

1 Modélisation des filtres passe-haut, passe-bas, et passe-bande

Dans cette section, nous allons expliquer la méthode que nous avons utilisée pour trouver une expression analytique de la tension de sortie dans un filtre passe-bas, ainsi que dans un filtre passe-haut. Nous étudierons également la combinaison de ces deux filtres : le passe-bande.

Nous avons en réalité utilisé deux méthodes différentes qui, heureusement, aboutissent à la même solution. La première méthode utilise ce que nous avons appris au premier quadrimestre concernant les équations différentielles. Cette méthode est plus longue et plus compliquée que la deuxième, c'est pourquoi nous ne la décrivons pas ici. La deuxième méthode utilise ce que nous avons appris au deuxième quadrimestre concernant les équations différentielles et les complexes.

1.1 Le filtre passe-bas

Le filtre passe-bas dans notre haut-parleur a pour but de laisser passer les basses fréquences et d'atténuer les plus hautes fréquences.

Soit V_R la tension à travers la résistance R , V_C la tension à travers le condensateur C , V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.

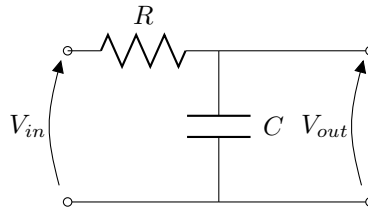


FIGURE 1 – Schéma électrique d'un filtre passe-bas

Sur le circuit ci-dessus (Figure 1), nous pouvons utiliser la loi des tensions de Kirchhoff :

$$V_{in} = V_R + V_{out}$$

Notons V l'amplitude de la tension d'entrée sinusoïdale, et $i(t)$ le courant en fonction du temps :

$$V \cdot \cos(\omega t) = R \cdot i(t) + V_C$$

Or, le courant $i(t)$ à travers un condensateur est donné par $C \frac{dV_C}{dt}$, l'équation devient alors une équation différentielle en la fonction inconnue $V_C(t)$:

$$V \cdot \cos(\omega t) = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

Nous pouvons réécrire cette équation de la manière suivante, où $y = V_C(t)$:

$$RCy' + y = V \cdot \cos(\omega t)$$

Cette équation va être la base de la méthode qui suit. Nous utiliserons également la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0$$

1.1.1 Résolution de l'équation différentielle

Nous savons que $\cos(\omega t)$ est égal à la partie réelle de l'exponentielle complexe $e^{\omega it}$. Nous réécrivons alors l'équation différentielle de la manière suivante :

$$RCy' + y = V \cdot e^{\omega it}$$

Comme pour toute équation différentielle linéaire non-homogène, nous allons travailler en deux étapes :

Recherche de la solution homogène Le polynôme caractéristique de l'équation homogène est :

$$RC \cdot x + 1 = 0$$

Nous obtenons alors $x = \frac{-1}{RC}$ comme racine, et nous trouvons donc comme solution homogène :

$$y_h(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Où A est une constante appartenant à l'ensemble des réels.

Recherche de la solution particulière La solution particulière que nous recherchons est de la forme :

$$y_p(t) = \alpha \cdot e^{\omega i t}$$

Il nous reste donc à déterminer la constante complexe α . Pour ce faire, nous injectons dans l'équation de départ $y_p(t)$ et sa dérivée première. Nous trouvons alors :

$$\alpha = \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2 C^2 \omega^2}$$

La solution particulière est donc :

$$y_p(t) = \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \cdot e^{\omega i t}$$

Solution complète La solution finale $y(t)$ est égale à $y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \cdot e^{\omega i t}$$

En retransformant ensuite l'exponentielle complexe en sa forme trigonométrique et en ne gardant que la partie réelle, nous obtenons :

$$y(t) = V_C(t) = \frac{V(\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t))}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Élimination de la constante Il ne nous reste plus qu'à éliminer la constante A en utilisant la condition initiale. Nous trouvons enfin :

$$A = -\frac{V}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Conclusion La tension de sortie en fonction du temps est donc donnée par :

$$V_{out} = \frac{V}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t) - e^{\frac{-t}{RC}})$$

Nous pouvons ensuite réécrire cette formule de manière à faire apparaître le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. En transformant $y_p(t)$ en utilisant la notation exponentielle $|z|e^{i\phi}$ d'un couple de la forme $a+bi$ et en utilisant ensuite la notation trigonométrique d'une exponentielle complexe, nous trouvons, après quelques simplifications et mises en évidence :

$$V_{out} = \frac{V}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \left(-\frac{e^{\frac{-t}{RC}}}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} + \cos(\arctan(-RC\omega) + \omega t) \right)$$

Il apparaît donc que le déphasage entre V_{out} et V_{in} est $-\arctan(RC\omega) = -\arctan(2\pi fRC)$. Ce déphasage augmente donc linéairement avec ω et est dû au temps que met le condensateur à se charger.

1.1.2 Vérification des résultats

Une première vérification que l'on peut faire est de vérifier que V_{out} tend vers 0 lorsque ω tend vers l'infini. C'est bien le cas ici puisque ω^2 est au dénominateur.

Nous pouvons ensuite regarder les graphes de V_{out} , V_{in} (Figure 2) et V_{out}/V_{in} (Figure 3). Les résultats sont encourageants.

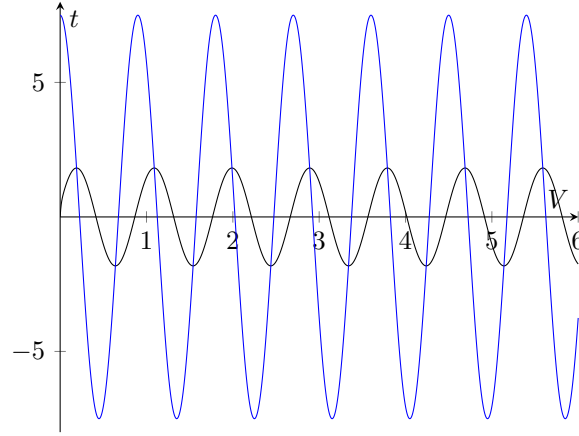


FIGURE 2 – Graphe de V_{out} (en noir) et V_{in} (en bleu) pour les valeurs suivantes : $V_{max} = 7.5$ V, $C = 0.00001$ F, $R = 1000$ Ω et $f = 63.66$ Hz

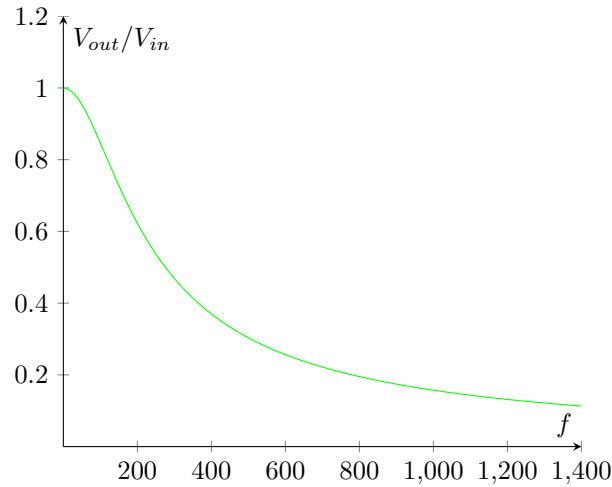


FIGURE 3 – Graphe de $V_{out}/V_{in} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ pour les valeurs suivantes : $R = 100$ Ω et $C = 0.00001$ F.

1.2 Le filtre passe-haut

Le filtre passe-haut a le rôle inverse du filtre passe-bas : il atténue les basses fréquences et laisse passer les hautes fréquences.

Soit V_R la tension à travers la résistance R , V_C la tension à travers le condensateur C , V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.

Sur la Figure 4, la loi des tensions de Kirchhoff donne la même équation que pour le filtre passe-bas :

$$V_{in} = V_R + V_C$$

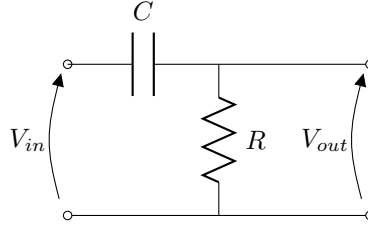


FIGURE 4 – Schéma électrique d'un filtre passe-haut.

Cette fois, $V_{out} = V_R$. Or, nous connaissons déjà V_C que nous avons calculé dans la section précédente. Nous avons alors simplement :

$$V_R = V_{in} - V_C$$

$$V_{out} = \frac{V}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}} \left(\frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{\sqrt{1 + R^2\omega^2C^2}} - \cos(\arctan(-RC\omega) + \omega t) \right) + \cos(\omega t)$$

Le déphasage reste donc le même que pour le filtre passe-bas.

1.2.1 Vérification des résultats

Pour le filtre passe-haut, nous allons cette fois vérifier que lorsque ω tend vers 0, nous avons V_{out} qui tend vers 0 également. Une fois de plus, c'est bien le cas.

Nous pouvons ensuite comparer les graphes de V_{out} , V_{in} (Figure 5) et V_{out}/V_{in} (Figure 6). Le déphasage apparaît clairement, et les fréquences les plus basses sont effectivement atténuées.

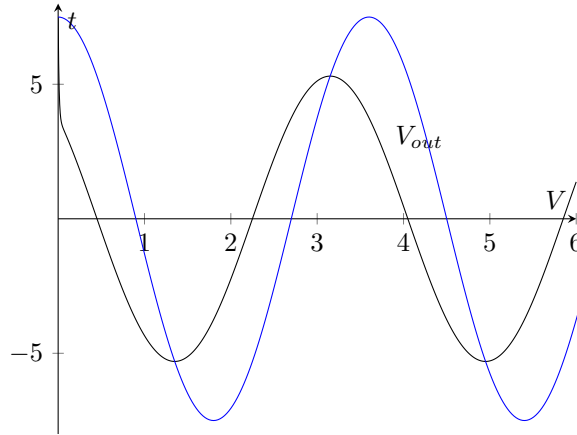


FIGURE 5 – Graphe de V_{out} et V_{in} pour les valeurs suivantes : $V_{max} = 7.5$ V, $C = 0.00001$ F, $R = 1000$ Ω et $f = 15.91$ Hz

1.3 Le filtre passe-bande

Le filtre passe-bande sert, comme son nom l'indique, à laisser passer une certaine bande de fréquence. Il est constitué d'un filtre passe-haut suivi d'un passe-bas, ou inversement. Les fréquences de coupure respectives des filtres déterminent l'ampleur de la bande passante. Plus la résistance pour le filtre passe-bas (resp. passe-haut) est petite (resp. grande), plus la bande passante est large, étant donné que la fréquence de coupure est inversement proportionnelle à la résistance. Nous nous intéresserons ici à un signal passant d'abord par un filtre passe-haut, et ensuite par le filtre passe-bas.

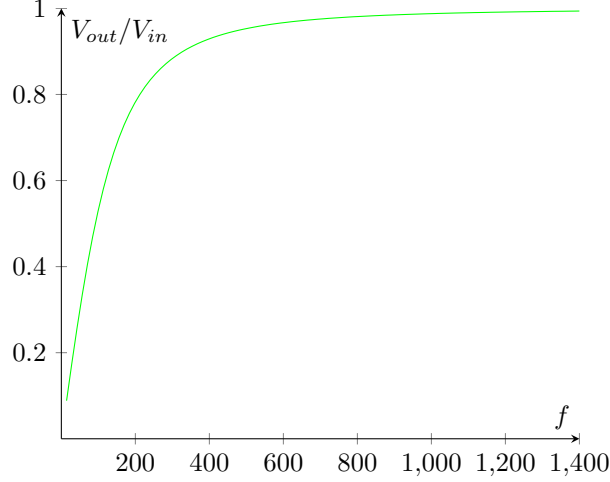


FIGURE 6 – Graphe de $V_{out}/V_{in} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}$ pour les valeurs suivantes : $R = 100 \Omega$ et $C = 0.0001 \text{ F}$.

Soit $V_{in,1}$ la tension à l'entrée du filtre passe-bas, R_1 la résistance, et C_1 la capacité. Dans la section précédente, nous sommes arrivés au résultat suivant :

$$V_{out,1} = \frac{V_{in,1}}{\sqrt{1 + R_1^2 \omega^2 C_1^2}} \left(-\frac{e^{\frac{-t}{R_1 C_1}}}{\sqrt{1 + R_1^2 \omega^2 C_1^2}} + \cos(\arctan(-R_1 C_1 \omega) + \omega t) \right)$$

Cette tension de sortie du filtre passe-bas sera notre tension d'entrée pour le filtre passe-haut. Précédemment, dans la section concernant le filtre passe-haut, nous trouvions :

$$V_{out,2} = \frac{V_{in,2}}{\sqrt{1 + R_2^2 \omega^2 C_2^2}} \left(\frac{e^{\frac{-t}{R_2 C_2}}}{\sqrt{1 + R_2^2 \omega^2 C_2^2}} - \cos(\arctan(-R_2 C_2 \omega) + \omega t) \right) + V_{in,2} \cos(\omega t)$$

où $V_{in,2}$ est la tension à l'entrée du filtre passe-haut, R_2 la résistance, et C_2 la capacité. Étant donné que nous disposons d'un adaptateur d'impédance, nous pouvons nous permettre d'utiliser ces deux équations obtenues séparément. En remplaçant $V_{in,2}$ par $V_{out,1}$, la tension à la sortie du passe-bas, nous trouvons $V_{out,3}$, la tension de sortie finale. Après simplifications, nous obtenons :

$$V_{out,3} = \frac{V_{out,1} \cdot V_{out,2}}{V_{in,1}}$$

1.3.1 Vérification des résultats

Au vu du graphe de $V_{out,3}/V_{in,1}$ de l'équation obtenue pour le passe-bande, nous pouvons valider notre résultat, étant donné que l'allure du graphique sur la Figure 7 correspond à nos attentes. En effet, les fréquences de coupure théoriques représentées sur la figure semblent concorder avec les courbes.

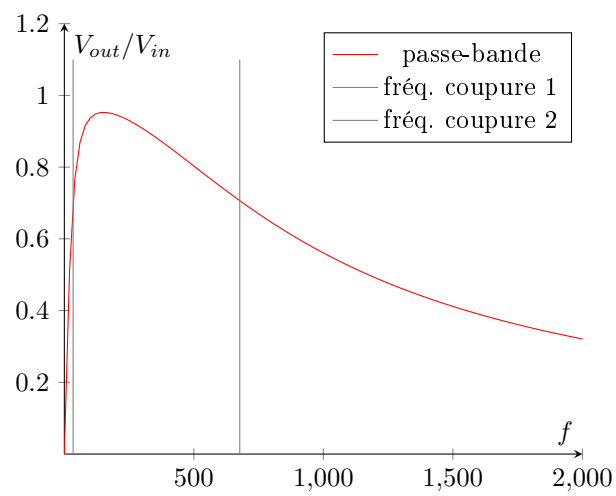


FIGURE 7 – Graphe de V_{out}/V_{in} pour le filtre passe-bande, pour les valeurs suivantes : $R_1 = 500 \Omega$, $R_2 = 10000 \Omega$, et $C = 0.00000047 \text{ F}$