LGT Jean Rostand

2nde GT

Mathématiques

M. DELAUNEY

Nombres réels

I - Les ensembles de nombres

1. Les entiers

DÉFINITION

$\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers positifs ou nuls, appelés entiers naturels. 0 est un entier naturel, on note $0 \in \mathbb{N}$. Par contre, -3 n'en est pas un, on note $-3 \notin \mathbb{N}$.

$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\}$$

DÉFINITION

$\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers négatifs, positifs ou nuls, appelés entiers relatifs : $1 \in \mathbb{Z}$, $-2 \in \mathbb{Z}$ mais $0.5 \notin \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$$

REMARQUE

Tout entier naturel est aussi un entier relatif. L'ensemble $\mathbb{N}$ est donc inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.

2. Les nombres décimaux

DÉFINITION

Un nombre décimal est un nombre qui peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. Autrement dit, un nombre décimal peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$, où $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. On note $\mathbb{D}$ l'ensemble des nombres décimaux.

$$0.5 = \frac{5}{10} \in \mathbb{D},\ 1/4 = 0.25 \in \mathbb{D},\ \frac{1}{3} = 0.333\dots \notin \mathbb{D}$$

REMARQUE

Tout entier relatif est aussi un entier décimal : $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$: Par exemple, $-1 = \frac{-1}{1} = \frac{-1}{10^0}$.

3. Les nombres rationnels

DÉFINITION

Un nombre rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers relatifs et q est non nul. On note $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels.

$$-2 = \frac{-2}{1} \in \mathbb{Q},\ \frac{1}{3} \in \mathbb{Q},\ \frac{3}{7} \in \mathbb{Q},\ \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

PROPOSITION

- Tout nombre rationnel non nul admet une seule écriture fractionnaire irréductible
- Si un nombre est rationnel, alors son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est aussi vraie.

EXEMPLE

$x = 0.0909\ldots$ est rationnel : $100x = 9.0909\ldots$ donc $100x - x = 9$ d'où $99x = 9$ puis $x = \frac{9}{99} = \frac{1}{11}$.

EXERCICE

Faire de même avec $x = 0.1666\ldots$: $10x = 1.666\ldots$ donc $10x - x = 1.5$ et alors $9x = \frac{3}{2}$ puis $x = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$.

REMARQUE

Tout nombre décimal est aussi un nombre rationnel : $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

4. Les nombres réels

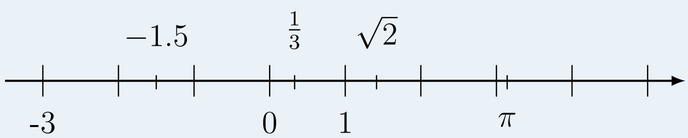
DÉFINITION

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres connus en classe de seconde, qu'on appelle nombres réels. De plus, un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

$$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{\sqrt{\pi}} \text{ sont irrationnels}$$

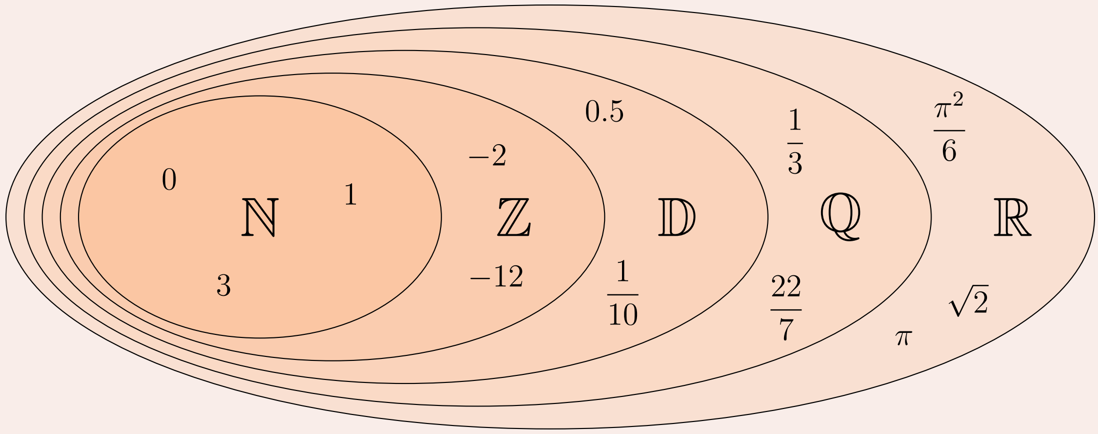
PROPRIÉTÉ

On représente l'ensemble des nombres réels sur une droite graduée :



PROPOSITION

Tous ces ensembles sont inclus les uns dans les autres : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Encadrement décimal des réels

DÉFINITION

Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture $d_1 \leq x \leq d_2$ avec d_1,d_2 des nombres décimaux. La différence $d_2 - d_1$ est l'amplitude de l'encadrement.

EXEMPLE

Par exemple, $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$ est un encadrement décimal de $\sqrt{2}$ d'amplitude $10^{-1} = 0.1$.

DÉFINITION

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $d_1 \leq x \leq d_2$ avec $d_2 - d_1 = 10^{-n}$ où $n \in \mathbb{N}$.
L'arrondi à 10^{-n} de x est celui de d_1 ou d_2 le plus proche de x.
Dans le cas où d_1 et d_2 sont à égale distance de x, l'arrondi à 10^{-n} de x est d_2.

EXEMPLE

- 3,14 est l'arrondi à 10^{-2} de π.
- 3,142 est l'arrondi à 10^{-3} de π.
- 2,4 est l'arrondi à 10^{-1} de 2,35.

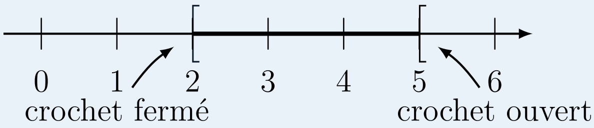
REMARQUE

Faire un arrondi à 10^{-n} signifie n chiffres après la virgule.

II - Intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION

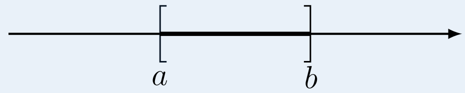
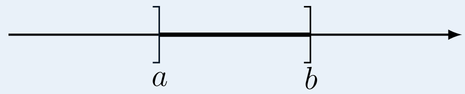
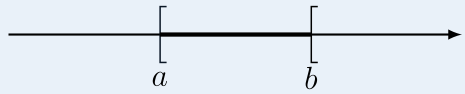
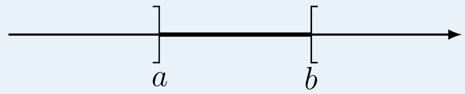
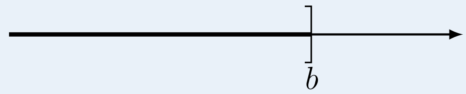
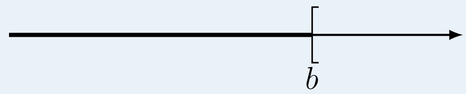
On veut écrire plus simplement " Tous les nombres réels compris entre 2 et 5, 5 exclus ". Pour celà, il y a trois manières possibles :

— Par un schéma : 

— Par une inégalité : $2 \leq x < 5$

— Par un intervalle : $[2; 5[$

Soient a et b deux réels distincts.

L'intervalle noté ...	... désigne l'ensemble des réels x tels que ...	Il est représenté par un segment sur une droite graduée
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a; b]$	$a < x \leq b$	
$[a; b[$	$a \leq x < b$	
$]a; b[$	$a < x < b$	
$]-\infty; b]$	$x \leq b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a; +\infty[$	$a < x$	

REMARQUES

— a et b sont appelés les bornes de l'intervalle.

— Attention à ne pas confondre $[a; b]$ *et* $\{a; b\}$: Le premier ensemble contient tous les réels compris entre a et b inclus, alors que le second ne contient que a et b.

— $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres réels, on écrit donc pas $[-\infty; a]$.

— $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$

— Les quatre premiers intervalles sont dits bornés. Parmi ceux-ci, on dit que $[a; b]$ est fermé, $]a; b[$ est ouvert. Les deux autres sont dits semi-ouverts.

Unions et intersections

DÉFINITION

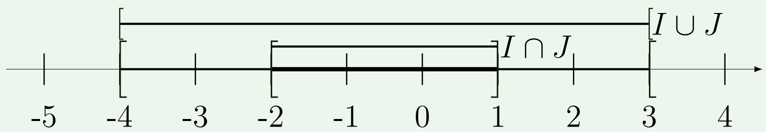
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.

— L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé intersection de I et J. Cet ensemble est noté $I \cap J$.

— L'ensemble des réels qui appartiennent à à I ou à J est appelé réunion de I et J. Cet ensemble est noté $I \cup J$.

EXEMPLE

Pour $I = [-2; 3[$ et $J = [-4; 1]$, on a $I \cap J = [-2; 1]$ et $I \cup J =]-4; 3[$.



III - Valeur absolue

DÉFINITION

La valeur absolue d'un réel x est $-x$ lorsque $x < 0$ ou x lorsque $x \geq 0$. On note :

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

EXEMPLE

$|8| = 8$ mais $|-8| = 8$ aussi. En fait, l'effet de la valeur absolue est de rendre un nombre positif (on supprime le signe $-$).

DÉFINITION

Soient A et B deux points placés sur la droite des réels, d'abscisses respectives a et b. La distance entre a et b correspond à la longueur de AB. Elle se calcule à l'aide de la valeur absolue :

$$AB = |b - a| = |a - b|$$

EXEMPLE

— La distance entre 5 et -2 est $|5 - (-2)| = |5 + 2| = |7| = 7$.

— Soit $x \in \mathbb{R}$. La distance entre x et 0 est $|x - 0| = |x|$.

Intervalles $[a-r; a+r]$

PROPRIÉTÉ

Soient a et r deux réels, avec $r > 0$. Alors l'intervalle $[a-r; a+r]$ contient tous les réels x qui vérifient $a - r \leq x \leq a + r$, autrement dit ceux à une distance inférieure à r de a, soit $|x - a| \leq r$.

EXEMPLE

$[3; 5] = [4-1; 4+1] = \{x \in \mathbb{R},\ |x-4| \leq 1\}$