Variables aléatoires

I - Définitions

EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1. La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X=2)$, vaut $\frac{1}{2}=0{,}5$. On dit que X est une **variable aléatoire réelle**.

REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$: Dans l'exemple précédent, l'univers est $\Omega = \{$« pile »; « face »$\}$. On a alors $X($« pile »$) = 2$ et $X($« face »$) = -1$.
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient $X = 2$.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

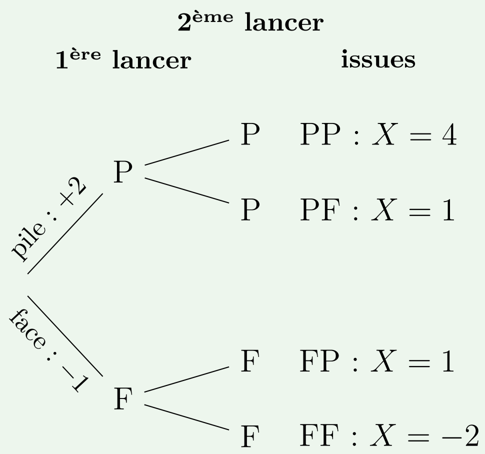
- $\mathbb{P}(X=1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$ (2 cas favorables sur 4) ;
- $\mathbb{P}(X=4) = \mathbb{P}(X=-2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$;

On peut alors donner la **loi de probabilité** de X, c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

x	-2	1	4
$\mathbb{P}(X=x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

- $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X=-2) + \mathbb{P}(X=1) = 0{,}75$;
- $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=4) = 0{,}75$



II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_N
$\mathbb{P}(X=x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_N

L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel $\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_Nx_N$.
Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0{,}25 \times (-2) + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 4$

$$= -0{,}5 + 0{,}5 + 1$$
$$= 1$$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€ ! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.
Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITION

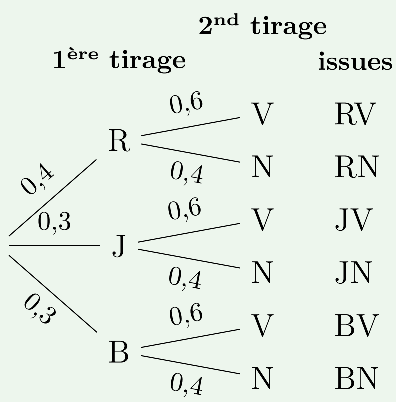
Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre. La définition s'étend naturellement aux variables aléatoires.

EXEMPLE

On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0{,}4$.
On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.
On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (RV) est $0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}54$.
- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (JV ou BN) est $(0{,}3 \times 0{,}6) + (0{,}3 \times 0{,}4) = 0{,}18 + 0{,}12 = 0{,}3$.