Suites arithmétiques et géométriques

I - Suites arithmétiques

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite arithmétique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en ajoutant toujours le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique a, on a besoin de deux nombres :

— Son premier terme a_0

— Sa raison r

On a alors la relation $a_{n+1} = a_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$a_0 \xrightarrow{+r} a_1 \xrightarrow{+r} a_2 \xrightarrow{+r} \dots$$

EXEMPLE

Soit u la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = -2$. Alors :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 - 2 = 3 \\ u_2 &= u_1 - 2 = 1 \\ u_3 &= u_2 - 2 = -1 \\ u_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

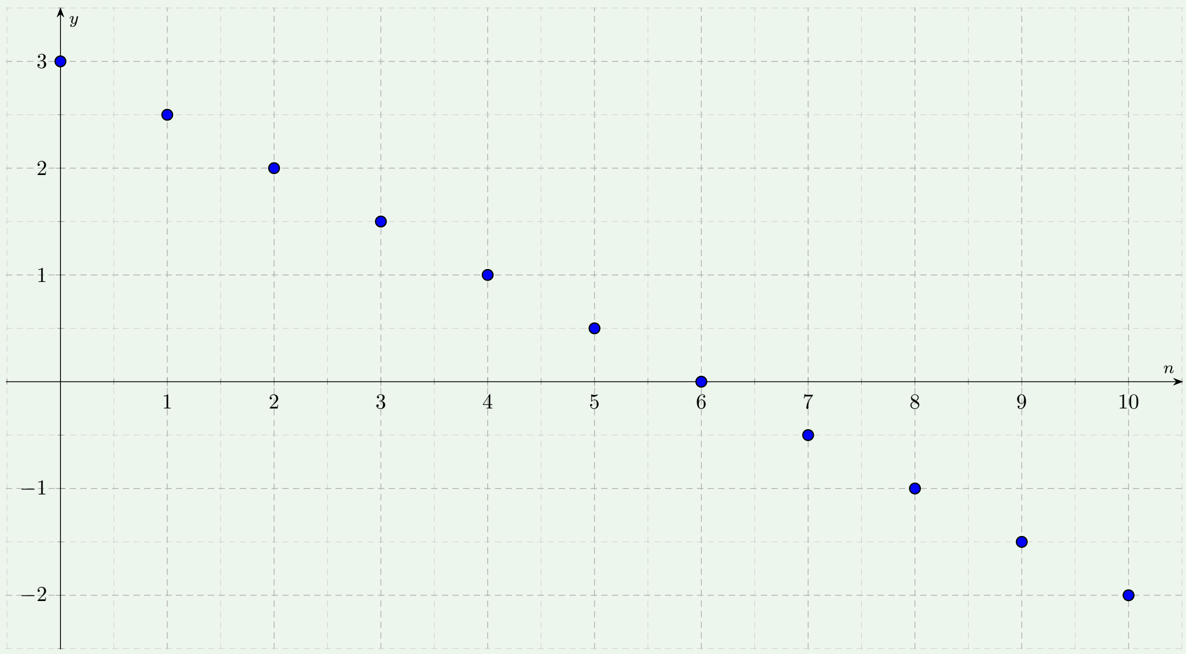
REMARQUE

La différence entre deux termes successifs vaut toujours r : Pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} - a_n = r$.

PROPRIÉTÉ

Lorsqu'on représente graphiquement une suite arithmétique, les points obtenus sont alignés.

EXEMPLE



On a représenté une suite u ci-dessus. Son premier terme u_0 vaut 3 et pour passer d'un terme au suivant, on retire 0.5 : $r = -0.5$. La suite u est donc une suite arithmétique de premier terme 3 et de raison -0.5.

MÉTHODE

Pour s'assurer qu'une suite **semble** arithmétique, on calcule la différence entre deux termes successifs, et l'on doit toujours trouver le même nombre (la raison).

EXEMPLE

On se donne deux suites u et v, dont quelques valeurs sont décrites dans le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3
u_n	5	9	13	17
v_n	3	12	20	29

2. Variations des suites arithmétiques

PROPOSITION

- Si $r > 0$, alors la suite a est croissante.
- Si $r < 0$, alors la suite a est décroissante.
- Si $r = 0$, alors la suite a est constante.

EXEMPLE

Soit a la suite arithmétique définie par $a_0 = 13$ et pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = a_n - 5$. La raison de cette suite est $r = -5 < 0$ donc a est décroissante.

II - Suites géométriques, cas positif

1. Généralités

DÉFINITION

Une suite est dite géométrique lorsque l'on passe d'un terme au suivant en multipliant toujours par le même nombre, appelé la raison.
Pour définir une suite arithmétique g, on a besoin de deux nombres :

- Son premier terme g_0
- Sa raison q

On a alors la relation $g_{n+1} = q \times g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$g_0 \xrightarrow{\times q} g_1 \xrightarrow{\times q} g_2 \xrightarrow{\times q} \dots$$

▶ On se restreindra au cas $q > 0$.

EXEMPLE

Soit g la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Alors :

$$\begin{aligned} g_1 &= g_0 \times 2 = 6 \\ g_2 &= g_1 \times 2 = 12 \\ g_3 &= g_2 \times 2 = 24 \\ g_4 &= \ \dots \end{aligned}$$

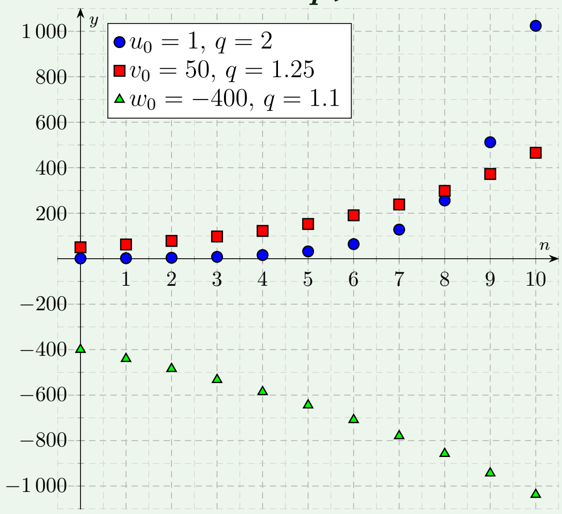
REMARQUE

Le quotient de deux termes successifs vaut toujours q : $\frac{g_{n+1}}{g_n} = q$.

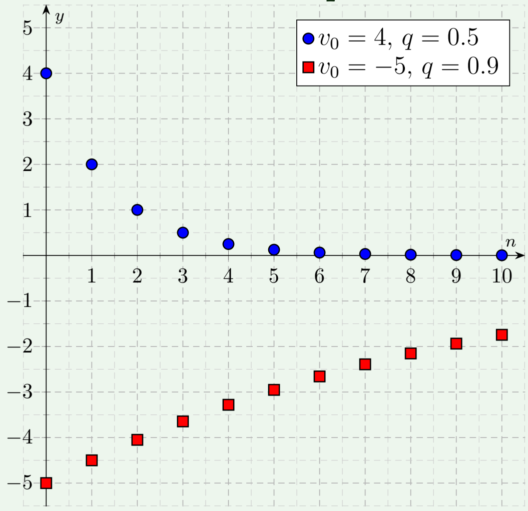
2. Représentation graphique des suites géométriques

EXEMPLE

Cas 1 : $q > 1$



Cas 2 : $0 < q < 1$



3. Variations des suites géométriques

PROPOSITION

— Si $q > 1$, alors la suite g est croissante.

— Si $0 < q < 1$, alors la suite g est décroissante.

— Si $q = 1$, alors la suite g est constante.

EXEMPLE