Feuille 8 – Corrigé

Exercice 1 :

1) $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, on a $u(x,y,z) = u(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xu(e_1) + yu(e_2) + zu(e_3)$
   Ainsi, $u(x,y,z) = (-2x-4z)e_1 + 3ye_2 + (2x+4z)e_3 = (-2x-4z, 3y, 2x+4z)$
   Il est facile de prouver que u est bien linéaire, même si ce n'est pas demandé dans l'exercice.
2) Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   On a
$$X \in \ker(u) \Leftrightarrow (-2x-4z, 3y, 2x+4z) = (0,0,0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x-4z = 0 \\ 3y = 0 \\ 2x+4z = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z \\ y = 0 \end{cases}$$
   D'où $\ker(u) = \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -2z, y = 0\,\}$
   $= \mathrm{Vect}\big((-2,0,1)\big)$
   Ainsi $\dim(\ker u) = 1$.
   De plus comme $\ker(u) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, u n'est pas injectif, et donc ni surjectif, ni bijectif.
3) Le théorème du rang donne directement $rg(u) = 2$. Ainsi il nous suffit de trouver deux vecteurs v, w de $\mathbb{R}^3$ tels que $\big(u(v), u(w)\big)$ forme une famille libre.
   Or on peut voir aisément que la famille $\big(u(e_1), u(e_2)\big)$ est bien libre, elle forme donc une base de l'image de u.
4) Dans les faits, on doit seulement montrer que la réunion d'une base de l'image de u et d'une base du noyau de u est une famille libre. En effet, si l'on y arrive, alors ce sera une base de $\mathbb{R}^3$ (au vu de la dimension), et donc elle sera en particulier génératrice de E, ce qui nous garantira la décomposition de tout élément de E dans $\ker(u) + \mathrm{Im}(u)$. De plus, puisque la famille est libre, on aura aussi $\ker(u) \cap \mathrm{Im}(u) = \{0\}$, et donc la somme directe.
   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, tels que $\lambda_1(-2,0,1) + \lambda_2(-2,0,2) + \lambda_3(0,3,0) = 0$
   On a immédiatement :
$$\begin{cases} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$
   Ainsi la famille choisie est libre, et donc s'en suit tout le raisonnement précédent.

Exercice 2 :

1) Supposons que p soit le projecteur sur F parallèlement à G
   Soit $x \in E$, alors $\exists (x_F, x_G) \in F \times G$, tel que $x = x_F + x_G$.
   Alors $p^2(x) = p \circ p(x) = p(x_F) = p\left(\underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{0}_{\in G}\right) = x_F = p(x)$
2) Soient p et q deux projecteurs différents et non nuls.
   a) $p = p^2 = p \circ \lambda q = \lambda(p \circ q) = \lambda(\lambda q \circ q) = \lambda^2 q^2 = \lambda^2 q$
   Ainsi, comme p et q sont non nuls, on a $\lambda^2 = \lambda$.
   b) Supposons que la famille (p,q) est liée. Alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}, p = \lambda q$. Ainsi $\lambda^2 = \lambda$, donc $\lambda \in \{0,1\}$. Or $\lambda \neq 0$ car $p \neq 0$, et $\lambda \neq 1$ car $p \neq q$. C'est absurde.
3)
   a) Supposons que $p + q$ soit un projecteur. Alors
$$p + q = (p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + p^2 = p + q + p \circ q + q \circ p$$
   On en déduit l'égalité demandée.

Ainsi on a $p \circ q = -q \circ p$, donc :

$$p \circ q = p^2 \circ q = p \circ (p \circ q) = -p \circ (q \circ p) = -(p \circ q) \circ p = q \circ p^2 = q \circ p$$

Ainsi $q \circ p = -p \circ q = -q \circ p$, donc $p \circ q = q \circ p = 0$.

b) " $\Longrightarrow$ "

Supposons que $p + q$ est un projecteur de E. Alors d'après la question précédente, on a bien l'égalité demandée.

" $\Longleftarrow$ "

Supposons que $p \circ q = q \circ p = 0$. Alors :

$$(p+q)^2 = p^2 + p \circ q + q \circ p + q^2 = p^2 + q^2 = p + q$$

D'où $p + q$ est bien un projecteur de E.