Conditionnement

PROGRAMME

- Croisement de deux variables catégorielles
  - Tableau croisé d'effectifs
  - Fréquence conditionnelle, fréquence marginale
  - Capacités
    - Calculer des fréquences conditionnelles et des fréquences marginales
    - Compléter un tableau croisé par des raisonnements sur les effectifs ou en utilisant des fréquences conditionnelles
- Probabilités conditionnelles
  - Notation $\mathbb{P}_A(B)$
  - Capacité : Calculer des probabilités conditionnelles lorsque les évènements sont présentés sous forme de tableau croisé d'effectifs

I - Quelques rappels de vocabulaire ensembliste

DÉFINITIONS

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

- **L'intersection** de A et B notée $A \cap B$ désigne les éléments de E appartenant à la fois à A et à B.
- **L'union** de A et B notée $A \cup B$ désigne les éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.
- **Le complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ désigne les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.

EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note E l'ensemble de tout les chiens, A le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil blanc, B le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil beige.

- $A \cap B$ désigne les chiens au poil blanc et beige
- $A \cup B$ désigne les chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.
- $\overline{A}$ désigne les chiens au poil autre que beige.

II - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. De plus, 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et A l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

— Le nombre d'éléments de $F \cap A$ (c'est-à-dire le nombre des filles ayant choisi l'allemand) est 3.
— Le nombre d'éléments de $G \cap \overline{A}$ (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
— La fréquence des filles dans cette classe est $\frac{23}{35} \simeq 0{,}66 = 66\%$. On parle de **fréquence marginale**.
— La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est $\frac{7}{35} = 0{,}2 = 20\%$.
— La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est $\frac{20}{25} = 0{,}8 = 80\%$. On parle de **fréquence conditionnelle**.
— La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est $\frac{5}{12} \simeq 0{,}42 = 42\%$.

PROPOSITION

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

— La fréquence marginale de A dans E vaut $\dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \dfrac{\text{Card}\,(A)}{\text{Card}\,(E)}$.
— La fréquence conditionnelle de A dans B vaut $\dfrac{\text{Card}\,(A \cap B)}{\text{Card}\,(B)}$.

▶ Exos 16 p174, 24 p176
▶ Exos 17,18 p175, 26 p176
▶ Exos 35,36 p181
▶ Sujet D p184

III - Rappels de probabilités

DÉFINITIONS

— On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
— On appelle l'univers, noté Ω (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
— Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de Ω. On appelle évènement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de Ω (On les appelle des singletons).
— L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
— L'ensemble Ω est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.
— On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
— On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
— Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers Ω, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

PROPRIÉTÉS

— Soit A un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
— Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

▶ Schéma à faire

IV - Probabilités conditionnelles

▶ De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, il est possible de définir des probabilités conditionnelles.

DÉFINITION

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B en sachant que A est réalisé, aussi appelée probabilité de B sachant A. On a de plus $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

▶ On utilisera aussi des tableaux pour trouver les probabilités conditionnelles.

EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs et on a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive (S)	Pas d'activité sportive ($\overline{S}$)
Activité culturelle (C)	402	591
Pas d'activité culturelle ($\overline{C}$)	315	192

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. Déterminer la probabilité qu'un élève face du sport sachant qu'il pratique une activité culturelle ie $\mathbb{P}_C(S)$.
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{S}}(C)$.

▶ Exos 22,23 p175, 31 p177
▶ Exos 37,38 p181
▶ Exos 32,33 p178
▶ Sujets B,C p184
▶ Exos 39,40,40 p185

V - Union et intersection

1. Cadre général

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensemble de E.

DÉFINITION

L'intersection de A et B notée $A \cap B$ désigne les éléments de E appartenant à la fois à A **et** à B.

DÉFINITION

L'union de A et B notée $A \cup B$ désigne les éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.

EXEMPLE

Considérons une population de chevaux. On note E l'ensemble de tout les chevaux. A le sous-ensemble de E constitué des chevaux noirs, B le sous-ensemble de E constitué des chevaux blancs.

1. $A \cap B$ désigne les chevaux noirs et blancs.
2. $A \cup B$ désigne les chevaux noirs ou bien blancs ou bien noirs et blancs.

2. Cas des sous-population

E désigne maintenant une population et A,B des sous-population de E.

THÉORÈME

Soient $f(A)$,$f(B)$,$f(A \cap B)$ les fréquences respectives de A,B et $A \cap B$ dans E. alors la fréquence de $A \cup B$ est donnée par :

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$$

EXEMPLE

Dans un club de sport, 22,5% des adhérents font de l'escalade, 17% font de la natation et 5,8% pratiquent les deux sports.
Notons A="l'ensemble des adhérents pratiquant de l'escalade", B="l'ensemble des gens pratiquant la natation" alors :

1. L'intersection de A et B (c'est-à-dire les gens pratiquant les deux sports) à une fréquence de $f(A \cap B) = 5{,}8\%$.
2. L'union de A et B à une fréquence

$$f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B) = \frac{22{,}5}{100} + \frac{17}{100} - \frac{5{,}8}{100} = 33{,}7\%$$

VI - Tableaux croisés

1. Cas général

Lorsqu'on étudie différents caractères d'une population on va souvent utiliser les notions d'intersections et d'unions.

De plus, il est souvent commode de représenter cela par des tableaux qu'on appelle **tableaux croisés**.

Considérons l'exemple suivant :

EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1STMG, on s'intéresse aux élèves ayant pris ou non l'option comptabilité. On regarde également le choix de cette option suivant le sexe de l'élève. On schématise cela par le tableau suivant :

	Option compta	Pas option compta	Total
Filles	8	7	15
Garçons	11	9	20
Total	19	16	35

Notons F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons, C l'ensemble des étudiants ayant pris l'option comptabilité et $\overline{C}$ ceux ne l'ayant pas prise.

— Le nombre d'éléments de $F \cap C$ c'est-à-dire le nombre des filles ayant pris l'option compta est 8.

— Le nombre d'éléments de $G \cap \overline{C}$ c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas pris l'option est 16.

DÉFINITION

Les colonnes et lignes nommées "total" sont appelées les **marges** du tableau.

VII - Fréquence marginale

DÉFINITION

Lorsqu'on divise chaque case du tableau croisé par l'effectif total on obtient un tableau de fréquence. Les colonnes et lignes total sont appelées **fréquences marginales.**

Reprenons notre exemple précédent :

EXEMPLE

Nous avions une classe avec un effectif total de 35élèves.

	Option compta	Pas option compta	total
Filles	$\frac{8}{35}$	$\frac{7}{35}$	$\frac{15}{35}$
Garçons	$\frac{11}{35}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{20}{35}$
Total	$\frac{19}{35}$	$\frac{16}{35}$	$\frac{35}{35}=1$

1. La fréquence des filles ayant pris l'option comptabilité est $f(F\cap C)=\frac{8}{35}$.
2. La fréquence des garçons n'ayant pas pris l'option est $f(G\cap\overline{C})=\frac{16}{35}$
3. Les fréquences marginales des colonnes sont $\frac{19}{35},\frac{16}{35}$.
4. Les fréquences marginales des lignes sont $\frac{15}{35},\frac{20}{35}$.

PROPOSITION

La somme des fréquences marginales des colonnes vaut 1.
La somme des fréquences marginales des lignes vaut 1.

VIII - Fréquence conditionnelle

1. Par ligne :

DÉFINITION

Lorsqu'on divise les cases du tableau croisé par l'effectif total de la **ligne** correspondante, on parle de fréquence conditionnelle.

En effet, l'ensemble de référence pour les calculs n'est plus la population totale mais la sous population.

EXEMPLE

	Option compta	Pas option compta	total
Filles	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{15}{15}=1$
Garçons	$\frac{11}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{20}{20}=1$

1. Parmi les filles, la fréquence des filles ayant qui ont pris l'option compta est $\frac{8}{15}$ on note $f_F(C)$.
2. Parmi les garçons, la fréquence des garçons n'ayant pas pris l'option compta est $f_G(\overline{C})=\frac{9}{20}$.

PROPOSITION

On étudie une propriété C sur deux populations F et G alors les fréquences conditionnelles vérifient :

$$f_F(C) = \frac{f(F \cap C)}{f(F)} \quad f_G(C) = \frac{f(G \cap C)}{f(G)}$$

2. Par colonne

DÉFINITION

De la même manière lorsqu'on divise les cases du tableau croisé par l'effectif total de la **colonne** correspondante, on parle de fréquence conditionnelle.

Reprenons le même exemple mais en conditionnant par rapport aux colonnes :

EXEMPLE

	Option compta	Pas option compta
Filles	$\frac{8}{19}$	$\frac{7}{16}$
Garçons	$\frac{11}{19}$	$\frac{9}{16}$
Total	$\frac{19}{19} = 1$	$\frac{16}{16} = 1$

1. Parmi ceux qui ont pris l'option comptabilité, il y a $\frac{8}{19}$ de filles ainsi on a que $f_C(F) = \frac{8}{19}$.

2. Parmi ceux qui n'ont pas pris l'option comptabilité il y a $\frac{9}{16}$ de garçons donc $f_{\overline{C}}(G) = \frac{9}{16}$.

PROPOSITION

La somme des fréquences conditionnelles sur une même ligne vaut 1.

IX - Probabilités conditionnelles

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles il est possible de définir des probabilités conditionnelles.

DÉFINITION

On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B en sachant que B est réalisé, aussi appelée probabilité de B sachant A. On a de plus $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

De même que pour les fréquences on utilisera des tableaux pour trouver les probabilités conditionnelles.

EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs et on a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive (S)	Pas d'activité sportive ($\overline{S}$)
Activité culturelle (C)	402	591
Pas d'activité culturelle $\overline{C}$)	315	192

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. Déterminer la probabilité qu'un élève face du sport sachant qu'il pratique une activité culturelle ie $\mathbb{P}_C(S)$.
2. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}_{\overline{S}}(C)$.