Révisions DS4 – Correction

<u>Exercice :</u> Arithmétique

On a :

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k} = \sum_{k=0}^{n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k}$$

Ainsi, en posant $j = k+1$ dans la première somme :

$$\sum_{k=1}^{n} x^j y^{n-j} - \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} = x^n y^0 - x^0 y^n = x^n - y^n$$

Ainsi comme $2^{9n} = 8^{3n}$, on voit que $(8^3 - 2^3)$ divise $2^{9n} - 3^{3n}$, donc $485 \mid 2^{9n} - 3^{3n}$.

<u>Exercice :</u> Arithmétique

1) Soient $z_1 \in \mathbb{U}_a$ et $z_2 \in \mathbb{U}_b$. Alors $(z_1 z_2)^{ab} = (z_1^a)^b \times \left(z_2^b\right)^a = 1 \times 1 = 1$. Donc $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_{ab}$, et ϕ est bien définie.
2) On écrit l'identité de Bézout entre a et b. Alors $\exists u, v \in \mathbb{Z}, av + bu = 1$.
   En divisant de chaque côté par ab, on obtient bien le résultat demandé.
3) Soit $z_1 = e^{\frac{2iu\pi}{a}}, z_2 = e^{\frac{2iv\pi}{b}}$, alors $\phi(z_1, z_2) = e^{2i\pi\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}\right)} = e^{\frac{2i\pi}{ab}}$.

<u>Exercice :</u> Complexes

1) $z = \frac{\omega - i}{\omega + i} = \frac{(\omega-i)(\overline{\omega}-i)}{|\omega|^2 + i(\overline{\omega}-\omega)+1} = \frac{|\omega|^2 - i(\omega+\overline{\omega})-1}{|\omega|^2+i(\overline{\omega}-\omega)+1} = \frac{|\omega|^2 - i}{|\omega|^2+1+2b}$, d'où le résultat demandé.
2) On a $(|\omega|^2+1)^2 = |\omega|^4 + 2|\omega|^2 + 1 = (|\omega|^2-1)^2 + 4|\omega|^2$
   $= (|\omega|^2-1)^2 + 4a^2 + 4b^2$
   $> (|\omega|^2-1)^2 + (2a)^2$
3) $|z|^2 = Re(z)^2 + Im(z)^2 = \frac{\left(|\omega|^2-1\right)^2 + 4a^2}{(|\omega|^2+1+2b)^2} < \frac{\left(|\omega|^2-1\right)^2+4a^2}{(|\omega|^2+1)^2} < 1$

<u>Exercice :</u> Complexes

1) On a $\sum_{k=0}^{n} \sin(k) = Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right) = Im\left(e^{\frac{in}{2}} \frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = \sin\left(\frac{n}{2}\right)\frac{sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{sin\left(\frac{1}{2}\right)}$
2) On a $\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \sin(k+j) = Im\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} e^{i(k+j)}\right) = Im\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik} \times \sum_{j=0}^{n} e^{ij}\right) =$
   $e^{\frac{in}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$

<u>Exercice :</u> Suites

1) On a $x-1 \leq E(x) \leq x$
2) $\forall k \in \mathbb{Z}, kx-1 \leq E(kx) \leq kx \Rightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx-1) \leq u_n \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(kx)$
   Ainsi $\frac{x\frac{n(n+1)}{2}-n}{n^2} \leq u_n \leq \frac{x\frac{n(n+1)}{2}}{n^2}$, donc $\frac{x}{2}+\frac{x}{2n}-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$
   Enfin, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{x}{2}$.
3) On réécrit la limite de la question 2 :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|u_n - \frac{x}{2}\right| < \varepsilon$$
   Donc pour cet ε et ce x (qu'on supposera positif pour simplifier les calculs), on a donc :
$$u_n \in \left]\varepsilon - \frac{x}{2}; \varepsilon + \frac{x}{2}\right[$$

   Or $u_n \in \mathbb{Q}$, on veut donc $u_n \in]a; b[$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$.
   Fixons ce $a < b$ dans $\mathbb{R}_+$ simplifier les calculs (la même chose peut être atteinte en posant dans $\mathbb{R}_-$, et dans les cas mixtes). On doit donc résoudre :
$$\begin{cases} a = \varepsilon - \dfrac{x}{2} \\ b = \varepsilon + \dfrac{x}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{a+b}{2} \\ x = b - a \end{cases}$$
   On vérifie que $\varepsilon > 0$ (car $a \neq b$) et que $x \in \mathbb{R}_+$ (car $b > a$), et on a bien $u_n \in]a; b[\cap \mathbb{Q}$, donc $\mathbb{Q}$ est bel et bien dense dans $\mathbb{R}$.