



LGT Jean Rostand  
2<sup>nde</sup> GT

# MATHÉMATIQUES

M. DELAUNEY

# TABLE DES MATIÈRES

---

CHAPITRE I. NOMBRES RÉELS .....	1
1 - Les ensembles de nombres	1
2 - Intervalles de $\mathbb{R}$	3
3 - Valeur absolue	5
CHAPITRE II. VECTEURS DU PLAN : PREMIÈRE APPROCHE .....	6
1 - Translations	6
2 - Généralités sur les vecteurs	6
3 - Somme de deux vecteurs	7
4 - Produit d'un vecteur par un nombre réel	8
CHAPITRE III. FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS .....	9
1 - Définitions, notations	9
2 - Représentation graphique d'une fonction	9
3 - Résolution graphique d'équations	10
4 - Résolution graphique d'inéquations	12
5 - Etude du signe	12
6 - Parité d'une fonction	13
CHAPITRE IV. PROPORTIONS, VARIATIONS ET POURCENTAGES .....	14
1 - Proportions et pourcentages	14
2 - Evolutions et pourcentages	14
CHAPITRE V. FONCTIONS AFFINES .....	17
1 - Généralités	17
2 - Représentation graphique	17
3 - Recherche algébrique de $a$ et $b$	18
4 - Tableaux de signe	19
CHAPITRE VI. VARIATIONS DE FONCTIONS .....	20
1 - Etude des variations	20
2 - Tableaux de variations	21
3 - Extrêmes d'une fonction sur un intervalle	21
CHAPITRE VII. REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES .....	22
1 - Généralités sur les repères	22
2 - Coordonnées d'un vecteur	23
3 - Calculs de distances et de milieux	24
4 - Colinéarité	25
CHAPITRE VIII. PROBABILITÉS .....	28
1 - Univers et évènements	28
2 - Probabilités sur un univers fini	29
CHAPITRE IX. DROITES DU PLAN .....	31
1 - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs	31
2 - Systèmes de deux équations à deux inconnues	33

# NOMBRES RÉELS

## I - Les ensembles de nombres

### 1. Les entiers

#### DÉFINITION

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note  $0 \in \mathbb{N}$ . Par contre,  $-3$  n'en est pas un, on note  $-3 \notin \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

#### DÉFINITION

$\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs :  $1 \in \mathbb{Z}$ ,  $-2 \in \mathbb{Z}$  mais  $0.5 \notin \mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

#### REMARQUE

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est donc inclus dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ . On note  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

### 2. Les nombres décimaux

#### DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$ , où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D}, \quad 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{3} = 0.333\dots \notin \mathbb{D}$$

#### REMARQUE

Tout entier relatif est aussi un entier décimal :  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  : Par exemple,  $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$ .

### 3. Les nombres rationnels

#### DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs et  $q$  est non nul. On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

## PROPOSITION

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

## EXEMPLE

$x = 0.0909\dots$  est rationnel :  $100x = 9.0909\dots$  donc  $100x - x = 9$  d'où  $99x = 9$  puis  $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ .

## REMARQUE

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel :  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

## 4. Les nombres réels

### a) Définitions

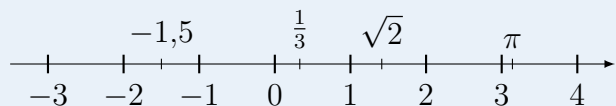
## DÉFINITION

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}}$  sont irrationnels

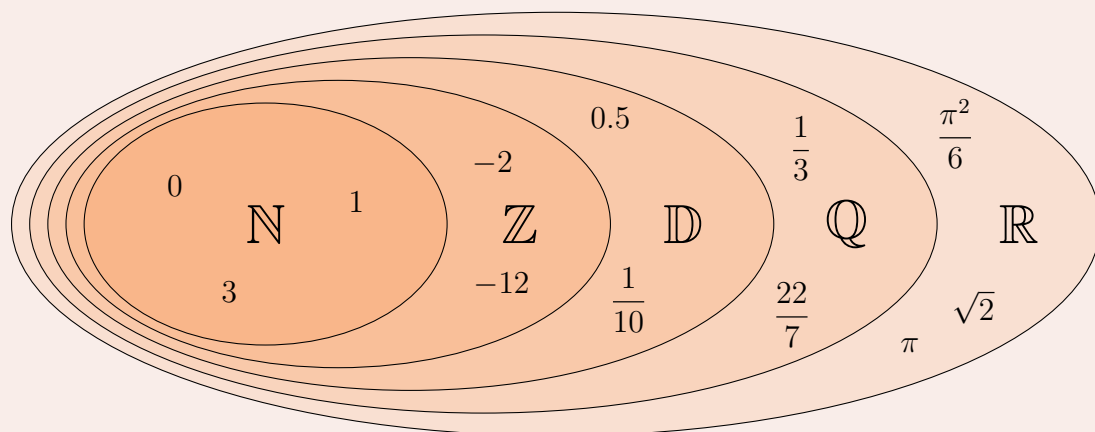
## PROPRIÉTÉ

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



## PROPOSITION

Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .



## b) Encadrement décimal des réels

### DÉFINITION

Un encadrement décimal d'un nombre réel  $x$  est une écriture  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_1, d_2$  des nombres décimaux. La différence  $d_2 - d_1$  est l'amplitude de l'encadrement.

### EXEMPLE

Par exemple,  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  est un encadrement décimal de  $\sqrt{2}$  d'amplitude  $10^{-1} = 0,1$ .

### DÉFINITION

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_2 - d_1 = 10^{-n}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

L'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est celui de  $d_1$  ou  $d_2$  le plus proche de  $x$ .

Dans le cas où  $d_1$  et  $d_2$  sont à égale distance de  $x$ , l'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est  $d_2$ .

### EXEMPLE

- 3,14 est l'arrondi à  $10^{-2}$  de  $\pi$ .
- 3,142 est l'arrondi à  $10^{-3}$  de  $\pi$ .
- 2,4 est l'arrondi à  $10^{-1}$  de 2,35.

### REMARQUE

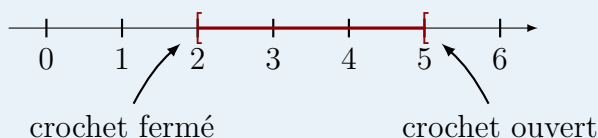
Faire un arrondi à  $10^{-n}$  signifie  $n$  chiffres après la virgule.

## II - Intervalles de $\mathbb{R}$

### 1. Généralités

### DÉFINITION

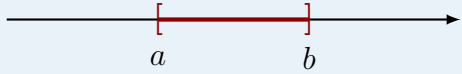

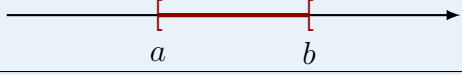





On veut écrire plus simplement « Tous les nombres réels compris entre 2 et 5, 5 exclus ». Pour cela, il y a trois manières possibles :

- Par un schéma :
- 
- crochet fermé                      crochet ouvert

- Par une inégalité :  $2 \leq x < 5$

- Par un intervalle :  $[2; 5[$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts.

L'intervalle noté ...	... désigne l'ensemble des réels $x$ tels que ...	Il est représenté par un segment sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$] -\infty; b]$	$x \leq b$	
$] -\infty; b[$	$x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	

## REMARQUES

- $a$  et  $b$  sont appelés les bornes de l'intervalle.
- Attention à ne pas confondre  $[a; b]$  et  $\{a; b\}$  : Le premier ensemble contient tous les réels compris entre  $a$  et  $b$  inclus, alors que le second ne contient que  $a$  et  $b$ .
- $-\infty$  et  $+\infty$  ne sont pas des nombres réels, on écrit donc pas  $[-\infty; a]$ .
- $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- Les quatre premiers intervalles sont dits bornés. Parmi ceux-ci, on dit que  $[a; b]$  est fermé,  $]a; b[$  est ouvert. Les deux autres sont dits semi-ouverts.

## 2. Unions et intersections

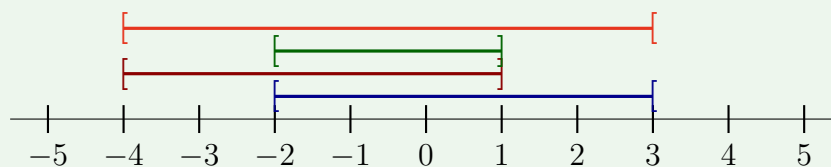
### DÉFINITION

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

- L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à  $I$  et à  $J$  est appelé intersection de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cap J$ .
- L'ensemble des réels qui appartiennent à  $I$  ou à  $J$  est appelé réunion de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cup J$ .

### EXEMPLE

Pour  $I = [-2; 3[$  et  $J = [-4; 1]$ , on a  $I \cap J = [-2; 1]$  et  $I \cup J = [-4; 3[$ .



### III - Valeur absolue

#### 1. Généralités

##### DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel  $x$  est  $-x$  lorsque  $x < 0$  ou  $x$  lorsque  $x \geq 0$ . On note :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

##### EXEMPLE

$|8| = 8$  mais  $|-8| = 8$  aussi. En fait, l'effet de la valeur absolue est de rendre un nombre positif (on supprime le signe  $-$ ).

##### DÉFINITION

Soient  $A$  et  $B$  deux points placés sur la droite des réels, d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ . La distance entre  $a$  et  $b$  correspond à la longueur de  $AB$ . Elle se calcule à l'aide de la valeur absolue :

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

##### EXEMPLE

- La distance entre 5 et  $-2$  est  $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La distance entre  $x$  et 0 est  $|x - 0| = |x|$ .

#### 2. Intervalles $[a - r; a + r]$

##### PROPRIÉTÉ

Soient  $a$  et  $r$  deux réels, avec  $r > 0$ . Alors l'intervalle  $[a - r; a + r]$  contient tous les réels  $x$  qui vérifient  $a - r \leq x \leq a + r$ , autrement dit ceux à une distance inférieure à  $r$  de  $a$ , soit  $|x - a| \leq r$ .

##### EXEMPLE

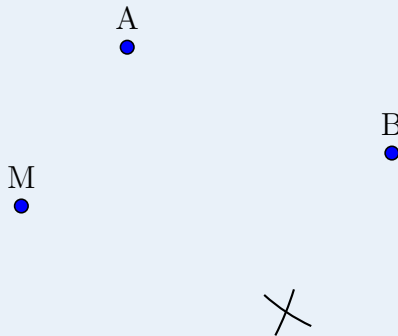
$$[3; 5] = [4 - 1; 4 + 1] = \{x \in \mathbb{R}, |x - 4| \leq 1\}$$

# VECTEURS DU PLAN : PREMIÈRE APPROCHE

## I - Translations

### DÉFINITION

Soient  $A, B, M$  trois points quelconques du plan. L'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est l'unique point  $N$  tel que le quadrilatère  $ABNM$  soit un parallélogramme.



### REMARQUES

Lors de cette translation :

- Les droites  $(AB)$  et  $(MN)$  sont parallèles
- Les longueurs  $AB$  et  $MN$  sont égales

## II - Généralités sur les vecteurs

### DÉFINITION

Un vecteur  $\vec{u}$  peut être représenté avec une origine  $A$  et une extrémité  $B$ . Il est caractérisé par :

- Sa direction ( celle de la droite  $(AB)$  )
- Son sens ( de  $A$  vers  $B$  )
- Sa norme ( ou sa longueur ), notée  $\|\vec{u}\|$ . On a  $\|\vec{u}\| = AB$ .

### DÉFINITION

Lorsque deux vecteurs symbolisent le même déplacement, on dit qu'ils sont égaux.

### EXEMPLE

La figure précédente nous donne alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ .

### PROPRIÉTÉ

Les quatre propositions suivantes sont **équivalentes** :

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$



- $N$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$
- $[AN]$  et  $[BM]$  se coupent en leur milieu
- $ABNM$  est un parallélogramme

### CAS PARTICULIERS

- Le vecteur nul, noté  $\vec{0}$ , est obtenu à partir de la translation qui transforme  $A$  en  $A$ ,  $B$  en  $B$  ... On a alors  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ . Ce vecteur n'a ni direction, ni sens, et sa norme est nulle.
- L'opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur associé à la translation qui transforme  $B$  en  $A$ . On le note  $-\overrightarrow{AB}$ . Ainsi,  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Il a la même direction et la même norme que  $\overrightarrow{AB}$  mais est de sens contraire.

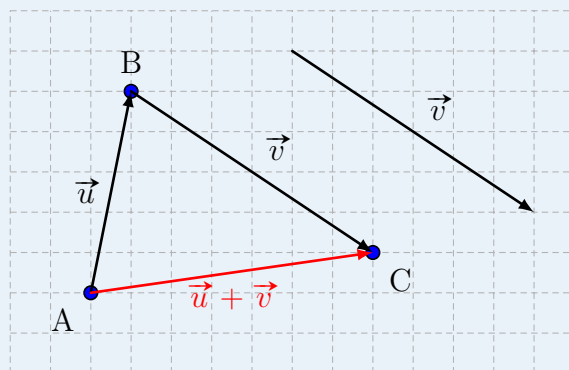
## III - Somme de deux vecteurs

► Activité Chasles

### DÉFINITION

Pour construire  $\vec{u} + \vec{v}$ , on met bout à bout les deux vecteurs en suivant bien le sens des flèches. Le vecteur somme est celui qui permet de passer de l'origine de  $\vec{u}$  à l'extrémité de  $\vec{v}$ . On en déduit la **relation de Chasles** :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



### EXEMPLE

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

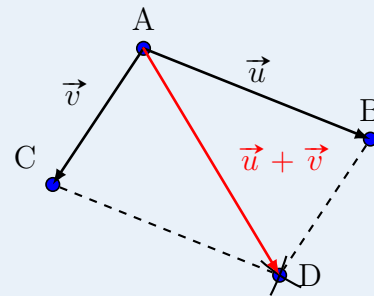
### REMARQUE

En général, la longueur de  $\vec{u} + \vec{v}$  n'est pas égale à la somme de celle de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

## MÉTHODE

Pour construire  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  sans quadrillage, on construit d'abord le parallélogramme  $ABDC$ .

Le vecteur  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  est alors égal à  $\overrightarrow{AD}$ .



## IV - Produit d'un vecteur par un nombre réel

### DÉFINITION

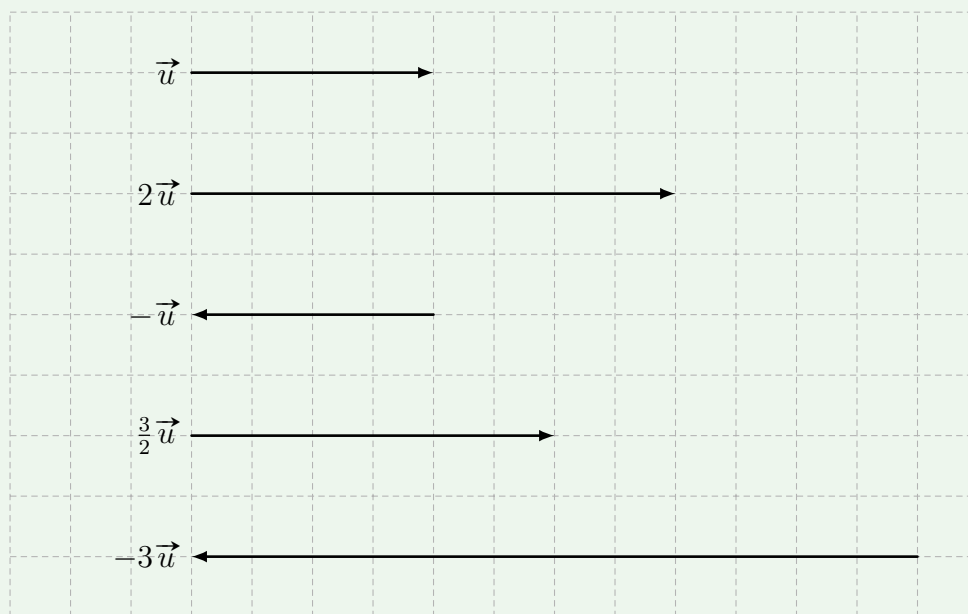
Soit  $k$  un réel et  $\vec{u}$  un vecteur. Le produit de  $k$  par  $\vec{u}$  est le vecteur noté  $k\vec{u}$  tel que :

- $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  ont la même direction
- La longueur de  $k\vec{u}$  est  $|k| \|\vec{u}\|$
- Si  $k > 0$ ,  $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  ont le même sens. Sinon, ils ont des sens opposés.

### REMARQUE

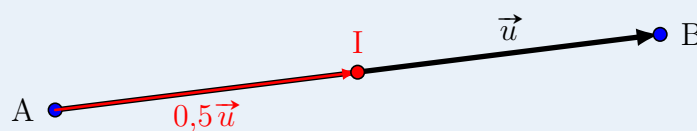
En particulier,  $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ .

### EXEMPLES



### APPLICATION

$I$  est le milieu de  $[AB]$  se traduit par  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$  ou  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$  ou  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

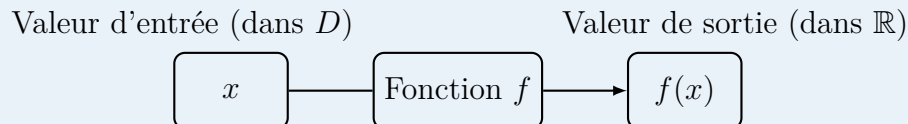


# FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

## I - Définitions, notations

### DÉFINITION

Soit  $D \subset \mathbb{R}$ . On appelle fonction  $f$  sur l'ensemble  $D$  le processus qui à tout nombre  $x \in D$  associe un **unique** réel noté  $f(x)$ . On note  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \longmapsto f(x)$$



On dit alors que :

- $f(x)$  est l'image de  $x$
- $x$  est un antécédent de  $f(x)$
- $D$  est l'ensemble ( ou domaine ) de définition de  $f$

### EXEMPLE

On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \longmapsto x^2 - x$$

- L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
- L'image de 2 par la fonction  $f$  est 2 :  $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ .
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction  $f$ .  $-1$  en est aussi un car  $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ .

### REMARQUE

Chaque nombre dans  $D$  possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

## II - Représentation graphique d'une fonction

### DÉFINITION

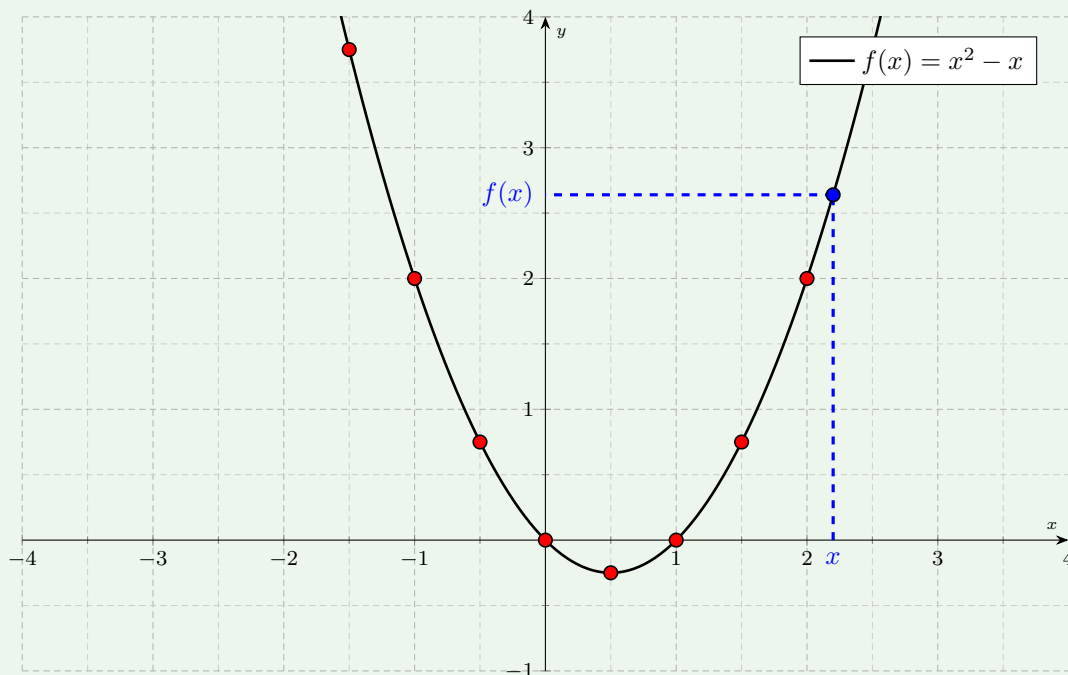
Dans un repère du plan, l'ensemble des points  $(x, f(x))$  pour  $x \in D$  constitue la courbe de  $f$ . L'équation de la courbe de  $f$  est  $y = f(x)$  pour  $x \in D$ .

### MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

## EXEMPLE

$x$	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									

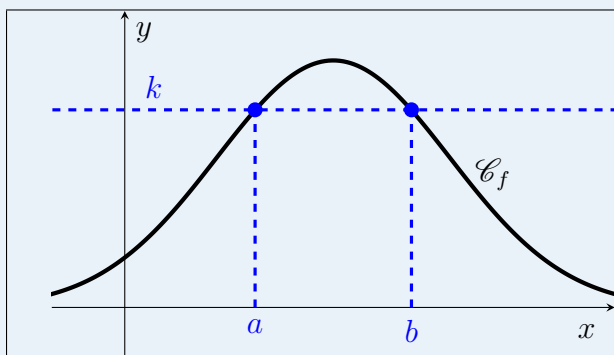


Les points de coordonnées  $(-1; 2)$  et  $(1; 0)$  appartiennent à la courbe de  $f$ , mais pas le point de coordonnées  $(0; 1)$ .

## III - Résolution graphique d'équations

### 1. Equations du type $f(x) = k$

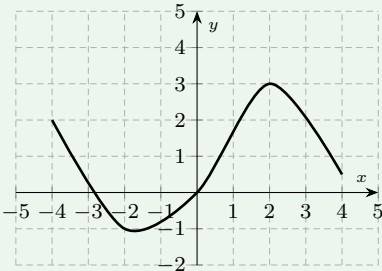
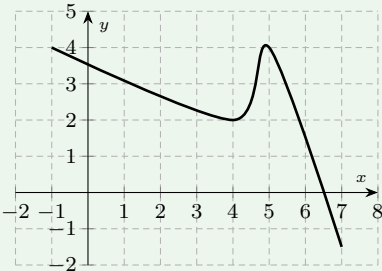
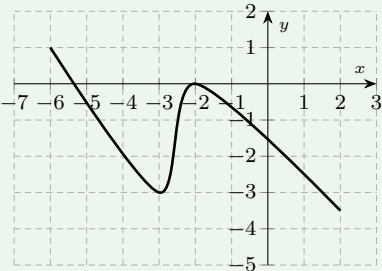
#### MÉTHODE



Résoudre l'équation  $f(x) = k$  signifie trouver les antécédents de  $k$  par la fonction  $f$ . Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est  $k$ . Ici, l'ensemble des solutions de l'équation est :

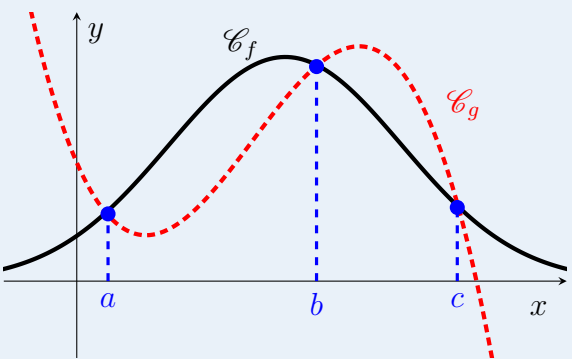
$$S = \{a; b\}$$

## EXEMPLES

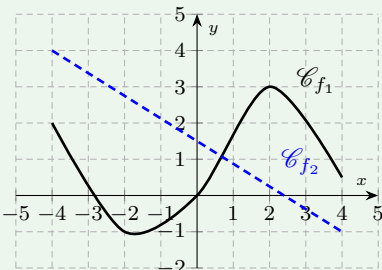
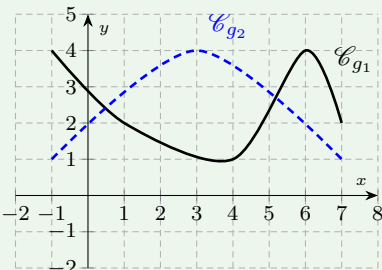
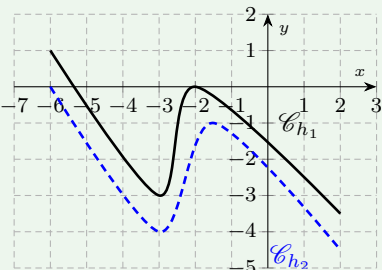
		
Résoudre $f(x) = 1$ :	Résoudre $g(x) = 1$ :	Résoudre $h(x) = -4$ :

## 2. Equations du type $f(x) = g(x)$

### MÉTHODE

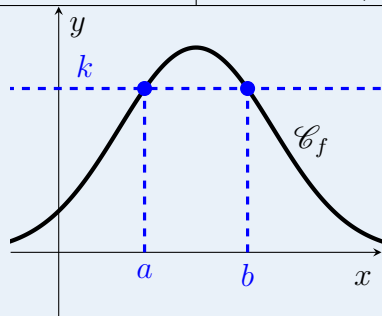
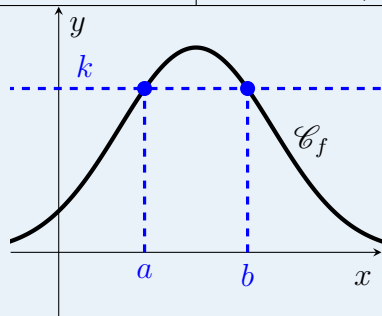
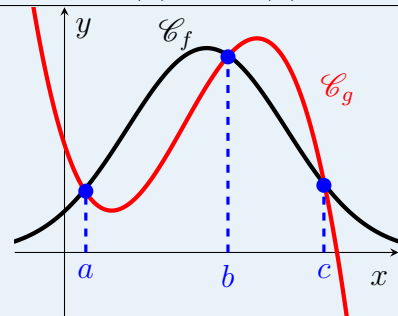
	<p>Résoudre l'équation <math>f(x) = g(x)</math> signifie trouver les nombres qui ont la même image par <math>f</math> et <math>g</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes <math>\mathcal{C}_f</math> et <math>\mathcal{C}_g</math>.</p> <p>Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :</p> $S = \{a; b; c\}$
--	--

## EXEMPLES

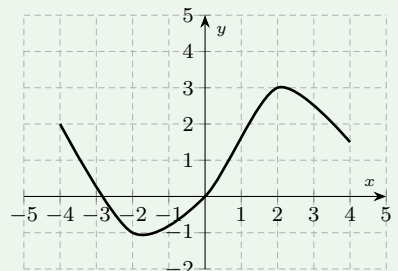
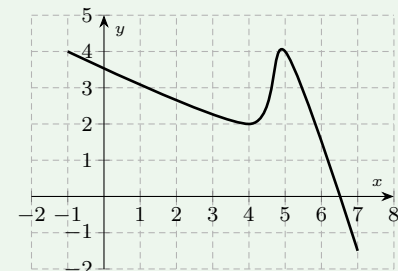
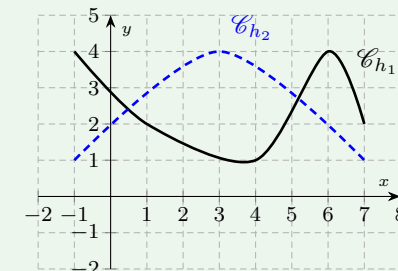
		
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$ :	Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$ :	Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$ :

## IV - Résolution graphique d'inéquations

### MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à <math>k</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]a; b[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) \leq k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à <math>k</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; g(x)</math> signifie trouver les nombres dont l'image par <math>f</math> est supérieure à l'image par <math>g</math>. Cela revient à chercher l'abscisse des points de <math>\mathcal{C}_f</math> situés "au dessus" des points de <math>\mathcal{C}_g</math>.</p> <p>Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a[ \cup ]b; c[$

### EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) \leq 1$ :	Résoudre $g(x) > 1$ :	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$ :

## V - Etude du signe

### MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

$x$	-2	-1	2	5	
$f(x)$	+	0	-	0	+

## VI - Parité d'une fonction

### DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  centré en 0 (  $I = [-a; a], ] - a; a[$  ou  $\mathbb{R}$ ). On dit que  $f$  est :

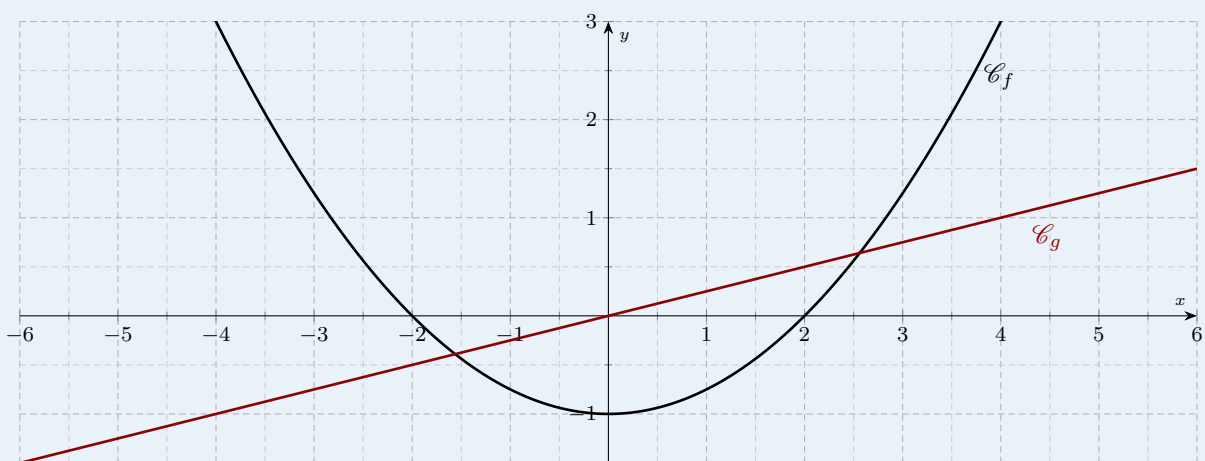
- **paire** lorsque pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = f(x)$ .
- **impaire** lorsque pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

### EXEMPLES

- La fonction  $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  est paire car pour tout  $x \in [-2; 2]$ ,  $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ .
- La fonction  $g : ]3; 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  est impaire.

### PROPRIÉTÉS

- $f$  est paire si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- $f$  est impaire si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère (0; 0).



### REMARQUE

Une fonction peut être ni paire ni impaire !

# PROPORTIONS, VARIATIONS ET POURCENTAGES

---

## I - Proportions et pourcentages

---

### 1. Proportions

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et  $A$  un sous-ensemble de  $E$  ( $A \subset E$ ). On note respectivement  $n_A$  et  $n_E$  le nombre d'éléments de  $A$  et  $E$ . La proportion d'éléments de  $A$  dans  $E$  est le nombre  $p = \frac{n_A}{n_E}$ .

#### EXEMPLE

Dans une classe de Seconde comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc  $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$ .

#### REMARQUE

$p$  est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

### 2. Proportions de proportions

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments,  $A \subset E$  et  $B \subset A$ . On note  $p_1$  la proportion de  $A$  dans  $E$  et  $p_2$  la proportion de  $B$  dans  $A$ . Alors la proportion de  $B$  dans  $E$  est égale à  $p_1 \times p_2$ .

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est  $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$ .

## II - Evolutions et pourcentages

---



## 1. Taux d'évolution

### DÉFINITION

On considère une valeur  $V_0$  qui subit une évolution pour arriver à une valeur  $V_1$ .

- La variation absolue est  $V_1 - V_0$ .
- La variation relative ou taux d'évolution est  $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$ .

### REMARQUE

- Si  $t > 0$ , il s'agit d'une augmentation.
- Si  $t < 0$ , il s'agit d'une diminution.

### EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de  $180 - 150 = 30$  euros et son taux d'évolution est  $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$ . Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

### PROPRIÉTÉ

Pour une valeur  $V_0$  qui subit une évolution d'un taux  $t$ , elle devient  $(1 + t) \times V_0$ .  $1 + t$  est appelé coefficient multiplicateur (noté CM).

### EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à  $(1 + \frac{20}{100}) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$  euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à  $(1 - 0.2) \times 30 = 24$  euros.

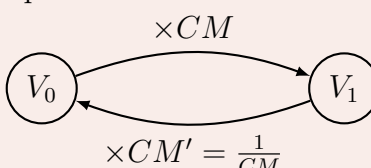
## 2. Evolution réciproque

### DÉFINITION

Une valeur  $V_0$  subit une évolution de taux  $t$  pour passer à  $V_1$ . On appelle évolution réciproque le taux  $t'$  d'évolution de la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_0$ .

### PROPOSITION

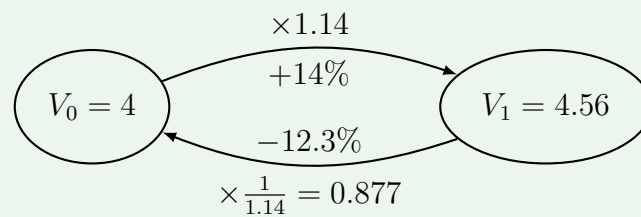
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$


### EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est  $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$ , ce qui correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors  $4.56 \times 0.877 = 4$  millions

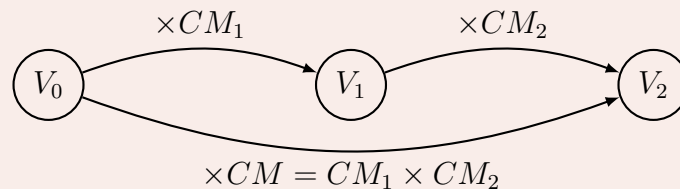
d'habitants.



### 3. Evolutions successives

#### PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur  $V_0$  non nulle à la valeur  $V_1$ , et une seconde fait passer la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_2$ , alors l'évolution globale fait passer la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_2$ . Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.



#### EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de  $8\%$  puis une nouvelle hausse de  $10\%$ . Le coefficient multiplicateur global est donc  $\left(1 + \frac{8}{100}\right) \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$ . Le prix a donc augmenté de  $18.8\%$  et pas de  $18\%$  !

# FONCTIONS AFFINES

## I - Généralités

### DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels donnés.

### EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$ ,  $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$  et  $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$  sont des fonctions affines.

### CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$  (ici,  $b = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée *fonction linéaire*.
- $x \mapsto b$  (ici,  $a = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée *fonction constante*.

## II - Représentation graphique

### PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une *droite* qui coupe l'axe des ordonnées.

### VOCABULAIRE

Dans un repère, soit  $d$  la droite représentant une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ . On dit que :

- $a$  est le **coefficient directeur** de  $d$ .
- $b$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $d$ .
- $y = ax + b$  est l'équation réduite de  $d$ .

### PROPOSITION

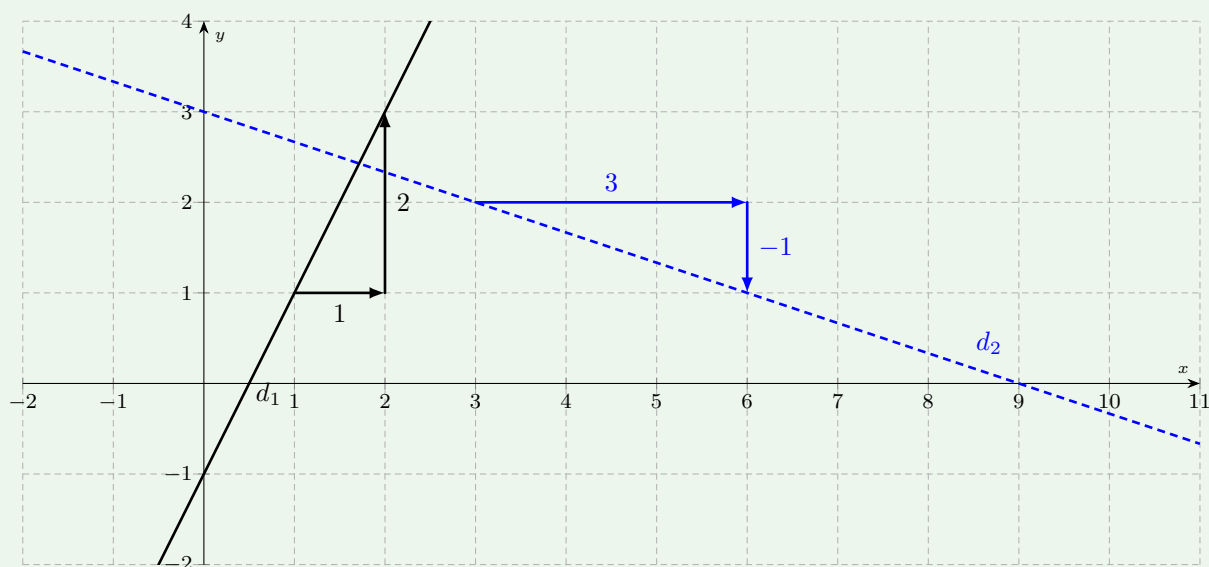
Lorsque  $a$  s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

### EXEMPLES

Construisons les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations réduites respectives  $y = 2x - 1$  et  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ .

- Pour  $d_1$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $-1$ , et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour  $d_2$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $3$ , et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descend d'un.



### III - Recherche algébrique de $a$ et $b$

#### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine et  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , avec  $x_1 \neq x_2$ . Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

#### EXEMPLE

On suppose que  $f(1) = 1$  et  $f(3) = 5$ .

$$\text{Alors } a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

On a alors  $f : x \mapsto 2x + b$ . On sait de plus que  $f(3) = 2 \times 3 + b$  et  $f(3) = 5$  donc :

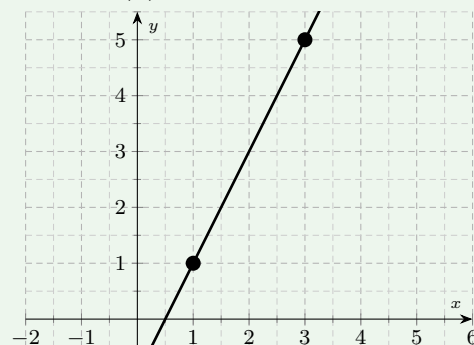
$$5 = 2 \times 3 + b$$

$$\text{soit donc } 5 = 6 + b$$

$$\text{et alors } 5 - 6 = b$$

$$\text{puis } b = -1$$

Cela donne alors  $f : x \mapsto 2x - 1$ .



## IV - Tableaux de signe

### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine avec  $a \neq 0$ . Alors  $f(x) = 0$  si et seulement si  $ax + b = 0$  ssi  $ax = -b$  ssi  $x = -\frac{b}{a}$ . Le tableau de signes de  $f$  dépend du signe de  $a$  :

Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$

Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$

### MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$ . En décomposant  $f$ , on obtient alors le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$4 - 5x$	$+$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$f(x)$	$-$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$-$

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \leq 0$  est

$$S = ]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

Pour  $g : x \mapsto \frac{x + 2}{4 - 5x}$ , le tableau de signes obtenu est presque identique :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$4 - 5x$	$+$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$g(x)$	$-$	$\bigcirc$	$\parallel$	$-$

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque  $x = \frac{4}{5}$ . Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de  $g$ .

# VARIATIONS DE FONCTIONS

## I - Etude des variations

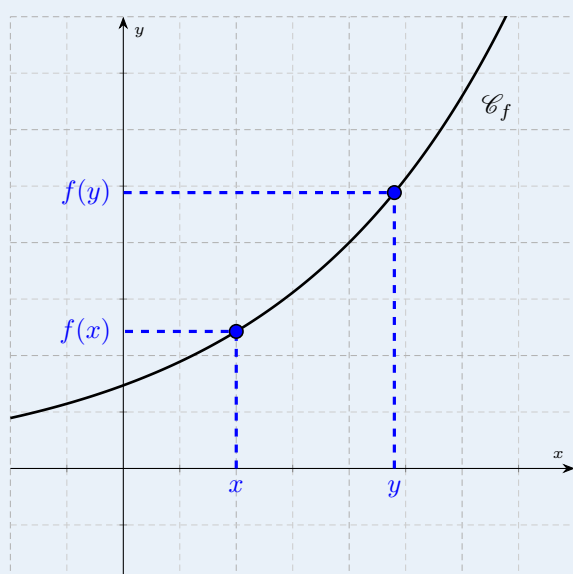
On se donne dans cette partie  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

### DÉFINITIONS

On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images augmentent aussi. L'ordre est conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ .

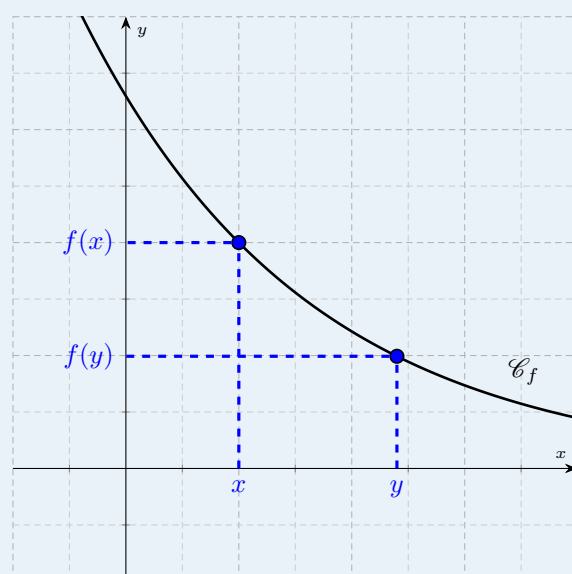
Graphiquement, la courbe de  $f$  "monte" : ↗



On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images diminuent. L'ordre n'est pas conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \geq f(y)$ .

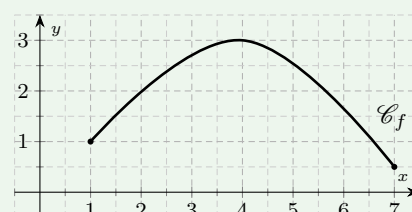
Graphiquement, la courbe de  $f$  "descend" : ↘



### EXEMPLE

On se donne la fonction  $f$ , définie sur  $[1; 7]$  et représentée ci-contre.

- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  puis décroissante sur  $[4; 7]$ .
- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  et  $2 \leq 3$  donc  $f(2) \leq f(3)$ .
- $f$  est décroissante sur  $[4; 7]$  et  $5 \leq 6$  donc  $f(5) \geq f(6)$ .



### DÉFINITIONS

- On dit que  $f$  est constante sur  $I$  si elle prend toujours la même valeur :

Pour  $x, y \in I$ , on a  $f(x) = f(y)$ .

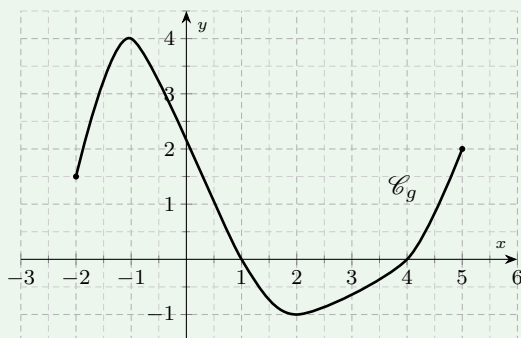
- On dit que  $f$  est monotone sur  $I$  si elle est soit croissante, soit décroissante sur  $I$  (son sens de variation ne change pas).

## II - Tableaux de variations

### MÉTHODE

Dresser le tableau de variations de  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction  $f$  est croissante, décroissante ou constante.

### EXEMPLE



On se donne la fonction  $g$ , définie sur  $[-2; 5]$  et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de  $g$  sous forme du tableau de variations suivant :

$x$	-2	-1	2	5
$g(x)$	1.5	4	-1	2

## III - Extrêmes d'une fonction sur un intervalle

### DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum  $M$  en  $a$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq M = f(a)$ .
- On dit que  $f$  admet un minimum  $m$  en  $b$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq m = f(b)$ .

### REMARQUE

Le maximum d'une fonction correspond au point le plus "haut" de sa courbe représentative, et le minimum au point le plus "bas".

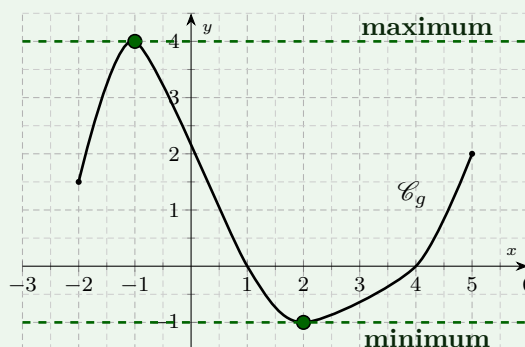
### EXEMPLE

On reprend la fonction  $g$  de l'exemple précédent.

Son maximum sur  $I$  est 4, atteint en  $-1$ .

Son minimum sur  $I$  est  $-1$ , atteint en  $2$ .

Son minimum sur  $[-2; 0]$  est  $1,5$ , atteint en  $-2$ .



# REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

## I - Généralités sur les repères

### DÉFINITION

Soient  $O, I, J$  trois points du plan non alignés. On pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ . Un repère du plan est un triplet  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On dit alors que :

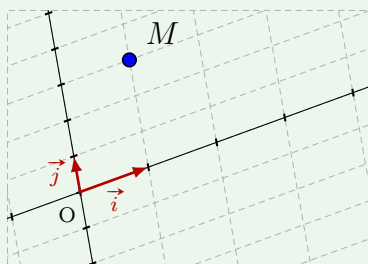
- $O$  est l'origine du repère
- $(OI)$  est l'axe des abscisses
- $(OJ)$  est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  pour la suite du cours.

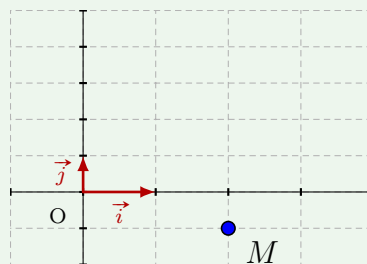
### PROPRIÉTÉ

Tout point  $M$  du plan est repéré par un unique couple de coordonnées  $(x; y)$ .  $x$  est l'abscisse de  $M$  et  $y$  est l'ordonnée de  $M$ .

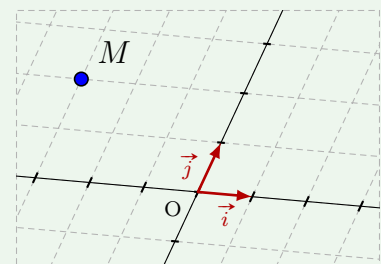
### EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



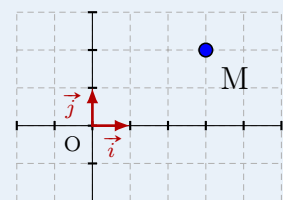
$M(-3; 2)$

► On écrit  $M(1; 3)$  et pas  $M = (1; 3)$  !

### DÉFINITION

On dit que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est orthonormé si :

- Ses axes sont perpendiculaires :  $(OI) \perp (OJ)$
- Les vecteurs unité  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont pour longueur 1 :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$



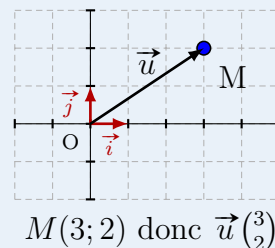
$M(3; 2)$



## II - Coordonnées d'un vecteur

### DÉFINITION

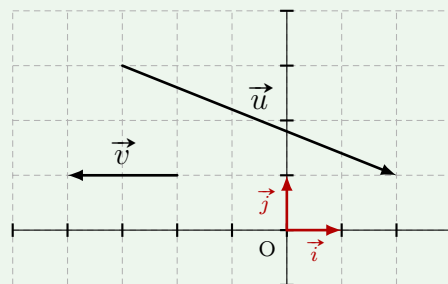
Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan. On se donne le point  $M(x; y)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ . Les coordonnées de  $\vec{u}$  sont celles de  $M$ , et l'on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .



► On écrit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et pas  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

### EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
On a  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



### PROPOSITION

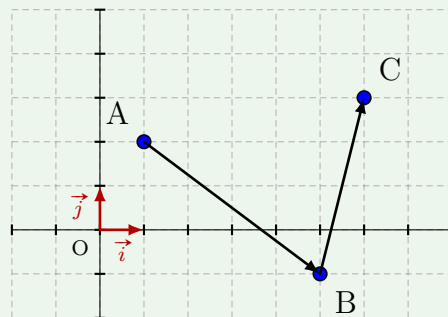
Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLE

On se donne  $A(1; 2)$ ,  $B(5; -1)$  et  $C(6; 3)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

De même, on a  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .



### PROPRIÉTÉS

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ .
- Les coordonnées de  $\lambda \vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLE

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Alors on a :

$$\begin{aligned}
& - (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}. \\
& - 3\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } 3\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}. \\
& - (2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 5 \times 2 \\ 2 \times 3 - 5 \times (-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } (2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

### III - Calculs de distances et de milieux

#### 1. Milieu d'un segment

##### PROPOSITION

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. On se donne de plus  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors les coordonnées de  $I$  sont  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .

##### REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

##### EXEMPLE

Soient  $A(1; 7)$ ,  $B(6; -5)$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors on a  $I\left(\frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2}\right)$  d'où  $I\left(\frac{7}{2}; \frac{2}{2}\right)$ , et enfin  $I(3,5; 1)$ .

#### 2. Normes et distances

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé.

##### PROPOSITION

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan. Alors la norme de  $\vec{u}$  est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

##### COROLLAIRE

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Alors la distance entre  $A$  et  $B$  vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### EXEMPLE

Soient  $A(1; 7)$  et  $B(6; -5)$ . Alors  $AB = \sqrt{(6-1)^2 + (-5-7)^2}$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

### APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

### EXEMPLE

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A(3; 5)$  de rayon 3, et le point  $M(5; 7)$ . On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(5-3)^2 + (7-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \simeq 2,83 \end{aligned}$$

Comme  $AM \neq 3$ ,  $M$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$ .

## IV - Colinéarité

### 1. Définitions et caractérisations

#### DÉFINITION

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits colinéaires s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ . Dans le cas où ils sont non nuls, cela revient à dire qu'ils ont la même direction.

#### REMARQUE

Deux vecteurs sont colinéaire si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

#### EXEMPLES

On se donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $\vec{v} = 2\vec{u}$ . Alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Coordonnées de $\vec{u}$	Coordonnées de $\vec{v}$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 2\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 7\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -3\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$	$\left. \begin{array}{l} 4 \times (-20) = -80 \\ -7 \times 11 = -77 \end{array} \right\}$ et $-80 \neq -77$ donc non

## 2. Déterminant de deux vecteurs

### DÉFINITION

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

### EXEMPLE

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$ . On a  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times (-20) - (-7) \times 11$   
 $= -80 + 77$   
 $= -3$

### PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

### EXEMPLE

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'exemple précédent ne sont donc pas colinéaires.

Soient  $\vec{a} \begin{pmatrix} -15 \\ 40 \end{pmatrix}$  et  $\vec{b} \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}$ . On a  $\det(\vec{a}; \vec{b}) = -15 \times (-24) - 9 \times 40$   
 $= 360 - 360$   
 $= 0$

Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont donc colinéaires. (On a en fait  $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$ ).

## 3. Applications en géométrie

### PROPRIÉTÉS

- Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.
- Trois points  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

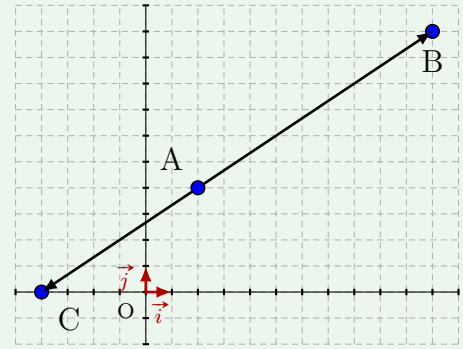
## EXEMPLE

On se donne les points  $A(2; 4)$ ,  $B(11; 10)$  et  $C(-4; 0)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

On a  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times (-4) - (-6) \times 6 = -36 + 36 = 0$ .

On en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, d'où  $(AB) \parallel (AC)$ , et les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.



# PROBABILITÉS

## I - Univers et évènements

### 1. Définitions de base

#### DÉFINITION

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.

Si l'on répète un très grand nombre de fois la même expérience indépendamment, alors la fréquence d'une issue va s'approcher de sa probabilité.

#### EXEMPLE

Si l'on lance un dé, alors les résultats possibles (les issues) constituent l'univers  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

#### DÉFINITION

Un évènement  $A$  est un ensemble d'issues, autrement dit un sous-ensemble de  $\Omega$ .

#### EXEMPLE

Dans l'univers précédent, on peut considérer l'ensemble  $P$  : « Le résultat est pair ». On a donc  $P = \{2; 4; 6\}$ .

#### CAS PARTICULIERS

- On appelle **évènement élémentaire** tout évènement ne contenant qu'un seul élément de  $\Omega$  (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est l'**évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble  $\Omega$  est l'**évènement certain** : Il est toujours réalisé.

#### EXEMPLE

Dans l'univers précédent,  $\{1\}$  et  $\{3\}$  sont des éléments élémentaires.

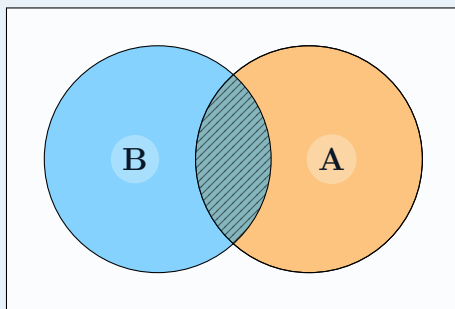
### 2. Opérations sur les évènements

#### DÉFINITIONS

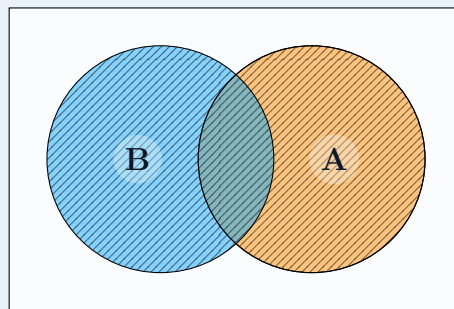
On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- L'**intersection** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cap B$  ( $A$  inter  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$ .
- L'**union** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cup B$  ( $A$  union  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux.

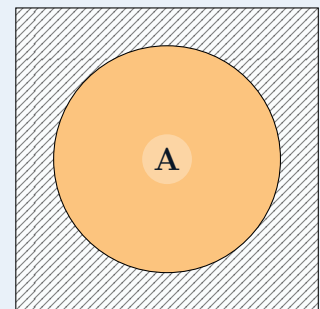
- Le **complémentaire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$  (A barre) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .



$A \cap B$



$A \cup B$



$\bar{A}$

### EXEMPLE

Dans une animalerie, on sélectionne au hasard un chien. L'univers  $\Omega$  est l'ensemble de tout les chiens dans cette animalerie. On se donne de plus les évènements  $A$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc » et  $B$  : « Le chien sélectionné a le poil beige ». On peut donc définir les évènements suivants :

- $A \cap B$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc et beige » ;
- $A \cup B$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc, beige ou les deux à la fois ».
- $\bar{A}$  : « Le chien sélectionné n'a pas le poil blanc ».

## II - Probabilités sur un univers fini

### 1. Généralités

#### DÉFINITION

Donner la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire signifie donner la probabilité de chaque issue.

#### PROPOSITIONS

Pour obtenir la probabilité d'un évènement, on fait la somme des probabilités de chaque issue le constituant.

Pour tout évènement  $A$  d'une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

### EXEMPLE

On lance un dé truqué. La probabilité de tomber sur chaque face est décrite dans le tableau ci-dessous :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité associée	0,15	0,1	0,2	0,25	0,25	0,05

On considère l'évènement  $A$  : « On tombe sur un nombre inférieur à 3 ». Alors  $\mathbb{P}(A) = 0,15 + 0,1 + 0,2 = 0,35$ .

## 2. Cas équiprobable

### EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Soit  $A$  l'évènement « On tombe sur un nombre pair ». 3 des 6 faces d'un dé contiennent un nombre pair donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

### DÉFINITION

On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité.

### PROPOSITION

Dans ce cas, chaque issue a pour probabilité  $\frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$ .  
La probabilité d'un évènement  $A$  est alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## 3. Vocabulaire et formules

### EXEMPLE

Soient  $A$  : « On tombe sur un nombre pair » et  $B$  : « On tombe sur 3 ». On a alors  $A \cap B = \emptyset$ , donc  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$ . Ces évènements ne peuvent pas se produire en même temps.

### DÉFINITION

Comme  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ , ces deux évènements sont dits incompatibles.

### PROPRIÉTÉS

- Soit  $A$  un évènement. Alors  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
- Soient  $A$  et  $B$  deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$



# DROITES DU PLAN

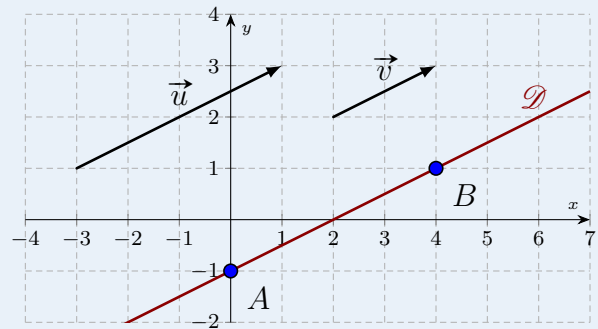
## I - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs

On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan.

### 1. Vecteurs directeurs

#### DÉFINITION

Soit  $\mathcal{D}$  une droite, et  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{D}$ . On appelle **vecteur directeur** de  $\mathcal{D}$  tout vecteur  $\vec{u}$  non nul colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ . Autrement dit, le vecteur  $\vec{u}$  donne la direction de la droite  $\mathcal{D}$ .



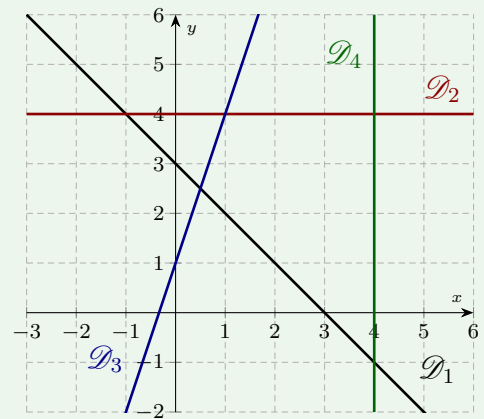
#### REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : Ici,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs directeurs de la droite  $(AB)$ .

#### EXEMPLE

Donnons les coordonnées de **plusieurs** vecteurs directeurs des droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ .

- $\mathcal{D}_1 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_2 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_3 : \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_4 : \vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$



### 2. Équations cartésiennes

#### PROPOSITION

Soit  $\mathcal{D}$  une droite et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . Alors  $\mathcal{D}$  possède une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , appelée équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

Un point  $M(x; y)$  appartient à cette droite ssi  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

Il faut donc que  $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ . Cela donne alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = a(x - x_A) - (-b)(y - y_A) = 0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$$

En posant  $c = -ax_A - by_A$ , on trouve bien la forme voulue :  $\boxed{ax + by + c = 0}$ .

### EXEMPLE

Un vecteur directeur de  $\mathcal{D} : 4x - 8y + 3 = 0$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ . On peut en déduire un autre :  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

### COROLLAIRE

Si les coordonnées  $(x; y)$  d'un point  $M$  vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$  d'une droite  $\mathcal{D}$ , alors  $M$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLES

Déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$  passant par le point  $A(3; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  :

On sait alors qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_1$  est  $5x + y + c = 0$  où  $c$  reste à trouver.

De plus, en remplaçant  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$ , on obtient :

$$5 \times 3 + 1 + c = 0$$

$$16 + c = 0$$

$$c = -16$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_1$  est donc  $5x + y - 16 = 0$ .

- $\mathcal{D}_2$  passant par les points  $B(5; 3)$  et  $C(1; -3)$  :

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$ . On obtient alors l'équation  $-6x + 4y + c = 0$ .

Pour trouver  $c$ , on remplace  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$  ou  $B$ . Avec  $A$ , cela donne :

$$-6 \times 5 + 4 \times 3 + c = 0$$

$$-30 + 12 + c = 0$$

$$c = 18$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_2$  est donc  $-6x + 4y + 18 = 0$ . À noter que l'on peut simplifier cette équation pour obtenir  $-3x + 2y + 9 = 0$ .

### MÉTHODES

Pour tracer une droite  $\mathcal{D}$  étant donnée son équation cartésienne, on peut :

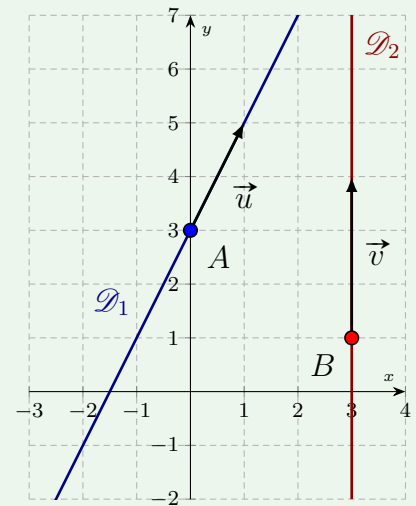
- Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à  $\mathcal{D}$  en remplaçant  $x$  ou  $y$  par des valeurs spécifiques ;
- Déterminer de la même manière les coordonnées d'un point, et utiliser un vecteur directeur.

## EXEMPLES

Soit  $\mathcal{D}_1 : 2x - y + 3 = 0$ .

- Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_1$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- Si  $x = 0$ , l'équation devient  $-y + 3 = 0$  donc  $y = 3$ . Alors  $A(0; 3) \in \mathcal{D}_1$ .

On peut donc tracer la droite  $\mathcal{D}_1$  dans le repère ci-contre. On remarque d'ailleurs que  $2x - y + 3 = 0 \iff y = 2x + 3$  (On appelle cette équation l'**équation réduite** de  $\mathcal{D}_1$ ). La droite  $\mathcal{D}_1$  peut donc être identifiée à la courbe d'une fonction affine.



Soit  $\mathcal{D}_2 : 3x - 9 = 0$ . Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$  est  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ici, il n'y a pas de  $y$  donc il suffit de résoudre l'équation :

$$3x - 9 = 0 \iff 3x = 9 \iff x = 3$$

Tout point dont les coordonnées sont de la forme  $(3; y)$  avec  $y \in \mathbb{R}$  convient donc. On prend par exemple  $B(3; 1)$ .

## II - Systèmes de deux équations à deux inconnues

Résoudre un système à deux inconnues, c'est trouver le ou les couples  $(x; y)$  qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

### EXEMPLE

Le couple  $(2; 3)$  vérifie le système d'équations  $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$  car  $\begin{cases} 5 \times 2 - 2 \times 3 = 4 \\ -2 + 3 = 1 \end{cases}$

### 1. Résolution graphique

On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.

L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

### EXEMPLE

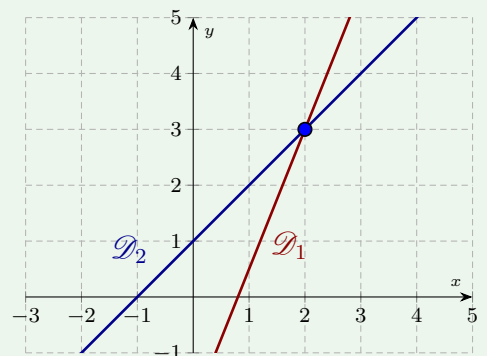
On reprend le système précédent :  $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

On trace les deux droites :

$$\mathcal{D}_1 : 5x - 2y - 4 = 0$$

$$\mathcal{D}_2 : -x + y - 1 = 0$$

Leur point d'intersection a pour coordonnées  $(2; 3)$ , correspondant à la solution testée dans l'exemple précédent.



## 2. Résolution algébrique

### a) Méthode par combinaison linéaire

Le but est de faire des opérations entre les lignes pour faire disparaître des inconnues.

#### EXEMPLE

Réolvons dans  $\mathbb{R}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (L_1) \\ 2x + y = -1 & (L_2) \end{cases}$$

On voit que les deux lignes contiennent le terme  $2x$ . On peut donc l'annuler en soustrayant la première ligne à la seconde ligne :

$$\begin{array}{ccccc} \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases} & \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} & \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4y = -10 \end{cases} & \xleftrightarrow{\text{On résoud } L_2} & \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ y = -2,5 \end{cases} \\ & \xleftrightarrow{\text{On remplace } y} & \begin{cases} 2x - 7,5 = 9 \\ y = -2,5 \end{cases} & \xleftrightarrow{\text{On résoud } L_1} & \begin{cases} 2x = 1,5 \\ y = -2,5 \end{cases} \\ & \xleftrightarrow{\quad} & \begin{cases} x = 0,75 \\ y = -2,5 \end{cases} & & \end{array}$$

### b) Méthode par substitution

Le but est d'exprimer une variable en fonction d'une autre pour pouvoir l'éliminer dans une autre ligne.

#### EXEMPLE

Réolvons dans  $\mathbb{R}$  le système suivant : 
$$\begin{cases} 6x - 7y = 1 & (L_1) \\ x - 3y = 2 & (L_2) \end{cases}$$

On va isoler  $x$  dans la seconde ligne pour le « réinjecter » dans la première.

$$\begin{array}{ccccc} \begin{cases} 6x - 7y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} & \xleftrightarrow{\text{On isole } x} & \begin{cases} 6x - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases} & \xleftrightarrow{\text{On réinjecte}} & \begin{cases} 6(2 + 3y) - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases} \\ & \xleftrightarrow{\text{On résoud } L_1} & \begin{cases} 12 + 18y - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases} & \xleftrightarrow{\quad} & \begin{cases} 11y = -11 \\ x = 2 + 3y \end{cases} \\ & \xleftrightarrow{\quad} & \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 + 3y \end{cases} & \xleftrightarrow{\text{On remplace } y} & \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 - 3 = -5 \end{cases} \end{array}$$