Feuille 3 – Sous-espaces vectoriels

Soit E un $\mathbb{K}$-ev (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On a :

$$F \text{ est un sev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, \lambda x + y \in F \end{cases}$$

Si de plus, G et H sont deux sev de E, on a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G \\ \forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! \, (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$$

Exercice 1 :

Soit E l'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ et $a \in E$. Déterminer si les parties suivantes de E sont des sous-espaces vectoriels :

$$E_1 = \{\, y \in E \mid y' + a(x)y = 0 \,\} \qquad\qquad E_2 = \{\, y \in E \mid y' + a(x)y = x \,\}$$

Soient maintenant $E = \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{\, P \in E \mid \deg(P) = n \,\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E ? De même, est-ce que l'ensemble $\{\, P \in E \mid \deg(P) \leq n \,\}$ est un sous-espace vectoriel de E ?

Exercice 2 :

Soient $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on pose $\alpha_k \in \mathbb{R}$ tels que les α_i sont tous différents et on définit $f_{\alpha_k} \in E$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_{\alpha_k}(x) = e^{\alpha_k x}$

Montrer que la famille $\left(f_{\alpha_k}\right)_{k \in [\![1,n]\!]}$est libre dans E.

Exercice 3 :

L'ensemble $D = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x + y)(x - 2y) = 0 \,\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4 :

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des fonctions π-périodiques, et G l'ensemble des fonctions convergeant vers 0 en $+\infty$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
3) Montrer que F et G ne sont pas supplémentaires dans E. (On pourra par exemple considérer la fonction identité).