<u>Réductions algébriques</u>

<u>Polynômes d'endomorphismes et de matrices</u>

Polynôme d'endomorphismes

<u>Définition :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de P en u l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$$

<u>Propriété :</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$

$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

<u>Propriété :</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathbb{K}[u]$ est stable par addition, multiplication par un scalaire et composition.

Polynômes annulateurs

<u>Définition :</u> On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

<u>Théorème :</u> ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u figurent parmi les racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de u, c'est-à-dire :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, $Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$

<u>Théorème de Cayley-Hamilton :</u> Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ de u est annulateur de u, c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Polynômes de matrices

<u>Définition :</u> Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de P en A la matrice $P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in M_n(\mathbb{K})$$

<u>Propriété :</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{K}), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$

$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$

Définition : On dit que $M \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $A \in M_n(\mathbb{K})$si $\exists p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$:

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}\}$$

Définition : On appelle polynôme annulateur de $A \in M_n(\mathbb{K})$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$

Propriété : ⍟

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Théorème : Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), P \in \mathbb{K}[X]$

Si P est annulateur de A, alors

$$Sp(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda) = 0\}$$

Théorème de Cayley-Hamilton : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{X}_A$ est annulateur de A.

Polynôme minimal

Note : E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

Définition : (polynôme minimal)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

(i) Π_u est annulateur de u
(ii) Π_u est unitaire
(iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ non nul annulateur de u, $\deg(\Pi_u) \leq \deg P$

Le polynôme Π_u est appelé polynôme minimal de u

Remarque : cette définition se transpose aux matrices.

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Π_u divise tout polynôme annulateur de u

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de Π_u, ie :

$$Sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \Pi_u(\lambda) = 0\}$$

Remarque : ce théorème se transpose aux matrices

Réductions & polynômes annulateurs

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

Théorème de Bézout : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

P et Q sont premiers entre eux

$$\Leftrightarrow$$

$\exists V, W \in \mathbb{K}[X]$, tel que $PV + QW = 1$

Lemme des noyaux : Soient $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors

$$\ker\big((P \times Q)(u)\big) = \ker\big(P(u)\big) \oplus \ker\big(Q(u)\big)$$

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $m \in \mathbb{N}^*, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux, alors

$$\ker\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker\big(P_k(u)\big)$$

Diagonalisabilité

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) u est diagonalisable

(ii) Il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$

(iii) Π_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$