Théorème :

Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda > 1$

Démonstration : Posons

$f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$

$\quad t \mapsto \frac{1}{t^\lambda} \left(= e^{-\lambda \ln t}\right)$

est continue sur $[a\,; +\infty[$

Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f(t)\,dt$ quand $x \to +\infty$

- Cas où $\lambda \neq 1$

Soit $x > a$:

$$\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt = \int_a^x t^{-\lambda}\, dt$$
$$= \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_a^x$$
$$= \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda}$$

Or $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ 1 \text{ si } \lambda = 0 \\ 0 \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } 1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1 \\ -\frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda} \in \mathbb{R} \text{ si } 1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1 \end{cases}$

- Cas où $\lambda = 1$

Soit $x > a$, $\int_a^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda > 1$.

Théorème :

Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\int_0^a \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda < 1$

Démonstration : Posons

$f :]0\,; a] \to \mathbb{R}$

$\quad t \mapsto \frac{1}{t^\lambda} \left(= e^{-\lambda \ln t}\right)$

est continue sur $]0\,; a]$

Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite finie de $\int_x^a f(t)\,dt$ quand $x \to 0^+$

- Cas où $\lambda \neq 1$

Soit $0 < x < a$:

$$\int_x^a \frac{1}{t^\lambda} dt = \int_x^a t^{-\lambda}\, dt$$
$$= \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_x^a$$
$$= \frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda} x^{1-\lambda}$$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda} a^{1-\lambda} \text{ si } 1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1 \\ +\infty \text{ si } 1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1 \end{cases}$

- Cas où $\lambda = 1$

Soit $0 < x < a$, $\int_x^a \frac{1}{t} dt = \ln a - \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda < 1$.

Théorème (IPP généralisée) :

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^1. Si l'intégrale $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$ converge et si la fonction uv admet des limites finies en α^+et β^-, alors $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt$ converge et on a :

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$$

Démonstration :

Comme u, v sont de classe C^1 sur I, uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Notons G une primitive de uv', alors $H = uv - G$ est une primitive de $u'v$ (car H est dérivable sur I) et $H' = u'v$.

Comme $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$ converge, G admet des limites finies en α^+et β^-, comme uv (par hypothèse), donc H admet aussi des limites finies en α^+et β^-, donc $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt$ converge.

De plus, $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt = [H]_\alpha^\beta$

$$= [uv]_\alpha^\beta - [G]_\alpha^\beta$$
$$= [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$$

Exemples de fonctions intégrables

1) Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. La fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ ssi $\lambda > 1$ et intégrable sur $]0; a]$ ssi $\lambda < 1$.
2) La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, f est continue positive, donc $|f| = f$.
   Une primitive de f est $F : t \mapsto -e^{-t}$, avec $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $F(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} -1$
   Donc $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge (et vaut 1).
3) Toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Propriété : Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J, et $f, g : J \to \mathbb{C}$

1. Si $f(x) = \circ\,(\mathrm{g(x)})$, alors $f(x) = \mathcal{O}(\mathrm{g(x)})$
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ et $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$

Démonstration :

1. Si $f(x) = \circ\,\big(g(x)\big)$, alors $\exists\varepsilon$ définie sur un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
   Alors $\exists W \subset V$ tel que $\forall x \in W, |\varepsilon(x)| \leq 1$
   D'où $\forall x \in W, |f(x)| = |g(x)||\varepsilon(x)|$
   $\leq 1 \times |g(x)|$
   Donc $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.
2. Supposons que $f(x) \sim g(x)$
   Alors $\exists\varepsilon$ définie sur un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$, avec $\varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.
   Alors $\exists W \subset V$ tel que $\forall x \in W, |\varepsilon(x)| \leq 1$
   D'où $\forall x \in W, |f(x)| = |g(x)||1 + \varepsilon(x)|$
   $\leq |g(x)|(1 + |\varepsilon(x)|)$
   $\leq 2|g(x)|$
   Donc $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.
   Et comme la relation d'équivalence est symétrique, on a bien $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$

Théorème : Intégrales de Bertrand

Soient $b > 1, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda (\ln(t))^\mu}$ est intégrable sur $[b; +\infty[$ ssi $\lambda > 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$)

Démonstration :

Posons $f : [b;\ +\infty[\to \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^\lambda (\ln(t))^\mu}$. f est continue et à valeurs >0

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\frac{f(t)}{\frac{1}{t^\lambda}} = \frac{1}{t^{\lambda-\gamma}(\ln(t))^\mu} \to \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda - \gamma > 0 \Leftrightarrow \lambda > \gamma \\ +\infty \text{ si } \lambda - \gamma < 0 \Leftrightarrow \lambda < \gamma \end{cases}$$

- Si $\lambda > 1$, on pose $\gamma = \frac{1+\lambda}{2}$. Alors $1 = \frac{1+1}{2} < \gamma < \frac{\lambda+\lambda}{2} = \lambda$

  D'où $\frac{f(t)}{\frac{1}{t^\lambda}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ car $\lambda > \gamma$

  Donc par la règle de Riemann, comme $t \mapsto \frac{1}{t^\gamma}$ est intégrable (car $\gamma > 1$), alors f l'est également.
- Si $\lambda < 1$, on pose $\gamma = 1$,

  $$\frac{f(t)}{\frac{1}{t}} = \frac{t^{1-\lambda}}{(\ln t)^\lambda} \xrightarrow[t \to +\infty]{} +\infty \quad \text{par croissances comparées}$$

  Donc il existe $B > b$ tel que pour tout $t \geq B, \frac{f(t)}{\frac{1}{t}} \geq 1$

  D'où $f(t) \geq \frac{1}{t} \geq 0$

  Or $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[B;\ +\infty[$ donc par comparaison de fonctions à valeurs positives, f n'est pas intégrable sur $[B; +\infty[$ et donc sur $[b; +\infty[$
- Si $\lambda = 1$,

  $$\int_b^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^\mu} = \int_b^{+\infty} \frac{\frac{1}{t}}{(\ln t)^\mu} dt$$

  Qui a même nature que

  $$\int_{\ln(b)}^{+\infty} \frac{1}{u^\mu} du$$

  Qui converge ssi $\mu > 1$

Corollaire :

Soient $a \in]0; 1[, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda |\ln t|^\mu}$ est intégrable sur $]0; a]$ ssi $\lambda < 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$)

Démonstration :

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\lambda |\ln t|^\mu}$ est C^0 à valeurs >0 sur $]0; a]$, donc

$$f \text{ intégrable sur }]0\ ; a] \Leftrightarrow \int_0^a f(t) dt$$

Par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$,

$$\int_0^a f(t)dt \text{ a même nature que } \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{u^\lambda}{|\ln t|^\mu} \times \frac{1}{u^2} dt = \int_{\frac{1}{a}}^{+\infty} \frac{1}{u^{2-\lambda}|\ln t|^\mu} dt$$

Or $\frac{1}{a} > 1$, donc f intégrable sur $]0\ ; a] \Leftrightarrow 2 - \lambda > 1$ ou ($2 - \lambda = 1$ et $\mu > 1$)

$\Leftrightarrow \lambda > 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$)