Feuille 8 – Applications linéaires (Suite)

Exercice 1 :

Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et on définit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par :

$$u(e_1) = -2e_1 + 2e_3, \quad u(e_2) = 3e_2, \quad u(e_3) = -4e_1 + 4e_3$$

1) Trouver une expression de $u(x, y, z)$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base et la dimension de $\ker(u)$. Est-ce un endomorphisme injectif ? surjectif ? bijectif ?
3) Déterminer le rang de u, puis déterminer une base de l'image de u.
4) Montrer que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 2 :

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sev de E, notons G un supplémentaire de F dans E. Ainsi pour tout $x \in E$, il existe $x_F \in F$, $x_G \in G$, tels que $x = x_F + x_G$.

On dit qu'un endomorphisme p est un « projecteur sur F par rapport à G » si pour tout $x \in E$, on a

$$p(x) = x_F.$$

1) Soit p un projecteur de E. Montrer que $p^2 = p$. *(On admettra la réciproque dans la suite de l'exercice)*.
2) Soient p et q deux projecteurs de E différents et non nuls.
   a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ tel que $p = \lambda q$. Montrer que $\lambda^2 = \lambda$.
   b) Montrer que la famille (p, q) est nécessairement libre.
3) Soient p et q deux projecteurs de E.
   a) Supposons que $p + q$ soit un projecteur. Montrer que $p \circ q + q \circ p = 0$, puis que
   $$p \circ q = -p \circ (q \circ p) = q \circ p$$
   b) Montrer que $p + q$ est un projecteur de E si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

Exercice supplémentaire :

Soient :

$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos(x)\, dx\,, \quad J = \int_0^{\pi} e^x \sin(x)\, dx.$$

1) Montrer que
$$I = J - e^{\pi} - 1 \quad \text{et} \quad J = -I.$$
2) En déduire la valeur de I et J.