Continuité des fonctions vectorielles – Démonstrations

Exemple : ⍟

1) Pour une fonction constante.

   Soit $C \in F$. Soit $f : E \to F$
   $$x \mapsto C \in F$$
   Soit $a \in E$.

   Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, alors
   $$\forall x \in E, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-C\|_F = \|C-C\|_F = 0 < \varepsilon$$
   C'est toujours vrai, donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, considérons $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   $$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$
   Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

   Soit $\varepsilon > 0$

   Posons $\eta = \varepsilon > 0$ (on a complété après)

   Alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
   $$\max_{1\leq k\leq n} |x_k - a_k| = \|x-a\|_\infty \leq \eta$$
   $$\Longrightarrow |p_i(x) - a_i| = |x_i - a_i| \leq \|x-a\|_\infty \leq \eta = \varepsilon$$
   Donc $p_i(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_i$

Proposition : Les applications lipschitziennes sont continues.

Démonstration ⍟

Supposons que $f : X \subset E \to F$ est lipschitzienne, alors $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in X$,
$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$$
Soit $a \in X$. Montrons que f est continue en a.

Si $k \neq 0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$

Alors $\forall x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-f(a)\|_F \leq k\|x-a\|_E \leq k\eta \leq \varepsilon$.

Donc f est continue en a

Si $k = 0$,

$\forall x, y \in X, 0 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq 0 \times \|x-y\|_E = 0$

Donc $\|f(x)-f(y)\|_F = 0$, d'où $f(x) = f(y)$.

Ainsi f est constante, donc continue.

Exemple : ⍟

$\| \ \|_E : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschtzienne, car $\forall x, y \in E$,
$$\big|\|x\|_E - \|y\|_E\big| \leq 1 \times \|x-y\|_E$$
Par l'inégalité triangulaire inversée.

Ainsi $\| \ \|_E$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$