

# VARIABLES ALÉATOIRES

## I - Définitions

### EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note  $X$  les gains après un lancer. Ainsi  $X$  peut valoir soit 2, soit  $-1$ . La probabilité que  $X$  vaille 2, notée  $\mathbb{P}(X = 2)$ , vaut  $\frac{1}{2} = 0,5$ . On dit que  $X$  est une **variable aléatoire réelle**.

### REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  : Dans l'exemple précédent, l'univers est  $\Omega = \{\text{« pile »}; \text{« face »}\}$ . On a alors  $X(\text{« pile »}) = 2$  et  $X(\text{« face »}) = -1$ .
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient  $X = 2$ .

- ▶ Exos 26,27,23 p201
- ▶ Exos 48,49,50 p204

### EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais  $X$  représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

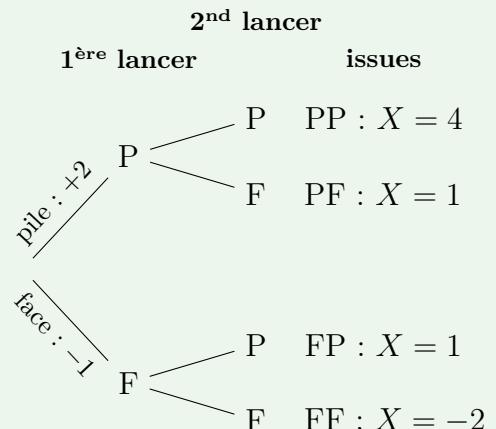
- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0,5$  (2 cas favorables sur 4) ;
- $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0,25$  ;
- $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{4} = 0,25$

On peut alors donner la **loi de probabilité** de  $X$ , c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

$x$	-2	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

- $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,75$  ;
- $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) = 0,75$



- ▶ Exos 41,43,44 p203
- ▶ Exos 75→78 p209

## II - Espérance d'une variable aléatoire

### DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire  $X$  dont la loi est représentée ci-contre.

L'espérance de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N$$

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_N$
$\mathbb{P}(X = x)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_N$

### REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de  $X$  lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

### EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0,25 \times (-2) + 0,5 \times 1 + 0,25 \times 4 \\ &= -0,5 + 0,5 + 1 \\ &= 1\end{aligned}$$

L'espérance de  $X$  est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€ ! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.

Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

- ▶ Exo 28 p201
- ▶ Exos 51,53,55,58 p205
- ▶ Exos 56,57 p205
- ▶ Exox 82,84,86 p215
- ▶ Exo 68 p206
- ▶ Exo 54 p204
- ▶ Sujet D p212

## III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

### DÉFINITIONS

- Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

## EXEMPLE

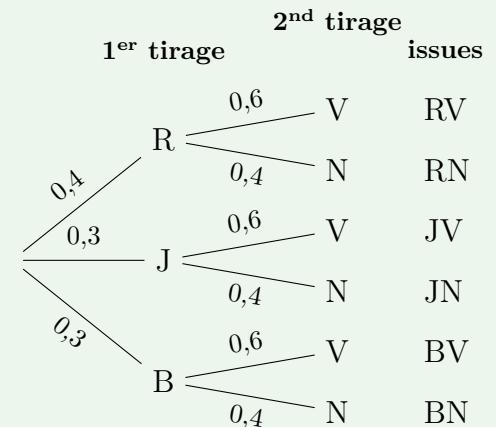
On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est  $\frac{4}{10} = 0,4$ .

On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.

On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



► Exos 30,35,36 p202

## PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrites sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

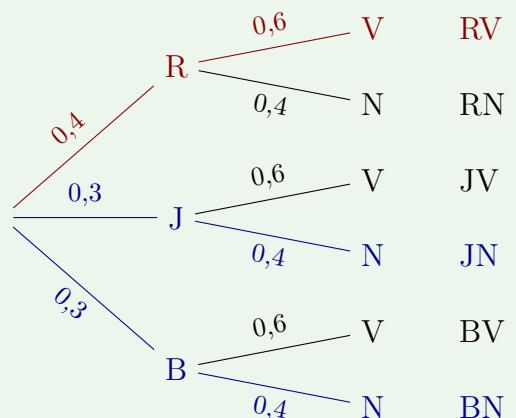
## EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (**RV**) est :

$$0,4 \times 0,6 = 0,54$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (**JN** ou **BN**) est :

$$(0,3 \times 0,6) + (0,3 \times 0,6) = 0,18 + 0,18 \\ = 0,36$$



► Exo 17 p200  
 ► Exos 31,32,33 p202  
 ► Exos 37,38,39 p205  
 ► Exos 67,69,70 p206  
 ► Exo 83 p214  
 ► Exos 71→74 p209  
 ► Sujets B,C p212

## IV - Épreuves et lois de Bernoulli

### DÉFINITION

- Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est une expérience où il n'y a que deux issues possibles : l'une est assimilée à un succès (de probabilité  $p$ ) et l'autre à l'échec (de probabilité  $1 - p$ ).
- On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  (parfois notée  $\mathcal{B}(p)$ ) lorsqu'elle associe 1 au succès, 0 sinon. Sa loi est représentée ci-contre.

$x$	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	$p$

### EXEMPLE

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. On considère comme succès l'évènement « Obtenir la boule numérotée 10 » et donc comme échec « Ne pas obtenir la boule numérotée 10 ».

La loi de Bernoulli de la variable aléatoire  $X$  associée à cette expérience est représentée ci-contre.

$x$	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,9	0,1

### PROPOSITION

Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $\mathbb{E}(X) = p$ .