Démonstrations – Réductions géométriques

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

La somme $F_1 + \dots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \dots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$$

Démonstration :

Considérons $\varphi : F_1 \times \dots \times F_m \to F_1 + \dots + F_m$

$$(f_1, \dots, f_m) \mapsto f_1 + \dots + f_m$$

On sait que φ est linéaire.

On a :

$F_1 + \dots + F_m$ est directe $\Leftrightarrow \forall x \in F_1 + \dots + F_m, \exists! (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = \varphi(f_1, \dots, f_m)$

$\Leftrightarrow \varphi$ est bijective

$\Leftrightarrow \varphi$ est injective (car par construction, φ est surjective)

$\Leftrightarrow \ker \varphi = \{0_{F_1 \times \dots \times F_m}\}$

$\Leftrightarrow \dim \ker \varphi = 0$

$\Leftrightarrow \dim Im\, \varphi = \dim(F_1 \times \dots \times F_m)$

Propriété : (Inter & Union stables)

Soient F et G deux sev de E stables par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

Démonstration :

- Soit $z \in F + G, \exists (x, y) \in F \times G$ tel que $z = x + y$
  Alors $u(x + y) = \underbrace{u(x)}_{\in F} + \underbrace{u(y)}_{\in G} \in F + G$
  Donc $F + G$ est stable par u.
- De même, $F \cap G \subset F$ et $F \cap G \subset G$
  Donc $u(F \cap G) \subset u(F) \subset F$ et $u(F \cap G) \subset u(G) \subset G$
  Donc $u(F \cap G) \subset F \cap G$

Propriété : (Stabilité des images et noyaux)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Démonstration :

- Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$
  Alors $\exists x \in E, y = u(x)$
  D'où $v(y) = v\big(u(x)\big) = u\big(v(x)\big) \in \mathrm{Im}(u)$
- Soit $x \in \ker u$, montrons que $v(x) \in \ker u$.
  Or $u\big(v(x)\big) = v\big(u(x)\big) = v(0_E) = 0_E$
  Donc $v(x) \in \ker u$.