Topologie des espaces vectoriels normés

I) Parties ouvertes et fermées

1) Parties ouvertes

Définition : Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0, B(x,r) \subset U$$

On dit aussi que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ et E sont deux ouverts de E
   En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\} \subset E$
   Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \emptyset$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alors $]a,b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,
   $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$
   $=]x-r, x+r[$
   Montrons que $]a,b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$
   Posons $r = \min(x-a, b-x)$, alors $r > 0$
   Soit $y \in]x-r, x+r[$, alors $x - r \leq y \leq x + r$
   Donc $a < y < b$
   Donc $\mathcal{B}(x,r) \subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est ouvert.
3) Montrons que dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $\forall a \in E, \forall r > 0$, la boule ouverte $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ est une partie ouverte.
   Soit $x \in B(a,r)$
   Objectif : construire $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset B(a,r)$
   Soit $\rho = r - \|x-a\| > 0$
   Soit $y \in B(x,\rho)$, montrons que $y \in B(a,r)$
   On a $\|y-a\| = \|y-x+x-a\|$
   $\leq \|y-x\| + \|x-a\|$
   $< \rho + \|x-a\| = r$
   Ainsi $y \in B(a,r)$
4) Montrons que $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\}$ et $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$ ne sont pas des ouverts de E.
   Soit $x \in S(a,r)$. Objectif : montrer que $\forall \varepsilon > 0, B(x,e) \not\subset \overline{B}(a,r)$
   Soit $\varepsilon > 0$, posons $z = x + \frac{\varepsilon}{2}u$, où $u = \frac{x-a}{\|x-a\|}$
   Alors $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}u - x\right\| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| \times \underbrace{\|u\|}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
   Ainsi $z \in B(x\,;\varepsilon)$
   Mais $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} - x\right\| = \left\|\underbrace{1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}}_{\in\mathbb{R}} \underbrace{(x-a)}_{\in E}\right\| = \left|1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right| \|x-a\|$
   $= \|x-a\| + \frac{\varepsilon}{2} > r$
   Ainsi $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ ne sont pas des ouverts de E

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

2) Parties fermées

Définition : Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E

Remarque : On n'utilisera jamais la notation $\overline{X}$ pour désigner le complémentaire : elle désigne l'adhérence. On utilisera plutôt X^C ou $E\backslash X$.

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ est un fermé de E car $E\backslash\emptyset = E$ est un ouvert de E
   E est un fermé de E car $E\backslash E = \emptyset$ est un ouvert de E
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $[a, b],]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, $\mathbb{R}\backslash[a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'union d'ouverts de $\mathbb{R}$.
3) Dans $(E, \|\cdot\|), \forall a \in E, \{a\}$ est un fermé de E. On va montrer que $E\backslash\{a\}$ est un ouvert de E.
   Soit $x \in E\backslash\{a\}$, posons $r = \|x - a\|$, alors $r > 0$ car $x \neq a$.
   Soit $y \in B(x, r)$, montrons que $y \in E\backslash\{a\}$
   Supposons par l'absurde que $y \notin E\backslash\{a\}$ ie $y = a$
   Alors $\|a - x\| = \|y - x\| < r$, Absurde.
   Ainsi $y \in E\backslash\{a\}$, d'où $B(x, r) \in E\backslash\{a\}$
   Donc $E\backslash\{a\}$ est un ouvert de E

Remarque : Il existe certains ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. ($[0,1[$ dans $\mathbb{R}$)

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Propriété : Une union finie de fermés de E est un fermé de E.

Remarque : on peut prendre $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et considérer $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$, pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Propriété : (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ie :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n+\infty]{} l \Rightarrow l \in F$$

Attention : Pour autant, toutes les suites dans un fermé ne convergent pas !

Propriété :

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \dots, E_p$ alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$.