Séries entières – Démonstrations

Lemme d'Abel : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument.

Démonstration : ⍟

- Si $z_0 = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, donc la propriété est vérifiée.
- Si $z_0 \neq 0$, soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Comme la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n z_0^n| < M$$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq |a_n z^n| = |a_n||z|^n = |a_n z_0^n| \times \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n \leq M \times \left(\underbrace{\frac{|z|}{|z_0|}}_{<1}\right)^n$

Or la série géométrique $\sum \left(\frac{|z|}{|z_0|}\right)^n$ CV, donc par comparaison de SATP, $\sum |a_n z^n|$ CV, donc la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA

□

Propriété : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Soit $z \in \mathbb{C}$

(i) Si $|z| < R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ CVA
(ii) Si $|z| > R$, la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG

Démonstration : ⍟

(i) Si $R = 0$, $\nexists z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. On suppose donc $R > 0$
Comme $|z| < R$, z n'est pas un majorant de $\{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
Donc il $\exists r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ vérifiant $|z| < r_0$
On peut alors appliquer le Lemme d'Abel (car $(a_n r_0^n)_n$ est bornée, et donc la série $\sum a_n z^n$ CVA.

(ii) Si $|z| > R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$ donc $|z| \notin \{r \in \mathbb{R}_+ |\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\}$
C'est-à-dire que $(a_n |z|^n)_n$ est non bornée, or $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n z^n| = |a_n||z^n| = |a_n |z|^n|$
Donc $(a_n z^n)_n$ est non bornée.

Alors la série $\sum a_n z^n$ DVG

□

Règle de d'Alembert

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \neq 0$.

Si $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$

Démonstration : ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = a_n z^n$, alors $|u_n| = \underbrace{|a_n|}_{\neq 0\ si\ n \geq n_0} |z|^n > 0\ \forall n \geq n_0$

Et $\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \times |z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$. De plus, $l|z| < 1 \Leftrightarrow |z| < \frac{1}{l}$

Ainsi par la règle d'Alembert appliquée à la série numérique $\sum |u_n|$:

- Si $|z| < \frac{1}{l}$, $l|z| < 1$, donc la série numérique $\sum |u_n|$ CV, donc $\sum a_n z^n$ CV(A)
  Donc $|z| \leq R$, ceci $\forall z \in \mathbb{C}^*, |z| < \frac{1}{l}$, donc $\frac{1}{l} < R$
- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$ donc la série numérique $\sum |u_n|$ DVG donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG aussi.
- Donc $\forall z \in \mathbb{C}^*$ tel que $|z| > \frac{1}{l}, |z| \geq R$ d'où en faisant tendre $|z|$ vers $\frac{1}{l}$: $\frac{1}{l} \geq R$

  D'où $\mathrm{R} = \frac{1}{l}$

□

<u>Règle de Cauchy :</u>

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $|a_n|^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors le rayon de convergence R de la S.E. $\sum a_n z^n$ vérifie $R = \frac{1}{l}$, avec les conventions $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$.

<u>Démonstration :</u> ⍟

Soit $z \in \mathbb{C}$, on étudie la nature de la série numérique $\sum a_n z^n$.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left(|a_n|^{\frac{1}{n}}|z|\right)^n = |a_n z^n|$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z|$

- Si $|z| > \frac{1}{l}$, alors $l|z| > 1$, donc comme $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$, par définition de la limite,
  $$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \geq 1$$
  Et donc $|a_n z^n| \geq 1^n = 1$, donc $|a_n z^n|$ ne tend pas vers 0.
  Donc la série numérique $\sum a_n z^n$ DVG, donc $R \leq \frac{1}{l}$
- Si $|z| < \frac{1}{l}$, alors $l|z| < 1$ et $|a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} l|z| > 1$
  Donc par définition de la limite,
  $$\exists q \text{ tel que } 0 < q < 1 \text{ et } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n|^{\frac{1}{n}}|z| \leq q$$
  D'où par croissance de $t \mapsto t^n$, $|a_n z^n| \leq q^n$
  Donc par comparaison de SATP, la série numérique $\sum |a_n z^n|$ CV,
  D'où $\sum a_n z^n$ CVA, ceci $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \frac{1}{l}$
  Donc $\frac{1}{l} \leq R$, donc par double inégalité, $R = \frac{1}{l}$

□

<u>Théorème :</u> Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. La série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout disque fermé $\overline{D(0;r)}$ de centre O et de rayon r, $0 \leq r < R$.

<u>Démonstration :</u> ⍟

Soit r tel que $0 \leq r < R$

Notons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n : z \mapsto a_n z^n$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall z \in \overline{D(0;r)}, |u_n(z)| = |a_n||z|^n \leq |a_n|r^n$$

Ainsi la fonction u_n est bornée sur $\overline{D(0;r)}$ et puisque la borne supérieure d'un ensemble est le $+$ petit majorant de cet ensemble,

$$0 \leq \|u_n\|_{\infty,\overline{D(0;r)}} = \sup_{z\in\overline{D(0;r)}} |u_n(z)| \leq |a_n| r^n$$

Mais $r < R$, donc la série numérique $\sum a_n r^n$ CVA. Ainsi par comparaison de SATP, la série $\sum \|u_n\|_\infty$ CV, d'où $\sum u_n$ CVN sur $\overline{D(0;r)}$.