1 Approximation de la fréquence de coupure

Cette section a pour but d'expliquer notre démarche pour l'approximation de la fréquence de coupure dans un circuit passe-bas et passe-haut.

Définissons tout d'abord ce qu'est la fréquence de coupure : c'est la fréquence à partir de laquelle la tension dans un circuit passe-bas (resp. passe-haut) commence à diminuer (resp. se stabiliser) lorsque la fréquence augmente. Nous devions donc trouver l'équation de deux droites : une droite horizontale, et une droite oblique. L'intersection de ces droites est appelée "fréquence de coupure".

Pour ce faire, nous avons tout d'abord procédé à une expérience en laboratoire. Celle-ci consistait à mesurer la tension de sortie en fonction de la fréquence du signal, et ce dans chacun des circuits considérés. Nous avons donc procédé aux mesures pour le circuit passe-bas, ainsi que pour le passe-haut, et cela nous a ensuite permis de modéliser notre problème, et de trouver une fréquence de coupure expérimentale.

1.1 Pour le filtre passe-bas

1.1.1 Equation de la droite horizontale

Expérimentalement, nous obtenons une droite horizontale d'une valeur initiale de 2.5 V et donc

$$y = 2.5$$

1.1.2 Equation de la droite diagonale

Avec les mesures effectuées en laboratoires, nous n'obtenons non pas une droite mais bien une exponentielle. Pour faciliter le calcul de l'intersection de l'exponentielle et de la droite, nous passons donc en repère semi-logarithmique. En procédant de la sorte, l'exponentielle se transforme en droite, et le calcul devient plus facile.

Nous savons que l'équation d'une droite dans un repère cartésien est de type $y = ax + b$, avec a la pente et b l'ordonnée à l'origine.

Mais ici nous ne sommes plus dans un repère cartésien mais bien dans un répère semi-logarithmique (en x). L'équation de la droite devient alors : $y = a \log x + b$

Mesures en laboratoires Voici 3 résultats choisi (de manière cohérente) parmi toutes les mesures effectuées en laboratoire, où V_c est la tension de sortie et f la fréquence :

V_c	f	$\log f$
1.7	16000	4.204
1.55	18000	4.255
1.45	20000	4.301

Dès maintenant les fréquences sont exprimées en base logarithmique. Nous écrivons maintenant un système ayant pour inconnues la pente (a) et l'ordonnée à l'origne (b) de notre droite inconnue. Nous avons trois équations à deux inconnues, et le systène n'admet pas de solution. Cela n'est pas étonnant, étant donné que les résultats expérimentaux ne sont jamais très précis.

Voici le système sous forme matricielle :

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 4.204 & 1 \\ 4.255 & 1 \\ 4.301 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.7 \\ 1.55 \\ 1.45 \end{pmatrix}$$

Le système n'admet pas de solution car $\vec{b}$ n'appartient pas à l'espace des colonnes de A. Nous allons donc projeter $\vec{b}$ sur l'espace des colonnes de A afin d'obtenir une solution approchée du système.

Pour ce faire, trouvons une base orthonormée de l'espace colonnes de la matrice :

Pour trouver les bases orthonormées, on utilise la méthode de Gram-Schmidt. Pour trouver la première base, on a la formule suivante : $e_1 = \frac{f_1}{||f_1||}$

Ce qui nous donne la base suivante :

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}})$$

Pour la deuxième base orthonormée, voiçi la formule : $e_2 = (\frac{f_2-(f_2|e_1)e_1}{||e_2||})$

Et nous obtenons

$$e_2 = (-0.684, 0.03, 0.729)$$

Nous sommes maintenant en mesure de trouver une projection du vecteur contenant nos données expérimentales peu précises : nous projetons les vecteurs grâce à la formule de la projection : $b' = ((b|e_1)e_1 + (b|e_2)e_2)$

$$b' = \frac{4.7}{\sqrt{3}e_1} + (-0.059)e_2 = (1.567, 1.567, 1.567) + (0.04, -1.77 \times 10^{-3}, -0.043)$$

$$\begin{pmatrix} 1.6 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

En réécrivant le système comme cela on peut trouver des solutions :

$$\begin{pmatrix} 4.204 & 1 \\ 4.255 & 1 \\ 4.301 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.607 \\ 1.565 \\ 1.524 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $a \times logx + b = y \Rightarrow y' = \begin{pmatrix} 1.607 \\ 1.565 \\ 1.524 \end{pmatrix}$

Nous en déduisons la valeur des coefficients a et b :

$$a = -1.96$$

$$b = 9.84$$

$$\boxed{\text{y= -1.96 x +9.84}}$$

Pour trouver la fréquence d'intersection entre les deux droites

$$y = 2.5$$

et

$$y = -1.96 \times logx + 9.84$$

nous résolvons le système, et nous trouvons :

$$\boxed{\text{x = 5557.7 Hz}}$$

Cela nous semble correct car en théorie nous devions arriver à une valeur f telle que :

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

avec $R = 7.5 + 50 = 57.5\ \Omega$ et $C = 470 \cdot 10^{-9}$ F, la valeur théorique de la fréquence de coupure est donc :

$$f = 5889.2 \text{ Hz}$$

1.2 Pour le filtre passe-haut

Equation de la droite horizontale

Nous savons que la droite a une valeur initiale de 0.75 V et donc $y = 0.75$.

1.2.1 Equation de la droite diagonale

Nous allons encore utiliser une base logarithmique pour la pente, pour les mêmes raison explicitées pour le filtre passe-bas. L'équation de la droite est donc de la forme : $y = a \log x + b$.

Voici 3 résultats choisis parmis les mesures effectuées en laboratoire :

V_c	f	$\log f$
127	0.4	2.1
191	0.5	2.3
356	0.6	2.6

De manière analogue que pour le premier filtre, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{pmatrix} 2.1 & 1 \\ 2.3 & 1 \\ 2.6 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.5 \\ 0.6 \end{pmatrix}$$

Pour trouver les bases orthonormées, on utilise la méthode de Gram-Schmidt. Pour trouver la première base, on a la formule suivante : $e_1 = \frac{f_1}{||f_1||}$

Ce qui nous donne la base suivante :

$$e_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}})$$

Pour la deuxième base orthonormée, voiçi la formule : $e_2 = (\frac{f_2 - (f_2|e_1)e_1}{||e_2||})$

Et nous obtenons

$$e_2 = (-0.6, 0.0, 0.8)$$

Ensuite, nous projetons les vecteurs grâce à la formule de la projection : $b' = ((b|e_1)e_1 + (b|e_2)e_2)$

$$b' = \frac{1.5}{\sqrt{3}e_1} + 0.24e_2 = (0.5, 0.5, 0.5) + (-0.14, 0, 0.19)$$

Et nous obtenons comme vecteur projeté :

$$\begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.5 \\ 0.69 \end{pmatrix}$$

En réécrivant le système comme cela on peut trouver des solutions :

$$\begin{pmatrix} 2.1 & 1 \\ 2.3 & 1 \\ 2.6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.5 \\ 0.69 \end{pmatrix}$$

Nous avons donc $a \times logx + b = y \Rightarrow$

$$y' = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.5 \\ 0.69 \end{pmatrix}$$

Nous en déduisons la valeur des coefficients a et b :

$$a = 0.7$$

$$b = -1.11$$

L'équation de la droite est alors :

$$\boxed{\text{y= 0.7 logx -1.11}}$$

Pour trouver l'intersection entre les deux droites

$$y = 0.75$$

et

$$y = 0.7 \times logx - 1.11$$

nous résolvons le système, et nous trouvons :

$$\boxed{\text{x = 439.4 Hz}}$$