Dérivation

PROGRAMME

- Point de vue local :
  - Sécantes à une courbe passant par un point donné, taux de variation en un point
  - Tangente à une courbe en un point, définie comme position limite des sécantes
  - Nombre dérivé en un point défini comme limite du taux de variation
  - Equation réduite de la tangente en un point.
- Point de vue global
  - Fonction dérivée
  - Dérivées de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, de combinaisons linéaires, de polynômes de degré ≤ 3
  - Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée
  - Tableau de variations, extremums
- Capacités
  - Interprétation du nombre dérivé comme coeff directeur de la tangente
  - Construire la tangente à une courbe en un point
  - Déterminer l'équation réduite de la tangente à une courbe en un point
  - Calculer la dérivée d'un polynome de degré ≤ 3
  - Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynome de degré ≤ 3

▶ Manque l'équation de la tangente (bof ?).
▶ Première partie sur les sécantes, le programme a l'air d'être clair sur ce point... (sera distribué, résumé sur un fichier géogebra et fait rapidement)
▶ Variations que à la fin, dommage ?
▶ Vocabulaire : tangente à la courbe de f passant par A un peu lourd

I - Nombre dérivé

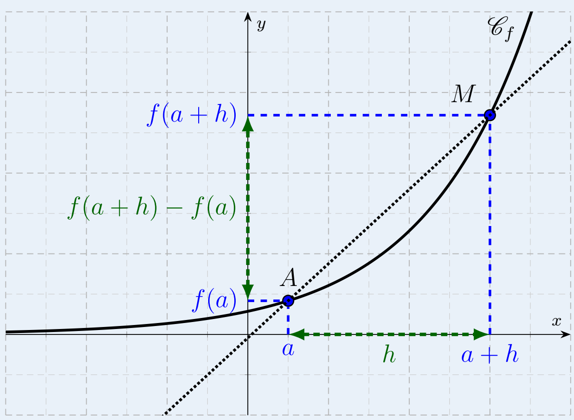
1. Sécantes et tangentes

DÉFINITION

Soit f une fonction, avec A et M deux points sur la courbe de f d'abscisses respectives a et $a+h$.
La droite (AM) est une **sécante** de la courbe de f.
Son coefficient directeur vaut :

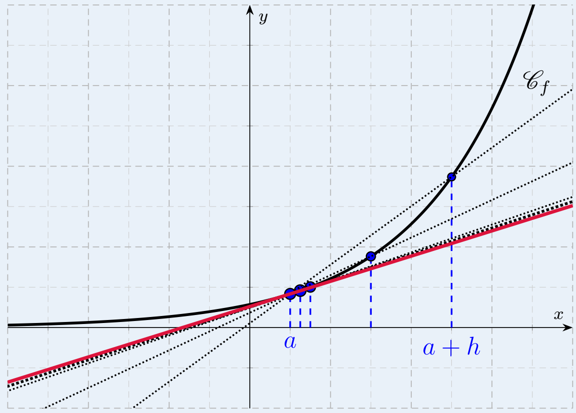
$$\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ce nombre correspond au taux d'accroissement de f entre a et $a+h$.



PROPRIÉTÉ

A mesure que M se rapproche du point A (autrement dit lorsque h se rapproche de 0), la droite (AM) se rapproche d'une autre droite, appelée **tangente de $\mathscr{C}_f$ en A**, qui épouse la courbe de f près de A. De plus, le nombre $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche du coefficient directeur de cette tangente.

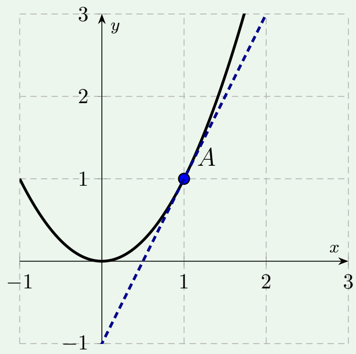


EXEMPLE

On se donne la fonction $f : x \mapsto x^2$, et le point $A(1;1)$ sur $\mathscr{C}_f$. Soit $h \in \mathbb{R}$. On a $f(1) = 1$ et $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$. Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h} \\ &= 2+h\end{aligned}$$

Cette quantité se rapproche de 2 lorsque h tend vers 0. Alors le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f passant par A est 2.



▶ Voir fichier géogebra

2. Lecture du nombre dérivé

DÉFINITION

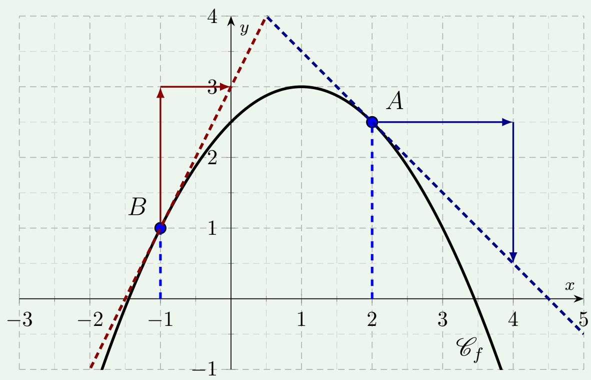
On appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

EXEMPLE

On a représenté une fonction f ci-contre.

Pour obtenir $f'(2)$, on place A défini comme le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2, puis on détermine le coefficient directeur de la tangente de $\mathscr{C}_f$ passant par A. On a alors $f'(2) = -1$.

Pour obtenir $f'(-1)$, on place B, et on détermine le coefficient directeur de la tangente associée : $f'(-1) = 2$. En utilisant l'ordonnée à l'origine, on en déduit que l'équation de cette tangente est $y = 2x + 3$.



II - Fonction dérivée

1. Généralités, règles de calcul

DÉFINITION

On définit la fonction dérivée de f, notée f', qui à x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

PROPOSITION

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

— $(f+g)' = f' + g'$

— $(\lambda f)' = \lambda f'$

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.

2. Lien avec les variations

THÉORÈME

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

— Si f' est positive sur $[a;b]$, alors f est croissante sur $[a;b]$.

— Si f' est négative sur $[a;b]$, alors f est décroissante sur $[a;b]$.

— Si f' est nulle sur $[a;b]$, alors f est constante sur $[a;b]$. Les zéros de f' correspondent aux extremums de f. (A reformuler)

APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

On a $f'(x) = 0$ ssi $2x = 4$ ssi $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

Cela donne alors :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	