<u>Continuité des fonctions vectorielles</u>

Dans tout le chapitre, E et F sont des $\mathbb{K}$-ev normés par $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$.
Les notions qui vont suivre sont invariantes par passage à une norme équivalente. En particulier elles ne dépendent pas de la norme lorsque les espace sont de dimensions finies.

1) Limites

Convergences

<u>Définition :</u>
Soient $f : X \subset E \to F$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en a si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-\ell\| \leq \varepsilon$$

Cet élément ℓ est alors unique, et on note $\ell = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

<u>Exemple :</u> ⍟

1) Pour une fonction constante.
Soit $C \in F$. Soit $f : E \to F$
$x \mapsto C \in F$
Soit $a \in E$.
Soit $\varepsilon > 0$, pour tout $\eta > 0$, alors

$$\forall x \in E, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-C\|_F = \|C-C\|_F = 0 < \varepsilon$$

C'est toujours vrai, donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = C$

2) Soit $i \in [\![1,n]\!]$, considérons $p_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$
Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
Soit $\varepsilon > 0$
Posons $\eta = \varepsilon > 0$ (on a complété après)
Alors $\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k - a_k| = \|x-a\|_\infty \leq \eta$$
$$\Longrightarrow |p_i(x) - a_i| = |x_i - a_i| \leq \|x-a\|_\infty \leq \eta = \varepsilon$$

Donc $p_i(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} a_i$

<u>Propriété :</u>
Soient $f : X = X_1 \cup X_2 \subset E \to F$, a un point adhérent à X_1 et à X_2 et $\ell \in F$.
Si $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in X_1}}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in X_2}}{\longrightarrow} \ell$, alors $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in X}}{\longrightarrow} \ell$.

<u>Démonstration :</u>
Supposons que $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in X_1}}{\longrightarrow} \ell$ et $f(x) \underset{\substack{x\to a\\ x\in X_2}}{\longrightarrow} \ell$

Soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{cases} \exists \eta_1 > 0, \|x-a\|_E \leq \eta_1 \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon \\ \exists \eta_2 > 0, \|x-a\|_E \leq \eta_2 \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon \end{cases}$$

Posons $\eta = \min(\eta_1, \eta_2)$, alors $\eta > 0$
On fait alors une distinction de cas selon si x est dans X_1 ou X_2 car $\eta \leq \eta_1$ et $\eta \leq \eta_2$.

<u>Théorème :</u> (caractérisation séquentielles)
Soient $f : X \subset E \to F$ et a un point adhérent à X. On a équivalence entre

(i) $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$

(ii) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \Longrightarrow f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$

<u>Démonstration :</u>
$(i) \Longrightarrow (ii)$: Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$
Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tel que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$,

$$\exists \eta > 0 \text{ tq } \forall x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$$

Or $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a$, en exploitant la définition de la convergence avec $\eta > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Longrightarrow \|x_n - a\|_E \leq \eta, \text{ donc } \|f(x_n)-\ell\| \leq \varepsilon$$

Ainsi $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: par contraposée. Supposons que $f(x) \underset{x-a}{\not\to} \ell$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \eta > 0, \exists x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(x)-l\| > \varepsilon_0$$

Propriété :

Soient $f, g : X \subset E \to F$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $f(x) \underset{x-a}{\longrightarrow} \ell$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell'$, alors $(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell + \mu\ell'$.

Propriété :

Soient $\alpha : X \subset E \to \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \to F$. Si $\alpha(x) \underset{x-a}{\longrightarrow} \lambda \in \mathbb{K}$ et $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$, alors $(\alpha f)(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \lambda\ell$.

Propriété :

Soient G un $\mathbb{K}$-evn, $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$, avec $f(X) \subset Y$. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b$ et $g(y) \underset{x\to b}{\longrightarrow} \ell$, alors $g \circ f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.

Définition : Les applications scalaires $f_1, \dots, f_p : X \subset E \to \mathbb{K}$ sont appelées **fonctions coordonnées** de f relatives à la base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$.

Proposition :

Soit a un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i) f tend vers $\ell = \sum_{j=1}^{p} l_j e_j$

(ii) Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, f_j tend vers l_j en a.

Proposition :

Soit $a \in E$ un point adhérent à X. On a équivalence entre :

(i) f tend vers $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_p)$ en a

(ii) Pour tout $i \in [\![1;p]\!]$, f_i tend vers ℓ_i en a

Définition :

Soit $f : X \subset \mathbb{R} \to F$ avec X une partie de $\mathbb{R}$ non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, x \geq A \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$$

On note alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. On définit de manière analogue $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} \ell$ pour $X \subset \mathbb{R}$ non minoré.

Définition :

Soit $f : X \subset E \to F$ avec X une partie de E non majorée. On dit que f tend vers $\ell \in F$ lorsque $\|x\|_E$ tend vers $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \|x\|_E \geq A \Longrightarrow \|f(x)-\ell\|_F \leq \varepsilon$$

On note alors $f(x) \underset{\|x\|_E\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Définition :

Soient $f : X \subset E \to \mathbb{R}$ et a un point adhérent à X. On dit que f tend vers $+\infty$ en a si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq M$$

On note alors $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} +\infty$, et on définit de manière analogue les limites en norme et en $-\infty$.

2) Continuité

Définitions et exemples :

Définition :

On dit que $f : X \subset E \to F$ est **continue** en $a \in X$ si $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} f(a)$, ie si :

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in X, \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq \varepsilon}$$

Théorème : (Caractérisation séquentielle de la continuité)

Soient $f : X \subset E \to F$ et $a \in X$. On a équivalence entre :

(i) f est continue en a

(ii) $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}, \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

f est-elle continue en $(0,0)$?

On a $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} (0,0)$ et $f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$

Avec $\frac{1}{2} \neq f(0,0) = 0$

Donc f n'est pas continue en $(0,0)$.

Définition :

On dit que $f : X \subset E \to F$ est **continue** sur X si f est continue sur tout point $a \in X$

On note $\mathcal{C}(X,F)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans F.

Remarque : Si $f : X \subset E \to F$ est continue sur X, alors $\forall Y \subset X$, la restriction $f_{|Y}$ de f à Y est continue sur Y, mais la réciproque est **fausse**.

Propriété : Si $f : X \subset E \to F$ et $U \subset X$ un **ouvert** de E. Si la restriction de f à U (notée $f_{|U}$) est continue sur U, alors f est continue en tout point de U.

Définition : Une application $f : X \subset E \to F$ est dite lipschitzienne s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall x, y \in X, \|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x-y\|_E$$

Proposition : Les applications lipschitziennes sont continues.

Démonstration ⍟

Supposons que $f : X \subset E \to F$ est lipschitzienne, alors $\exists k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x, y \in X$,

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E$$

Soit $a \in X$. Montrons que f est continue en a.

Si $k \neq 0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \frac{\varepsilon}{k} > 0$

Alors $\forall x \in X, \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\|x - a\|_E \leq k\eta \leq \varepsilon.$

Donc f est continue en a

Si $k = 0$,

$\forall x, y \in X, 0 \leq \|f(x) - f(y)\| \leq 0 \times \|x - y\|_E = 0$

Donc $\|f(x) - f(y)\|_F = 0$, d'où $f(x) = f(y)$.

Ainsi f est constante, donc continue.

Exemple : ⍟

$\| \|_E : E \to \mathbb{R}$ est 1-lipschtzienne, car $\forall x, y \in E$,

$$\big|\|x\|_E - \|y\|_E\big| \leq 1 \times \|x - y\|_E$$

Par l'inégalité triangulaire inversée.

Ainsi $\| \|_E$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_E)$

Opérations sur les fonctions continues

Propriété :

Soient $f, g : X \subset E \to F$ continues et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. La fonction $\lambda f + \mu g$ est continue sur X

Propriété :

Soient $\alpha : X \subset E \to \mathbb{K}$ et $f : X \subset E \to F$ continues sur X. Le produit $\alpha \cdot f$ est continu sur X.

Propriété :

Soient $f : X \subset E \to F$ et $g : Y \subset F \to G$ vérifiant $f(X) \subset Y$. Si f et g sont continues, alors la composée $g \circ f$ l'est également.

Exemple : On appelle fonction monôme sur $\mathbb{K}^n$ toute application $f : \mathbb{K}^n \to K$

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1^{\alpha_1} \times \dots \times x_n^{\alpha_n}$$

Où $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$

Comme les projections coordonnées sont continues sur $\mathbb{K}^n$, par produit, une fonction monôme est continue sur $\mathbb{K}^n$

On appelle fonction polynômiale sur $\mathbb{K}^n$ toute combinaison sur linéaire finie de fonctions monômes sur $\mathbb{K}^n$. Par les propriétés précédentes, les fonctions polynômiales sont continues sur $\mathbb{K}^n$.

Fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie ou un evn produit

Propriété :

Si F est de dimension finie, alors $f : X \subset E \to F$ est continue si et seulement si ses fonctions coordonnées dans une base de F le sont.

Propriété :

Soit $F = F_1 \times \ldots \times F_p$ un espace normée produit, et $f : X \subset E \to F$. On peut noter $f = (f_1, \ldots, f_p)$ avec $f_i : X \subset E \to F$ pour tout $i \in [\![1, p]\!]$. La fonction f est continue sur X si et seulement si toutes ses composantes le sont.

3) Continuité et topologie

Autres caractérisations équivalentes de la continuité

Théorème :

Soit $f : E \to F$. On a équivalence entre :

(i) f est continue sur E
(ii) L'image réciproque par f de tout fermé de F est un fermé de E
(iii) L'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de E

Continuité et compacité

Théorème : Soient $K \subset E$ un compact et $f : K \to F$ une application continue. Alors $f(K)$ est un compact de F.

En d'autres termes, l'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Corollaire : Soit $f : K \subset E \to F$. Si K est une partie compacte de E et f continue, alors f est bornée.

Théorème : Soit $f : K \subset E \to \mathbb{R}$ continue où K est un compacte non vide de E. Alors f est bornée et elle atteint ses bornes (elle admet un minimum et un maximum).

4) Continuité des applications linéaires

Théorème :

Soit $u : E \to F$ une application linéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) u est continue
(ii) u est continue en 0_E
(iii) $\exists k \geq 0, \forall x \in E, \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$
(iv) u est bornée sur la boule unité fermée
(v) u est bornée sur la sphère unité
(vi) u est lipschitzienne

Théorème :

Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.

Remarque : c'est seulement l'espace de départ qui doit être de dimension finie.