

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова  
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Отчет по второму заданию в рамках курса  
«Суперкомпьютерное моделирование и  
технологии»**

**Выполнила:** Яковлева Маргарита Александровна  
студентка 614 группы  
Вариант 6

## Математическая постановка задачи

В области  $D \subset R^2$ , ограниченной контуром  $\gamma$ , рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \quad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция  $f(x, y) = 1$ .

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma. \quad (2)$$

Требуется найти функцию  $u(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению (1) в области  $D$  и краевому условию (2) на ее границе, где область  $D$  – квадрат с отсеченной вершиной  $(x, y)$ :  $|x| + |y| < 2, y < 1$ .

## Численный метод решения поставленной задачи

### Метод фиктивных областей

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод фиктивных областей. Пусть область  $D$  принадлежит прямоугольнику

$$\Pi = \{(x, y): A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}.$$

Обозначим через  $\bar{D}$ ,  $\bar{\Pi}$  замыкание области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$  соответственно, через  $\Gamma$  – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\hat{D} = \Pi \setminus \bar{D}.$$

В прямоугольнике  $\Pi$  рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( k(x, y) \frac{\partial v}{\partial y} \right) = F(x, y), \quad (3)$$

$$v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$$

с кусочно-постоянным коэффициентом:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ \frac{1}{\varepsilon}, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases}$$

и правой частью:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \hat{D} \end{cases}$$

Требуется найти непрерывную в  $\bar{\Pi}$  функцию  $v(x, y)$ , удовлетворяющую дифференциальному уравнению всюду в  $\Pi \setminus \gamma$ , равную нулю на границе  $\Gamma$  прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x, y) = -k(x, y) \left( \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x} \right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области  $D$  и прямоугольника  $\Pi$ .

Переход к новой задаче позволяет получить решение исходной задачи с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , решая при этом задачу Дирихле в прямоугольнике  $\Pi$ , содержащем исходную область.

$$\max_{P \in \bar{D}} |v(x, y) - u(x, y)| < C\varepsilon, \quad C > 0$$

Для  $D$  - квадрата с отсеченной вершиной выберем  $A_1 = -2.5$ ,  $B_1 = 2.5$ ,  $A_2 = -2.5$ ,  $B_2 = 1.5$ .

#### Разностная схема решения задачи

В замыкании прямоугольника  $\bar{\Pi}$  определим равномерную прямоугольную сетку  $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$ , где

$$\bar{\omega}_1 = \{x_i = A_1 + ih_1, i = 0, \dots, M\}, h_1 = (B_1 - A_1)/M$$

$$\bar{\omega}_2 = \{y_j = A_2 + jh_2, j = 0, \dots, N\}, h_2 = (B_2 - A_2)/N$$

Множество внутренних узлов сетки  $\bar{\omega}_h$  обозначим  $\omega_h$ .

Рассмотрим линейное пространство  $H$  функций, заданных на сетке  $\omega_h$ .

Обозначим через  $\omega_{ij}$  значение сеточной функции  $H$  в узле сетки

$(x_i, y_j) \in \omega_h$ . Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций  $H$ :

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{M-1} \sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}$$

$$\|u\|_E = \sqrt{(u, u)}$$

Будем использовать метод конечных разностей, который заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$$A\omega = B$$

$$A: H \rightarrow H$$

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{h_1} \left( a_{i+1j} \frac{\omega_{i+1j} - \omega_{ij}}{h_1} - a_{ij} \frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1j}}{h_1} \right) \\ & - \frac{1}{h_2} \left( b_{ij+1} \frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij}}{h_2} - b_{ij} \frac{\omega_{ij} - \omega_{ij-1}}{h_2} \right) = F_{ij} \end{aligned}$$

$$i = 1, \dots, M - 1, \quad j = 1, \dots, N - 1$$

в котором коэффициенты при  $i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N$

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt$$

$$b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j+1/2}) dt$$

и правая часть

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy$$

$$\Pi_{ij} = \{(x, y): x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} < y < y_{j+\frac{1}{2}}\}$$

Краевые условия Дирихле в задаче (3) аппроксимируются точно равенством

$$\omega_{ij} = \omega(x_i, y_j) = 0, (x_i, y_j) \in \Gamma$$

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде  $A\omega = B$  с самосопряженным и положительно определенным оператором  $A$ . Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы  $a_{ij}, b_{ij}$  вычисляем аналитически:  $a_{ij} = h_2^{-1} l_{ij} + (1 - h_2^{-1} l_{ij})/\epsilon$ , где  $l_{ij}$  – длина части отрезка  $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$ , которая принадлежит области  $D$  и вычисляется путем поиска точек пересечения прямой  $x = x_{i-1/2}$  с границами  $D$ . Правую часть схемы приближенно заменяем на значение в центре

$$\text{квадрата } \Pi_{ij}: F_{ij} = F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in D \\ 0, & (x_i, y_j) \in \widehat{D} \end{cases}.$$

## Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок.

Метод позволяет получить последовательность сеточных функций  $\omega^{(k)} \in H, k = 1, 2, \dots$ , сходящуюся по норме пространства  $H$  к решению разностной схемы.

$$\|\omega - \omega^{(k)}\|_E \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$$

Начальное приближение выберем равным нулю во всех точках сетки.

Итерация  $\omega^{(k+1)}$  вычисляется по формуле:  $\omega^{(k+1)}_{ij} = \omega^{(k)}_{ij} - \tau_{k+1} r^{(k)}_{ij}$ ,

где невязка  $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$ , итерационный параметр  $\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\|Ar^{(k)}\|_E}$ .

В качестве критерия останова используется условие  $\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\|_E < \delta$ , где  $\delta = 10^{-6}$ .

## Описание программной реализации

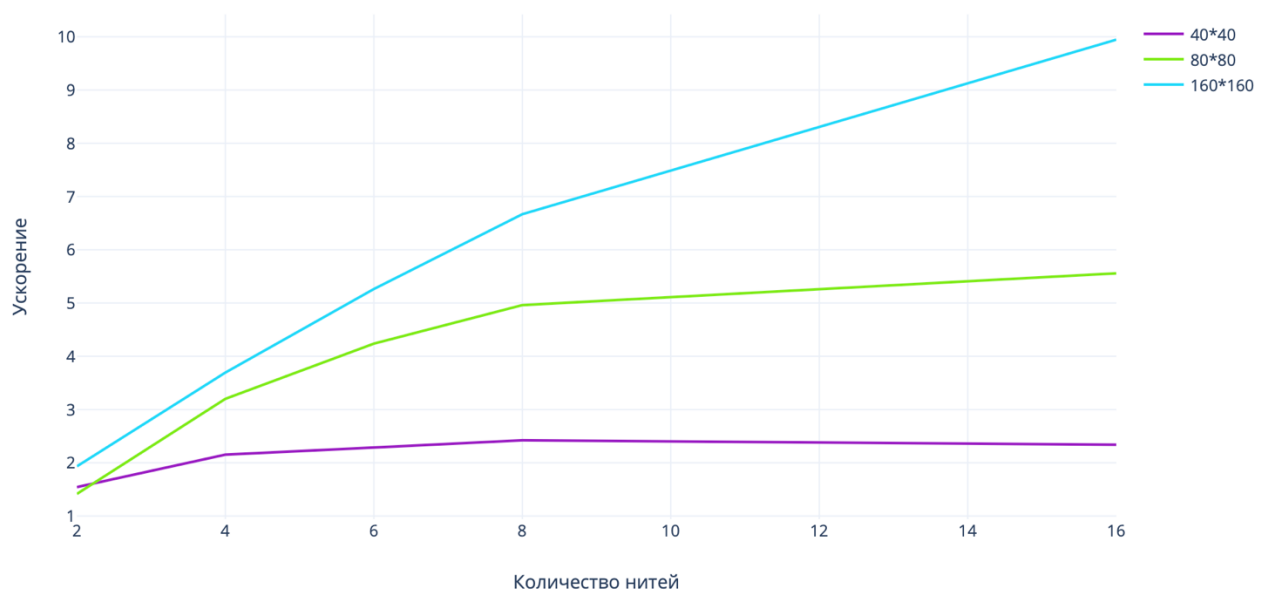
Для выполнения задания был разработан последовательный код, представляющий собой программу на языке Си, реализующую описанный численный метод. Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках  $(M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40)$  и построены графики полученных приближенных решений. Для написания параллельной программы вложенные циклы в функциях, вызывающихся на каждой итерации метода минимальных невязок, были размечены с помощью директивы OpenMP: `pragma omp parallel for collapse(2)`.

Были проведены расчеты на сетках  $(40, 40), (80, 80), (160, 160)$  на разном числе потоков. Полученные приближенные решения совпали с соответствующими решениями при последовательных вычислениях (на сетках  $(40, 40), (80, 80)$ , и  $(160, 160)$ ), но время их вычисления удалось уменьшить за счет использования параллелизма. Результаты вычислений приведены в таблице.

## Зависимости времени решений от числа нитей (компиляция с флагом O2)

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	40 x 40	1.659481	1.543403
4	40 x 40	1.189708	2.152838
6	40 x 40	1.120341	2.286133
8	40 x 40	1.057279	2.422490
16	40 x 40	1.094842	2.339377
2	80 x 80	43.785937	1.415766
4	80 x 80	19.366747	3.200882
6	80 x 80	14.629144	4.237478
8	80 x 80	12.495609	4.960996
16	80 x 80	11.153633	5.557890
2	160 x 160	86.547483	1.933513
4	160 x 160	45.297374	3.694268
6	160 x 160	31.794382	5.263214
8	160 x 160	25.095805	6.668072
16	160 x 160	16.825990	9.945367

## Графики зависимостей ускорений от числа потоков (компиляция с флагом O2)



## Зависимости времени решений от числа нитей (компиляция с флагом O3)

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	40 x 40	1.881945	1.051024
4	40 x 40	1.381757	1.431489
6	40 x 40	1.243437	1.590728
8	40 x 40	1.138108	1.737946
16	40 x 40	1.183627	1.671109
2	80 x 80	25.888349	1.896905
4	80 x 80	13.115685	3.744199
6	80 x 80	11.555275	4.249810
8	80 x 80	9.108469	5.391436
16	80 x 80	8.853903	5.546450
2	160 x 160	50.414782	1.902636
4	160 x 160	26.820982	3.576340
6	160 x 160	19.427241	4.937446
8	160 x 160	15.787640	6.075699
16	160 x 160	13.315621	7.203641

## Графики зависимостей ускорений от числа потоков (компиляция с флагом O2)

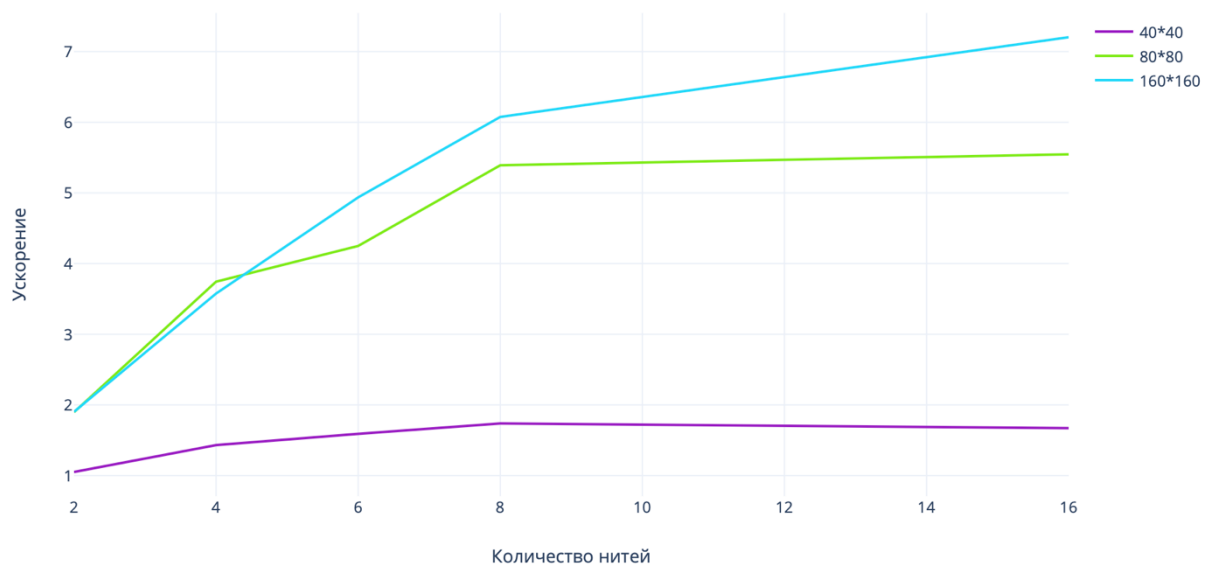


График невязки в зависимости от числа итераций

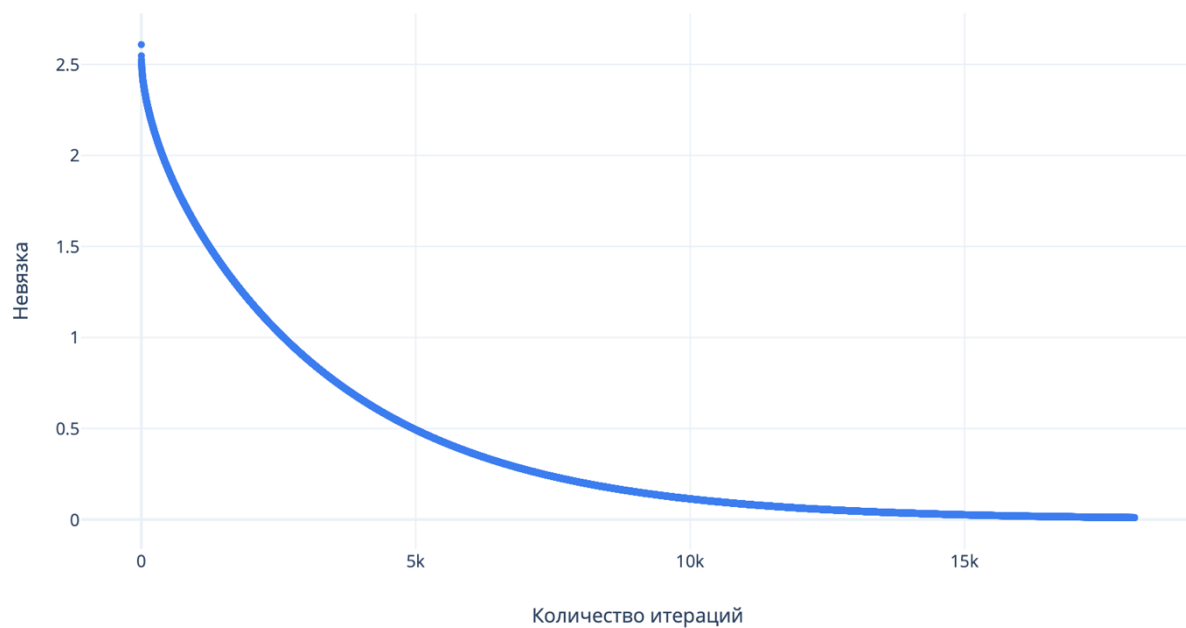


График ошибки в зависимости от числа итераций

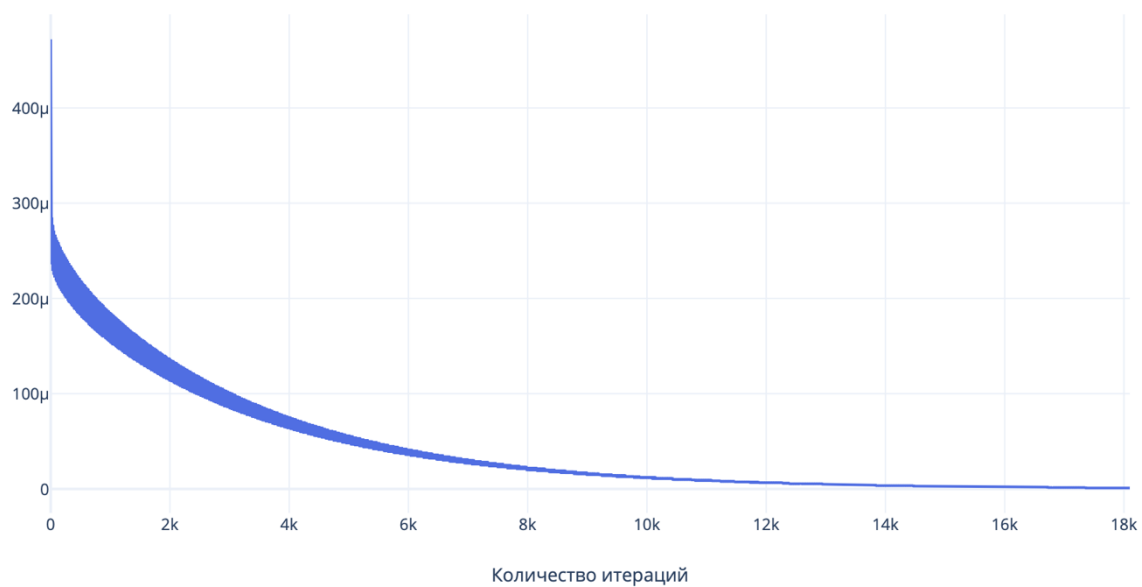




График L1 нормы невязки в зависимости от количества итераций

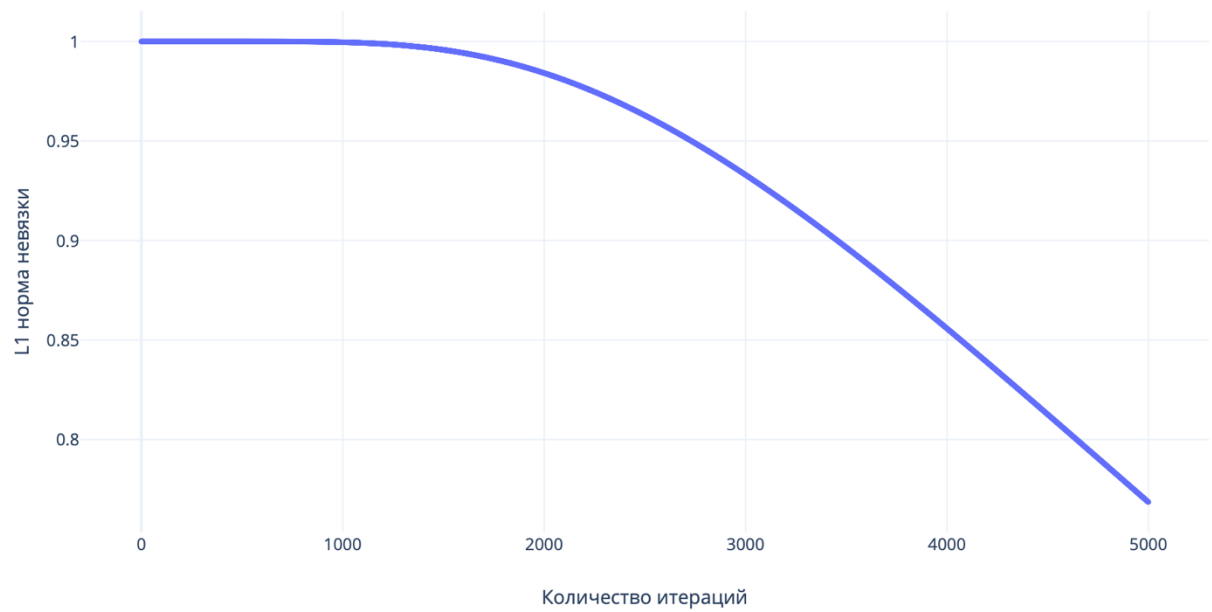
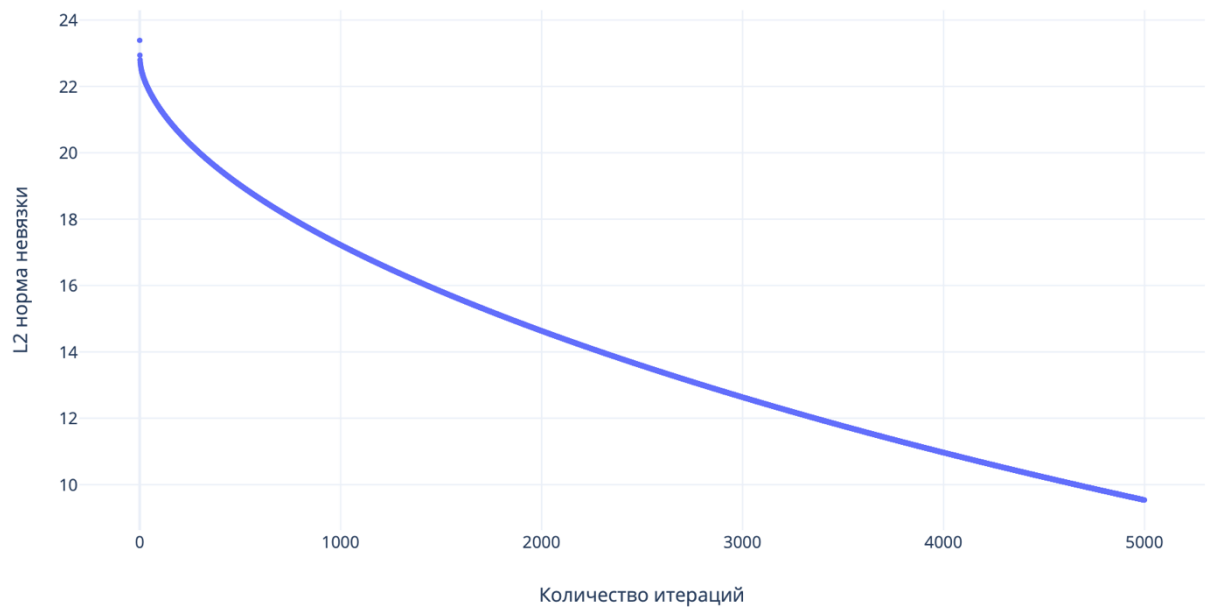
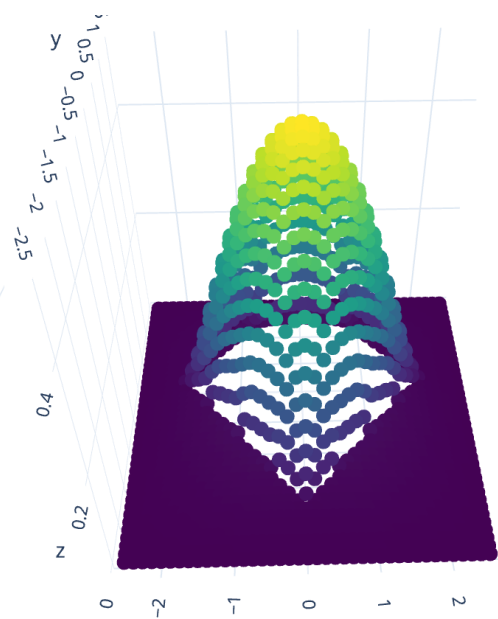
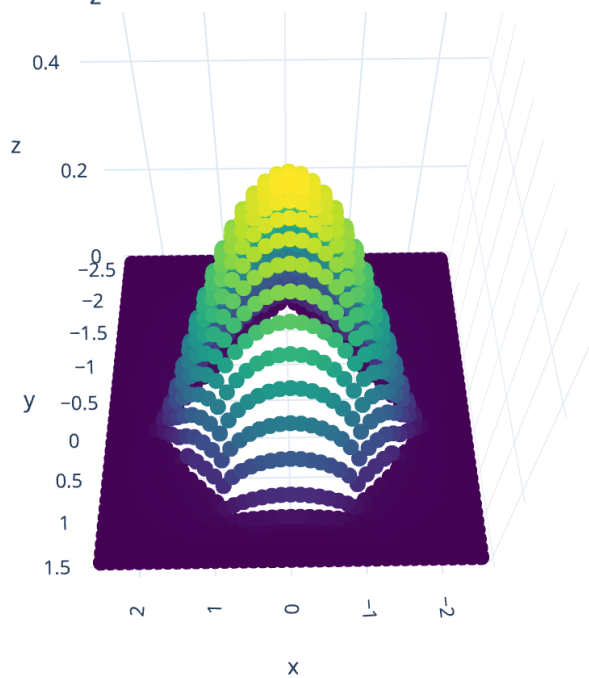
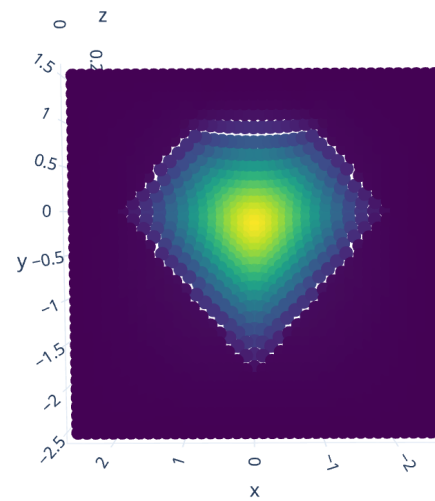
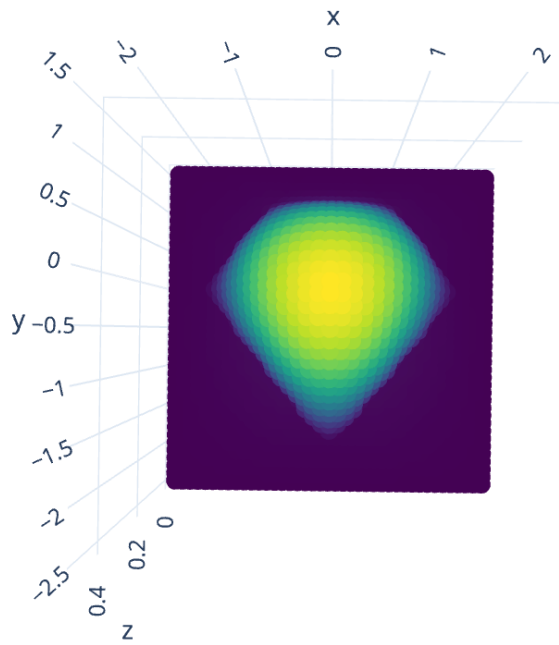
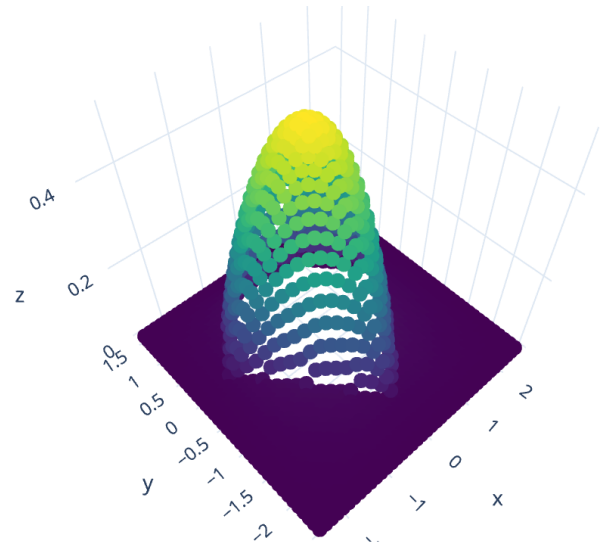
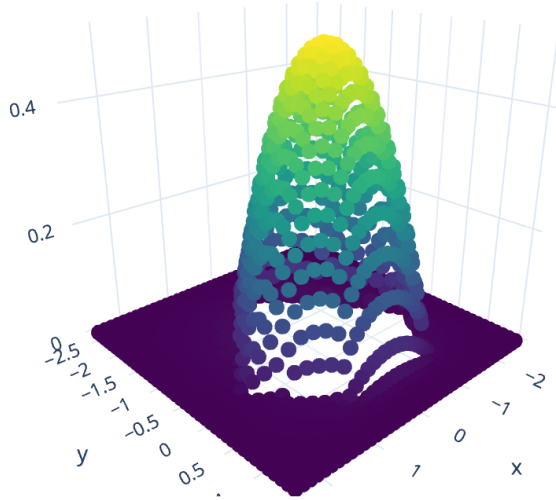


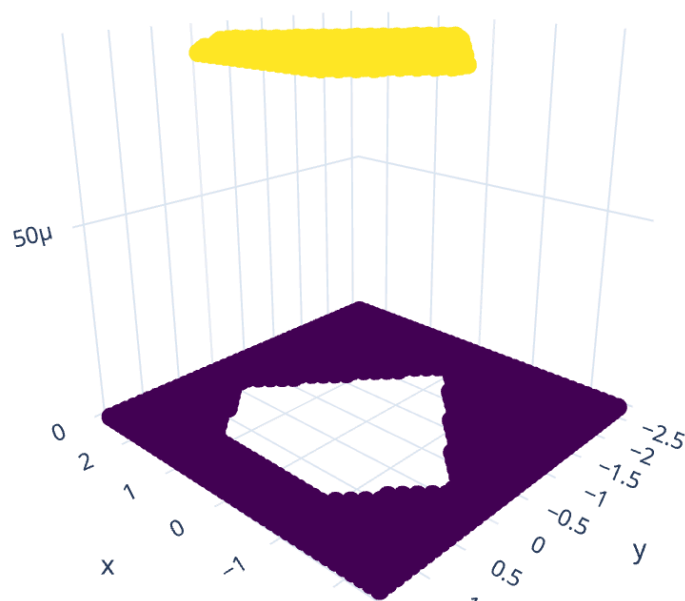
График L2 нормы невязки в зависимости от количества итераций



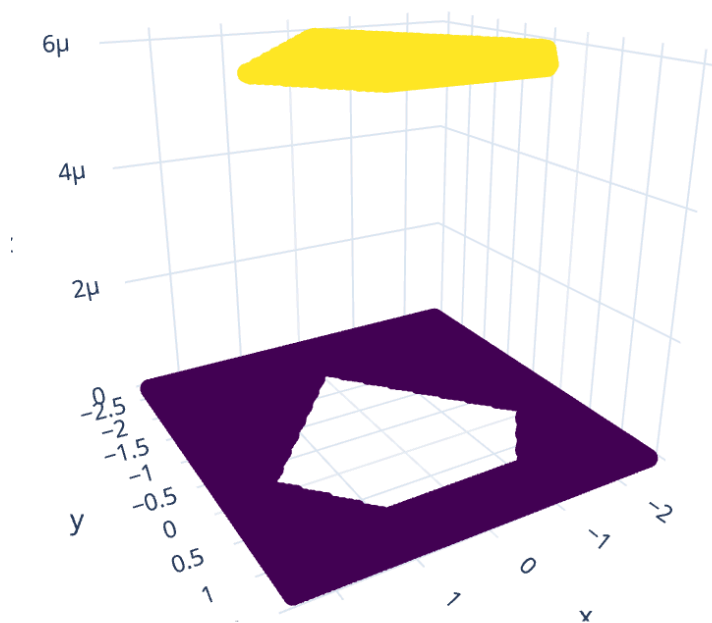
Рисунки приближенного решения на сетке 40\*40



Промежуточные результаты сходимости на сетке 40\*40



Промежуточные результаты сходимости на сетке 80\*80



Промежуточные результаты сходимости на сетке 160\*160

