Dérivation

PROGRAMME

- Fonction dérivée
- Dérivées de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, de combinaisons linéaires, de polynômes de degré ≤ 3
- Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée
- Tableau de variations, extremums
- Capacités
  - Calculer la dérivée d'un polynome de degré ≤ 3
  - Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynome de degré ≤ 3

I - Généralités, règles de calcul

DÉFINITION

On définit la fonction dérivée de f, notée f', qui à x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

PROPOSITION

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.

II - Lien avec les variations

THÉORÈME

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Si f' est positive sur $[a;b]$, alors f est croissante sur $[a;b]$.
- Si f' est négative sur $[a;b]$, alors f est décroissante sur $[a;b]$.
- Si f' est nulle sur $[a;b]$, alors f est constante sur $[a;b]$. Les zéros de f' correspondent aux extremums de f. (A reformuler)

APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

On a $f'(x) = 0$ ssi $2x = 4$ ssi $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

Cela donne alors :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	