Repères du plan et coordonnées

I - Généralités sur les repères

DÉFINITION

Soient O,I,J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Un repère du plan est un triplet $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$. On dit alors que :

— O est l'origine du repère

— (OI) est l'axe des abscisses

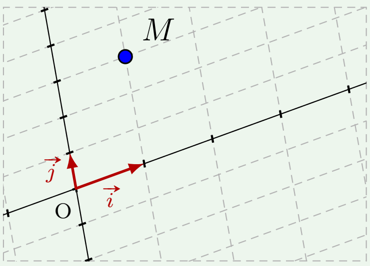
— (OJ) est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ pour la suite du cours.

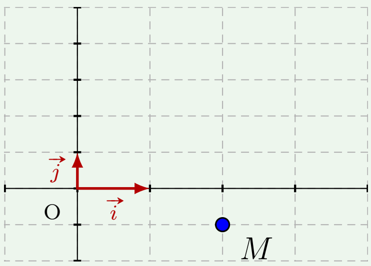
PROPRIÉTÉ

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de coordonnées $(x; y)$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M.

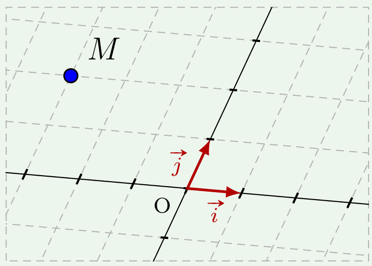
EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



$M(-3; 2)$

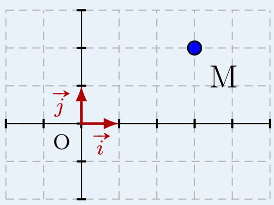
► On écrit $M(1; 3)$ et pas $M = (1; 3)$!

DÉFINITION

On dit que le repère $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ est orthonormé si :

— Ses axes sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$

— Les vecteurs unité $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour longueur 1 : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

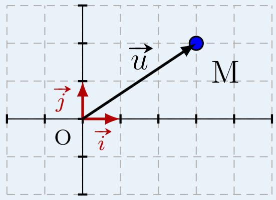


$M(3; 2)$

II - Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On se donne le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont celles de M, et l'on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

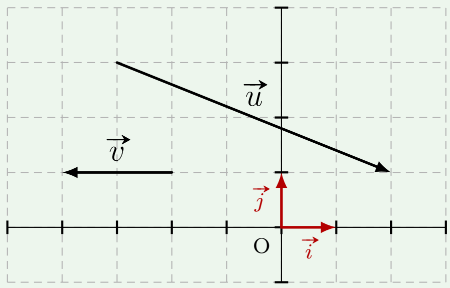


$M(3;2)$ donc $\vec{u}\binom{3}{2}$

▶ On écrit $\vec{u}\binom{3}{2}$ et pas $\vec{u} = \binom{3}{2}$!

EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



PROPOSITION

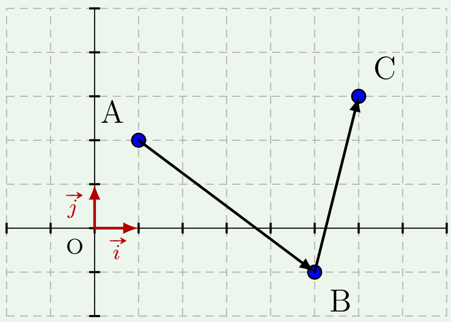
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

On se donne $A(1;2)$, $B(5;-1)$ et $C(6{,}3)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De même, on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

— Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

— Les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors on a :

— $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}1+2\\3+(-1)\end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$.

— $3\vec{v}\begin{pmatrix}3\times 2\\3\times(-1)\end{pmatrix}$ d'où $3\vec{v}\begin{pmatrix}6\\-3\end{pmatrix}$.

— $(2\vec{u}-5\vec{v})\begin{pmatrix}2\times 1-5\times 2\\2\times 3-5\times(-1)\end{pmatrix}$ d'où $(2\vec{u}-5\vec{v})\begin{pmatrix}-8\\11\end{pmatrix}$.

III - Calculs de distances et de milieux

1. Milieu d'un segment

PROPOSITION

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. On se donne de plus I le milieu de $[AB]$. Alors les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

EXEMPLE

Soient $A(1;7)$, $B(6;-5)$ et I le milieu de $[AB]$. Alors on a $I\left(\frac{1+6}{2};\frac{7-5}{2}\right)$ d'où $I\left(\frac{7}{2};\frac{2}{2}\right)$, et enfin $I(3{,}5;1)$.

2. Normes et distances

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé.

PROPOSITION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Alors la norme de $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

COROLLAIRE

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. Alors la distance entre A et B vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$$

EXEMPLE

Soient $A(1;7)$ et $B(6;-5)$. Alors $\begin{aligned}[t] AB &= \sqrt{(6-1)^2+(-5-7)^2} \\ &= \sqrt{5^2+(-12)^2} \\ &= \sqrt{25+144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$

APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

EXEMPLE

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(3;5)$ de rayon 3, et le point $M(5;7)$. On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(5-3)^2+(7-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2+2^2} \\ &= \sqrt{4+4} \\ &= \sqrt{8} \simeq 2{,}83 \end{aligned}$$

Comme $AM \neq 3$, M n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.