Chapitre 4 – Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, E, F, G sont des $\mathbb{R}$-evn de dim $< +\infty$ non nulles (avec $n = \dim E$, $p = \dim F$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles

Définition : Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to F$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}\big(f(a+t) - f(a)\big)$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque $t \to 0$ ($t \neq 0$). Sa limite ℓ est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

Définition : Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application $f' : I \to F$ appelée fonction dérivée de f.

$$t \mapsto f'(t)$$

Théorème : Soient $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ de fonction coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans la base B. On a équivalence entre :

(i) f est dérivable sur I
(ii) Les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables sur I

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{k=1}^{p} f_k'(t) e_k$$

Proposition :

Soient $f, g : I \to F$ deux fonctions dérivables sur I. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi dérivable sur I et

$$\forall t \in I, (\lambda f + g)'(t) = \lambda f'(t) + g'(t)$$

2. Différentielle d'une fonction

1) Développement limité à l'ordre 1

Définition :

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \to F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$$

On notera alors $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_E$.

Exemple :

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, prenons $\| \|_2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  $(x, y) \mapsto f(x, y)$
  f admet un DL_1 en $(0,0)$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq
  $$f(h_1, h_2) = f(0,0) + ah_1 + bh_2 + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1, h_2)\|)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in E$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.

2) Différentiabilité en un point

Définition : Soit $f : U \subset E \to F$. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \to F$ telle que :

$$\lim_{\substack{h\to 0_E \\ h\neq 0_E}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0_E$$

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l'on veut sur E et F. Ainsi on marquera donc $\| \|$ pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable en a
(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Proposition : Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a.

Exemple :

1) Soit $f : E \to F$ une fonction constante (telle que $\forall x \in E, f(x) = C$)
   Soit $a \in E, \forall h \in E, f(a+h) = C = f(a) = f(a) + \underbrace{0_F}_{u(h)} + \underbrace{0_F}_{\|h\|\times 0_F}$
   Donc $f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon : h \mapsto 0_F$ et $u : E \to F, h \mapsto 0_F$
   Comme $u \in \mathcal{L}(E, F)$, ceci montre que f admet un DL_1 en a donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$
2) Soit $f : E \to F$ linéaire. Soit $a \in E, \forall h \in E$,
   $$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f(h) +$$

Théorème : Soit $f : U \subset E \to F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.

Proposition : Soient I un intervalle ouvert non vide de $\boxed{\mathbb{R}}$, $a \in I$ et $f : I \to F$. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable en a,
(ii) f est dérivable en a.

Dans ce cas, on a alors

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(a) : \mathbb{R} &\to F \\ h &\mapsto hf'(a) \end{aligned} \quad \text{et } f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$

Où $f'(a) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\big(f(a+t) - f(a)\big)$.

3) Fonctions différentiables

Définition : Une fonction $f : U \subset E \to F$ est dite **différentiable** (sur U) si elle est différentiable en tout point de a de U. L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f : U &\to \mathcal{L}(E, F) \\ a &\mapsto \mathrm{d}f(a) \end{aligned}$$

est alors appelée différentielle de f.

Théorème : Les fonctions différentiables sont continues.

Proposition : Si $f : E \to F$ est constante, alors f est différentiable et sa différentielle est l'application nulle : pour tout $a \in E$, $\mathrm{d}f(a) = \tilde{0}$, où $\tilde{0} = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Proposition : Si $f : E \to F$ est linéaire, alors f est différentiable et sa différentielle est constante :

$$\forall a \in E, \mathrm{d}f(a) = f$$

Exemple :

Proposition : Soient I un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$. On a l'équivalence :

$$f \text{ est différentiable} \Longleftrightarrow f \text{ est dérivable}$$

Proposition :

Si $\varphi : E \times F \to G$ est une application bilinéaire, alors φ est différentiable, et on a :

$$\forall (x, y) \in E \times F, \mathrm{d}\varphi(x, y) : \begin{aligned} E \times F &\to G \\ (h, k) &\mapsto \varphi(x, k) + \varphi(h, y) \end{aligned}$$

4) Opérations sur les fonctions différentiables

Proposition : Soient $f, g : U \subset E \to F$. Pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, si f et g sont différentiables, alors $\lambda f +$ $+\mu g$ l'est aussi et

$$\mathrm{d}(\lambda f + \mu g) = \lambda \mathrm{d}f + \mu \mathrm{d}g$$

Proposition : Soient $B = (e_1, \dots e_p)$ une base de F et $f : U \subset E \to F$ de fonctions coordonnées $f_1, \dots f_p$ dans la base B. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable
(ii) Les fonctions coordonnées $f_1, \dots, f_p$ de f sont différentiables.

Dans ce cas, on a :

$$\forall a \in U, \forall h \in E, \mathrm{d}f(a)(h) = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{d}f_i(a)(h)e_i$$

Proposition : Soient $F_1, \dots, F_p$ des espaces vectoriels normés de dimensions finies (non nulles). On note $F = \Pi_{i=1}^{p} F_i$. Soit $f : U \subset E \to F$. On peut écrire $f = (f_1, \dots, f_p)$ avec $f_i : U \subset E \to F_i$ les fonctions composantes de f. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable
(ii) Pour tout $i \in [\![1, p]\!], f_i$ est différentiable

Dans ce cas, pour tout $a \in U, \mathrm{d}f(a) = (\mathrm{d}f_1(a), \dots, \mathrm{d}f_n(a))$

Théorème : (Différentiation de fonctions composées)

Soient $f : U \subset E \to F, V$ un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $g : V \subset F \to G$. Si f est différentiable en $a \in U$ et g différentiable en $f(a) \in V$, la fonction composée $g \circ f : U \subset E \to G$ est différentiable en a et

$$\forall h \in E, \mathrm{d}(g \circ f)(a)(h) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big)\big(\mathrm{d}f(a)(h)\big)$$

Par suite, si f et g sont différentiables (resp. sur U et sur V), $g \circ f$ est aussi différentiable et

$$\forall a \in U, \mathrm{d}(g \circ f)(a) = \mathrm{d}g\big(f(a)\big) \circ \mathrm{d}f(a)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \to F, \lambda : U \subset E \to \mathbb{R}$ une fonction scalaire et $a \in U$. Si f et λ sont différentiables en a, il en est de même de la fonction λf et on a

$$\forall h \in E, \mathrm{d}(\lambda f)(a)(h) = \lambda(a)\mathrm{d}f(a)(h) + \mathrm{d}\lambda(a)(h)f(a)$$

ie $\forall h \in E, \mathrm{d}(\lambda f)(a) = \mathrm{d}\lambda(a)f(a) + \lambda(a)\mathrm{d}f(a)$

Exemple : on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

On a vu que f admet des dérivées directionnelles en $(0,0)$ selon v et :

$$D_v f(0,0) = \begin{cases} \dfrac{v_1^3}{v_1^2+v_2^2} & \text{si } v = (v_1, v_2) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } v = (0,0) \end{cases}$$

Supposons f différentiable en 0. Alors $\forall h, k \in \mathbb{R}^2$,

$$\mathrm{d}f(0,0)(h,k) = D_{h,k}f(a) = \begin{cases} \dfrac{h^3}{h^2+k^2} & \text{si } (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

mais alors comme $(1,1) = (1,0) + (0,1)$

mais d'une part, $\mathrm{d}f(0,0)(1,1) = \frac{1}{2}$

et d'autre part, par linéarité de $\mathrm{d}f(0,0)$,

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(0,0)(1,1) &= \mathrm{d}f(0,0)(1,0) + \mathrm{d}f(0,0)(0,1) \\ &= \frac{1^3}{1^2+0^2} + \frac{0^3}{0^2+1^2} = 1 \end{aligned}$$

C'est absurde, donc f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

3. Dérivées partielles

1) Dérivation selon un vecteur

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. Puisque U est un ouvert de E, il existe $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset U$. Pour $v \in E$ fixé, la fonction

$$\varphi : t \in \mathbb{R} \to f(a+tv)$$

est définie au voisinage de 0. Elle étudie les valeurs prises par f sur la droite affine $a + \mathrm{Vect}(v)$ (lorsque $v \neq 0_E$)

Définition :

Soient $f : U \subset E \to F, a \in U, v \in E$. On dit que f est dérivable selon le vecteur v en a si la fonction d'une variable réelle $\varphi : t \mapsto f(a+tv)$ est dérivable en a.

On appelle alors « dérivée selon le vecteur v de f en a » la valeur de cette dérivée, notée

$$D_v f(a) = \varphi'(0) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \frac{1}{t}\big(f(a+tv) - f(a)\big)$$

Théorème : Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est dérivable en a selon tout vecteur $v \in E$ et on a

$$D_v f(a) = \mathrm{d}f(a)(v)$$

2) Dérivées partielles

Choisissons arbitrairement une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Soit $f : U \subset E \to F$

Définition :

Soient $f : U \subset E \to F$ et $i \in [\![1,n]\!]$. On dit que f admet une i-ième dérivée partielle (dans la base B) en $a \in U$ si elle admet une dérivée directionnelle selon le vecteur e_i en a. On note alors :

$$\partial_i f(a) = D_{e_i} f(a) = \lim_{\substack{\neq \\ t\to 0}} \frac{1}{t}\big(f(a+te_i) - f(a)\big)$$

Définition :

Sous réserve d'existence, l'application $\partial_i f : U \subset E \to F$ est appelée i-ième dérivée partielle de f dans la base B

Théorème 6 : Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable alors les dérivées partielles de f dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ existent et pour tout $a \in U$, on a :

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$$

De plus, pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ (avec $(h_1, \dots h_n) \in \mathbb{R}^n$),

$$\mathrm{d}f(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_i \partial_i f(a)$$

Démonstration : ⍟

Soit $u \in U$. Comme f est différentiable en a, par le théorème précédent, f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, on a donc en particulier selon le vecteur e_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\partial_i f(u)$ existe et par définition, $\partial_i f(u) = D_i f(u) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$ par le théorème précédent.

De plus, soit $h \in E, \exists! \, (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$.

Par le théorème précédent, on a $\mathrm{d}f_a(h) = D_h f(u)$ et $\mathrm{d}f(u)(h) = \mathrm{d}f(u)(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{d}f(u)(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(u)$$

Corollaire : Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable en $a \in U$, le développement limité à l'ordre 1 de f en a s'écrit :

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(a) + \underset{h \to 0}{o}(\|h\|)$$

3) Dérivées partielles d'une fonction de n variables réelles

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F$ donnée par

$$f : x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$$

On étudie les dérivées partielles de f dans la base canonique $B_c = (e_1, \dots e_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on peut définir la i-ième application partielle de f au point a par :

$$f_{a,i} : t \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

Comme U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, la fonction $f_{a,i}$ est au moins définie sur intervalle de la forme $]a_i - \alpha, a_i + \alpha[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Proposition : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to F, a \in U, i \in [\![1, n]\!]$. On a équivalence entre :

(i) f admet une i-ième dérivée partielle en a (dans la base canonique)
(ii) La i-ième application partielle de f au point a, notée $f_{a,i}$ est dérivable en a_i

Dans ce cas, on a :

$$\partial_i f(a) = f'_{a,i}(a_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)|_{t=a_i}$$

Remarque : Si l'on convient de noter $x_1, \dots, x_n$ les éléments du n-uplet x, il est usuel de noter :

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

4) Dérivées partielles d'une fonction d'une variable

Soit $f : U \subset E \to F$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Pour $x \in U$, convenons de noter $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ les coordonnées de x dans la base B. On a alors $f(x) = f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$

$$\tilde{f} : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n \to F, (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n)$$

Proposition : Avec les notations précédentes, pour $a \in U$ et $i \in [\![1, n]\!]$, on a équivalence entre :

(i) f admet une i-ième dérivée partielle dans la base B en a

(ii) $\tilde{f}$ admet une i-ième dérivée partielle en $(a_1, \dots, a_n)$ (dans la B_c de $\mathbb{R}^n$)

Dans ce cas, on a

$$\partial_i f(a) = \partial_i \tilde{f}(a_1, \dots, a_n) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\tilde{f}(a_1, \dots, a_{i-1}, t, a_{i+1}, \dots, a_n)\right)\Big|_{t=a_i}$$

(où $a = \sum_{k=1}^{n} a_k e_k$)

Proposition : Soit $f : U \subset E \to F, a \in U, i \in [\![1, n]\!]$. On a équivalence entre :

(i) f admet une i-ième dérivée partielle en a dans la base B de E,

(ii) Les fonctions coordonnées de f dans une base de F admettent une i-ième dérivée partielle en a dans la base B

Dans ce cas, on a

$$\forall k \in [\![1, p]\!], (\partial_i f)_k = \partial_i (f_k)$$

Où l'on a noté f_k et $(\partial_i f)_k$ les fonctions coordonnées de f et $\partial_i f$ dans une base donnée de F.

5) Matrice Jacobienne

Définition : Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de F. Soit $f : U \subset E \to F$ différentiable en $a \in U$. On appelle ***matrice Jacobienne*** de f en a la matrice de l'application linéaire $\mathrm{d}f(a)$ relatives aux bases B et B' :

$$\mathrm{Jac}_f(a) = \mathrm{Mat}_{B,B'}\big(\mathrm{d}f(a)\big) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$$

Théorème : Avec les mêmes notions, notons $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans la base B', alors

$$\mathrm{Jac}_f(a) = \big(\partial_j f_i(a)\big)_{i \in [\![1,p]\!], j \in [\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_p(a) & \dots & \partial_n f_p(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : Si l'on convient de noter $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans B, on peut écrire :

$$\mathrm{Jac}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{i\in[\![1,p]\!],j\in[\![1,n]\!]} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Remarque : la matrice Jacobienne caractérise entièrement la différentielle de f en a.

6) Dérivées partielles d'une fonction composée

Proposition : (Version matricielle du théorème de différentiation d'une composée)

Soient $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset F \to G$, où V est un ouvert de F vérifiant $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et :

$$\mathrm{Jac}_{g\circ f}(a) = \mathrm{Jac}_g\big(f(a)\big) \times \mathrm{Jac}_f(a)$$

Proposition : (Formule de dérivation en chaîne)

Soient $f : U \subset E \to F$, $g : V \subset F \to G$ où V est un ouvert de F tel que $f(U) \subset V$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors les dérivées partielles de $g \circ f$ en a dans une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E existent et sont données par

$$\partial_i(g \circ f)(a) = \sum_{k=1}^{p} \partial_i f_k(a) \partial_k g\big(f(a)\big) \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$

Où l'on a noté $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f dans une base $B' = \left(e'_1, \dots, e'_p\right)$ de F.

Remarque : Si l'on convient de noter $x_1, \dots, x_n$ les coordonnées d'un vecteur générique $x \in E$ dans la base B et $y_1, \dots, y_p$ celles d'un vecteur générique $y \in F$ dans la base B', la formule précédente se réécrit sous la forme :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}\big(f(a)\big) \quad \forall i \in [\![1, n]\!]$$