

# REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

## PROGRAMME

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de  $\overrightarrow{AB}$  en fonction de celles de  $A$  et  $B$ .
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Capacités :
  - Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
  - Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit de vecteur par un réel.
  - Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
  - Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
  - Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- Démonstration : Colinéarité  $\Leftrightarrow$  déterminant nul

## I - Généralités sur les repères

### DÉFINITION

Soient  $O, I, J$  trois points du plan non alignés. On pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ . Un repère du plan est un triplet  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On dit alors que :

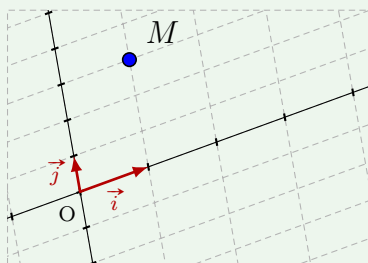
- $O$  est l'origine du repère
- $(OI)$  est l'axe des abscisses
- $(OJ)$  est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  pour la suite du cours.

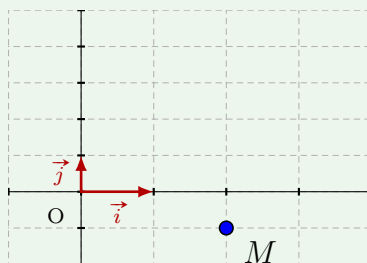
### PROPRIÉTÉ

Tout point  $M$  du plan est repéré par un unique couple de coordonnées  $(x; y)$ .  $x$  est l'abscisse de  $M$  et  $y$  est l'ordonnée de  $M$ .

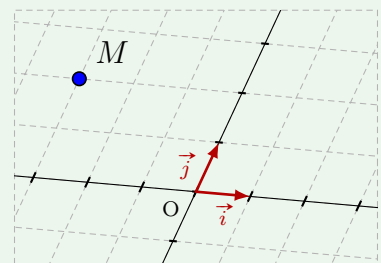
### EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



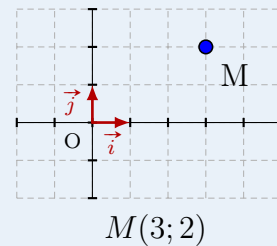
$M(-3; 2)$

► On écrit  $M(1; 3)$  et pas  $M = (1; 3)$  !

## DÉFINITION

On dit que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est orthonormé si :

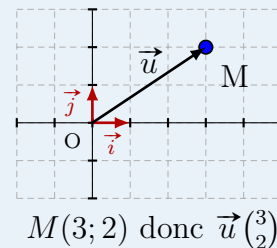
- Ses axes sont perpendiculaires :  $(OI) \perp (OJ)$
- Les vecteurs unité  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  ont pour longueur 1 :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$



## II - Coordonnées d'un vecteur

### DÉFINITION

Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan. On se donne le point  $M(x; y)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ . Les coordonnées de  $\vec{u}$  sont celles de  $M$ , et l'on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

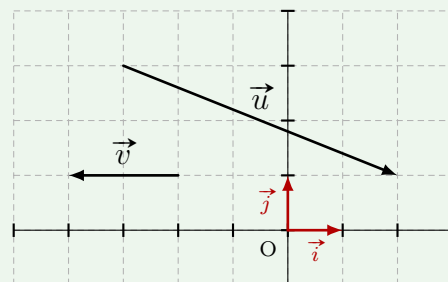


► On écrit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et pas  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

### EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On a  $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



► Exo 1

### PROPOSITION

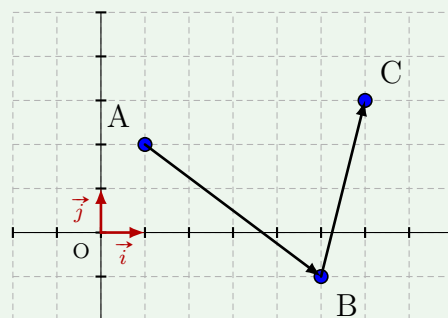
Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLE

On se donne  $A(1; 2)$ ,  $B(5; -1)$  et  $C(6; 3)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

De même, on a  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .



► Exos 2, 3, 4 (par deux), (5), 6

## PROPRIÉTÉS

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ .
- Les coordonnées de  $\lambda \vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ .

## EXEMPLE

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Alors on a :

- $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix}$  d'où  $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- $3\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \end{pmatrix}$  d'où  $3\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ .
- $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 5 \times 2 \\ 2 \times 3 - 5 \times (-1) \end{pmatrix}$  d'où  $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}$ .

► Exo 7,(8)

## III - Calculs de distances et de milieux

### 1. Milieu d'un segment

## PROPOSITION

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. On se donne de plus  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors les coordonnées de  $I$  sont  $\left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ .

## REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

## EXEMPLE

Soient  $A(1; 7)$ ,  $B(6; -5)$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors on a  $I \left( \frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2} \right)$  d'où  $I \left( \frac{7}{2}; \frac{2}{2} \right)$ , et enfin  $I(3,5; 1)$ .

► Exo 9,(14,15)

## 2. Normes et distances

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé.

### PROPOSITION

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan. Alors la norme de  $\vec{u}$  est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

### COROLLAIRE

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Alors la distance entre  $A$  et  $B$  vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### EXEMPLE

Soient  $A(1; 7)$  et  $B(6; -5)$ . Alors  $AB = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-5 - 7)^2}$   
 $= \sqrt{5^2 + (-12)^2}$   
 $= \sqrt{25 + 144}$   
 $= \sqrt{169}$   
 $= 13$

### APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

### EXEMPLE

Soit  $\mathcal{C}$  le cercle de centre  $A(3; 5)$  de rayon 3, et le point  $M(5; 7)$ . On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (7 - 5)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \simeq 2,83 \end{aligned}$$

Comme  $AM \neq 3$ ,  $M$  n'appartient pas au cercle  $\mathcal{C}$ .

► Exos 10,11,12,(13)

## IV - Colinéarité

## 1. Définitions et caractérisations

### DÉFINITION

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits colinéaires s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ . Dans le cas où ils sont non nuls, cela revient à dire qu'ils ont la même direction.

### REMARQUE

Deux vecteurs sont colinéaire si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

### EXEMPLES

On se donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $\vec{v} = 2\vec{u}$ . Alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

Coordonnées de $\vec{u}$	Coordonnées de $\vec{v}$	$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ?
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 2\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 7\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -3\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$	$\left. \begin{array}{l} 4 \times (-20) = -80 \\ -7 \times 11 = -77 \end{array} \right\}$ et $-80 \neq -77$ donc non

## 2. Déterminant de deux vecteurs

### DÉFINITION

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

### EXEMPLE

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$ . On a  $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times (-20) - (-7) \times 11$   
 $= -80 + 77$   
 $= -3$

► Exo 16

### PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

### EXEMPLE

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'exemple précédent ne sont donc pas colinéaires.

$$\begin{aligned}\text{Soient } \vec{a} \begin{pmatrix} -15 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}. \text{ On a } \det(\vec{a}; \vec{b}) &= -15 \times (-24) - 9 \times 40 \\ &= 360 - 360 \\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs  $\vec{a}$  et  $\vec{b}$  sont donc colinéaires. (On a en fait  $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$ ).

► Exos 17,18

## 3. Applications en géométrie

### PROPRIÉTÉS

- Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.
- Trois points  $A, B, C$  sont alignés si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires.

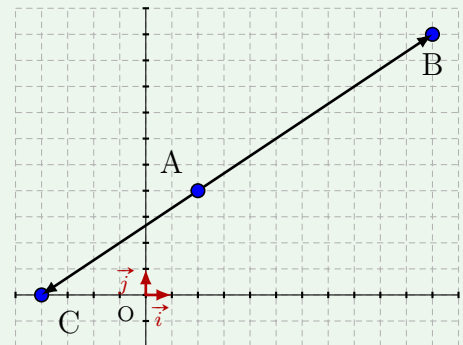
### EXEMPLE

On se donne les points  $A(2; 4)$ ,  $B(11; 10)$  et  $C(-4; 0)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

$$\text{On a } \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times (-4) - (-6) \times 6 = -36 + 36 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, d'où  $(AB) \parallel (AC)$ , et les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.



► Exos 19,20