Feuille 2 – Corrigé

Exercice 1 :

1) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.
D'autre part, quand x tend vers 0, on a une forme $\frac{0}{0}$. On peut donc appliquer la règle de L'Hôpital (car le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions de classe C^1) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$
2) (Pour les astucieux) On revient à la définition, et donc d'après la question précédente, 1 est un équivalent de f en 0 !
(Pour ceux qui aiment s'exercer)
On a $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc $f(x) = \frac{\left(1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)-1\right)}{x} = \frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

Exercice 2 :

1) On a $\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ car quand $x \to +\infty, \frac{1}{x} \to 0$
Ainsi $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$
On a donc $g(x) = \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$
$$= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
On voit donc que $l = 1$
2) On reprend l'expression précédente, on note
$$g(x) - l = \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
On en déduit donc que $g(x) - l \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$

Exercice 3 :

1) On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $e^{\cos x} = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$
$$= e \times \exp\left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$
$$= e \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$
$$= e + \frac{ex^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

2) On a $xe^x = x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$

3) Ici le piège est de faire un développement limité à l'ordre 3 du sinus hyperbolique : en effet, le x^3 au dénominateur nous fait « perdre » trois ordres du développement limité.
Ainsi on doit faire un dl du dénominateur <u>à l'ordre 6</u> :

$$\sinh x - x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \underset{x \to 0}{o}(x^6) - x$$

Donc $\frac{\sinh x - x}{x^3} = \frac{1}{6} + \frac{x^2}{120} + \underset{x \to 0}{o}(x^3)$.

<u>Exercice 4 :</u>

1) On procède par récurrence :

<u>Initialisation :</u> $n = 0$

Par convention, $f^{(0)} = f$, et $(1-2x)e^{2x} = 2^0(1-n-2x)e^{2x}$.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

Alors $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)' = 2^n(-2e^{2x} + 2(1-n-2x)e^{2x}) = 2^{n+1}(1+1-n-2x)e^{2x}$

$$= 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}$$

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 2^n(1-n)$
Donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^n(1-n)}{n!} x^n\right) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$

<u>Exercice 5</u>

1) Trouvons directement α à partir de u_2 :

$$u_2 = \frac{\alpha}{2^2 - 1} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \alpha = 2$$

Ainsi, on suppose que $u_n = \frac{2}{n^2-1}$. Vérifions cette hypothèse :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{(n+1)^2 - 1} - \frac{2}{n^2 - 1} \\ &= 2\left(\frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n-1)(n+1)}\right) \\ &= 2\left(\frac{n^2 - 1 - (n^2 + 2n)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\right) \\ &= \frac{-2(1+2n)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

2) On a $n^2 - 1 \underset{n \to +\infty}{\sim} n^2$, donc $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{\alpha}{n^2}$

3) On a $u_n = \frac{\alpha}{n^2}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{\alpha}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) = \frac{\alpha}{n^2} - \frac{\alpha}{n^4} + \frac{\alpha}{n^6} + \underset{n \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{n^7}\right)$