Dérivation

PROGRAMME

- Fonction dérivée
- Dérivées de $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, de combinaisons linéaires, de polynômes de degré ≤ 3
- Sens de variation d'une fonction, lien avec le signe de la dérivée
- Tableau de variations, extremums
- Capacités
  - Calculer la dérivée d'un polynome de degré ≤ 3
  - Déterminer le sens de variation et les extremums d'une fonction polynome de degré ≤ 3

I - Généralités, règles de calcul

DÉFINITION

On définit la fonction dérivée de f, notée f', qui à x associe le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse x.

PROPOSITION

On a les dérivées usuelles suivantes :

$f(x)$	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$	0
x	1
x^2	$2x$
x^3	$3x^2$

PROPOSITION

Soient f et g deux fonctions, et $k \in \mathbb{R}$. Alors :

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(kf)' = kf'$

EXEMPLES

- Soit $f : x \mapsto x^2 + 2x + 1$. Alors $f'(x) = 2x + 2 \times 1 + 0 = 2x + 2$.
- Soit $g : x \mapsto x^3 - 3x - 2$. Alors $f'(x) = 3x^2 - 3$.
- Soit $h : x \mapsto x^2 + x^2$. Alors $f'(x) = 2x + 2x = 4x$.

II - Lien avec les variations

THÉORÈME

Soit f une fonction et $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

- Si f' est positive sur $[a; b]$, alors f est croissante sur $[a; b]$.
- Si f' est négative sur $[a; b]$, alors f est décroissante sur $[a; b]$.
- Si f' est nulle sur $[a; b]$, alors f est constante sur $[a; b]$. Les zéros de f' correspondent aux **extremums locaux** de f (les « sommets »).

APPLICATION

On peut alors dresser le tableau de variations d'une fonction grâce au tableau de signes de sa dérivée.

EXEMPLE

Soit $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$. Alors $f'(x) = 2x - 4$.

On a $f'(x) = 0$ ssi $2x = 4$ ssi $x = 2$. (On peut aussi calculer $\frac{-b}{a}$).

On a de plus $f(2) = 2^2 - 4 \times 2 + 2 = 4 - 8 + 2 = -2$.

Cela donne alors :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	