Suites arithmétiques et géométriques

I - Suites arithmétiques

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique a, on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme a_0
- Sa raison r

On a alors la relation $a_{n+1} = a_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 \xrightarrow{+r} a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

EXEMPLE

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2 = 3 \\ u_2 &= u_1 - 2 = 1 \\ u_3 &= u_2 - 2 = -1 \\ u_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

REMARQUE

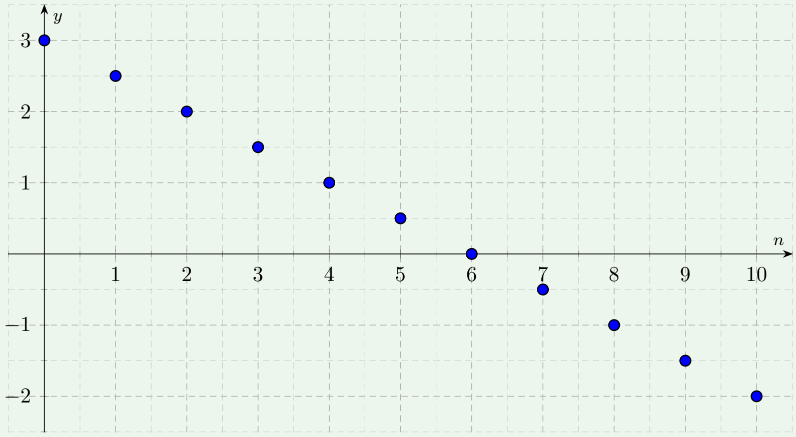
La différence entre deux termes successifs vaut toujours r : Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = r$.

2. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.

EXEMPLE



On a représenté une suite arithmétique u ci-dessus. On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2{,}5$. Alors $r = u_1 - u_0 = 2{,}5 - 3 = -0.5$. La suite u est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison $r = -0.5$.

3. Variations des suites arithmétiques

PROPOSITION

- Si $r > 0$, alors la suite a est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite a est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite a est constante.

EXEMPLE

Soit a la suite arithmétique définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 5$. La raison de cette suite est $r = -5 < 0$ donc a est décroissante.

II - Suites géométriques, cas positif

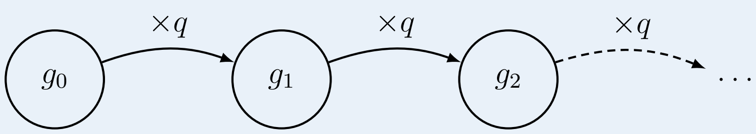
1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique g, on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme g_0
- Sa raison q

On a alors la relation $g_{n+1} = q \times g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



▶ On se restreindra au cas où g_0 et q sont strictement positifs.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \ \ldots \end{aligned}$$

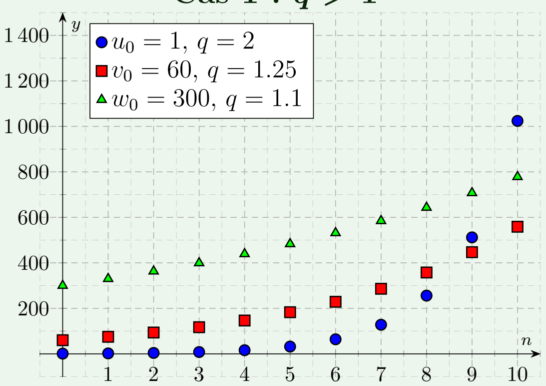
REMARQUE

Le quotient de deux termes successifs vaut toujours q : $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$.

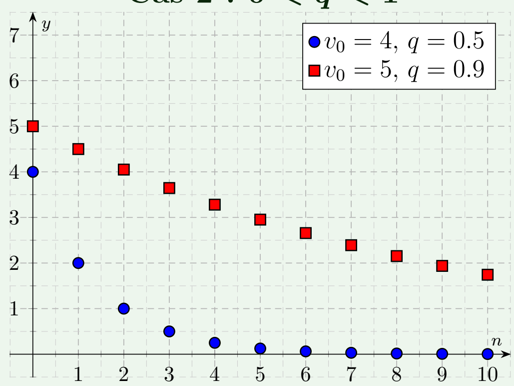
2. Représentation graphique des suites géométriques

EXEMPLES

Cas 1 : $q > 1$



Cas 2 : $0 < q < 1$



3. Variations des suites géométriques

PROPOSITION

— Si $q > 1$, alors la suite g est croissante.
— Si $0 < q < 1$, alors la suite g est décroissante.
— Si $q = 1$, alors la suite g est constante.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique définie par $g_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = 0{,}9 \times g_n$. La raison de cette suite est $q = 0{,}9 < 1$ donc g est décroissante.