Feuille 5 – Corrigé

Exercice 2

1) On a

$$\lim_{x\to x_k}\frac{x-x_k}{xP(x)}=\lim_{x\to x_k}\frac{x-x_k}{x\big(P(x)-P(x_k)\big)}=\lim_{x\to x_k}\frac{1}{x}\times\frac{x-x_k}{P(x)-P(x_k)}=\frac{1}{x_kP(x_k)}$$

2) On sait que toutes les racines de P sont distinctes et non nulles. Ainsi le polynôme XP est scindé à racines simples.
Ainsi on sait qu'il existe $\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$, tels que

$$\frac{1}{XP(X)}=\frac{\lambda_0}{X}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{X-x_k}$$

Pour λ_0, on multiplie par X et on évalue en 0, on obtient alors $\lambda_0=\frac{1}{P(0)}$.
Pour les λ_k, $k\in[\![1,n]\!]$, on multiplie par $X-x_k$ et on fait tendre x vers x_k.
On a alors :

$$\lambda_k=\lim_{x\to x_k}\frac{x-x_k}{xP(x)}=\frac{1}{x_kP'(x_k)}$$

On obtient :

$$\frac{1}{XP(X)}=\frac{1/P(0)}{X}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1/x_kP(x_k)}{X-x_k}$$

3) En multipliant par X des deux côtés de l'équations précédentes, on obtient :

$$\frac{1}{P(X)}=\frac{1}{P(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{X}{X-x_k}\times\frac{1}{x_kP(x_k)}$$

Or $\frac{X}{X-x_k}\xrightarrow[X\to+\infty]{}1$ et $P(X)\xrightarrow[X\to+\infty]{}\pm\infty$

Ainsi $\frac{1}{P(X)}\xrightarrow[X\to+\infty]{}0$ et $\lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{P(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{X}{X-x_k}\times\frac{1}{x_kP(x_k)}=\frac{1}{P(0)}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_kP(x_k)}$

On obtient donc le résultat voulu.

Exercice 3 :

1)

On a :

$$X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-\omega_k)$$

Où $\omega_k=e^{\frac{2ik\pi}{n}}$

On sait que toutes les racines n-ièmes de l'unité sont différentes.

Ainsi si l'on pose $P(X)=X^{n-1}$ et $Q(X)=X^n-1$, On a

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{X - \omega_k}$$

Avec $\lambda_k = \frac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \frac{\omega_k^{n-1}}{n\omega_k^{n-1}} = \frac{1}{n}$

Donc

$$F(X) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X - \omega_k}$$

2) On remarque que $\forall x > 1, \ln(x^n - 1)$ est défini et

$$(\ln(x^n - 1))' = \frac{nx^{n-1}}{x^n - 1}$$

Ainsi

$$\frac{1}{n}(\ln(x^n - 1))' = \frac{x^{n-1}}{x^n - 1} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X - \omega_k}$$

Finalement, on a :

$$(\ln(x^n - 1\,))' = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{X - \omega_k}$$