



LGT Jean Rostand

2<sup>nde</sup> GT

# MATHÉMATIQUES

M. DELAUNEY

# NOMBRES RÉELS

## I - Les ensembles de nombres

### 1. Les entiers

#### DÉFINITION

$\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note  $0 \in \mathbb{N}$ . Par contre,  $-3$  n'en est pas un, on note  $-3 \notin \mathbb{N}$ .

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

#### DÉFINITION

$\mathbb{Z}$  désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs :  $1 \in \mathbb{Z}$ ,  $-2 \in \mathbb{Z}$  mais  $0.5 \notin \mathbb{Z}$ .

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

#### REMARQUE

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble  $\mathbb{N}$  est donc inclus dans l'ensemble  $\mathbb{Z}$ . On note  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .

### 2. Les nombres décimaux

#### DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme  $\frac{a}{10^n}$ , où  $a \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ . On note  $\mathbb{D}$  l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D}, 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D}, \frac{1}{3} = 0.333\dots \notin \mathbb{D}$$

#### REMARQUE

Tout entier relatif est aussi un entier décimal :  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$  : Par exemple,  $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$ .

### 3. Les nombres rationnels

#### DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme  $\frac{p}{q}$ , où  $p$  et  $q$  sont des entiers relatifs et  $q$  est non nul. On note  $\mathbb{Q}$  l'ensemble des nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}, \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

### PROPOSITION

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

### EXEMPLE

$x = 0.0909\dots$  est rationnel :  $100x = 9.0909\dots$  donc  $100x - x = 9$  d'où  $99x = 9$  puis  $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$ .

### EXERCICE

Faire de même avec  $x = 0.1666\dots$  :  $10x = 1.666\dots$  donc  $10x - x = 1.5$  et alors  $9x = \frac{3}{2}$  puis  $x = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ .

### REMARQUE

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel :  $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ .

## 4. Les nombres réels

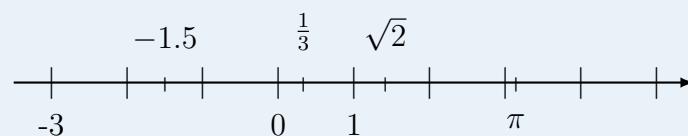
### DÉFINITION

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}}$  sont irrationnels

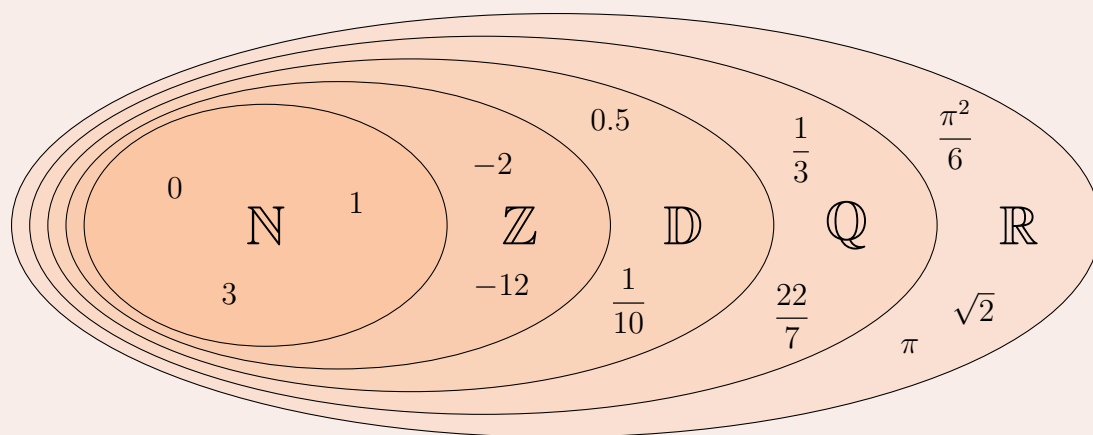
### PROPRIÉTÉ

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



### PROPOSITION

Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres :  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ .



## Encadrement décimal des réels

### DÉFINITION

Un encadrement décimal d'un nombre réel  $x$  est une écriture  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_1, d_2$  des nombres décimaux. La différence  $d_2 - d_1$  est l'amplitude de l'encadrement.

### EXEMPLE

Par exemple,  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$  est un encadrement décimal de  $\sqrt{2}$  d'amplitude  $10^{-1} = 0.1$ .

### DÉFINITION

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $d_1 \leq x \leq d_2$  avec  $d_2 - d_1 = 10^{-n}$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

L'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est celui de  $d_1$  ou  $d_2$  le plus proche de  $x$ .

Dans le cas où  $d_1$  et  $d_2$  sont à égale distance de  $x$ , l'arrondi à  $10^{-n}$  de  $x$  est  $d_2$ .

### EXEMPLE

- 3,14 est l'arrondi à  $10^{-2}$  de  $\pi$ .
- 3,142 est l'arrondi à  $10^{-3}$  de  $\pi$ .
- 2,4 est l'arrondi à  $10^{-1}$  de 2,35.

### REMARQUE


Faire un arrondi à  $10^{-n}$  signifie  $n$  chiffres après la virgule.

## II - Intervalles de $\mathbb{R}$

### DÉFINITION

On veut écrire plus simplement " Tous les nombres réels compris entre 2 et 5, 5 exclus ". Pour cela, il y a trois manières possibles :

— Par un schéma :



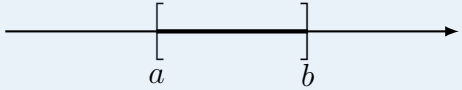
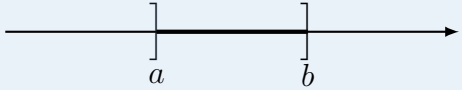
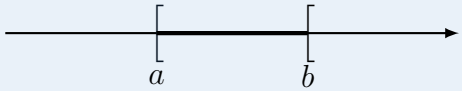
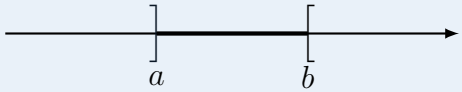
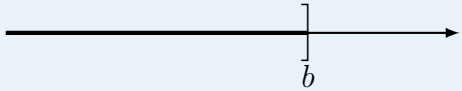
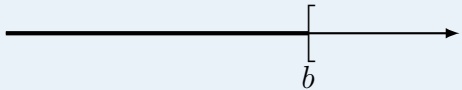
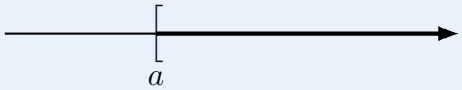

crochet fermé

crochet ouvert

— Par une inégalité :  $2 \leq x < 5$

— Par un intervalle :  $[2; 5[$

Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts.

L'intervalle noté ...	... désigne l'ensemble des réels $x$ tels que ...	Il est représenté par un segment sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$] -\infty; b]$	$x \leq b$	
$] -\infty; b[$	$x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	

## REMARQUES

- $a$  et  $b$  sont appelés les bornes de l'intervalle.
- Attention à ne pas confondre  $[a; b]$  et  $\{a; b\}$  : Le premier ensemble contient tous les réels compris entre  $a$  et  $b$  inclus, alors que le second ne contient que  $a$  et  $b$ .
- $-\infty$  et  $+\infty$  ne sont pas des nombres réels, on écrit donc pas  $[-\infty; a]$ .
- $\mathbb{R} = ]-\infty; +\infty[$
- Les quatre premiers intervalles sont dits bornés. Parmi ceux-ci, on dit que  $[a; b]$  est fermé,  $]a; b[$  est ouvert. Les deux autres sont dits semi-ouverts.

## Unions et intersections

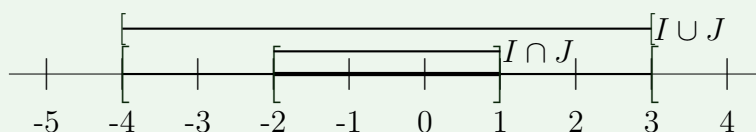
### DÉFINITION

Soient  $I$  et  $J$  deux intervalles de  $\mathbb{R}$ .

- L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à  $I$  et à  $J$  est appelé intersection de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cap J$ .
- L'ensemble des réels qui appartiennent à  $I$  ou à  $J$  est appelé réunion de  $I$  et  $J$ . Cet ensemble est noté  $I \cup J$ .

### EXEMPLE

Pour  $I = [-2; 3[$  et  $J = [-4; 1]$ , on a  $I \cap J = [-2; 1]$  et  $I \cup J = [-4; 3[$ .



## III - Valeur absolue

### DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel  $x$  est  $-x$  lorsque  $x < 0$  ou  $x$  lorsque  $x \geq 0$ . On note :

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

### EXEMPLE

$|8| = 8$  mais  $|-8| = 8$  aussi. En fait, l'effet de la valeur absolue est de rendre un nombre positif (on supprime le signe  $-$ ).

### DÉFINITION

Soient  $A$  et  $B$  deux points placés sur la droite des réels, d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ . La distance entre  $a$  et  $b$  correspond à la longueur de  $AB$ . Elle se calcule à l'aide de la valeur absolue :

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

### EXEMPLE

- La distance entre 5 et  $-2$  est  $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$ .
- Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La distance entre  $x$  et 0 est  $|x - 0| = |x|$ .

## Intervalles $[a - r; a + r]$

### PROPRIÉTÉ

Soient  $a$  et  $r$  deux réels, avec  $r > 0$ . Alors l'intervalle  $[a - r; a + r]$  contient tous les réels  $x$  qui vérifient  $a - r \leq x \leq a + r$ , autrement dit ceux à une distance inférieure à  $r$  de  $a$ , soit  $|x - a| \leq r$ .

### EXEMPLE

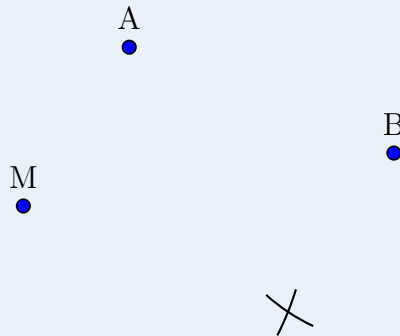
$$[3; 5] = [4 - 1; 4 + 1] = \{x \in \mathbb{R}, |x - 4| \leq 1\}$$

# VECTEURS DU PLAN : PREMIÈRE APPROCHE

## I - Translations

### DÉFINITION

Soient  $A, B, M$  trois points quelconques du plan. L'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est l'unique point  $N$  tel que le quadrilatère  $ABNM$  soit un parallélogramme.



### REMARQUES

Lors de cette translation :

- Les droites  $(AB)$  et  $(MN)$  sont parallèles
- Les longueurs  $AB$  et  $MN$  sont égales

## II - Généralités sur les vecteurs

### DÉFINITION

Un vecteur  $\vec{u}$  peut être représenté avec une origine  $A$  et une extrémité  $B$ . Il est caractérisé par :

- Sa direction ( celle de la droite  $(AB)$  )
- Son sens ( de  $A$  vers  $B$  )
- Sa norme ( ou sa longueur ), notée  $\|\vec{u}\|$ . On a  $\|\vec{u}\| = AB$ .

### DÉFINITION

Lorsque deux vecteurs symbolisent le même déplacement, on dit qu'ils sont égaux.

### EXEMPLE

La figure précédente nous donne alors  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$ ,  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{NM}$ ,  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$ .



## PROPRIÉTÉ

Les quatre propositions suivantes sont **équivalentes** :

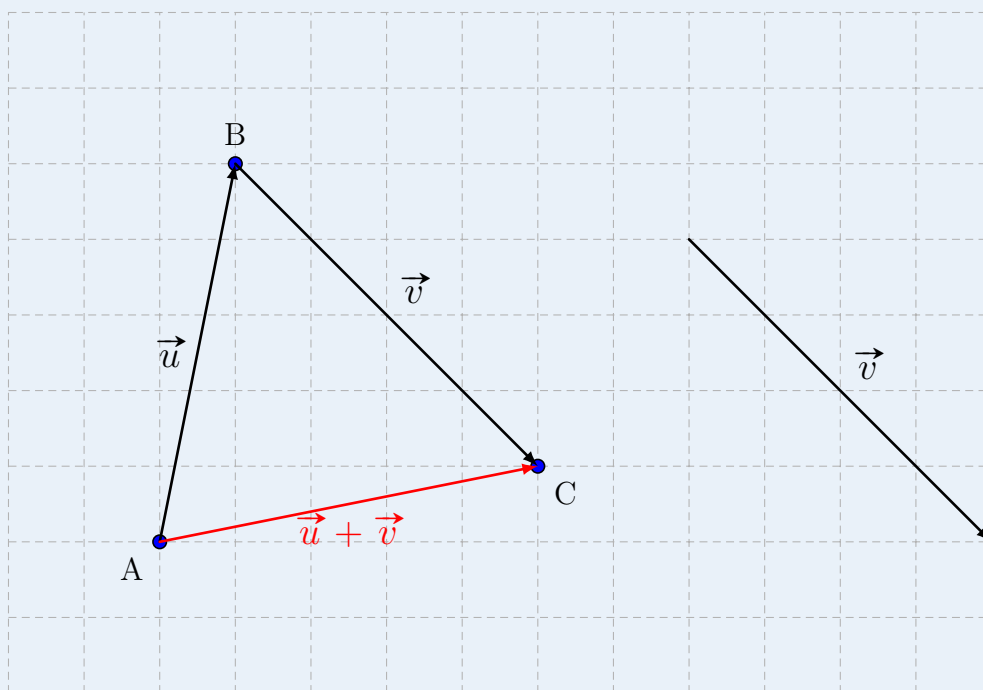
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$
- $N$  est l'image de  $M$  par la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$
- $[AN]$  et  $[BM]$  se coupent en leur milieu
- $ABNM$  est un parallélogramme

## CAS PARTICULIERS

- Le vecteur nul, noté  $\vec{0}$ , est obtenu à partir de la translation qui transforme  $A$  en  $A$ ,  $B$  en  $B$  ... On a alors  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$ . Ce vecteur n'a ni direction, ni sens, et sa norme est nulle.
- L'opposé du vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur associé à la translation qui transforme  $B$  en  $A$ . On le note  $-\overrightarrow{AB}$ . Ainsi,  $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$ . Il a la même direction et la même norme que  $\overrightarrow{AB}$  mais est de sens contraire.

## III - Somme de deux vecteurs

► Activité Chasles



## EXEMPLE

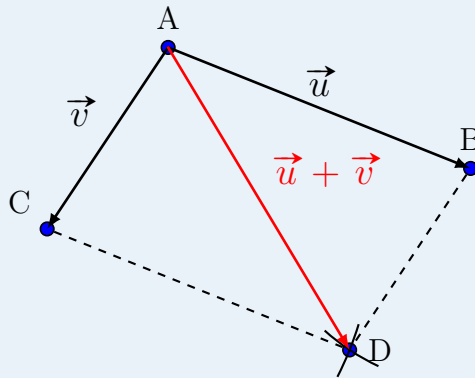
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$

## REMARQUE

En général, la longueur de  $\vec{u} + \vec{v}$  n'est pas égale à la somme de celle de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  :  $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

## MÉTHODE

Pour construire  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ , il suffit de construire le parallélogramme  $ABDC$  et de prendre le vecteur  $\overrightarrow{AD}$ .



## IV - Produit d'un vecteur par un nombre réel

### DÉFINITION

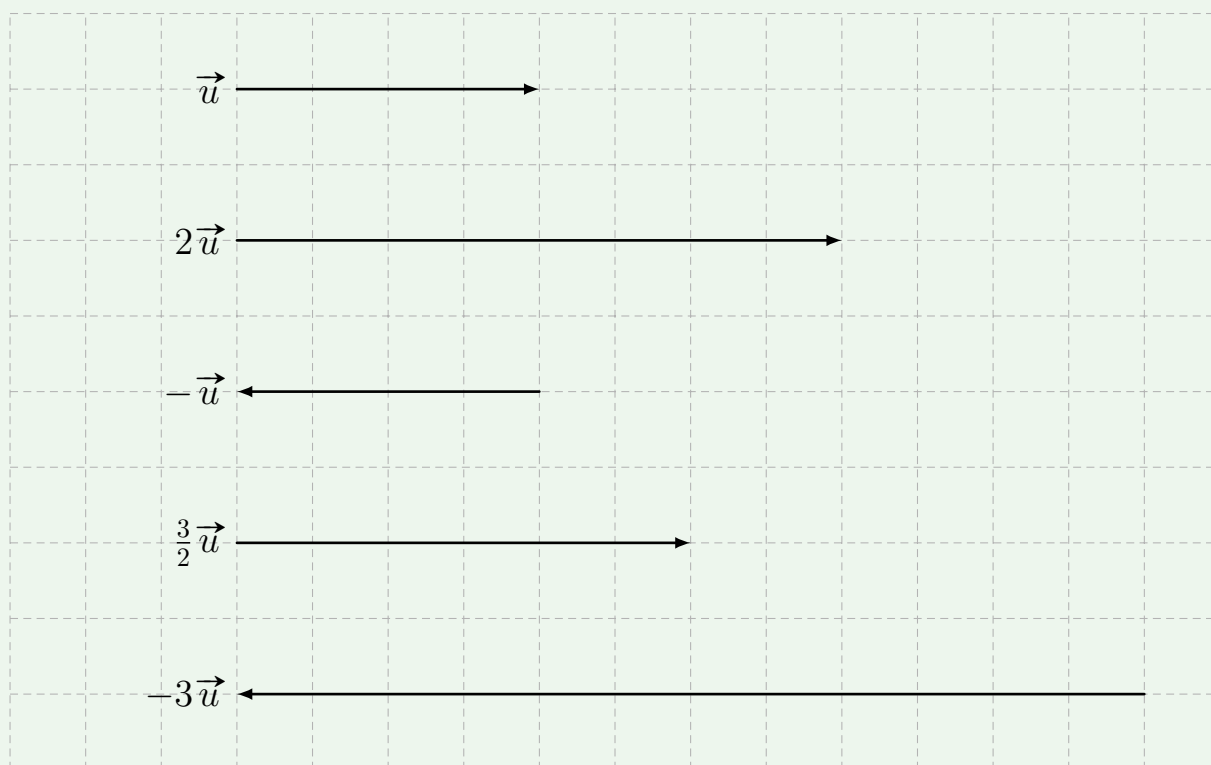
Soit  $k$  un réel et  $\vec{u}$  un vecteur. Le produit de  $k$  par  $\vec{u}$  est le vecteur noté  $k\vec{u}$  tel que :

- $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  ont la même direction
- La longueur de  $k\vec{u}$  est  $|k| \|\vec{u}\|$
- Si  $k > 0$ ,  $\vec{u}$  et  $k\vec{u}$  ont le même sens. Sinon, ils ont des sens opposés.

### REMARQUE

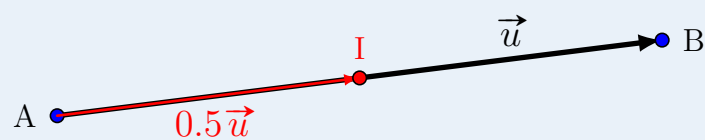
En particulier,  $0 \times \vec{u} = \vec{0}$ .

## EXEMPLE



## APPLICATION

$I$  est le milieu de  $[AB]$  se traduit par  $\vec{AI} = \vec{IB}$  ou  $\vec{AB} = 2\vec{AI}$  ou  $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ .

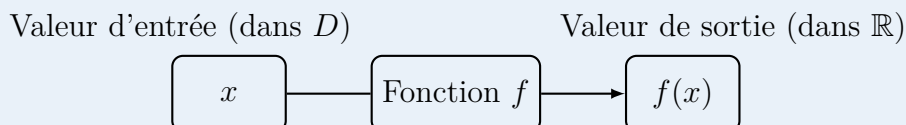


# FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

## I - Définitions, notations

### DÉFINITION

Soit  $D \subset \mathbb{R}$ . On appelle fonction  $f$  sur l'ensemble  $D$  le processus qui à tout nombre  $x \in D$  associe un **unique** réel noté  $f(x)$ . On note  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \longmapsto f(x)$$



On dit alors que :

- $f(x)$  est l'image de  $x$
- $x$  est un antécédent de  $f(x)$
- $D$  est l'ensemble ( ou domaine ) de définition de  $f$

### EXEMPLE

On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  .  
$$x \longmapsto x^2 - x$$

- L'ensemble de définition de  $f$  est  $\mathbb{R}$ .
- L'image de 2 par la fonction  $f$  est 2 :  $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ .
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction  $f$ .  $-1$  en est aussi un car  $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ .

### REMARQUE

Chaque nombre dans  $D$  possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

## II - Représentation graphique d'une fonction

### DÉFINITION

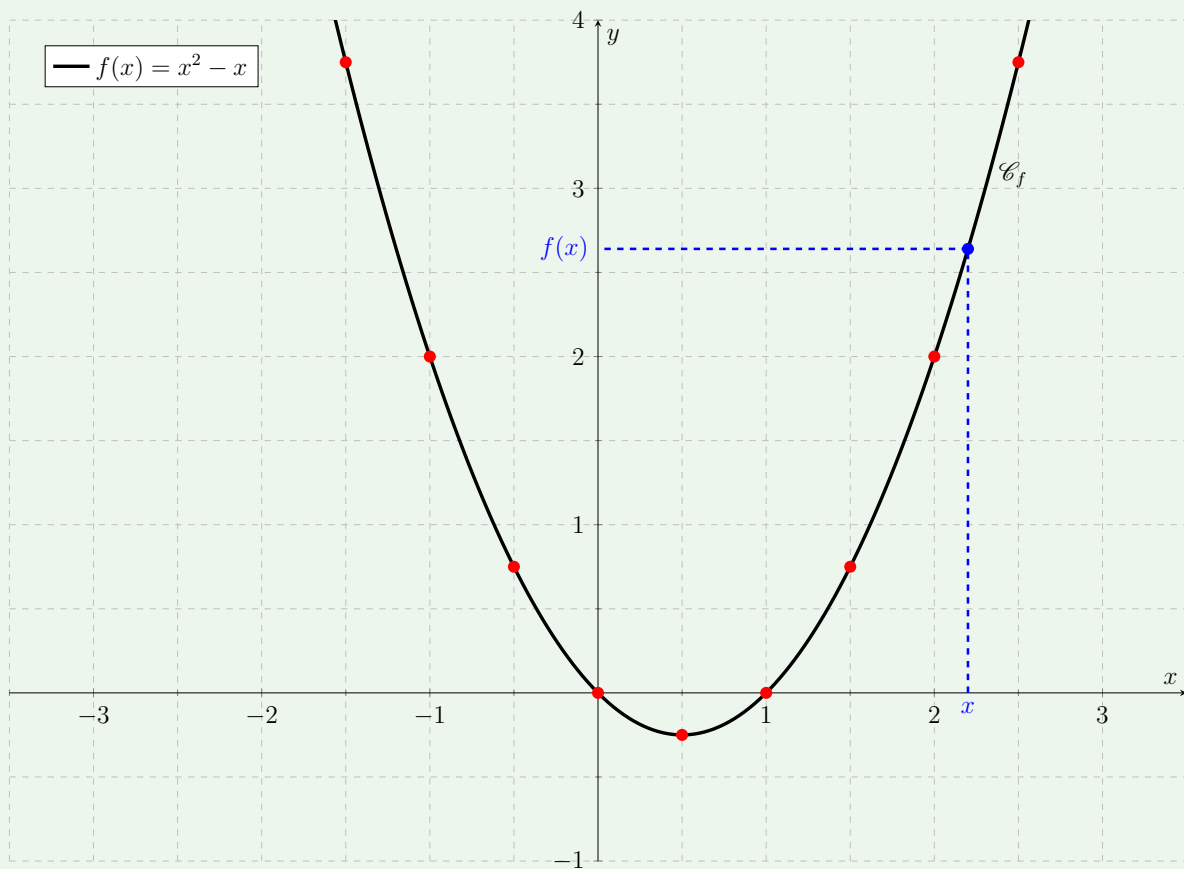
Dans un repère du plan, l'ensemble des points  $(x, f(x))$  pour  $x \in D$  constitue la courbe de  $f$ . L'équation de la courbe de  $f$  est  $y = f(x)$  pour  $x \in D$ .

### MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

## EXEMPLE

$x$	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									

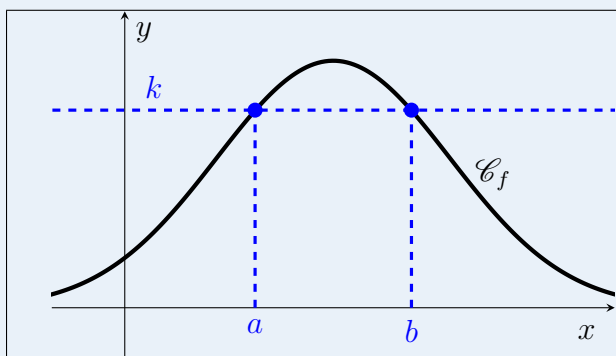


Les points  $(-1; 2)$  et  $(1; 0)$  appartiennent à la courbe de  $f$ , mais pas le point  $(0; 1)$ .

## III - Résolution graphique d'équations

### 1. Equations du type $f(x) = k$

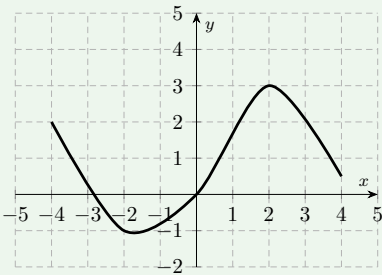
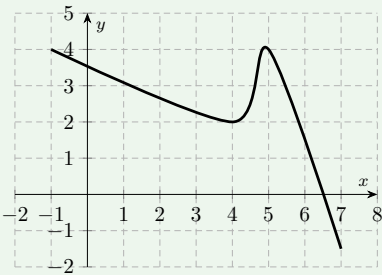
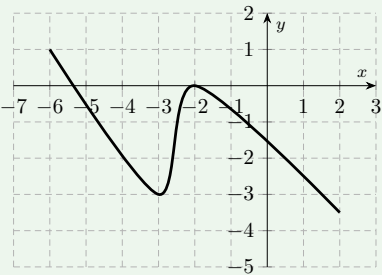
#### MÉTHODE



Résoudre l'équation  $f(x) = k$  signifie trouver les antécédents de  $k$  par la fonction  $f$ . Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est  $k$ . Ici, l'ensemble des solutions de l'équation est :

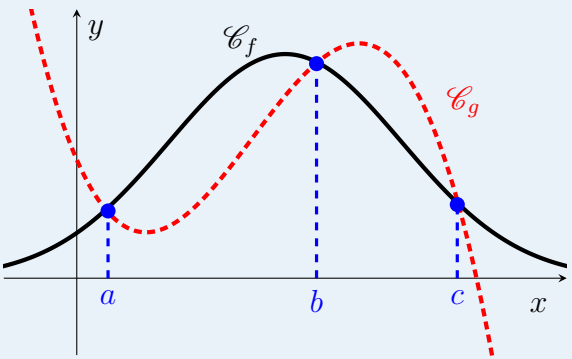
$$S = \{a; b\}$$

## EXEMPLES

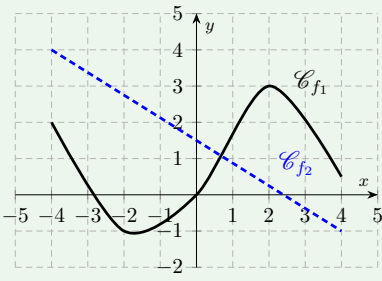
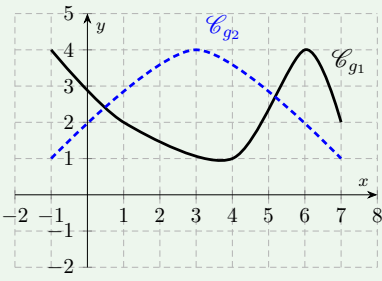
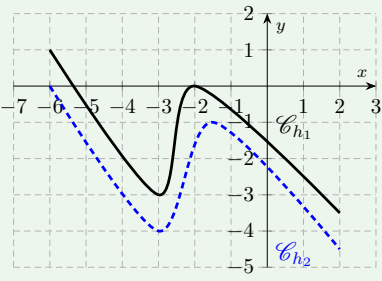
		
Résoudre $f(x) = 1$ :	Résoudre $g(x) = 1$ :	Résoudre $h(x) = -4$ :

## 2. Equations du type $f(x) = g(x)$

### MÉTHODE

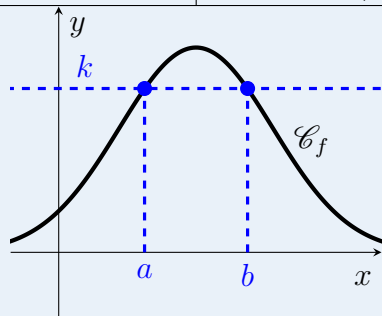
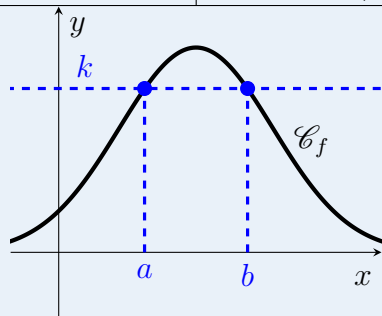
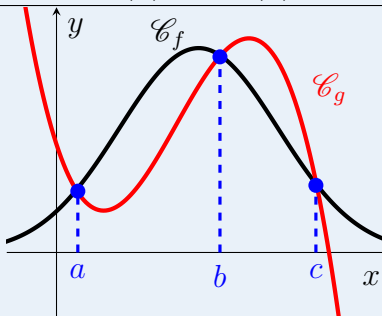
	<p>Résoudre l'équation <math>f(x) = g(x)</math> signifie trouver les nombres qui ont la même image par <math>f</math> et <math>g</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes <math>\mathcal{C}_f</math> et <math>\mathcal{C}_g</math>.</p> <p>Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :</p> $S = \{a; b; c\}$
--	--

## EXEMPLES

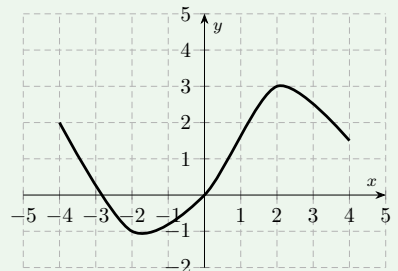
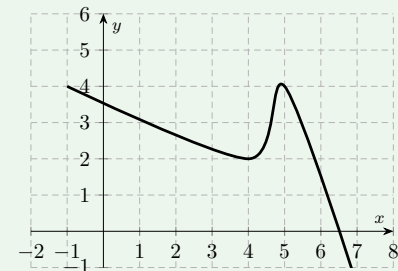
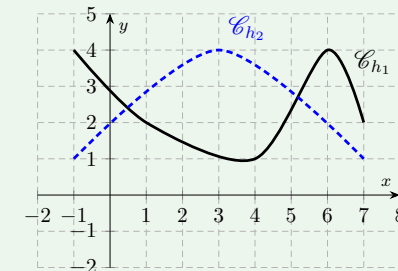
		
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$ :	Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$ :	Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$ :

## IV - Résolution graphique d'inéquations

### MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à <math>k</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]a; b[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) \leq k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à <math>k</math>.</p> <p>Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; g(x)</math> signifie trouver les nombres dont l'image par <math>f</math> est supérieure à l'image par <math>g</math>. Cela revient à chercher l'abscisse des points de <math>\mathcal{C}_f</math> situés "au dessus" des points de <math>\mathcal{C}_g</math>.</p> <p>Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a[ \cup ]b; c[$

### EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) \leq 1$ :	Résoudre $g(x) > 1$ :	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$ :

## V - Etude du signe

### MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

$x$	-2	-1	2	5	
$f(x)$	+	0	-	0	+

## VI - Parité d'une fonction

### DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  centré en 0 (  $I = [-a; a]$ ,  $] -a; a[$  ou  $\mathbb{R}$  ). On dit que  $f$  est :

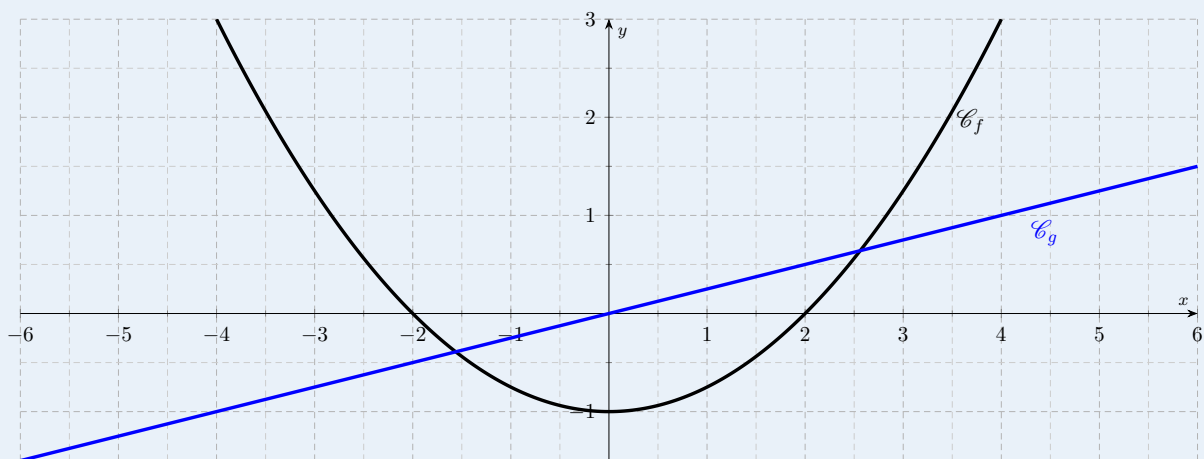
- **paire** lorsque pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = f(x)$ .
- **impaire** lorsque pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = -f(x)$ .

### EXEMPLES

- La fonction  $f : [-2; 2] \rightarrow \mathbb{R}$  est paire car pour tout  $x \in [-2; 2]$ ,  $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$ .
- La fonction  $g : ]3; 3[ \rightarrow \mathbb{R}$  est impaire.  
 $x \mapsto 0.5x$

### PROPRIÉTÉS

- $f$  est paire si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- $f$  est impaire si et seulement si  $\mathcal{C}_f$  est symétrique par rapport à l'origine du repère (0;0).



### REMARQUE

Une fonction peut être ni paire ni impaire !



# PROPORTIONS, VARIATIONS ET POURCENTAGES

---

## I - Proportions et pourcentages

---

### 1. Proportions

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et  $A$  un sous-ensemble de  $E$  ( $A \subset E$ ). On note respectivement  $n_A$  et  $n_E$  le nombre d'éléments de  $A$  et  $E$ . La proportion d'éléments de  $A$  dans  $E$  est le nombre  $p = \frac{n_A}{n_E}$ .

#### EXEMPLE

Dans une classe de Seconde comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc  $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$ .

#### REMARQUE

$p$  est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

### 2. Proportions de proportions

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments,  $A \subset E$  et  $B \subset A$ . On note  $p_1$  la proportion de  $A$  dans  $E$  et  $p_2$  la proportion de  $B$  dans  $A$ . Alors la proportion de  $B$  dans  $E$  est égale à  $p_1 \times p_2$ .

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est  $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$ .

## II - Evolutions et pourcentages

---

## 1. Taux d'évolution

### DÉFINITION

On considère une valeur  $V_0$  qui subit une évolution pour arriver à une valeur  $V_1$ .

- La variation absolue est  $V_1 - V_0$ .
- La variation relative ou taux d'évolution est  $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$ .

### REMARQUE

- Si  $t > 0$ , il s'agit d'une augmentation.
- Si  $t < 0$ , il s'agit d'une diminution.

### EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de  $180 - 150 = 30$  euros et son taux d'évolution est  $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$ . Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

### PROPRIÉTÉ

Pour une valeur  $V_0$  qui subit une évolution d'un taux  $t$ , elle devient  $(1 + t) \times V_0$ .  $1 + t$  est appelé coefficient multiplicateur (noté CM).

### EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à  $(1 + \frac{20}{100}) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$  euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à  $(1 - 0.2) \times 30 = 24$  euros.

## 2. Evolution réciproque

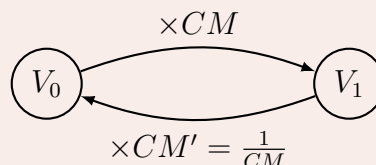
### DÉFINITION

Une valeur  $V_0$  subit une évolution de taux  $t$  pour passer à  $V_1$ . On appelle évolution réciproque le taux  $t'$  d'évolution de la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_0$ .

### PROPOSITION

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution :

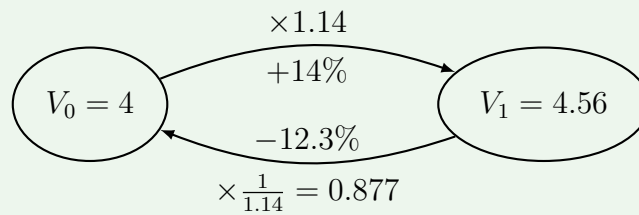
$$CM' = \frac{1}{CM}$$



### EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est  $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$ , ce qui

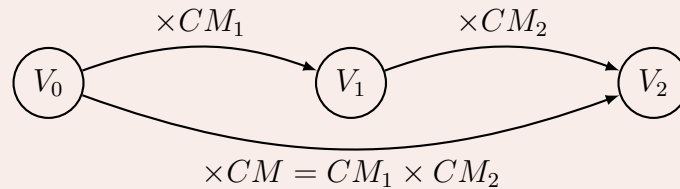
correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors  $4.56 \times 0.877 = 4$  millions d'habitants.



### 3. Evolutions successives

#### PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur  $V_0$  non nulle à la valeur  $V_1$ , et une seconde fait passer la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_2$ , alors l'évolution globale fait passer la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_2$ . Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.



#### EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une nouvelle hausse de 10%. Le coefficient multiplicateur global est donc  $(1 + \frac{8}{100}) \times (1 + \frac{10}{100}) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$ . Le prix a donc augmenté de 18.8% et pas de 18% !

# FONCTIONS AFFINES

## I - Généralités

### DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels donnés.

### EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$ ,  $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$  et  $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$  sont des fonctions affines.

### CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$  (ici,  $b = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.
- $x \mapsto b$  (ici,  $a = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

## II - Représentation graphique

### PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées.

### VOCABULAIRE

Dans un repère, soit  $d$  la droite représentant une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ . On dit que :

- $a$  est le **coefficient directeur** de  $d$ .
- $b$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $d$ .
- $y = ax + b$  est l'équation réduite de  $d$ .

### PROPOSITION

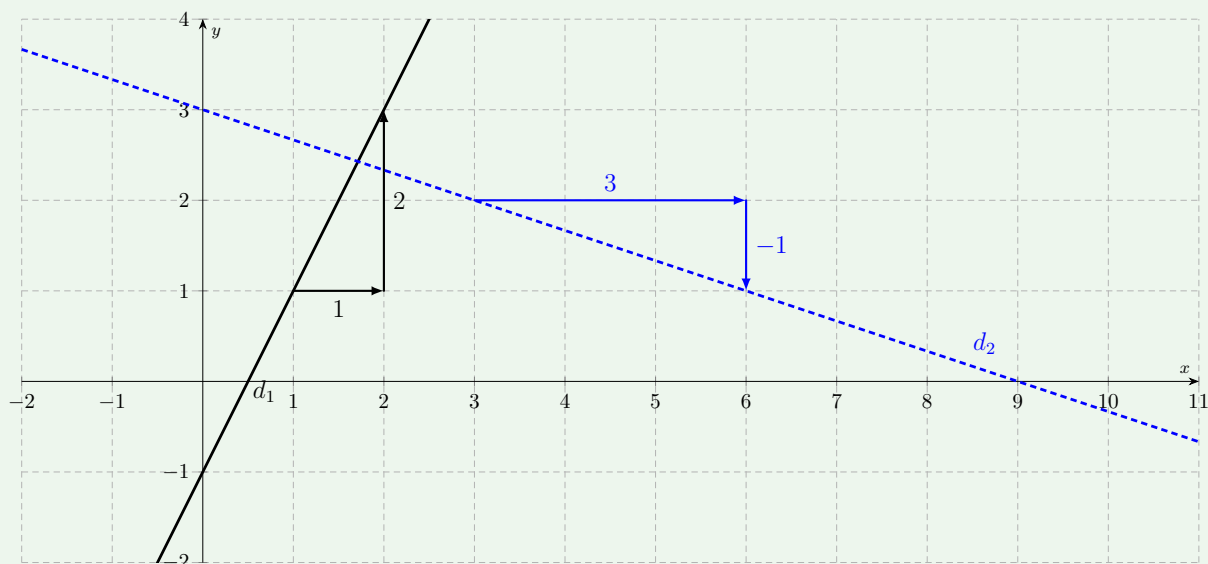
Lorsque  $a$  s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

### EXEMPLES

Construisons les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations réduites respectives  $y = 2x - 1$  et  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ .

- Pour  $d_1$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $-1$ , et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour  $d_2$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_2$  est  $3$ , et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descends d'un.



### III - Recherche algébrique de $a$ et $b$

#### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine et  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , avec  $x_1 \neq x_2$ . Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

#### EXEMPLE

On suppose que  $f(1) = 1$  et  $f(3) = 5$ .

Alors  $a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2$ .

On a alors  $f : x \mapsto 2x + b$ . On sait de plus que  $f(3) = 2 \times 3 + b$  et  $f(3) = 5$  donc :

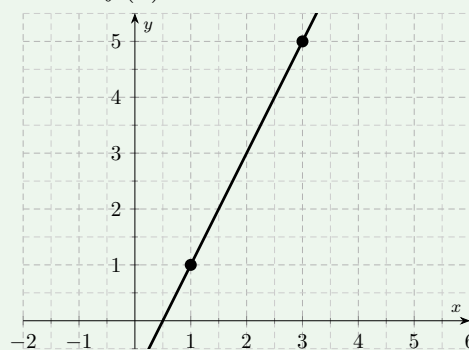
$$5 = 2 \times 3 + b$$

$$\text{soit donc } 5 = 6 + b$$

$$\text{et alors } 5 - 6 = b$$

$$\text{puis } b = -1$$

Cela donne alors  $f : x \mapsto 2x - 1$ .



## IV - Tableaux de signe

### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine avec  $a \neq 0$ . Alors  $f(x) = 0$  si et seulement si  $ax + b = 0$  ssi  $ax = -b$  ssi  $x = -\frac{b}{a}$ . Le tableau de signes de  $f$  dépend du signe de  $a$  :

Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$

Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$

### MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$ . En décomposant  $f$ , on obtient alors le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$4 - 5x$	$+$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$f(x)$	$-$	$\bigcirc$	$\bigcirc$	$-$

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \leq 0$  est

$$S = ]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

Pour  $g : x \mapsto \frac{x + 2}{4 - 5x}$ , le tableau de signes obtenu est presque identique :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$+$
$4 - 5x$	$+$	$+$	$\bigcirc$	$-$
$g(x)$	$-$	$\bigcirc$	$\parallel$	$-$

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque  $x = \frac{4}{5}$ . Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de  $g$ .

# VARIATIONS DE FONCTIONS

## I - Etude des variations

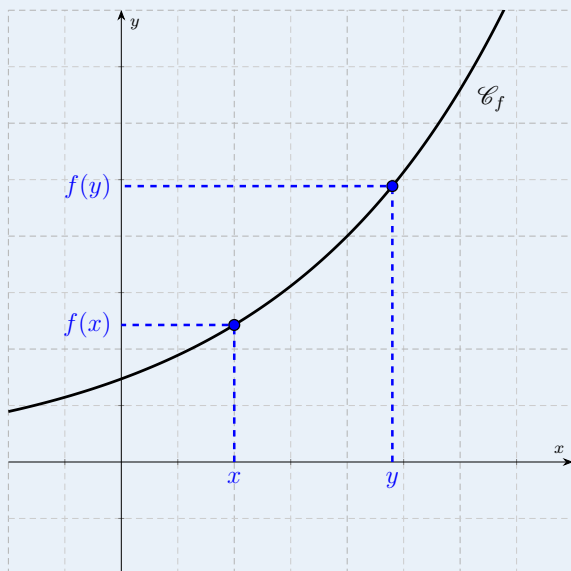
On se donne dans cette partie  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

### DÉFINITIONS

On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images augmentent aussi. L'ordre est conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ .

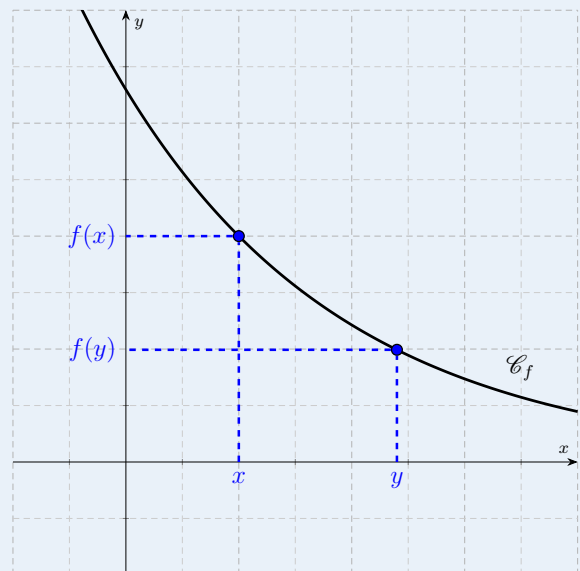
Graphiquement, la courbe de  $f$  "monte" : ↗



On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images diminuent. L'ordre n'est pas conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \geq f(y)$ .

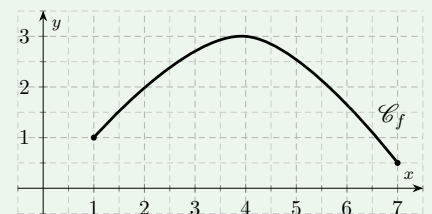
Graphiquement, la courbe de  $f$  "descend" : ↘



### EXEMPLE

On se donne la fonction  $f$ , définie sur  $[1; 7]$  et représentée ci-contre.

- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  puis décroissante sur  $[4; 7]$ .
- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  et  $2 \leq 3$  donc  $f(2) \leq f(3)$ .
- $f$  est décroissante sur  $[4; 7]$  et  $5 \leq 6$  donc  $f(5) \geq f(6)$ .



### DÉFINITIONS

- On dit que  $f$  est constante sur  $I$  si elle prend toujours la même valeur :

Pour  $x, y \in I$ , on a  $f(x) = f(y)$ .

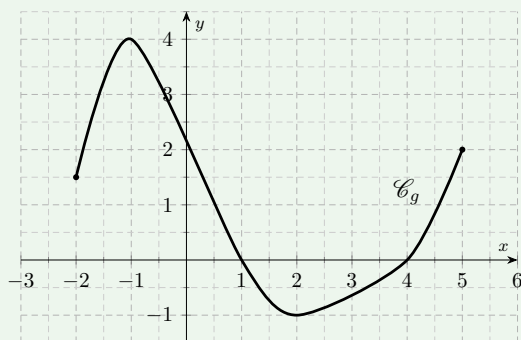
- On dit que  $f$  est monotone sur  $I$  si elle est soit croissante, soit décroissante sur  $I$  (son sens de variation ne change pas).

## II - Tableaux de variations

### MÉTHODE

Dresser le tableau de variations de  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction  $f$  est croissante, décroissante ou constante.

### EXEMPLE



On se donne la fonction  $g$ , définie sur  $[-2; 5]$  et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de  $g$  sous forme du tableau de variations suivant :

$x$	-2	-1	2	5
$g(x)$	1.5	4	-1	2

## III - Extrêmes d'une fonction sur un intervalle

### DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum  $M$  en  $a$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq M = f(a)$ .
- On dit que  $f$  admet un minimum  $m$  en  $b$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq m = f(b)$ .

### REMARQUE

Le maximum d'une fonction correspond au point le plus "haut" de sa courbe représentative, et le minimum au point le plus "bas".

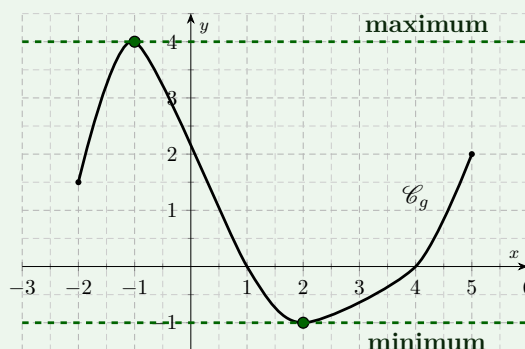
### EXEMPLE

On reprend la fonction  $g$  de l'exemple précédent.

Son maximum sur  $I$  est 4, atteint en  $-1$ .

Son minimum sur  $I$  est  $-1$ , atteint en 2.

Son minimum sur  $[-2; 0]$  est 1,5, atteint en  $-2$ .





# REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

## I - Généralités sur les repères

### DÉFINITION

Soient  $O, I, J$  trois points du plan non alignés. On pose  $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$  et  $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$ . Un repère du plan est un triplet  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ . On dit alors que :

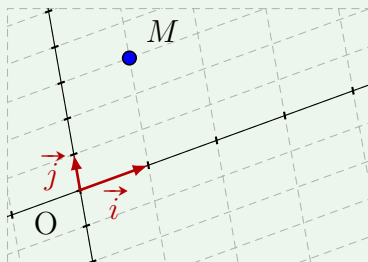
- $O$  est l'origine du repère
- $(OI)$  est l'axe des abscisses
- $(OJ)$  est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  pour la suite du cours.

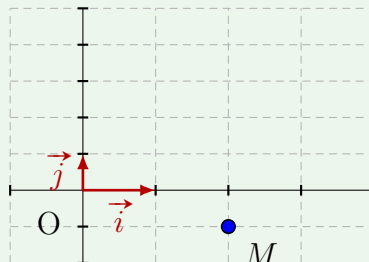
### PROPRIÉTÉ

Tout point  $M$  du plan est repéré par un unique couple de coordonnées  $(x; y)$ .  $x$  est l'abscisse de  $M$  et  $y$  est l'ordonnée de  $M$ .

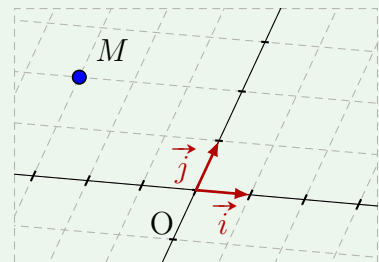
### EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



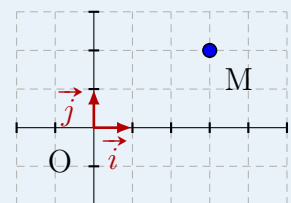
$M(-3; 2)$

► On écrit  $M(1; 3)$  et pas  $M = (1; 3)$  !

### DÉFINITION

On dit que le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  est orthonormé si :

- Ses axes sont perpendiculaires :  $(OI) \perp (OJ)$
- Les vecteurs unité  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont de même longueur :  $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$

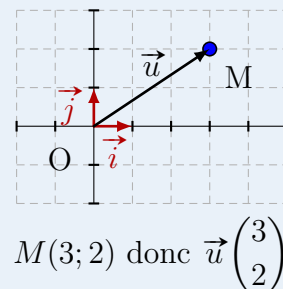


$M(3; 2)$

## II - Coordonnées d'un vecteur

### DÉFINITION

Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan. On se donne le point  $M(x; y)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ . Les coordonnées de  $\vec{u}$  sont celles de  $M$ , et l'on note  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

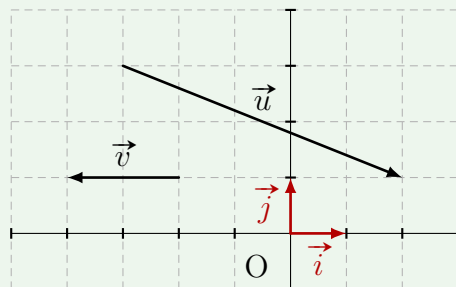


► On écrit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et pas  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  !

### EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .

On a  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ , et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .



### PROPOSITION

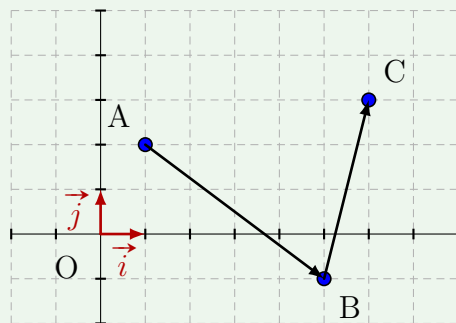
Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLE

On se donne  $A(1; 2)$ ,  $B(5; -1)$  et  $C(6; 3)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

De même, on a  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .



### PROPRIÉTÉS

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan, et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors :

- Les coordonnées de  $\vec{u} + \vec{v}$  sont  $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ .
- Les coordonnées de  $\lambda \vec{u}$  sont  $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ .

### EXEMPLE

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ . Alors on a :

$$- (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } (\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$- 3\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } 3\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$- (2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 5 \times 2 \\ 2 \times 3 - 5 \times (-1) \end{pmatrix} \text{ d'où } (2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

## III - Calculs de distances et de milieux

### 1. Milieu d'un segment

#### PROPOSITION

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan. On se donne de plus  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors les coordonnées de  $I$  sont  $\left( \frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$ .

#### REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

#### EXEMPLE

Soient  $A(1; 7)$ ,  $B(6; -5)$  et  $I$  le milieu de  $[AB]$ . Alors on a  $I \left( \frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2} \right)$  d'où  $I \left( \frac{7}{2}; \frac{2}{2} \right)$ , et enfin  $I(3,5; 1)$ .

### 2. Normes et distances

#### PROPOSITION

Soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  un vecteur du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la norme de  $\vec{u}$  est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

#### COROLLAIRE

Soient  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la distance entre  $A$  et  $B$  vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

### EXEMPLE

$$\begin{aligned}\text{Soient } A(1; 7) \text{ et } B(6; -5). \text{ Alors } AB &= \sqrt{(6-1)^2 + (-5-7)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13\end{aligned}$$

### APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

## IV - Colinéarité

### 1. Définitions et caractérisations

#### DÉFINITION

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont dits colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit s'il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ .

#### REMARQUE

Cela revient à dire que les coordonnées de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont proportionnelles.

### EXEMPLE

On se donne  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$ . On remarque que  $\vec{v} = 2\vec{u}$ . Alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires.

### 2. Déterminant de deux vecteurs

#### DÉFINITION

Soient  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

### EXEMPLE

$$\begin{aligned}\text{Soient } \vec{u} \begin{pmatrix} -15 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}. \text{ On a } \det(\vec{u}; \vec{v}) &= -15 \times (-24) - 9 \times 40 \\ &= 360 - 360 \\ &= 0\end{aligned}$$

## PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

## EXEMPLE

Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  de l'exemple précédent sont donc colinéaires. (On a en fait  $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$ ).

## 3. Applications en géométrie

### PROPRIÉTÉ

Deux droites  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles si et seulement si les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

### EXEMPLE

On se donne les points  $A(2; 4)$ ,  $B(11; 10)$  et  $C(-4; 0)$ .

Alors on a  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$  et  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ .

On a  $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times (-4) - (-6) \times 6 = -36 + 36 = 0$ .

On en déduit que les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires, d'où  $(AB) \parallel (AC)$ . De plus, ces deux droites sont confondues, donc les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés.

