Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le p.s. canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$

Démonstration : ⍟

- Par construction, on a bien $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Linéarité à droite : Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), y' = (y'_1, \dots, y'_n), \lambda \in \mathbb{R}$
  $\langle x, \lambda y + y' \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (\lambda y_1 + y'_1, \dots, \lambda y_2 + y'_2) \rangle$
  $$= \sum_{k=1}^{n} x_k (\lambda y_k + y'_k)$$
  $$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} x_k y'_k$$
  $$= \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$
- Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
  Alors $\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle x, y \rangle$
  Donc $\langle , \rangle$ est bien symétrique.
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, tq $x_{i_0} \neq 0$
  $$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} x_k^2 + x_{i_0}^2 \geq x_{i_0}^2 > 0$$
  Donc $\langle , \rangle$ est définie positive.
  Donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Propriété : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle , \rangle : M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B\rangle = Tr({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé p.s. canonique

Démonstration : ⍟

- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ donc le produit ${}^tAB$ est bien défini et ${}^tAB \in M_p(\mathbb{R})$ donc $Tr({}^tAB)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$
- Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$
$$\langle A, \lambda B + C\rangle = Tr\big({}^tA(\lambda B + C)\big) = Tr(\lambda {}^tAB + {}^tAC) = \lambda\langle A, B\rangle + \langle A, C\rangle$$
- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$,
$$\langle B, A\rangle = Tr({}^tBA) = Tr({}^t({}^tBA)) = Tr\left({}^tA\,{}^t{}^tB\right) = Tr({}^tAB) = \langle A, B\rangle$$
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, notons $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, alors par calcul,
$$\langle A, A\rangle = Tr({}^tAA) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geq 0$$

  De plus, $\langle A, A\rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$
  $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \forall k \in [\![1, n]\!], a_{ki} = 0$
  $\Leftrightarrow A = 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$

  Donc c'est bien un p.s. sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On rappelle qu'on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Alors

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration : ⍟

Soient $x, y \in E$.

↪ Si $x = 0_E$, alors $|\langle x, y\rangle| = |\langle 0_E, y\rangle| = |0| = 0$. Ainsi il y a bien égalité et la famille $(0_E, y)$ est liée

↪ Si $x \neq 0_E$, posons $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \|tx + y\| \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = t^2\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|y\|^2 = at^2 + bt + c, \begin{cases} a = \|x\|^2 > 0 \\ b = 2\langle x, y\rangle \\ c = \|y\|^2 \end{cases}$$

Ainsi P est une fonction polynômiale de degré 2, à valeurs ≥ 0. Ainsi P admet au plus une racine réelle, donc son discriminant $\Delta \leq 0$.

Ainsi $b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

De plus, on a $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $P(t_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $\|t_0x + y\| = 0$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $t_0x + y = 0_E$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $y = -t_0x$

$\Leftrightarrow (x, y)$ est liée

Propriété : (Identités de polarisation)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot \rangle$.

$$\forall x, y \in E, \text{ on a } \langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{cases}$$

Démonstration : ⍟

Soient $x, y \in E$.

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la première égalité.

$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la deuxième égalité.

Et $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4\langle x, y\rangle$, ce qui donne la dernière égalité.

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle , \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Démonstration : ⍟

- Linéarité à droite : comme sur les réels
- $\overline{\varphi(y,x)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{y_k}} \cdot \overline{x_k} = \varphi(x,y)$
- $\varphi(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0$
- $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k^2| = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], x_k = 0 \Leftrightarrow x = 0$