Proportions, variations et pourcentages

I - Proportions et pourcentages

1. Proportions

PROPOSITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, et A un sous-ensemble de E ($A \subset E$). On note respectivement n_A et n_E le nombre d'éléments de A et E. La proportion d'éléments de A dans est le nombre $p = \frac{n_A}{n_E}$.

EXEMPLE

Dans une classe de Seconde comprenant 35 élèves, il y a 20 filles. La proportion de filles dans la classe est donc $p = \frac{20}{35} = \frac{4}{7} \simeq 0.571$.

REMARQUE

p est un nombre compris entre 0 et 1. Il est parfois plus commode d'utiliser un pourcentage à la place. Pour cela, il suffit de décaler la virgule de deux rangs vers la droite.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, la proportion de filles dans la classe est de 57.1%.

► Attention avec les pourcentages : $0.5 = 50\%$ et $7\% = 0.07$

2. Proportions de proportions

PROPOSITION

Soit E un ensemble non vide ayant un nombre fini d'éléments, $A \subset E$ et $B \subset A$. On note p_1 la proportion de A dans E et p_2 la proportion de B dans A. Alors la proportion de B dans E est égale à $p_1 \times p_2$.

EXEMPLE

Dans l'exemple précédent, si 25% des filles portent des lunettes, alors la proportion de filles portant des lunettes dans la classe est $\frac{25}{100} \times \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \simeq 0.142 = 14.2\%$.

II - Evolutions et pourcentages

1. Taux d'évolution

DÉFINITION

On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1.

— La variation absolue est $V_1 - V_0$.

— La variation relative ou taux d'évolution est $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

REMARQUE

— Si $t > 0$, il s'agit d'une augmentation.

— Si $t < 0$, il s'agit d'une diminution.

EXEMPLE

Le prix d'un article est passé de 150 euros à 180 euros. La variation absolue du prix est de $180 - 150 = 30$ euros et son taux d'évolution est $\frac{180-150}{150} = \frac{30}{150} = 0.2 = \frac{20}{100}$. Ce prix a donc subi une augmentation de 20%.

PROPRIÉTÉ

Pour une valeur V_0 qui subit une évolution d'un taux t, elle devient $(1 + t) \times V_0$.
$1 + t$ est appelé coefficient multiplicateur (noté CM).

EXEMPLE

Le prix d'un abonnement à l'origine de 25 euros augmente de 20%. Il passe alors à $\left(1 + \frac{20}{100}\right) \times 25 = 1.2 \times 25 = 30$ euros. Si le nouveau prix subit une diminution de 20%, il passe à $(1 - 0.2) \times 30 = 24$ euros.

2. Evolution réciproque

DÉFINITION

Une valeur V_0 subit une évolution de taux t pour passer à V_1. On appelle évolution réciproque le taux t' d'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0.

PROPOSITION

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est l'inverse de celui de l'évolution :

$$CM' = \frac{1}{CM}$$

$$\begin{tikzcd} V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM"] & V_1 \arrow[l, bend left, "\times CM' = \frac{1}{CM}"] \end{tikzcd}$$

EXEMPLE

En un an, la population d'une ville a augmenté de 14% pour atteindre 4.56 millions d'habitants. Elle a donc été multipliée par 1.14. Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{1}{1.14} \simeq 0.877$, ce qui correspond à une baisse de 12.3%. L'an dernier, la ville possédait alors $4.56 \times 0.877 = 4$ millions d'habitants.

$$\begin{tikzcd}
V_0 = 4 \arrow[r, bend left, "\times 1.14", "+14\%"'] & V_1 = 4.56 \arrow[l, bend left, "\times \frac{1}{1.14} = 0.877", "-12.3\%"']
\end{tikzcd}$$

3. Evolutions successives

PROPOSITION

Si une évolution fait passer la valeur V_0 non nulle à la valeur V_1, et une seconde fait passer la valeur V_1 à la valeur V_2, alors l'évolution globale fait passer la valeur V_0 à la valeur V_2. Son coefficient multiplicateur est le produit des coefficients multiplicateurs.

$$\begin{tikzcd}
V_0 \arrow[r, bend left, "\times CM_1"] \arrow[rr, bend right, "\times CM = CM_1 \times CM_2"'] & V_1 \arrow[r, bend left, "\times CM_2"] & V_2
\end{tikzcd}$$

EXEMPLE

Le prix d'un objet subit une hausse de 8% puis une nouvelle hausse de 10%. Le coefficient multiplicateur global est donc $\left(1 + \frac{8}{100}\right) \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 1.08 \times 1.1 = 1.188$. Le prix a donc augmenté de 18.8% et pas de 18% !