Feuille 3 – Corrigé

Exercice 1 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,
$$1 + \tan(x) = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$
2. On a $f(x) = \sin^2(x)\,(1 + \tan^2(x)) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x)$
   Donc $f'(x) = 2(1 + \tan^2(x))\tan(x) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x)$

Exercice 2 :

Rappel : on a arccos : $]-1;1[\,\to\,]0;\pi[$ et arcsin : $]-1;1[\,\to\,]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Donc $\arccos(\cos x) = x \Leftrightarrow x \in]0;\pi[$ et $\arcsin(\sin x) = x \ \Leftrightarrow x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Ainsi :

- $\arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$
- $\arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \frac{2\pi}{3}$
- $\arcsin\left(\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -\frac{2\pi}{3}$
- $\arccos\left(\sin\left(\frac{17\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{9}{10}\pi\right)\right) = \frac{9\pi}{10}$

Exercice 3 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = 2\cos(x)$. Ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \lim\limits_{x\to 0} 2\cos(x) = 2$
2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{3}{2}\times\frac{\sin(3x)}{3x} = \frac{3}{2}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, 44\cos(\sqrt{x}) \geq -44$. Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 8x^2 - 44 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3\left(1 - \frac{8}{x} - \frac{44}{x^3}\right) = +\infty$
   Donc par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 - 8x^2 + 44\cos(\sqrt{x}) = 0$

Exercice 4 :

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}, \tan(a + b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\sin(b)\cos(a)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$
$$= \frac{(\cos(a)\cos(b))\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)}{(\cos(a)\cos(b))\left(1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)}$$
$$= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
   Or la fonction tangente est impaire, donc :
$$\tan(a - b) = \tan(a + (-b)) = \frac{\tan(a) + \tan(-b)}{1 - \tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$$
2. Soit $x, y \in \mathbb{R}, \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = \frac{3x+2y}{12}$
   Ainsi on a $3x + 2y = \pi$, donc on peut prendre le couple $(x, y) = (\pi, -\pi)$, qui convient.
3. On a $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$, donc $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}$
   Or $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ et $\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
   Donc $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{(1-\frac{\sqrt{3}}{3})^2}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = 2 - \sqrt{3}$
4. Soient $x, y \in \mathbb{Q}, z \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, et supposons par l'absurde que la somme d'un nombre rationnel et d'un nombre irrationnel soit un nombre rationnel, c'est-à-dire $x = y + z$

On a alors $z = x - y \in \mathbb{Q}$. C'est absurde.

5. On a bien $2 - \sqrt{3} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ car $2 \in \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

<u>Exercice 5 :</u>

1. Supposons $\alpha \in \mathbb{Q}$, ie qu'il existe $p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{Z}^*, \alpha = \frac{p}{q}$

   Alors :

   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(x + 2\pi) = \cos(x + 2\pi) + \cos\left(\frac{p}{q}x + 2\pi p\right) = \cos(x) + \cos\left(\frac{p}{q}x\right) = f(x)$$

2. Prouvons la contraposée et supposons que f est périodique. On sait que $f(0) = 2$. Or si f est T-périodique, alors $f(T) = 2$. Donc il existe $T \in \mathbb{R}^*$, tel que $f(T) = 2$.

   Ainsi cela entraîne $\cos(x) = 1$ et $\cos(\alpha x) = 1$, càd :

   $$\begin{cases} x = 2k\pi, k \in \mathbb{R} \\ \alpha x = 2\pi l, l \in \mathbb{R} \end{cases}$$
   $$\Rightarrow 2k\pi = \frac{2l\pi}{\alpha}$$
   $$\Rightarrow \alpha = \frac{l}{k}$$

   Donc α est rationnel.