

# DROITES DU PLAN

## PROGRAMME

- Vecteur directeur d'une droite
- Équation de droite : Équation cartésienne, *réduite*
- *Pente (ou coefficient directeur) d'une droite non parallèle à l'axe des ordonnées*
- Capacités :
  - Déterminer une équation de droite *à partir de deux points*, un point et un vecteur directeur *ou un point et la pente*.
  - Déterminer la pente ou un vecteur directeur d'une droite donnée par une équation ou une représentation graphique
  - Tracer une droite connaissant son équation cartésienne *ou réduite*.
  - *Etablir que trois points sont alignés ou non*
  - Déterminer si deux droites sont parallèles ou sécantes
  - Résoudre un système de deux équations linéaires à deux inconnues, déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes

## I - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs

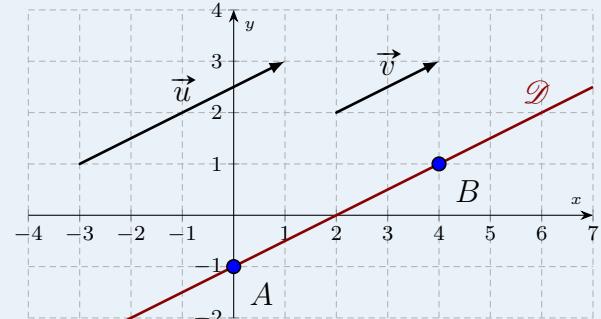
On se place dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  du plan.

### 1. Vecteurs directeurs

#### DÉFINITION

Soit  $\mathcal{D}$  une droite, et  $A$  et  $B$  deux points de  $\mathcal{D}$ . On appelle **vecteur directeur** de  $\mathcal{D}$  tout vecteur  $\vec{u}$  non nul colinéaire à  $\overrightarrow{AB}$ .

Autrement dit, le vecteur  $\vec{u}$  donne la direction de la droite  $\mathcal{D}$ .



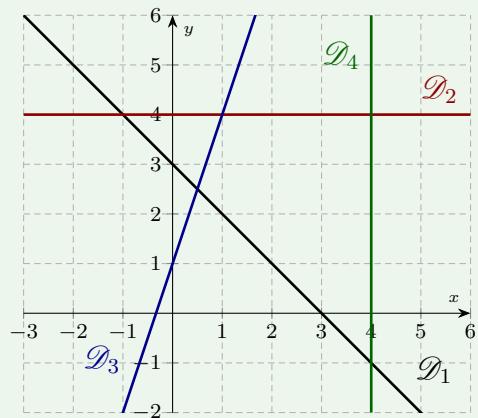
#### REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : Ici,  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont des vecteurs directeurs de la droite  $(AB)$ .

## EXEMPLE

Donnons les coordonnées de **plusieurs** vecteurs directeurs des droites  $\mathcal{D}_1$ ,  $\mathcal{D}_2$ ,  $\mathcal{D}_3$  et  $\mathcal{D}_4$ .

- $\mathcal{D}_1$  :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_2$  :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_3$  :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$
- $\mathcal{D}_4$  :  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$



► Exo 1

## 2. Équations cartésiennes

### PROPOSITION

Soit  $\mathcal{D}$  une droite et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$ . Alors  $\mathcal{D}$  possède une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ , appelée équation cartésienne de  $\mathcal{D}$ .

## EXEMPLE

Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}$  :  $4x - 8y + 3 = 0$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Un autre est donc  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Un point  $M(x; y)$  appartient à cette droitessi  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$  et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  sont colinéaires.

Il faut donc que  $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ . Cela donne alors :

$$\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = a(x - x_A) - (-b)(y - y_A) = 0$$

En développant, l'équation peut s'écrire :

$$ax + by + (-ax_A - by_A) = 0$$

En posant  $c = -ax_A - by_A$ , on trouve bien la forme voulue :  $\boxed{ax + by + c = 0}$ .

### COROLLAIRE

Si les coordonnées  $(x; y)$  d'un point  $M$  vérifient l'équation  $ax + by + c = 0$  d'une droite  $\mathcal{D}$ , alors  $M$  appartient à la droite  $\mathcal{D}$  dont un vecteur directeur est  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ .

## EXEMPLES

Déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

- $\mathcal{D}_1$  passant par le point  $A(3; 1)$  et de vecteur directeur  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$  :

On sait alors qu'une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_1$  est  $5x + y + c = 0$  où  $c$  reste à trouver.

De plus, en remplaçant  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$ , on obtient :

$$\begin{aligned} 5 \times 3 + 1 + c &= 0 \\ 16 + c &= 0 \\ c &= -16 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_1$  est donc  $5x + y - 16 = 0$ .

- $\mathcal{D}_2$  passant par les points  $B(5; 3)$  et  $C(1; -3)$  :

$\overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$ . On obtient alors l'équation  $-6x + 4y + c = 0$ .

Pour trouver  $c$ , on remplace  $x$  et  $y$  par les coordonnées de  $A$  ou  $B$ . Avec  $A$ , cela donne :

$$\begin{aligned} -6 \times 5 + 4 \times 3 + c &= 0 \\ -30 + 12 + c &= 0 \\ c &= 18 \end{aligned}$$

Une équation cartésienne de  $\mathcal{D}_2$  est donc  $-6x + 4y + 18 = 0$ . A noter que l'on peut simplifier cette équation pour obtenir  $-3x + 2y + 9 = 0$ .

► Exos 2,3

## MÉTHODES

Pour tracer une droite  $\mathcal{D}$  étant donnée son équation cartésienne, on peut :

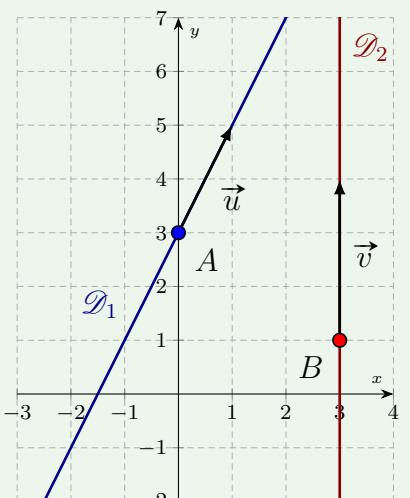
- Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à  $\mathcal{D}$  en remplaçant  $x$  ou  $y$  par des valeurs spécifiques ;
- Déterminer de la même manière les coordonnées d'un point, et utiliser un vecteur directeur.

## EXEMPLES

Soit  $\mathcal{D}_1 : 2x - y + 3 = 0$ .

- Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_1$  est  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ .
- Si  $x = 0$ , l'équation devient  $-y + 3 = 0$  donc  $y = 3$ . Alors  $A(0; 3) \in \mathcal{D}_1$ .

On peut donc tracer la droite  $\mathcal{D}_1$  dans le repère ci-contre. On remarque d'ailleurs que  $2x - y + 3 = 0 \iff y = 2x + 3$  (On appelle cette équation **l'équation réduite** de  $\mathcal{D}_1$ ). La droite  $\mathcal{D}_1$  peut donc être identifiée à la courbe d'une fonction affine.



Soit  $\mathcal{D}_2 : 3x - 9 = 0$ . Un vecteur directeur de  $\mathcal{D}_2$  est  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ . Ici, il n'y a pas de  $y$  donc il suffit de résoudre l'équation :

$$3x - 9 = 0 \iff 3x = 9 \iff x = 3$$

Tout point dont les coordonnées sont de la forme  $(3; y)$  avec  $y \in \mathbb{R}$  convient donc. On prend par exemple  $B(3; 1)$ .

## II - Systèmes de deux équations à deux inconnues

Résoudre un système à deux inconnues , c'est trouver le ou les couples  $(x; y)$  qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

### EXEMPLE

Le couple  $(2; 3)$  vérifie le système d'équations  $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$  car  $\begin{cases} 5 \times 2 - 2 \times 3 = 4 \\ -2 + 3 = 1 \end{cases}$

### 1. Résolution graphique

On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.

L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

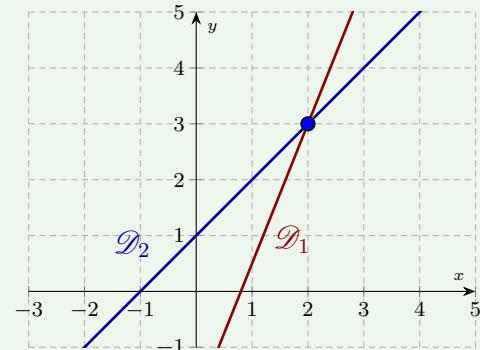
### EXEMPLE

On reprend le système précédent :  $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$

On trace les deux droites :

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1 : 5x - 2y - 4 &= 0 \\ \mathcal{D}_2 : -x + y - 1 &= 0\end{aligned}$$

Leur point d'intersection a pour coordonnées  $(2; 3)$ , correspondant à la solution testée dans l'exemple précédent.



### 2. Résolution algébrique

#### a) Méthode par combinaison linéaire

Le but est de faire des opérations entre les lignes pour faire disparaître des inconnues.

### EXEMPLE

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  le système suivant :  $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (L_1) \\ 2x + y = -1 & (L_2) \end{cases}$

On voit que les deux lignes contiennent le terme  $2x$ . On peut donc l'annuler en soustrayant la première ligne à la seconde ligne :

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 2x + y = -1 \end{array} \right. & \xrightarrow[L_2 \leftarrow L_2 - L_1]{} & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ 4y = -10 \end{array} \right. & \xrightarrow[\text{On résoud } L_2]{} & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 9 \\ y = -2,5 \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow[\text{On remplace } y]{} & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 7,5 = 9 \\ y = -2,5 \end{array} \right. & \xrightarrow[\text{On résoud } L_1]{} & \left\{ \begin{array}{l} 2x = 1,5 \\ y = -2,5 \end{array} \right. \\
 & \iff & \left\{ \begin{array}{l} x = 0,75 \\ y = -2,5 \end{array} \right. & & 
 \end{array}$$

► Exo 5.1,5.2

### b) Méthode par substitution

Le but est d'exprimer une variable en fonction d'une autre pour pouvoir l'éliminer dans une autre ligne.

#### EXEMPLE

Résolvons dans  $\mathbb{R}$  le système suivant :  $\begin{cases} 6x - 7y = 1 & (L_1) \\ x - 3y = 2 & (L_2) \end{cases}$

On va isoler  $x$  dans la seconde ligne pour le « réinjecter » dans la première.

$$\begin{array}{ccccc}
 \left\{ \begin{array}{l} 6x - 7y = 1 \\ x - 3y = 2 \end{array} \right. & \xrightarrow[\text{On isole } x]{} & \left\{ \begin{array}{l} 6x - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{array} \right. & \xrightarrow[\text{On réinjecte}]{} & \left\{ \begin{array}{l} 6(2 + 3y) - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{array} \right. \\
 & \xrightarrow[\text{On résoud } L_1]{} & \left\{ \begin{array}{l} 12 + 18y - 7y = 1 \\ x = 2 + 3y \end{array} \right. & \iff & \left\{ \begin{array}{l} 11y = -11 \\ x = 2 + 3y \end{array} \right. \\
 & \iff & \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = -2 + 3y \end{array} \right. & \xrightarrow[\text{On remplace } y]{} & \left\{ \begin{array}{l} y = -1 \\ x = -2 - 3 = -5 \end{array} \right. 
 \end{array}$$

► Exos 5,6