

FONCTIONS AFFINES

PROGRAMME

- Fonctions affines : Capacités
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite
- Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes.
- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe
- Equation réduite d'une droite

I - Généralités

DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$ et $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$ sont des fonctions affines.

CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.
- $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

► Fiche tableau : reconnaissance a et b

II - Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées.

VOCABULAIRE

Dans un repère, soit d la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :

- a est le **coefficient directeur** de d .
- b est l'**ordonnée à l'origine** de d .
- $y = ax + b$ est l'équation réduite de d .

PROPOSITION

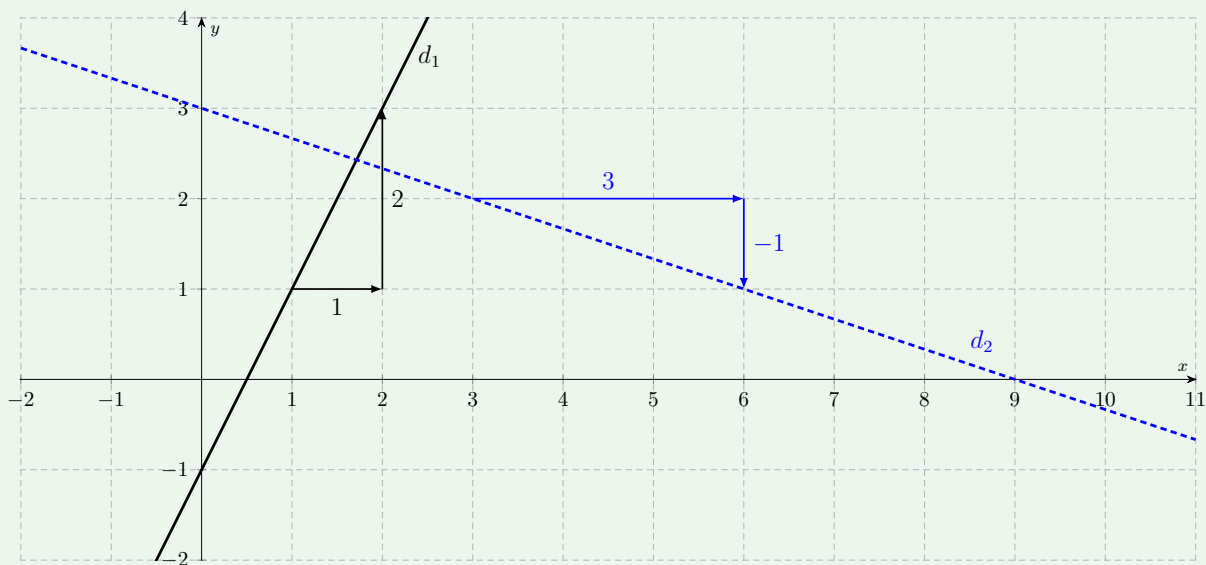
Lorsque a s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

EXEMPLES

Construisons les droites d_1 et d_2 d'équations réduites respectives $y = 2x - 1$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

- Pour d_1 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est -1 , et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour d_2 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est 3 , et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descends d'un.



► Fiches construction et détermination

III - Recherche algébrique de a et b

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, avec $x_1 \neq x_2$. Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EXEMPLE

On suppose que $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$.

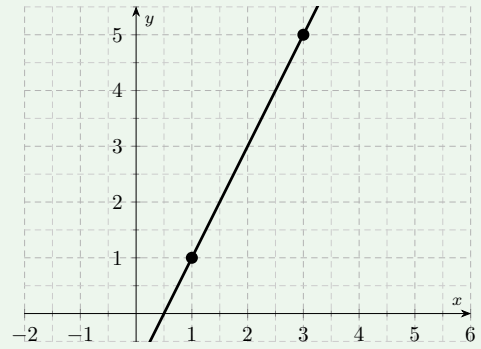
$$\text{Alors } a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

On a alors $f : x \mapsto 2x + b$. On sait de plus que $f(3) = 2 \times 3 + b$ et $f(3) = 5$ donc :

$$5 = 2 \times 3 + b$$

soit donc $5 = 6 + b$
et alors $5 - 6 = b$
puis $b = -1$

Cela donne alors $f : x \mapsto 2x - 1$.



- Fiche détermination algébrique
- Fiche preuve (*)

IV - Tableaux de signe

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si $ax + b = 0$ ssi $ax = -b$ ssi $x = -\frac{b}{a}$. Le tableau de signes de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$:

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| $f(x)$ | - | 0 | + |

Si $a < 0$:

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|--------|-----------|----------------|-----------|
| $f(x)$ | + | 0 | - |

MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$. En décomposant f , on obtient alors le tableau suivant :

| x | $-\infty$ | -2 | $\frac{4}{5}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x + 2$ | - | 0 | + | + |
| $4 - 5x$ | + | + | 0 | - |
| $f(x)$ | - | 0 | 0 | - |

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

Pour $g : x \mapsto \frac{x + 2}{4 - 5x}$, le tableau de signes obtenu est presque identique :

| x | $-\infty$ | -2 | $\frac{4}{5}$ | $+\infty$ |
|----------|-----------|------|---------------|-----------|
| $x + 2$ | $-$ | 0 | $+$ | $+$ |
| $4 - 5x$ | $+$ | $+$ | 0 | $-$ |
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $ $ | $-$ |

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque $x = \frac{4}{5}$.
Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de g .