Feuille 6 – Intégrales

Exercice 1 : À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx \qquad \int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx \qquad \int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx$$

Exercice 2 :

1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos(2x) = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$$
2) Déterminer l'ensemble de définition et calculer une primitive sur cet ensemble de la fonction
$$f : x \mapsto \frac{\cos(2x)}{\sin x + \cos x}$$

Exercice 3 :

1) Montrer que $\forall a \in \mathbb{R}^*$,
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$$
2) Calculer
$$\int \frac{3}{x^2+4x+29}\,dx$$

Exercice 4 :

1) En utilisant le changement de variables $t = \tan\frac{x}{2}$, montrer que
$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$
2) Calculer l'intégrale suivante :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}\,dx$$
3) En déduire
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx$$

Exercice 5 : ⍟

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx \qquad \int_1^2 x^2 \sqrt[3]{1+x^3}\,dx$$

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx \qquad \int_{-1}^{1} \left(\frac{x^3}{e^{x^2}} + x\cos^2(x)\right)dx$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{(x^2+4)^2}\,dx \qquad \text{(on pourra poser } x = 2\tan(\theta)\text{)}$$