高代第二次作业

2025 年 9 月 23 日

9.18 日作业

1.

(1) ”向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，如果有全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。”

解答： 该说法错误，对于任意的向量组，我们取 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为零，则必然有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，所以该说法错误。

(2) ”如果有一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。”

解答： 该说法错误，线性无关的定义是：如果只有 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为零时，才有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，所以该说法错误。

(3) ”如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（$s \geq 2$）线性相关，则其中每一个向量都可以由其余向量线性表示。”

解答： 该说法错误，线性相关的定义是：存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，应该是至少有一个向量可以由其余向量线性表示，所以该说法错误。

2(2).

判断下列向量组是线性相关还是线性无关。如果线性相关，试找出其中一个向量，使其可以由其余向量线性表示，并写出一种表达式。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

解： 设存在一组数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$$

我们进行变换：

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+2r_1, r_4-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3/2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+5r_2, r_4-13r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3/8, r_4/(-14)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 3，小于向量的个数 4，因此该向量组线性相关。根据最简阶梯形矩阵，我们可以得到如下方程组：

$$\begin{cases} k_1 - 3k_2 - 2k_4 = 0 \\ k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

注意到一组非零解 $k_1 = -1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = 1$。代入原线性组合式，得到：

$$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

从此关系式中，我们可以将向量 α_4 由其余向量线性表示：

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

5.

证明：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_3 + 3\alpha_1$ 也线性无关。

证明. 设存在一组数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + 5\alpha_3) + k_3(4\alpha_3 + 3\alpha_1) = 0$$

化简得

$$(2k_1 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (5k_2 + 4k_3)\alpha_3 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ 5k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

我们创建系数矩阵并计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

经过计算，行列式的值为 $2(1*4-0*5)-0+3(1*5-0*0) = 8+15 = 23 \neq 0$。因此，方程组只有零解，即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。

这表明向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_3 + 3\alpha_1$ 线性无关。

□

6.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \alpha_4$ 线性无关，判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 是否线性无关。

解： 设存在一组数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

化简得

$$(k_1 + k_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

我们创建系数矩阵并计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

经过计算，行列式的值为 $1(1*1-0*0)-0+0-1(1*1-0*0)=1-1=0$。因此，方程组有非零解，即存在不全为零的 k_1,k_2,k_3,k_4 使得上述线性组合为零。这表明向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关。

9.

证明：由非零向量组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是: 每一个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示。

证明.

- (必要性) 假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。若某一个向量 α_i 可以由它前面的向量表示，即存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{i-1}$ 使得

$$\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}$$

  则可以将其改写为

$$-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{i-1}\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_s=0$$

  显然，该向量组线性有关，故 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示，必要性得证。

- (充分性) 假设每一个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示。我们通过反证法来证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。若向量组线性相关，则存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

  我们从 k_s 开始考虑，若 $k_s\neq 0$ 则可将 α_s 表示为

$$\alpha_s=-\frac{k_1}{k_s}\alpha_1-\frac{k_2}{k_s}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$$

  与假设矛盾。若 $k_s=0$，则继续考虑 k_{s-1} 以此类推，最终会得到 $k_1\neq 0$，则必有 $\alpha_1=0$，与题设矛盾。因此，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，充分性得证。

□

9.23 日作业

P76.4

证明：K^n 中任一线性无关的向量组所含向量的数目不超过 n。

证明. 设 K^n 中有一个线性无关的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，其中 $s > n$。我们将这些向量按列排成一个 $n \times s$ 的矩阵 A，即

$$A = (\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_s)$$

由于 $s > n$，矩阵 A 的列数大于行数，因此矩阵 A 的秩 $r(A) \leq n < s$。即该矩阵的列向量组线性相关，这与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关矛盾。因此，K^n 中任一线性无关的向量组所含向量的数目不超过 n。

□

P76.6

证明:K^n 中，如果任一向量都可以由 $\alpha_1\,\alpha_2 \cdots \alpha_n$ 线性表出，则 $\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_n$ 线性无关。

证明. 设 $\alpha_1\,\alpha_2\,\cdots\,\alpha_n$ 线性相关，则存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_n\alpha_n = 0$$

假设 $k_j \neq 0$，则有

$$\alpha_j = -\frac{k_1}{k_j}\alpha_1 - \frac{k_2}{k_j}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_{j-1}}{k_j}\alpha_{j-1} - \frac{k_{j+1}}{k_j}\alpha_{j+1} - \cdots - \frac{k_n}{k_j}\alpha_n$$

这表明 α_j 可以由其余向量线性表示。由于任一向量都可以由 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ 线性表出，因此任一向量也可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。这表明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_n$ 张成 K^n，这显然不可能。因此，原向量组线性无关。

□

P76.10

证明:$rank\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} \leq rank\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} + rank\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\}$。

证明. 设 $rank\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s\} = r_1$，则存在 r_1 个向量 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{r_1}}$（$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_{r_1} \leq s$）线性无关，且其余向量都可以由这 r_1 个向量线性表示。同理，设 $rank\{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_t\} = r_2$，则存在 r_2 个向量 $\beta_{j_1}, \beta_{j_2}, \cdots, \beta_{j_{r_2}}$（$1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{r_2} \leq t$）线性无关，且其余向量都可以由这 r_2 个向量线性表示。

所以如果 $rank\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\} > r_1+r_2$，则必然存在一个向量 γ（可能是 α 或 β 中的向量）不能由 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_{r_1}},\beta_{j_1},\beta_{j_2},\cdots,\beta_{j_{r_2}}$ 线性表示。矛盾。

因此,$rank\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\} \le rank\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\}+rank\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t\}$。

□

P85.2(3)

求下列向量组的秩以及它的一个极大线性无关组

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-7\\8\\9\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-3\\0\\-3\end{pmatrix},\quad \alpha_4=\begin{pmatrix}1\\-9\\6\\3\end{pmatrix}.$$

解: 矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\-1&-7&-3&-9\\2&8&0&6\\3&9&-3&3\end{pmatrix}.$$

变换得到阶梯型矩阵：

$$\xrightarrow{r_2+r_1,r_3-2r_1,r_4-3r_1}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&-4&-4&-8\\0&2&2&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2/-4,r_3-\frac{1}{2}r_2}\begin{pmatrix}1&3&-1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 2，极大线性无关组为 $\{\alpha_1,\alpha_2\}$。

P85.4

对于不同的 λ，下述矩阵的秩分别是多少？

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}.$$

解: 我们对矩阵 $A(\lambda)$ 进行行变换：

$$\xrightarrow{r_2-2r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\0&-1-2\lambda&\lambda+2&1\\0&10-\lambda&-5&-1\end{pmatrix}$$

当 $\lambda=-\frac{1}{2}$ 时，$-1-2\lambda=0$，此时矩阵为：

$$\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1\\ 0 & \frac{21}{2} & -5 & -1\end{pmatrix}$$

继续行变换：

$$\xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{}\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1 & 2\\ 0 & \frac{21}{2} & -5 & -1\\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & 1\end{pmatrix}$$

此时矩阵的秩为 3。若 $\lambda\neq-\frac{1}{2}$，则继续行变换：

$$\xrightarrow{r_3+\frac{\lambda-10}{-1-2\lambda}r_2}\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1\\ 0 & 0 & -5+\frac{(\lambda-10)(\lambda+2)}{-1-2\lambda} & -1+\frac{\lambda-10}{-1-2\lambda}\end{pmatrix}$$

计算第三行第三，四列元素：

$$-5+\frac{(\lambda-10)(\lambda+2)}{-1-2\lambda}=\frac{\lambda^2+2\lambda-15}{-1-2\lambda}$$

$$-1+\frac{\lambda-10}{-1-2\lambda}=\frac{3\lambda-9}{-1-2\lambda}$$

所以当 $\lambda=3$ 时，第三行第三，四列元素均为 0，此时矩阵的秩为 2

其余情况下，矩阵的秩为 3。

P85.7

求下述复数域上矩阵 A 的秩以及它的列向量组的一个极大线性无关组，其中

$$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2},\quad m\in\mathbb{Z}^+,$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & \omega^m & \omega^{2m} & \omega^{3m} & \omega^{4m}\\ 1 & \omega^{m+1} & \omega^{2(m+1)} & \omega^{3(m+1)} & \omega^{4(m+1)}\\ 1 & \omega^{m+2} & \omega^{2(m+2)} & \omega^{3(m+2)} & \omega^{4(m+2)}\end{pmatrix}.$$

解: 我们提出公因子：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \omega^3 & \omega^4\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \omega^6 & \omega^8\end{pmatrix}$$

观察到 ω 是三次单位根，满足 $\omega^3=1$，继续化简得

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & 1 & \omega\\ 1 & \omega^2 & \omega & 1 & \omega^2\end{pmatrix}$$

继续行变换：

$$\xrightarrow{r_2-r_1,r_3-r_1}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \omega-1 & \omega^2-1 & 0 & \omega-1\\ 0 & \omega^2-1 & \omega-1 & 0 & \omega^2-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2(\omega+1)}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & \omega-1 & \omega^2-1 & 0 & \omega-1\\ 0 & 0 & -(\omega-1)^2 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

由于 $\omega^2-\omega\neq 0$，所以矩阵的秩为 3，极大线性无关组为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$。