# Réductions algébriques

## Polynômes d'endomorphismes et de matrices

### Polynôme d'endomorphismes

Définition : Soient $u \in \mathcal{L}(E), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de $P$ en $u$ l'endomorphisme $P(u) \in \mathcal{L}(E)$ défini par :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{d} a_k u^k$$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(u) = \lambda P(u) + Q(u)$

$(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\mathbb{K}[u]$ est stable par addition, multiplication par un scalaire et composition.

### Polynômes annulateurs

Définition : On appelle polynôme annulateur de $u \in \mathcal{L}(E)$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de $u$ figurent parmi les racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de $u$, c'est-à-dire :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de $u$, $Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$

Théorème de Cayley-Hamilton : Soient $E$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique $\mathcal{X}_u$ de $u$ est annulateur de $u$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{X}_u = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

### Polynômes de matrices

Définition : Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On appelle évaluation (ou valeur) de $P$ en $A$ la matrice $P(A) \in M_n(\mathbb{K})$ définie par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^{d} a_k A^k \in M_n(\mathbb{K})$$

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{K}), P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda \in \mathbb{K}$

Alors $(\lambda P + Q)(A) = \lambda P(A) + Q(A)$

$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A) = Q(A) \times P(A)$

Définition : On dit que $M \in M_n(\mathbb{K})$ est un polynôme en $A \in M_n(\mathbb{K})$si $\exists p \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M = P(A)$ :

$$\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}\}$$

Définition : On appelle polynôme annulateur de $A \in M_n(\mathbb{K})$ tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

$$P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$$

Propriété : ⍟

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si $A$ et $B$ sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Théorème : Soient $A \in M_n(\mathbb{K}), P \in \mathbb{K}[X]$

Si $P$ est annulateur de $A$, alors

$$Sp(a) \subset \{\lambda \in \mathbb{K}, P(\lambda) = 0\}$$

Théorème de Cayley-Hamilton : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. $\mathcal{X}_A$ est annulateur de $A$.

**Polynôme minimal**

Note : $E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

Définition : (polynôme minimal)

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Il existe un unique polynôme $\Pi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que :

(i) $\Pi_u$ est annulateur de $u$
(ii) $\Pi_u$ est unitaire
(iii) $\forall P \in \mathbb{K}[X]$ non nul annulateur de $u$, $\deg(\Pi_u) \leq \deg P$

Le polynôme $\Pi_u$ est appelé polynôme minimal de $u$

Remarque : cette définition se transpose aux matrices.

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. $\Pi_u$ divise tout polynôme annulateur de $u$

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de $u$ sont exactement les racines dans $\mathbb{K}$ de $\Pi_u$, ie :

$$Sp(u) = \{\lambda \in \mathbb{K}, \Pi_u(\lambda) = 0\}$$

Remarque : ce théorème se transpose aux matrices

**Réductions & polynômes annulateurs**

$E$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}$

Théorème de Bézout : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$

$$P \text{ et } Q \text{ sont premiers entre eux}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\exists V, W \in \mathbb{K}[X], \text{ tel que } PV + QW = 1$$

Lemme des noyaux : Soient $u \in \mathcal{L}(E), P, Q \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux. Alors

$$\ker\big((P \times Q)(u)\big) = \ker\big(P(u)\big) \oplus \ker\big(Q(u)\big)$$

Corollaire : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $m \in \mathbb{N}^*, P_1, \dots, P_m \in \mathbb{K}[X]$ 2 à 2 premiers entre eux, alors

$$\ker\left(\left(\prod_{k=1}^{m} P_k\right)(u)\right) = \bigoplus_{k=1}^{m} \ker\big(P_k(u)\big)$$

**Diagonalisabilité**

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $u$ est diagonalisable
(ii) Il existe un polynôme annulateur de $u$ scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$
(iii) $\Pi_u$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$

**Réduction d'un endomorphisme induit**

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ un sev de $E$ stable par $u$.

1) Le sev $F$ est stable par tout polynôme en $u$ et $\forall P \in \mathbb{K}[X], \big(P(u)\big)_F = P(u_F)$
2) Le polynôme minimal de $u_F$ divise $\Pi_u$, ie $\Pi_{u_F} | \Pi_u$

Théorème : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $F$ un sev de $E$ stable par $u$.

Si $u$ est diagonalisable, alors $u_F$ l'est également.

Théorème : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$.

Alors il existe une base de $E$ qui diagonalise $u$ et $v$ en même temps

On l'appelle base de codiagonalisation.

Propriété : Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ diagonalisables dans $M_n(\mathbb{K})$ telles que $AB = BA$.

Alors $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ et $P^{-1}BP$ sont diagonales.

**Trigonalisabilité**

Théorème : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre

(i) $u$ est trigonalisable
(ii) Il existe un polynôme annulateur qui est scindé sur $\mathbb{K}$.
(iii) Le polynôme minimal $\Pi_u$ de $u$ est scindé sur $\mathbb{K}$.