

## Chapitre 2 – Orthogonalité

Dans tout le chapitre,  $E$  désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension quelconque, dont on notera  $\langle, \rangle$  le produit scalaire et  $\|\cdot\|$  la norme associée.

### I) Vecteurs orthogonaux

#### 1) Orthogonalité de 2 vecteurs

Définition : Soient  $x, y \in E$ . On dit que  $x$  et  $y$  sont orthogonaux si  $\langle x, y \rangle = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .

Remarque : Le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de  $E$  est  $0_E$ .

Remarque : Si  $x \perp y$ , alors  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \perp \lambda y$

Exemple : Dans  $\mathbb{R}^2$  muni du produit scalaire usuel, soit  $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$  alors  $y = (-b, a)$  vérifie  $x \perp y$  car  $\langle x, y \rangle = -ab + ab = 0$

Dans  $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{C})$  munie du produit scalaire usuel, considérons  $f : x \mapsto i, g : x \mapsto \sin x$

Alors  $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)dx = [i \times \cos x]_0^{2\pi} = 0$ , donc  $f \perp g$ .

**Attention** : la notion d'orthogonalité dépend du p.s. utilisé.

Propriété : Identité de Pythagore

1) Soient  $E$  un espace préhilbertien réel et  $x, y \in E$ . On a :

$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

2) Soient  $E$  un espace préhilbertien complexe et  $x, y \in E$ . On a :

$$x \perp y \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ⚡

1) On sait que  $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$

Ainsi  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$

2) On sait que  $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle)$

Ainsi  $\langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = 0 \Rightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

**Attention** : la réciproque est fausse dans le cas  $E$  préhilbertien complexe.

### II) Familles orthogonales

Définition : On dit qu'une famille d'éléments  $(e_i)_{i \in I} \in E$  est orthogonale si tous ses éléments sont orthogonaux 2 à 2 ie si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

On dit que la famille  $(e_i)_{i \in I}$  est orthonormée si elle est orthogonale et que tous ses éléments ont pour norme 1, ce qui est équivalent à :

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⚡

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une famille orthogonale d'éléments de  $E$  tq  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_i \neq 0_E$ . Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  tq  $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$

D'une part  $\langle e_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \rangle = \langle e_j, 0_E \rangle$

D'autre part, par linéarité à droite de  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $\langle e_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{0 \text{ si } k \neq j} = \lambda_j \|e_j\|^2$

Ainsi,  $\lambda_j \|e_j\|^2 = 0$ , d'où  $\lambda_j = 0$  car  $\|e_j\| \neq 0$  car  $e_j \neq 0_E$

Ainsi  $(e_1, \dots, e_n)$ .

Ce résultat s'étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille orthonormée d'éléments de  $E$ , alors  $(e_i)_{i \in I}$  est orthogonale et  $\forall i \in I, \|e_i\| = 1 \neq 0$  donc  $e_i \neq 0_E$

### 3) Base orthonormée et calculs dans une telle base

Définition : Soit  $E$  un espace préhilbertien ou hermitien. On appelle base orthonormée de  $E$  toute famille de vecteurs de  $E$  qui est à la fois orthonormée et une base de  $E$ .

Propriété : Soient  $E$  un espace euclidien ou hermitien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $x \in E$ . Les coordonnées  $x_1, \dots, x_n$  dans la base  $\mathcal{B}$  sont données par  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, x_k = \langle e_k, x \rangle$ .

De sorte que  $x = \sum_{k=1}^n \underbrace{\langle e_k, x \rangle}_{\in \mathbb{K}} e_k$

Propriété : Soient  $E$  un espace euclidien ou hermitien et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Soient  $x, y \in E$  de coordonnées respectives  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  dans la base  $E$ . Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \overline{x_k} y_k = {}^t \overline{X} Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^n |x_k|^2 = {}^t \overline{X} X$$

Où  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$  et  $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

### 4) Procédé d'orthonormalisation et de Gram-Schmidt

Théorème : Soit  $E$  un espace préhilbertien réel ou complexe. Pour toute famille libre  $(u_1, \dots, u_n)$  d'éléments de  $E$ , il existe une famille orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  tq

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$$

Remarque : Pour construire ce genre de famille, on pose  $v_1 = u_1, e_1 = \frac{v_1}{\|e_1\|}$  puis

$$\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^k \langle e_j, u_{k+1} \rangle e_j \quad \text{et} \quad e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$$

Exemple : Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de son p.s. usuel considérons la famille  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$  où

$$u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0)$$

Notons  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$

$$\det(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc  $\mathcal{F}$  est libre (c'est même une base de  $\mathbb{R}^3$ ) donc on peut lui appliquer le procédé d'orthormalisation de Gram-Schmidt.

On pose  $v_1 = u_1$ , alors  $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 2$ , on pose  $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

Puis on pose  $v_2 = u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle e_1 = (1,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), (1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{2}(2, -1, 1)$

Alors  $\|v_2\| = \left\| \frac{1}{2}(2, -1, 1) \right\| = \frac{1}{2}\|2, -1, 1\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Ainsi on pose  $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, 1)$

Enfin on pose  $v_3 = u_3 - \langle e_1, u_3 \rangle e_1 - \langle e_2, u_3 \rangle e_2 = \frac{1}{6}(4, 4, -4) = \frac{2}{3}(1, 1, -1)$

De plus,  $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ , et on pose  $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1)$

Corollaire : Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.

Corollaire : Toute famille orthonormée d'un espace  $E$  euclidien ou hermitien peut être complétée en une base orthonormée de  $E$ .

### III) **Sous-espaces vectoriels orthogonaux**

#### 1) Orthogonal d'une partie

Définition : soit  $A \subset E$ . On appelle orthogonal de  $A$  l'ensemble noté  $A^\perp$ , constitué des éléments de  $E$  orthogonaux à tous les éléments de  $A$ , ie

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}$$

Exemples

- 1)  $\star \{0_E\}^\perp = E$  car  $\forall x \in E, \langle x, 0_E \rangle = 0$
- 2)  $\star E^\perp = \{0_E\}$  car  $0_E$  est le seul élément de  $E$  orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit  $A \subset E$ , alors  $A^\perp$  est un sev de  $E$ .

Propriété : Soit  $A, B \subset E$

- (1) On a  $A \subset (A^\perp)^\perp$
- (2) Si  $A \subset B$ , alors  $B^\perp \subset A^\perp$
- (3)  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$

Propriété : Soit  $F = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$  un sev de  $E$ . Alors  $F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}$

Démonstration :  $\star$  Soit  $x \in F^\perp$ , alors  $\forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$ . Or  $\forall i \in I, e_i \in F$ , donc  $\langle x, e_i \rangle = 0$

Ainsi  $F^\perp \subset \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}$

Réciproquement, soit  $x \in E$  tel que  $\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0$ . Soit  $y \in F = \text{Vect}(e_i)_{i \in I}$

Donc  $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$  et  $\exists i_1, \dots, i_n \in I$  tq  $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}$

$$\text{D'où } \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle x, e_{i_k} \rangle}_{=0} = 0$$

Donc  $x \in F^\perp$  d'où l'inégalité voulue.

Définition : Soient  $F, G$  2 sev de  $E$ . On dit que  $F$  et  $G$  sont orthogonaux si  $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$

3) Supplémentaires orthogonaux d'un sev de dimension finie

Théorème : Soit  $F$  un sev de  $E$  avec  $F$  de dimension finie. Alors  $E = F \oplus F^\perp$ . On appelle  $F^\perp$  le supplémentaire orthogonal de  $F$  dans  $E$ .

En particulier, si  $E$  est euclidien ou hermitien, alors pour tout sev  $F$  de  $E$ ,

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp}$$