Fonctions affines

I - Généralités

DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$ et $h : x \mapsto 0{,}1x - 7{,}2$ sont des fonctions affines.

CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.
- $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

II - Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées.

VOCABULAIRE

Dans un repère, soit d la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :

- a est le **coefficient directeur** de d.
- b est **l'ordonnée à l'origine** de d.
- $y = ax + b$ est l'équation réduite de d.

PROPOSITION

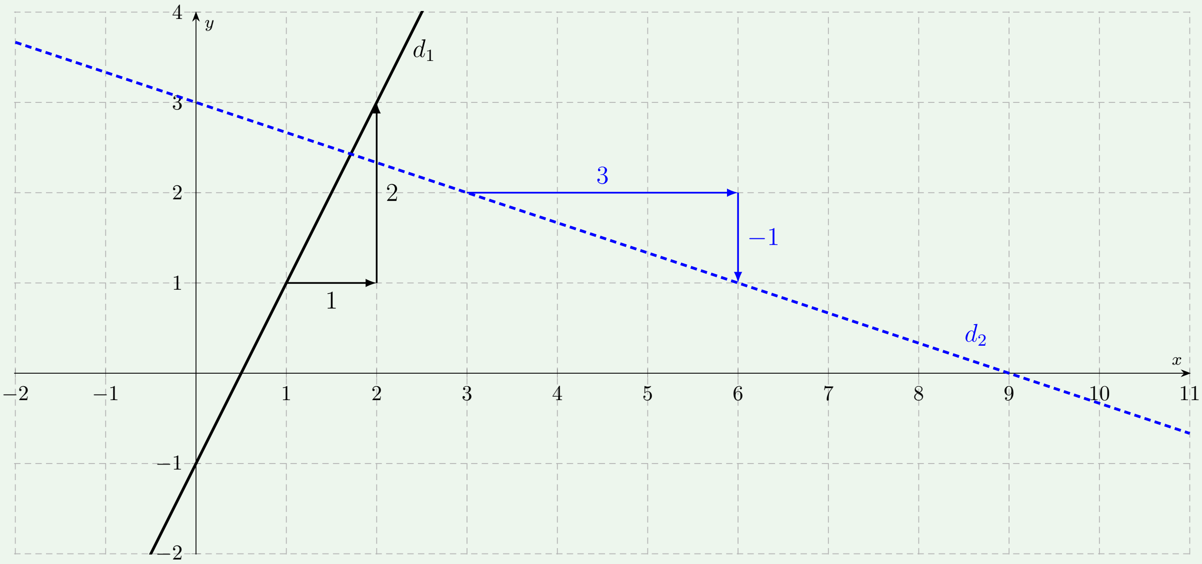
Lorsque a s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

EXEMPLES

Construisons les droites d_1 et d_2 d'équations réduites respectives $y = 2x - 1$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

- Pour d_1 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est -1, et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour d_2 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est 3, et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descend d'un.



III - Recherche algébrique de a et b

PROPOSITION

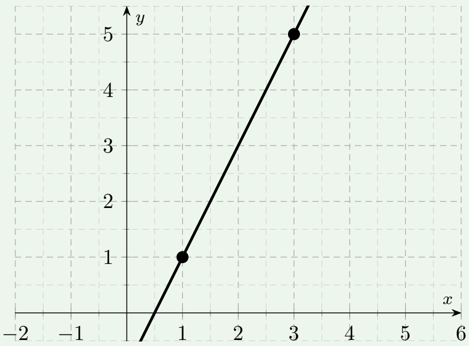
Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, avec $x_1 \neq x_2$. Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EXEMPLE

On suppose que $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$.
Alors $a = \dfrac{5-1}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$.
On a alors $f : x \mapsto 2x + b$. On sait de plus que $f(3) = 2 \times 3 + b$ et $f(3) = 5$ donc :

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \times 3 + b \\ \text{soit donc } 5 &= 6 + b \\ \text{et alors } 5 - 6 &= b \\ \text{puis } b &= -1 \end{aligned}$$



Cela donne alors $f : x \mapsto 2x - 1$.

IV - Tableaux de signe

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax+b$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Alors $f(x)=0$ si et seulement si $ax+b=0$ ssi $ax=-b$ ssi $x=-\frac{b}{a}$. Le tableau de signes de f dépend du signe de a :

Si $a>0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a<0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto (x+2)(4-5x)$. En décomposant f, on obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est

$$S =]-\infty;-2] \cup \left[\frac{4}{5};+\infty\right[$$

Pour $g : x \mapsto \dfrac{x+2}{4-5x}$, le tableau de signes obtenu est presque identique :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque $x=\frac{4}{5}$. Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de g.