Variables aléatoires

PROGRAMME

- Variable aléatoire discrète : Loi de probabilité, espérance
- Loi de Bernoulli $(0;1)$ de paramètre p, espérance
- Capacités :
  - Interpréter en situation les écritures $\{X = a\}$, $\{X \leq a\}$ et calculer les probabilités correspondantes $\mathbb{P}(X = a)$ et $\mathbb{P}(X \leq a)$
  - Calculer et interpréter en contexte l'espérance d'une variable aléatoire discrète
  - Reconnaitre une situation aléatoire modélisée par une loi de Bernoulli.
  - Simuler N échantillons de taille n d'une loi de Bernoulli et représenter les fréquences observées des 1 par un histogramme ou un nuage de points
  - Interpréter sur des exemples la distance à p de la fréquence observée des 1 dans un échantillon de taille n d'une loi de Bernoulli de paramètre p
- Probabilité associée à une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes
- Probabilité associée à une répétition d'épreuves aléatoires identiques et indépendante de Bernoulli
- Capacités
  - Représenter par un arbre de probabilités une expérience aléatoire à deux épreuves indépendantes et déterminer les probabilités des évènements associés aux différents chemins.
  - Représenter par un arbre de probabilités la répétition de n épreuves aléatoires identiques et indépendantes de Bernoulli avec $n \leq 4$ afin de calculer des probabilités

EXEMPLE

On lance pièce équilibrée. Si on tombe sur pile, on gagne 2€, sinon on perd 1€. On note X les gains après un lancer. Ainsi X peut valoir soit 2, soit -1. La probabilité que X vaille 2, notée $\mathbb{P}(X = 2)$, vaut $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

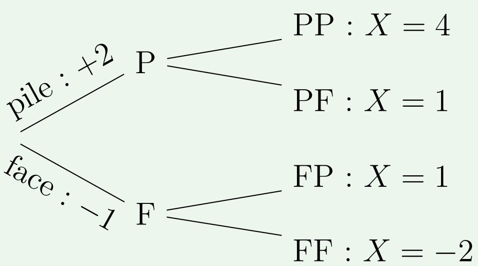
DÉFINITION

VAR = fonction $\Omega \to \mathbb{R}$

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus, mais X représente cette fois les gains après deux lancers successifs. On peut représenter les possibilités grâce à l'arbre ci-contre. On a alors :

- $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}5$;
- $\mathbb{P}(X = -2) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.



I - Généralités

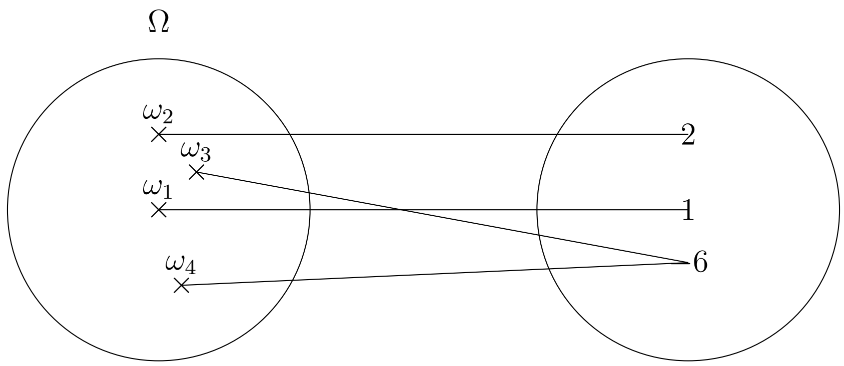
Soit $\Omega := \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ un ensemble fini qu'on appelle univers. Les (ω_i) sont appelés issues possibles.

EXEMPLE

Pour un lancer de dé à 6 faces on prendra $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

Dans la suite fixons un univers Ω. Une **variable aléatoire** réelle notée X est une fonction de $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ainsi, une variable aléatoire c'est affecter à chaque issue possible une valeur.



Notation :
• L'événement "X prend la valeur a" est notée $X = a$.
Par exemple, si on reprend la schéma ci-dessus l'évément $X = 6$ est réalisé pour les issues ω_3 et ω_4.

• L'événement "X inférieur ou égale à a" est notée $X \leq a$.
Par exemple ici, $X \leq 2$ est obtenue pour les issues ω_2 et ω_1.

EXEMPLE

On considère un dé à 6 faces. On associe à chaque numéro des faces une valeur de gain potentielle.

$$\begin{aligned} 1 &\longrightarrow -2e \\ 2{,}3 &\longrightarrow -10e \\ 5 &\longrightarrow 50e \\ 4{,}6 &\longrightarrow -50e \end{aligned}$$

Ici, on associe aux issus possibles $\{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}$ un élément de l'ensemble $\{-2, -10{,}50, -50\}$. On définit ainsi une variable aléatoire X.

1. L'événement "$X = -50$" est vérifié pour les issues 4,6.
2. L'événement "$X \leq -10$" est vérifié pour les issues 2,3,1.

Si X est à valeur dans $\{0{,}1\}$ on parle **d'épreuve de Bernoulli**.

EXEMPLE

On effectue une épreuve de pile ou face, on peut définir une variable aléatoire X qui a l'événement pile associe 1 et à face 0. Cette variable aléatoire ainsi définie est une épreuve de Bernoulli.

II - Loi de probabilité Espérance

1. Loi de probabilité

Soit Ω un univers et X une VAR telle que pour tout i, $X = a_i$ avec $a_i \in \mathbb{R}$.
Définir la loi de probabilité de X, c'est associé à chaque a_i la probabilité de l'événement $P(X = a_i)$.
Généralement, on relate cela dans un tableau :

Valeur de X	a_1	$\dots$	a_n
$P(X = a_i)$	p_1	$\dots$	p_n

▶

P$tantuneprobabilitelledoitvrifier$p$_1 + \cdots + p_n = 1$, pour deux événement A,B (c'est-à-dire $A,b \subset \mathscr{P}(\Omega)$) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et $P(\emptyset) = 0$.

EXEMPLE

Reprenons l'exemple 2, on a en supposant que le dé est non truqué :

Comme le dé ne peut tomber sur deux faces en même temps on a donc que $\{4\} \cap \{6\} = \emptyset$ et $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$. Ce qui donne que :

$$P(X = -50) = P(\{4{,}6\}) = \frac{2}{6}$$
$$P(X = -10) = P(\{2{,}3\}) = P(\{2\} \cup \{3\}) = P(\{2\}) + P(\{3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Que l'on peut répertorier dans le tableau suivant :

Valeur de X	-50	-10	50	2
$P(X = a_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2. Espérance, variance et écart type.

En reprenant les notations ci-dessus on définit les notions suivantes :

1. **L'espérance** de X notée $E(X) = a_1p_1 + a_2p_2 + \cdots + a_np_n$.
2. **La variance** de X notée $V(X) = p_1(a_1 - E(X))^2 + p_2(a_2 - E(X))^2 + \cdots + p_n(a_n - E(X))^2$
3. **L'écart type** $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

▶

• L'espérance traduit le gain moyen lorsqu'on réalise un grand nombre de fois l'expérience aléatoire.
• La variance représente la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.
• L'écart type donne une idée de la dispersion des valeurs de l'échantillon.

EXEMPLE

Reprenons la loi de probabilité ci-dessus définie par :

Valeur de X	-50	-10	50	2
$P(X = a_i)$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Alors on a que :

$$E(X) = -50 \times \frac{2}{6} - 10 \times \frac{2}{6} + 50 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{6} = \frac{-100 - 20 + 50 + 2}{6} = \frac{-68}{6} < 0$$

E(X)<0 donc le jeu n'est pas avantageux puisqu'après un grand nombre de parties on va perdre en moyenne $\frac{-68}{6}$euros soit environs 11euros.

III - La loi de Bernoulli

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p c'est-à-dire que $P(X = 1) = p$ alors on a que : $P(X = 0) = 1 - p$ et $E(X) = p$ On sait que $P(X = 1) + P(X = 0) = p_1 + p_0 = p + p_0 = 1$, le résultat est immédiat.
De plus, on a que $E(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.