Suites arithmétiques et géométriques

PROGRAMME

- Suites arithmétiques : évolutions absolues constantes (croissance linéaire).
- Suites géométriques : évolutions relatives constantes (croissance exponentielle).
  - Relation de récurrence
  - Sens de variation
  - Représentation graphique
- Compétences
  - Reconnaitre si une situation relève d'un modèle discret de croissance linéaire ou exponentielle.
  - Conjecturer, à partir de sa représentation graphique, la nature arithmétique ou géométrique d'une suite.
  - Démontrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique.
  - Déterminer le sens de variation d'une suite arithmétique ou géométrique à l'aide de la raison.

I - Suites arithmétiques

1. Généralités

DÉFINITION

Un premier terme, un nombre r appelé raison et la relation $a_{n+1} = a_n + r$.

REMARQUE

On passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre. La différence entre deux termes successifs vaut toujours r : $a_{n+1} - a_n = r$.

$$a_0 \xrightarrow{+r} a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

EXEMPLE

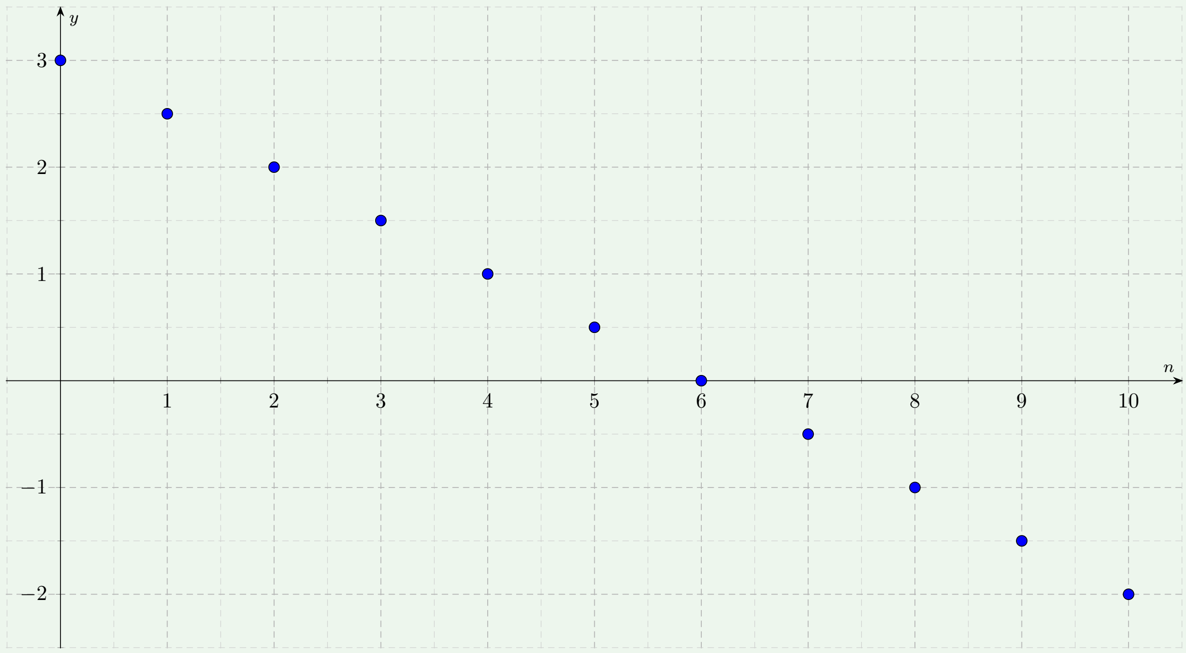
Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2 = 3 \\ u_2 &= u_1 - 2 = 1 \\ u_3 &= u_2 - 2 = -1 \\ u_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.

EXEMPLE



On a représenté une suite u ci-dessus. Son premier terme u_0 vaut 3 et pour passer d'un terme au suivant, on retire 0.5 : $r = -0.5$. La suite u est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison -0.5.

MÉTHODE

Pour s'assurer qu'une suite **semble** arithmétique, on calcule la différence entre deux termes successifs, et l'on doit toujours trouver le même nombre (la raison).

EXEMPLE

On se donne deux suites u et v, dont quelques valeurs sont décrites dans le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3
u_n	5	9	13	17
v_n	3	12	20	29

2. Variations des suites arithmétiques

PROPOSITION

— Si $r > 0$, alors la suite a est croissante.

— Si $r < 0$, alors la suite a est décroissante.

— Si $r = 0$, alors la suite a est constante.

EXEMPLE

Soit a la suite arithmétique définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 5$. La raison de cette suite est $r = -5 < 0$ donc a est décroissante.

II - Suites géométriques, cas positif

1. Généralités

DÉFINITION

Un premier terme, un nombre q appelé raison et la relation de récurrence $g_{n+1} = q \times g_n$.

$$g_0 \xrightarrow{\times q} g_1 \xrightarrow{\times q} g_2 \xrightarrow{\times q} \dots$$

REMARQUE

On passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre. Le quotient de deux termes successifs vaut toujours q : $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$.

EXEMPLE

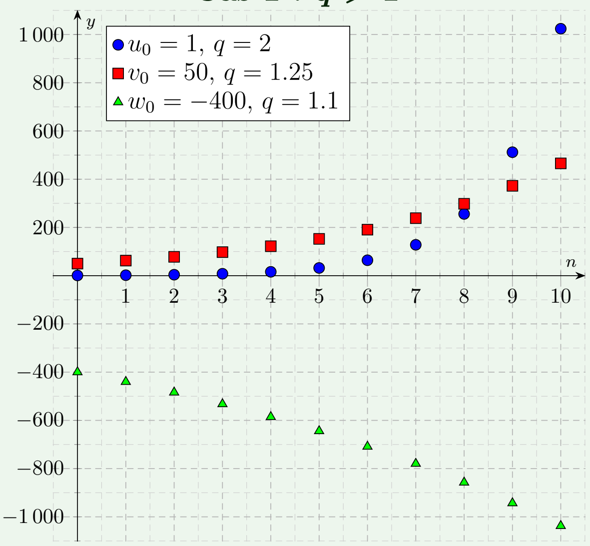
Soit g la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

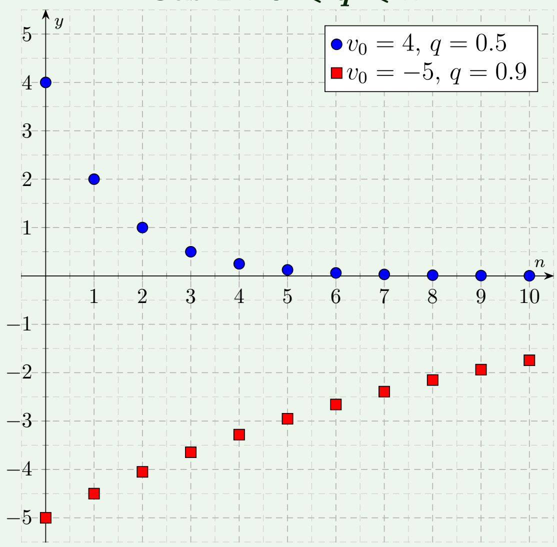
2. Représentation graphique des suites géométriques

EXEMPLE

Cas 1 : $q > 1$



Cas 2 : $0 < q < 1$



3. Variations des suites géométriques

PROPOSITION

- Si $q > 1$, alors la suite g est croissante.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite g est décroissante.
- Si $q = 1$, alors la suite g est constante.

EXEMPLE

DÉROULÉ

- **Total : 3.5 semaines**
- Semaine 1
  - 30m - Cours I partie 1 : Définitions et exo
  - 15m - Graphe de $x \mapsto x^2$
  - 1h - Cours : Représentation graphique, sommet, variations, exo
  - 30m - Cours II : Généralités+Exos
- Semaine 2
  - 1h - Suite
  - 1h - II.2 + Exos
  - 45m - III.1.1 + Exos
  - 45m - III.1.2 + Exos
- Semaine 3
  - 30m - Suite
  - 45m : III.1.3 + Exos
  - 1h : III.2 + Exos
  - 1h : III.3 + Exos