

FONCTIONS AFFINES

PROGRAMME

- Fonctions affines : Capacités
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite
- Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes.
- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe
- Équation réduite d'une droite

I - Généralités

DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$ et $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$ sont des fonctions affines.

CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée *fonction linéaire*.
- $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée *fonction constante*.

► Fiche tableau : reconnaissance a et b

II - Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une *droite* qui coupe l'axe des ordonnées.

VOCABULAIRE

Dans un repère, soit d la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :

- a est le **coefficients directeur** de d .
- b est l'**ordonnée à l'origine** de d .
- $y = ax + b$ est l'**équation réduite** de d .

PROPOSITION

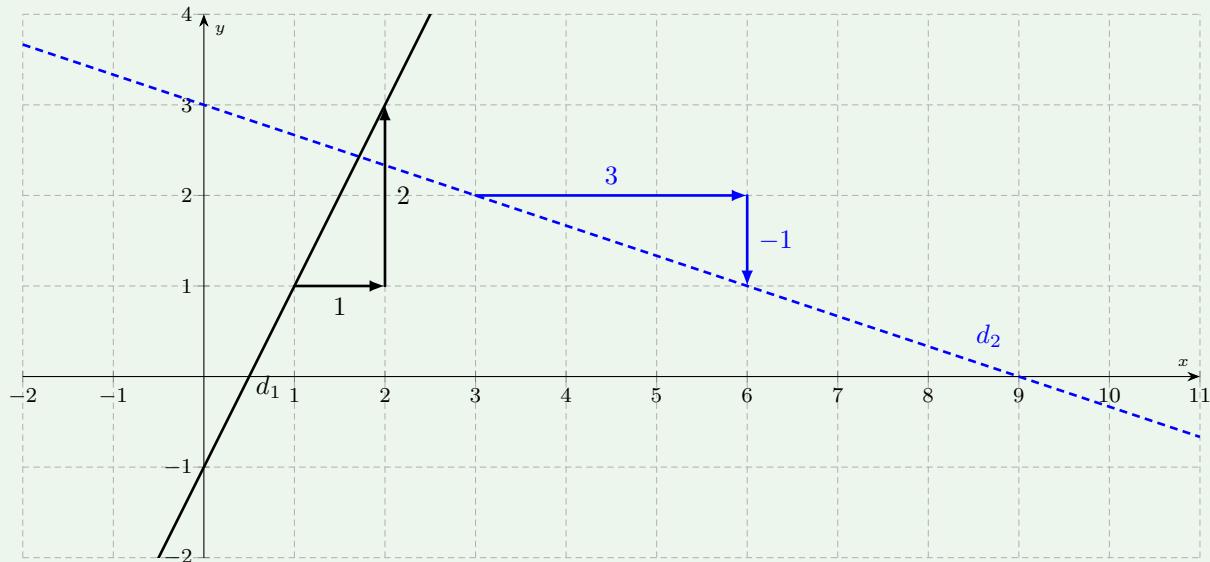
Lorsque a s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

EXEMPLES

Construisons les droites d_1 et d_2 d'équations réduites respectives $y = 2x - 1$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

- Pour d_1 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est -1 , et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour d_2 : L'ordonnée à l'origine de d_2 est 3 , et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descends d'un.



► Fiches construction et détermination

III - Recherche algébrique de a et b

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, avec $x_1 \neq x_2$. Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EXEMPLE

On suppose que $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$.

$$\text{Alors } a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

On a alors $f : x \mapsto 2x + b$. On sait de plus que $f(3) = 2 \times 3 + b$ et $f(3) = 5$ donc :

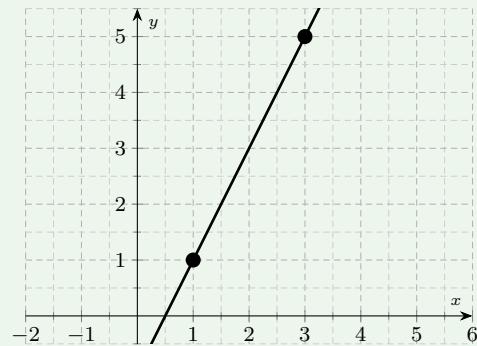
$$5 = 2 \times 3 + b$$

$$\text{soit donc } 5 = 6 + b$$

$$\text{et alors } 5 - 6 = b$$

$$\text{puis } b = -1$$

Cela donne alors $f : x \mapsto 2x - 1$.



- ▶ Fiche détermination algébrique
- ▶ Fiche preuve (*)

IV - Tableaux de signe

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si $ax + b = 0$ ssi $ax = -b$ ssi $x = -\frac{b}{a}$. Le tableau de signes de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$. En décomposant f , on obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$4 - 5x$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	-

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty \right[$$

Pour $g : x \mapsto \frac{x+2}{4-5x}$, le tableau de signes obtenu est presque identique :

x	$-\infty$	-2	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x+2$	–	0	+	+
$4-5x$	+		+	0 –
$g(x)$	–	0	+	–

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque $x = \frac{4}{5}$. Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de g .