高代第九次作业

2025 年 11 月 20 日

11.13 日作业

p157.7

设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

令

$$\mathcal{A}(\alpha) = A\alpha, \forall \alpha \in \mathbb{K}^4$$

- (1) 求 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的维数和一组基；
- (2) 求 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的维数和一组基；

解： (1)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

化为行最简形得

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以 $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ 的维数为 2，一组基为

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

(2) 由上面的行最简形可得 $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$ 的维数为 2，一组基为

$$\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

作业 1

证明：设 $\phi : V \to W$ 为线性映射，在给定基下其表示矩阵为 A, 则 ϕ^{-1} 的表示矩阵为 A^{-1}。

证明. 设 V 和 W 为 n 维向量空间，$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ 和 $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_n\}$ 分别为 V 和 W 的有序基。

已知 $\phi : V \to W$ 为线性同构，且其在基 $\mathcal{B}$ 与 $\mathcal{C}$ 下的表示矩阵为 A。根据线性映射矩阵表示的定义，对于任意向量 $x \in V$，坐标向量满足：

$$[\phi(x)]_{\mathcal{C}} = A[x]_{\mathcal{B}} \tag{1}$$

由于 ϕ 是可逆的，对于任意 $y \in W$，存在唯一的 $x \in V$ 使得 $x = \phi^{-1}(y)$。将 $x = \phi^{-1}(y)$ 和 $\phi(x) = y$ 代入方程 (1)，我们得到：

$$[y]_{\mathcal{C}} = A[\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}}$$

因为 ϕ 是同构，故 A 为可逆方阵。在等式两边左乘 A^{-1}：

$$\begin{aligned} A^{-1}[y]_{\mathcal{C}} &= A^{-1}\left(A[\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}}\right) \\ A^{-1}[y]_{\mathcal{C}} &= (A^{-1}A)[\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}} \\ A^{-1}[y]_{\mathcal{C}} &= I[\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}} \\ [\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}} &= A^{-1}[y]_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

根据线性映射矩阵的定义，若对于任意 $y \in W$ 都有 $[\phi^{-1}(y)]_{\mathcal{B}} = B[y]_{\mathcal{C}}$，则 B 为 ϕ^{-1} 的表示矩阵。

由此可知，ϕ^{-1} 的表示矩阵是 A^{-1}。

□

作业 2

求 $\mathbf{E_{ij}}$ 的原像

解 由定义可知

$$\phi(e_k) = \begin{cases} \phi(e_k) = f_i \, k = j \\ \phi(e_k) = 0, \, k \neq j \end{cases}$$

其中

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$$

分别为 **V** 和 **W** 的基。

11.18 日作业

p164.2

判断下列两个矩阵是否相抵

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

解： 计算得到矩阵的秩分别为：

$$\text{rank}(A) = 2, \quad \text{rank}(B) = 2$$

由于两个矩阵的秩相等，故它们相抵。

p164.4

证明：任意一个秩为 r 的矩阵都可以表示成 r 个秩为 1 的矩阵之和。

证明. 设 A 为一个 $m \times n$ 的矩阵，且 $\text{rank}(A) = r$。考虑：

$$A = P \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q$$

注意到只需取 $A_i = PE_{ii}Q$，其中 E_{ii} 为 $m \times n$ 矩阵，其 (i, i) 元为 1，其余元为 0，则每个 A_i 的秩均为 1，且

$$A = \sum_{i=1}^{r} A_i$$

□

p164.5

设 A,B 分别为 $s\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵，证明：$\text{rank}(AB)\geq\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n$

证明. 由 **Frobenius** 不等式：

$$\text{rank}(AI_nB)\geq\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n$$

注意到 $AI_nB=AB$，所以

$$\text{rank}(AB)\geq\text{rank}(A)+\text{rank}(B)-n$$

□

p164.6

设 C 是 $s\times r$ 列满秩矩阵，D 是 $r\times m$ 行满秩矩阵，证明：$\text{rank}(CD)=r$

证明. 首先，

$$\text{rank}(CD)\geq\text{rank}(C)+\text{rank}(D)-r=r+r-r=r$$

另一方面有

$$\text{rank}(CD)\leq\min(\text{rank}(C),\text{rank}(D))=r$$

综上所述，$\text{rank}(CD)=r$。

□

作业 1

设 $A=P\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}Q$，证明

- (1) $Ax=0$ 的基础解系可取为

$$Q^{-1}\epsilon_{r+1},Q^{-1}\epsilon_{r+2},\dots,Q^{-1}\epsilon_n$$

- (2) 若 $Ax=\beta$ 有解, $\gamma=Q^{-1}\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P^{-1}\beta$，是其特解，并求出基础解系

证明. (1) 设 $y=Qx$，则 $Ax=0$ 等价于

$$\begin{pmatrix}I_r & O\\ O & O\end{pmatrix}y=0$$

即

$$y_1=0,y_2=0,\dots,y_r=0$$

其中 $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$，所以 $y_{r+1}, y_{r+2}, \ldots, y_n$ 为自由变量。取

则对应的基础解系为：

$$x = Q^{-1}\epsilon_{r+1}, Q^{-1}\epsilon_{r+2}, \ldots, Q^{-1}\epsilon_n$$

(2) 带入特解即可验证，由 (1) 可知其基础解系为

$$Q^{-1}\epsilon_{r+1}, Q^{-1}\epsilon_{r+2}, \ldots, Q^{-1}\epsilon_n$$

□