Réductions algébriques

Polynômes d'endomorphismes et de matrices

Polynôme d'endomorphismes

Définition : Soient $u \in \mathcal{L}(E), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de P en u l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$

$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathbb{K}[u]$ est stable par addition, multiplication par un scalaire et composition.

Polynômes annulateurs

Définition : On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u figurent parmi les racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de u, c'est-à-dire :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, $Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$

Théorème de Cayley-Hamilton : Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ de u est annulateur de u, c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Polynômes de matrices

Définition : Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de P en A la matrice $P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in M_n(\mathbb{K})$$

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{K}), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$

$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$

Définition : On dit que $M \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $A \in M_n(\mathbb{K})$si $\exists p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$:

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}\}$$

Définition : On appelle polynôme annulateur de $A \in M_n(\mathbb{K})$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$

Propriété : ⍟

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.