Feuille 4 – Ensembles, logique

Méthode : Ensembles
Pour montrer que deux ensembles sont égaux on raisonne presque exclusivement par double implication :

$$A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ et } A \supseteq B$$

Ainsi, très souvent on commence ainsi pour prouver que $A = B$:
« Soit $x \in A$, alors … … donc $x \in B$.
Réciproquement, soit $x \in B$, alors … … donc $x \in A$.
Ainsi $A = B$ »
On peut aussi raisonner par équivalence :
« On a $x \in A \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x \in B$ »

Exercice 1

Démontrer les lois de Morgan suivantes, avec A, B, C trois parties d'un ensemble E :

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C) \qquad (A^c)^c = A \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Exercice 2

Soit E un ensemble, A, B deux parties contenues dans E. On appelle différence symétrique de A et B, notée $A\Delta B$, l'ensemble suivant :

$$A\Delta B = \{x \in A \cup B | x \notin A \cap B\}$$

1) Interpréter $A\Delta B$.
2) Montrer que la relation est bel et bien symétrique.
3) Calculer $A\Delta A$, $A\Delta A^c$, $E\Delta A$, $(A \cup B)\Delta B$
4) Montrer que :

$$A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$$

Exercice 3 : (difficile)
Soit E un ensemble fini de cardinal n. Montrer par récurrence que le cardinal des parties de E est 2^n, c'est-à-dire $\text{Card}\big(P(E)\big) = 2^n$. (Indication pour l'hérédité : on posera $E' = E \cup \{a\}$, avec a un élément quelconque. On distinguera les parties de E' qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas).

Exercice 4 :
Soit E, F deux ensembles, A, B deux parties de E et C, D deux parties de F.
Montrer que :

$$(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

Exercice 5 :
Soit $f : E \to F$.

1. Soient A et A' deux parties de E. Montrer :
$$A \subset A' \Longrightarrow f(A) \subset f(A')$$
2. Soient B et B' deux parties de F. Montrer
$$B \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$$
3. Soit A une partie de E. A-t-on :
$$A = f^{-1}\big(f(A)\big)$$
Si non, donner une condition sur f pour rendre cette affirmation vraie.