Continuité des fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre, E et F sont des $\mathbb{K}$-ev normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espace sont de dimensions finies.

1) Limites

Convergences

Définition :

Soient $f : X \subset E \to F$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Exemple : ⍟

1) Pour une fonction constante.
   Soit $C \in F$. Soit $f : E \to F$
   $$x \mapsto C \in F$$
   Soit $a \in E$.
   Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, alors
   $$\forall x \in E, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - C\|_F = \|C - C\|_F = 0 < \varepsilon$$
   C'est toujours vrai, donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$
2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, considérons $\quad p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
   $$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$$
   Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
   Soit $\varepsilon > 0$
   Posons $\eta = \varepsilon > 0$ (on a complété après)
   Alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
   $$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| = \|x - a\|_\infty \leq \eta$$
   $$\Longrightarrow |p_i(x) - a_i| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty \leq \eta = \varepsilon$$
   Donc $p_i(x) \xrightarrow[x \to a]{} a_i$

Propriété :

Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset E \to F$, a un point adhérent à X_1 et à X_2 et $\ell \in F$.
Si $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in X_1}]{} \ell$ et $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in X_2}]{} \ell$, alors $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x \in X}]{} \ell$.