Fonctions polynomiales de degré 2

I - Généralités

DÉFINITION

On appelle fonction polynomiale de degré 2 toute fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a \neq 0}$.

EXEMPLES

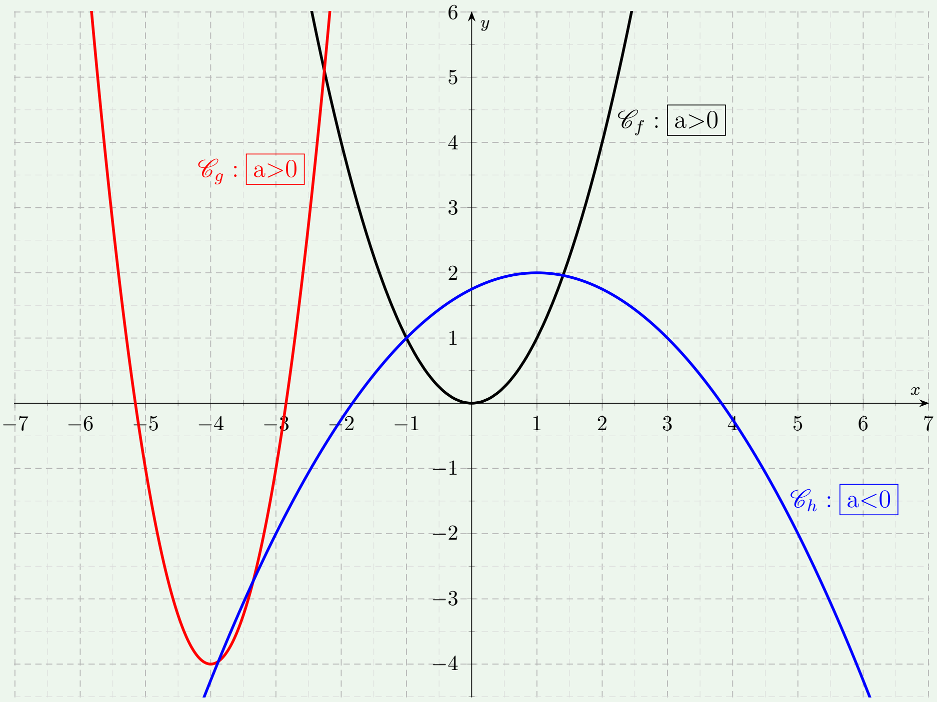
$f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ et $h : x \mapsto 2 - 0{,}3x^2$ sont des fonctions polynomiales de degré 2.

► L'appellation est un peu lourde... On dira plutôt fonction de degré 2.

PROPOSITION

La représentation graphique d'une fonction de degré 2 est une parabole.

EXEMPLES



REMARQUE

Le terme constant (sans x, c'est-à-dire c) est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer c décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

PROPRIÉTÉS

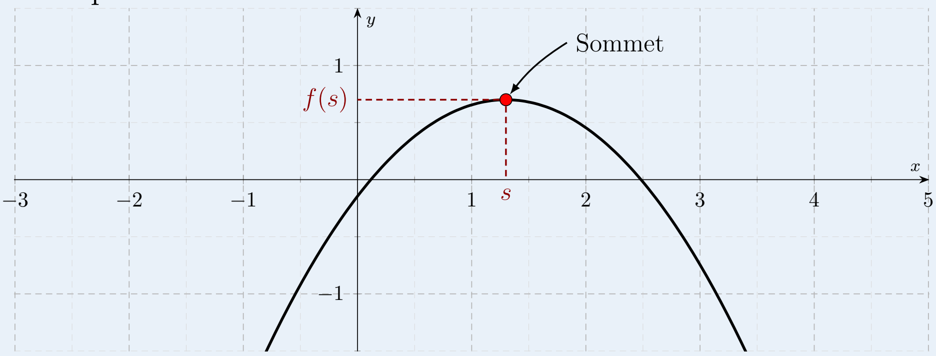
Soit f une fonction de degré 2.

— Si $a \geq 0$, f est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.

— Si $a \leq 0$, f est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.

DÉFINITION

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si $a > 0$, le point le plus haut sinon.



PROPRIÉTÉS

On se donne f une fonction de degré 2 et s l'abscisse du sommet de la parabole associée.

— Les coordonnées de son sommet sont donc $(s, f(s))$.

— La parabole associée possède pour axe de symétrie la droite parallèle a l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.

— On en déduit le tableau de variations de f :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	s	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(s)$	↗ $+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	s	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(s)$	↘ $-\infty$

► On verra dans la suite comment trouver algébriquement (par le calcul) les coordonnées de ce sommet, dans des cas particuliers.

II - Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

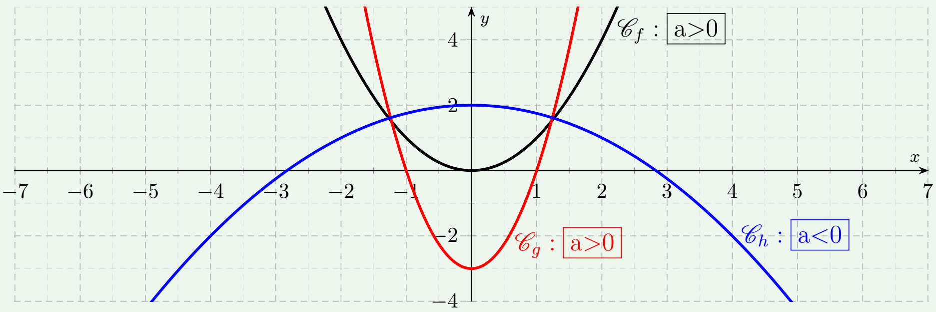
PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ une fonction de degré 2.

— Les paraboles d'équation $y = ax^2 + c$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

— Les coordonnées du sommet de cette parabole sont $(0; c)$.

EXEMPLES



EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 5x^2 - 2$. Les coordonnées du sommet de la parabole associée sont $(0; -2)$.

MÉTHODE

Pour déterminer l'expression d'une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord c en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine a en résolvant une équation.

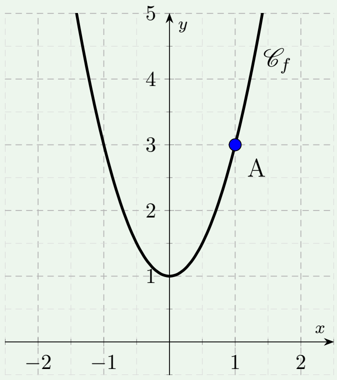
EXEMPLE

On a représenté une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ sur le repère ci-contre.

On voit directement que $c = 1$, d'où $f : x \mapsto ax^2 + 1$.

On se donne maintenant un point sur la courbe de f, par exemple $A(1; 3)$. Cela signifie que $f(1) = 3$, autrement dit $a \times 1^2 + 1 = 3$, soit donc $a + 1 = 3$, d'où $a = 2$.

On a alors $f : x \mapsto 2x^2 + 1$.



III - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

1. Généralités

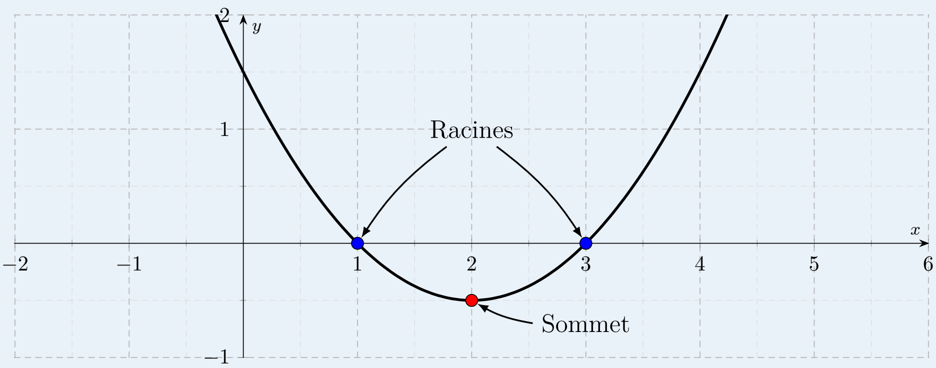
PROPOSITION

Les fonctions du type $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ sont des fonctions de degré 2. On dit que cette forme est l'écriture factorisée de f (lorsqu'elle existe).

En effet, $a(x-x_1)(x-x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$
$= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$
$= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2$
Donc $a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c$ avec $b = -(ax_1 + ax_2)$ et $c = ax_1x_2$.

DÉFINITION

Soit f une fonction de degré 2. On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.



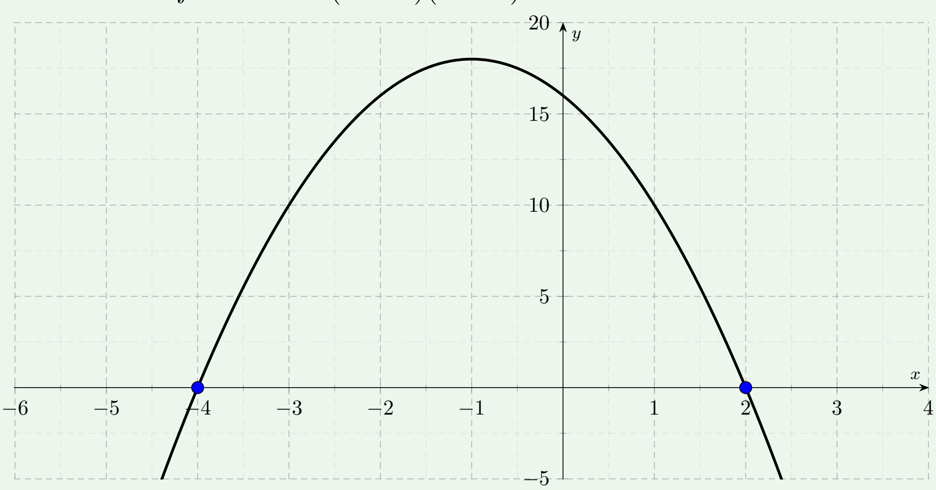
REMARQUE

Si $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ $(a \neq 0)$, les racines de f sont x_1 et x_2.

En effet, $a(x-x_1)(x-x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$
$\Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

EXEMPLE

Les racines de la fonction $f : x \mapsto -2(x-2)(x+4)$ sont 2 et -4.



On voit alors que la parabole associée par f coupe l'axe des abscisses en $M(2;0)$ et $N(0;-4)$.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$. On pose $s = \frac{x_1+x_2}{2}$. Alors le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(s, f(s))$.

EXEMPLE

Pour la parabole précédente, on a $s = \frac{2-4}{2} = -1$, et :

$$\begin{aligned} f(s) &= f(-1) \\ &= -2(-1-2)(-1+4) \\ &= -2 \times (-3) \times 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc $(-1;18)$.

2. Factorisation

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b + c$. Ceci est l'écriture développée de f. On souhaite retrouver l'écriture factorisée $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$.

REMARQUE

Le a qui apparait dans la forme développée et factorisée est le même.

MÉTHODE

Si l'on connait une racine x_1 de f, on peut retrouver l'écriture factorisée de f par identification.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$. On nous dit que 1 est une racine de f. De plus, on a $a = 3$.
On sait alors qu'on peut écrire $f(x) = 3(x-1)(x-x_2)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$.
Première méthode : Développons cette expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(x^2 - x \times x_2 - x + x_2\right) \\ &= 3x^2 - 3 \times x_2 \times x - 3x + 3x_2 \\ &= 3x^2 + (-3-3x_2)x + 3x_2 \\ \text{On a de plus } f(x) &= 3x^2 - 9x + 6 \end{aligned}$$

Le dernier coefficient nous donne donc $3x_2 = 6$ soit alors $x_2 = 2$.
On en déduit que $f(x) = 3(x-1)(x-2)$.
Seconde méthode : On calcule $f(0)$ de deux manières différentes :

$$f(0) = 3 \times 0^2 - 9 \times 0 + 6 = 6$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0-1)(0-x_2) \\ &= 3 \times (-1) \times (-x_2) \\ &= -3 \times (-x_2) \\ &= 3x_2 \end{aligned}$$

On retrouve alors l'équation précédente : $3x_2 = 6$ d'où $x_2 = 2$ puis $f(x) = 3(x-1)(x-2)$.

3. Etude du signe

MÉTHODE

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$, on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 0{,}5(x-1)(x+3)$. Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+3$. On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut donc lire sur ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est :

$$S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

On peut vérifier que l'on obtient le même tableau par lecture graphique.