Séries de fonctions – Démonstrations

Théorème : ✪

Si $\sum f_n$ CVN sur A, alors :

(i) $\sum f_n$ CVAS sur A.
(ii) $\sum f_n$ CVU sur A.

Démonstration :

Supposons que $\sum f_n$ CVN sur $A \subset D$.

- Soit $x_0 \in A$, alors $0 \leq |f_n(x_0)| \leq \|f_n\|_{\infty,A}$
  Or $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ CV, donc par comparaison de SATP, $\sum |f_n(x_0)|$ CV
  Donc $\sum f_n$ CVAS sur A.
- Comme $\sum f_n$ CVAS sur A, $\sum f_n$ CVS sur A.
  Notons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$
  Comme la série numérique $\sum |f_n(x)|$ CV,
  $$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty,A} := \alpha_n$$
  Alors la fonction R_n est bornée sur A et :
  $$0 \leq \|R_n\|_{\infty,A} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
  comme reste d'une série CV.
  Donc par le théorème des gendarmes, $\|R_n\|_{\infty,A} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  Donc $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle, donc $\sum f_n$ CVU vers A.