Fonctions : Généralités

I - Définitions, notations, représentation

DÉFINITION

Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un unique réel noté $f(x)$. On note $f: \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$. On dit alors que :

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

EXEMPLE

On définit la fonction $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

REMARQUE

Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

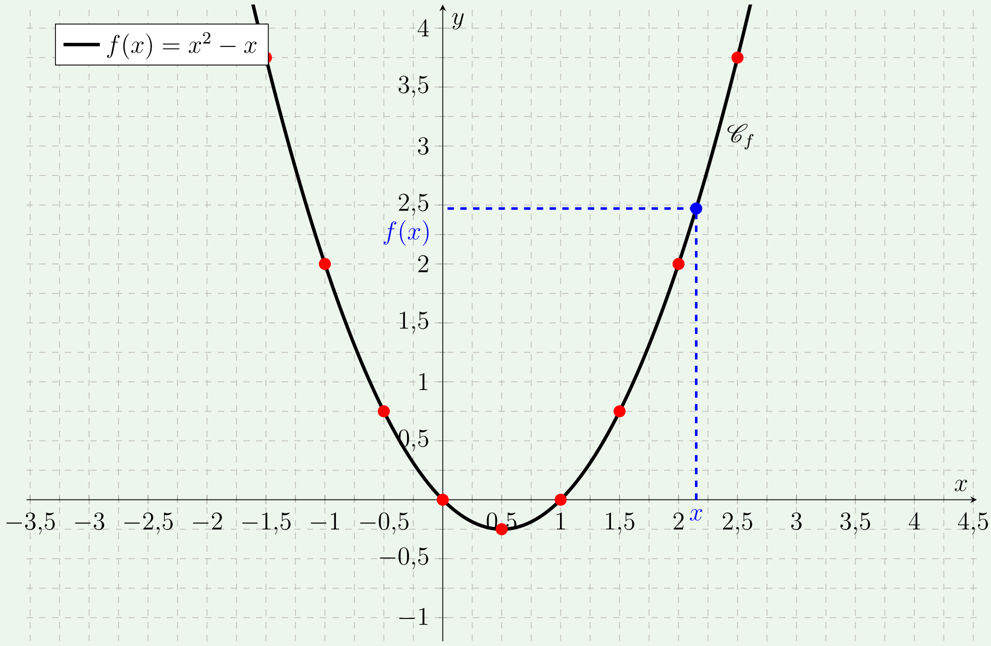
DÉFINITION

Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x,f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

MÉTHODE

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

EXEMPLE

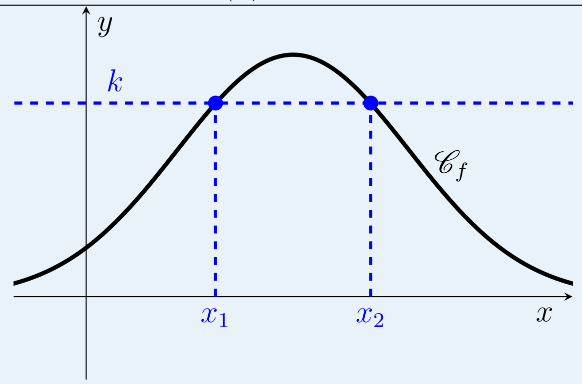
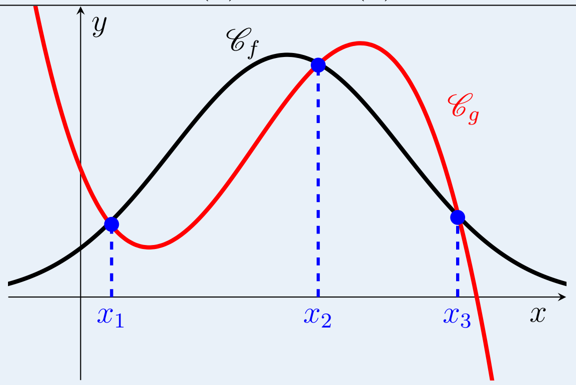


▶ Exos 101 -> 104 p32

II - Résolution graphique d'équations et d'inéquations

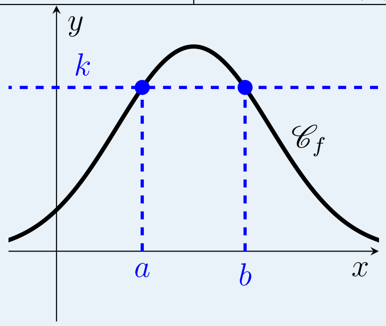
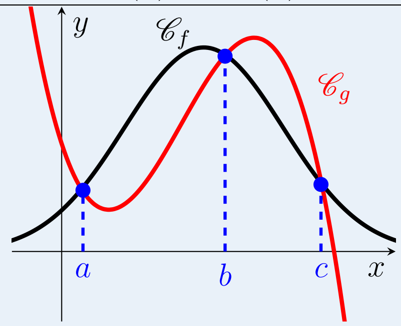
1. Equations

MÉTHODE

$f(x) \quad = \quad k$	$f(x) \quad = \quad g(x)$
	
Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1, x_2\}$	Résoudre l'équation $f(x) = g(x)$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1, x_2, x_3\}$

2. Inéquations

MÉTHODE

$f(x) \quad > \quad k$	$f(x) \quad \leq \quad k$	$f(x) \quad > \quad g(x)$
		
Résoudre l'inéquation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]a; b[$	Résoudre l'inéquation $f(x) \leq k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'inéquation est : $S =]-\infty; a] \cup [b; +\infty[$	Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $S =]-\infty; a[\cup]b; c[$

▶ Exos 105 -> 110 p32

III - Etudes de fonctions

1. Etude des variations

DÉFINITION

Soit f définie sur un intervalle I.

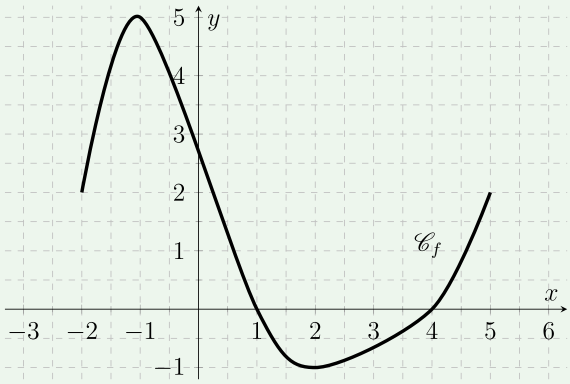
— On dit que f est croissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images augmentent aussi : Pour $x,y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$. :

— On dit que f est décroissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images diminuent : Pour $x,y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.

MÉTHODE

Dresser le tableau de variations d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante ou constante.

EXEMPLE



x	-2		-1		2		5
$f(x)$	2	↗	5	↘	-1	↗	2

2. Etude du signe

MÉTHODE

Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.
Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

► Exos 111 -> 114 p32

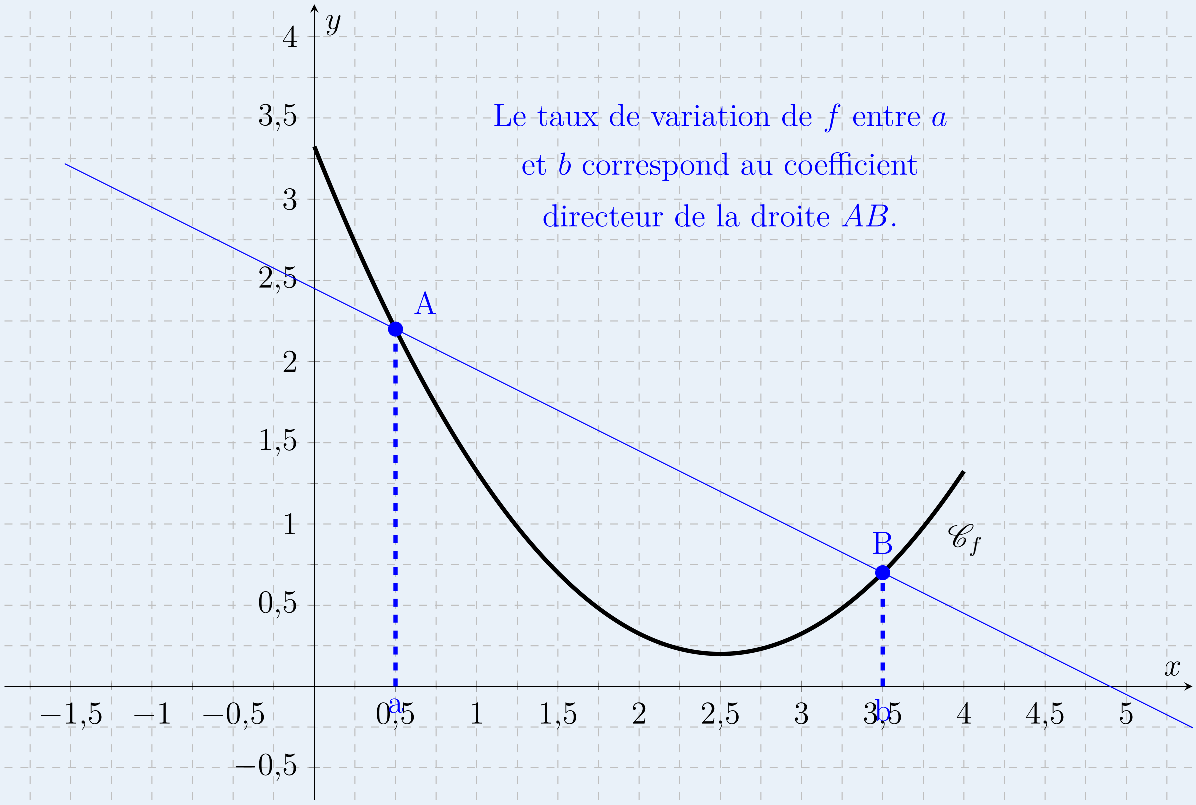
IV - Taux de variation d'une fonction

DÉFINITION

Le taux de variation entre a et b d'une fonction f définie sur un intervalle I est le quotient $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ pour a et b distincts et appartenant à I.

REMARQUE

Ce taux correspond au coefficient directeur de la droite passant par les points de la courbe de f d'abscisses respectives a et b.



EXEMPLE

Le taux de variation entre -1 et 3 de la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$ est :

$$\frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{6-2}{4} = 1$$

PROPOSITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. f est monotone (c'est-à-dire croissante ou bien décroissante sur I) si et seulement si le signe du taux de variation entre deux nombres quelconques de I est constant.
En pratique :

— Un taux de variation toujours positif sur I équivaut à f croissante sur I.

— Un taux de variation toujours négatif sur I équivaut à f décroissante sur I.

— Un taux de variation toujours nul sur I équivaut à f constante sur I.

► Exos 15,16p120 et 40 -> 44 p122