

# CONDITIONNEMENT

## PROGRAMME

- Croisement de deux variables catégorielles
  - Tableau croisé d'effectifs
  - Fréquence conditionnelle, fréquence marginale
  - Capacités
    - Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales
    - Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles
- Probabilités conditionnelles
  - Notation  $\mathbb{P}_A(B)$
  - Capacité : Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les événements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs

## I - Rappels de vocabulaire ensembliste

### DÉFINITIONS

On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- **L'intersection** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cap B$  ( $A$  inter  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$ .
- **L'union** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cup B$  ( $A$  union  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux.
- **Le complémentaire** de  $A$ , noté  $\overline{A}$  ( $A$  barre) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .

### EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note  $E$  l'ensemble de tout les chiens,  $A$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des chiens au poil blanc,  $B$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des chiens au poil beige.

- $A \cap B$  désigne l'ensemble des chiens au poil blanc et beige
- $A \cup B$  désigne l'ensemble des chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.
- $\overline{A}$  désigne l'ensemble des chiens au poil autre que blanc.

## II - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

### EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. Les élèves ont le choix entre l'allemand ou l'espagnol. On sait que 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note  $F$  l'ensemble des filles,  $G$  l'ensemble des garçons et  $A$  l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

- Le nombre d'éléments de  $F \cap A$  (c'est-à-dire le nombre de filles ayant choisi l'allemand) est 3.
- Le nombre d'éléments de  $G \cap \overline{A}$  (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
- La fréquence des filles dans cette classe est  $\frac{23}{35} \simeq 0,66 = 66\%$ . On parle de **fréquence marginale**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est  $\frac{7}{35} = 0,2 = 20\%$ .
- La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est  $\frac{20}{25} = 0,8 = 80\%$ . On parle de **fréquence conditionnelle**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est  $\frac{5}{12} \simeq 0,42 = 42\%$ .

### PROPOSITION

On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- La fréquence marginale de  $A$  dans  $E$  vaut  $\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$ .
- La fréquence conditionnelle de  $A$  dans  $B$  vaut  $\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$ .

► Cas favorables / Cas totaux

- Exos 16 p174, 24 p176
- Exos 17,18 p175, 26 p176
- Exos 35,36 p181
- Sujet D p184
- Exos p179

## III - Rappels de probabilités

### DÉFINITIONS

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
- On appelle l'univers, noté  $\Omega$  (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Un évènement  $A$  est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de  $\Omega$ . On appelle

évènement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de  $\Omega$  (On les appelle des singletons).

- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est l'**évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble  $\Omega$  est l'**évènement certain** : Il est toujours réalisé.
- On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
- On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ .
- Pour tout évènement  $A$  d'une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

## PROPRIÉTÉS

- Soit  $A$  un évènement. Alors  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
- Soient  $A$  et  $B$  deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

► Schéma à faire

## IV - Probabilités conditionnelles

► De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, on peut définir des probabilités conditionnelles.

### DÉFINITION

Soient  $A$  et  $B$  deux événements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . On note  $\mathbb{P}_A(B)$  la probabilité de  $B$  en sachant que  $A$  est réalisé, aussi appelée probabilité de  $B$  sachant  $A$ . On a de plus  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ .

### REMARQUE

Dans une situation d'**équiprobabilité**, on a  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$ .

► Cas favorables / Cas totaux

► On utilisera aussi des tableaux pour trouver des probabilités conditionnelles.

## EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs. On considère alors les évènements  $C$  : « L'élève pratique une activité culturelle » et  $S$  : « L'élève pratique une activité sportive ». On a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive ( $S$ )	Pas d'activité sportive ( $\bar{S}$ )	Total
Activité culturelle ( $C$ )	402	591	993
Pas d'activité culturelle ( $\bar{C}$ )	315	192	507
Total	717	783	1500

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle est  $\mathbb{P}(C) = \frac{993}{1500} = 0,662 = 66,2\%$ .
2. La probabilité qu'un élève pratique les deux types d'activité est  $\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{402}{1500} = 0,268 = 26,8\%$ .
3. La probabilité qu'un élève fasse du sport en sachant qu'il pratique une activité culturelle est  $\mathbb{P}_C(S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{402}{993} = 0,405 = 40,5\%$ .
4. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle en sachant qu'il ne fait pas de sport est  $\mathbb{P}_{\bar{S}}(C) = \frac{\text{Card}(\bar{S} \cap C)}{\text{Card}(\bar{S})} = \frac{591}{783} = 0,755 = 75,5\%$ .

- Exos 22,23 p175, 31 p177
- Exos 37,38 p181
- Exos 32,33 p178
- Sujets B,C p184
- Exos 39,40,40 p186