

# NOMBRES RÉELS

## I - Les ensembles de nombres

### 1. Les entiers

#### DÉFINITION

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note  $0 \in \mathbb{N}$ . Par contre,  $-3$  n'en est pas un, on note  $-3 \notin \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

#### DÉFINITION

$\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs :  $1 \in \mathbb{Z}$ ,  $-2 \in \mathbb{Z}$  mais  $0.5 \notin \mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

#### REMARQUE

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est donc inclus dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ . On note  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

### 2. Les nombres décimaux

#### DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$ , où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D}, 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D}, \frac{1}{3} = 0.333\dots \notin \mathbb{D}$$

► Démo en annexe

#### REMARQUE

Tout entier relatif est aussi un entier décimal :  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  : Par exemple,  $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$ .

### 3. Les nombres rationnels

#### DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs et  $q$  est non nul. On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

#### PROPOSITION

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

#### EXEMPLE

$x = 0.0909\dots$  est rationnel :  $100x = 9.0909\dots$  donc  $100x - x = 9$  d'où  $99x = 9$  puis  $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ .

#### EXERCICE

Faire de même avec  $x = 0.1666\dots$  :  $10x = 1.666\dots$  donc  $10x - x = 1.5$  et alors  $9x = \frac{3}{2}$  puis  $x = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ .

#### REMARQUE

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel :  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

### 4. Les nombres réels

#### DÉFINITION

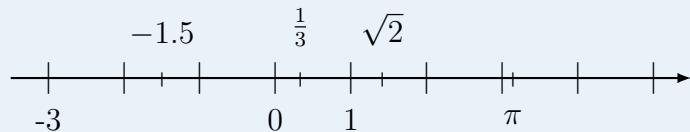
$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}}$  sont irrationnels

► Crise des irrationnels : 6ème siècle avant J.C.  
Leur découverte fait du bruit dans la communauté mathématiques de l'époque car les maths étaient alors considérées comme belles, parfaites

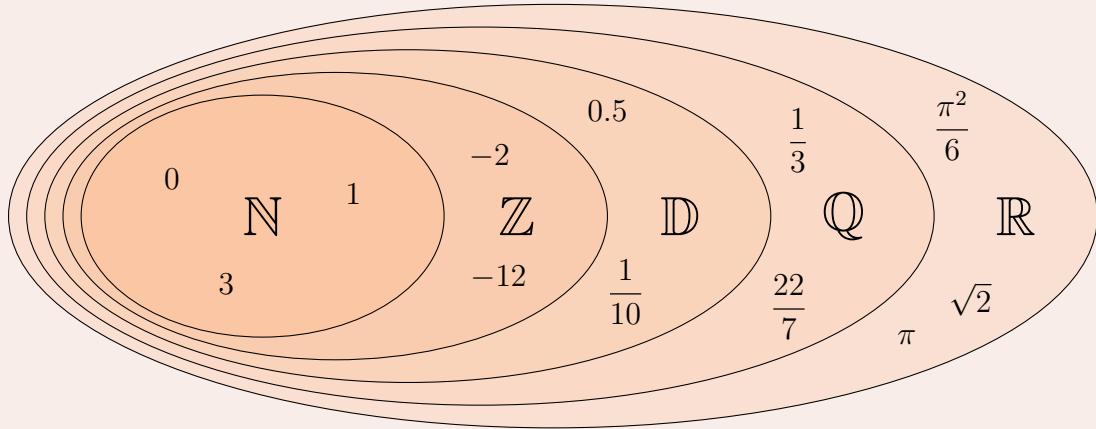
#### PROPRIÉTÉ

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



## PROPOSITION

Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .



## Encadrement décimal des réels

### DÉFINITION

Un encadrement décimal d'un nombre réel  $x$  est une écriture  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_1, d_2$  des nombres décimaux. La différence  $d_2 - d_1$  est l'amplitude de l'encadrement.

### EXEMPLE

Par exemple,  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  est un encadrement décimal de  $\sqrt{2}$  d'amplitude  $10^{-1} = 0.1$ .

### DÉFINITION

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_2 - d_1 = 10^{-n}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

L'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est celui de  $d_1$  ou  $d_2$  le plus proche de  $x$ .

Dans le cas où  $d_1$  et  $d_2$  sont à égale distance de  $x$ , l'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est  $d_2$ .

### EXEMPLE

- 3,14 est l'arrondi à  $10^{-2}$  de  $\pi$ .
- 3,142 est l'arrondi à  $10^{-3}$  de  $\pi$ .
- 2,4 est l'arrondi à  $10^{-1}$  de 2,35.

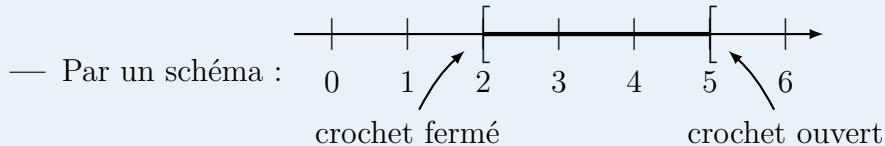
### REMARQUE

Faire un arrondi à  $10^{-n}$  signifie  $n$  chiffres après la virgule.

## II - Intervalles de $\mathbb{R}$

### DÉFINITION

On veut écrire plus simplement " Tous les nombres réels compris entre 2 et 5, 5 exclus ". Pour celà, il y a trois manières possibles :



- Par une inégalité :  $2 \leq x < 5$
- Par un intervalle :  $[2; 5[$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts.

L'intervalle noté ...	... désigne l'ensemble des réels $x$ tels que ...	Il est représenté par un segment sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	

### REMARQUES

- $a$  et  $b$  sont appelés les bornes de l'intervalle.
- Attention à ne pas confondre  $[a; b]$  et  $\{a; b\}$  : Le premier ensemble contient tous les réels compris entre  $a$  et  $b$  inclus, alors que le second ne contient que  $a$  et  $b$ .
- $-\infty$  et  $+\infty$  ne sont pas des nombres réels, on écrit donc pas  $[-\infty; a]$ .
- $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- Les quatre premiers intervalles sont dits bornés. Parmi ceux-ci, on dit que  $[a; b]$  est fermé,  $]a; b[$  est ouvert. Les deux autres sont dits semi-ouverts.

## Unions et intersections

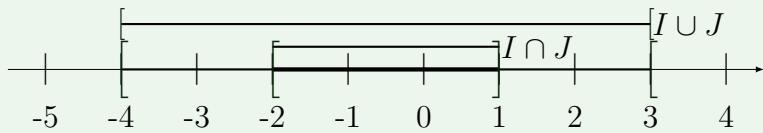
### DÉFINITION

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

- L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à  $I$  et à  $J$  est appelé intersection de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cap J$ .
- L'ensemble des réels qui appartiennent à à  $I$  ou à  $J$  est appelé réunion de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cup J$ .

### EXEMPLE

Pour  $I = [-2; 3[$  et  $J = [-4; 1]$ , on a  $I \cap J = [-2; 1]$  et  $I \cup J = ] -4; 3[$ .



► Exo

## III - Valeur absolue

### DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel  $x$  est  $-x$  lorsque  $x < 0$  ou  $x$  lorsque  $x \geq 0$ . On note :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### EXEMPLE

$|8| = 8$  mais  $|-8| = 8$  aussi. En fait, l'effet de la valeur absolue est de rendre un nombre positif (on supprime le signe  $-$ ).

### DÉFINITION

Soient  $A$  et  $B$  deux points placés sur la droite des réels, d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ . La distance entre  $a$  et  $b$  correspond à la longueur de  $AB$ . Elle se calcule à l'aide de la valeur absolue :

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

### EXEMPLE

- La distance entre 5 et  $-2$  est  $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La distance entre  $x$  et 0 est  $|x - 0| = |x|$ .

## Intervalles $[a - r; a + r]$

### PROPRIÉTÉ

Soient  $a$  et  $r$  deux réels, avec  $r > 0$ . Alors l'intervalle  $[a - r; a + r]$  contient tous les réels  $x$  qui vérifient  $a - r \leq x \leq a + r$ , autrement dit ceux à une distance inférieure à  $r$  de  $a$ , soit  $|x - a| \leq r$ .

### EXEMPLE

$$[3; 5] = [4 - 1; 4 + 1] = \{x \in \mathbb{R}, |x - 4| \leq 1\}$$

► Démonstration de  $\frac{1}{3}$  non décimal