

Feuille 6 – Intégrales

Exercice 1 : À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx$$

$$\int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx$$

Exercice 2 :

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$

2) Déterminer l'ensemble de définition et calculer une primitive sur cet ensemble de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\sin x + \cos x}$$

Exercice 4 :

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$,

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

2) Calculer

$$\int \frac{3}{x^2 + 4x + 29} dx$$

Exercice 5 :

1) En utilisant le changement de variables $t = \tan \frac{x}{2}$, montrer que

$$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$$

2) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + \sin x} dx$$

3) En déduire

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1 + \sin x} dx$$

Exercice 6 : (★)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x - x^2}} dx$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(x^2 + 4)^2} dx$$

$$\int_1^2 x^2 \sqrt[3]{1 + x^3} dx$$

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{x^3}{e^{x^2}} + x \cos^2(x) \right) dx$$

(on pourra poser $x = 2 \tan(\theta)$)