

第四次习题课答案

VioletHan

2025 年 10 月 11 日

题 17. 证明对任何 $a > 1, b > 0, c > 0$ 有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)^c}{x^b} = 0$$

证明. 对于第一个极限, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{x}\right)^x = 0$$

对于第二个极限, 我们有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^{b/x}}{a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{e^{\frac{b \ln x}{x}}}{a}\right)^x = 0$$

第三个极限类比第二个极限即可

□

题 18. 证明

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$$

证明. 考虑题 17.3, 置 $y = \frac{1}{x}$, 取 $c = 1, b = 1$, 则有 $\lim_{y \rightarrow 0^+} y \ln y = 0$, 所以我们有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = e^0 = 1$$

□

题 19. 证明对多项式 f 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$

证明. 不难发现, 对任意多项式 $f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = C$, 其中 C 为常数。又因为 $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$, 所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)e^{-\frac{1}{x^2}} = C \cdot 0 = 0$$

□

题 20. 证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

证明. 我们考虑 $x = n + \{x\}$, 其中 $n = \lfloor x \rfloor$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \{x\}}\right)^{n + \{x\}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

我们还有

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n + \{x\}}\right)^{n + \{x\}} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = e$$

□

题 21. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

解: 置 $y = \frac{1}{x}$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(1+y)}{y}} = e^0 = 1$$

题 22. 对于关于 x 的两个多项式 $p(x), q(x)$, 计算极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)}$$

解： 类别整数情况即可

题 23.

证明极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$$

存在，以此证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$$

证明. 考虑 $n+1 - n$ ，我们有

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

利用不等式 $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$ ，我们有

$$\frac{1}{n+1} - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n+1} - \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = 0$$

所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ 是递减序列，考虑

$$\ln n = \ln 1 + \ln \frac{2}{1} + \cdots + \ln \frac{n}{n-1} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

所以 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ 有下界，故极限存在。

又因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = +\infty$$

所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = +\infty$

□

题 24. 对连续函数 $f(x)$ ，若 (这里 a 为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = A$$

证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$$

证明. 取 $M > 0$, 当 $x > M$ 时, 有

$$|f(x+1) - f(x) - A| < \varepsilon$$

取 $N = \max\{M, \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil\}$, 即

$$A - \varepsilon < f(x+1) - f(x) < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) - f(x-1) < A + \varepsilon$$

...

$$A - \varepsilon < f(\{x\} + N + 1) - f(\{x\} + N) < A + \varepsilon$$

累加得到

$$(A - \varepsilon)(x - (\{x\} + N + 1)) < f(x) - f(\{x\} + N + 1) < (A + \varepsilon)(x - (\{x\} + N + 1))$$

即

$$A - \varepsilon < \frac{f(x) - f(\{x\} + N + 1)}{x - (\{x\} + N + 1)} < A + \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < \frac{\frac{f(x)}{x} - \frac{f(\{x\} + N + 1)}{x}}{1 - \frac{\{x\} + N + 1}{x}} < A + \varepsilon$$

不难发现, 此即等价于

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < A + \varepsilon$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = A$$

□

注: 此后我们将自由使用 **Stolz 公式**

题 25. 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3+x}}$$

解: 我们有

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^3(1+\frac{1}{x^3})}}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

另解)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1+x^3}}{\sqrt{x^2+x^3+x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})}{x^{\frac{3}{2}} + o(x^{\frac{3}{2}})} = 1$$

题 26. 计算

考虑满足递推关系

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \quad a_1 > 0,$$

的数列 $\{a_n\}$ 。证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty,$$

并进一步证明 a_n 是一个 $\frac{1}{2}$ 阶无穷大。

证明. 取 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 则有

$$b_{n+1} = \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n + \frac{1}{a_n}} = \frac{b_n}{1 + b_n^2} < b_n$$

故 a_n 递增, 且注意到 $a_1 > 0$, 所以 $a_n > 0$ 。

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$$

所以 $a_n^2 > 2n - 2 + a_1^2$, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$, 观察到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} > \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n - 2 + a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$$

取 $t = \max\{3, 2 + \frac{1}{a_1^2}\}$, 则有

$$a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} \leq a_n^2 + t$$

所以 $a_n^2 \leq tn - t + a_1^2$, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{tn - t + a_1^2}}{\sqrt{n}} = \sqrt{t}$$

t 为有限值, 则 $a_n = O(\sqrt{n})$

□

题 27. 对正实数 a 与实数 α , 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}.$$

解: 略

题 28. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

解:

- 对于第一个极限, 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} a \exp \left(\frac{\ln \frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \exp \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{x \ln(\frac{b}{a})}{2} + o(x) \right)}{x} \right) \\ &= a \exp \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x \ln(\frac{b}{a})}{2} + o(x)}{x} \right) = a \exp \left(\frac{\ln(\frac{b}{a})}{2} \right) = \sqrt{ab} \end{aligned}$$

- 对于第二个极限, 不妨设 $a > b$, 考虑

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a \exp \left(\frac{\ln \frac{1+(\frac{b}{a})^x}{2}}{x} \right) = a \exp(0) = a$$

所以极限为 $\max\{a, b\}$

题 29. 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin x + \ln(1-x^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{x^3}.$$

解:

- 对于第一个极限, 考虑

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(5x)}{\sin x + \ln(1-x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x)}{x - x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x + o(x)}{x + o(x)} = 5$$

- 对于第二个极限, 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - 2 \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \frac{(2x)^3}{3!} + o(x^3) - 2(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{8x^3}{6} + \frac{2x^3}{6} + o(x^3)}{x^3} = -1 \end{aligned}$$

题 30.

若对任何实数 x 有

$$|a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)| \leq |\sin x|$$

证明

$$a_1 + 2a_2 + 3a_3 \leq 1$$

证明. 考虑 $x \rightarrow 0^+$, 则有

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left| \frac{a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x)}{\sin x} \right| = |a_1 + 2a_2 + 3a_3| \leq 1$$

□

题 31.

若 f, g 为连续函数, 且 $(A, B, C$ 为实数或确定符号的无穷)

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B, \lim_{t \rightarrow C} g(t) = A,$$

则

$$\lim_{t \rightarrow C} f(g(t)) = B$$

证明. trivial

□

题 32.

设 A, B 为实数或确定符号的无穷, 则

$$\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$$

当且仅当对任何数列满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

且 $a_n \neq A$ (若 A 为无穷, 不等直接成立) 的数列 a_n , 都有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = B$$

证明. • 必要性证明略

- 充分性证明

我们假设 $\lim_{x \rightarrow A} f(x) \neq B$, 则存在 $\varepsilon > 0$, 使得对任意 $\delta > 0$, 都存在 x_0 使得 $|x_0 - A| < \delta$ 且 $|f(x_0) - B| \geq \varepsilon$ 。

取 $\delta = \frac{1}{n}$, 则存在 x_n 使得 $|x_n - A| < \frac{1}{n}$ 且 $|f(x_n) - B| \geq \varepsilon$, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 不存在, 与题意矛盾。

无穷情况同理))

□

题 33. 计算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}}$$

解: 考虑

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp[\sqrt{n+1} \ln(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp[\sqrt{n+1}(-\frac{1}{\sqrt{n}} + o(\frac{1}{\sqrt{n}}))] = \exp(-1) = \frac{1}{e}$$

题 34. 计算

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\sin x)^{\tan x}$$

解: 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\sin x)^{\tan x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (\cos x)^{\cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp(\cot x \ln(\cos x)) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \exp\left(\frac{\sqrt{1-x^2} \ln(\sqrt{1-x^2})}{x}\right) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$

题 35. 计算

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(\ln(x^2+x) - 2\ln(x+1))$$

解: 考虑

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1)(2\ln x + \ln(1 + \frac{1}{x}) - 2\ln x - 2\ln(1 + \frac{1}{x})) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1)\ln(1 + \frac{1}{x}) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -(x+1)\left(\frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) = -1 \end{aligned}$$

题 36. 证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = 0$$

并找正实数 k 使得极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$$

为非零常数

证明. 和差化积

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^k 2 \cos\left(\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{2}\right) \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right)$$

注意到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{2}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{1}{2(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}\right) = 0$$

所以极限为 0 对于后者, 笔者不会了, 怎么看都震荡 (哭了

□