Variables aléatoires

PROGRAMME

- Variable aléatoire discrète : Loi de probabilité, espérance
- Loi de Bernoulli $(0;1)$ de paramètre p, espérance
- Probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes
- Probabilité associée à une répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendante de Bernoulli
- Capacités :
  - Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ et calculer les probabilités correspondantes
  - Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète
  - Reconnaitre une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
  - Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points
  - Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p
  - Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des évènements associés aux différents chemins.
  - Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités

I - Définitions

EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1. La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X = 2)$, vaut $\frac{1}{2} = 0{,}5$. On dit que X est une **variable aléatoire réelle**.

REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$.
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient $X = 2$.

- Exos **26**,**27**,23 p201
- Exos 48,49,50 p204

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

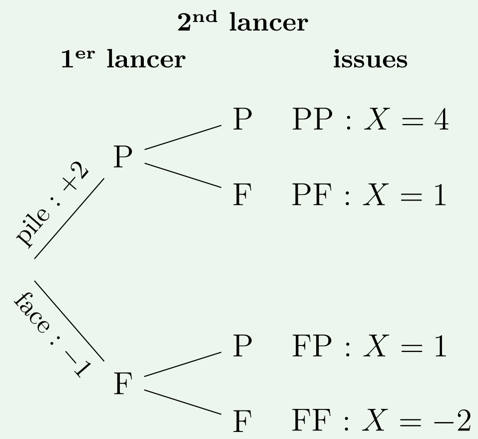
— $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$ (2 cas favorables sur 4) ;
— $\mathbb{P}(X=-2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$;
— $\mathbb{P}(X=4) = \frac{1}{4} = 0{,}25$

On peut alors donner la **loi de probabilité** de X, c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

x	-2	1	4
$\mathbb{P}(X=x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

— $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=1) = 0{,}75$;
— $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=4) = 0{,}75$



▶ Exos **41**,**43**,**44** p203
▶ Exos 75→78 p209

II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.
L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_Nx_N$$

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_N
$\mathbb{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_N

REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0{,}25 \times (-2) + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 4$
$= -0{,}5 + 0{,}5 + 1$
$= 1$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€ ! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.
Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

- ▶ Exo 28 p201
- ▶ Exos 51,53,55,58 p205
- ▶ Exos 56,57 p205
- ▶ Exox 82,84,86 p215
- ▶ Exo 68 p206
- ▶ Exo 54 p204
- ▶ Sujet D p212

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITIONS

— Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.

— Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

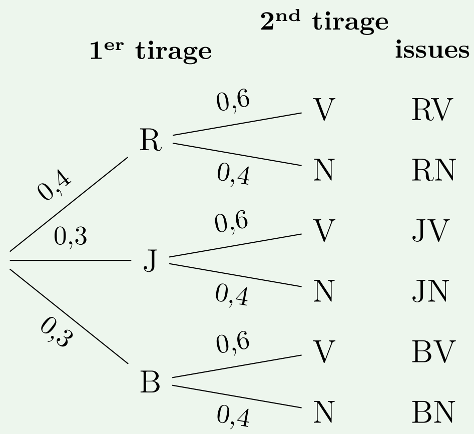
EXEMPLE

On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

— La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).

— La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0{,}4$.
On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.
On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



- ▶ Exos 30,35,36 p202

PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

— La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;

— La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;

— La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

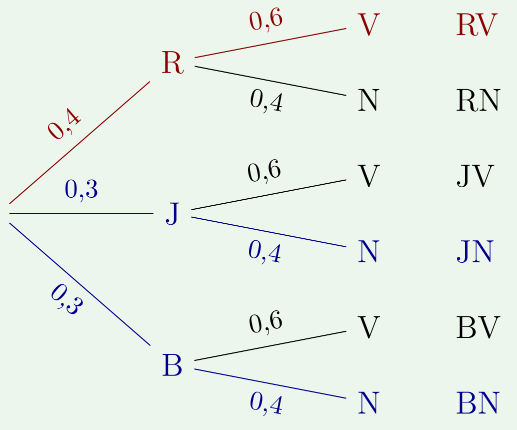
EXEMPLES

— La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (RV) est :

$$0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}54$$

— La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (JN ou BN) est :

$$(0{,}3 \times 0{,}6) + (0{,}3 \times 0{,}6) = 0{,}18 + 0{,}18$$
$$= 0{,}36$$



- ▶ Exo 17 p200
- ▶ Exos 31,32,33 p202
- ▶ Exos 37,38,39 p205
- ▶ Exos 67,69,70 p206
- ▶ Exo 83 p214
- ▶ Exos 71→74 p209
- ▶ Sujets B,C p212

IV - Épreuves et lois de Bernoulli

DÉFINITION

— Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience où il n'y a que deux issues possibles : l'une est assimilée à un succès (de probabilité p) et l'autre à l'échec (de probabilité $1-p$).

— On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p lorsqu'elle associe 1 au succès et 0 à l'échec. Sa loi est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	$1-p$	p

EXEMPLE

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. On considère comme succès l'évènement « Obtenir la boule numérotée 10 » et donc comme échec « Ne pas obtenir la boule numérotée 10 ».

La loi de Bernoulli de la variable aléatoire X associée à cette expérience est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X=x)$	0,9	0,1

PROPOSITION

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$.