gcx 高代习题课讲义个人解答

2025 年 9 月 20 日

题目来源：`https://wqgcx.github.io/courses/advalgebra1(wfz).pdf`

目录

1 Gauss-Jordan 消元法 2

1 Gauss-Jordan 消元法

1. 是否存在二次函数
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
其图像经过下列四点：$A(1,2)$、$Q(-1,3)$、$M(-4,5)$、$N(0,2)$?

解： 该问题等价于：如下线性方程组是否有解
$$\begin{cases} a+b+c=2, \\ a-b+c=3, \\ 16a-4b+c=5, \\ c=2. \end{cases}$$
不难发现该方程组无解，因此不存在这样的二次函数。

2. 用 Gauss 消元法解下列方程组，并用向量表示其解的集合：
$$\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2-4x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

解：

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\1&3&0&-4&1\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-R_1\to R_3}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&5&-3&0&-3\\0&-7&3&1&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_3-5R_2\to R_3\\R_4+7R_2\to R_4}]{}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&-4&8&-24\end{pmatrix}\xrightarrow{R_4+2R_3\to R_4}\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&-2&3&-4&4\\0&1&-1&1&-3\\0&0&2&-5&12\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{R_3+5R_4\to R_3\\R_1+4R_4\to R_1\\R_2-R_4\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1&-2&3&0&4\\0&1&-1&0&-3\\0&0&2&0&12\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}R_3\to R_3\\R_1-3R_3\to R_1\\R_2+R_3\to R_2}]{}\begin{pmatrix}1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&3\\0&0&1&0&6\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-2,3,6,0).$$

3. 某食品厂有四种原料 A,B,C,D。能否用这四种原料配制含脂肪 5%、碳水化合物 12%、蛋白质 15% 的食品？

单位：%	A	B	C	D
脂肪	8	6	3	2
碳水化合物	5	25	10	15
蛋白质	15	5	20	10

解： 设配制该食品时，四种原料的用量分别为 x_1,x_2,x_3,x_4，则

$$\begin{cases}8x_1+6x_2+3x_3+2x_4=5(x_1+x_2+x_3+x_4),\\5x_1+25x_2+10x_3+15x_4=12(x_1+x_2+x_3+x_4),\\15x_1+5x_2+20x_3+10x_4=15(x_1+x_2+x_3+x_4).\end{cases}$$

化简得到：

$$\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3-3x_4=0, \\ -7x_1+13x_2-2x_3+3x_4=0, \\ -10x_2+5x_3-5x_4=0. \end{cases}$$

我们化简增广矩阵为最简阶梯形：

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & -3 & 0 \\ -7 & 13 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{经过一系列初等行变换后，得到行阶梯形矩阵：}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -15 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 35 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\div(-3)} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{R_1-6R_3 \\ R_2-R_3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 & 73 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1+15R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{16}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{35}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)=(7t,-\frac{16}{3}t,\frac{35}{3}t,t), \quad t\in\mathbb{R}.$$

我们可以发现，从现实角度出发，我们只能取 $x_2=x_4=0; x_1=7x_4; x_3=\frac{35}{3}x_4$，即只能用原料 A 和 C 来配制该食品。

4. a 为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1-4x_2+2x_3=-1, \\ -x_1+11x_2-x_3=3, \\ 3x_1-5x_2+7x_3=a \end{cases}$$

有解？若有解，求出其所有解。

解： 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-3R_1\to R_3]{R_2+R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 1 & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 $a=-1$ 时，该方程组有解。此时该方程组的解为

$$(x_1,x_2,x_3)=(2t-1,-\frac{1}{7}t,t),\quad t\in\mathbb{R}.$$

5. 解下述线性方程组：

$$\begin{cases} (1+a_1)x_1+x_2+\cdots+x_n=b_1, \\ x_1+(1+a_2)x_2+\cdots+x_n=b_2, \\ \quad\vdots \\ x_1+x_2+\cdots+(1+a_n)x_n=b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$，且 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\neq -1$。

解： 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & b_n \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\ldots,n]{R_i-R_1\to R_i} \begin{pmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & b_1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2-b_1 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3-b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n-b_1 \end{pmatrix}$$

继续化简得到：

$$\xrightarrow[i=2,3,\ldots,n]{R_1+\frac{1+a_1}{a_1}R_i\to R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n} \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2-b_1 \\ -a_1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3-b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n-b_1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[i=2,3,\ldots,n]{R_i+a_1R_1\to R_i} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{b_1}{a_1}+\frac{b_2}{a_2}+\cdots+\frac{b_n}{a_n} \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & b_2+\frac{a_2b_1}{a_1} \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & b_3+\frac{a_3b_1}{a_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & b_n+\frac{a_nb_1}{a_1} \end{pmatrix}$$

因此该方程组的解为

$$x_i=\frac{b_i}{a_i}+\frac{b_1}{a_1},\quad i=1,2,\ldots,n.$$

6.（1）求复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 2 & 2 & -2 \\ i & 1+i & -i \end{pmatrix}$$

的行最简阶梯型矩阵 $\mathrm{rref}(A)$；

（2）求齐次方程组 $AX = 0$ 在复数域上的解集；

（3）求齐次方程组 $AX = 0$ 在实数域上的解集；

（4）当 (y_1, y_2, y_3) 满足何种关系时，方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解？

解：

- **(1)** 化简得：

$$\xrightarrow[R_3-(i)R_1\to R_3]{R_2-2R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{i}{2+2i}R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -i & -1 \\ 0 & 2+2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_1+iR_2\to R_1]{\frac{1}{2+2i}R_2\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **(2)** 解得：

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t), \quad t \in \mathbb{C}.$$

- **(3)** 解得：

$$(x_1, x_2, x_3) = (t, 0, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- **(4)** 增广矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & y_1 \\ 2 & 2 & -2 & y_2 \\ i & 1+i & -i & y_3 \end{pmatrix}$$

  我们进行相同的化简操作得到：

$$\begin{pmatrix} 1 & -i & -1 & y_1 \\ 0 & 2+2i & 0 & y_2 - 2y_1 \\ 0 & 0 & 0 & y_3 - iy_1 - \frac{i}{2+2i}(y_2 - 2y_1) \end{pmatrix}$$

  因此当且仅当

$$y_3 - iy_1 - \frac{i}{2+2i}(y_2 - 2y_1) = 0$$

  时，方程组 $AX = (y_1, y_2, y_3)^T$ 有解。

7. 设 $\alpha_1 = (1, 1, 4)$，$\alpha_2 = (-2, 1, 5)$，$\alpha_3 = (a, 2, 10)$，$\beta = (1, b, -1)$。当 a, b 取何值时，β 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出？何时表示系数唯一？

解： 等价于解线性方程组如下：

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + ax_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = b, \\ 4x_1 + 5x_2 + 10x_3 = -1. \end{cases}$$

构建增广矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 2 & b \\ 4 & 5 & 10 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-4R_1\to R_3]{R_2-R_1\to R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b-1 \\ 0 & 13 & 10-4a & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{13}{3}R_2\to R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 0 & 3 & 2-a & b- \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}a-\frac{4}{3} & -\frac{2}{3}- \end{pmatrix}$$

因此当且仅当 $a \neq 4$ 时，方程组有唯一解；当 $a = 4$ 且 $b = -\frac{2}{13}$ 时，方程组有无穷多解。

8. 向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性无关，且 $\beta = \sum_{j=1}^{s} b_j\alpha_j$。若 $b_i \neq 0$，证明将 α_i 替换为 β 后的向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \beta, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_s$ 仍线性无关。

解：

证明. 注意到，对于更改后的向量组，考虑 $\alpha_p = \sum_{t=1(t\neq i,p)}^{s} c_t\alpha_t + \beta(p \neq i)$ 的情况，我们总能通过调整系数 c_t 来使得 β 的影响被消除，即 α_p 不能被其他向量线性表出，因此更改后的向量组仍线性无关。考虑 $\beta = \sum_{t=1(t\neq i)}^{s} c_t\alpha_t$ 的情况，显然，上式成立等价于向量组线性有关。因此，更改后的向量组仍线性无关。

□

9. 用向量运算的性质证明：若一组向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 线性表出向量 β 的方式是唯一的（或不唯一的），则凡能被该组向量表出的任一向量，其表出方式亦皆唯一（或不唯一）。

证明. 不难发现，若向量组线性表出向量 β 的方式是唯一的，则该向量组线性无关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是唯一的。若向量组线性表出向量 β 的方式是不唯一的，则该向量组线性相关。所以，对于任意向量 γ，若 γ 能被该向量组线性表出，则 γ 的表出方式也是不唯一的。（好像是废话） □

10. 求双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 上的所有直线。

解： 移项得

$$x^2 - z^2 = 1 - y^2$$

即

$$(x-z)(x+z) = (1-y)(1+y)$$

因此我们可以设

$$\begin{cases} x - z = t(1-y), \\ x + z = \frac{1}{t}(1+y), \end{cases} \qquad t \neq 0.$$

特别地，当 $y = \pm 1$ 时，$x = \pm z$.

11. 令 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为从有理数及 $\sqrt{3}$ 出发，经过有限次四则运算所得数的集合，称为 $\sqrt{3}$ 生成的数域。证明：

（1）$\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$；

（2）$\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 中每个数可唯一写成 $a + b\sqrt{3}$，其中 $a, b \in \mathbb{Q}$。

证明.

- **(1)** 首先证明 $\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \} \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt{3})$，显然成立。

  其次证明 $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$。

  我们只需要证明 $\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ 对四则运算封闭即可。因为 $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ 为最小的包含有理数及 $\sqrt{3}$ 的数域，所以我们只需证明 $\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \}$ 为一个数域。

  当然这是 trivial 的）））

- **(2)** 设 $a_1 + b_1\sqrt{3} = a_2 + b_2\sqrt{3}$，其中 $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$。则 $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\sqrt{3} = 0$，即 $a_1 - a_2 = 0$ 且 $b_1 - b_2 = 0$。因此 $a_1 = a_2$ 且 $b_1 = b_2$，唯一性得证。

$\square$

12. 用 $\mathbb{Z}(\sqrt{-5})$ 表示从全体整数及 $\sqrt{-5}$ 出发，通过加法、乘法二则运算能得到的所有数的集合，称为由 $\sqrt{-5}$ 生成的整数环。证明在此环中，不可约数和素数不等价。

证明. 不知何意味，笔者能力有限

$\square$