Suites : Généralités

I - Premières définitions

DÉFINITION

Une suite est une séquence ordonnée de nombres réels.

EXEMPLES

La suite des nombres pairs est $0; 2; 4; \ldots$

DÉFINITION

Une suite peut être vue comme une fonction $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & u(n) \end{array}$. On notera plutôt u_n (u indice n) au lieu de $u(n)$.

REMARQUE

Par défaut, on numérote une suite à partir de 0, mais on peut aussi commencer à n'importe quel entier.

EXEMPLES

— Reprenons la suite u des nombres pairs. Le premier nombre pair est 0, on peut alors noter $u_0 = 0$, puis $u_1 = 2, \ldots$ On pourrait aussi commencer la numérotation à partir de 1. On aurait alors $u_1 = 0, u_2 = 2, \ldots$. u_0 ne serait alors pas défini.

— On prend la suite u de nombres suivants : 0, 1, 3, 6, 10, $\ldots$. Si son premier terme (0) est d'indice 23, alors son quatrième terme (6) est le terme d'indice 26.

▶ Exos 12->15 et 21->24 p90

II - Modes de générations de suites

Une suite peut être générée de trois manières différentes :

1. Par une expression explicite

DÉFINITION

Il s'agit d'une suite vérifiant $u_n = f(n)$ avec f une fonction.

EXEMPLE

On se donne la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 3n$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	0	-2	-2	0	4	10	18

2. Par une relation de récurrence

DÉFINITION

Définir une suite par récurrence revient à donner son premier terme puis une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du précédent.

EXEMPLES

— On se donne la suite (v_n) dont le premier terme est 1 et dont le terme suivant est obtenu en doublant le terme précédent. On a alors $v_0 = 1$, v_1 est le double de v_0 donc $v_1 = 2 \times v_0 = 2$, puis de même $v_3 = 4$, $v_4 = 8$, $v_5 = 16\ldots$ Pour résumer cette relation, on note $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

$$\boxed{v_0 = 1} \xrightarrow{\times 2} \boxed{v_1 = 2} \xrightarrow{\times 2} \boxed{v_2 = 4} \xrightarrow{\times 2} \boxed{v_3 = 8} \xrightarrow{\times 2} \boxed{v_4 = 16} \xrightarrow{\times 2} \cdots$$

— Soit (w_n) la suite définie par $w_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = 2w_n + 1$. Alors $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$, $w_2 = 2w_1 + 1 = 3$, $w_3 = 7\ldots$

$$\boxed{w_0 = 0} \xrightarrow{\times 2,\ +1} \boxed{w_1 = 1} \xrightarrow{\times 2,\ +1} \boxed{w_2 = 3} \xrightarrow{\times 2,\ +1} \boxed{w_3 = 7} \xrightarrow{\times 2,\ +1} \boxed{w_4 = 15} \xrightarrow{\times 2,\ +1} \cdots$$

3. Par une définition plus abstraite

EXEMPLE

Soit (w_n) la suite des chiffres de l'écriture décimale de $\sqrt{2} = 1.414213\ldots$. Alors $w_0 = 1$, $w_1 = 4$, $w_2 = 1$, $w_3 = 4$, $w_4 = 2$, $\ldots$

4. Un exemple pour résumer

EXEMPLE

On se donne les trois suites suivantes :

— La suite u des nombres pairs.

— La suite v, qui vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = 2n$.

— La suite w telle que $w_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = w_n + 2$.

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	0	2	4	6	8	10	12
v_n	0	2	4	6	8	10	12
w_n	0	2	4	6	8	10	12

En fait, on peut montrer que ces trois suites sont égales.

- On peut définir des suites plus compliquées par récurrence, par exemple à partir de deux termes initiaux : $u_0 = 2, u_1 = 3$ et $u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$
- C'est la définition par récurrence qui donne du sens aux suites, mais elle peut être plus difficile à manipuler. Dans la pratique, la définition par une fonction est préférable. Il existe des méthodes plus ou moins poussées pour passer d'une notation à une autre (hors programmes).
- Exos 20,25,26,43,45,46,48,(54)
- Pour ceux qui ont de l'avance : 28,47,50,51

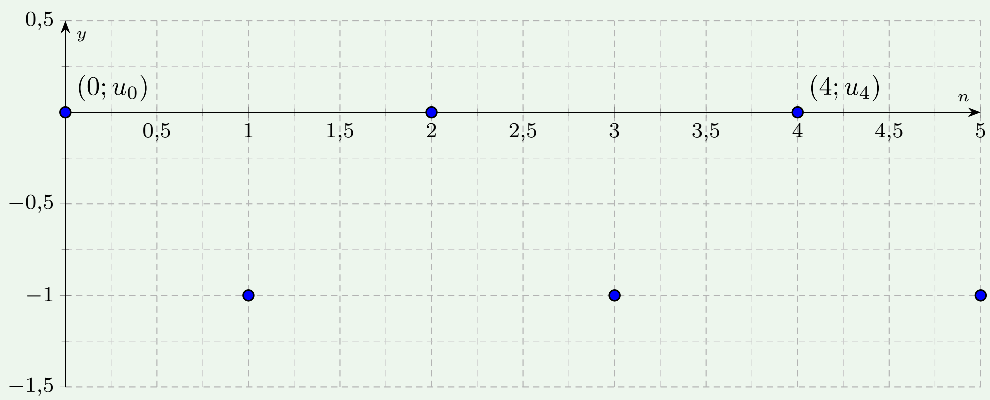
III - Représentation graphique d'une suite

MÉTHODE

On peut représenter une suite (u_n) dans un repère du plan en plaçant les points (n, u_n) pour $n \in \mathbb{N}$.

EXEMPLE

En prenant la suite (v_n) définie par $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n^2 - 1 \end{cases}$, on obtient :



- Calculer des valeurs à la main avant de faire le graphique
- Exos 17,18,19, si besoin : 58,60

IV - Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

Soit $u = (u_n)$ une suite.
- On dit que la suite u est **croissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- u est dite **décroissante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n \leq 0$.
- u est dite **constante** lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$, autrement dit lorsque $u_{n+1} - u_n = 0$.

EXEMPLE

On se donne la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 - n$. On a $u_{n+1} - u_n = 3 - (n+1) - (3-n) = \cancel{3} - \cancel{n} - 1 - \cancel{3} + \cancel{n} = -1 \leq 0$ donc la suite u est décroissante.

- Exos 31,59,61,65->68

DÉROULÉ

- **Total : 3.5 semaines**
- Semaine 1
  - 30m - Activité intro (promenade)
  - 30m - Début du cours : I
  - 1h30 - Exercices livre : Def suites
  - 30m - Activité récurrence
- Vacances - Semaine 2
  - 20m - Cours II à compléter
  - 2h - Exercices livre
  - 1h30 - Cours III et Exos
- Semaine 3
  - 2h - Cours IV et exos