<u>Feuille 5 – Fractions rationnelles (DES)</u>

Méthode : (pour $F = \frac{P}{Q}$, avec $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ $(Q \neq 0)$)

1) On calcule la partie entière (si $\deg P \geq \deg Q$)
2) On calcule les coefficients
   - Si les racines sont toutes simples, on a, si l'on cherche par exemple le terme en $(X - a)$,
   $$\lambda = \frac{P(a)}{Q'(a)}$$
   - Sinon, on peut toujours calculer $(X - a)F(X)$ et évaluer en a pour trouver λ.
   - Pour les dernières valeurs, on peut utiliser $\lim\limits_{X \to +\infty} XF(X)$, ou encore évaluer F en une valeur quelconque (souvent 0) pour la dernière valeur.

<u>Exercice 1</u> (DES avec une partie entière)

Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes :

$$F = \frac{2X^3 + X^2 - X + 1}{X^2 - 2X + 1} \qquad G = \frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2} \qquad H = \frac{X^7 + 3}{(X^2 + X + 2)^3}$$

<u>Exercice 2</u>

Soit P un polynôme à coefficient réels de degré $n \geq 1$. Supposons que P admette exactement n racines distinctes $x_1, \dots, x_n$, toutes non nulles.

1) Montrer que
$$\lim_{x \to x_k} \frac{x - x_k}{xP(x)} = \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$
2) Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :
$$F(X) = \frac{1}{XP(X)}$$
3) En déduire la valeur de :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k P'(x_k)}$$
Indication : on pourra calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} xF(x)$.

<u>Exercice 3</u>

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle suivante :
$$F(X) = \frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$$
2) En déduire que $\forall x > 1$,
$$(\ln(x^n - 1))' = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - e^{2ik\pi/n}}$$
Commenter.