

Espaces préhilbertiens

Espaces préhilbertiens réels

Dans toute cette partie, E désigne un \mathbb{R} -ev (de dimension finie ou non).

Définitions

Définition : (produit scalaire)

Le produit scalaire (p.s.) sur un \mathbb{R} -ev E désigne toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

- (i) φ est bilinéaire, ie φ est linéaire selon chacune de ses variables.
- (ii) φ est symétrique : $\forall x, y \in E, \varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- (iii) φ est positive, ie $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
- (iv) φ est définie, ie $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

En d'autres termes, un p.s. sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarques :

- 1. Pour montrer la bilinéarité symétrique, on a juste à montrer la linéarité à droite et la symétrie.
- 2. Si $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est bilinéaire, alors $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0_E = \varphi(0_E, x)$
Donc pour la partie (iv), il suffit de montrer le sens direct de l'équivalence.

Propriété : Soit $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$

Alors φ est un produit scalaire sur E ssi :

- (i) φ est bilinéaire
- (ii) φ est symétrique
- (iii) $\forall x \in E, x \neq 0_E, \varphi(x, x) > 0$

Définition : (espace préhilbertien réel)

On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E, φ) où E est un \mathbb{R} -ev et φ un produit scalaire. Dans ce cas, il est usuel de noter : $\forall x, y \in E, (x|y), \langle x, y \rangle$, ou plus rarement $x.y$ le produit scalaire $\varphi(x, y)$.

Définition : On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemples à connaître :

Produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^n

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n . On l'appelle le p.s. canonique (ou usuel) sur \mathbb{R}^n

Démonstration : ☆

- Par construction, on a bien $\langle, \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$
- Linéarité à droite : Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), y' = (y'_1, \dots, y'_n), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \lambda y + y' \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (\lambda y_1 + y'_1, \dots, \lambda y_n + y'_n) \rangle$$

$$= \sum_{k=1}^n x_k (\lambda y_k + y'_k)$$

$$= \lambda \sum_{k=1}^n x_k y_k + \sum_{k=1}^n x_k y'_k$$

$$= \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

- Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
Alors $\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^n y_k x_k = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \langle x, y \rangle$
Donc \langle, \rangle est bien symétrique.

- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\exists i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$, tq $x_{i_0} \neq 0$

$$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^n x_k^2 + x_{i_0}^2 \geq x_{i_0}^2 > 0$$

Donc \langle, \rangle est définie positive.

Donc c'est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n

Exemple : $\forall a > 0, \varphi_a: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$$\varphi_a(x, y) = ax_1y_1 + a(x_1y_2 + x_2y_1) + (a+1)x_2y_2$$

Produit usuel sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Propriété : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle, \rangle : M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$$

est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé p.s. canonique

Démonstration : ★

- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R}), {}^tA \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ donc le produit tAB est bien défini et ${}^tAB \in M_p(\mathbb{R})$
donc $\text{Tr}({}^tAB)$ existe et appartient à \mathbb{R}
- Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle A, \lambda B + C \rangle = \text{Tr}({}^tA(\lambda B + C)) = \text{Tr}(\lambda {}^tAB + {}^tAC) = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$$

- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R}),$

$$\langle B, A \rangle = \text{Tr}({}^tBA) = \text{Tr}({}^t({}^tBA)) = \text{Tr}({}^tA {}^t{}^tB) = \text{Tr}({}^tAB) = \langle A, B \rangle$$

- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors par calcul,

$$\langle A, A \rangle = \text{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 \geq 0$$

$$\text{De plus, } \langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \sum_{k=1}^n a_{ki}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, a_{ki} = 0$$

$$\Leftrightarrow A = 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$$

Donc c'est bien un p.s. sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Propriété : Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, notons $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.

L'application $\langle, \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f, g \in E, \langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un p.s. sur E appelé produit scalaire canonique sur E .

Démonstration : Soient $f, g \in E$ alors la fonction $f \times g$ est continue sur $[a, b]$ donc intégrable sur ce segment.

- La symétrie de \langle, \rangle provient de la commutativité du produit :

$$\langle g, f \rangle = \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle$$

- $\forall f, g, h \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\langle f, \lambda g + h \rangle = \int_a^b f(t)(\lambda g(t) + h(t))dt = \lambda \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)h(t)dt = \lambda \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle$$

- Soit $f \in E, \langle f, f \rangle = \int_a^b (f(t))^2 dt \geq 0$

$$\text{De plus, } \langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b (f(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], f(t)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a, b], f(t) = 0$$

Remarque : Si on a un produit scalaire sur E et F un sev de E , alors le même produit restreint à $F \times F$ reste un produit scalaire sur F .

Norme euclidienne

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel et on notera \langle, \rangle son produit scalaire associé.

Définition : On appelle norme euclidienne sur E l'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ muni de son p.s. canonique, $\forall f \in E, \|f\| = \sqrt{\int_a^b (f(t))^2 dt}$

Exemple : Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}. \|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda^2 \langle x, x \rangle = \lambda^2 \|x\|^2$

Soient $x, y \in E$,

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \end{aligned}$$

De même, $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Et $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel. On rappelle qu'on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. Alors

$$\forall x, y \in E, |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) est liée.

Démonstration : Ⓢ

Soient $x, y \in E$.

\hookrightarrow Si $x = 0_E$, alors $|\langle x, y \rangle| = |\langle 0_E, y \rangle| = |0| = 0$. Ainsi il y a bien égalité et la famille $(0_E, y)$ est liée

\hookrightarrow Si $x \neq 0_E$, posons $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \|tx + y\|^2 \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = t^2 \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle t + \|y\|^2 = at^2 + bt + c, \begin{cases} a = \|x\|^2 > 0 \\ b = 2\langle x, y \rangle \\ c = \|y\|^2 \end{cases}$$

Ainsi P est une fonction polynômiale de degré 2, à valeurs ≥ 0 . Ainsi P admet au plus une racine réelle, donc son discriminant $\Delta \leq 0$.

$$\text{Ainsi } b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\text{De plus, on a } |\langle x, y \rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \exists ! t_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } P(t_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists ! t_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } \|t_0 x + y\|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \exists ! t_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } t_0 x + y = 0_E$$

$$\Leftrightarrow \exists ! t_0 \in \mathbb{R} \text{ tq } y = -t_0 x$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \text{ est liée}$$

Propriété : Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel.

La norme euclidienne $\|\cdot\| : \begin{matrix} E \rightarrow \mathbb{R}_+, \\ x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{matrix}$ est une norme sur E .

On l'appelle norme associée au produit scalaire \langle, \rangle .

Propriété : (Identités de polarisation)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à \langle, \rangle .

$$\forall x, y \in E, \text{ on a } \langle x, y \rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{cases}$$

Démonstration : \star

Soient $x, y \in E$.

$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la première égalité.

$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la deuxième égalité.

Et $\|x + y\| - \|x - y\| = 4\langle x, y \rangle$, ce qui donne la dernière égalité.

Propriété : Identité du parallélogramme

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien réel dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Espaces préhilbertiens complexes

Dans toute cette partie, E est un \mathbb{C} -ev (de dimension quelconque).

Le produit scalaire n'a plus de sens : $\forall x \in E \setminus \{0_E\}, 0 < \langle ix, ix \rangle = -\langle x, x \rangle < 0$

Définition : On appelle produit hermitien sur un \mathbb{C} -ev toute application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ vérifiant :

- (i) φ est sesquilinéaire, ie φ est linéaire en sa 2^{nde} variable et semi-linéaire en sa 1^{ère} :
$$\begin{cases} \forall x, y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(x, \lambda y + y') = \lambda \varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \forall x, x', y \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda} \varphi(x, y) + \varphi(x', y) \end{cases}$$
- (ii) φ est à symétrie hermitienne, ie $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$
- (iii) φ est positive : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$
- (iv) φ est définie : $\forall x \in E, \text{on a } \varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Un produit scalaire hermitien sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Attention : on a $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$, donc $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$. Ainsi on peut parler de positivité.

En général $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}$, on a donc pas lieu d'écrire « $\varphi(x, y) \geq \dots$ »

Propriété : Soit E un \mathbb{C} -ev et $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$. Alors φ est un produit scalaire hermitien sur E ssi :

- (i) φ est sesquilinéaire
- (ii) $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$
- (iii) $\forall x \in E, x \neq 0_E, \varphi(x, x) > 0$

Définition :

On appelle espace préhilbertien complexe tout couple (E, \langle, \rangle) où E est un \mathbb{C} -ev et \langle, \rangle est un produit scalaire hermitien sur E . On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe (E, \langle, \rangle) où $\dim E < +\infty$.

Exemples à connaître :

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle, \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k$$

est un produit scalaire hermitien sur \mathbb{C}^n appelé produit scalaire canonique sur \mathbb{C}^n .

Démonstration : ⚡

- Linéarité à droite : comme sur les réels
- $\overline{\varphi(y, x)} = \sum_{k=1}^n \overline{\overline{y_k} \cdot x_k} = \sum_{k=1}^n y_k \cdot \overline{x_k} = \varphi(x, y)$
- $\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} x_k = \sum_{k=1}^n |x_k|^2$
- ⋮

Propriété : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle, \rangle : M_{n,p}(\mathbb{C}) \times M_{n,p}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr} \left({}^t \overline{AB} \right)$$

Est un produit scalaire hermitien sur $M_{n,p}(\mathbb{C})$, appelé canonique.

// manque le p.s. canonique des fonctions dans C

3) Norme hermitienne

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien complexe. Pour $x \in E$, posons $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle \lambda x, x \rangle = \bar{\lambda} \lambda \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

$$\langle x + y, x - y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2i \operatorname{Im}(\langle x, y \rangle) - \|y\|^2$$

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien complexe. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Alors $\forall x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Avec égalité si la famille (x, y) est liée.

Corollaire :

Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien complexe. L'application $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E appelée norme hermitienne sur E (aussi appelée norme associée au p.s. hermitien \langle, \rangle).

Propriété : Soit (E, \langle, \rangle) un espace préhilbertien complexe. On note $\|\cdot\|$ la norme hermitienne sur E associée à \langle, \rangle .

1) Identités de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|ix + y\|^2 - i\|ix - y\|^2)$$

2) Identité du parallélogramme

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

III) Matrice d'un produit scalaire

Soit E un espace euclidien ou hermitien avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Pour tous x (resp. y) $\in E$, $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ (resp. $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$) ($\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } E \text{ euclidien} \\ \mathbb{C} & \text{si } E \text{ hermitien} \end{cases}$) tel que

$$x = \sum_{k=1}^n x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$$

$$\begin{aligned} \text{Alors } \langle x, y \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{l=1}^n y_l e_l \right\rangle = \sum_{l=1}^n y_l \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k, e_l \right\rangle \\ &= \sum_{l=1}^n y_l \left(\sum_{k=1}^n \bar{x}_k \langle e_k, e_l \rangle \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{x}_k y_l \langle e_k, e_l \rangle \end{aligned}$$

Ainsi \langle, \rangle est entièrement caractérisé par la donnée des termes $\langle e_k, e_l \rangle$ pour $1 \leq k, l \leq n$

Définition : Soient (E, \langle, \rangle) un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . On appelle matrice du produit scalaire \langle, \rangle dans la base B la matrice :

$$M = \text{Mat}_B(\langle, \rangle) = (\langle e_k, e_l \rangle)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}} \\ = \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

De plus, pour tous $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k, y = \sum_{k=1}^n y_k e_k$, on a $\langle x, y \rangle = {}^t \overline{X} M Y$

Effet d'un changement de base

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E . Notons $P = \text{Pass}_{B \rightarrow B'}$.

Pour $x, y \in E$, notons $X = \text{Mat}_B(x), X' = \text{Mat}_{B'}(x), Y = \text{Mat}_B(y), Y' = \text{Mat}_{B'}(y)$

Et $M = \text{Mat}_B(\langle, \rangle), M' = \text{Mat}_{B'}(\langle, \rangle)$

$\forall x, y \in E, X = P X', Y = P Y'$, donc $\langle x, y \rangle = {}^t (\overline{P} \cdot \overline{X}) M P Y' = {}^t \overline{X'} {}^t \overline{P} M P Y'$

D'autre part, $\langle x, y \rangle = {}^t \overline{X'} M' Y'$

Ainsi on a :

$$M' = {}^t \overline{P} M P$$

Propriété :

Soit (E, \langle, \rangle) un espace euclidien ou hermitien de dimension n et B, B' deux bases de E . Alors

$$\text{Mat}_{B'}(\langle, \rangle) = {}^t \overline{P} \cdot \text{Mat}_B(\langle, \rangle) \cdot P$$

Où $P = \text{Pass}_{B \rightarrow B'}$