

FONCTIONS : GÉNÉRALITÉS

I - Définitions, notations, représentation

DÉFINITION

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un unique réel noté $f(x)$. On note $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit alors que :

$$x \longmapsto f(x)$$

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

EXEMPLE

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto x^2 - x$$

- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f . -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

REMARQUE

Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

DÉFINITION

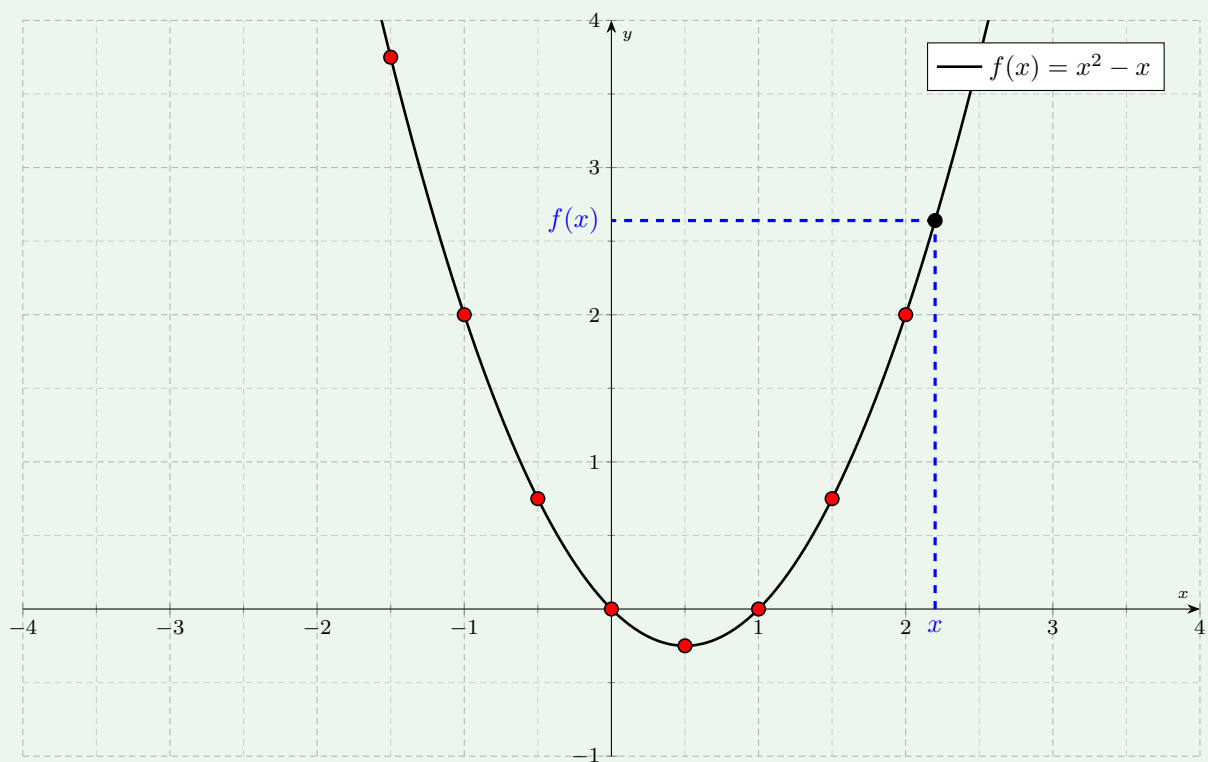
Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f . L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

EXEMPLE

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									

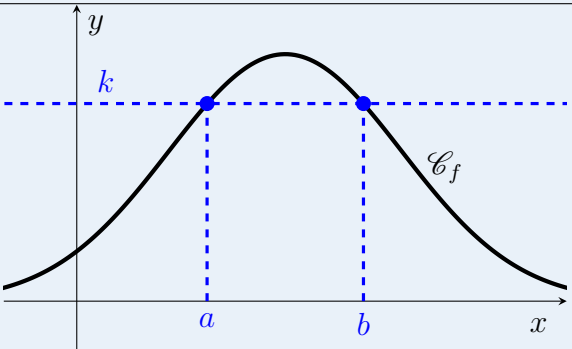
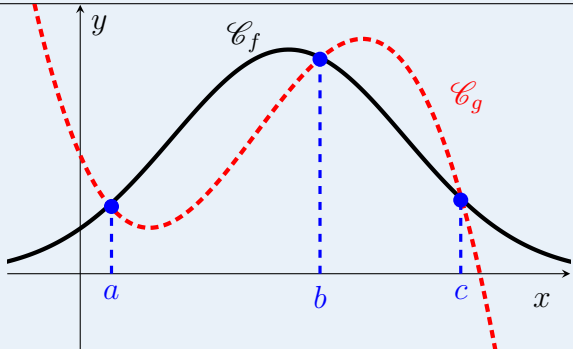


► Exos 101 -> 104 p32

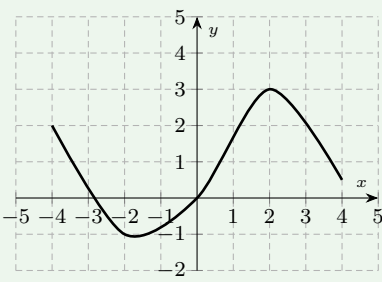
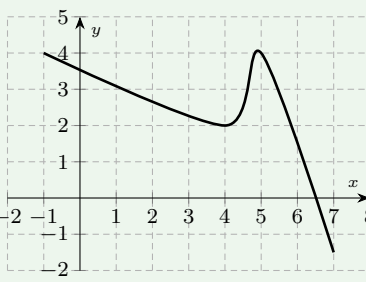
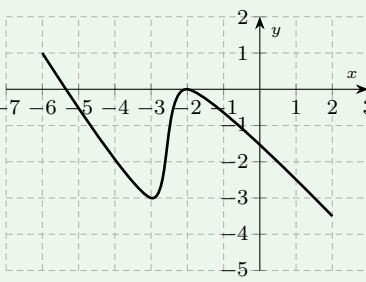
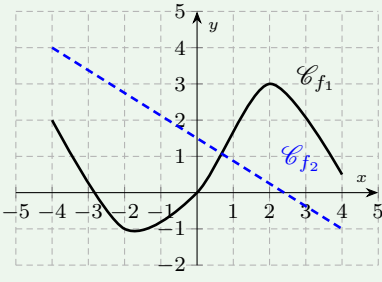
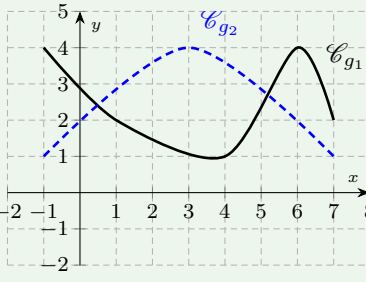
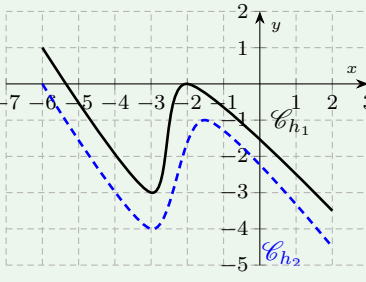
II - Résolution graphique d'équations et d'inéquations

1. Equations

MÉTHODE

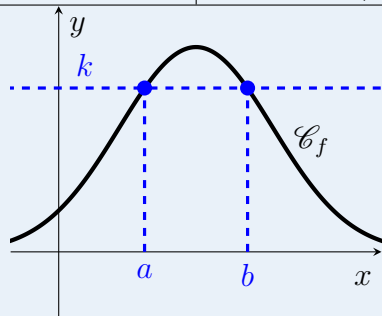
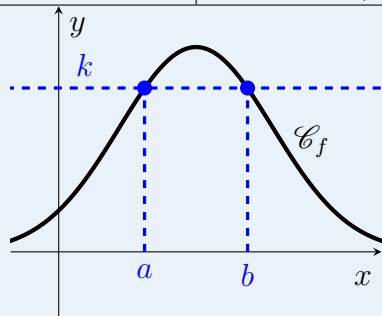
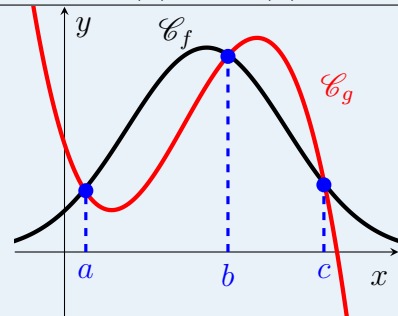
	
<p>Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est k.</p> <p>Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :</p> $S = \{a; b\}$	<p>Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g.</p> <p>Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :</p> $S = \{a; b; c\}$

EXEMPLES

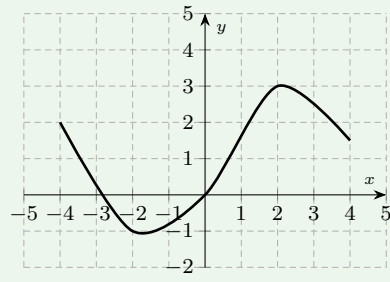
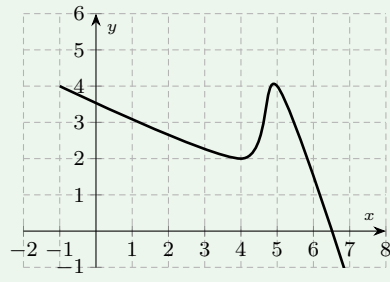
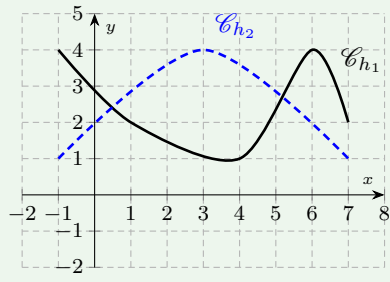
		
<p>Résoudre $f(x) = 1$:</p>	<p>Résoudre $g(x) = 1$:</p>	<p>Résoudre $h(x) = -4$:</p>
		
<p>Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$:</p>	<p>Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$:</p>	<p>Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$:</p>

2. Inéquations

MÉTHODE

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
<p>Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S =]a; b[$	<p>Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :</p> $S =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	<p>Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de \mathcal{C}_f situés "au dessus" des points de \mathcal{C}_g. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :</p> $S =]-\infty; a[\cup]b; c[$

EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) \leq 1$:	Résoudre $g(x) > 1$:	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$:

► Exos Hyperbole

► Exos 105 -> 110 p32

III - Etudes de fonctions

1. Etude des variations

DÉFINITION

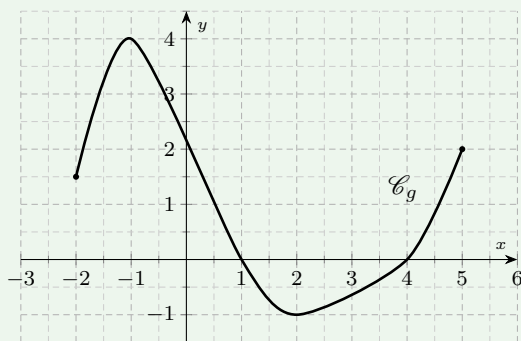
Soit f définie sur un intervalle I .

- On dit que f est croissante sur I si lorsque la variable augmente dans I , les images augmentent aussi : Pour $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$.
- On dit que f est décroissante sur I si lorsque la variable augmente dans I , les images diminuent : Pour $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.

MÉTHODE

Dresser le tableau de variations d'une fonction f , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

EXEMPLE



On se donne la fonction g , définie sur $[-2; 5]$ et représentée ci-contre. On "résume" la courbe représentative de g sous forme du tableau de variations suivant :

x	-2	-1	2	5
$g(x)$	1.5	4	-1	2

2. Etude du signe

MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction f , c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2	1	4	5	
$f(x)$	+	0	-	0	+

► Exos 111 -> 114 p32

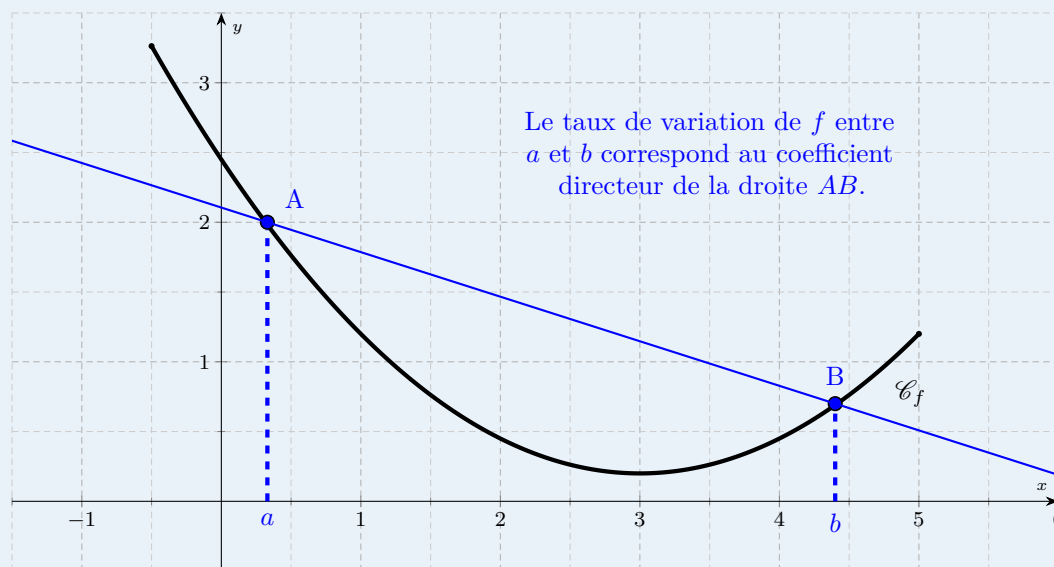
IV - Taux de variation d'une fonction

DÉFINITION

Le taux de variation entre a et b d'une fonction f définie sur un intervalle I est le quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour a et b distincts et appartenant à I .

REMARQUE

Ce taux correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b .



EXEMPLE

Le taux de variation entre -1 et 3 de la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est :

$$x \longmapsto x^2 - x$$

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{6 - 2}{4} = 1$$

PROPOSITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I . f est monotone (c'est-à-dire croissante ou bien décroissante sur I) si et seulement si le signe du taux de variation entre deux nombres quelconques de I est constant.

En pratique :

- Un taux de variation toujours positif sur I équivaut à f croissante sur I .
- Un taux de variation toujours négatif sur I équivaut à f décroissante sur I .
- Un taux de variation toujours nul sur I équivaut à f constante sur I .

- Exos 15,16p120
- Exos 40 -> 44 p122