Variables aléatoires

PROGRAMME

- Variable aléatoire discrète : Loi de probabilité, espérance
- Loi de Bernoulli $(0;1)$ de paramètre p, espérance
- Probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes
- Probabilité associée à une répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendante de Bernoulli
- Capacités :
  - Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ et calculer les probabilités correspondantes
  - Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète
  - Reconnaitre une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
  - Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points
  - Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p
  - Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des évènements associés aux différents chemins.
  - Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités

I - Définitions

EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1. La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X = 2)$, vaut $\frac{1}{2} = 0{,}5$. On dit que X est une **variable aléatoire réelle**.

REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$: Dans l'exemple précédent, l'univers est $\Omega = \{\text{« pile »}; \text{« face »}\}$. On a alors $X(\text{« pile »}) = 2$ et $X(\text{« face »}) = -1$.
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient $X = 2$.

- Exos **26**,**27**,23 p201
- Exos 48 -> 50 p204

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

— $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$ (2 cas favorables sur 4) ;

— $\mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

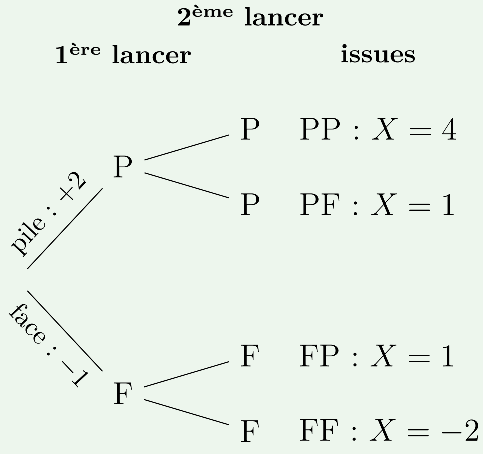
On peut alors donner la **loi de probabilité** de X, c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

x	-2	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

— $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 1) = 0{,}75$;

— $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) = 0{,}75$



▶ Exos **41**,**43**,**44** p203

▶ Exos 75 -> 78 p209

II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.

x	x_1	x_2	$\dots$	x_N
$\mathbb{P}(X = x)$	p_1	p_2	$\dots$	p_N

L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel $\mathbb{E}(X) := p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_N x_N$.
Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0{,}25 \times (-2) + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 4$
$= -0{,}5 + 0{,}5 + 1$
$= 1$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€ ! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.
Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

- ▶ Exo 28 p201
- ▶ Exos 51,53,55,58 p205
- ▶ Exos 56,57 p205
- ▶ Exox 82,84,86 p215
- ▶ Exo 68 p206
- ▶ Exo 54 p204
- ▶ Sujet D p212

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITION

Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre. La définition s'étend naturellement aux variables aléatoires.

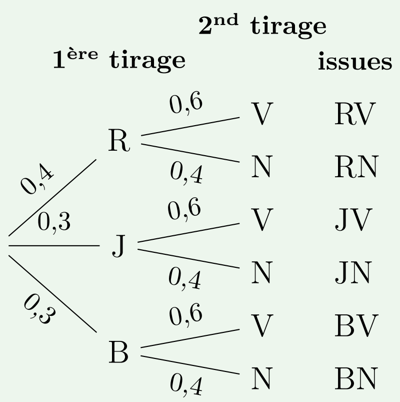
EXEMPLE

On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

— La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).

— La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0{,}4$.
On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.
On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



- ▶ Exos 30,35,36 p202

PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nud est égale à 1 ;

— La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;

— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

EXEMPLES

— La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (RV) est $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}54$.

— La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (JV ou BN) est

$$(0{,}3 \times 0{,}6) + (0{,}3 \times 0{,}4) = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3.$$

- Exo 17 p200
- Exos 31,32,33 p202
- Exos 37,38,39 p205
- Exos 67,69,70 p206
- Exo 83 p214
- Exos 71→74 p209
- Sujets B,C p212