# 高代第一次作业

2025 年 9 月 16 日

## 9.9 日作业

### 问题一：投资问题

一个投资者想把 1 万元投给 3 个企业 $A_1, A_2, A_3$, 所得的利润率分别是 12%, 15%, 22%. 他想得到 2000 元的利润。

设投资给企业 $A_1, A_2, A_3$ 的金额分别为 $x_1, x_2, x_3$ (单位: 万元). 根据题意, 我们可以建立如下方程:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$
$$0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22x_3 = 0.2$$

#### 1. 如果投资给 $A_2$ 的钱是 $A_1$ 的 2 倍

根据条件, $x_2 = 2x_1$. 将此关系代入上述方程组:

$$x_1 + 2x_1 + x_3 = 1$$
$$0.12x_1 + 0.15(2x_1) + 0.22x_3 = 0.2$$

简化方程组:

$$3x_1 + x_3 = 1$$
$$0.42x_1 + 0.22x_3 = 0.2$$

从第一个方程, 我们得到 $x_3 = 1 - 3x_1$. 将其代入第二个方程:

$$\begin{aligned} 0.42x_1 + 0.22(1 - 3x_1) &= 0.2 \\ 0.42x_1 + 0.22 - 0.66x_1 &= 0.2 \\ -0.24x_1 &= -0.02 \\ x_1 &= \frac{-0.02}{-0.24} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

然后, 我们计算 $x_2$ 和 $x_3$:

$$x_2 = 2x_1 = 2 \cdot \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$
$$x_3 = 1 - 3x_1 = 1 - 3 \cdot \frac{1}{12} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

所以, 投资给 $A_1, A_2, A_3$ 的金额分别为 $\frac{1}{12}$ 万元, $\frac{1}{6}$ 万元, $\frac{3}{4}$ 万元.

**2. 可不可以使投资给 $A_3$ 的钱等于投给 $A_1$ 与 $A_2$ 的钱的和?**

根据条件, $x_3 = x_1 + x_2$. 将其代入总投资方程:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + (x_1 + x_2) &= 1 \\ 2(x_1 + x_2) &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 0.5 \end{aligned}$$

我们将 $x_3 = x_1 + x_2$ 和 $x_1 + x_2 = 0.5$ 代入总利润方程:

$$\begin{aligned} 0.12x_1 + 0.15x_2 + 0.22(x_1 + x_2) &= 0.2 \\ 0.34x_1 + 0.37x_2 &= 0.2 \end{aligned}$$

我们得到了新的二元方程组:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0.5 \\ 0.34x_1 + 0.37x_2 &= 0.2 \end{aligned}$$

从第一个方程, $x_2 = 0.5 - x_1$. 代入第二个方程:

$$\begin{aligned} 0.34x_1 + 0.37(0.5 - x_1) &= 0.2 \\ 0.34x_1 + 0.185 - 0.37x_1 &= 0.2 \\ -0.03x_1 &= 0.015 \\ x_1 &= -0.5 \end{aligned}$$

由于投资金额不能为负, 故此种情况不可行.

## 问题二：解线性方程组

### 1. 解方程组 (2)

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 7 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_3 = -8 \\ -x_1 - 4x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$$

我们构造增广矩阵并进行初等行变换:

$$
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 2 & 5 & 5 & | & 7 \\ 3 & 7 & 1 & | & -8 \\ -1 & -4 & 1 & | & 10 \end{pmatrix}
\xrightarrow[R_4+R_1]{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-3R_1}}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & -2 & -5 & | & -11 \\ 0 & -1 & 3 & | & 11 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3-2R_2}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & -7 & | & -21 \\ 0 & 0 & 2 & | & 6 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow[\frac{1}{2}R_4]{-\frac{1}{7}R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}
$$

$$
\xrightarrow{R_4-R_3}
\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}
$$

从阶梯形矩阵, 我们得到:

$$
\begin{aligned}
x_3 &= 3 \\
-x_2 + x_3 = 5 &\implies -x_2 + 3 = 5 \implies x_2 = -2 \\
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 &\implies x_1 + 3(-2) + 2(3) = 1 \implies x_1 = 1
\end{aligned}
$$

因此, 方程组的唯一解为 $(x_1, x_2, x_3) = (1, -2, 3)$.

## 2. 解方程组 3(1) 和 3(2)

### 方程组 3(1):

$$
\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -2 \end{cases}
$$

其增广矩阵为:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \end{array}\right)$$

该方程组无解.

**方程组 3(2):**

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 5 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11 \end{cases}$$

其增广矩阵为:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \\ -3 & 1 & 2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & -28 \\ 0 & -7 & 7 & 7 & 28 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & -2 & 3 & 1 & 11 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & -28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

由于最后一行全为零, 故方程组有无穷多解. 我们可以将 $x_3$ 和 $x_4$ 设为自由变量. 从第二行, $7x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -28 \implies x_2 = x_3 + x_4 - 4$. 从第一行, $-x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 11$. 将 $x_2$ 的表达式代入:

$$\begin{aligned} -x_1 - 2(x_3 + x_4 - 4) + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ -x_1 - 2x_3 - 2x_4 + 8 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 8 &= 11 \\ x_1 &= x_3 - x_4 - 3 \end{aligned}$$

令 $x_3 = c_1, x_4 = c_2$ ($c_1, c_2$ 为任意实数), 则通解为:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 - c_2 - 3 \\ x_2 = c_1 + c_2 - 4 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$$

# 9.11 日作业

## 问题 2

$a$ 为何值时，下述线性方程组有唯一解？$a$ 为何值时，此方程组无解？

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - ax_3 = 9 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases}$$

### 解答

我们对该方程组的增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 1 & 2 & -a & | & 9 \\ 2 & -1 & 3 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & | & 6 \\ 0 & -3 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_3+3R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1+3(-a-1) & | & 0+3(6) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 1 & -a-1 & | & 6 \\ 0 & 0 & -3a-2 & | & 18 \end{pmatrix}$$

1. **有唯一解的情况：**

   当系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩等于未知数的个数 (3) 时，方程组有唯一解。这要求 $-3a-2 \neq 0$。

   $$-3a - 2 \neq 0 \implies -3a \neq 2 \implies a \neq -\frac{2}{3}$$

   因此，当 $a \neq -\frac{2}{3}$ 时，方程组有唯一解。

2. **无解的情况：**

   当系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩时，方程组无解。这要求系数矩阵的最后一行全为 0，而增广矩阵的最后一行常数项不为 0。即 $-3a-2=0$，此时增广矩阵的最后一行为 $(0,0,0,|,18)$。

   $$-3a-2=0 \implies a=-\frac{2}{3}$$

   当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，方程 $0=18$ 不成立，故方程组无解。

## 问题 5

当 $c$ 与 $d$ 取什么值时，下述线性方程组有解？当有解时，求它的所有解。

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=c \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=d \end{cases}$$

### 解答

我们对增广矩阵进行初等行变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & | & c \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & | & d \end{pmatrix} \xrightarrow[R_4-5R_1]{R_2-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & c-3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & d-5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-R_2]{R_3+R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & c-3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & d-c-2 \end{pmatrix}$$

1. **有解的条件：**

   为了使方程组有解（即相容），增广矩阵中形如 $(0,0,\ldots,0,|,k)$ 的行必须满足 $k=0$。因此，我们得到以下条件：

   $$\begin{cases} c=0 \\ d-c-2=0 \end{cases}$$

   将 $c=0$ 代入第二个方程，得 $d-0-2=0 \implies d=2$。所以，当 $c=0$ 且 $d=2$ 时，方程组有解。

2. **求所有解：**

当 $c=0$ 且 $d=2$ 时，增广矩阵化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 & | & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

进一步化为行最简形矩阵：

$$\xrightarrow{-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 & | & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

主元变量为 $x_1, x_2$，自由变量为 $x_3, x_4, x_5$。令 $x_3 = k_1, x_4 = k_2, x_5 = k_3$（其中 $k_1, k_2, k_3$ 为任意常数）。则方程组的通解为：

$$x_1 = -2 + k_1 + k_2 + 5k_3$$
$$x_2 = 3 - 2k_1 - 2k_2 - 6k_3$$

用向量形式表示为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_3 \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

## 问题 7 (1)

判断下列齐次线性方程组有无非零解？若有非零解，求出它的一般解。

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 + 15x_2 - 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

**解答**

这是一个齐次线性方程组，我们对其系数矩阵 $A$ 进行高斯消元：

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ -1 & 7 & -4 & 3 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} -1 & 7 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 1 & -2 \\ 4 & 15 & -7 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4+4R_1]{\substack{-R_1 \\ R_2+2R_1 \\ R_3+3R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & 17 & -13 & 7 \\ 0 & 16 & -11 & 7 \\ 0 & 43 & -23 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-R_3} \begin{pmatrix} 1 & -7 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 16 & -11 & 7 \\ 0 & 43 & -23 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+7R_2 \\ R_3-16R_2 \\ R_4-43R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 21 & 7 \\ 0 & 0 & 63 & 21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{\frac{1}{7}R_3 \\ R_4-3R_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

系数矩阵的秩 $r(A) = 3$，未知数的个数 $n = 4$。因为 $r(A) < n$，所以该齐次线性方程组有非零解。

由行阶梯形矩阵，可得等价方程组：

$$\begin{cases} x_1 - 10x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

令自由变量 $x_3 = k$（$k$ 为任意常数）。由第三个方程得 $x_4 = -3x_3 = -3k$。由第二个方程得 $x_2 = 2x_3 = 2k$。由第一个方程得 $x_1 = 10x_3 + 3x_4 = 10k + 3(-3k) = k$。

因此，方程组的一般解为：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

其中 $k$ 为任意常数。

### 习题 1.3（1）

令 $Q(\mathbf{i})=\{a+b\mathbf{i}|a,b\in Q\}$，其中 $\mathbf{i}$ 为虚数单位，试证明 $Q(\mathbf{i})$ 是一个数域。

#### 解答

证明. 显然，$0,1$ 属于 $Q(\mathbf{i})$，且 $0\neq 1$。下面我们验证 $Q(\mathbf{i})$ 在加法、减法、乘法和除法下的封闭性。

- **加法/减法封闭性**：对于任意的 $a_1+b_1\mathbf{i},a_2+b_2\mathbf{i}\in Q(\mathbf{i})$，有

  $$(a_1+b_1\mathbf{i})+(a_2+b_2\mathbf{i})=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathbf{i}\in Q(\mathbf{i})$$

  因为 $a_1+a_2,b_1+b_2\in Q$。加法/减法的封闭性得证。

- **乘法封闭性**：对于任意的 $a_1+b_1\mathbf{i},a_2+b_2\mathbf{i}\in Q(\mathbf{i})$，有

  $$(a_1+b_1\mathbf{i})(a_2+b_2\mathbf{i})=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathbf{i}\in Q(\mathbf{i})$$

  因为 $a_1a_2-b_1b_2,a_1b_2+a_2b_1\in Q$。乘法封闭性得证。

- **除法封闭性**：对于任意的 $a_1+b_1\mathbf{i},a_2+b_2\mathbf{i}\in Q(\mathbf{i})$ 且 $a_2+b_2\mathbf{i}\neq 0$，有

  $$\frac{a_1+b_1\mathbf{i}}{a_2+b_2\mathbf{i}}=\frac{(a_1+b_1\mathbf{i})(a_2-b_2\mathbf{i})}{(a_2+b_2\mathbf{i})(a_2-b_2\mathbf{i})}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)\mathbf{i}}{a_2^2+b_2^2}\in Q(\mathbf{i})$$

  因为 $a_1a_2+b_1b_2,b_1a_2-a_1b_2,a_2^2+b_2^2\in Q$ 且 $a_2^2+b_2^2\neq 0$。除法封闭性得证。

综上所述，$Q(\mathbf{i})$ 满足数域的所有性质，因此 $Q(\mathbf{i})$ 是一个数域。

$\square$

## 9.16 日作业

### 问题 3（2）

在 $K^4$ 中，判断向量 $\beta$ 能否由向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表出。若能，写出它的一种表示方式。

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\7\\1\\3\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}3\\-5\\0\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}-5\\-6\\3\\-1\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}-8\\-3\\7\\-10\end{pmatrix}.$$

**解答**

我们需要判断是否存在 $x_1, x_2, x_3$ 使得

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$$

等价于解以下方程组：

$$\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -8 \\ 7x_1 - 5x_2 - 6x_3 = -3 \\ x_1 + 0x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = -10 \end{cases}$$

我们构造增广矩阵并进行变换：

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -5 & | & -8 \\ 7 & -5 & -6 & | & -3 \\ 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 3 & -2 & -1 & | & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 7 & -5 & -6 & | & -3 \\ -2 & 3 & -5 & | & -8 \\ 3 & -2 & -1 & | & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[R_4-3R_1]{\substack{R_2-7R_1 \\ R_3+2R_1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & -5 & -27 & | & -52 \\ 0 & 3 & 1 & | & 6 \\ 0 & -2 & -10 & | & -31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3,\text{ then } R_2+R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -25 & | & -40 \\ 0 & -5 & -27 & | & -52 \\ 0 & -2 & -10 & | & -31 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3+5R_2 \\ R_4+2R_2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -25 & | & -40 \\ 0 & 0 & -152 & | & -252 \\ 0 & 0 & -60 & | & -111 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3\div(-4) \\ R_4\div(-3)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -25 & | & -40 \\ 0 & 0 & 38 & | & 63 \\ 0 & 0 & 20 & | & 37 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{19R_4-10R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & -25 & | & -40 \\ 0 & 0 & 38 & | & 63 \\ 0 & 0 & 0 & | & 73 \end{pmatrix}$$

方程组无解。因此，$\beta$ 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出。

## 问题 5

在 $K^4$ 中，设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

证明：对于任意向量

$$\alpha = \begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\\a_4\end{pmatrix} \in K^4,$$

可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，且表示方法唯一，写出这种表达方式。

### 解答

证明. 设 $\alpha$ 的某种线性表示为

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4$$

我们构造增广矩阵：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & | & a_1\\0 & 1 & 1 & 1 & | & a_2\\0 & 0 & 1 & 1 & | & a_3\\0 & 0 & 0 & 1 & | & a_4\end{pmatrix}$$

变换得：

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\xrightarrow{R_2-R_3}\xrightarrow{R_3-R_4}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & | & a_1-a_2\\0 & 1 & 0 & 0 & | & a_2-a_3\\0 & 0 & 1 & 0 & | & a_3-a_4\\0 & 0 & 0 & 1 & | & a_4\end{pmatrix}$$

我们解得，

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3-a_4\\a_4\end{pmatrix}$$

因此，任意向量 $\alpha$ 都可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出，且表示方法唯一。

即:

$$\alpha = (a_1-a_2)\alpha_1 + (a_2-a_3)\alpha_2 + (a_3-a_4)\alpha_3 + a_4\alpha_4$$

□

## 问题 8

设 $r < n$, 证明 $K^n$ 的下述子集 $W$ 是 $K^n$ 的一个子空间:

$$W = \left\{ \left(a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0\right)^\top \,\middle|\, a_i \in K,\ i = 1, 2, \ldots, r \right\}.$$

### 解答

证明. 显然 $W$ 非空, 我们任取 $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)^\top$ 和 $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_r, 0, \ldots, 0)^\top$ 属于 $W$，以及任意标量 $c \in K$，我们验证以下三个条件：

- **加法封闭性**：$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_r + b_r, 0, \ldots, 0)^\top$，显然属于 $W$。
- **数乘封闭性**：$c\alpha = (ca_1, ca_2, \ldots, ca_r, 0, \ldots, 0)^\top$，显然属于 $W$。

综上所述，$W$ 满足子空间的所有条件，因此 $W$ 是 $K^n$ 的一个子空间。

□