Feuille 1 – Corrigé

Exercice 1 :

1) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.
D'autre part, quand x tend vers 0, on a une forme $\frac{0}{0}$. On peut donc appliquer la règle de L'Hôpital (car le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions de classe C^1) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$
2) (Pour les astucieux) On revient à la définition, et donc d'après la question précédente, 1 est un équivalent de f en 0 !
(Pour ceux qui aiment s'exercer)
On a $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc $f(x) = \frac{\left(1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)-1\right)}{x} = \frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

Exercice 2 :

1) On a $\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ car quand $x \to +\infty, \frac{1}{x} \to 0$
Ainsi $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$
On a donc $g(x) = \exp\left(x\ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$
$$= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
On voit donc que $l = 1$
2) On reprend l'expression précédente, on note
$$g(x) - l = \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
On en déduit donc que $g(x) - l \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$