Chapitre 3 – Endomorphismes autoadjoints

Dans tout le chapitre E est un espace euclidien (donc préhilbertien réel de dimension finie) de dimension $n \in \mathbb{N}^*$

1) Matrices orthogonales

Par caractérisation équivalente de l'inverse d'une matrice dans $M_n(\mathbb{R})$, on a

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre

(i) A est inversible et $A^{-1} = {}^tA$
(ii) ${}^tAA = I_n$
(iii) $A{}^tA = I_n$

Définition : On dit qu'une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ${}^tAA = I_n$

Exemple : I_n et $-I_n$ sont orthogonales.

Théorème : L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(GL_n(\mathbb{R}), \times)$, cad

(i) $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$
(ii) $I_n \in O_n(\mathbb{R})$
(iii) $\forall A, B \in O_n(\mathbb{R}), A \times B \in O_n(\mathbb{R})$ et $A^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ de colonnes $C_1, \dots, C_n$ et de lignes $L_1, \dots, L_n$. On a équivalence entre

(i) A est une famille orthogonale
(ii) La famille $(C_1, \dots C_n)$ est une famille orthonormée de $M_{n,1}(\mathbb{R})$
(iii) La famille $(L_1, \dots L_n)$ est une famille orthonormée de $M_{1,n}(\mathbb{R})$

Exemple :

La matrice $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale car si on note C_1, C_2, C_3 ses colonnes, on a $\langle C_1, C_2 \rangle = 0$, $\langle C_2, C_3 \rangle = 0, \langle C_3, C_1 \rangle = 0$, et $\langle C_1, C_1 \rangle = 1, \langle C_2, C_2 \rangle = 1, \langle C_3, C_3 \rangle = 1$

Remarque :

Comme $\mathrm{Card}(C_1, \dots, C_n) = n = \dim\left(M_{n,1}(\mathbb{R})\right)$ et qu'une famille orthonormée est libre, on a aussi :

$$\text{(ii)} \Leftrightarrow (C_1, \dots, C_n) \text{ est une base orthonormée de } M_{n,1}(\mathbb{R})$$

$$\text{(iii)} \Leftrightarrow (L_1, \dots, L_n) \text{ est une base orthonormée de } M_{1,n}(\mathbb{R})$$

Théorème : Soit $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E et $\mathcal{F} = (e'_1, \dots, e'_n)$ une famille d'éléments de E. On a équivalence entre :

(i) $\mathcal{F}$ est une base orthonormée de E
(ii) $P = \mathrm{Mat}_B(\mathcal{F})$ est une matrice orthogonale

Dans ce cas, P représente la matrice de passage de la base orthonormée B à $\mathcal{F}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{F}}(B) = {}^tP$

Remarque :

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B, B' deux bases orthonormées de E, notons $A = \mathrm{Mat}_B(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{B'}(u)$, alors

$$A' = P^{-1}AP = {}^tPAP, \text{ où } P = Pass_{B \to B'} \in O_n(\mathbb{R})$$

<u>Définition :</u> Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A et B sont orthogonalement semblables si $\exists P \in O_n(\mathbb{R})$, $B = {}^tPAP$

<u>Propriété :</u> Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

(i) A et B sont orthogonalement semblables
(ii) A et B représentent le même endomorphisme u de l'espace euclidien dans 2 bases <u>orthonormées</u>

2) <u>Adjoint d'un endomorphisme</u>

Puisque $\dim E = n$, l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E est de dimension $\dim E \times \dim \mathbb{R} = n$

Donc il existe un isomorphisme entre E et $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$.

<u>Théorème de représentation de Riesz :</u>

Pour tout $a \in E$, notons $f_a = \langle \cdot, a \rangle : E \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \langle x, a \rangle$$

Alors l'application $F : E \to \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

$$a \mapsto f_a$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier,

$$\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R}), \exists!\, a \in E \text{ tel que } f = F(a) = f_a, \text{ ie tel que } \forall x \in E, f(x) = \langle x, a \rangle$$

Définition de l'adjoint

<u>Définition :</u> Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle$$

Remarque : par symétrique de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on peut inverser les places de u et u^*.
Exemple :

1) L'adjoint de Id_E est Id_E
   Car $\forall x, y \in E, \langle Id_E(x), y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, Id_E(y) \rangle$
2) De même, $\left(0_{\mathcal{L}(E)}\right)^* = 0_{\mathcal{L}(E)}$
3) On munit $\mathbb{R}^2$ de son p.s. usuel. Déterminons l'adjoint de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ défini par :
   $$\forall X = (x, y) \in \mathbb{R}^2, u(X) = (x + y, 0)$$
   Soient $X = (x, y)$ et $Y = (a, b) \in \mathbb{R}^2$
   Alors $\langle u(X), Y \rangle = xa + ya = \langle (x, y), (a, a) \rangle = \langle X, v(Y) \rangle$ où $v : Y = (a, b) \mapsto (a, a)$
   Comme $\forall Y = (a, b), Y' = (a', b') \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$, $v(\lambda x + y) = \lambda v(x) + v(y)$
   Donc $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$
   Donc par définition/unicité de l'adjoint, $u^* = v$

<u>Propriété :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base <u>orthonormée</u> de E. Notons $A = \mathrm{Mat}_B(u)$
Alors $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^tA$

Démonstration : ⍟

Notons $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*)$

Soit $j \in [\![1,n]\!]$, la colonne j de B, $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, correspond au vecteur colonne des coordonnées de $u^*(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Or puisque $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de E, $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x\rangle e_k$Ainsi pour $i \in [\![1,n]\!]$, b_{ij} correspond à la cordonnée du vecteur $u^*(e_j)$ selon le vecteur e_i, càd

$$b_{ij} = \langle e_i, u^*(e_j)\rangle = \langle u(e_i), e_j\rangle = \langle e_j, u(e_i)\rangle$$

Donc b_{ij} est la coordonnée du vecteur $u(e_i)$ selon le vecteur e_j

Donc $b_{ij} = a_{ji}$, où $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$

Donc $B = {}^tA$.

Attention : Si $\mathcal{B}$ n'est pas orthonormée, le résultat est FAUX.

Remarque : Comme dans une base orthonormée, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, on a :

- $\mathrm{rg}(u^*) = \mathrm{rg}(u)$
- $\det(u^*) = \det(u)$

Propriétés de l'adjoint

Propriété : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

(i) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$
(ii) $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
(iii) $(u^*)^* = u$
(iv) Si u est bijectif, u^* l'est aussi et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

La démonstration se fait en utilisant les propriétés des matrices dans une certaine base $\mathcal{B}$.

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\ker(u^*) = (Im(u))^{\perp} \text{ et } Im(u^*) = (\ker(u))^{\perp}$$

Démonstration : ⍟

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in Im(u)^{\perp} &\Leftrightarrow \forall z \in Im(u), \langle x, z\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, u(y)\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle u^*(x), y\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u^*(x) \in E^{\perp} \\ &\Leftrightarrow u^*(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(u^*) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = (Im(u))^{\perp}$

En appliquant ceci à $v = u^* \in \mathcal{L}(E)$, on a $\ker(v^*) = (Im(u))^{\perp}$

ie $\ker(u) = \left(Im(u^*)\right)^\perp$

Donc $(\ker u)^\perp = \left(\left(Im(u^*)\right)^\perp\right)^\perp = Im(u^*)$ car $\dim E < +\infty$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit F un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration : ⍟

Soit $x \in F^\perp$, montrons que $u^*(x) \in F^\perp$

Soit $y \in F$, $\langle u^*(x), y\rangle = \left\langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{u(y)}_{\in F} \right\rangle = 0$

Ainsi $u^*(x) \in F^\perp$, d'où $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$

Endomorphismes autoadjoints

Définition :

On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est autoadjoint (ou symétrique) si $u^* = u$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. On a équivalence entre

(i) u est autoadjoint
(ii) La matrice de u dans la base B est symétrique

Corollaire : L'ensemble $S(E)$ des endomorphismes autoadjoints de E est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

Propriété :

Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur. On a équivalence entre :

(i) p est un projecteur orthogonal
(ii) p est autoadjoint

Démo en TD

Théorème spectral

Lemme : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Alors le polynôme caractéristique de A est scindé sur $\mathbb{R}$. Autrement dit, les valeurs propres de A (*a priori* complexes) sont toutes réelles.

Corollaire : Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien non nul admet au moins une valeur propre réelle.

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

Démonstration : ⍟

Soient $\lambda, \mu \in Sp(u)$ avec $\lambda \neq \mu$.

Montrons que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$

Alors $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$

Ainsi $\langle u(x), y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$

Mais comme $u = u^*$,

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

D'où $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0}\langle x, y\rangle = 0$

Donc $\langle x, y\rangle = 0$

Ainsi $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$

Lemme : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint et F un sev de E stable par u. Alors $F^\perp$ est stable par u et l'endomorphisme u_F (resp. $u_{F^\perp}$) est un endomorphisme autoadjoint de F (resp. $F^\perp$).

Théorème spectral :

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) u est autoadjoint ($u = u^*$)

(ii) E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u

$$E = \overset{\perp}{\bigoplus_{\lambda \in Sp(u)}} E_\lambda(u)$$

(iii) u est diagonalisable dans une base orthonormée de E, ie $\exists B$ une b.o.n de E telle que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Version matricielle :

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

(i) $A \in S_n(\mathbb{R})$ (ie A est symétrique réelle)

(ii) A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale réelle, ie

$$\exists P \in O_n(\mathbb{R}), \exists D \in M_n(\mathbb{R}) \text{ diagonale tq } D = P^{-1}AP = {}^tPAP$$

Exemple : $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tMM$ est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ car ${}^tMM \in M_n(\mathbb{R})$ et

$${}^t({}^tMM) = {}^tMM$$

Ainsi ${}^tMM \in S_n(\mathbb{R})$. De même, $M{}^tM \in S_n(\mathbb{R})$ donc elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$

Attention : Le résultat est faux pour les matrices symétriques complexes :

Prenons par exemple $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} = S_2(\mathbb{C})$

Ainsi $\chi_a = \begin{vmatrix} X - i & -1 \\ -1 & X + i \end{vmatrix} = (X - i)(X + i) - 1 = X^2$

Donc $Sp_{\mathbb{C}}(A) = \{0\}$.

Or $A \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc A n'est pas diagonalisable (dans $M_2(\mathbb{C})$)

Endomorphismes symétriques positifs et définis positifs

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint (ie $u \in S(E)$)

Considérons l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto \langle x, u(y)\rangle$$

- On voit directement que φ est linéaire à droite (mais j'ai un peu la flemme de l'écrire)
- Soient $x, y \in E$,

$$\varphi(y, x) = \langle y, u(x)\rangle = \langle (u(y), x\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \varphi(x, y)$$

Donc φ est symétrique.

Ainsi φ est bilinéaire symétrique.

- Pour savoir si φ définit un produit scalaire sur E, il reste à savoir si φ est définie positive, ie :

$$\begin{cases} \forall x \in E, \varphi(x,x) = \langle x, u(x) \rangle \geq 0 \\ \forall x \in E, \varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_E \end{cases}$$

Définition : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint.
On dit que u est positif si $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle \geq 0.$

On dit que u est défini positif si :

- u est positif
- $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$

Ce qui équivaut à :

- $\forall x \in E \backslash \{0_E\}, \langle x, u(x) \rangle > 0$

On note $S^+(E)$ (resp. $S^{++}(E)$) l'ensemble des endomorphismes symétriques positifs (resp. définis positifs) de E.

Remarque : on peut remplacer $\langle x, u(x) \rangle$ par $\langle u(x), x \rangle$, car E est euclidien.

Exemples :

- $Id_E \in S^{++}(E)$
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f^* \circ f \in S^+(E)$
  Si de plus, on rajoute l'hypothèse que f est bijective, on a :
  $\forall x \in E, \langle x, u(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \|f(x)\|^2 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow x \in 0_E$
  Donc $u \in S^{++}(E)$.

Propriété :
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint. On a équivalence entre :

(i) u est positif (ie $u \in S^+(E)$)
(ii) $Sp(u) \subset R^+$

De même, on a équivalence entre :

(i) u est défini positif (ie $u \in S^{++}(E)$)
(ii) $Sp(u) \subset R_+^*$

Démonstration : ⍟ (cas défini positif)

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $u \in S^{++}(E)$. Soit $\lambda \in Sp(u)$ (alors $\lambda \in \mathbb{R}$)

Et $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Alors $\langle x, u(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2 > 0$ (car $u \in S^{++}(E)$)

Or $\|x\|^2 > 0$ car $x \neq 0_E$, d'où $\lambda > 0$

Ainsi $Sp(u) \subset R_+^*$

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Supposons que $Sp(u) \subset R_+^*$. Comme u est autoadjoint, par le théorème spectral, il existe une base orthonormée $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Alors $Sp(u) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{R}_+^*$

Soit $x \in E, x \neq 0_E$, alors $\exists (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tq $x \in \sum_{k=1}^n x_k e_k$ avec les $x_1, \dots, x_n$ non tous nuls, ie

$$\exists i_0 \in [\![1, n]\!], \text{ tq } x_{i_0} \neq 0$$

Donc $\langle x, u(x) \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k \,, u\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n x_k e_k \,, \sum_{j=1}^n x_j \lambda_j e_j \right\rangle$

$$= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k x_j \lambda_j \langle e_k, e_j \rangle$$

Or B est orthonormée, donc $\langle e_k, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq j \\ 1 \text{ si } k = j \end{cases}$

Ainsi $\langle x, u(x) \rangle = \sum_{k=1}^n x_k x_k \lambda_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k^2 \geq \lambda_{i_0} x_{i_0} > 0$

Donc $u \in S^{++}(E)$

<u>Définition :</u> Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice <u>symétrique</u> réelle. On dit que A est positive si

$$\forall x \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \geq 0$$

On dit que A est définie positive si :

- A est positive
- $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX = 0 \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ce qui équivaut à :

- $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, {}^tXAX > 0$

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $S_n^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices réelles de taille n symétriques positives (resp. définies positives).

<u>Remarque :</u> Un endomorphisme est symétrique si et seulement si sa matrice dans une base orthonormée de E est symétrique.

<u>Propriété :</u> Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$. On a équivalence entre :

(i) $A \in S_n^+(\mathbb{R})$ (resp. $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$)
(ii) $Sp(A) \subset \mathbb{R}^+$ (resp. $Sp(A) \subset R_*^+$)

<u>Exemple :</u> Soit F un sev de E ave $F \neq E$, $F \neq \{0_E\}$

Notons p_F la projection orthogonale sur F et s_F la symétrie orthogonale par rapport à F.

Comme $E = F \oplus F^\perp$, si l'on concatène une b.o.n B_F de F avec une b.o.n $B_{F^\perp}$ de $F^\perp$, on obtient une base orthonormée B de E adaptée à $E = F \oplus F^\perp$.

Et $\mathrm{Mat}_B(p_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = M \in S_n(\mathbb{R})$

Alors $Sp(M) = \{0,1\} \subset R^+$, donc $p_F \in S^+(E)$.

De même, $\mathrm{Mat}_B(s_F) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$

Donc $s_F \in S(E)$, mais $Sp(s_F) \not\subset \mathbb{R}_+$, donc $s_F \notin S^+(E)$

<u>Propriété :</u> Soit $u \in S^+(E)$, alors il existe un unique endomorphisme $v \in S^+(E)$ tel que $v^2 = u$.

<u>Corollaire :</u> Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, alors $\exists!\, S \in S_n^+(\mathbb{R})$ tel que $S^2 = A$