

Topologie des espaces vectoriels normés

I) Parties ouvertes et fermées

1) Parties ouvertes

Définition : Une partie \mathcal{U} de E est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0, B(x, r) \subset \mathcal{U}$$

On dit aussi que \mathcal{U} est un ouvert de E .

Exemples ★

- 1) \emptyset et E sont deux ouverts de E

En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, B(x, r) = \{y \in E \mid \|y - x\| < r\} \subset E$

Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, B(x, r) \subset \emptyset$

- 2) Dans \mathbb{R} muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ alors $]a, b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de \mathbb{R} .

Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\} \\ =]x - r, x + r[$$

Montrons que $]a, b[$ est une partie ouverte de \mathbb{R} . Soit $x \in]a, b[$

Posons $r = \min(x - a, b - x)$, alors $r > 0$

Soit $y \in]x - r, x + r[$, alors $x - r < y < x + r$

Donc $a < y < b$

Donc $B(x, r) \subset]a, b[$, donc $]a, b[$ est ouvert.

- 3) Montrons que dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $\forall a \in E, \forall r > 0$, la boule ouverte $B(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ est une partie ouverte.

Soit $x \in B(a, r)$

Objectif : construire $\rho > 0$ tel que $B(x, \rho) \subset B(a, r)$

Soit $\rho = r - \|x - a\| > 0$

Soit $y \in B(x, \rho)$, montrons que $y \in B(a, r)$

$$\text{On a } \|y - a\| = \|y - x + x - a\| \\ \leq \|y - x\| + \|x - a\| \\ < \rho + \|x - a\| = r$$

Ainsi $y \in B(a, r)$

- 4) Montrons que $\overline{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$ et $S(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$ ne sont pas des ouverts de E .

Soit $x \in S(a, r)$. Objectif : montrer que $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \not\subset \overline{B}(a, r)$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $z = x + \frac{\varepsilon}{2}u$, où $u = \frac{x-a}{\|x-a\|}$

$$\text{Alors } \|z - x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}u - x\right\| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| \times \underbrace{\|u\|}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Ainsi $z \in B(x, \varepsilon)$

$$\text{Mais } \|z - a\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2} \frac{x-a}{\|x-a\|} - a\right\| = \left\| \underbrace{1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{(x-a)}_{\in E} \right\| = \left|1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right| \|x - a\| \\ = \|x - a\| + \frac{\varepsilon}{2} > r$$

Ainsi $\overline{B}(a, r)$ et $S(a, r)$ ne sont pas des ouverts de E

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

2) Parties fermées

Définition : Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E

Remarque : On n'utilisera jamais la notation \bar{X} pour désigner le complémentaire : elle désigne l'adhérence. On utilisera plutôt X^c ou $E \setminus X$.

Exemples ⚡

- 1) \emptyset est un fermé de E car $E \setminus \emptyset = E$ est un ouvert de E
 E est un fermé de E car $E \setminus E = \emptyset$ est un ouvert de E
- 2) Dans \mathbb{R} muni de $|\cdot|$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $[a, b]$, $] -\infty, a]$ et $[b, +\infty[$ sont des fermés de \mathbb{R} .
En effet, $\mathbb{R} \setminus [a, b] =] -\infty, a[\cup]b, +\infty[$ est un ouvert de \mathbb{R} en tant qu'union d'ouverts de \mathbb{R} .
- 3) Dans $(E, \|\cdot\|)$, $\forall a \in E$, $\{a\}$ est un fermé de E . On va montrer que $E \setminus \{a\}$ est un ouvert de E .
Soit $x \in E \setminus \{a\}$, posons $r = \|x - a\|$, alors $r > 0$ car $x \neq a$.
Soit $y \in B(x, r)$, montrons que $y \in E \setminus \{a\}$
Supposons par l'absurde que $y \notin E \setminus \{a\}$ ie $y = a$
Alors $\|a - x\| = \|y - x\| < r$, Absurde.
Ainsi $y \in E \setminus \{a\}$, d'où $B(x, r) \subset E \setminus \{a\}$
Donc $E \setminus \{a\}$ est un ouvert de E

Remarque : Il existe certains ensembles qui ne sont ni ouverts, ni fermés. ($]0, 1[$ dans \mathbb{R})

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E .

Propriété : Une union finie de fermés de E est un fermé de E .

Remarque : on peut prendre $F_n = [\frac{1}{n}, 1]$ et considérer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [\frac{1}{n}, 1] =]0, 1]$, pas un fermé de \mathbb{R} .

Propriété : (Caractérisation séquentielle des fermés)

Une partie F de E est fermée si et seulement si, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ d'éléments de F qui converge, la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n$ appartient à F , ie :

$$\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l \Rightarrow l \in F$$

Attention : Pour autant, toutes les suites dans un fermé ne convergent pas !

Exemple :

Mq $A = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 24\}$ est un fermé de $M_3(\mathbb{R})$.

Comme $\dim M_3(\mathbb{R}) = 3^2 < +\infty$, toutes les normes sur $M_3(\mathbb{R})$ sont 2 à 2 équivalentes.

Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A qui converge vers $L = (l_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \in M_3(\mathbb{R})$. Mq $L \in A$.

Par caractérisation de la convergence dans un ev de dimension finie, si on note $\forall n \in \mathbb{N}, M_n = (M_{ij}(n))_{1 \leq i, j \leq 3}$ alors les suites $(M_{ij}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ correspondent aux suites coordonnées de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans la base canonique de $M_3(\mathbb{R})$, ainsi :

$$M_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L \Leftrightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, M_{ij}(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L_{ij}$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, M_n \in A$, donc $Tr(M_n) = 24$. Ainsi $Tr(L) = 24$, donc $L \in A$.

Exemple : \odot

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un evn. Soit $a \in E$ et $r > 0$. Montrons que $\overline{B}(a, r)$ est un fermé de E .

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{B}(a, r)$ qui converge vers l (dans $(E, \|\cdot\|)$).

$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \overline{B}(a, r)$, ie $\|x_n - a\| \leq r$

Essayons de montrer que $\underbrace{\|x_n - a\|}_{\in \mathbb{R}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \underbrace{\|l - a\|}_{\in \mathbb{R}}$

On a $\forall n \in \mathbb{N}, \|\|x_n - a\| - \|l - a\|\| \underset{\text{ineg. tri. inv.}}{\leq} \|(x_n - a) - (l - a)\| = \|x_n - l\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi $\|x_n - a\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \|l - a\|$. En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la première inégalité, il vient :

$$\|l - a\| \leq r \Rightarrow l \in \overline{B}(a, r)$$

Ainsi par caractérisation séquentielle des fermés, $\overline{B}(a, r)$ est un fermé de E .

De même, $S(a, r)$ est un fermé de E (même preuve en remplaçant les $\overline{B}(a, r)$ par $S(a, r)$).

Propriété :

Si F_1, \dots, F_p sont des fermés des espaces normés E_1, \dots, E_p alors $F = F_1 \times \dots \times F_p$ est une partie fermée de l'espace vectoriel normé produit $E = E_1 \times \dots \times E_n$.

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2, [1, +\infty[\times [-3, 2]$ est un fermé de \mathbb{R}^2 en tant que produit cartésien de fermés de \mathbb{R}^2

Intérieur

Définition : Un élément $a \in E$ est dit **intérieur** à une partie $X \subset E$ si X est un voisinage de a ie si :

$$\exists r > 0, B(a, r) \subset X$$

L'intérieur de X , noté $\overset{\circ}{X}$, est l'ensemble de tous les points intérieurs à X , c'est-à-dire :

$$\overset{\circ}{X} = \{x \in E \mid \exists r > 0, B(x, r) \subset X\}$$

Propriété : Une partie $X \subset E$ est dite ouverte ssi $\overset{\circ}{X} = X$

Exemple : $\overset{\circ}{\mathbb{Z}} = \emptyset$

Propriété : Soit $X \subset E$, alors $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de tous les ouverts inclus dans X . Par conséquent, $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert (au sens de l'inclusion) inclus dans X .

Adhérence

Propriété : On dit qu'un élément $a \in E$ est **adhérent** à une partie $X \subset E$ si :

$$\forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset$$

On appelle **adhérence** de X l'ensemble \overline{X} des éléments adhérents à X .

Propriété : Soit X une partie de E , alors

$$E \setminus \bar{X} = (E \setminus X)^\circ \quad \text{et} \quad E \setminus X^\circ = \overline{E \setminus X}$$

Propriété :

Une partie $X \subset E$ est fermée si et seulement si $\bar{X} = X$

Propriété : Soit X une partie de E . Alors \bar{X} est l'intersection de tous les fermés contenant X . Par conséquent, \bar{X} est le plus petit fermé (au sens de l'inclusion) contenant X .

Propriété :

Soient X une partie de E et $a \in E$. On a équivalence entre :

- a est adhérent à X
- Il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X qui converge vers a .

Exemple : $0_{M_n(\mathbb{R})}$ est adhérent à $GL_n(\mathbb{R})$

Posons $\forall k \in \mathbb{N}^*, M_k = \frac{1}{k} I_n$, alors $M_k \in GL_n(\mathbb{R})$ (car $\det M_k = \left(\frac{1}{k}\right)^n \neq 0$)

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ (comme $\dim M_n(\mathbb{R}) < +\infty$, toutes les normes sur $M_n(\mathbb{R})$ sont deux à deux équivalentes. Alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \|M_k - 0_{M_n(\mathbb{R})}\| = \|M_k\| = \left|\frac{1}{k}\right| \|I_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Ainsi $(M_k)_{k \geq 1}$ converge vers $0_{M_n(\mathbb{R})}$, donc $0_{M_n(\mathbb{R})} \in \overline{GL_n(\mathbb{R})}$.

Exemple : \odot

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un evn, $a \in E$ et $r > 0$.

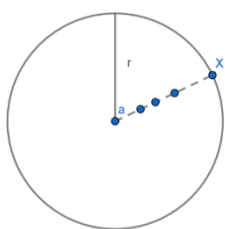
On va montrer que $\overline{B(a, r)} = \bar{B}(a, r)$

- On a vu que $\bar{B}(a, r)$ est un fermé contenant $B(a, r)$ donc par la propriété 2.7,

$$\overline{B(a, r)} \subset \bar{B}(a, r)$$

- On a $\bar{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r)$, or $B(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$. Reste donc à montrer que

$$S(a, r) \subset \overline{B(a, r)}$$



Soit $x \in S(a, r)$, on va construire une suite $(x_n)_n$ d'éléments de $B(a, r)$ qui converge vers x

Posons $u = \frac{x-a}{\|x-a\|} = \frac{1}{r}(x-a)$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \underbrace{a}_{\in E} + r \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \underbrace{u}_{\in E}$

Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n - a\| = \left| r \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \right| \|u\| = r \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < r$

Ainsi $x_n \in B(a, r)$

Enfin, $\|x_n - x\| = \left\| a + r \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \times \frac{1}{r}(x-a) - x \right\| = \left\| -\frac{1}{n+1}(x-a) \right\| = \frac{1}{n+1} r \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$

ie $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$. Donc $x \in \overline{B(a, r)}$, ce qui amène à l'inclusion voulue.

Propriété : On appelle **frontière** d'une partie X de E l'ensemble $\text{Fr}(X) = \bar{X} \setminus X^\circ$.

Densité

Définition : Une partie X de E est dite **dense** si $\bar{X} = E$.

Propriété : Soit X une partie de E . On a équivalence entre :

- X est une partie dense de E .
- $\forall a \in E, \forall r > 0, B(a, r) \cap X \neq \emptyset$
- $\forall a \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$.

Exemple : $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$

But : Construire une suite $(A_p)_{p \in \mathbb{N}} \in GL_n(\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$ tq $A_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} M$

- Si M est inversible, on prend la suite constante égale à M .
- Sinon, $\det M = 0$, donc $0 \in Sp_{\mathbb{K}}(M)$

Posons $\forall p \in \mathbb{N}^*, A_p = M + \frac{1}{p} I_n$

On a $\|A_p - M\| = \left\| \frac{1}{p} I_n \right\| = \frac{1}{p} \|I_n\| \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$, donc $A_p \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$

Comme toutes les matrices sont trigonalisables dans \mathbb{C} , et $0 \in Sp(M)$ car M est non inversible, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et T triangulaire supérieure tq $M = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ 0 & \ddots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_r \end{pmatrix}, \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}^*$$

Donc $A_p = P \left(T + \frac{1}{p} I_n \right) P^{-1}$, et $\det A_p = \det \left(T + \frac{1}{p} I_n \right)$

Posons $\alpha = \min\{|\lambda_1|, \dots, |\lambda_n|\} > 0$

Alors $\forall p \in \mathbb{N}^*$ tq $p > \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{p} < \alpha$

Donc $\frac{1}{p} < |\lambda_i|, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, alors $\lambda_i \neq -\frac{1}{p} \Leftrightarrow \lambda_i + \frac{1}{p} \neq 0$

Alors $\exists p_0 \in \mathbb{N}^*$ tq $\forall p \geq p_0, \lambda_i + \frac{1}{p} \neq 0$ et $\frac{1}{p} \neq 0$

Donc $\det \left(T + \frac{1}{p} I_n \right) = \frac{1}{p} \times \dots \times \frac{1}{p} \times \left(\lambda_1 + \frac{1}{p} \right) \times \dots \times \left(\lambda_r + \frac{1}{p} \right) \neq 0$, donc $A_p \in GL_n(\mathbb{K})$

Ainsi $GL_n(\mathbb{K})$ est dense $M_n(\mathbb{K})$.