac{1}{y}}$$

解： 置 $x = \frac{1}{-5y}$，则当 $y \to 0$ 时，$x \to \infty$。

$$\lim_{y\to 0}(1-5y)^{\frac{1}{y}} = \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{-5x} = e^{-5}.$$