高代第六次作业

2025 年 10 月 30 日

10.23 日作业

p89.2

判断下述线性方程组有没有解，有多少解：

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + a^2x_3 + \cdots + a^{n-1}x_n = b_1 \\ x_1 + a^2x_2 + a^4x_3 + \cdots + a^{2(n-1)}x_n = b_2 \\ \vdots \\ x_1 + a^sx_2 + a^{s^2}x_3 + \cdots + a^{s(n-1)}x_n = b_s \end{cases}$$

其中 $s < n$ 且当 $0 < r < s$ 时，$a^r \neq 1$。

解： 不难发现系数矩阵的前 s 行是一个范德蒙德矩阵, 因此系数矩阵的秩为 s。增广矩阵的前 s 行和 s 列也是一个范德蒙德矩阵，因此增广矩阵的秩也为 s。由秩定理可知该线性方程组有解，且解的自由度为 $n-s$，即有无穷多解。

p95.5

设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 A 的行列式等于 0，并且 A 的 (k,l) 余子式不等于 0，证明

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{pmatrix}$$

是这个齐次线性方程组的一个基础解系。

证明. 因为 $|A| = 0$，且存在一个 $n-1$ 阶的非零子式 A_{kl}，所以 $\operatorname{rank}(A) = n-1$。因此该齐次线性方程组有非零解。设 η_1 是该齐次线性方程组的一个解，下面证明 η_1 是该齐

次线性方程组的一个基础解系。设 A 的第 k 行为

$$\mathbf{a_k} = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn})$$

则有

$$\mathbf{a_k} \cdot \eta_\mathbf{1} = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn} = |A| = 0$$

对于 A 的第 i 行 $(i \neq k)$，设为

$$\mathbf{a_i} = (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$$

则有

$$\mathbf{a_i} \cdot \eta_\mathbf{1} = a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = 0$$

因此 $\eta_\mathbf{1}$ 是该齐次线性方程组的一个解。又因为 $\mathrm{rank}(A) = n-1$，所以该齐次线性方程组的解空间维数为 1，因此 $\eta_\mathbf{1}$ 是该齐次线性方程组的一个基础解系。

□

p95.6

设 $n-1$ 格方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵为 B, 把 B 划去第 j 列得到的 $n-1$ 阶子式记作 D_j, 令

$$\eta_\mathbf{1} = \begin{pmatrix} D_1 \\ -D_2 \\ \vdots \\ (-1)^{j-1}D_j \\ \vdots \\ (-1)^{n-1}D_n \end{pmatrix}$$

证明：

1. $\eta_\mathbf{1}$ 是该齐次线性方程组的一个解；
2. 如果 $\eta_1 \neq 0$, 则 $\eta_\mathbf{1}$ 是该齐次线性方程组的一个基础解系。

证明. 1. 设 B 的第 i 行为

$$\mathbf{b_i} = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})$$

则有

$$\mathbf{b_i} \cdot \eta_1 = b_{i1}D_1 - b_{i2}D_2 + \cdots + (-1)^{j-1}b_{ij}D_j + \cdots + (-1)^{n-1}b_{in}D_n = 0$$

因为上式等于 B 补全一行后，对应的其余行元素分别乘上其代数余子式，因此等于 0。

2. 因为 B 是一个 $n-1$ 阶矩阵，所以 $\mathrm{rank}(B) \leq n-1$。又因为 $\eta_1 \neq 0$，所以 $\mathrm{rank}(B) = n-1$。因此该齐次线性方程组的解空间维数为 1，因此 η_1 是该齐次线性方程组的一个基础解系。

□

p113.2

设

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

求 $(r-\lambda)I + \lambda J$

解：

$$(r-\lambda)I + \lambda J = \begin{pmatrix} r & \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & r & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & r & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda & r \end{pmatrix}$$

p113.3

设 I_n 为 n 阶单位矩阵，J_n 为 n 阶全 1 矩阵，设

$$M = \begin{pmatrix} k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{pmatrix}$$

把 M 表示成 $xI_n + yJ_n$ 的形式

解：

$$M = kI_n + \lambda(J_n - I_n) = (k-\lambda)I_n + \lambda J_n$$

10.28 日作业

p113.4

计算矩阵乘法

- (8)

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_1 & d_1a_2 & d_1a_3 \\ d_2b_1 & d_2b_2 & d_2b_3 \\ d_3c_1 & d_3c_2 & d_3c_3 \end{pmatrix}$$

- (9)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1a_1 & d_2a_2 & d_3a_3 \\ d_1b_1 & d_2b_2 & d_3b_3 \\ d_1c_1 & d_2c_2 & d_3c_3 \end{pmatrix}$$

- (11)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ ka_1 + b_1 & ka_2 + b_2 & ka_3 + b_3 & ka_4 + b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

- (12)

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$$

p113.7

计算：

- (5)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n$$

解： 当 $n = 1$ 时，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $n = 2$ 时，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

当 $n \geq 3$ 时，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \mathbf{O}$$

- (6)
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$$

解： 设矩阵
$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
则有
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + J$$
因为 I 与 J 可交换，所以有
$$(\lambda I + J)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\lambda I)^{n-k} J^k$$
因为 $J^3 = \mathbf{O}$，所以当 $k \geq 3$ 时，$J^k = \mathbf{O}$。因此有
$$(\lambda I + J)^n = (\lambda I)^n + n(\lambda I)^{n-1} J + \frac{n(n-1)}{2} (\lambda I)^{n-2} J^2$$
计算得
$$(\lambda I + J)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

p113.11

设 A 是数域 $\mathbb{K}$ 上 $s \times n$ 矩阵. 证明: 如果对于 K^n 中任一列向量 η，都有 $A\eta = 0$，则 $A = 0$。

证明. 分别取 η 为
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
可得 A 的每一列均为零向量，因此 $A = 0$。

□

p143.2

设 A 是 n 阶矩阵，且 $A \neq 0$. 证明：存在一个 $n \times m$ 非零矩阵 B, 使得 $AB = 0$ 的充分必要条件是 $|A| = 0$。

证明.

- (1) 充分性：我们考察方程 $AX = 0$，因为 $|A| = 0$，所以 $\text{rank}(A) < n$，因此该方程有非零解。设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是该方程的一组非零解，则取

  $$B = (X_1, X_2, \cdots, X_m)$$

  则 $AB = 0$，且 $B \neq 0$。

- (2) 必要性：反证法。假设 $|A| \neq 0$，则 A 可逆，因此有

  $$AB = 0 \Rightarrow B = A^{-1} \cdot 0 = 0$$

  与 $B \neq 0$ 矛盾。因此 $|A| = 0$。

□

p143.3

设 B 为 n 级矩阵，C 为 $n \times m$ 行满秩矩阵，证明：

- (1) 如果 $BC = 0$，则 $B = 0$;
- (2) 如果 $BC = C$，则 $B = I$。

证明.

- (1) 设 B 的第 i 行为

  $$\mathbf{b_i} = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})$$

  则有

  $$\mathbf{b_i} \cdot C = 0$$

  因为 C 为行满秩矩阵，所以 C 的行向量组线性无关，因此 $\mathbf{b_i} = 0$。因此 $B = 0$。

- (2) 同样设 B 的第 i 行为

  $$\mathbf{b_i} = (b_{i1}, b_{i2}, \cdots, b_{in})$$

  则有

  $$\mathbf{b_i} \cdot C = \mathbf{c_i}$$

  其中 $\mathbf{c_i}$ 为 C 的第 i 行。因为 C 为行满秩矩阵，所以 C 的行向量组线性无关，因此 $\mathbf{b_i}$ 只能为单位向量，即 $b_{ii} = 1$，其余元素均为 0。因此 $B = I$。

□

p143.4

证明：如果 n 阶矩阵 A 满足 $A^2 = I$，则

$$\mathrm{rank}(I-A) + \mathrm{rank}(I+A) = n$$

证明. 构造矩阵

$$M = \begin{pmatrix} I-A & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & I+A \end{pmatrix}$$

则有

$$\mathrm{rank}(M) = \begin{pmatrix} I-A & \mathbf{O} \\ I+A & I+A \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2I & I+A \\ I+A & I+A \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} 2I & \mathbf{O} \\ I+A & \frac{1}{2}(I-A^2) \end{pmatrix} = \mathrm{rank}\left(\begin{matrix} 2I & \\ \mathbf{O} & \frac{1}{2}(I \end{matrix}\right.$$

所以

$$\mathrm{rank}(I-A) + \mathrm{rank}(I+A) = n$$

□