LGT Jean Rostand

1$^{\text{ère}}$ ST2S

Mathématiques

M. DELAUNEY

Proportions, variations et pourcentages

I - Proportions et pourcentages

1. Proportions

DÉFINITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On note respectivement n_A et n_E le nombre d'éléments de A et E. La proportion d'éléments de A dans est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

EXEMPLE

Dans une classe de 1ST2S comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$.

REMARQUE

p est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

2. Proportions de proportions

PROPOSITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, $A \subset E$ et $B \subset A$. On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de B dans A. Alors la proportion de B dans E est égale à $p_1 \times p_2$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$.

II - Evolutions et pourcentages

1. Taux d'évolution

DÉFINITION

On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1.

— La variation absolue est $V_1 - V_0$.

— La variation relative ou taux d'évolution est $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

REMARQUE

— Si $t > 0$, il s'agit d'une augmentation.

— Si $t < 0$, il s'agit d'une diminution.

EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de $180 - 150 = 30$ euros et son taux d'évolution est $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$. Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

PROPRIÉTÉ

Pour une valeur V_0 qui subit une évolution d'un taux t, elle devient $(1 + t) \times V_0$.
$1 + t$ est appelé coefficient multiplicateur (noté CM).

EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à $\left(1 + \frac{20}{100}\right) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$ euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à $(1 - 0.2) \times 30 = 24$ euros.

2. Evolution réciproque

DÉFINITION

Une valeur V_0 subit une évolution de taux t pour passer à V_1. On appelle évolution réciproque le taux t' d'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0.

PROPOSITION

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution : $CM' = \frac{1}{CM}$

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM_1"] & V_1 \arrow[l, bend left, "\times \frac{1}{CM}"] \end{tikzcd}$$

EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$, ce qui correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors $4.56 \times 0.877 = 4$ millions d'habitants.

3. Evolutions successives

PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur V_0 non nulle à la valeur V_1, et une seconde fait passer la valeur V_1 à la valeur V_2, alors l'évolution globale fait passer la valeur V_0 à la valeur V_2. Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "\times CM = CM_1 \times CM_2"'] & V_1 \arrow[r, bend left, "\times CM_2"] & V_2 \end{tikzcd}$$

EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une nouvelle hausse de 10%. Le coefficient multiplicateur global est donc $\left(1+\frac{8}{100}\right) \times \left(1+\frac{10}{100}\right) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$. Le prix a donc augmenté de 18.8% et pas de 18% !

Fonctions : Généralités

I - Définitions, notations, représentation

DÉFINITION

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un unique réel noté $f(x)$. On note $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. On dit alors que :

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

EXEMPLE

On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

REMARQUE

Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

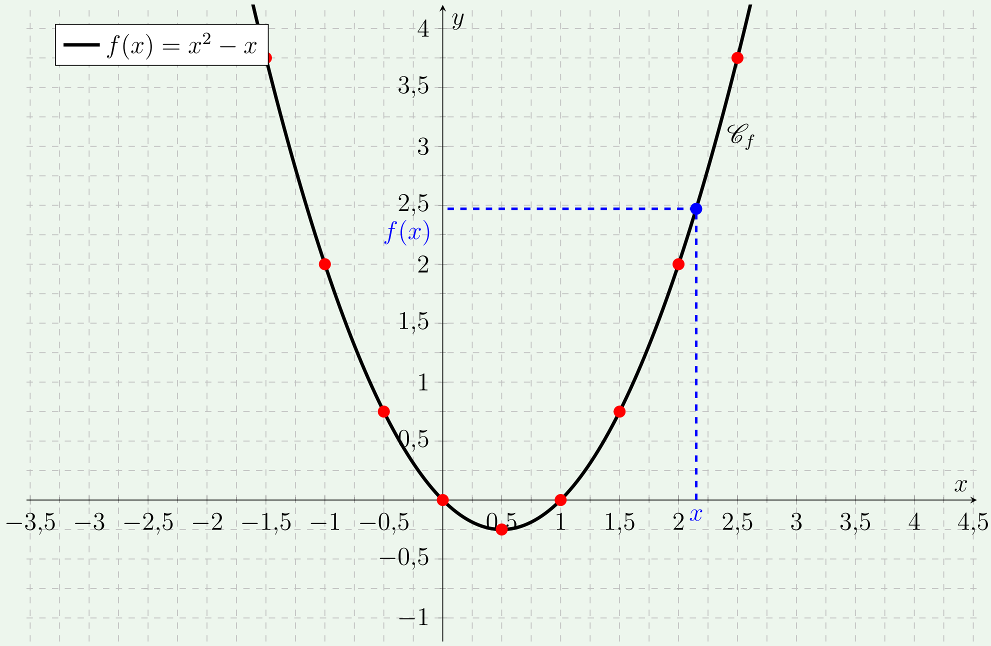
DÉFINITION

Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x,f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

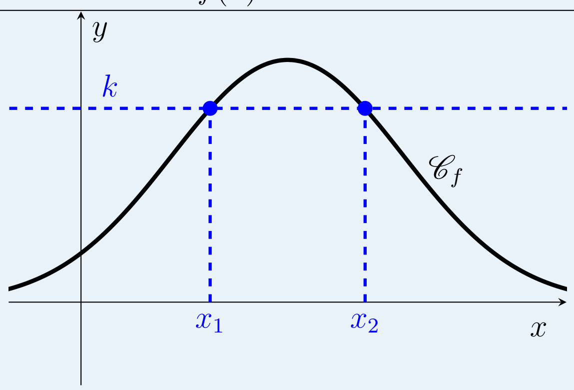
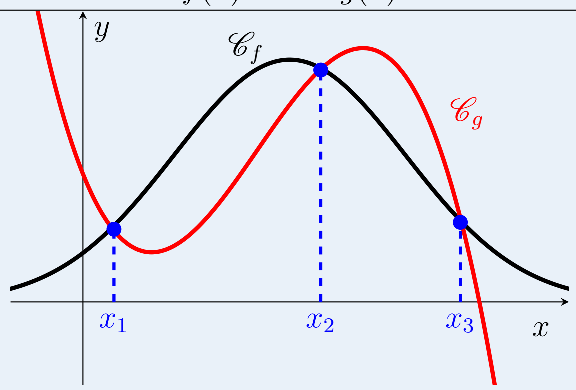
EXEMPLE



II - Résolution graphique d'équations et d'inéquations

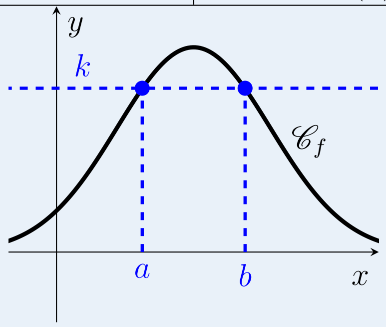
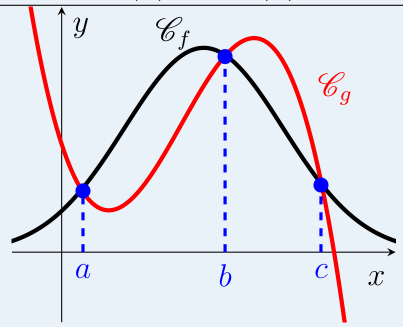
1. Equations

MÉTHODE

$f(x) \quad = \quad k$	$f(x) \quad = \quad g(x)$
	
Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1,x_2\}$	Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1,x_2,x_3\}$

2. Inéquations

MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]a; b[$	Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty; a[\cup]b; c[$

III - Etudes de fonctions

1. Etude des variations

DÉFINITION

Soit f définie sur un intervalle I.

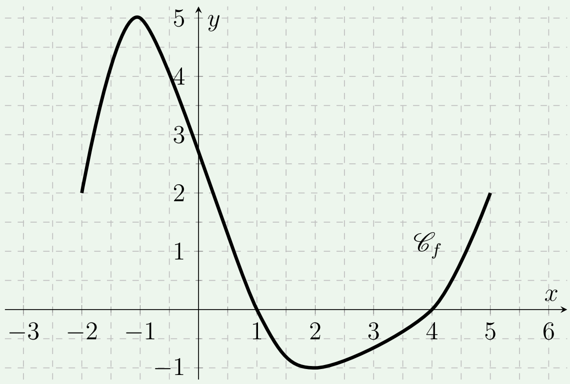
— On dit que f est croissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images augmentent aussi : Pour x,$y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$. :

— On dit que f est décroissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images diminuent : Pour x,$y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.

MÉTHODE

Dresser le tableau de variations d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

EXEMPLE



x	-2		-1		2		5
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

2. Etude du signe

MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.
Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

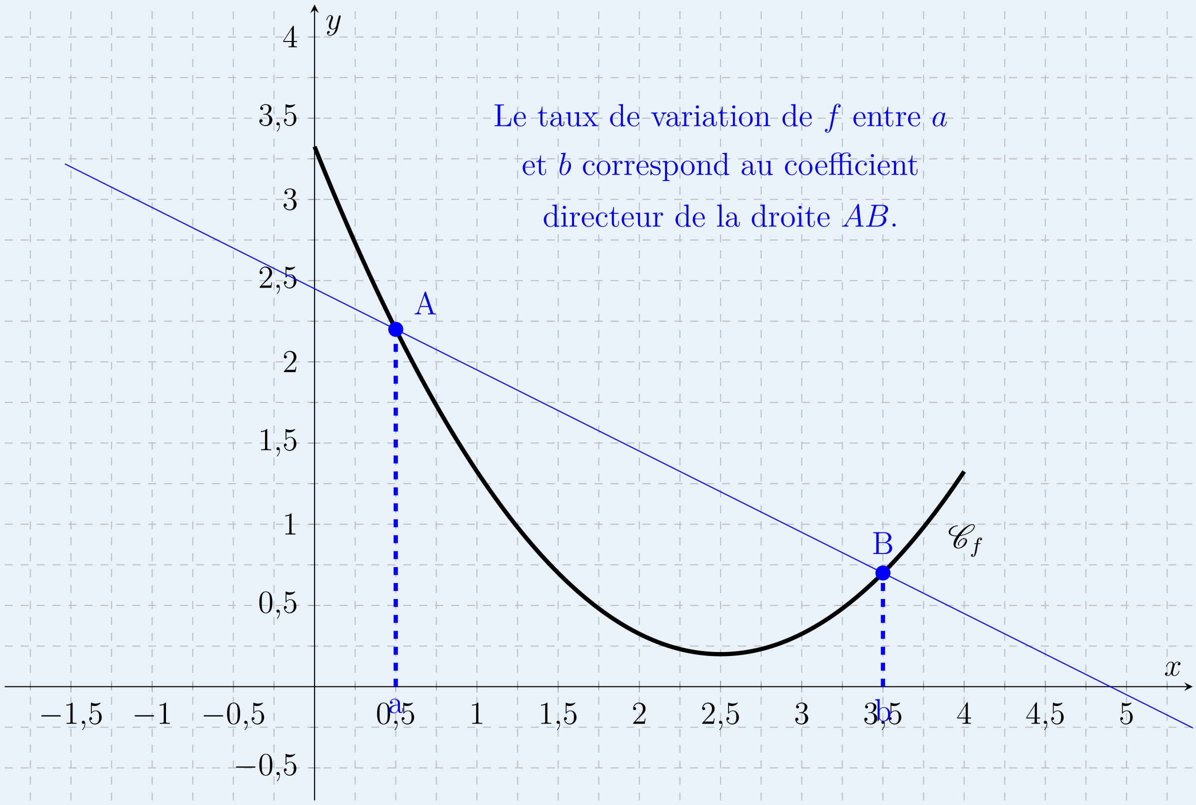
IV - Taux de variation d'une fonction

DÉFINITION

Le taux de variation entre a et b d'une fonction f définie sur un intervalle I est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour a et b distincts et appartenant à I.

REMARQUE

Ce taux correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b.



EXEMPLE

Le taux de variation entre -1 et 3 de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$ est :

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{6-2}{4} = 1$$

PROPOSITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est monotone (c'est-à-dire croissante ou bien décroissante sur I) si et seulement si le signe du taux de variation entre deux nombres quelconques de I est constant.
En pratique :

— Un taux de variation toujours positif sur I équivaut à f croissante sur I.

— Un taux de variation toujours négatif sur I équivaut à f décroissante sur I.

— Un taux de variation toujours nul sur I équivaut à f constante sur I.

Suites : Généralités

I - Premières définitions

DÉFINITION

Une suite est une séquence ordonnée de nombres réels.

EXEMPLES

La suite des nombres pairs est $0; 2; 4; \dots$

DÉFINITION

Une suite peut être vue comme une fonction $u : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$. On notera plutôt u_n (u indice n) au lieu de $u(n)$.

REMARQUE

Par défaut, on numérote une suite à partir de 0, mais on peut aussi commencer à n'importe quel entier.

EXEMPLES

- Reprenons la suite u des nombres pairs. Le premier nombre pair est 0, on peut alors noter $u_0 = 0$, puis $u_1 = 2, \dots$ On pourrait aussi commencer la numérotation à partir de 1. On aurait alors $u_1 = 0, u_2 = 2, \dots$. u_0 ne serait alors pas défini.
- On prend la suite u de nombres suivants : 0, 1, 3, 6, 10, ... Si son premier terme (0) est d'indice 23, alors son quatrième terme (6) est le terme d'indice 26.

II - Modes de générations de suites

Une suite peut être générée de trois manières différentes :

1. Par une expression explicite

DÉFINITION

Il s'agit d'une suite vérifiant $u_n = f(n)$ avec f une fonction.

EXEMPLE

On se donne la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	0	-2	-2	0	4	10	18

2. Par une relation de récurrence

DÉFINITION

Définir une suite par récurrence revient à donner son premier terme puis une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du précédent.

EXEMPLES

- On se donne la suite (v_n) dont le premier terme est 1 et dont le terme suivant est obtenu en doublant le terme précédent. On a alors $v_0 = 1$, v_1 est le double de v_0 donc $v_1 = 2 \times v_0 = 2$, puis de même $v_3 = 4$, $v_4 = 8$, $v_5 = 16\ldots$ Pour résumer cette relation, on note $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

$$v_0 = 1 \xrightarrow{\times 2} v_1 = 2 \xrightarrow{\times 2} v_2 = 4 \xrightarrow{\times 2} v_3 = 8 \xrightarrow{\times 2} v_4 = 16 \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

- Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n + 1$. Alors $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$, $w_2 = 2w_1 + 1 = 3$, $w_3 = 7\ldots$

$$w_0 = 0 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_1 = 1 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_2 = 3 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_3 = 7 \xrightarrow{\times 2,\ +1} w_4 = 15 \xrightarrow{\times 2,\ +1} \cdots$$

3. Par une définition plus abstraite

EXEMPLE

Soit (w_n) la suite des chiffres de l'écriture décimale de $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$. Alors $w_0 = 1$, $w_1 = 4$, $w_2 = 1$, $w_3 = 4$, $w_4 = 2$, $\ldots$

4. Un exemple pour résumer

EXEMPLE

On se donne les trois suites suivantes :

- La suite u des nombres pairs.
- La suite v, qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$.
- La suite w telle que $w_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + 2$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	0	2	4	6	8	10	12
v_n	0	2	4	6	8	10	12
w_n	0	2	4	6	8	10	12

En fait, on peut montrer que ces trois suites sont égales.

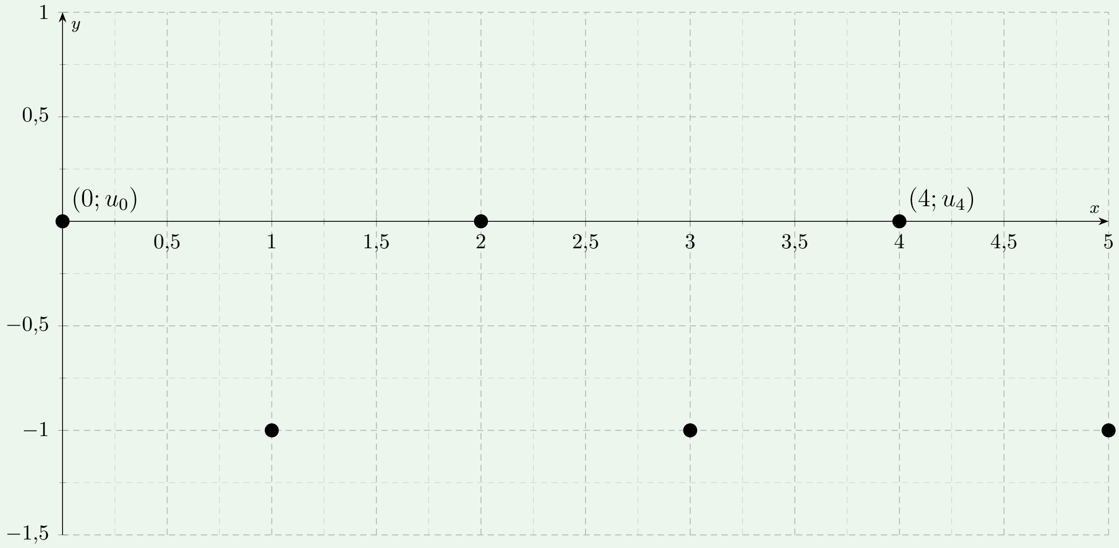
III - Représentation graphique d'une suite

MÉTHODE

On peut représenter une suite (u_n) dans un repère du plan en plaçant les points (n,u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE

En prenant la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n^2 - 1 \end{cases}$, on obtient :



IV - Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

Soit $u = (u_n)$ une suite.

— On dit que la suite u est **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

— u est dite **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

— u est dite **constante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n = 0$.

EXEMPLE

On se donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n$. On a $u_{n+1} - u_n = 3 - (n + 1) - (3 - n) = \cancel{3} \cancel{- n} - 1 \cancel{- 3} + \cancel{n} = -1 \leq 0$ donc la suite u est décroissante.

Fonctions affines

I - Généralités

DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ où a et b désignent deux nombres réels donnés.

EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$, $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$ et $h : x \mapsto 0{,}1x - 7{,}2$ sont des fonctions affines.

CAS PARTICULIERS

— $x \mapsto ax$ (ici, $b = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction linéaire**.

— $x \mapsto b$ (ici, $a = 0$) est une fonction affine particulière appelée **fonction constante**.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** qui coupe l'axe des ordonnées.

VOCABULAIRE

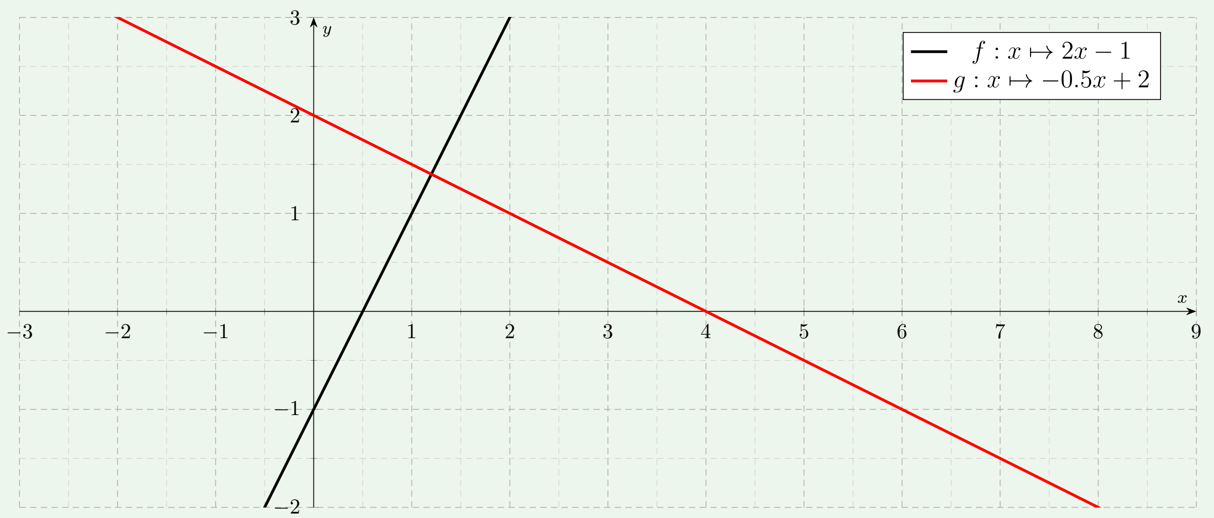
Dans un repère, soit d la droite représentant une fonction affine $f : x \mapsto ax + b$. On dit que :

— a est le **coefficient directeur** de d.

— b est **l'ordonnée à l'origine** de d.

— $y = ax + b$ est l'équation réduite de d.

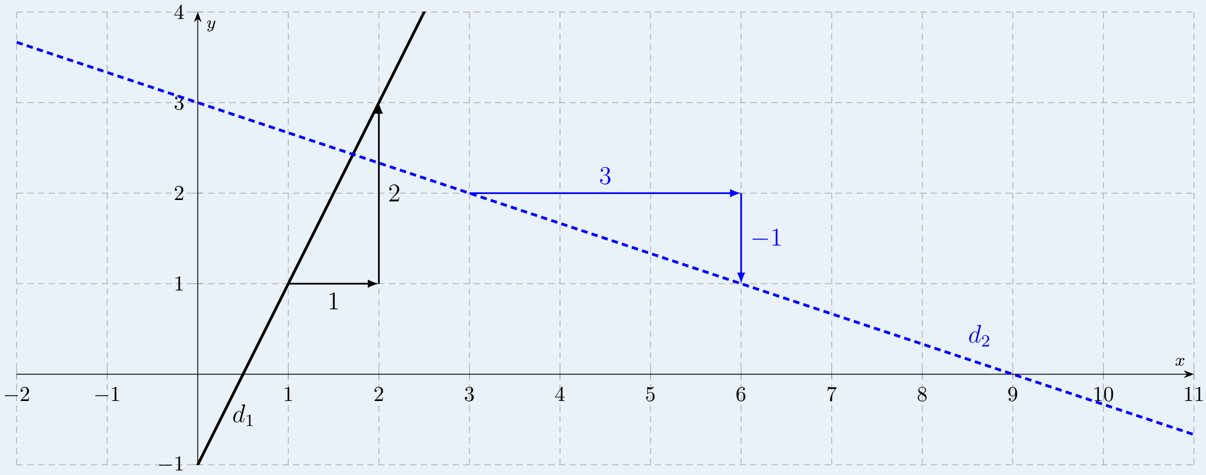
EXEMPLE



II - Recherche de l'équation réduite d'une droite

1. Par lecture graphique

MÉTHODE



- Pour d_1 : Lorsque j'avance d'un carreau vers la droite, je monte de deux carreaux. Le coefficient directeur de d_1 est donc égal à $\frac{2}{1} = 2$. L'ordonnée à l'origine de d_1 est -1. Alors l'équation réduite de d_1 est $y = 2x - 1$.
- Pour d_2 : Lorsque j'avance de trois carreaux vers la droite, je descend d'un carreau. Le coefficient directeur de d_2 est donc égal à $\frac{-1}{3}$. L'ordonnée à l'origine de d_1 est 3. Alors l'équation réduite de d_1 est $y = -\frac{1}{3}x + 3$.

Plus généralement, on a $a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$.

2. En connaissant deux points

PROPOSITION

Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ sont deux points appartenant à une droite d d'équation réduite $y = ax+b$, alors on a :

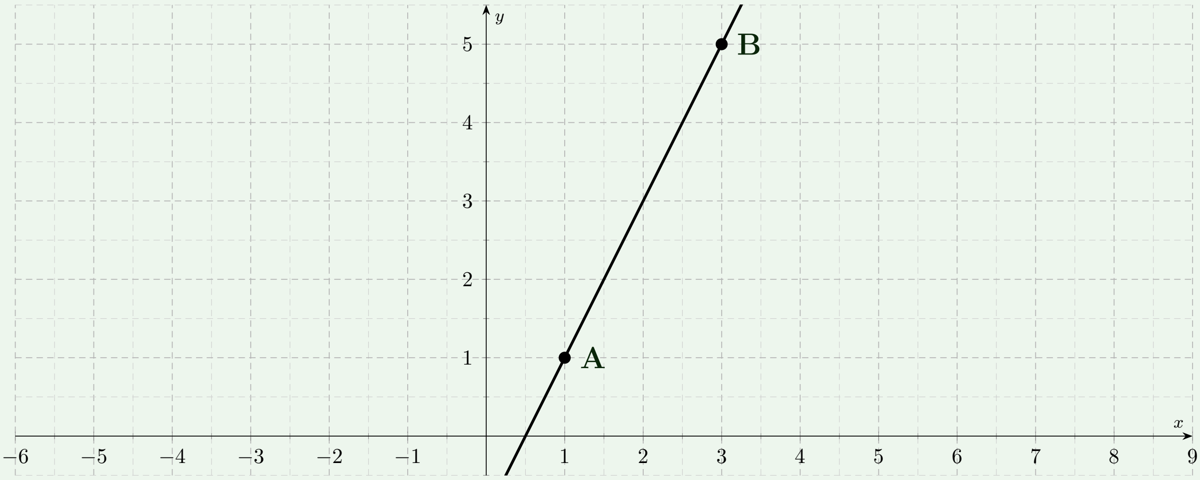
$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

REMARQUE

Cette formule est la même que celle du taux de variation d'une fonction !

EXEMPLE

Soient $A(1,1)$ et $B(3,5)$ deux points appartenant à une droite d. Alors son coefficient directeur est égal à $\frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. L'équation réduite de d est donc $y = 2x + b$. En remplaçant x et y par les coordonnées d'un des deux points donnés (on prendra B ici), on obtient l'équation suivante : $5 = 2 \times 3 + b$ soit donc $5 = 6 + b$ et alors $5 - 6 = b$ puis $b = -1$. L'équation réduite de d est alors $y = 2x - 1$.



III - Tableau de signe d'une fonction affine

PROPOSITION

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine avec $a \neq 0$. Alors $f(x) = 0$ si et seulement si $ax + b = 0$ ssi $ax = -b$ ssi $x = -\frac{b}{a}$. Le tableau de signes de f dépend du signe de a :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Fonctions polynomiales de degré 2

I - Généralités

DÉFINITION

On appelle fonction polynomiale de degré 2 toute fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2+bx+c \end{array}$$

Où a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $\boldsymbol{a \neq 0}$.

EXEMPLES

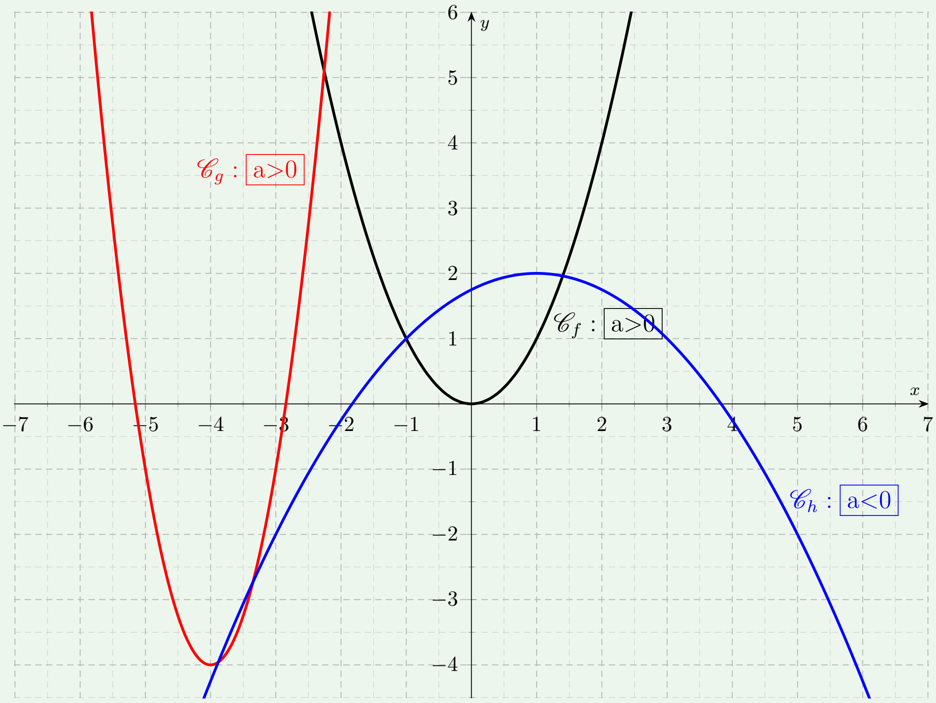
$f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ et $h : x \mapsto 2 - 0{,}3x^2$ sont des fonctions polynomiales de degré 2.

► L'appellation est un peu lourde... On dira plutôt fonction de degré 2.

PROPOSITION

La représentation graphique d'une fonction de degré 2 est une parabole.

EXEMPLES



REMARQUE

Le terme constant (sans x, c'est-à-dire c) est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer c décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

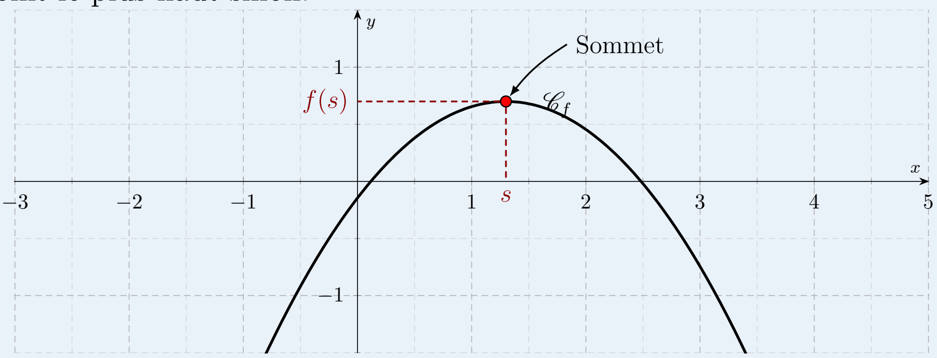
PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction de degré 2.

- Si $a \geq 0$, f est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.
- Si $a \leq 0$, f est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.

DÉFINITION

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si $a > 0$, le point le plus haut sinon.



PROPRIÉTÉS

On se donne f une fonction de degré 2 et s l'abscisse du sommet de la parabole associée.

- Les coordonnées de son sommet sont donc $(s,f(s))$.
- La parabole associée possède pour axe de symétrie la droite parallèle a l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.
- On en déduit le tableau de variations de f :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$	s	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ $f(s)$ $\nearrow$	$+\infty$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$	s	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ $f(s)$ $\searrow$	$-\infty$

► On verra dans la suite comment trouver algébriquement (par le calcul) les coordonnées de ce sommet, dans des cas particuliers.

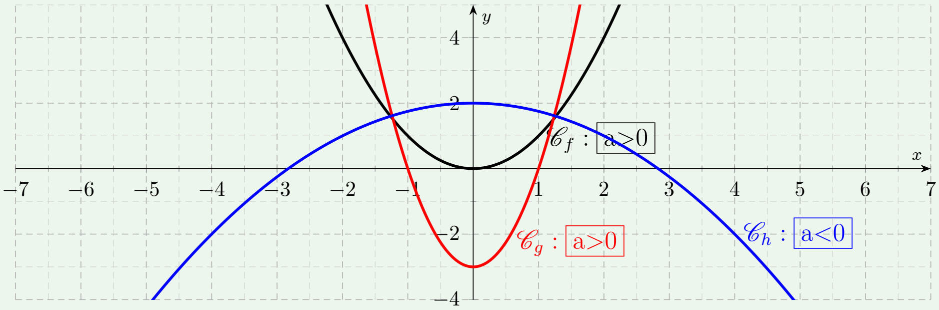
II - Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

PROPRIÉTÉS

Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ une fonction de degré 2.

- Les paraboles d'équation $y = ax^2 + c$ ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
- Les coordonnées du sommet de cette parabole sont $(0; c)$.

EXEMPLES



EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 5x^2 - 2$. Les coordonnées du sommet de la parabole associée sont $(0; -2)$.

MÉTHODE

Pour déterminer l'expression d'une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord c en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine a en résolvant une équation.

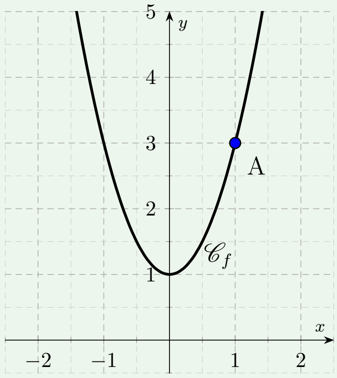
EXEMPLE

On a représenté une fonction $f : x \mapsto ax^2+c$ sur le repère ci-contre.

On voit directement que $c = 1$, d'où $f : x \mapsto ax^2 + 1$.

On se donne maintenant un point sur la courbe de f, par exemple $A(1; 3)$. Cela signifie que $f(1) = 3$, autrement dit $a \times 1^2 + 1 = 3$, soit donc $a + 1 = 3$, d'où $a = 2$.

On a alors $f : x \mapsto 2x^2 + 1$.



III - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

1. Généralités

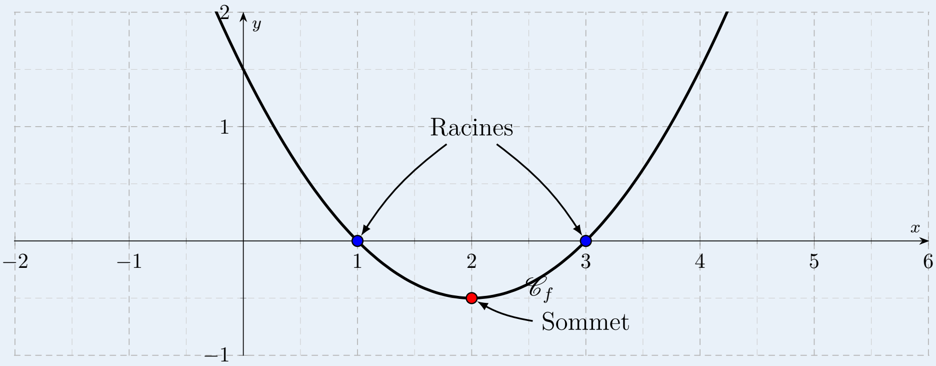
PROPOSITION

Les fonctions du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des fonctions de degré 2. On dit que cette forme est l'écriture factorisée de f (lorsqu'elle existe).

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2)$
$$= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2$$
$$= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2$$
Donc $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$ avec $b = -(ax_1 + ax_2)$ et $c = ax_1x_2$.

DÉFINITION

Soit f une fonction de degré 2. On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.



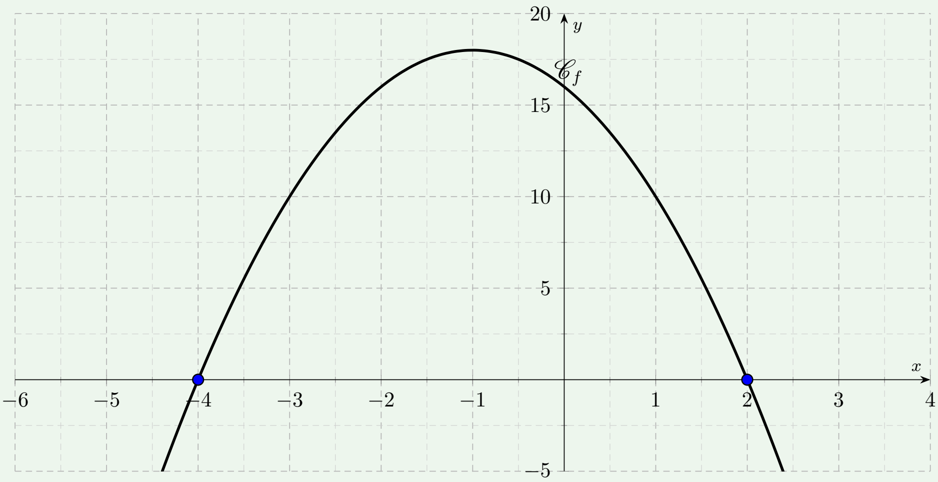
REMARQUE

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $(a \neq 0)$, les racines de f sont x_1 et x_2.

En effet, $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $x - x_1 = 0$ ou $x - x_2 = 0$
$\Leftrightarrow x = x_1$ ou $x = x_2$

EXEMPLE

Les racines de la fonction $f : x \mapsto -2(x - 2)(x + 4)$ sont 2 et -4.



On voit alors que la parabole associée par f coupe l'axe des abscisses en $M(2; 0)$ et $N(0; -4)$.

PROPRIÉTÉ

Soit $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ avec $a \neq 0$. On pose $s = \frac{x_1 + x_2}{2}$. Alors le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(s, f(s))$.

EXEMPLE

Pour la parabole précédente, on a $s = \frac{2-4}{2} = -1$, et :

$$\begin{aligned} f(s) &= f(-1) \\ &= -2(-1-2)(-1+4) \\ &= -2 \times (-3) \times 3 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc $(-1; 18)$.

2. Factorisation

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b + c$. Ceci est l'écriture développée de f. On souhaite retrouver l'écriture factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

REMARQUE

Le a qui apparait dans la forme développée et factorisée est le même.

MÉTHODE

Si l'on connait une racine x_1 de f, on peut retrouver l'écriture factorisée de f par identification.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$. On nous dit que 1 est une racine de f. De plus, on a $a = 3$.
On sait alors qu'on peut écrire $f(x) = 3(x-1)(x-x_2)$ avec $x_2 \in \mathbb{R}$.
Première méthode : Développons cette expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= 3\left(x^2 - x \times x_2 - x + x_2\right) \\ &= 3x^2 - 3 \times x_2 \times x - 3x + 3x_2 \\ &= 3x^2 + (-3 - 3x_2)x + 3x_2 \\ \text{On a de plus } f(x) &= 3x^2 - 9x + 6 \end{aligned}$$

Le dernier coefficient nous donne donc $3x_2 = 6$ soit alors $x_2 = 2$.
On en déduit que $f(x) = 3(x-1)(x-2)$.
Seconde méthode : On calcule $f(0)$ de deux manières différentes :

$$\begin{aligned} f(0) &= 3 \times 0^2 - 9 \times 0 + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(0) &= 3(0-1)(0-x_2) \\ &= 3 \times (-1) \times (-x_2) \\ &= -3 \times (-x_2) \\ &= 3x_2 \end{aligned}$$

On retrouve alors l'équation précédente : $3x_2 = 6$ d'où $x_2 = 2$ puis $f(x) = 3(x-1)(x-2)$.

3. Etude du signe

MÉTHODE

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$, on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto 0{,}5(x-1)(x+3)$. Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines $x \mapsto x-1$ et $x \mapsto x+3$. On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

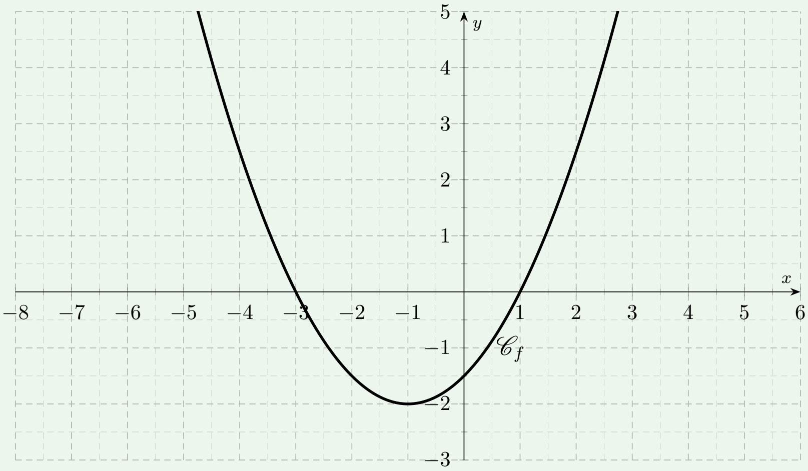
On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de f :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-1)(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On peut donc lire sur ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est :

$$S =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

On peut vérifier que l'on obtient le même tableau par lecture graphique.



Suites arithmétiques et géométriques

I - Suites arithmétiques

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique a, on a besoin de deux nombres :

— Son premier terme a_0

— Sa raison r

On a alors la relation $a_{n+1} = a_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 \xrightarrow{+r} a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

EXEMPLE

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2 = 3 \\ u_2 &= u_1 - 2 = 1 \\ u_3 &= u_2 - 2 = -1 \\ u_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

REMARQUE

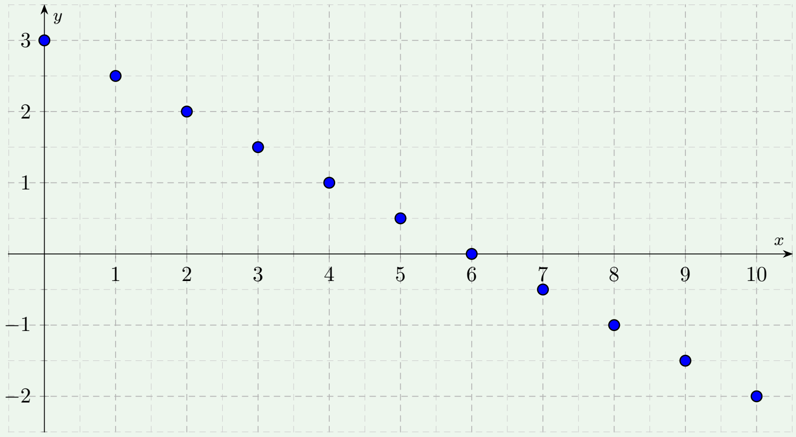
La différence entre deux termes successifs vaut toujours r : Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = r$.

2. Représentation graphique

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.

EXEMPLE



On a représenté une suite arithmétique u ci-dessus. On a $u_0 = 3$ et $u_1 = 2{,}5$. Alors $r = u_1 - u_0 = 2{,}5 - 3 = -0.5$. La suite u est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison $r = -0.5$.

3. Variations des suites arithmétiques

PROPOSITION

- Si $r > 0$, alors la suite a est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite a est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite a est constante.

EXEMPLE

Soit a la suite arithmétique définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 5$. La raison de cette suite est $r = -5 < 0$ donc a est décroissante.

II - Suites géométriques, cas positif

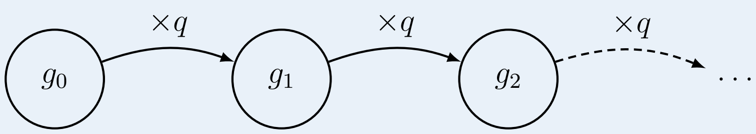
1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite géométrique g, on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme g_0
- Sa raison q

On a alors la relation $g_{n+1} = q \times g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.



▶ On se restreindra au cas où g_0 et q sont strictement positifs.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Alors :

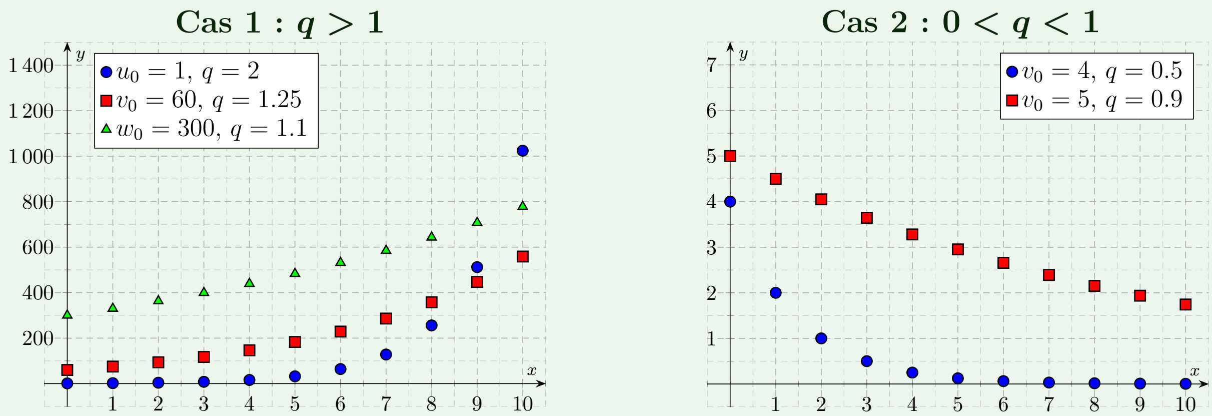
$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

REMARQUE

Le quotient de deux termes successifs vaut toujours q : $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$.

2. Représentation graphique des suites géométriques

EXEMPLES



3. Variations des suites géométriques

PROPOSITION

— Si $q > 1$, alors la suite g est croissante.
— Si $0 < q < 1$, alors la suite g est décroissante.
— Si $q = 1$, alors la suite g est constante.

EXEMPLE

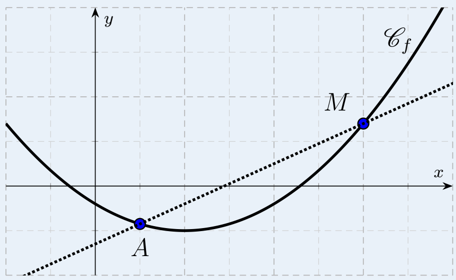
Soit g la suite géométrique définie par $g_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_{n+1} = 0{,}9 \times g_n$. La raison de cette suite est $q = 0{,}9 < 1$ donc g est décroissante.

Dérivation - Point de vue local

I - Sécantes et tangentes

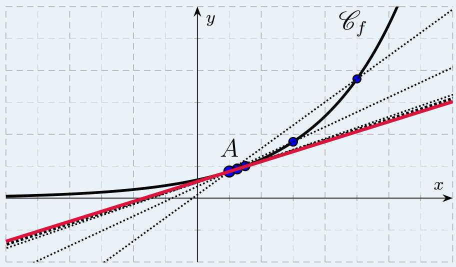
DÉFINITION

Soit f une fonction, avec A et M deux points sur la courbe de f d'abscisses respectives a et $a+h$.
La droite (AM) est appelée **sécante** de la courbe de f.



PROPRIÉTÉ

A mesure que M se rapproche du point A (autrement dit lorsque h se rapproche de 0), la droite (AM) se rapproche d'une autre droite, appelée **tangente de $\mathscr{C}_f$ en A**, qui épouse la courbe de f près de A.



II - Lecture du nombre dérivé

DÉFINITION

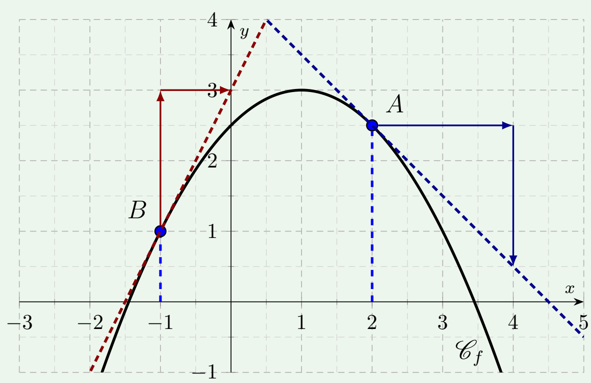
On appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

EXEMPLE

On a représenté une fonction f ci-contre.

Pour obtenir $f'(2)$, on place A défini comme le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2, puis on détermine le coefficient directeur de la tangente de $\mathscr{C}_f$ passant par A. On a alors $f'(2) = \frac{-2}{2} = -1$.

Pour obtenir $f'(-1)$, on place B, et on détermine le coefficient directeur de la tangente associée : $f'(-1) = \frac{2}{1} = 2$. En utilisant l'ordonnée à l'origine, on en déduit que l'équation de cette tangente est $y = 2x + 3$.

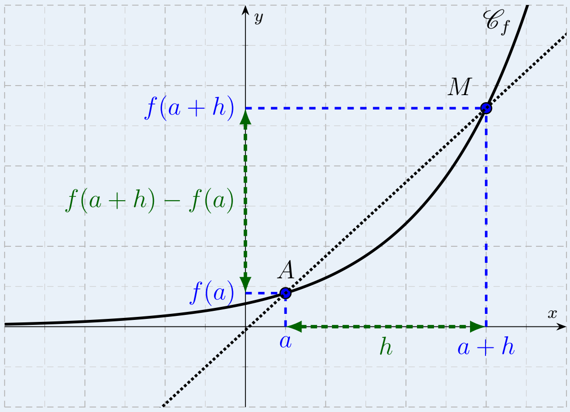


III - Lien avec le taux de variation

DÉFINITION

Soit f une fonction, avec A et M deux points sur la courbe de f d'abscisses respectives a et $a+h$ ($h \neq 0$).
Le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$ (autrement dit le coefficient directeur de la sécante associée) vaut :

$$\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



PROPRIÉTÉ

Si le taux d'accroissement $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel quand h *tend* vers 0, on dit que f est **dérivable** en a, et le nombre en question est noté $f'(a)$.

EXEMPLE

On se donne la fonction $f : x \mapsto x^2$, et le point $A(1;1)$ sur $\mathscr{C}_f$. Soit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. On a :

— $f(1) = 1^2 = 1$

— $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

Alors :

$$\begin{aligned}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} &= \frac{1+2h+h^2-1}{h} \\ &= \frac{2h+h^2}{h} \\ &= 2+h\end{aligned}$$

Cette quantité se rapproche de 2 lorsque h tend vers 0.
Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.