Endomorphismes orthogonaux

Dans tout le chapitre, E désignera un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Définitions et premières propriétés

1) Caractérisations équivalentes

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u^* \circ u = Id_E$
(ii) $u \circ u^* = Id_E$
(iii) u est bijectif et $u^{-1} = u^*$

Définition : On appelle endomorphisme orthogonal de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u = Id_E$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et B une base orthonormée de E. On a équivalence entre :

(i) u est un endomorphisme orthogonal de E.
(ii) $\text{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_B(u^*)\,\text{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^t\text{Mat}_B(u)\,\text{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow \text{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(Le 3e point vient du fait que B est orthonormée, donc $\text{Mat}_B(u^*) = {}^t\text{Mat}_B(u)$)

Exemple : Soit F un sev de E tel que $F \neq E$, notons p_F la projection orthogonale sur F.

Comme $F \neq E$, et que $E = F \oplus F^\perp$, on a $F^\perp \neq \{0_E\}$

Donc $\exists x \in F^\perp, x \neq 0_E$. Alors $p_F(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(p_F)$

Ainsi p_F n'est pas injectif, donc pas bijectif, donc $p_F \notin O(E)$.

Notons s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Dans une b.o.n B de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, alors $S = \text{Mat}_B(s_f)$

Alors ${}^tSS = SS = S^2 = I_n$

Donc $S \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $s_F \in O(E)$.

Propriété : L'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E muni de la composition est un groupe. Plus précisément, $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$ où $GL(E)$ désigne l'ensemble des endomorphisme bijectifs de E :

(i) $Id_E \in O(E)$
(ii) $\forall u, v \in O(E), u \circ v \in O(E)$
(iii) $\forall u \in O(E), u^{-1} \in O(E)$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u \in O(E)$
(ii) u conserve la norme, ie $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
(iii) u conserve le produit scalaire, ie $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
(iv) $\forall B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de B est une base orthonormée de E (càd que u envoie toute b.o.n de E sur une b.o.n de E) .
(v) $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de E telle que l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de B par u est une base orthonormée de E (càd u envoie au moins une b.o.n de E sur une b.o.n de E).

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque $u \in O(E)$ ssi u conserve la norme, les endomorphismes orthogonaux de E sont aussi appelés isométries vectorielles de E.

2) Isométries directes et indirectes

Propriété : Soit $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$

Démonstration :

Soit $u \in O(E)$, alors $u^* \circ u = Id_E$

Donc $\det u^* \times \det u = 1$

Soit B une b.o.n alors $\det u^* = \det \mathrm{Mat}_B(u^*) = \det({}^t\mathrm{Mat}_B(u)) = \det(\mathrm{Mat}_B(u)) = \det u$

Ainsi $(\det(u))^2 = 1$, donc $\det u = \pm 1$

Corollaire : Si $A \in O_n(\mathbb{R}), \det(a) \in \{-1, +1\}$

Attention : Si $\det u \in \{-1,1\}$, on n'a pas forcément u orthogonal !

Définition : On appelle isométrie directe (ou positive) de E tout $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = 1$.

On appelle isométrie indirecte de E tout $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = -1$.

Proposition : L'ensemble des isométries directes de E, noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $(O(E),\circ)$, on l'appelle groupe spécial orthogonal de E. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$, noté $SO_n(\mathbb{R})$, est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}),\times)$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre n.

Exemples :

- $Id_E \in SO(E)$
- $-Id_E \in SO(E) \Leftrightarrow \dim(E)$ est paire

Soit F un sev de E, notons s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. On a vu que $s_F \in O(E)$, et si on prend une b.o.n B de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ (ie B est la concaténation d'une b.o.n de F avec une b.o.n de $F^\perp$) alors

$$\mathrm{Mat}_B(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Où le nombre de 1 correspond à $\dim F$ et celui de -1 à $\dim F^{\perp}$

On a alors $\det(s_F) = (-1)^{\dim(F^{\perp})}$

Ainsi $s_F \in SO(E) \Leftrightarrow \dim(F^{\perp})$ est paire

3) Lien avec les réflexions

Définition : Soit H un sev de E. On dit que H est un **hyperplan** de E si $\dim H = \dim E - 1$

Propriété : Soit H un sev de E. On a équivalence entre :

(i) H est un hyperplan de E
(ii) $\exists a \in E$ avec $\|a\| = 1$ tel que $H = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$

Définition : on appelle **réflexion** de E toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de E.

Remarque : Si s est une réflexion de E, il existe un hyperplan H de E tq s est la symétrie orthogonale par rapport à H.

Théorème : Tout endomorphisme orthogonal de E peut s'écrire comme la composée de m réflexions de E, avec $m \in [\![0, \dim(E)]\!]$.

Réductions des endomorphismes orthogonaux

1) Quelques résultats utiles pour la réduction

Proposition : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \in \{1, -1\}$

Démonstration : ⍟

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors comme E est euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Alors d'une part : $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

Et d'autre part, $u \in O(E)$ donc u conserve la norme, ainsi $\|u(x)\| = \|x\|$

D'où $\|x\| = |\lambda|\|x\|$, ie $|\lambda| = 1$

Donc $\lambda = \pm 1$

Attention : contrairement aux endomorphismes autoadjoints, qui possèdent toujours au moins une valeur propre (réelle), il existe des endomorphismes orthogonaux qui n'admettent aucune valeur propre.

Corollaire : Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1,1\}$.

Lemme : Soit $u \in O(E)$. Soit F un sev de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est aussi stable par u. De plus, l'endomorphisme u_F (resp. $u_{F^{\perp}}$) est un endomorphisme orthogonal de F (resp. $F^{\perp}$) .

Démonstration : ⍟

Comme $u(F) \subset F$ et $u \in O(E)$, u est bijectif donc u conserve les dimensions ainsi

$$\dim\big(u(F)\big) = \dim F$$

(cela se prouve facilement en prenant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F, et en montrant que $\big(u(e_1), \dots, u(e_r)\big)$ est libre).

On en déduit donc que $u(F) = F$.

→ Soit $x \in F^{\perp}$, on veut montrer que $u(x) \in F^{\perp}$. Soit $y \in F$, alors

$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle$ car $y \in F = u(F)$, donc $\exists z \in F, u(z) = y$

$= \langle x, z\rangle$ car $u \in O(E)$ donc u conserve le produit scalaire.

$= 0$ car $x \in F^{\perp}$ et $z \in F$.

Ainsi $u(x) \in F^{\perp}$. D'où $u(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$.

→ Montrons que $u_F : F \to F, x \mapsto u(x)$ appartient à $O(F)$

Soit $x \in F$, alors $\|u_F(x)\| = \|u(x)\| \underbrace{=}_{u \in O(E)} \|x\|$

Donc $u \in O(F)$.

(On fait pareil pour l'autre)

Lemme : Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une droite vectorielle ou un plan vectoriel stable par u, ie

$$\exists F \text{ sev de } E \text{ avec } \dim F \in \{1,2\} \text{ tel que } u(F) \subset F$$

2) Endomorphismes orthogonaux en dimension 1 et 2

a) En dimension 1

On suppose que $\dim E = 1$. Soit $u \in O(E)$, soit $B = (e_1)$ une b.o.n de E.

Alors $M = \mathrm{Mat}_B(u) = (a) \in O_1(\mathbb{R})$

Donc ${}^tMM = I_1 \Leftrightarrow (a)(a) = (1) \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Donc $u = Id_E$ ou $u = -Id_E$

Réciproquement on a vu que $\pm Id_E \in O(E)$

Ainsi si $\dim E = 1$, $O(E) = \{\pm Id_E\}$.

b) En dimension 2

Supposons que $\dim E = 2$. Soit $u \in O(E)$, soit $B = (e_1, e_2)$ une b.o.n de E.

Alors $M = \mathrm{Mat}_B(u) \in O_2(\mathbb{R})$

→ On va essayer de caractériser $O_2(\mathbb{R})$. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$. Alors $\det M \in \{\pm 1\}$

→ Si $\det M = 1$ (ie $M \in SO_2(\mathbb{R})$

Comme ${}^tMM = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Soit $z = a + ic \in \mathbb{C}, |z| = \sqrt{a^2 + c^2} = 1$

Donc $\exists \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

Donc $\begin{matrix} a = \cos\theta \\ c = \sin\theta \end{matrix}$

Comme $\det M = ad - bc = 1$, on a

$$\begin{aligned} (a-d)^2 + (b+c)^2 &= a^2 - 2ad + d^2 + b^2 + 2bc + c^2 \\ &= (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) - 2(ad - bc) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où $a - d = 0$ et $b + c = 0$

Ainsi $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} := R_\theta$

Réciproquement, ${}^tR_\theta R_\theta = I_2$, et $\det R_\theta = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Donc $R_\theta \in SO_2(\mathbb{R})$

<u>Propriété :</u> On a $SO_2(\mathbb{R}) = \{ R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$

De plus, $SO_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif de $(O_2(\mathbb{R}),\times)$:

$$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}, R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'} = R_{\theta'} \times R_\theta$$

→ Reprenons les notations ci-dessus. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$ avec $\det M = ad - bc = -1$

Comme ${}^tMM = I_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$

Comme $\det M = ad - bc = -1$, on a

$$\begin{aligned} (a+d)^2 + (b-c)^2 &= a^2 + 2ad + d^2 + b^2 - 2bc + c^2 \\ &= (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) + 2(ad - bc) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a + d = 0$ et $b - c = 0$

Ainsi $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} := S_\theta$

Réciproquement, ${}^tS_\theta S_\theta = I_2$, et $\det S_\theta = -(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = -1$

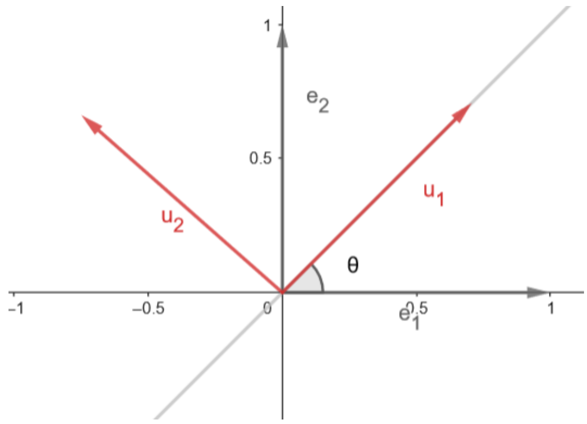
Donc $R_\theta \in O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R})$

<u>Propriété :</u> On a $O_2(\mathbb{R}) \backslash SO_2(\mathbb{R}) = \{ S_\theta \mid \theta \in \mathbb{R} \}$, où $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Revenons aux endomorphismes orthogonaux

Soit $u \in O(E)$, $B = (e_1, e_2)$ une b.o.n de E, alors $M = \mathrm{Mat}_B(u) \in O_2(\mathbb{R})$

- Cas où $\det u = 1$ (ie u est une isométrie directe du plan E)
  Alors $M = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
  Alors $u(e_1) = \cos\theta\, e_1 + \sin\theta\, e_2$ et $u(e_2) = -\sin\theta\, e_1 + \cos\theta\, e_2$



Intéressons-nous à la diagonalisabilité de u :

Le polynôme caractéristique de u est :

$$\chi_u = \chi_M = \begin{vmatrix} X - \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & X - \cos\theta \end{vmatrix}$$

Donc

$$\chi_u = (X - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta = (X - \cos\theta - i\sin\theta)(X - \cos\theta + i\sin\theta) = \left(X - e^{i\theta}\right)\left(X - e^{-i\theta}\right)$$

Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, alors $M = I_2$, donc $u = Id_E$

Si $\theta \equiv \pi[2\pi], M = -I_2$ donc $u = -Id_E$

Sinon, $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ donc $Sp(u) = \emptyset$ donc u n'est pas dz.

- Cas où $\det u = -1$
  Soit $B = (e_1, e_2)$ une b.o.n de E
  Alors $\exists \theta \in \mathbb{R}, \mathrm{Mat}_B(u) = S_\theta$
  On a ${}^tS_\theta = S_\theta$

  Donc u est autoadjoint et orthogonal, donc $u \circ u = Id_E$
  Donc u est la symétrie sur $E_1 = \ker(u - Id_E)$ parallèlement à $E_{-1} = \ker(u + Id_E)$
  Comme de plus, u est autoadjoint, ses sev propres, sont orthogonaux et

$$E = E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}$$

  Ainsi u est la symétrie orthogonale par rapport à E_1.
  Dans une b.o.n B' adaptée à la décomposition $E = E_1 \oplus E_{-1}$, on a $\mathrm{Mat}_{B'}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  Ainsi u est la réflexion par rapport à la droite vectorielle E_1.

3) Réduction des automorphismes orthogonaux

Théorème : Soit $u \in O(E)$. Il existe une b.o.n B de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs avec des blocs diagonaux de la forme $(1), (-1)$ ou $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque : Quitte à réorganiser les éléments de la b.o.n B, on peut trouver une b.o.n B' de E telle que $\exists r, s, k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} I_r & & & & \\ & -I_s & & (0) & \\ & & R_{\theta_1} & & \\ & (0) & & \ddots & \\ & & & & R_{\theta_k} \end{pmatrix}$