Droites du plan

PROGRAMME

- Vecteur directeur d'une droite
- Equation de droite : Equation cartésienne, *réduite*
- *Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées*
- Capacités :
  - Déterminer une équation de droite *à partir de deux points*, un point et un vecteur directeur *ou un point et la pente.*
  - Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique
  - Tracer une droite connaissant son équation cartésienne *ou réduite.*
  - *Etablir que trois points sont alignés ou non*
  - Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes
  - Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes

I - Equations cartésiennes et réduites

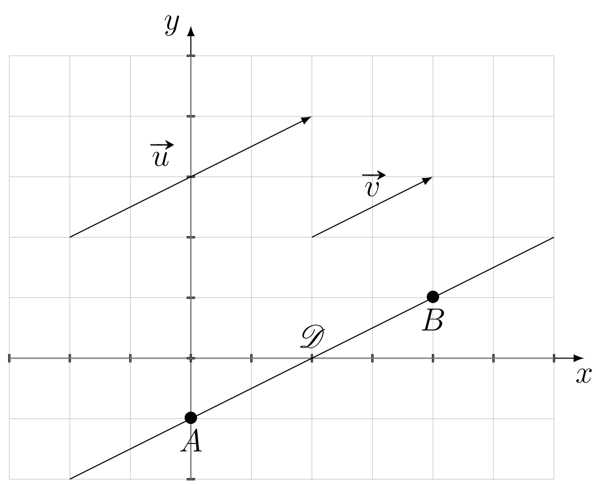
II - Vecteur directeur d'une droite

III - Intersections et systèmes

IV - Equation cartésienne de droite et vecteur directeur.

DÉFINITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points de $\mathscr{D}$.
On appelle **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ tout vecteurs $\vec{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Autremement dit : le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite $\mathscr{D}$

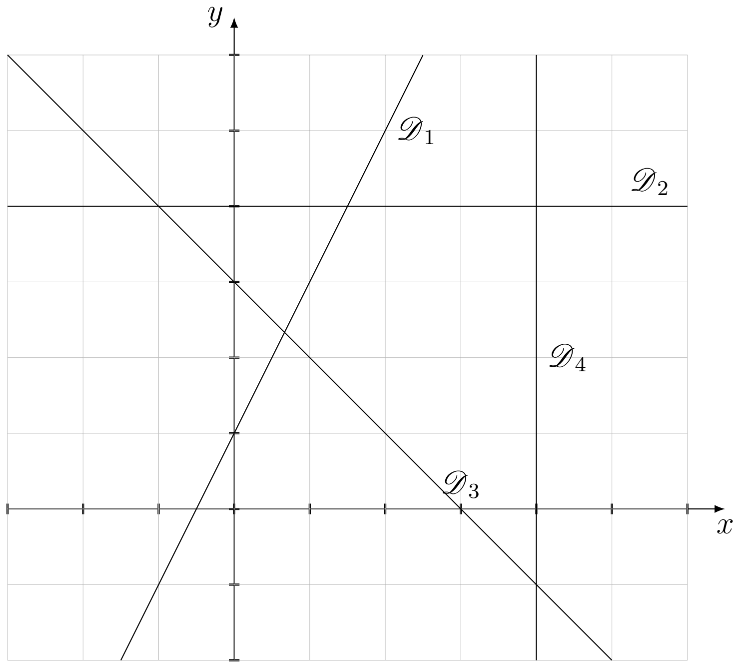


REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : ici les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

EXERCICE

Soit $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ un repère du plan.
Donner **des** vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$,$\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.



[height=2cm]https://youtu.be/6VdSz 0QT4Y

PROPOSITION

Une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme $ax+by+c=0$.

Un point $M(x;y)$ appartient à cette droite ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-x_A\\y-y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Il faut donc que $det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$.
Il vient,

$$det(\overrightarrow{AM};\vec{u}) = \begin{vmatrix}x-x_A & -b\\ y-y_A & a\end{vmatrix} = a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)=0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax+by+(-ax_A-by_A)=0$$

On pose $c=-ax_A-by_A$
d'où :

$$\boxed{ax+by+c=0}$$

COROLLAIRE

Si les coordonnées $(x;y)$ d'un point M vérifient l'équation $ax+by+c=0$, alors M appartient à la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

EXERCICE

On considère un repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ du plan.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $u{-}15$
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}'$ passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$

V - Systèmes de deux équations à deux inconnus

Résoudre un système à deux inconnues , c'est trouver le ou les couples $(x;y)$ qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

EXERCICE

Montrer que le couple $(2;3)$ vérifie le système d'équations :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

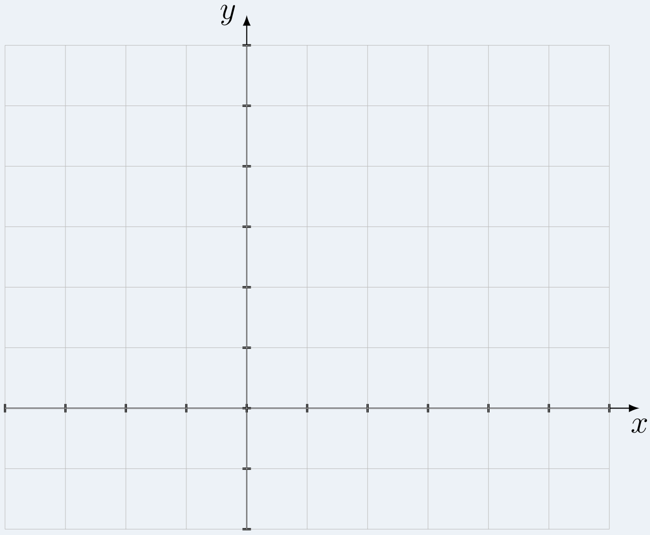
1. Résolution graphique

On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.
L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

EXERCICE

Tracer les droites du système puis trouver les coordonnées du point d'intersection.

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$



2. Résolution algébrique

a) Méthode par combinaison linéaire

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases}$$

b) Méthode par substitution

EXERCICE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système suivant :

$$\begin{cases} 6x - 7y = 1 \\ x - 3y = -2 \end{cases}$$