

CONDITIONNEMENT

PROGRAMME

- Croisement de deux variables catégorielles
- Tableau croisé d'effectifs
- Fréquence conditionnelle, fréquence marginale
- Capacités
 - Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales
 - Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles
- Probabilités conditionnelles
- Notation $\mathbb{P}_A(B)$
- Capacité : Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs

I - Rappels de vocabulaire ensembliste

DÉFINITIONS

On se donne E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E .

- **L'intersection** de A et B notée $A \cap B$ (A inter B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B .
- **L'union** de A et B notée $A \cup B$ (A union B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.
- **Le complémentaire** de A , noté \bar{A} (A barre) désigne l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .

EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note E l'ensemble de tout les chiens, A le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil blanc, B le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil beige.

- $A \cap B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc et beige
- $A \cup B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.
- \bar{A} désigne l'ensemble des chiens au poil autre que blanc.

II - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. Les élèves ont le choix entre l'allemand ou l'espagnol. On sait que 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et A l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

- Le nombre d'éléments de $F \cap A$ (c'est-à-dire le nombre de filles ayant choisi l'allemand) est 3.
- Le nombre d'éléments de $G \cap \bar{A}$ (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
- La fréquence des filles dans cette classe est $\frac{23}{35} \simeq 0,66 = 66\%$. On parle de **fréquence marginale**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est $\frac{7}{35} = 0,2 = 20\%$.
- La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est $\frac{20}{25} = 0,8 = 80\%$. On parle de **fréquence conditionnelle**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est $\frac{5}{12} \simeq 0,42 = 42\%$.

PROPOSITION

On se donne E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E .

- La fréquence marginale de A dans E vaut $\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$.
- La fréquence conditionnelle de A dans B vaut $\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$.

► Cas favorables / Cas totaux

- Exos 16 p174, 24 p176
- Exos 17,18 p175, 26 p176
- Exos 35,36 p181
- Sujet D p184
- Exos p179

III - Rappels de probabilités

DÉFINITIONS

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
- On appelle l'univers, noté Ω (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de Ω . On appelle

événement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de Ω (On les appelle des **singletons**).

- L'ensemble vide, noté \emptyset , est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble Ω est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.
- On dit qu'on est en situation d'**équiprobabilité** lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
- On dit que deux événements A et B sont **incompatibles** lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
- Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers Ω , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

PROPRIÉTÉS

- Soit A un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

► Schéma à faire

IV - Probabilités conditionnelles

► De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, on peut définir des probabilités conditionnelles.

DÉFINITION

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B en sachant que A est réalisé, aussi appelée probabilité de B sachant A. On a de plus $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

REMARQUE

Dans une situation **d'équiprobabilité**, on a $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

► Cas favorables / Cas totaux

► On utilisera aussi des tableaux pour trouver des probabilités conditionnelles.

EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs. On considère alors les évènements C : « L'élève pratique une activité culturelle » et S : « L'élève pratique une activité sportive ». On a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive (S)	Pas d'activité sportive (\bar{S})	Total
Activité culturelle (C)	402	591	993
Pas d'activité culturelle (\bar{C})	315	192	507
Total	717	783	1500

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

- La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}(C) = \frac{993}{1500} = 0,662 = 66,2\%$.
- La probabilité qu'un élève pratique les deux types d'activité est $\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{402}{1500} = 0,268 = 26,8\%$.
- La probabilité qu'un élève fasse du sport en sachant qu'il pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}_C(S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{402}{993} = 0,405 = 40,5\%$.
- La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle en sachant qu'il ne fait pas de sport est $\mathbb{P}_{\bar{S}}(C) = \frac{\text{Card}(\bar{S} \cap C)}{\text{Card}(\bar{S})} = \frac{591}{783} = 0,755 = 75,5\%$.

- ▶ Exos 22,23 p175, 31 p177
- ▶ Exos 37,38 p181
- ▶ Exos 32,33 p178
- ▶ Sujets B,C p184
- ▶ Exos 39,40,40 p186