Suites numériques

Définition de la suite numérique :

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ ou de $\{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$

Série :

On note la série de terme général u_n,

$$\forall n \geq n_0, S_n \coloneqq \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

S_n est la somme partielle d'ordre n de u_n

Convergence des séries :

La série numérique $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite convergente si la suite de ses sommes partielles converge, ie :

$$\exists S \in \mathbb{R}, S = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{m} u_n,$$

$$\text{On note alors } S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

En cas de converge (ie d'existence de S), on définit pour tout $n \geq n_0$ le reste d'ordre n de $\sum u_n$ par

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$$

Une série non convergente est dite divergente.

Limite des restes en cas de convergence :

Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors $(R_n)_{n\geq n_0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Série télescopique :

Une série télescopique est une série numérique dont le terme général est $u_{n+1} - u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a alors $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\Leftrightarrow$ (u_n) converge

Et en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Contraposée :</u> Si u_n ne converge pas vers 0, alors on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Opérations sur les séries convergentes :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum(\lambda u_n + v_n)$ converge.

$$\text{De plus, } \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Ainsi, si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Séries à termes positifs

Majoration des sommes partielles

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. La série numérique $\sum u_n$ converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée. En cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Corollaire :

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP tq $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$

i) Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
ii) Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Convergence et domination :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP. On suppose que $u_n = \underset{+\infty}{O}(v_n)$

i) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge.
ii) SI $\sum u_n$diverge alors $\sum v_n$ diverge.

Convergence et équivalents :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux SATP. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Critères d'étude :

Théorème : (Règle d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une suite réelle, en supposant que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors

(i) Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
(ii) Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
(iii) Si $l = 1$, on ne peut conclure.

Théorème de comparaison série-intégrale :

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante et à valeurs >0.

Alors la série numérique $\sum_{n\geq p} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ on même nature.

Séries de référence :

- Suites géométriques : Soit $q \in \mathbb{C}$, la série géométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} q^n$ converge ssi $|q| < 1$
- Théorème : (Séries de Riemann)
  Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Théorème : Série définissant l'exponentielle
Soit $a \in \mathbb{C}$. La série suivante converge :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a^n}{n!}$$

Séries numériques à termes quelconques :

Définition : Convergence absolue
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique. On dit que la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument si la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Théorème : (Inégalité triangulaire)
Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge absolument, $\sum u_n$ converge et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Définition : Semi-convergence
On dit d'une série qui converge mais pas absolument qu'elle est semi-convergente.

Critère des séries alternées :

Définition : (Suite et série alternées)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée si :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^n |u_n| \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = (-1)^{n+1} |u_n|$$

Ceci équivaut à :

$$((-1)^n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est de signe constant}$$

Ou encore :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n u_{n+1} \leq 0$$

On dit que $\sum u_n$ est alternée si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alternée

Théorème : Critère Spécial des Séries Alternées (CSSA)
Soit $\sum u_n$ une série alternée.
Si :

(i) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante
(ii) $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Alors $\sum u_n$ converge.

Corollaire : Soit $\sum u_n$ une suite vérifiant les hypothèses du CSSA. Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est du même signe que le premier terme de la série.

Études asymptotiques :

Théorème : (Sommation des relations de comparaisons)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une SATP réelle.

1) Supposons que $\sum v_n$ diverge.
   i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$
   ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$
2) Supposons que $\sum v_n$ converge.
   i) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} O(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$
   ii) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(v_n)$ alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$

Corollaire : (Théorème de sommation des équivalents)

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 suites réelles à termes positifs telles que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$

(i) Si une de ces séries diverge, l'autre aussi, et on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k$$

(ii) Si une de ces séries converge, l'autre aussi, et on a :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$$

Définition : (Produit de Cauchy)
Soient $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\to+\infty} v_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de $\sum u_n$ et $\sum v_n$ la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$, avec :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Théorème : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques.
Si ces deux séries convergent absolument, alors leur produit de Cauchy converge absolument, et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$$