Suites : Généralités

I - Premières définitions

Définition : Une suite est une séquence ordonnée de nombres réels.

Exemples : La suite des nombres pairs est $0; 2; 4; \dots$

Définition : Une suite peut être vue comme une fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$. On notera plutôt u_n (u indice n) au lieu de $u(n)$.

Remarque : Par défaut, on numérote une suite à partir de 0, mais on peut aussi commencer à n'importe quel entier. Par exemple,

Exemples :

— Reprenons la suite u des nombres pairs. Le premier nombre pair est 0, on peut alors noter $u_0 = 0$, puis $u_1 = 2, \dots$ On pourrait aussi commencer la numérotation à partir de 1. On aurait alors $u_1 = 0, u_2 = 2, \dots$. u_0 ne serait alors pas défini.

— On prend la suite u de nombres suivants : $0,\ 1,\ 3,\ 6,\ 10,\ \dots$. Si son premier terme (0) est d'indice 23, alors son quatrième terme (6) est le terme d'indice 26.

II - Modes de générations de suites

Une suite peut être générée de trois manières différentes :

1) Par une expression explicite

Il s'agit d'une suite vérifiant $u_n = f(n)$ avec f une fonction.

Exemple : On se donne la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							

2) Par une relation de récurrence

On donne le premier terme u_0 de la suite puis une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du précédent.

Exemples :

— On se donne la suite (v_n) dont le premier terme est 1 et dont le terme suivant est obtenu en doublant le terme précédent. On a alors $v_0 = 1$, v_1 est le double de v_0 donc $v_1 = 2 \times v_0 = 2$, puis de même $v_3 = 4$, $v_4 = 8$, $v_5 = 16 \dots$ Pour résumer cette relation, on note $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

$$v_0 = 1 \xrightarrow{\times 2} v_1 = 2 \xrightarrow{\times 2} v_2 = 4 \xrightarrow{\times 2} v_3 = 8 \xrightarrow{\times 2} v_4 = 16 \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

— Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n + 1$. Alors $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$, $w_2 = 2w_1 + 1 = 3$, $w_3 = 7 \dots$

$$w_0 = 0 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_1 = 1 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_2 = 3 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_3 = 7 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_4 = 15 \xrightarrow{\times 2,\ +1} \cdots$$

3) Par une définition plus abstraite

Exemple : Soit (w_n) la suite des chiffres de l'écriture décimale de $\sqrt{2} = 1.414213\dots$. Alors $w_0 = 1$, $w_1 = 4$, $w_2 = 1$, $w_3 = 4$, $w_4 = 2$, $\dots$

4) Un exemple pour résumer

On se donne les trois suites suivantes :

— La suite u des nombres pairs.

— La suite v, qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$.

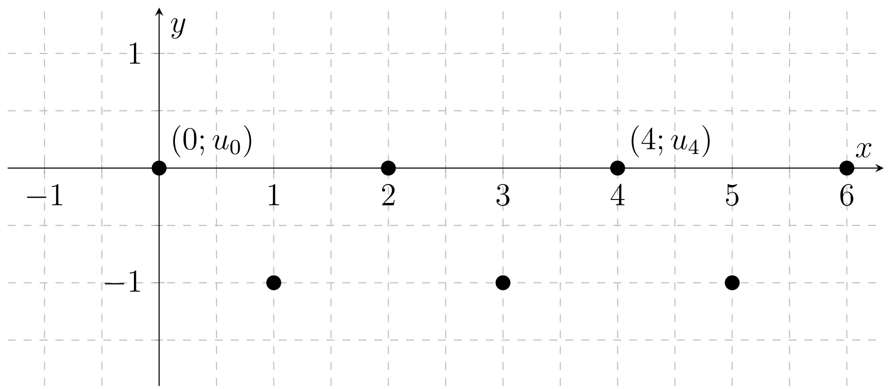
— La suite w telle que $w_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = 2 \times w_n$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n							
v_n							
w_n							

En fait, on peut montrer que ces trois suites sont égales.

III - Représentation graphique d'une suite

On peut représenter une suite (u_n) dans un repère du plan en plaçant les points (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$. Par exemple, en prenant la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n^2 - 1 \end{cases}$, on obtient :



IV - Sens de variation d'une suite

Définition : Soit $u = (u_n)$ une suite.

— On dit que la suite u est croissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

— u est dite décroissante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

— u est dire constante lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n = 0$.

Exemple : On se donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n$. On a $u_{n+1} - u_n = 3 - (n+1) - (3 - n) = \cancel{3}\cancel{-n} - 1 \cancel{-3} + \cancel{n} = -1 \leq 0$ donc la suite u est décroissante.