Suites arithmétiques et géométriques

PROGRAMME

— Suites arithmétiques : évolutions absolues constantes (croissance linéaire).
— Suites géométriques : évolutions relatives constantes (croissance exponentielle).
  — Relation de récurrence
  — Sens de variation
  — Représentation graphique
— Compétences
  — Reconnaitre si une situation relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle.
  — Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
  — Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
  — Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.

I - Suites arithmétiques

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique a, on a besoin de deux nombres :

— Son premier terme a_0
— Sa raison r

On a alors la relation $a_{n+1} = a_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 \xrightarrow{+r} a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

EXEMPLE

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2 = 3 \\ u_2 &= u_1 - 2 = 1 \\ u_3 &= u_2 - 2 = -1 \\ u_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

REMARQUE

La différence entre deux termes successifs vaut toujours r : Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = r$.

- ▶ Exos 32,(33) p91
- ▶ Exos 70,71 p94
- ▶ Exos 37,76,(78) p91/94
- ▶ Exo 75p94

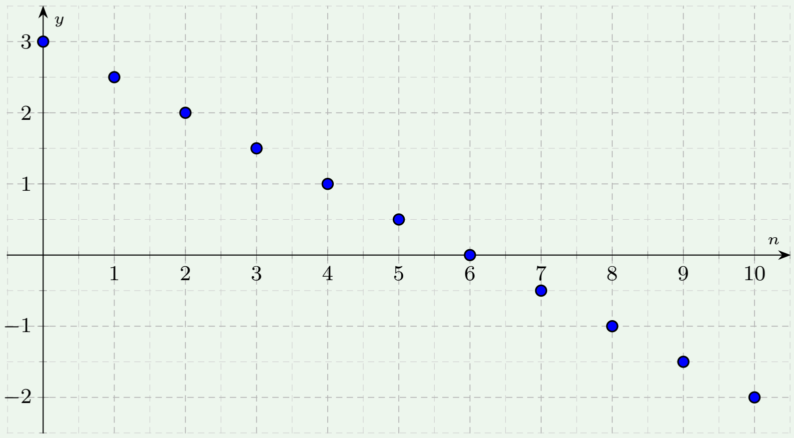
▶ Preuves : Exos 75,77 p94

2. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.

EXEMPLE



On a représenté une suite arithmétique u ci-dessus. On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2{,}5$. Alors $r = u_1 - u_0 = 2{,}5 - 3 = -0.5$. La suite u est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison $r = -0.5$.

▶ Exo 36 p91

3. Variations des suites arithmétiques

PROPOSITION

— Si $r > 0$, alors la suite a est croissante.
— Si $r < 0$, alors la suite a est décroissante.
— Si $r = 0$, alors la suite a est constante.

EXEMPLE

Soit a la suite arithmétique définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 5$. La raison de cette suite est $r = -5 < 0$ donc a est décroissante.

▶ Exo 83 p95

II - Suites géométriques, cas positif

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite géométrique g, on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme g_0
- Sa raison q

On a alors la relation $g_{n+1} = q \times g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd} g_0 \arrow[r, bend left, "\times q"] & g_1 \arrow[r, bend left, "\times q"] & g_2 \arrow[r, bend left, dashed, "\times q"] & \dots \end{tikzcd}$$

▶ On se restreindra au cas où g_0 et q sont strictement positifs.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

REMARQUE

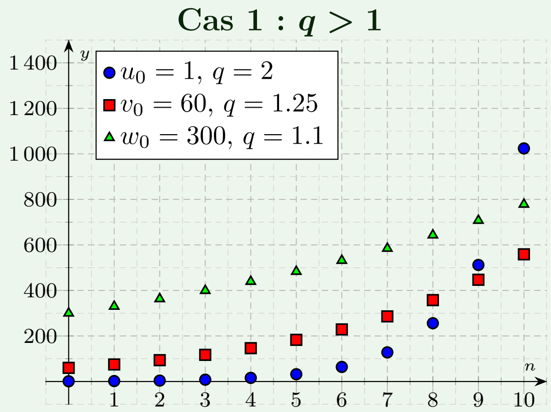
Le quotient de deux termes successifs vaut toujours q : $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$.

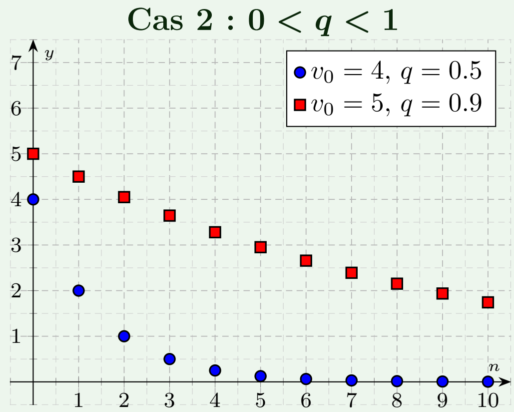
- ▶ Exos 34,35 p91
- ▶ Exos 72,73,(82) p94
- ▶ Exo 80p94

▶ Preuves : Exos 79,81 p94

2. Représentation graphique des suites géométriques

EXEMPLES





► Exo 40p91

3. Variations des suites géométriques

PROPOSITION

— Si $q > 1$, alors la suite g est croissante.

— Si $0 < q < 1$, alors la suite g est décroissante.

— Si $q = 1$, alors la suite g est constante.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique définie par $g_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = 0{,}9 \times g_n$. La raison de cette suite est $q = 0{,}9 < 1$ donc g est décroissante.

► Exo 84 p95

► Exo 74 p94
► Exo 94 p96
► Exos 86,88 p95