Topologie des espaces vectoriels normés

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ et E sont deux ouverts de E
   En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\} \subset E$
   Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \emptyset$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alors $]a,b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,
   $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$
   $=]x-r, x+r[$
   Montrons que $]a,b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$
   Posons $r = \min(x-a, b-x)$, alors $r > 0$
   Soit $y \in]x-r, x+r[$, alors $x - r \leq y \leq x + r$
   Donc $a < y < b$
   Donc $\mathcal{B}(x,r) \subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est ouvert.

Exemples à propos des ouverts ⍟

1) $\emptyset$ est un fermé de E car $E \backslash \emptyset = E$ est un ouvert de E
   E est un fermé de E car $E \backslash E = \emptyset$ est un ouvert de E
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $[a,b],]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, $\mathbb{R} \backslash [a,b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'union d'ouverts de $\mathbb{R}$.
3) Dans $(E, \|\cdot\|), \forall a \in E, \{a\}$ est un fermé de E. On va montrer que $E \backslash \{a\}$ est un ouvert de E.
   Soit $x \in E \backslash \{a\}$, posons $r = \|x - a\|$, alors $r > 0$ car $x \neq a$.
   Soit $y \in B(x,r)$, montrons que $y \in E \backslash \{a\}$
   Supposons par l'absurde que $y \notin E \backslash \{a\}$ ie $y = a$
   Alors $\|a - x\| = \|y - x\| < r$, Absurde.
   Ainsi $y \in E \backslash \{a\}$, d'où $B(x,r) \in E \backslash \{a\}$
   Donc $E \backslash \{a\}$ est un ouvert de E

Exemple : ⍟

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de E.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{B}(a,r)$ qui converge vers l (dans $(E, \|\cdot\|)$).

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \overline{B}(a,r)$, ie $\|x_n - a\| \leq r$

Essayons de montrer que $\underbrace{\|x_n - a\|}_{\in\mathbb{R}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\|l - a\|}_{\in\mathbb{R}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \big|\|x_n - a\| - \|l - a\|\big| \underset{\text{ineg. tri. inv.}}{\leq} \|(x_n - a) - (l - a)\| = \|x_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|l - a\|$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la première inégalité, il vient :

$$\|l - a\| \leq r \Longrightarrow l \in \overline{B}(a,r)$$

Ainsi par caractérisation séquentielle des fermés, $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de E.

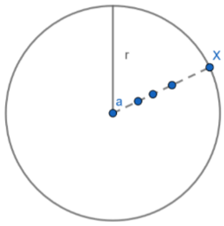
De même, $S(a,r)$ est un fermé de E (même preuve en remplaçant les $\overline{B}(a,r)$ par $S(a,r)$).

Exemple : ⍟

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ et $r > 0$.

On va montrer que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$

- On a vu que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé contenant $B(a,r)$ donc par la propriété 2.7,
$$\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$$
- On a $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$, or $B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Reste donc à montrer que
$$S(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$$



Soit $x \in S(a,r)$, on va construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a,r)$ qui converge vers x

Posons $u = \frac{x-a}{\|x-a\|} = \frac{1}{r}(x-a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \underbrace{a}_{\in E} + r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\underbrace{u}_{\in E}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| = \left|r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right| \|u\| = r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < r$

Ainsi $x_n \in B(a,r)$

Enfin, $\|x_n - x\| = \left\|a + r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{1}{r}(x-a) - x\right\| = \left\|-\frac{1}{n+1}(x-a)\right\| = \frac{1}{n+1} r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ie $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Donc $x \in \overline{B(a,r)}$, ce qui amène à l'inclusion voulue.