

Problèmes

Problème 1. Vrai ou faux ? Justifier.

1. La somme de deux nombres décimaux est un nombre décimal.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, \sqrt{n} est un nombre irrationnel.
3. La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
4. Un élève répond au hasard et de manière équiprobable aux cinq questions d'un questionnaire de type « Vrai ou faux ».
 - (a) La probabilité qu'il ait cinq réponses correctes est égale $\frac{1}{32}$.
 - (b) La probabilité qu'il ait exactement trois réponses correctes est égale $\frac{10}{32}$.

Définitions : Etant donnés deux nombres réels a et b positifs, on appelle :

—Moyenne arithmétique de a et b le nombre :

$$m := \frac{a+b}{2}$$

—Moyenne quadratique de a et b le nombre :

$$q := \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

—Moyenne géométrique de a et b le nombre :

$$g := \sqrt{ab}$$

—Si de plus a et b sont strictement positifs, on appelle moyenne harmonique de a et b le nombre :

$$h := \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Problème 2. Lors d'un premier contrôle, un élève a obtenu la note de 9 sur 20. Un deuxième contrôle est prévu, avec le même coefficient que le premier.

Quelle est la valeur maximale de la moyenne que cet élève peut obtenir sur ces deux notes ?

Problème 3. Entre octobre 2018 et novembre 2018, le prix baril de pétrole brut de la mer du Nord a connu une baisse de 19%.

—Entre novembre 2018 et décembre 2018, il a connu une nouvelle baisse de 12%.

—Entre décembre 2018 et janvier 2019, il a connu une hausse de 4%.

1. Calculer le taux d'évolution mensuel moyen entre octobre 2018 et décembre 2018, puis entre novembre 2018 et janvier 2019.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

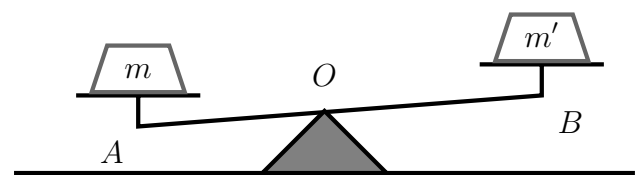
Problème 4. On dispose de deux plaques métalliques de formes cylindriques, de même épaisseur $e = 20\text{cm}$, mais de rayons différents $R_1 = 30\text{cm}$ et $R_2 = 50\text{cm}$. On décide de fondre ces deux plaques pour en fabriquer deux autres, de même épaisseur e et de même rayon R .

1. Calculer R .
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

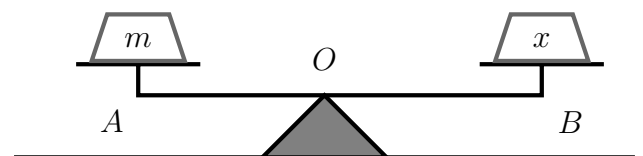
Problème 5. Un cycliste effectue la montée d'un col à la vitesse constante $v_1 = 20\text{km/h}$. Une fois arrivé au col, il redescend par la même route à la vitesse constante $v_2 = 60\text{km/h}$.

1. Calculer sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

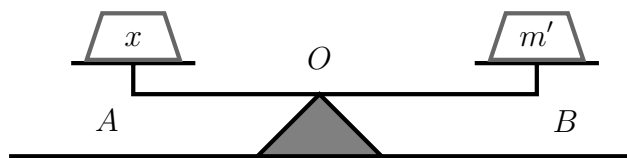
Problème 6. Une loi physique, la loi d'Archimède, permet d'affirmer que la balance ci-dessous est en équilibre si $m \times l = m' \times l'$ où m et m' sont les masses posées sur chaque plateau et l et l' sont respectivement les longueurs OA et OB des deux fléaux de la balance.



On souhaite déterminer la masse x d'un objet. On ne connaît pas les longueurs l et l' et on ne peut pas les mesurer. On dispose en revanche de diverses masses marquées. On réalise une première pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m , conformément au schéma ci-dessous.

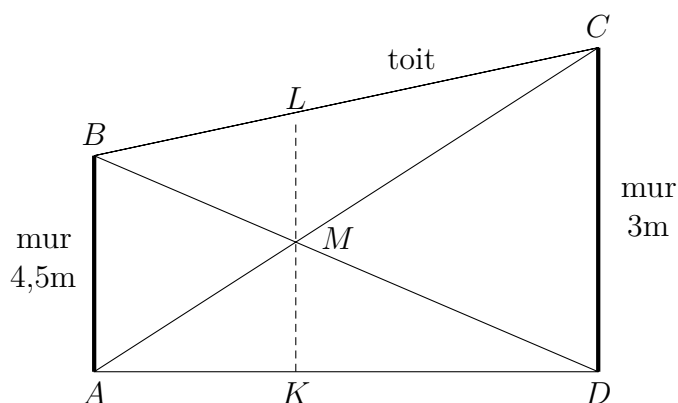


On réalise une seconde pesée, où l'équilibre est réalisé pour une masse m' , conformément au schéma ci-dessous.



1. Exprimer x en fonction de m et m' .
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Problème 7. Un bricoleur désire faire des travaux dans une pièce schématisée ci-dessous (la figure n'est pas à l'échelle).



Les segments $[AC]$ et $[BD]$ représentent deux échelles posées l'une contre l'autre qui se croisent en M . On pose $a = AB = 3\text{m}$ et $b = CD = 4,5\text{m}$. Le bricoleur mesure $1,75\text{m}$ et se pose plusieurs questions :

- Peut-il passer sous les échelles sans avoir à se baisser ?
- S'il monte s'installer en M , pourra-t-il rester debout sans atteindre le toit ou devra-t-il s'accroupir ?
- Quelle serait la hauteur d'une cloison joignant les points K et L ?

1. En appliquant le théorème de Thalès à des configurations que l'on précisera, démontrer que :

$$\begin{aligned}\frac{b}{KM} &= 1 + \frac{MC}{MA} \\ \frac{a}{ML} &= 1 + \frac{MA}{MC} \\ \frac{MB}{MD} &= \frac{MA}{MC} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

2. Répondre à chacune des questions que se pose le bricoleur.
3. Exprimer KL sous la forme de l'une des moyennes de a et b .

Problème 8. Dans un triangle AMB rectangle en M , on note H le pied de la hauteur issue de M . On désigne par a la longueur du segment $[HA]$ et b celle du segment $[HB]$.

1. Démontrer que les triangles AHM et MHB sont semblables et en déduire la longueur MH en fonction de a et b .
2. Quel type de moyenne ce problème met-il en jeu ?

Problème 9. Construire une figure d'après la description suivante : Soit $[AB]$ un segment de milieu O . Tracer Γ un demi-cercle de diamètre $[AB]$. On considère un point H du segment $[OA]$, distinct de O et de A . On pose $H = a$ et $HB = b$. On complètera la figure au fur et à mesure.

1. Exprimer OM en fonction de a et b . La longueur OM représente une certaine moyenne des nombres a et b . Préciser laquelle.
2. Montrer que $MH^2 = ab$. La longueur MH représente une certaine moyenne des nombres a et b . Préciser laquelle.
3. Soit Γ' le demi-cercle de centre O passant par H qui coupe le segment $[OM]$. La perpendiculaire en O à la droite (OM) coupe Γ' en G . Exprimer OG en fonction de a et b .
4. En déduire une expression de MG en fonction de a et b . La longueur MG représente une certaine moyenne des nombres a et b . Préciser laquelle.
5. On considère le point N du segment $[OM]$ tel que $MN = MH$. La parallèle à la droite (AB) passant par N coupe le segment $[MH]$ en K . Exprimer MK en fonction de a et b . La longueur MK représente une certaine moyenne des nombres a et b . Préciser laquelle.