gcx 高代习题课讲义个人解答（修正版）

2025 年 11 月 1 日

题目来源：`https://wqgcx.github.io/courses/advalgebra1(wfz).pdf`

目录

1 Gauss-Jordan 消元法 **2**

2 线性相关性, 秩 **9**

3 线性方程组解的结构 **15**

4 行列式 (1) **20**

5 行列式 (2) **24**

6 期中复习, 矩阵乘法的理解与应用 **27**

1 Gauss-Jordan 消元法

1. 是否存在二次函数
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
其图像经过下列四点：$A(1,2)$、$Q(-1,3)$、$M(-4,5)$、$N(0,2)$？

解： 该问题等价于：如下线性方程组是否有解
$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a-b+c=3, \\ 16a-4b+c=5, \\ c=2. \end{cases}$$
不难发现该方程组无解，因此不存在这样的二次函数。

2. 用 Gauss 消元法解下列方程组，并用向量表示其解的集合：
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-4x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+7R_2\to R_4]{R_3-5R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+2R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_4\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3+5R_4\to R_3\\R_1+4R_4\to R_1\\R_2-R_4\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1&-2&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_1-3R_3\to R_1\\R_2+R_3\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1&-2&0&0&-14\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_2\to R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&-8\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-8,3,6,0).$$

3. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D。能否用这四种原料配制含脂肪 5%、碳水化合物 12%、蛋白质 15% 的食品？

单位：%	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

解： 设配制该食品时，四种原料的用量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，则

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 5x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases}$$

化简得到：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -7x_1 + 13x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

我们化简增广矩阵为最简阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -7 & 13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7t, \frac{16}{3}t, \frac{35}{3}t, t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

4. a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

有解？若有解，求出其所有解。

解： 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 - 3R_1 \to R_3]{R_2 + R_1 \to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - R_2 \to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 $a + 1 = 0$，即 $a = -1$ 时，该方程组有解。
此时，令 $x_3 = t$ ($t \in \mathbb{R}$)。由第二行得 $7x_2 + x_3 = 2 \implies x_2 = \frac{2-t}{7}$。由第一行得 $x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \implies x_1 = -1 + 4(\frac{2-t}{7}) - 2t = \frac{-7+8-4t-14t}{7} = \frac{1-18t}{7}$。
方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1-18t}{7}, \frac{2-t}{7}, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. 解下述线性方程组：

$$\begin{cases}(1+a_1)x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1,\\ x_1+(1+a_2)x_2+\cdots+x_n=b_2,\\ \quad\vdots\\ x_1+x_2+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n,\end{cases}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，且 $\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\neq -1$。

解： 设 $S=\sum_{j=1}^{n}x_j$。则原方程组可写作 $S+a_ix_i=b_i$，对于 $i=1,\ldots,n$。由于 $a_i\neq 0$，我们可以得到 $x_i=\dfrac{b_i-S}{a_i}$。将所有 x_i 相加可得：

$$S=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i-S}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}-S\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$$

移项得

$$S\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{a_i}$$

根据题设条件 $1+\sum_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i}\neq 0$，我们可以解出 S：

$$S=\frac{\sum_{j=1}^{n}(b_j/a_j)}{1+\sum_{j=1}^{n}(1/a_j)}$$

将 S 代回 x_i 的表达式，得到最终解：

$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(b_i-\frac{\sum_{j=1}^{n}(b_j/a_j)}{1+\sum_{j=1}^{n}(1/a_j)}\right),\quad i=1,2,\ldots,n.$$

6.（1）求复矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 2 & 2 & -2\\ i & 1+i & -i\end{pmatrix}$$

的行最简阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$；

（2）求齐次方程组 $AX=0$ 在复数域上的解集；

（3）求齐次方程组 $AX=0$ 在实数域上的解集；

（4）当 (y_1,y_2,y_3) 满足何种关系时，方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解？

解：

- **(1)** 化简得：

$$\xrightarrow[R_3-iR_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-\frac{i}{2+2i}R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2+2i}R_2\to R_2\\ R_1+iR_2\to R_1}]{}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- **(2)** 解得：

$$(x_1,x_2,x_3)=(t,0,t),\quad t\in\mathbb{C}.$$

- **(3)** 解得：

$$(x_1,x_2,x_3)=(t,0,t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

- **(4)** 对增广矩阵进行相同的行变换：

$$\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & y_1\\ 2 & 2 & -2 & y_2\\ i & 1+i & -i & y_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & y_1\\ 0 & 2+2i & 0 & y_2-2y_1\\ 0 & 0 & 0 & y_3-iy_1-\dfrac{i}{2+2i}(y_2-2y_1)\end{pmatrix}$$

因此当且仅当

$$y_3-iy_1-\frac{i}{2+2i}(y_2-2y_1)=0$$

时，方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解。

7. 设 $\alpha_1=(1,1,4)$，$\alpha_2=(-2,1,5)$，$\alpha_3=(a,2,10)$，$\beta=(1,b,-1)$。当 a,b 取何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？何时表示系数唯一？

解： 该问题等价于判断如下方程组的解的情况：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+ax_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=b,\\ 4x_1+5x_2+10x_3=-1.\end{cases}$$

对增广矩阵进行行变换

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 1 & 1 & 2 & b\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 13 & 10-4a & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-\frac{13}{3}R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 0 & \dfrac{a+4}{3} & -\dfrac{2}{3}-\cdots\end{pmatrix}$$

因此，当系数 $\dfrac{a+4}{3}\neq 0$，即 $a\neq -4$ 时，方程组有唯一解，此时 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表出。当 $a=-4$ 时，为了使方程组有解（能表出），必须有等式右边为 0，即 $-\dfrac{2}{3}-\dfrac{13}{3}b=0$，解得 $b=-\dfrac{2}{13}$。此时方程组有无穷多解，β 的表示方式不唯一。当 $a=-4$ 且 $b\neq -\dfrac{2}{13}$ 时，方程组无解，β 不能被表出。

8. 向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性无关，且 $\beta=\sum_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$。若 $b_i\neq 0$，证明将 α_i 替换为 β 后的向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_s$ 仍线性无关。

解：

证明. 注意到，对于更改后的向量组，考虑 $\alpha_p=\sum_{t=1(t\neq i,p)}^{s} c_t\alpha_t+\beta(p\neq i)$ 的情况，我们总能通过调整系数 c_t 来使得 β 的影响被消除，即 α_p 不能被其他向量线性表出，因此更改后的向量组仍线性无关。考虑 $\beta=\sum_{t=1(t\neq i)}^{s} c_t\alpha_t$ 的情况，显然，上式成立等价于向量组线性有关。因此，更改后的向量组仍线性无关。

□

9. 用向量运算的性质证明：若一组向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性表出向量 β 的方式是唯一的（或不唯一的），则凡能被该组向量表出的任一向量，其表出方式亦皆唯一（或不唯一）。

证明. 不难发现，若向量组线性表出向量 β 的方式是唯一的，则该向量组线性无关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是唯一的。若向量组线性表出向量 β 的方式是不唯一的，则该向量组线性相关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是不唯一的。（好像是废话） □

10. 求双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线。

解： 移项得

$$x^2-z^2=1-y^2$$

即

$$(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$$

因此我们可以设

$$\begin{cases} x-z=t(1-y), \\ x+z=\dfrac{1}{t}(1+y), \end{cases} \qquad t\neq 0.$$

特别地，当 $y=\pm 1$ 时，$x=\pm z$.

11. 令 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为从有理数及 $\sqrt{3}$ 出发，经过有限次四则运算所得数的集合，称为 $\sqrt{3}$ 生成的数域。证明：
（1）$\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{\,a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$；
（2）$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中每个数可唯一写成 $a+b\sqrt{3}$，其中 $a,b\in\mathbb{Q}$。

证明.

- **(1)** 首先证明 $\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}\subseteq\mathbb{Q}(\sqrt{3})$，显然成立。

  其次证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})\subseteq\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$。

  我们只需要证明 $\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对四则运算封闭即可。因为 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为最小的包含有理数及 $\sqrt{3}$ 的数域，所以我们只需证明 $\{a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 为一个数域。

  当然这是 trivial 的)))

- **(2)** 设 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}$,其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$。则 $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}=0$，即 $a_1-a_2=0$ 且 $b_1-b_2=0$。因此 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$，唯一性得证。

□

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发，通过加法、乘法二则运算能得到的所有数的集合，称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整数环。证明在此环中，不可约数和素数不等价。

证明. 不知何意味，笔者能力有限

□

2 线性相关性, 秩

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

解: 取转置:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

我们进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-\lambda R_1\to R_2, R_3+R_1\to R_3, R_4-2R_1\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-2\lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda = -1$ 时，矩阵化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  我们交换 R_2 和 R_4，再进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  因此当 $\lambda = -1$ 时，$\operatorname{rank}(A) = 3$。

- 当 $\lambda \neq -1$ 时：

$$\xrightarrow{R_3+\frac{\lambda+2}{2+2\lambda}R_2\to R_3, R_4+\frac{1}{2+2\lambda}R_2\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-2\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda^2-4\lambda}{2+2\lambda} \\ 0 & 0 & \dfrac{-3\lambda}{2+2\lambda} \end{pmatrix}$$

  - 当 $\lambda = 0$ 时，$\operatorname{rank}(A) = 2$;
  - 当 $\lambda \neq 0, -1$ 时，$\operatorname{rank}(A) = 3$.

综上所述:

$$\operatorname{rank}(A)=\begin{cases}2, & \lambda=0;\\ 3, & \text{其他}.\end{cases}$$

2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组.

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1 & -6 & 8\\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2\\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10\\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5\end{bmatrix}.$$

解:

(1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1+3\alpha_2=\alpha_3$, $-5\alpha_1-4\alpha_2=\alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2-\frac{1}{2}\beta_3=\beta_1$.

3. 作初等行变换将矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & 2 & -1\\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6\end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a,b 取何值时, 向量 $(3,a,b,b,3)$ 属于 A 的行空间?

解:

(1) 通过初等行变换, 我们将 A 化为简化阶梯型矩阵 (先交换 R_1 和 R_4):

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4\\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[R_5-3R_1\to R_5]{\substack{R_2-4R_1\to R_2\\ R_3-3R_1\to R_3\\ R_4-2R_1\to R_4}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & -5 & 5 & -13 & -12\\ 0 & -5 & 5 & -14 & -11\\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9\\ 0 & -2 & 2 & -4 & -6\end{pmatrix}$$

最后一行提出 -2 后，交换 R_2 和 R_5，再进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 5 & -14 & -11\\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9\\ 0 & -5 & 5 & -13 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow[R_5+5R_2\to R_5]{\substack{R_3+5R_2\to R_3\\ R_4+3R_2\to R_4}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

我们化为:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

继续化简得到:

$$\xrightarrow[R_1-R_2\to R_1]{R_1-4R_3\to R_1, R_2-2R_3\to R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此, (1) A 列组的秩为 3, 一个极大无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$, 且

$$\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_5 = -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_4.$$

(2) A 行空间的维数为 3, 一组基为

$$\beta_1 = (3, -2, 8, -2, 1), \quad \beta_2 = (1, 1, 1, 4, 4), \quad \beta_3 = (2, -1, 5, 2, -1).$$

各个行向量在此基下的坐标分别为:

参考变换过程

(3) $a = 4, b = 2$ 时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间.

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性:

- (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$;
- (2) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4$;
- (3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$;
- (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

解:

- (1) 线性相关; 因为 $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$;
- (2) 线性无关;
- (3) 线性无关;
- (4) 线性无关。

5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 rank(I) = rank(II), 则向量组 II 也能表出向量组 I.

证明. 取向量组 I 的极大无关组 $\{\alpha_1,\dots,\alpha_r\}$, 则向量组 II 中也存在极大无关组 $\{\beta_1,\dots,\beta_r\}$.

因为向量组 I 能线性表出向量组 II, 所以

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}c_{ij}\alpha_j, i=1,\dots,r.$$

由于 $\{\beta_1,\dots,\beta_r\}$ 线性无关, 所以矩阵 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

因此, 我们可以得到

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{r}d_{ji}\beta_i, j=1,\dots,r$$

这里 $D=(d_{ji})_{r\times r}=C^{-1}$.

由此可知, 向量组 II 能线性表出向量组 I.

□

6. 设向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\dots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\dots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量组线性无关, 则 $\beta_1,\dots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$.

证明. 由于矩阵 B 的列向量组线性无关, 所以 $r\le s$. 只需证明存在矩阵 $C=(c_{jk})_{r\times s}$ 使得

$$CB=I_r$$

这里 I_r 为 r 阶单位矩阵.

因为矩阵 B 的列向量组线性无关, 所以 $\mathrm{rank}(B)=r$, 因此可将其化为:

$$B=PB'=\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}$$

则我们只需取矩阵 $C = C'P^{-1}$ 即可. 其中

$$C' = \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}$$

□

7. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \le i \le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.

证明.

- 证法 (1): 我们可以通过初等行变换将其化为 I_n，此处不再赘述。
- 证法 (2): 反证法. 假设 $\mathrm{rank}(A) < n$, 则存在非零向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 使得 $AX = 0$. 设 $|x_k| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} > 0$, 则由 $AX = 0$ 可得:

  $$a_{kk}x_k + \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j = 0$$

  然而

  $$|a_{kk}x_k| > |a_{kk}||x_j| \ge \sum_{j\neq k} |a_{kj}||x_j|$$

  矛盾.

□

8. 证明秩等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 和秩不等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \ge \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

证明. 详见作业 □

9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2} = \dfrac{y-b_3}{b_1-b_2} = \dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3} = \dfrac{y-b_1}{b_2-b_3} = \dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.

解： 设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\mathbf{d_1} = (a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2)$ 和 $\mathbf{d_2} = (a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3)$。由于矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩，说明向量组 $\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)\}$ 线性无关。因此，方向向量 $\mathbf{d_1}$ 和 $\mathbf{d_2}$ 也线性无关，说明直线 L_1 和 L_2 不平行。

接下来，我们需要判断直线 L_1 和 L_2 是否相交。设直线 L_1 上的一点为 $P_1 = (a_3 + t(a_1 - a_2), b_3 + t(b_1 - b_2), c_3 + t(c_1 - c_2))$，直线 L_2 上的一点为 $P_2 = (a_1 + s(a_2 - a_3), b_1 + s(b_2 - b_3), c_1 + s(c_2 - c_3))$，其中 $t, s \in \mathbb{R}$。我们需要解方程组：

$$\begin{cases} a_3 + t(a_1 - a_2) = a_1 + s(a_2 - a_3), \\ b_3 + t(b_1 - b_2) = b_1 + s(b_2 - b_3), \\ c_3 + t(c_1 - c_2) = c_1 + s(c_2 - c_3). \end{cases}$$

不难发现 $t = -1, s = 1$ 是该方程组的解，因此直线 L_1 和 L_2 相交。

10. 设 $W = \{f(x) | f(1) = 0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

解:

- (1) 显然 $W \subseteq \mathbb{R}[x]_n$, 对任意 $f(x), g(x) \in W$ 和任意标量 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

  $$(af + bg)(1) = af(1) + bg(1) = 0,$$

  因此 $af + bg \in W$, 故 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间.

- (2) 设 $f(x) \in W$, 则 $f(1) = 0$, 即

  $$a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 0.$$

  因此, 我们可以将 a_0 表示为 $a_0 = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. 所以, 多项式 $f(x)$ 可表示为

  $$f(x) = a_1(x - 1) + a_2(x^2 - 1) + \cdots + a_n(x^n - 1).$$

  且显然其线性无关，因此, W 的一组基为

  $$\{x - 1, x^2 - 1, \ldots, x^n - 1\}.$$

11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A = (a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

证明. 首先考虑

$$AX=\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{(k-1)j}x_j\\ 0\\ \sum_{j=1}^{n}a_{(k+1)j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{k-1}\\ 0\\ y_{k+1}\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

我们将 $x_k\to x_k+t$，则

$$AX=\begin{pmatrix}y_1+a_{1k}t\\ y_2+a_{2k}t\\ \vdots\\ y_{k-1}+a_{(k-1)k}t\\ a_{kk}t\\ y_{k+1}+a_{(k+1)k}t\\ \vdots\\ y_n+a_{nk}t\end{pmatrix}$$

不难发现，当 t 充分大时，AX 的每个分量都不为零.

□

3 线性方程组解的结构

1. 已知 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_5]$ 与 $\begin{bmatrix}2&1&2&5&3\\2&2&4&8&7\\3&1&2&6&3\end{bmatrix}$ 的行向量组等价, 且 $\alpha_2=(2,1,2,1)^T$, $\alpha_5=(7,3,7,3)^T$. 又知方程组 $A\mathbf{x}=\beta$ 的一个解为 $\mathbf{x}=(1,1,-1,0,1)^T$, 这里 $\beta=(7,5,7,4)^T$. (1) 写出矩阵 A 及其行简化阶梯形矩阵 J; (2) 求 A 行空间的一组基, 并确定当 a,b 为何值时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里; (3) 求方程组 $A\mathbf{x}=\beta$ 的解空间.

解：

(1) 计算得：

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) A 行空间的一组基为

$$\beta_1 = (1,0,0,1,0), \quad \beta_2 = (0,1,2,3,0), \quad \beta_3 = (0,0,0,0,1).$$

当 $a = 14, b \in \mathbb{R}$ 时, $(5,3,6,a,b)$ 落在 A 的行空间里.

(3) 注意到

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{1}} & \alpha_{\mathbf{2}} & 2\alpha_{\mathbf{2}} & \alpha_{\mathbf{1}} + 3\alpha_{\mathbf{2}} & \alpha_{\mathbf{5}} \end{pmatrix}$$

则通解为 $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} t_1 \\ 3t_1 - 2t_2 \\ t_2 - t_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, 其中 $t_1, t_2, \in \mathbb{R}$.

解空间为 $\left\{ t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

2. 讨论下列方程组的解空间:

- (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$;

- (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0 \\ x_{n-1} + x_n = 0 \end{cases}$

3. 讨论下列方程组的解空间:

• (1) $\begin{cases} 8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5 \\ -12x_1-3x_2-3x_3+3x_4=-6 \\ 4x_1+5x_2+2x_3+3x_4=3 \\ \lambda x_1+4x_2+x_3+4x_4=2 \end{cases}$;

• (2) $\begin{cases} -6x_1+8x_2-5x_3-x_4=9 \\ -2x_1+4x_2+7x_3+3x_4=1 \\ -3x_1+5x_2+4x_3+2x_4=3 \\ -3x_1+7x_2+17x_3+7x_4=\lambda \end{cases}$

4. A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $m\times 1$ 矩阵. 证明线性方程组 $A^TA\mathbf{x}=A^TB$ 总有解.

证明. 先证明 $\mathbf{rank}(A^TA)=\mathbf{rank}(A)$. 显然 $\mathbf{rank}(A^TA)\le\mathbf{rank}(A)$. 考虑方程 $A^TA\mathbf{x}=0$, 则 $x^TA^TAx=(Ax)^T(Ax)=0$, 因此 $Ax=0$. 所以方程 $A^TA\mathbf{x}=0$ 的解空间与方程 $A\mathbf{x}=0$ 的解空间相同, 因此 $\mathbf{rank}(A^TA)=\mathbf{rank}(A)$.

且我们有如下不等式：

$$\mathbf{rank}(A)=\mathbf{rank}(A^TA)\le\mathbf{rank}([A^TA|A^TB])\le\mathbf{rank}(A^T)=\mathbf{rank}(A)$$

□

5. A,B 都是 $m\times n$ 矩阵, 线性方程组 $A\mathbf{x}=0$ 和 $B\mathbf{x}=0$ 同解. 问 A,B 的列向量组是否等价, 行向量组是否等价.

证明. 第二个结论是对的，考虑方程的基础解系 $\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}$, 将其拼为矩阵

$$C=[\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_{n-r}]$$

考虑方程 $AX=0$, 则 $AC=0$, 取转置得到 $C^TA^T=0$ 显然

□

6. 证明: $A\mathbf{x}=0$ 有强非零解 (解向量的每个系数都不为零) 的充要条件是 A 的任一列向量均可表示为其余列向量的线性组合.

证明. 显然

□

7. 设线性方程组 $A\mathbf{x}=b$ 中矩阵 A 的秩等于矩阵 $B=\begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix}$ 的秩. 证明该方程组有解, 并问其逆命题是否成立.

证明. 我们有如下不等式：

$$\mathbf{rank}(A) \leq \mathbf{rank}([A|b]) \leq \mathbf{rank}(B) \leq \mathbf{rank}(A)$$

因此 $\mathbf{rank}(A)=\mathbf{rank}([A|b])$, 所以方程组 $A\mathbf{x}=b$ 有解.

逆命题不成立，考虑 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，则 $A\mathbf{x}=b$ 有解，但 $\mathbf{rank}(A)\neq\mathbf{rank}(B)$.

□

8. 设 A,B 是数域 K 上的 n 阶方阵, $A\mathbf{x}=0, B\mathbf{x}=0$ 分别有 l,m 个线性无关的解向量. 证明: (1) $(AB)\mathbf{x}=0$ 至少有 $\max(l,m)$ 个线性无关的解向量; (2) 如果 $l+m>n$, 那么 $(A+B)\mathbf{x}=0$ 必有非零解; (3) 如果 $A\mathbf{x}=0$ 和 $B\mathbf{x}=0$ 没有公共的非零解向量, 且 $l+m=n$, 那么 K^n 中的任一向量 α 都可唯一地分解为 $\alpha=\beta+\gamma$, 其中 β,γ 分别是 $A\mathbf{x}=0$ 和 $B\mathbf{x}=0$ 的解向量.

证明.

(1)

$$n-\mathbf{rank}(AB) \geq \max(n-\mathbf{rank}(A), n-\mathbf{rank}(B)) = \max(l,m)$$

(2)

$$\mathbf{rank}(A+B) \leq \mathbf{rank}(A)+\mathbf{rank}(B) = 2n-(l+m) < n$$

(3) 设 $A\mathbf{x}=0$ 的基础解系为 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l\}$, $B\mathbf{x}=0$ 的基础解系为 $\{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$. 且 $L(\alpha_i)\cap L(\beta_j)=\{0\}$. 则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_l,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m\}$ 是 K^n 的一组基. 因此任一向量 $\alpha\in K^n$ 都可唯一地表示为

$$\alpha=\sum_{i=1}^{l} a_i\alpha_i + \sum_{j=1}^{m} b_j\beta_j$$

□

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1}\alpha \neq 0, A^k\alpha = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A^{n+1})$.

证明.

(1) 考虑 $\lambda_1\alpha_{\mathbf{1}}, \cdots \lambda_{k-1}A^{k-1}\alpha_{\mathbf{k-1}} = 0$, 乘上 A^{k-1} 得到 $\lambda_1 = 0$, 如此重复得到 $\lambda_i = 0$，则有线性无关。

(2) 考虑方程 $A^n x = 0, A^{n+1}x = 0$，显然有 $\mathrm{rank}A^n \geq \mathrm{rank}A^{n+1}$，考虑方程 $A^{n+1}x = 0$，若 $A^n x \neq 0$，则由 (1) 可知 $x, Ax, \cdots, A^n x$ 线性无关，但这与 $x \in \mathbb{R}^n$ 矛盾，因此 $A^n x = 0$，则有 $\mathrm{rank}A^n \leq \mathrm{rank}A^{n+1}$，综上所述，$\mathrm{rank}A^n = \mathrm{rank}A^{n+1}$。

□

10. 判断: 方的整数元线性方程组如果 mod 任一素数 p 均有解, 那么它是否在整数环上有解. ?

11. 给定复系数线性方程组 $A\mathbf{x} = b$, 其中 A 满秩. 设 $I + A$ 的每行元素的模的和小于 q, 其中 $0 < q < 1$. 设 X_0 是 C^n 中任一向量, 归纳定义 $X_{m+1} = (I + A)X_m - b$. 证明序列 X_m 收敛到方程组 $A\mathbf{x} = b$ 的解.

证明. 设方程组 $A\mathbf{x} = b$ 的解为 X^*，则有

$$X_{m+1} - X^* = (I + A)(X_m - X^*) = (I + A)^{m+1}(X_0 - X^*)$$

求极限可知

$$\lim_{m\to\infty} X_m = X^*$$

□

12. 已知矩阵 A 的列秩与矩阵 B 的行秩相等. 记 A 的解空间为 W, B 的列空间为 V. 证明 $\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(AB)$ 当且仅当 $V \cap W = \{0\}$.

证明. 显然

□

4 行列式 (1)

1. 计算行列式：(1) $D=\begin{vmatrix} x-2 & 2 & -4 \\ 2 & x+1 & -4 \\ -2 & -4 & x+1 \end{vmatrix}$ (2) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 3 & 4 \\ 3 & x & 5 & 7 \end{vmatrix}$

解：

- (1) $D=(x-3)^2(x-1)$
- (2) $D=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = -1$

2. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}$

解：

$$= a_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i$$

3. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & \cos\phi_1 & \cos 2\phi_1 & \dots & \cos(n-1)\phi_1 \\ 1 & \cos\phi_2 & \cos 2\phi_2 & \dots & \cos(n-1)\phi_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cos\phi_n & \cos 2\phi_n & \dots & \cos(n-1)\phi_n \end{vmatrix}$

解：

$$= 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{1\le i<j\le n} (\cos\phi_i - \cos\phi_j)$$

4. 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & & & \\ \gamma & \alpha & \beta & & \\ & \gamma & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \alpha & \beta \\ & & & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n\times n})$, 其中 $\alpha^2-4\beta\gamma>0$.

解: 展开易得递推式:

$$D_n = \alpha D_{n-1} - \beta\gamma D_{n-2}$$

特征方程为:

$$x^2 - \alpha x + \beta\gamma = 0$$

设其根为 λ_1, λ_2, 则通解为:

$$D_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$$

由初始条件 $D_1 = \alpha, D_2 = \alpha^2 - \beta\gamma$, 可解得:

$$A = \frac{\alpha - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad B = \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

因此:

$$D_n = \frac{\alpha - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_1^n + \frac{\lambda_1 - \alpha}{\lambda_1 - \lambda_2}\lambda_2^n$$

5. (1) 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c & a & b & \dots & b \\ c & c & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a \end{vmatrix}$ (2) 计算行列式 $E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \dots & b \\ c & a_2 & b & \dots & b \\ c & c & a_3 & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a_n \end{vmatrix}$

解:

- (1) 用倒数第一行减去倒数第二行, 再用倒数第二行减去倒数第三行, 依此类推, 最后得到:

  $$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ c-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c-b & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix}$$

  展开得:

  $$D_n = (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}(b)\begin{vmatrix} c-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c-a & a-b & \dots & 0 \\ 0 & 0 & c-a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c-a \end{vmatrix}$$

  $$= (a-b)D_{n-1} + (-1)^{n+1}b(c-a)^{n-1}$$

  注意到 b, c 等价，不难求出

- (2) 拆分第 n 列：

$$E_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \dots & b+0 \\ c & a_2 & b & \dots & b+0 \\ c & c & a_3 & \dots & b+0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & b+a_n-b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \dots & b \\ c & a_2 & b & \dots & b \\ c & c & a_3 & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \dots & 0 \\ c & a_2 & b & \dots & 0 \\ c & c & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \dots & a_n-b \end{vmatrix}$$

得到：

$$E_n = (a_n - b)D_{n-1} + b\prod_{i=1}^{n-1}(a_i - c)$$

注意到 b, c 等价，不难求出

6. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & x_1x_4 \\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & x_2x_4 \\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & x_3x_4 \\ x_4x_1 & x_4x_2 & x_4x_3 & 1+x_4^2 \end{vmatrix}$

解： 将其拆为 I_n 和矩阵乘积的形式

$$= |I_1| \cdot \left| I_n + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} I_n \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= |I_n| \cdot \left| I_1 + \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{pmatrix} I_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right|$$

$$= 1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & x_3 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n - a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\dots a_n \neq 0$. 同理不再赘述

8. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

解： 依最后一列展开，得到递推式:

$$D_n = 2\cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}$$

得到 $D_n = \cos n\alpha$

9. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} \in \det(\mathbb{R}^{n\times n})$.

解： 所有行都减去第一行得

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_2)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{a_1-a_2}{(a_2+b_n)(a_1+b_n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_1)(a_1+b_1)} & \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_2)(a_1+b_2)} & \cdots & \frac{a_1-a_n}{(a_n+b_n)(a_1+b_n)} \end{vmatrix}$$

提取公因子后，得到

$$D_n = \prod_{i=2}^{n} \frac{a_1-a_i}{(a_i+b_1)(a_1+b_1)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

重复上述过程，最终得到:

$$D_n = \frac{\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}(a_i+b_j)}$$

5 行列式 (2)

1. 当 λ 为何值时, 线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + (4+\lambda)x_2 = 6 \end{cases}$$

有唯一解, 此时用 Cramer 法则求解之.

解: 系数行列式为 $8 + 2\lambda + 15 = 2\lambda + 23$, 当 $2\lambda + 23 \neq 0$ 时, 方程组有唯一解, 即 $\lambda \neq -\dfrac{23}{2}$. 此时由 Cramer 法则可得:

$$x_1 = \frac{7(4+\lambda)+18}{2\lambda+23} = \frac{7\lambda+46}{2\lambda+23}, \quad x_2 = \frac{14-35}{2\lambda+23} = \frac{-21}{2\lambda+23}$$

2. 设 $f(x)$ 是复系数一元多项式, 且对于任意整数 n 有 $f(n)$ 仍是整数. 证明或否定: (1) $f(x)$ 系数都是有理数; (2) $f(x)$ 系数都是整数.

证明.

- (1) 设 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, 其中 $a_i \in \mathbb{C}$. 由拉格朗日插值公式可知, 存在唯一的多项式 $g(x)$, 使得 $g(k) = f(k), k = 0, 1, \ldots, n$. 因为 $f(k)$ 都是整数, 所以 $g(x)$ 的系数都是有理数. 又因为 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $n+1$ 个点处取值相同, 所以 $f(x) = g(x)$. 因此, $f(x)$ 的系数都是有理数.
- (2) 反例: 设 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, 则对于任意整数 n, 有

$$f(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n = \frac{n(n+1)}{2}$$

显然, $f(n)$ 是整数, 但 $f(x)$ 的系数不是整数.

□

3. 设数域 K 上 $m \times n$ 矩阵 H 的列向量为 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. 证明: H 的任意 $s(s \leq \min(m,n))$ 列都线性无关当且仅当齐次线性方程组 $Hx = 0$ 的任一非零解的非零分量数目大于 s.

证明. 若 H 的任意 $s(s \leq \min(m,n))$ 列都线性无关，考虑齐次线性方程组 $Hx = 0$ 的任一非零解 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. 假设 x 有 t 个非零分量，且 $t \leq s$，不妨设这些非零分量对应的列向量为 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_t}$，则有

$$x_{i_1}\alpha_{i_1} + x_{i_2}\alpha_{i_2} + \cdots + x_{i_t}\alpha_{i_t} = 0.$$

由于 $x_{i_j} \neq 0$，所以 $\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \ldots, \alpha_{i_t}$ 线性相关，矛盾。因此，齐次线性方程组 $Hx = 0$ 的任一非零解的非零分量数目大于 s.

□

4. 设 $n \geq 3, f_1, f_2, \ldots, f_n$ 是次数 $\leq n-2$ 的多项式. 证明: 对 $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, 行列式

$$\begin{vmatrix} f_1(a_1) & f_1(a_2) & \cdots & f_1(a_n) \\ f_2(a_1) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix} = 0$$

证明. 考虑行列式:

$$D = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1(x) & \cdots & f_1(x) \\ f_2(a_2) & f_2(a_2) & \cdots & f_2(a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(a_1) & f_n(a_2) & \cdots & f_n(a_n) \end{vmatrix}$$

由于 $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ 的次数均不超过 $n-2$，所以行列式 D 的每一行都是次数不超过 $n-2$ 的多项式。因此，行列式 D 的值也是一个次数不超过 $n-2$ 的多项式。行列式有至少 $n-1$ 个根 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，因此行列式 D 恒为零。

□

5. 设 $\alpha_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{r}}, \beta_{\mathbf{1}}, \ldots, \beta_{\mathbf{s}}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个向量组, 其中 $\beta_{\mathbf{1}}, \ldots, \beta_{\mathbf{s}}$ 线性无关. 证明存在无穷多个实数 k, 使得向量组 $\alpha_{\mathbf{1}} + k\beta_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{r}} + k\beta_{\mathbf{r}}$ 线性无关.

证明. 我们构造矩阵

$$A(k) = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{1}} + k\beta_{\mathbf{1}} & \alpha_{\mathbf{2}} + k\beta_{\mathbf{2}} & \cdots & \alpha_{\mathbf{r}} + k\beta_{\mathbf{r}} \end{pmatrix}$$

不难发现，其 $r+1$ 阶子式为 0，而 r 阶子式为关于 k 的多项式，次数不为 0，因此有无穷多个实数 k 使得该 r 阶子式不为 0，从而使得向量组 $\alpha_{\mathbf{1}} + k\beta_{\mathbf{1}}, \ldots, \alpha_{\mathbf{r}} + k\beta_{\mathbf{r}}$ 线性无关。

□

6. 计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$. 你能求出行列式

$$E_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}$$

的通式吗?

解： 不难发现每行的和均为 $n+1$

7. 计算行列式 $D_1 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{vmatrix}$ 和 $D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 741 & 886 & 114 & 514 \\ -741 & 0 & 1919 & 810 & 2002 \\ -886 & -1919 & 0 & 520 & 1314 \\ -114 & -810 & -520 & 0 & 220 \\ -514 & -2002 & -1314 & -220 & 0 \end{vmatrix}$.

解： 利用分块矩阵，计算得

$$D_1 = (af - be + cd)^2, \quad D_2 = 0\,(\text{因为行列式的阶数为奇数})$$

8. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \le i \le n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明若 $a_{ii} > 0, \forall 1 \le i \le n$, 则 $\det(A) > 0$.

证明. 见原解

□

9. 设矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 (1) $a_{ii} > 0, \forall 1 \le i \le n$; (2) $a_{ij} < 0, \forall 1 \le i \ne j \le n$; (3) $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0, \forall 1 \le j \le n$. 求矩阵 A 的秩.

10. 试计算矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 2 & 4 & 8 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩, 并计算其 r 阶非零子式的个数.

11. 试确定所有 3 阶 (0,1) 行列式 (即所有元素只能是 0 或 1) 的最大值, 并给出取到最大值的一个构造.

12. 设 W 是矩阵空间 $M_n(K)$ 的一个子空间. 证明: 若 $\dim(W) > n^2 - n + 1$, 则 W 中至少包含一个满秩的矩阵.

6 期中复习, 矩阵乘法的理解与应用

1. 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ 与 $\beta_1,\dots,\beta_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两个线性无关组. 证明 $\alpha_1,\dots,\alpha_r,\beta_1,\dots,\beta_s$ 线性无关当且仅当 $\mathrm{L}(\alpha_1,\dots,\alpha_r)\cap\mathrm{L}(\beta_1,\dots,\beta_s)=\{0\}$.

证明. trivial □

2. 求 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}$$

解: 降阶公式易得:

$$=(1+\sum_{i=1}^n x_iy_i)=1+\mathbf{x}^T\mathbf{y}$$

3. A 是 n 阶矩阵, $\alpha=(1,1,\dots,1)^T$, α 是 n 维列向量, 且 $|A|=a$, $|A-\alpha\alpha^T|=b$, 求 $|A+2\alpha\alpha^T|$.

解: 不难发现 $|A+x\alpha\alpha^{\mathbf{T}}|$ 是线性函数，因此可设

$$|A+x\alpha\alpha^T|=px+q$$

由题意可得

$$\begin{cases} q=a \\ -p+q=b \end{cases}$$

解得 $p=a-b$，因此

$$|A+2\alpha\alpha^T|=2(a-b)+a=3a-2b$$

4. 设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶矩阵, $D=|A|$, A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & x_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \dots & y_n & z \end{vmatrix}=zD-\sum_{i,j=1}^n A_{ij}x_iy_j$$

证明. 双重展开即可

□

5. 设 $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{N}_+$. 证明 n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$ 能被 $2!3!\ldots(n-1)!$ 整除.

证明. □

6. 设 A 是 n 阶方阵, A 的第 (i,j) 元是 $a_{ij} = a_i - b_j$. 求 $\det(A)$, 并计算当 $n \geq 2$ 且 $a_1 \neq a_2, b_1 \neq b_2$ 时 $AX = 0$ 的解空间维数和一组基.

解: 降阶公式即可。

- 当 $n = 2$ 时, $\det(A) \neq 0$, 只有零解
- 当 $n > 2$ 时, $\det(A) = 0$, 显然有 $\mathrm{rank}(A) = 2$ （前两列/行线性无关），因此解空间维数为 $n-2$，基为

$$\cdots$$

7. 设 $A = (a_{ij})_{n\times n}$, 且 $|a_{ii}| > \sum_{k\neq i} |a_{ik}|$ 或 $|a_{jj}| > \sum_{k\neq j} |a_{kj}|$ 对任意 $1 \leq i \neq j \leq n$ 成立. 证明 $\det(A) \neq 0$.

证明. trivial □

8. 设 A, B 是幂等矩阵 (即 $A^2 = A, B^2 = B$), 且 $I - A - B$ 满秩, 证明 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

证明. 有如下不等式

$$n = \mathrm{rank}(I - A - B) \leq \mathrm{rank}(I - A) + \mathrm{rank}(B) = n - \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) = n$$

□

9. 设 A 是 n 阶方阵, 证明: (1) 若 $A^{k-1} \neq 0, A^k = 0$, 那么 $\alpha, A\alpha, \ldots, A^{k-1}\alpha$ 线性无关; (2) $\mathrm{rank}(A^n) = \mathrm{rank}(A^{n+1})$.

证明. 见上文

□

10. 记矩阵 $H=(a_{ij})$ 中 a_{ij} 表示从城市 i 到 j 的航班数. (1) 解释 H^k 的 (i,j) 元的含义; (2) 设 $H=\begin{pmatrix}0&1&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&3\\0&0&2&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$. 从哪个城市到哪个城市恰好要倒两次飞机? 有几种不同的航班选择? 哪两个城市间的通行需要倒的航班次数最多?

解:

- (1) H^k 的 (i,j) 元表示从城市 i 到城市 j 恰好中转 $k-1$ 次的不同航班选择数.
- (2) 略

11. 设 n 阶方阵 A 的 (i,j) 元 $a_{ij}=\dfrac{\alpha_i^n-\beta_j^n}{\alpha_i-\beta_j}, i,j=1,2,\ldots,n$. 计算其行列式

解: 拆分即可

12. 设 $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ 非平凡. 证明: 若矩阵 A 的每一个元素 a_{ij} 的代数余子式 $A_{ij}=a_{ij}$, 则 $|A|^{n-2}=1$.

13. 设已知 $|\overrightarrow{OA}|=2, |\overrightarrow{OB}|=3, |\overrightarrow{OC}|=4, |\overrightarrow{AB}|=2, |\overrightarrow{BC}|=3, |\overrightarrow{AC}|=4$. 求混合积的绝对值 $|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}|$.