

# Chapitre 5 – Application de la réduction des endomorphismes et des matrices

## Systèmes récurrents linéaires

### Exponentielle d'endomorphisme et de matrices

#### 1) Suites et séries de matrices

**Définition :** Pour une matrice  $M \in M_n(\mathbb{K})$ , notons  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,  $[M]_{ij}$  le coefficient d'indice  $(i, j)$  de la matrice  $M$ . Soit  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $M_n(\mathbb{K})$ . On dit que la suite  $(A_k)_k$  converge vers la matrice  $A \in M_n(\mathbb{K})$  si  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , la suite scalaire  $([A_k]_{ij})_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers  $[A]_{ij}$

Pour  $M \in M_n(\mathbb{K})$ , on note  $\|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |[M]_{ij}|$

Alors on a  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$|[M]_{ij}| \leq \|M\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |[M]_{ij}|$$

Alors on a  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ ,

$$|[M]_{ij}| = \|M\|_\infty \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n |[M]_{kl}|$$

A partir de cet encadrement :

**Propriété :** Soient  $(A_k)_k$  une suite d'éléments de  $M_n(\mathbb{K})$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ .

On a équivalence entre :

(i) La suite matricielle  $(A_k)_k$  converge vers  $A$

(ii)  $\|A_k - A\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$

**Définition :** Soit  $(A_k)_k$  une suite d'éléments de  $M_n(\mathbb{K})$ . On définit la série de terme général  $A_k$  la suite matricielle  $(S_k)_k$  où

$$\forall k \in \mathbb{N}, S_k = \sum_{j=0}^k A_j$$

On la note  $\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k$  ou  $\sum A_k$ .

On dit que la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} A_k$  converge si la suite  $(S_k)_k$  converge vers une matrice  $S \in M_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $S$  est alors appelée somme de la série et notée :

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty} A_k$$

**Propriété :** Soient  $(A_k)_k$  une suite d'éléments de  $M_n(\mathbb{K})$ . Si la série numérique  $\sum \|A_k\|_\infty$  converge, alors la série matricielle  $\sum A_k$  converge également. On dit que la série est absolument convergente.

**Lemme :** Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ , alors  $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ . Par récurrence, on en déduit :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \|A^k\|_\infty \leq n^{k-1} \|A\|_\infty^k$$

**Théorème :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La série matricielle  $\sum \frac{A^k}{k!}$  converge absolument.

#### 2) Exponentielle de matrices

**Définition :** Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . On définit l'exponentielle de  $A$ , notée  $e^A$  ou  $\exp A$  par :

$$e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \in M_n(\mathbb{K})$$

Propriété : Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  telles que  $AB = BA$  alors  $e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$

Démonstration : On utilise le binôme de Newton pour séparer, puis le produit de Cauchy pour rassembler.

Propriété : Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La matrice  $e^A$  est inversible, d'inverse  $e^{-A}$

Démonstration :  $A$  et  $-A$  commutent, donc  $e^A e^{-A} = 1$

Propriété : Soient  $A \in M_n(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\exp(P^{-1}AP) = P^{-1} \exp(A) P$

Démonstration : On a  $\exp(P^{-1}AP) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^N \frac{P^{-1}A^k P}{k!} = P^{-1} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) P$

Car  $\left\| P^{-1} \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!} P - P^{-1} \left( \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!} \right) P \right\| \leq n^2 \|P^{-1}\|_{\infty} \left\| \sum_{k=0}^N \frac{A^k}{n!} - e^A \right\| \|P\|_{\infty} \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$

Définition : Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $f: \mathbb{R} \rightarrow M_{p,q}(\mathbb{K})$ ,  $A \mapsto (f_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

Soit  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $t_0$  si  $\forall 1 \leq i \leq p, \forall 1 \leq j \leq q$ , la fonction  $f_{i,j}$  est dérivable en  $t_0$ .

$$\left( \Leftrightarrow \lim_{\substack{t \rightarrow t_0 \\ t \neq t_0}} \frac{1}{t - t_0} (f_{i,j}(t) - f_{i,j}(t_0)) \text{ existe} \right)$$

On note alors  $f'(t_0) = (f'_{i,j}(t_0))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}}$

On dit que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  si  $f$  est dérivable en tout point de  $\mathbb{R}$ .

Propriété : Soient  $p, q \in \mathbb{N}^*$ , et  $A, B: \mathbb{R} \rightarrow M_{p,q}(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont dérivables, alors  $A + B$  l'est aussi sur  $\mathbb{R}$ , et  $\forall t \in \mathbb{R}, (A + B)'(t) = A'(t) + B'(t)$

Propriété : Soient  $p, q, n \in \mathbb{N}^*$  et  $A: \mathbb{R} \rightarrow M_{p,q}(\mathbb{K}), B: \mathbb{R} \rightarrow M_{q,r}(\mathbb{K})$ . Si  $A$  et  $B$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ , alors  $A \times B: \mathbb{R} \rightarrow M_{p,r}(\mathbb{K})$  aussi et

$$\forall t \in \mathbb{R}, (A \times B)'(t) = A'(t) \times B(t) + A(t) \times B'(t)$$

Théorème : Soit  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . La fonction  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{K}), t \mapsto \exp(tA)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A \times \exp(tA)$

### 3) Exponentielle d'endomorphisme

Propriété : Soient  $A, B \in M_n(\mathbb{K})$  deux matrices semblables, alors  $e^A$  et  $e^B$  sont aussi semblables.

Définition : Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Soit  $B$  une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_B(u)$ . On définit l'exponentielle de  $u$ , notée  $e^u$ , comme l'unique endomorphisme de  $E$  dont la matrice dans  $B$  est  $e^A$

Propriété : Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $u \circ v = v \circ u$ , alors  $\exp(u + v) = \exp(u) \circ \exp(v) = \exp(v) \circ \exp(u)$

## III) Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants

### a) Systèmes différentiels linéaires homogènes

On s'intéresse à des systèmes d'équations différentielles linéaires de la forme suivante :

$$(S) : \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \dots + a_{1n}x_n(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) = a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \dots + a_{nn}x_n(t) \end{cases}$$

Avec  $\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{ij} \in \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C}$

Et d'inconnues  $x_1, \dots, x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  dérivables

Soient  $x_1, \dots, x_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$  dérivables. Posons  $X: \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$  définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

Alors la fonction  $X$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a l'équivalence :

$x_1, \dots, x_n$  sont solutions de  $(S)$

$\Leftrightarrow$

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t), \text{ où } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

Théorème : Soit  $X \in \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $A \in M_n(\mathbb{K})$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t)$
- (ii)  $\exists X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \times X_0$
- (iii)  $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \times X(0)$

Corollaire : Soient  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $Y_0 \in M_n(\mathbb{K})$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . Il existe une unique solution au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

Démonstration :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \times X(t) \\ X(t_0) = Y_0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{(t-t_0)A} \cdot Y_0 \\ X(0) = e^{-t_0A} \cdot Y_0 \end{cases}$$

## b) Systèmes différentiels linéaires non homogènes

Dans cette partie, on s'intéresse aux systèmes du type :

$$(S): \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t) + V(t)$$

Où  $A \in M_n(\mathbb{K})$ ,  $V: \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$  et d'inconnue  $X: \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$  dérivable.

Notons  $(S_H)$  le système homogène associé.

$$(S_H): \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t)$$

Théorème : Soit  $Y$  une solution particulière de  $(S): \forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = A \cdot X(t) + V(t)$  et  $X: \mathbb{R} \rightarrow M_{n,1}(\mathbb{K})$  dérivable. On a l'équivalence :

$$X \text{ est solution de } (S) \Leftrightarrow \exists X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tq } \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = e^{tA} \cdot X_0 + Y(t)$$