高代第三次作业

2025 年 10 月 15 日

9.25 日作业

p79.1

找出 $\mathbb{K}^4$ 的两个基，并求向量 $\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T$ 在这两个基下的坐标。

解： 设 $\mathbb{K}^4$ 的两个基为

$$\varepsilon_1 = (1,0,0,0)^T, \varepsilon_2 = (0,1,0,0)^T, \varepsilon_3 = (0,0,1,0)^T, \varepsilon_4 = (0,0,0,1)^T$$

$$\eta_1 = (1,1,0,0)^T, \eta_2 = (0,1,1,0)^T, \eta_3 = (0,0,1,1)^T, \eta_4 = (0,0,0,1)^T$$

则

$$\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_3\varepsilon_3 + a_4\varepsilon_4$$

$$\alpha = a_1\eta_1 + (a_2 - a_1)\eta_2 + (a_1 - a_2 + a_3)\eta_3 + (-a_1 + a_2 - a_3 + a_4)\eta_4$$

p79.2

证明：$\mathbb{K}^n$ 中的向量组

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{K}^n$ 的一个基。

证明. 设 $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{K}^n$，则

$$\alpha = (a_1 - a_2)\eta_1 + (a_2 - a_3)\eta_2 + \cdots + (a_{n-1} - a_n)\eta_{n-1} + (a_n)\eta_n$$

同时，考虑上三角矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & 1 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

则 $|A|=1\neq 0$，所以 $\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n$ 线性无关，因此是 $\mathbb{K}^n$ 的一个基。

□

p79.3(2)

判断下述向量组是否为 $\mathbb{K}^3$ 的一个基:

$$\begin{pmatrix}2\\5\\6\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}7\\-3\\4\end{pmatrix}$$

解： 设

$$A=\begin{pmatrix}2 & 5 & 7\\ 5 & -2 & -3\\ 6 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

计算其行列式得:$|A|=2\cdot(-8+9)-5\cdot(20+18)+7\cdot(15+12)=1\neq 0$，所以该向量组是 $\mathbb{K}^3$ 的一个基。

p79.4

设 $\mathbb{U}$ 是 $\mathbb{K}^n$ 的一个 r 维子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 是 $\mathbb{U}$ 中的 r 个向量，证明如果 $\mathbb{U}$ 中每一个向量都可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 线性表示，则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_r$ 是 $\mathbb{U}$ 的一个基。

证明. 不妨假设该向量组是线性相关的，则存在一个 α_i 有:

$$\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r, k_i\in\mathbb{K}$$

则 $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{i-1},\alpha_{i+1},\dots,\alpha_r$ 也能线性表示 $\mathbb{U}$ 中每一个向量，这与 $\mathbb{U}$ 的维数为 r 矛盾，所以该向量组线性无关，因此是 $\mathbb{U}$ 的一个基。

□

p95.1(3)

求下列数域 $\mathbb{K}$ 上齐次线性方程组的一个基础解系，并且写出他的解集

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0, \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0; \end{cases}$$

解： 设增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 & 0 \\ -3 & 4 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 15 & -6 & 13 & 0 \end{pmatrix}$$

初等行变换化简得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

我们得到:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0, \\ x_3 = 0; \end{cases}$$

则可取基础解系为:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

解集为:

$$\{k_1\eta | k_1 \in \mathbb{K}\}$$

p95.2

证明：设 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ 是 n 元齐次线性方程组 (1)

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

的一个基础解系，则与 $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ 等价的线性无关的向量组也是 (1) 的基础解系。

证明. 设与 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_s$ 等价的线性无关的向量组为 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s$, 则存在可逆矩阵 A 使得:

$$\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \cdots\\ \eta_s\end{pmatrix} = \mathrm{A}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \cdots\\ \theta_s\end{pmatrix}$$

则 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s$ 线性无关，并且我们考虑原解集的任意一个解:

$$\alpha = k_1\eta_1 + k_2\eta_2 + \cdots + k_s\eta_s$$

则我们有：

$$\alpha = (k_1,k_2,\ldots,k_s)\,\mathrm{A}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \cdots\\ \theta_s\end{pmatrix}$$

因此 α 也能由 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s$ 线性表示，所以 $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_s$ 是 (1) 的一个基础解系。

□

p95.4

证明：设 n 元齐次线性方程组 (1) 的系数矩阵的秩为 $r\,(r<n)$，设 $\delta_{\mathbf{1}},\delta_{\mathbf{2}},\ldots,\delta_{\mathbf{m}}$ 是方程组（1）的解向量，则 $\mathrm{rank}\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m\}\le n-r$。

证明. 显然，对于方程组的解空间 W 我们有:

$$\mathrm{rank}\{\delta_1,\delta_2,\ldots,\delta_m\}\le \mathrm{dim}W = n-\mathrm{rank}A = n-r$$

□

p95.7

设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于零，并且 A 的 (k,l) 元素的代数余子式 $A_{kl}\neq 0$，证明：

$$\eta_1 = \begin{pmatrix}A_{k1}\\ A_{k2}\\ \vdots\\ A_{kn}\end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

证明. 我们证明 η_1 是该方程组的一个解，设 A 的第 k 行向量为 α_k，则

$$\alpha_k\eta_1 = A_{k1}a_{k1} + A_{k2}a_{k2} + \cdots + A_{kn}a_{kn} = |A| = 0$$

对于 $i \neq k$，设 A 的第 i 行向量为 α_i，则

$$\alpha_i\eta_1 = A_{k1}a_{i1} + A_{k2}a_{i2} + \cdots + A_{kn}a_{in} = 0$$

因为该式等于将 A 的第 k 行替换为第 i 行后所得矩阵的行列式，而该矩阵有两行相同，所以行列式为零。因此 η_1 是该方程组的一个解，并且显然它不为零向量，同时，因为 $A_{kl} \neq 0$，所以 $\mathrm{rank} \geq n-1$, 即 $\mathrm{rank} = n-1$，所以解空间维度为 1，因此 η_1 是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

□

9.30 日作业

p89.4

已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

的系数矩阵 A 的秩等于下述矩阵 B 的秩：

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & 0 \end{pmatrix},$$

证明上述线性方程组有解。

证明. 只需证明矩阵 A 的秩等于其增广矩阵的秩即可，不难发现增广矩阵的秩小于等于矩阵 B 的秩，而矩阵 B 的秩等于矩阵 A 的秩，所以增广矩阵的秩等于矩阵 A 的秩，因此该线性方程组有解。

□

p99.1(2)

求下列数域 $\mathbb{K}$ 上线性方程组的解集

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 5x_4 = 1, \\ -5x_1 - 10x_2 - 2x_3 + x_4 = -21, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 9x_3 - 3x_4 = -16; \end{cases}$$

解： 设增广矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -5 & 1 \\ -5 & -10 & -2 & 1 & -21 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 9 & -3 & -16 \end{pmatrix}$$

初等行变换化简得:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - 8x_3 - 2x_4 = 17 \\ 3x_3 + x_4 = -6 \end{cases}$$

化简得:

$$\begin{cases} x_1 + \frac{5}{3}x_4 = 3 \\ x_2 - \frac{2}{3}x_4 = 1 \\ x_3 + \frac{1}{3}x_4 = -2 \end{cases}$$

令 $x_4 = t, t \in \mathbb{K}$，则解集为:

$$\left\{ \begin{cases} x_1 = 3 - \frac{5}{3}t, \\ x_2 = 1 + \frac{2}{3}t, \\ x_3 = -2 - \frac{1}{3}t, \\ x_4 = t; \end{cases} \quad t \in \mathbb{K} \right\}$$

特解为:

$$\eta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

基础解系为:

$$\xi = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

所以原方程组的解集为:

$$\{\boldsymbol{\eta} + c\boldsymbol{\xi} \mid c \in \mathbb{K}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid c \in \mathbb{K} \right\}$$

p99.2

证明：n 个方程的 n 元非齐次线性方程组有唯一解当且仅当它的导出组只有零解。

证明. 设非齐次线性方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$，其导出组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$，其中 A 是 $n \times n$ 矩阵。

($\Rightarrow$) 假设 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x_0}$。设 η 是导出组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的任意一个解，则 $A\eta = \mathbf{0}$。考虑向量 $\mathbf{x}' = \mathbf{x_0} + \eta$，我们有

$$A\mathbf{x}' = A(\mathbf{x_0} + \eta) = A\mathbf{x_0} + A\eta = \mathbf{b} + \mathbf{0} = \mathbf{b}$$

这表明 $\mathbf{x}'$ 也是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解。因为解是唯一的，所以必须有 $\mathbf{x}' = \mathbf{x_0}$，即 $\mathbf{x_0} + \eta = \mathbf{x_0}$，这蕴含了 $\eta = \mathbf{0}$。因此，导出组只有零解。

($\Leftarrow$) 假设导出组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 只有零解。对于 $n \times n$ 矩阵 A，这意味着 A 是可逆的，且 $\operatorname{rank}(A) = n$。对于增广矩阵 $\bar{A} = (A|\mathbf{b})$，其秩满足不等式 $\operatorname{rank}(A) \leq \operatorname{rank}(\bar{A}) \leq n$。代入 $\operatorname{rank}(A) = n$，我们得到 $n \leq \operatorname{rank}(\bar{A}) \leq n$，因此 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\bar{A}) = n$。根据线性方程组解的判别定理，方程组有解，且因为秩等于未知数的个数，解是唯一的。

□

p99.3

证明:如果 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_t$ 都是 n 元非齐次线性方程组 (1) 的解,并且一组数 $u_1, u_2, \ldots, u_t$ 满足

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1,$$

则 $u_1\gamma_1 + u_2\gamma_2 + \cdots + u_t\gamma_t$ 也是方程组 (1) 的一个解。

证明. 设方程组 (1) 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$。已知 $A\gamma_i = \mathbf{b}$ 对所有 $i = 1, \ldots, t$ 成立，且 $\sum_{i=1}^{t} u_i = 1$。令 $\gamma = \sum_{i=1}^{t} u_i \gamma_i$。我们检验 $A\gamma$：

$$\begin{aligned}
A\gamma &= A\left(\sum_{i=1}^{t} u_i \gamma_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{t} u_i (A\gamma_i) \\
&= \sum_{i=1}^{t} u_i \mathbf{b} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{t} u_i\right) \mathbf{b} \\
&= (1)\mathbf{b} = \mathbf{b}
\end{aligned}$$

因此，γ 是方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个解。

□

p99.4

证明：如果 γ_0 是 n 元非齐次线性方程组 (1) 的一个特解，$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_t$ 是它的导出组的一个基础解系。令

$$\gamma_1 = \gamma_0 + \eta_1, \gamma_2 = \gamma_0 + \eta_2, \ldots, \gamma_t = \gamma_0 + \eta_t,$$

则非齐次线性方程组 (1) 的任意一个解 γ 可以表示成

$$\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_t\gamma_t,$$

其中 $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1$。

证明. 设方程组为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$。令 γ 为其任意一个解，则 $A\gamma = \mathbf{b}$。由于 γ_0 也是解，我们有 $A\gamma_0 = \mathbf{b}$。考虑向量差 $\gamma - \gamma_0$，可以得到 $A(\gamma - \gamma_0) = A\gamma - A\gamma_0 = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$。这说明 $\gamma - \gamma_0$ 是导出组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的一个解。

因为 $\{\eta_1, \ldots, \eta_t\}$ 是导出组的基础解系，所以存在一组常数 $c_1, \ldots, c_t$ 使得：

$$\gamma - \gamma_0 = \sum_{i=1}^{t} c_i \eta_i$$

从而任意解可以表示为 $\gamma = \gamma_0 + \sum_{i=1}^{t} c_i \eta_i$。根据题设条件 $\eta_i = \gamma_i - \gamma_0$，代入上式：

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^{t} c_i(\gamma_i - \gamma_0) \\ &= \gamma_0 + \sum_{i=1}^{t} c_i\gamma_i - \left(\sum_{i=1}^{t} c_i\right)\gamma_0 \\ &= \left(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i\right)\gamma_0 + \sum_{i=1}^{t} c_i\gamma_i\end{aligned}$$

现在，我们定义新的系数：令 $u_i = c_i$ 对于 $i = 1, \ldots, t$，并令 $u_0 = 1 - \sum_{i=1}^{t} c_i$。于是，$\gamma$ 的表达式变为 $\gamma = u_0\gamma_0 + u_1\gamma_1 + \cdots + u_t\gamma_t = \sum_{i=0}^{t} u_i\gamma_i$。这些系数的和为 $\sum_{i=0}^{t} u_i = u_0 + \sum_{i=1}^{t} u_i = \left(1 - \sum_{i=1}^{t} c_i\right) + \sum_{i=1}^{t} c_i = 1$。

$\square$