<u>Suites de fonctions</u>

<u>Types de convergence</u>

<u>Définition :</u> Suite de fonctions

On appelle suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(f_n)_{n\geq n_0}$ (pour un certain $n_0 \in \mathbb{N}$) où $\forall n, f_n : D \to \mathbb{K}$

Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

<u>Définition :</u> Convergence simple.

On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>converge simplement</u> (CVS) sur $A \subset D$ vers $f : A \to \mathbb{K}$ si :

$\forall x \in A$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f

C'est-à-dire :

$$\forall x \in A, f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

C'est-à-dire :

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

On dira que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A s'il existe une fonction $f : A \to \mathbb{K}$ telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f.

<u>Définition :</u> Domaine de convergence simple

Le domaine de convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de D vers $\mathbb{K}$ est la plus grande partie $A \subset D$ sur laquelle $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS.

<u>Définition :</u> Limite simple

Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f, on dit que f est la limite simple de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur A.

Paramètres préservés par le passage à la limite simple

<u>Propriété :</u> Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\underline{\mathbb{R}}$.On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur $A \subset D$ vers f.

(i) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est positive sur A, f est positive sur A
(ii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est croissante sur A, alors f est croissante sur A
(iii) Si $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est convexe sur un intervalle $I \subset A$, f est convexe sur I.

Paramètres NON conservés par le passage à la limite simple (mais par la convergence uniforme)

(i) La continuité
(ii) Le caractère borné
(iii) L'interversion série-intégrale

Convergence uniforme

Définition : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (CVU) sur $A \subset D$ vers $f : A \to \mathbb{K}$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, (n \geq N \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon)$$

Théorème : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$, $A \subset D$ et $f : A \to \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers f
(ii) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n - f$ est bornée sur A, et :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Théorème : Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers f.

Propriétés préservées par la CVU

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $D \subset \mathbb{R}$ vers $\mathbb{K}$, et A une partie de D.

1. Caractère borné

Propriété :

Si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée sur A.
(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers $f : A \to \mathbb{K}$

Alors f est bornée sur A.

2. Continuité

Théorème : Soit $a \in A$.

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a.
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur A vers une fonction $f : A \to \mathbb{K}$.

Alors f est continue en a.

Corollaire : Si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur A.
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur A vers une fonction $f : A \to \mathbb{K}$.

Alors f est continue sur A.

3. Interversion de limites

Théorème de la double limite :

Soit a un point adhérent à A (ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si A n'est pas majoré (resp. minoré))

On suppose que :

(i) $(f_n)_n$ CVU sur A vers une fonction $f : A \to \mathbb{K}$
(ii) $\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_0$, la fonction f_n admet une limite finie quand $x \to a$ qu'on note ℓ_n

Alors la série $(\ell_n)_{n \geq N_0}$ est convergente, la fonction f admet une limite en a et ces 2 limites sont égales :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)$$

Suites de fonctions & intégration

Intégration sur un segment

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{K}$

Supposons que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur $[a; b]$ vers une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{K}$

Alors f est continue sur $[a; b]$ et $\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{K}$

Supposons que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue par morceaux sur $[a; b]$
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur $[a; b]$ vers une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{K}$
(iii) f est continue par morceaux

Alors $\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$

Intégration sur un intervalle quelconque

Théorème de convergence dominée (TCD)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \in C_m^0(I)$

(ii) $(f_n)_n$ CVS sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{K}, f \in C_m^0(I)$

(iii) (Hypothèse de domination)
$\exists \varphi : I \to \mathbb{R}^+ \in C_m^0(I)$, intégrable sur I, telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in I, |f_n(x)| \leq \varphi(x)$$

Alors pour $n \in \mathbb{N}$, f_n et f sont intégrables sur I et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)dx = \int_I f(x)dx$$

Dérivation

Théorème de dérivation :

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est de classe C^1 sur I

(ii) La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en un point $a \in I$

(iii) La suite de fonctions $(f_n')_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction g

Alors $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers une fonction $f \in C^1(I)$, de dérivée $f' = g$.

Dérivées d'ordre supérieur

Théorème :

Soit $p \in \mathbb{N}^*, I$ un intervalle de $\mathbb{R}, (f_n)_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^p sur I.

(ii) $\forall k \in [\![0; p-1]\!], \left(f_n^{(k)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur I vers une fonction $g_k : I \to \mathbb{K}$

(iii) $\left(f_n^{(p)}\right)_n$ CVU sur tout segment inclus dans I vers une fonction $g_p : I \to \mathbb{K}$

Alors la limite simple $f = g_0$ de $(f_n)_n$ est de classe C^p sur I et $\forall k \in [\![0; p]\!], f^{(k)} = g_k$