Fonctions : Généralités

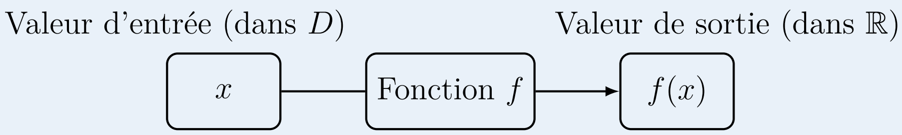
PROGRAMME

- Fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles
- Courbe représentative : $(x, f(x))$ ...
- Fonction paire, impaire. Traduction géométrique
- Capacités :
  - Exploiter l'équation d'une courbe : appartenance, coordonnées
  - Modéliser par des fonctions [...]
  - Résoudre des (in)équations : graphiquement, algébriquement, tableaux de signes
  - Etudier la parité dans des cas simples

I - Définitions, notations

DÉFINITION

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un **unique** réel noté $f(x)$. On note $f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.



On dit alors que :

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

EXEMPLE

On définit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

REMARQUE

Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

II - Représentation graphique d'une fonction

DÉFINITION

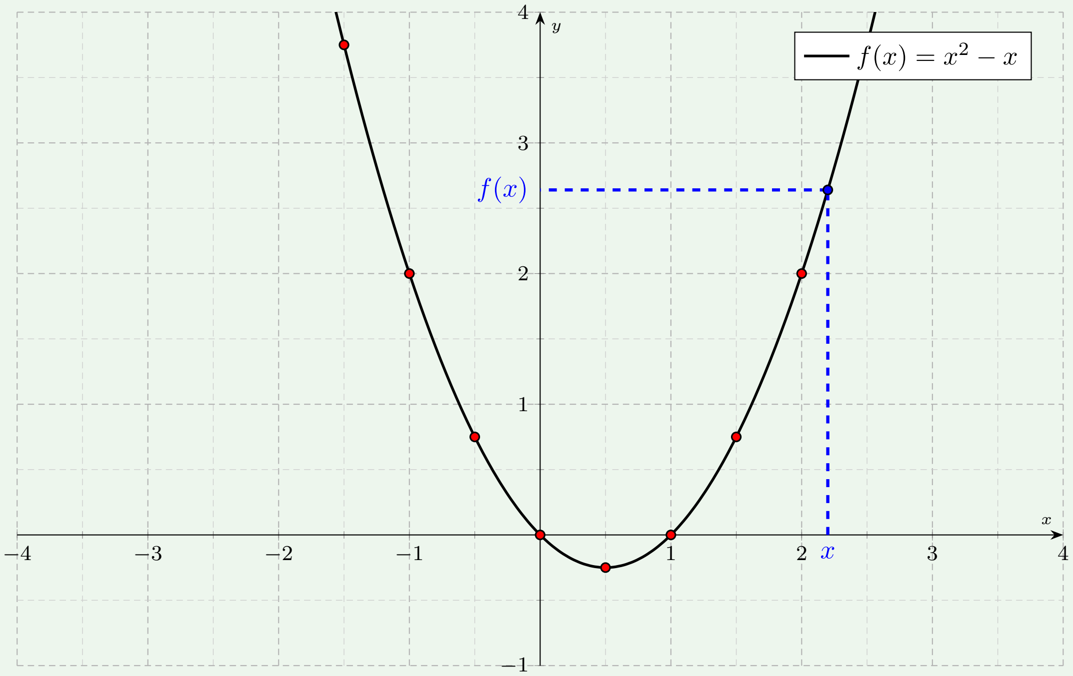
Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

EXEMPLE

x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									

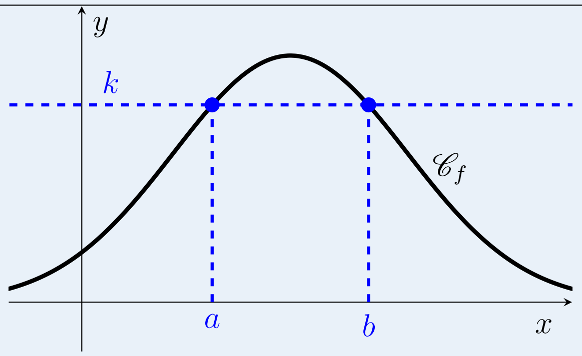


Les points de coordonnées $(-1; 2)$ et $(1; 0)$ appartiennent à la courbe de f, mais pas le point de coordonnées $(0; 1)$.

III - Résolution graphique d'équations

1. Equations du type $f(x) = k$

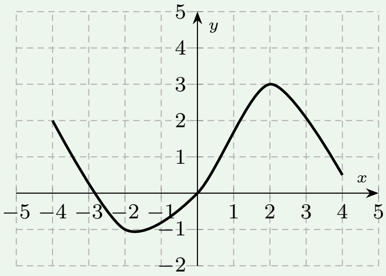
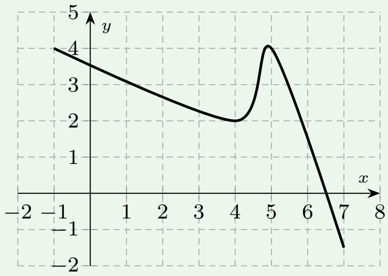
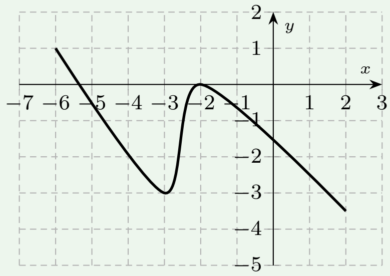
MÉTHODE



Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est k.
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

$$S = \{a; b\}$$

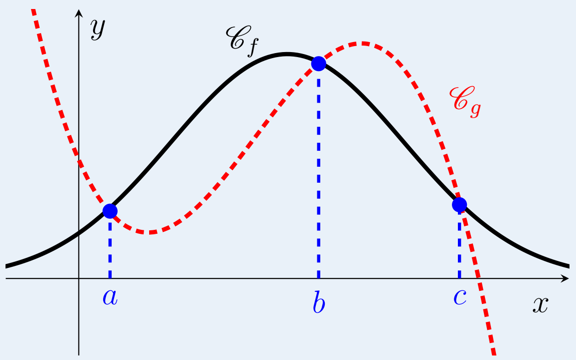
EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) = 1$:	Résoudre $g(x) = 1$:	Résoudre $h(x) = -4$:

▶ Fiche, exos 1-2

2. Equations du type $f(x) = g(x)$

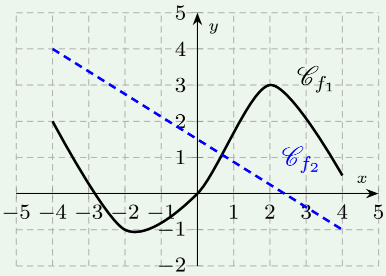
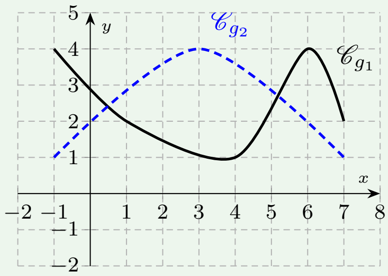
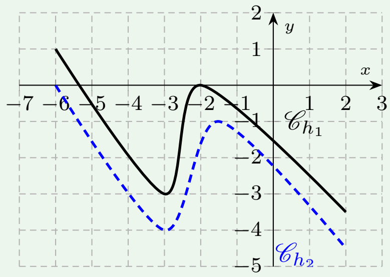
MÉTHODE



Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
Ici, l'ensemble des solution de l'équation est :

$$S = \{a; b; c\}$$

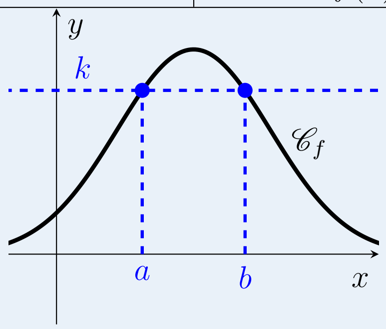
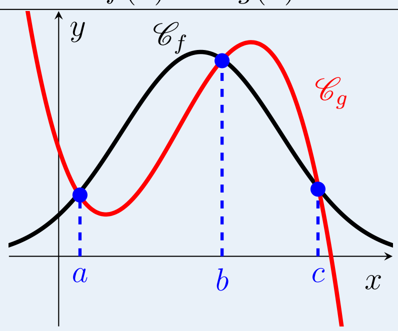
EXEMPLES

<table>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$:</td>
<td>Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$:</td>
<td>Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$:</td>
</tr>
</table>

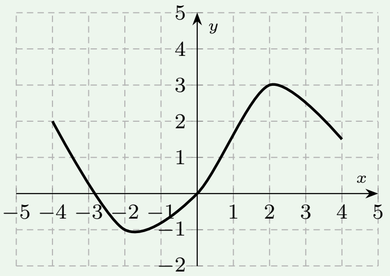
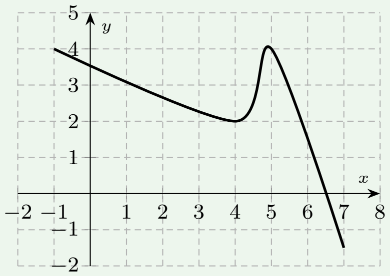
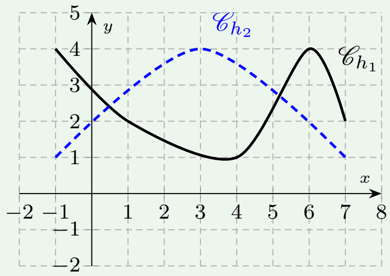
▶ Exo 3 + Résoudre f(x)=g(x) sur la fiche équations

IV - Résolution graphique d'inéquations

MÉTHODE

<table>
<tr>
<td>$f(x) \quad > \quad k$</td>
<td>$f(x) \quad \leq \quad k$</td>
<td>$f(x) \quad > \quad g(x)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2"></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$.
Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :
$$S =]a; b[$$</td>
<td>Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k.
Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$.
Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est :
$$S =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$$</td>
<td>Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$.
Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est :
$$S =]-\infty; a[\cup]b; c[$$</td>
</tr>
</table>

EXEMPLES

		
Résoudre $f(x) \leq 1$:	Résoudre $g(x) > 1$:	Résoudre $h_1(x) \geq h_2(x)$:

► Exos Hyperbole

V - Etude du signe

MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.
Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

VI - Parité d'une fonction

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0 ($I = [-a; a]$, $]-a; a[$ ou $\mathbb{R}$). On dit que f est :

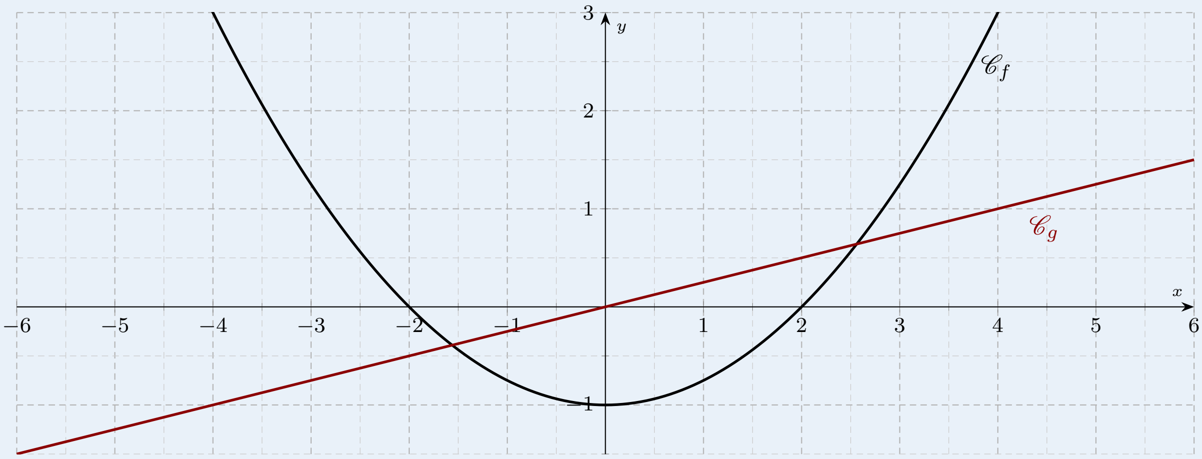
- **paire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = f(x)$.
- **impaire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

EXEMPLES

- La fonction $f : \begin{array}{rcl} [-2; 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$ est paire car pour tout $x \in [-2; 2], f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$.
- La fonction $g : \begin{array}{rcl}]3; 3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0.5x \end{array}$ est impaire.

PROPRIÉTÉS

- f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $(0;0)$.



REMARQUE

Une fonction peut être ni paire ni impaire !