

Chapitre 4 – Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, E, F, G sont des \mathbb{R} -evn de $\dim < +\infty$ non nuls (avec $n = \dim E, p = \dim F$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

1. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Définition : Soit I un ouvert non vide de \mathbb{R} , $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque $t \rightarrow 0$ ($t \neq 0$). Sa limite ℓ est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Définition : Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I . On peut alors introduire l'application $f' : I \rightarrow F$ appelée fonction dérivée de f .

$$t \mapsto f'(t)$$

Théorème : Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$ de fonction coordonnées f_1, \dots, f_p dans la base B . On a équivalence entre :

- (i) f est dérivable sur I
- (ii) Les fonctions f_1, \dots, f_p sont dérivables sur I

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{k=1}^p f'_k(t) e_k$$

Proposition :

Soient $f, g : I \rightarrow F$ deux fonctions dérivables sur I . Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi dérivable sur I et

$$\forall t \in I, (\lambda f + g)'(t) = \lambda f'(t) + g'(t)$$

2. Différentielle d'une fonction

1) Développement limité à l'ordre 1

Définition :

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \rightarrow F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0_E} 0_F$$

On notera alors $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \rightarrow 0_E$.

Exemple :

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, prenons $\| \cdot \|_2$ sur \mathbb{R}^2 .
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$
 f admet un DL_1 en $(0,0)$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq
$$f(h_1, h_2) = f(0,0) + ah_1 + bh_2 + o_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)}(\|(h_1, h_2)\|)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in E$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a , il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.

2) Différentiabilité en un point

Définition : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \rightarrow F$ telle que :

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0_E \\ h \neq 0_E}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0_E$$

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l'on veut sur E et F . Ainsi on marquera donc $\| \cdot \|$ pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable en a
- (ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a .

Proposition : Si f est différentiable en a , l'application linéaire u est unique. On la note $df(a)$, appelée différentielle de f en a .

Exemple :

- 1) Soit $f : E \rightarrow F$ une fonction constante (telle que $\forall x \in E, f(x) = C$)
Soit $a \in E, \forall h \in E, f(a+h) = C = f(a) = f(a) + \underbrace{0_F}_{u(h)} + \underbrace{0_F}_{\|h\| \times 0_F}$
Donc $f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon : h \mapsto 0_F$ et $u : E \rightarrow F, h \mapsto 0_F$
Comme $u \in \mathcal{L}(E, F)$, ceci montre que f admet un DL_1 en a donc f est différentiable en a et $df(a) = u = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$
- 2) Soit $f : E \rightarrow F$ linéaire. Soit $a \in E, \forall h \in E$,
$$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f(h) +$$

Théorème : Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a .

Proposition : Soient I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} , $a \in I$ et $f : I \rightarrow F$. On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable en a ,
- (ii) f est dérivable en a .

Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} df(a) : \mathbb{R} &\rightarrow F & \text{et } f'(a) &= df(a)(1) \\ h &\mapsto hf'(a) \end{aligned}$$

$$\text{Où } f'(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(a+t) - f(a)).$$

3) Fonctions différentiables

Définition : Une fonction $f : U \subset E \rightarrow F$ est dite **différentiable** (sur U) si elle est différentiable en tout point de a de U . L'application

$$\begin{aligned} df : U &\rightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto df(a) \end{aligned}$$

est alors appelée différentielle de f .

Théorème : Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition : Si $f : E \rightarrow F$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in E$, $df(a) = \tilde{0}$, où $\tilde{0} = 0_{\mathcal{L}(E, F)}$.

Proposition : Si $f : E \rightarrow F$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in E, df(a) = f$$

Exemple :

Proposition : Soient I un intervalle ouvert (non vide) de \mathbb{R} et $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow F$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est différentiable} \Leftrightarrow f \text{ est dérivable}$$

Proposition :

Si $\varphi : E \times F \rightarrow G$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a :

$$\begin{aligned} \forall (x, y) \in E \times F, d\varphi(x, y) : E \times F &\rightarrow G \\ (h, k) &\mapsto \varphi(x, k) + \varphi(h, y) \end{aligned}$$

4) Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition : Soient $f, g : U \subset E \rightarrow F$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f + \mu g$ l'est aussi et

$$d(\lambda f + \mu g) = \lambda df + \mu dg$$

Proposition : Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $f : U \subset E \rightarrow F$ de fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p dans la base B . On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable
- (ii) Les fonctions coordonnées f_1, \dots, f_p de f sont différentiables.

Dans ce cas, on a :

$$\forall a \in U, \forall h \in E, df(a)(h) = \sum_{i=1}^p df_i(a)(h)e_i$$

Proposition : Soient F_1, \dots, F_p des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note $F = \prod_{i=1}^p F_i$. Soit $f : U \subset E \rightarrow F$. On peut écrire $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : U \subset E \rightarrow F_i$ les fonctions composantes de f . On a équivalence entre :

- (i) f est différentiable
- (ii) Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, f_i est différentiable

Dans ce cas, pour tout $a \in U$, $df(a) = (df_1(a), \dots, df_p(a))$

Théorème : (Différentiation de fonctions composées)

Soient $f : U \subset E \rightarrow F, V$ un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \subset F \rightarrow G$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, la fonction composée $g \circ f : U \subset E \rightarrow G$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, d(g \circ f)(a)(h) = dg(f(a))(df(a)(h))$$

Par suite, si f et g sont différentiables (resp. sur U et sur V), $g \circ f$ est aussi différentiable et

$$\forall a \in U, d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \rightarrow F, \lambda : U \subset E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $a \in U$. Si f et λ sont différentiables en a , il en est de même de la fonction λf et on a

$$\forall h \in E, d(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)df(a)(h) + d\lambda(a)(h)f(a)$$

ie $\forall h \in E, d(\lambda f)(a) = d\lambda(a)f(a) + \lambda(a)df(a)$

Exemple : on considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On a vu que f admet des dérivées directionnelles en $(0, 0)$ selon v et :

$$D_v f(0, 0) = \begin{cases} \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2} & \text{si } v = (v_1, v_2) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } v = (0, 0) \end{cases}$$

Supposons f différentiable en 0. Alors $\forall h, k \in \mathbb{R}^2$,

$$df(0,0)(h,k) = D_{h,k}f(a) = \begin{cases} \frac{h^3}{h^2 + k^2} & \text{si } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

mais alors comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$

mais d'une part, $df(0,0)(1,1) = \frac{1}{2}$

et d'autre part, par linéarité de $df(0,0)$,

$$\begin{aligned} df(0,0)(1,1) &= df(0,0)(1,0) + df(0,0)(0,1) \\ &= \frac{1^3}{1^2 + 0^2} + \frac{0^3}{0^2 + 1^2} = 1 \end{aligned}$$

C'est absurde, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

3. Dérivées partielles

1) Dérivation selon un vecteur

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. Puisque U est un ouvert de E , il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$.

Pour $v \in E$ fixé, la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(a + tv)$$

est définie au voisinage de 0. Elle étudie les valeurs prises par f sur la droite affine $a + \text{Vect}(v)$ (lorsque $v \neq 0_E$)

Définition :

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$, $a \in U$, $v \in E$. On dit que f est dérivable selon le vecteur v en a si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a + tv)$ est dérivable en a .

On appelle alors « dérivée selon le vecteur v de f en a » la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t \neq 0}} \frac{1}{t} (f(a + tv) - f(a))$$

Théorème : Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a , alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et on a

$$D_v f(a) = df(a)(v)$$

2) Dérivées partielles

Choisissons arbitrairement une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Soit $f : U \subset E \rightarrow F$

Définition :

Soient $f : U \subset E \rightarrow F$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On dit que f admet une i -ième dérivée partielle (dans la base B) en $a \in U$ si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_i en a . On note alors :

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{\substack{t \neq 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{1}{t} (f(a + te_i) - f(a))$$

Définition :

Sous réserve d'existence, l'application $\partial_i f : U \subset E \rightarrow F$ est appelée i -ième dérivée partielle de f dans la base B

Théorème 6 : Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable alors les dérivées partielles de f dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ existent et pour tout $a \in U$, on a :

$$\partial_i f(a) = df(a)(e_i)$$

De plus, pour tout $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i \in E$ (avec $(h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$),

$$df(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{k=1}^n h_k \partial_k f(a)$$

Démonstration :

Soit $u \in U$. Comme f est différentiable en a , par le théorème précédent, f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, on a donc en particulier selon le vecteur e_i pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Ainsi $\partial_i f(u)$ existe et par définition, $\partial_i f(u) = D_{e_i} f(u) = df(u)(e_i)$ par le théorème précédent.

De plus, soit $h \in E, \exists! (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $h = \sum_{i=1}^n h_i e_i$.

Par le théorème précédent, on a $df_a(h) = D_h f(u)$ et $df(u)(h) = df(u)(\sum_{i=1}^n h_i e_i)$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^n h_i df(u)(e_i) \\ &= \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(u) \end{aligned}$$

Corollaire : Si $f : U \subset E \rightarrow F$ est différentiable en $a \in U$, le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n h_i \partial_i f(a) + o_{h \rightarrow 0}(\|h\|)$$

3) Dérivées partielles d'une fonction de n variables réelles

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F$ donnée par

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

On étudie les dérivées partielles de f dans la base canonique $B_c = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n .

Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on peut définir la i -ième application partielle de f au point a par :

$$f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Comme U est un ouvert de \mathbb{R}^n , la fonction $f_{a,i}$ est au moins définie sur intervalle de la forme $]a_i - \alpha, a_i + \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F, a \in U, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i) f admet une i -ième dérivée partielle en a (dans la base canonique)
- (ii) La i -ième application partielle de f au point a , notée $f_{a,i}$ est dérivable en a_i

Dans ce cas, on a :

$$\partial_i f(a) = f'_{a,i}(a_i) = \frac{d}{dt} (f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n))|_{t=a_i}$$

Remarque : Si l'on convient de noter x_1, \dots, x_n les éléments du n -uplet x , il est usuel de noter :

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

4) Dérivées partielles d'une fonction d'une variable

Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Pour $x \in U$, convenons de noter $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ les coordonnées de x dans la base B . On a alors $f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$

$$\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow F, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

Proposition : Avec les notations précédentes, pour $a \in U$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a équivalence entre :

- (i) f admet une i -ième dérivée partielle dans la base B en a
- (ii) \tilde{f} admet une i -ième dérivée partielle en (a_1, \dots, a_n) (dans la B_c de \mathbb{R}^n)

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = \partial_i \tilde{f}(a_1, \dots, a_n) = \frac{d}{dt} (\tilde{f}(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)) \Big|_{t=a_i}$$

(où $a = \sum_{k=1}^n a_k e_k$)

Proposition : Soit $f : U \subset E \rightarrow F, a \in U, i \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On a équivalence entre :

- (i) f admet une i -ième dérivée partielle en a dans la base B de E ,
- (ii) Les fonctions coordonnées de f dans une base de F admettent une i -ième dérivée partielle en a dans la base B

Dans ce cas, on a

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (\partial_i f)_k = \partial_i (f_k)$$

Où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$ dans une base donnée de F .

5) Matrice Jacobienne

Définition : Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E , et $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ une base de F . Soit $f : U \subset E \rightarrow F$ différentiable en $a \in U$. On appelle **matrice Jacobienne** de f en a la matrice de l'application linéaire $df(a)$ relatives aux bases B et B' :

$$\text{Jac}_f(a) = \text{Mat}_{B,B'}(df(a)) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Théorème : Avec les mêmes notions, notons f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans la base B' , alors

$$\text{Jac}_f(a) = \left(\partial_j f_i(a) \right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : Si l'on convient de noter (x_1, \dots, x_n) les coordonnées de x dans B , on peut écrire :

$$\text{Jac}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket, j \in \llbracket 1, n \rrbracket} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice Jacobienne caractérise entièrement la différentielle de f en a .

6) Dérivées partielles d'une fonction composée

Proposition : (Version matricielle du théorème de différentiation d'une composée)

Soient $f : U \subset E \rightarrow F, g : V \subset F \rightarrow G$, où V est un ouvert de F vérifiant $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\text{Jac}_{g \circ f}(a) = \text{Jac}_g(f(a)) \times \text{Jac}_f(a)$$

Proposition : (Formule de dérivation en chaîne)

Soient $f : U \subset E \rightarrow F, g : V \subset F \rightarrow G$ où V est un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E existent et sont données par

$$\partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^p \partial_i f_k(a) \partial_k g(f(a)) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

Où l'on a noté f_1, \dots, f_p les fonctions coordonnées de f dans une base $B' = (e'_1, \dots, e'_p)$ de F .

Remarque : Si l'on convient de noter x_1, \dots, x_n les coordonnées d'un vecteur générique $x \in E$ dans la base B et y_1, \dots, y_p celles d'un vecteur générique $y \in F$ dans la base B' , la formule précédente se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a)) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$$

