Réductions algébriques – Démonstrations

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u figurent parmi les racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de u, c'est-à-dire :

$$\text{Si } P \in \mathbb{K}[X] \text{ est annulateur de } u, Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$$

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u (ie $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$)

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

> On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$:
> Initialisation : $k = 0$
> On a $u^0(x) = Id_{\mathcal{L}(E)} = \lambda^0 x$.
> Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $u^k(x) = \lambda^k x$.
> Alors $u^{k+1}(x) = u\left(u^k(x)\right) = u\left(\lambda^k(x)\right) = \lambda^k u(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ $(a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K})$

Alors $P(u)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$

Et $P(u)(x) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\right)(x)$

$$= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right) x$$

$$= P(\lambda) x$$

Ainsi $P(\lambda)x = 0$ et $x \neq 0_E$

Donc $P(\lambda) = 0$

□

Propriété : ⍟

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Démonstration :

Supposons que A et B sont semblables, alors $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AQ$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$:
Initialisation : $k = 0$

$$B^0 = I_n = Q^{-1}Q = Q^{-1}A^0Q$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$
Alors $B^{k+1} = B \times B^k = (Q^{-1}AQ)(Q^{-1}A^kQ) = Q^{-1}AA^kQ = Q^{-1}A^{k+1}Q$

Donc $P(B) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{-1}A^kQ$

$= Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right)Q$

$= Q^{-1}P(A)Q$

Donc $P(B) = 0_{M_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$

□

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Π_u divise tout polynôme annulateur de u

Démonstration :

Soit P un polynôme annulateur de u. Comme Π_u est unitaire, $\Pi_u \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ donc on peut effectuer la division euclidienne de P par Π_u.

Ainsi $\exists! (Q, R) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $P = \Pi_u Q + R$, avec $\deg(R) < \deg(\Pi_u)$

Supposons par l'absurde que Π_u ne divise pas P, c'est-à-dire $R \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$

Alors $R(u) = P(u) - \Pi_u(u) \circ Q(u)$

$= 0_{\mathcal{L}(E)} - 0_{\mathcal{L}(E)} = 0_{\mathcal{L}(E)}$

Ainsi R est annulateur de u et $\deg(R) < \deg(\Pi_u)$, ce qui contredit la définition de Π_u.

□