0mm 0mm 0mm 0mm arabic

.

:

thmframed[defin]Théorème exframed[defin]Exemple

Fonctions polynomiales de degré 2

test0mm

Définition

On appelle fonction polynomiale de degré 2 *toute fonction*

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & ax^2 + bx + c \end{array}$$

Où $a, \ b, \ c \in \mathbb{R}$ *et* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Exemples

$f : x \mapsto x^2$, $g : x \mapsto 3x^2 - 4$ *et* $h : x \mapsto 2 - 0{,}3x^2$ *sont des fonctions polynomiales de degré 2.*

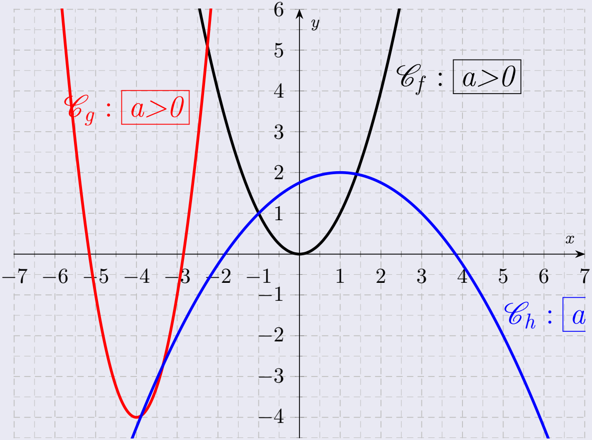
L'appellation est un peu lourde... On dira plutôt fonction de degré 2.

Exo 1f
Graphe d'une fonction au choix

Proposition

La représentation graphique d'une fonction de degré 2 est une parabole.

Exemples



Montrer sur geogebra l'effet obtenu en changeant a et c

Remarque

Le terme constant (sans x, c'est-à-dire c) est l'ordonnée à l'origine de la parabole. Changer c décale la parabole vers le haut ou vers le bas.

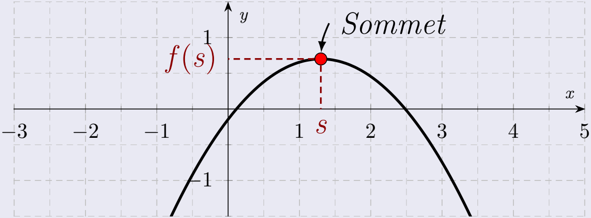
Propriétés

Soit f une fonction de degré 2.

- *Si $a \geq 0$, f est décroissante puis croissante : elle branche vers le haut.*
- *Si $a \leq 0$, f est croissante puis décroissante : elle branche vers le bas.*

Définition

On appelle sommet d'une parabole le point où elle change de direction. C'est le point le plus bas si $a > 0$, le point le plus haut sinon.



Propriétés

On se donne f une fonction de degré 2 et s l'abscisse du sommet de la parabole associée.

Les coordonnées de son sommet sont donc $(s,f(s))$.

La parabole associée possède pour axe de symétrie la droite parallèle a l'axe des ordonnées (verticale) passant par son sommet.

On en déduit le tableau de variations de f :

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		s
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(s)$ $\nearrow$

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		s
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(s)$ $\searrow$

On verra dans la suite comment trouver algébriquement (par le calcul) les coordonnées de ce sommet, dans des cas particuliers.

Exo 2f

Fonctions $x \mapsto ax^2 + c$0mm

Faire tracer la représentation graphique d'une fonction de degré 2 à chacun (calculatrice ou non). En déterminer les coordonnées du sommet. Remarques ?

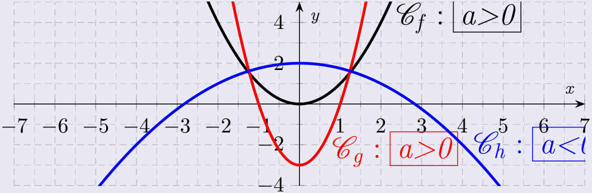
Propriétés

Soit $f : x \mapsto ax^2 + c$ *une fonction de degré 2.*

Les paraboles d'équation $y = ax^2 + c$ *ont pour axe de symétrie l'axe des ordonnées.*

Les coordonnées du sommet de cette parabole sont $(0; c)$.

Exemples



Exemple

Soit $f : x \mapsto 5x^2 - 2$*. Les coordonnées du sommet de la parabole associée sont* $(0; -2)$*.*

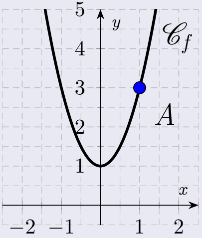
Sommet, symétries : Exos 20,21,23,22,(24) p120
Variations : Exo 49 p122
Représentation, variations : Exo 46 p122
Equations : Exos 52,53,54 p123

Méthode

Pour déterminer l'expression d'une fonction $f : x \mapsto ax^2 + c$ *à partir de sa représentation graphique, on lit d'abord* c *en regardant l'ordonnée à l'origine, puis on détermine* a *en résolvant une équation.*

Exemple

On a représenté une fonction $f : x \mapsto ax^2 + c$ *sur le repère ci-contre.*



On voit directement que $c = 1$, *d'où* $f : x \mapsto ax^2 + 1$.

On se donne maintenant un point sur la courbe de f, *par exemple* $A(1;3)$. *Cela signifie que* $f(1) = 3$, *autrement dit* $a \times 1^2 + 1 = 3$, *soit donc* $a + 1 = 3$, *d'où* $a = 2$.

On a alors $f : x \mapsto 2x^2 + 1$.

Exo 3f
Exo 22p121(méthode 2)
Préciser : Dans le livre on voit $ax^2 + b$, à voir ...

Fonctions $x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$0mm
Généralités10mm

Proposition

Les fonctions du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ sont des fonctions de degré 2. On dit que cette forme est l'écriture factorisée de f (lorsqu'elle existe).

En effet,

$$\begin{aligned} a(x-x_1)(x-x_2) &= a(x^2 - xx_2 - xx_1 + x_1x_2) \\ &= ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 \\ &= ax^2 - (ax_1 + ax_2)x + ax_1x_2 \end{aligned}$$

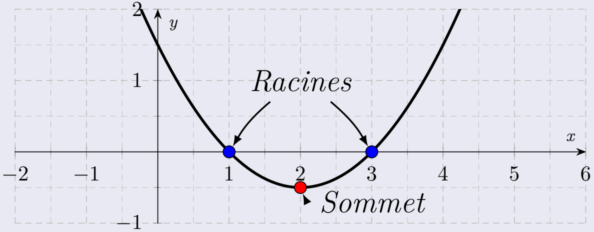
Donc $a(x-x_1)(x-x_2) = ax^2 + bx + c$ avec $b = -(ax_1 + ax_2)$ et $c = ax_1x_2$.

Exos 79,80,(81->83) p125

Remarque par rapport à la suite ?

Définition

*Soit f une fonction de degré 2. On appelle **racines** de f les solutions de l'équation $f(x) = 0$. Ce sont donc les abscisses des points d'intersection entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses.*



Remarque

Si $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ $(a \neq 0)$, les racines de f sont x_1 et x_2.

En effet,

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0 \Leftrightarrow a=0 \text{ ou } x-x_1=0 \text{ ou } x-x_2$$
$$\Leftrightarrow x=x_1 \text{ ou } x=x_2$$

Exemple

Les racines de la fonction $f : x \mapsto -3(x-2)(x+4)$ sont 2 et -4.

Exos 84,85 p125

Propriété

Soit $f : x \mapsto a(x-x_1)(x-x_2)$ avec $a \neq 0$. On pose $s = \dfrac{x_1+x_2}{2}$. Alors le sommet de la parabole associée a pour coordonnées $(s,f(s))$.

Exos 26,27,29 p121

Factorisation10mm

Soit $f : x \mapsto ax^2 + b + c$. On souhaite retrouver l'écriture factorisée $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Méthode

Si l'on connait une racine x_1 de f, on peut retrouver l'écriture factorisée de f par identification.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$. *Cherchons d'abord une racine dite "évidente" de* f.

On remarque que $f(1) = 0$ *donc on peut prendre* $x_1 = 1$.

On sait alors qu'on peut écrire $f(x) = a(x-1)(x-x_2)$ *avec* $a, x_2 \in \mathbb{R}$.

Développons cette expression :

$$\begin{aligned} f(x) &= a\left(x^2 - x \times x_2 - x + x_2\right) \\ &= ax^2 + (a - ax_2)x + ax_2 \end{aligned}$$

On a de plus $f(x) = 1x^2 - 3x + 2$.

On a alors $\begin{cases} a = 1 \\ a - ax_2 = -3 \\ ax_2 = 2 \end{cases}$ *donc* $a = 1$ *et*

Remarque

Le a qui apparait dans la forme développée et factorisée est le même !

Exemple

Soit $f : x \mapsto 3x^2 - 9x + 6$. *On a* $a = 3$ *donc la forme développée de* f *sera de la forme* $f(x) = 3(x - x_1)(x - x_2)$.

Exo 28 p121
Exos 60 -> 66 p123

Etude du signe10mm

Remarque

Une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$ *peut être vue comme un produit d'un nombre réel et de deux fonctions affines.*

Méthode

Pour dresser algébriquement le tableau de signes d'une fonction du type $f : x \mapsto a(x - x_1)(x - x_2)$*, on peut étudier le signe des deux fonctions affines qui la composent et d'utiliser la règle des signes.*

Exemple

Soit $f : x \mapsto 0{,}5(x-1)(x+3)$*. Cette fonction est donc composée des deux fonctions affines* $x \mapsto x-1$ *et* $x \mapsto x+3$*. On peut d'abord dresser le tableau de signes de ces deux fonctions :*

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	

On peut alors combiner ces tableaux pour dresser le tableau de signes de f *:*

x	$-\infty$		-3		1	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$

Exos 72 -> 74 p124
Exos 88 (-> 90) p125

Déroulé0mm

Total : 3.5 semaines

Semaine 1

30m - Cours I partie 1 : Définitions et exo
15m - Graphe de $x \mapsto x^2$
1h - Cours : Représentation graphique, sommet, variations, exo
30m - Cours II : Généralités+Exos

Semaine 2

1h - Suite
1h - II.2 + Exos
45m - III.1.1 + Exos
45m - III.1.2 + Exos

Semaine 3

30m - Suite
45m : III.1.3 + Exos
1h : III.2 + Exos
1h : III.3 + Exos