# Continuité des fonctions vectorielles

Dans tout le chapitre, $E$ et $F$ sont des $\mathbb{K}$-ev normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espace sont de dimensions finies.

## 1) Limites

### Convergences

Définition :
Soient $f : X \subset E \to F$ et $a$ un point adhérent à $X$. On dit que $f$ tend vers $\ell \in F$ en $a$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\| \leq \varepsilon$$

Cet élément $\ell$ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple : ⍟

1) Pour une fonction constante.
Soit $C \in F$. Soit $f : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto C \in F \end{array}$
Soit $a \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, alors
$$\forall x \in E, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - C\|_F = \|C - C\|_F = 0 < \varepsilon$$
C'est toujours vrai, donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = C$

2) Soit $i \in [\![1, n]\!]$, considérons $p_i : \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \end{array}$
Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
Soit $\varepsilon > 0$
Posons $\eta = \varepsilon > 0$ (on a complété après)
Alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\max_{1 \leq k \leq n} |x_k - a_k| = \|x - a\|_\infty \leq \eta$$
$$\Longrightarrow |p_i(x) - a_i| = |x_i - a_i| \leq \|x - a\|_\infty \leq \eta = \varepsilon$$
Donc $p_i(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} a_i$

Propriété :
Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset E \to F$, $a$ un point adhérent à $X_1$ et à $X_2$ et $\ell \in F$.
Si $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X_1}}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X_2}}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{\substack{x \to a \\ x \in X}}{\longrightarrow} \ell$.