Feuille 3 – Fonctions usuelles

Méthode : Fonctions usuelles

Fonction	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
Domaine	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
Dérivée	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1+\tan^2(x)$
Fonction	$\ln(x)$	$\arcsin(x)$	$\arccos(x)$	$\arctan(x)$
Domaine	$\mathbb{R}_+^*$	$]-1;1[$	$]-1;1[$	$]-1;1[$
Dérivée	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$

Formule d'addition trigonométriques : $\forall a, b \in \mathbb{R}$

- $\sin(a \pm b) = \sin(a)\cos(b) \pm \sin(b)\cos(a)$ $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \sin(a)\sin(b) \Longrightarrow \cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$

Propriétés utiles :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} \qquad 1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Exercice 1 :

1. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, prouver que $1 + tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$
2. Calculer la dérivée de $f : x \mapsto \sin^2(x) + \sin^2(x)\tan^2(x)$

Exercice 2 : Calculer

$$\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \qquad \arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) \qquad \arccos\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right)$$

Exercice 3 : Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{2x} \qquad \lim_{x\to +\infty} x^3 - 8x^2 + 44\cos(\sqrt{x})$$

Exercice 4 :

1. Expliciter $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$, pour $a, b \in \mathbb{R}$, avec $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$ différents de 0
2. Trouver un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tel que $\frac{\pi}{12} = \frac{x}{4} + \frac{y}{6}$.
3. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
4. Montrer que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel est un nombre irrationnel.
5. En déduire que $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ est irrationnel.

Exercice 5 :

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, considérons f une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$

1. Montrer que si $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, alors f est $2\pi q$-périodique.
2. Montrer que si $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors f n'est pas périodique. (Indice : on s'intéressera à l'équation $f(x) = 2$, tout en gardant en tête que le cosinus est borné, et on essaiera de raisonner par contraposée.)