<u>Feuille 9 – Applications linéaires et matrices</u>

<u>Exercice 1 :</u>

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F de E est dit stable par v si $v(F) \subseteq F$.

1. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v.

Dans la suite de cet exercice, on suppose que u est un projecteur, ie $u^2 = u$.

2. Montrer que $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont supplémentaires dans E.
3. Montrer que si $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v, alors $u \circ v = v \circ u$.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner une base de $\ker f$. En déduire une base de $\operatorname{Im} u$.
2. Montrer que $\operatorname{Im} u \subset \ker u$.
3. En déduire une expression de f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 3 :</u>

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, et on note $A = \left(a_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$

1. On pose $D = {}^tAA = \left(d_{ij}\right)_{1 \le i,j \le n}$. Calculer d_{ii} en fonction des a_{ij} pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
2. On suppose maintenant que $\operatorname{Tr}({}^tAA) = 0$. Que dire de A ?
3. On admet que pour tout $X \in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr}(AX) = \operatorname{Tr}(BX)$. Déduire de la question précédente que $A = B$.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et f l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a $f(x, y, z) = (2x + z, 2y + z, x + y + z)$
2. Donner une base de l'image et du noyau de f.
3. On pose $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (1, -1, 0), v_3 = (1, 1, 2)$. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, puis donner la matrice de f dans cette base.