

Feuille 2 – Corrigé

Exercice 1 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ ".

Initialisation :

$$\text{On a } \sum_{k=0}^0 k = 0 = \frac{0 \times (0+1)}{2}$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\text{On a } \sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^n k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc la proposition est héréditaire

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $q \neq 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ".

Initialisation :

$$\text{On a } \sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= q^{n+1} + \sum_{k=0}^n q^k = q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}(1-q) + 1-q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc la proposition est héréditaire

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

Soit $a \in \mathbb{N}$. On va raisonner par contraposée. La contraposée de la question est : « si a est divisible par 3, alors a^2 est divisible par 3.

Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}, a = 3k \Rightarrow a^2 = (3k)^2 = 3 \times (3k^2)$

Ainsi a^2 est aussi divisible par 3, donc par contraposée, si a^2 n'est pas divisible par 3, alors a ne l'est pas non plus.

Exercice 3 :

1) On va raisonner par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que :

$$\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ avec } \text{pgcd}(p, q) = 1.$$

Alors on a $p = q\sqrt{2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$.

Ainsi p^2 est pair, donc p l'est aussi. Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}, p = 2k$

Donc en remplaçant, on a $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$

Ainsi q^2 est lui aussi pair, ce qui implique que q est pair.

Or cela contredit $\text{pgcd}(p, q) = 1$, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

2) Supposons $b = 0$. Alors $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Donc le couple $(0,0)$ est bien solution.

Supposons maintenant $b \neq 0$. Alors $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{-a}{b}$

Quitte à diviser par leur pgcd, on peut considérer que a et b sont premiers entre eux.

Or d'après la question 1, dans ce cas-là, il n'existe aucun couple qui satisfait l'équation précédente. Donc le seul couple solution est $(0,0)$.

3) On a $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0$

$$\Leftrightarrow (m - p, n - q) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow m = p \text{ et } n = q$$

Exercice 4 :

On va procéder par récurrence :

Soit $x \in]-1 ; +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n) : "(1+x)^n \geq 1 + nx"$

Initialisation :

On a $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \times x$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\text{On a } (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = \underbrace{(1+nx)}_{HR} (1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$$

Or $nx^2 \geq 0$, donc $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$

Donc $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, la propriété est héréditaire.

Ainsi par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 5 :

On va procéder par récurrence double :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $u_n = 1 + 2^n$ "

Initialisation :

On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$

Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n + 1)$ soient vraies.

Hérédité :

$$\begin{aligned} \text{On a } u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n = 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) = 3 - 2 + 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n \\ &= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1} \\ &= 1 + 2 \times 2^{n+1} \\ &= 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

Donc $(P(n) \text{ et } P(n + 1)) \Rightarrow P(n + 2)$

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

On a $v_0 = 0, v_1 = \frac{1}{2}, v_2 = \frac{2}{3}, v_3 = \frac{3}{4}, v_4 = \frac{4}{5}$

On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: " $v_n = \frac{n}{n+1}$ ", qu'on va démontrer par récurrence sur n .

Initialisation : $v_0 = 0 = \frac{0}{1}$, donc $P(1)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\text{On a } v_{n+1} = \frac{1}{2-v_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)-n}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 : On va raisonner par l'absurde, supposons $x \neq y$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} &\Leftrightarrow x(1+x) = y(1+y) \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow x^2 - y^2 = y - x \\ &\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = -(x-y) \\ &\Leftrightarrow x+y = -1 \end{aligned}$$

Or x et y sont tous deux positifs, donc leur somme ne peut pas faire -1.

Ainsi, $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Rightarrow x = y$.

Exercice 8 :

On va raisonner par l'absurde : supposons que n premier, et supposons qu'il n'admet aucun diviseur inférieur ou égal à \sqrt{n} .

Alors comme n est premier, alors il existe $d, d' \in \mathbb{N}, 1 < d \leq d' < n$, tels que $n = dd'$

Or par hypothèse, tout diviseur de n est strictement supérieur à \sqrt{n} , donc on a :

$$n = dd' < \sqrt{n}\sqrt{n} = \sqrt{n}^2 = n$$

Ce qui est bien évidemment absurde.

Ainsi n admet au moins un diviseur inférieur ou égal à \sqrt{n} .

Exercice 9 :

On va raisonner par récurrence sur n .

Posons $P(n)$: " $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$ " pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Initialisation :

$$\text{On a } S_1 = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\begin{aligned} \text{On a } S_{n+1} &= \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{HR} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 + \frac{(-(n+2)+1)}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi $P(n) \Rightarrow P(n+1)$, donc la propriété est héréditaire.

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.