Théorèmes : Séries de fonctions

Types de convergences

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

Définition : (Série de fonctions)

On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k$$

On la note $\sum_{n\geq n_0} f_n$ et pour $n \geq n_0$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série de fonctions.

Convergence simple et absolue

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

Définition : (Convergence simple)

On dit que $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ s'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers S sur A.

Cette fonction S est appelée la somme de la série $\sum f_n$ sur A et notée :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème :

(i) $\sum f_n$ CVS sur A
(ii) $\forall x \in A,\ \sum f_n(x)$ CV

Dans ce cas,

$$\forall x \in A, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Définition : (Domaine de convergence simple)

On appelle domaine de CVS de $\sum f_n$ la plus grande partie de D sur laquelle $\sum f_n$ CVS.

Propriété :

Si la série de fonction $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Reste d'ordre n)

Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$, on peut définir pour $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n la série de fonctions :

$$R_n : A \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$$

Propriété : Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (sur A) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$$

Et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Convergence absolue simple)

On dit que $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$ si $\sum |f_n|$ CVS sur A ssi $\sum |f_n(x)|$ CV.

Théorème :

Si $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$, alors $\sum f_n$ CVS sur A.

Convergence absolue

Définition : (Convergence absolue)

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ CVU sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A.

Propriété : Si $\sum f_n$ CVU sur A alors $\sum f_n$ CVS sur A.

Propriété : Si $\sum f_n$ CVU sur A, alors $(f_n)_n$ CVU sur A vers la fonction nulle.