Feuille 2 – Corrigé

Exercice 1 :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ "

Initialisation :

On a $\sum_{k=0}^{0} k = 0 = \frac{0 \times (0+1)}{2}$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

On a $\sum_{k=0}^{n+1} k = (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k = (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1) + n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

Ainsi $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, donc la proposition est héréditaire

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit $q \neq 1$. $\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: " $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ "

Initialisation :

On a $\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 = \frac{1-q^{0+1}}{1-q}$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $P(n)$ soit vraie.

Hérédité :

$$\begin{aligned} \text{On a } \sum_{k=0}^{n+1} q^k = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} q^k = q^{n+1} + \frac{1-q^{n+1}}{1-q} &= \frac{q^{n+1}(1-q) + 1 - q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{q^{n+1} - q^{n+2} + 1 - q^{n+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{n+2}}{1-q} \end{aligned}$$

Ainsi $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, donc la proposition est héréditaire

Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

__Exercice 2 :__

Soit $a \in \mathbb{N}$. On va raisonner par contraposée. La contraposée de la question est : « si a est divisible par 3, alors a^2 est divisible par 3.

Ainsi, $\exists k \in \mathbb{N}, a = 3k \Rightarrow a^2 = (3k)^2 = 3 \times (3k^2)$

Ainsi a^2 est aussi divisible par 3, donc par contraposée, si a^2 n'est pas divisible par 3, alors a ne l'est pas non plus.

__Exercice 3 :__

1) On va raisonner par l'absurde. Supposons que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que :
   $$\exists (p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^*, \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ avec pgcd}(p, q) = 1.$$
   Alors on a $p = q\sqrt{2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$.
   Ainsi p^2 est pair, donc p l'est aussi. Ainsi $\exists k \in \mathbb{N}, p = 2k$
   Donc en remplaçant, on a $(2k)^2 = 2q^2 \Rightarrow 2k^2 = q^2$
   Ainsi q^2 est lui aussi pair, ce qui implique que q est pair.
   Or cela contredit $\text{pgcd}(p, q) = 1$, donc $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2) Supposons $b = 0$. Alors $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Donc le couple $(0,0)$ est bien solution.
   Supposons maintenant $b \neq 0$. Alors $a + b\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{a}{-b}$
   Quitte à diviser par leur pgcd, on peut considérer que a et b sont premiers entre eux.
   Or d'après la question 1, dans ce cas-là, il n'existe aucun couple qui satisfait l'équation précédente. Donc le seul couple solution est $(0,0)$.
3) On a $m + n\sqrt{2} = p + q\sqrt{2} \Leftrightarrow (m - p) + (n - q)\sqrt{2} = 0$
   $\Leftrightarrow (m - p, n - q) = (0,0)$
   $\Leftrightarrow m = p$ et $n = q$

__Exercice 4 :__

On va procéder par récurrence :
Soit $x \in]-1\,; +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}^*$, posons $P(n)$: "$(1 + x)^n \geq 1 + nx$"
<u>Initialisation :</u>
On a $(1 + x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \times x$
Donc $P(1)$ est vraie.
<u>Hypothèse :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
<u>Hérédité :</u>
On a $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n(1 + x) = \underbrace{(1 + nx)}_{HR}(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2$
Or $nx^2 \geq 0$, donc $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$
Donc $P(n) \Longrightarrow P(n + 1)$, la propriété est héréditaire.
Ainsi par principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, P(n)$ est vraie.

<u>Exercice 5 :</u>
On va procéder par récurrence double :
$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: "$u_n = 1 + 2^n$"
<u>Initialisation :</u>
On a $u_o = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^n$
Donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
<u>Hypothèse :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ et $P(n+1)$ soient vraies.
<u>Hérédité :</u>
On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) = 3 - 2 + 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 2^n$
$= 1 + 3 \times 2^{n+1} - 2^{n+1}$
$= 1 + 2 \times 2^{n+1}$
$= 1 + 2^{n+2}$
Donc $(P(n)$ et $P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2)$
Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 6 :</u>
On a $v_0 = 0, v_1 = \frac{1}{2}, v_2 = \frac{2}{3}, v_3 = \frac{3}{4}, v_4 = \frac{4}{5}$
On pose donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "$v_n = \frac{n}{n+1}$", qu'on va démontrer par récurrence sur n.
<u>Initialisation :</u> $v_0 = 0 = \frac{0}{1}$, donc $P(1)$ est vraie.
<u>Hypothèse :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.
<u>Hérédité :</u>
On a $v_{\mathrm{n}+1} = \frac{1}{2-v_n} = \frac{1}{2-\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{\frac{2(\mathrm{n}+1)-\mathrm{n}}{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2-n} = \frac{n+1}{n+2}$
Ainsi $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$
Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 7 :</u> On va raisonner par l'absurde, supposons $x \neq y$:
$\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Leftrightarrow x(1+x) = y(1+y) \Leftrightarrow x^2 + x = y^2 + y \Leftrightarrow \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2 = \mathrm{y} - \mathrm{x}$
$\Leftrightarrow (x-y)(x+y) = -(x-y)$
$\Leftrightarrow x + y = -1$
Or x et y sont tous deux positifs, donc leur somme ne peut pas faire -1.
Ainsi, $\frac{x}{1+y} = \frac{y}{1+x} \Longrightarrow x = y$.

<u>Exercice 8 :</u>
On va raisonner par l'absurde : supposons que n premier, et supposons qu'il n'admet aucun diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.
Alors comme n est premier, alors il existe $d, d' \in \mathbb{N}, 1 < d \leq d' < n$, tels que $n = dd'$
Or par hypothèse, tout diviseur de n est strictement supérieur à $\sqrt{n}$, donc on a :
$$n = dd' < \sqrt{n}\sqrt{n} = \sqrt{n}^2 = n$$
Ce qui est bien évidemment absurde.
Ainsi n admet au moins un diviseur inférieur ou égal à $\sqrt{n}$.

Exercice 9 :
On va raisonner par récurrence sur n.
Posons $P(n)$: "$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$" pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
Initialisation :
On a $S_1 = \frac{1}{1\times 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$
Donc $P(1)$ est vraie.
Hypothèse : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(n)$ soit vraie.
Hérédité :

$$
\begin{aligned}
\text{On a } S_{n+1} &= \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= S_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= \underbrace{1 - \frac{1}{n+1}}_{HR} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 + \frac{(-(n+2)+1)}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\
&= 1 - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Ainsi $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, donc la propriété est héréditaire.
Donc par principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 :
On pose $j = 2n - k$
On obtient alors :

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{j=n-1}^{1} \ln\left(\sin\left(\frac{(2n-j)\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right)\right)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(\pi - x) = \sin(x)$, donc :

$$\sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\pi - \frac{j\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{j=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{j\pi}{2n}\right)\right) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)\right)$$