# Fonctions polynomiales de degré 2

**PROGRAMME**

— représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$,$x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$
— axes de symétrie ;
— racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).
— Compétences
  — Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2
  — Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ : Signe, extremum, allure, axes de symétrie
  — Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2
  — Savoir factoriser dans des cas simples une expression du second degré connaissant une racine.
  — Utiliser la forme factorisée d'un poly pour trouver ses racines et étudier son signe.
— déterminer le signe d'une expression factorisée du second degré
— résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une équation du type $x^2 = a$ avec $a \geq 0$.

## I - Généralités

**DÉFINITION**

On appelle fonction polynomiale de degré 2 toute fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Où $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a \neq 0}$.

**EXEMPLES**

$f : x \mapsto x^2$ , $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ et $h : x \mapsto 2 - 0{,}3x^2$ sont des fonctions polynomiales de degré 2.

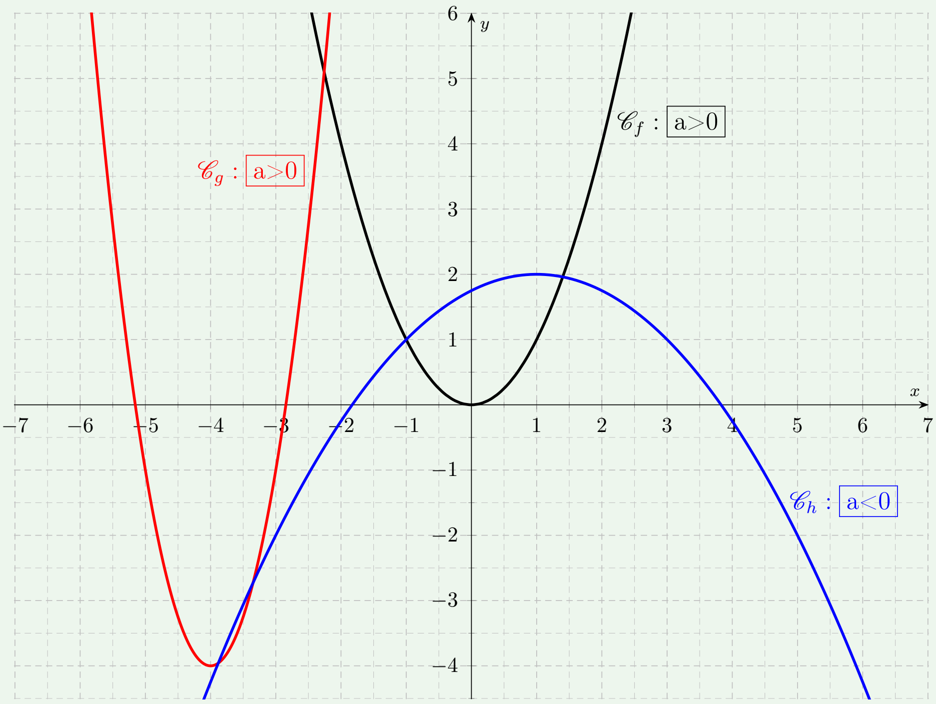
► L'appellation est un peu lourde... On dira plutôt fonction de degré 2.

► Exo 1f
► Graphe d'une fonction au choix

**PROPOSITION**

La représentation graphique d'une fonction de degré 2 est une parabole.

## EXEMPLES




▶ Montrer sur geogebra l'effet obtenu en changeant $a$ et $c$

## REMARQUE

Le terme constant (sans $x$, c'est-à-dire $c$) est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer $c$ décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

## PROPRIÉTÉS

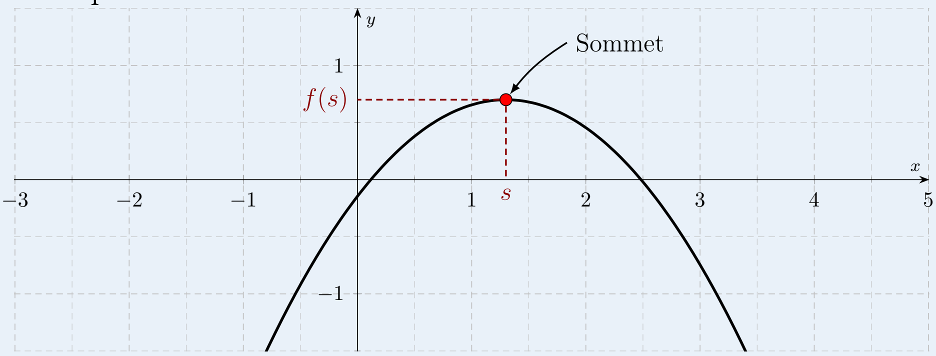
Soit $f$ une fonction de degré 2.

— Si $a \geq 0$, $f$ est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.

— Si $a \leq 0$, $f$ est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.

## DÉFINITION

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si $a > 0$, le point le plus haut sinon.



## PROPRIÉTÉS

On se donne $f$ une fonction de degré 2 et $s$ l'abscisse du sommet de la parabole associée.

— Les coordonnées de son sommet sont donc $(s,f(s))$.

— La parabole associée possède pour axe de symétrie la droite parallèle a l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.

— On en déduit le tableau de variations de $f$ :

Si $a > 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | $s$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $f(s)$ | ↗ $+\infty$ |

Si $a < 0$ :

| $x$ | $-\infty$ | $s$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-\infty$ ↗ | $f(s)$ | ↘ $-\infty$ |

► On verra dans la suite comment trouver algébriquement (par le calcul) les coordonnées de ce sommet, dans des cas particuliers.

► Exo 2f

# II - Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

► Faire tracer la représentation graphique d'une fonction de degré 2 à chacun ( calculatrice ou non ). En déterminer les coordonnées du sommet. Remarques ?

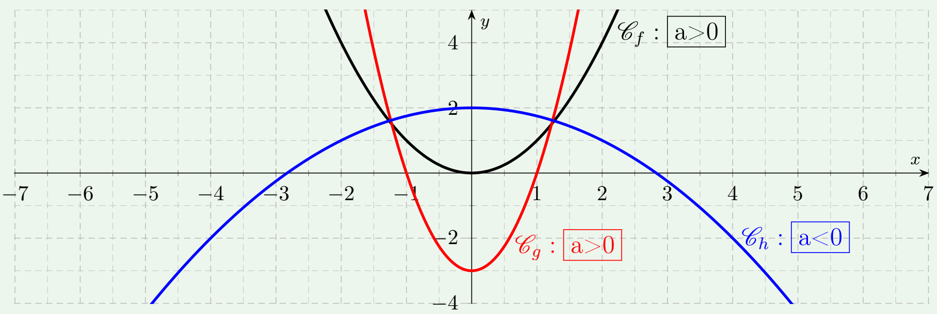
## PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ une fonction de degré 2.

— Les paraboles d'équation $y = ax^2 + c$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

— Les coordonnées du sommet de cette parabole sont $(0; c)$.

## EXEMPLES



**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto 5x^2 - 2$. Les coordonnées du sommet de la parabole associée sont $(0; -2)$.

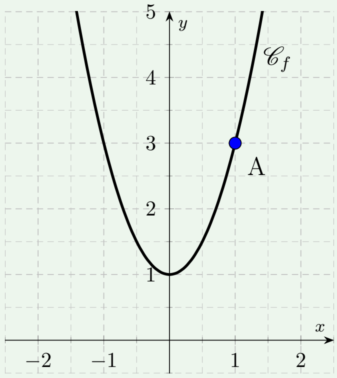
- Sommet, symétries : Exos 20,21,23,22,(24) p120
- Variations : Exo 49 p122
- Représentation, variations : Exo 46 p122
- Equations : Exos 52,53,54 p123

**MÉTHODE**

Pour déterminer l'expression d'une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord $c$ en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine $a$ en résolvant une équation.

**EXEMPLE**

On a représenté une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ sur le repère ci-contre.




On voit directement que $c = 1$, d'où $f : x \mapsto ax^2 + 1$.

On se donne maintenant un point sur la courbe de $f$, par exemple $A(1; 3)$. Cela signifie que $f(1) = 3$, autrement dit $a \times 1^2 + 1 = 3$, soit donc $a + 1 = 3$, d'où $a = 2$.

On a alors $f : x \mapsto 2x^2 + 1$.

- Exo 3f
- Exo 22p121(méthode 2)
- Préciser : Dans le livre on voit $ax^2 + b$, à voir ...

# III - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

## 1. Généralités

**PROPOSITION**

Les fonctions du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des fonctions de degré 2. On dit que cette forme est l'écriture factorisée de $f$ (lorsqu'elle existe).

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$

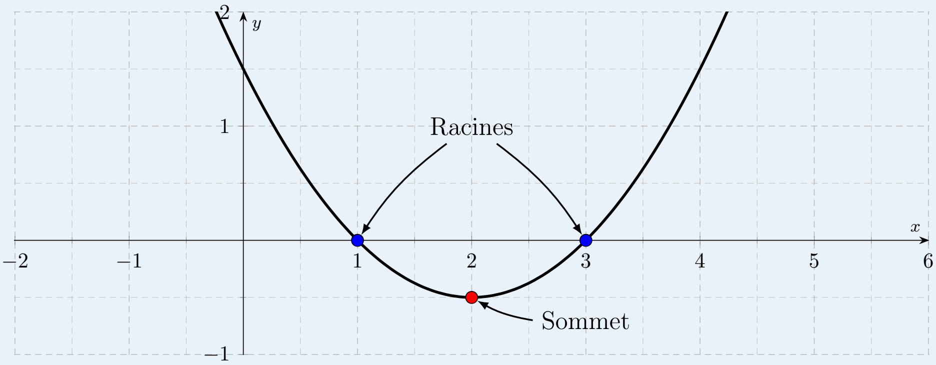
$$\begin{aligned} &= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

Donc $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$ avec $b = -(ax_1 + ax_2)$ et $c = ax_1x_2$.

- Exos 79,80,(81->83) p125
- Remarque par rapport à la suite ?

## DÉFINITION

Soit $f$ une fonction de degré 2. On appelle **racines** de $f$ les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de $f$ et l'axe des abscisses.



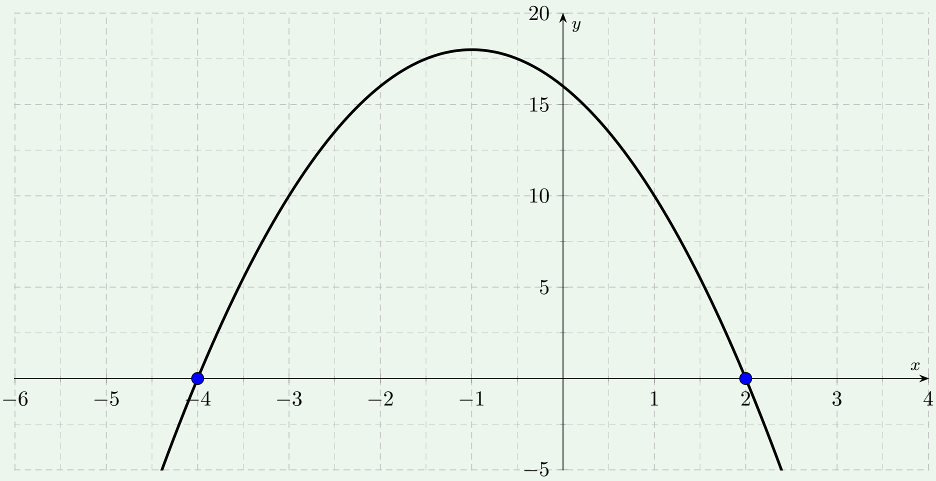

## REMARQUE

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ($a \neq 0$), les racines de $f$ sont $x_1$ et $x_2$.

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$
$\Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

## EXEMPLE

Les racines de la fonction $f : x \mapsto -2(x - 2)(x + 4)$ sont 2 et $-4$.



On voit alors que la parabole associée par $f$ coupe l'axe des abscisses en $M(2; 0)$ et $N(0; -4)$.

► Exos 84,85 p125

## PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$. On pose $s = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(s, f(s))$.

**EXEMPLE**

Pour la parabole précédente, on a $s = \frac{2-4}{2} = -1$, et :

$$\begin{aligned} f(s) &= f(-1) \\ &= -2(-1-2)(-1+4) \\ &= -2 \times (-3) \times 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc $(-1;18)$.

- Exos 26,27,29 p121

## 2. Factorisation

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b + c$. On souhaite retrouver l'écriture factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

**MÉTHODE**

Si l'on connait une racine $x_1$ de $f$, on peut retrouver l'écriture factorisée de $f$ par identification.

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Cherchons d'abord une racine dite "évidente" de $f$.
On remarque que $f(1) = 0$ donc on peut prendre $x_1 = 1$.
On sait alors qu'on peut écrire $f(x) = a(x-1)(x-x_2)$ avec $a,x_2 \in \mathbb{R}$.
Développons cette expression : $f(x) = a\left(x^2 - x \times x_2 - x + x_2\right)$

$$= ax^2 + (a - ax_2)x + ax_2$$

On a de plus $f(x) = 1x^2 - 3x + 2$.

On a alors $\begin{cases} a = 1 \\ a - ax_2 = -3 \\ ax_2 = 2 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $ax_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$.

On en déduit que $f(x) = 1(x-1)(x-2) = (x-1)(x-2)$.

**REMARQUE**

Le $a$ qui apparait dans la forme développée et factorisée est le même !

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$. On a $a = 3$ donc la forme développée de $f$ sera de la forme $f(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$.

- Exo 28 p121
- Exos 60 -> 66 p123

## 3. Etude du signe

**REMARQUE**

Une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ peut être vue comme un produit d'un nombre réel et de deux fonctions affines.

**MÉTHODE**

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$, on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto 0{,}5(x - 1)(x + 3)$. Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto x + 3$. On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x-1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

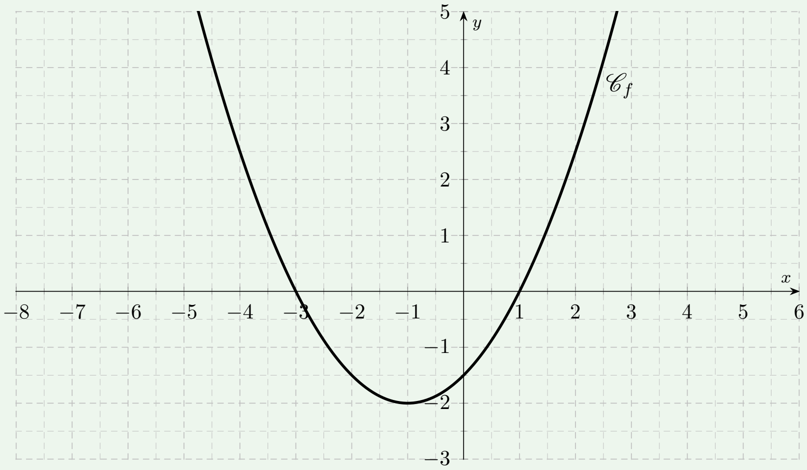
On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de $f$ :

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - 1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x + 3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $(x - 1)(x + 3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On peut donc lire sur ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est :

$$S = ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

On peut vérifier que l'on obtient le même tableau par lecture graphique.




- Exos 72 -> 74 p124
- Exos 88 (-> 90) p125

## DÉROULÉ

- **Total : 3.5 semaines**
- Semaine 1
  - 30m - Cours I partie 1 : Définitions et exo
  - 15m - Graphe de $x \mapsto x^2$
  - 1h - Cours : Représentation graphique, sommet, variations, exo
  - 30m - Cours II : Généralités+Exos
- Semaine 2
  - 1h - Suite
  - 1h - II.2 + Exos
  - 45m - III.1.1 + Exos
  - 45m - III.1.2 + Exos
- Semaine 3
  - 30m - Suite
  - 45m : III.1.3 + Exos
  - 1h : III.2 + Exos
  - 1h : III.3 + Exos