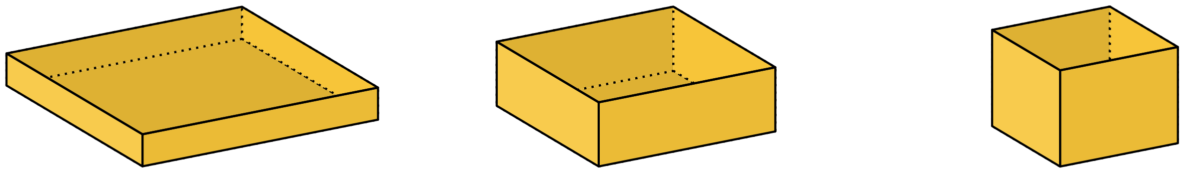
La boite

Quelques exemples



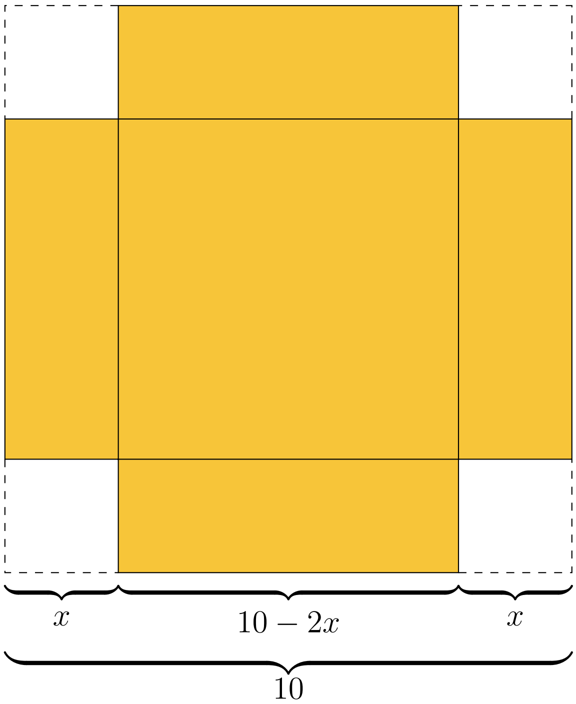
Hauteur : 1 cm
Longueur et largeur : 8 cm
Volume : $8 \times 8 \times 1 = 64$ cm^3

Hauteur : 2 cm
Longueur et largeur : 6 cm
Volume : $6 \times 6 \times 2 = 72$ cm^3

Hauteur : 3 cm
Longueur et largeur : 4 cm
Volume : $4 \times 4 \times 3 = 48$ cm^3

Nous pourrions faire une multitude de tests pour nous approcher de la valeur donnant un volume maximal, mais ce serait long...

Introduction d'une inconnue



On note x la hauteur de la boîte (x varie entre 0 et 5). Alors la longueur et la largeur de la boîte est égale $10 - 2x$ cm. Alors le volume de la boîte est égal à :

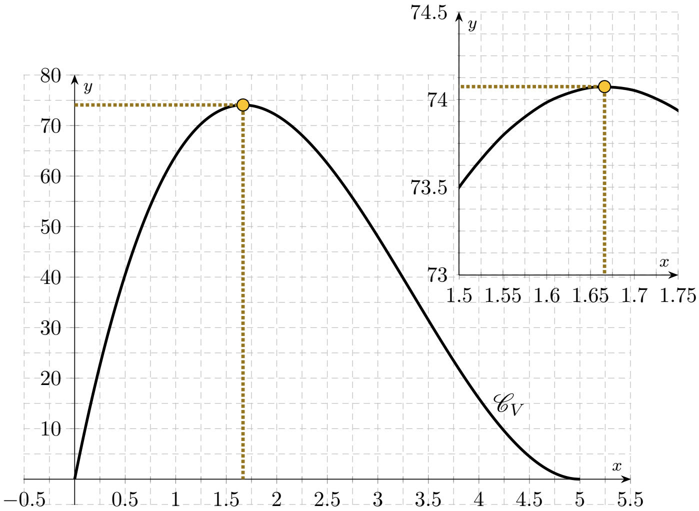
$$\begin{aligned} & (10-2x) \times (10-2x) \times x \\ = \ & x \times (10-2x)^2 \\ = \ & x \times \left(10^2 - 2 \times 10 \times 2x + (2x)^2\right) \\ = \ & x\left(100 - 40x + 4x^2\right) \\ = \ & 100x - 40x^2 + 4x^3 \\ = \ & 4x^3 - 40x^2 + 100x \end{aligned}$$

On note V la fonction qui à x associe la volume de la boîte dont la hauteur est x. Alors on a :

$$V : \begin{array}{ccc} [0;5] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 4x^3 - 40x^2 + 100x \end{array}$$

Etude de la courbe de V

Il faut maintenant trouver quelle est la valeur de x qui donne un volume maximal. On trace la courbe représentative de V :



Par lecture graphique, on peut estimer que la hauteur de la boîte de volume maximal est de 1.66 cm. Le volume de cette boîte est d'environ 74.1 cm^3. Vos calculatrices permettent aussi de trouver le maximum d'une fonction. Nous obtenons alors une estimation plus précise de x :