

# FONCTIONS AFFINES

## PROGRAMME

- Fonctions affines : Capacités
- Relier sens de variation, signe et droite représentative d'une fonction affine
- Tracer une droite donnée par son équation réduite ou par un point et son coefficient directeur
- Lire graphiquement l'équation réduite d'une droite
- Déterminer l'équation réduite d'une droite à partir des coordonnées de deux de ses points
- Résoudre une équation, une inéquation produit ou quotient à l'aide d'un tableau de signes.
- Interprétation du coefficient directeur comme taux d'accroissement, variations selon son signe
- Équation réduite d'une droite

## I - Généralités

### DÉFINITION

Une fonction affine est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = ax + b$  où  $a$  et  $b$  désignent deux nombres réels donnés.

### EXEMPLES

$f : x \mapsto 3x + 1$ ,  $g : x \mapsto \frac{x}{3} - 2$  et  $h : x \mapsto 0,1x - 7,2$  sont des fonctions affines.

### CAS PARTICULIERS

- $x \mapsto ax$  (ici,  $b = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée fonction linéaire.
- $x \mapsto b$  (ici,  $a = 0$ ) est une fonction affine particulière appelée fonction constante.

► Fiche tableau : reconnaissance a et b

## II - Représentation graphique

### PROPRIÉTÉ

Dans un repère, la représentation graphique d'une fonction affine est une droite qui coupe l'axe des ordonnées.

### VOCABULAIRE

Dans un repère, soit  $d$  la droite représentant une fonction affine  $f : x \mapsto ax + b$ . On dit que :

- $a$  est le **coefficient directeur** de  $d$ .
- $b$  est l'**ordonnée à l'origine** de  $d$ .
- $y = ax + b$  est l'**équation réduite** de  $d$ .

## PROPOSITION

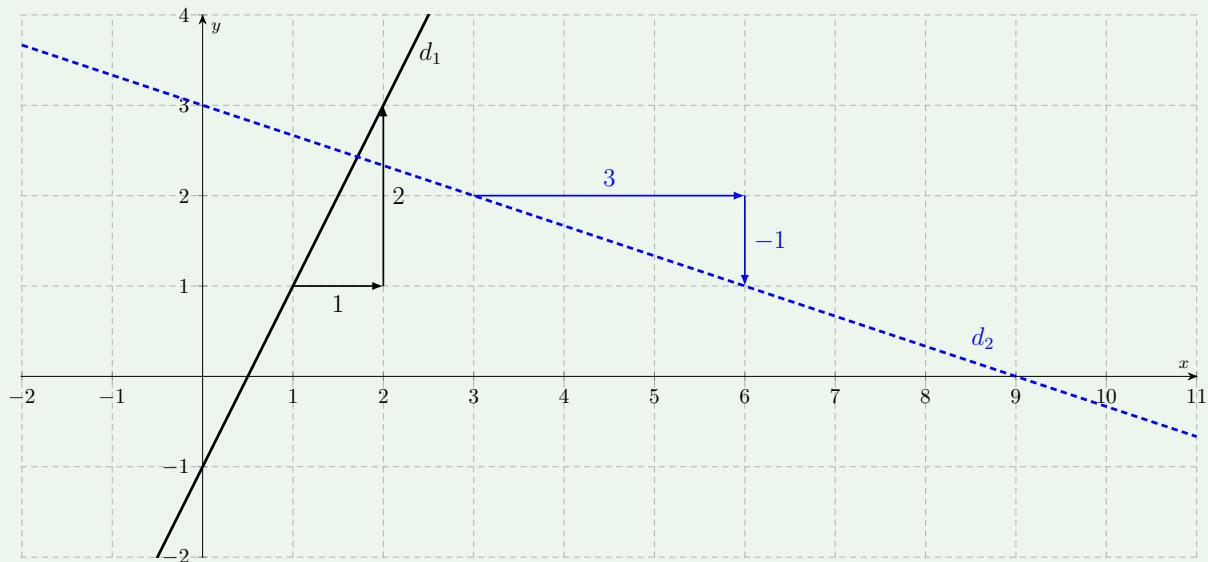
Lorsque  $a$  s'exprime sous forme d'une fraction, on a en fait :

$$a = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$$

## EXEMPLES

Construisons les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations réduites respectives  $y = 2x - 1$  et  $y = -\frac{1}{3}x + 3$ .

- Pour  $d_1$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_1$  est  $-1$ , et lorsque j'avance d'un vers la droite, je monte de deux (unités).
- Pour  $d_2$  : L'ordonnée à l'origine de  $d_2$  est  $3$ , et lorsque j'avance de trois vers la droite, je descends d'un.



► Fiches construction et détermination

## III - Recherche algébrique de $a$ et $b$

### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine et  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , avec  $x_1 \neq x_2$ . Alors

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

### EXEMPLE

On suppose que  $f(1) = 1$  et  $f(3) = 5$ .

$$\text{Alors } a = \frac{5 - 1}{3 - 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

On a alors  $f : x \mapsto 2x + b$ . On sait de plus que  $f(3) = 2 \times 3 + b$  et  $f(3) = 5$  donc :

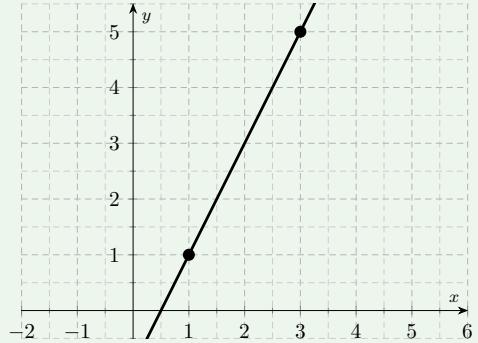
$$5 = 2 \times 3 + b$$

$$\text{soit donc } 5 = 6 + b$$

$$\text{et alors } 5 - 6 = b$$

$$\text{puis } b = -1$$

Cela donne alors  $f : x \mapsto 2x - 1$ .



- ▶ Fiche détermination algébrique
- ▶ Fiche preuve (\*)

## IV - Tableaux de signe

### PROPOSITION

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine avec  $a \neq 0$ . Alors  $f(x) = 0$  si et seulement si  $ax + b = 0$  ssi  $ax = -b$  ssi  $x = -\frac{b}{a}$ . Le tableau de signes de  $f$  dépend du signe de  $a$  :

Si  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

Si  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	-

### MÉTHODE

Grâce à la règle des signes, on peut alors dresser le tableau de signes de fonctions s'écrivant comme des produits et quotients de fonctions affines.

### EXEMPLE

Soit  $f : x \mapsto (x + 2)(4 - 5x)$ . En décomposant  $f$ , on obtient alors le tableau suivant :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	-	0	+	+
$4 - 5x$	+	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	-

On peut alors déduire de ce tableau que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) \leq 0$  est

$$S = ]-\infty; -2] \cup \left[ \frac{4}{5}; +\infty \right[$$

Pour  $g : x \mapsto \frac{x+2}{4-5x}$ , le tableau de signes obtenu est presque identique :

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{4}{5}$	$+\infty$
$x + 2$	–	0	+	+
$4 - 5x$	+		+	–
$g(x)$	–	0	+	–

La double barre signifie "non défini", dans le sens où l'on ne peut pas diviser par 0 lorsque  $x = \frac{4}{5}$ . Ce nombre n'est pas dans l'ensemble de définition de  $g$ .