CF – Révisions – Corrigé

Exercice 1 :

Partie 1 :

1. On pose $X = x + \lambda$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Alors $X^3 + pX + q = (x+\lambda)^3 + p(x+\lambda) + q = x^3 + 3x^2\lambda + 3x\lambda^2 + \lambda^3 + px + p\lambda + q$
   $= x^3 + 3x^2\lambda + x(3\lambda^2 + p) + (\lambda^3 + p\lambda + q)$
   Or $a \neq 0$, donc $X^3 + pX + q = 0 \Leftrightarrow a(X^3 + pX + q) = 0$
   Donc $a\left(x^3 + 3x^2\lambda + x(3\lambda^2 + p) + (\lambda^3 + p\lambda + q)\right) = 0$
   Ainsi sous forme de système, on obtient :
   $$\begin{cases} 3a\lambda = b \\ (3\lambda^2 + p)a = c \\ a(\lambda^3 + p\lambda + q) = d \end{cases}$$
   De la première on déduit bien $\lambda = \frac{b}{3a}$, et cela concorde bien avec les valeurs de p et q données.
2. On a $\lim\limits_{X\to+\infty} P(X) = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} P(X) = -\infty$, et $x \mapsto x^3 + px + q$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$.

Partie 2 :

1. Soient $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a
   $$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 + pu + pv + q$$
   $$= (u+v)^3 + p(u+v) + q$$
2. On pose $3uv + p = 0 \Leftrightarrow uv = -\frac{p}{3} \Rightarrow u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}$
   De plus, si c'est le cas, on a $X^3 + pX + q = 0 \Leftrightarrow u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$
   $\Leftrightarrow u^3 + v^3 + q = 0$
   $\Leftrightarrow u^3 + v^3 = -q$
3. Si l'on note x_1, x_2 les racines d'un polynôme du second degré Q unitaire, on a :
   $$Q(X) = (X - x_1)(X - x_2) = X^2 - (x_1 + x_2)X + x_1x_2$$
   Ainsi U et V sont racines du polynôme $Q(X) = X^2 - (U + V) + UV$
   $= X^2 + qX - \frac{p^3}{27}$
   Le discriminant Δ vaut $\Delta = (-q)^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27}$
   Ainsi on déduit :
   $$\begin{cases} U = \dfrac{-q + \sqrt{\Delta}}{2} \\ V = \dfrac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \end{cases}$$
4. On a $U = \frac{-q+\sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{q}{2} + \frac{\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$
   De même, on obtient $V = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$
   Ainsi $X = u + v = \sqrt[3]{U} + \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$

Exercice 2 :

Considérons g l'application $[a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = e^{-x}\big(f(x) + f'(x)\big)$. g est bien définie, car f est définie et dérivable sur $[a,b]$. De plus, $g \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ car $f \in C^2([a,b],\mathbb{R})$ (et donc f' est dérivable de dérivée continue).

Ainsi $g(a) = e^{-a}\big(f(a) + f'(a)\big) = 0$ et $g(b) = e^{-b}\big(f(b) + f'(b)\big) = 0$

Donc on peut appliquer le théorème de Rolle à g :

Il existe donc $c \in]a,b[$, tel que $g'(c) = 0$

Or $g'(x) = e^{-x}\big(f'(x) + f''(x)\big) - e^{-x}\big(f(x) + f'(x)\big) = e^{-x}\big(f''(x) - f(x)\big)$

Donc $g'(c) = 0 \Leftrightarrow e^{-c}\big(f''(c) - f(c)\big) = 0 \Leftrightarrow f''(c) = f(c)$

Exercice 3 :

Soit H_n la série harmonique.

1) $\forall n \geq 1$,
$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = (2n - (n+1) + 1)\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$
2) On peut prouver que H_n est une suite croissante. Ainsi, en $+\infty$, elle ne peut se comporter que de deux manières :
   - Elle diverge vers $+\infty$
   - Elle converge vers $l \in \mathbb{R}$

   Supposons la seconde proposition : $\exists l \in \mathbb{R}, H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

   Alors $H_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ et donc $H_{2n} - H_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \not\geq \frac{1}{2}$. C'est absurde.

Exercice 4 :

1) On utilise le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $(u_n)_n$ une suite de rationnels tels que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) < g(u_n)$, et donc quand $n \to +\infty$, on obtient bien $f(x) \leq g(x)$.
   Pour contredire l'inégalité stricte, on peut prendre $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$, et $g : x \in \mathbb{R} \mapsto |x - \pi|$
   Alors si on prend $x = \pi \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$, donc $f(x) = g(x)$, alors que pourtant pour tout $q \in \mathbb{Q}$, on a bien $f(q) < g(q)$.
2) Soit $a < b \in \mathbb{Q}$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut supposer $x \leq a < b \leq y$. Aussi, il existe (x_n) et (y_n) deux suites de rationnels qui convergent respectivement vers x et y. Alors
$$\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) \leq f(a) < f(b) \leq f(y_n)$$
   On passe à la limite pour trouver $f(x) < f(y)$.

Exercice 5 :

On va procéder par analyse-synthèse.

Analyse : (= si j'ai une telle fonction, que cela implique-t-il sur cette fonction ?)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telle qu'il existe $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire et $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction paire telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = p(x) + i(x)$$

Alors nécessairement :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = p(-x) + i(-x) = p(x) - i(x)$$

Ainsi on obtient le système suivant : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} f(x) = p(x) + i(x) \\ f(-x) = p(x) - i(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} p(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2} \\ i(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2} \end{cases}$$

Synthèse (= les fonctions auxquelles on arrive respectent-elles vraiment les conditions de l'énoncé)

Vérifions que les fonctions trouvées sont bien respectivement paires et impaires.

$$\forall x \in \mathbb{R}, p(-x) = \frac{f(-x) + f\big(-(x)\big)}{2} = p(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, i(-x) = \frac{f(-x) - f\big(-(-x)\big)}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -i(x)$$

Ainsi les fonctions trouvées satisfont les conditions de l'énoncé, et quelque soit f, on peut bien trouver une décomposition de celle-ci en deux fonctions, l'une paire et l'autre impaire.

<u>Exercice 6 :</u>

1. $j^3 = 1, j^2 + j + 1 = 0$ par calcul direct ou par résolution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
2. 0 et -1 sont racines évidentes de P.
3. On peut remarquer que $j^4 = j, j^5 = j^2$, etc…
   donc $P(j) = 0$ et $P'(j) = 0$, et j est au moins racine double de P.
4. On a $P(X) = X^7 + 7X^6 + \cdots - X^7 - 1 = 7X^6 + \cdots$, donc P est de degré 6.
5. j est racine de multiplicité au moins 2, donc son conjugé $\bar{j}$ l'est aussi. Un calcul simple donne $j^2 = \bar{j}$, donc les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont $0, -1, j, j, j^2, j^2$, et donc
   $$P(X) = 7X(X+1)(X-j)^2(X-j^2)^2$$
   Dans $\mathbb{R}[X]$, on peut utiliser le fait que $(X-j)(X-j^2) = X^2 + X + 1$, et donc
   $$P(X) = 7X(X+1)(X^2+X+1)^2$$