Feuille 4 – Corrigé

Exercice 1 :

1) Soit $x \in (A \cap B) \cup C$. Alors $x \in A \cap B$ ou $x \in C$. Donc soit x appartient à A et B, soit x appartient à C. Ainsi si $x \in A \cap B$, alors $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, et si $x \in C$, on a aussi $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
   Réciproquement, supposons $x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$, donc $x \in A \cup C$ et $x \in B \cup C$
   On distingue alors deux cas :
   - Soit $x \in C$,
   - Soit $x \notin C$, et donc $x \in A$ et $x \in B$, c'est-à-dire $x \in A \cap B$

   Ainsi on a $x \in (A \cap B) \cup C$.
2) On possède les équivalences suivantes :
   $x \in (A^c)^c \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in A$
3) On a :
   $x \in (A \cap B)^c \Leftrightarrow x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \notin A \text{ ou } x \notin B \Leftrightarrow x \in A^c \text{ ou } x \in B^c \Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

Exercice 2 :

1) La différence symétrique est l'équivalent du « ou exclusif » : Si $x \in A\Delta B$, alors x appartient à A ou B, mais en aucun cas aux deux.
2) On a :
   $x \in A\Delta B \Leftrightarrow x \in A \cup B$ et $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B \cup A$ et $x \in B \cap A \Leftrightarrow x \in B\Delta A.$
3) On a $x \in A\Delta A \Leftrightarrow x \in A \cup A$ et $x \in A \cap A \Leftrightarrow x \in A$. Ainsi $A\Delta A = A$
   On a $x \in A\Delta A^c \Leftrightarrow x \in A \cup A^c$ et $x \in A \cap A^c \Leftrightarrow x \in \emptyset$. Ainsi $A\Delta A^c = \emptyset$
   On a $x \in E\Delta A \Leftrightarrow x \in E \cup A$ et $x \in E \cap A \Leftrightarrow x \in E$ et $x \in A \Leftrightarrow x \in A$. Ainsi $E\Delta A = A$.
   On a $x \in (A \cup B)\Delta B \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cup B$ et $x \in (A \cup B) \cap B \Leftrightarrow x \in (A \cup B)$ et $x \in B \Leftrightarrow x \in B$. Ainsi $(A \cup B)\Delta B = B$.
4) Soit $x \in A\Delta B$. Alors d'après la première question, x appartient soit uniquement à A, soit uniquement à B. Supposons $x \in A$, ainsi $x \notin B$, donc $x \in A \cap B^c$. Supposons maintenant $x \in B$, alors $x \notin A$, et donc $x \in B \cap A^c$. Alors $x \in (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$
   Réciproquement, soit $x \in (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. On distingue deux cas :
   - Soit $x \in A$ et $x \notin B$, c'est-à-dire $x \in A\backslash(A \cap B)$
   - Soit $x \in B$ et $x \notin A$, c'est-à-dire $x \in B\backslash(A \cap B)$

   Ainsi on a bien $x \in (A \cup B)\backslash(A \cap B) = A\Delta B$.

Exercice 3 :

On procède par récurrence sur le cardinal de E, c'est-à-dire n.

<u>Initialisation :</u> $n = 1$

Si $n = 1$, alors E ne contient qu'un élément, et donc ne peut admettre qu'une partie, E lui-même.

Ainsi $P(E) = E$, et donc $\text{Card}\big(P(E)\big) = 1 = 2^0$

<u>Hypothèse :</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $\text{Card}(E) = n$, et $\text{Card}\big(P(E)\big) = 2^n$.

<u>Hérédité :</u> Soit $E' = E \cup \{a\}$, où a est un élément quelconque. On a donc $\text{Card}(E') = n + 1$.

Cherchons le cardinal des parties de E'

Séparons les parties de E' qui contiennent a et celles qui ne le contiennent pas.

Les parties de E' qui ne contiennent pas a sont exactement les parties de E, qui ont donc pour cardinal 2^n par hypothèse de récurrence.

Aux parties de E' qui contiennent a, on applique la bijection qui leur retire a. L'image directe de cette bijection est l'ensemble des parties de E qui a donc pour cardinal 2^n par hypothèse de récurrence.

Ainsi, puisqu'une bijection sur ensembles finis ne se fait que sur les ensembles équipotents, le cardinal des parties de E' qui contiennent a est 2^n.
Ainsi on a $\text{Card}\big(P(E)\big) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Exercice 4 :
On va procéder par double inclusion. Soit $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$. Alors $(x, y) \in A \times B$ et donc $x \in A$, $y \in B$. On a aussi $(x, y) \in (C \times D)$, et donc $x \in C$ et $y \in D$.
Ainsi, $x \in A \cap C$ et $y \in B \cap D$. Ceci prouve que $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$.
Réciproquement, soit $(x, y) \in (A \cap C) \times (B \cap D)$. Alors $x \in A \cap C$ et donc $x \in A$ et $x \in C$. De même $y \in B \cap D$, donc $y \in B$ et $y \in D$. Ainsi, $(x, y) \in A \times B$ et $(x, y) \in C \times D$. On conclut que $(x, y) \in (A \times B) \cap (C \times D)$.

Exercice 5 :

1. Supposons $A \subset A'$. Soit $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$, tel que $y = f(x)$. Mais alors $x \in A'$, et donc $y \in f(A')$. Ainsi $f(A) \subset f(A')$.
2. Soit $x \in f^{-1}(B)$. Alors $f(x) \in B$. Mais $B \subset B'$, donc $f(x) \in B'$. Ainsi $x \in f^{-1}(B')$. On a donc bien $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(B')$.
3. On a bien $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$, puisque si $x \in A$, alors $f(x) \in f(A)$.
   En revanche, c'est l'inclusion réciproque qui bloque. En particulier si on prend $E = \{a, b\}$ et $F = \{a\}$, avec f une application constante qui envoie tous les éléments de E sur a.
   Alors on a $f(\{a\}) = \{a\}$, mais $f^{-1}(\{a\}) = \{a, b\}$. Ainsi $f^{-1}\big(f(\{a\})\big) = \{a, b\} \neq \{a\}$.

   Pour rendre cette affirmation vraie, il suffit en réalité que f soit injective. Prouvons-le :
   Supposons maintenant f injective. Soit $x \in f^{-1}\big(f(A)\big)$. Alors $f(x) \in f(A)$. Ainsi,
   $$\exists x' \in A, f(x) = f(x')$$
   Or f est injective, donc $x = x'$, donc $x \in A$.