

VARIABLES ALÉATOIRES

I - Définitions

EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1 . La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X = 2)$, vaut $\frac{1}{2} = 0,5$. On dit que X est une **variable aléatoire réelle**.

REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: Dans l'exemple précédent, l'univers est $\Omega = \{\text{« pile »}; \text{« face »}\}$. On a alors $X(\text{« pile »}) = 2$ et $X(\text{« face »}) = -1$.
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient $X = 2$.

- Exos 26,27,23 p201
- Exos 48,49,50 p204

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

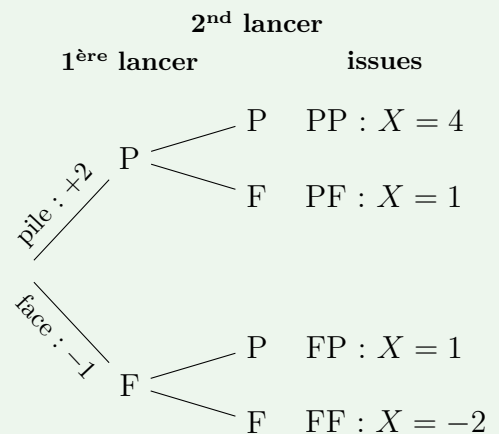
- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0,5$ (2 cas favorables sur 4) ;
- $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0,25$;
- $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{4} = 0,25$

On peut alors donner la **loi de probabilité** de X , c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

x	-2	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

- $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,75$;
- $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) = 0,75$



- Exos 41,43,44 p203
- Exos 75→78 p209

II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.

L'espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N$$

x	x_1	x_2	\dots	x_N
$\mathbb{P}(X = x)$	p_1	p_2	\dots	p_N

REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0,25 \times (-2) + 0,5 \times 1 + 0,25 \times 4$
 $= -0,5 + 0,5 + 1$
 $= 1$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.

Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

- ▶ Exo 28 p201
- ▶ Exos 51,53,55,58 p205
- ▶ Exos 56,57 p205
- ▶ Exos 82,84,86 p215
- ▶ Exo 68 p206
- ▶ Exo 54 p204
- ▶ Sujet D p212

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITIONS

- Deux événements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

EXEMPLE

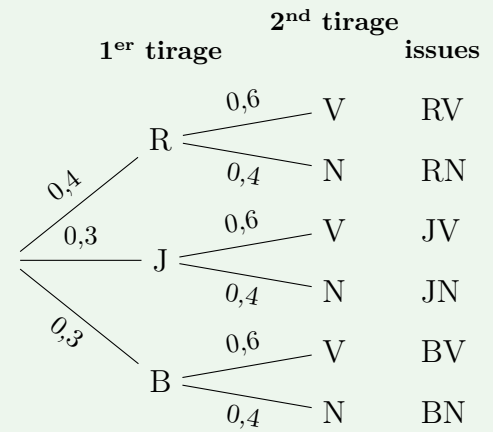
On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0,4$.

On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.

On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



► Exos 30,35,36 p202

PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrites sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet évènement.

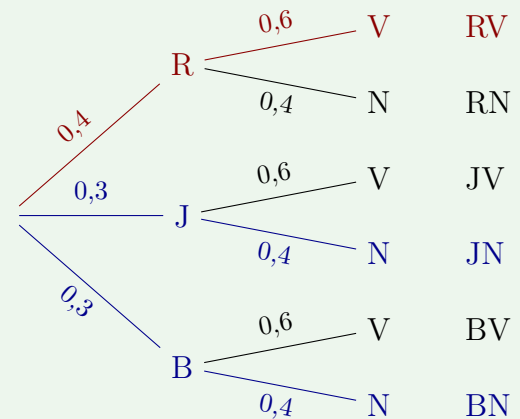
EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (**RV**) est :

$$0,4 \times 0,6 = 0,24$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (**JN ou BN**) est :

$$(0,3 \times 0,6) + (0,3 \times 0,4) = 0,18 + 0,12 = 0,30$$



► Exo 17 p200
 ► Exos 31,32,33 p202
 ► Exos 37,38,39 p205
 ► Exos 67,69,70 p206
 ► Exo 83 p214
 ► Exos 71→74 p209
 ► Sujets B,C p212

IV - Épreuves et lois de Bernoulli

DÉFINITION

- Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience où il n'y a que deux issues possibles : l'une est assimilée à un succès (de probabilité p) et l'autre à l'échec (de probabilité $1 - p$).
- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p (parfois notée $\mathcal{B}(p)$) lorsqu'elle associe 1 au succès, 0 sinon. Sa loi est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	p

EXEMPLE

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. On considère comme succès l'évènement « Obtenir la boule numérotée 10 » et donc comme échec « Ne pas obtenir la boule numérotée 10 ».

La loi de Bernoulli de la variable aléatoire X associée à cette expérience est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,9	0,1

PROPOSITION

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors $\mathbb{E}(X) = p$.