

## Théorèmes – Réductions géométriques

### Sommes directe d'une famille de sev

Soit  $m \in \mathbb{N}^*$

Définition : (Somme de sev)

Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . On appelle somme des sev  $F_1, F_2, \dots, F_m$  l'ensemble :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \dots + F_m &= \{f_1 + \dots + f_m \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, e = f_1 + \dots + f_m\} \end{aligned}$$

Propriété :

Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ , alors  $F_1 + \dots + F_m$  est un sev de  $E$ .

Définition : (Somme directe de sev)

Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . On dit que la somme  $F_1 + \dots + F_m$  est directe si :

$$\forall x \in F_1 + \dots + F_m, \exists! (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = f_1 + \dots + f_m$$

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors  $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$  ou  $\bigoplus_{i=1}^m F_i$

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . Alors

Les sev  $F_1, \dots, F_m$  sont en somme directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, f_1 + \dots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_i = 0_E$$

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . Si  $F_1, \dots, F_m$  est en somme directe, alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . On a :

La somme  $F_1 + \dots + F_m$  est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \dots + F_m) = \sum_{i=1}^m \dim(F_i)$$

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$ . On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$$

$\Leftrightarrow$

Pour toutes bases respectives  $B_1, \dots, B_m$  de  $F_1, \dots, F_m$ ,

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$  forme une base de  $E$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} E = F_1 + \dots + F_m \\ \dim E = \sum_{i=1}^m \dim(F_i) \end{cases}$$

Définition : (Base adaptée)

Soit  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$  tq  $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$

On appelle base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$  toute base  $B$  de  $E$  obtenue par concaténation de bases respectives  $B_1, \dots, B_m$  de  $F_1, \dots, F_m$ , ie toute base de la forme  $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$  où  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, B_i$  est une base de  $F_i$ .

## Sous-espaces stables

Définition : (Sous-espace stable)

Un sev  $F$  de  $E$  est dit stable par  $u \in \mathcal{L}(E)$  si  $u(F) \subset F$

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient  $F$  et  $G$  deux sev de  $E$  stables par  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $F + G$  et  $F \cap G$  sont aussi stables par  $u$ .

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , tels que  $u \circ v = v \circ u$ . Alors  $\ker u$  et  $\text{Im}(u)$  sont stables par  $v$ .

Définition : (Endomorphismes induite)

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ . On définit l'endomorphisme induit par  $u$  sur  $F$  par :

$$\begin{aligned} u_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Propriété : (Combinaisons linéaires d'endomorphismes stables)

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$  ET  $v$ . Alors  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, F$  est stable par  $\lambda u, u + v, u \circ v$

De plus,  $(\lambda u)_F = \lambda u_F, (u + v)_F = u_F + v_F, (u \circ v)_F = u_F \circ v_F$

Propriété : Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $F$  un sev de  $E$  stable de  $u$ . Alors  $\ker u_F = \ker u \cap F, \text{Im } u_F \subset \text{Im } u \cap F$

Corollaire : Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev de  $E$  stable par  $u$ . Si  $u$  est injectif,  $u_F$  l'est aussi.

## Version matricielle en dimension finie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : Soit  $F$  un sev de  $E$  de dimension  $p \in \mathbb{N}^*$ , et  $F = (e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$ . On complète  $F$  en une base  $B = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ .

On a équivalence entre :

- (i)  $F$  est stable par  $u$
- (ii) La matrice de  $u$  dans  $B$  est de la forme  $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$

Si c'est le cas,  $A = Mat_F(u_F)$

Propriété : Soient  $F_1, \dots, F_m$  des sev de  $E$  tq  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ . Soit  $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$  une base adaptée à la décomposition  $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- (i)  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, F_i$  est stable par  $u$
- (ii) La matrice de  $u$  dans  $B$  est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_m \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, A_i \in M_{d_i}(\mathbb{K}), d_i = \dim(F_i)$$

De plus, si c'est le cas,  $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, A_i = Mat_{B_i}(u_{F_i})$

## Éléments propres

On considère  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev non réduit à  $\{0_E\}$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

### Valeurs propres, vecteurs propres

Définition :  $x \in E$  est un vecteur propre de  $u$  si  $x \neq 0_E$  et  $\exists \lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$ .

Dans ce cas, il y a unicité de  $\lambda$

Le scalaire  $\lambda$  est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre  $x$ .

Définition : On appelle valeur propre tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de  $u$  est appelé spectre de  $u$ , noté  $Sp(u)$ .

### Sous-espace propre

Définition :

Pour  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on note  $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$  l'espace formé des vecteurs  $x \in E$  solutions de  $u(x) = \lambda x$ .

Propriété :

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a équivalence entre :

- (i)  $\lambda \in Sp(u)$
- (ii)  $E_\lambda(u) \neq \{0\}$
- (iii)  $u - \lambda Id_E$  non injectif

**Définition :** (Sous-espace propre)

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Si  $\lambda$  est une valeur propre de  $u$ , le sev  $E_\lambda(u)$  est appelé sous-espace propre de  $u$  associé à  $\lambda$ .

**Stabilité et somme directe des sous-espaces propres**

**Propriété :** Les sous-espaces propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  sont stables par  $u$  et  $\forall \lambda \in Sp(u)$ ,

$$u_{E_\lambda(u)} = \lambda Id_{E_\lambda(u)}$$

**Propriété :** Si  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , avec  $v \circ u = u \circ v$ , alors les sous-espaces propres de  $u$  sont stables par  $v$ .

**Théorème :** Des sous-espaces propres de  $u \in \mathcal{L}(E)$  associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de  $u$  sont en somme directe, c'est-à-dire si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(u)$ , avec  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$ , alors  $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n}(u)$  est en somme directe.

**Corollaire :** Une famille de vecteurs propres de  $u$  associés à des valeurs propres de  $u$  2 à 2 distinctes est libre.

**Corollaire :** Si  $E$  est de dimension finie,  $\dim E = n$ , alors  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet au plus  $n$  valeurs propres distinctes.

**Éléments propres en dimension finie**

Dans cette partie  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

**Éléments propres d'une matrice carrée**

**Définition :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une valeur propre de  $A$  si  $\exists x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $AX = \lambda X$

On dit que  $X$  est un vecteur propre de  $A$ , associé à la valeur propre  $\lambda$ . L'ensemble des valeurs propres de  $A$  est appelé spectre de  $A$  noté  $Sp(A)$ .

**Définition :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On note  $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$  le sev formé des éléments

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X$$

**Corollaire :** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  semblables, alors  $Sp(A) = Sp(B)$ .

**Polynôme caractéristique d'une matrice carrée**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

La matrice  $XI_n - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & \dots & \\ -a_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Et  $\det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}) \in \mathbb{K}[X]$

Où  $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Définition : (Polynôme caractéristique)

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ , on appelle polynôme caractéristique de  $A$  noté  $\mathcal{X}_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$

Théorème :

Le polynôme caractéristique de  $A \in M_n(\mathbb{K})$  a pour coefficient dominant 1 et est de degré  $n$ . Il possède les coefficients suivants :

$$\mathcal{X}_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

Théorème : Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $\lambda \in \mathbb{K}$ . On a équivalence entre :

- (i)  $\lambda$  est valeur propre de  $A$
- (ii)  $\lambda$  est racine de  $\mathcal{X}_A$

Corollaire :

- 1) Si  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $A$  possède au plus  $n$  valeurs propres distinctes dans  $\mathbb{K}$ .
- 2) Si  $A \in M_n(\mathbb{C})$ , alors  $A$  possède au moins une valeur propre complexe.

Propriété : Soit  $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$  un polynôme unitaire de degré  $n \in \mathbb{N}^*$

La matrice compagnon de  $P$  est  $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & \ddots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Le polynôme caractéristique de  $C_P$  est  $P$ .

### Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Propriété : Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , 2 matrices semblables. Alors  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

Définition : On appelle polynôme caractéristique commun aux matrices représentant  $u$ , ie  $\mathcal{X}_u$  est le polynôme caractéristique de la matrice de  $u$  dans n'importe quelle base de  $u$ .

Théorème : Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$ , le polynôme caractéristique de  $u$  est unitaire, de degré  $n$ , et est de la forme :

$$\mathcal{X}_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$$

Corollaire : Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$ ,  $u$  possède  $n$  valeurs propres distinctes (dans  $\mathbb{K}$ ).

Corollaire : Tout endomorphisme d'un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre complexe.

### Multiplicité d'une valeur propre

Définition : Un polynôme non constant  $P \in \mathbb{K}[X]$  est dit scindé sur  $\mathbb{K}$  si :

$$\exists \mu \in \mathbb{K}, \exists p \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, P = \mu \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$$

Lorsque les  $\lambda_i$  sont 2 à 2 différents, on dit que  $P$  est scindé à valeurs simples sur  $\mathbb{K}$ .

Définition : (Multiplicité algébrique)

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et soit  $\lambda$  une valeur propre de  $u$ . On appelle multiplicité algébrique de  $\lambda$  l'ordre de multiplicité de  $\lambda$  en tant que racine de  $\chi_u$ .

On appelle multiplicité géométrique de  $\lambda$  la dimension de l'espace propre associé à  $\lambda$ , c'est-à-dire  $\dim E_\lambda(u)$ .

Propriété : Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,

$$\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$$

Si égalité, alors  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ .

Corollaire : Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède au plus  $n$  valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique, où  $n = \dim E$ .

Corollaire : Si  $E$  est un  $\mathbb{C}$ -ev de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ , tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède exactement  $n$  valeurs propres (dans  $\mathbb{K}$ ) comptées avec multiplicité algébrique.

Théorème : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $F$  un sev de  $E$ ,  $F \neq \{0_E\}$ ,  $F$  stable par  $u$ , alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $u_F$  induit par  $u$  sur  $F$  divise le polynôme caractéristique de  $u$ , ie :

$$\chi_{u_F} | \chi_u$$

Théorème : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Pour  $\lambda \in Sp(u)$ , on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

## Diagonalisabilité

( $n = \dim E$ ,  $E$   $\mathbb{K}$ -ev)

Définition : un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable s'il existe une base  $\mathcal{B}$  telle que  $Mat_{\mathcal{B}}(u)$  est diagonale.  $\mathcal{B}$  est appelée base de diagonalisation.

Théorème : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a :

$u$  est diagonalisable

$\Leftrightarrow$

Il existe une base de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$

Théorème : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- (i)  $u$  diagonalisable
- (ii)  $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$
- (iii)  $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$
- (iv)  $\chi_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\forall \lambda \in Sp(u)$ ,  $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$

Corollaire : Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède  $n = \dim E$  valeurs propres distinctes, alors  $u$  est diagonalisable.

## Matrice diagonalisable

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , notons  $D_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid M \text{ est diagonalisable}\}$

Définition : (Matrice diagonalisable)

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

$\Leftrightarrow$

$$\exists D \in D_n(\mathbb{K}), \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}AP = D$$

Propriété : Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ .

On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est diagonalisable
- (ii)  $A$  est diagonalisable

Théorème :

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est diagonalisable (dans  $M_n(\mathbb{K})$ )
- (ii)  $M_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_{\lambda}(A)$
- (iii)  $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} \dim E_{\lambda}(A)$
- (iv)  $\mathcal{X}_A$  est scindé sur  $\mathbb{K}$  et  $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A), m_{\lambda}(A) = \dim(E_{\lambda}(A))$

De plus, dans le cas où  $A$  est diagonalisable, les matrices diagonales semblables à  $A$  sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de  $A$  comptées avec multiplicité algébrique.

Corollaire : Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Si  $A$  admet  $n$  valeurs propres (dans  $\mathbb{K}$ ) 2 à 2 distinctes, alors  $A$  est diagonalisable.

## Trigonalisabilité

$E$  est un  $\mathbb{K}$ -ev,  $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$

### Endomorphismes et matrices trigonalisables :

Définition : (endomorphisme trigonalisable)

On dit que  $u \in \mathcal{L}(E)$  est trigonalisable, s'il existe une base de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire supérieure ou inférieure.

Propriété :

Soient  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

1. La base  $\mathcal{B}$  trigonalise l'endomorphisme  $u$ .
2.  $\forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$  est stable par  $u$ .

Définition : (Matrice trigonalisable)

Une matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est dite trigonalisable dans  $M_n(\mathbb{K})$  si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure/inférieure.

### Propriété :

Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Notons  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , alors sont équivalents

- (i)  $u$  est trigonalisable
- (ii)  $A$  est trigonalisable (dans  $M_n(\mathbb{K})$ )

### Théorème :

Pour  $u \in \mathcal{L}(E)$ , on a équivalence entre :

- (i)  $u$  est trigonalisable
- (ii) Le polynôme caractéristique  $\mathcal{X}_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ . De même pour  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

### Corollaire :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $\mathcal{X}_u$  est scindé sur  $\mathbb{K}$ , alors :

$$\text{Tr}(u) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} m_{\lambda}(u) \lambda \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \lambda^{m_{\lambda}(u)}$$

## **Nilpotence**

### Définition : (endomorphisme nilpotent)

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit nilpotent si  $\exists p \in \mathbb{N}$  tel que  $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$ . Le plus petit tel  $p$  est appelé indice de nilpotence de  $u$ .

### Définition : (Matrice nilpotente)

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $A$  est nilpotente s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $A^p = 0_{M_n(\mathbb{K})}$ . Le plus petit tel  $p$  est appelé indice de nilpotence de  $A$ .

### Théorème :

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a équivalence entre :

- (i)  $u$  est nilpotent
- (ii) Il existe une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  dans laquelle la matrice de  $u$  est triangulaire stricte
- (iii) Le polynôme caractéristique de  $u$  est  $\mathcal{X}_u = X^n$ .

### Propriété :

Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On a équivalence entre :

- (i)  $A$  est nilpotente
- (ii)  $A$  est semblable à une matrice triangulaire stricte
- (iii)  $\mathcal{X}_A = X^n$

### Corollaire :

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  nilpotent avec  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors l'indice de nilpotence de  $u$  est inférieur ou égal à  $n$ , ie

$$u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

De même, si  $A \in M_n(\mathbb{K})$  est nilpotente, alors son indice de nilpotence  $p$  vérifie  $p \leq n$ , ie

$$A^n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$