CF – Révisions

Exercice 1 :
Les formules de Cardan, nommées d'après le mathématicien Girolamo Cardano, donne qu'une solution à l'équation $x^3 + px + q = 0$ a pour formule :

$$x = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer cette formule.

Partie 1 : Simplification de l'équation

1. Démontrer que toute équation de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme $X^3 + pX + q = 0$, où :
$$p = \frac{-b^2}{3a^2} + \frac{c}{a}, \quad q = \frac{b}{27a}\left(\frac{2b^2}{a^2} - \frac{9c}{a}\right) + \frac{d}{a}.$$
(Indication : on pourra poser $X = x + \lambda$, avec λ un réel à déterminer).
2. On pose maintenant $P(X) = X^3 + pX + q$. Montrer que ce polynôme admet au moins une racine réelle.

Partie 2 : Résolution de cette nouvelle équation

L'idée ici est de poser $X = u + v$, avec $u, v \in \mathbb{R}$. On posera ensuite une autre condition sur u et v afin de simplifier l'équation.

1. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}, (u + v)^3 + p(u + v) + q = u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q$.
2. On pose comme condition supplémentaire que $3uv + p = 0$. Montrer qu'on aboutit au système :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$$
3. Pour finir on pose $U = u^3, V = v^3$. En se rappelant que U et V sont les racines d'un polynôme du second degré unitaire, trouver :
$$\begin{cases} U = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \\ V = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$
où Δ est le discriminant du polyôme, à déterminer. On considèrera sans démonstration que Δ est positif pour simplifier les calculs.
4. Conclure.

Exercice 2 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \in C^2([a, b], \mathbb{R})$, et que $f(a) = f'(a) = f(b) = f'(b) = 0$.
Montrer qu'il existe un réel c tel que $f''(c) = f(c)$.
(Indication : on pourra poser $g: x \mapsto e^{-x}\big(f(x) + f'(x)\big)$ pour $x \in [a, b]$.

Exercice 3 :
On appelle « série harmonique » la suite H_n définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$
1) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
2) Montrer qu'il n'existe aucun réel l tel que $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} l$.

Exercice 4 :
Soit f et g deux fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, continues.
1) On suppose que pour tout rationnel $q, f(q) < g(q)$. Montrer que pour tout réel $x, f(x) \leq g(x)$. Pourquoi l'inégalité n'est-elle pas stricte ? (Indication : pour la deuxième partie de la question, on pourra prendre f la fonction nulle, et g une fonction qui est strictement positive partout sauf en un point irrationnel).
2) On suppose désormais que, pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, avec $x < y$, on a $f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. (On pourra prendre $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $x \leq a < b \leq y$, en prouvant que ces nombres existent bien).

Exercice 5 :
Montrer que toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut s'écrire comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 6 :
Soit $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}, P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$
1. Calculer j^3 et $j^2 + j + 1$.
2. Trouver deux racines évidentes de P.
3. Montrer que j est racine au moins double de P.
4. Quel est le degré de P ?
5. Factoriser P dans $\mathbb{C}[X]$, puis dans $\mathbb{R}[X]$.