Espaces préhilbertiens

Espaces préhilbertiens réels

Dans toute cette partie, E désigne un $\mathbb{R}$-ev (de dimension finie ou non).

Définitions

Définition : (produit scalaire)

Le produit scalaire (p.s.) sur un $\mathbb{R}$-ev E désigne toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

(i) φ est bilinéaire, ie φ est linéaire selon chacune de ses variables.
(ii) φ est symétrique : $\forall x, y \in E, \varphi(x,y) = \varphi(y,x)$
(iii) φ est positive, ie $\forall x \in E, \varphi(x,x) \geq 0$
(iv) φ est définie, ie $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

En d'autres termes, un p.s. sur E est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Remarques :

1. Pour montrer la bilinéarité symétrique, on a juste à montrer la linéarité à droite et la symétrie.
2. Si $\varphi: E \times E \to \mathbb{R}$ est bilinéaire, alors $\forall x \in E, \varphi(x, 0_E) = 0_E = \varphi(0_E, x)$
   Donc pour la partie (iv), il suffit de montrer le sens direct de l'équivalence.

Propriété : Soit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

Alors φ est un produit scalaire sur E ssi :

(i) φ est bilinéaire
(ii) φ est symétrique
(iii) $\forall x \in E, x \neq 0_E, \varphi(x,x) > 0$

Définition : (espace préhilbertien réel)

On appelle espace préhilbertien réel tout couple (E, φ) où E est un $\mathbb{R}$-ev et φ un produit scalaire. Dans ce cas, il est usuel de noter : $\forall x, y \in E, (x|y), \langle x, y \rangle$, ou plus rarement $x.y$ le produit scalaire $\varphi(x,y)$.

Définition : On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien réel de dimension finie.

Exemples à connaître :

Produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. On l'appelle le p.s. canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$

Démonstration : ⍟

- Par construction, on a bien $\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Linéarité à droite : Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), y' = (y'_1, \dots, y'_n), \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle x, \lambda y + y' \rangle = \langle (x_1, \dots, x_n), (\lambda y_1 + y'_1, \dots, \lambda y_2 + y'_2) \rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{n} x_k(\lambda y_k + y'_k)$$
$$= \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \sum_{k=1}^{n} x_k y'_k$$
$$= \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, y' \rangle$$

- Soient $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$
  Alors $\langle y, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \langle x, y \rangle$
  Donc $\langle , \rangle$ est bien symétrique.
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x \neq 0_{\mathbb{R}^n}$, alors $\exists i_0 \in [\![1, n]\!]$, tq $x_{i_0} \neq 0$
  $$\langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} x_k^2 + x_{i_0}^2 \geq x_{i_0}^2 > 0$$
  Donc $\langle , \rangle$ est définie positive.
  Donc c'est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$

Exemple : $\forall a > 0, \varphi_a : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,

$\varphi_a(x, y) = a x_1 y_1 + a(x_1 y_2 + x_2 y_1) + (a + 1) x_2 y_2$

Produit usuel sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$

Propriété : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle , \rangle : M_{n,p}(\mathbb{R}) \times M_{n,p}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$

$$\langle A, B \rangle = Tr({}^t AB)$$

est un produit scalaire sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$ appelé p.s. canonique

Démonstration : ⍟

- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^t A \in M_{p,n}(\mathbb{R})$ donc le produit ${}^t AB$ est bien défini et ${}^t AB \in M_p(\mathbb{R})$ donc $Tr({}^t AB)$ existe et appartient à $\mathbb{R}$
- Soient $A, B, C \in M_{n,p}(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}$
  $$\langle A, \lambda B + C \rangle = Tr\left({}^t A(\lambda B + C)\right) = Tr(\lambda {}^t AB + {}^t AC) = \lambda \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle$$
- Soient $A, B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$,
  $$\langle B, A \rangle = Tr({}^t BA) = Tr({}^t({}^t BA)) = Tr\left({}^t A {}^t {}^t B\right) = Tr({}^t AB) = \langle A, B \rangle$$
- Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, notons $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$, alors par calcul,
  $$\langle A, A \rangle = Tr({}^t AA) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 \geq 0$$
  De plus, $\langle A, A \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2 = 0$
  $\Leftrightarrow \forall i \in [\![1, p]\!], \forall k \in [\![1, n]\!], a_{ki} = 0$
  $\Leftrightarrow A = 0_{M_{n,p}(\mathbb{R})}$

  Donc c'est bien un p.s. sur $M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Produit scalaire canonique sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$

Propriété : Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, notons $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

L'application $\langle , \rangle : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall f,g \in E, \langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

est un p.s. sur E appelé produit scalaire canonique sur E.

Démonstration : Soient $f, g \in E$ alors la fonction $f \times g$ est continue sur $[a,b]$ donc intégrable sur ce segment.

- La symétrie de $\langle , \rangle$ provient de la commutativité du produit :
$$\langle g,f\rangle = \int_a^b g(t)f(t)dt = \int_a^b f(t)g(t)dt = \langle f,g\rangle$$
- $\forall f,g,h \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\langle f, \lambda g + h\rangle = \int_a^b f(t)\big(\lambda g(t) + h(t)\big)dt = \lambda \int_a^b f(t)g(t)dt + \int_a^b f(t)h(t) = \lambda\langle f,g\rangle + \langle g,h\rangle$$
- Soit $f \in E$, $\langle f,f\rangle = \int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt \geq 0$
De plus, $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow \int_a^b \big(f(t)\big)^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b], f(t)^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [a,b], f(t) = 0$

Remarque : Si on a un produit scalaire sur E et F un sev de E, alors le même produit restreint à $F \times F$ reste un produit scalaire sur F.

Norme euclidienne

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel et on notera $\langle , \rangle$ son produit scalaire associé.

Définition : On appelle norme euclidienne sur E l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$$

Exemple : Dans $E = \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ muni de son p.s. canonique, $\forall f \in E, \|f\| = \sqrt{\int_a^b \big(f(t)\big)dt}$

Exemple : Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{R}$. $\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x\rangle = \lambda^2\langle x,x\rangle = \lambda^2\|x\|^2$

Soient $x, y \in E$,

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x+y\rangle + \langle y, x+y\rangle &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2\end{aligned}$$

De même, $\|x-y\| = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$

Et $\langle x+y, x-y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$

Théorème : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On rappelle qu'on note $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$. Alors

$$\forall x,y \in E, |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

avec égalité si et seulement si la famille (x,y) est liée.

Démonstration : ⍟

Soient $x, y \in E$.

↪ Si $x = 0_E$, alors $|\langle x, y\rangle| = |\langle 0_E, y\rangle| = |0| = 0$. Ainsi il y a bien égalité et la famille $(0_E, y)$ est liée

↪ Si $x \neq 0_E$, posons $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \|tx + y\| \geq 0$

$$\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = t^2\|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle t + \|y\|^2 = at^2 + bt + c, \begin{cases} a = \|x\|^2 > 0 \\ b = 2\langle x, y\rangle \\ c = \|y\|^2 \end{cases}$$

Ainsi P est une fonction polynômiale de degré 2, à valeurs ≥ 0. Ainsi P admet au plus une racine réelle, donc son discriminant $\Delta \leq 0$.

Ainsi $b^2 - 4ac \leq 0 \Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \Leftrightarrow |\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

De plus, on a $|\langle x, y\rangle| = \|x\| \cdot \|y\| \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $P(t_0) = 0$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $\|t_0 x + y\| = 0$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $t_0 x + y = 0_E$

$\Leftrightarrow \exists!\, t_0 \in \mathbb{R}$ tq $y = -t_0 x$

$\Leftrightarrow (x, y)$ est liée

<u>Propriété :</u> Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

La norme euclidienne $\|\cdot\| : \begin{array}{c} E \to \mathbb{R}_+, \\ x \mapsto \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$ est une norme sur E.

On l'appelle norme associée au produit scalaire $\langle , \rangle$.

<u>Propriété :</u> (Identités de polarisation)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot \rangle$.

$$\forall x, y \in E, \text{on a } \langle x, y\rangle = \begin{cases} \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2) \\ \frac{1}{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x - y\|^2) \end{cases}$$

<u>Démonstration :</u> ⍟

Soient $x, y \in E$.

$\|x + y\| = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la première égalité.

$\|x - y\| = \|x\|^2 - 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$, ce qui donne la deuxième égalité.

Et $\|x + y\| - \|x - y\| = 4\langle x, y\rangle$, ce qui donne la dernière égalité.

<u>Propriété :</u> Identité du parallélogramme

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien réel dont on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée.

$$\forall x, y \in E, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

Espaces préhilbertiens complexes

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{C}$-ev (de dimension quelconque).

Le produit scalaire n'a plus de sens : $\forall x \in E\backslash\{0_E\}, 0 < \langle ix, ix\rangle = -\langle x, x\rangle < 0$

Définition : On appelle produit hermitien sur un $\mathbb{C}$-ev toute application $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$ vérifiant :

(i) φ est sesquilinéaire, ie φ est linéaire en sa 2$^{\text{nde}}$ variable et semi-linéaire en sa 1$^{\text{ère}}$:

$$\begin{cases} \forall x, y, y' \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(x, \lambda y + y') = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x, y') \\ \forall x, x', y, \in E, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \varphi(\lambda x + x', y) = \overline{\lambda}\varphi(x, y) + \varphi(x', y) \end{cases}$$

(ii) φ est à symétrie hermitienne, ie $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$

(iii) φ est positive : $\forall x \in E, \varphi(x, x) \geq 0$

(iv) φ est définie : $\forall x \in E$, on a $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Un produit scalaire hermitien sur E est une forme sesquilinéaire hermitienne définie positive.

Attention : on a $\varphi(x, x) = \overline{\varphi(x, x)}$, donc $\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$. Ainsi on peut parler de positivité.

En général $\varphi(x, y) \in \mathbb{C}$, on a donc pas lieu d'écrire « $\varphi(x, y) \geq \cdots$ »

Propriété : Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $\varphi : E \times E \to \mathbb{C}$. Alors φ est un produit scalaire hermitien sur E ssi :

(i) φ est sesquilinéaire

(ii) $\forall x, y \in E, \varphi(y, x) = \overline{\varphi(x, y)}$

(iii) $\forall x \in E, x \neq 0_E, \varphi(x, x) > 0$

Définition :

On appelle espace préhilbertien complexe tout couple $(E, \langle,\rangle)$ où E est un $\mathbb{C}$-ev et $\langle,\rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E. On appelle espace hermitien tout espace préhilbertien complexe $(E, \langle,\rangle)$ où $\dim E < +\infty$.

Exemples à connaître :

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle,\rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n, \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k$$

est un produit scalaire hermitien sur $\mathbb{C}^n$ appelé produit scalaire canonique sur $\mathbb{C}^n$.

Démonstration : ⍟

- Linéarité à droite : comme sur les réels
- $\overline{\varphi(y, x)} = \sum_{k=1}^{n} \overline{\overline{y_k}} \cdot \overline{x_k} = \varphi(x, y)$
- $\varphi(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} x_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2$

  ⋮

Propriété : Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application $\langle,\rangle : M_{n,p}(\mathbb{C}) \times M_{n,p}(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ définie par $\forall A, B \in M_{n,p}(\mathbb{C})$

$$\langle A, B\rangle = Tr\left({}^t\overline{A}B\right)$$

Est un produit scalaire hermitien sur $M_{n,p}(\mathbb{C})$, appelé canonique.

// manque le p.s. canonique des fonctions dans C

3) Norme hermitienne

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Pour $x \in E$, posons $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Soient $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|\lambda x\|^2 = \langle \lambda x, \lambda x \rangle = \lambda \langle \lambda x, x \rangle = \overline{\lambda} \lambda \langle x, x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2$$

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle y, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle) + \|y\|^2$$

$$\langle x+y, x-y \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle = \|x\|^2 - 2i\, Im(\langle x, y \rangle) - \|y\|^2$$

Théorème : (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. Pour tout $x \in E$, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Alors $\forall x, y \in E$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Avec égalité si la famille (x, y) est liée.

Corollaire :

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. L'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{\langle x, x \rangle}$ est une norme sur E appelée norme hermitienne sur E (aussi appelée norme associée au p.s. hermitien $\langle , \rangle$).

Propriété : Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace préhilbertien complexe. On note $\|\cdot\|$ la norme hermitienne sur E associée à $\langle , \rangle$.

1) Identités de polarisation

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|ix-y\|^2)$$

2) Identité du parallélogramme

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

III) Matrice d'un produit scalaire

Soit E un espace euclidien ou hermitien avec $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.

Pour tous x (resp. y) $\in E$, $\exists! \, (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n$ (resp. $(y_1, \dots y_n)$) ($\mathbb{K} = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } E \text{ euclidien} \\ \mathbb{C} \text{ si } E \text{ hermitien} \end{cases}$) tel que

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \text{ et } y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$$

Alors $\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k\, e_k, \sum_{l=1}^{n} y_l e_l \right\rangle = \sum_{l=1}^{n} y_l \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \, , e_l \right\rangle$

$= \sum_{l=1}^{n} y_l (\sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \langle e_k, e_l \rangle)$

$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \overline{x_k} y_l \langle e_k, e_l \rangle$

Ainsi $\langle , \rangle$ est entièrement caractérisé par la donnée des termes $\langle e_k, e_l \rangle$ pour $1 \leq k, l \leq n$

Définition : Soient $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. On appelle matrice du produit scalaire $\langle , \rangle$ dans la base B la matrice :

$$M = Mat_B(\langle , \rangle) = (\langle e_k, e_l \rangle)_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq l \leq n}}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \langle e_1, e_2 \rangle & \dots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \dots & \dots & \langle e_n, e_n \rangle \end{pmatrix}$$

De plus, pour tous $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$, $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$, on a $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{X} MY$

Effet d'un changement de base

Soit $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base de E. Notons $P = Pass_{B \to B'}$.

Pour $x, y \in E$, notons $X = Mat_B(x), X' = Mat_{B'}(x), Y = Mat_B(y), Y' = Mat_{B'}(y)$

Et $M = Mat_B(\langle , \rangle), M' = Mat_{B'}(\langle , \rangle)$

$\forall x, y \in E, X = PX', Y = PY'$, donc $\langle x, y \rangle = {}^t\left(\overline{P} \cdot \overline{X}\right) MPY' = {}^t\overline{X'}\,{}^t\overline{P} MPY'$

D'autre part, $\langle x, y \rangle = {}^t\overline{X'} M'Y'$

Ainsi on a :

$$M' = {}^t\overline{P} MP$$

Propriété :

Soit $(E, \langle , \rangle)$ un espace euclidien ou hermitien de dimension n et B, B' deux bases de E. Alors

$$Mat_{B'}(\langle , \rangle) = {}^t\overline{P} \cdot Mat_B(\langle , \rangle) \cdot P$$

Où $P = Pass_{B \to B'}$