

Chapitre 5

Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

5.1 Equations de propagation pour \vec{E} et \vec{B}

Dans le vide, au voisinage de tout point où les charges et les courants sont nuls, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (5.2)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.3)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.4)$$

Les équations pour \vec{E} et \vec{B} s'écrivent alors :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.5)$$

$$\vec{\nabla}^2 \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0} \quad (5.6)$$

Dans le vide les ondes électromagnétiques se propagent à la vitesse de la lumière :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (5.7)$$

5.2 L'onde plane progressive sinusoïdale

5.2.1 Relation de dispersion

L'onde plane progressive sinusoïdale est définie, en notation complexe, par :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \quad (5.8)$$

où \vec{k} est le vecteur d'onde donnant la direction de propagation de l'onde plane.

En utilisant la définition du laplacien vectoriel dans un système de coordonnées cartésiennes, on peut montrer que :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = -k^2 \vec{E} \quad (5.9)$$

L'équation de propagation s'écrit alors sous la forme

$$\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right] \vec{E} = \vec{0} \quad (5.10)$$

L'onde plane progressive sinusoïdale constitue une solution particulière de l'équation d'onde seulement si la relation suivante, dite relation de dispersion, est satisfaite :

$$k = \frac{\omega}{c} \quad (5.11)$$

5.2.2 Structure de l'onde uniforme plane

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Gauss. En absence de charges électriques $\rho = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.12)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -i \vec{k} \cdot \vec{E} = 0 \quad (5.13)$$

Soit encore $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$; ce qui revient à dire que le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire à la direction de propagation donnée par le vecteur d'onde \vec{k} . Le champ électrique est dit transversal.

L'onde plane progressive sinusoïdale doit également satisfaire le théorème de Maxwell-Faraday :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (5.14)$$

On montre aisément que pour une onde plane progressive sinusoïdale :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -i \vec{k} \times \vec{E} \quad (5.15)$$

D'où

$$-i \vec{k} \times \vec{E} = -i \omega \vec{B} \quad (5.16)$$

On en déduit le champ magnétique \vec{B}

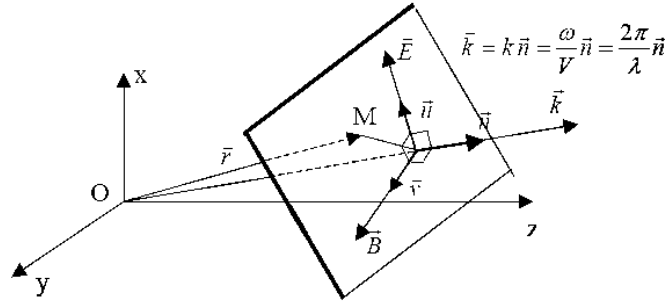
$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.17)$$

En tenant compte des propriétés du produit vectoriel, on constate que :

- Le champ magnétique est perpendiculaire au plan (\vec{k}, \vec{E}) . Le champ magnétique d'une onde plane progressive est donc transversal.
- La direction du champ magnétique est telle que le trièdre $(\vec{k}, \vec{E}, \vec{B})$ est un trièdre direct.

- En tenant compte de la relation de dispersion, $\omega = kc$, le module du champ magnétique est : $\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$

Cet ensemble de propriétés permet de définir la structure de l'onde plane progressive harmonique (Figure ci-dessous).



5.3 Polarisation

5.3.1 Onde de polarisation rectiligne

Une onde électromagnétique plane est dite de polarisation rectiligne si le champ \vec{E} garde une direction constante (polarisation rectiligne). Dans le cas d'une variation sinusoïdale en fonction du temps il s'écrit en notation réelle :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.18)$$

où

\vec{E}_0 = vecteur constant

ω = pulsation de la fonction sinusoïdale

\vec{k} : vecteur d'onde perpendiculaire au plan d'onde avec $k = \omega/c$

$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$: phase instantanée ou plus simplement phase de la grandeur variable.

$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$ vitesse de propagation dans le vide .

Les vecteurs forment toujours un trièdre direct et

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega} \quad (5.19)$$

Pour préciser cette onde, supposons qu'elle se propage suivant $z'z$ d'où

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kz) \quad (5.20)$$

On constate une double périodicité :

- Une périodicité temporelle : pour z donné le champ varie sinusoïdalement en fonction du temps avec une période

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (5.21)$$

ou une fréquence

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (5.22)$$

(f est en hertz).

- Une périodicité spatiale : à un instant t donné le champ varie sinusoidalement en fonction de z avec une période

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (5.23)$$

(λ est appelée la longueur d'onde dans le vide). On peut remarquer que la longueur d'onde λ est égale à la distance parcourue par l'onde pendant une période.

5.3.2 Onde de polarisation quelconque

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que le champ \vec{E} (donc \vec{B} également) gardait une direction constante. Dans le cas général, il n'en est pas toujours ainsi et les composantes du champ peuvent se mettre sous la forme :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - kz - \phi_1) \quad (5.24)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - kz - \phi_2) \quad (5.25)$$

ϕ_1, ϕ_2 pouvant être différentes.

Etudions le comportement du champ \vec{E} dans le plan $z = 0$. Les résultats obtenus se retrouvent avec un décalage temporel dans tout plan $z = cte$. Les composantes du champ s'écrivent :

$$E_x = E_{0x} \cos(\omega t - \phi_1) \quad (5.26)$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\omega t - \phi_2) \quad (5.27)$$

$$E_z = 0 \quad (5.28)$$

et si l'on prend pour origine des temps un instant où E_x passe par sa valeur maximale on a :

$$\frac{E_x}{E_{0x}} = \cos(\omega t) \quad (5.29)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t - \phi) \quad (5.30)$$

avec $\phi = \phi_2 - \phi_1$.

On peut déjà dire que l'extrémité du vecteur décrit une courbe inscrite dans un rectangle de côtés $2E_{0x}$ et $2E_{0y}$. D'autre part en développant l'expression de $\frac{E_y}{E_{0y}}$ et en éliminant le temps il vient :

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \cos(\omega t) \cos(\phi) + \sin(\omega t) \sin(\phi) \quad (5.31)$$

$$\frac{E_y}{E_{0y}} = \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) + \sqrt{1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2} \sin(\phi) \quad (5.32)$$

$$\left[\frac{E_y}{E_{0y}} - \frac{E_x}{E_{0x}} \cos(\phi) \right]^2 = \left[1 - \left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 \right] \sin^2(\phi) \quad (5.33)$$

$$\left(\frac{E_x}{E_{0x}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{0y}}\right)^2 - 2\frac{E_x}{E_{0x}}\frac{E_y}{E_{0y}}\cos(\phi) = \sin^2(\phi) \quad (5.34)$$

Pour ϕ quelconque, cette équation est celle d'une ellipse : on dit que l'onde a une polarisation elliptique ; pour $\phi = m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) l'ellipse dégénère en une droite et l'onde est dite à polarisation rectiligne. Enfin si $E_{0x} = E_{0y}$ et si $\phi = (2m + 1)\pi/2$ l'onde est dite à polarisation circulaire.

5.4 Energie électromagnétique : vecteur de Poynting

La propagation de l'énergie se manifeste expérimentalement dans de nombreux cas :

- On peut ressentir son effet si l'on s'expose aux rayons solaires ou au rayonnement d'une source chaude ;
- De même tout émetteur radio expédie de l'énergie à travers l'espace, une infime partie de cette dernière étant captée par votre récepteur radio.

Nous allons essayer de relier localement cette énergie qui se propage, au champ électromagnétique qui la transporte. Nous supposons le milieu de propagation parfait, c'est à dire homogène, isotrope et linéaire.

5.4.1 Onde de forme spatiale et temporelle quelconques

Nous admettrons que les densités d'énergie électrique et magnétique calculées en régime stationnaire sont toujours valables en régime variable ; la densité d'énergie électromagnétique w en un point quelconque du milieu parcouru par une onde électromagnétique est donc à chaque instant :

w = densité d'énergie électrique + densité d'énergie magnétique

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right) \quad (5.35)$$

Considérons dans le milieu, un volume τ limité par une surface (S) . L'énergie électromagnétique qu'il contient est à chaque instant :

$$W = \iiint_{(\tau)} w \, d\tau \quad (5.36)$$

Pendant un temps dt l'accroissement d'énergie dans (τ) sera dW et la puissance instantanée p' acquise par ce volume sera

$$p' = \frac{dW}{dt} = \iiint_{(\tau)} \frac{\partial w}{\partial t} d\tau \quad (5.37)$$

On a :

$$\vec{\nabla} \times (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} \times \left[\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (5.38)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \left[\vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \right] - \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} \quad (5.39)$$

D'après une relation de transformation, on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \left[\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right] = \frac{\vec{B}}{\mu_0} \cdot \vec{\nabla} \times (\vec{E}) - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (5.40)$$

donc

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \quad (5.41)$$

et

$$p' = -\iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.42)$$

La puissance électromagnétique instantanée perdue par le volume (τ) est :

$$-p' = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.43)$$

Elle représente la puissance électromagnétique qui sort du volume (τ) , c'est à dire la puissance moyenne p rayonnée par ce volume.

$$p = \iiint_{(\tau)} \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) d\tau \quad (5.44)$$

D'après la formule d'Ostrogradsky, on peut écrire :

$$p = \iint_{(S)} \left(\vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} \quad (5.45)$$

Le vecteur

$$\vec{R} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \quad (5.46)$$

est appelé le vecteur de Poynting. Sa direction donne en chaque point, la direction d'écoulement de l'énergie et son flux à travers une surface est égal à la puissance électromagnétique instantanée rayonnée par cette surface. Les courbes tangentes en chaque point au vecteur de Poynting peuvent être considérées comme des trajectoires de l'énergie ; on les appelle les *rayons électromagnétiques*.

5.4.2 Onde plane progressive et uniforme sinusoïdale

Puisque $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{n})$ forment un trièdre trirectangle direct le vecteur \vec{R} a même direction et sens que \vec{k} c'est à dire que l'énergie s'écoule dans le sens de propagation (ce résultat n'est pas général ; en effet dans un milieu anisotrope par exemple \vec{R} et \vec{k} ne sont pas colinéaires).

La puissance instantanée p_u traversant une surface unitaire (S) perpendiculaire à la direction de propagation est

$$p_u = \iint_{(S)} \vec{R} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \|\vec{R}\| dS = \|\vec{R}\| \iint_{(S)} dS = \|\vec{R}\| S \quad (5.47)$$

La puissance moyenne traversant (S) est alors

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T p_u dt = \frac{1}{T} \int_0^T \|\vec{R}\| dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left\| \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} \right\| dt \quad (5.48)$$

or $\vec{B} \perp \vec{E}$, et $\|\vec{B}\| = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} \|\vec{E}\|$, d'où

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T E^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} dt \quad (5.49)$$

Si l'onde est polarisée rectilignement alors

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (5.50)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) dt \quad (5.51)$$

$$\langle P_u \rangle = \frac{E_0^2}{T} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \int_0^T \frac{1}{2} [1 + \cos[2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]] dt \quad (5.52)$$

$$\langle P_u \rangle = E_{eff}^2 \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} = \frac{E_{eff}^2}{Z_0} \quad (5.53)$$

où E_{eff} est la valeur efficace de E .

Le flux d'énergie traversant par unité de temps l'unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation est une constante dépendant du milieu et proportionnelle au carré de la valeur efficace du champ électrique.

5.5 Relations de passage

Composante tangentielle et composante normale de \vec{E}

A la traversée d'une surface (Σ) portant des charges avec une densité superficielle σ , les relations locales s'écrivent :

$$\vec{E}_{T2} - \vec{E}_{T1} = 0 \quad (5.54)$$

$$E_{N2} - E_{N1} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad (5.55)$$

où \vec{E}_T est la composante de \vec{E} dans le plan tangent à (Σ) en M , tandis que E_N mesure de la composante de \vec{E} suivant la normale \vec{n} en M et orientée de la face (1) vers la face (2) de (Σ).

Composante tangentielle et composante normale de \vec{B}

A la traversée d'une surface (Σ) séparant parcourue par des courants de densité superficielle \vec{j}_S , les relations locales \vec{B} deviennent :

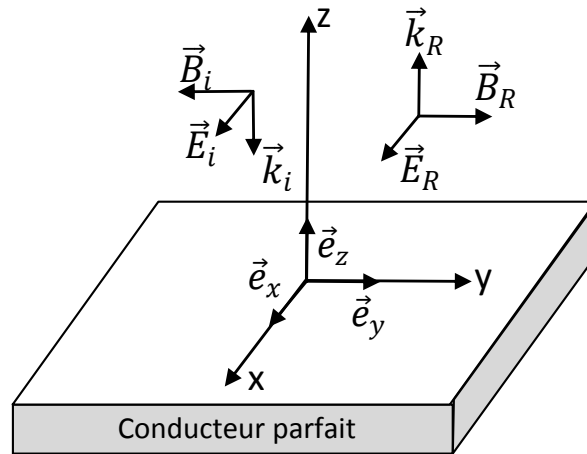
$$B_{N2} = B_{N1} \quad (5.56)$$

$$\vec{B}_{T2} - \vec{B}_{T1} = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n} \quad (5.57)$$

où B_N est la composante de \vec{B} suivant la normale au point M considéré orientée de la face (1) vers la face (2) de (Σ) , tandis que \vec{B}_T est la composante de \vec{B} dans le plan tangent à (Σ) en M .

5.6 Réflexion en incidence normale sur un conducteur parfait

Considérons une onde plane incidente uniforme sinusoïdale polarisée rectilignement ($\vec{E}_i \parallel Ox$) se propageant dans le vide (ou l'air) suivant zO et arrivant sous incidence normale, à la surface plane d'un conducteur de conductivité infinie (conducteur parfait). Des considérations énergétiques montrent qu'il n'y pas d'onde transmise ($\vec{E}_T = \vec{0}$ et $\vec{B}_T = \vec{0}$) et que les seuls courants vrais pouvant être induits par cette onde le sont sur la surface du métal. Les raisons de symétrie impliquent que les directions de polarisation des vecteurs incident et réfléchi sont identiques.



Les champs électrique et magnétique des ondes incidente et réfléchie sont

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.58)$$

$$\vec{E}_{0R} = E_{0R} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_R = \frac{E_{0R}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.59)$$

La continuité de la composante tangentielle du champ électrique permet d'écrire à la traversée de la surface de séparation ($z = 0$)

$$E_{0i} + E_{0R} = 0 \quad \text{d'où} \quad E_{0R} = -E_{0i} \quad (5.60)$$

Le champ électrique réfléchi a même amplitude que le champ électrique incident et il est déphasé de π par rapport à ce dernier. Pour que le trièdre $(\vec{k}_R, \vec{E}_R, \vec{B}_R)$ soit direct, il faut que le champ magnétique réfléchi \vec{B}_R soit dans le même sens que le champ magnétique incident \vec{B}_i c'est à dire que sa réflexion s'effectue sans changement de phase. En définitive les ondes incidente et réfléchie s'écrivent

$$\vec{E}_i = E_{0i} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_i = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t + kz)} \vec{e}_y \quad (5.61)$$

$$\vec{E}_R = -E_{0i} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_x; \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} e^{i(\omega t - kz)} \vec{e}_y \quad (5.62)$$

Dans le vide, l'onde résultante est la somme de l'onde incidente et de l'onde réfléchie et ses vecteurs champs ont pour valeur

$$\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_R = E_{0i} (e^{+ikz} - e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_x \quad (5.63)$$

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) e^{i(\omega t + \frac{\pi}{2})} \vec{e}_x \quad (5.64)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_R = -\frac{E_{0i}}{c} (e^{+ikz} + e^{-ikz}) e^{i\omega t} \vec{e}_y \quad (5.65)$$

$$\vec{B} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) e^{i(\omega t + \pi)} \vec{e}_y \quad (5.66)$$

En revenant à la notation réelle

$$\vec{E} = 2E_{0i} \sin(kz) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \vec{e}_x \quad (5.67)$$

$$\vec{B} = 2\frac{E_{0i}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \pi) \vec{e}_y \quad (5.68)$$

Ces relations montrent que les champs ne se propagent plus mais qu'ils oscillent sinusoidalement en fonction du temps avec une amplitude qui est fonction de la distance z , leur déphasage étant de $\frac{\pi}{2}$ on dit que l'onde est stationnaire.

L'amplitude du champ électrique est nulle pour $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = l\pi$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), c'est à dire pour $z = l\frac{\lambda}{2}$.

L'amplitude du champ magnétique est nulle pour $k_1 z = \frac{2\pi}{\lambda} z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\pi$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), c'est à dire pour $z = \left(l + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$.

Les points où l'amplitude est nulle sont appelés les nœuds et les points où l'amplitude est maximale sont appelés les ventres.

5.7 Exercices

Généralités sur les ondes

Exercice 1 : Vérifier que les fonctions suivantes :

1. $E(x, t) = E_0 \sin\left[\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$
2. $E(x, t) = E_0 \exp\left[j\omega\left(t \pm \frac{x}{c}\right)\right]$

$$3. E(x, t) = E_0 \cos[k(x \pm ct)]$$

sont solutions de l'équation :

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$$

où x , t et c représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation. Déterminer les dimensions des constantes E_0 , ω , k .

Exercice 2 : Le champ électrique d'une onde électromagnétique se propageant dans le vide est donnée par :

$$\vec{E} = E_0 \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right] \vec{e}_y$$

1. Quelle est la direction de polarisation ? Quelle est la direction de propagation ? Quelle est la nature de l'onde (longitudinale ou transversale) ? Expliquer pourquoi on peut dire que cette onde est plane. Quelle est l'amplitude de cette onde ? Quel terme correspond à la pulsation ? Quel terme correspond à la vitesse de propagation ?
2. Donner l'expression de la longueur d'onde λ . Quels sont les abscisses des points où l'onde est déphasée de $\pi/3$ par rapport à l'origine ($x = 0$) ? Exprimer la distance de ces points par rapport à l'origine en fonction de la longueur d'onde λ .
3. Quelle différence de phase existe-t-il entre deux points distants de $3\lambda/4$?
4. Calculer le champ magnétique \vec{B} . Exprimer le déphasage de \vec{B} par rapport à \vec{E} .
5. On superpose à cette onde, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation et se propageant dans le même sens mais déphasée de ϕ par rapport à la première.
Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de E_0 et ϕ). Que devient l'onde résultante lorsque $\phi = 0$?
6. On superpose à l'onde initiale définie au début de l'exercice, une deuxième onde progressive de même amplitude, de même pulsation mais se propageant dans le sens opposé.

Donner l'expression de l'onde résultante (amplitude et phase en fonction de E_0 et x). Quelle est la nature de l'onde obtenue ? Donner la position des maxima et des minima pour le champ électrique. Discuter le résultat obtenu.

Propagation des ondes électromagnétiques

Exercice 3 : Equations de Maxwell, équation d'ondes

1. Rappeler les équations de Maxwell reliant les vecteurs \vec{E} et \vec{B} .
2. Etablir les équations de propagation du champ \vec{E} et du champ \vec{B} dans le vide.
3. Les équations de propagation de \vec{E} et de \vec{B} dans le vide admettent comme solutions dans le cas de la propagation d'une onde plane monochromatique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})},$$

où \vec{E}_0 et \vec{B}_0 sont deux vecteurs constants.

(a) Calculer

- $\vec{\nabla} \times \vec{E}$,
- $\vec{\nabla} \times \vec{B}$,
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$,
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}$.

(b) Montrer que

- \vec{E} et \vec{B} sont transversaux
- \vec{E} et \vec{B} sont perpendiculaires.

4. On considère une onde plane électromagnétique

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{e}_x$$

- Préciser
 - le sens et la vitesse de propagation,
 - la direction de vibration de \vec{E} .
- Déterminer \vec{B} .

5. On considère une onde plane électromagnétique suivante :

$$\vec{E}(z, t) = E_1 \cos(kz - \omega t) \vec{e}_x + E_2 \sin(kz - \omega t) \vec{e}_y$$

- Préciser
 - le sens et la vitesse de propagation,
 - la nature de la polarisation de \vec{E} .
- Déterminer \vec{B} .

Exercice 4 : Soit une onde électromagnétique plane et progressive, de pulsation ω se propageant dans le vide. Le champ magnétique \vec{B} est défini par ses composantes, par rapport à un repère orthonormé $Oxyz$:

$$B_x = 0, \quad B_y(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx), \quad B_z = 0$$

1. A l'aide des équations de Maxwell, calculer les composantes du champ électrique \vec{E} en fonction de B_0 .
2. Calculer les composantes du vecteur de Poynting \vec{R} .
3. Quelle est la puissance moyenne rayonnée à travers une surface S perpendiculaire à la direction de propagation.

Exercice 5 : Soit une onde électromagnétique harmonique progressive plane, de pulsation ω et d'amplitude E_0 se propageant dans le vide. Le champ électrique de cette onde est parallèle à l'axe des z et la direction de propagation est contenue dans le plan xOy et fait un angle $\alpha = \frac{\pi}{4}$ avec l'axe des x .

1. Ecrire les expressions des champs $\vec{\mathcal{E}}$ et $\vec{\mathcal{B}}$ qui décrivent cette onde.
2. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$.
3. En déduire la valeur instantanée et la valeur moyenne du flux de puissance (puissance par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation).

Exercice 6 : Un laser produit un faisceau de longueur d'onde $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$. La puissance moyenne de l'onde est 1 mW. Le diamètre du faisceau est $D = 2 \text{ mm}$.

1. Calculer la fréquence et l'intensité du rayonnement.
2. Calculer les amplitudes des champs électrique \vec{E} et magnétique \vec{B} du faisceau.
3. Calculer l'énergie électromagnétique contenue dans 0.7 m de faisceau.

Exercice 7 : Un laser en continu émet en permanence 100 W dans un faisceau de 0.25 cm^2 de section. Quelle est l'amplitude du champ électrique associé aux ondes planes que transporte le faisceau ?

Exercice 8 : On considère une onde électromagnétique, progressive, polarisée rectilignement et sinusoïdale de pulsation ω , se propageant dans le vide (caractérisé par ε_0 et $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ (MKSA)). L'espace est rapporté à un trièdre orthonormé direct $Oxyz$. L'onde se propage dans la direction \vec{Ou} du plan Oxy , faisant un angle θ avec l'axe Ox . Le champ électrique de l'onde étant parallèle à Oz et $E(O, t) = E_0 \cos(\omega t)$, O étant l'origine de l'espace.

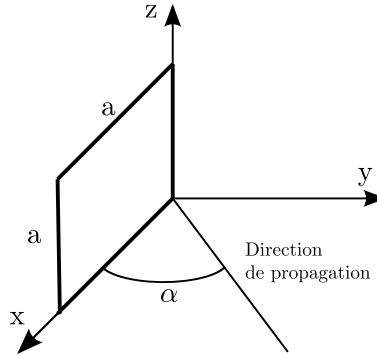
1. Ecrire les composantes du vecteur \vec{k} puis celles du champ $\vec{E}(M, t)$ au point M de coordonnées x, y et à l'instant t .
2. En déduire les composantes du champ magnétique de l'onde $\vec{B}(M, t)$.
3. Calculer la densité volumique d'énergie électromagnétique $\mathcal{E}(M, t)$ puis sa valeur moyenne.
4. Exprimer les composantes du vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{P}}(M, t)$ puis son module et enfin sa valeur moyenne. Quelle relation a-t-on entre les valeurs moyennes de \mathcal{E} et de $\|\vec{\mathcal{P}}\|$?
5. Cette onde transporte une intensité moyenne de 0.2 W/m^2 , évaluée à travers une surface normale à la direction de propagation. Quelles sont les valeurs de E_0 et de l'amplitude B_0 du champ magnétique ?

Exercice 9 : Une onde électromagnétique plane, sinusoïdale se propage dans le vide. Son champ électrique est porté par l'axe Oy d'un repère $Oxyz$, tel que :

$$\vec{E} = E_0 e^{i(\omega t - kx)} \vec{e}_y.$$

1. Quelle est la direction de propagation de cette onde ?
2. Un cadre rectangulaire $CDC'D'$ de côtés a et b de milieu O est placé dans le plan Oxy , avec a parallèle à Oy et b parallèle à Ox . Le cadre porte N tours d'un fil conducteur formant un circuit fermé. Calculer la circulation de \vec{E} le long du circuit. Dans le cas où $\lambda \gg b$, donner une expression simplifiée de la f.é.m. dans le circuit.
3. A partir des équations de Maxwell déterminer les composantes du champ magnétique \vec{B} de l'onde.
4. Si $b \gg \lambda$, on pourra considérer que \vec{B} est uniforme sur la surface du cadre et égal à sa valeur en O centre du cadre. Calculer, dans cette approximation, le flux de \vec{B} à travers le circuit et en déduire la f.e.m. induite. Comparer avec le résultat de la question 2°).
5. A.N. Calculer l'amplitude de la f.e.m. induite pour $a = 20 \text{ cm}$, $b = 20 \text{ cm}$, $\lambda = 1837 \text{ m}$, $N = 10$ et $E_0 = 1 \text{ V m}^{-1}$.

Exercice 10 : Une onde électromagnétique plane sinusoïdale, linéairement polarisée de longueur d'onde $\lambda = 10^{-2} \text{ m}$ se propage dans le vide. Son intensité moyenne est $I = 0.1 \text{ W m}^{-2}$. Sa direction de propagation se trouve dans le plan xy et fait avec l'axe des x un angle $\alpha = 45^\circ$. Le champ électrique oscille parallèlement à l'axe des z .



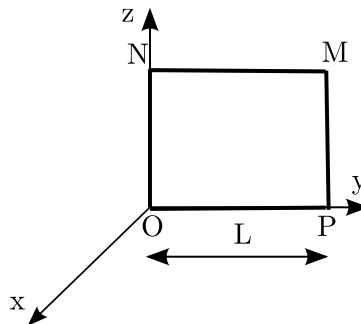
1. Sachant que le trièdre $Oxyz$ est orthonormé, établir les expressions décrivant les variations, en fonction du temps et de la position, des champs électrique et magnétique et du vecteur de Poynting.
2. Dans le plan xOz , on dispose un cadre carré de côté $a = 1 \text{ cm}$. calculer la puissance électromagnétique moyenne qui passe à travers ce cadre.

Détection d'ondes électromagnétiques

Exercice 11 : On considère une onde électromagnétique plane à polarisation rectiligne se propageant dans l'espace vide rapporté au repère orthonormé $Oxyz$. Le champ électrique \vec{E} a pour composantes

$$E_x = 0, \quad E_y = E_0 \exp[j(\omega t - kx)], \quad E_z = 0$$

On place dans le plan xOy , une spire conductrice carrée $OPMN$ de côté L , telle que $P = (L, 0, 0)$, $M = (L, L, 0)$ et $N = (0, L, 0)$.



1. Calculer les composantes de l'induction \vec{B} . En déduire celles du vecteur de Poynting \vec{R} ainsi que sa valeur moyenne $\langle R \rangle$.
2. Calculer le flux de \vec{B} à travers la spire. En déduire la f.é.m induite aux bornes de cette spire.
3. Retrouver ce résultat en calculant la circulation du champ électrique le long du périmètre $OPMN$ de la spire.

4. Expliquer pourquoi les deux méthodes donnent le même résultat.

Exercice 12 : Une onde électromagnétique sinusoïdale, plane, de fréquence $f = 2 \text{ MHz}$, se propage horizontalement dans le vide. Son vecteur champ électrique est vertical avec une amplitude $E_M = 1 \text{ mV m}^{-1}$, à l'endroit où se trouve un cadre rectangulaire, de longueur 25 cm, de largeur 15 cm, et sur lequel sont bobinées 12 spires de fil conducteur. Les grands côtés du cadre sont verticaux, et celui-ci est placé de façon à recevoir le maximum du flux de \vec{B} .

1. Calculer la longueur d'onde λ , et l'amplitude du champ magnétique B_M associé à cette onde.
2. Calculer la f.é.m e induite dans le cadre, et son amplitude e_M . Quelle erreur commet-on, lorsqu'on suppose que le champ magnétique est uniforme sur la surface du cadre.
3. Les deux extrémités du fil du cadre sont reliées aux deux armatures d'un condensateur de capacité variable C . On agit sur la capacité jusqu'à ce que la d.d.p aux bornes du condensateur soit maximale $U_M = 100 \text{ } \mu\text{V}$; la capacité est alors $C = 800 \text{ pF}$. En déduire la self L du cadre et la résistance totale du circuit.

Superposition d'ondes électromagnétiques

Exercice 13 : Soit deux ondes électromagnétiques, de même pulsation ω , dont les champs électriques \vec{E}_1 et \vec{E}_2 , de même amplitude E_0 , sont portés par le même axe $x'Ox$. La première onde se propage dans la direction \vec{Oy} , l'autre dans la direction opposée.

1. Donner l'expression de \vec{E}_1 et \vec{E}_2 .
2. Donner l'expression du champ \vec{E} résultant.
3. En déduire l'expression du champ magnétique résultant \vec{B} .
4. Calculer la valeur moyenne du module du vecteur de Poynting.

Exercice 14 : L'espace étant rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on désigne par \vec{e}_x et \vec{e}_y , les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox et Oy . Soient deux ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont les vecteurs champs électriques associées aux ondes 1 et 2 sont respectivement :

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= E_0 \exp[j(\omega t - kx)] \vec{e}_z \\ \vec{E}_2 &= E_0 \exp[j(\omega t - ky)] \vec{e}_z\end{aligned}$$

1. On demande :
 - (a) Les vecteurs d'onde \vec{k}_1 de l'onde 1 et \vec{k}_2 de l'onde 2.
 - (b) La direction de propagation de chacune d'elles.
 - (c) la polarisation (longitudinale ou transversale) de chacune d'elles.
 - (d) Les champs \vec{H}_1 et \vec{H}_2 associés à \vec{E}_1 et \vec{E}_2 respectivement.
2. Calculer le champ électrique $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$ de l'onde résultante et l'écrire en notation réelle sous la forme :

$$\vec{E} = \vec{\mathcal{E}}(x, y) \cos[\omega t - \phi(x, y)]$$

- (a) Donner les expressions de $\vec{\mathcal{E}}(x, y)$ et de $\phi(x, y)$.
- (b) Quel est le vecteur d'onde \vec{k} de cette onde et sa direction de propagation ?
- (c) Dans quelles régions de l'espace observe-t-on des ondes stationnaires pour \vec{E} ? Donner le lieu géométrique des nœuds et celui des ventres.

Exercice 15 : L'espace étant rapporté au repère orthonormé $Oxyz$, on désigne par \vec{e}_x et \vec{e}_y , les vecteurs unitaires respectifs des axes Ox et Oy . Soient deux ondes électromagnétiques planes se propageant dans le vide et dont le vecteur excitation du champ magnétique résultant est donné par :

$$\vec{H} = H_m \cos(\omega t - ky) \vec{e}_x - H_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_y$$

1. Calculer, en fonction de H_m , les composantes du champ électrique \vec{E} .
2. Donner les caractéristiques du champ électrique \vec{E} (polarisation, direction de propagation).

Exercice 16 : Deux ondes électromagnétiques harmoniques planes et progressives, toutes deux de pulsation ω et d'amplitude E_0 se propagent dans le vide suivant respectivement l'axe des x et l'axe des y . Les champs électriques des deux ondes sont parallèles à l'axe des z .

1. Calculer les composantes du champ électrique résultant $\vec{\mathcal{E}}$.
2. Déterminer la direction de propagation et la vitesse de phase V_ϕ de l'onde résultante.
3. Déterminer les plans dans lesquels $|\vec{\mathcal{E}}|$ est maximum, minimum.
4. Calculer les composantes du champ magnétique résultant $\vec{\mathcal{B}}$.
5. Déterminer les plans dans lesquels le vecteur $\vec{\mathcal{B}}$ effectue des oscillations circulaires.
6. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{\mathcal{R}}$.
7. En déduire la valeur instantanée et la valeur moyenne du flux de puissance (puissance par unité de surface perpendiculaire à la direction de propagation).

Onde sphérique

Exercice 17 :

Dans le vide et en absence de courant, le champ électrique en un point M de coordonnées sphériques (r, θ, φ) s'écrit :

$$\vec{E} = \frac{E_0}{r} e^{i(\omega t - kr)} \vec{e}_\theta$$

avec $k = \omega/c$ où c est la vitesse de la lumière.

1. Calculer le champ magnétique \vec{B} associé.
2. Calculer la densité volumique d'énergie de ce champ électromagnétique. Comment varie cette grandeur en fonction de r .
3. (a) Déterminer le vecteur de Poynting de ce champ électromagnétique.

- (b) Quelle est l'orientation de ce vecteur ? Commenter. Faire un dessin montrant l'orientation des différentes grandeurs vectorielles en M .
4. Calculer la puissance électromagnétique traversant une sphère d'origine O et de rayon r ainsi que sa valeur moyenne. Conclure.
- A.N : Calculer la puissance moyenne pour :
 $E_0 = 3 \text{ mV m}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
5. Quel est le type d'onde qui pourrait être décrit par ce champ électromagnétique ?