

1 Modélisation des filtres passe-haut et passe-bas

Dans cette section, nous allons expliquer la méthode que nous avons utilisée pour trouver une expression analytique de la tension de sortie dans un filtre passe-bas, la démarche étant la même pour le filtre passe-haut.

Nous avons en réalité utilisé deux méthodes différentes qui, heureusement, aboutissent à la même solution. La première méthode utilise ce que nous avons appris au premier quadrimestre concernant les équations différentielles. Cette méthode est plus longue et plus compliquée que la deuxième, c'est pourquoi nous ne la décrivons pas ici. La deuxième méthode utilise ce que nous avons appris au deuxième quadrimestre concernant les équations différentielles et les complexes.

1.1 Le filtre passe-bas

Soit V_R la tension à travers la résistance R , V_C la tension à travers le condensateur C , V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.

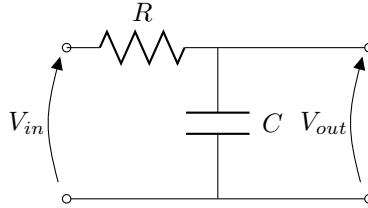


FIGURE 1 – Schéma électrique d'un filtre passe-bas

Sur le circuit ci-dessus (Figure 1), on peut utiliser la loi des tensions de Kirchhoff :

$$V_{in} = V_R + V_{out}$$

On note V l'amplitude de la tension d'entrée sinusoïdale, $i(t)$ est le courant en fonction du temps :

$$V \cdot \cos(\omega t) = R \cdot i(t) + V_C$$

Or, le courant $i(t)$ à travers un condensateur est donné par $C \frac{dV_C}{dt}$, l'équation devient alors une équation différentielle en la fonction inconnue $V_C(t)$:

$$V \cdot \cos(\omega t) = RC \frac{dV_C}{dt} + V_C$$

On peut réécrire cette équation de la manière suivante, où $y = V_C(t)$:

$$RCy' + y = V \cdot \cos(\omega t)$$

Cette équation va être la base de la méthode qui suit. On va également utiliser la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0$$

1.1.1 Résolution de l'équation différentielle

On sait que $\cos(\omega t)$ est égale à la partie réelle de l'exponentielle complexe $e^{\omega it}$. On réécrit alors l'équation différentielle de la manière suivante :

$$RCy' + y = V \cdot e^{\omega it}$$

Comme pour toute équation différentielle linéaire non-homogène, nous allons travailler en deux étapes :

Recherche de la solution homogène Le polynôme caractéristique de l'équation homogène est :

$$RC \cdot x + 1 = 0$$

On a alors $x = \frac{-1}{RC}$ comme racine, et on trouve donc comme solution homogène :

$$y_h(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Où A est une constante appartenant à l'ensemble des réels.

Recherche de la solution particulière La solution particulière qu'on recherche est de la forme :

$$y_p(t) = \alpha \cdot e^{\omega it}$$

Il nous reste donc à déterminer la constante complexe α . Pour ce faire, nous injectons dans l'équation de départ $y_p(t)$ et sa dérivée seconde. On trouve alors :

$$\alpha = \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

La solution particulière est donc :

$$y_p(t) = \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2C^2\omega^2} \cdot e^{\omega it}$$

Solution complète La solution finale $y(t)$ est égale à $y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2 C^2 \omega^2} \cdot e^{\omega i t}$$

En retransformant ensuite l'exponentielle complexe en sa forme trigonométrique et en ne gardant que la partie réelle, on trouve :

$$y(t) = V_C(t) = \frac{V(\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t))}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Elimination de la constante Il ne nous reste plus qu'à éliminer la constante A en utilisant la condition initiale. On trouve enfin :

$$A = -\frac{V}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

Conclusion La tension de sortie en fonction du temps est donc donnée par :

$$V_{out} = \frac{V}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \cdot (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t) - e^{\frac{-t}{RC}})$$

On peut ensuite réécrire cette formule de manière à faire apparaître le déphasage de la tension de sortie par rapport à la tension d'entrée. En transformant $y_p(t)$ en utilisant la notation exponentielle $|z|e^{\phi i}$ d'un couple de la forme $a + bi$ et en utilisant ensuite la notation trigonométrique d'une exponentielle complexe, on trouve, après quelques simplifications et mises en évidence :

$$V_{out} = \frac{V}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} \left(-\frac{e^{\frac{-t}{RC}}}{\sqrt{1 + R^2 \omega^2 C^2}} + \cos(\arctan(-RC\omega) + \omega t) \right)$$

On remarque donc que le déphasage entre V_{out} et V_{in} est $-\arctan(RC\omega) = -\arctan(2\pi f RC)$.

1.1.2 Vérification des résultats

Une première vérification que l'on peut faire est de vérifier que V_{out} tend vers 0 lorsque ω tend vers l'infini. C'est bien le cas ici puisqu'on a ω^2 au dénominateur.

On peut ensuite regarder les graphes de V_{out} , V_{in} (Figure 2) et V_{out}/V_{in} (Figure 3).

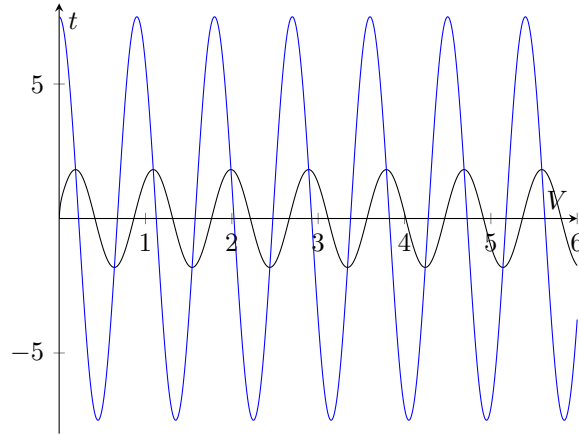


FIGURE 2 – Graphe de V_{out} (en noir) et V_{in} (en bleu) pour les valeurs suivantes : $V_{max} = 7.5$ V, $C = 0.00001$ F, $R = 1000$ Ω et $f = 63.66$ Hz

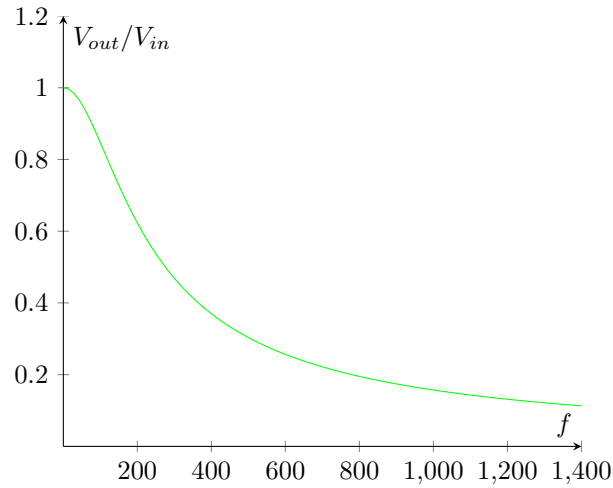


FIGURE 3 – Graphe de V_{out}/V_{in} pour les valeurs suivantes : $R = 100$ Ω et $C = 0.0001$ F.

1.2 Le filtre passe-haut

Soit V_R la tension à travers la résistance R , V_C la tension à travers le condensateur C , V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.

Sur la Figure 4, la loi des tensions de Kirchhoff donne la même équation que pour le filtre passe-bas :

$$V_{in} = V_R + V_C$$

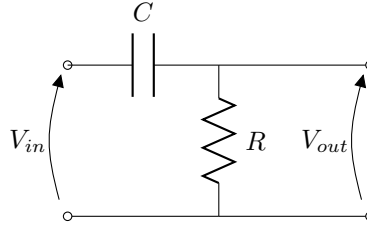


FIGURE 4 – Schéma électrique d'un filtre passe-haut.

Cette fois, $V_{out} = V_R$. Or on connaît déjà V_C que l'on a calculé dans la section précédente. On a alors simplement :

$$V_R = V_{in} - V_C$$

$$V_{out} = V \cdot \left(\cos(\omega t) + \frac{e^{-\frac{t}{RC}}}{1 + R^2 C^2 \omega^2} - \frac{\cos(\arctan(-RC\omega) + \omega t)}{\sqrt{1 + R^2 C^2 \omega^2}} \right)$$

Le déphasage reste donc le même que pour le filtre passe-bas.

1.2.1 Vérification des résultats

Pour le filtre passe-haut, on va cette fois vérifier que lorsque ω tend vers 0, on a V_{out} qui tend vers 0 également. Une fois de plus, c'est bien le cas.

On peut ensuite comparer les graphes de V_{out} , V_{in} (Figure 5) et V_{out}/V_{in} (Figure 6).

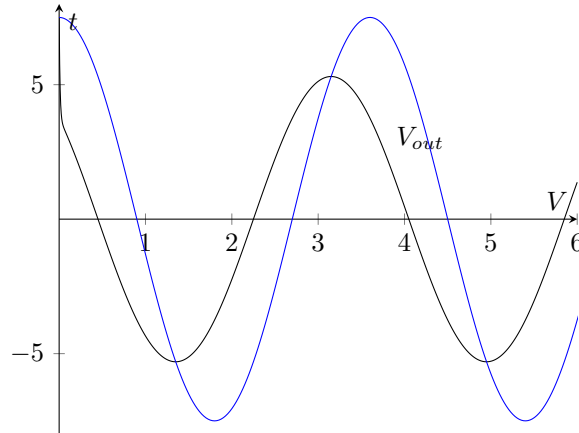


FIGURE 5 – Graphe de V_{out} et V_{in} pour les valeurs suivantes : $V_{max} = 7.5$ V, $C = 0.00001$ F, $R = 1000$ Ω et $f = 15.91$ Hz

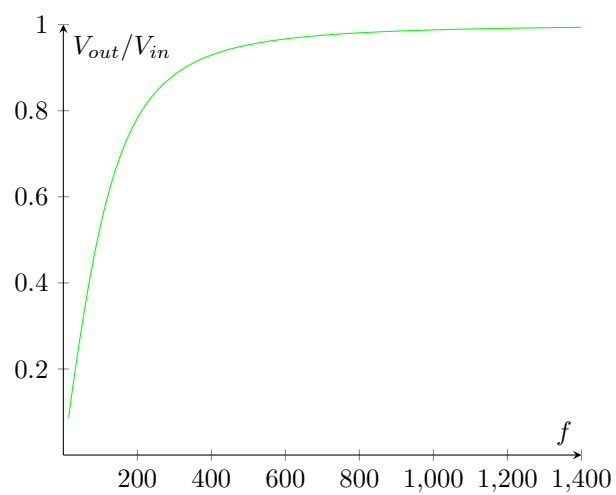


FIGURE 6 – Graphe de V_{out}/V_{in} pour les valeurs suivantes : $R = 100 \Omega$ et $C = 0.0001 \text{ F}$.