Préparation au DS

Exercice 1 :

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$

1) Montrer que $A^3 + A^2 = A + I$
2) En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}
3) Retrouver ce résultat avec le pivot de Gauss.

Exercice 2 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n) \quad \text{et} \quad u_0 = 0$$

1) Montrer que la fonction $t \mapsto \cos(t)$ admet un unique point fixe sur $[0,1]$
2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$
3) Montrer que :
$$\forall x, y \in [0,1], |\cos(x) - \cos(y)| \leq \sin(1)\, |x - y|$$
4) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq (\sin(1))^n$. *Indice : on pourra raisonner par récurrence.*
5) Conclure sur la convergence de $(u_n)_n$

Exercice 3 :

Le but de cet exercice est de calculer explicitement la somme des n premiers carrés de deux manières.

1) En calculant de deux manières différentes cette somme :
$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - k^3$$
2) En utilisant le résultat de la première question avec une récurrence.

Exercice 4 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le degré du polynôme suivant de $\mathbb{C}[X]$:

$$P(X) = (X^2+1)^n - 2X^{2n} + (X^2-1)^n$$

Exercice 5 :

Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$

1) Trouver le plus petit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(B + I_3)^n = 0_{M_3(\mathbb{R})}$
2) Montrer que B est inversible, et trouver une expression de B^{-1} en fonction des puissances de B.
3) Calculer B^n pour tout $n \geq 2$.