# 高代第八次作业

2025 年 11 月 11 日

## 11.6 日作业

### p144.13

设

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

其中 $A_{11}$ 分别是 $r$ 阶和 $s$ 阶方阵，证明：$A$ 可逆当且仅当 $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 均可逆，并且当 $A$ 可逆时，有

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

证明. 显然当 $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 均可逆时，我们做乘积

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

因此 $A$ 可逆。

假设 $A_{11}$ 不可逆，则存在非零列向量 $x$ 使得 $A_{11}x = 0$，则

$$A \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11}x + A_{12} \cdot 0 & \\ 0 & A_{22} \cdot 0 \end{pmatrix} = 0$$

因此 $A$ 不可逆。同理可证 $A_{22}$ 不可逆时 $A$ 也不可逆。综上所述，$A$ 可逆当且仅当 $A_{11}$ 和 $A_{22}$ 均可逆。

□

### p144.14

设

$$B = \begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix}$$

其中 $B_1, B_2$ 分别是 $r$ 阶和 $s$ 阶方阵，证明：$B$ 可逆当且仅当 $B_1$ 和 $B_2$ 均可逆，并且当 $B$ 可逆时，有

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} O & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & O \end{pmatrix}$$

证明. 显然当 $B_1$ 和 $B_2$ 均可逆时，我们做乘积

$$\begin{pmatrix} O & B_1 \\ B_2 & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} O & B_2^{-1} \\ B_1^{-1} & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

因此 $B$ 可逆。

假设 $B_1$ 不可逆，则存在非零列向量 $x$ 使得 $B_1 x = 0$，则

$$B \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 x \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

因此 $B$ 不可逆。同理可证 $B_2$ 不可逆时 $B$ 也不可逆。综上所述，$B$ 可逆当且仅当 $B_1$ 和 $B_2$ 均可逆。

□

## p144.15

设 $A, B, C, D$ 都是 $n$ 阶方阵，并且 $|A| \neq 0, AC = CA$，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A| \cdot |D - CA^{-1}B| = |AD - ACA^{-1}B| = |AD - CAA^{-1}B| = |AD - CB|$$

## p144.18

设 $A, B$ 分别是 $s \times n, n \times s$ 矩阵，证明：

$$|I_s - AB| = |I_n - BA|$$

证明. 考虑矩阵

$$M = \begin{pmatrix} I_s & -A \\ B & I_n \end{pmatrix}$$

则有

$$|M| = |I_s| \cdot |I_n - BA| = |I_n - BA|$$

同时，由降阶公式可得

$$|M| = |I_n| \cdot |I_s - AB| = |I_s - AB|$$

因此 $|I_s - AB| = |I_n - BA|$。

□

## 练习 1

设 $a_i \neq 0$，求行列式

- (1)

$$D=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 2+a_2 & 2 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n+a_n \end{vmatrix}$$

**解:**

$$D=\left|\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$=\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}\right|=\prod_{i=1}^{n} a_i(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{a_i})$$

- (2)

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

**解:**

$$D=\left|\begin{pmatrix} 2a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & 2a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}\right|$$

$$=(-1)^n\left|\begin{pmatrix} 2a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2a_n \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\right|$$

$$= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2a_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 1 & a_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & a_n \end{pmatrix} \right|$$

$$= (-2)^n \prod_{i=1}^{n} a_i \left| \begin{pmatrix} \frac{n}{2} - 1 & \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{2} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2a_i} & \frac{n}{2} - 1 \end{pmatrix} \right| = (-2)^{n-2} \prod_{i=1}^{n} a_i \left( (n-2)^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i)(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}) \right)$$

## 练习 2

证明：

$$|D| = |(a_{ij} + x) = |A| + x \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

证明.

$$|D| = \left| A + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \end{pmatrix} \right| = |A| \cdot \left| I_1 + \begin{pmatrix} x & x & \cdots & x \end{pmatrix} A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right|$$

and $A^{-1} = \frac{A^*}{|A|}$，因此

$$|D| = |A| \cdot \left( 1 + \frac{x}{|A|} \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij} \right) = |A| + x \cdot \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$

□

## p152.4

证明：实数域上的 $n$ 阶矩阵 $A$ 如果具有下列三个性质中的任意两个性质，则它具有第三个性质：

- (1) 正交矩阵；
- (2) 对称矩阵；
- (3) 对合矩阵。

证明.

- (2)(3)⇒(1)

$$A = A^T, A^2 = I \Rightarrow AA^T = A^2 = I$$

- (1)(3)⇒(2)

$$AA^T = I, A^2 = I \Rightarrow A = A^{-1} = A^T$$

- (1)(2)⇒(3)

$$AA^T = I, A = A^T \Rightarrow A^2 = I$$

□

## p152.5

证明: 如果正交矩阵 $A$ 是上三角矩阵，则 $A$ 一定是对角矩阵, 并且其主对角元为 $\pm 1$。

*证明.* 考虑第 $n$ 行，显然 $a_{nn} = \pm 1$，且 $a_{ni} = 0 (i = 1, 2, \cdots, n-1)$。假设第 $k+1, k+2, \cdots, n$ 行均满足该性质，考虑第 $k$ 行，有

$$a_{kk}^2 + a_{k,k+1}^2 + \cdots + a_{kn}^2 = 1$$

以及

$$a_{kk}a_{ik} + a_{k,k+1}a_{i,k+1} + \cdots + a_{kn}a_{in} = 0, i = k+1, k+2, \cdots, n$$

由归纳假设可知 $a_{i,k+1} = a_{i,k+2} = \cdots = a_{in} = 0$，因此 $a_{kk}a_{ik} = 0$，又因为 $A$ 是上三角矩阵，所以 $a_{ik} = 0$，因此 $a_{kk}^2 = 1$，即 $a_{kk} = \pm 1$。综上所述，$A$ 为对角矩阵，且主对角元为 $\pm 1$。

□

## p152.12

在 $\mathbb{R}^4$ 中，设向量组：

$$\alpha_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \alpha_{\mathbf{3}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

求与向量组 $\{\alpha_{\mathbf{1}}, \alpha_{\mathbf{2}}, \alpha_{\mathbf{3}}\}$ 等价的正交单位向量组。

**解：** 正交化：

$$\beta_{\mathbf{1}} = \alpha_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\beta_{\mathbf{2}}=\alpha_{\mathbf{2}}-\frac{\alpha_{\mathbf{2}}\cdot\beta_{\mathbf{1}}}{\beta_{\mathbf{1}}\cdot\beta_{\mathbf{1}}}\beta_{\mathbf{1}}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\beta_{\mathbf{3}}=\alpha_{\mathbf{3}}-\frac{\alpha_{\mathbf{3}}\cdot\beta_{\mathbf{1}}}{\beta_{\mathbf{1}}\cdot\beta_{\mathbf{1}}}\beta_{\mathbf{1}}-\frac{\alpha_{\mathbf{3}}\cdot\beta_{\mathbf{2}}}{\beta_{\mathbf{2}}\cdot\beta_{\mathbf{2}}}\beta_{\mathbf{2}}$$

计算得：

$$\beta_{\mathbf{3}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$$

归一化：

$$\mathbf{e_1}=\frac{\beta_{\mathbf{1}}}{||\beta_{\mathbf{1}}||}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{e_2}=\frac{\beta_{\mathbf{2}}}{||\beta_{\mathbf{2}}||}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}\\1\\0\end{pmatrix}\ \mathbf{e_3}=\frac{\beta_{\mathbf{3}}}{||\beta_{\mathbf{3}}||}=\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-\frac{1}{3}\\-1\end{pmatrix}$$

## p152.14

设 $A$ 是实数域上的 $n$ 阶可逆矩阵，证明：$A$ 可以分解成

$$A=TB$$

其中 $T$ 是正交矩阵，$B$ 是上三角矩阵，并且 $B$ 的主对角元均为正数，并证明该分解唯一。

证明. 设 $A$ 的列向量分别为 $\alpha_{\mathbf{1}},\alpha_{\mathbf{2}},\cdots,\alpha_{\mathbf{n}}$,对其进行正交化,得到正交向量组 $\beta_{\mathbf{1}},\beta_{\mathbf{2}},\cdots,\beta_{\mathbf{n}}$，并归一化得到正交单位向量组 $\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\cdots,\mathbf{e_n}$。则构成的矩阵

$$T=(\mathbf{e_1}\,\mathbf{e_2}\,\cdots\,\mathbf{e_n})$$

是正交矩阵。

设

$$B=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\0&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&b_{nn}\end{pmatrix}$$

其中 $b_{ii} > 0$，且

$$A = TB$$

则有

$$A = (\mathbf{e_1}\,\mathbf{e_2}\,\cdots\,\mathbf{e_n})\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = (b_{11}\mathbf{e_1}, b_{12}\mathbf{e_1} + b_{22}\mathbf{e_2}, \cdots)$$

因此，$B$ 的各个元素可以通过解线性方程组得到，$B$ 的对角元均为正数, 且下证该分解唯一：

假设存在另一组 $T', B'$ 使得 $A = T'B'$，则有

$$T^{-1}T' = BB'^{-1}$$

左边为正交矩阵，右边为上三角矩阵，因此两者均为对角矩阵，设为 $D$，则有

$$T' = TD, B' = D^{-1}B$$

由于 $T'$ 的列向量为单位向量，因此 $D = I$，即 $T' = T, B' = B$。综上所述，该分解唯一。

□

## p152.15

确定所有的二阶正交矩阵

**解：** 设二阶正交矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

则有

$$AA^T = I \Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \end{cases}$$

解得

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad 或 \quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

其中 $\theta \in \mathbb{R}$。

## p156.1

判别下列对应法则是否为 $\mathbb{R}$ 到自身的映射，是否为单射，是否为满射

- (1) $y = x^3$

  **解：** 是映射，单射，满射。

- (2) $y = x^2$

  **解：** 是映射，非单射，非满射。

- (3) $y = e^x$

  **解：** 是映射，单射，非满射。

- (4) $y = \ln x$

  **解：** 非映射。

- (5) $y = \sin x$

  **解：** 是映射，非单射，非满射。