Feuille 2 – Développements limités, équivalents

Développements limités	
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1)\ldots\frac{(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n), \alpha \in \mathbb{R}$	
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$	$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n})$	$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + \underset{x\to 0}{o}(x^n)$
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$	$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + \underset{x\to 0}{o}(x^{2n+1})$

Équivalents usuels			
$e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

1) À l'aide d'un équivalent, trouver $\lim_{x\to 0} f(x)$. Valider votre réponse avec la règle de L'Hôpital.
2) Trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 2 : Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

Calculer $l = \lim_{n\to+\infty} g(x)$, et trouver un équivalent en $+\infty$ de $g(x) - l$.

Exercice 3 : Trouver un développement limité à l'ordre 3 en 0 puis un équivalent en 0 des fonctions suivantes :

1) $h(x) = e^{\cos x}$	2) $p(x) = xe^x$	

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)e^{2x}$.

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$
2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer un développement limité de f à l'ordre n en 0.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\geq 2}$ une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} - u_n = \frac{2(1-2n)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$, et $u_2 = \frac{2}{3}$

1) Montrer que $u_n = \frac{\alpha}{n^2-1}$, où α est un réel à déterminer.
2) Trouver un équivalent de u_n en $+\infty$.

Attention : On ne peut pas, en règle générale, composer les équivalents !
$\ln(e^x - 1)$ n'est pas équivalent en 0 à $\ln x$