<u>Théorèmes : Séries de fonctions</u>

<u>Types de convergences</u>

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

<u>Définition :</u> (Série de fonctions)

On appelle <u>série de fonctions</u> de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k$$

On la note $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ et pour $n \geq n_0$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série de fonctions.

Convergence simple et absolue

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

<u>Définition :</u> (Convergence simple)

On dit que $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ s'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers S sur A.

Cette fonction S est appelée la somme de la série $\sum f_n$ sur A et notée :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

<u>Théorème :</u>

On a équivalence entre :

(i) $\sum f_n$ CVS sur A
(ii) $\forall x \in A,\ \sum f_n(x)$ CV

Dans ce cas,

$$\forall x \in A, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

<u>Définition :</u> (Domaine de convergence simple)

On appelle domaine de CVS de $\sum f_n$ la plus grande partie de D sur laquelle $\sum f_n$ CVS.

<u>Propriété :</u>

Si la série de fonction $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

<u>Définition :</u> (Reste d'ordre n)

Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$, on peut définir pour $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n la série de fonctions :

$$\begin{aligned} R_n : A &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \end{aligned}$$

<u>Propriété :</u> Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (sur A) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$$

Et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

<u>Définition :</u> (Convergence absolue simple)

On dit que $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$ si $\sum |f_n|$ CVS sur A ssi $\sum |f_n(x)|$ CV.

<u>Théorème :</u>

Si $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$, alors $\sum f_n$ CVS sur A.

Convergence uniforme

<u>Définition :</u> (Convergence uniforme)

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ CVU sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A.

<u>Propriété :</u> Si $\sum f_n$ CVU sur A alors $\sum f_n$ CVS sur A.

<u>Propriété :</u> Si $\sum f_n$ CVU sur A, alors $(f_n)_n$ CVU sur A vers la fonction nulle.

<u>Propriété :</u> Soit $A \subset D$. On a équivalence entre :

(i) $\sum f_n$ CVU sur A
(ii) $\sum f_n$ CVS sur A et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers la fonction nulle.

Convergence normale

<u>Définition :</u> Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

On dit que $\sum f_n$ CVN sur $A \subset D$ si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur A.
(ii) $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ <u>converge</u>

Théorème : ⍟

Si $\sum f_n$ CVN sur A, alors :

(i) $\sum f_n$ CVAS sur A.
(ii) $\sum f_n$ CVU sur A.

Continuité et limites

Continuité

Théorème : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Supposons que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A
(ii) $\sum f_n$ CVU sur A

$$\text{Alors } S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est continue sur } A$$

Corollaire : Soit I un intervalle inclus dans D. Si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I
(ii) $\sum f_n$ CVU sut tout segment inclus dans I

Théorème : (d'interversion $\lim/\sum$ ou de la double limite)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$

Soit $a \in \overline{A}$ (ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si A est non majoré (resp. non minoré)

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite finie en a notée l_n
(ii) $\sum f_n$ CVU sur A

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n$ CV, $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a et $S(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$, ie :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Remarque : à partir de maintenant, les fonctions sont uniquement à valeurs réelles

Séries de fonctions & intégrales

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$

Intégration sur un segment

<u>Théorème :</u> (d'interversion $lim/\int$)

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{K}$

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$
(ii) $\sum f_n$ CVU sur $[a; b]$

Alors $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a; b]$, et la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(t)dt$ converge vers $\int_a^b S(t)\, dt$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$$

Intégration sur un intervalle quelconque

<u>Théorème d'intégration terme à terme :</u>

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est c.p.m sur I et <u>intégrable</u> sur I.
(ii) $\sum f_n$ CVS sur I et $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est c.p.m sur I
(iii) La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n(t)| dt$ converge

Alors S est intégrable sur I et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \right)$$

<u>Séries de fonctions et dérivation</u>

Fonctions de classe C^1

<u>Théorème :</u> Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^1 sur I
(ii) $\sum f_n$ CVS en un point $a \in I$
(iii) $\sum f_n'$ CVU sur tout segment inclus dans I

Alors $\sum f_n$ CVU sur tout segment inclus dans I, sa fonction somme $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$

Exemple : Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx}$ pour $x > 0$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{-nx}$

- $\forall n, f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0, f_n'(x) = -ne^{-nx}$
- Soit $x > 0$ (fixé)
  La série numérique $\sum f_n(x) = \sum (e^{-x})^n$ est une série géométrique de raison e^{-x} avec $|e^{-x}| < 1$ puisque $x > 0$ donc $\sum f_n(x)$ CV.

  Ainsi $\sum f_n$ CVS sur $\mathbb{R}_+^*$

- Soit $n \in \mathbb{N}$,
  $\forall x > 0, |f_n'(x)| = ne^{-nx}$ donc $|f_n'|$ est décroissante sur $]0; +\infty[$ et $\lim_{x\to 0}|f_n'(x)| = n$, donc la fonction f_n' est bornée sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*} = \lim_{x\to 0}|f_n'(x)| = n$ qui ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
  Donc $\sum\|f_n'\|_{\infty,\mathbb{R}_+^*}$ DVG. Ainsi $\sum f_n'$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+^*$.
  Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*, (0 < a < b)$
  La fonction f_n' est bornée sur le segment $[a, b]$ et
  $$\|f_n'\|_{\infty,[a,b]} = |f_n'(a)| = ne^{-na} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
  Donc par comparaison de SATP, $\sum\|f_n'\|_{\infty,[a,b]}$ CV, donc $\sum f_n'$ CVN sur $[a, b]$ donc CVU sur $[a, b]$
  Donc par le théorème de dérivation, la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x > 0$,
  $$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} ne^{-nx} = -T(x)$$
  Donc $\forall x > 0, T(x) = -S'(x)$, or par sommation géométrique,
  $$S(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$
  D'où $T(x) = \frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}$
  Dérivées d'ordres supérieurs

<u>Théorème :</u> Soient $p \in \mathbb{N}^*, I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est de classe C^p sur I.

(ii) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ CVS sur I

(iii) $\sum f_n^{(p)}$CVU sur tout segment inclus dans I

Alors la fonction somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^p sur I et $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(k)}$

Démonstration : Notons $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$

(i) $\forall n, S_n$ est de classe C^p sur I.

(ii) $\forall k \in [\![0, p-1]\!]$, $\left(S_n^{(k)}\right)_n$ CVS sur I par linéarité de la dérivation.

(iii) $\left(S_n^{(p)}\right)_n$ CVU sur tout segment inclus dans I

Donc on peut appliquer le théorème de dérivation à la suite de fonction $(S_n)_n$

□

Remarque : la démo donne aussi que $\forall k \in [\![0, p]\!]$, $\sum f_n^{(k)}$ CVU sur tout segment inclus dans I