高代第四次作业

2025 年 10 月 17 日

9.14 日作业

p25.1

- (1) 计算下列行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix};$$

  解: 该行列式为上三角矩阵，行列式值为对角线元素之积，即
$$a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}.$$

- (4)
$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & \dots & a_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix};$$

  解: 我们平移行，将最后一行移到第一行，其他行依次下移一行，共进行了 $n-1$ 次行交换，因此行列式值为
$$(-1)^{n-1}a_1a_2\cdots a_n.$$

p25.3

用行列式定义计算：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解： 我们进行第三类行变换

$$\xrightarrow{r_5-\frac{e_2}{d_2}r_4,\quad r_2-\frac{b_5}{a_5}r_1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1-\dfrac{b_5}{a_5}a_1 & b_2-\dfrac{b_5}{a_5}a_2 & b_3-\dfrac{b_5}{a_5}a_3 & b_4-\dfrac{b_5}{a_5}a_4 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1-\dfrac{e_2}{d_2}d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

此为上三角行列式，注意到中间元素为 0，不难发现该行列式值为 0

p25.5

写出下述行列式中 x^4 的项与 x^3 的项：

$$\begin{vmatrix} 5x & x & 1 & x \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 3 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}.$$

解： 分别为

$$5x^4 \qquad -4x^3$$

p35.1(3)

计算下列行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 0 & -5 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 3 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix};$$

解: 我们进行初等行变换

$$\xrightarrow{r_2+4r_1,\quad r_3-2r_1,\quad r_4-3r_1}\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -12 & 3\\ 0 & 3 & 5 & -10\\ 0 & 3 & 5 & -5\end{vmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_2,\quad r_4-3r_2}\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 2\\ 0 & -1 & -12 & 3\\ 0 & 0 & 41 & -19\\ 0 & 0 & 41 & -14\end{vmatrix}$$

我们对第一列进行 laplace 展开

$$= 1\cdot\begin{vmatrix}-1 & -12 & 3\\ 0 & 41 & -19\\ 0 & 41 & -14\end{vmatrix} = -1\cdot\begin{vmatrix}41 & -19\\ 41 & -14\end{vmatrix} = -1\cdot(41\cdot -14 - 41\cdot -19) = 205.$$

结果有误

p34.3

证明:

- (1)

$$\begin{vmatrix}a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1\\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2\\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3\end{vmatrix} = 0;$$

  证明. 拆分行列式得到原行列式等价于:

$$\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}b_1 & c_1 & a_1\\ b_2 & c_2 & a_2\\ b_3 & c_3 & a_3\end{vmatrix}$$

  注意到第二个行列式通过将第一个行列式的列循环右移一位得到，因此二者相等，故原行列式值为 0。 □

- (2)

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1 & b_1+c_1 & c_1+a_1\\ a_2+b_2 & b_2+c_2 & c_2+a_2\\ a_3+b_3 & b_3+c_3 & c_3+a_3\end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}.$$

p34.4(2)

计算行列式

$$\begin{vmatrix}a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n\\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n\end{vmatrix}$$

解： 原矩阵等价于：

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

由 ***Cauchy-Binet* 公式**，该行列式值为 0。

特别的，当 $n=2$ 时，我们拆分行列式同样可以得到值为 0。