

Les nombres réels

I - Les ensembles de nombres

1) Les entiers

\mathbb{N} désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note $0 \in \mathbb{N}$. Par contre, -3 n'en est pas un, on note $-3 \notin \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

\mathbb{Z} désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs : $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $0.5 \notin \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble \mathbb{N} est donc inclus dans l'ensemble \mathbb{Z} . On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2) Les nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note \mathbb{D} l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D}, \quad 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D}, \quad \frac{1}{3} = 0.333\dots \notin \mathbb{D}$$

Tout entier relatif est aussi un entier décimal : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: Par exemple, $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$.

3) Les nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs et q est non nul. On note \mathbb{Q} l'ensemble des

nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad \frac{3}{7} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

Proposition :

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

Par exemple, $x = 0.0909\dots$ est rationnel : $100x = 9.0909\dots$ donc $100x - x = 9$ d'où $99x = 9$ puis $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

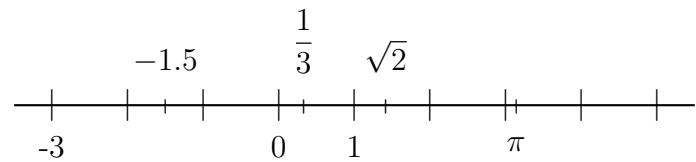
4) Les nombres réels

\mathbb{R} désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}}$$

sont irrationnels

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



Enfin, on remarque que tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.