高代第二次作业

2025 年 9 月 20 日

9.18 日作业

1.

(1) ”向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$，如果有全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。”

解答： 该说法错误，对于任意的向量组，我们取 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为零，则必然有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，所以该说法错误。

(2) ”如果有一组不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s \neq 0$，则称向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关。”

解答： 该说法错误，线性无关的定义是：如果只有 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 全为零时，才有 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，所以该说法错误。

(3) ”如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（$s \geq 2$）线性相关，则其中每一个向量都可以由其余向量线性表示。”

解答： 该说法错误，线性相关的定义是：存在不全为零的 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$，应该是至少有一个向量可以由其余向量线性表示，所以该说法错误。

2(2).

判断下列向量组是线性相关还是线性无关。如果线性相关，试找出其中一个向量，使其可以由其余向量线性表示，并写出一种表达式。

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

解： 设存在一组数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + k_3\alpha_3 + k_4\alpha_4 = 0$$

我们进行变换：

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2+2r_1, r_4-3r_1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3/2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+5r_2, r_4-13r_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_3/8, r_4/(-14)} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

矩阵的秩为 3，小于向量的个数 4，因此该向量组线性相关。根据最简阶梯形矩阵，我们可以得到如下方程组：

$$\begin{cases} k_1 - 3k_2 - 2k_4 = 0 \\ k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

注意到一组非零解 $k_1 = -1, k_2 = -1, k_3 = -1, k_4 = 1$。代入原线性组合式，得到：

$$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 = 0$$

从此关系式中，我们可以将向量 α_4 由其余向量线性表示：

$$\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

5.

证明：如果向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，则向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_3 + 3\alpha_1$ 也线性无关。

证明. 设存在一组数 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1(2\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + 5\alpha_3) + k_3(4\alpha_3 + 3\alpha_1) = 0$$

化简得

$$(2k_1 + 3k_3)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (5k_2 + 4k_3)\alpha_3 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} 2k_1 + 3k_3 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ 5k_2 + 4k_3 = 0 \end{cases}$$

我们创建系数矩阵并计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

经过计算，行列式的值为 $2(1*4-0*5)-0+3(1*5-0*0) = 8+15 = 23 \neq 0$。因此，方程组只有零解，即 $k_1 = k_2 = k_3 = 0$。

这表明向量组 $2\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_3 + 3\alpha_1$ 线性无关。

□

6.

设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\ \alpha_4$ 线性无关，判断向量组 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_4 + \alpha_1$ 是否线性无关。

解： 设存在一组数 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1(\alpha_1 + \alpha_2) + k_2(\alpha_2 + \alpha_3) + k_3(\alpha_3 + \alpha_4) + k_4(\alpha_4 + \alpha_1) = 0$$

化简得

$$(k_1 + k_4)\alpha_1 + (k_1 + k_2)\alpha_2 + (k_2 + k_3)\alpha_3 + (k_3 + k_4)\alpha_4 = 0$$

由于 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关，所以

$$\begin{cases} k_1 + k_4 = 0 \\ k_1 + k_2 = 0 \\ k_2 + k_3 = 0 \\ k_3 + k_4 = 0 \end{cases}$$

我们创建系数矩阵并计算行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

经过计算，行列式的值为 $1(1*1-0*0)-0+0-1(1*1-0*0)=1-1=0$。因此，方程组有非零解，即存在不全为零的 k_1,k_2,k_3,k_4 使得上述线性组合为零。这表明向量组 $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_4,\alpha_4+\alpha_1$ 线性相关。

9.

证明：由非零向量组成的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s(s\geq 2)$ 线性无关的充分必要条件是: 每一个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示。

证明.

- (必要性) 假设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。若某一个向量 α_i 可以由它前面的向量表示，即存在一组数 $k_1,k_2,\cdots,k_{i-1}$ 使得

  $$\alpha_i=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{i-1}\alpha_{i-1}$$

  则可以将其改写为

  $$-k_1\alpha_1-k_2\alpha_2-\cdots-k_{i-1}\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\alpha_{i+1}+\cdots+0\alpha_s=0$$

  显然，该向量组线性有关，故 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示，必要性得证。

- (充分性) 假设每一个 $\alpha_i(i=2,3,\cdots,s)$ 都不能用它前面的向量表示。我们通过反证法来证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关。若向量组线性相关，则存在不全为零的 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 使得

  $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$$

  我们从 k_s 开始考虑，若 $k_s\neq 0$ 则可将 α_s 表示为

  $$\alpha_s=-\frac{k_1}{k_s}\alpha_1-\frac{k_2}{k_s}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1}$$

  与假设矛盾。若 $k_s=0$，则继续考虑 k_{s-1} 以此类推，最终会得到 $k_1\neq 0$，则必有 $\alpha_1=0$，与题设矛盾。因此，向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，充分性得证。

$\square$