

# VARIATIONS DE FONCTIONS

## PROGRAMME

- Croissance, décroissance, monotonie d'une fonction définie sur un intervalle. Tableau de variations
- Maximum, minimum d'une fonction sur un intervalle
- Capacités :
  - Relier représentation graphique et tableau de variations
  - Déterminer graphiquement les extremums d'une fonction sur un intervalle
  - Exploiter un logiciel de géométrie dynamique ou de calcul formel, la calculatrice ou Python pour décrire les variations d'une fonction donnée par une formule

## I - Etude des variations

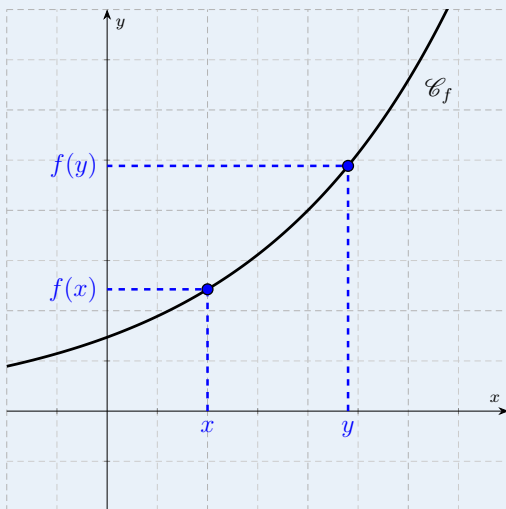
On se donne dans cette partie  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

### DÉFINITIONS

On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images augmentent aussi. L'ordre est conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ .

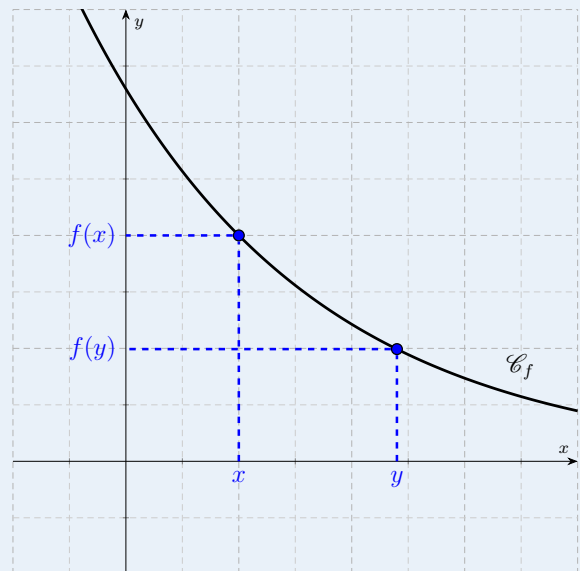
Graphiquement, la courbe de  $f$  "monte" : ↗



On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images diminuent. L'ordre n'est pas conservé :

Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \geq f(y)$

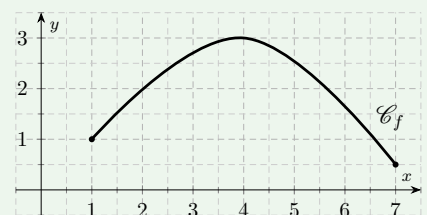
Graphiquement, la courbe de  $f$  "descend" : ↘



### EXEMPLE

On se donne la fonction  $f$ , définie sur  $[1; 7]$  et représentée ci-contre.

- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  puis décroissante sur  $[4; 7]$ .
- $f$  est croissante sur  $[1; 4]$  et  $2 \leq 3$  donc  $f(2) \leq f(3)$ .
- $f$  est décroissante sur  $[4; 7]$  et  $5 \leq 6$  donc  $f(5) \geq f(6)$ .



## DÉFINITIONS

— On dit que  $f$  est constante sur  $I$  si elle prend toujours la même valeur :

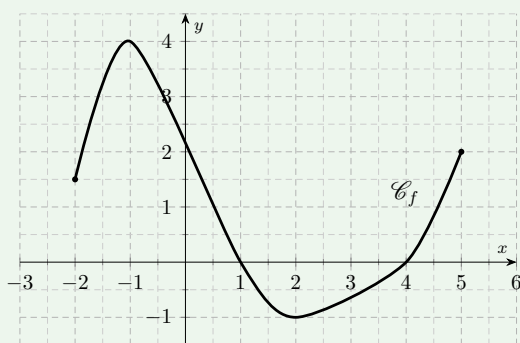
$$\text{Pour } x, y \in I, \text{ on a } f(x) = f(y).$$

— On dit que  $f$  est monotone sur  $I$  si elle est soit croissante, soit décroissante sur  $I$  (son sens de variation ne change pas).

## MÉTHODE

Dresser le tableau de variations de  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction  $f$  est croissante, décroissante ou constante.

## EXEMPLE



On se donne la fonction  $f$ , définie sur  $[-2; 5]$  et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de  $f$  sous forme du tableau de variations suivant :

$x$	-2	-1	2	5
$f(x)$	1.5	4	-1	2

## II - Extrêmes d'une fonction sur un intervalle

### DÉFINITIONS

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $f$  admet un maximum  $M$  en  $a$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \leq M = f(a)$ .
- On dit que  $f$  admet un minimum  $m$  en  $b$  sur  $I$  si pour tout  $x \in I$ ,  $f(x) \geq m = f(b)$ .

### REMARQUE

Le maximum d'une fonction correspond au point le plus "haut" de sa courbe représentative, et le minimum au point le plus "bas".

## EXEMPLE

On reprend la fonction  $f$  de l'exemple précédent.

Son maximum sur  $I$  est 4, atteint en -1.

Son minimum sur  $I$  est -1, atteint en 2.

Son minimum sur  $[-2; 0]$  est 1,5, atteint en -2.

