

REPÈRES DU PLAN ET COORDONNÉES

PROGRAMME

- Base orthonormée. Coordonnées d'un vecteur. Expression de la norme d'un vecteur.
- Expression des coordonnées de \overrightarrow{AB} en fonction de celles de A et B .
- Déterminant de deux vecteurs dans une base orthonormée, critère de colinéarité. Application à l'alignement, au parallélisme.
- Capacités :
 - Représenter un vecteur dont on connaît les coordonnées. Lire les coordonnées d'un vecteur.
 - Calculer les coordonnées d'une somme de vecteurs, d'un produit de vecteur par un réel.
 - Calculer la distance entre deux points. Calculer les coordonnées du milieu d'un segment.
 - Caractériser alignement et parallélisme par la colinéarité de vecteurs.
 - Résoudre des problèmes en utilisant la représentation la plus adaptée des vecteurs.
- Démonstration : Colinéarité \Leftrightarrow déterminant nul

I - Généralités sur les repères

DÉFINITION

Soient O, I, J trois points du plan non alignés. On pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Un repère du plan est un triplet $(O; \vec{i}; \vec{j})$. On dit alors que :

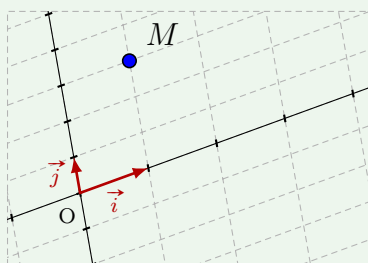
- O est l'origine du repère
- (OI) est l'axe des abscisses
- (OJ) est l'axe des ordonnées

On se donne maintenant un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ pour la suite du cours.

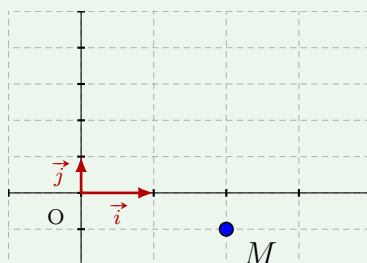
PROPRIÉTÉ

Tout point M du plan est repéré par un unique couple de coordonnées $(x; y)$. x est l'abscisse de M et y est l'ordonnée de M .

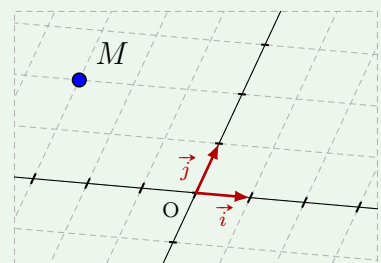
EXEMPLES



$M(1; 3)$



$M(2; -1)$



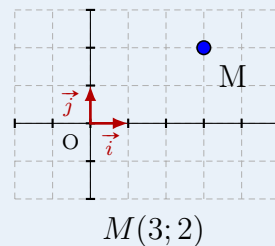
$M(-3; 2)$

► On écrit $M(1; 3)$ et pas $M = (1; 3)$!

DÉFINITION

On dit que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est orthonormé si :

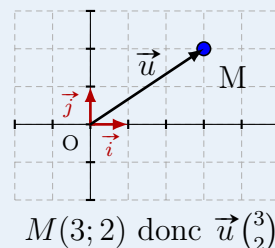
- Ses axes sont perpendiculaires : $(OI) \perp (OJ)$
- Les vecteurs unité \vec{i} et \vec{j} ont pour longueur 1 : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$



II - Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Soit \vec{u} un vecteur du plan. On se donne le point $M(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Les coordonnées de \vec{u} sont celles de M , et l'on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

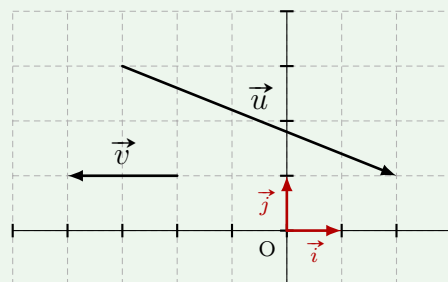


► On écrit $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et pas $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$!

EXEMPLE

On a représenté ci-contre deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, et $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.



► Exo 1

PROPOSITION

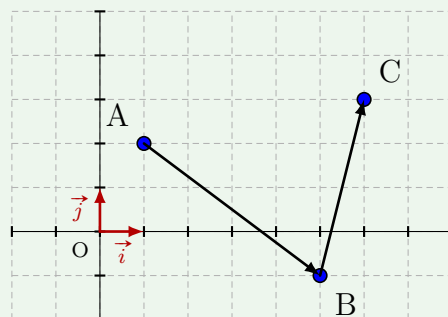
Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

On se donne $A(1; 2)$, $B(5; -1)$ et $C(6; 3)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 5 - 1 \\ -1 - 2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$.

De même, on a $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 6 - 5 \\ 3 - (-1) \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.



► Exos 2, 3, 4 (par deux), (5), 6

PROPRIÉTÉS

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x_{\vec{u}} \\ y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- Les coordonnées de $\vec{u} + \vec{v}$ sont $\begin{pmatrix} x_{\vec{u}} + x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} + y_{\vec{v}} \end{pmatrix}$.
- Les coordonnées de $\lambda \vec{u}$ sont $\begin{pmatrix} \lambda x_{\vec{u}} \\ \lambda y_{\vec{u}} \end{pmatrix}$.

EXEMPLE

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Alors on a :

- $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3+(-1) \end{pmatrix}$ d'où $(\vec{u} + \vec{v}) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- $3\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \times 2 \\ 3 \times (-1) \end{pmatrix}$ d'où $3\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$.
- $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} 2 \times 1 - 5 \times 2 \\ 2 \times 3 - 5 \times (-1) \end{pmatrix}$ d'où $(2\vec{u} - 5\vec{v}) \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}$.

► Exo 7,(8)

III - Calculs de distances et de milieux

1. Milieu d'un segment

PROPOSITION

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. On se donne de plus I le milieu de $[AB]$. Alors les coordonnées de I sont $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

REMARQUE

On fait en fait la moyenne des coordonnées des deux points.

EXEMPLE

Soient $A(1; 7)$, $B(6; -5)$ et I le milieu de $[AB]$. Alors on a $I \left(\frac{1+6}{2}; \frac{7-5}{2} \right)$ d'où $I \left(\frac{7}{2}; \frac{2}{2} \right)$, et enfin $I(3,5; 1)$.

► Exo 9,(14,15)

2. Normes et distances

Dans toute cette partie, on se place dans un repère orthonormé.

PROPOSITION

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Alors la norme de \vec{u} est donnée par :

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

COROLLAIRE

Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan. Alors la distance entre A et B vaut :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

EXEMPLE

Soient $A(1; 7)$ et $B(6; -5)$. Alors $AB = \sqrt{(6 - 1)^2 + (-5 - 7)^2}$
 $= \sqrt{5^2 + (-12)^2}$
 $= \sqrt{25 + 144}$
 $= \sqrt{169}$
 $= 13$

APPLICATIONS

On peut alors montrer l'appartenance d'un point à un cercle, ou déterminer la nature d'un polygone en utilisant des coordonnées.

EXEMPLE

Soit \mathcal{C} le cercle de centre $A(3; 5)$ de rayon 3, et le point $M(5; 7)$. On a :

$$\begin{aligned} AM &= \sqrt{(5 - 3)^2 + (7 - 5)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 2^2} \\ &= \sqrt{4 + 4} \\ &= \sqrt{8} \simeq 2,83 \end{aligned}$$

Comme $AM \neq 3$, M n'appartient pas au cercle \mathcal{C} .

► Exos 10,11,12,(13)

IV - Colinéarité

1. Définitions et caractérisations

DÉFINITION

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont dits colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$. Dans le cas où ils sont non nuls, cela revient à dire qu'ils ont la même direction.

REMARQUE

Deux vecteurs sont colinéaire si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

EXEMPLES

On se donne $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v} = 2\vec{u}$. Alors \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Coordonnées de \vec{u}	Coordonnées de \vec{v}	\vec{u} et \vec{v} sont-ils colinéaires ?
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 10 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 2\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = 7\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -6 \\ -15 \end{pmatrix}$	$\vec{v} = -3\vec{u}$ donc oui
$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$	$\left. \begin{array}{l} 4 \times (-20) = -80 \\ -7 \times 11 = -77 \end{array} \right\}$ et $-80 \neq -77$ donc non

2. Déterminant de deux vecteurs

DÉFINITION

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan. On appelle déterminant de \vec{u} et \vec{v} le réel :

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = xy' - x'y$$

EXEMPLE

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -7 \\ -20 \end{pmatrix}$. On a $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 4 \times (-20) - (-7) \times 11$
 $= -80 + 77$
 $= -3$

► Exo 16

PROPOSITION

Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul.

EXEMPLE

Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} de l'exemple précédent ne sont donc pas colinéaires.

$$\begin{aligned}\text{Soient } \vec{a} \begin{pmatrix} -15 \\ 40 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{b} \begin{pmatrix} 9 \\ -24 \end{pmatrix}. \text{ On a } \det(\vec{a}; \vec{b}) &= -15 \times (-24) - 9 \times 40 \\ &= 360 - 360 \\ &= 0\end{aligned}$$

Les vecteurs \vec{a} et \vec{b} sont donc colinéaires. (On a en fait $\vec{u} = -\frac{5}{3}\vec{v}$).

► Exos 17,18

3. Applications en géométrie

PROPRIÉTÉS

- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires.
- Trois points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires.

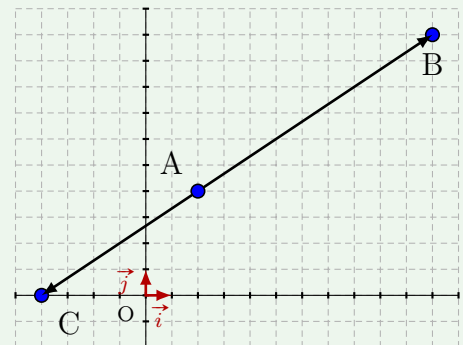
EXEMPLE

On se donne les points $A(2; 4)$, $B(11; 10)$ et $C(-4; 0)$.

Alors on a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

$$\text{On a } \det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 9 \times (-4) - (-6) \times 6 = -36 + 36 = 0.$$

On en déduit que les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires, d'où $(AB) \parallel (AC)$, et les points A , B et C sont alignés.



► Exos 19,20