Fonction dérivée

I - Généralités, règles de calcul

DÉFINITION

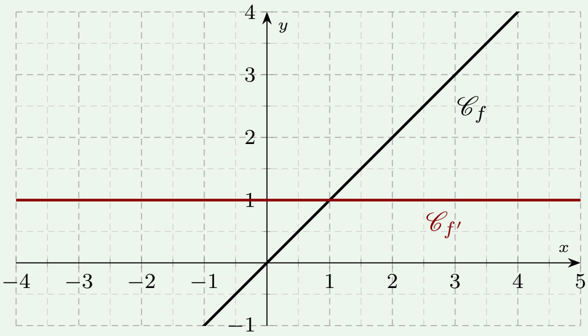
On définit la fonction dérivée de f, notée f', qui à x associe (s'il existe) le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x$. C'est une fonction affine avec $a = 1$ et $b = 0$.

Sa représentation graphique est une droite d. De plus, toutes les tangentes à la courbe de f sont cette même droite d.

Alors quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = a = 1$. f' est donc la fonction constante valant toujours 1.



PROPOSITIONS

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

Soient f et g deux fonctions, et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

— $(f+g)' = f' + g'$

— $(kf)' = kf'$

► Pour dériver une fonction puissance, on passe l'exposant devant x puis on retire 1 à l'exposant.

EXEMPLES

— Soit $f : x \mapsto x^2 + x$. Alors $f'(x) = 2x + 1 = 2x + 1$.

— Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.

— Soit $g : x \mapsto x^3 - 3x - 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3$.

— Soit $h : x \mapsto x^2 + x^2$. Alors $f'(x) = 2x + 2x = 4x$.

II - Lien avec les variations

THÉORÈME

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

— Si f' est positive sur $[a;b]$, alors f est croissante sur $[a;b]$.

— Si f' est négative sur $[a;b]$, alors f est décroissante sur $[a;b]$.

— Si f' est nulle sur $[a;b]$, alors f est constante sur $[a;b]$. Les zéros de f' correspondent aux **extremums locaux** de f (les « sommets »).

APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

Etude du signe de la dérivée :
$a = 2 > 0$ donc f' est d'abord négative, puis positive.
De plus, $f'(x) = 0$ *ssi* $2x = 4$ *ssi* $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

Variations de f :
f est donc décroissante puis croissante.
On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	