II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.
L'espérance de X, notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_Nx_N$$

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_N
$\mathbb{P}(X = x)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_N

REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0{,}25 \times (-2) + 0{,}5 \times 1 + 0{,}25 \times 4$
$= -0{,}5 + 0{,}5 + 1$
$= 1$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€ ! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.
Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITIONS

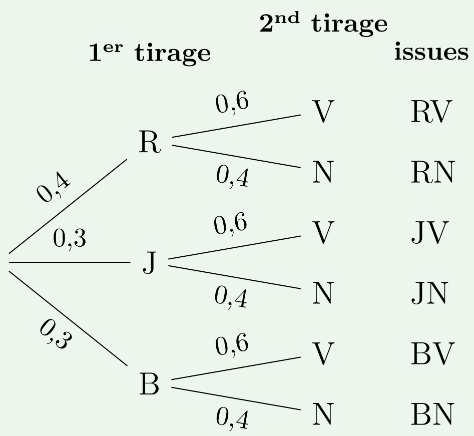
- Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

EXEMPLE

On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0{,}4$.
On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.
On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

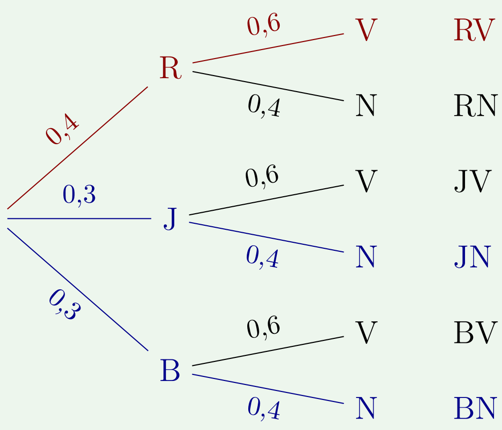
EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (RV) est :

$$0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}54$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (JN ou BN) est :

$$\begin{aligned}(0{,}3 \times 0{,}6) + (0{,}3 \times 0{,}6) &= 0{,}18 + 0{,}18 \\ &= 0{,}36\end{aligned}$$



IV - Épreuves et lois de Bernoulli

DÉFINITION

- Une épreuve de Bernoulli de paramètre p est une expérience où il n'y a que deux issues possibles : l'une est assimilée à un succès (de probabilité p) et l'autre à l'échec (de probabilité $1 - p$).
- On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p lorsqu'elle associe 1 au succès et 0 à l'échec. Sa loi est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$1 - p$	p

EXEMPLE

Une urne contient des boules numérotées de 1 à 10, indiscernables au toucher. On tire au hasard une boule dans l'urne. On considère comme succès l'évènement « Obtenir la boule numérotée 10 » et donc comme échec « Ne pas obtenir la boule numérotée 10 ».

La loi de Bernoulli de la variable aléatoire X associée à cette expérience est représentée ci-contre.

x	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	0,9	0,1

PROPOSITION

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $\mathbb{E}(X) = p$.