Orthogonalité – Démonstrations

Propriété : Identité de Pythagore

1) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
2) Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ⍟

1) On sait que $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
Ainsi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2\langle x,y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
2) On sait que $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x,y\rangle)$
Ainsi $\langle x,y\rangle = 0 \Longrightarrow Re(\langle x,y\rangle) = 0 \Longrightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⍟

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale d'éléments de E tq $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \neq 0_E$. Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$

D'une part $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \left\langle e_j, 0_E \right\rangle$

D'autre part, par linéarité à droite de $\langle , \rangle$, $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\left\langle e_j, e_k \right\rangle}_{0 \text{ si } k \neq j} = \lambda_j \|e_j\|^2$

Ainsi, $\lambda_j \|e_j\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $\|e_j\| \neq 0$ car $e_j \neq 0_E$

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$.

Ce résultat s'étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée d'éléments de E, alors $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1 \neq 0$ donc $e_i \neq 0_E$

Définition : soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$, constitué des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de A, ie

$$\boxed{A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x\rangle = 0\}}$$

Exemples

1) ⍟ $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \langle x, 0_E\rangle = 0$
2) ⍟ $E^\perp = \{0_E\}$ car 0_E est le seul élément de E orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit $F = Vect(e_i)_{i\in I}$ un sev de E. Alors $\boxed{F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0\}}$

Démonstration : ⍟ Soit $x \in F^\perp$, alors $\forall y \in F, \langle x, y\rangle = 0$. Or $\forall i \in I, e_i \in F$, donc $\langle x, e_i\rangle = 0$

Ainsi $F^\perp \subset \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0\}$

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\forall i \in I, \langle x, e_i\rangle = 0$. Soit $y \in F = Vect(e_i)_{i\in I}$

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ tq $y = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}$

D'où $\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \underbrace{\langle x, e_{i_k}\rangle}_{=0} = 0$

Donc $x \in F^\perp$ d'où l'inégalité voulue.

Théorème : Soit F un sev de E de dimension finie. Soit $B = (e_1, \dots, e_r)$ une base orthonormée de F. Alors pour tout $x \in E$, le projeté orthogonal $p_F(x)$ de x sur F vérifie :

$$\boxed{p_F(x) = \sum_{k=1}^r \langle e_k, x\rangle e_k}$$

Démonstration : ⍟

Soit $x \in E$, comme $p_F(x) \in F$, et puisque B est une base orthonormée de F,

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^r \langle e_k, p_F(x)\rangle e_k$$

Soit $k \in [\![1; r]\!]$,

$$\langle e_k, x\rangle - \langle e_k, p_F(x)\rangle = \langle e_k, x - p_F(x)\rangle = \left\langle \underbrace{e_k}_{\in F}, \underbrace{p_{F^\perp}(x)}_{\in F^\perp} \right\rangle = 0$$

Où $p_{F^\perp}$ désigne la projection orthogonale sur $F^\perp$

Ainsi $\langle e_k, x\rangle = \langle e_k, p_F(x)\rangle$

D'où $p_F(x) = \sum_{k=1}^r \langle e_k, x\rangle e_k$

Théorème : Soit F un sev de E tel que $E = F \oplus F^\perp$ (ceci est vrai en particulier quand $\dim F < +\infty$)
Alors $\forall x \in E$,

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|p_{F^\perp}(x)\|$$

Ainsi la distance de x à F est un minimum. De plus, cette distance est uniquement atteinte en $p_F(x)$.
C'est-à-dire $\exists!\, y \in F$ tel que $d(x, F) = \|x - y\|$, et $y = p_F(x)$

Démonstration : ⍟

Soit $y \in F$,

$$\|x - y\|^2 = \left\| \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F} \right\|^2$$

Ainsi $x - p_F(x)$ et $p_F(x) - y$ sont orthogonaux donc par l'identité de Pythagore :

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$$

Alors par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$,

$$\forall y \in F, \|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$$

Ainsi $\|x - p_F(x)\|$ est un minorant de $\{ \|x - y\| \mid y \in F \}$, et comme $p_F(x) \in F$, il appartient à cet ensemble.

Ainsi c'est un minimum.

De plus, par les calculs ci-dessus,

$$\begin{aligned} \|x - y\| = \|x - p_F(x)\| &\Leftrightarrow \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|p_F(x) - y\| = 0 \\ &\Leftrightarrow p_F(x) - y = 0_E \\ &\Leftrightarrow y = p_F(x) \end{aligned}$$