Chapitre 2 – Orthogonalité

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension quelconque, dont on notera $\langle , \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

I) Vecteurs orthogonaux

1) Orthogonalité de 2 vecteurs

Définition : Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Remarque : Le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de E est 0_E.

Remarque : Si $x \perp y$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \perp \lambda y$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, soit $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $y = (-b, a)$ vérifie

$x \perp y$ car $\langle x, y \rangle = -ab + ab = 0$

Dans $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{C})$ munie du produit scalaire usuel, considérons $f : x \mapsto i$, $g : x \mapsto \sin x$

Alors $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx = [i \times \cos x]_0^{2\pi} = 0$, donc $f \perp g$.

Attention : la notion d'orthogonalité dépend du p.s. utilisé.

Propriété : Identité de Pythagore

1) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
2) Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ⍟

1) On sait que $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
Ainsi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2\langle x, y \rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
2) On sait que $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y \rangle)$
Ainsi $\langle x, y \rangle = 0 \Longrightarrow Re(\langle x, y \rangle) = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Attention : la réciproque est fausse dans le cas E préhilbertien complexe.

II) Familles orthogonales

Définition : On dit qu'une famille d'éléments $(e_i)_{i \in I} \in E$ est orthogonale si tous ses éléments sont orthogonaux 2 à 2 ie si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$$

On dit que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est orthonormée si elle est orthogonale et que tous ses éléments ont pour norme 1, ce qui est équivalent à :

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ✪

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale d'éléments de E tq $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \neq 0_E$. Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$

D'une part $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \left\langle e_j, 0_E \right\rangle$

D'autre part, par linéarité à droite de $\langle , \rangle$, $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\left\langle e_j, e_k \right\rangle}_{0 \text{ si } k \neq j} = \lambda_j \left\| e_j \right\|^2$

Ainsi, $\lambda_j \left\| e_j \right\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $\left\| e_j \right\| \neq 0$ car $e_j \neq 0_E$

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$.

Ce résultat s'étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée d'éléments de E, alors $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1 \neq 0$ donc $e_i \neq 0_E$

3) Base orthonormée et calculs dans une telle base

Définition : Soit E un espace préhilbertien ou hermitien. On appelle base orthonormée de E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois orthonormée et une base de E.

Propriété : Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x \in E$. Les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \langle e_k, x \rangle$.

De sorte que $x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle e_k, x \rangle}_{\in \mathbb{K}} e_k$

Propriété : Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E Soient $x, y \in E$ de coordonnées respectives $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots y_n$ dans la base E. Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k = {}^t\overline{X} Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = {}^t\overline{X} X$$

Où $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

4) Procédé d'orthonormalisation et de Gram-Schmidt

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. Pour toute famille libre $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E, il existe une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ tq

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Vect\{u_1, \dots, u_n\} = Vect\{e_1, \dots, e_n\}$$

Remarque : Pour construire ce genre de famille, on pose $v_1 = u_1, e_1 = \frac{v_1}{\|e_1\|}$ puis

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, u_{k+1} \rangle e_j \quad \text{et} \quad e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son p.s. usuel considérons la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où

$$u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0)$$

Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\det(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est libre (c'est même une base de $\mathbb{R}^3$) donc on peut lui appliquer le procédé d'orthormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $v_1 = u_1$, alors $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 2$, on pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

Puis on pose $v_2 = u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle e_1 = (1,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), (1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{2}(2,-1,1)$

Alors $\|v_2\| = \left\| \frac{1}{2}(2,-1,1) \right\| = \frac{1}{2}\|2,-1,1\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ainsi on pose $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

Enfin on pose $v_3 = u_3 - \langle e_1, u_3 \rangle e_1 - \langle e_2, u_3 \rangle e_2 = \frac{1}{6}(4,4,-4) = \frac{2}{3}(1,1,-1)$

De plus, $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et on pose $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

Corollaire : Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.

Corollaire : Toute famille orthonormée d'un espace E euclidien ou hermitien peut être complétée en une base orthonormée de E.

III) **Sous-espaces vectoriels orthogonaux**

1) Orthogonal d'une partie

Définition : soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$, constitué des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de A, ie

$$\boxed{A^\perp = \{ x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0 \}}$$

Exemples

1) ⍟ $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \langle x, 0_E \rangle = 0$
2) ⍟ $E^\perp = \{0_E\}$ car 0_E est le seul élément de E orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un sev de E.

Propriété : Soit $A, B \subset E$

(1) On a $A \subset (A^\perp)^\perp$
(2) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
(3) $A^\perp = \left(Vect(A)\right)^\perp$

Propriété : Soit $F = Vect(e_i)_{i \in I}$ un sev de E. Alors $\boxed{F^\perp = \{ x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0 \}}$

Démonstration : ⍟ Soit $x \in F^\perp$, alors $\forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$. Or $\forall i \in I, e_i \in F$, donc $\langle x, e_i \rangle = 0$

Ainsi $F^\perp \subset \{ x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0 \}$

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0$. Soit $y \in F = Vect(e_i)_{i\in I}$

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ tq $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}$

D'où $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle x, e_{i_k} \rangle}_{=0} = 0$

Donc $x \in F^{\perp}$ d'où l'inégalité voulue.

Définition : Soient F, G 2 sev de E. On dit que F et G sont orthogonaux si $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$

3) Supplémentaires orthogonaux d'un sev de dimension finie

Théorème : Soit F un sev de E avec F de dimension finie. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$. On appelle $F^{\perp}$ le supplémentaire orthogonal de F dans E.

En particulier, si E est euclidien ou hermitien, alors pour tout sev F de E,

$$\boxed{E = F \oplus F^{\perp}}$$

Attention : ce résultat est faux si F n'est pas de dimension finie.

Corollaire : Si E est un espace **euclidien** ou **hermitien**, alors pour tout sev F de E on a :

$$\boxed{\dim(F^{\perp}) = \dim E - \dim F} \text{ et } (F^{\perp})^{\perp} = F$$

Attention : si E est de dimension infinie, on peut avoir $F \underset{\neq}{\subset} (F^{\perp})^{\perp}$

Projection orthogonale

Rappels sur les projecteurs et les symétries

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque (pas forcément finie), F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E, ie $E = F \oplus G$

Définition : On appelle projection sur F parallèlement à G l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G, p(x) = x_F$$

Définition : On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in E, \exists! (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G, s(x) = x_F - x_G$$

On a alors $s = 2p - Id_E$

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $p^2 = p$
(ii) p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker p$. Dans ce cas, $Im(p) = \ker(p - Id_E)$.

Remarque : Avec les notations $F = Im(p), G = \ker(p)$, on a :

$$\text{Soit } x \in E, \begin{cases} p(x) = x \Leftrightarrow x \in F \\ p(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in G \end{cases}$$

Propriété : Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $s^2 = Id_E$

(ii) s est la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$

Remarque : Avec les notations $F = \ker(s - Id_E)$, $G = \ker(s + Id_E)$, on a :

$$\text{Soit } x \in E, \begin{cases} s(x) = x \Leftrightarrow x \in F \\ s(x) = -x \Leftrightarrow x \in G \end{cases}$$

Remarque : Supposons $\dim E < +\infty$. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

En prenant la concaténation $B = B_F \cup B_G$, B est une base adaptée à la décomposition :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_B(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & (0) & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale :

On revient au cadre où E est un espace préhilbertien réel ou complexe. Si F est un sev de E de dimension finie, on a vu que $E = F \oplus F^\perp$

Définition : Soit F un sev de E tq $E = F \oplus F^\perp$ (c'est vrai en particulier si $\dim F < +\infty$)

On appelle projection orthogonale sur F la projection, notée p_F, sur F parallèlement à $F^\perp$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie, notée s_F, sur à F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque : $\forall x \in E, p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Ainsi pour $y \in E$, on a :

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \langle x - y, z \rangle = 0 \end{cases}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$ muni du p.s. usuel, déterminons-le projeté orthogonal $p_F(e_1)$ du vecteur

$e_1 = (1,0,0)$ sur $F = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$ où $\begin{cases} e_2 = (0,1,1) \\ e_3 = (1,0,-1) \end{cases}$

On sait que $p_F(e_1) \in F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $p_F(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 = (\beta, \alpha, \alpha - \beta)$

De plus, $e_1 - p_F(e_1) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle e_1 - p_F(e_1), y \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_1 - p_F(e_1), e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_1 - p_F(e_1), e_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $p_F(e_1) = \frac{1}{3}(0,1,1) + \frac{2}{3}(1,0,-1) = \frac{1}{3}(2,1,-1)$

Propriété : Avec les notations de la définition ci-dessus :

$$\boxed{p_F + p_{F^\perp} = Id_E}$$

$$p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$$

$$s_F = 2p_F - Id_E = Id_E - 2p_{F^\perp}$$

Expression du projeté orthogonal

Théorème : Soit F un sev de E de dimension finie. Soit $B = (e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F vérifie :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k, x\rangle e_k}$$

Démonstration : ⍟

Soit $x \in E$, comme $p_F(x) \in F$, et puisque B est une base orthonormée de F,

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k, p_F(x)\rangle e_k$$

Soit $k \in [\![1; r]\!]$,

$$\langle e_k, x\rangle - \langle e_k, p_F(x)\rangle = \langle e_k, x - p_F(x)\rangle = \left\langle \underbrace{e_k}_{\in F}, \underbrace{p_{F^\perp}(x)}_{\in F^\perp} \right\rangle = 0$$

Où $p_{F^\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $F^\perp$

Ainsi $\langle e_k, x\rangle = \langle e_k, p_F(x)\rangle$

D'où $p_F(x) = \sum_{k=1}^{r} \langle e_k, x\rangle e_k$

Remarque : En reprenant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille libre, alors on peut construire une famille $(v_1, \dots, v_n)$ une famille orthogonale et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthonormée telle que $\forall k \in [\![1, n]\!]$,

$$\text{Vect}\{u_1, \dots, u_n\} = \text{Vect}\{v_1, \dots, v_n\} = \text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$$

En posant $v_1 = u_1, e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$, et $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$v_{k+1} = u_{k+1} - p_{\text{Vect}\{e_1,\dots,e_n\}}(u_{k+1})$$

Car la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est une base orthonormée de $\text{Vect}\{e_1, \dots, e_n\}$

Remarque :

On a vu que dans un espace euclidien ou hermitien, pour tout sev F de E, on a $E = F \oplus F^\perp$

Ainsi si F est de « grande » dimension, alors $F^\perp$ est de « petite » dimension, donc il peut être intéressant de d'appliquer la formule $p_F(x) = x - p_{F^\perp}(x)$

Exemple : Dans $M_2(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel.

On considère $H = \{ M \in M_2(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Tr}(M) = 0 \}$

Déterminer pour $M \in M_2(\mathbb{R})$, l'expression de $p_H(M)$

- Tout d'abord, $H = \ker(\mathrm{Tr})$ (avec Tr linéaire) de H est bien un sev de $M_2(\mathbb{R})$
- Comme $\dim\big(M_2(\mathbb{R})\big) = 2^2 < +\infty$, $M_2(\mathbb{R}) = H \oplus H^\perp$
- Déterminons $\dim H$

  Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on a $M \in H \Leftrightarrow \mathrm{Tr}(M) = 0 \Leftrightarrow d = -a$

  Ainsi $H = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$

  Notons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

  Alors $B = (U_1, U_2, U_3)$ est génératrice de H et libre (démo easy)

  Ainsi B est une base de H, donc $\dim H = 3$

Méthode 1 :

On remarque que $\langle U_i, U_j \rangle = 0$ pour tous $i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j$ donc B est une base orthogonale de H.

Ainsi, si on pose $\forall i \in [\![1,3]\!]$, $E_i = \frac{U_i}{\|U_i\|}$

Ainsi $B' = (E_1, E_2, E_3)$

Donc $p_H(M) = \sum_{i=1}^{3} \langle E_i, M \rangle E_i$ et on remplace

Méthode 2 :

Comme $\dim H^\perp = \dim E - \dim H = 1$ car $M_2(\mathbb{R})$ est euclidien, on cherche une base orthonormée de $H^\perp$.

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A \in H^\perp \Leftrightarrow \begin{cases} a - d = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$

Donc $H^\perp = \mathrm{Vect}\{I_2\}$

Comme $\|I_2\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, alors $\mathcal{F} = \left(\frac{I_2}{\|I_2\|}\right)$ est une base orthonormée de $H^\perp$

Donc $\forall M \in M_2(\mathbb{R})$, $p_{H^\perp} = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} I_2, M \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} I_2 = \frac{1}{2} \mathrm{Tr}(M)\, I_2$

Donc $p_H(M) = M - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(M)\, I_2$

Distance à un sev

<u>Définition :</u> Soit $A \subset E$ non vide et $x \in E$. On définit la distance de x à A par
$$d(x, A) = \inf\{ \|x - a\| \mid a \in A \} \in \mathbb{R}_+$$
<u>Théorème :</u> Soit F un sev de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (ceci est vrai en particulier quand $\dim F < +\infty$)

Alors $\forall x \in E$,
$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \big\|p_{F^\perp}(x)\big\|$$
Ainsi la distance de x à F est un minimum. De plus, cette distance est uniquement atteinte en $p_F(x)$.

C'est-à-dire $\exists!\, y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$, et $y = p_F(x)$

<u>Démonstration :</u> ⍟

Soit $y \in F$,
$$\|x - y\|^2 = \Bigg\|\underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}\Bigg\|^2$$
Ainsi $x - p_F(x)$ et $p_F(x) - y$ sont orthogonaux donc par l'identité de Pythagore :

$$\|x-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$$

Alors par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall y \in F, \|x-y\| \geq \|x-p_F(x)\|$$

Ainsi $\|x-p_F(x)\|$ est un minorant de $\{\, \|x-y\| \mid y \in F \,\}$, et comme $p_F(x) \in F$, il appartient à cet ensemble.

Ainsi c'est un minimum.

De plus, par les calculs ci-dessus,

$$\begin{aligned}\|x-y\| = \|x-p_F(x)\| &\Leftrightarrow \|x-p_F(x)\|^2 + \|p_F(x)-y\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|p_F(x)-y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow p_F(x)-y = 0_E \\ &\Leftrightarrow y = p_F(x)\end{aligned}$$