Chapitre 5 – Application de la réduction des endomorphismes et des matrices

Systèmes récurrents linéaires

Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

1) Suites et séries de matrices
Définition : Pour une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, notons $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, [M]_{ij}$ le coefficient d'indice (i,j) de la matrice M. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{K})$. On dit que la suite $(A_k)_k$ converge vers la matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, la suite scalaire $\left([A_k]_{ij}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $[A]_{ij}$
Pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, on note $\|M\|_\infty = \max\limits_{1\leq i,j\leq n}\left|[M]_{ij}\right|$
Alors on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$\left|\left[M_{ij}\right]\right| \leq \|M\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n}\left|[M]_{ij}\right|$$
Alors on a $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$,
$$\left|[M]_{ij}\right| = \|M\|_\infty \leq \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}|[M]_{kl}|$$
A partir de cet encadrement :
Propriété : Soient $(A_k)_k$ une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{K})$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.
On a équivalence entre :
(i) La suite matricielle $(A_k)_k$ converge vers A
(ii) $\|A_k - A\|_\infty \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$

Définition : Soit $(A_k)_k$ une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{K})$. On définit la série de terme général A_k la suite matricielle $(S_k)_k$ où
$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \sum_{j=0}^{n} A_j$$
On la note $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ ou $\sum A_k$.

On dit que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$ converge si la suite $(S_k)_k$ converge vers une matrice $S \in M_n(\mathbb{K})$. La matrice S estalors appelé somme de la série et notée :
$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k$$
Propriété : Soient $(A_k)_k$ une suite d'éléments de $M_n(\mathbb{K})$. Si la série numérique $\sum\|A_k\|_\infty$ converge, alors la série matricielle $\sum A_k$ converge également. On dit que la série est absolument convergente.
Lemme : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$. Par récurrence, on en déduit :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\|A^k\right\|_\infty \leq n^{k-1}\|A\|_\infty^k$$
Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. La série matricielle $\sum \frac{A^k}{k!}$ Converge absolument.

2) **Exponentielle de matrices**
Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On définit l'exponentielle de A, notée e^A ou $\exp A$ par :

$$e^A=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\in M_n(\mathbb{K})$$

Propriété : Soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$ telles que $\underline{AB=BA}$ alors $e^{A+B}=e^Ae^B=e^Be^A$

Démonstration : On utilise le binôme de Newton pour séparer, puis le produit de Cauchy pour rassembler.

Propriété : Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. La matrice e^A est inversible, d'inverse e^{-A}

Démonstration : A et $-A$ commutent, donc $e^Ae^{-A}=1$

Propriété : Soient $A\in M_n(\mathbb{K})$ et $P\in GL_n(\mathbb{K})$. Alors $\exp(P^{-1}AP)=P^{-1}\exp(A)\,P$

Démonstration : On a $\exp(P^{-1}AP)=\lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{P^{-1}A^kP}{k!}=P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right)P$

Car $\left\|P^{-1}\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{k!}P-P^{-1}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{A^k}{k!}\right)P\right\|\leq n^2\|P^{-1}\|_\infty\left\|\sum_{k=0}^{N}\frac{A^k}{n!}-e^A\right\|\|P\|_\infty\xrightarrow[N\to+\infty]{}0$

Définition : Soient $p,q\in\mathbb{N}^*$ et $f:\mathbb{R}\to M_{p,q}(\mathbb{K})$, $A\mapsto\left(f_{i,j}(t)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$

Soit $t_0\in\mathbb{R}$. On dit que f est dérivable en t_0 si $\forall 1\leq i\leq p,\forall 1\leq j\leq q$, la fonction $f_{i,j}$ est dérivable en t_0.

$$\left(\Leftrightarrow\lim_{\substack{t\to t_0\\t\neq t_0}}\frac{1}{t-t_0}\left(f_{i,j}(t)-f_{i,j}(t_0)\right)\text{ existe}\right)$$

On note alors $f'(t_0)=\left(f'_{i,j}(t_0)\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq q}}$

On dit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ si f est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$.

Propriété : Soient $p,q\in\mathbb{N}^*$, et $A,B:\mathbb{R}\to M_{p,q}(\mathbb{K})$. Si A et B sont dérivables, alors $A+B$ l'est aussi sur $\mathbb{R}$, et $\forall t\in\mathbb{R},(A+B)'(t)=A'(t)+B'(t)$

Propriété : Soient $p,q,n\in\mathbb{N}^*$et $A:\mathbb{R}\to M_{p,q}(\mathbb{K})$, $B:\mathbb{R}\to M_{q,r}(\mathbb{K})$. Si A et B sont dérivables sur $\mathbb{R}$, alors $A\times B:\mathbb{R}\to M_{p,r}(\mathbb{K})$ aussi et

$$\forall t\in\mathbb{R},(A\times B)'(t)=A'(t)\times B(t)+A(t)\times B'(t)$$

Théorème : Soit $A\in M_n(\mathbb{K})$. La fonction $\varphi:\mathbb{R}\to M_n(\mathbb{K})$, $t\mapsto\exp(tA)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t\in\mathbb{R},\varphi'(t)=A\times\exp(tA)$$

3) **Exponentielle d'endomorphisme**

Propriété : Soient $A,B\in M_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables, alors e^A et e^B sont aussi semblables.

Définition : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et \$$u\in\mathcal{L}(E)$. Soit B une base de E et $A=Mat_B(u)$. On définit l'exponentielle de u, notée e^u, comme l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans B est e^A

Propriété : Soient $u,v\in\mathcal{L}(E)$ tels que $u\circ v=v\circ u$, alors $\exp(u+v)=\exp(u)\circ\exp(v)$
$=\exp(v)\circ\exp(u)$

III) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

a) **Systèmes différentiels linéaires homogènes**

On s'intéresse à des systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme suivante :

$$(S):\forall t\in\mathbb{R},\begin{cases}x_1'(t)=a_{11}x_1(t)+a_{12}x_2(t)+\cdots+a_{1n}x_n(t)\\ \vdots\\ x_n'(t)=a_{n1}x_1(t)+a_{n2}x_2(t)+\cdots+a_{nn}x_n(t)\end{cases}$$

Avec $\forall(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $a_{ij}\in\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Et d'inconnues $x_1,\dots,x_n:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ dérivables

Soient $x_1,\dots,x_n:\mathbb{R}\to\mathbb{K}$ dérivables. Posons $X:\mathbb{R}\to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Alors la fonction X est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a l'équivalence :

$$x_1, \dots, x_n \text{ sont solutions de } (S)$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t), \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Théorème : Soit $X \in \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t)$

(ii) $\exists X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \times X_0$

(iii) $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \times X(0)$

Corollaire : Soient $A \in M_n(\mathbb{K})$, $Y_0 \in M_n(\mathbb{K})$ et $t_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Démonstration :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot Y_0 \\ X(0) = e^{-t_0 A} \cdot Y_0 \end{cases}$$

b) **Systèmes différentiels linéaires non homogènes**

Dans cette partie, on s'intéresse aux systèmes du type :

$$(S): \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t) + V(t)$$

Où $A \in M_n(\mathbb{K}), V: \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ et d'inconnue $X : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable.

Notons (S_H) le système homogène associé.

$$(S_H) : \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t)$$

Théorème : Soit Y une solution particulière de (S) : $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t) + V(t)$ et $X : \mathbb{R} \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ dérivable. On a l'équivalence :

$$X \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \exists X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \cdot X_0 + Y(t)$$

Où Y est une solution particulière de (S).

Remarque : Si $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ a une expression particulière, par ex $\forall i \in [\![1;n]\!], v_i$ est une fonction polynomiale, ou $\forall i \in [\![1;n]\!], \exists P_i \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tq $v_i : t \mapsto P_i(t)e^{\lambda_i(t)}$

ou $\forall i \in [\![1;n]\!], v_i$ s'écrit à l'aide de cos ou sin

On essaie alors de chercher une solution particulière Y de (S) sous la même forme que V.

Sinon, on commence par résoudre le système homogène associé à (S).

$$(S_H): \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t)$$

Puis on utilise la méthode de la variation de la constante : on cherche une solution de la forme $Y : t \mapsto e^{tA} \cdot Y_0(t)$, où $Y_0 : t \mapsto \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors Y est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall t \in \mathbb{R}, Y'(t) = Ae^{tA} \cdot Y_0(t) + e^{tA} \cdot Y_0'(t)$
Ainsi, Y est solution de $(S) \Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, Ae^{tA}Y_0(t) + e^{tA}Y_0'(t) = Ae^{ta}Y_0(t) + V(t)$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}, Y_0'(t) = e^{-tA} \cdot V(t) := \begin{pmatrix} z_1(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix}$$

Si on rajoute l'hypothèse que V est continue sur $\mathbb{R}$, on doit prendre une primitive de chaque $y_i(t)$ pour obtenir une solution particulière de (S).