Théorèmes : Séries de fonctions

Types de convergences

Soit $(f_n)_{n\geq n_0}$ une suite de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

Définition : (Série de fonctions)

On appelle série de fonctions de terme général f_n la suite de fonctions $(S_n)_{n\geq n_0}$ où

$$\forall n \geq n_0, S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f_k$$

On la note $\sum\limits_{n\geq n_0} f_n$ et pour $n \geq n_0$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série de fonctions.

Convergence simple et absolue

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

Définition : (Convergence simple)

On dit que $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ s'il existe une fonction $S : A \to \mathbb{K}$ telle que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS vers S sur A.

Cette fonction S est appelée la somme de la série $\sum f_n$ sur A et notée :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Théorème :

(i) $\sum f_n$ CVS sur A
(ii) $\forall x \in A,\ \sum f_n(x)$ CV

Dans ce cas,

$$\forall x \in A, \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

Définition : (Domaine de convergence simple)

On appelle domaine de CVS de $\sum f_n$ la plus grande partie de D sur laquelle $\sum f_n$ CVS.

Propriété :

Si la série de fonction $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Reste d'ordre n)

Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$, on peut définir pour $n \in \mathbb{N}$, le reste d'ordre n, R_n la série de fonctions :

$$\begin{aligned} R_n : A &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) \end{aligned}$$

Propriété : Si $\sum f_n$ CVS sur $A \subset D$ alors $S := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (sur A) vérifie :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S = S_n + R_n$$

Et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVS sur A vers la fonction nulle.

Définition : (Convergence absolue simple)

On dit que $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$ si $\sum |f_n|$ CVS sur A ssi $\sum |f_n(x)|$ CV.

Théorème :

Si $\sum f_n$ CVAS sur $A \subset D$, alors $\sum f_n$ CVS sur A.

Convergence uniforme

Définition : (Convergence uniforme)

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ CVU sur $A \subset D$ si la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A.

Propriété : Si $\sum f_n$ CVU sur A alors $\sum f_n$ CVS sur A.

Propriété : Si $\sum f_n$ CVU sur A, alors $(f_n)_n$ CVU sur A vers la fonction nulle.

Propriété : Soit $A \subset D$. On a équivalence entre :

(i) $\sum f_n$ CVU sur A
(ii) $\sum f_n$ CVS sur A et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ CVU sur A vers la fonction nulle.

Convergence normale

Définition : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$.

On dit que $\sum f_n$ CVN sur $A \subset D$ si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur A.
(ii) $\sum \|f_n\|_{\infty,A}$ converge

Théorème : ⍟

Si $\sum f_n$ CVN sur A, alors :

(i) $\sum f_n$ CVAS sur A.
(ii) $\sum f_n$ CVU sur A.

Continuité et limites

Continuité

Théorème : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$. Supposons que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur A

(ii) $\sum f_n$ CVU sur A

Alors $S := \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur A

Corollaire : Soit I un intervalle inclus dans D. Si :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur I

(ii) $\sum f_n$ CVU sut tout segment inclus dans I

Théorème : (d'interversion $\lim/\sum$ ou de la double limite)

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de D vers $\mathbb{K}$ et $A \subset D$

Soit $a \in \overline{A}$ (ou $a = +\infty$ (resp. $-\infty$) si A est non majoré (resp. non minoré)

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ admet une limite finie en a notée l_n

(ii) $\sum f_n$ CVU sur A

Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n$ CV, $S := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a et $S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n$, ie :

$$\lim_{x\to a}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right)$$

Remarque : à partir de maintenant, les fonctions sont uniquement à valeurs réelles

Séries de fonctions & intégrales

I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$

Intégration sur un segment

Théorème : (d'interversion $lim/\int$)

Soient $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, et $\sum f_n$ une série de fonctions de $[a; b]$ vers $\mathbb{K}$

On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est continue sur $[a; b]$

(ii) $\sum f_n$ CVU sur $[a; b]$

Alors $S := \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[a; b]$, et la série numérique $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_a^b f_n(t)dt$ converge vers $\int_a^b S(t)\, dt$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt$$

Intégration sur un intervalle quelconque

Théorème d'intégration terme à terme :

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est c.p.m sur I et intégrable sur I.
(ii) $\sum f_n$ CVS sur I est $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est c.p.m sur I
(iii) La série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_I |f_n(t)|dt$ converge

Alors S est intégrable sur I et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt \right)$$

Séries de fonctions et dérivation

Fonctions de classe C^1

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\sum f_n$ une suite de fonctions de I vers $\mathbb{K}$. On suppose que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ est de classe C^1 sur I
(ii) $\sum f_n$ CVS en un point $a \in I$
(iii) $\sum f_n'$ CVU sur tout segment inclus dans I

Alors $\sum f_n$ CVU sur tout segment inclus dans I, sa fonction somme $S \coloneqq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I, et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$