

FONCTION DÉRIVÉE

PROGRAMME

- Fonction dérivée
- Dérivées de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, de combinaisons linéaires, de polynômes de degré ≤ 3
- Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée
- Tableau de variations, extremums
- Capacités
 - Calculer la dérivée d'un polynôme de degré ≤ 3
 - Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynôme de degré ≤ 3

I - Généralités, règles de calcul

DÉFINITION

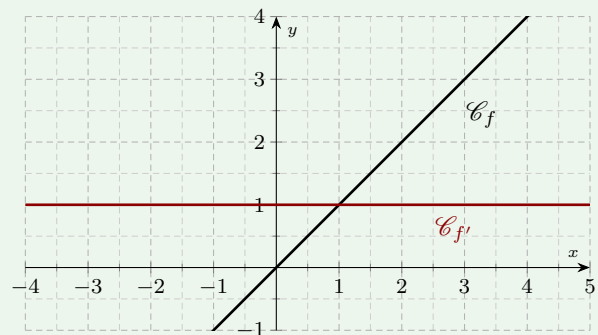
On définit la fonction dérivée de f , notée f' , qui à x associe (s'il existe) le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x .

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x$. C'est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 0$.

Sa représentation graphique est une droite d . De plus, toutes les tangentes à la courbe de f sont cette même droite d .

Alors quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a = 1$. f' est donc la fonction constante valant toujours 1.



PROPOSITIONS

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Soient f et g deux fonctions, et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

► Faire dessin avec la puissance qui passe devant

► Pour dériver une fonction puissance, on passe l'exposant devant x puis on retire 1 à l'exposant.

EXEMPLES

- Soit $f : x \mapsto x^2 + x$. Alors $f'(x) = 2x + 1 = 2x + 1$.
- Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.
- Soit $g : x \mapsto x^3 - 3x - 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- Soit $h : x \mapsto x^2 + x^2$. Alors $f'(x) = 2x + 2x = 4x$.

- Exos 20 -> 28 p149
- Exos 62 -> 67 p152
- Exos 69 -> 71 p153
- Exos 75,76 p153
- Exo 69 p153

II - Lien avec les variations

THÉORÈME

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Si f' est positive sur $[a; b]$, alors f est croissante sur $[a; b]$.
- Si f' est négative sur $[a; b]$, alors f est décroissante sur $[a; b]$.
- Si f' est nulle sur $[a; b]$, alors f est constante sur $[a; b]$. Les zéros de f' correspondent aux **extremums locaux** de f (les « sommets »).

APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

Etude du signe de la dérivée :

$a = 2 > 0$ donc f' est d'abord négative, puis positive.

De plus, $f'(x) = 0$ ssi $2x = 4$ ssi $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

Variations de f :

f est donc décroissante puis croissante.

On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	