Endomorphismes orthogonaux

Dans tout le chapitre, E désignera un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Caractérisations équivalentes

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u^* \circ u = Id_E$
(ii) $u \circ u^* = Id_E$
(iii) u est bijectif et $u^{-1} = u^*$

Définition : On appelle endomorphisme orthogonal de E tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$u^* \circ u = Id_E$$

On note $O(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et B une base orthonormée de E. On a équivalence entre :

(i) u est un endomorphisme orthogonal de E.
(ii) $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u^*)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^t\mathrm{Mat}_B(u)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(Le 3e point vient du fait que B est orthonormée, donc $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_B(u)$)

Exemple : Soit F un sev de E tel que $F \neq E$, notons p_F la projection orthogonale sur F.

Comme $F \neq E$, et que $E = F \oplus F^\perp$, on a $F^\perp \neq \{0_E\}$

Donc $\exists x \in F^\perp, x \neq 0_E$. Alors $p_F(x) = 0_E$, donc $x \in \ker(p_F)$

Ainsi p_F n'est pas injectif, donc pas bijectif, donc $p_F \notin O(E)$.

Notons s_F la symétrie orthogonale par rapport à F. Dans une b.o.n B de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus F^\perp$, alors $S = \mathrm{Mat}_B(s_f)$

Alors ${}^tSS = SS = S^2 = I_n$

Donc $S \in O_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $s_F \in O(E)$.

Propriété : Soit $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$

Propriété : L'ensemble $O(E)$ des endomorphismes orthogonaux de E muni de la composition est un groupe. Plus précisément, $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E),\circ)$ où $GL(E)$ désigne l'ensemble des endomorphisme bijectifs de E :

(i) $Id_E \in O(E)$

(ii) $\forall u, v \in O(E), u \circ v \in O(E)$

(iii) $\forall u \in O(E), u^{-1} \in O(E)$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u \in O(E)$

(ii) u conserve la norme, ie $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$

(iii) u conserve le produit scalaire, ie $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$

(iv) $\forall B = (e_1, \dots, e_n)$ base orthonormée de E, l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de B est une base orthonormée de E (càd que u envoie toute b.o.n de E sur une b.o.n de E) .

(v) $\exists B = (e_1, \dots, e_n)$ b.o.n de E telle que l'image $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ de B par u est une base orthonormée de E (càd u envoie au moins une b.o.n de E sur une b.o.n de E).

Remarque : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Puisque $u \in O(E)$ ssi u conserve la norme, les endomorphismes orthogonaux de E sont aussi appelés isométries vectorielles de E.

Définition : Soit H un sev de E. On dit que H est un hyperplan de E si $\dim H = \dim E - 1$

Propriété : Soit H un sev de E. On a équivalence entre :

(i) H est un hyperplan de E

(ii) $\exists a \in E$ non nul tel que $H = (\mathrm{Vect}(a))^{\perp}$