Feuille 2 – Corrigé

Exercice 1 :

1) $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$, donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = 1$.
   D'autre part, quand x tend vers 0, on a une forme $\frac{0}{0}$. On peut donc appliquer la règle de L'Hôpital (car le numérateur et le dénominateur sont deux fonctions de classe C^1) :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1$$
2) (Pour les astucieux) On revient à la définition, et donc d'après la question précédente, 1 est un équivalent de f en 0 !
   (Pour ceux qui aiment s'exercer)
   On a $e^x = 1 + x + \underset{x\to 0}{o}(x)$, donc $f(x) = \frac{\left(1+x+\underset{x\to 0}{o}(x)-1\right)}{x} = \frac{x+\underset{x\to 0}{o}(x)}{x} = 1 + \underset{x\to 0}{o}(1) \underset{x\to 0}{\sim} 1$

Exercice 2 :

1) On a $\ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln x + \frac{1}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$ car quand $x \to +\infty, \frac{1}{x} \to 0$
   Ainsi $\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = 1 + \frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)$
   On a donc $g(x) = \exp\left(x \ln\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)\right) = \exp\left(x\ln\left(1 + \frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$
$$= \exp\left(x\left(\frac{1}{x\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x\ln x}\right)\right)\right)$$
$$= \exp\left(\frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)\right)$$
$$= 1 + \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
   On voit donc que $l = 1$
2) On reprend l'expression précédente, on note
$$g(x) - l = \frac{1}{\ln x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{\ln x}\right)$$
   On en déduit donc que $g(x) - l \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln x}$

Exercice 3 :

On a $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$, donc $e^{\cos x} = \exp\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$
$$= e \times \exp\left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$
$$= e \times \left(1 + \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right)$$
$$= e + \frac{ex^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)$$

Exercice 4 :

1) On procède par récurrence :

<u>Initialisation :</u> $n = 0$

Par convention, $f^{(0)} = f$, et $(1-2x)e^{2x} = 2^0(1-n-2x)e^{2x}$.

<u>Hérédité :</u>

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = 2^n(1-n-2x)e^{2x}$

Alors $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)' = 2^n(-2e^{2x} + 2(1-n-2x)e^{2x}) = 2^{n+1}(1+1-n-2x)e^{2x}$

$$= 2^{n+1}(1-(n+1)-2x)e^{2x}$$

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) = 2^n(1-n)$
Donc d'après la formule de Taylor-Young,

$$f(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^n(1-n)}{n!} x^n\right) + \underset{x \to 0}{o}(x^n)$$