Suites numériques

Définition de la suite numérique :

Une suite numérique est une fonction de $\mathbb{N}$ ou de $\{n \in \mathbb{N} | n \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}\}$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On la note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$

Série :

On note la série de terme général u_n,

$$\forall n \geq n_0, S_n \coloneqq \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

S_n est la somme partielle d'ordre n de u_n

Convergence des séries :

La série numérique $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite convergente si la suite de ses sommes partielles converge, ie :

$$\exists S \in \mathbb{R}, S = \lim_{m\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{m} u_n,$$

$$\text{On note alors } S = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

En cas de converge (ie d'existence de S), on définit pour tout $n \geq n_0$ le reste d'ordre n de $\sum u_n$ par

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$$

Une série non convergente est dite divergente.

Limite des restes en cas de convergence :

Si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, alors $(R_n)_{n\geq n_0} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

Série télescopique :

Une série télescopique est une série numérique dont le terme général est $u_{n+1} - u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On a alors $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\Leftrightarrow$ (u_n) converge

Et en cas de convergence,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$$

Théorème :

Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Contraposée :</u> Si u_n ne converge pas vers 0, alors on dit que $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Opérations sur les séries convergentes :

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques. Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum(\lambda u_n + v_n)$ converge.

$$\text{De plus, } \sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$