# FONCTION DÉRIVÉE

## I - Généralités, règles de calcul

**DÉFINITION**

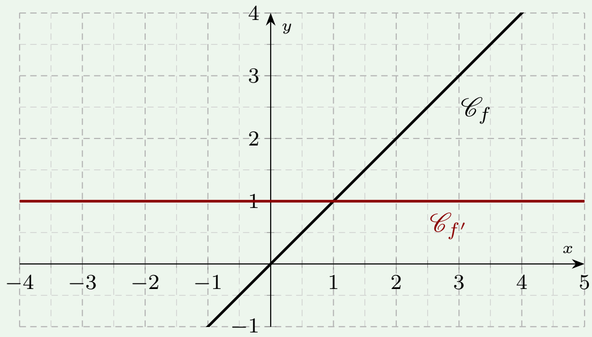
On définit la fonction dérivée de $f$, notée $f'$, qui à $x$ associe (s'il existe) le coefficient directeur de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $x$.

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto x$. C'est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 0$.

Sa représentation graphique est une droite $d$. De plus, toutes les tangentes à la courbe de $f$ sont cette même droite $d$.

Alors quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a = 1$. $f'$ est donc la fonction constante valant toujours 1.




**PROPOSITIONS**

On a les dérivées usuelles suivantes :

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $k \in \mathbb{R}$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $x^2$ | $2x$ |
| $x^3$ | $3x^2$ |

Soient $f$ et $g$ deux fonctions, et $k \in \mathbb{R}$. Alors :
- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

► Pour dériver une fonction puissance, on passe l'exposant devant $x$ puis on retire 1 à l'exposant.

**EXEMPLES**

- Soit $f : x \mapsto x^2 + x$. Alors $f'(x) = 2x + 1 = 2x + 1$.
- Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.
- Soit $g : x \mapsto x^3 - 3x - 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- Soit $h : x \mapsto x^2 + x^2$. Alors $f'(x) = 2x + 2x = 4x$.

## II - Lien avec les variations

**THÉORÈME**

Soit $f$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Si $f'$ est positive sur $[a;b]$, alors $f$ est croissante sur $[a;b]$.
- Si $f'$ est négative sur $[a;b]$, alors $f$ est décroissante sur $[a;b]$.
- Si $f'$ est nulle sur $[a;b]$, alors $f$ est constante sur $[a;b]$. Les zéros de $f'$ correspondent aux **extremums locaux** de $f$ (les « sommets »).

**APPLICATION**

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

**EXEMPLE**

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

**Etude du signe de la dérivée :**
$a = 2 > 0$ donc $f'$ est d'abord négative, puis positive.
De plus, $f'(x) = 0$ *ssi* $2x = 4$ *ssi* $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

**Variations de $f$ :**
$f$ est donc décroissante puis croissante.
On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | |