高代第五次作业

2025 年 10 月 23 日

10.16 日作业

p34.2(2)

计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}$$

解: 将所有列都加到最后一列，得

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_1+a_2+\cdots+a_n-b \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_1+a_2+\cdots+a_n-b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_1+a_2+\cdots+a_n-b \end{vmatrix}$$

提取最后一列公因子，得

$$\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2-b & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot (a_1+a_2+\cdots+a_n-b)$$

再将前 $n-1$ 行都减去第 n 行，得

$$\begin{vmatrix} -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} \cdot (a_1+a_2+\cdots+a_n-b) = (-b)^{n-1}(a_1+a_2+\cdots+a_n-b).$$

p34.4(3)

计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 & x_3-a_3 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix} \text{其中,} a_i \neq 0, i=1,2,\ldots,n.$$

解: 所有行都减去第一行得：

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ a_1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

将第 k 列乘上 $\dfrac{a_1}{a_k}$ 加到第一列 $(k=2,3,\ldots,n)$ 得：

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1+a_1\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{x_k}{a_k} & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}a_2a_3\cdots a_n\left(x_1-a_1+a_1\sum_{k=2}^{n}\frac{x_k}{a_k}\right).$$

p42.(4)

计算下列行列式，并且把得到的 λ 的多项式因式分解:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

解: 设行列式为 D。我们将第一行 R_1 减去第二行 R_2 $(R_1 \to R_1-R_2)$，行列式的值不变。

$$D=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (\lambda-2)-(-1) & -3-(\lambda-8) & -2-(-2) \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 5-\lambda & 0 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}$$

按第一行展开：

$$
\begin{aligned}
D &= (\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-8 & -2\\ 14 & \lambda+3\end{vmatrix} - (5-\lambda)\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & \lambda+3\end{vmatrix} + 0\\
&= (\lambda-1)[(\lambda-8)(\lambda+3)-(-2)(14)] - (5-\lambda)[(-1)(\lambda+3)-(-2)(2)]\\
&= (\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda-24+28] - (5-\lambda)[-\lambda-3+4]\\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-5\lambda+4) - (5-\lambda)(1-\lambda)\\
&= (\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda-4) + (5-\lambda)(\lambda-1)
\end{aligned}
$$

提取公因式 $(\lambda-1)$：

$$
\begin{aligned}
D &= (\lambda-1)[(\lambda-1)(\lambda-4)+(5-\lambda)]\\
&= (\lambda-1)[\lambda^2-5\lambda+4+5-\lambda]\\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9)\\
&= (\lambda-1)(\lambda-3)^2
\end{aligned}
$$

p42.4

计算下列行列式：

$$
\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_0\\
-1 & x & 0 & \cdots & 0 & a_1\\
0 & -1 & x & \cdots & 0 & a_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & x & a_{n-2}\\
0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_{n-1}
\end{vmatrix}
$$

解: 以最后一行展开行列式，得

$$
D_n = (x+a_{n-1})\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-1 & x & 0 & \cdots & 0\\
0 & -1 & x & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & x
\end{vmatrix} + (-1)^{n+1}(-1)\begin{vmatrix}
x & 0 & 0 & \cdots & a_0\\
-1 & x & 0 & \cdots & a_1\\
0 & -1 & x & \cdots & a_2\\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}
\end{vmatrix}
$$

注意到第一个行列式为上三角行列式，值为 x^{n-1}，对于第二个行列式，我们考虑从第一行开始，依次用每一行的前一行乘以 $\dfrac{1}{x}$ 加到该行，直到最后一行，得到

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & a_0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & a_1+\dfrac{a_0}{x} \\ 0 & 0 & x & \cdots & a_2+\dfrac{a_1}{x}+\dfrac{a_0}{x^2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2}+\dfrac{a_{n-3}}{x}+\cdots+\dfrac{a_0}{x^{n-2}} \end{vmatrix}$$

因此原行列式值为

$$D_n=(x+a_{n-1})x^{n-1}+(-1)^{2n+1}(-1)x^{n-2}\left(a_{n-2}+\frac{a_{n-3}}{x}+\cdots+\frac{a_0}{x^{n-2}}\right)$$

化简得到

$$D_n=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+\cdots+a_1x+a_0$$

p42.6

计算下列行列式：

$$D_n=\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix}$$

解: 我们考虑将第 i 行乘以 $-\dfrac{i}{(i+1)a}$ 加到第 $(i+1)$ 行，得到

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{3}{2}a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{4}{3}a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{5}{4}a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \dfrac{n}{n-1}a & a^2 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{n+1}{n}a & \end{vmatrix}$$

因此行列式值为

$$D_n=2a\cdot\frac{3}{2}a\cdot\frac{4}{3}a\cdots\frac{n}{n-1}a\cdot\frac{n+1}{n}a=(n+1)a^n.$$

p42.7

解方程：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0, \quad (a_i \neq a_j, i \neq j).$$

解: 注意到该行列式为 Vandermonde 行列式，解得

$$(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1}) = 0,$$

即

$$x = a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}.$$

为原方程的解。

p42.8

计算下列行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$

解: 我们提出第二行的公因数 2 得到

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & n \end{vmatrix}$$

考虑用第二行 -2 加到其他行，得到

$$2\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

最后用第二列展开行列式，得到

$$D = 2 \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 1 \cdots (n-3) \cdot (n-2) = -2(n-2)!$$

10.21 日作业

p54.3

计算下述行列式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}$$

解: 取前 r 列进行展开，得到

$$|D| = (-1)^{r(r+k+1)} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}$$

p54.4

设 $|A|$ 是关于 $1, 2, \ldots, n$ 的范德蒙行列式，计算：

$$(1) A \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ 2, 3, \ldots, n \end{pmatrix}; \quad (2) A \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n-1 \\ 1, 3, \ldots, n \end{pmatrix}$$

解： (1) 等价于计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 2 & 3 & \cdots & n \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2^{n-2} & 3^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \end{vmatrix}$$

注意到该行列式为 Vandermonde 行列式，解得

$$\prod_{2\le j<i\le n}(i-j)=\prod_{k=1}^{n-2}k!$$

(2) 等价于计算

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & \cdots & n \\ 1^2 & 3^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1^{n-2} & 3^{n-2} & \cdots & n^{n-2} \end{vmatrix}$$

注意到该行列式为 Vandermonde 行列式，解得

$$\prod_{\substack{1\le j<i\le n\\ j,i\ne 2}}(i-j)=(n-1)!\prod_{k=1}^{n-3}k!$$

p49.2

2. 判断下述线性方程组有无解, 有多少解.

$$\begin{cases} a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b_1, \\ a_1^3x_1+a_2^3x_2+\cdots+a_n^3x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1^{n+1}x_1+a_2^{n+1}x_2+\cdots+a_n^{n+1}x_n=b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1,a_2,\dots,a_n$ 是两两不同的非零数.

解： 使用克莱姆法则，系数行列式为

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & \cdots & a_n^3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & \cdots & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$$

该行列式可通过提取每列的公因子 a_j^2 得到

$$= a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

注意到该行列式为 Vandermonde 行列式，解得

$$= a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j) \neq 0$$

因此该线性方程组有唯一解。

p49.3

3. 当 λ 取什么值时, 下述齐次线性方程组有非零解?

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0, \\ -x_1 + (\lambda-8)x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 14x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0. \end{cases}$$

解： 由p42.(4)可知，系数行列式为

$$(\lambda-1)(\lambda-3)^2.$$

因此当 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 3$ 时，线性方程组有非零解。

p49.7

讨论下述线性方程组何时有唯一解, 有无穷多个解, 无解.

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1. \end{cases}$$

解： 系数行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 2b & 1 \end{vmatrix} = a(b-2b) + (2b-b) = -ab + b = b(1-a).$$

当 $|A|\neq 0$，即 $a\neq 1$ 且 $b\neq 0$ 时，线性方程组有唯一解。当 $|A|=0$，即 $a=1$ 或 $b=0$ 时，考虑增广矩阵

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & b & 1 & | & 1 \\ 1 & 2b & 1 & | & 1 \end{vmatrix}$$

- 当 $a=1$ 时，增广矩阵化简为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & | & -1 \end{vmatrix}$$

  若 $b\neq 0$, 无解；若 $b=0$，有无穷多个解。

- 当 $b=0$ 时，增广矩阵化简为

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & | & 2 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 1 \end{vmatrix}$$

  若 $a\neq 1$，无解；若 $a=1$，有无穷多个解。

综上所述：

- 唯一解：$a\neq 1$ 且 $b\neq 0$；
- 无解：$a=1$ 且 $b\neq 0$；
- 无穷多解：其他情况。

p44.12(1)

用第 11 题给出的计算 $|A(t)|$ 的公式, 计算下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix};$$

解： 观察到 $A_{ij}=C|D|$,C 为一常数，$\boldsymbol{D}$ 为一个全一行列式，因此根据第 11 题的结论可知

- $(n \geq 4)$ 时：

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \cdots & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \cdots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij} = 0$$

因此行列式值为 0。

- $(n = 3)$ 时：

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & 1+x_2y_3 \\ 1+x_3y_1 & 1+x_3y_2 & 1+x_3y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & 1+x_1y_3 \\ y_1(x_2-x_1) & y_2(x_2-x_1) & y_3(x_2-x_1) \\ y_1(x_3-x_1) & y_2(x_3-x_1) & y_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} = 0$$

因此行列式值为 0。

- $(n = 2)$ 时：

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 = (x_1-x_2)(y_1-y_2)$$

因此行列式值为 $(x_1-x_2)(y_1-y_2)$。

- $(n = 1)$ 时：

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 \end{vmatrix} = 1 + x_1y_1$$

因此行列式值为 $1+x_1y_1$。

p76.8

证明: 数域 K 上的 n 个方程的 n 元线性方程组

$$x_1\boldsymbol{\alpha_1} + x_2\boldsymbol{\alpha_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{\alpha_n} = \boldsymbol{\beta}$$

对任何 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ 都有解的充分必要条件是它的系数行列式 $|A| \neq 0$.

证明. 此方程组等价于:

$$\begin{cases} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \cdots + x_na_{1n} = b_1, \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \cdots + x_na_{2n} = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1a_{n1} + x_2a_{n2} + \cdots + x_na_{nn} = b_n, \end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha_j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})^T, j = 1, 2, \ldots, n$，$\boldsymbol{\beta} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$.

- 充分性: 若 $|A| \neq 0$，则由克莱姆法则可知该线性方程组对任意 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ 都有唯一解。
- 必要性: 若该线性方程组对任意 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ 都有解，则我们可以知道 $\boldsymbol{\alpha_1}, \boldsymbol{\alpha_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha_n}$ 线性无关，则其行列式:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha_1} & \boldsymbol{\alpha_2} & \cdots & \boldsymbol{\alpha_n} \end{vmatrix}$$

□

p86.12

设 A 是 $s \times n$ 矩阵, B 是 $l \times m$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

证明. 设 $\operatorname{rank}(A) = r, \operatorname{rank}(B) = t$，则存在可逆矩阵 P, Q 使得

$$P_1AQ_1 = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_2BQ_2 = \begin{pmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = r + t = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

□

p86.13

设 A 是 $s \times n$ 矩阵, B 是 $l \times m$ 矩阵, C 是 $s \times m$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

证明. 设 $\operatorname{rank}(A) = r, \operatorname{rank}(B) = t$ 来自，取 A 的一个线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha_{j_1}, \alpha_{j_2}, \ldots, \alpha_{j_r}}$，$B$ 的一个线性无关组为 $\boldsymbol{\beta_{k_1}, \beta_{k_2}, \ldots, \beta_{k_t}}$，则考虑大矩阵中对应的列向量组

$$\mathbf{v}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_{j_i} \\ 0 \end{pmatrix}, i = 1, 2, \ldots, r; \quad \mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} \boldsymbol{c}_{k_j} \\ \boldsymbol{\beta}_{k_j} \end{pmatrix}, j = 1, 2, \ldots, t.$$

我们证明这 $r+t$ 个向量线性无关。设

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \mathbf{v}_i + \sum_{j=1}^{t} y_j \mathbf{u}_j = 0,$$

即

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j_i}} + \sum_{j=1}^{t} y_j \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{k_j}} \\ \sum_{j=1}^{t} y_j \boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{k_j}} \end{pmatrix} = 0.$$

当且仅当

$$x_i, y_j = 0, i = 1, 2, \ldots, r; j = 1, 2, \ldots, t.$$

由于 $\boldsymbol{\beta_{k_1}}$, $\boldsymbol{\beta_{k_2}}$, …, $\boldsymbol{\beta_{k_t}}$ 线性无关，因此 $y_j = 0, j = 1, 2, \ldots, t$。代入上式得

$$y_j = 0, j = 1, 2, \ldots, t$$

所以原方程等价于：

$$\sum_{i=1}^{r} x_i \boldsymbol{\alpha}_{\boldsymbol{j_i}} = 0.$$

又因为 $\boldsymbol{\alpha_{j_1}}$, $\boldsymbol{\alpha_{j_2}}$, …, $\boldsymbol{\alpha_{j_r}}$ 线性无关，因此 $x_i = 0, i = 1, 2, \ldots, r$。

$$x_i = 0, i = 1, 2, \ldots, r.$$

综上所述，这 $r+t$ 个向量线性无关，因此

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \geq r + t = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

$\square$