Théorème : (Règle d'Alembert)

Soit $\sum u_n$ une suite réelle, en supposant que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, u_n > 0$

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors

(i) Si $l > 1$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
(ii) Si $l < 1$, alors $\sum u_n$ converge.
(iii) Si $l = 1$, on ne peut conclure.

Démonstration :

(i) Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} l > 1$

- Si $l \in \mathbb{R}_+, \forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0$ tq

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - l\right| \leq \varepsilon$$
$$\Leftrightarrow l - \varepsilon \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq l + \varepsilon$$

Pour $\varepsilon = \frac{l-1}{2} > 0$,

$\exists n_1 \in \mathbb{N}, n_1 \geq n_0$, tel que $\forall n \geq n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq l - \frac{l-1}{2} = \frac{l+1}{2} > 1$

Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1\ \forall n \geq n_1$, donc $u_{n+1} \geq u_n, \forall n > n_1$

Ainsi $(u_n)_{n\geq n_1}$ est croissante et $u_{n_1} > 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

Donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- Si $l = +\infty, \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_A \geq n_0, \forall n \geq n_A, \frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

Donc pour $A = 1, \forall n \geq n_A, u_{n+1} \geq u_n$.

Et on conclut de même.

(ii) Supposons que $l < 1$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$,

Donc par définition de la limite, avec $\varepsilon = \frac{1-l}{2} > 0$

$$\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{l+1}{2} \coloneqq q$$

Or $l < 1$ donc $0 < q < 1$

Alors $\forall n \geq n_1, u_{n+1} \leq q\, u_n$

Donc $\forall n \geq n_1, u_n \leq q^{n-n_1}\, u_{n_1}$

Ainsi $\forall n \geq n_1, u_n \leq \frac{1}{q^{n_1}} u_{n_1} \times q^n$

Or $|q| < 1$ donc la série géométrique $\sum q^n$ converge.

Ainsi par comparaison de SATP, $\sum u_n$ converge.

(iii) Posons $\forall n \geq 1, u_n = \frac{1}{n} > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et u_n converge.

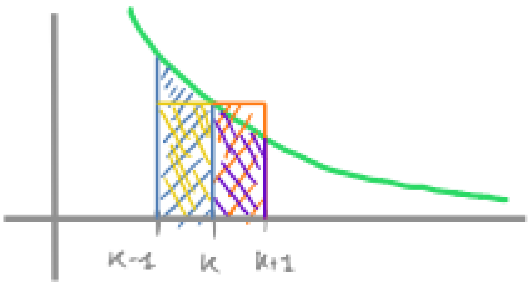
Posons $\forall n \geq 1, v_n = \frac{1}{n^2} > 0$ et $\frac{v_{n+1}}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et v_n converge.

Théorème de comparaison série-intégrale :

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : [p; +\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction continue, décroissante et à valeurs >0.

Alors la série numérique $\sum_{n \geq p} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_p^{+\infty} f(t)dt$ on même nature.

Démonstration :



$$\int_k^{k+1} f(t) \leq f(k) = f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t) \qquad (*)$$

Soit $n \geq p+1$. En sommant l'inégalité de gauche dans $(*)$ pour k allant de p à n, on trouve :

$$\int_p^{n+1} f(t)dt \leq S_n := \sum_{k=p}^{n} f(k)$$

En sommant l'inégalité de droite dans $(*)$ pour k allant de $p+1$ à n

$$\sum_{k=p+1}^{n} f(k) \leq \int_n^{p} f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=p}^{n} f(k) \leq \int_n^{p} f(t)dt + f(p)$$

D'où :

$$\int_p^{n+1} f(t)dt \leq S_n \geq \int_p^{n} f(t)dt + f(p)$$

Théorème : (Séries de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Démonstration :

Si $\alpha < 0, n^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0^+$ donc $\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \neq 0$.

De même, si $\alpha = 0, \frac{1}{n^0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \neq 0$.

Donc $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement si $\alpha \leq 0$.

→ Supposons que $\alpha > 0$.

Posons $f : [1; +\infty[\to \mathbb{R}_+, t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} = t^{-\alpha}$. f est continue, à valeurs >0

f est dérivable sur $[1; +\infty[$ avec $f'(t) = -\alpha t^{-\alpha-1}$

Donc f est décroissante.

Par le théorème de comparaison série/intégrale :

$$\sum_{n\geq1} \frac{1}{n^\alpha} = \sum_{n\geq1} f(n) \text{ CV } \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \text{ CV}$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 1$$