<u>Suites de fonctions</u>

Types de convergence

<u>Définition :</u> Suite de fonctions

On appelle suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_{n\geq n_0}$ (pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$) où $\forall n, f_n : D \to \mathbb{K}$

Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

<u>Définition :</u> Convergence simple.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement</u> (CVS) sur $A \subset D$ vers $f : A \to \mathbb{K}$ si :

$\forall x \in A$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f

C'est-à-dire :

$$\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

On dira que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f.

<u>Définition :</u> Domaine de convergence simple

Le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D vers $\mathbb{K}$ est la plus grande partie $A \subset D$ sur laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS.

<u>Définition :</u> Limite simple

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f, on dit que f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A.

Paramètres préservés par le passage à la limite simple

<u>Propriété :</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\underline{\mathbb{R}}$.On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur $A \subset D$ vers f.

- (i) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est positive sur A, f est positive sur A
- (ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est croissante sur A, alors f est croissante sur A
- (iii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est convexe sur un intervalle $I \subset A$, f est convexe sur I.

Paramètres NON conservés par le passage à la limite simple (mais par la convergence uniforme)

- (i) La continuité
- (ii) Le caractère borné
- (iii) L'interversion série-intégrale

Convergence uniforme

<u>Définition :</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (CVU) sur $A \subset D$ vers $f : A \to \mathbb{K}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

<u>Théorème :</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$, $A \subset D$ et $f : A \to \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers f

(ii) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur A, et :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

<u>Théorème :</u> Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f.