

II - Espérance d'une variable aléatoire

DÉFINITION

On se donne une variable aléatoire X dont la loi est représentée ci-contre.

L'espérance de X , notée $\mathbb{E}(X)$, est le réel

$$\mathbb{E}(X) := p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_Nx_N$$

x	x_1	x_2	\dots	x_N
$\mathbb{P}(X = x)$	p_1	p_2	\dots	p_N

REMARQUE

Celle-ci représente la moyenne des valeurs de X lorsque l'on répète l'expérience aléatoire un très grand nombre de fois.

EXEMPLE

On reprend l'exemple ci-dessus. On a $\mathbb{E}(X) = 0,25 \times (-2) + 0,5 \times 1 + 0,25 \times 4$
 $= -0,5 + 0,5 + 1$
 $= 1$

L'espérance de X est positive, ce qui veut dire qu'en jouant un grand nombre de fois, le gain moyen par partie sera de 1€! Le joueur a donc tout intérêt à faire des parties puisque le jeu est à son avantage.

Évidemment, le jeu restant aléatoire, il est possible (mais très improbable) que le joueur perde dix, cent ou mille parties à la suite et se retrouve ruiné...

III - Expériences à plusieurs épreuves : Cas général

Jusqu'à maintenant, on a répété plusieurs expériences régies par une loi équiprobable. On s'intéresse maintenant à des expériences où chaque issue n'a pas forcément la même probabilité.

DÉFINITIONS

- Deux évènements sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'a aucune influence sur l'autre.
- Deux variables aléatoires sont indépendantes si la valeur d'une n'influe pas sur l'autre.

EXEMPLE

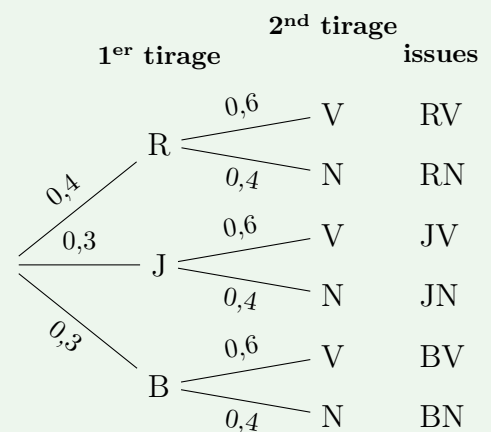
On dispose de deux urnes contenant chacune dix boules.

- La première contient quatre boules rouges (R), trois boules jaunes (J) et trois boules bleues (B).
- La seconde contient six boules vertes (V) et quatre boules noires (N).

Par exemple, la probabilité de tirer une boule rouge dans la première urne est $\frac{4}{10} = 0,4$.

On tire **successivement** une boule de la première puis de la seconde urne.

On représente les issues possibles grâce à l'arbre ci-contre.



PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

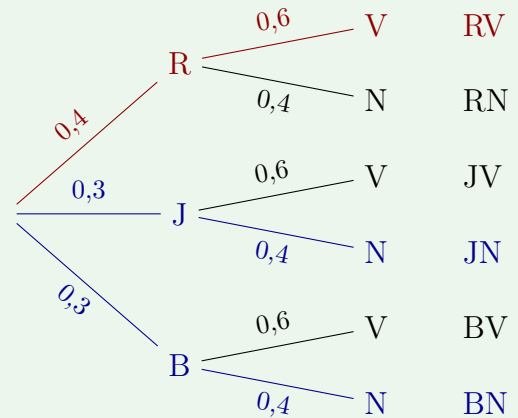
EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (**RV**) est :

$$0,4 \times 0,6 = 0,54$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (**JN ou BN**) est :

$$\begin{aligned}(0,3 \times 0,6) + (0,3 \times 0,6) &= 0,18 + 0,18 \\ &= 0,36\end{aligned}$$



PROPRIÉTÉS

Pour construire et utiliser un arbre de probabilités, on utilisera les règles suivantes :

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 ;
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est **le produit** des probabilités inscrite sur chacune de ses branches ;
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilité de tous les chemins menant à cet évènement.

EXEMPLES

- La probabilité d'obtenir une boule rouge puis une boule verte (**RV**) est :

$$0,4 \times 0,6 = 0,54$$

- La probabilité d'obtenir une boule autre que rouge puis une boule noire (**JN ou BN**) est :

$$\begin{aligned}(0,3 \times 0,6) + (0,3 \times 0,6) &= 0,18 + 0,18 \\ &= 0,36\end{aligned}$$

