Suites de fonctions : Démonstrations

Propriété :

Si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est bornée sur A.
(ii) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers $f : A \to \mathbb{K}$

Alors f est bornée sur A.

Démonstration :

$$\text{Hypothèses : } \Longrightarrow \begin{cases} \exists M_n \in \mathbb{R}_+, \forall k \in A, |f_n(x)| \leq M_n \\ \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \end{cases}$$

Donc pour $\varepsilon = 1, \exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq 1$

Soit $x \in A$,

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left|f(x) - f_{N_1}(x) + f_{N_1}(x)\right| \\ &\leq \underbrace{\left|f(x) - f_{N_1}(x)\right|}_{\leq 1} + \underbrace{\left|f_{N_1}(x)\right|}_{\leq M_{N_1}} \\ &\leq 1 + M_{N_1} := M \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Donc f est bornée sur A.

Théorème : Soit $a \in A$.

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue en a.
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur A vers une fonction $f : A \to \mathbb{K}$.

Alors f est continue en a.

Démonstration : Soit $\varepsilon > 0$

Comme $(f_n)_n$ CVU sur A vers f,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Et f_N est continue en A, donc :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in A, |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f_N(x) - f_N(a)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

Ainsi, $\forall x \in A$,

$$\begin{aligned} |x - a| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| \\ &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| \end{aligned}$$

$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$

$\leq \varepsilon$

Donc f est continue en a.

Théorème :

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{K}$

Supposons que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$
(ii) $(f_n)_n$ CVU sur $[a; b]$ vers une fonction $f : [a; b] \to \mathbb{K}$

Alors f est continue sur $[a; b]$ et $\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$

Démonstration :

La CVU préserve la continuité, donc f est continue sur $[a ; b]$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, f_n et f sont intégrables sur $[a ; b]$, donc :

$$\int_a^b f_n(x)dx \text{ et } \int_a^b f(x)dx \text{ CV}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}0 \leq \left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b \big(f_n(x) - f(x)\big)dx\right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &\leq \int_a^b \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]}dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]} \int_a^b dx \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty,[a;b]}(b-a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\end{aligned}$$

Car $\|f_n - f\|_{\infty,[a;b]} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $(f_n)_n$ CVU sur $[a; b]$

Ainsi par le théorème des gendarmes, $\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

ie $\int_a^b f_n(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(x)dx$