Droites du plan

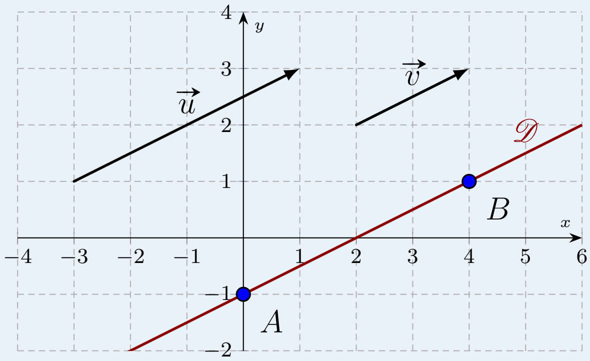
I - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs

On se place dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ du plan.

1. Vecteurs directeurs

DÉFINITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points de $\mathscr{D}$.
On appelle **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite $\mathscr{D}$.



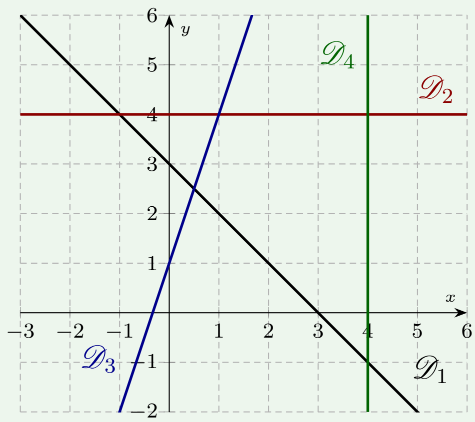
REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : Ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

EXEMPLE

Donnons les coordonnées de **plusieurs** vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.

— $\mathscr{D}_1$: $\vec{u}\binom{1}{-1}$ et $\vec{v}\binom{2}{-2}$
— $\mathscr{D}_2$: $\vec{u}\binom{1}{0}$ et $\vec{v}\binom{-3}{0}$
— $\mathscr{D}_3$: $\vec{u}\binom{1}{2}$ et $\vec{v}\binom{2}{4}$
— $\mathscr{D}_4$: $\vec{u}\binom{0}{1}$ et $\vec{v}\binom{0}{-4}$



2. Équations cartésiennes

PROPOSITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{u}\begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{D}$ possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$, appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

Un point $M(x;y)$ appartient à cette droite ssi $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ sont colinéaires.
Il faut donc que $det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$. Cela donne alors :

$$det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=a(x-x_A)-(-b)(y-y_A)=0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax+by+(-ax_A-by_A)=0$$

En posant $c=-ax_A-by_A$, on trouve bien la forme voulue : $\boxed{ax+by+c=0}$.

COROLLAIRE

Si les coordonnées $(x;y)$ d'un point M vérifient l'équation $ax+by+c=0$ d'une droite $\mathscr{D}$, alors M appartient à la droite $\mathscr{D}$ dont un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$.

EXEMPLES

Déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$:
  On sait alors qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est $5x+y+c=0$ où c reste à trouver.
  De plus, en remplaçant x et y par les coordonnées de A, on obtient :

$$\begin{aligned} 5\times 3+1+c&=0 \\ 16+c&=0 \\ c&=-16 \end{aligned}$$

  Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$ est donc $5x+y-16=0$.
- $\mathscr{D}_2$ passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$:
  $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$. On obtient alors l'équation $-6x+4y+c=0$.
  Pour trouver c, on remplace x et y par les coordonnées de A ou B. Avec A, cela donne :

$$\begin{aligned} -6\times 5+4\times 3+c&=0 \\ -30+12+c&=0 \\ c&=18 \end{aligned}$$

  Une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$ est donc $-6x+4y+18=0$. A noter que l'on peut simplifier cette équation pour obtenir $-3x+2y+9=0$.

MÉTHODE

Pour tracer une droite $\mathscr{D}$ étant donnée son équation cartésienne, on détermine les coordonnées de deux points appartenant à $\mathscr{D}$ en remplaçant x ou y par des valeurs spécifiques.

EXEMPLE

Soit $\mathscr{D}_1 : 2x - y + 3 = 0$.

— Si $x = 0$, alors l'équation devient $-y + 3 = 0$

$$y = 3$$

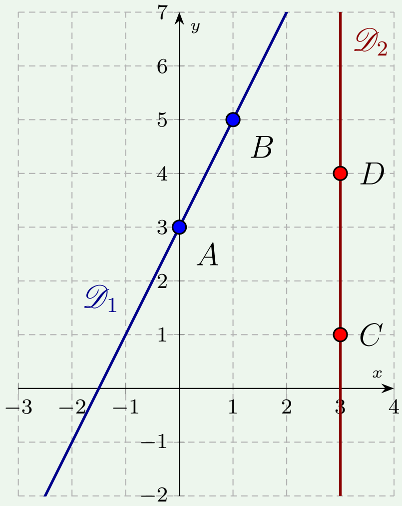
Alors $A(0;3) \in \mathscr{D}$.

— Si $x = 1$, alors l'équation devient $2 - y + 3 = 0$

$$y = 5$$

Alors $B(1;5) \in \mathscr{D}$.

On peut donc tracer la droite $\mathscr{D}_1$ dans le repère ci-contre :



Soit $\mathscr{D}_2 : 3x - 9 = 0$. Ici, il n'y a pas de y donc il suffit de résoudre l'équation : $3x - 9 = 0$

$$3x = 9$$
$$x = 3$$

Tout point dont les coordonnées sont de la forme $(3;y)$ avec $y \in \mathbb{R}$ convient donc. On prend par exemple $C(3;1)$ et $D(3;4)$.

II - Systèmes de deux équations à deux inconnues

Résoudre un système à deux inconnues , c'est trouver le ou les couples $(x;y)$ qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

EXEMPLE

Le couple $(2;3)$ vérifie le système d'équations $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$ car $\begin{cases} 5 \times 2 - 2 \times 3 = 10 - 6 = 4 \\ -2 + 3 = 1 \end{cases}$

1. Résolution graphique

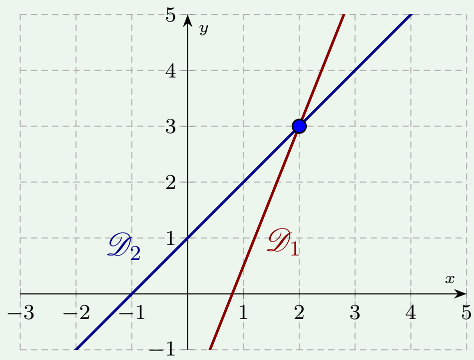
On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.
L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

EXEMPLE

On reprend le système précédent : $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

On trace les deux droites :

$$\mathscr{D}_1 : 5x - 2y - 4 = 0$$
$$\mathscr{D}_2 : -x + y - 1 = 0$$



Leur point d'intersection a pour coordonnées $(2;3)$, correspondant à la solution testée dans l'exemple précédent.

2. Résolution algébrique

a) Méthode par combinaison linéaire

Le but est de faire des opérations entre les lignes pour faire disparaitre des inconnues.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (L_1) \\ 2x + y = -1 & (L_2) \end{cases}$

On voit que les deux lignes contiennent le terme $2x$. On peut donc l'annuler en soustrayant la première ligne à la seconde ligne :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{cases} \xLeftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ 4y = -10 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_2} \begin{cases} 2x - 3y = 9 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{On remplace } y} \begin{cases} 2x - 7{,}5 = 9 \\ y = -2{,}5 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_1} \begin{cases} 2x = 1{,}5 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0{,}75 \\ y = -2{,}5 \end{cases}$$

b) Méthode par substitution

Le but est d'exprimer une variable en fonction d'une autre pour pouvoir l'éliminer dans une autre ligne.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 6x - 7y = 1 & (L_1) \\ x - 3y = 2 & (L_2) \end{cases}$

On va isoler x dans la seconde ligne pour le « réinjecter » dans la première.

$$\begin{cases} 6x - 7y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On isole } x} \begin{cases} 6x - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On réinjecte}} \begin{cases} 6(2 + 3y) - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{On résoud } L_1} \begin{cases} 12 + 18y - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 11y = -11 \\ x = 2 + 3y \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 + 3y \end{cases} \xLeftrightarrow{\text{On remplace } y} \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 - 3 = -5 \end{cases}$$