Une caractérisation des fonctions affines

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

— f est une fonction affine.

— Quelque soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ a toujours la même valeur.

Exercice 1. On s'intéresse à la preuve de cette proposition. L'équivalence signifie que l'on doit prouver les deux sens de cette affirmation :

— (Sens direct) Si f est une fonction affine, alors quelque soient [...]

— (Sens indirect) Si quelque soient [...] , alors f est une fonction affine.

1. On suppose que f est une fonction affine :

$$f : x \mapsto ax + b$$

On se donne alors x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

(b) Le résultat est-il cohérent ? Quel sens de l'affirmation a-t-on prouvé ?

2. On ne suppose plus que f est affine, mais que quelque soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est toujours le même. On pose alors :

$$m := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Montrons que f est affine.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(b) En manipulant l'égalité ainsi trouvée, donner une expression de $f(x)$ en fonction de m, x et $f(0)$.

(c) Conclure.

3. Refaire les calculs de la question 2 en calculant cette fois $\dfrac{f(x) - f(k)}{x - k}$, pour $k \in \mathbb{R}$.

Une caractérisation des fonctions affines

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

— f est une fonction affine.

— Quelque soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ a toujours la même valeur.

Exercice 1. On s'intéresse à la preuve de cette proposition. L'équivalence signifie que l'on doit prouver les deux sens de cette affirmation :

— (Sens direct) Si f est une fonction affine, alors quelque soient [...]

— (Sens indirect) Si quelque soient [...] , alors f est une fonction affine.

1. On suppose que f est une fonction affine :

$$f : x \mapsto ax + b$$

On se donne alors x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$.

(a) Calculer $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

(b) Le résultat est-il cohérent ? Quel sens de l'affirmation a-t-on prouvé ?

2. On ne suppose plus que f est affine, mais que quelque soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ est toujours le même. On pose alors :

$$m := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Montrons que f est affine.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $\dfrac{f(x) - f(0)}{x}$?

(b) En manipulant l'égalité ainsi trouvée, donner une expression de $f(x)$ en fonction de m, x et $f(0)$.

(c) Conclure.

3. Refaire les calculs de la question 2 en calculant cette fois $\dfrac{f(x) - f(k)}{x - k}$, pour $k \in \mathbb{R}$.