Lycée M. Berthelot, classes préparatoires MP*

T.I.P.E. Distribution, Ressources, Partage.

# Généralisation de l'énigme de l'éléphant et application au cas continu.

Virgile Foy

April 11, 2015

*Un éléphant[1] doit transporter des bananes d'une ville à une autre en traversant le désert. Il dispose au départ de 3000 bananes et les deux villes sont distantes de 1000 kilomètres. L'éléphant peut transporter au maximum 1000 bananes à la fois. Pour chaque kilomètre parcouru l'éléphant doit manger une banane. Quelle est le nombre maximal de bananes que l'éléphant peut transporter dans l'autre ville.*

En procédant par tâtonnement, on parvient à une solution permettant de transporter 533 bananes au point d'arrivée : en effectuant une première série d'allers-retours entre le point de départ et le kilomètre 200, puis une autre série d'allers-retours entre le kilomètre 200 et le kilomètre 533, et enfin un dernier aller jusqu'au dernier kilomètre (en prenant soin d'abandonner une banane au kilomètre 533), l'éléphant arrive au terme de sa traversée avec 533 bananes.

Si on trouve sur internet de très nombreuses explications qui tentent de justifier cette solution[2], il n'y apparaît pas, à notre connaissance, une approche rigoureuse permettant de démontrer simplement l'optimalité de cette solution. Il n'y apparaît pas non plus d'algorithme permettant de calculer la solution optimale dans le cas général où l'éléphant

[1] L'énigme se rencontre aussi souvent avec chameau à la place de l'éléphant.

[2] Il suffira de taper sur un moteur de recherche les mots *bananes* et *éléphant* ou *chameau*, en fran cais ou en anglais, pour trouver un très grand nombre de solutions, d'ailleurs pas toujours exactes. On trouvera également une analyse de ce problème sous la forme d'un T.P de *programmation dynamique*. Nous proposons ici une approche plus simple, semble-t-il, et sans recours à la *programmation dynamique*.

dispose d'une quantité B de bananes au point de départ, d'une capacité C de transport maximal de bananes, et d'une distance L à parcourir dans le désert. Enfin, la version continue de cette énigme, dans laquelle l'éléphant boit continûment du jus de banane avec une paille avec un débit D, ne semble pas avoir été non plus abordée. C'est pourquoi nous nous attacherons à répondre rigoureusement à ces trois questions, ce qui constituera une contribution nouvelle à ce problème et à ce qui existe sur internet à son sujet.

En effet, l'analyse de ces questions est permise par l'observation d'une propriété assez singulière de ce problème, qui paraît n'avoir pas encore été remarquée et que nous pouvons résumer ainsi.

**Propriété** *Si partant d'un point $A$ avec une quantité $\alpha$ de bananes on parvient à transporter en un point $B$ une quantité $\beta$ de fa con optimale, c'est-à-dire qu'on ne peut y amener une plus grande quantité de bananes ; si de plus, partant du point $B$ avec une quantité de bananes $\beta$ on peut amener en un point $C$ une quantité $\gamma$ de bananes de fa con optimale ; alors cette quantité $\gamma$ est également optimale pour le cas où on serait parti du point $A$ avec une quantité $\alpha$ pour atteindre directement le point $C$.*

En d'autres termes, si on note $P(L, \alpha)$ la quantité maximale de bananes que l'on peut transporter sur une distance L, partant avec une quantité initiale $\alpha$ de bananes, alors on obtient la relation ci-après.

$$P(AC, \alpha) = P(BC, P(AB, \alpha)) \tag{1}$$

Nous commencerons par démontrer cette propriété, puis nous verrons comment celle-ci nous permet de répondre aux trois questions posées en introduction et que nous rappelons ici.

- Comment démontrer l'optimalité de la solution avec 533 bananes ?
- Comment calculer la solution optimale dans le cas général ?
- Comment appliquer cette méthode au cas continu ?

**1** Il est assez facile de voir que l'on a $P(AC, \alpha) \geq P(BC, P(AB, \alpha))$, car transporter dans un premier temps une quantité $\beta = P(AB, \alpha)$ au point $B$, puis une quantité $\gamma = P(BC, \beta)$ au point $C$ constitue une fa con possible de transporter une quantité $\gamma$ du point $A$ à $C$, et cette quantité est nécessairement moindre, par définition, que la quantité maximale transportable de $A$ à $C$ directement (c'est-à-dire $P(AC, \alpha)$).

Pour démontrer l'autre sens de l'inégalité, considérons un parcours permettant de transporter la quantité maximale de $A$ à $C$. Pour fixer les idées, on peut représenter ce parcours par une suite d'allers-retours entre $A$ et $C$.

Rien n'oblige évidemment que ce parcours optimal *fasse escale* en $B$. For cons justement l'*arrêt* en $B$ et changeons l'ordre dans lequel on effectue les allers-retours, de sorte qu'on ne parcourt d'abord que les segments entre $A$ et $B$ dans un premier temps, puis les segments entre $B$ et $C$ dans un second temps. On veille toutefois à ce que les quantités transportées sur chaque segment soient identiques au parcours initial, quitte à déposer au point $B$ les bananes en excès lorsqu'on s'occupe de parcourir les segments entre $A$ et $B$, puis à les réutiliser plus tard lorsqu'on parcourra les segments compris entre $B$ et $C$. On décompose ainsi le parcours optimal entre $A$ et $C$ en un parcours entre $A$ et $B$ puis un parcours entre $B$ et $C$.

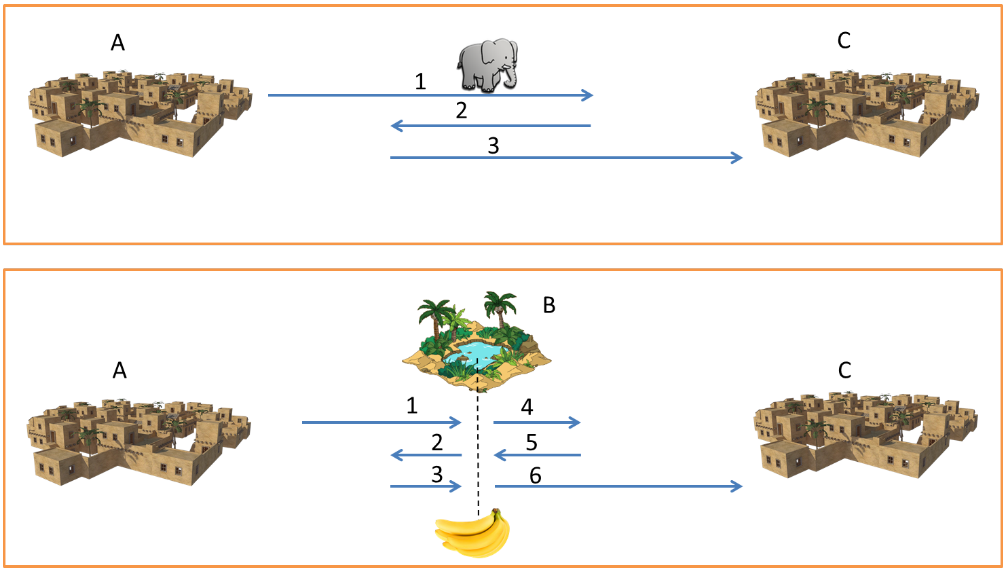


Figure 1: Une solution optimale se décompose en solutions optimales sur chaque segment.

Par hypothèse, en effectuant ces deux parcours successivement, d'abord entre $A$ et $B$, puis entre $B$ et $C$ on parvient à transporter au point $C$ une quantité $P(AC, \alpha)$.

Dans les faits, on transporte d'abord une quantité $\beta$ de bananes au point $B$ ; et cette quantité est par définition moindre que la quantité maximale $P(AB, \alpha)$ qu'on peut y apporter partant de A avec une quantité $\alpha$. C'est-à-dire que l'on a $\beta \leq P(AB, \alpha)$. Ainsi, si on est parvenu à transporter en C une quantité $P(AC, \alpha)$ en partant d'une quantité $\beta$ au point $B$, alors on y parviendra *a fortiori* en partant d'une quantité $P(AB, \alpha)$, plus grande que $\beta$. Par conséquent, cette quantité, $P(AC, \alpha)$, est moindre que la quantité maximale que l'on peut transporter de $B$ à $C$ en partant avec une quantité $P(AB, \alpha)$ ; ce qui se traduit par $P(AC, \alpha) \leq P(BC, P(AB, \alpha))$

**2** La propriété précédemment démontrée permet de réduire la question de l'énigme à un problème plus simple : *calculer la quantité maximale que l'on peut transporter sur un kilomètre.* En effet, si on connaît une méthode de calcul pour répondre à ce problème alors on peut calculer la quantité maximale sur toute la distance, de proche en proche, en commen cant par le premier kilomètre, puis le deuxième et ainsi de suite jusqu'au dernier.

Etant donnés donc une quantité de bananes $B$ et un éléphant pouvant transporter jusqu'à $C$ bananes à la fois, quelle est la quantité maximale que l'éléphant peut transporter sur un kilomètre ? (Pour étudier cette question nous supposons d'emblée que $B \geq 2$ et $C \geq 2$, les cas restants étant triviaux.) Pour réaliser ce transport, l'éléphant va effectuer une série d'allers-retours puis un dernier aller. Si on note $n$ le nombre d'allers-retours, il en résultera un coût de $2n+1$ bananes consommées par l'éléphant. La quantité restante de bananes pouvant être transportée sera par conséquent $B - 2n - 1$. D'un autre côté, la capacité *totale* de l'éléphant à transporter des bananes sur un kilomètre est d'autant plus grande que le nombre d'allers-retours augmente. Pour un aller, l'éléphant peut transporter au plus $C - 1$ bananes, car une banane doit être consommée par l'éléphant. Pour un aller-retour, suivi d'un aller, cette capacité sera de $C-2+C-1$. En effet, il faudra réserver deux bananes pour l'aller-retour, plus une pour l'aller. En général, pour $n$ allers-retours, on obtient une capacité *totale* de $n(C-2)+C-1$. Le nombre de bananes pouvant être transporté sur un kilomètre est nécessairement inférieur au nombre de bananes disponibles $B-2n-1$ et à la capacité de transport sur les n allers-retours $n(C-2)+C-1$. Il s'agit donc de maximiser l'expression $min\{B-2n-1, n(C-2)+C-1\}$ en fonction de n entier positif ou nul.

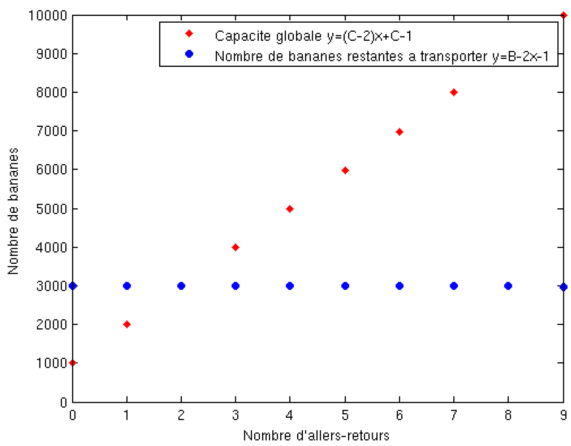


Figure 2: Nombre d'allers-retours optimal

Le point d'intersection des deux droites de la figure 2 a pour abscisse $x = \frac{B}{C} - 1$. Il s'agit alors de déterminer, au cas où $x$ n'est pas entier, si l'on doit prendre la valeur entière par défaut ou bien par excès, ce qui s'avère en fait un écueil très subtil [3]. Trois cas de figure peuvent se produire, ainsi que représentés[4] géométriquement sur la figure 3.

Dans le premier cas, on prendra la valeur entière par défaut car c'est celle-ci qui produit un résultat plus grand, tandis que dans le second cas, on pourra prendre indifféremment la valeur par excès ou par défaut car les deux produisent des résultats égaux. Dans le troisième cas, on prendra la valeur entière par excès. La pente de la droite $B - 2n - 2$

[3] En effet, c'est à cause de cet écueil que de nombreuses solutions sur internet - erronées - prétendent que le maximum est de 532 bananes au lieu de 533. Il convient donc d'analyser rigoureusement cette question pour prétendre à une solution générale qui soit juste.

[4] Le lecteur attentif remarquera que la représentation des courbes rouges est inexacte sur la figure 3. Peu importe cependant, il s'agit uniquement d'illustrer les différents cas pouvant se produire.

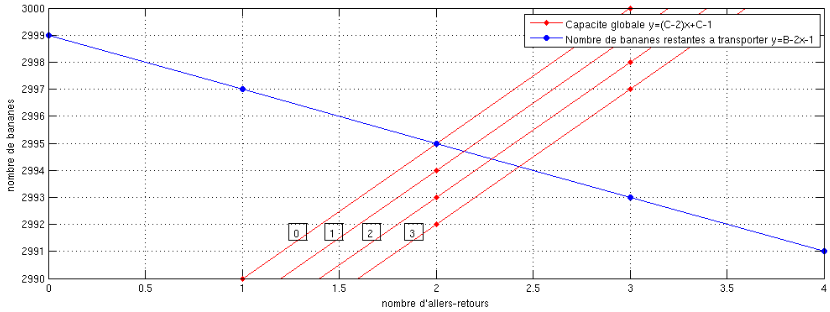


Figure 3: Zoom sur le point d'intersection. Tandis que le cas 0 correspond simplement au cas où les droites s'intersectent en un point entier, les trois autres cas, 1, 2, et 3, décrivent des situations où le point d'intersection n'est pas entier. On doit donc prendre le nombre d'allers-retours le plus proche de sorte à maximiser la quantité $\min\{B-2n-1, n(C-2)+C-1\}$. Dans le cas 1, on fera deux allers-retours, dans le cas 1, on fera indifféremment 2 où 3 allers-retours puisque cela conduit au même nombre de bananes *in fine* (2993), enfin dans le cas 3, on fera 3 allers-retours.

étant toujours de -2, le premier cas ne peut se produire uniquement s'il existe un entier m tel que $B-2m-1 = \{m(C-2)+C-1\}+1$ ; ceci n'ayant lieu que si $B = 1 \ mod \ C$. Dans ce dernier cas, c'est la capacitè qui est limitante et il est plus avantageux de ne pas transporter toutes les bananes.

En effet supposons par exemple que l'on a 1001 bananes et que la capacité de transport de l'éléphant est de 1000 bananes. Alors il est plus avantageux de n'effectuer qu'un seul aller quitte à abandonner une banane sur le chemin (ou bien la donner à l'éléphant pour satisfaire sa gourmandise) plutôt que d'effectuer un aller-retour plus un aller ce qui ne permettrait de transporter que 998 bananes au lieu de 999.

**3** De l'analyse précédente, nous pouvons déduire que si B appartient à l'intervalle $[kC+2;(k+1)C+1]$, $k$ étant un entier positif, le nombre d'allers-retours à effectuer est $k$. On peut donc calculer directement le nombre d'allers-retours nécessaires comme étant la valeur entière par défaut de $\frac{B-2}{C}$. Par suite, en tenant compte du fait de devoir abandonner une banane si $B = 1 \ mod \ C$ et $B \geq 2$, on peut facilement implémenter une fonction pour calculer le nombre maximale de bananes que l'on peut transporter sur une distance $L$.

```
##
# P calcule le nombre optimal de bananes au point d'arrivee.
# B quantite initiale de bananes.
# C capacite maximale de transport de bananes.
# L distance entre le point de depart et d'arrivee.
##
def P(B, C, L):
    while L>0 and B>0:
        if B%C == 1 and B > 1:
            # on doit abandonner une banane sur le chemin.
            B -= 1
        B = B - 2*((B-2)/C) - 1
        L -= 1
    return max(B,0)
```

**4** Nous pouvons résumer la relation de récurrence par la formulation suivante, où $\lfloor . \rfloor$ désigne la partie entière et $\mathbf{1}_A$ l'indicatrice sur l'ensemble $A$.

$$B(n+1) - B(n) = -2\lfloor \frac{B(n)-2}{C} \rfloor - 1 - \mathbf{1}_{\{B(n)=1[C], B(n)\geq 2\}} \tag{2}$$

Pour passer cette relation au continu, nous supposons que les bananes permettent de parcourir une distance $h$, que nous allons faire tendre vers 0. Les relations qui lient les quantités $B$ et $C$ d'un côté et $Q$ (le volume de jus de bananes), $V$ (la capactié transport, en unité de volume) et $D$ (la consommation de jus de bananes par unité de distance) d'autre part, s'obtiennent presque directement en cherchant à satisfaire l'homogénéité des dimensions.

$$B(n) = \frac{Q(x)}{D.h} \tag{3}$$

$$C = \frac{V}{D.h} \tag{4}$$

En combinant ces relations pour éliminer $B$ et $C$, on obtient la relation suivante.

$$\frac{Q(x+h) - Q(x)}{h} = -D \ ( \ 2\lfloor \frac{Q(x) - 2D.h}{V} \rfloor + 1 + \mathbf{1}_{\{\frac{Q(x)-Dh}{V} \in \mathbb{Z} \ et \ Q(x) \geq 2Dh\}} \ ) \tag{5}$$

En faisant tendre $h$ vers 0, on obtient finalement une équation différentielle en $Q$.

$$Q'(x) = -D \ ( \ 2\lfloor \frac{Q(x)}{V} \rfloor + 1 + \mathbf{1}_{\frac{Q(x)}{V} \in \mathbb{Z}} \ ) \tag{6}$$

On peut réécrire cette équation, en notant $\lceil . \rceil$ la valeur entière par excès, de la fa con suivante, pour faire évanouïr l'indicatrice.

$$Q'(x) = -D \ ( \ 2\lceil \frac{Q(x)}{V} \rceil + 1 \ ) \tag{7}$$

La présence de la partie entière dans l'équation différentielle impose de résoudre cette équation sur plusieurs segments. Désignons par $Q_0$ la quantité de jus de banane initiale au point initial, et supposons que $Q_0 = qV + r$ où q et r désignent le quotient et le reste de la division euclidienne de $Q_0$ par $V$. On résoudra alors l'équation différentielle sur les segments semi-ouverts $[qV + r; qV[$ puis $[qV; (q-1)V[$ et ainsi de suite jusqu'à $[2V; V[$ et enfin [V ; 0[. Sur chacun des segments $[(k+1)V; kV[$, l'équation différentielle se résume à $Q'(x) = -D(2k+1)$, ce qui implique que $Q$ est linéaire sur chacun de ces segments. De plus $k$ représente exactement le nombre d'allers-retours effectués entre chaque extrémité du segment $[(k+1)V; kV[$ [5].

À titre d'exemple, la solution de l'équation pour les valeurs $Q = 3L$, $D = 1ml/km$ et $V = 1L$ se décompose en trois morceaux.

$$Q(x) = 3 - \frac{5}{1000}x, \ pour \ x \in [0; 200] \tag{8}$$

$$Q(x) = 2 - \frac{3}{1000}(x - 200), \ pour \ x \in [200, 200 + \frac{1000}{3}] \tag{9}$$

$$Q(x) = 1 - \frac{1}{1000}(x - 200 - \frac{1000}{3}), \ pour \ x \geq 200 + \frac{1000}{3} \tag{10}$$

La quantité de jus de banane après la traversée sera donc $Q(1000) = 8/15L = 0,53333L$.

[5] On peut en fait considérer ces allers-retours de deux fa cons. Ou bien l'éléphant effectue des séries de $k$ allers-retours *infinitésimaux* le long du segment $[(k+1)V; kV[$; ou bien l'on ***recompose*** ces allers-retours *infinitésimaux* entre eux pour former exactement $k$ allers-retours entre les extrémités du segment, en procédant d'une manière inverse à celle qui a été employée pour démontrer la propriété dans le premier paragraphe. C'est bien entendu cette deuxième fa con ($k$ allers-retours entre les extrémités du segment) que l'on appliquerait en *pratique*, si tant est qu'on veuille transporter du jus de bananes avec un éléphant et une paille.

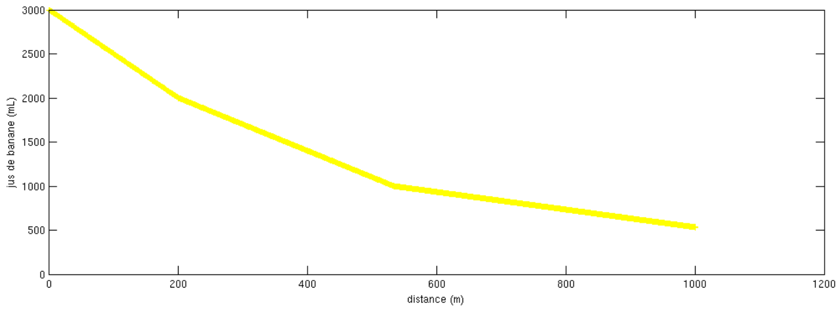


Figure 4: Représentation de la solution.

**5** Pour finir, remarquons que si $V$ est assez petit devant $Q(x)$, on peut approximer l'équation précédente de la fa con suivante.

$$Q'(x) \approx \frac{-2DQ(x)}{V} \tag{11}$$

Ainsi lorsque $V \ll Q(x)$, on a $Q(x) \approx Q_0 e^{-2\frac{Dx}{V}}$