

Chapitre 4 – Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, E, F, G sont des \mathbb{R} -evn de $\dim < +\infty$ non nuls (avec $n = \dim E, p = \dim F$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

1. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Définition : Soit I un ouvert non vide de \mathbb{R} , $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque $t \rightarrow 0$ ($t \neq 0$). Sa limite ℓ est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Définition : Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I . On peut alors introduire l'application $f' : I \rightarrow F$ appelée fonction dérivée de f .

$$t \mapsto f'(t)$$

Théorème : Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ de fonction coordonnées f_1, \dots, f_p dans la base B . On a équivalence entre :

- (i) f est dérivable sur I
- (ii) Les fonctions f_1, \dots, f_p sont dérivables sur I

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{k=1}^p f'_k(t) e_k$$

Proposition :

Soient $f, g : I \rightarrow F$ deux fonctions dérivables sur I . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi dérivable sur I et

$$\forall t \in I, (\lambda f + g)'(t) = \lambda f'(t) + g'(t)$$

2. Différentielle d'une fonction

1) Développement limité à l'ordre 1

Définition :

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \rightarrow F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$$

On notera alors $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \rightarrow 0_E$.

Exemple :

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, prenons $\| \cdot \|_2$ sur \mathbb{R}^2 .
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$
 f admet un DL_1 en $(0,0)$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq
$$f(h_1, h_2) = f(0,0) + ah_1 + bh_2 + o_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}(\|(h_1, h_2)\|)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.

2) Différentiabilité en un point

Définition : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0_E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0_E$$

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l'on veut sur E et F . Ainsi on marquera donc $\| \cdot \|$ pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable en a
- (ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Proposition : Si f est différentiable en a , l'application linéaire u est unique. On la note $df(a)$, appelée différentielle de f en a .

Exemple :

- 1) Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction constante (telle que $\forall x \in E, f(x) = C$)
Soit $a \in E, \forall h \in E, f(a+h) = C = f(a) = f(a) + \underbrace{0_F}_{u(h)} + \underbrace{0_F}_{\|h\| \times 0_F}$
Donc $f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon : h \mapsto 0_F$ et $u : E \rightarrow F, h \mapsto 0_F$
Comme $u \in \mathcal{L}(E, F)$, ceci montre que f admet un DL_1 en a donc f est différentiable en a et $df(a) = u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$
- 2) Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Soit $a \in E, \forall h \in E$,
$$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f(h) +$$

Théorème : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a .

Proposition : Soient I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , $a \in I$ et $f : I \rightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable en a ,
- (ii) f est dérivable en a .

Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} df(a) : \mathbb{R} &\rightarrow F & \text{et } f'(a) &= df(a)(1) \\ h &\mapsto hf'(a) \end{aligned}$$

$$\text{Où } f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a+t) - f(a)).$$

3) Fonctions différentiables

Définition : Une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est dite **différentiable** (sur U) si elle est différentiable en tout point de a de U . L'application

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est alors appelée différentielle de f .

Théorème : Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition : Si $f : E \rightarrow F$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in E$, $df(a) = \tilde{0}$, où $\tilde{0} = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Proposition : Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in E, df(a) = f$$

Exemple :

Proposition : Soient I un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est différentiable} \Leftrightarrow f \text{ est dérivable}$$