

# PROBABILITÉS

## I - Univers et évènements

### 1. Définitions de base

#### DÉFINITION

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.

Si l'on répète un très grand nombre de fois la même expérience indépendamment, alors la fréquence d'une issue va s'approcher de sa probabilité.

#### EXEMPLE

Si l'on lance un dé, alors les résultats possibles (les issues) constituent l'univers  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

#### DÉFINITION

Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit un sous-ensemble de  $\Omega$ .

#### EXEMPLE

Dans l'univers précédent, on peut considérer l'ensemble  $P$  : « Le résultat est pair ». On a donc  $P = \{2; 4; 6\}$ .

#### CAS PARTICULIERS

- On appelle **événement élémentaire** tout évènement ne contenant qu'un seul élément de  $\Omega$  (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble  $\Omega$  est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.

#### EXEMPLE

Dans l'univers précédent,  $\{1\}$  et  $\{3\}$  sont des éléments élémentaires.

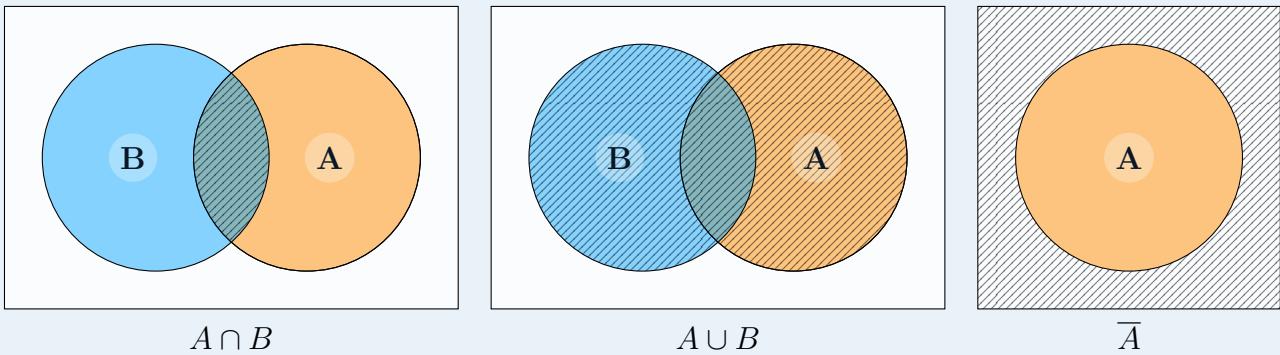
### 2. Opérations sur les évènements

#### DÉFINITIONS

On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- **L'intersection** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cap B$  ( $A$  inter  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$ .
- **L'union** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cup B$  ( $A$  union  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux.
- **Le complémentaire** de  $A$ , noté  $\bar{A}$  ( $A$  barre) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  qui

n'appartiennent pas à  $A$ .



### EXEMPLE

Dans une animalerie, on sélectionne au hasard un chien. L'univers  $\Omega$  est l'ensemble de tout les chiens dans cette animalerie. On se donne de plus les évènements  $A$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc » et  $B$  : « Le chien sélectionné a le poil beige ». On peut donc définir les évènements suivants :

- $A \cap B$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc et beige » ;
- $A \cup B$  : « Le chien sélectionné a le poil blanc, beige ou les deux à la fois ».
- $\bar{A}$  : « Le chien sélectionné n'a pas le poil blanc ».

## II - Probabilités sur un univers fini

### 1. Généralités

#### DÉFINITION

Donner la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire signifie donner la probabilité de chaque issue.

#### PROPOSITIONS

Pour obtenir la probabilité d'un évènement, on fait la somme des probabilités de chaque issue le constituant.

Pour tout évènement  $A$  d'une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \quad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

### EXEMPLE

On lance un dé truqué. La probabilité de tomber sur chaque face est décrite dans le tableau ci-dessous :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité associée	0,15	0,1	0,2	0,25	0,25	0,05

On considère l'évènement  $A$  : « On tombe sur un nombre inférieur à 3 ». Alors  $\mathbb{P}(A) = 0,15 +$

$$0,1 + 0,2 = 0,35.$$

## 2. Cas équiprobable

### EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Soit A l'évènement « On tombe sur un nombre pair ». 3 des 6 faces d'un dé contiennent un nombre pair donc  $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$ .

### DÉFINITION

On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité.

### PROPOSITION

Dans ce cas, chaque issue a pour probabilité  $\frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$ . La probabilité d'un évènement A est alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$