Endomorphismes autoadjoints – Démonstrations

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $A = \mathrm{Mat}_B(u)$
Alors $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^tA$

Démonstration : ⍟

Notons $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_B(u^*)$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne j de B, $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, correspond aux vecteur colonne des coordonnées de $u^*(e_{ij})$ dans la base B.

Or puisque B est une base orthonormée de E, $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$Ainsi pour $i \in [\![1, n]\!]$, b_{ij} correspond à la cordonnée du vecteur $u^*(e_j)$ selon le vecteur e_i, càd

$$b_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$$

Donc b_{ij} est la coordonnée du vecteur $u(e_{ij})$ selon le vecteur e_j

Donc $b_{ij} = a_{ji}$, où $A = \mathrm{Mat}_B(u) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

Donc $B = {}^tA$.

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\ker(u^*) = (Im(u))^\perp \text{ et } Im(u^*) = (\ker(u))^*$$

Démonstration : ⍟

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in Im(u)^\perp &\Leftrightarrow \forall z \in Im(u), \langle x, z\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, u(y)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u^*(x) \in E^\perp \\ &\Leftrightarrow u^*(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(u^*) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = (Im(u))^\perp$

En appliquant ceci à $v = u^* \in \mathcal{L}(E)$, on a $\ker(v^*) = (Im(u))^\perp$

ie $\ker(u) = (Im(u^*))^\perp$

Donc $(\ker u)^\perp = \left((Im(u^*))^\perp\right)^\perp = Im(u^*)$ car $\dim E < +\infty$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit F un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration : ⍟

Soit $x \in F^\perp$, montrons que $u^*(x) \in F^\perp$

Soit $y \in F, \langle u^*(x), y\rangle = \left\langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{u(y)}_{\in F} \right\rangle = 0$

Ainsi $u^*(x) \in F^\perp$, d'où $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$

<u>Lemme :</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

<u>Démonstration :</u> ⍟

Soient $\lambda, \mu \in Sp(u)$ avec $\lambda \neq \mu$.

Montrons que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$

Alors $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$

Ainsi $\langle u(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

Mais comme $u = u^*$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

D'où $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle x, y\rangle = 0$

Donc $\langle x, y\rangle = 0$

Ainsi $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

<u>Propriété :</u>
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On a équivalence entre :

(i) u est positif (ie $u \in S^+(E)$)
(ii) $Sp(u) \subset R^+$

De même, on a équivalence entre :

(i) u est défini positif (ie $u \in S^{++}(E)$)
(ii) $Sp(u) \subset R_+^*$

<u>Démonstration :</u> ⍟ (cas défini positif)

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $u \in S^{++}(E)$. Soit $\lambda \in Sp(u)$ (alors $\lambda \in \mathbb{R}$)

Et $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Alors $\langle x, u(x)\rangle = \langle x, \lambda x\rangle = \lambda\|x\|^2 > 0$ (car $u \in S^{++}(E)$)

Or $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq 0_E$, d'où $\lambda > 0$

Ainsi $Sp(u) \subset R_+^*$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Supposons que $Sp(u) \subset R_+^*$. Comme u est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Alors $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in E, x \neq 0_E$, alors $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $x \in \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ avec les $x_1, \dots, x_n$ non tous nuls, ie

$$\exists i_0 \in [\![1, n]\!], \text{ tq } x_{i_0} \neq 0$$

Donc $\langle x, u(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k , u\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} x_k e_k , \sum_{j=1}^{n} x_j \lambda_j e_j \right\rangle$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_k x_j \lambda_j \langle e_k, e_j \rangle$$

Or B est orthonormée, donc $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$

Ainsi $\langle x, u(x) \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k x_k \lambda_k = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_{i_0} x_{i_0} > 0$

Donc $u \in S^{++}(E)$