Repères du plan et coordonnées

PROGRAMME

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ en fonction de celles de A et B.
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Capacités :
  - Représenter un vecteur dont on connait les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
  - Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit de vecteur par un réel.
  - Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
  - Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
  - Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- Démonstration : Colinéarité $\Leftrightarrow$ déterminant nul

I - Généralités sur les repères

DÉFINITION

Soient O,I,J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Un repère du plan est un triplet $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$. On dit alors que :

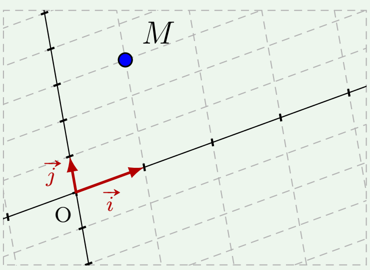
- O est l'origine du repère
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère $\left(\text{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ pour la suite du cours.

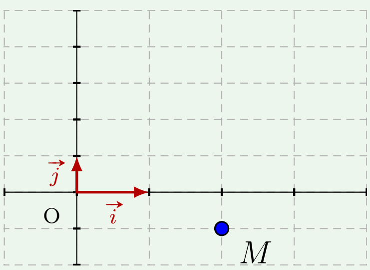
PROPRIÉTÉ

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de coordonnées $(x; y)$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M.

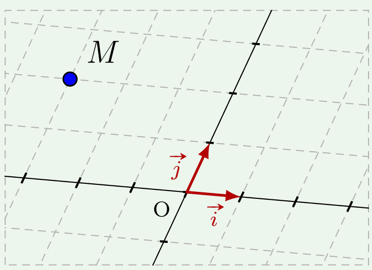
EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



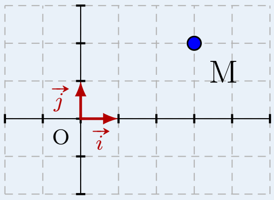
$M(-3; 2)$

▶ On écrit $M(1; 3)$ et pas $M = (1; 3)$!

DÉFINITION

On dit que le repère $\left(\mathrm{O}; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ est orthonormé si :

- Ses axes sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$
- Les vecteurs unité $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont pour longueur 1 : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

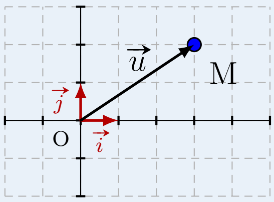


$M(3;2)$

II - Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On se donne le point $M(x;y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de $\vec{u}$ sont celles de M, et l'on note $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

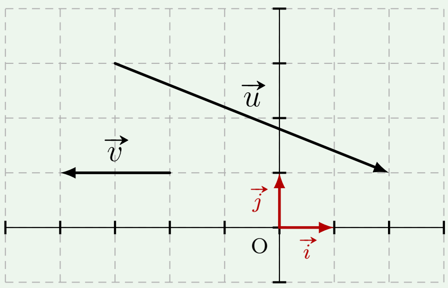


$M(3;2)$ donc $\vec{u}\binom{3}{2}$

▶ On écrit $\vec{u}\binom{3}{2}$ et pas $\vec{u} = \binom{3}{2}$!

EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
On a $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\vec{v}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



▶ Exo 1

PROPOSITION

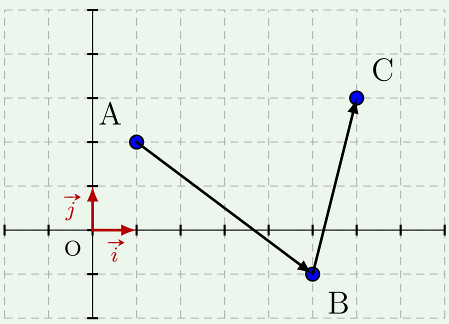
Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points du plan. Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

On se donne $A(1;2)$, $B(5;-1)$ et $C(6{,}3)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5-1 \\ -1-2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De même, on a $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 6-5 \\ 3-(-1) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



▶ Exos 2,3,4 (par deux),(5),6

PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

— Les coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.

— Les coordonnées de $\lambda\vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors on a :

— $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

— $3\vec{v}\begin{pmatrix} 3\times 2 \\ 3\times(-1) \end{pmatrix}$ d'où $3\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.

— $(2\vec{u}-5\vec{v})\begin{pmatrix} 2\times 1-5\times 2 \\ 2\times 3-5\times(-1) \end{pmatrix}$ d'où $(2\vec{u}-5\vec{v})\begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

► Exo 7,(8)

III - Calculs de distances et de milieux

1. Milieu d'un segment

PROPOSITION

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. On se donne de plus I le milieu de $[AB]$. Alors les coordonnées de I sont $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

EXEMPLE

Soient $A(1;7)$, $B(6;-5)$ et I le milieu de $[AB]$. Alors on a $I\left(\frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2}\right)$ d'où $I\left(\frac{7}{2}; \frac{2}{2}\right)$, et enfin $I(3{,}5; 1)$.

► Exo 9,(14,15)

2. Normes et distances

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé.

PROPOSITION

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Alors la norme de $\vec{u}$ est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

COROLLAIRE

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors la distance entre A et B vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Soient $A(1; 7)$ et $B(6; -5)$. Alors
$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(6-1)^2 + (-5-7)^2} \\ &= \sqrt{5^2 + (-12)^2} \\ &= \sqrt{25 + 144} \\ &= \sqrt{169} \\ &= 13 \end{aligned}$$

APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

EXEMPLE

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(3; 5)$ de rayon 3, et le point $M(5; 7)$. On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(5-3)^2 + (7-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \simeq 2{,}83 \end{aligned}$$

Comme $AM \neq 3$, M n'appartient pas au cercle $\mathcal{C}$.

▶ Exos 10,11,12,(13)

IV - Colinéarité

1. Définitions et caractérisations

DÉFINITION

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Dans le cas où ils sont non nuls, cela revient à dire qu'ils ont la même direction.

REMARQUE

Deux vecteurs sont colinéaire si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

EXEMPLES

— On se donne $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\10\end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

— On prend maintenant $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\11\end{pmatrix}$ et $\vec{b}\begin{pmatrix}-7\\-20\end{pmatrix}$. On a $11 \times (-7) = -77$ et $4 \times (-20) = -80$. Comme $-77 \neq -80$, les coordonnées de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas proportionnelles donc $\vec{a}$ et $\vec{b}$ ne sont pas colinéaires.

2. Déterminant de deux vecteurs

DÉFINITION

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel :

$$\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = xy' - x'y$$

EXEMPLE

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}-15\\40\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-24\end{pmatrix}$. On a $\det(\vec{u}\,;\vec{v}) = -15 \times (-24) - 9 \times 40$

$$= 360 - 360$$

$$= 0$$

► Exo 16

PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

EXEMPLE

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'exemple précédent sont donc colinéaires. (On a en fait $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$).

► Exos 17,18

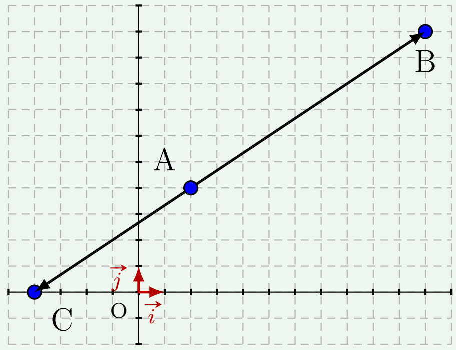
3. Applications en géométrie

PROPRIÉTÉS

— Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

— Trois points A,B,C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

EXEMPLE



On se donne les points $A(2;4)$, $B(11;10)$ et $C(-4;0)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$.

On a $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 9\times(-4)-(-6)\times 6 = -36+36 = 0$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, d'où $(AB) \parallel (AC)$, et les points A, B et C sont alignés.

► Exos 19,20