Topologie des espaces vectoriels normés

I) Parties ouvertes et fermées

1) Parties ouvertes

Définition : Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0, B(x,r) \subset U$$

On dit aussi que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ et E sont deux ouverts de E
   En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\} \subset E$
   Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \emptyset$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alors $]a,b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
   Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,
   $\mathcal{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$
   $\quad =]x-r, x+r[$
   Montrons que $]a,b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$
   Posons $r = \min(x-a, b-x)$, alors $r > 0$
   Soit $y \in]x-r, x+r[$, alors $x - r \leq y \leq x + r$
   Donc $a < y < b$
   Donc $\mathcal{B}(x,r) \subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est ouvert.
3) Montrons que dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $\forall a \in E, \forall r > 0$, la boule ouverte $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ est une partie ouverte.
   Soit $x \in B(a,r)$
   Objectif : construire $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset B(a,r)$
   Soit $\rho = r - \|x-a\| > 0$
   Soit $y \in B(x,\rho)$, montrons que $y \in B(a,r)$
   On a $\|y-a\| = \|y-x+x-a\|$
   $\quad \leq \|y-x\| + \|x-a\|$
   $\quad < \rho + \|x-a\| = r$
   Ainsi $y \in B(a,r)$
4) Montrons que $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\}$ et $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$ ne sont pas des ouverts de E.
   Soit $x \in S(a,r)$. Objectif : montrer que $\forall \varepsilon > 0, B(x,e) \not\subset \overline{B}(a,r)$
   Soit $\varepsilon > 0$, posons $z = x + \frac{\varepsilon}{2}u$, où $u = \frac{x-a}{\|x-a\|}$
   Alors $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}u - x\right\| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| \times \underbrace{\|u\|}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
   Ainsi $z \in B(x\,;\varepsilon)$
   Mais $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} - x\right\| = \left\|\underbrace{1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{(x-a)}_{\in E}\right\| = \left|1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right| \|x-a\|$
   $\quad = \|x-a\| + \frac{\varepsilon}{2} > r$
   Ainsi $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ ne sont pas des ouverts de E

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

2) Parties fermées

Définition : Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E

Remarque : On n'utilisera jamais la notation $\overline{X}$ pour désigner le complémentaire : elle désigne l'adhérence. On utilisera plutôt X^C ou $E\backslash X$.

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ est un fermé de E car $E\backslash\emptyset = E$ est un ouvert de E
   E est un fermé de E car $E\backslash E = \emptyset$ est un ouvert de E
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $[a, b],]-\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de $\mathbb{R}$.
   En effet, $\mathbb{R}\backslash[a, b] =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ en tant qu'union d'ouverts de $\mathbb{R}$.
3) Dans $(E, \|\cdot\|), \forall a \in E, \{a\}$ est un fermé de E. On va montrer que $E\backslash\{a\}$ est un ouvert de E.
   Soit $x \in E\backslash\{a\}$, posons $r = \|x - a\|$, alors $r > 0$ car $x \neq a$.
   Soit $y \in B(x, r)$, montrons que $y \in E\backslash\{a\}$
   Supposons par l'absurde que $y \notin E\backslash\{a\}$ ie $y = a$
   Alors $\|a - x\| = \|y - x\| < r$, Absurde.
   Ainsi $y \in E\backslash\{a\}$, d'où $B(x, r) \in E\backslash\{a\}$
   Donc $E\backslash\{a\}$ est un ouvert de E

Remarque : Il existe certains ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. ($[0,1[$ dans $\mathbb{R}$)

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Propriété : Une union finie de fermés de E est un fermé de E.

Remarque : on peut prendre $F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ et considérer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} \left[\frac{1}{n}, 1\right] =]0,1]$, pas un fermé de $\mathbb{R}$.

Propriété : (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim_{n\to+\infty} x_n$ appartient à F, ie :

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n+\infty]{} l \Longrightarrow l \in F$$

Attention : Pour autant, toutes les suites dans un fermé ne convergent pas !

Exemple :

Mq $A = \{ M \in M_3(\mathbb{R}) \mid Tr(M) = 24 \}$ est un fermé de $M_3(\mathbb{R})$.

Comme dim $M_3(\mathbb{R}) = 3^2 < +\infty$, toutes les normes sur $M_3(\mathbb{R})$ sont 2 à 2 équivalentes.

Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $L = \left(l_{ij}\right)_{1\leq i,j\leq 3} \in M_3(\mathbb{R})$. Mq $L \in A$.

Par caractérisation de la convergence dans un ev de dimension finie, si on note $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = \left(M_{ij}(n)\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ alors les suites $\left(M_{ij}(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ correspondent aux suites coordonnées de$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, ainsi :

$$M_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L \Leftrightarrow \forall (i, j) \in [\![1,3]\!]^2, M_{ij}(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} L_{ij}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, M_n \in A$, donc $Tr(M_n) = 24$. Ainsi $Tr(L) = 24$, donc $L \in A$.

Exemple : ⍟

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de E.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{B}(a,r)$ qui converge vers l (dans $(E, \|\cdot\|)$).

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \overline{B}(a,r)$, ie $\|x_n - a\| \leq r$

Essayons de montrer que $\underbrace{\|x_n - a\|}_{\in\mathbb{R}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \underbrace{\|l - a\|}_{\in\mathbb{R}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \big|\|x_n - a\| - \|l - a\|\big| \underset{\text{ineg. tri. inv.}}{\leq} \|(x_n - a) - (l - a)\| = \|x_n - l\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Ainsi $\|x_n - a\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|l - a\|$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la première inégalité, il vient :

$$\|l - a\| \leq r \Longrightarrow l \in \overline{B}(a,r)$$

Ainsi par caractérisation séquentielle des fermés, $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de E.

De même, $S(a,r)$ est un fermé de E (même preuve en remplaçant les $\overline{B}(a,r)$ par $S(a,r)$).

<u>Propriété :</u>

Si $F_1, \dots, F_p$ sont des fermés des espaces normés $E_1, \dots, E_p$ alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$, $[1, +\infty[\times [-3,2]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$ en tant que produit cartésien de fermés de $\mathbb{R}^2$

Intérieur

<u>Définition :</u> Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a ie si :

$$\exists r > 0, B(a,r) \subset X$$

L'intérieur de X, noté $\mathring{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X, c'est-à-dire :

$$\mathring{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x,r) \subset X\}$$

<u>Propriété :</u> Une partie $X \subset E$ est dite ouverte ssi $\mathring{X} = X$

Exemple : $\mathring{\mathbb{Z}} = \emptyset$

<u>Propriété :</u> Soit $X \subset E$, alors $\mathring{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X. Par conséquent, $\mathring{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X.

Adhérence

<u>Propriété :</u> On dit qu'un élément $a \in E$ est **adhérent** à une partie $X \subset E$ si :

$$\forall r > 0, B(a,r) \cap X \neq 0$$

On appelle **adhérence** de X l'ensemble $\overline{X}$ des éléments adhérents à X.

Propriété : Soit X une partie de E, alors

$$E\backslash\overline{X} = \overset{\circ}{(E\backslash X)} \quad \text{et} \quad E\backslash\overset{\circ}{X} = \overline{E\backslash X}$$

Propriété :

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\overline{X} = X$

Propriété : Soit X une partie de E. Alors $\overline{X}$ est l'intersection de tous les fermés contenant X. Par conséquent, $\overline{X}$ est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X.

Propriété :

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

- a est adhérent à X
- Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a.

Exemple : $0_{M_n(\mathbb{R})}$ est adhérent à $GL_n(R)$

Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*, M_k = \frac{1}{k}I_n$, alors $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ (car $\det M_k = \left(\frac{1}{k}\right)^n \neq 0$)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (comme $\dim M_n(\mathbb{R}) < +\infty$, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ sont deux à deux équivalentes. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left\|M_k - 0_{M_n(\mathbb{R})}\right\| = \|M_k\| = \left|\frac{1}{k}\right| \|I_n\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

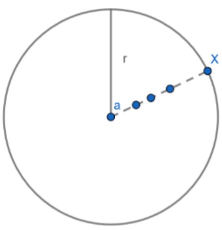
Ainsi $(M_k)_{k\geq 1}$ converge vers $0_{M_n(\mathbb{R})}$, donc $0_{M_n(\mathbb{R})} \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$.

Exemple : ⍟

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ et $r > 0$.

On va montrer que $\overline{B(a,r)} = \overline{B}(a,r)$

- On a vu que $\overline{B}(a,r)$ est un fermé contenant $B(a,r)$ donc par la propriété 2.7,
$$\overline{B(a,r)} \subset \overline{B}(a,r)$$
- On a $\overline{B}(a,r) = B(a,r) \cup S(a,r)$, or $B(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$. Reste donc à montrer que
$$S(a,r) \subset \overline{B(a,r)}$$



Soit $x \in S(a,r)$, on va construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a,r)$ qui converge vers x

Posons $u = \frac{x-a}{\|x-a\|} = \frac{1}{r}(x-a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \underbrace{a}_{\in E} + r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\underbrace{u}_{\in E}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| = \left|r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\right| \|u\| = r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < r$

Ainsi $x_n \in B(a,r)$

Enfin, $\|x_n - x\| = \left\|a + r\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{1}{r}(x-a) - x\right\| = \left\|-\frac{1}{n+1}(x-a)\right\| = \frac{1}{n+1}r \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ie $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Donc $x \in \overline{B(a,r)}$, ce qui amène à l'inclusion voulue.

Propriété : On appelle **frontière** d'une partie X de E l'ensemble $\mathrm{Fr}(X) = \overline{X}\backslash\overset{\circ}{X}$.

Densité

Définition : Une partie X de E est dite **dense** si $\overline{X} = E$.

Propriété : Soit X une partie de E. On a équivalence entre :

- X est une partie dense de E.
- $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a,r) \cap X \neq \emptyset$
- $\forall a \in E, \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Exemple : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$

But : Construire une suite $\left(A_p\right)_{p\in\mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tq $A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$

- Si M est inversible, on prend la suite constante égale à M.
- Sinon, $\det M = 0$, donc $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(M)$

Posons $\forall p \in \mathbb{N}^*, A_p = M + \frac{1}{p} I_n$

On a $\left\|A_p - M\right\| = \left\|\frac{1}{p} I_n\right\| = \frac{1}{p}\|I_n\| \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$, donc $A_p \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$

Cmme toutes les matrices sont trigonalisables dans $\mathbb{C}$, et $0 \in Sp(M)$ car M est non inversible, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure tq $M = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & (*) & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$$

Donc $A_p = P\left(T + \frac{1}{p} I_n\right) P^{-1}$, et $\det A_p = \det\left(T + \frac{1}{p} I_n\right)$

Posons $\alpha = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} > 0$

Aloors $\forall p \in \mathbb{N}^*$ tq $p > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{p} < \alpha$

Donc $\frac{1}{p} < |\lambda_i|, \forall i \in [\![1,n]\!]$, alors $\lambda_i \neq -\frac{1}{p} \Leftrightarrow \lambda_i + \frac{1}{p} \neq 0$

Alors $\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0, \lambda_i + \frac{1}{p} \neq 0$ et $\frac{1}{p} \neq 0$

Donc $\det\left(T + \frac{1}{p} I_n\right) = \frac{1}{p} \times \dots \times \frac{1}{p} \times \left(\lambda_1 + \frac{1}{p}\right) \times \dots \times \left(\lambda_r + \frac{1}{p}\right) \neq 0$, donc $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$

Ainsi $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Parties compactes

Définition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On appelle **suite extraite** (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ toute suite de la forme $\left(u_{\varphi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_n$ converge également vers ℓ.

Définition :

Une partie K de E est dite compacte si toute suite d'éléments de K possède une sous-suite convergente dans K, i.e.

$$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}, \exists \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante, } x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \ \underline{\in K}$$

On dit aussi que K est un compact de E.

Propriété :

Toute partie compacte est fermée et bornée.

Remarque : Si $\dim E < +\infty$, alors on a équivalence :

$$K \text{ compact} \Longleftrightarrow K \text{ fermé et borné}$$

Théorème :

Si E est un espace de dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées.

Corollaire : (Généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass)

Dans un espace vectoriel de dimension finie, toute suite bornée admet une suite extraite convergente