Démonstrations – Réductions géométriques

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

La somme $F_1 + \dots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \dots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$$

Démonstration :

Considérons $\varphi : F_1 \times \dots \times F_m \to F_1 + \dots + F_m$

$(f_1, \dots, f_m) \mapsto f_1 + \dots + f_m$

On sait que φ est linéaire.

On a :

$F_1 + \dots + F_m$ est directe $\Leftrightarrow \forall x \in F_1 + \dots + F_m, \exists! \, (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = \varphi(f_1, \dots, f_m)$

$\Leftrightarrow \varphi$ est bijective

$\Leftrightarrow \varphi$ est injective (car par construction, φ est surjective)

$\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0_{F_1 \times \dots \times F_m}\}$

$\Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0$

$\Leftrightarrow \dim Im \, \varphi = \dim(F_1 \times \dots \times F_m)$

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient F et G deux sev de E stables par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

Démonstration :

- Soit $z \in F + G$, $\exists (x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$
  Alors $u(x + y) = \underbrace{u(x)}_{\in F} + \underbrace{u(y)}_{\in G} \in F + G$
  Donc $F + G$ est stable par u.
- De même, $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$
  Donc $u(F \cap G) \subset u(F) \subset F$ et $u(F \cap G) \subset u(G) \subset G$
  Donc $u(F \cap G) \subset F \cap G$

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Démonstration :

- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$
  Alors $\exists x \in E, y = u(x)$
  D'où $v(y) = v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big) \in \mathrm{Im}(u)$
- Soit $x \in \ker u$, montrons que $v(x) \in \ker u$.
  Or $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E$
  Donc $v(x) \in \ker u$.

Théorème :

Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ a pour coefficient dominant 1 et est de degré n. Il possède les coefficients suivants :

$$\mathcal{X}_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

Démonstration :

Notons $A = \big(a_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$, alors $XI_n - A = \big(\delta_{ij}X - a_{ij}\big)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{K})$

Alors $\mathcal{X}_A = \det(XI_n - A)$

$$= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \big(\delta_{\sigma(i),i}X - a_{\sigma(i),i}\big)}_{Q_r \in \mathbb{K}[X]}$$

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n, Q_r \in \mathbb{K}[X]$ en tant que produit de n polynômes de degré au plus 1, donc $\mathcal{X}_A \in \mathbb{K}_n[X]$.

➔ Si $\sigma \neq Id$,

Alors $\exists i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, tel que $\sigma(i) \neq i$ et $\sigma(j) \neq j$ donc

$$Q_r = \prod_{k=1}^{n} \big(\delta_{\sigma(k),k}X - a_{\sigma(k),k}\big)$$

Et de degré au plus $n - 2$ (car le produit contient au moins deux polynômes constants)

➔ Si $\sigma = Id$,

Alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sigma(i) = i$. Ainsi :

$$Q_r = \prod_{i=1}^{n} \big(\delta_{i,i}X - a_{i,i}\big)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \big(X - a_{i,i}\big)$$

$= X^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})X^{n-1} + P$, avec $\deg P \le n - 2$

De plus $\varepsilon(Id) = 1$,

Donc $\mathcal{X}_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + R, \deg R \le n - 2$

Enfin le coefficient constant de $\mathcal{X}_A$ vaut $\mathcal{X}_A(0) = \det(0 - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A)$

Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) λ est valeur de propre de A

(ii) λ est racine de $\mathcal{X}_A$

Démonstration :

On a $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n) \neq \{0_{M_{n,1}(\mathbb{K})}\}$

$\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$

$\Leftrightarrow A - \lambda I_n$ n'est pas inversible

$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$

Or $\det(A - \lambda I_n) = \det\big(-(\lambda I_n - A)\big)$

$= (-1)^n \det(\lambda I_n - A)$

$= (-1)^n \mathcal{X}_A(\lambda)$

Ainsi $\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow (-1)^n \mathcal{X}_A(\lambda) = 0$

$\Leftrightarrow \mathcal{X}_A(\lambda) = 0$

Propriété : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 2 matrices semblables. Alors $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

Démonstration : Comme A et B sont semblables,

$$\exists P \in GL_n(\mathbb{K}), B = P^{-1}AP$$

Donc $\mathcal{X}_B = \det(XI_n - B) = \det(XI_n - P^{-1}AP)$

Or $I_n = P^{-1}I_nP$

Donc $\mathcal{X}_B = \det(P^{-1}(XI_n - A)P)$

$= \frac{1}{\det(P)} \det(XI_n - A) \det(P)$

$= \det(XI_n - A)$

$= \mathcal{X}_A$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E, $F \neq \{0_E\}$, F stable par u, alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u, ie :

$$\mathcal{X}_{u_F} | \mathcal{X}_u$$

Démonstration :

Puisque F est stable par u, on complète une base B_F de F en une base B de E,

$$M = Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$$

Où $A = Mat_{B_F}(u_F) \in M_d(\mathbb{K}), d = \dim F$

D'où $\mathcal{X}_u = \det(XI_n - M)\,, n = \dim E$

$= \begin{vmatrix} XI_d - A & -B \\ (0) & XI_{n-d} - C \end{vmatrix}$

$= \det(XI_d - A)\det(XI_{n-d} - C)$

$= \mathcal{X}_A \times \mathcal{X}_C$

Or $\mathcal{X}_C \in \mathbb{K}[X]$, donc $\mathcal{X}_{u_F} | \mathcal{X}_u$.