Fonctions polynômiales de degré 2

PROGRAMME

— représentations graphiques des fonctions : $x \mapsto ax^2$,$x \mapsto ax^2 + b$, $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$
— axes de symétrie ;
— racines et signe d'un polynôme de degré 2 donné sous forme factorisée (le calcul des racines à l'aide du discriminant ne figure pas au programme).
— Compétences
  — Associer une parabole à une expression algébrique de degré 2
  — Déterminer des éléments caractéristiques de la fonction $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$: Signe, extremum, allure, axes de symétrie
  — Vérifier qu'une valeur conjecturée est racine d'un polynôme de degré 2
  — Savoir factoriser dans des cas simples une expression du second degré connaissant une racine.
  — Utiliser la forme factorisée d'un poly pour trouver ses racines et étudier son signe.
— déterminer le signe d'une expression factorisée du second degré
— résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une équation du type $x^2 = a$ avec $a \geq 0$.

I - Généralités

DÉFINITION

On appelle fonction polynômiale de degré 2 toute fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

EXEMPLES

$f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ et $h : x \mapsto 2 - 0{,}3x^2$ sont des fonctions polynômiales de degré 2.

► Fonctions polynômiales de degré 2 un peu lourd... On dira plutôt polynômes de degré 2 même si ce n'est techniquement pas tout à fait le même objet

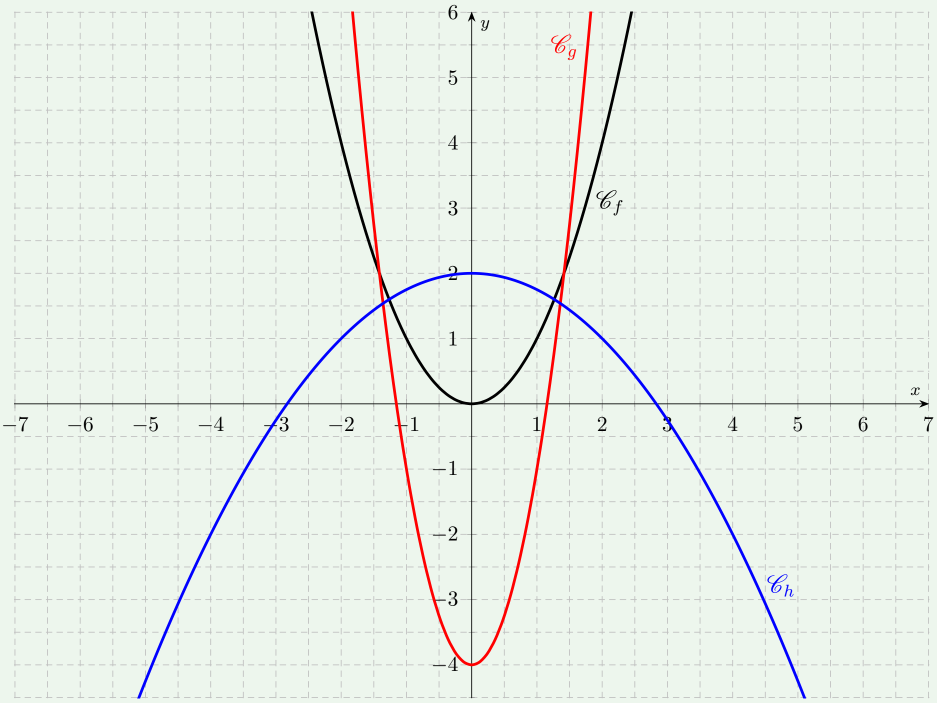
II - Fonctions $x \mapsto ax^2 + b$

► On s'intéresse maintenant à des cas plus simples. Les propositions suivantes sont généralisables.

PROPOSITION

La représentation graphique d'une fonction polynômiale du second degré est une parabole.

EXEMPLES



▶ Montrer sur geogebra l'effet obtenu en changeant a et b

REMARQUE

b est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer b décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

PROPRIÉTÉS

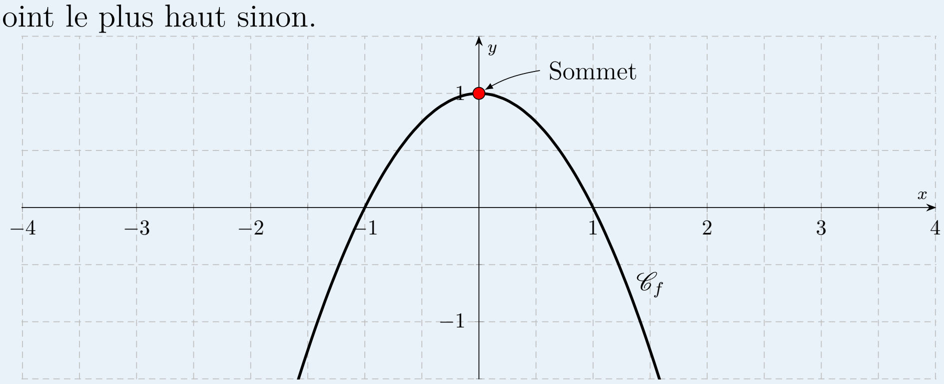
Soit $f : x \mapsto ax^2 + b$ avec $a \neq 0$.

— Si $a \geq 0$, f est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.

— Si $a \leq 0$, f est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.

DÉFINITION

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si $a > 0$, le point le plus haut sinon.



PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b$ avec $a \neq 0$.

— Les paraboles d'équation $y = ax^2 + b$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.

— Le sommet de la parabole associée est le point $(0; b)$.

▶ Exos 20,21,23 p120

MÉTHODE

Pour déterminer l'expression d'une fonction $f : x \mapsto ax^2+b$ à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord b en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine a en résolvant une équation.

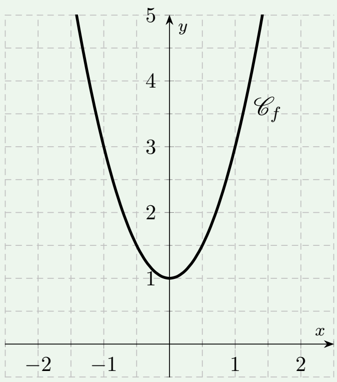
EXEMPLE

On a représenté $f : x \mapsto ax^2 + b$ sur le repère ci-contre.

On voit directement que $b = 1$, d'où $f : x \mapsto ax + 1$.

On se donne maintenant un point sur la courbe de f, par exemple $A(1; 3)$. Cela signifie que $f(1) = 3$, autrement dit $a \times 1 + 1 = 3$, soit donc $a + 1 = 3$, d'où $a = 2$.

On a alors $f : x \mapsto 2x^2 + 1$.



▶ Exo 22p121, prévoir un autre exo du type sur fiche

III - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

1. Généralités

PROPOSITION

Les fonctions du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des fonctions polynômiales du second degré.

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$

$$= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$$
$$= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2$$

Donc $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$ avec $b = -(ax_1 + ax_2)$ et $c = ax_1x_2$.

DÉFINITION

Soit f une fonction polynômiale de degré 2. On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.

REMARQUE

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $(a \neq 0)$, les racines de f sont x_1 et x_2.

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

EXEMPLE

Les racines de la fonction $f : x \mapsto -3(x-2)(x+4)$ sont 2 et -4.

PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$.

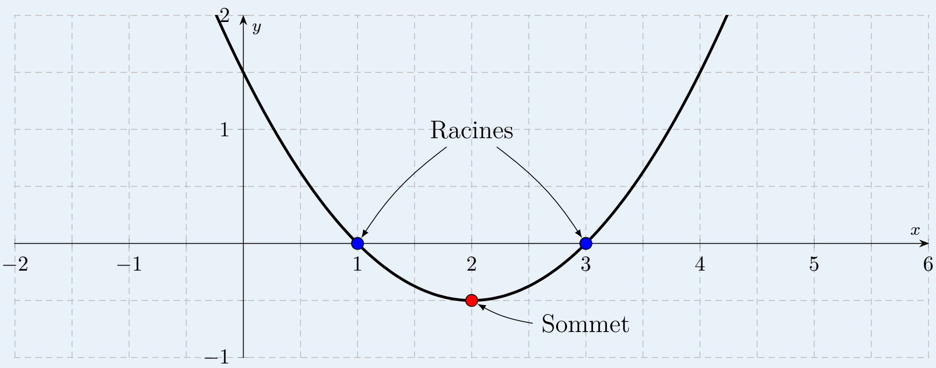
- On pose $s = \frac{x_1+x_2}{2}$. Le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(s, f(s))$.
- La parabole associée a pour axe de symétrie la droite parallèle a l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.
- On en déduit le tableau de variations de f :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		s		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(s)$	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		s		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(s)$	$\searrow$	$-\infty$



▶ Exos 26,27,29 p121

2. Factorisation

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b + c$. On souhaite retrouver l'écriture factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

MÉTHODE

Si l'on connait une racine x_1 de f, on peut retrouver l'écriture factorisée de f par identification.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. Cherchons d'abord une racine dite "évidente" de f.
On remarque que $f(1) = 0$ donc on peut prendre $x_1 = 1$.
On sait alors qu'on peut écrire $f(x) = a(x-1)(x-x_2)$ avec $a, x_2 \in \mathbb{R}$.
Développons cette expression : $f(x) = a\left(x^2 - x \times x_2 - x + x_2\right)$

$$= ax^2 + (a - ax_2)x + ax_2$$

On a de plus $f(x) = 1x^2 - 3x + 2$.

On a alors $\begin{cases} a = 1 \\ a - ax_2 = -3 \\ ax_2 = 2 \end{cases}$ donc $a = 1$ et $ax_2 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$.

On en déduit que $f(x) = 1(x-1)(x-2) = (x-1)(x-2)$.

REMARQUE

Le a qui apparait dans la forme développée et factorisée est le même !

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$. On a $a = 3$ donc la forme développée de f sera de la forme $f(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$.

- Prévoir exos de factorisation
- Exo 28 p121

3. Etude du signe

REMARQUE

Une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ peut être vue comme un produit d'un nombre réel et de deux fonctions affines.

MÉTHODE

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$, on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 0{,}5(x-1)(x+3)$. Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines $x \mapsto x - 1$ et $x \mapsto x + 3$. On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :

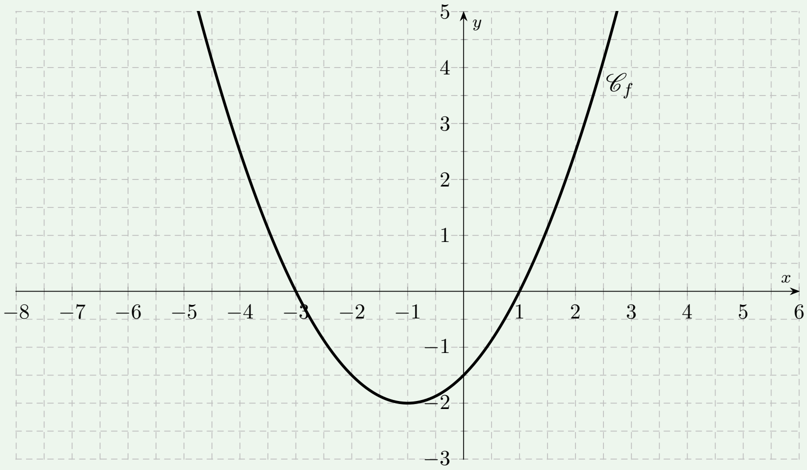
x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut vérifier que l'on obtient le même tableau par lecture graphique.



► Prévoir exos