

# Une caractérisation des fonctions affines

**Proposition :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est une fonction affine.
- Quelque soient  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , le nombre  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  a toujours la même valeur.

**Exercice 1.** On s'intéresse à la preuve de cette proposition. L'équivalence signifie que l'on doit prouver les deux sens de cette affirmation :

- (Sens direct) Si  $f$  est une fonction affine, alors quelque soient [...]
- (Sens indirect) Si quelque soient [...], alors  $f$  est une fonction affine.

1. On suppose que  $f$  est une fonction affine :

$$f : x \mapsto ax + b$$

On se donne alors  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

- (a) Calculer  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .
  - (b) Le résultat est-il cohérent ? Quel sens de l'affirmation a-t-on prouvé ?
2. On ne suppose plus que  $f$  est affine, mais que quelque soient  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , le nombre  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  est toujours le même. On pose alors :

$$m := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Montrons que  $f$  est affine.

- (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Que vaut  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  ?
  - (b) En manipulant l'égalité ainsi trouvée, donner une expression de  $f(x)$  en fonction de  $m$ ,  $x$  et  $f(0)$ .
  - (c) Conclure.
3. Refaire les calculs de la question 2 en calculant cette fois  $\frac{f(x) - f(k)}{x - k}$ , pour  $k \in \mathbb{R}$ .

# Une caractérisation des fonctions affines

**Proposition :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

- $f$  est une fonction affine.
- Quelque soient  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , le nombre  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  a toujours la même valeur.

**Exercice 1.** On s'intéresse à la preuve de cette proposition. L'équivalence signifie que l'on doit prouver les deux sens de cette affirmation :

- (Sens direct) Si  $f$  est une fonction affine, alors quelque soient [...]
- (Sens indirect) Si quelque soient [...], alors  $f$  est une fonction affine.

1. On suppose que  $f$  est une fonction affine :

$$f : x \mapsto ax + b$$

On se donne alors  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ .

- (a) Calculer  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ .
  - (b) Le résultat est-il cohérent ? Quel sens de l'affirmation a-t-on prouvé ?
2. On ne suppose plus que  $f$  est affine, mais que quelque soient  $x_1$  et  $x_2 \in \mathbb{R}$ , le nombre  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  est toujours le même. On pose alors :

$$m := \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Montrons que  $f$  est affine.

- (a) Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Que vaut  $\frac{f(x) - f(0)}{x}$  ?
  - (b) En manipulant l'égalité ainsi trouvée, donner une expression de  $f(x)$  en fonction de  $m$ ,  $x$  et  $f(0)$ .
  - (c) Conclure.
3. Refaire les calculs de la question 2 en calculant cette fois  $\frac{f(x) - f(k)}{x - k}$ , pour  $k \in \mathbb{R}$ .