Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по третьему заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Выполнила: Яковлева Маргарита Александровна
студентка 614 группы
Вариант 6

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуром γ, рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x,y), \qquad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция $f(x,y) = 1$.

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле:

$$u(x,y) = 0, (x,y) \in \gamma. \qquad (2)$$

Требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области *D* и краевому условию (2) на ее границе, где область *D* – квадрат с отсеченной вершиной (x,y): $|x| + |y| < 2,\ y < 1$.

Численный метод решения поставленной задачи

Метод фиктивных областей

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод фиктивных областей. Пусть область *D* принадлежит прямоугольнику

$$\Pi = \{(x,y): A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}.$$

Обозначим через $\overline{D}$, $\overline{\Pi}$ замыкание области *D* и прямоугольника П соответственно, через Г – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\widehat{D} = \Pi \setminus \overline{D}.$$

В прямоугольнике П рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,y)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x,y)\frac{\partial v}{\partial y}\right) = F(x,y), \qquad (3)$$

$$v(x,y) = 0, (x,y) \in \Gamma$$

с кусочно-постоянным коэффициентом:

$$k(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & (x,y) \in \widehat{D} \end{cases}$$

и правой частью:

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \in \widehat{D} \end{cases}$$

Требуется найти непрерывную в $\overline{\Pi}$ функцию *v(x, y)*, удовлетворяющую дифференциальному уравнению всюду в П \ γ, равную нулю на границе Г прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x,y) = -k(x,y)(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x})$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника П.

Переход к новой задаче позволяет получить решение исходной задачи с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, решая при этом задачу Дирихле в прямоугольнике П, содержащем исходную область.

$$\max_{P \in \overline{D}} |v(x,y) - u(x,y)| < C\varepsilon, \qquad C > 0$$

Для D - квадрата с отсеченной вершиной выберем $A_1 = -2.5,\ B_1 = 2.5,\ A_2 = -2.5,\ B_2 = 1.5$.

Разностная схема решения задачи

В замыкании прямоугольника $\overline{\Pi}$ определим равномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega_h} = \overline{\omega_1} \times \overline{\omega_2}$, где

$$\overline{\omega_1} = \{x_i = A_1 + ih_1, i = 0, \dots, M\}, h_1 = (B_1 - A_1)/M$$
$$\overline{\omega_2} = \{y_j = A_2 + jh_2, j = 0, \dots, N\}, h_2 = (B_2 - A_2)/N$$

Множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega_h}$ обозначим ω_h.

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке ω_h.

Обозначим через ω_{ij} значение сеточной функции H в узле сетки $(x_i, y_j) \in \omega_h$. Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций H:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}$$
$$\|u\|_E = \sqrt{(u,u)}$$

Будем использовать метод конечных разностей, который заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$$A\omega = B$$
$$A: H \to H$$

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1}\left(a_{i+1j}\frac{\omega_{i+1j} - \omega_{ij}}{h_1} - a_{ij}\frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1j}}{h_1}\right) - \frac{1}{h_2}\left(b_{ij+1}\frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij}}{h_2} - b_{ij}\frac{\omega_{ij} - \omega_{ij-1}}{h_2}\right) = F_{ij}$$

$$i = 1, \dots, M-1, \qquad j = 1, \dots, N-1$$

в котором коэффициенты при $i = 1, \dots, M,\ j = 1, \dots, N$

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt$$

$$b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j+1/2}) dt$$

и правая часть

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x,y) dx dy$$

$$\Pi_{ij} = \{(x,y): x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} < y < y_{j+\frac{1}{2}}\}$$

Краевые условия Дирихле в задаче (3) аппроксимируются точно равенством

$$\omega_{ij} = \omega(x_i, y_j) = 0, (x_i, y_j) \in \Gamma$$

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде $A\omega = B$ с самосопряженным и положительно определенным оператором A. Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы a_{ij}, b_{ij} вычисляем аналитически: $a_{ij} = h_2^{-1} l_{ij} + (1 - h_2^{-1} l_{ij})/\epsilon$, где l_{ij} – длина части отрезка $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$, которая принадлежит области D и вычисляется путем поиска точек пересечения прямой $x = x_{i-1/2}$ с границами D. Правую часть схемы приближенно заменяем на значение в центре квадрата Π_{ij}: $F_{ij} = F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in D \\ 0, & (x_i, y_j) \in \hat{D} \end{cases}$.

Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок.

Метод позволяет получить последовательность сеточных функций $\omega^{(k)} \in$ H, $k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\|_E \to 0, k \to \infty$$

Начальное приближение выберем равным нулю во всех точках сетки.

Итерация $\omega^{(k+1)}$ вычисляется по формуле: $\omega^{(k+1)}{}_{ij} = \omega^{(k)}{}_{ij} - \tau_{k+1} r^{(k)}{}_{ij}$, где невязка $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$, итерационный параметр $\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E}$.

В качестве критерия останова используется условие $\left\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\right\|_E < \delta$, где $\delta = 10^{-6}$.

Описание программной реализации

Для выполнения задания был разработан последовательный код, представляющий собой программу на языке Си, реализующую описанный численный метод. Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках (M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40) и построены графики полученных приближенных решений. Для написания параллельной программы вложенные циклы в функциях, вызывающихся на каждой итерации метода минимальных невязок, были размечены с помощью директивы OpenMP: pragma omp parallel for collapse(2).

Были проведены расчеты на сетках (40, 40), (80, 80), (160, 160) на разном числе потоков. Полученные приближенные решения совпали с соответствующими решениями при последовательных вычислениях (на сетках (40, 40), (80, 80), и (160, 160)), но время их вычисления удалось уменьшить за счет использования параллелизма.

В рамках второй части задания была разработана MPI программа mpi.c, реализующая аналогичную разностную схему. Принципиальным отличием от OpenMP версии программы стало построчное хранение матриц по указателю на double для упрощения обменов данными между процессами, в OpenMP версии использовался массив указателей на double. Каждый MPI процесс работает в своем домене и проводит в нем локальные расчеты. На каждом шаге процессы обмениваются набором скалярных произведений, значений на границе и текущими частичными дельтами.

Для написания гибридной программы mpi+openmp.c в MPI версию программы были добавлены директивы OpenMP аналогично parallel.c

Результаты вычислений приведены в таблицах.

Таблица ускорений для MPI программы

Число процессов MPI	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
1	40 x 40	2.990806	1.147072
2	40 x 40	1.723363	1.990683
4	40 x 40	1.248025	2.748878
1	80 x 80	80.654133	0.755733
2	80 x 80	59.706296	1.020880
4	80 x 80	32.777032	1.859626
1	160 x 160	318.284029	0.537911
2	160 x 160	185.640086	0.922261
4	160 x 160	109.001287	1.570703

График ускорений в зависимости от числа процессов

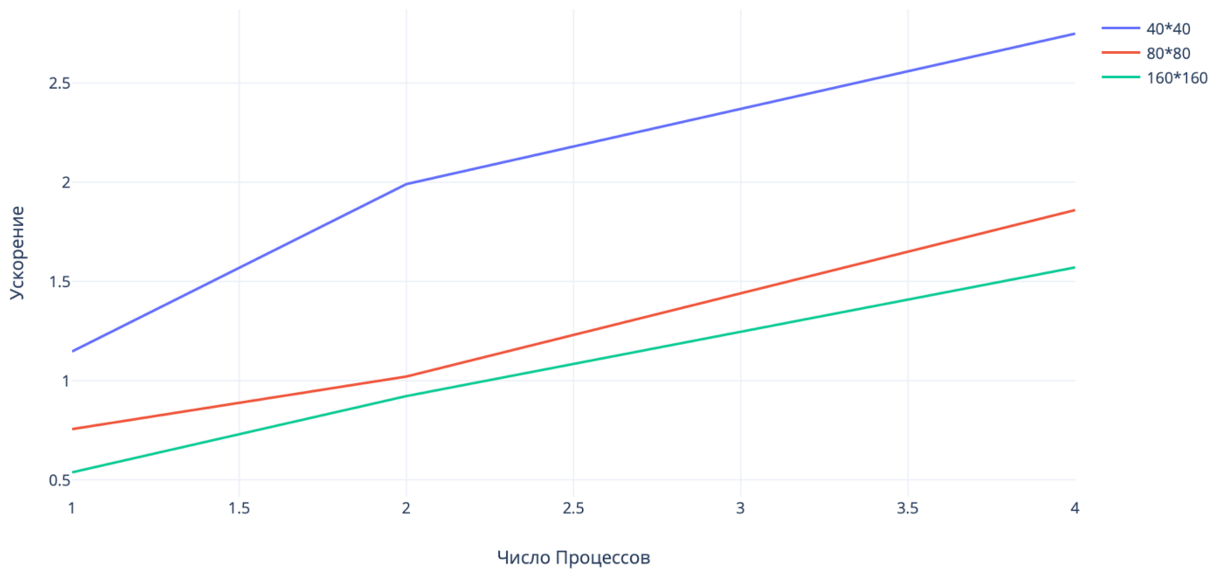

Таблица ускорений для MPI + OpenMP программы

Число процессов MPI	Количество OpenMP-нитей в процессе	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	1	80 x 80	60.217236	1.012219
2	2	80 x 80	49.864101	1.222383
2	4	80 x 80	40.233298	1.514989
2	8	80 x 80	32.956230	1.849514
4	1	160 x 160	117.739087	1.454136
4	2	160 x 160	82.100278	2.085360
4	4	160 x 160	59.693302	2.868138
4	8	160 x 160	42.428740	4.035204

График ускорений в зависимости от числа нитей в процессе