Chapitre 5 – Séries entières

Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Définition : On appelle série entière (S.E) définie par la suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n$

Par abus de notation, on note cette série de fonction $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

L'ensemble $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ par lesquels la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ CV est appelé le domaine de convergence de la S.E. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et la fonction $S : \mathcal{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelé somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

Exemple :

1) La SE $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a pour domaine $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} := \mathcal{D}(0; 1)$ = disque ouvert de centre 0 et de rayon 1

Rayon de convergence

Lemme d'Abel : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration : ⍟

- Si $z_0 = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, donc la propriété est vérifiée.
- Si $z_0 \neq 0$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Comme la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,
$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| < M$$
Alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n z_0^n| \times \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \times \left(\underbrace{\frac{|z|}{|z_0|}}_{<1}\right)^n$
Or la série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ CV, donc par comparaison de SATP, $\sum |a_n z^n|$ CV, donc la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA

□

Définition : on appelle rayon de convergence (R$_{CV}$) de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ l'élément :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{La suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Remarque : cet ensemble est non vide car pour $r = 0$ la suite correspondante vaut la suite nulle.

Exemple : $\sum n!\, z^n$

Soit $r \in \mathbb{R}_+$, si $r \neq 0$, $n!\, r^n = \left(\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n}{n!}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $(n!\, r^n)_n$ n'est pas bornée, donc $R = \sup\{0\} = 0$

Propriété : De manière équivalent, on a aussi $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ | a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right\}$

Propriété : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$

(i) Si $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA
(ii) Si $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG

Démonstration : ⍟

(i) Si $R = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On suppose donc $R > 0$
Comme $|z| < R$, z n'est pas un majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
Donc il $\exists r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ vérifiant $|z| < r_0$
On peut alors appliquer le Lemme d'Abel (car $(a_n r_0^n)_n$ est bornée, et donc la série $\sum a_n z^n$ CVA.

(ii) Si $|z| > R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ donc $|z| \notin \{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
C'est-à-dire que $(a_n |z|^n)_n$ est non bornée, or $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n|z|^n|$
Donc $(a_n z^n)_n$ est non bornée.
Alors la série $\sum a_n z^n$ DVG

Remarque : on utilise très souvent la contraposée du théorème précédent.

Remarque : si la série diverge mais pas grossièrement, alors $|z_0| = R$

Remarque : si la série est semi-convergente, alors $|z_0| = R$

Corollaire : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R.

- Si $R = 0$, $\mathcal{D} = \{0\}$
- Si $R = +\infty$, $\mathcal{D} = \mathbb{C}$
- SI $R \in]0\,;+\infty[$, $\mathcal{D}(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}(0,R)}$, où $\begin{cases} \mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \\ \overline{\mathcal{D}(0,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \end{cases}$

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence R. Le disque $\mathcal{D}(0,R)$ est appelé disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$

Détermination pratique du rayon de convergence

Règle de d'Alembert

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration : ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n z^n$, alors $|u_n| = \underbrace{|a_n|}_{\neq 0 \text{ si } n \geq n_0} |z|^n > 0\ \forall n \geq n_0$

Et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \times |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$. De plus, $l|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{l}$

Ainsi par la règle d'Alembert appliquée à la série numérique $\sum |u_n|$:

- Si $|z| < \frac{1}{l}$, $l|z| < 1$, donc la série numérique $\sum |u_n|$ CV, donc $\sum a_n z^n$ CV(A)

Donc $|z| \leq R$, ceci $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z| < \frac{1}{l}$, donc $\frac{1}{l} \leq R$

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$ donc la série numérique $\sum |u_n|$ DVG donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG aussi.
- Donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| > \frac{1}{l}, |z| \geq R$ d'où en faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{l}$: $\frac{1}{l} \geq R$

D'où $\mathrm{R} = \frac{1}{l}$

□

Règle de Cauchy :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration : ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, on étudie la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}|z|\right)^n = |a_n z^n|$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$, donc comme $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$, par définition de la limite,
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \geq 1$$
Et donc $|a_n z^n| \geq 1^n = 1$, donc $|a_n z^n|$ ne tend pas vers 0.
Donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG, donc $R \leq \frac{1}{l}$
- Si $|z| < \frac{1}{l}$, alors $l|z| < 1$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$
Donc par définition de la limite,
$$\exists q \text{ tel que } 0 < q < 1 \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \leq q$$
D'où par croissance de $t \mapsto t^n$, $|a_n z^n| \leq q^n$
Donc par comparaison de SATP, la série numérique $\sum |a_n z^n|$ CV,
D'où $\sum a_n z^n$ CVA, ceci $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{l}$
Donc $\frac{1}{l} \leq R$, donc par double inégalité, $R = \frac{1}{l}$

□

Cas des séries lacunaires

Il se peut que l'on rencontre des séries de la forme $\sum a_n z^{2n}$ ou $\sum a_n z^{3n}$

Ces deux séries peuvent s'interpréter comme les séries entières suivantes :

$$\sum c_p z^p \text{, où } c_p = \begin{cases} a_n & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et resp. } \sum d_q z^q \text{, où } d_q = \begin{cases} a_n & \text{si } q \equiv 0[3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Très souvent, les règles de Cauchy et d'Alembert ne vont pas marcher. Dans ce cas, soit on revient à la définition du rayon de convergence, soit on étudie la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ pour obtenir des inégalités sur R.

Opérations sur les séries entières

Somme de 2 séries entières

Définition : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. On appelle série entière somme des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

Propriété : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Notons R le rayon de convergence de leur série entière somme,

- $R \geq \min(R_a, R_b)$
- $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b)$, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Si de plus $R_a \neq R_b$, alors $R = \min(R_a, R_b)$.

Produit de deux séries entières

Définition : On appelle série entière produit de 2 séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$, où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{p+q=n} a_p b_q$$

Propriété : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ 2 séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. Notons R le rayon de convergence de leur série entière produit $\sum c_n z^n$. Alors $R \geq \min(R_a, R_b)$.

De plus, $\forall z \in \mathbb{C}, |z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Série entière dérivée

Définition : On appelle série entière dérivée de la série entière $\sum a_n z^n$ la série entière :

$$\sum (n+1) a_{n+1} z^n$$

Propriété : une série entière $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1) a_{n+1} z^n$ ont le même rayon de convergence.

Convergence normale

Théorème : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0; r)}$ de centre O et de rayon r, $0 \leq r < R$.

Démonstration : ⍟

Soit r tel que $0 \leq r < R$

Notons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : z \mapsto a_n z^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall z \in \overline{D(0; r)}, |u_n(z)| = |a_n||z|^n \leq |a_n| r^n$$

Ainsi la fonction u_n est bornée sur $\overline{D(0; r)}$ et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le + petit majorant de cet ensemble,

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty,\overline{D(0;r)}} = \sup_{z\in \overline{D(0;r)}} |u_n(z)| \leq |a_n|r^n$$

Mais $r < R$, donc la série numérique $\sum a_n r^n$ CVA. Ainsi par comparaison de SATP, la série $\sum \|u_n\|_\infty$ CV, d'où $\sum u_n$ CVN sur $\overline{D(0;r)}$.

Séries entières d'une variable réelle

Notons R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ (avec $x \in \mathbb{R}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$)

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- Si $x \in]-R, R[$, la série numérique $\sum a_n x^n$ CVA
- Si $x \in]-\infty, -R[\cup]R, +\infty[$, la série numérique $\sum a_n x^n$ DVG
- Si $x = -R$ ou $x = R$, alors on ne peut rien dire.

L'ensemble $I = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{La série numérique } \sum a_n x^n \text{ CV}\}$ vérifie :

$$]-R; R[\subset I \subset [-R; R]$$

Donc I est un intervalle, qu'on appelle intervalle de convergence de $\sum a_n x^n$.

Continuité de la somme d'une série entière

Théorème : Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ CVN donc CVU sur tout segment inclus dans $]-R; R[$.

Théorème : La somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ d'une variable réelle et de rayon de convergence $R > 0$, est continue sur $]-R; R[$

Intégration

Théorème : Soient $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et $[a, b]$ un segment inclus dans $]-R, R[$. Alors :

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b a_n x^n\right)$$

Définition : On appelle série entière primitive de la série entière $\sum a_n x^n$ la série entière $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

Corollaire : Soit $\sum a_n x^n$ une suite entière de rayon de convergence $R > 0$. Sa série entière primitive $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ a aussi pour rayon de convergence R. De plus la somme $T : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ de cette série entière primitive est l'unique primitive sur $]-R; R[$ qui s'annule en 0 de la fonction somme de la série entière $\sum a_n x^n$, ie :

$$\forall x \in]-R; R[, T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt$$

Démo : Soit $x \in]-R; R[$,

La série entière dérivée de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et le 2 ont le même rayon de convergence (thm précédent).

➔ Si $x > 0$, alors le segment $[0; x]$ est inclus dans $]-R; R[$ donc on peut utiliser le théorème précédent pour intégrer terme à terme :

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_0^x a_n t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = T(x)$$

- ➔ Si $x < 0$, idem sur le segment $[x; 0]$
- ➔ Si $x = 0$, $\int_0^x (\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n) dt = 0$ et $T(0) = 0$

□

Dérivation

Théorème : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière à variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$.

Sa somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R; R[$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$S'(x) = \sum_{n=\mathbf{1}}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}$, notons $u_n : x \mapsto a_n x^n$

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est de classe C^1 sur $]-R; R[$ et $u_n'(x) = \begin{cases} n a_n x^{n-1} \text{ si n} \geq 1 \\ 0 \text{ si n} = 0 \end{cases}$
- $\sum u_n$ CVS sur $]-R; R[$
- $\sum\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n'$ CVN sur tout segment inclus, donc sa somme est C^1 sur $]-R; R[$ et l'égalité proposée est vérifiée.

Corollaire : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa fonction somme $S : \begin{array}{l}]-R; R[\to \mathbb{C} \\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{array}$ est de classe C^∞ sur $]-R; R[$ et ses dérivées successives s'obtiennent par dérivations terme à terme successives :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R; R[, S^{(p)}(x) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1) \dots (n-p+1) a_n x^{n-p}$$
$$= \sum_{n=p}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \dots (n+1) a_{n+p} x^n$$

Calcul des coefficients d'une série entière

Théorème : Soit $\sum a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle de rayon de convergence $R > 0$ et de fonction somme S. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Démonstration : On a vu que S est de classe C^∞ sur $]-R; R[$ et $\forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in]-R; R[$,

$$S^{(p)}(0) = p!\, a_p$$

(on prend pour convention $0^0 = 1$)

Corollaire : (Identification de 2 séries entières)

Soient $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ deux séries entières à variable réelle, de rayons de convergence respectifs $R_a > 0$ et $R_b > 0$. On suppose qu'il existe $r > 0$ tel que $\forall x \in]-r; r[, \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = b_n$.

Démonstration : On note S_a et S_b la fonction somme des séries entières concernées

Par hyp, $\exists r > 0, \forall x \in]-r\,;r[, S_a(x) = S_b(x)$, alors $r \leq \min(R_a, R_b)$, donc S_a et S_b sont de classe C^∞ sur $]-r\,;r[$ et en dérivant l'égalité proposée, on a $S_a^{(n)}(0) = S_b^{(n)}(0)$

Donc $a_n = \frac{S_a^{(n)}(0)}{n!} = \frac{S_b^{(n)}(0)}{n!} = b_n$

□

Fonction exponentielle complexe :

Définition : (exponentielle complexe)

On appelle exponentielle complexe, notée $\exp : z \mapsto e^z$, la fonction somme de la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$, de rayon de convergence $+\infty$.

Remarque : tout pareil (c'est Eymeric qui a dit)

$$\forall z \in \mathbb{C}, e^z \neq 0, \frac{1}{e^z} = e^{-z}; \overline{e^z} = e^{\bar{z}}; |e^z| = e^{Re(z)}$$

Définition : On définit les fonctions cos, sin, cosh, sinh complexes de la manière suivante :

$\forall z \in \mathbb{C},$

$$\begin{cases} \cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \cosh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \sinh(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases} \quad \text{Avec des rayons de convergence} = +\infty$$

Fonctions d'une variable réelle développable en série entière

Définitions et exemples

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, f : I \to \mathbb{C}$.

Déf : Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dite développable en série entière (DSE) en 0 si $\exists r > 0$ et une série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ de rayon de conv. $R \geq r$, tel que :

$$]-r;r[\subset I \; et \; \forall x \in]-r;r[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque : Si $\nexists r>0$ tq $]-r;r[\subset I$, alors f n'est pas DSE en 0.

Définition : Soient $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On dit que f est DSE en x_0 si la fonction $g : t \mapsto f(t+x_0)$ est DSE en 0.

Dans ce cas, $\exists r>0$ et une série $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geq r$ tq $\forall t \in]-r;r[$,

$$g(t)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$$

Ainsi, $\forall x \in]x_0-r;\ x_0+r[, f(x)=g(x-x_0)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$

Définition : Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ et $x_0 \in I$. On appelle série de Taylor de f en x_0 la série entière :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Théorème : (Condition nécessaire de DSE)

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. Si la fonction f est DSE en x_0, alors f est C^∞ sur un voisinage de x_0. De plus, son développement en série entière est donné par sa série de Taylor.

Démonstration :

- Cas $x_0=0$:
  Sq f est DSE en 0, $\exists r>0$, une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de conv $R \geq r$ tq $]-r;r[\subset I$ et $\forall x \in]-r;r[, f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S(x)$. S est C^∞ sur $]-R;R[$.
  Or f et S coïncident sur $]-r;r[$, donc f est C^∞ sur cet intervalle et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$
- Cas $x_0 \neq 0$:
  On pose $g : t \mapsto f(t+x_0)$. g est C^∞ en 0, alors par composition, $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x-x_0)$

Opérations sur les fonctions développables en séries entières

Propriété :

1) Soient $f,g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f et g sont DSE en x_0, alors $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda f, f+g, f\times g$ sont DSE en x_0.
   De plus, la somme des DSE de f et g est le DSE de la somme et pareil pour le produit
2) Soit $f : I \to \mathbb{C}$, $x_0 \in I$. Si f est DSE en x_0, alors ses dérivées successives et ses primitives le sont aussi, et s'obtiennent en dérivant/intégrant terme à terme les DSE de f en x_0

Développement en séries entières usuels

(à savoir refaire)

$\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} -\ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \\ \ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \\ \arctan(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \\ \operatorname{arctanh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \\ \forall \alpha \in \mathbb{R}, (1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n \\ \arcsin(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{cases} \quad \text{avec } \mathrm{R} = 1, \text{sauf } (1+x)^\alpha, R = \begin{cases} 1 \text{ si } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \\ +\infty \text{ si } \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

D.S.E de arcsin x : à savoir retrouver

Arcsin est dérivable sur $]-1;1[$, et en posant $u = -x^2$, $\arcsin' x = (1+u)^{-\frac{1}{2}}$

Or $|u| < 1 \Leftrightarrow |-x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

Alors $\forall x \in]-1;1[, \arcsin' x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\dots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} (-x^2)^n$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n\,!} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{n!} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{1}{2^n n!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)\,!}{(2^n n\,!)^2} x^{2n}$$

Ainsi arcsin' est D.S.E. en 0 et le rayon de convergence de la série entière associée vérifie bien $R \geq 1$

Donc sa primitive arcsin l'est également, et son D.S.E. s'obtient en intégrant le DES existant terme à terme.

$$\forall x \in]-1;1[, \arcsin(x) = \underbrace{\arcsin 0}_{=0} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$