Chapitre 5 – Isométries en dimension 2 et 3

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_n))$

$$= \det(X_1, \dots, X_n) \text{ où } \forall k \in [\![1, n]\!], X_k = \mathrm{Mat}_B(x_k)$$

Si B' est une autre base de E, si on note, $\forall k \in [\![1, n]\!], X'_k = \mathrm{Mat}_{B'}(x_k)$ et $P = Pass_{B \to B'}$

Alors $X_k = PX'_k$.

Donc $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det(PX'_1, \dots, PX'_n) = \det(P)\det(X'_1, \dots, X'_n) = \det_B(B') \times \det_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

1) Espaces euclidiens orientés

On se fixe une b.o.n $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Pour toute base orthonormée B de E, on sait que $P = Pass_{B_0 \to B} \in O_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\det(P) = \pm 1$

Ainsi l'ensemble des bases orthonormées de E peut donc s'écrire comme l'union disjointe :

$$\{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = 1 \} \cup \{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = -1 \}$$

On dit que B a la même orientation que B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) > 0$.

On dit que B inverse l'orientation de B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) < 0$.

La base B_0 est appelée base de référence pour l'orientation de E.

Orienter l'espace euclidien consiste à choisir une b.o.n B_0 de B de référence et adopter le vocabulaire suivant :

Définition : Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée B_0. Soit B une b.o.n de E, on dit que la base B est directe si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = +1$ et indirecte si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = -1$

Remarque :

1) B_0 est une base directe puisque $Pass_{B_0 \to B_0} = I_n \in SO_n(\mathbb{R})$
2) L'ordre des éléments de la base orthonormée B est important
3) À partir d'une b.o.n indirecte de E, on peut toujours construire une b.o.n directe de E en multipliant l'un des vecteurs par -1.

Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors le déterminant $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans n'importe quelle b.o.n directe de E. On le nomme le produit mixte de la famille $(x_1, \dots x_n)$ et on le note $[x_1, \dots x_n] = \det_B(x_1, \dots, x_n)$ $\forall B$ b.o.n directe de E.

Remarque :

Par propriétés des déterminants, on a :

$[x_1, \dots, x_n] = 0 \Leftrightarrow$ la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

2) Classification des isométries en dimension 2

Dans toute cette partie, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Rotation du plan orienté

Théorème : Une isométrie directe du plan orienté E a la même matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe de E. Plus précisément, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $\forall B$ b.o.n directe de E,

$$\mathrm{Mat}_B(u) = R_\theta$$

On dit alors que u est la rotation d'angle θ et on la note $u = Rot_\theta$

Remarque : comprendre l'unicité modulo 2π comme suit, si $\exists \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que $R_\theta = R_{\theta'}$ alors

$$\theta \equiv \theta'[2\pi]$$

Définition : Soient $x, y \in E$ non nuls. Il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$. On appelle alors mesure de l'angle orienté de x à y le réel θ unique à 2π près tel que $r = Rot_\theta$ et on note $\widehat{(x,y)} \equiv \theta[2\pi]$.

Si de plus, $\theta \in]-\pi;\pi]$, on dit que θ est la mesure principale de l'angle orienté de x à y.

Proposition : pour tous $x, y, z \in E\backslash\{0_E\}$

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \widehat{(\lambda x, \mu y)} \equiv \widehat{(x,y)}[2\pi]$

(ii) $\widehat{(x,y)} \equiv \widehat{(x,z)} + \widehat{(z,y)}\ [2\pi]$

(iii) $\widehat{(y,x)} \equiv -\widehat{(x,y)}\ [2\pi]$

Proposition : Soient $x, y \in E\backslash\{0_E\}$. Notons $\theta \equiv \widehat{(x,y)}\ [2\pi]$. Alors

$$\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad [x,y] = \|x\|\|y\|\sin(\theta)$$

Où $[x,y]$ désigne le produit mixte de x et y. (on a $[x,y] = \det_B(x,y)$ pour toute base orthonormée directe B de E.

Démonstration ⍟

Comme $\frac{x}{\|x\|}$ est de norme 1, on peut connaître une b.o.n directe $\mathcal{B} = \left(\frac{x}{\|x\|}, u\right)$ de E. Alors comme

$\frac{y}{\|y\|} = \mathrm{Rot}_\theta\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Rot}_\theta\ ) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Or $\frac{y}{\|y\|} = \cos\theta\ \times \frac{x}{\|x\|} + \sin\theta\ \times u \Leftrightarrow y = \|y\|\cos\theta\ \times \frac{x}{\|x\|} + \|y\|\sin\theta\ \times u$

Alors $\langle x, y\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle + \|x\|\|y\|\sin\theta\left\langle\frac{x}{\|x\|}, u\right\rangle = \|x\|\|y\|\cos\theta$

Théorème : Soient u une isométrie indirecte du plan E (ie $u \in O(E)$ avec $\det(u) = -1$) et $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Et u correspond à la réflexion par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$$

Théorème : Les endomorphismes orthogonaux directs du plan orienté E sont les rotations vectorielles. Celles-ci commutent entre elles et ont même représentation matricielle dans toute base orthonormée directe de E. Les endomorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions.

Corollaire : Dans le plan, la composée de deux rotations est une rotation, la composée de deux réflexions est une rotation, et la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.

Classification des isométries en dimension 3

Théorème : Soit $u \in SO(E)$ une isométrie directe de E. Alors 1 est nécessairement valeur propre de u, et si l'on prend $a \in \ker(u - Id_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ, à 2π près, tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de premier vecteur a,

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

On dit alors que u est la rotation d'axe dirigé et orienté par a et d'angle orienté par θ. On la notera $\mathrm{Rot}_{a,\theta}$.

Théorème : Soit $u \in O(E) \backslash SO(E)$ une isométrie indirecte de E. Alors -1 est nécessairement valeur propre de u, et si l'on prend $a \in \ker(u + Id_E)$ unitaire, il existe un unique réel θ, à 2π près, tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de premier vecteur a,

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Ainsi, u est la rotation d'axe D dirigé et orienté par a et d'angle θ avec la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$.

Définition : Soient $x, y \in E$ de dimension 3. On appelle produit vectoriel de x par y, noté $x \wedge y$, l'unique élément de E tel que :

$$\forall z \in E, [x, y, z] = \langle x \wedge y, z \rangle$$

Proposition : L'application produit vectoriel

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$$

est bilinéaire antisymétrique :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y, t) \in E^3, (\lambda x + y) \wedge t = \lambda(x \wedge t) + (y \wedge t) \text{ et } y \wedge x = -x \wedge y$$

Proposition : Soient $x, y \in E$

(i) $x \wedge y$ est orthogonal à x et y, ie $\langle x \wedge y, x\rangle = 0$ et $\langle x \wedge y, y\rangle = 0$.

(ii) La famille (x, y) est libre si et seulement si $x \wedge y \neq 0$.

<u>Proposition :</u> Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormée directe de E. Pour $x, y \in E$, notons

$$x = \sum_{k=1}^{3} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^{3} y_k e_k$$

Avec $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$, alors

$$x \wedge y = (x_2 y_3 - x_3 y_2) e_1 + (x_3 y_1 - x_1 y_3) e_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1) e_3$$

<u>Proposition :</u> Si $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est ne base orthonormée directe de E, alors la famille $(x, y, x \wedge y)$ est une base orthonormée directe de E.