Repères du plan et coordonnées

PROGRAMME

— Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
— Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et B.
— Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
— Capacités :
  — Représenter un vecteur dont on connait les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
  — Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit de vecteur par un réel.
  — Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
  — Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
  — Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
— Démonstration : Colinéarité $\Leftrightarrow$ déterminant nul

I - Généralités sur les repères

DÉFINITION

Soient O,I,J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Un repère du plan est un triplet $\left(\text{O}; \vec{i}; \vec{j}\right)$. On dit alors que :

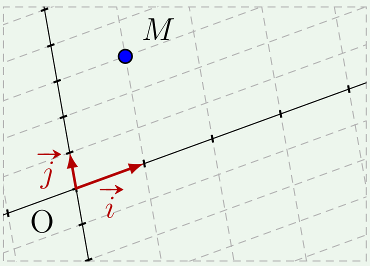
— O est l'origine du repère
— (OI) est l'axe des abscisses
— OJ est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère $\left(\text{O}; \vec{i}; \vec{j}\right)$ pour la suite du cours.

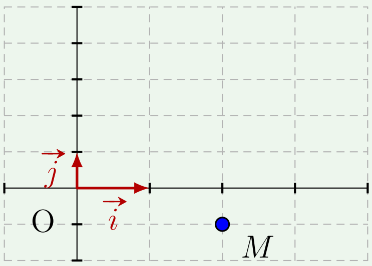
PROPRIÉTÉ

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de coordonnées $(x; y)$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M.

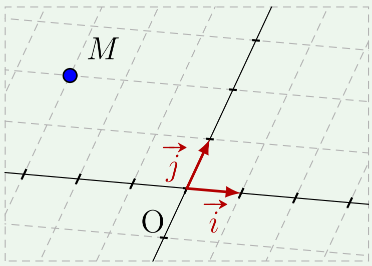
EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



$M(-3; 2)$

II - Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On se donne le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont celles de M, et l'on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

PROPOSITION

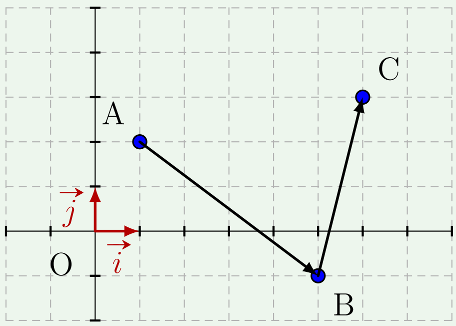
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

On se donne $A(1;2)$, $B(5;-1)$ et $C(6{,}3)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De même, on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

— Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

— Les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

Alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$. x et y sont les coordonnées de $\vec{u}$ et o

III - Norme/milieu

Repère orthonormé à définir

PROPOSITION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la norme de $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

COROLLAIRE

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la distance entre A et B vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

IV - Colinéarité