Points d'attention : DS1

- Injectivité : pour des fonctions avec un produit, vérifier quand les produits s'annulent.
  Exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x(x-1)(x-2)$ *n'est pas injective :* f *s'annule en 1 et en 2*
- Si la dérivée d'une fonction n'est pas strictement positive (resp. négative) mais qu'elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors cette fonction reste strictement croissante (resp. strictement décroissante).
  Exemple : $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (x^2 - 2x + 2)e^x, \forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = x^2 e^x$
  On a $g'(x) \ngtr 0$*, mais* g' *ne s'annule qu'en 0, donc* g *est strictement croissante.*
- À propos des fonctions cos et sin avec les limites, ne pas oublier d'encadrer cos et sin pour simplifier les expressions.
  Exemple : Trouver les limites en $+\infty$ *et* $-\infty$ *de* $h : x \mapsto \frac{1}{x}\sin(x)$
  $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$*, donc* $-\frac{1}{x} \leq h(x) \leq \frac{1}{x}$
  Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$
- Le logarithme permet de transformer les produits, souvent plus compliqués à exprimer :
  $$Exemple\ : \forall n \in \mathbb{N}, \ln \prod_{k=0}^{n} e^k = \sum_{k=0}^{n} \ln\left(e^k\right) = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$
- Attention à la différence entre somme sur un rectangle et sur un triangle :
  $$Exemple\ : Soit\ n \in \mathbb{N}, \sum_{1 \leq i,j \leq n} \frac{i}{j} \neq \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j}$$
- L'ordre des quantificateurs est très important !
  Exemple : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta \in \mathbb{R}$ *n'est pas équivalent à* $\exists \delta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$
- La négation de $(P \Rightarrow Q)$ est $(P\ et\ \neg Q)$
  Exemple : La négation de $\left(x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')\right)$ *est* $\left(x \leq x'\ et\ f(x) > f(x')\right)$
- Si vous êtes bloqués avec une somme comportant des k et des $k+1$, vous pouvez réécrire k en $(k+1-1)$.
  $$Exemple\ : \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$
  $$= 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$