高代第十次作业

2025 年 11 月 27 日

11.20 日作业

p171.2

证明：如果 A 可逆，则 $AB \sim BA$。

证明. 设 A 可逆，则存在可逆矩阵 A^{-1}，使得

$$AB = A(BA)A^{-1},$$

因此 $AB \sim BA$。

□

p171.3

证明：如果 $A_1 \sim B_1, A_2 \sim B_2$，则

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

证明. 设 $A_1 \sim B_1$，则存在可逆矩阵 P_1，使得 $B_1 = P_1^{-1}A_1P_1$。同理，设 $A_2 \sim B_2$，则存在可逆矩阵 P_2，使得 $B_2 = P_2^{-1}A_2P_2$。令

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix},$$

则 P 也是可逆矩阵，且

$$\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}P,$$

□

p171.4

证明：如果 A 与 B 可交换，则 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 也可交换。

证明. 设 A 与 B 可交换，则有 $AB = BA$。则

$$P^{-1}AP \cdot P^{-1}BP = P^{-1}ABP = P^{-1}BAP = P^{-1}BP \cdot P^{-1}AP.$$

□

p171.8

证明：如果 A 可对角化，则 $A \sim A^T$。

证明. 设 A 可对角化，则存在可逆矩阵 P，使得

$$A = PDP^{-1},$$

其中 D 是对角矩阵。则

$$A^T = (PDP^{-1})^T = (P^{-1})^T D^T P^T = (P^{-1})^T DP^T.$$

□

p171.9

证明：如果数域 K 上的 n 级矩阵 A, B 满足 $AB - BA = A$，则 A 不可逆。

证明. 假设矩阵 A 可逆，则有

$$AB - BA = A \implies B - ABA^{-1} = I$$

取迹：

$$\operatorname{tr}(B) - \operatorname{tr}(ABA^{-1}) = \operatorname{tr}(I)$$

即：

$$n = 0$$

矛盾，因此矩阵 A 不可逆。

□

p171.10

证明：与幂等矩阵相似的矩阵仍是幂等矩阵。

证明. 假设矩阵 A 是幂等矩阵，即 $A^2 = A$。设矩阵 B 与 A 相似，则存在可逆矩阵 P，使得

$$B = P^{-1}AP.$$

则

$$B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P = P^{-1}AP = B.$$

□

p179.1(4)

求下列数域 K 上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量：

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

解: 计算：

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda + 3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^3$$

因此，矩阵 A 在数域 K 上只有一个特征值 $\lambda = -1$。求解特征向量：

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

解得：

$$\xi = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad k \in K.$$

p179.2(2)

求下列复数域上的矩阵 A 的全部特征值和特征向量；如果把 A 看成实数域上的矩阵，它有没有特征值？有多少个特征值？

$$(2) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}.$$

解： 计算：

$$\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -7 & 3\\ 2 & \lambda+5 & -2\\ 4 & 10 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

因此，矩阵 A 在复数域上的特征值为 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=\mathrm{i}$, $\lambda_3=-\mathrm{i}$。求解特征向量：当 $\lambda_1=1$ 时，

$$\begin{pmatrix}-2 & -7 & 3\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 10 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

解得：

$$\xi_1=k\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{C}^*.$$

当 $\lambda_2=\mathrm{i}$ 时，

$$\begin{pmatrix}3-\mathrm{i} & -7 & 3\\ 2 & 5+\mathrm{i} & -2\\ 4 & 10 & 3-\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

解得：

$$\xi_2=k\begin{pmatrix}-3+\mathrm{i}\\ 2\\ 2+2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{C}^*.$$

当 $\lambda_3=-\mathrm{i}$ 时，

$$\begin{pmatrix}3+\mathrm{i} & -7 & 3\\ 2 & 5-\mathrm{i} & -2\\ 4 & 10 & 3+\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=0$$

解得：

$$\xi_3=k\begin{pmatrix}-3-\mathrm{i}\\ 2\\ 2-2\mathrm{i}\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{C}^*.$$

把 A 看成实数域上的矩阵，$\lambda=1$ 是 A 的唯一实特征值。

p179.3

证明：设 A 是实数域上的 n 级矩阵，把 A 看成复数域上的矩阵，如果 λ_0 是 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量，则 $\bar{\lambda}_0$ 也是 A 的一个特征值，$\bar{\alpha}$ 是 A 的属于 $\bar{\lambda}_0$ 的一个特征向量。（$\bar{\alpha}$ 表示把 α 的每个分量取复数共轭得到的向量。）

证明. 设 A 是实数域上的 n 级矩阵，λ_0 是 A 的一个特征值，α 是 A 的属于 λ_0 的一个特征向量，则有

$$A\alpha = \lambda_0\alpha.$$

取等式两边的复共轭，得到

$$\overline{A\alpha} = \overline{\lambda_0\alpha}.$$

由于 A 是实数矩阵，故 $\overline{A\alpha} = A\overline{\alpha}$，因此有

$$A\overline{\alpha} = \overline{\lambda_0}\overline{\alpha}.$$

这说明 $\overline{\lambda_0}$ 是 A 的一个特征值，$\overline{\alpha}$ 是 A 的属于 $\overline{\lambda_0}$ 的一个特征向量。

□

p179.10

设 A 是一个 n 阶正交矩阵，证明：

- (1) 如果 A 有特征值，则其特征值为 1 或 -1；
- (2) 如果 n 为奇数，且 $|A| = 1$，则 A 至少有一个特征值为 1。
- (3) 如果 $|A| = -1$，则 A 至少有一个特征值为 -1。

证明.

- (1) 设 λ 是 A 的一个特征值，α 是对应的特征向量，则有

  $$A\alpha = \lambda\alpha.$$

  由于 A 是正交矩阵，有 $A^TA = I$，得到

  $$\alpha^TA^TA\alpha = \alpha^T\alpha.$$

  即

  $$\lambda^2\alpha^T\alpha = \alpha^T\alpha.$$

  因为 $\alpha \neq 0$，所以 $\alpha^T\alpha \neq 0$，从而得到 $\lambda^2 = 1$，即 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$。

- (2) 由于 $|A| = 1$，则特征多项式的常数项为 $(-1)^n|A| = (-1)^n$。当 n 为奇数时，常数项为 -1，因此至少有一个特征值为 1，否则所有特征值都是 -1，则常数项为 $(-1)^n(-1)^n = 1$，与已知矛盾。

- (3) 由于 $|A| = -1$，则特征多项式的常数项为 $(-1)^n|A| = -(-1)^n$。当 n 为偶数时，常数项为 -1，因此至少有一个特征值为 -1，否则所有特征值都是 1，则常数项为 $(-1)^n(1)^n = 1$，与已知矛盾。当 n 为奇数时，常数项为 1，同样可以得出至少有一个特征值为 -1。

□

p183.4

证明：如果 α 与 β 是数域 K 上 n 级矩阵 A 的属于不同特征值的特征向量，则 $\alpha+\beta$ 不是 A 的特征向量。

证明. 考虑:

$$A(\alpha+\beta) = A\alpha + A\beta = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta = \lambda_0(\alpha+\beta).$$

因为 α 与 β 属于不同特征值 λ_1 与 λ_2，其线性无关，则有 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$，这与 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 矛盾，因此 $\alpha+\beta$ 不是 A 的特征向量。

□

p183.5

设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵。证明：如果 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量，则 A 一定是数量矩阵。

证明. 设 A 是数域 K 上的 n 级矩阵，且 K^n 中任意非零列向量都是 A 的特征向量。取标准基向量 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，则有

$$Ae_i = \lambda_i e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

由于任意非零列向量都是 A 的特征向量，特别地，对于任意 $i \neq j$，有

$$A(e_i + e_j) = \lambda(e_i + e_j),$$

其中 λ 是某个标量。展开上式，得到

$$Ae_i + Ae_j = \lambda e_i + \lambda e_j.$$

将 $Ae_i = \lambda_i e_i$ 和 $Ae_j = \lambda_j e_j$ 代入上式，得到

$$\lambda_i e_i + \lambda_j e_j = \lambda e_i + \lambda e_j.$$

由于 e_i 和 e_j 是线性无关的，比较系数可得

$$\lambda_i = \lambda_j = \lambda.$$

因此，所有的 λ_i 都相等，记为 λ，则有

$$Ae_i = \lambda e_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

这说明 $A = \lambda I$，即 A 是数量矩阵。

□

11.25 日作业

p183.8

证明：数域 K 上幂等矩阵的秩等于它的迹。

证明. 熟知地，对于一线性空间上的幂等变换 ϕ，总能选取一组基，使得该变换在此基下的矩阵表示为

$$A_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I_r 是 r 级单位矩阵。$r = \dim\phi$. 对于本题，则有

$$r = \operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(P^{-1}A_rP) = \operatorname{tr}(A_r) = \operatorname{rank}(A) = r$$

□

p183.9

证明：数域 K 上的对合矩阵一定可对角化；并且写出它的相似标准形。

证明. 设 A 是数域 K 上的对合矩阵，则有 $A^2 = I$。考虑特征多项式：

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda A^2 - A) = 0$$

因此，矩阵 A 的特征值为 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = -1$。

考虑向量 $\alpha \in K^n$，则有

$$\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + A\alpha) + \frac{1}{2}(\alpha - A\alpha).$$

其中

$$\frac{1}{2}(\alpha + A\alpha) \in V_1, \quad \frac{1}{2}(\alpha - A\alpha) \in V_{-1},$$

于是显然有 $K^n = V_1 \oplus V_{-1}$，因此矩阵 A 可对角化。

□

p183.10

设 $A = (a_{ij})$ 是数域 K 上一个 n 级上三角矩阵，证明：如果 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，并且至少有一个 $a_{kl} \neq 0 (k < l)$，则 A 一定不能对角化。

证明. 设矩阵 A 的特征值为 $\lambda = a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$，则矩阵 $A - \lambda I$ 为

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

由于至少有一个 $a_{kl} \neq 0 (k < l)$，因此

$$\operatorname{rank}(A - \lambda I) \geq 1,$$

从而

$$\dim V_\lambda = n - \operatorname{rank}(A - \lambda I) \leq n - 1.$$

这说明矩阵 A 的度数字小于其重数，因此矩阵 A 不能对角化。

□

p189.2

证明：如果 n 级实对称矩阵 A, B 有相同的特征多项式，则 A 与 B 相似。

证明. 设实对称矩阵 A 与 B 的特征多项式相同，则它们有相同的特征值及其重数。根据实对称矩阵的性质，矩阵 A 与 B 均可正交对角化，即存在正交矩阵 P 与 Q，使得

$$A = PDP^T, \quad B = QDQ^T,$$

其中 D 是对角矩阵，包含了相同的特征值。于是有

$$B = QDQ^T = QP^TAPQ^T.$$

□

p189.3

证明：如果实矩阵 A 正交相似于对角矩阵，则 A 一定是对称矩阵。

证明. 设实矩阵 A 正交相似于对角矩阵 D，则存在正交矩阵 P，使得

$$A = PDP^T.$$

由于 D 是对角矩阵，故 $D^T = D$，因此有

$$A^T = (PDP^T)^T = PD^TP^T = PDP^T = A.$$

这说明 A 是对称矩阵。

□

p189.5

证明：如果 n 级实矩阵 A 的特征多项式在复数域中的根都是实数，则 A 一定正交相似于上三角矩阵。

证明. 对矩阵的阶数 n 作数学归纳法。

当 $n=1$ 时，显然成立。

假设结论对 $n-1$ 级矩阵成立。设 A 是 n 级实矩阵，且其特征值均为实数。取 A 的一个实特征值 λ_1（由题意知存在），设 α_1 是 A 属于 λ_1 的单位实特征向量。将 α_1 扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$。令正交矩阵 $P_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则有

$$P_1^{-1}AP_1 = P_1^TAP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix},$$

其中 A_1 是 $n-1$ 级实矩阵，β 是 $1\times(n-1)$ 维行向量。由于 $P_1^TAP_1$ 与 A 相似，它们的特征多项式相同，即

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)\det(\lambda I - A_1).$$

故 A_1 的特征多项式是 A 的特征多项式的因子，因此 A_1 的特征值也全是实数。

由归纳假设，存在 $n-1$ 级正交矩阵 Q_1，使得 $Q_1^TA_1Q_1$ 为上三角矩阵。令

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix},$$

则 P_2 显然是 n 级正交矩阵。令 $Q = P_1P_2$，则 Q 是两个正交矩阵的乘积，仍为正交矩阵，且

$$\begin{aligned} Q^TAQ = P_2^T(P_1^TAP_1)P_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & \beta Q_1 \\ 0 & Q_1^TA_1Q_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由于 $Q_1^TA_1Q_1$ 是上三角矩阵，故 Q^TAQ 也是上三角矩阵。证毕。 □

p189.6

证明：如果 A 是实对称矩阵，并且 A 是幂零矩阵，则 $A=0$。

证明. 设实对称矩阵 A 是幂零矩阵，则存在正整数 k，使得 $A^k=0$。根据实对称矩阵的性质，矩阵 A 可正交对角化，即存在正交矩阵 P，使得

$$A = PDP^T,$$

其中 D 是对角矩阵。则有

$$A^k = (PDP^T)^k = PD^kP^T = 0.$$

由于 P 是可逆矩阵，故 $D^k = 0$。由于 D 是对角矩阵，故其对角线元素均为零，即 $D = 0$。因此，有

$$A = PDP^T = 0.$$

□