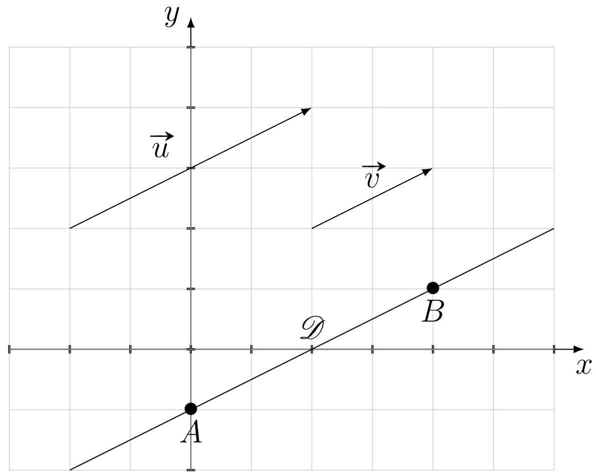
Droites du plan

I - Equation cartésienne de droite et vecteur directeur

On se place dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ du plan.

DÉFINITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points de $\mathscr{D}$.
On appelle **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite $\mathscr{D}$.

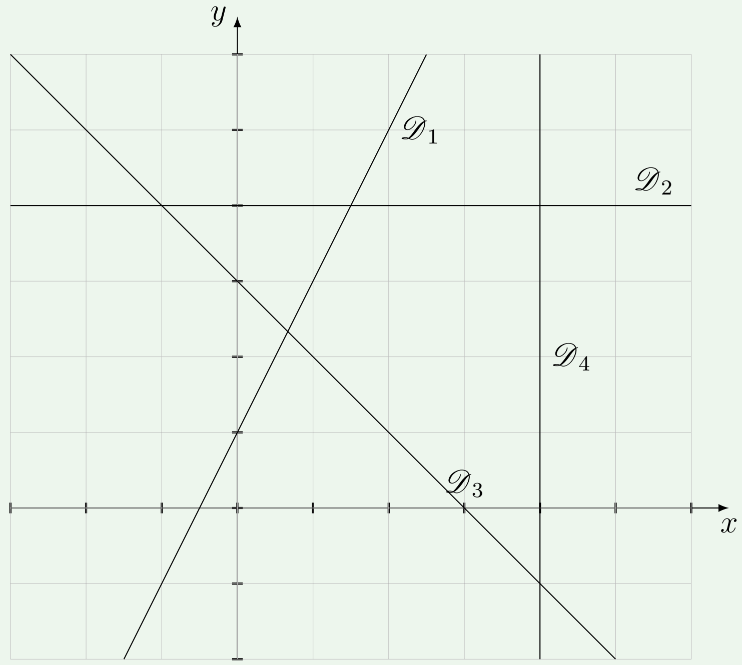


REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : ici les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

EXEMPLE

Donner **des** vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$,$\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.



PROPOSITION

Une équation cartésienne de la droite passant par le point $A(x_A; y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$.

Un point $M(x; y)$ appartient à cette droite ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x - x_A\\y - y_A\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Il faut donc que $det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$. Cela donne alors :

$$det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = a(x - x_A) - (-b)(y - y_A) = 0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$$

En posant $c = -ax_A - by_A$, on trouve bien la forme voulue : $\boxed{ax + by + c = 0}$.

COROLLAIRE

Si les coordonnées $(x; y)$ d'un point M vérifient l'équation $ax + by + c = 0$, alors M appartient à la droite dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$.

EXEMPLES

— Soit $\mathscr{D}_1$ la droite passant par le point $A(3; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

On sait alors qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est $5x + y + c = 0$ où c reste à trouver.

De plus, en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on obtient :

$$\begin{aligned} 5 \times 3 + 1 + c &= 0 \\ 16 + c &= 0 \\ c &= -16 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est donc $5x + y - 16 = 0$.

— Soit $\mathscr{D}_2$ passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.
$\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}-4\\-6\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$. On obtient alors l'équation $-6x + 4y + c = 0$.
Pour trouver c, on remplace x et y par les coordonnées de A ou B. Avec A, cela donne :

$$\begin{aligned} -6 \times 5 + 4 \times 3 + c &= 0 \\ -30 + 12 + c &= 0 \\ c &= 18 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$ est donc $-6x+4y+18 = 0$. A noter que l'on peut simplifier cette équation pour obtenir $-3x + 2y + 9 = 0$.

II - Systèmes de deux équations à deux inconnus

Résoudre un système à deux inconnues , c'est trouver le ou les couples $(x;y)$ qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

EXEMPLE

Le couple $(2;3)$ vérifie le système d'équations $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

En effet, en remplaçant x et y par 2 et 3, on trouve $\begin{cases} 5 \times 2 - 2 \times 3 = 10 - 6 = 4 \\ -2 + 3 = 1 \end{cases}$

1. Résolution graphique

On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.
L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

EXEMPLE

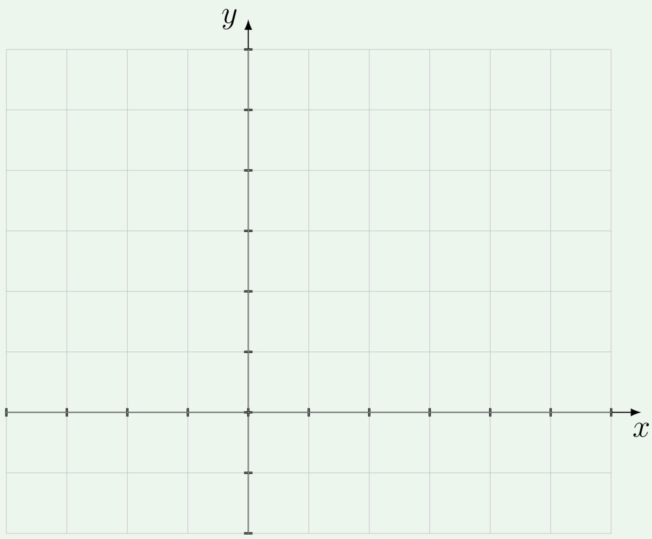
On reprend le système précédent :

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$

Après avoir tracé les des deux droites

$$\mathscr{D}_1 : 5x - 2y - 4 = 0$$
$$\mathscr{D}_2 : -x + y - 1 = 0$$

On constate que leur point d'intersection a pour coordonnées $(2;3)$, ce qui correspond à la solution testée dans l'exemple précédent.



2. Résolution algébrique

a) Méthode par combinaison linéaire

Le but est de faire des opérations entre les lignes pour faire disparaitre des inconnues.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (L_1) \\ 2x + y = -1 & (L_2) \end{cases}$

On voit que les deux lignes contiennent le terme $2x$. On peut donc l'annuler en soustrayant la première ligne à la seconde ligne :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4y = -10 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_2} \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{On remplace } y} \begin{cases} 2x - 7{,}5 = 9 \\ y = -2{,}5 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_1} \begin{cases} 2x = 1{,}5 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}75 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

b) Méthode par substitution

Le but est d'exprimer une variable en fonction d'une autre pour pouvoir l'éliminer dans une autre ligne.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 6x - 7y = 1 & (L_1) \\ x - 3y = 2 & (L_2) \end{cases}$

On va isoler x dans la seconde ligne pour le « réinjecter » dans la première.

$$\begin{cases}6x-7y=1\\x-3y=2\end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On isole } x} \begin{cases}6x-7y=1\\x=2+3y\end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On réinjecte}} \begin{cases}6(2+3y)-7y=1\\x=2+3y\end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_1} \begin{cases}12+18y-7y=1\\x=2+3y\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}11y=-11\\x=2+3y\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}y=-1\\x=-2+3y\end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On remplace } y} \begin{cases}y=-1\\x=-2-3=-5\end{cases}$$