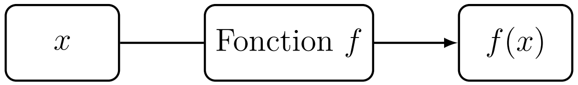
Fonctions : Généralités

I - Définitions, notations

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un **unique** réel noté $f(x)$. On note $f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Valeur d'entrée (dans D) Valeur de sortie (dans $\mathbb{R}$)



On dit alors que :

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

Exemple : On définit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

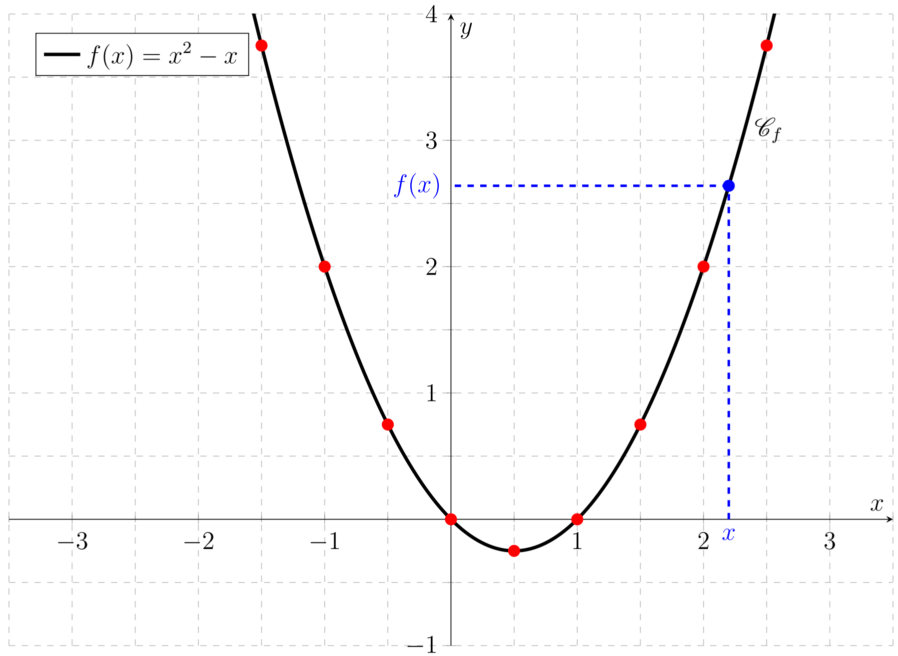
Remarque : Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

II - Représentation graphique d'une fonction

Définition : Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

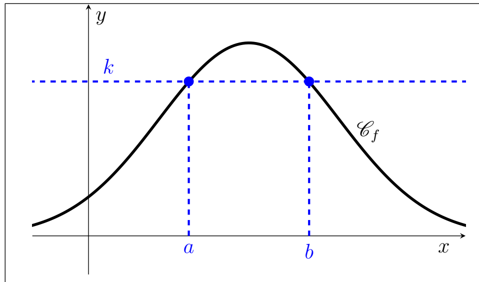
x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									



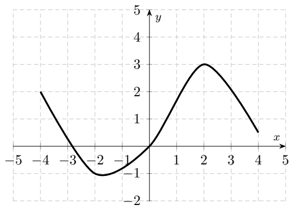
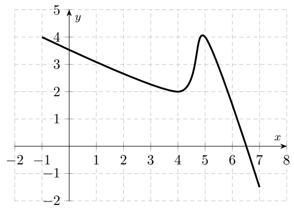
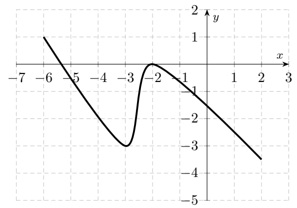
Les points $(-1; 2)$ et $(1; 0)$ appartiennent à la courbe de f, mais pas le point $(0; 1)$.

III - Résolution graphique d'équations

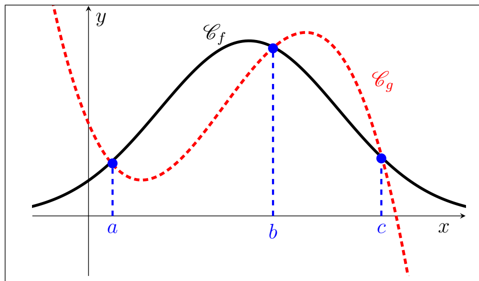
1) Equations du type $f(x) = k$

	Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe dont l'ordonnée est k. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{a; b\}$

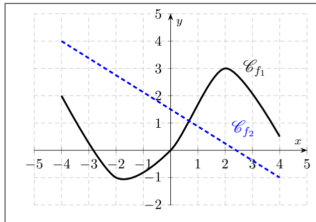
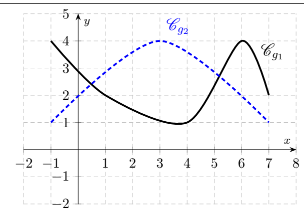
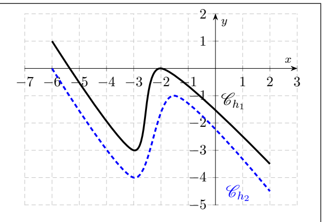
Exemples :

		
Résoudre $f(x) = 1$:	Résoudre $g(x) = 1$:	Résoudre $h(x) = -4$:

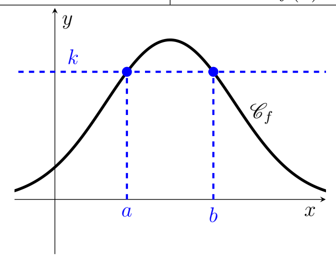
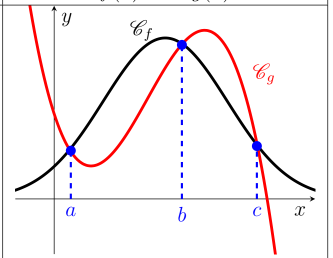
2) Equations du type $f(x) = g(x)$

	Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{a; b; c\}$

Exemples :

		
Résoudre $f_1(x) = f_2(x)$:	Résoudre $g_1(x) = g_2(x)$:	Résoudre $h_1(x) = h_2(x)$:

IV - Résolution graphique d'inéquations

$f(x) > k$	$f(x) \leq k$	$f(x) > g(x)$
		
Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]a; b[$	Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty; a[\cup]b; c[$

V - Etude du signe

Méthode : Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

VI - Parité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0 ($I = [-a; a]$, $]-a; a[$ ou $\mathbb{R}$). On dit que f est :

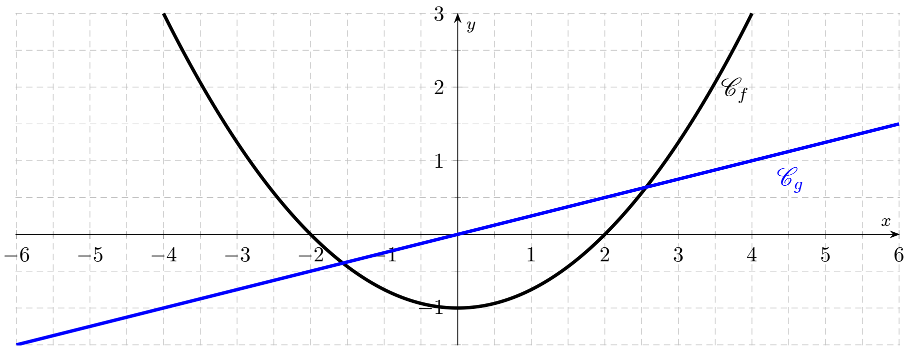
- **paire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = f(x)$.
- **impaire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

- La fonction $f: \begin{array}{ccc} [-2;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-1 \end{array}$ est paire car pour tout $x \in [-2; 2], f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$.
- La fonction $g: \begin{array}{ccc}]3;3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0.5x \end{array}$ est impaire.

Propriétés :

- f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $(0; 0)$.



Remarque : Une fonction peut être ni paire ni impaire !