

Feuille 6 – Corrigé

Exercice 1 :

1)

$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x} \ln(x)]_1^e - 2 \int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x} dx = 2\sqrt{e} - 2[\ln(x)]_1^e = 2(\sqrt{e} - 1)$$

2)

$$\int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx = [x \ln^2 x]_e^{e^2} - 2 \int_e^{e^2} \ln x dx = 4e^2 - [x \ln x - x]_e^{e^2} = 3e^2$$

3)

$$\begin{aligned} \int_2^3 \ln(x^2 - 1) dx &= [x \ln(x^2 - 1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x^2 - 1} dx \\ &= 3 \ln 8 - 2 \ln 3 - \int_2^3 \left(1 + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\right) dx \\ &= 3 \ln 8 - 2 \ln 3 - (1 + 2 \ln 2 - \ln 2 - \ln 3) \\ &= -1 + 8 \ln 2 - \ln 3 \end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (\cos x + \sin x)(\cos x - \sin x)$

2) f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} := D$

Et $\forall x \in D, \cos x + \sin x \neq 0$, donc :

$$\int f(x) dx = \int (\cos x - \sin x) dx = \sin x + \cos x + C, C \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}^*,$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \int \frac{1/a^2}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \int \frac{1/a}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, C \in \mathbb{R}$$

2) On a :

$$\int \frac{3}{x^2 + 4x + 29} dx = \int \frac{3}{(x+2)^2 + 5^2} dx = \int \frac{3}{u^2 + 5^2} du = \frac{3}{5} \arctan\left(\frac{x+2}{5}\right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Où l'on a posé le changement de variable $u = x + 2$

Exercice 4 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $t = \tan \frac{x}{2}$.

Alors :

$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \cos\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \cos x$$

De même,

$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2 \sin x \cos x}{1} = \sin\left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \sin x$$

Et enfin,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

- 2) On utilise le changement de variable proposé, on a $x = 2 \arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1} dt = 2 \left[-\frac{1}{t+1} \right]_0^1 = 1$$

- 3) Ici, il faut découper grâce à la relation de Chasles :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx = \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x} dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

Exercice 5 :

1)

$$I := \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}} dx = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} dx$$

On pose alors $u = \sqrt{x}$, on obtient $x = u^2$ et $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2u} \Leftrightarrow dx = 2u du$

(n'oublions pas que l'on a le droit car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective sur $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$).

Ainsi

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} 2u du = 2 \int_{1/2}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = 2 [\arcsin(u)]_{1/2}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\pi}{3}$$