Droites du plan

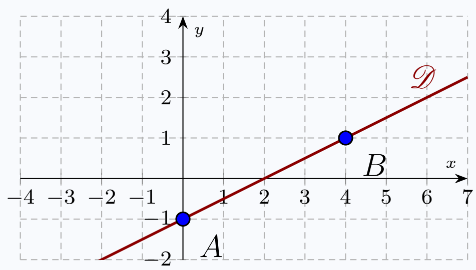
I - Équations cartésiennes de droites et vecteurs directeurs

On se place dans un repère $\left(O; \vec{i}\,; \vec{j}\right)$ du plan.

1. Vecteurs directeurs

DÉFINITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite, et A et B deux points de $\mathscr{D}$.
On appelle **vecteur directeur** de $\mathscr{D}$ tout vecteur $\vec{u}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.
Autrement dit, le vecteur $\vec{u}$ donne la direction de la droite $\mathscr{D}$.



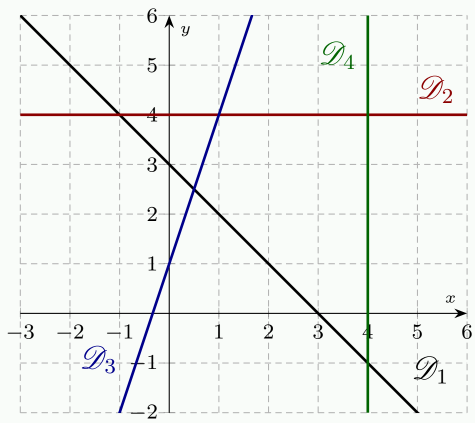
REMARQUE

Un vecteur directeur n'est pas unique : Ici, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de la droite (AB).

EXEMPLE

Donner les coordonnées de **plusieurs** vecteurs directeurs des droites $\mathscr{D}_1$, $\mathscr{D}_2$, $\mathscr{D}_3$ et $\mathscr{D}_4$.

- $\mathscr{D}_1$:
- $\mathscr{D}_2$:
- $\mathscr{D}_3$:
- $\mathscr{D}_4$:



2. Équations cartésiennes

PROPOSITION

Soit $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{u}\binom{-b}{a}$ un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Alors $\mathscr{D}$ possède une équation de la forme $ax + by + c = 0$, appelée équation cartésienne de $\mathscr{D}$.

COROLLAIRE

Si les coordonnées $(x; y)$ d'un point M vérifient l'équation $ax + by + c = 0$ d'une droite $\mathscr{D}$, alors M appartient à la droite $\mathscr{D}$ dont un vecteur directeur est $\vec{u}\binom{-b}{a}$.

EXEMPLES

Déterminons une équation cartésienne des droites suivantes :

- $\mathscr{D}_1$ passant par le point $A(3;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.

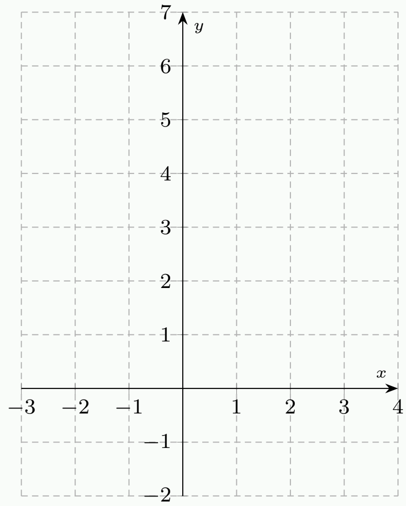
- $\mathscr{D}_2$ passant par les points $B(5;3)$ et $C(1;-3)$.

MÉTHODES

Pour tracer une droite $\mathscr{D}$ étant donnée son équation cartésienne, on peut :

- Déterminer les coordonnées de deux points appartenant à $\mathscr{D}$ en remplaçant x ou y par des valeurs spécifiques ;
- Déterminer de la même manière les coordonnées d'un point, et utiliser un vecteur directeur.

EXEMPLES



Soit $\mathscr{D}_1 : 2x - y + 3 = 0$.

- Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ est :
- Si $x = 0$, l'équation devient :

  Alors $A(\ldots;\ldots) \in \mathscr{D}_1$.

On peut donc tracer la droite $\mathscr{D}_1$ dans le repère ci-contre.

On remarque d'ailleurs que $2x-y+3=0 \iff y=2x+3$ (On appelle cette équation l'**équation réduite** de $\mathscr{D}_1$). La droite $\mathscr{D}_1$ peut donc être identifiée à la courbe d'une fonction affine.

Soit $\mathscr{D}_2 : 3x - 9 = 0$. Un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$ est :
Ici, il n'y a pas de y donc il suffit de résoudre l'équation :

Tout point dont les coordonnées sont de la forme .... avec $y \in \mathbb{R}$ convient donc. On prend par exemple $B(\ldots;\ldots)$.

II - Systèmes de deux équations à deux inconnues

Résoudre un système à deux inconnues , c'est trouver le ou les couples $(x; y)$ qui vérifie(nt) à la fois les deux équations.

EXEMPLE

Le couple $(2; 3)$ vérifie le système d'équations $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$. En effet, en remplaçant x et y par 2 et 3, on trouve :

1. Résolution graphique

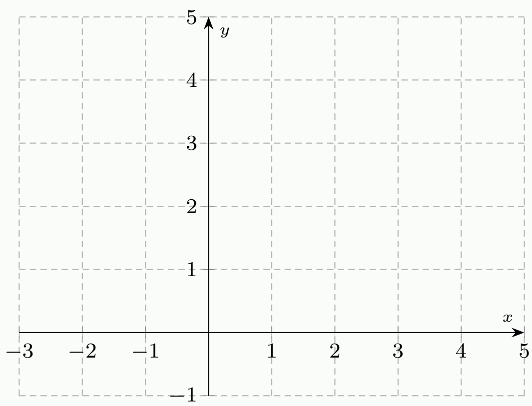
On se ramène à deux équations de droites que l'on trace.
L'unique solution du système est alors les coordonnées du point d'intersection des deux droites.

EXEMPLE

On reprend le système précédent : $\begin{cases} 5x - 2y = 4 \\ -x + y = 1 \end{cases}$
On trace ensuite les deux droites :

$$\mathscr{D}_1 : 5x - 2y - 4 = 0$$
$$\mathscr{D}_2 : -x + y - 1 = 0$$

On constate que leur point d'intersection a pour coordonnées ...., ce qui correspond à la solution testée dans l'exemple précédent.



2. Résolution algébrique

a) Méthode par combinaison linéaire

Le but est de faire des opérations entre les lignes pour faire disparaitre des inconnues.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 2x - 3y = 9 & (L_1) \\ 2x + y = -1 & (L_2) \end{cases}$

b) Méthode par substitution

Le but est d'exprimer une variable en fonction d'une autre pour pouvoir l'éliminer.

EXEMPLE

Résolvons dans $\mathbb{R}$ le système suivant : $\begin{cases} 6x - 7y = 1 & (L_1) \\ x - 3y = 2 & (L_2) \end{cases}$