高代第七次作业

2025 年 11 月 6 日

10.30 日作业

p136.4

证明：如果矩阵 A 可逆，则 A^* 也可逆，并且求 $(A^*)^{-1}$。

证明. 注意到 $AA^* = A^*A = |A|I$，其中 I 为单位矩阵。由于 A 可逆，故 $|A| \neq 0$。因此，A^* 也是可逆的，并且

$$(A^*)^{-1} = \frac{1}{|A|}A.$$

□

p136.5

证明：如果 $A^3 = 0$，则 $I - A$ 可逆，并求 $(I - A)^{-1}$。

证明. 注意到 $A^3 - I = (A - I)(A^2 + A + I)$，因此 $|I - A| \neq 0$, 所以 $I - A$ 可逆。并且

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2.$$

□

p136.6

证明：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^3 - 2A^2 + 3A - I = 0$, 则 A 可逆，并求 A^{-1}。

证明. 注意到 $(A - I)^3 = A^3 - 3A^2 + 3A - I$，因此 $A^3 - 2A^2 + 3A - I = (A - I)^3 + A^2$。所以 $|A| \neq 0$，故 A 可逆。并且

$$A(A^2 - 2A + 3I) = I,$$

所以

$$A^{-1} = A^2 - 2A + 3I.$$

□

p136.9(4)

求矩阵的逆：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

解：

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

p136.10

解矩阵方程:

- (1) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

  解：

  $$X = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{10}{7} & -\frac{13}{7} \\ \frac{18}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

- (3) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$

  解：

  $$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{37}{7} & -\frac{8}{7} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{34}{7} & -\frac{6}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{38}{7} & -\frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

p136.12

证明：如果 $A^k = 0$，则矩阵 $I - A$ 可逆，并求 $(I - A)^{-1}$。

证明. 熟知的

$$A^k - I = (A-I)(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I),$$

因此 $|I-A| \neq 0$，所以 $I-A$ 可逆。并且

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}.$$

□

p143.8

设 A 为 n 阶矩阵，证明：

$$|A^*| = |A|^{n-1}$$

证明. 根据行列式的性质，有注意到 $|AA^*| = |A|^n|I| = |A|^n$，因此

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

而对于奇异阵，我们考虑摄动法

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon I,$$

则 A_ε 为非奇异阵，且当 $\varepsilon \to 0$ 时，$A_\varepsilon \to A$。因此

$$|A_\varepsilon^*| = |A_\varepsilon|^{n-1}.$$

令 $\varepsilon \to 0$，得到

$$|A^*| = |A|^{n-1}.$$

□

p143.9

设 A 为 n 阶矩阵，证明：

$$\operatorname{rank}(A^*) = \begin{cases} n, & 若\operatorname{rank}(A) = n \\ 1, & 若\operatorname{rank}(A) = n-1 \\ 0, & 若\operatorname{rank}(A) < n-1 \end{cases}$$

证明.
- 当 $\operatorname{rank}(A) = n$ 时，A 可逆，因此 A^* 也可逆，故 $\operatorname{rank}(A^*) = n$。
- 当 $\operatorname{rank}(A) = n-1$ 时，$|A| = 0$，但存在某个 $(n-1)$ 阶子式不为零。

  考虑方程 $Ax = 0$，由于 $\operatorname{rank}(A) = n-1$，该方程有唯一的非零解（至多一维解空间）。设该解为 x_0。则对于任意列向量 A_j，有

  $$A^*A_j = |A|I_j = 0,$$

  因此 A^* 的每一列都是 x_0 的倍数，故 $\operatorname{rank}(A^*) = 1$。

- 当 $\operatorname{rank}(A) < n-1$ 时，任意 $(n-1)$ 阶子式均为零，因此 $A^* = 0$，故 $\operatorname{rank}(A^*) = 0$。

□

p143.10

设 A 为 n 阶矩阵 $(n \geq 2)$，证明：

- (1) 当 $n \geq 3$ 时,$(A^*)^* = |A|^{n-2}A$；
- (2) 当 $n = 2$ 时,$(A^*)^* = A$。

证明. 当 $n \geq 3$ 时，注意到

$$AA^* = |A|I,$$

因此

$$A^*(A^*)^* = |A^*|I = |A|^{n-1}I.$$

由此可得

$$(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$$

当 $n = 2$ 时，

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad A^* = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

而

$$(A^*)^* = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = A.$$

□