Chapitre 5 – Isométries en dimension 2 et 3

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\det\limits_B(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_n))$

$$= \det(X_1, \dots, X_n) \text{ où } \forall k \in [\![1, n]\!], X_k = \mathrm{Mat}_B(x_k)$$

Si B' est une autre base de E, si on note, $\forall k \in [\![1, n]\!], X'_k = \mathrm{Mat}_{B'}(x_k)$ et $P = Pass_{B \to B'}$

Alors $X_k = PX'_k$.

Donc $\det\limits_B(x_1, \dots, x_n) = \det(PX'_1, \dots, PX'_n) = \det(P)\det(X'_1, \dots, X'_n) = \det\limits_B(B') \times \det\limits_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

1) Espaces euclidiens orientés

On se fixe une b.o.n $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Pour toute base orthonormée B de E, on sait que $P = Pass_{B_0 \to B} \in O_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\det(P) = \pm 1$

Ainsi l'ensemble des bases orthonormées de E peut donc s'écrire comme l'union disjointe :

$$\{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = 1 \} \cup \{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = -1 \}$$

On dit que B a la même orientation que B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) > 0$.

On dit que B inverse l'orientation de B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) < 0$.

La base B_0 est appelée base de référence pour l'orientation de E.

Orienter l'espace euclidien consiste à choisir une b.o.n B_0 de B de référence et adopter le vocabulaire suivant :

Définition : Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée B_0. Soit B une b.o.n de E, on dit que la base B est directe si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = +1$ et indirecte si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = -1$

Remarque :

1) B_0 est une base directe puisque $Pass_{B_0 \to B_0} = I_n \in SO_n(\mathbb{R})$
2) L'ordre des éléments de la base orthonormée B est important
3) À partir d'une b.o.n indirecte de E, on peut toujours construire une b.o.n directe de E en multipliant l'un des vecteurs par -1.

Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors le déterminant $\det\limits_B(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans n'importe quelle b.o.n directe de E. On le nomme le produit mixte de la famille $(x_1, \dots x_n)$ et on le note $[x_1, \dots x_n] = \det\limits_B(x_1, \dots, x_n)$ $\forall B$ b.o.n directe de E.

Remarque :

Par propriétés des déterminants, on a :

$[x_1, \dots, x_n] = 0 \Longleftrightarrow$ la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

2) **Classification des isométries en dimension 2**

Dans toute cette partie, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Rotation du plan orienté

Théorème : Une isométrie directe du plan orienté E a la même matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe de E. Plus précisément, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $\forall B$ b.o.n directe de E,

$$\mathrm{Mat}_B(u) = R_\theta$$

On dit alors que u est la rotation d'angle θ et on la note $u = Rot_\theta$

Remarque : comprendre l'unicité modulo 2π comme suit, si $\exists \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que $R_\theta = R_{\theta'}$ alors

$$\theta \equiv \theta' [2\pi]$$