

## Feuille 2 – Développements limités, équivalents

Développements limités			
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$		$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$	
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1) \dots \frac{(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n), \alpha \in \mathbb{R}$			
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$		$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$		$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$		$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$	
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$		$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
Équivalents usuels			
$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

Exercice 1 : Soit  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- 1) À l'aide d'un équivalent, trouver  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ . Valider votre réponse avec la règle de L'Hôpital.
- 2) Trouver un équivalent de  $f$  en 0.

Exercice 2 : Soit  $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

Calculer  $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x)$ , et trouver un équivalent en  $+\infty$  de  $g(x) - l$ .

Exercice 3 : Trouver un développement limité à l'ordre 3 en 0 puis un équivalent en 0 des fonctions suivantes :

1) $h(x) = e^{\cos x}$	2) $p(x) = xe^x$	3) $q(x) = \frac{\sinh x - x}{x^3}$
------------------------	------------------	-------------------------------------

Exercice 4 : Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1 - 2x)e^{2x}$ .

- 1) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = 2^n(1 - n - 2x)e^{2x}$
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer un développement limité de  $f$  à l'ordre  $n$  en 0.

Exercice 5 : Soit  $(u_n)_{n \geq 2}$  une suite telle que  $\forall n \geq 2, u_{n+1} - u_n = \frac{-2(1+2n)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$ , et  $u_2 = \frac{2}{3}$

- 1) Montrer que  $u_n = \frac{\alpha}{n^2 - 1}$ , où  $\alpha$  est un réel à déterminer.
- 2) Trouver un équivalent de  $u_n$  en  $+\infty$ .
- 3) Calculer le développement asymptotique de  $u_n$  à l'ordre 7 en  $+\infty$ .

Exercice 6 :

Soient  $a \in \mathbb{R}, f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$ . Déterminer :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

**Attention :** On ne peut pas, en règle générale, composer les équivalents !  
 $\ln(e^x - 1)$  n'est pas équivalent en 0 à  $\ln x$