# PROBABILITÉS

## I - Univers et évènements

### 1. Définitions de base

**DÉFINITION**

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
Si l'on répète un très grand nombre de fois la même expérience indépendamment, alors la fréquence d'une issue va s'approcher de sa probabilité.

**EXEMPLE**

Si l'on lance un dé, alors les résultats possibles (les issues) constituent l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

**DÉFINITION**

Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit un sous-ensemble de $\Omega$.

**EXEMPLE**

Dans l'univers précédent, on peut considérer l'ensemble $P$ : « Le résultat est pair ». On a donc $P = \{2; 4; 6\}$.

**CAS PARTICULIERS**

- On appelle **évènement élémentaire** tout évènement ne contenant qu'un seul élément de $\Omega$ (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble $\Omega$ est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.

**EXEMPLE**

Dans l'univers précédent, $\{1\}$ et $\{3\}$ sont des éléments élémentaires.

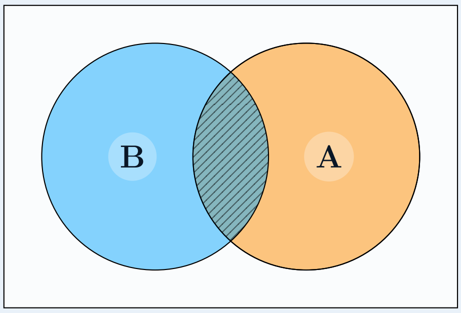
### 2. Opérations sur les évènements

**DÉFINITIONS**

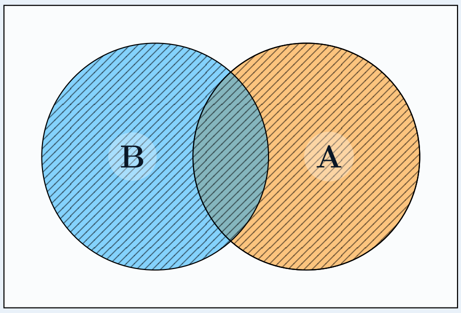
On se donne $E$ un ensemble et $A$,$B$ deux sous-ensembles de $E$.

- **L'intersection** de $A$ et $B$ notée $A \cap B$ (A inter B) désigne l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à la fois à $A$ et à $B$.
- **L'union** de $A$ et $B$ notée $A \cup B$ (A union B) désigne l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à $A$ ou à $B$ ou aux deux.

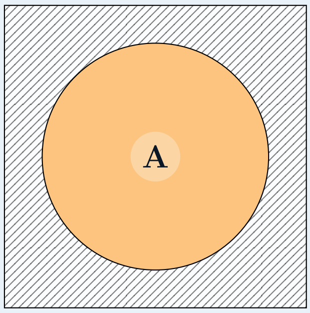
— **Le complémentaire** de $A$, noté $\overline{A}$ (A barre) désigne l'ensemble des éléments de $E$ qui n'appartiennent pas à $A$.




$A \cap B$




$A \cup B$




$\overline{A}$

**EXEMPLE**

Dans une animalerie, on sélectionne au hasard un chien. L'univers $\Omega$ est l'ensemble de tout les chiens dans cette animalerie. On se donne de plus les évènements $A$ : « Le chien sélectionné a le poil blanc » et $B$ : « Le chien sélectionné a le poil beige ». On peut donc définir les évènements suivants :

— $A \cap B$ : « Le chien sélectionné a le poil blanc et beige » ;

— $A \cup B$ : « Le chien sélectionné a le poil blanc, beige ou les deux à la fois ».

— $\overline{A}$ : « Le chien sélectionné n'a pas le poil blanc ».

# II - Probabilités sur un univers fini

## 1. Généralités

**DÉFINITION**

Donner la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire signifie donner la probabilité de chaque issue.

**PROPOSITIONS**

Pour obtenir la probabilité d'un évènement, on fait la somme des probabilités de chaque issue le constituant.
Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers $\Omega$, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

**EXEMPLE**

On lance un dé truqué. La probabilité de tomber sur chaque face est décrite dans le tableau ci-dessous :

| Numéro | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Probabilité associée | 0,15 | 0,1 | 0,2 | 0,25 | 0,25 | 0,05 |

On considère l'évènement A : « On tombe sur un nombre inférieur à 3 ». Alors $\mathbb{P}(A) = 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}35$.

## 2. Cas équiprobable

**EXEMPLE**

On lance un dé équilibré. Soit A l'évènement « On tombe sur un nombre pair ». 3 des 6 faces d'un dé contiennent un nombre pair donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

**DÉFINITION**

On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité.

**PROPOSITION**

Dans ce cas, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$.
La probabilité d'un évènement A est alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de A}}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

## 3. Vocabulaire et formules

**EXEMPLE**

Soient A:« On tombe sur un nombre pair » et B : « On tombe sur 3 ». On a alors $A \cap B = \varnothing$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\varnothing) = 0$. Ces évènements ne peuvent pas se produire en même temps.

**DÉFINITION**

Comme $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, ces deux événements sont dits incompatibles.

**PROPRIÉTÉS**

— Soit $A$ un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

— Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$