Topologie des espaces vectoriels normés

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ et E sont deux ouverts de E
   En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\} \subset E$
   Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \emptyset$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alors $]a,b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,
   $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$
   $=]x-r, x+r[$
   Montrons que $]a,b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$
   Posons $r = \min(x-a, b-x)$, alors $r > 0$
   Soit $y \in]x-r, x+r[$, alors $x - r \leq y \leq x + r$
   Donc $a < y < b$
   Donc $\mathcal{B}(x,r) \subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est ouvert.

Exemples à propos des ouverts ⍟

1) $\emptyset$ est un fermé de E car $E \backslash \emptyset = E$ est un ouvert de E
   E est un fermé de E car $E \backslash E = \emptyset$ est un ouvert de E
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $[a,b],]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, $\mathbb{R} \backslash [a,b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'union d'ouverts de $\mathbb{R}$.
3) Dans $(E, \|\cdot\|), \forall a \in E, \{a\}$ est un fermé de E. On va montrer que $E \backslash \{a\}$ est un ouvert de E.
   Soit $x \in E \backslash \{a\}$, posons $r = \|x - a\|$, alors $r > 0$ car $x \neq a$.
   Soit $y \in B(x,r)$, montrons que $y \in E \backslash \{a\}$
   Supposons par l'absurde que $y \notin E \backslash \{a\}$ ie $y = a$
   Alors $\|a - x\| = \|y - x\| < r$, Absurde.
   Ainsi $y \in E \backslash \{a\}$, d'où $B(x,r) \in E \backslash \{a\}$
   Donc $E \backslash \{a\}$ est un ouvert de E