Chapitre 5 – Séries entières

Définition

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

Définition : On appelle série entière (S.E) définie par la suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la série de fonctions $\sum u_n$ où $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto a_n z^n$

Par abus de notation, on note cette série de fonction $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

L'ensemble $\mathcal{D}$ des $z \in \mathbb{C}$ par lesquels la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ CV est appelé le domaine de convergence de la S.E. $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et la fonction $S : \mathcal{D} \to \mathbb{C}, z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est appelé somme de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$

Exemple :

1) La SE $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ a pour domaine $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\} := \mathcal{D}(0; 1)$ = disque ouvert de centre 0 et de rayon 1

Rayon de convergence

Lemme d'Abel : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration : ⍟

- Si $z_0 = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, donc la propriété est vérifiée.
- Si $z_0 \neq 0$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Comme la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| < M$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n z_0^n| \times \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \times \left(\underbrace{\frac{|z|}{|z_0|}}_{<1}\right)^n$

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ CV, donc par comparaison de SATP, $\sum |a_n z^n|$ CV, donc la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA

□

Définition : on appelle rayon de convergence (R_{CV}) de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ l'élément :

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ | \text{ La suite } (a_n r^n) \text{ est bornée}\} \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

Remarque : cet ensemble est non vide car pour $r = 0$ la suite correspondante vaut la suite nulle.

Exemple : $\sum n!\, z^n$

Soit $r \in \mathbb{R}_+$, si $r \neq 0$, $n!\, r^n = \left(\frac{\left(\frac{1}{r}\right)^n}{n!}\right)^{-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

Donc $(n!\, r^n)_n$ n'est pas bornée, donc $R = \sup\{0\} = 0$

Propriété : De manière équivalent, on a aussi $R = \sup\left\{r \in \mathbb{R}_+ | a_n r^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0\right\}$

Propriété : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$

(i) Si $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA

(ii) Si $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG

Démonstration : ⍟

(i) Si $R = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On suppose donc $R > 0$
Comme $|z| < R$, z n'est pas un majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ | \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
Donc il $\exists r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ | \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ vérifiant $|z| < r_0$
On peut alors appliquer le Lemme d'Abel (car $(a_n r_0^n)_n$ est bornée, et donc la série $\sum a_n z^n$ CVA.

(ii) Si $|z| > R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ | \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ donc $|z| \notin \{r \in \mathbb{R}_+ | \ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
C'est-à-dire que $(a_n |z|^n)_n$ est non bornée, or $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n|z|^n|$
Donc $(a_n z^n)_n$ est non bornée.
Alors la série $\sum a_n z^n$ DVG

Remarque : on utilise très souvent la contraposée du théorème précédent.

Remarque : si la série diverge mais pas grossièrement, alors $|z_0| = R$

Remarque : si la série est semi-convergente, alors $|z_0| = R$

Corollaire : Soit $\sum a_n z^n$ une SE de rayon de convergence R.

- Si $R = 0$, $\mathcal{D} = \{0\}$
- Si $R = +\infty$, $\mathcal{D} = \mathbb{C}$
- SI $R \in]0\,;+\infty[$, $\mathcal{D}(0,R) \subset \mathcal{D} \subset \overline{\mathcal{D}(0,R)}$, où $\begin{cases} \mathcal{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \\ \overline{\mathcal{D}(0,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\} \end{cases}$

Définition : Soit $\sum a_n z^n$ une S.E. de rayon de convergence R. Le disque $\mathcal{D}(0,R)$ est appelé disque ouvert de convergence de $\sum a_n z^n$

Détermination pratique du rayon de convergence

Règle de d'Alembert

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration : ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n z^n$, alors $|u_n| = \underbrace{|a_n|}_{\neq 0 \text{ si } n \geq n_0} |z|^n > 0 \ \forall n \geq n_0$

Et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \times |z| \xrightarrow[n \to +\infty]{} l|z|$. De plus, $l|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{l}$

Ainsi par la règle d'Alembert appliquée à la série numérique $\sum |u_n|$:

- Si $|z| < \frac{1}{l}$, $l|z| < 1$, donc la série numérique $\sum |u_n|$ CV, donc $\sum a_n z^n$ CV(A)

Donc $|z| \leq R$, ceci $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z| < \frac{1}{l}$, donc $\frac{1}{l} < R$

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$ donc la série numérique $\sum |u_n|$ DVG donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG aussi.
- Donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| > \frac{1}{l}, |z| \geq R$ d'où en faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{l}$: $\frac{1}{l} \geq R$

D'où $\mathrm{R} = \frac{1}{l}$

□

Règle de Cauchy :

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

Démonstration : ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, on étudie la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}|z|\right)^n = |a_n z^n|$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$, donc comme $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$, par définition de la limite,
$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \geq 1$$
Et donc $|a_n z^n| \geq 1^n = 1$, donc $|a_n z^n|$ ne tend pas vers 0.
Donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG, donc $R \leq \frac{1}{l}$
- Si $|z| < \frac{1}{l}$, alors $l|z| < 1$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$
Donc par définition de la limite,
$$\exists q \text{ tel que } 0 < q < 1 \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \leq q$$
D'où par croissance de $t \mapsto t^n$, $|a_n z^n| \leq q^n$
Donc par comparaison de SATP, la série numérique $\sum |a_n z^n|$ CV,
D'où $\sum a_n z^n$ CVA, ceci $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{l}$
Donc $\frac{1}{l} \leq R$, donc par double inégalité, $R = \frac{1}{l}$

□

Cas des séries lacunaires

Il se peut que l'on rencontre des séries de la forme $\sum a_n z^{2n}$ ou $\sum a_n z^{3n}$

Ces deux séries peuvent s'interpréter comme les séries entières suivantes :

$$\sum c_p z^p \text{, où } c_p = \begin{cases} a_n & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et resp. } \sum d_q z^q \text{, où } d_q = \begin{cases} a_n & \text{si } q \equiv 0[3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque : Très souvent, les règles de Cauchy et d'Alembert ne vont pas marcher. Dans ce cas, soit on revient à la définition du rayon de convergence, soit on étudie la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$ pour obtenir des inégalités sur R.