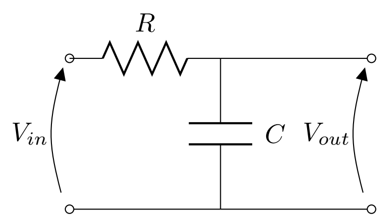
1 Modélisation des filtres passe-haut et passe-bas

Dans cette section, nous allons expliquer la méthode que nous avons utiliser pour trouver une expression analytique de la tension de sortie dans un filtre passe-bas, la démarche étant la même pour le filtre passe-bas.

Nous avons en réalité utiliser deux méthodes différentes qui, heureusement, aboutissent à la même solution. La première méthode utilise ce que nous avons appris au premier quadrimestre concernant les équations différentielles. Cette méthode est plus longue et plus compliquée que la deuxième, c'est pourquoi nous ne la décrirons pas ici. La deuxième méthode utilise ce que nous avons appris au deuxième quadrimestre concernant les équations différentielles et les complexes.

1.1 Le filtre passe-bas

Soit V_R la tension à travers la résistance R, V_C la tension à travers le condensateur C, V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.



Sur le circuit ci-dessus, on peut utiliser la loi des tensions de Kirchhoff :

$$V_{in} = V_R + V_{out}$$

On note V l'amplitude de la tension d'entrée sinusoïdale, $i(t)$ est le courant en fonction du temps :

$$V \cdot \cos(\omega t) = R \cdot i(t) + V_C$$

Or, le courant $i(t)$ à travers un condensateur est donné par $C\frac{dV_C}{dt}$, l'équation devient alors une équation différentielle en la fonction inconnue $V_C(t)$:

$$V \cdot \cos(\omega t) = RC\frac{dV_C}{dt} + V_C$$

On peut réecrire cette équation de la manière suivante, où $y = V_C(t)$:

$$RCy' + y = V \cdot \cos(\omega t)$$

Cette équation va être la base de la méthode qui suit. On va également utiliser la condition initiale suivante :

$$y(0) = 0$$

1.1.1 Résolution de l'équation différentielle

On sait que $\cos(\omega t)$ est égale à la partie réelle de l'exponentielle complexe $e^{\omega i t}$. On réecrit alors l'équation différentielle de la manière suivante :

$$RCy' + y = V \cdot e^{\omega i t}$$

Comme pour toute équation différentielle linéaire non-homogène, nous allons travailler en deux étapes :

Recherche de la solution homogène Le polynôme caractéristique de l'équation homogène est :

$$RC \cdot x + 1 = 0$$

On a alors $x = \frac{-1}{RC}$ comme racine, et on trouve donc comme solution homogène :

$$y_h(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Où A est une constante appartenant à l'ensemble des réels.

Recherche de la solution particulière La solution particulière qu'on recherche est de la forme :

$$y_p(t) = \alpha \cdot e^{\omega i t}$$

Il nous reste donc à déterminer la constante complexe α. Pour ce faire, nous injections dans l'équation de de départ $y_p(t)$ et sa dérivée seconde. On trouve alors :

$$\alpha = \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2C^2\omega^2}$$

La solution particulière est donc :

$$\frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2C^2\omega^2} \cdot e^{\omega i t}$$

Solution complète La solution finale $y(t)$ est égale à $y_h(t) + y_p(t)$:

$$y(t) = A \cdot e^{\frac{-t}{RC}} + \frac{V(1 - RC\omega i)}{1 + R^2C^2\omega^2} \cdot e^{\omega i t}$$

En retransformant ensuite l'exponentielle complexe en sa forme trigonométrique et en ne gardant que la partie réelle, on trouve :

$$y(t) = V_C(t) = \frac{V(\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t))}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + A \cdot e^{\frac{-t}{RC}}$$

Elimination de la constante Il ne nous reste plus qu'à éliminer la constante A en utilisant la condition initiale. On trouve enfin :

$$A = -\frac{V}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$$

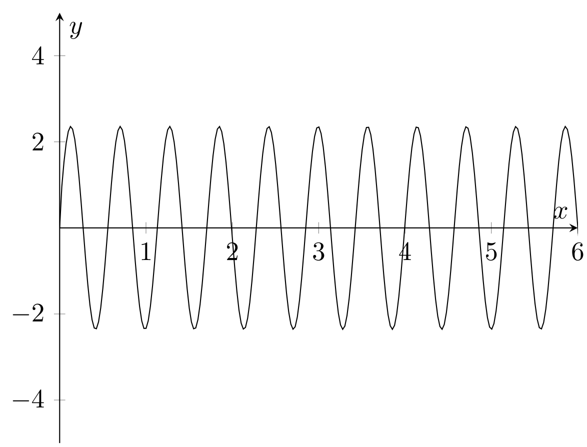
Conclusion La tension de sortie en fonction du temps est donc donnée par :

$$\boxed{\mathrm{V}_{out} = \frac{V}{1+\omega^2 R^2 C^2} \cdot (\cos(\omega t) + RC\omega \sin(\omega t) - e^{\frac{-t}{RC}})}$$

1.1.2 Vérification des résultats

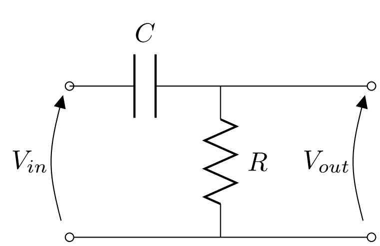
Une première vérification que l'on peut faire est de vérifier que V_{out} tend vers 0 lorsque ω tend vers l'infini. C'est bien le cas ici puisqu'on a ω^2 au dénominateur.

On peut ensuite comparer le graphe de l'expression analytique de V_{out} avec le graphe donné par un logiciel de simulation de circuit électronique comme LTSpiceIV.



1.2 Le filtre passe-haut

Soit V_R la tension à travers la résistance R, V_C la tension à travers le condensateur C, V_{in} la tension d'entrée et V_{out} la tension de sortie du filtre.



La loi des tensions de Kirchhoff donne la même équation que pour le filtre passe-bas :

$$V_{in} = V_R + V_C$$

Cette fois, $V_{out} = V_R$. Or on connait déjà V_C que l'on a calculé dans le section précédente. On a alors simplement :

$$V_R = V_{in} - V_C$$

$$\boxed{\mathrm{V}_{out} = \frac{V}{1+\omega^2 R^2 C^2} \cdot (\omega^2 R^2 C^2 \cos(\omega t) - RC\omega \sin(\omega t) + e^{-\frac{t}{RC}})}$$

On arrive au même résultat en utilisant le faite que le courant dans le circuit est égal à $i(t) = C\frac{dV_C}{dt}$ et que la tension dans la résistance vaut $Ri(t)$.

1.2.1 Vérification des résultats

Pour le filtre passe-haut, on va cette fois vérifier que lorsque ω tend vers 0, on a V_{out} qui tend vers 0 également.