Orthogonalité – Démonstrations

Propriété : Identité de Pythagore

1) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
2) Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ⍟

1) On sait que $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
   Ainsi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
2) On sait que $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle)$
   Ainsi $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow Re(\langle x, y\rangle) = 0 \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⍟

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale d'éléments de E tq $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \neq 0_E$. Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0_E$

D'une part $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\rangle = \langle e_j, 0_E\rangle$

D'autre part, par linéarité à droite de $\langle , \rangle$, $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle e_j, e_k\rangle}_{0 \text{ si } k \neq j} = \lambda_j \|e_j\|^2$

Ainsi, $\lambda_j \|e_j\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $\|e_j\| \neq 0$ car $e_j \neq 0_E$

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$.

Ce résultat s'étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée d'éléments de E, alors $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1 \neq 0$ donc $e_i \neq 0_E$

Définition : soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$, constitué des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de A, ie

$$\boxed{A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}}$$

Exemples

1) ⍟ $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \langle x, 0_E\rangle = 0$
2) ⍟ $E^\perp = \{0_E\}$ car 0_E est le seul élément de E orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

<u>Propriété :</u> Soit $F = Vect(e_i)_{i\in I}$ un sev de E. Alors $\boxed{F^\perp = \{\, x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0 \,\}}$

<u>Démonstration :</u> ⍟ Soit $x \in F^\perp$, alors $\forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0$. Or $\forall i \in I, e_i \in F,$ donc $\langle x, e_i\rangle = 0$

Ainsi $F^\perp \subset \{\, x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0 \,\}$

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0$. Soit $y \in F = Vect(e_i)_{i\in I}$

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ tq $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}$

D'où $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle x, e_{i_k}\rangle}_{=0} = 0$

Donc $x \in F^\perp$ d'où l'inégalité voulue.