高数 A 第 2 次作业

2025 年 9 月 16 日

9.16 日作业

7.4

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n}$

解： 注意到 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{-2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2n}}=\frac{1}{e^2}.$$

7.5

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}$

解： 注意到 $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^n\to\frac{1}{e}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n^2}=\lim_{n\to\infty}\left((1-\frac{1}{n})^n\right)^n=\left(\frac{1}{e}\right)^n=0.$$

7.6

求极限：$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n$

解：

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}.$$

等价无穷小替换：

$$\lim_{n\to\infty}e^{n\ln(1+\frac{1}{n^2})}=\lim_{n\to\infty}e^{n\cdot\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=e^0=1.$$

8.1

利用单调有界序列有极限证明下列数列的极限存在：

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

证明. 显然该数列单调递增，并且我们有裂项如下：

$$x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{1*2} + \frac{1}{2*3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)*n} < 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2.$$

因此该数列有上界 2，单调有界数列必有极限。

□

8.4

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

证明. 显然该数列单调递增，并注意到：

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-2}} < 3.$$

因此该数列有上界 3，单调有界数列必有极限。

□

9.10

证明：

$$\mathbf{e} = \lim_{n\to\infty}(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}).$$

证明. 令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 且 $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$。

- 证明. $e \leq S$

  根据二项式定理展开 e_n：

$$\begin{aligned} e_n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k} \\ &\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = S_n \end{aligned}$$

  对 $e_n \leq S_n$ 两边取极限，得 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \leq \lim_{n\to\infty} S_n = S$。 □

- 证明. $e \geq S$

  对于任意固定的 m，我们有 $S_m = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{m!}$。

  考虑 $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{1}{n^k}$ 的前 m+1 项，则有

  $$e_n > 2 + \frac{n(n-1)}{2!n^2} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!n^m}$$

  保持 m 固定，令 $n \to \infty$，则不等式右侧趋向于 $S_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$。因此 $e = \lim_{n\to\infty} e_n \geq S_m$。由于该式对任意 m 成立，令 $m \to \infty$，我们得到 $e \geq \lim_{m\to\infty} S_m = S$。

  □

综上，我们有 $e \leq S$ 且 $e \geq S$，因此 $e = S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$。 □