Conditionnement

I - Rappels de vocabulaire ensembliste

DÉFINITIONS

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

- **L'intersection** de A et B notée $A \cap B$ (A inter B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B.
- **L'union** de A et B notée $A \cup B$ (A union B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.
- **Le complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ (A barre) désigne l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note E l'ensemble de tout les chiens, A le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil blanc, B le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil beige.

- $A \cap B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc et beige
- $A \cup B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.
- $\overline{A}$ désigne l'ensemble des chiens au poil autre que blanc.

II - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. Les élèves ont le choix entre l'allemand ou l'espagnol. On sait que 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et A l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

- Le nombre d'éléments de $F \cap A$ (c'est-à-dire le nombre de filles ayant choisi l'allemand) est 3.
- Le nombre d'éléments de $G \cap \overline{A}$ (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
- La fréquence des filles dans cette classe est $\frac{23}{35} \simeq 0{,}66 = 66\%$. On parle de **fréquence marginale**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est $\frac{7}{35} = 0{,}2 = 20\%$.

- La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est $\frac{20}{25} = 0{,}8 = 80\%$. On parle de **fréquence conditionnelle**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est $\frac{5}{12} \simeq 0{,}42 = 42\%$.

PROPOSITION

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

- La fréquence marginale de A dans E vaut $\dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(E)}$.
- La fréquence conditionnelle de A dans B vaut $\dfrac{\mathrm{Card}(A \cap B)}{\mathrm{Card}(B)}$.

III - Rappels de probabilités

DÉFINITIONS

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
- On appelle l'univers, noté Ω (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de Ω. On appelle évènement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de Ω (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble Ω est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.
- On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
- On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers Ω, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

PROPRIÉTÉS

- Soit A un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

IV - Probabilités conditionnelles

▶ De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, on peut définir des probabilités conditionnelles.

DÉFINITION

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B en sachant que A est réalisé, aussi appelée probabilité de B sachant A. On a de plus $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

REMARQUE

Dans une situation **d'équiprobabilité**, on a $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

▶ On utilisera aussi des tableaux pour trouver des probabilités conditionnelles.

EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs. On considère alors les évènements C : « L'élève pratique une activité culturelle » et S : « L'élève pratique une activité sportive ». On a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive (S)	Pas d'activité sportive ($\overline{S}$)	Total
Activité culturelle (C)	402	591	993
Pas d'activité culturelle ($\overline{C}$)	315	192	507
Total	717	783	1500

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}(C) = \frac{993}{1500} = 0{,}662 = 66{,}2\%$.
2. La probabilité qu'un élève pratique les deux types d'activité est $\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{402}{1500} = 0{,}268 = 26{,}8\%$.
3. La probabilité qu'un élève fasse du sport en sachant qu'il pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}_C(S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{402}{993} = 0{,}405 = 40{,}5\%$.
4. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle en sachant qu'il ne fait pas de sport est $\mathbb{P}_{\overline{S}}(C) = \frac{\text{Card}(\overline{S} \cap C)}{\text{Card}(\overline{S})} = \frac{591}{783} = 0{,}755 = 75{,}5\%$.