Feuille 3 – Corrigé

Exercice 1 :

Pour E_1 :

- $0_E \in E_1$ car $(0_E)' = 0_E$, et $\forall x \in \mathbb{R}, 0_E(x) + a(x)0_E(x) = 0$
- Soient $\lambda \in \mathbb{R}, f, g \in E_1$
  On a bien $(\lambda f + g)' = \lambda f' + g'$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$
  $$(\lambda f + g)'(x) + a(x)(\lambda f + g) = \lambda\big(f'(x) + a(x)f(x)\big) + g'(x) + a(x)g(x) = 0$$
  Ainsi $\lambda f + g \in E_1$, donc E_1 est un sev de E.

Pour E_2 :
On voit que la fonction nulle n'appartient pas à E_2 :
$$\forall x \in E, 0_E'(x) + a(x)0_E(x) = 0$$
Ainsi E_2 n'est pas un sev de E.

Exercice 2 :
Quitte à réordonner les α_k, on peut supposer $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$
Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in [\![1, n]\!]$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_{\alpha_k}(x) = 0$
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$-\lambda_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k e^{(\alpha_k - \alpha_1)x}$$
Car l'exponentielle ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.
Or $\forall k \in [\![1, n]\!], \alpha_k < \alpha_1$, donc $e^{\alpha_k - \alpha_1} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
Donc
$$\sum_{k=2}^{n} \lambda_k e^{(\alpha_k - \alpha_1)x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$
Ainsi on a $-\lambda_1 = 0$, ce qui implique $\lambda_1 = 0$.
On peut réitérer ce procédé pour tous les λ_k, ou utiliser une récurrence finie.
Ainsi on prouve que $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, c'est-à-dire que la famille est libre.

Exercice 3
Cet exercice est plus un exercice de raisonnement qu'autre chose. Pour l'inclusion de $\{0\}$ dans D, il n'y a aucun problème, mais il réside dans la combinaison linéaire. Globalement, si vous voyez un produit de variables dans l'expression du « sev », ça n'en est sûrement pas un.
Montrons que cet ensemble n'est pas un sev.
On a $(1, -1) \in D, (2,1) \in D$ (ici on on prend simplement un couple qui annule chacun des facteurs de l'équation).
Or $(1, -1) + (2,1) = (3,0) \notin D$. En effet, $(3 + 0)(3 - 2 \times 0) = 9 \neq 0$.
Ainsi D n'est pas un sous-espace vectoriel.

Exercice 4
1) Montrons que F est un sev de E.
   La fonction nulle est évidemment π-périodique, reste à prouver que toute combinaison linéaire de fonction π-périodique l'est également.
   Soient f et g deux fonction π-périodiques, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + \pi) = f(x)$ et $g(x + \pi) = g(x)$. Ainsi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,
   $$(\lambda f + g)(x + \pi) = \lambda f(x + \pi) + g(x + \pi) = \lambda f(x) + g(x) = (\lambda f + g)(x)$$

Ainsi toute combinaison linéaire de fonctions de F est un élément de F. Donc F est un sev de E.
Montrons que G est un sev de E.
La fonction nulle tend évidemment vers 0 en $+\infty$.
Soient $f, g \in G, \lambda \in \mathbb{R}$.
Alor

$$(\lambda f + g)(x) = \lambda f(x) + g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Donc toute combinaison de fonctions de G est élément de G. Donc G est un sev de E

2) Soit $f \in F \cap G$. Alors $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $f(x + \pi) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
On peut prouver très facilement que $\forall n \in \mathbb{N}, f(x + n\pi) = f(x)$
Ainsi comme $f \in G$, on a :

$$f(x + n\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, c'est-à-dire f est la fonction nulle.
Ainsi $F \cap G \subset \{0_E\}$, et l'autre implication est triviale.
Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

3) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = x$. Montrons que h ne peut pas s'écrire comme élément de la somme $F + G$. Soient $(f, g) \in F \times G$, telles que $h = f + g$.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $h(n\pi) = f(n\pi) + g(n\pi) = f(0) + g(n\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(0) \in \mathbb{R}$
Or $h(n\pi) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$. C'est absurde, donc F et G ne sont pas en somme directe.