

Séries de fonctions – Démonstrations

Théorème :

Si $\sum f_n$ CVN sur A , alors :

- (i) $\sum f_n$ CVAS sur A .
- (ii) $\sum f_n$ CVU sur A .

Démonstration :

Supposons que $\sum f_n$ CVN sur $A \subset D$.

- Soit $x_0 \in A$, alors $0 \leq |f_n(x_0)| \leq \|f_n\|_{\infty, A}$
Or $\sum \|f_n\|_{\infty, A}$ CV, donc par comparaison de SATP, $\sum |f_n(x_0)|$ CV
Donc $\sum f_n$ CVAS sur A .
- Comme $\sum f_n$ CVAS sur A , $\sum f_n$ CVS sur A .
Notons $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in A, R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$
Comme la série numérique $\sum |f_n(x)|$ CV,

$$|R_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, A} := \alpha_n$$

Alors la fonction R_n est bornée sur A et :

$$0 \leq \|R_n\|_{\infty, A} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_{\infty, A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

comme reste d'une série CV.

Donc par le théorème des gendarmes, $\|R_n\|_{\infty, A} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $(R_n)_n$ CVU vers la fonction nulle, donc $\sum f_n$ CVU vers A .