

Continuité des fonctions vectorielles – Démonstrations

Exemple : ⚡

- 1) Pour une fonction constante.

Soit $C \in F$. Soit $f : E \rightarrow F$

$$x \mapsto C \in F$$

Soit $a \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, alors

$$\forall x \in E, \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - C\|_F = \|C - C\|_F = 0 < \varepsilon$$

C'est toujours vrai, donc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = C$

- 2) Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, considérons $p_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

Soit $\varepsilon > 0$

Posons $\eta = \varepsilon > 0$ (on a complété après)

Alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| &= \|x - a\|_\infty \leq \eta \\ \Rightarrow |p_i(x) - a_i| &= |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty \leq \eta = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc $p_i(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_i$