

PROBABILITÉS

PROGRAMME

- Ensemble des issues. Evenements. Réunion, intersection, complémentaire.
- Loi (distribution) de probabilités. Probabilité d'un évènement : somme des probabilités des issues.
- Relation $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.
- Dénombrement à l'aide de tableaux et d'arbres.
- Capacités
 - Utiliser des modèles théoriques de référence (dé, pièce, tirage au sort) en comprenant que les probabilités sont définies a priori.
 - Construire un modèle à partir de fréquences observées, en distinguant nettement modèle et réalité.
 - Calculer des probabilités dans des cas simples : expérience aléatoire à deux ou trois épreuves.

I - Univers et évènements

1. Définitions de base

DÉFINITION

On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.

Si l'on répète un très grand nombre de fois la même expérience indépendamment, alors la fréquence d'une issue va s'approcher de sa probabilité.

EXEMPLE

Si l'on lance un dé, alors les résultats possibles (les issues) constituent l'univers $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

DÉFINITION

Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit un sous-ensemble de Ω .

EXEMPLE

Dans l'univers précédent, on peut considérer l'ensemble P : « Le résultat est pair ». On a donc $P = \{2; 4; 6\}$.

CAS PARTICULIERS

- On appelle **évènement élémentaire** tout évènement ne contenant qu'un seul élément de Ω (On les appelle des singletons).
- L'ensemble vide, noté \emptyset , est l'**évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
- L'ensemble Ω est l'**évènement certain** : Il est toujours réalisé.

EXEMPLE

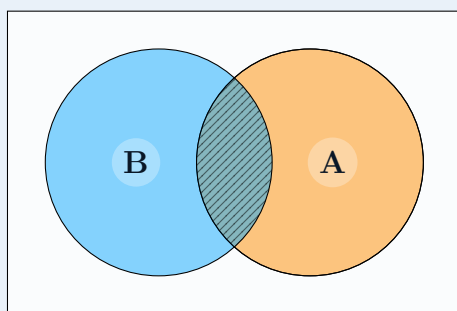
Dans l'univers précédent, $\{1\}$ et $\{3\}$ sont des éléments élémentaires.

2. Opérations sur les évènements

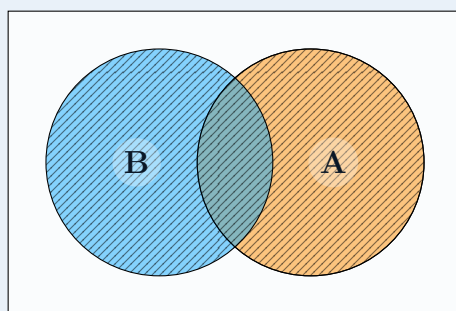
DÉFINITIONS

On se donne E un ensemble et A, B deux sous-ensembles de E .

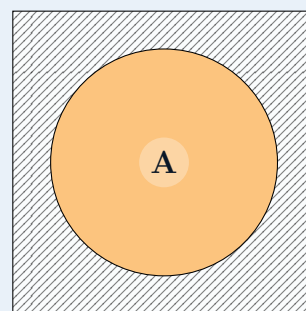
- **L'intersection** de A et B notée $A \cap B$ (A inter B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B .
- **L'union** de A et B notée $A \cup B$ (A union B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.
- **Le complémentaire** de A , noté \bar{A} (A barre) désigne l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .



$A \cap B$



$A \cup B$



\bar{A}

EXEMPLE

Dans une animalerie, on sélectionne au hasard un chien. L'univers Ω est l'ensemble de tout les chiens dans cette animalerie. On se donne de plus les évènements A : « Le chien sélectionné a le poil blanc » et B : « Le chien sélectionné a le poil beige ». On peut donc définir les évènements suivants :

- $A \cap B$: « Le chien sélectionné a le poil blanc et beige » ;
- $A \cup B$: « Le chien sélectionné a le poil blanc, beige ou les deux à la fois ».
- \bar{A} : « Le chien sélectionné n'a pas le poil blanc ».

II - Probabilités sur un univers fini

1. Généralités

DÉFINITION

Donner la **loi de probabilité** d'une expérience aléatoire signifie donner la probabilité de chaque issue.

PROPOSITIONS

Pour obtenir la probabilité d'un évènement, on fait la somme des probabilités de chaque issue le constituant.

Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers Ω , on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$$

$$\mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1$$

EXEMPLE

On lance un dé truqué. La probabilité de tomber sur chaque face est décrite dans le tableau ci-dessous :

Numéro	1	2	3	4	5	6
Probabilité associée	0,15	0,1	0,2	0,25	0,25	0,05

On considère l'évènement A : « On tombe sur un nombre inférieur à 3 ». Alors $\mathbb{P}(A) = 0,15 + 0,1 + 0,2 = 0,35$.

2. Cas équiprobable

EXEMPLE

On lance un dé équilibré. Soit A l'évènement « On tombe sur un nombre pair ». 3 des 6 faces d'un dé contiennent un nombre pair donc $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5$.

DÉFINITION

On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues d'une expérience ont la même probabilité.

PROPOSITION

Dans ce cas, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{\text{nombre total d'issues}}$.
La probabilité d'un évènement A est alors :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

3. Vocabulaire et formules

EXEMPLE

Soient A : « On tombe sur un nombre pair » et B : « On tombe sur 3 ». On a alors $A \cap B = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Ces évènements ne peuvent pas se produire en même temps.

DÉFINITION

Comme $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$, ces deux évènements sont dits incompatibles.

PROPRIÉTÉS

- Soit A un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$