LGT Jean Rostand

2nde GT

Mathématiques

M. DELAUNEY

Nombres réels

I - Les ensembles de nombres

1. Les entiers

DÉFINITION

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note $0 \in \mathbb{N}$. Par contre, -3 n'en est pas un, on note $-3 \notin \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \ldots\}$$

DÉFINITION

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs : $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $0.5 \notin \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots; -2; -1; 0; 1; 2; \ldots\}$$

REMARQUE

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble $\mathbb{N}$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. Les nombres décimaux

DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D},\ 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D},\ \frac{1}{3} = 0.333\ldots \notin \mathbb{D}$$

REMARQUE

Tout entier relatif est aussi un entier décimal : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: Par exemple, $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$.

3. Les nombres rationnels

DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs et q est non nul. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q},\ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q},\ \frac{3}{7} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

PROPOSITION

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

EXEMPLE

$x = 0.0909\ldots$ est rationnel : $100x = 9.0909\ldots$ donc $100x - x = 9$ d'où $99x = 9$ puis $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

EXERCICE

Faire de même avec $x = 0.1666\ldots$: $10x = 1.666\ldots$ donc $10x - x = 1.5$ et alors $9x = \frac{3}{2}$ puis $x = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

REMARQUE

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

4. Les nombres réels

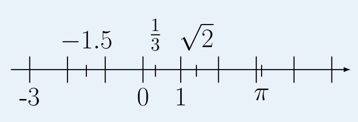
DÉFINITION

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}} \text{ sont irrationnels}$$

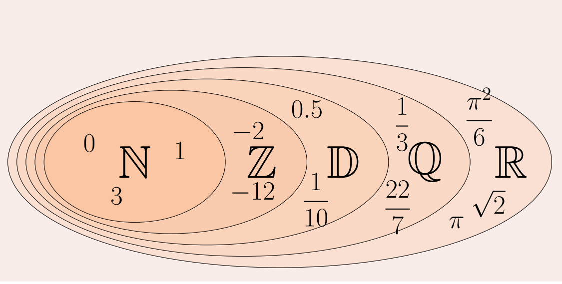
PROPRIÉTÉ

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



PROPOSITION

Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Encadrement décimal des réels

DÉFINITION

Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $d_1 \leq x \leq d_2$ avec d_1,d_2 des nombres décimaux. La différence $d_2 - d_1$ est l'amplitude de l'encadrement.

EXEMPLE

Par exemple, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ est un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ d'amplitude $10^{-1} = 0.1$.

DÉFINITION

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $d_1 \leq x \leq d_2$ avec $d_2 - d_1 = 10^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$. L'arrondi à 10^{-n} de x est celui de d_1 ou d_2 le plus proche de x. Dans le cas où d_1 et d_2 sont à égale distance de x, l'arrondi à 10^{-n} de x est d_2.

EXEMPLE

- 3,14 est l'arrondi à 10^{-2} de π.
- 3,142 est l'arrondi à 10^{-3} de π.
- 2,4 est l'arrondi à 10^{-1} de 2,35.

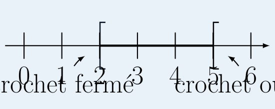
REMARQUE

Faire un arrondi à 10^{-n} signifie n chiffres après la virgule.

II - Intervalles de $\mathbb{R}$

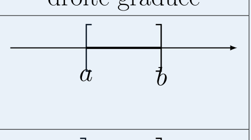
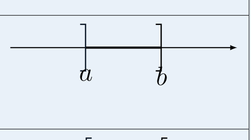
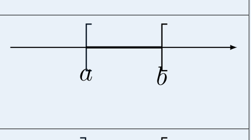
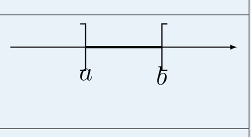
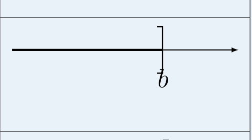
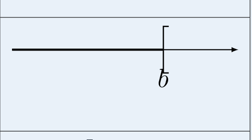
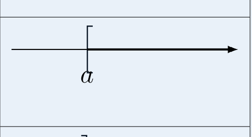
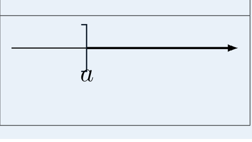
DÉFINITION

On veut écrire plus simplement " Tous les nombres réels compris entre 2 et 5, 5 exclus ". Pour celà, il y a trois manières possibles :

- Par un schéma : 

- Par une inégalité : $2 \leq x < 5$
- Par un intervalle : $[2; 5[$

Soient a et b deux réels distincts.

L'intervalle noté ...	... désigne l'ensemble des réels x tels que ...	Il est représenté par un segment sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	

REMARQUES

- a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.
- Attention à ne pas confondre $[a; b]$ *et* $\{a; b\}$: Le premier ensemble contient tous les réels compris entre a et b inclus, alors que le second ne contient que a et b.
- $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels, on écrit donc pas $[-\infty; a]$.
- $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$
- Les quatre premiers intervalles sont dits bornés. Parmi ceux-ci, on dit que $[a; b]$ est fermé, $]a; b[$ est ouvert. Les deux autres sont dits semi-ouverts.

Unions et intersections

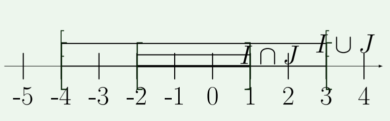
DÉFINITION

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

- L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé intersection de I et J. Cet ensemble est noté $I \cap J$.
- L'ensemble des réels qui appartiennent à à I ou à J est appelé réunion de I et J. Cet ensemble est noté $I \cup J$.

EXEMPLE

Pour $I = [-2; 3[$ et $J = [-4; 1]$, on a $I \cap J = [-2; 1]$ et $I \cup J =]-4; 3[$.



III - Valeur absolue

DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel x est $-x$ lorsque $x < 0$ ou x lorsque $x \geq 0$. On note :

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLE

$|8| = 8$ mais $|-8| = 8$ aussi. En fait, l'effet de la valeur absolue est de rendre un nombre positif (on supprime le signe $-$).

DÉFINITION

Soient A et B deux points placés sur la droite des réels, d'abscisses respectives a et b. La distance entre a et b correspond à la longueur de AB. Elle se calcule à l'aide de la valeur absolue :

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

EXEMPLE

- La distance entre 5 et -2 est $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. La distance entre x et 0 est $|x - 0| = |x|$.

Intervalles $[a - r; a + r]$

PROPRIÉTÉ

Soient a et r deux réels, avec $r > 0$. Alors l'intervalle $[a - r; a + r]$ contient tous les réels x qui vérifient $a - r \leq x \leq a + r$, autrement dit ceux à une distance inférieure à r de a, soit $|x - a| \leq r$.

EXEMPLE

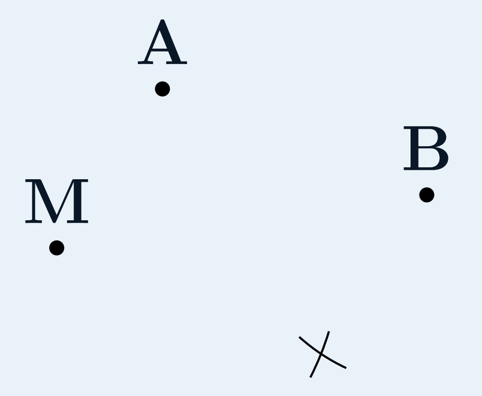
$[3; 5] = [4 - 1; 4 + 1] = \{x \in \mathbb{R},\ |x - 4| \leq 1\}$

Vecteurs du plan : Première approche

I - Translations

DÉFINITION

Soient A,B,M trois points quelconques du plan. L'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est l'unique point N tel que le quadrilatère $ABNM$ soit un parallélogramme.



REMARQUES

Lors de cette translation :

— Les droites (AB) et (MN) sont parallèles

— Les longueurs AB et MN sont égales

II - Généralités sur les vecteurs

DÉFINITION

Un vecteur $\vec{u}$ peut être représenté avec une origine A et une extrémité B. Il est caractérisé par :

— Sa direction (celle de la droite (AB))

— Son sens (de A vers B)

— Sa norme (ou sa longueur), notée $\|\vec{u}\|$. On a $\|\vec{u}\| = AB$.

DÉFINITION

Lorsque deux vecteurs symbolisent le même déplacement, on dit qu'ils sont égaux.

EXEMPLE

La figure précédente nous donne alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{NM}$, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BN}$.

PROPRIÉTÉ

Les quatre propositions suivantes sont **équivalentes** :

— $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN}$

— N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

— $[AN]$ et $[BM]$ se coupent en leur milieu

— $ABNM$ est un parallélogramme

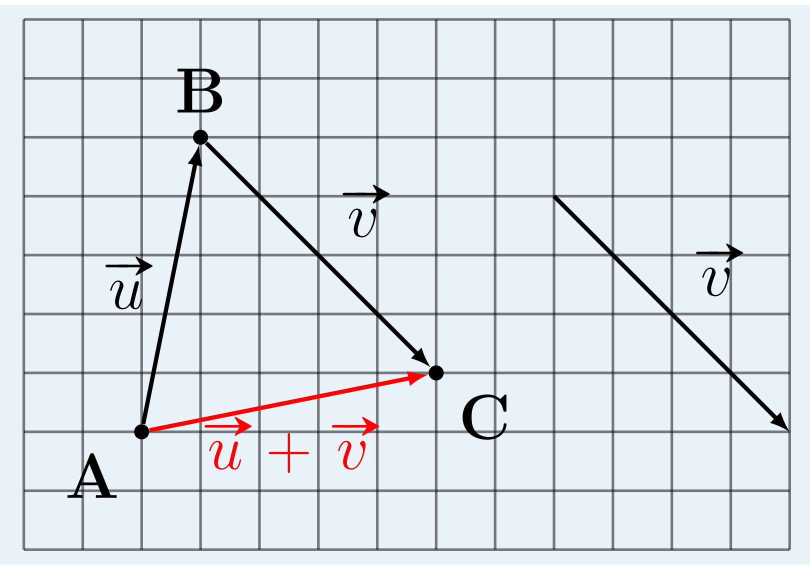
CAS PARTICULIERS

— Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est obtenu à partir de la translation qui transforme A et A, B en B ... On a alors $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ Ce vecteur n'a ni direction, ni sens, et sa norme est nulle.

— L'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A. On le note $-\overrightarrow{AB}$. Ainsi, $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$. Il a la même direction et la même norme que $\overrightarrow{AB}$ mais est de sens contraire.

III - Somme de deux vecteurs

► Activité Chasles



EXEMPLE

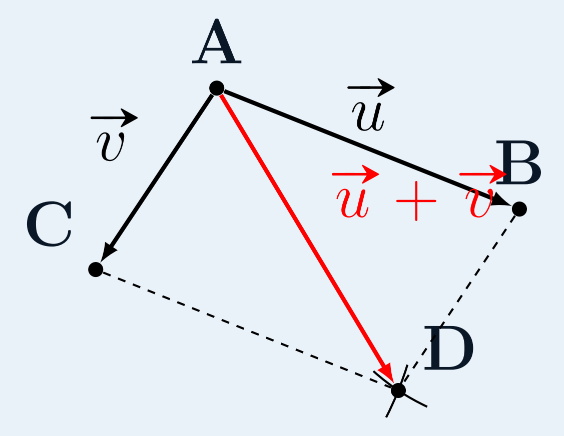
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

REMARQUE

En général, la longueur de $\vec{u} + \vec{v}$ n'est pas égale à la somme de celle de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$: $\|\vec{u} + \vec{v}\| \neq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

MÉTHODE

Pour construire $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, il suffit de construire le parallélogramme $ABDC$ et de prendre le vecteur $\overrightarrow{AD}$.



IV - Produit d'un vecteur par un nombre

DÉFINITION

Soit k un réel et $\vec{u}$ un vecteur. Le produit de k par $\vec{u}$ est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

— $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction

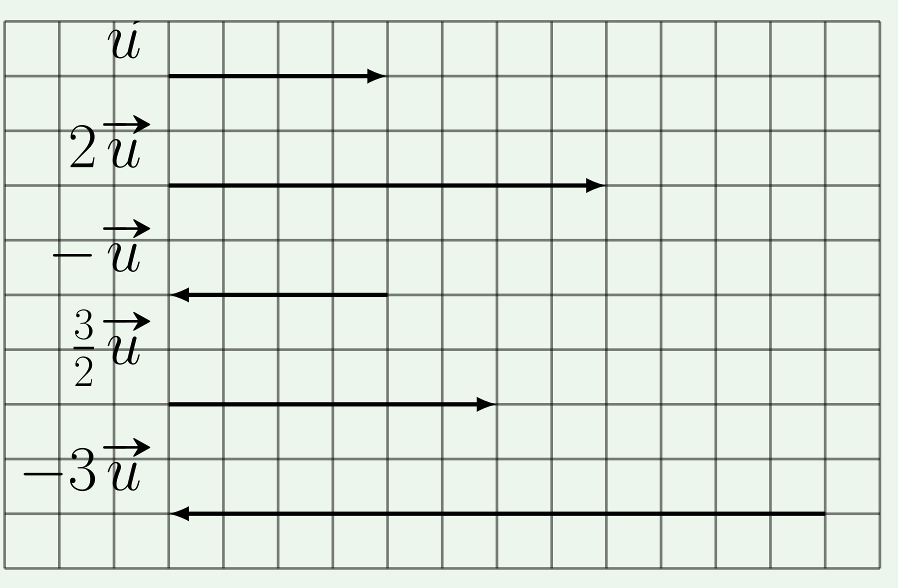
— La longueur de $k\vec{u}$ est $|k|\,\|\vec{u}\|$

— Si $k > 0$, $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont le même sens. Sinon, ils ont des sens opposés.

REMARQUE

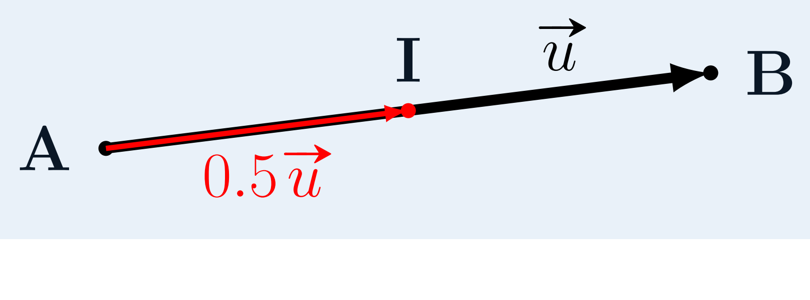
En particulier, $0 \times \vec{u} = \vec{0}$.

EXEMPLE



APPLICATION

I est le milieu de $[AB]$ se traduit par $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ ou $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.



Fonctions : Généralités

I - Définitions, notations

DÉFINITION

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un **unique** réel noté $f(x)$. On note $\begin{array}{rccl} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Valeur d'entrée (dans D) Valeur de sortie (dans $\mathbb{R}$)

$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{\text{Fonction } f} \longrightarrow \boxed{f(x)}$

On dit alors que :

— $f(x)$ est l'image de x

— x est un antécédent de $f(x)$

— D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

EXEMPLE

On définit la fonction $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

— L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.

— L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.

— 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

REMARQUE

Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

II - Représentation graphique d'une fonct

DÉFINITION

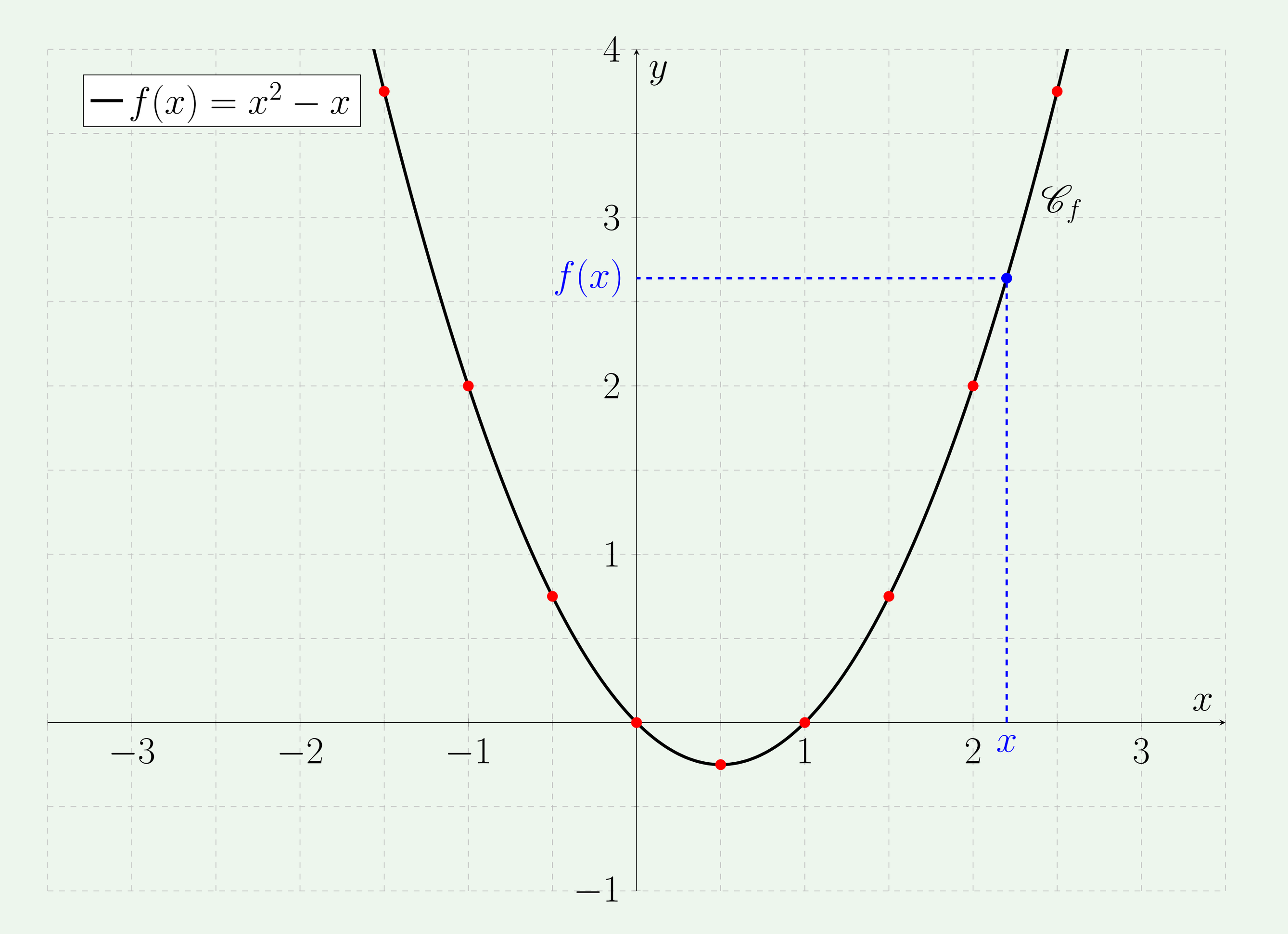
Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x,f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

EXEMPLE

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									

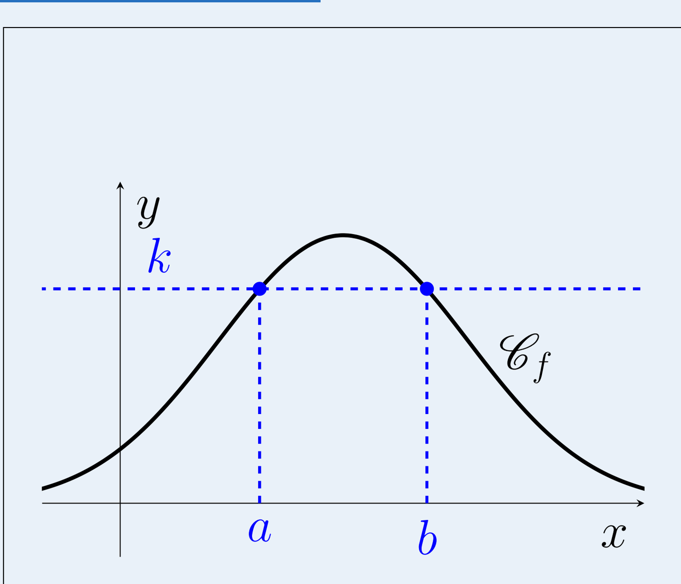


Les points $(-1;2)$ et $(1;0)$ appartiennent à la courbe de f, mais pas le point $(0;1)$.

III - Résolution graphique d'équations

1. Equations du type $f(x) = k$

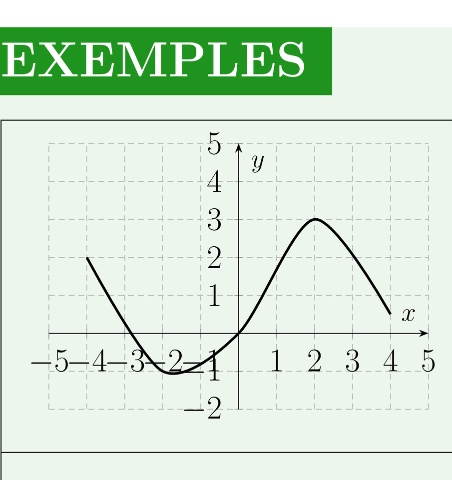
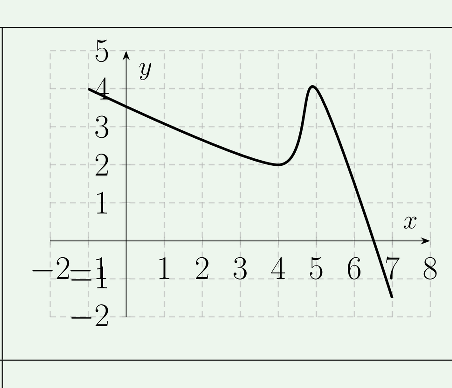
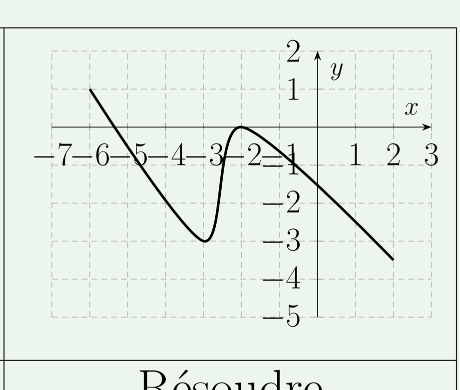
MÉTHODE



Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est k.
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

$$S = \{a;b\}$$

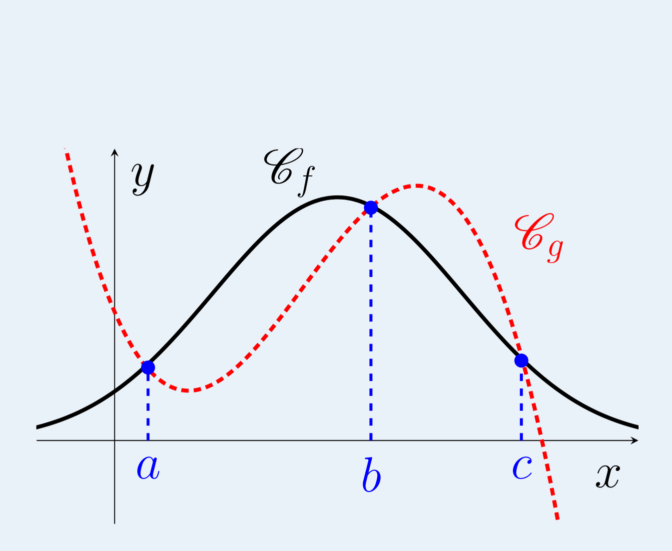
EXEMPLES

Résoudre $f(x) = 1$:	Résoudre $g(x) = 1$:	Résoudre $h(x) = -4$:

2. Equations du type $f(x) = g(x)$

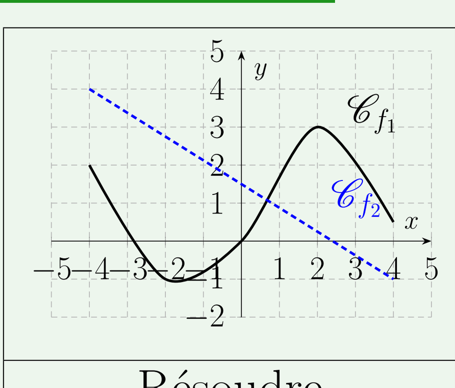
MÉTHODE

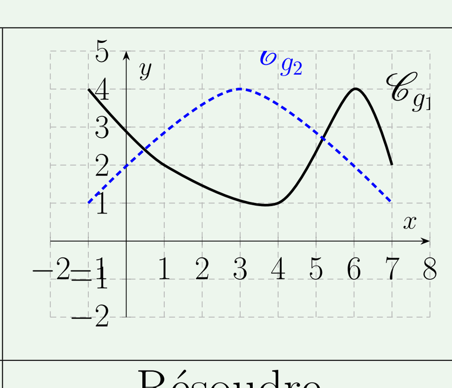


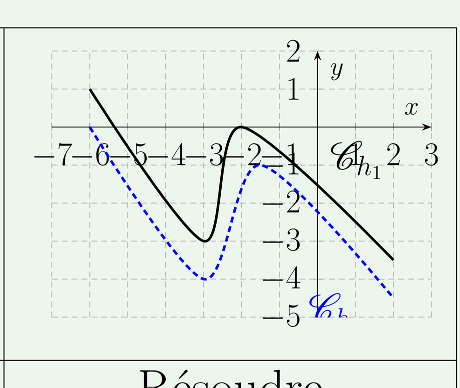
Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

$$S = \{a;b;c\}$$

EXEMPLES



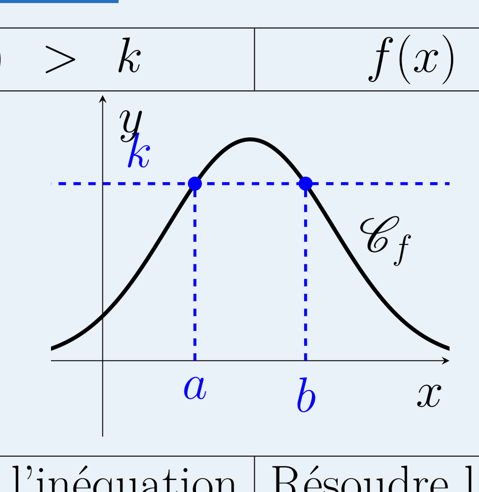
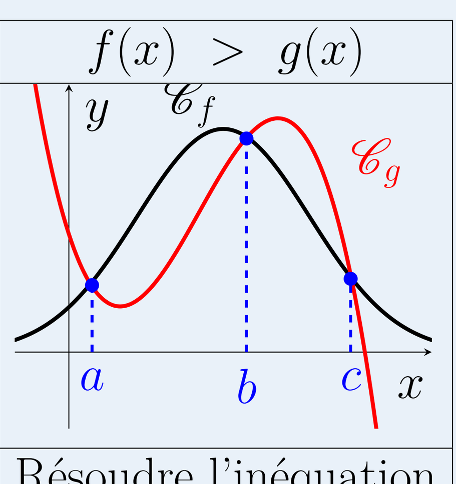




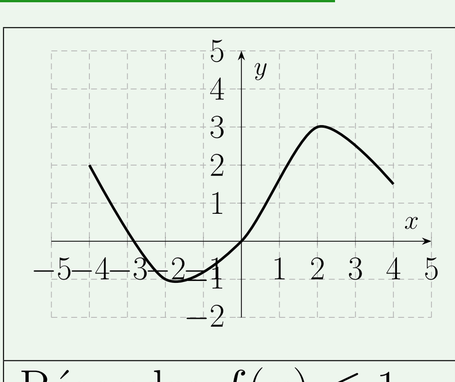
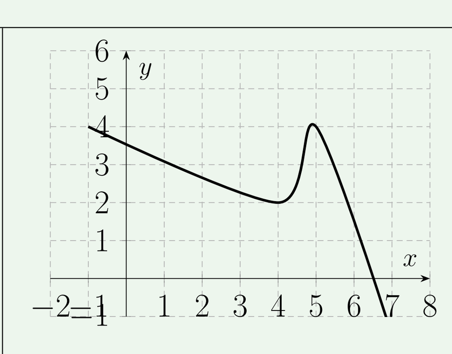
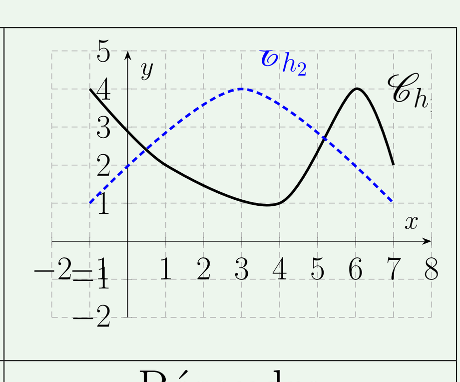
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$:	Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$:	Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$:

IV - Résolution graphique d'inéquations

MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]a;b[$	Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]-\infty;a] \cup [b;+\infty[$	Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty;a[\cup]b;c[$

EXEMPLES

Résoudre $f(x) \leq 1$:	Résoudre $g(x) > 1$:	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$:

V - Etude du signe

MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.
Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

VI - Parité d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0 ($I = [-a;a]$, $]-a;a[$ ou $\mathbb{R}$). On dit que f est :

— **paire** lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = f(x)$.

— **impaire** lorsque pour tout $x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLES

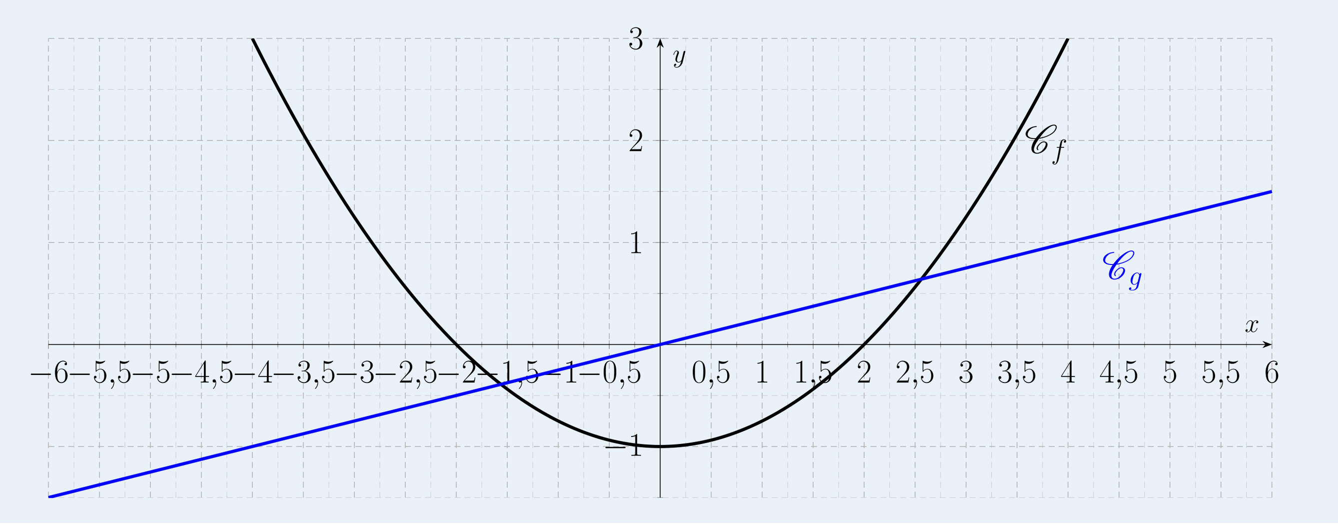
— La fonction $\begin{array}{rccl} f: & [-2;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$ est paire car pour tout $x \in [-2;2]$, $f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$.

— La fonction $\begin{array}{rccl} g: &]3;3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 0.5x \end{array}$ est impaire.

PROPRIÉTÉS

— f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $(0;0)$.



REMARQUE

Une fonction peut être ni paire ni impaire !

Proportions, variations et pourcentages

I - Proportions et pourcentages

1. Proportions

PROPOSITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On note respectivement n_A et n_E le nombre d'éléments de A et E. La proportion d'éléments de A dans est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

EXEMPLE

Dans une classe de Seconde comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$.

REMARQUE

p est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

2. Proportions de proportions

PROPOSITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, $A \subset E$ et $B \subset A$. On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de B dans A. Alors la proportion de B dans E est égale à $p_1 \times p_2$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$.

II - Evolutions et pourcentages

1. Taux d'évolution

DÉFINITION

On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1.

— La variation absolue est $V_1 - V_0$.

— La variation relative ou taux d'évolution est $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

REMARQUE

— Si $t > 0$, il s'agit d'une augmentation.

— Si $t < 0$, il s'agit d'une diminution.

EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de $180 - 150 = 30$ euros et son taux d'évolution est $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$. Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

PROPRIÉTÉ

Pour une valeur V_0 qui subit une évolution d'un taux t, elle devient $(1+t) \times V_0$.
$1 + t$ est appelé coefficient multiplicateur (noté CM).

EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à $\left(1 + \frac{20}{100}\right) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$ euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à $(1 - 0.2) \times 30 = 24$ euros.

2. Evolution réciproque

DÉFINITION

Une valeur V_0 subit une évolution de taux t pour passer à V_1. On appelle évolution réciproque le taux t' d'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0.

PROPOSITION

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM"] & V_1 \arrow[l, bend left, "\times CM' = \frac{1}{CM}"] \end{tikzcd}$$

EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$, ce qui correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors $4.56 \times 0.877 = 4$ millions d'habitants.

$$\begin{tikzcd} V_0 = 4 \arrow[r, bend left, "\times 1.14", "+14\%"'] & V_1 = 4.56 \arrow[l, bend left, "\times \frac{1}{1.14} = 0.877", "-12.3\%"'] \end{tikzcd}$$

3. Evolutions successives

PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur V_0 non nulle à la valeur V_1, et une seconde fait passer la valeur V_1 à la valeur V_2, alors l'évolution globale fait passer la valeur V_0 à la valeur V_2. Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "\times CM = CM_1 \times CM_2"'] & V_1 \arrow[r, bend left, "\times CM_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une nouvelle hausse de 10%. Le coefficient multiplicateur global est donc $\left(1 + \frac{8}{100}\right) \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$. Le prix a donc augmenté de 18.8% et pas de 18% !

Fonctions affines

I - Généralités

DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$ et $h : x \mapsto 0{,}1x - 7{,}2$ sont des fonctions affines.

CAS PARTICULIERS

— $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.

— $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

II - Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées.

VOCABULAIRE

Dans un repère, soit d la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :

— a est le **coefficient directeur** de d.

— b est **l'ordonnée à l'origine** de d.

— $y = ax + b$ est l'équation réduite de d.

PROPOSITION

Lorsque a s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

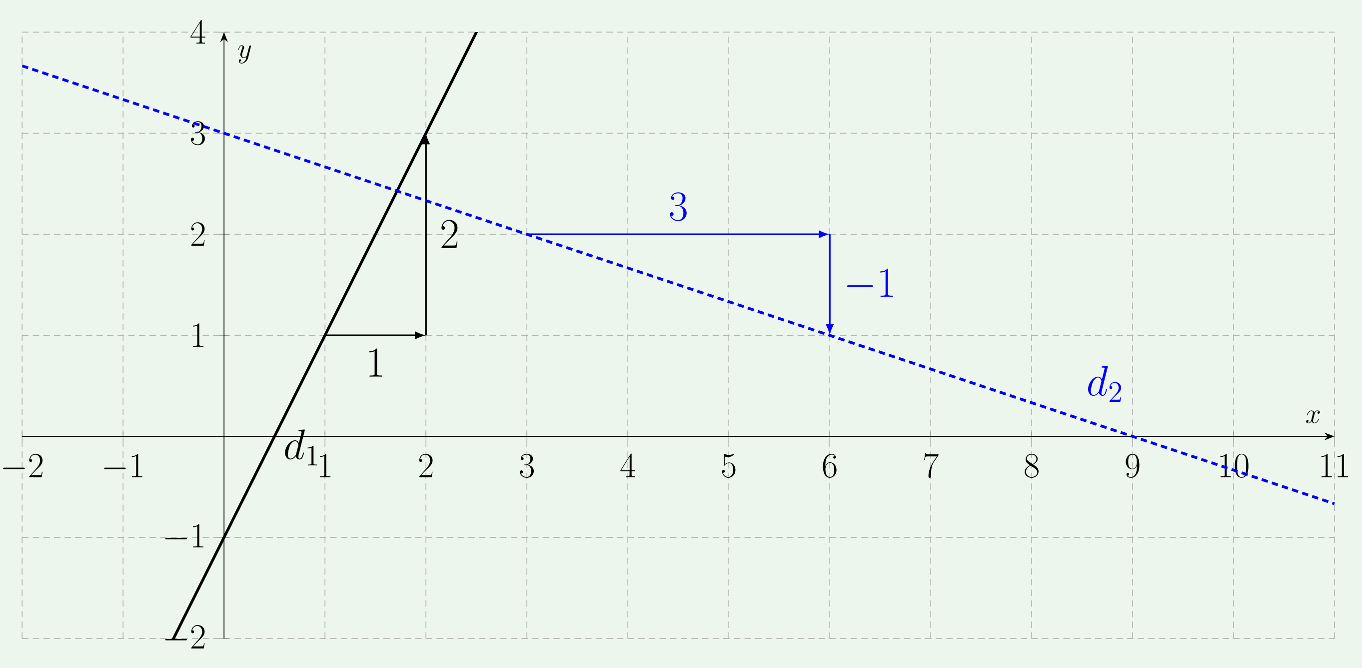
$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

EXEMPLES

Construisons les droites d_1 et d_2 d'équations réduites respectives $y = 2x - 1$ et $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

— Pour d_1 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est -1, et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).

— Pour d_2 : L'ordonnée à l'origine de d_1 est 3, et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descend d'un.



III - Recherche algébrique de a et b

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine et x_1 et $x_2 \in \mathbb{R}$, avec $x_1 \neq x_2$. Alors

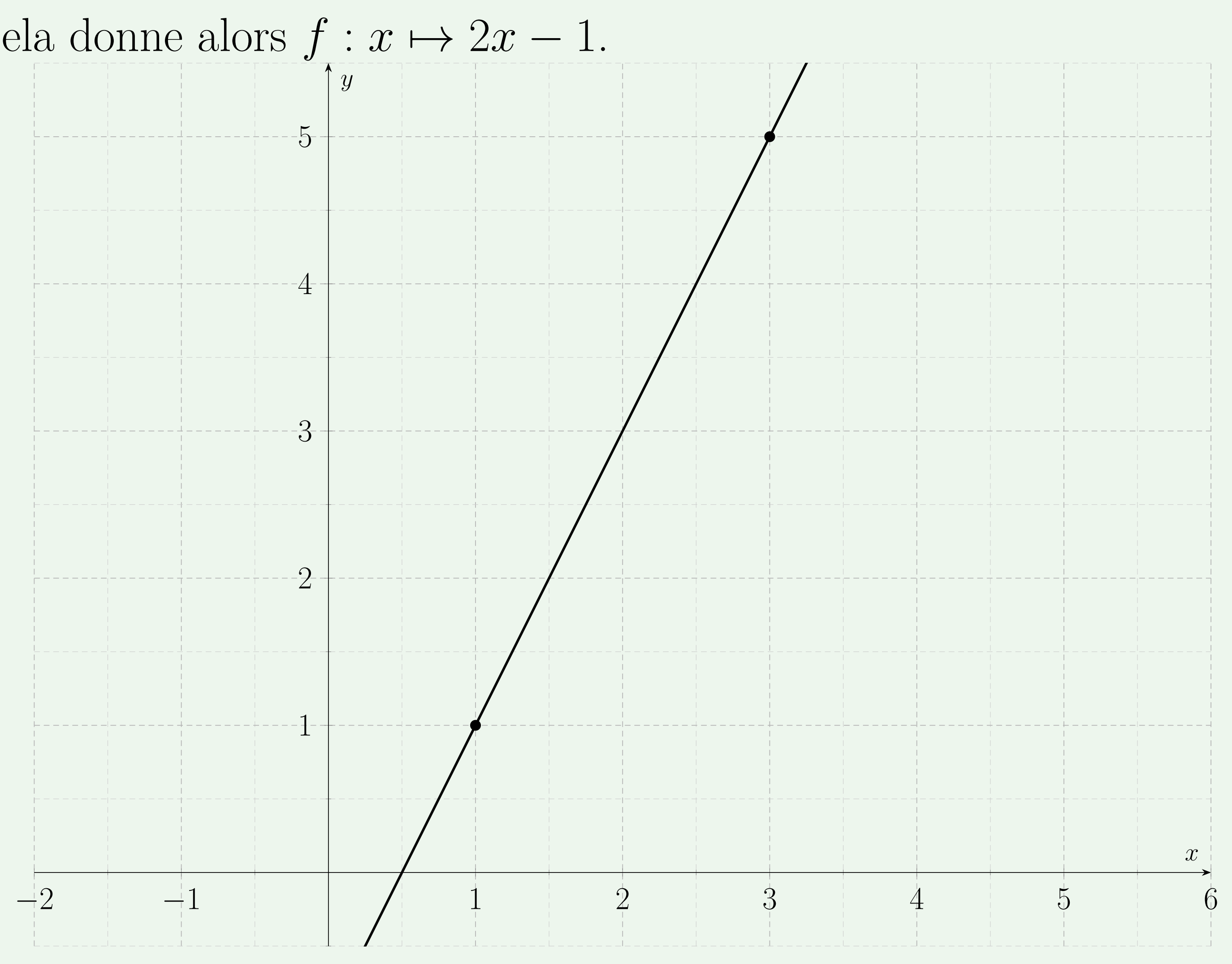
$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

EXEMPLE

On suppose que $f(1) = 1$ et $f(3) = 5$.
Alors $a = \dfrac{5-1}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2$.
On a alors $f : x \mapsto 2x + b$. On sait de plus que $f(3) = 2 \times 3 + b$ et $f(3) = 5$ donc :

$$\begin{aligned} 5 &= 2 \times 3 + b \\ \text{soit donc } 5 &= 6 + b \\ \text{et alors } 5 - 6 &= b \\ \text{puis } b &= -1 \end{aligned}$$

Cela donne alors $f : x \mapsto 2x - 1$.



IV - Tableaux de signe

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si $ax + b = 0$ ssi $ax = -b$ ssi $x = -\frac{b}{a}$. Le tableau de signes de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$. En décomposant f, on obtient alors le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \leq 0$ est

$$S =]-\infty; -2] \cup \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$$

Pour $g : x \mapsto \dfrac{x+2}{4-5x}$, le tableau de signes obtenu est presque identique :

x	$-\infty$		-2		$\frac{4}{5}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$4-5x$		$+$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque $x = \frac{4}{5}$. Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de g.

Variations de fonctions

I - Etude des variations

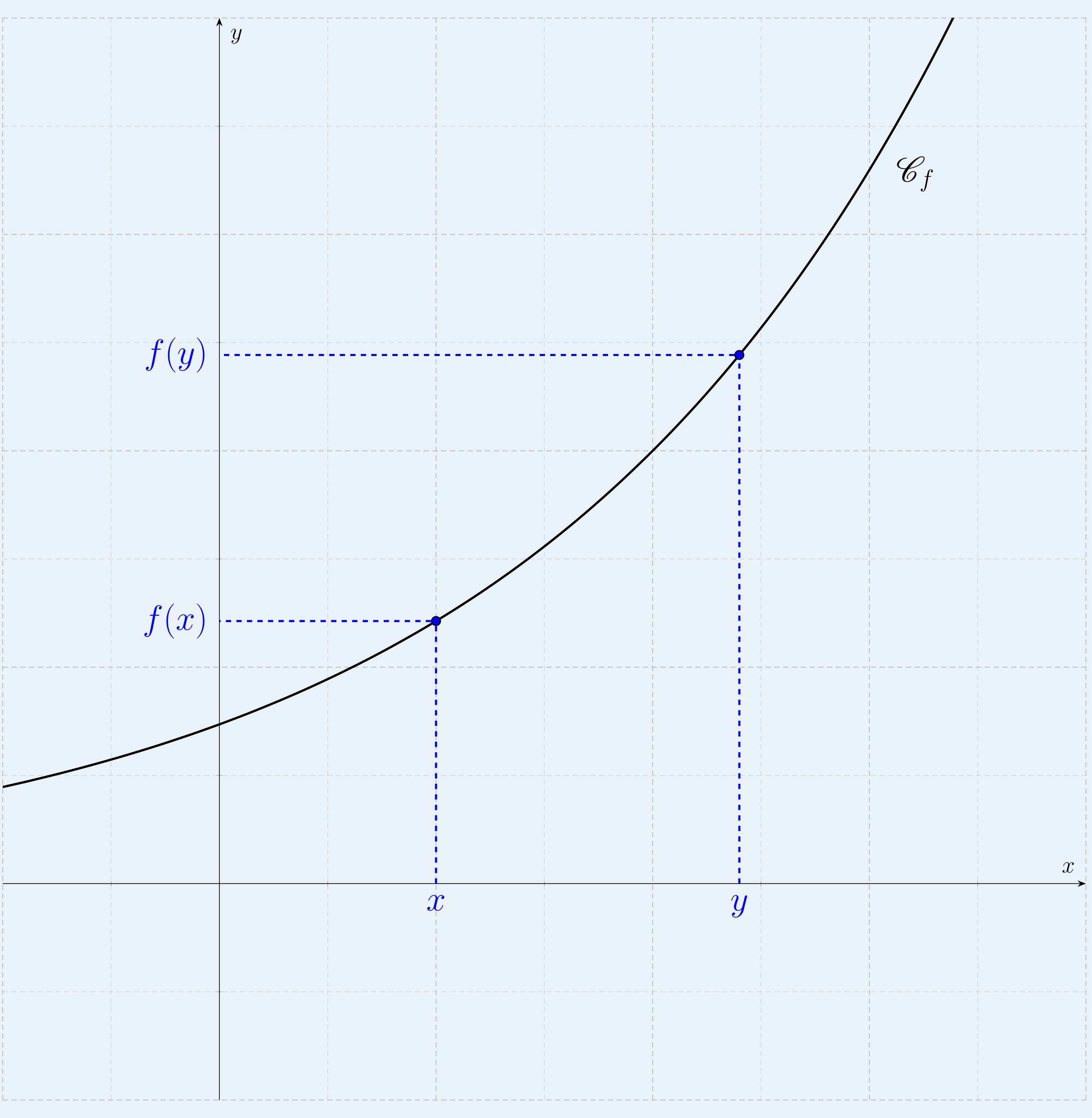
On se donne dans cette partie f une fonction définie sur un intervalle I.

DÉFINITIONS

On dit que f est croissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images augmentent aussi. L'ordre est conservé :

$$\text{Pour } x,y \in I, \text{ si } x \leq y \text{ alors } f(x) \leq f(y).$$

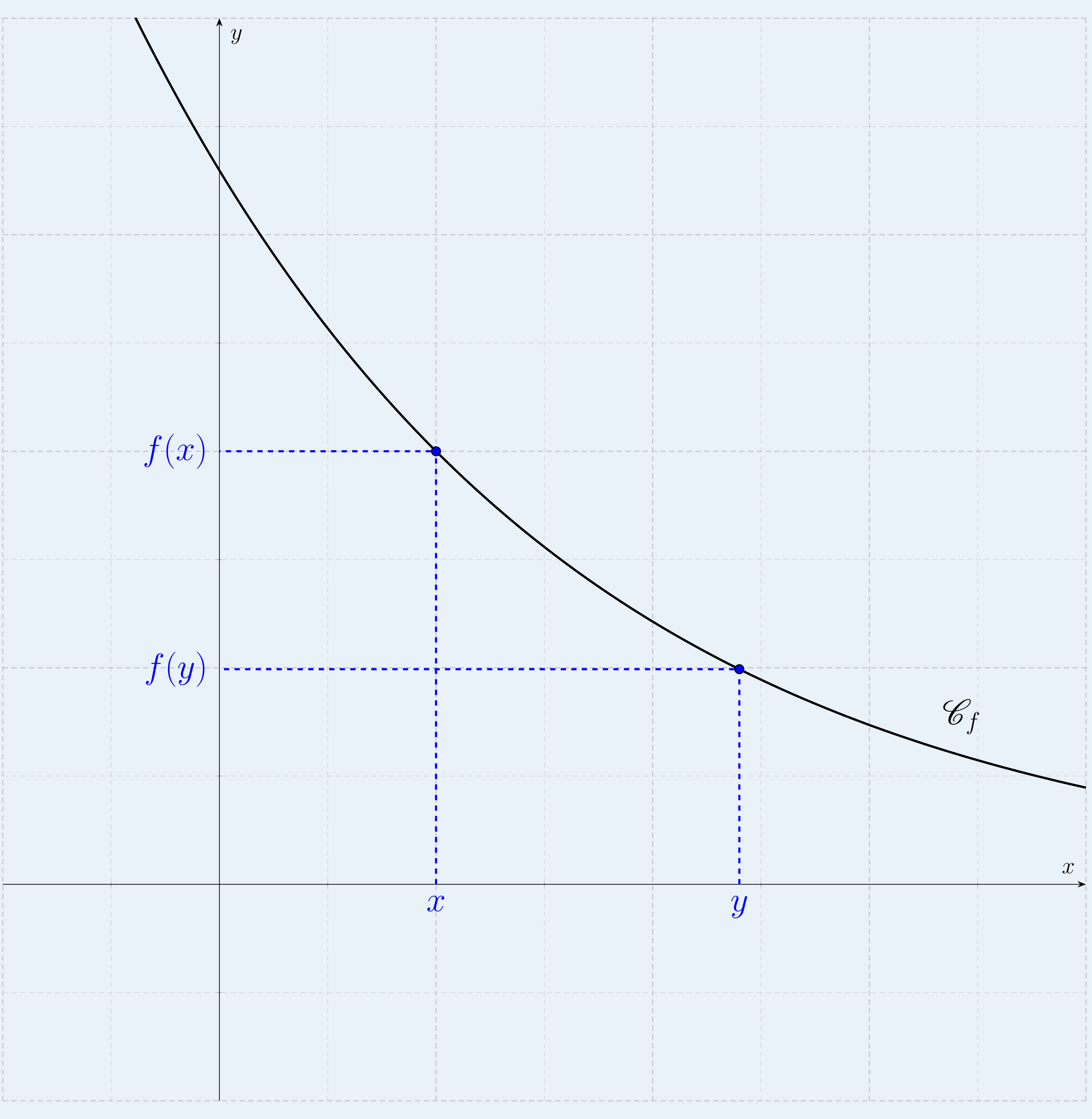
Graphiquement, la courbe de f "monte" : ↗



On dit que f est décroissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images diminuent. L'ordre n'est pas conservé :

$$\text{Pour } x,y \in I, \text{ si } x \leq y \text{ alors } f(x) \geq f(y)$$

Graphiquement,la courbe de f "descend" : ↘



EXEMPLE

On se donne la fonction f, définie sur $[1;7]$ et représentée ci-contre.

— f est croissante sur $[1;4]$ puis décroissante sur $[4;7]$.

— f est croissante sur $[1;4]$ et $2 \leq 3$ donc $f(2) \leq f(3)$.

— f est décroissante sur $[4;7]$ et $5 \leq 6$ donc $f(5) \geq f(6)$.

DÉFINITIONS

— On dit que f est constante sur I si elle prend toujours la même valeur :

$$\text{Pour } x,y \in I, \text{ on a } f(x) = f(y).$$

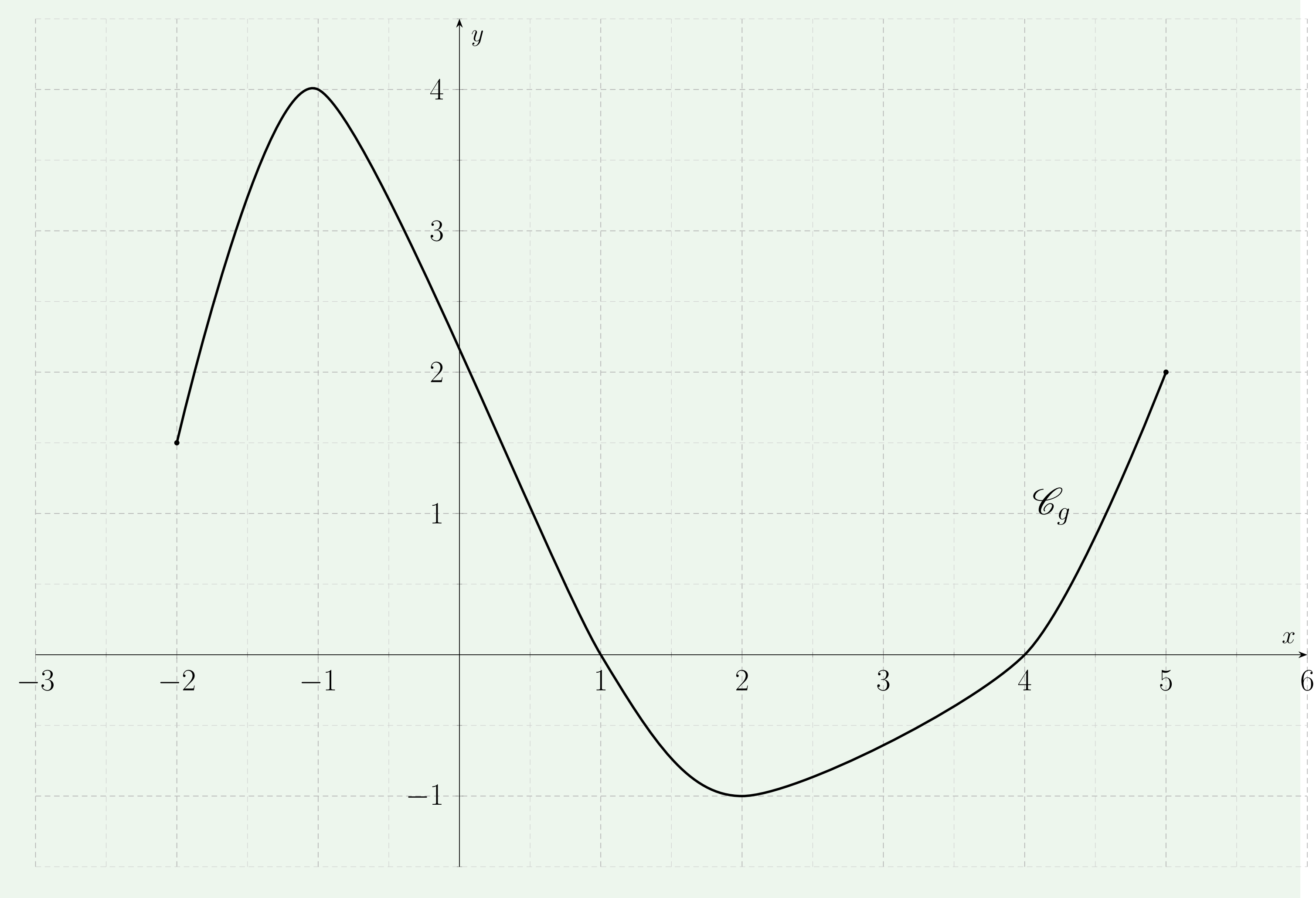
— On dit que f est monotone sur I si elle est soit croissante, soit décroissante sur I (son sens de variation ne change pas).

II - Tableaux de variations

MÉTHODE

Dresser le tableau de variations de f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

EXEMPLE



On se donne la fonction g, définie sur $[-2;5]$ et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de g sous forme du tableau de variations suivant :

x	-2		-1		2		5
$g(x)$	1.5	↗	4	↘	-1	↗	2

III - Extrémas d'une fonction sur un inte

DÉFINITIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

— On dit que f admet un maximum M en a sur I si pour tout $x \in I, f(x) \leq M = f(a)$.

— On dit que f admet un minimum m en b sur I si pour tout $x \in I, f(x) \geq m = f(b)$.

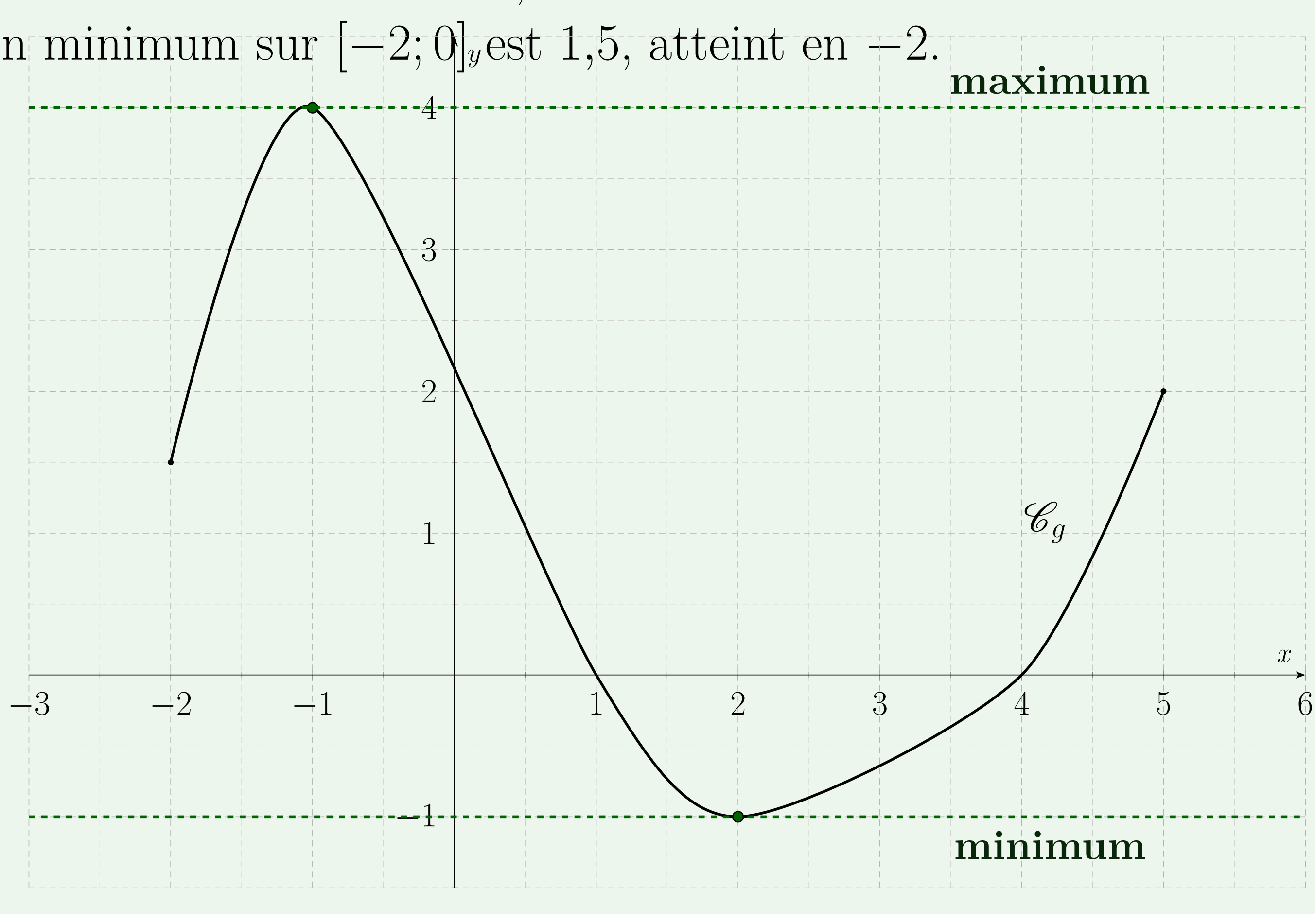
REMARQUE

Le maximum d'une fonction correspond au point le plus "haut" de sa courbe représentative, et le minimum au point le plus "bas".

EXEMPLE

On reprend la fonction g de l'exemple précédent.

Son maximum sur I est 4, atteint en -1.
Son minimum sur I est -1, atteint en 2.
Son minimum sur $[-2;0]$ est 1,5, atteint en -2.



Repères du plan et coordonnées

I - Généralités sur les repères

DÉFINITION

Soient O,I,J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Un repère du plan est un triplet $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$. On dit alors que :

— O est l'origine du repère

— (OI) est l'axe des abscisses

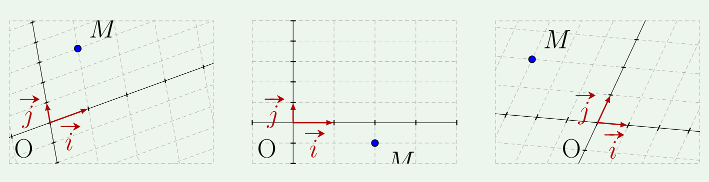
— (OJ) est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ pour la suite du cours.

PROPRIÉTÉ

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de coordonnées $(x; y)$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M.

EXEMPLES



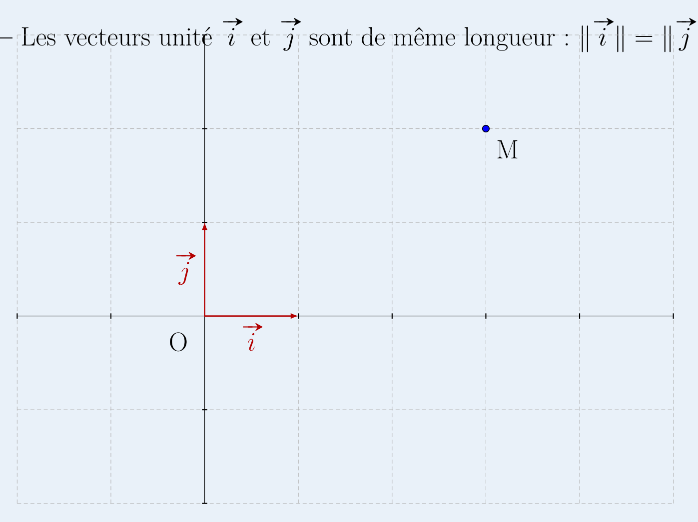
$M(1;3)$ $M(2;-1)$ $M(-3;2)$

DÉFINITION

On dit que le repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ est orthonormé si :

— Ses axes sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$

— Les vecteurs unité $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de même longueur : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\|$

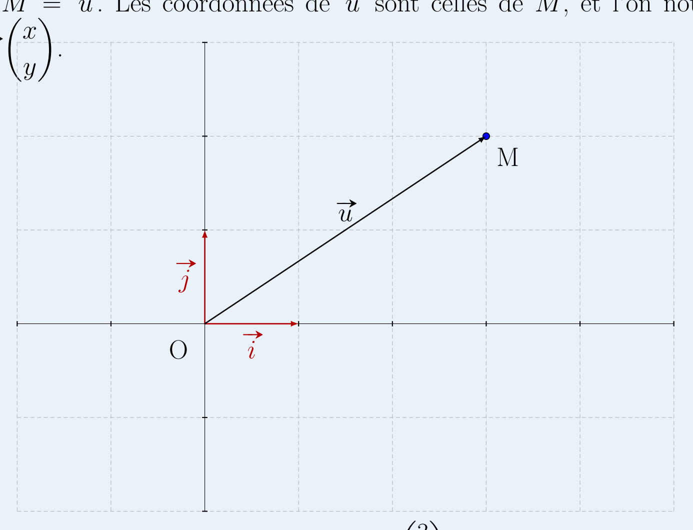


$M(3;2)$

II - Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On se donne le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont celles de M, et l'on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

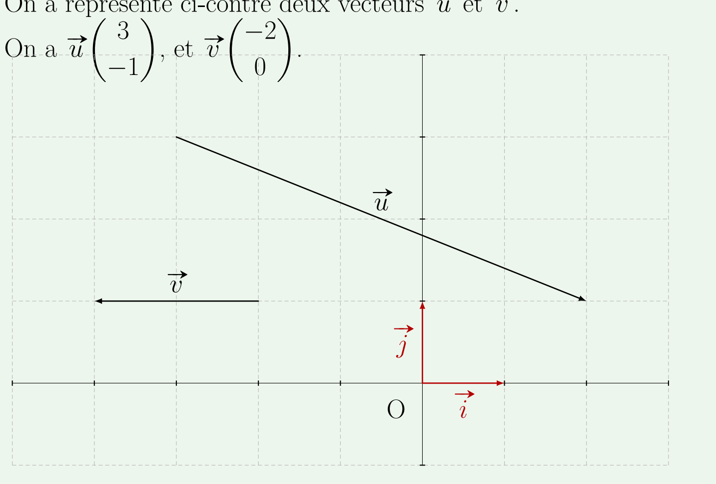


$M(3;2)$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

► On écrit $\vec{u}\binom{3}{2}$ et pas $\vec{u} = \binom{3}{2}$!

EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



PROPOSITION

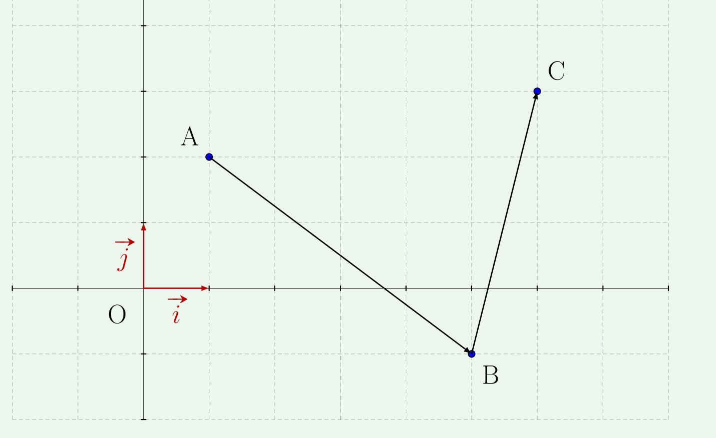
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

On se donne $A(1;2)$, $B(5;-1)$ et $C(6{,}3)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De même, on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

— Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

— Les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors on a :

— $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— $3\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \end{pmatrix}$ d'où $3\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

— $(2\vec{u} - 5\vec{v})\begin{pmatrix} 2 \times 1 - 5 \times 2 \\ 2 \times 3 - 5 \times (-1) \end{pmatrix}$ d'où $(2\vec{u} - 5\vec{v})\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

III - Calculs de distances et de milieux

1. Milieu d'un segment

PROPOSITION

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. On se donne de plus I le milieu de $[AB]$. Alors les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{x_A + x_B}{2}; \dfrac{y_A + y_B}{2}\right)$.

REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

EXEMPLE

Soient $A(1;7)$, $B(6;-5)$ et I le milieu de $[AB]$. Alors on a $I\left(\frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2}\right)$ d'où $I\left(\frac{7}{2}; \frac{2}{2}\right)$, et enfin $I(3{,}5; 1)$.

2. Normes et distances

PROPOSITION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la norme de $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

COROLLAIRE

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, dont les coordonnées sont exprimées dans un repère orthonormé. Alors la distance entre A et B vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Soient $A(1;7)$ et $B(6;-5)$. Alors
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(6-1)^2 + (-5-7)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

IV - Colinéarité

1. Définitions et caractérisations

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'ils ont la même direction, autrement dit s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

REMARQUE

Cela revient à dire que les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles.

EXEMPLE

On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2. Déterminant de deux vecteurs

DÉFINITION

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

EXEMPLE

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} -15 \\ 40 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}$. On a
$$\begin{aligned} \det(\vec{u}; \vec{v}) &= -15 \times (-24) - 9 \times 40 \\ &= 360 - 360 \\ &= 0 \end{aligned}$$

PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

EXEMPLE

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exemple précédent sont donc colinéaires. (On a en fait $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$).

3. Applications en géométrie

PROPRIÉTÉ

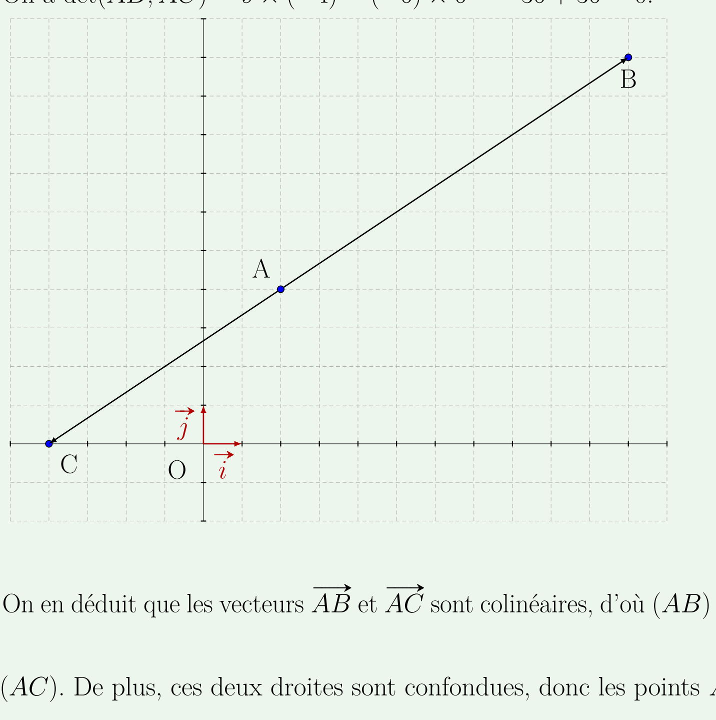
Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

EXEMPLE

On se donne les points $A(2;4)$, $B(11;10)$ et $C(-4;0)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

On a $\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times (-4) - (-6) \times 6 = -36 + 36 = 0$.



On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, d'où $(AB) \parallel (AC)$. De plus, ces deux droites sont confondues, donc les points A, B et C sont alignés.