Droites du plan

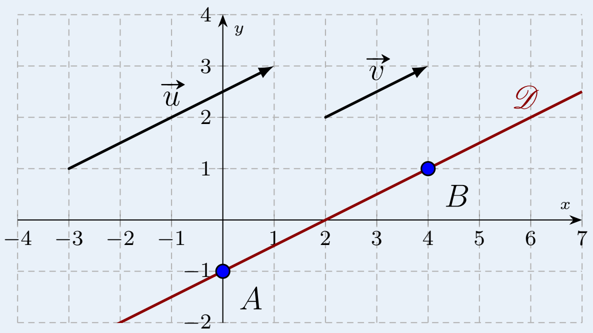
I - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs

On se place dans un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ du plan.

1. Vecteurs directeurs

DÉFINITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points de $\mathscr{D}$. On appelle **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite $\mathscr{D}$.



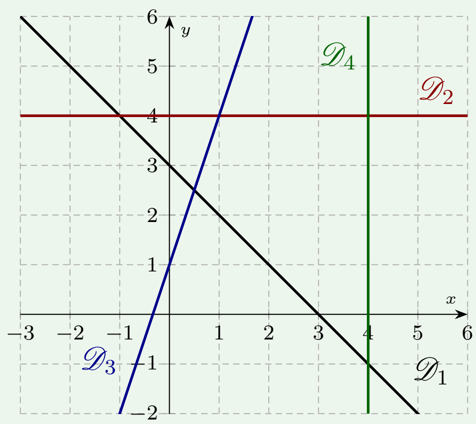
REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : Ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

EXEMPLE

Donnons les coordonnées de **plusieurs** vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.

- $\mathscr{D}_1$: $\vec{u}\binom{1}{-1}$ et $\vec{v}\binom{2}{-2}$
- $\mathscr{D}_2$: $\vec{u}\binom{1}{0}$ et $\vec{v}\binom{-3}{0}$
- $\mathscr{D}_3$: $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{2}{4}$
- $\mathscr{D}_4$: $\vec{u}\binom{0}{1}$ et $\vec{v}\binom{0}{-4}$



2. Équations cartésiennes

PROPOSITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{D}$ possède une équation de la forme $ax+by+c=0$, appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Un point $M(x;y)$ appartient à cette droite ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Il faut donc que $det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$. Cela donne alors :

$$det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)=0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax+by+(-ax_A-by_A)=0$$

En posant $c=-ax_A-by_A$, on trouve bien la forme voulue : $\boxed{ax+by+c=0}$.

EXEMPLE

Un vecteur directeur de $\mathscr{D}$: $4x-8y+3=0$ est $\vec{u}\binom{8}{4}$. On peut en déduire un autre : $\vec{v}\binom{2}{1}$.

COROLLAIRE

Si les coordonnées $(x;y)$ d'un point M vérifient l'équation $ax+by+c=0$ d'une droite $\mathscr{D}$, alors M appartient à la droite $\mathscr{D}$ dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

EXEMPLES

Déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

— $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-1}{5}$:
On sait alors qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est $5x+y+c=0$ où c reste à trouver. De plus, en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on obtient :

$$\begin{aligned}5\times3+1+c&=0\\16+c&=0\\c&=-16\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est donc $5x+y-16=0$.

— $\mathscr{D}_2$ passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$:
$\overrightarrow{BC}\binom{-4}{-6}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$. On obtient alors l'équation $-6x+4y+c=0$. Pour trouver c, on remplace x et y par les coordonnées de A ou B. Avec A, cela donne :

$$\begin{aligned}-6\times5+4\times3+c&=0\\-30+12+c&=0\\c&=18\end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$ est donc $-6x+4y+18=0$. A noter que l'on peut simplifier cette équation pour obtenir $-3x+2y+9=0$.