# Endomorphismes orthogonaux

Dans tout le chapitre, $E$ désignera un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

## Définitions et premières propriétés

### 1) Caractérisations équivalentes

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u^* \circ u = Id_E$
(ii) $u \circ u^* = Id_E$
(iii) $u$ est bijectif et $u^{-1} = u^*$

Définition : On appelle endomorphisme orthogonal de $E$ tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u = Id_E$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de $E$

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et $B$ une base orthonormée de $E$. On a équivalence entre :

(i) $u$ est un endomorphisme orthogonal de $E$.
(ii) $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u^*)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^t\mathrm{Mat}_B(u)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(Le 3e point vient du fait que $B$ est orthonormée, donc $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_B(u)$)

Exemple : Soit $F$ un sev de $E$ tel que $F \neq E$, notons $p_F$ la projection orthogonale sur $F$.

Comme $F \neq E$, et que $E = F \oplus F^\perp$, on a $F^\perp \neq \{0_E\}$

Donc $\exists x \in F^\perp, x \neq 0_E$. Alors $p_F(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(p_F)$

Ainsi $p_F$ n'est pas injectif, donc pas bijectif, donc $p_F \notin O(E)$.

Notons $s_F$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$. Dans une b.o.n $B$ de $E$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, alors $S = \mathrm{Mat}_B(s_f)$

Alors ${}^tSS = SS = S^2 = I_n$

Donc $S \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $s_F \in O(E)$.

Propriété : L'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux de $E$ muni de la composition est un groupe. Plus précisément, $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$ où $GL(E)$ désigne l'ensemble des endomorphisme bijectifs de $E$ :

(i) $Id_E \in O(E)$
(ii) $\forall u, v \in O(E), u \circ v \in O(E)$
(iii) $\forall u \in O(E), u^{-1} \in O(E)$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u \in O(E)$
(ii) $u$ conserve la norme, ie $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$
(iii) $u$ conserve le produit scalaire, ie $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$
(iv) $\forall B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de $E$, l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de $B$ est une base orthonormée de $E$ (càd que $u$ envoie toute b.o.n de $E$ sur une b.o.n de $E$) .
(v) $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de $E$ telle que l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de $B$ par $u$ est une base orthonormée de $E$ (càd $u$ envoie au moins une b.o.n de $E$ sur une b.o.n de $E$).

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque $u \in O(E)$ ssi $u$ conserve la norme, les endomorphismes orthogonaux de $E$ sont aussi appelés isométries vectorielles de $E$.

### 2) Isométries directes et indirectes

Propriété : Soit $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$

Démonstration :

Soit $u \in O(E)$, alors $u^* \circ u = Id_E$

Donc $\det u^* \times \det u = 1$

Soit $B$ une b.o.n alors $\det u^* = \det \mathrm{Mat}_B(u^*) = \det({}^t\mathrm{Mat}_B(u)) = \det(\mathrm{Mat}_B(u)) = \det u$

Ainsi $(\det(u))^2 = 1$, donc $\det u = \pm 1$

Corollaire : Si $A \in O_n(\mathbb{R}), \det(a) \in \{-1, +1\}$

Attention : Si $\det u \in \{-1,1\}$, on n'a pas forcément $u$ orthogonal !

Définition : On appelle isométrie directe (ou positive) de $E$ tout $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = 1$.

On appelle isométrie indirecte de $E$ tout $u \in O(E)$ tel que $\det(u) = -1$.

Proposition : L'ensemble des isométries directes de $E$, noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $(O(E),\circ)$, on l'appelle groupe spécial orthogonal de $E$. L'ensemble des matrices orthogonales de déterminant $+1$, noté $SO_n(\mathbb{R})$, est un sous-groupe de $(O_n(\mathbb{R}),\times)$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre $n$.

Exemples :

- $Id_E \in SO(E)$
- $-Id_E \in SO(E) \Leftrightarrow \dim(E)$ est paire

Soit $F$ un sev de $E$, notons $s_F$ la symétrie orthogonale par rapport à $F$. On a vu que $s_F \in O(E)$, et si on prend une b.o.n $B$ de $E$ adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$ (ie $B$ est la concaténation d'une b.o.n de $F$ avec une b.o.n de $F^\perp$) alors

$$\mathrm{Mat}_B(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Où le nombre de 1 correspond à $\dim F$ et celui de $-1$ à $\dim F^{\perp}$

On a alors $\det(s_F) = (-1)^{\dim(F^{\perp})}$

Ainsi $s_F \in SO(E) \Leftrightarrow \dim(F^{\perp})$ est paire

### 3) Lien avec les réflexions

Définition : Soit $H$ un sev de $E$. On dit que $H$ est un **hyperplan** de $E$ si $\dim H = \dim E - 1$

Propriété : Soit $H$ un sev de $E$. On a équivalence entre :

(i) $H$ est un hyperplan de $E$
(ii) $\exists a \in E$ avec $\|a\| = 1$ tel que $H = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$

Définition : on appelle **réflexion** de $E$ toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan de $E$.

Remarque : Si $s$ est une réflexion de $E$, il existe un hyperplan $H$ de $E$ tq $s$ est la symétrie orthogonale par rapport à $H$.

Théorème : Tout endomorphisme orthogonal de $E$ peut s'écrire comme la composée de $m$ réflexions de $E$, avec $m \in [\![0, \dim(E)]\!]$.

## Réductions des endomorphismes orthogonaux

### 1) Quelques résultats utiles pour la réduction

Proposition : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \in \{1, -1\}$

Démonstration : ⍟

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors comme $E$ est euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Alors d'une part : $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

Et d'autre part, $u \in O(E)$ donc $u$ conserve la norme, ainsi $\|u(x)\| = \|x\|$

D'où $\|x\| = |\lambda| \|x\|$, ie $|\lambda| = 1$

Donc $\lambda = \pm 1$

Attention : contrairement aux endomorphismes autoadjoints, qui possèdent toujours au moins une valeur propre (réelle), il existe des endomorphismes orthogonaux qui n'admettent aucune valeur propre.

Corollaire : Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$, alors $Sp_{\mathbb{R}}(A) \subset \{-1,1\}$.