Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

Отчет по второму заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное моделирование и технологии»

Выполнила: Яковлева Маргарита Александровна
студентка 614 группы
Вариант 6

Математическая постановка задачи

В области $D \subset R^2$, ограниченной контуром γ, рассматривается дифференциальное уравнение Пуассона

$$-\Delta u = f(x, y), \qquad (1)$$

в котором оператор Лапласа

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

функция $f(x, y) = 1$.

Для выделения единственного решения уравнение дополняется граничными условием Дирихле:

$$u(x, y) = 0, (x, y) \in \gamma. \qquad (2)$$

Требуется найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую уравнению (1) в области *D* и краевому условию (2) на ее границе, где область *D* – квадрат с отсеченной вершиной (x, y): $|x| + |y| < 2,\; y < 1$.

Численный метод решения поставленной задачи

Метод фиктивных областей

Для решения поставленной задачи предлагается использовать метод фиктивных областей. Пусть область *D* принадлежит прямоугольнику

$$\Pi = \{(x, y): A_1 < x < B_1, A_2 < y < B_2\}.$$

Обозначим через $\overline{D}$, $\overline{\Pi}$ замыкание области *D* и прямоугольника П соответственно, через Г – границу прямоугольника. Разность множеств

$$\widehat{D} = \Pi \setminus \overline{D}.$$

В прямоугольнике П рассмотрим задачу Дирихле:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}\right) = F(x, y), \qquad (3)$$

$$v(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$$

с кусочно-постоянным коэффициентом:

$$k(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D \\ \dfrac{1}{\varepsilon}, & (x, y) \in \widehat{D} \end{cases}$$

и правой частью:

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D \\ 0, & (x, y) \in \widehat{D} \end{cases}$$

Требуется найти непрерывную в $\overline{\Pi}$ функцию *v(x, y)*, удовлетворяющую дифференциальному уравнению всюду в $\Pi \setminus \gamma$, равную нулю на границе Г прямоугольника, и такую, чтобы вектор потока:

$$W(x,y) = -k(x,y)\left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

имел непрерывную нормальную компоненту на общей части криволинейной границы области D и прямоугольника П.

Переход к новой задаче позволяет получить решение исходной задачи с любой наперед заданной точностью $\varepsilon > 0$, решая при этом задачу Дирихле в прямоугольнике П, содержащем исходную область.

$$\max_{P\in\overline{D}} |v(x,y) - u(x,y)| < C\varepsilon, \qquad C > 0$$

Для D - квадрата с отсеченной вершиной выберем $A_1 = -2.5,\ B_1 = 2.5,$ $A_2 = -2.5,\ B_2 = 1.5.$

Разностная схема решения задачи

В замыкании прямоугольника $\overline{\Pi}$ определим равномерную прямоугольную сетку $\overline{\omega_h} = \overline{\omega_1} \times \overline{\omega_2}$, где

$$\overline{\omega_1} = \{x_i = A_1 + ih_1, i = 0, \dots, M\}, h_1 = (B_1 - A_1)/M$$

$$\overline{\omega_2} = \{y_j = A_2 + jh_2, j = 0, \dots, N\}, h_2 = (B_2 - A_2)/N$$

Множество внутренних узлов сетки $\overline{\omega_h}$ обозначим ω_h.

Рассмотрим линейное пространство H функций, заданных на сетке ω_h.

Обозначим через ω_{ij} значение сеточной функции H в узле сетки $(x_i, y_j) \in \omega_h$. Определим скалярное произведение и норму в пространстве сеточных функций H:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{N-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}$$

$$\|u\|_E = \sqrt{(u,u)}$$

Будем использовать метод конечных разностей, который заключается в замене дифференциальной задачи математической физики на конечно-разностную операторную задачу вида:

$$A\omega = B$$

$$A: H \to H$$

Дифференциальное уравнение задачи (3) во всех внутренних точках сетки аппроксимируется разностным уравнением:

$$-\frac{1}{h_1}\left(a_{i+1j}\frac{\omega_{i+1j} - \omega_{ij}}{h_1} - a_{ij}\frac{\omega_{ij} - \omega_{i-1j}}{h_1}\right) - \frac{1}{h_2}\left(b_{ij+1}\frac{\omega_{ij+1} - \omega_{ij}}{h_2} - b_{ij}\frac{\omega_{ij} - \omega_{ij-1}}{h_2}\right) = F_{ij}$$

$$i = 1, \dots, M-1, \qquad j = 1, \dots, N-1$$

в котором коэффициенты при $i = 1, \dots, M,\ j = 1, \dots, N$

$$a_{ij} = \frac{1}{h_2} \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} k(x_{i-1/2}, t) dt$$

$$b_{ij} = \frac{1}{h_1} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} k(t, y_{j+1/2}) dt$$

и правая часть

$$F_{ij} = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\Pi_{ij}} F(x, y) dx dy$$

$$\Pi_{ij} = \{(x, y): x_{i-\frac{1}{2}} < x < x_{i+\frac{1}{2}}, y_{j-\frac{1}{2}} < y < y_{j+\frac{1}{2}}\}$$

Краевые условия Дирихле в задаче (3) аппроксимируются точно равенством

$$\omega_{ij} = \omega(x_i, y_j) = 0, (x_i, y_j) \in \Gamma$$

Полученная система является линейной относительно неизвестных величин и может быть представлена в виде $A\omega = B$ с самосопряженным и положительно определенным оператором A. Построенная разностная схема линейна и имеет единственное решение при любой правой части.

Интегралы a_{ij}, b_{ij} вычисляем аналитически: $a_{ij} = h_2^{-1} l_{ij} + (1 - h_2^{-1} l_{ij})/\epsilon$, где l_{ij} – длина части отрезка $[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}}]$, которая принадлежит области D и вычисляется путем поиска точек пересечения прямой $x = x_{i-1/2}$ с границами D. Правую часть схемы приближенно заменяем на значение в центре квадрата Π_{ij}: $F_{ij} = F(x_i, y_j) = \begin{cases} 1, & (x_i, y_j) \in D \\ 0, & (x_i, y_j) \in \hat{D} \end{cases}$.

Метод минимальных невязок

Приближенное решение разностной схемы предлагается вычислять методом наименьших невязок.

Метод позволяет получить последовательность сеточных функций $\omega^{(k)} \in \mathrm{H}, k = 1, 2, \dots$, сходящуюся по норме пространства H к решению разностной схемы.

$$\left\| \omega - \omega^{(k)} \right\|_E \to 0, k \to \infty$$

Начальное приближение выберем равным нулю во всех точках сетки.

Итерация $\omega^{(k+1)}$ вычисляется по формуле: $\omega^{(k+1)}{}_{ij} = \omega^{(k)}{}_{ij} - \tau_{k+1} r^{(k)}{}_{ij}$, где невязка $r^{(k)} = A\omega^{(k)} - B$, итерационный параметр $\tau_{k+1} = \frac{(Ar^{(k)}, r^{(k)})}{\left\| Ar^{(k)} \right\|_E}$.

В качестве критерия останова используется условие $\left\|\omega^{(k+1)} - \omega^{(k)}\right\|_E < \delta$, где $\delta = 10^{-6}$.

Описание программной реализации

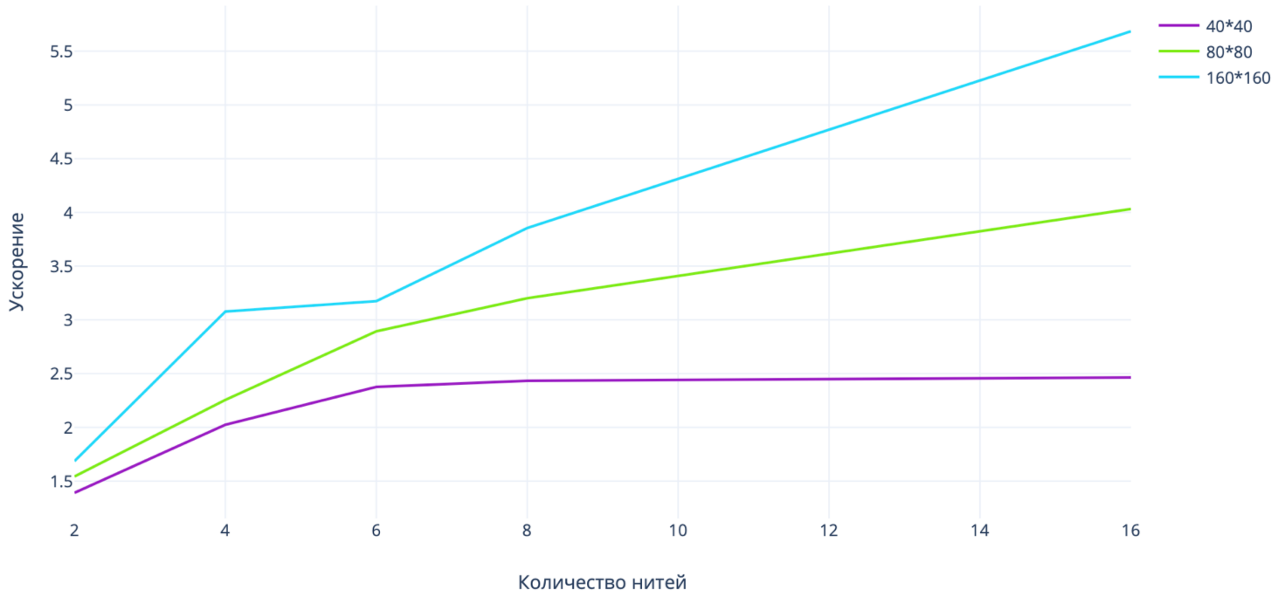
Для выполнения задания был разработан последовательный код, представляющий собой программу на языке Си, реализующую описанный численный метод. Были выполнены расчеты на сгущающихся сетках (M, N) = (10, 10), (20, 20), (40, 40) и построены графики полученных приближенных решений. Для написания параллельной программы вложенные циклы в функциях, вызывающихся на каждой итерации метода минимальных невязок, были размечены с помощью директивы OpenMP: pragma omp parallel for collapse(2).

Были проведены расчеты на сетках (40, 40), (80, 80), (160, 160) на разном числе потоков. Полученные приближенные решения совпали с соответствующими решениями при последовательных вычислениях (на сетках (40, 40), (80, 80), и (160, 160)), но время их вычисления удалось уменьшить за счет использования параллелизма. Результаты вычислений приведены в таблице.

Зависимости времени решений от числа нитей (без флагов оптимизации)

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	40 x 40	2.466597	1.390851
4	40 x 40	1.694726	2.024320
6	40 x 40	1.443651	2.376384
8	40 x 40	1.409919	2.433238
16	40 x 40	1.392175	2.464251
2	80 x 80	39.509508	1.542743
4	80 x 80	27.023761	2.255534
6	80 x 80	21.065225	2.893537
8	80 x 80	19.040206	3.201279
16	80 x 80	15.118093	4.031792
2	160 x 160	101.582469	1.685415
4	160 x 160	55.631041	3.077574
6	160 x 160	53.939037	3.174114
8	160 x 160	44.418227	3.854469
16	160 x 160	30.114715	5.685216

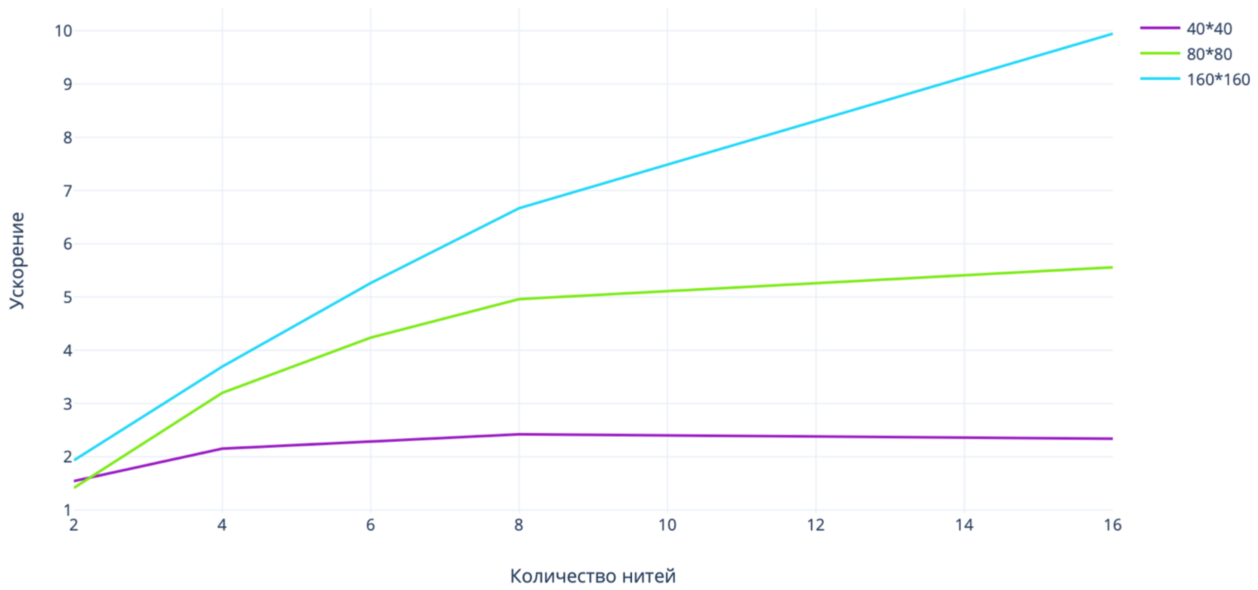
Графики зависимостей ускорений от числа потоков (без флагов оптимизации)



Зависимости времени решений от числа нитей (компиляция с флагом O2)

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	40 x 40	1.659481	1.543403
4	40 x 40	1.189708	2.152838
6	40 x 40	1.120341	2.286133
8	40 x 40	1.057279	2.422490
16	40 x 40	1.094842	2.339377
2	80 x 80	43.785937	1.415766
4	80 x 80	19.366747	3.200882
6	80 x 80	14.629144	4.237478
8	80 x 80	12.495609	4.960996
16	80 x 80	11.153633	5.557890
2	160 x 160	86.547483	1.933513
4	160 x 160	45.297374	3.694268
6	160 x 160	31.794382	5.263214
8	160 x 160	25.095805	6.668072
16	160 x 160	16.825990	9.945367

Графики зависимостей ускорений от числа потоков (компиляция с флагом O2)



Зависимости времени решений от числа нитей (компиляция с флагом O3)

Число OpenMP-нитей	Число точек сетки M x N	Время решения	Ускорение
2	40 x 40	1.881945	1.051024
4	40 x 40	1.381757	1.431489
6	40 x 40	1.243437	1.590728
8	40 x 40	1.138108	1.737946
16	40 x 40	1.183627	1.671109
2	80 x 80	25.888349	1.896905
4	80 x 80	13.115685	3.744199
6	80 x 80	11.555275	4.249810
8	80 x 80	9.108469	5.391436
16	80 x 80	8.853903	5.546450
2	160 x 160	50.414782	1.902636
4	160 x 160	26.820982	3.576340
6	160 x 160	19.427241	4.937446
8	160 x 160	15.787640	6.075699
16	160 x 160	13.315621	7.203641

Графики зависимостей ускорений от числа потоков (компиляция с флагом O3)

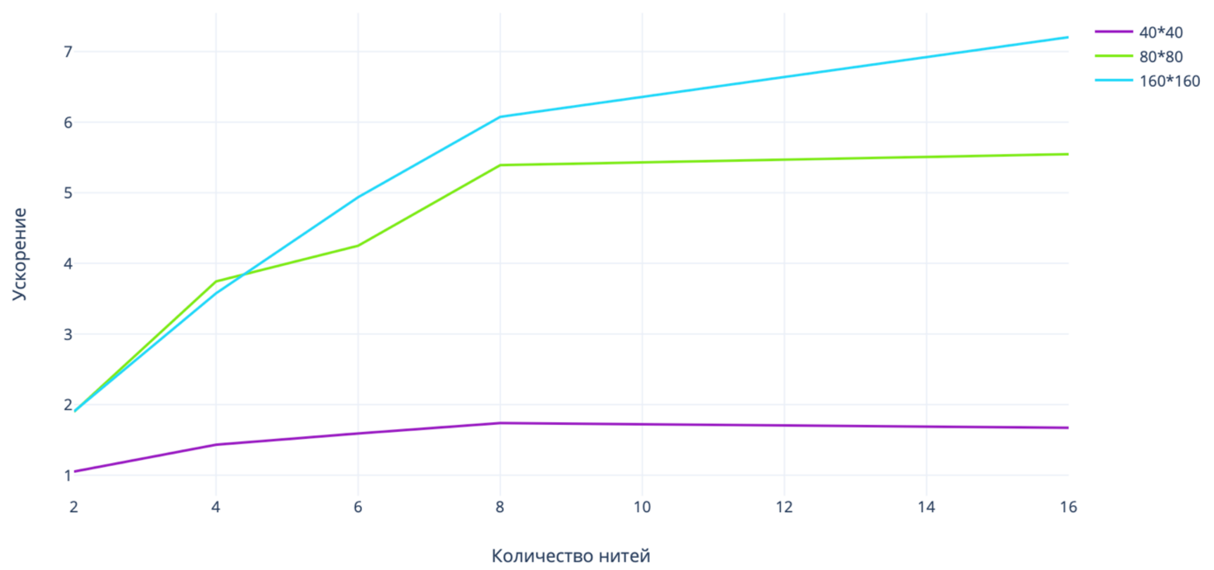


График невязки в зависимости от числа итераций

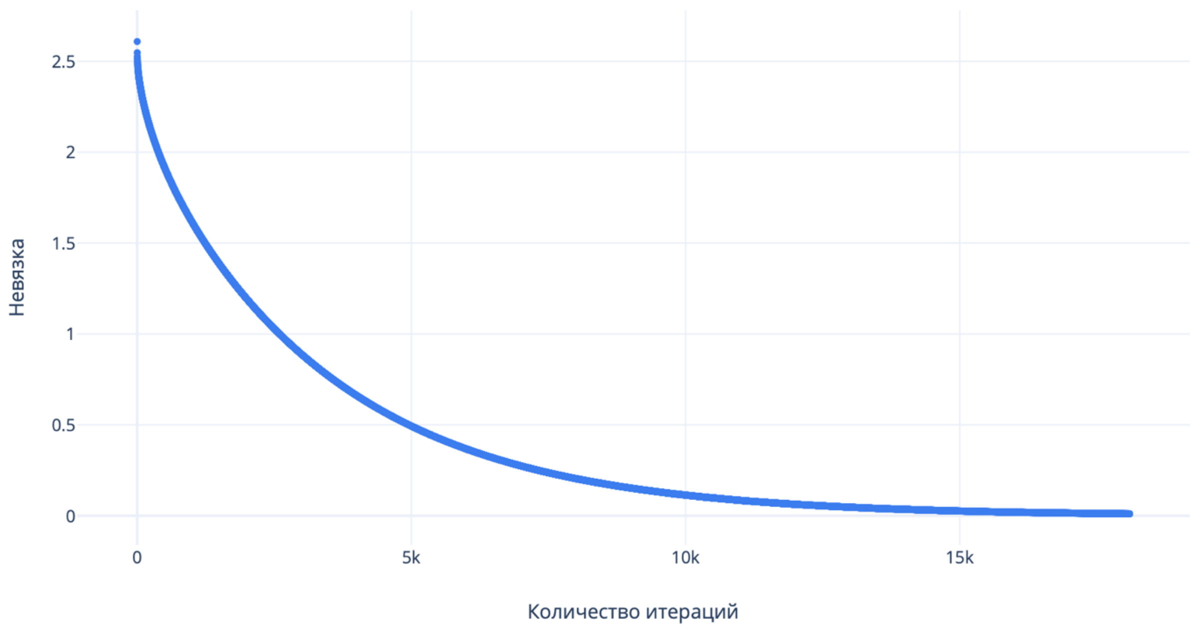


График ошибки в зависимости от числа итераций

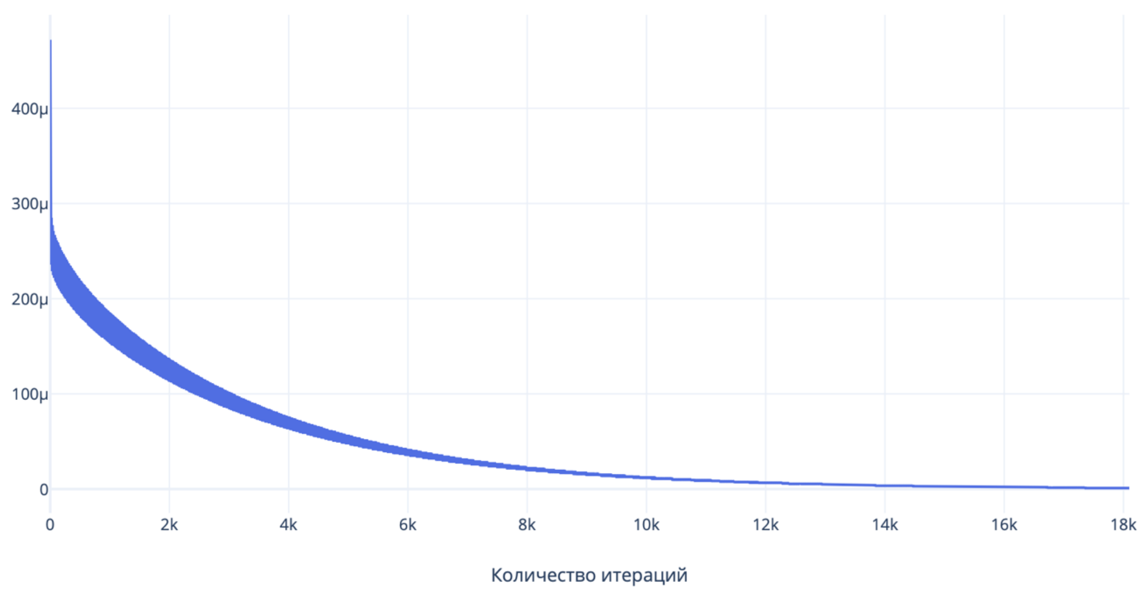


График L1 нормы невязки в зависимости от количества итераций

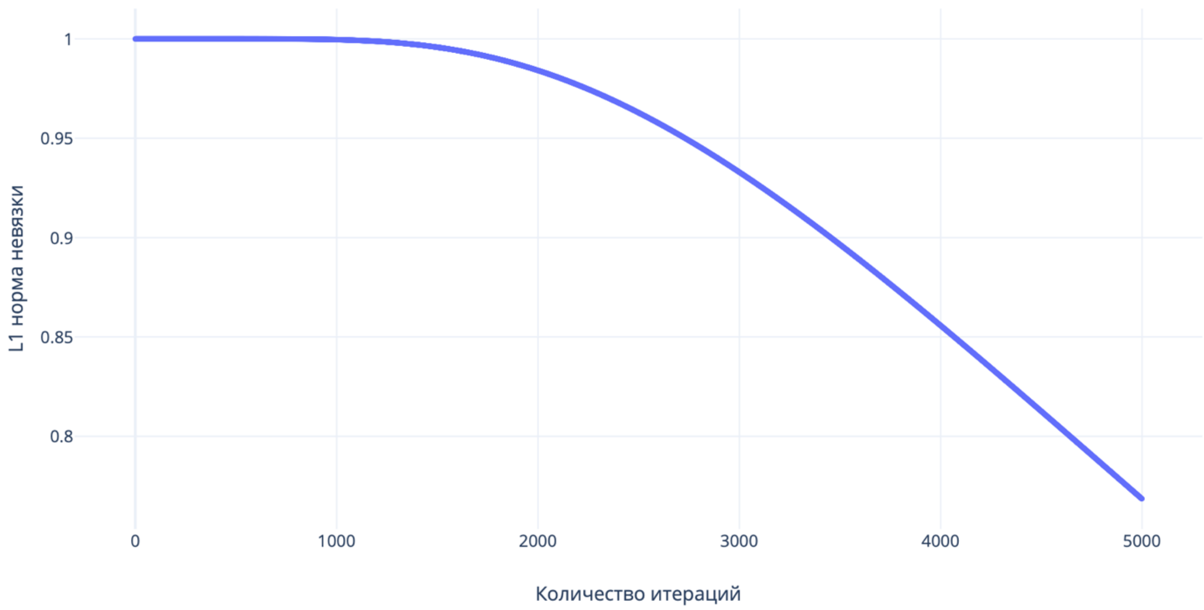
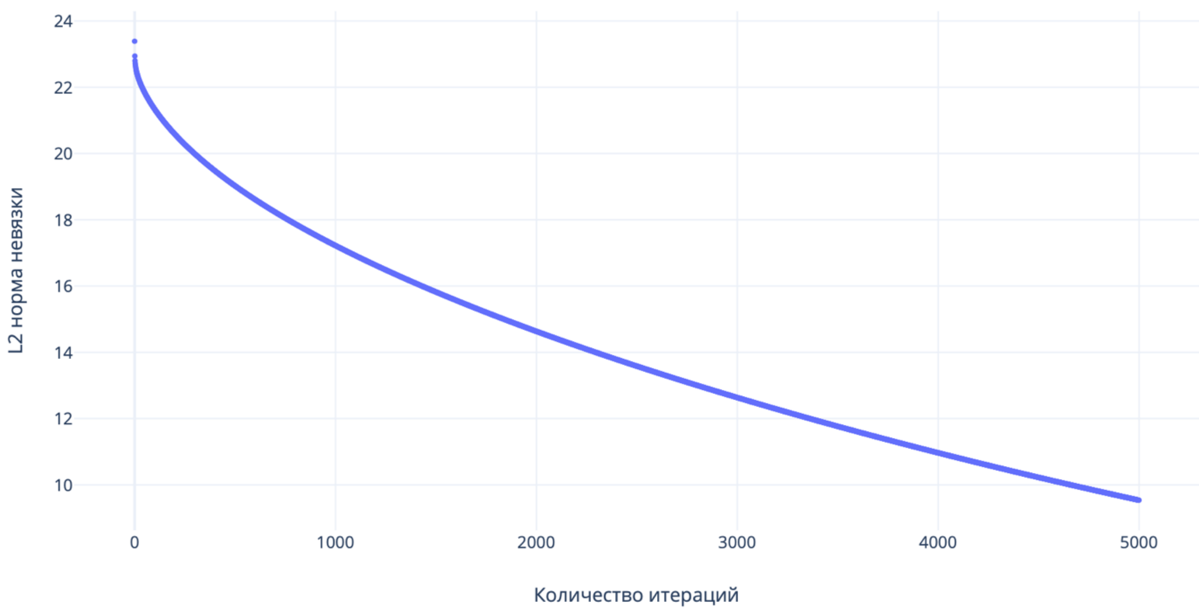


График L2 нормы невязки в зависимости от количества итераций



Рисунки приближенного решения на сетке 40*40