

## Révisions : DS4

### Exercice : Arithmétique

Montrer que  $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*,$  on a :

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N}^*, 485 \mid 2^{9n} - 3^{3n}.$

### Exercice : Arithmétique

On rappelle que  $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ . Soient  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

Soit  $\phi : \mathbb{U}_a \times \mathbb{U}_b \rightarrow \mathbb{U}_{ab}$

$$(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2.$$

1) Montrer que  $\phi$  est bien définie, c'est-à-dire que si  $z_1 \in \mathbb{U}_a$  et  $z_2 \in \mathbb{U}_b$ , alors  $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_{ab}$ .

2) Soient  $a, b \in \mathbb{Z}$  premiers entre eux. Justifier qu'il existe  $u, v \in \mathbb{Z}$ , tels que :

$$\frac{1}{ab} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}.$$

3) En déduire que  $e^{\frac{2i\pi}{ab}} \in \text{Im}(\phi)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_a \times \mathbb{U}_b$ , tel que  $\phi(z_1, z_2) = e^{\frac{2i\pi}{ab}}.$

### Exercice : Complexes

Soit  $\omega = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ . On pose  $z = \frac{\omega - i}{\omega + i}.$

1) Montrer que

$$\text{Re}(z) = \frac{|\omega|^2 - 1}{|\omega|^2 + 1 + 2b} \quad \& \quad \text{Im}(z) = \frac{-2a}{|\omega|^2 + 1 + 2b}.$$

2) Montrer que  $(|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 < (|\omega|^2 + 1)^2.$

3) En déduire que  $|z| < 1.$

### Exercice : Complexes

On admet que :

$$\sum_{k=0}^n e^{ik} = e^{\frac{in}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^n \sin(k) \quad \& \quad \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^n \sin(k+j)$$

(Bonus) : Démontrer la formule donnée en indication

### Exercice : Suites

1) Encadrer la partie entière d'un nombre  $x$ .

2) On pose  $u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \dots + E(nx)}{n^2}$ . Encadrer  $u_n$ .

3) Montrer que  $(u_n)_n$  converge, déterminer sa limite.

4) En déduire que  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ . (Indice : on pourra admettre que si pour tout  $a < b \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in ]a, b[ \cap \mathbb{Q}$ , alors  $\mathbb{Q}$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .)