

Théorèmes – Réductions géométriques

Sommes directe d'une famille de sev

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Définition : (Somme de sev)

Soient F_1, \dots, F_m des sev de E . On appelle somme des sev F_1, F_2, \dots, F_m l'ensemble :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \dots + F_m &= \{f_1 + \dots + f_m \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, e = f_1 + \dots + f_m\} \end{aligned}$$

Propriété :

Soient F_1, \dots, F_m des sev de E , alors $F_1 + \dots + F_m$ est un sev de E .

Définition : (Somme directe de sev)

Soient F_1, \dots, F_m des sev de E . On dit que la somme $F_1 + \dots + F_m$ est directe si :

$$\forall x \in F_1 + \dots + F_m, \exists! (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = f_1 + \dots + f_m$$

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ ou $\bigoplus_{i=1}^m F_i$

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient F_1, \dots, F_m des sev de E . Alors

Les sev F_1, \dots, F_m sont en somme directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, f_1 + \dots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, f_i = 0_E$$

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient F_1, \dots, F_m des sev de E . Si F_1, \dots, F_m est en somme directe, alors :

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket, i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie. Soient F_1, \dots, F_m des sev de E . On a :

La somme $F_1 + \dots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \dots + F_m) = \sum_{i=1}^m \dim(F_i)$$

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F_1, \dots, F_m des sev de E . On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$$

\Leftrightarrow

Pour toutes bases respectives B_1, \dots, B_m de F_1, \dots, F_m ,

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ forme une base de E

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} E = F_1 + \dots + F_m \\ \dim E = \sum_{i=1}^m \dim(F_i) \end{cases}$$

Définition : (Base adaptée)

Soit F_1, \dots, F_m des sev de E tq $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$

On appelle base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$ toute base B de E obtenue par concaténation de bases respectives B_1, \dots, B_m de F_1, \dots, F_m , ie toute base de la forme $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ où $\forall i \in \llbracket 1, m \rrbracket, B_i$ est une base de F_i .

Sous-espaces stables

Définition : (Sous-espace stable)

Un sev F de E est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient F et G deux sev de E stables par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u .

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker u$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par v .

Définition : (Endomorphismes induite)

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u . On définit l'endomorphisme induit par u sur F par :

$$\begin{aligned} u_F : F &\rightarrow F \\ x &\mapsto u(x) \end{aligned}$$

Propriété : (Combinaisons linéaires d'endomorphismes stables)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u ET v . Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, F$ est stable par $\lambda u, u + v, u \circ v$

De plus, $(\lambda u)_F = \lambda u_F, (u + v)_F = u_F + v_F, (u \circ v)_F = u_F \circ v_F$

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable de u . Alors $\ker u_F = \ker u \cap F, \text{Im } u_F \subset \text{Im } u \cap F$

Corollaire : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u . Si u est injectif, u_F l'est aussi.

Version matricielle en dimension finie

Soit E un \mathbb{K} -ev, $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : Soit F un sev de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, et $F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F . On complète F en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

On a équivalence entre :

- (i) F est stable par u
- (ii) La matrice de u dans B est de la forme $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$

Si c'est le cas, $A = Mat_F(u_F)$

Propriété : Soient F_1, \dots, F_m des sev de E tq $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. Soit $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

- (i) $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, F_i$ est stable par u
- (ii) La matrice de u dans B est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i \in M_{d_i}(\mathbb{K}), d_i = \dim(F_i)$$

De plus, si c'est le cas, $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, A_i = Mat_{B_i}(u_{F_i})$

Éléments propres

On considère E un \mathbb{K} -ev non réduit à $\{0_E\}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition : $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, il y a unicité de λ

Le scalaire λ est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre x .

Définition : On appelle valeur propre tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u , noté $Sp(u)$.

Sous-espace propre

Définition :

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ l'espace formé des vecteurs $x \in E$ solutions de $u(x) = \lambda x$.

Propriété :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

- (i) $\lambda \in Sp(u)$
- (ii) $E_\lambda(u) \neq \{0\}$
- (iii) $u - \lambda Id_E$ non injectif

Définition : (Sous-espace propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u , le sev $E_\lambda(u)$ est appelé sous-espace propre de u associé à λ .

Stabilité et somme directe des sous-espaces propres

Propriété : Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et $\forall \lambda \in Sp(u)$,

$$u_{E_\lambda(u)} = \lambda Id_{E_\lambda(u)}$$

Propriété : Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $v \circ u = u \circ v$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v .

Théorème : Des sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u sont en somme directe, c'est-à-dire si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(u)$, avec $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$, alors $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n}(u)$ est en somme directe.

Corollaire : Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres de u 2 à 2 distinctes est libre.

Corollaire : Si E est de dimension finie, $\dim E = n$, alors $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Éléments propres en dimension finie

Dans cette partie E est un \mathbb{K} -ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Éléments propres d'une matrice carrée

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$

On dit que X est un vecteur propre de A , associé à la valeur propre λ . L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A noté $Sp(A)$.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ le sev formé des éléments

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X$$

Corollaire : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semblables, alors $Sp(A) = Sp(B)$.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

La matrice $XI_n - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & \dots & \\ -a_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Et $\det(XI_n - A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^n (\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}) \in \mathbb{K}[X]$

Où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

Définition : (Polynôme caractéristique)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A noté $\mathcal{X}_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$

Théorème :

Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ a pour coefficient dominant 1 et est de degré n . Il possède les coefficients suivants :

$$\mathcal{X}_A = X^n - \text{Tr}(A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A$$

Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

- (i) λ est valeur propre de A
- (ii) λ est racine de \mathcal{X}_A

Corollaire :

- 1) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, A possède au plus n valeurs propres distinctes dans \mathbb{K} .
- 2) Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A possède au moins une valeur propre complexe.

Propriété : Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$

La matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & \ddots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Le polynôme caractéristique de C_P est P .

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Propriété : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 2 matrices semblables. Alors $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

Définition : On appelle polynôme caractéristique commun aux matrices représentant u , ie \mathcal{X}_u est le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de u .

Théorème : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, le polynôme caractéristique de u est unitaire, de degré n , et est de la forme :

$$\mathcal{X}_u = X^n - \text{Tr}(u)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det u$$

Corollaire : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, u possède n valeurs propres distinctes (dans \mathbb{K}).

Corollaire : Tout endomorphisme d'un \mathbb{C} -ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre complexe.