



LGT Jean Rostand  
1<sup>ère</sup> ST2S

# MATHÉMATIQUES

M. DELAUNEY

# TABLE DES MATIÈRES

---

CHAPITRE I. PROPORTIONS, VARIATIONS ET POURCENTAGES.....	1
1 - Proportions et pourcentages	1
2 - Evolutions et pourcentages	1
CHAPITRE II. FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS .....	4
1 - Définitions, notations, représentation	4
2 - Résolution graphique d'équations et d'inéquations	5
3 - Etudes de fonctions	7
4 - Taux de variation d'une fonction	8
CHAPITRE III. SUITES : GÉNÉRALITÉS .....	10
1 - Premières définitions	10
2 - Modes de générations de suites	10
3 - Représentation graphique d'une suite	12
4 - Sens de variation d'une suite	12
CHAPITRE IV. FONCTIONS AFFINES .....	13
1 - Généralités	13
2 - Recherche de l'équation réduite d'une droite	14
3 - Tableau de signe d'une fonction affine	15
CHAPITRE V. FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 2.....	16
1 - Généralités	16
2 - Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$	17
3 - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$	18
CHAPITRE VI. SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES.....	22
1 - Suites arithmétiques	22
2 - Suites géométriques, cas positif	23
CHAPITRE VII. DÉRIVATION - POINT DE VUE LOCAL .....	25
1 - Sécantes et tangentes	25
2 - Lecture du nombre dérivé	25
3 - Lien avec le taux de variation	26
CHAPITRE VIII. CONDITIONNEMENT.....	27
1 - Rappels de vocabulaire ensembliste	27
2 - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés	27
3 - Rappels de probabilités	28
4 - Probabilités conditionnelles	29
CHAPITRE IX. FONCTION DÉRIVÉE .....	31
1 - Généralités, règles de calcul	31
2 - Lien avec les variations	32
CHAPITRE X. VARIABLES ALÉATOIRES.....	33
1 - Définitions	33
2 - Espérance d'une variable aléatoire	33
3 - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général	34
4 - Épreuves et lois de Bernoulli	35

# PROPORTIONS, VARIATIONS ET POURCENTAGES

---

## I - Proportions et pourcentages

---

### 1. Proportions

#### DÉFINITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et  $A$  un sous-ensemble de  $E$  ( $A \subset E$ ). On note respectivement  $n_A$  et  $n_E$  le nombre d'éléments de  $A$  et  $E$ . La proportion d'éléments de  $A$  dans  $E$  est le nombre  $p = \frac{n_A}{n_E}$ .

#### EXEMPLE

Dans une classe de 1ST2S comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc  $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$ .

#### REMARQUE

$p$  est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

### 2. Proportions de proportions

#### PROPOSITION

Soit  $E$  un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments,  $A \subset E$  et  $B \subset A$ . On note  $p_1$  la proportion de  $A$  dans  $E$  et  $p_2$  la proportion de  $B$  dans  $A$ . Alors la proportion de  $B$  dans  $E$  est égale à  $p_1 \times p_2$ .

#### EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est  $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$ .

## II - Evolutions et pourcentages

---

## 1. Taux d'évolution

### DÉFINITION

On considère une valeur  $V_0$  qui subit une évolution pour arriver à une valeur  $V_1$ .

- La variation absolue est  $V_1 - V_0$ .
- La variation relative ou taux d'évolution est  $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$ .

### REMARQUE

- Si  $t > 0$ , il s'agit d'une augmentation.
- Si  $t < 0$ , il s'agit d'une diminution.

### EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de  $180 - 150 = 30$  euros et son taux d'évolution est  $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$ . Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

### PROPRIÉTÉ

Pour une valeur  $V_0$  qui subit une évolution d'un taux  $t$ , elle devient  $(1 + t) \times V_0$ .  $1 + t$  est appelé coefficient multiplicateur ( noté CM ).

### EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à  $(1 + \frac{20}{100}) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$  euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à  $(1 - 0.2) \times 30 = 24$  euros.

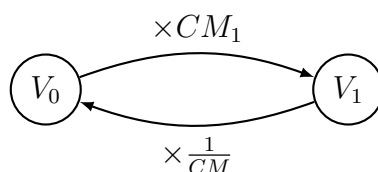
## 2. Evolution réciproque

### DÉFINITION

Une valeur  $V_0$  subit une évolution de taux  $t$  pour passer à  $V_1$ . On appelle évolution réciproque le taux  $t'$  d'évolution de la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_0$ .

### PROPOSITION

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution :  
 $CM' = \frac{1}{CM}$



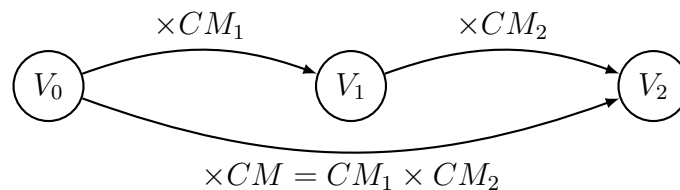
### EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est  $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$ , ce qui correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors  $4.56 \times 0.877 = 4$  millions d'habitants.

## 3. Evolutions successives

### PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur  $V_0$  non nulle à la valeur  $V_1$ , et une seconde fait passer la valeur  $V_1$  à la valeur  $V_2$ , alors l'évolution globale fait passer la valeur  $V_0$  à la valeur  $V_2$ . Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.



### EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une nouvelle hausse de 10%. Le coefficient multiplicateur global est donc  $(1 + \frac{8}{100}) \times (1 + \frac{10}{100}) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$ . Le prix a donc augmenté de 18.8% et pas de 18% !

# FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

## I - Définitions, notations, représentation

### DÉFINITION

Soit  $D \subset \mathbb{R}$ . On appelle fonction  $f$  sur l'ensemble  $D$  le processus qui à tout nombre  $x \in D$  associe un unique réel noté  $f(x)$ . On note  $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ . On dit alors que :

$$x \longmapsto f(x)$$

- $f(x)$  est l'image de  $x$
- $x$  est un antécédent de  $f(x)$
- $D$  est l'ensemble ( ou domaine ) de définition de  $f$

### EXEMPLE

On définit la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

$$x \longmapsto x^2 - x$$

- L'image de 2 par la fonction  $f$  est 2 :  $f(2) = 2^2 - 2 = 2$ .
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction  $f$ . -1 en est aussi un car  $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$ .

### REMARQUE

Chaque nombre dans  $D$  possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

### DÉFINITION

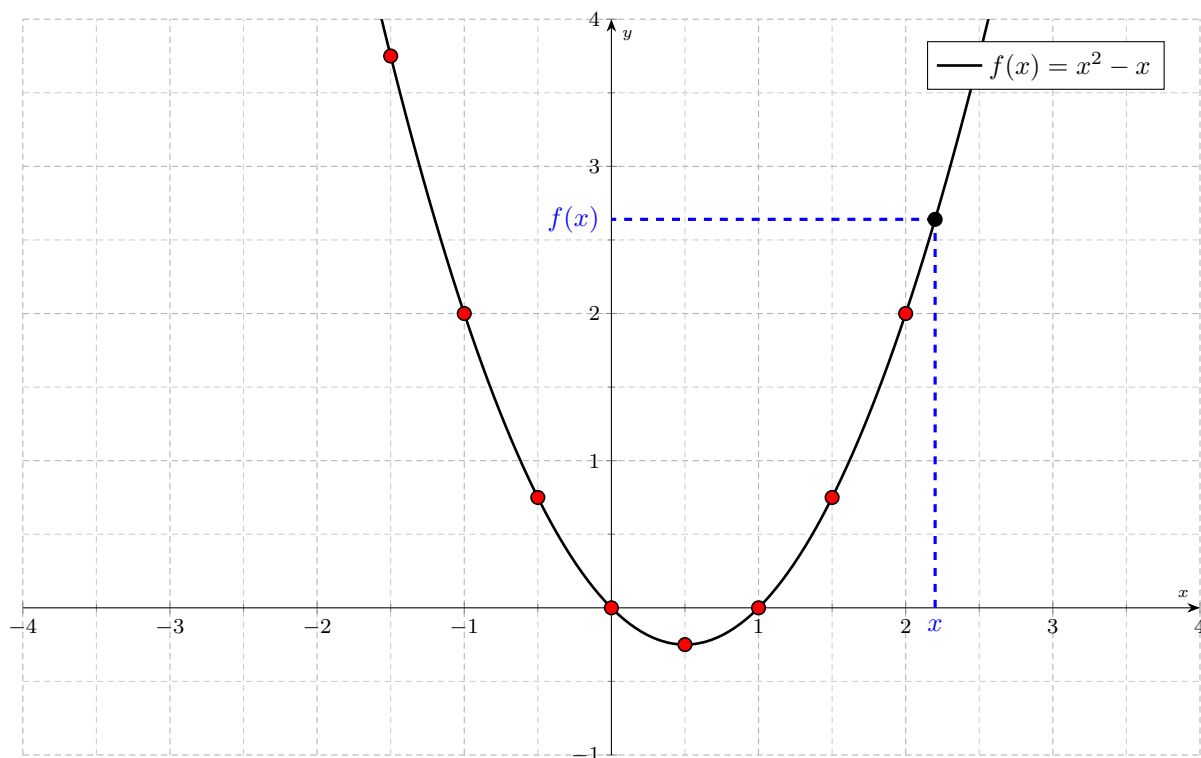
Dans un repère du plan, l'ensemble des points  $(x, f(x))$  pour  $x \in D$  constitue la courbe de  $f$ . L'équation de la courbe de  $f$  est  $y = f(x)$  pour  $x \in D$ .

### MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

### EXEMPLE

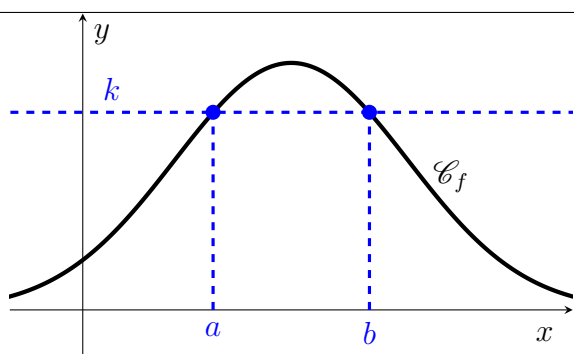
$x$	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									



## II - Résolution graphique d'équations et d'inéquations

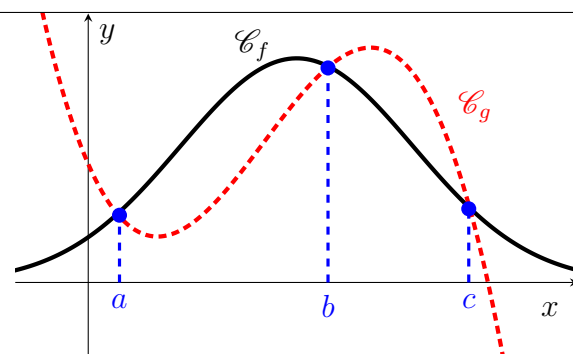
### 1. Equations

#### MÉTHODE



Résoudre l'équation  $f(x) = k$  signifie trouver les antécédents de  $k$  par la fonction  $f$ . Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est  $k$ .  
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

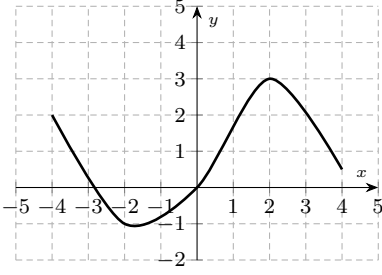
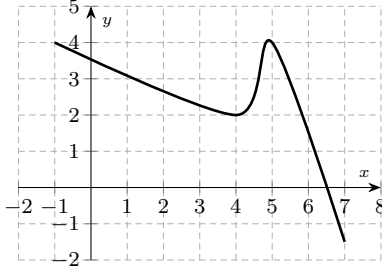
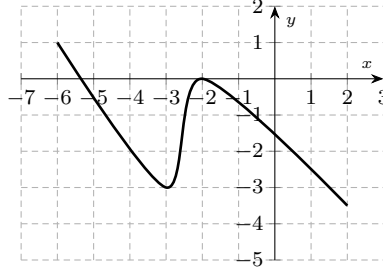
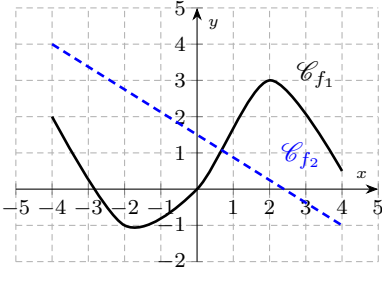
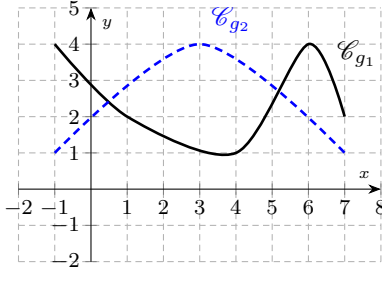
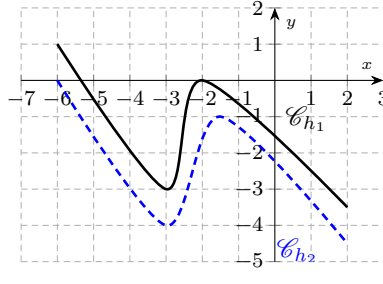
$$S = \{a; b\}$$



Résoudre l'équation  $f(x) = g(x)$  signifie trouver les nombres qui ont la même image par  $f$  et  $g$ . Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .  
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

$$S = \{a; b; c\}$$

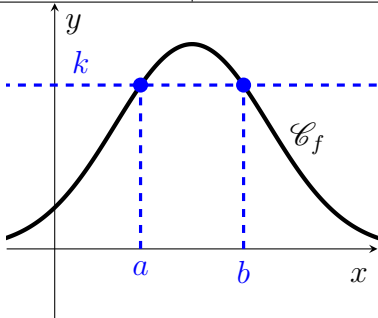
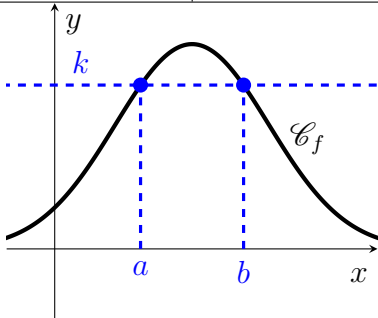
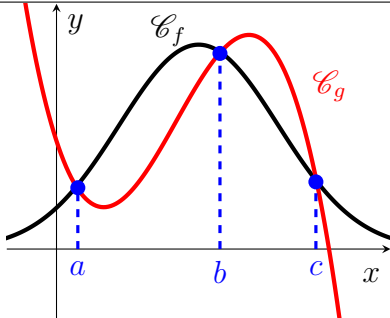
## EXEMPLES

		
<p>Résoudre <math>f(x) = 1</math> :</p>	<p>Résoudre <math>g(x) = 1</math> :</p>	<p>Résoudre <math>h(x) = -4</math> :</p>
		
<p>Résoudre <math>f_1(x) = f_2(x)</math> :</p>	<p>Résoudre <math>g_1(x) = g_2(x)</math> :</p>	<p>Résoudre <math>h_1(x) = h_2(x)</math> :</p>

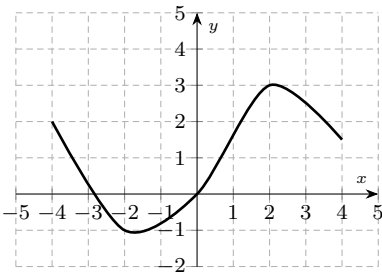
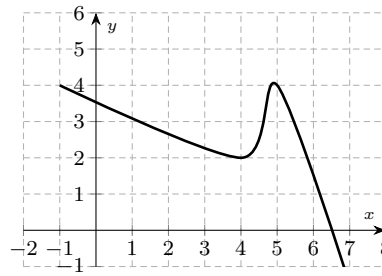
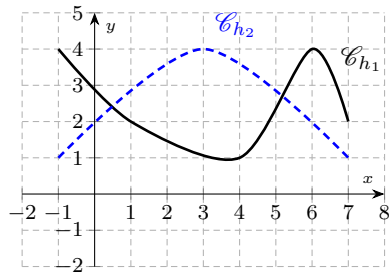
## 2. Inéquations



## MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à <math>k</math>. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]a; b[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) \leq k</math> signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à <math>k</math>. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation <math>y = k</math>. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	<p>Résoudre l'inéquation <math>f(x) &gt; g(x)</math> signifie trouver les nombres dont l'image par <math>f</math> est supérieure à l'image par <math>g</math>. Cela revient à chercher l'abscisse des points de <math>\mathcal{C}_f</math> situés "au dessus" des points de <math>\mathcal{C}_g</math>. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :</p> $S = ]-\infty; a[ \cup ]b; c[$

## EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) \leq 1$ :	Résoudre $g(x) > 1$ :	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$ :

## III - Etudes de fonctions

### 1. Etude des variations

#### DÉFINITION

Soit  $f$  définie sur un intervalle  $I$ .

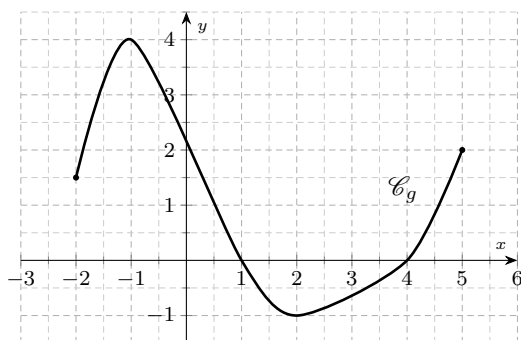
- On dit que  $f$  est croissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images augmentent aussi : Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \leq f(y)$ .
- On dit que  $f$  est décroissante sur  $I$  si lorsque la variable augmente dans  $I$ , les images

diminuent : Pour  $x, y \in I$ , si  $x \leq y$  alors  $f(x) \geq f(y)$ .

## MÉTHODE

Dresser le tableau de variations d'une fonction  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction  $f$  est croissante, décroissante ou constante.

## EXEMPLE



On se donne la fonction  $g$ , définie sur  $[-2; 5]$  et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de  $g$  sous forme du tableau de variations suivant :

$x$	-2	-1	2	5
$g(x)$	1.5	4	-1	2

## 2. Etude du signe

## MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction  $f$ , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

$x$	-2	1	4	5	
$f(x)$	+	○	-	○	+

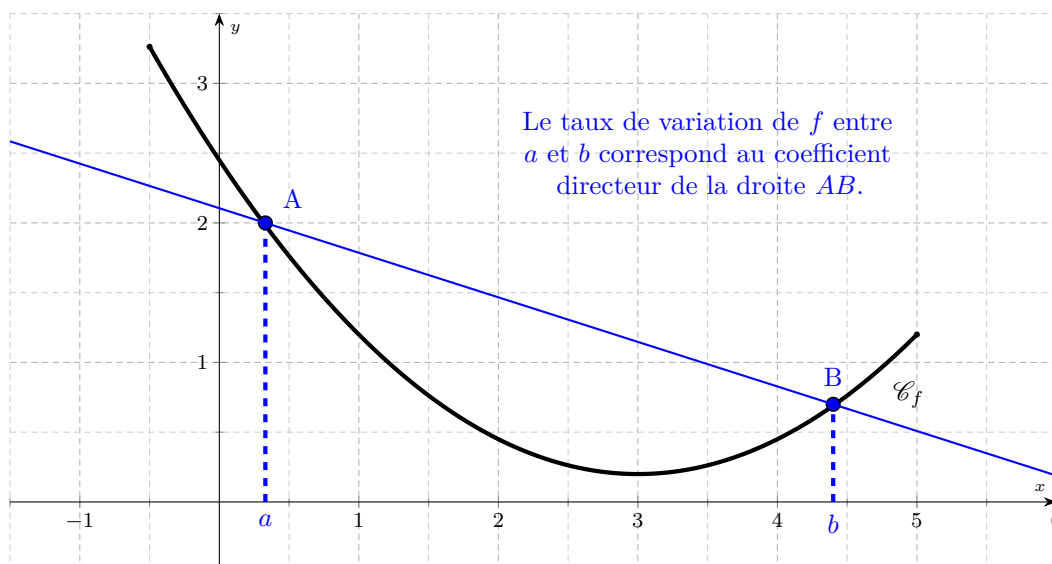
## IV - Taux de variation d'une fonction

## DÉFINITION

Le taux de variation entre  $a$  et  $b$  d'une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  est le quotient  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  pour  $a$  et  $b$  distincts et appartenant à  $I$ .

## REMARQUE

Ce taux correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de  $f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $b$ .



### EXEMPLE

Le taux de variation entre  $-1$  et  $3$  de la fonction  $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  est :

$$x \longmapsto x^2 - x$$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{6 - 2}{4} = 1$$

### PROPOSITION

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$ .  $f$  est monotone (c'est-à-dire croissante ou bien décroissante sur  $I$ ) si et seulement si le signe du taux de variation entre deux nombres quelconques de  $I$  est constant.

En pratique :

- Un taux de variation toujours positif sur  $I$  équivaut à  $f$  croissante sur  $I$ .
- Un taux de variation toujours négatif sur  $I$  équivaut à  $f$  décroissante sur  $I$ .
- Un taux de variation toujours nul sur  $I$  équivaut à  $f$  constante sur  $I$ .

# SUITES : GÉNÉRALITÉS

## I - Premières définitions

### DÉFINITION

Une suite est une séquence ordonnée de nombres réels.

### EXEMPLES

La suite des nombres pairs est  $0; 2; 4; \dots$

### DÉFINITION

Une suite peut être vue comme une fonction  $u : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ . On notera plutôt  $u_n$  ( $u$  indice  $n$ ) au lieu de  $u(n)$ .

### REMARQUE

Par défaut, on numérote une suite à partir de 0, mais on peut aussi commencer à n'importe quel entier.

### EXEMPLES

- Reprenons la suite  $u$  des nombres pairs. Le premier nombre pair est 0, on peut alors noter  $u_0 = 0$ , puis  $u_1 = 2, \dots$ . On pourrait aussi commencer la numérotation à partir de 1. On aurait alors  $u_1 = 0, u_2 = 2, \dots$ .  $u_0$  ne serait alors pas défini.
- On prend la suite  $u$  de nombres suivants : 0, 1, 3, 6, 10,  $\dots$ . Si son premier terme ( 0 ) est d'indice 23, alors son quatrième terme ( 6 ) est le terme d'indice 26.

## II - Modes de générations de suites

Une suite peut être générée de trois manières différentes :

### 1. Par une expression explicite

#### DÉFINITION

Il s'agit d'une suite vérifiant  $u_n = f(n)$  avec  $f$  une fonction.

#### EXEMPLE

On se donne la suite  $(u_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par  $u_n = n^2 - 3n$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$u_n$	0	-2	-2	0	4	10	18

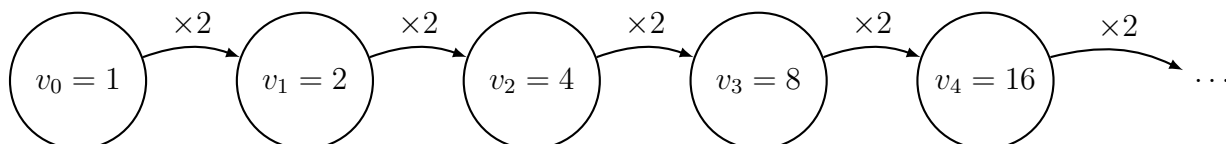
## 2. Par une relation de récurrence

### DÉFINITION

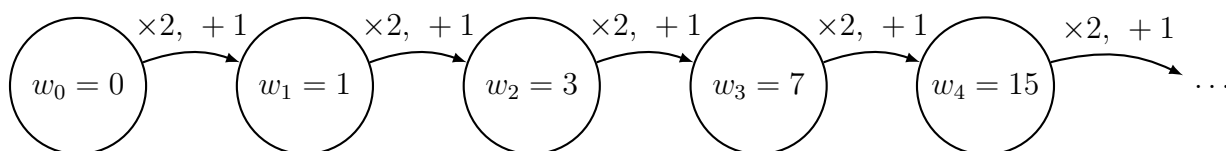
Définir une suite par récurrence revient à donner son premier terme puis une relation permettant de calculer le terme suivant à partir du précédent.

### EXEMPLES

- On se donne la suite  $(v_n)$  dont le premier terme est 1 et dont le terme suivant est obtenu en doublant le terme précédent. On a alors  $v_0 = 1$ ,  $v_1$  est le double de  $v_0$  donc  $v_1 = 2 \times v_0 = 2$ , puis de même  $v_3 = 4$ ,  $v_4 = 8$ ,  $v_5 = 16 \dots$  Pour résumer cette relation, on note  $u_{n+1} = 2 \times u_n$ .



- Soit  $(w_n)$  la suite définie par  $w_0 = 0$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $w_{n+1} = 2w_n + 1$ . Alors  $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$ ,  $w_2 = 2w_1 + 1 = 3$ ,  $w_3 = 7 \dots$



## 3. Par une définition plus abstraite

### EXEMPLE

Soit  $(w_n)$  la suite des chiffres de l'écriture décimale de  $\sqrt{2} = 1.414213 \dots$ . Alors  $w_0 = 1$ ,  $w_1 = 4$ ,  $w_2 = 1$ ,  $w_3 = 4$ ,  $w_4 = 2$ ,  $\dots$

## 4. Un exemple pour résumer

### EXEMPLE

On se donne les trois suites suivantes :

- La suite  $u$  des nombres pairs.
- La suite  $v$ , qui vérifie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 2n$ .
- La suite  $w$  telle que  $w_0 = 0$ , et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = w_n + 2$ .

$n$	0	1	2	3	4	5	6
$u_n$	0	2	4	6	8	10	12
$v_n$	0	2	4	6	8	10	12
$w_n$	0	2	4	6	8	10	12

En fait, on peut montrer que ces trois suites sont égales.

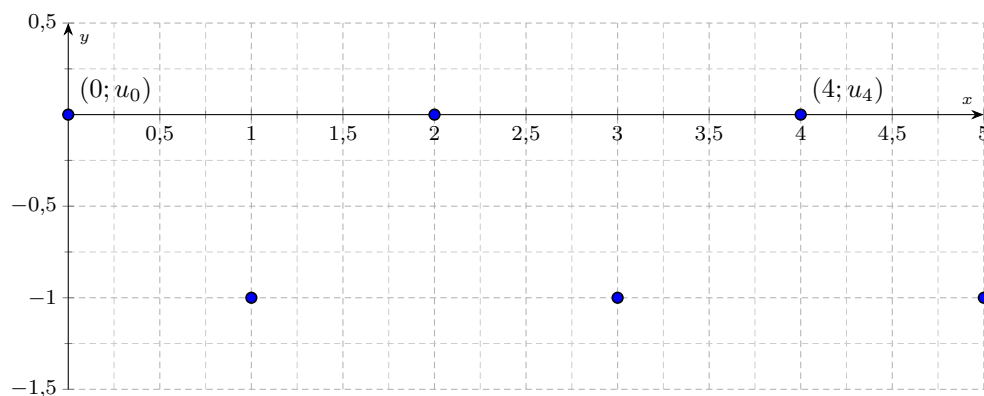
### III - Représentation graphique d'une suite

#### MÉTHODE

On peut représenter une suite  $(u_n)$  dans un repère du plan en plaçant les points  $(n, u_n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

#### EXEMPLE

En prenant la suite  $(v_n)$  définie par  $\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = v_n^2 - 1 \end{cases}$ , on obtient :



### IV - Sens de variation d'une suite

#### DÉFINITION

Soit  $u = (u_n)$  une suite.

- On dit que la suite  $u$  est **croissante** lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ , autrement dit lorsque  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- $u$  est dite **décroissante** lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \leq u_n$ , autrement dit lorsque  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- $u$  est dite **constante** lorsque pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = u_n$ , autrement dit lorsque  $u_{n+1} - u_n = 0$ .

#### EXEMPLE

On se donne la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_n = 3 - n$ . On a  $u_{n+1} - u_n = 3 - (n + 1) - (3 - n) = 3 - n - 1 - 3 + n = -1 \leq 0$  donc la suite  $u$  est décroissante.

# FONCTIONS AFFINES

## I - Généralités

### DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels donnés.

### EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$ ,  $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$  et  $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$  sont des fonctions affines.

### CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$  (ici,  $b = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée **fonction linéaire**.
- $x \mapsto b$  (ici,  $a = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée **fonction constante**.

### PROPRIÉTÉ

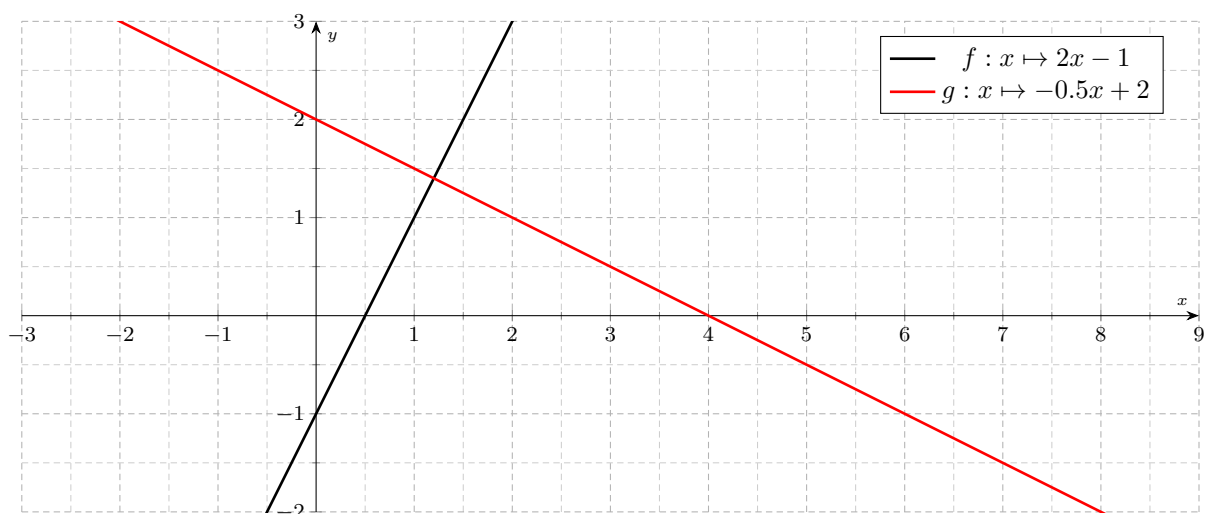
Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une **droite** qui coupe l'axe des ordonnées.

### VOCABULAIRE

Dans un repère, soit  $d$  la droite représentant une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ . On dit que :

- $a$  est le **coefficient directeur** de  $d$ .
- $b$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $d$ .
- $y = ax + b$  est l'équation réduite de  $d$ .

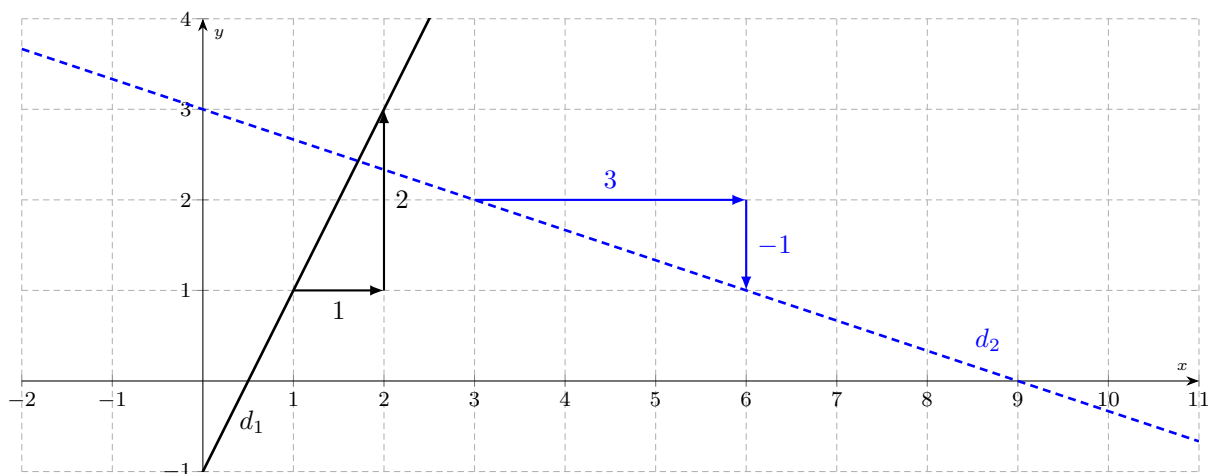
### EXEMPLE



## II - Recherche de l'équation réduite d'une droite

### 1. Par lecture graphique

#### MÉTHODE



- Pour  $d_1$  : Lorsque j'avance d'un carreau vers la droite, je monte de deux carreaux. Le coefficient directeur de  $d_1$  est donc égal à  $\frac{2}{1} = 2$ . L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $-1$ . Alors l'équation réduite de  $d_1$  est  $y = 2x - 1$ .
- Pour  $d_2$  : Lorsque j'avance de trois carreaux vers la droite, je descends d'un carreau. Le coefficient directeur de  $d_2$  est donc égal à  $\frac{-1}{3}$ . L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $3$ . Alors l'équation réduite de  $d_1$  est  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ .

Plus généralement, on a  $a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$ .

### 2. En connaissant deux points

#### PROPOSITION

Si  $A(x_A, y_A)$  et  $B(x_B, y_B)$  sont deux points appartenant à une droite  $d$  d'équation réduite  $y = ax + b$ , alors on a :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

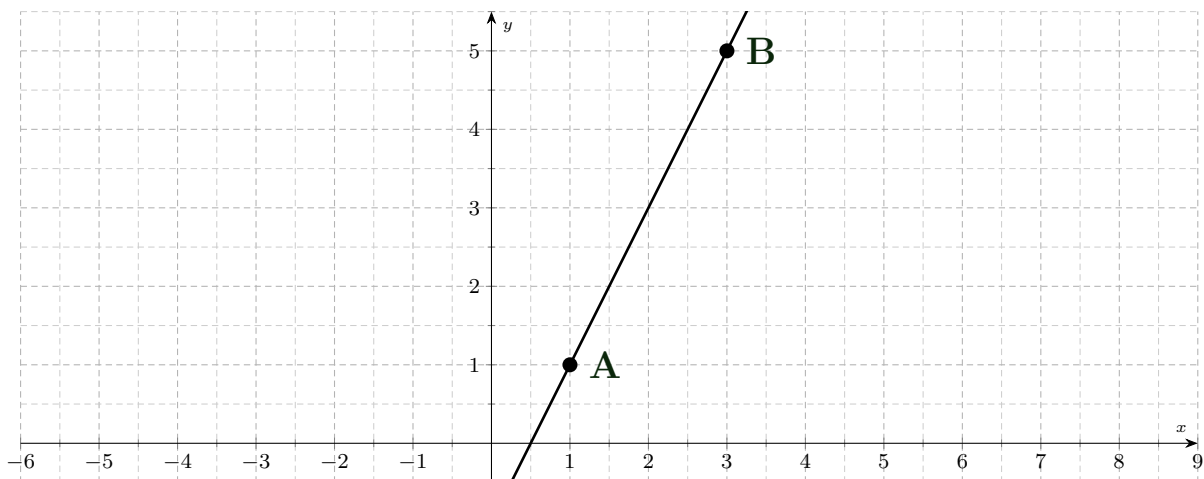
#### REMARQUE

Cette formule est la même que celle du taux de variation d'une fonction !

#### EXEMPLE

Soient  $A(1,1)$  et  $B(3,5)$  deux points appartenant à une droite  $d$ . Alors son coefficient directeur est égal à  $\frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$ . L'équation réduite de  $d$  est donc  $y = 2x + b$ . En remplaçant  $x$  et  $y$  par les coordonnées d'un des deux points donnés ( on prendra B ici ), on obtient l'équation suivante :  $5 = 2 \times 3 + b$  soit donc  $5 = 6 + b$  et alors  $5 - 6 = b$  puis  $b = -1$ . L'équation réduite de  $d$  est alors  $y = 2x - 1$ .





### III - Tableau de signe d'une fonction affine

#### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine avec  $a \neq 0$ . Alors  $f(x) = 0$  si et seulement si  $ax + b = 0$  ssi  $ax = -b$  ssi  $x = -\frac{b}{a}$ . Le tableau de signes de  $f$  dépend du signe de  $a$  :

Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

# FONCTIONS POLYNOMIALES DE DEGRÉ 2

## I - Généralités

### DÉFINITION

On appelle fonction polynomiale de degré 2 toute fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

Où  $a, b, c \in \mathbb{R}$  et  $a \neq 0$ .

### EXEMPLES

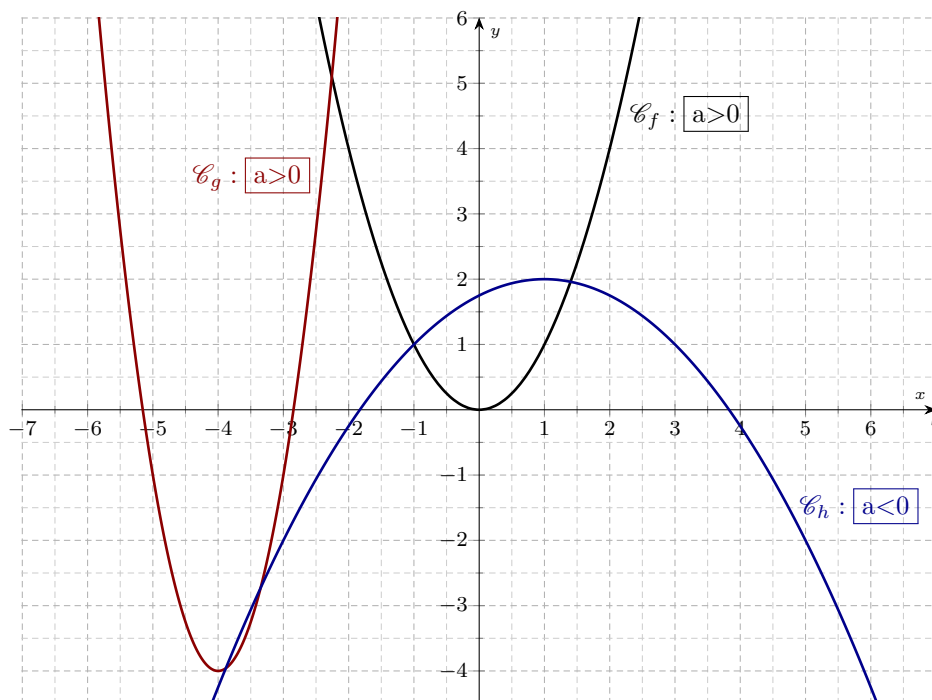
$f : x \mapsto x^2$ ,  $g : x \mapsto 3x^2 - 4$  et  $h : x \mapsto 2 - 0,3x^2$  sont des fonctions polynomiales de degré 2.

► L'appellation est un peu lourde... On dira plutôt fonction de degré 2.

### PROPOSITION

La représentation graphique d'une fonction de degré 2 est une parabole.

### EXEMPLES



### REMARQUE

Le terme constant (sans  $x$ , c'est-à-dire  $c$ ) est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer  $c$  décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

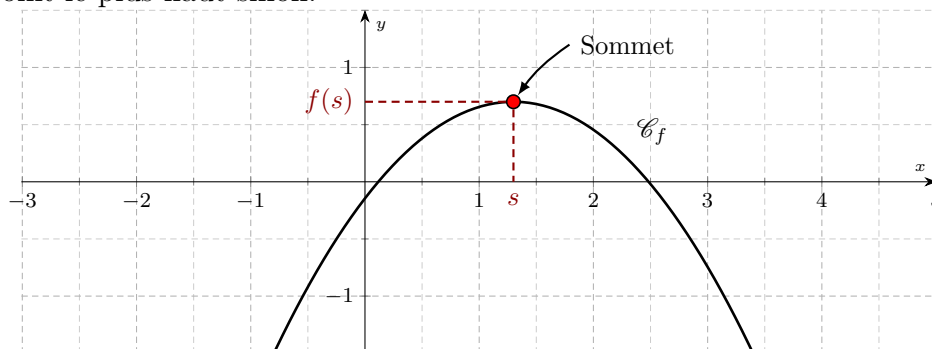
## PROPRIÉTÉS

Soit  $f$  une fonction de degré 2.

- Si  $a \geq 0$ ,  $f$  est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.
- Si  $a \leq 0$ ,  $f$  est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.

## DÉFINITION

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si  $a > 0$ , le point le plus haut sinon.



## PROPRIÉTÉS

On se donne  $f$  une fonction de degré 2 et  $s$  l'abscisse du sommet de la parabole associée.

- Les coordonnées de son sommet sont donc  $(s, f(s))$ .
- La parabole associée possède pour axe de symétrie la droite parallèle à l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.
- On en déduit le tableau de variations de  $f$  :

Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$s$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(s)$	$+\infty$

Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$s$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$f(s)$	$-\infty$

► On verra dans la suite comment trouver algébriquement (par le calcul) les coordonnées de ce sommet, dans des cas particuliers.

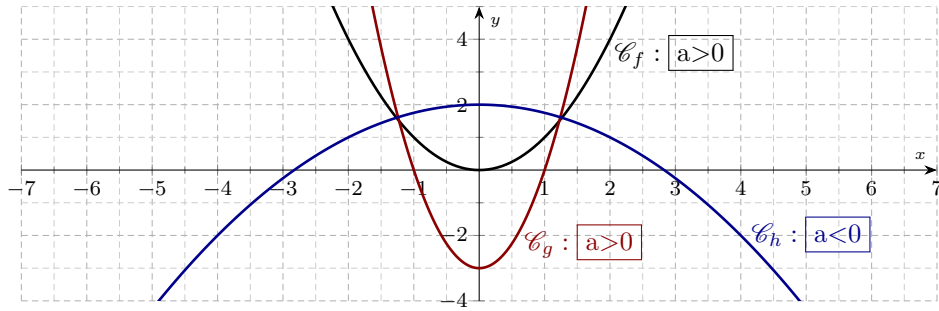
## II - Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$

### PROPRIÉTÉS

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + c$  une fonction de degré 2.

- Les paraboles d'équation  $y = ax^2 + c$  ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.
- Les coordonnées du sommet de cette parabole sont  $(0; c)$ .

## EXEMPLES



## EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto 5x^2 - 2$ . Les coordonnées du sommet de la parabole associée sont  $(0; -2)$ .

## MÉTHODE

Pour déterminer l'expression d'une fonction  $f : x \mapsto ax^2 + c$  à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord  $c$  en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine  $a$  en résolvant une équation.

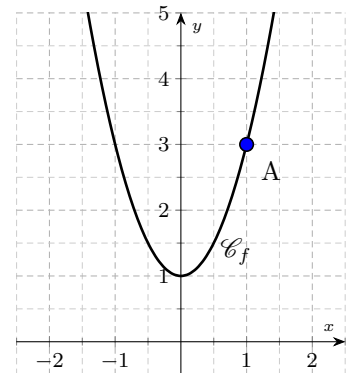
## EXEMPLE

On a représenté une fonction  $f : x \mapsto ax^2 + c$  sur le repère ci-contre.

On voit directement que  $c = 1$ , d'où  $f : x \mapsto ax^2 + 1$ .

On se donne maintenant un point sur la courbe de  $f$ , par exemple  $A(1; 3)$ . Cela signifie que  $f(1) = 3$ , autrement dit  $a \times 1^2 + 1 = 3$ , soit donc  $a + 1 = 3$ , d'où  $a = 2$ .

On a alors  $f : x \mapsto 2x^2 + 1$ .



## III - Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$

### 1. Généralités

## PROPOSITION

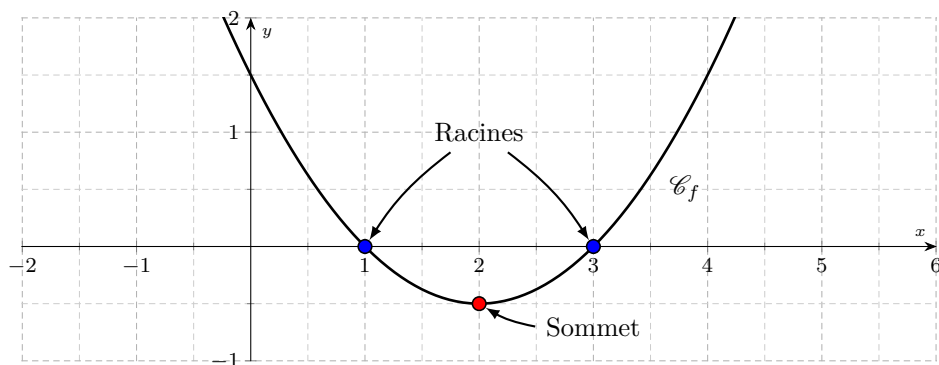
Les fonctions du type  $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$  sont des fonctions de degré 2. On dit que cette forme est l'écriture factorisée de  $f$  (lorsqu'elle existe).

$$\begin{aligned} \text{En effet, } a(x - x_1)(x - x_2) &= a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) \\ &= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

Donc  $a(x - x_1)(x - x_2) = ax^2 + bx + c$  avec  $b = -(ax_1 + ax_2)$  et  $c = ax_1x_2$ .

## DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction de degré 2. On appelle **racines** de  $f$  les solutions de l'équation  $f(x) = 0$ . Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de  $f$  et l'axe des abscisses.



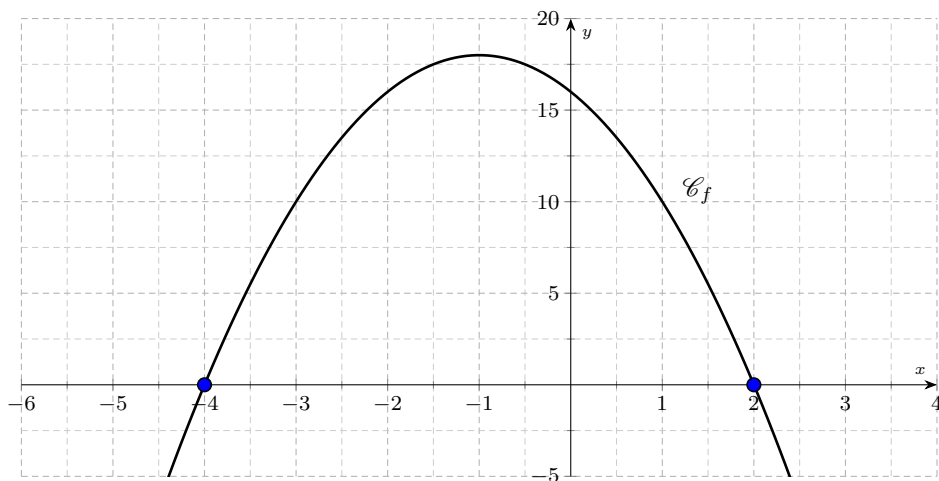
## REMARQUE

Si  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  ( $a \neq 0$ ), les racines de  $f$  sont  $x_1$  et  $x_2$ .

En effet,  $a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \Leftrightarrow a = 0$  ou  $x - x_1 = 0$  ou  $x - x_2 = 0$   
 $\Leftrightarrow x = x_1$  ou  $x = x_2$

## EXEMPLE

Les racines de la fonction  $f : x \mapsto -2(x - 2)(x + 4)$  sont 2 et  $-4$ .



On voit alors que la parabole associée par  $f$  coupe l'axe des abscisses en  $M(2; 0)$  et  $N(0; -4)$ .

## PROPRIÉTÉ

Soit  $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $a \neq 0$ . On pose  $s = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Alors le sommet de la parabole associée a pour coordonnées  $(s, f(s))$ .

### EXEMPLE

Pour la parabole précédente, on a  $s = \frac{2-4}{2} = -1$ , et :

$$\begin{aligned}f(s) &= f(-1) \\&= -2(-1-2)(-1+4) \\&= -2 \times (-3) \times 3 \\&= 18\end{aligned}$$

Les coordonnées du sommet de la parabole sont donc  $(-1; 18)$ .

## 2. Factorisation

Soit  $f : x \mapsto ax^2 + b + c$ . Ceci est l'écriture développée de  $f$ . On souhaite retrouver l'écriture factorisée  $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ .

### REMARQUE

Le  $a$  qui apparaît dans la forme développée et factorisée est le même.

### MÉTHODE

Si l'on connaît une racine  $x_1$  de  $f$ , on peut retrouver l'écriture factorisée de  $f$  par identification.

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$ . On nous dit que 1 est une racine de  $f$ . De plus, on a  $a = 3$ . On sait alors qu'on peut écrire  $f(x) = 3(x - 1)(x - x_2)$  avec  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

**Première méthode :** Développons cette expression :

$$\begin{aligned}f(x) &= 3(x^2 - x \times x_2 - x + x_2) \\&= 3x^2 - 3 \times x_2 \times x - 3x + 3x_2 \\&= 3x^2 + (-3 - 3x_2)x + 3x_2\end{aligned}$$

$$\text{On a de plus } f(x) = 3x^2 - 9x + 6$$

Le **dernier coefficient** nous donne donc  $3x_2 = 6$  soit alors  $x_2 = 2$ .

On en déduit que  $f(x) = 3(x - 1)(x - 2)$ .

**Seconde méthode :** On calcule  $f(0)$  de deux manières différentes :

$$\begin{aligned}f(0) &= 3 \times 0^2 - 9 \times 0 + 6 \\&= 6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(0) &= 3(0 - 1)(0 - x_2) \\&= 3 \times (-1) \times (-x_2) \\&= -3 \times (-x_2) \\&= 3x_2\end{aligned}$$

On retrouve alors l'équation précédente :  $3x_2 = 6$  d'où  $x_2 = 2$  puis  $f(x) = 3(x - 1)(x - 2)$ .

### 3. Etude du signe

#### MÉTHODE

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type  $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ , on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.

#### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto 0,5(x - 1)(x + 3)$ . Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines  $x \mapsto x - 1$  et  $x \mapsto x + 3$ . On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$0$	$+$

$x$	$-\infty$	$-3$	$+\infty$
$x + 3$	$-$	$0$	$+$

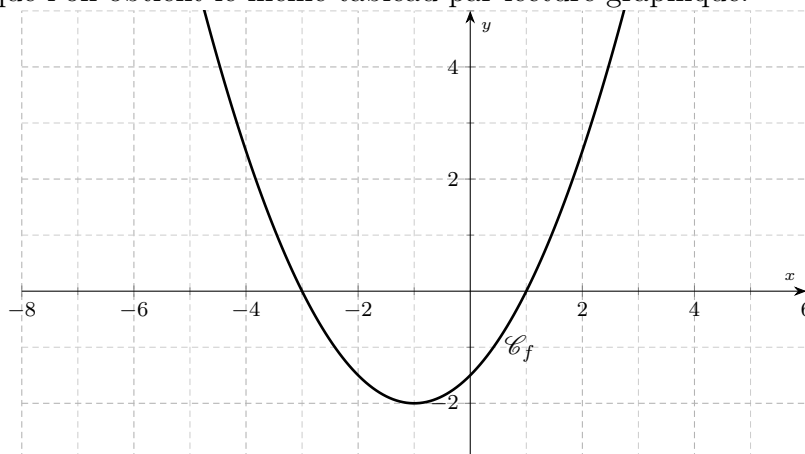
On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-3$	$1$	$+\infty$
$x - 1$	$-$	$-$	$0$	$+$
$x + 3$	$-$	$0$	$+$	$+$
$(x - 1)(x + 3)$	$+$	$0$	$-$	$0$
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$

On peut donc lire sur ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \geq 0$  est :

$$S = ]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

On peut vérifier que l'on obtient le même tableau par lecture graphique.



# SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

## I - Suites arithmétiques

### 1. Généralités

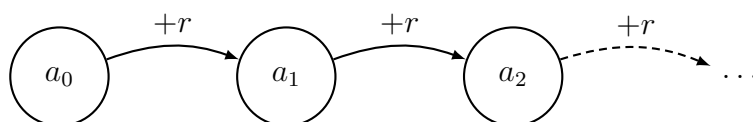
#### DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé la raison.

Pour définir une suite arithmétique  $a$ , on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme  $a_0$
- Sa raison  $r$

On a alors la relation  $a_{n+1} = a_n + r$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



#### EXEMPLE

Soit  $u$  la suite arithmétique de premier terme  $u_0 = 5$  et de raison  $r = -2$ . Alors :

$$u_1 = u_0 - 2 = 3$$

$$u_2 = u_1 - 2 = 1$$

$$u_3 = u_2 - 2 = -1$$

$$u_4 = \dots$$

#### REMARQUE

La différence entre deux termes successifs vaut toujours  $r$  : Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} - a_n = r$ .

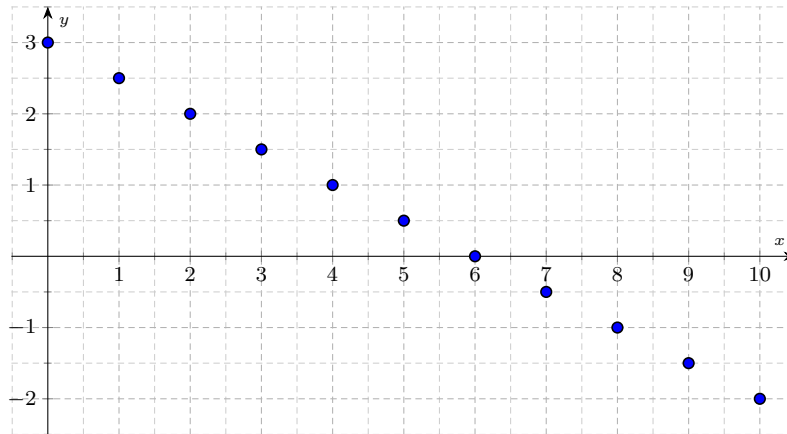
### 2. Représentation graphique

#### PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.



## EXEMPLE



On a représenté une suite arithmétique  $u$  ci-dessus. On a  $u_0 = 3$  et  $u_1 = 2,5$ . Alors  $r = u_1 - u_0 = 2,5 - 3 = -0,5$ . La suite  $u$  est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison  $r = -0,5$ .

### 3. Variations des suites arithmétiques

#### PROPOSITION

- Si  $r > 0$ , alors la suite  $a$  est croissante.
- Si  $r < 0$ , alors la suite  $a$  est décroissante.
- Si  $r = 0$ , alors la suite  $a$  est constante.

#### EXEMPLE

Soit  $a$  la suite arithmétique définie par  $a_0 = 13$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_{n+1} = a_n - 5$ . La raison de cette suite est  $r = -5 < 0$  donc  $a$  est décroissante.

## II - Suites géométriques, cas positif

### 1. Généralités

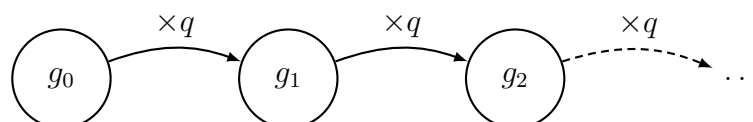
#### DÉFINITION

Une suite est dite géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé la raison.

Pour définir une suite géométrique  $g$ , on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme  $g_0$
- Sa raison  $q$

On a alors la relation  $g_{n+1} = q \times g_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .



► On se restreindra au cas où  $g_0$  et  $q$  sont strictement positifs.

### EXEMPLE

Soit  $g$  la suite géométrique de premier terme  $g_0 = 3$  et de raison  $q = 2$ . Alors :

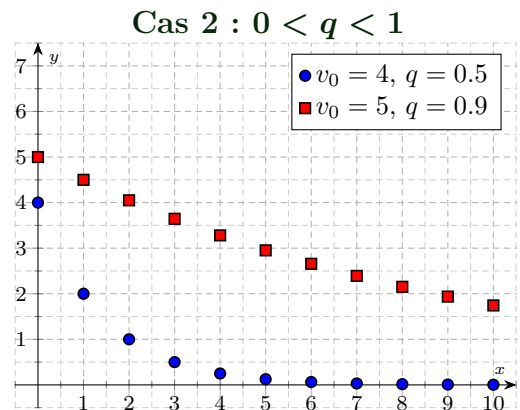
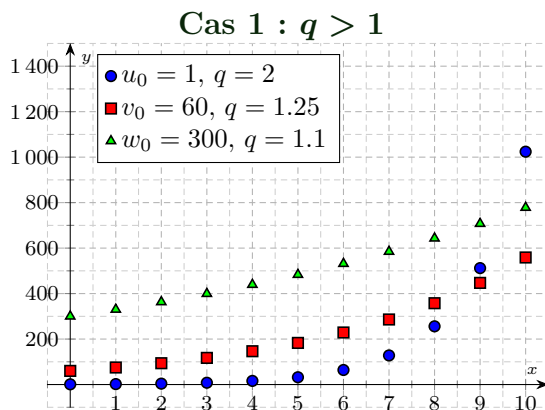
$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \dots \end{aligned}$$

### REMARQUE

Le quotient de deux termes successifs vaut toujours  $q : \frac{g_{n+1}}{g_n} = q$ .

## 2. Représentation graphique des suites géométriques

### EXEMPLES



## 3. Variations des suites géométriques

### PROPOSITION

- Si  $q > 1$ , alors la suite  $g$  est croissante.
- Si  $0 < q < 1$ , alors la suite  $g$  est décroissante.
- Si  $q = 1$ , alors la suite  $g$  est constante.

### EXEMPLE

Soit  $g$  la suite géométrique définie par  $g_0 = 5$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}, g_{n+1} = 0,9 \times g_n$ . La raison de cette suite est  $q = 0,9 < 1$  donc  $g$  est décroissante.

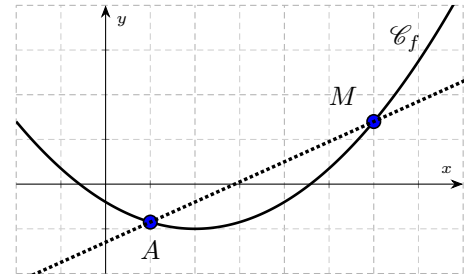
# DÉRIVATION - POINT DE VUE LOCAL

## I - Sécantes et tangentes

### DÉFINITION

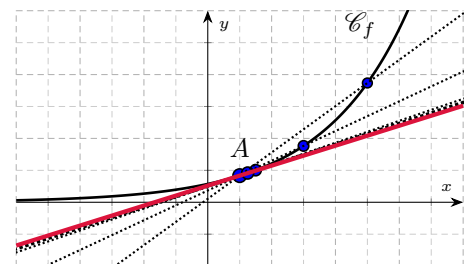
Soit  $f$  une fonction, avec  $A$  et  $M$  deux points sur la courbe de  $f$ .

La droite  $(AM)$  est appelée **sécante** de la courbe de  $f$ .



### PROPRIÉTÉ

A mesure que  $M$  se rapproche du point  $A$ , la sécante  $(AM)$  se rapproche d'une autre droite, appelée **tangente** de  $\mathcal{C}_f$  en  $A$ , qui épouse la courbe de  $f$  près de  $A$ .



## II - Lecture du nombre dérivé

### DÉFINITION

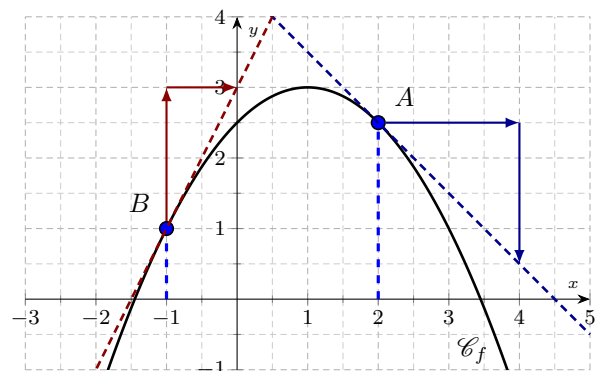
On appelle nombre dérivé de  $f$  en  $a$ , noté  $f'(a)$ , le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $a$ .

### EXEMPLE

On a représenté une fonction  $f$  ci-contre.

Pour obtenir  $f'(2)$ , on place  $A$  défini comme le point de  $\mathcal{C}_f$  d'abscisse 2, puis on détermine le coefficient directeur de la tangente de  $\mathcal{C}_f$  passant par  $A$ . On a alors  $f'(2) = \frac{-2}{2} = -1$ .

Pour obtenir  $f'(-1)$ , on place  $B$ , et on détermine le coefficient directeur de la tangente associée :  $f'(-1) = \frac{2}{1} = 2$ . En utilisant l'ordonnée à l'origine, on en déduit que l'équation de cette tangente est  $y = 2x + 3$ .



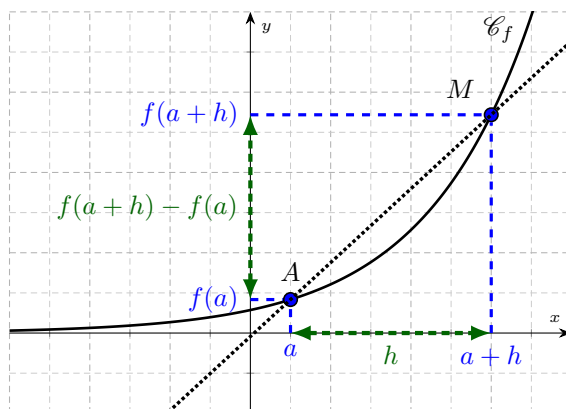
### III - Lien avec le taux de variation

#### DÉFINITION

Soit  $f$  une fonction, avec  $A$  et  $M$  deux points sur la courbe de  $f$  d'abscisses respectives  $a$  et  $a+h$  ( $h \neq 0$ ).

Le taux de variation de  $f$  entre  $a$  et  $a+h$  (autrement dit le coefficient directeur de la sécante associée) vaut :

$$\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



#### PROPRIÉTÉ

Si le taux de variation  $\frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  se rapproche d'un nombre réel quand  $h$  tend vers 0, on dit que  $f$  est **dérivable** en  $a$ , et le nombre en question est noté  $f'(a)$ .

#### EXEMPLE

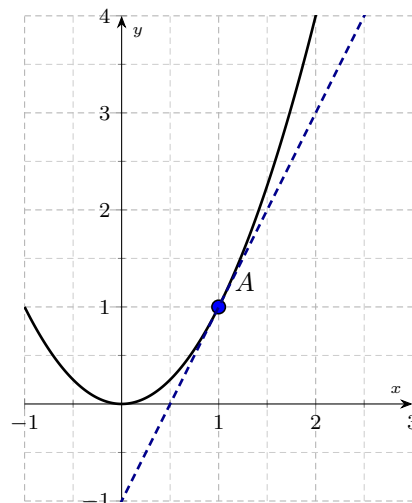
On se donne la fonction  $f : x \mapsto x^2$ , et le point  $A(1;1)$  sur  $\mathcal{C}_f$ . Soit  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ . On a :

- $f(1) = 1^2 = 1$
- $f(1+h) = (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \frac{2h + h^2}{h} \\ &= 2 + h \end{aligned}$$

Cette quantité se rapproche de 2 lorsque  $h$  tend vers 0. Alors  $f$  est dérivable en 1 et  $f'(1) = 2$ .



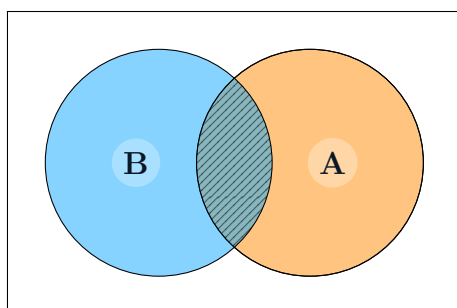
# CONDITIONNEMENT

## I - Rappels de vocabulaire ensembliste

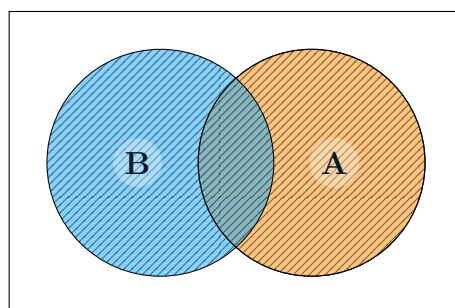
### DÉFINITIONS

On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

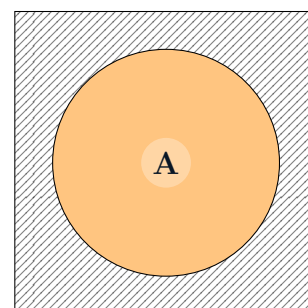
- **L'intersection** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cap B$  ( $A$  inter  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à la fois à  $A$  et à  $B$ .
- **L'union** de  $A$  et  $B$  notée  $A \cup B$  ( $A$  union  $B$ ) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  appartenant à  $A$  ou à  $B$  ou aux deux.
- **Le complémentaire** de  $A$ , noté  $\overline{A}$  ( $A$  barre) désigne l'ensemble des éléments de  $E$  qui n'appartiennent pas à  $A$ .



$A \cap B$



$A \cup B$



$\overline{A}$

### EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note  $E$  l'ensemble de tout les chiens,  $A$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des chiens au poil blanc,  $B$  le sous-ensemble de  $E$  constitué des chiens au poil beige.

- $A \cap B$  désigne l'ensemble des chiens au poil blanc et beige
- $A \cup B$  désigne l'ensemble des chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.
- $\overline{A}$  désigne l'ensemble des chiens au poil autre que blanc.

## II - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

### EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. Les élèves ont le choix entre l'allemand ou l'espagnol. On sait que 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note  $F$  l'ensemble des filles,  $G$  l'ensemble des garçons et  $A$  l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

- Le nombre d'éléments de  $F \cap A$  (c'est-à-dire le nombre de filles ayant choisi l'allemand) est 3.
- Le nombre d'éléments de  $G \cap \bar{A}$  (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
- La fréquence des filles dans cette classe est  $\frac{23}{35} \simeq 0,66 = 66\%$ . On parle de **fréquence marginale**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est  $\frac{7}{35} = 0,2 = 20\%$ .
- La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est  $\frac{20}{25} = 0,8 = 80\%$ . On parle de **fréquence conditionnelle**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est  $\frac{5}{12} \simeq 0,42 = 42\%$ .

### PROPOSITION

On se donne  $E$  un ensemble et  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- La fréquence marginale de  $A$  dans  $E$  vaut  $\frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$ .
- La fréquence conditionnelle de  $A$  dans  $B$  vaut  $\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$ .

## III - Rappels de probabilités

### DÉFINITIONS

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
- On appelle l'univers, noté  $\Omega$  (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Un évènement  $A$  est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de  $\Omega$ . On appelle évènement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de  $\Omega$  (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté  $\emptyset$ , est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble  $\Omega$  est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.
- On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
- On dit que deux événements  $A$  et  $B$  sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ .

— Pour tout évènement  $A$  d'une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

### PROPRIÉTÉS

— Soit  $A$  un évènement. Alors  $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .

— Soient  $A$  et  $B$  deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

## IV - Probabilités conditionnelles

► De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, on peut définir des probabilités conditionnelles.

### DÉFINITION

Soient  $A$  et  $B$  deux évènements tels que  $\mathbb{P}(A) \neq 0$ . On note  $\mathbb{P}_A(B)$  la probabilité de  $B$  en sachant que  $A$  est réalisé, aussi appelée probabilité de  $B$  sachant  $A$ . On a de plus  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$ .

### REMARQUE

Dans une situation **d'équiprobabilité**, on a  $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$ .

► On utilisera aussi des tableaux pour trouver des probabilités conditionnelles.

### EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs. On considère alors les évènements  $C$  : « L'élève pratique une activité culturelle » et  $S$  : « L'élève pratique une activité sportive ». On a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive ( $S$ )	Pas d'activité sportive ( $\overline{S}$ )	Total
Activité culturelle ( $C$ )	402	591	993
Pas d'activité culturelle ( $\overline{C}$ )	315	192	507
Total	717	783	1500

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle est  $\mathbb{P}(C) = \frac{993}{1500} = 0,662 = 66,2\%$ .
2. La probabilité qu'un élève pratique les deux types d'activité est  $\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{402}{1500} = 0,268 = 26,8\%$ .

3. La probabilité qu'un élève fasse du sport en sachant qu'il pratique une activité culturelle est  $\mathbb{P}_C(S) = \frac{\text{Card}(C \cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{402}{993} = 0,405 = 40,5\%$ .
4. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle en sachant qu'il ne fait pas de sport est  $\mathbb{P}_{\bar{S}}(C) = \frac{\text{Card}(\bar{S} \cap C)}{\text{Card}(\bar{S})} = \frac{591}{783} = 0,755 = 75,5\%$ .



# FONCTION DÉRIVÉE

## I - Généralités, règles de calcul

### DÉFINITION

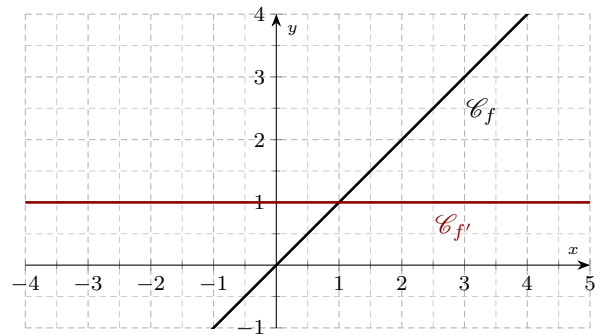
On définit la fonction dérivée de  $f$ , notée  $f'$ , qui à  $x$  associe (s'il existe) le coefficient directeur de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $x$ .

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto x$ . C'est une fonction affine avec  $a = 1$  et  $b = 0$ .

Sa représentation graphique est une droite  $d$ . De plus, toutes les tangentes à la courbe de  $f$  sont cette même droite  $d$ .

Alors quelque soit  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = a = 1$ .  $f'$  est donc la fonction constante valant toujours 1.



### PROPOSITIONS

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
$x$	1
$x^2$	$2x$
$x^3$	$3x^2$

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions, et  $k \in \mathbb{R}$ . Alors :

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

► Pour dériver une fonction puissance, on passe l'exposant devant  $x$  puis on retire 1 à l'exposant.

### EXEMPLES

- Soit  $f : x \mapsto x^2 + x$ . Alors  $f'(x) = 2x + 1 = 2x + 1$ .
- Soit  $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$ . Alors  $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$ .
- Soit  $g : x \mapsto x^3 - 3x - 2$ . Alors  $f'(x) = 3x^2 - 3$ .
- Soit  $h : x \mapsto x^2 + x^2$ . Alors  $f'(x) = 2x + 2x = 4x$ .

## II - Lien avec les variations

### THÉORÈME

Soit  $f$  une fonction et  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

- Si  $f'$  est positive sur  $[a; b]$ , alors  $f$  est croissante sur  $[a; b]$ .
- Si  $f'$  est négative sur  $[a; b]$ , alors  $f$  est décroissante sur  $[a; b]$ .
- Si  $f'$  est nulle sur  $[a; b]$ , alors  $f$  est constante sur  $[a; b]$ . Les zéros de  $f'$  correspondent aux **extremums locaux** de  $f$  (les « sommets »).

### APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ . Alors  $f'(x) = 2x - 4$ .

**Etude du signe de la dérivée :**

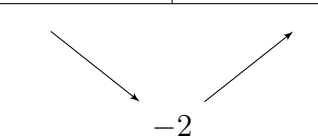
$a = 2 > 0$  donc  $f'$  est d'abord négative, puis positive.

De plus,  $f'(x) = 0$  ssi  $2x = 4$  ssi  $x = 2$ . (On peut aussi calculer  $\frac{-b}{a}$ ).

**Variations de  $f$  :**

$f$  est donc décroissante puis croissante.

On a de plus  $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$ .

$x$	$-\infty$	$2$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$0$	$+$
$f(x)$			

# VARIABLES ALÉATOIRES

## I - Définitions

### EXEMPLE

On lance une pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note  $X$  les gains après un lancer. Ainsi  $X$  peut valoir soit 2, soit  $-1$ . La probabilité que  $X$  vaille 2, notée  $\mathbb{P}(X = 2)$ , vaut  $\frac{1}{2} = 0,5$ . On dit que  $X$  est une **variable aléatoire réelle**.

### REMARQUES

- Une variable aléatoire réelle est en fait une fonction  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .
- En pratique, une variable aléatoire permet de raccourcir les notations : L'évènement « On gagne 2€ après le lancer » devient  $X = 2$ .

### EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais  $X$  représente cette fois les gains après **deux** lancers successifs. On représente les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

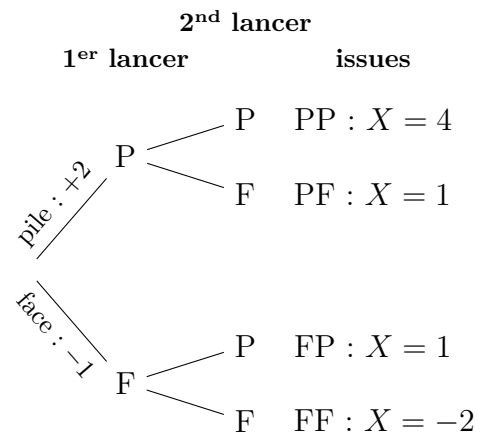
- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0,5$  (2 cas favorables sur 4) ;
- $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0,25$  ;
- $\mathbb{P}(X = 4) = \frac{1}{4} = 0,25$

On peut alors donner la **loi de probabilité** de  $X$ , c'est-à-dire donner la probabilité de chaque issue :

$x$	-2	1	4
$\mathbb{P}(X = x)$	0,25	0,5	0,25

On peut aussi déterminer d'autres probabilités :

- $\mathbb{P}(X \leq 1) = \mathbb{P}(X = -2) + \mathbb{P}(X = 1) = 0,75$  ;
- $\mathbb{P}(X \geq 0) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(X = 4) = 0,75$



## II - Espérance d'une variable aléatoire

### DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire  $X$  dont la loi est représentée ci-contre.

L'espérance de  $X$ , notée  $\mathbb{E}(X)$ , est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_N x_N$$

$x$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_N$
$\mathbb{P}(X = x)$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_N$

## REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de  $X$  lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

## EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a  $\mathbb{E}(X) = 0,25 \times (-2) + 0,5 \times 1 + 0,25 \times 4$   
 $= -0,5 + 0,5 + 1$   
 $= 1$

L'espérance de  $X$  est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.

Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

## III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

## DÉFINITIONS

- Deux événements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

## EXEMPLE

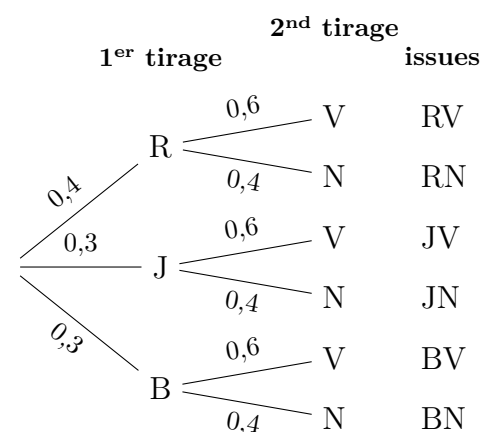
On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est  $\frac{4}{10} = 0,4$ .

On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.

On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



## PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le **produit** des probabilités inscrites sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à cet événement.

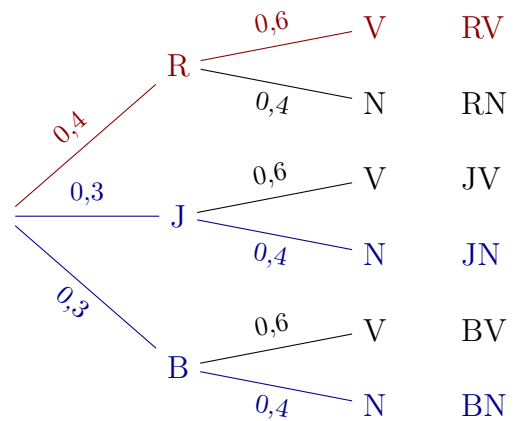
## EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (RV) est :

$$0,4 \times 0,6 = 0,24$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (JN ou BN) est :

$$(0,3 \times 0,6) + (0,3 \times 0,4) = 0,18 + 0,12 = 0,30$$



## IV - Épreuves et lois de Bernoulli

### DÉFINITION

- Une épreuve de Bernoulli de paramètre  $p$  est une expérience où il n'y a que deux issues possibles : l'une est assimilée à un succès (de probabilité  $p$ ) et l'autre à l'échec (de probabilité  $1 - p$ ).
- On dit qu'une variable aléatoire  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  lorsqu'elle associe 1 au succès et 0 à l'échec. Sa loi est représentée ci-contre.

$x$	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	$p$

### EXEMPLE

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. On considère comme succès l'évènement « Obtenir la boule numérotée 10 » et donc comme échec « Ne pas obtenir la boule numérotée 10 ».

La loi de Bernoulli de la variable aléatoire  $X$  associée à cette expérience est représentée ci-contre.

$x$	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,9	0,1

### PROPOSITION

Si  $X$  suit une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , alors  $\mathbb{E}(X) = p$ .