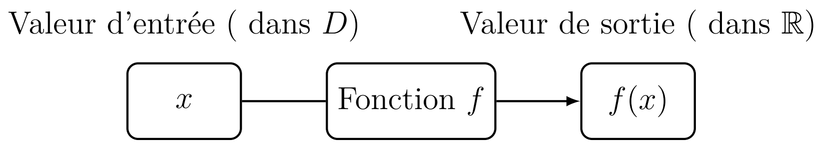
Fonctions : Généralités

I - Définitions, notations

Définition : Soit $D \subset \mathbb{R}$. On appelle fonction f sur l'ensemble D le processus qui à tout nombre $x \in D$ associe un **unique** réel noté $f(x)$. On note $f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.



On dit alors que :

- $f(x)$ est l'image de x
- x est un antécédent de $f(x)$
- D est l'ensemble (ou domaine) de définition de f

Exemple : On définit la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x \end{array}$.

- L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
- L'image de 2 par la fonction f est 2 : $f(2) = 2^2 - 2 = 2$.
- 2 est un antécédent de 2 par la fonction f. -1 en est aussi un car $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$.

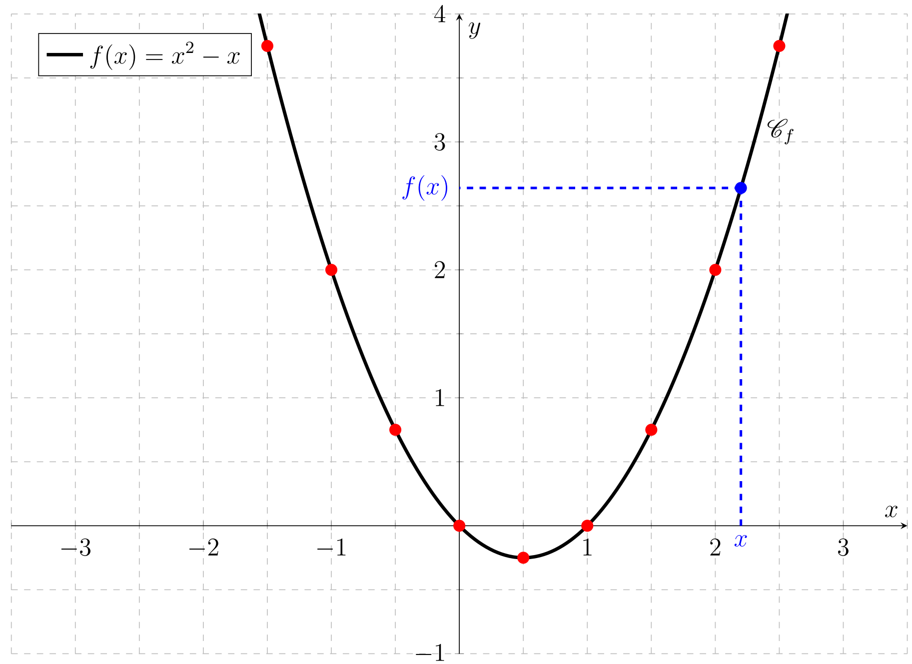
Remarque : Chaque nombre dans D possède une unique image, mais plusieurs antécédents d'un même nombre peuvent exister.

II - Représentation graphique d'une fonction

Définition : Dans un repère du plan, l'ensemble des points $(x, f(x))$ pour $x \in D$ constitue la courbe de f. L'équation de la courbe de f est $y = f(x)$ pour $x \in D$.

Dans la pratique, il faut placer plusieurs points pour tracer la courbe d'une fonction le plus précisément possible. On peut s'aider d'une table de valeurs.

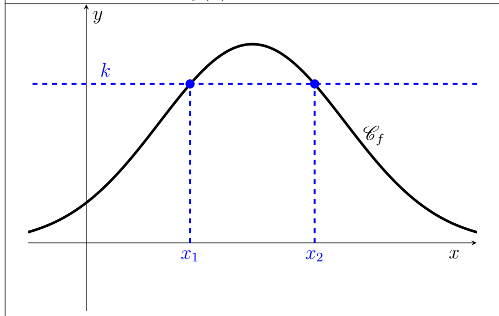
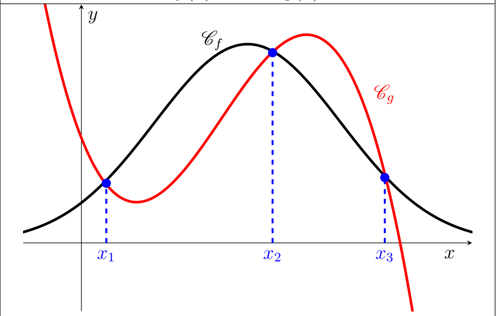
x	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$									



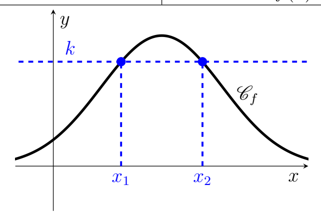
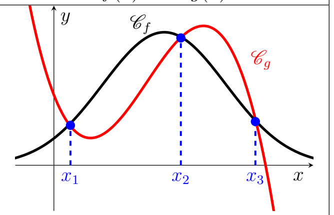
Les points $(-1; 2)$ et $(1; 0)$ appartiennent à la courbe de f, mais pas le point $(0; 1)$.

III - Résolution graphique d'équations et d'inéquations

1) Equations

$f(x) = k$	$f(x) = g(x)$
	
Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les antécédents de k par la fonction f. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection de la courbe avec la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1, x_2\}$	Résoudre l'équation $f(x) = k$ signifie trouver les nombres qui ont la même image par f et g. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S = \{x_1, x_2, x_3\}$

2) Inéquations

$f(x) > k$	$f(x) < k$	$f(x) > g(x)$
		
Résoudre l'équation $f(x) > k$ signifie trouver les nombres qui ont une image supérieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "au dessus" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S =]x_1; x_2[$	Résoudre l'équation $f(x) < k$ signifie trouver les nombres qui ont une image inférieure à k. Cela revient donc à chercher l'abscisse des points de la courbe se situant "en dessous" de la droite d'équation $y = k$. Ici, l'ensemble des solution de l'équation est : $S =]-\infty; x_1[\cup]x_2; +\infty[$	Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ signifie trouver les nombres dont l'image par f est supérieure à l'image par g. Cela revient à chercher l'abscisse des points de $\mathscr{C}_f$ situés "au dessus" des points de $\mathscr{C}_g$.

Exos Hyperbole

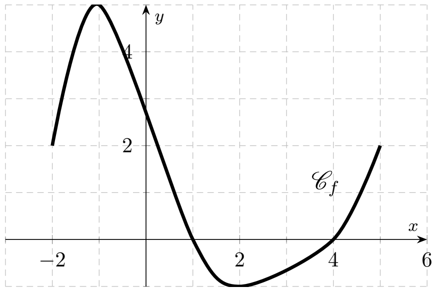
IV - Etudes de fonctions

1) Etude des variations

Soit f définie sur un intervalle I.

- On dit que f est croissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images augmentent aussi : Pour $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$. :
- On dit que f est décroissante sur I si lorsque la variable augmente dans I, les images diminuent : Pour $x, y \in I$, si $x \leq y$ alors $f(x) \geq f(y)$.
- On dit que f est monotone sur I si elle est soit croissante, soit décroissante sur I (son sens de variation ne change pas).

Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction f est croissante, décroissante ou constante.



x	-2		-1		2		5
$f(x)$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2

2) Etude du signe

Méthode : Dresser le tableau de signes d'une fonction f, c'est indiquer sur quels intervalles la fonction est négative, positive ou nulle.

Avec la même fonction que précédemment, on obtient :

x	-2		-1		2		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

V - Parité d'une fonction

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I centré en 0 ($I = [-a; a]$, $]-a; a[$ ou $\mathbb{R}$). On dit que f est :

— **paire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = f(x)$.

— **impaire** lorsque pour tout $x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Exemples :

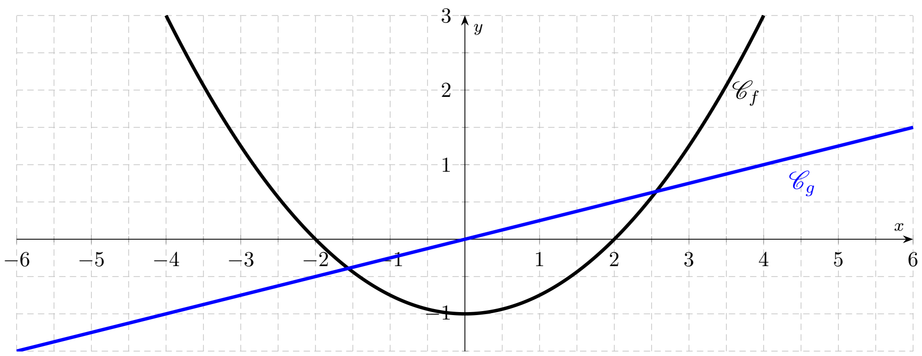
— La fonction $f: \begin{array}{ccc} [-2;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - 1 \end{array}$ est paire car pour tout $x \in [-2; 2], f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$.

— La fonction $g: \begin{array}{ccc}]3;3[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 0.5x \end{array}$ est impaire.

Propriétés :

— f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

— f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère $(0; 0)$.



Remarque : Une fonction peut être ni paire ni impaire !

Déroulé :

— **Total : 3.5 semaines (4-4.5 si signes/variations)**

— Semaine 1

  — 1h30 - Activité intro (coordonnées points, graphes)

  — 30m - Début du cours : I

— Vacances - Semaine 2

  — 30m - Activité Emmanuel (remise en marche) - Questions 1 à 8

  — 3h - Cours II puis Exos 1 -> 8 (TD Chingatome en +)

— Semaine 3

  — 2h30 - Cours (in)equations + Exos Hyperbole

  — 1h30 - Parité

Compétences :

— Fonctions à valeurs réelles définies sur un intervalle ou une réunion finie d'intervalles

— Courbe représentative : $(x, f(x))$ ...

— Fonction paire, impaire. Traduction géométrique

— Capacités :

  — Exploiter l'équation d'une courbe : appartenance, coordonnées

  — Modéliser par des fonctions [...]

  — Résoudre des (in)équations : graphiquement, algébriquement, tableaux de signes

  — Etudier la parité dans des cas simples

— Croissance, décroissance, monotonie, tableaux de variations