

高数 A 第 7 次作业

韩雨潜

2025 年 11 月 3 日

10.28 日作业

例 1

给定半径 R , 求出转轮线一个周期的长度

解: 设转轮线参数方程为

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$$

则其一个周期的长度为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} 2R \sin \frac{t}{2} dt = 8R$$

习题 4

求 $y = 0$ 与 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ 所围成图形的面积

解: 设所围成图形的面积为 S , 则

$$S = \int_0^{2\pi} y \frac{dx}{dt} dt = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt = 3\pi a^2$$

习题 16

求曲线 $y = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x} \quad (1 \leq x \leq 3)$ 的弧长

解:

$$y' = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

则弧长为

$$L = \int_1^3 \sqrt{1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)^2} dx = \frac{14}{3}$$

习题 18

求星形线

$$\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

的全长

解:

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t$$

则全长为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = 6a \int_0^{2\pi} |\sin t \cos t| dt = 6a$$

习题 19

求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 的全长

解:

$$\frac{dr}{d\theta} = -a \sin \theta$$

则全长为

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + (-a \sin \theta)^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta} d\theta = 8a$$

10.30 日作业

例 3

设区域 D 由椭圆周 $4(x-4)^2 + 9y^2 = 9$ 所围成, 求 D 绕下列直线旋转一周所成的旋转体体积:

(1) x 轴; (2) y 轴; (3) 直线 $x = 1$

解:

- (1) 此时有

$$y = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}(x-4)^2}$$

则体积为

$$V = \pi \int_{\frac{5}{2}}^{\frac{11}{2}} \left(1 - \frac{4}{9}(x-4)^2\right) dx = 2\pi$$

- (2) 此时有

$$x = 4 + \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}, \quad x = 4 - \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}$$

则体积为

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(4 + \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(4 - \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \right] dy = 12\pi^2$$

- (3) 同理 (2), 解得

$$V = \pi \int_{-1}^1 \left[\left(3 + \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(3 - \frac{3}{2}\sqrt{1-y^2}\right)^2 \right] dy = 9\pi^2$$

例 4

空间一个物体 Ω 放置在 Oxy 平面上, 其底面是由曲线 $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 与 x 轴所围成的区域, 垂直于 x 轴的截面都是等边三角形, 求该物体的体积。

解: 设截面边长为 a , 则截面积为 $S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$. 此处 $a = \sin x$, 故体积为

$$V = \int_0^\pi \frac{\sqrt{3}}{4} \sin^2 x dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}$$

例 5

求

$$y^2 = 4(4-x) \quad (-1 \leq x \leq \frac{7}{2})$$

绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的侧面积

解:

$$S = \int_{-1}^{\frac{7}{2}} 2\pi \sqrt{4-x} \sqrt{\frac{5-x}{4-x}} dx = 14\sqrt{6}\pi$$

例 6

求由 $x^2 + (y-h)^2 = r^2$ 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的面积。

解:

$$S = 2\pi l \cdot h = 4\pi^2 rh$$

例 7

求三叶玫瑰线

$$r = a \sin 3\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

围成的图形的面积

解:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 \sin^2 3\theta \, d\theta = \frac{a^2 \pi}{4}$$

习题 8

求由双纽线

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (a > 0)$$

围成的图形的面积

解:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta + \frac{1}{2} \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} a^2 \cos 2\theta \, d\theta = a^2$$

习题 9(2)

求由 $y = e^x - 1$, $x = \ln 3$, $y = 0$ 所围成图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积

解:

$$V = \pi \int_0^{\ln 3} (e^x - 1)^2 \, dx = \pi \ln 3$$

习题 23

计算圆弧 $x^2 + y^2 = a^2$ ($a - h \leq y \leq a$, $0 < h < a$) 绕 y 轴旋转一周所成的球冠的面积。

解:

$$S = \int_{a-h}^a 2\pi \sqrt{a^2 - y^2} \, dy = 2\pi ah$$

习题 24

求心形线 $r = a(1 + \cos \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 绕极轴旋转一周所成的旋转体的侧面积。

解:

$$S = \int_0^{2\pi} 2\pi a(1 + \cos \theta) \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} d\theta = \frac{32}{5} \pi a^2$$

习题 32

水闸门的边界线为抛物线, 沿水平面宽度为 48m, 最低点在水平面下 64m 处, 求水对闸门的压力。

解:

$$dF = -\rho g y dA$$

设抛物线方程为 $y = kx^2 - 64$, 则有 $k = \frac{1}{9}$. 则总压力为

$$dA = 2\sqrt{9(y + 64)} dy$$

$$F = \int_{-64}^0 -\rho g y \cdot 2\sqrt{9(y + 64)} dy = \frac{262144}{3} \rho g$$