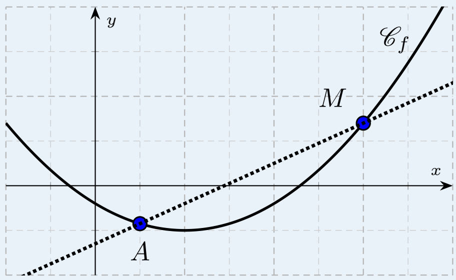
Dérivation - Point de vue local

I - Sécantes et tangentes

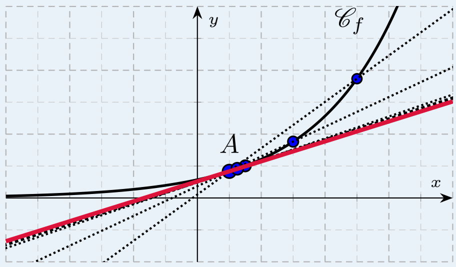
DÉFINITION

Soit f une fonction, avec A et M deux points sur la courbe de f.
La droite (AM) est appelée **sécante** de la courbe de f.



PROPRIÉTÉ

A mesure que M se rapproche du point A, la sécante (AM) se rapproche d'une autre droite, appelée **tangente de $\mathscr{C}_f$ en A**, qui épouse la courbe de f près de A.



II - Lecture du nombre dérivé

DÉFINITION

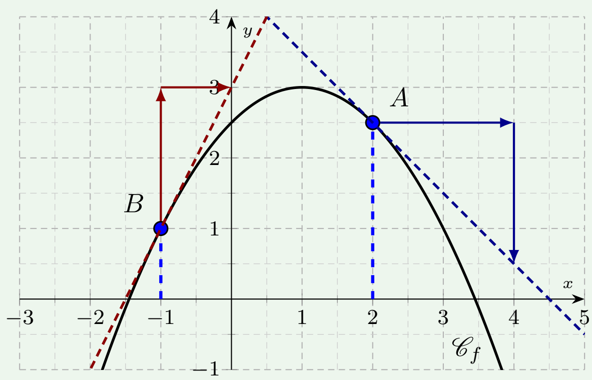
On appelle nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

EXEMPLE

On a représenté une fonction f ci-contre.

Pour obtenir $f'(2)$, on place A défini comme le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2, puis on détermine le coefficient directeur de la tangente de $\mathscr{C}_f$ passant par A. On a alors $f'(2) = \frac{-2}{2} = -1$.

Pour obtenir $f'(-1)$, on place B, et on détermine le coefficient directeur de la tangente associée : $f'(-1) = \frac{2}{1} = 2$. En utilisant l'ordonnée à l'origine, on en déduit que l'équation de cette tangente est $y = 2x + 3$.

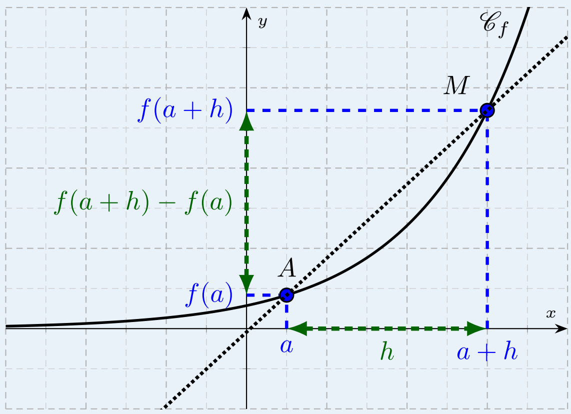


III - Lien avec le taux de variation

DÉFINITION

Soit f une fonction, avec A et M deux points sur la courbe de f d'abscisses respectives a et $a+h$ ($h \neq 0$).
Le taux de variation de f entre a et $a+h$ (autrement dit le coefficient directeur de la sécante associée) vaut :

$$\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$



PROPRIÉTÉ

Si le taux de variation $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'un nombre réel quand h *tend* vers 0, on dit que f est **dérivable** en a, et le nombre en question est noté $f'(a)$.

EXEMPLE

On se donne la fonction $f : x \mapsto x^2$, et le point $A(1;1)$ sur $\mathscr{C}_f$. Soit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. On a :

— $f(1) = 1^2 = 1$

— $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

Alors :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = 2+h$$

Cette quantité se rapproche de 2 lorsque h tend vers 0.
Alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.