Variables aléatoires

PROGRAMME

- Variable aléatoire discrète : Loi de probabilité, espérance
- Loi de Bernoulli $(0;1)$ de paramètre p, espérance
- Capacités :
  - Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ et calculer les probabilités correspondantes $\mathbb{P}(X = a)$ et $\mathbb{P}(X \leq a)$
  - Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète
  - Reconnaitre une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
  - Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points
  - Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p
- Probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes
- Probabilité associée à une répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendante de Bernoulli
- Capacités
  - Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des évènements associés aux différents chemins.
  - Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités

EXEMPLE

On lance pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1. La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X = 2)$, vaut $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

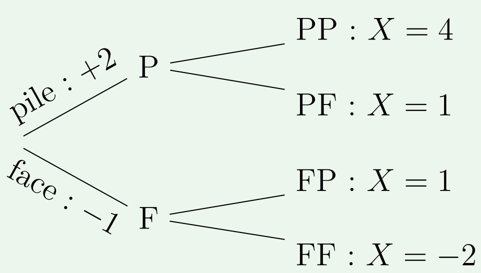
DÉFINITION

VAR = fonction $\Omega \to \mathbb{R}$

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après deux lancers successifs. On peut représenter les possibilités grâce à l'arbre ci-contre.
On a alors :

- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$;
- $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.



I - Généralités

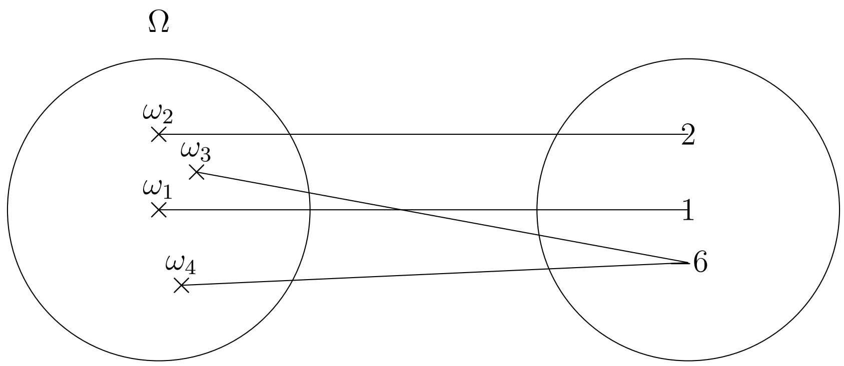
Soit $\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble fini qu'on appelle univers. Les (ω_i) sont appelés issues possibles.

EXEMPLE

Pour un lancer de dé à 6 faces on prendra $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dans la suite fixons un univers Ω. Une **variable aléatoire** réelle notée X est une fonction de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi, une variable aléatoire c'est affecter à chaque issue possible une valeur.



<u>Notation :</u>

• L'événement "X prend la valeur a" est notée $X = a$.
Par exemple, si on reprend la schéma ci-dessus l'événent $X = 6$ est réalisé pour les issues ω_3 et ω_4.

• L'événement "X inférieur ou égale à a" est notée $X \leq a$.
Par exemple ici, $X \leq 2$ est obtenue pour les issues ω_2 et ω_1.

EXEMPLE

On considère un dé à 6 faces. On associe à chaque numéro des faces une valeur de gain potentielle.

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow -2e \\ 2{,}3 &\longrightarrow -10e \\ 5 &\longrightarrow 50e \\ 4{,}6 &\longrightarrow -50e \end{aligned}$$

Ici, on associe aux issus possibles $\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ un élément de l'ensemble $\{-2, -10{,}50, -50\}$. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. L'événement "$X = -50$" est vérifié pour les issues 4,6.
2. L'événement "$X \leq -10$" est vérifié pour les issues 2,3,1.

Si X est à valeur dans $\{0{,}1\}$ on parle **d'épreuve de Bernouilli**.

EXEMPLE

On effectue une épreuve de pile ou face, on peut définir une variable aléatoire X qui a l'événement pile associe 1 et à face 0. Cette variable aléatoire ainsi définie est une épreuve de Bernouilli.

II - Loi de probabilité Espérance

1. Loi de probabilité

Soit Ω un univers et X une VAR telle que pour tout i, $X = a_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Définir la loi de probabilité de X, c'est associé à chaque a_i la probabilité de l'événement $P(X = a_i)$.
Généralement, on relate cela dans un tableau :

Valeur de X	a_1	$\dots$	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	$\dots$	p_n

▶

P$tantuneprobabilitelledoitvrifier$p$_1 + \cdots + p_n = 1$, pour deux événement A,B (c'est-à-dire A,$b \subset \mathscr{P}(\Omega)$) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\emptyset) = 0$.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple 2, on a en supposant que le dé est non truqué :

Comme le dé ne peut tomber sur deux faces en même temps on a donc que $\{4\} \cap \{6\} = \emptyset$ et $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$. Ce qui donne que :

$$P(X = -50) = P(\{4,6\}) = \frac{2}{6}$$
$$P(X = -10) = P(\{2,3\}) = P(\{2\} \cup \{3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Que l'on peut répertorier dans le tableau suivant :

Valeur de X	-50	-10	50	2
$P(X = a_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Espérance, variance et écart type.

En reprenant les notations ci-dessus on définit les notions suivantes :

1. **L'espérance** de X notée $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n$.
2. **La variance** de X notée $V(X) = p_1(a_1 - E(X))^2 + p_2(a_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(a_n - E(X))^2$
3. **L'écart type** $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

▶

• L'espérance traduit le gain moyen lorsqu'on réalise un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
• La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
• L'écart type donne une idée de la dispersion des valeurs de l'échantillon.

EXEMPLE

Reprenons la loi de probabilité ci-dessus définie par :

Valeur de X	-50	-10	50	2
$P(X = a_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Alors on a que :

$$E(X) = -50 \times \frac{2}{6} - 10 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{-100 - 20 + 50 + 2}{6} = \frac{-68}{6} < 0$$

E(X)<0 donc le jeu n'est pas avantageux puisqu'après un grand nombre de parties on va perdre en moyenne $\frac{-68}{6}$euros soit environs 11euros.

III - La loi de Bernouilli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernouilli de paramètre p c'est-à-dire que $P(X = 1) = p$ alors on a que : $P(X = 0) = 1 - p$ et $E(X) = p$ On sait que $P(X = 1) + P(X = 0) = p_1 + p_0 = p + p_0 = 1$, le résultat est immédiat.
De plus, on a que $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.

IV - Rappels de vocabulaire ensembliste

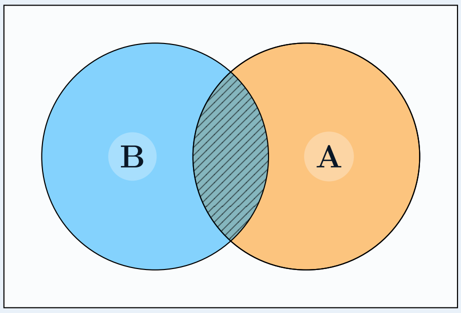
DÉFINITIONS

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

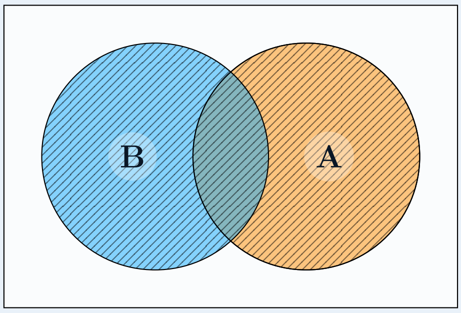
— **L'intersection** de A et B notée $A \cap B$ (A inter B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à la fois à A et à B.

— **L'union** de A et B notée $A \cup B$ (A union B) désigne l'ensemble des éléments de E appartenant à A ou à B ou aux deux.

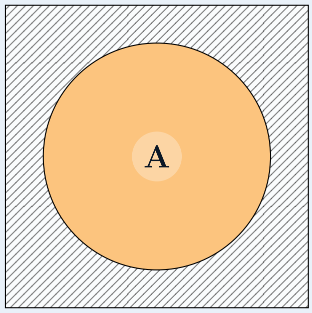
— **Le complémentaire** de A, noté $\overline{A}$ (A barre) désigne l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



$A \cap B$



$A \cup B$



$\overline{A}$

EXEMPLE

Considérons une population de chiens. On note E l'ensemble de tout les chiens, A le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil blanc, B le sous-ensemble de E constitué des chiens au poil beige.

— $A \cap B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc et beige

— $A \cup B$ désigne l'ensemble des chiens au poil blanc, beige ou les deux à la fois.

— $\overline{A}$ désigne l'ensemble des chiens au poil autre que blanc.

V - Fréquences conditionnelles et tableaux croisés

EXEMPLE

Au sein d'une classe de 1ST2S de 35 élèves, il y a 23 filles. Les élèves ont le choix entre l'allemand ou l'espagnol. On sait que 7 garçons ont choisi l'allemand contre seulement 3 filles. On peut alors dresser le tableau suivant :

	Espagnol	Allemand	Total
Filles	20	3	23
Garçons	5	7	12
Total	25	10	35

On note F l'ensemble des filles, G l'ensemble des garçons et A l'ensemble des élèves ayant choisi l'allemand.

- Le nombre d'éléments de $F \cap A$ (c'est-à-dire le nombre de filles ayant choisi l'allemand) est 3.
- Le nombre d'éléments de $G \cap \overline{A}$ (c'est à dire le nombre de garçons qui n'ont pas choisi l'allemand, donc qui ont choisi l'espagnol) est 16.
- La fréquence des filles dans cette classe est $\frac{23}{35} \simeq 0{,}66 = 66\%$. On parle de **fréquence marginale**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'allemand dans cette classe est $\frac{7}{35} = 0{,}2 = 20\%$.
- La fréquence des filles parmi les élèves ayant choisi l'espagnol est $\frac{20}{25} = 0{,}8 = 80\%$. On parle de **fréquence conditionnelle**.
- La fréquence des garçons ayant choisi l'espagnol parmi les garçons est $\frac{5}{12} \simeq 0{,}42 = 42\%$.

PROPOSITION

On se donne E un ensemble et A,B deux sous-ensembles de E.

- La fréquence marginale de A dans E vaut $\dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } E} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(E)}$.
- La fréquence conditionnelle de A dans B vaut $\dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)}$.

- ▶ Cas favorables / Cas totaux

- ▶ Exos 16 p174, 24 p176
- ▶ Exos 17,18 p175, 26 p176
- ▶ Exos 35,36 p181
- ▶ Sujet D p184
- ▶ Exos p179

VI - Rappels de probabilités

DÉFINITIONS

- On appelle expérience aléatoire une expérience dont on ne peut pas prévoir le résultat. Les issues possibles d'une expérience aléatoire, aussi appelées éventualités, constituent un ensemble appelé **l'univers**.
- On appelle l'univers, noté Ω (oméga), l'ensemble de toutes les issues possibles de cette expérience.
- Un évènement A est un ensemble d'issues, autrement dit une partie de Ω. On appelle

évènement élémentaire tout évènement ne contenant qu'un seul élément de Ω (On les appelle des singletons).

— L'ensemble vide, noté $\varnothing$, est **l'évènement impossible** : Il ne se réalise jamais.
— L'ensemble Ω est **l'évènement certain** : Il est toujours réalisé.
— On dit qu'on est en situation d'équiprobabilité lorsque toutes les issues ont la même probabilité.
— On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsqu'ils ne peuvent se produire en même temps, c'est-à-dire lorsque $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$.
— Pour tout évènement A d'une expérience aléatoire d'univers Ω, on a :

$$0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1 \qquad \mathbb{P}(\varnothing) = 0 \qquad \mathbb{P}(\Omega) = 1$$

PROPRIÉTÉS

— Soit A un évènement. Alors $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
— Soient A et B deux évènements d'une expérience aléatoire. Alors on a :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

► Schéma à faire

VII - Probabilités conditionnelles

► De la même manière qu'avec les fréquences conditionnelles, on peut définir des probabilités conditionnelles.

DÉFINITION

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On note $\mathbb{P}_A(B)$ la probabilité de B en sachant que A est réalisé, aussi appelée probabilité de B sachant A. On a de plus $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$.

REMARQUE

Dans une situation **d'équiprobabilité**, on a $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(A)}$.

► Cas favorables / Cas totaux

► On utilisera aussi des tableaux pour trouver des probabilités conditionnelles.

EXEMPLE

On a interrogé 1500 élèves d'un lycée sur la nature de leurs loisirs. On considère alors les évènements C : « L'élève pratique une activité culturelle » et S : « L'élève pratique une activité sportive ». On a obtenu les résultats suivants :

	Activité sportive (S)	Pas d'activité sportive ($\overline{S}$)	Total
Activité culturelle (C)	402	591	993
Pas d'activité culturelle ($\overline{C}$)	315	192	507
Total	717	783	1500

On choisit un élève au hasard dans le lycée.

1. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}(C) = \frac{993}{1500} = 0{,}662 = 66{,}2\%$.
2. La probabilité qu'un élève pratique les deux types d'activité est $\mathbb{P}(C \cap S) = \frac{402}{1500} = 0{,}268 = 26{,}8\%$.
3. La probabilité qu'un élève fasse du sport en sachant qu'il pratique une activité culturelle est $\mathbb{P}_C(S) = \frac{\text{Card}(C\cap S)}{\text{Card}(C)} = \frac{402}{993} = 0{,}405 = 40{,}5\%$.
4. La probabilité qu'un élève pratique une activité culturelle en sachant qu'il ne fait pas de sport est $\mathbb{P}_{\overline{S}}(C) = \frac{\text{Card}(\overline{S}\cap C)}{\text{Card}(\overline{S})} = \frac{591}{783} = 0{,}755 = 75{,}5\%$.

- Exos 22,23 p175, 31 p177
- Exos 37,38 p181
- Exos 32,33 p178
- Sujets B,C p184
- Exos 39,40,40 p186