gcx 高代习题课讲义个人解答（修正版）

2025 年 10 月 23 日

题目来源：`https://wqgcx.github.io/courses/advalgebra1(wfz).pdf`

目录

1 Gauss-Jordan 消元法

1. 是否存在二次函数
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
其图像经过下列四点：$A(1,2)$、$Q(-1,3)$、$M(-4,5)$、$N(0,2)$？

解： 该问题等价于：如下线性方程组是否有解
$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a-b+c=3, \\ 16a-4b+c=5, \\ c=2. \end{cases}$$
不难发现该方程组无解，因此不存在这样的二次函数。

2. 用 Gauss 消元法解下列方程组，并用向量表示其解的集合：
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-4x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & -3\\1 & 3 & 0 & -4 & 1\\0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & -3\\0 & 5 & -3 & 0 & -3\\0 & -7 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3-5R_2\to R_3\\R_4+7R_2\to R_4}]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & -3\\0 & 0 & 2 & -5 & 12\\0 & 0 & -4 & 8 & -24\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+2R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & -3\\0 & 0 & 2 & -5 & 12\\0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_4\to R_4}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4 & 4\\0 & 1 & -1 & 1 & -3\\0 & 0 & 2 & -5 & 12\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3+5R_4\to R_3\\R_1+4R_4\to R_1\\R_2-R_4\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0 & 4\\0 & 1 & -1 & 0 & -3\\0 & 0 & 2 & 0 & 12\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{2}R_3\to R_3}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0 & 4\\0 & 1 & -1 & 0 & -3\\0 & 0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_1-3R_3\to R_1\\R_2+R_3\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 0 & -14\\0 & 1 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1+2R_2\to R_1}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & -8\\0 & 1 & 0 & 0 & 3\\0 & 0 & 1 & 0 & 6\\0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8, 3, 6, 0).$$

3. 某食品厂有四种原料 A, B, C, D。能否用这四种原料配制含脂肪 5%、碳水化合物 12%、蛋白质 15% 的食品？

单位：%	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

解： 设配制该食品时，四种原料的用量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4，则

$$\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 5(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 5x_1 + 25x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 12(x_1 + x_2 + x_3 + x_4), \\ 15x_1 + 5x_2 + 20x_3 + 10x_4 = 15(x_1 + x_2 + x_3 + x_4). \end{cases}$$

化简得到：

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0, \\ -7x_1 + 13x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -10x_2 + 5x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

我们化简增广矩阵为最简阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -7 & 13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{一系列初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7t, \frac{16}{3}t, \frac{35}{3}t, t), \quad t \in \mathbb{R}^+.$$

4. a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 - 5x_2 + 7x_3 = a \end{cases}$$

有解？若有解，求出其所有解。

解： 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 $a+1=0$，即 $a=-1$ 时，该方程组有解。
此时，令 $x_3 = t$ $(t \in \mathbb{R})$。由第二行得 $7x_2 + x_3 = 2 \implies x_2 = \dfrac{2-t}{7}$。由第一行得
$x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \implies x_1 = -1 + 4(\dfrac{2-t}{7}) - 2t = \dfrac{-7+8-4t-14t}{7} = \dfrac{1-18t}{7}$。
方程组的解为

$$(x_1, x_2, x_3) = (\frac{1-18t}{7}, \frac{2-t}{7}, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. 解下述线性方程组：

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = b_1, \\ x_1 + (1+a_2)x_2 + \cdots + x_n = b_2, \\ \quad\vdots \\ x_1 + x_2 + \cdots + (1+a_n)x_n = b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0$，且 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} \neq -1$。

解： 设 $S = \sum_{j=1}^{n} x_j$。则原方程组可写作 $S + a_i x_i = b_i$，对于 $i = 1, \ldots, n$。由于 $a_i \neq 0$，我们可以得到 $x_i = \dfrac{b_i - S}{a_i}$。将所有 x_i 相加可得：

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i - S}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} - S \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$

移项得

$$S\left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i}$$

根据题设条件 $1 + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} \neq 0$，我们可以解出 S：

$$S = \frac{\sum_{j=1}^{n} (b_j/a_j)}{1 + \sum_{j=1}^{n} (1/a_j)}$$

将 S 代回 x_i 的表达式，得到最终解：

$$x_i = \frac{1}{a_i}\left(b_i - \frac{\sum_{j=1}^{n} (b_j/a_j)}{1 + \sum_{j=1}^{n} (1/a_j)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

6.（1）求复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{pmatrix}$$

的行最简阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$；

（2）求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集；

（3）求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集；

（4）当 (y_1, y_2, y_3) 满足何种关系时，方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解？

解：

- **(1)** 化简得：

$$\xrightarrow[R_3-iR_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-\frac{i}{2+2i}R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1 & -i & -1\\ 0 & 2+2i & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1+iR_2\to R_1]{\frac{1}{2+2i}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- **(2)** 解得：

$$(x_1,x_2,x_3)=(t,0,t),\quad t\in\mathbb{C}.$$

- **(3)** 解得：

$$(x_1,x_2,x_3)=(t,0,t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

- **(4)** 对增广矩阵进行相同的行变换：

$$\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & y_1\\ 2 & 2 & -2 & y_2\\ i & 1+i & -i & y_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -i & -1 & y_1\\ 0 & 2+2i & 0 & y_2-2y_1\\ 0 & 0 & 0 & y_3-iy_1-\dfrac{i}{2+2i}(y_2-2y_1)\end{pmatrix}$$

  因此当且仅当

$$y_3-iy_1-\frac{i}{2+2i}(y_2-2y_1)=0$$

  时，方程组 $AX=(y_1,y_2,y_3)^T$ 有解。

7. 设 $\alpha_1=(1,1,4)$，$\alpha_2=(-2,1,5)$，$\alpha_3=(a,2,10)$，$\beta=(1,b,-1)$。当 a,b 取何值时，β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出？何时表示系数唯一？

解： 该问题等价于判断如下方程组的解的情况：

$$\begin{cases}x_1-2x_2+ax_3=1,\\ x_1+x_2+2x_3=b,\\ 4x_1+5x_2+10x_3=-1.\end{cases}$$

对增广矩阵进行行变换

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 1 & 1 & 2 & b\\ 4 & 5 & 10 & -1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 13 & 10-4a & -5\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-\frac{13}{3}R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1 & -2 & a & 1\\ 0 & 3 & 2-a & b-1\\ 0 & 0 & \dfrac{a+4}{3} & -\dfrac{2}{3}-\end{pmatrix}$$

因此，当系数 $\dfrac{a+4}{3}\neq 0$，即 $a\neq -4$ 时，方程组有唯一解，此时 β 能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 唯一线性表出。当 $a=-4$ 时，为了使方程组有解（能表出），必须有等式右边为 0，即 $-\dfrac{2}{3}-\dfrac{13}{3}b=0$，解得 $b=-\dfrac{2}{13}$。此时方程组有无穷多解，β 的表示方式不唯一。当 $a=-4$ 且 $b\neq -\dfrac{2}{13}$ 时，方程组无解，β 不能被表出。

8. 向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性无关，且 $\beta=\sum_{j=1}^{s}b_j\alpha_j$。若 $b_i\neq 0$，证明将 α_i 替换为 β 后的向量组 $\alpha_1,\dots,\alpha_{i-1},\beta,\alpha_{i+1},\dots,\alpha_s$ 仍线性无关。

解：

证明. 注意到，对于更改后的向量组，考虑 $\alpha_p=\sum_{t=1(t\neq i,p)}^{s}c_t\alpha_t+\beta(p\neq i)$ 的情况，我们总能通过调整系数 c_t 来使得 β 的影响被消除，即 α_p 不能被其他向量线性表出，因此更改后的向量组仍线性无关。考虑 $\beta=\sum_{t=1(t\neq i)}^{s}c_t\alpha_t$ 的情况，显然，上式成立等价于向量组线性有关。因此，更改后的向量组仍线性无关。

□

9. 用向量运算的性质证明：若一组向量 $\alpha_1,\dots,\alpha_s$ 线性表出向量 β 的方式是唯一的（或不唯一的），则凡能被该组向量表出的任一向量，其表出方式亦皆唯一（或不唯一）。

证明. 不难发现，若向量组线性表出向量 β 的方式是唯一的，则该向量组线性无关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是唯一的。若向量组线性表出向量 β 的方式是不唯一的，则该向量组线性相关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是不唯一的。（好像是废话） □

10. 求双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上的所有直线。

解： 移项得

$$x^2-z^2=1-y^2$$

即

$$(x-z)(x+z)=(1-y)(1+y)$$

因此我们可以设

$$\begin{cases}x-z=t(1-y),\\ x+z=\dfrac{1}{t}(1+y),\end{cases}\qquad t\neq 0.$$

特别地，当 $y=\pm1$ 时，$x=\pm z$.

11. 令 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为从有理数及 $\sqrt{3}$ 出发，经过有限次四则运算所得数的集合，称为 $\sqrt{3}$ 生成的数域。证明：

（1）$\mathbb{Q}(\sqrt{3})=\{\,a+b\sqrt{3}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$；

（2）$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中每个数可唯一写成 $a+b\sqrt{3}$，其中 $a,b\in\mathbb{Q}$。

证明.

- **(1)** 首先证明 $\{\, a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$，显然成立。

  其次证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \{\, a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$。

  我们只需要证明 $\{\, a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 对四则运算封闭即可。因为 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为最小的包含有理数及 $\sqrt{3}$ 的数域，所以我们只需证明 $\{\, a+b\sqrt{3} \mid a,b\in\mathbb{Q}\}$ 为一个数域。

  当然这是 trivial 的）））

- **(2)** 设 $a_1+b_1\sqrt{3}=a_2+b_2\sqrt{3}$,其中 $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{Q}$。则 $(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{3}=0$，即 $a_1-a_2=0$ 且 $b_1-b_2=0$。因此 $a_1=a_2$ 且 $b_1=b_2$，唯一性得证。

□

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发，通过加法、乘法二则运算能得到的所有数的集合，称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整数环。证明在此环中，不可约数和素数不等价。

证明. 不知何意味，笔者能力有限

□

2 线性相关性, 秩

1. 对不同的 λ 取值, 讨论矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -2 & \lambda & 5 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ 的秩.

解: 取转置:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

我们进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & -2 & 2 \\ -1 & \lambda & -3 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-\lambda R_1\to R_2, R_3+R_1\to R_3, R_4-2R_1\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-2\lambda & 2-\lambda \\ 0 & \lambda+2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- 当 $\lambda = -1$ 时，矩阵化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

  我们交换 R_2 和 R_4，再进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

  因此当 $\lambda = -1$ 时，$\mathrm{rank}(A) = 3$。

- 当 $\lambda \neq -1$ 时：

$$\xrightarrow{R_3+\frac{\lambda+2}{2+2\lambda}R_2\to R_3, R_4+\frac{1}{2+2\lambda}R_2\to R_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-2\lambda & 2-\lambda \\ 0 & 0 & \dfrac{-\lambda^2-4\lambda}{2+2\lambda} \\ 0 & 0 & \dfrac{-3\lambda}{2+2\lambda} \end{pmatrix}$$

  - 当 $\lambda = 0$ 时，$\mathrm{rank}(A) = 2$;
  - 当 $\lambda \neq 0, -1$ 时，$\mathrm{rank}(A) = 3$.

综上所述:

$$\operatorname{rank}(A) = \begin{cases} 2, & \lambda = 0; \\ 3, & \text{其他}. \end{cases}$$

2. 判断以下向量组线性相关还是线性无关; 若线性相关, 试找出一个线性无关的部分组, 同时能线性表出向量组其余的每个向量. (1) A 的列向量组; (2) A 的行向量组.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & -6 & 8 \\ 1 & -2 & -4 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 10 & 3 & -10 \\ 4 & -5 & -7 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

解:

(1) 线性相关; 其中第 1 列、第 2 列和第 5 列构成线性无关组, 且 $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = \alpha_3$, $-5\alpha_1 - 4\alpha_2 = \alpha_4$;

(2) 线性相关; 其中第 2 行、第 3 行和第 4 行构成线性无关组, 且 $-\frac{3}{2}\beta_2 - \frac{1}{2}\beta_3 = \beta_1$.

3. 作初等行变换将矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{bmatrix}$ 化为简化阶梯型矩阵, 再利用以上计算直接回答下列问题. (1) 求 A 列组的秩和一个极大无关组, 并用此极大无关组表出 A 的每个列向量. (2) 求 A 行空间的维数和一组基, 写出 A 的各个行向量在此基下的坐标. (3) a, b 取何值时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间?

解:

(1) 通过初等行变换, 我们将 A 化为简化阶梯型矩阵 (先交换 R_1 和 R_4):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & 9 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_5-3R_1\to R_5]{\substack{R_2-4R_1\to R_2 \\ R_3-3R_1\to R_3 \\ R_4-2R_1\to R_4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & -5 & 5 & -13 & -12 \\ 0 & -5 & 5 & -14 & -11 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

最后一行提出 -2 后，交换 R_2 和 R_5，再进行初等行变换:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & -5 & 5 & -14 & -11\\ 0 & -3 & 3 & -6 & -9\\ 0 & -5 & 5 & -13 & -12\end{pmatrix} \xrightarrow[R_5+5R_2\to R_5]{\substack{R_3+5R_2\to R_3\\ R_4+3R_2\to R_4}} \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 3\end{pmatrix}$$

我们化为:

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

继续化简得到:

$$\xrightarrow[R_1-R_2\to R_1]{R_1-4R_3\to R_1, R_2-2R_3\to R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & -1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

因此, (1) A 列组的秩为 3, 一个极大无关组为 $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\}$, 且

$$\alpha_3 = -2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \alpha_5 = -3\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_4.$$

(2) A 行空间的维数为 3, 一组基为

$$\beta_1 = (3, -2, 8, -2, 1), \quad \beta_2 = (1, 1, 1, 4, 4), \quad \beta_3 = (2, -1, 5, 2, -1).$$

各个行向量在此基下的坐标分别为:

参考变换过程

(3) $a = 4, b = 2$ 时, 向量 $(3, a, b, b, 3)$ 属于 A 的行空间.

4. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 试判断以下各向量组的线性相关性:

- (1) $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$;
- (2) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_4$;
- (3) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4$;
- (4) $\alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + 8\alpha_4, \alpha_2 + 5\alpha_3 + 5\alpha_4, 3\alpha_1 + 7\alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_3$.

解:

- (1) 线性相关; 因为 $(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+(\alpha_3+\alpha_4)-(\alpha_4+\alpha_1)=0$;
- (2) 线性无关;
- (3) 线性无关;
- (4) 线性无关。

5. 证明: 若向量组 I 能线性表出向量组 II, 且 $\mathrm{rank}(\mathrm{I})=\mathrm{rank}(\mathrm{II})$, 则向量组 II 也能表出向量组 I.

证明. 取向量组 I 的极大无关组 $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$, 则向量组 II 中也存在极大无关组 $\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$.

因为向量组 I 能线性表出向量组 II, 所以

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{r}c_{ij}\alpha_j, i=1,\ldots,r.$$

由于 $\{\beta_1,\ldots,\beta_r\}$ 线性无关, 所以矩阵 $C=(c_{ij})_{r\times r}$ 可逆.

因此, 我们可以得到

$$\alpha_j=\sum_{i=1}^{r}d_{ji}\beta_i, j=1,\ldots,r$$

这里 $D=(d_{ji})_{r\times r}=C^{-1}$.

由此可知, 向量组 II 能线性表出向量组 I.

□

6. 设向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 能线性表出 $\beta_1,\ldots,\beta_s$, 并且有 $\beta_i=b_{i1}\alpha_1+\cdots+b_{ir}\alpha_r,\forall i=1,2,\ldots,s$. 证明若矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times r}$ 列向量组线性无关, 则 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 也能线性表出 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$.

证明. 由于矩阵 B 的列向量组线性无关, 所以 $r\le s$. 只需证明存在矩阵 $C=(c_{jk})_{r\times s}$ 使得

$$CB=I_r$$

这里 I_r 为 r 阶单位矩阵.

因为矩阵 B 的列向量组线性无关, 所以 $\mathrm{rank}(B)=r$, 因此可将其化为:

$$B=PB'=\begin{pmatrix}I_r\\O\end{pmatrix}$$

则我们只需取矩阵 $C = C'P^{-1}$ 即可. 其中

$$C' = \begin{pmatrix} I_r & O \end{pmatrix}$$

□

7. 若矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|, \forall 1 \leq i \leq n$, 则称 A 是主对角占优矩阵. 证明主对角占优矩阵满秩.

证明.
- 证法 (1): 我们可以通过初等行变换将其化为 I_n，此处不再赘述。
- 证法 (2): 反证法. 假设 $\mathrm{rank}(A) < n$, 则存在非零向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 使得 $AX = 0$. 设 $|x_k| = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\} > 0$, 则由 $AX = 0$ 可得:

$$a_{kk}x_k + \sum_{j\neq k} a_{kj}x_j = 0$$

然而

$$|a_{kk}x_k| > |a_{kk}||x_j| \geq \sum_{j\neq k} |a_{kj}||x_j|$$

矛盾.

□

8. 证明秩等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$ 和秩不等式 $\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$.

证明. 详见作业 □

9. 已知矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩, 求两直线 $\dfrac{x-a_3}{a_1-a_2} = \dfrac{y-b_3}{b_1-b_2} = \dfrac{z-c_3}{c_1-c_2}$ 与 $\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3} = \dfrac{y-b_1}{b_2-b_3} = \dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 的位置关系.

解： 设直线 L_1 和 L_2 的方向向量分别为 $\mathbf{d_1} = (a_1-a_2, b_1-b_2, c_1-c_2)$ 和 $\mathbf{d_2} = (a_2-a_3, b_2-b_3, c_2-c_3)$。由于矩阵 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ 满秩,说明向量组 $\{(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)\}$ 线性无关。因此，方向向量 $\mathbf{d_1}$ 和 $\mathbf{d_2}$ 也线性无关，说明直线 L_1 和 L_2 不平行。

接下来，我们需要判断直线 L_1 和 L_2 是否相交。设直线 L_1 上的一点为 $P_1 = (a_3+t(a_1-a_2), b_3+t(b_1-b_2), c_3+t(c_1-c_2))$，直线 L_2 上的一点为 $P_2 = (a_1 + s(a_2-a_3), b_1+s(b_2-b_3), c_1+s(c_2-c_3))$，其中 $t, s \in \mathbb{R}$。我们需要解方程组：

$$\begin{cases} a_3+t(a_1-a_2) = a_1+s(a_2-a_3), \\ b_3+t(b_1-b_2) = b_1+s(b_2-b_3), \\ c_3+t(c_1-c_2) = c_1+s(c_2-c_3). \end{cases}$$

不难发现 $t=-1, s=1$ 是该方程组的解，因此直线 L_1 和 L_2 相交。

10. 设 $W = \{f(x)|f(1)=0, f(x) \in \mathbb{R}[x]_n\}$, 这里 $\mathbb{R}[x]_n$ 表示实数域 $\mathbb{R}$ 上的次数小于 n 的多项式添上零多项式构成的线性空间. (1) 证明 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间; (2) 求 W 的维数和一组基.

解：

- (1) 显然 $W \subseteq \mathbb{R}[x]_n$, 对任意 $f(x), g(x) \in W$ 和任意标量 $a, b \in \mathbb{R}$, 有

  $$(af+bg)(1) = af(1)+bg(1) = 0,$$

  因此 $af+bg \in W$, 故 W 是 $\mathbb{R}[x]_n$ 的线性子空间.

- (2) 设 $f(x) \in W$, 则 $f(1)=0$, 即

  $$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n = 0.$$

  因此, 我们可以将 a_0 表示为 $a_0 = -(a_1+a_2+\cdots+a_n)$. 所以, 多项式 $f(x)$ 可表示为

  $$f(x) = a_1(x-1)+a_2(x^2-1)+\cdots+a_n(x^n-1).$$

  且显然其线性无关，因此, W 的一组基为

  $$\{x-1, x^2-1, \ldots, x^n-1\}.$$

11. 证明: 若数域 K 上的 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的主对角元 a_{ii} 均不为零, 则存在向量 X 使得 AX 的每个分量都不为零.

证明. 首先考虑

$$AX=\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{(k-1)j}x_j\\ 0\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{(k+1)j}x_j\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{k-1}\\ 0\\ y_{k+1}\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

我们将 $x_k\to x_k+t$，则

$$AX=\begin{pmatrix}y_1+a_{1k}t\\ y_2+a_{2k}t\\ \vdots\\ y_{k-1}+a_{(k-1)k}t\\ a_{kk}t\\ y_{k+1}+a_{(k+1)k}t\\ \vdots\\ y_n+a_{nk}t\end{pmatrix}$$

不难发现，当 t 充分大时，AX 的每个分量都不为零.

$\square$