

gcx 高代习题课讲义个人解答（修正版）

2025 年 9 月 20 日

题目来源: [https://wqgcx.github.io/courses/advalgebra1\(wfz\).pdf](https://wqgcx.github.io/courses/advalgebra1(wfz).pdf)

目录

1	Gauss-Jordan 消元法	2
---	------------------	---

1 Gauss-Jordan 消元法

1. 是否存在二次函数

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

其图像经过下列四点： $A(1, 2)$ 、 $Q(-1, 3)$ 、 $M(-4, 5)$ 、 $N(0, 2)$ ？

解： 该问题等价于： 如下线性方程组是否有解

$$\begin{cases} a + b + c = 2, \\ a - b + c = 3, \\ 16a - 4b + c = 5, \\ c = 2. \end{cases}$$

不难发现该方程组无解，因此不存在这样的二次函数。

2. 用 Gauss 消元法解下列方程组，并用向量表示其解的集合：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

解:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_1 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \\
 & \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 - 5R_2 \rightarrow R_3 \\ R_4 + 7R_2 \rightarrow R_4 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 + 2R_3 \rightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}R_4 \rightarrow R_4} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -5 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_3 + 5R_4 \rightarrow R_3 \\ R_1 + 4R_4 \rightarrow R_1 \\ R_2 - R_4 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_3 \rightarrow R_3} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} R_1 - 3R_3 \rightarrow R_1 \\ R_2 + R_3 \rightarrow R_2 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_2 \rightarrow R_1} \\
 & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D 。能否用这四种原料配制含脂肪 5%、碳水化合物 12%、蛋白质 15% 的食品?

单位: %	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

解： 设配制该食品时，四种原料的用量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 ，则

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 5x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases}$$

化简得到：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -7x_1 + 13x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

我们化简增广矩阵为最简阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -7 & 13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7t, \frac{16}{3}t, \frac{35}{3}t, t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

4. a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

有解？若有解，求出其所有解。

解： 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2+R_1 \rightarrow R_2 \\ R_3-3R_1 \rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2 \rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 $a+1=0$ ，即 $a=-1$ 时，该方程组有解。

此时，令 $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$)。由第二行得 $7x_2 + x_3 = 2 \implies x_2 = \frac{2-t}{7}$ 。由第一行得 $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \implies x_1 = -1 + 4(\frac{2-t}{7}) - 2t = \frac{-7+8-4t-14t}{7} = \frac{1-18t}{7}$ 。

方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1-18t}{7}, \frac{2-t}{7}, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. 解下述线性方程组:

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1, \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + \cdots + x_n = b_2, \\ \vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$, 且 $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} \neq -1$ 。

解: 设 $S = \sum_{j=1}^n x_j$ 。则原方程组可写作 $S + a_i x_i = b_i$, 对于 $i = 1, \dots, n$ 。由于 $a_i \neq 0$, 我们可以得到 $x_i = \frac{b_i - S}{a_i}$ 。将所有 x_i 相加可得:

$$S = \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n \frac{b_i - S}{a_i} = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i} - S \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}$$

移项得

$$S \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{a_i}$$

根据题设条件 $1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i} \neq 0$, 我们可以解出 S :

$$S = \frac{\sum_{j=1}^n (b_j/a_j)}{1 + \sum_{j=1}^n (1/a_j)}$$

将 S 代回 x_i 的表达式, 得到最终解:

$$x_i = \frac{1}{a_i} \left(b_i - \frac{\sum_{j=1}^n (b_j/a_j)}{1 + \sum_{j=1}^n (1/a_j)} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

6. (1) 求复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{pmatrix}$$

的行最简阶梯型矩阵 $\text{rref}(A)$;

(2) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集;

(3) 求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集;

(4) 当 (y_1, y_2, y_3) 满足何种关系时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解?

解:

- (1) 化简得:

$$\xrightarrow{\substack{R_2-2R_1\rightarrow R_2 \\ R_3-iR_1\rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{i}{2+2i}R_2\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{\frac{1}{2+2i}R_2\rightarrow R_2 \\ R_1+iR_2\rightarrow R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (2) 解得:

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t), \quad t \in \mathbb{C}.$$

- (3) 解得:

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- (4) 对增广矩阵进行相同的行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & y_1 \\ 2 & 2 & -2 & y_2 \\ i & 1+i & -i & y_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & y_1 \\ 0 & 2+2i & 0 & y_2-2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3-iy_1-\frac{i}{2+2i}(y_2-2y_1) \end{pmatrix}$$

因此当且仅当

$$y_3 - iy_1 - \frac{i}{2+2i}(y_2 - 2y_1) = 0$$

时, 方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解。

7. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4)$, $\alpha_2 = (-2, 1, 5)$, $\alpha_3 = (a, 2, 10)$, $\beta = (1, b, -1)$ 。
当 a, b 取何值时, β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出? 何时表示系数唯一?

解: 该问题等价于判断如下方程组的解的情况:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b, \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -1. \end{cases}$$

对增广矩阵进行行变换

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2-R_1\rightarrow R_2 \\ R_3-4R_1\rightarrow R_3}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{13}{3}R_2\rightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 0 & \frac{a+4}{3} & -\frac{2}{3}-\frac{13}{3}b \end{pmatrix}$$

因此, 当系数 $\frac{a+4}{3} \neq 0$, 即 $a \neq -4$ 时, 方程组有唯一解, 此时 β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一线性表出。当 $a = -4$ 时, 为了使方程组有解 (能表出), 必须有等式右边为 0, 即 $-\frac{2}{3} - \frac{13}{3}b = 0$, 解得 $b = -\frac{2}{13}$ 。此时方程组有无穷多解, β 的表示方式不唯一。当 $a = -4$ 且 $b \neq -\frac{2}{13}$ 时, 方程组无解, β 不能被表出。

8. 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 且 $\beta = \sum_{j=1}^s b_j \alpha_j$ 。若 $b_i \neq 0$, 证明将 α_i 替换为 β 后的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_s$ 仍线性无关。

解:

证明. 注意到, 对于更改后的向量组, 考虑 $\alpha_p = \sum_{t=1(t \neq i, p)}^s c_t \alpha_t + \beta (p \neq i)$ 的情况, 我们总能通过调整系数 c_t 来使得 β 的影响被消除, 即 α_p 不能被其他向量线性表出, 因此更改后的向量组仍线性无关。考虑 $\beta = \sum_{t=1(t \neq i)}^s c_t \alpha_t$ 的情况, 显然, 上式成立等价于向量组线性有关。因此, 更改后的向量组仍线性无关。

□

9. 用向量运算的性质证明: 若一组向量 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出向量 β 的方式是唯一的 (或不唯一的), 则凡能被该组向量表出的任一向量, 其表出方式亦皆唯一 (或不唯一)。

证明. 不难发现, 若向量组线性表出向量 β 的方式是唯一的, 则该向量组线性无关。所以, 对于任意向量 γ , 若 γ 能被该向量组线性表出, 则 γ 的表出方式也是唯一的。若向量组线性表出向量 β 的方式是不唯一的, 则该向量组线性相关。所以, 对于任意向量 γ , 若 γ 能被该向量组线性表出, 则 γ 的表出方式也是不唯一的。(好像是废话)

□

10. 求双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线。

解: 移项得

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

即

$$(x - z)(x + z) = (1 - y)(1 + y)$$

因此我们可以设

$$\begin{cases} x - z = t(1 - y), \\ x + z = \frac{1}{t}(1 + y), \end{cases} \quad t \neq 0.$$

特别地, 当 $y = \pm 1$ 时, $x = \pm z$ 。

11. 令 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为从有理数及 $\sqrt{3}$ 出发, 经过有限次四则运算所得数的集合, 称为 $\sqrt{3}$ 生成的数域。证明:
- (1) $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$;
- (2) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中每个数可唯一写成 $a + b\sqrt{3}$, 其中 $a, b \in \mathbb{Q}$ 。

证明. • (1) 首先证明 $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, 显然成立。

其次证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 。

我们只需要证明 $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 对四则运算封闭即可。因为 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为最小的包含有理数及 $\sqrt{3}$ 的数域，所以我们只需证明 $\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ 为一个数域。

当然这是 trivial 的)))

- (2) 设 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3}$, 其中 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$ 。则 $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} = 0$, 即 $a_1 - a_2 = 0$ 且 $b_1 - b_2 = 0$ 。因此 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$, 唯一性得证。

□

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发, 通过加法、乘法二则运算能得到的所有数的集合, 称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整数环。证明在此环中, 不可约数和素数不等价。

证明. 不知何意味, 笔者能力有限

□