Théorèmes – Réductions géométriques

Sommes directe d'une famille de sev

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Définition : (Somme de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On appelle somme des sev $F_1, F_2, \dots, F_m$ l'ensemble :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_m &= \{f_1 + \cdots + f_m \mid \forall i \in [\![1; n]\!], f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, e = f_1 + \cdots + f_m\} \end{aligned}$$

Propriété :

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E, alors $F_1 + \cdots + F_m$ est un sev de E.

Définition : (Somme directe de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe si :

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_m, \exists!\, (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = f_1 + \cdots + f_m$$

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ ou $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Alors

Les sev $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, f_1 + \cdots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], f_i = 0_E$$

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Si $F_1, \dots, F_m$ est en somme directe, alors :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

La somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \cdots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$$

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$$

$$\Leftrightarrow$$

Pour toutes bases respectives $B_1, \dots, B_m$ de $F_1, \dots, F_m$,

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ forme une base de E

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} E = F_1 + \cdots + F_m \\ \dim E = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i) \end{cases}$$

<u>Définition :</u> (Base adaptée)

Soit $F_1, \dots, F_m$ des sev de E tq $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$

On appelle <u>base adaptée</u> à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ toute base B de E obtenue par concaténation de bases respectives $B_1, \dots, B_m$ de $F_1, \dots, F_m$, ie toute base de la forme $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ où

$\forall i \in [\![1, n]\!], B_i$ est une base de F_i.

Sous-espaces stables

<u>Définition :</u> (Sous-espace stable)

Un sev F de E est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$

<u>Propriété :</u> (Inter & Union stables)

Soient F et G deux sev de E stables par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

<u>Propriété :</u> (Stabilité des images et noyaux)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker u$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

<u>Définition :</u> (Endomorphismes induite)

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E <u>stable</u> par u. On définit l'endomorphisme induit par u sur F par :

$$u_F : F \to F$$
$$x \mapsto u(x)$$

<u>Propriété :</u> (Combinaisons linéaires d'endomorphismes stables)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u ET v. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, F$ est stable par $\lambda u, u + v, u \circ v$

De plus, $(\lambda u)_F = \lambda u_F, (u + v)_F = u_F + v_F, (u \circ v)_F = u_F \circ v_F$

<u>Propriété :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable de u. Alors $\ker u_F = \ker u \cap F$, $\operatorname{Im} u_f \subset \operatorname{Im} u \cap F$

<u>Corollaire :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u. Si u est injectif, u_F l'est aussi.

Version matricielle en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : Soit F un sev de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, et $F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète F en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

On a équivalence entre :

(i) F est stable par u

(ii) La matrice de u dans B est de la forme $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$

Si c'est le cas, $A = Mat_F(u_F)$

Propriété : Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E tq $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. Soit $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $\forall i \in [\![1, n]\!], F_i$ est stable par u

(ii) La matrice de u dans B est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in [\![1, n]\!], A_i \in M_{d_i}(\mathbb{K}), d_i = \dim(F_i)$$

De plus, si c'est le cas, $\forall i \in [\![1, n]\!], A_i = Mat_{B_i}\left(u_{F_i}\right)$

Éléments propres

On considère E un $\mathbb{K}$-ev non réduit à $\{0_E\}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition : $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.
Dans ce cas, il y a unicité de λ
Le scalaire λ est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre x.

Définition : On appelle valeur propre tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u, noté $Sp(u)$.

Sous-espace propre

Définition :
Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ l'espace formé des vecteurs $x \in E$ solutions de $u(x) = \lambda x$.

Propriété :
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) $\lambda \in Sp(u)$

(ii) $E_\lambda(u) \neq 0$

(iii) $u - \lambda Id_E$ non injectif

Définition : (Sous-espace propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u, le sev $E_\lambda(u)$ est appelé sous-espace propre de u associé à λ.

Stabilité et somme directe des sous-espaces propres

Propriété : Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et $\forall \lambda \in Sp(u)$,

$$u_{E_\lambda(u)} = \lambda Id_{E_\lambda(u)}$$

Propriété : Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $v \circ u = u \circ v$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Théorème : Des sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u sont en somme directe, c'est-à-dire si $n \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(u)$, avec $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$, alors $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n}(u)$ est en somme directe.

Corollaire : Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres de u 2 à 2 distinctes est libre.

Corollaire : Si E est de dimension finie, $\dim E = n$, alors $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Éléments propres en dimension finie

Dans cette partie E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Éléments propres d'une matrice carrée

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$

On dit que X est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A noté $Sp(A)$.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ le sev formé des éléments

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X$$

Corollaire : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ semblables, alors $Sp(A) = Sp(B)$.

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$

La matrice $XI_n - A = \begin{pmatrix} X - a_{11} & \dots & \\ -a_{12} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \dots & \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Et $\det(XI_n - A) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \left(\delta_{\sigma(i),i} X - a_{\sigma(i),i}\right) \in \mathbb{K}[X]$

Où $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq j \end{cases}$

Définition : (Polynôme caractéristique)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, on appelle polynôme caractéristique de A noté $\mathcal{X}_A = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]$

Théorème :

Le polynôme caractéristique de $A \in M_n(\mathbb{K})$ a pour coefficient dominant 1 et est de degré n. Il possède les coefficients suivants :

$$\mathcal{X}_A = X^n - Tr(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

Théorème : Soit $A \in M_n(\mathbb{K}), \lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) λ est valeur de propre de A
(ii) λ est racine de $\mathcal{X}_A$

Corollaire :

1) Si $A \in M_n(\mathbb{K})$, A possède au plus n valeurs propres distinctes dans $\mathbb{K}$.
2) Si $A \in M_n(\mathbb{C})$, alors A possède au moins une valeur propre complexe.

Propriété : Soit $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$

La matrice compagnon de P est $C_P = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & -a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ (0) & & \ddots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$

Le polynôme caractéristique de C_P est P.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Propriété : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, 2 matrices semblables. Alors $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$

Définition : On appelle polynôme caractéristique commun aux matrices représentant u, ie $\mathcal{X}_u$ est le polynôme caractéristique de la matrice de u dans n'importe quelle base de u.

Théorème : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, le polynôme caractéristique de u est unitaire, de degré n, et est de la forme :

$$\mathcal{X}_u = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$$

Corollaire : Si $u \in \mathcal{L}(E)$, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$, u possède au plus n valeurs propres distinctes (dans $\mathbb{K}$).

Corollaire : Tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie non nulle admet au moins une valeur propre complexe.

Multiplicité d'une valeur propre

Définition : Un polynôme non constant $P \in \mathbb{K}[X]$ est dit scindé sur $\mathbb{K}$ si :

$$\exists \mu \in \mathbb{K}, \exists p \in \mathbb{N}, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}, P = \mu \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)$$

Lorsque les λ_i sont 2 à 2 différents, on dit que P est scindé à valeurs simples sur $\mathbb{K}$.

Définition : (Multiplicité algébrique)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et soit λ une valeur propre de u. On appelle multiplicité algébrique de λ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de $\mathcal{X}_u$.

On appelle multiplicité géométrique de λ la dimension de l'espace propre associé à λ, c'est-à-dire $\dim E_\lambda(u)$.

Propriété : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u) \leq \dim E$$

Si égalité, alors $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.

Corollaire : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus n valeurs propres comptées avec multiplicité algébrique, où $n = \dim E$.

Corollaire : Si E est un $\mathbb{C}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ possède exactement n valeurs propres (dans $\mathbb{K}$) comptées avec multiplicité algébrique.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E, $F \neq \{0_E\}$, F stable par u, alors le polynôme caractéristique de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise le polynôme caractéristique de u, ie :

$$\mathcal{X}_{u_F} | \mathcal{X}_u$$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour $\lambda \in Sp(u)$, on a :

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

Diagonalisabilité

($n = \dim E$, E $\mathbb{K}$-ev)

Définition : un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable s'il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $Mat_{\mathcal{B}}(u)$ est diagonale. $\mathcal{B}$ est appelée base de diagonalisation.

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a :

u est diagonalisable

$\Leftrightarrow$

Il existe une base de E formée de vecteurs propres de u

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) u diagonalisable
(ii) $E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(u)} E_\lambda(u)$
(iii) $\dim E = \sum_{\lambda \in Sp(u)} \dim E_\lambda(u)$
(iv) $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \backslash Sp(u)$, $\dim E_\lambda(u) = m_\lambda(u)$

Corollaire : Si $u \in \mathcal{L}(E)$ possède $n = \dim E$ valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

Matrice diagonalisable

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $D_n(\mathbb{K}) = \{M \in M_n(\mathbb{K}) | M \text{ est diagonalisable}\}$

<u>Définition :</u> (Matrice diagonalisable)

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists D \in D_n(\mathbb{K}), \exists P \in GL_n(\mathbb{K}), P^{-1}AP = D$$

<u>Propriété :</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$.

On a équivalence entre :

(i) u est diagonalisable
(ii) A est diagonalisable

<u>Théorème :</u>

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est diagonalisable (dans $M_n(\mathbb{K})$)
(ii) $M_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{\lambda \in Sp(A)} E_\lambda(A)$
(iii) $n = \sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A)} \dim E_\lambda(A)$
(iv) $\mathcal{X}_A$ est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(A), m_\lambda(A) = \dim\big(E_\lambda(A)\big)$

De plus, dans le cas où A est diagonalisable, les matrices diagonales semblables à A sont les matrices diagonales dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A comptées avec multiplicité algébrique.

<u>Corollaire :</u> Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A admet n valeurs propres (dans $\mathbb{K}$) 2 à 2 distinctes, alors A est diagonalisable.

<u>Trigonalisabilité</u>

E est un $\mathbb{K}$-ev, $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$

Endomorphismes et matrices trigonalisables :

<u>Définition :</u> (endomorphisme trigonalisable)

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable, s'il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure ou inférieure.

<u>Propriété :</u>

Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

1. La base B trigonalise l'endomorphisme u.
2. $\forall k \in [\![1; n]\!], Vect(e_1, \dots, e_k)$ est stable par u.

<u>Définition :</u> (Matrice trigonalisable)

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite trigonalisable dans $M_n(\mathbb{K})$ si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure/inférieure.

<u>Propriété :</u>

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Notons $A = Mat_B(u)$, alors sont équivalents

(i) u est trigonalisable
(ii) A est trigonalisable (dans $M_n(\mathbb{K})$)

<u>Théorème :</u>

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on a équivalence entre :

(i) u est trigonalisable
(ii) Le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$. De même pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

<u>Corollaire :</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si $\mathcal{X}_u$ est scindé sur $\mathbb{K}$, alors :

$$Tr(u) = \sum_{\lambda \in Sp(u)} m_\lambda(u)\lambda \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{\lambda \in Sp(u)} \lambda^{m_\lambda(u)}$$

Nilpotence

<u>Définition :</u> (endomorphisme nilpotent)

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit nilpotent si $\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $u^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Le plus petit tel p est appelé indice de nilpotence de u.

<u>Définition :</u> (Matrice nilpotente)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0_{M_n(\mathbb{K})}$. Le plus petit tel p est appelé indice de nilpotence de A.

<u>Théorème :</u>

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) u est nilpotent
(ii) Il existe une base B de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire <u>stricte</u>
(iii) Le polynôme caractéristique de u est $\mathcal{X}_u = X^n$.

<u>Propriété :</u>

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On a équivalence entre :

(i) A est nilpotente
(ii) A est semblable à une matrice triangulaire stricte
(iii) $\mathcal{X}_A = X^n$

<u>Corollaire :</u>

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors l'indice de nilpotence de u est inférieur ou égal à n, ie

$$u^n = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

De même, si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors son indice de nilpotence p vérifie $p \leq n$, ie

$$A^n = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$