Chapitre 5 – Intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, on considèrera I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$. On suppose que

(i) f est continue sur $[a,b]$

(ii) f admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$.

alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est définie et de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et $u, v : I \to J$ continues. Alors la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue, admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et $u, v : I \to J$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction

$$\varphi : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe C^1 sur I, et

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + v'(x)f\big(x, v(x)\big) - u'(x)f\big(x, u(x)\big)$$

Théorème : (Continuité par domination)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) f est continue sur $I \times J$

(ii) Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Corollaire :

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) f est continue sur $I \times J$

(ii) Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.