Feuille 1 – Corrigé

Exercice 1

1) Soit $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{4x-1}{x-2}$

Soit $x, x' \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$, supposons que $f(x) = f(x')$

Alors $f(x) = f(x') \Leftrightarrow \frac{4x-1}{x-2} = \frac{4x'-1}{x'-2} \Leftrightarrow (4x+1)(x'-2) = (4x'+1)(x-2)$

$$\Leftrightarrow 4xx' + x' - 8x - 2 = 4xx' + x - 8x' - 2$$
$$\Leftrightarrow x' - 8x = x - 8x'$$
$$\Leftrightarrow 7x' = 7x$$
$$\Leftrightarrow x = x'$$

Donc f est bel et bien injective.

Prenons $y = 4 \in \mathbb{R}$. Supposons que $\exists x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}, f(x) = y$
Alors on a $\frac{4x-1}{x-2} = 4 \Leftrightarrow 4x - 1 = 4(x-2)$

$$\Leftrightarrow 4x - 1 = 4x - 8$$
$$\Leftrightarrow -1 = -8$$

Or ceci est évidemment faux, donc par équivalence, 4 n'admet pas d'antécédent par la fonction f.
Donc f n'est pas surjective.

2) Soit $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, n \mapsto -n$

Soit $x, x' \in \mathbb{Z}$, supposons que $f(x) = f(x')$

Alors $f(x) = f(x') \Leftrightarrow -x = -x' \Leftrightarrow x = x'$

Donc g est injective

Soit $y \in \mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$, $f(x) = y$

On a alors $-x = y \Leftrightarrow x = -y \in \mathbb{Z}$

Ainsi un tel x existe quel que soit y, g est donc surjective

Ainsi g est bijective.

Exercice 2 :

1. On a $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$
2. On se sert de la question précédente :
$$ab + ac + bc \leq \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{a^2+c^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} = a^2 + b^2 + c^2$$
3. Une double distributivité donne $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$
$$\geq ab + ac + bc + 2ab + 2ac + 2bc$$
$$= 3ab + 3ac + 3bc$$

Exercice 3 :

On raisonne par analyse-synthèse :

- Supposons $x \in \mathbb{R}$ une solution de l'équation :

On a alors $\sqrt{2-x} = x \Rightarrow 2 - x = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -2$

- Réciproquement, vérifions que ces valeurs sont bien solutions de l'équation de départ :

Pour $x = 1$, on a $\sqrt{2-1} = 1$, donc 1 est bien solution de l'équation

Pour $x = -2$, on a $\sqrt{2-(-2)} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$

Donc l'unique solution de cette équation est $x = 1$

Exercice 4 :

Soit $x, x' \in \mathbb{R}_-, x < x'$, alors on a $f(x) \leq f(x')$

De plus, $\exists y, y' \in \mathbb{R}_+, y > y', y = -x$ et $y' = -x'$

Ainsi $f(-y) \leq f(-y')$, et comme f est paire, $f(y) \leq f(y')$

Comme , $y > y'$, on en déduit que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est décroissante.

Exercice 5 :

1. Sur le poly, j'ai oublié de dire que f est définie sur $\mathbb{R}$. f est paire, donc $f(-1) = f(1)$. Ainsi f n'est pas injective, donc pas bijective.
2. a) $f_1(-x) = e^{-x} + e^{-(-x)} = f_1(x)$, donc f_1 est paire.
   b) $f_2(-x) = \frac{2}{-x} + 4(-x)^3 = -\frac{2}{x} - 4x^3 = -f_2(x)$, donc f_2 est impaire.
   c) On a $f_3(x) = x^2 - 1$, donc $f_3(-x) = (-x)^2 - 1 = f_3(x)$, donc f_3 est paire.

Exercice 6 :

1. f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par composée de fonctions dérivables sur cet intervalle.
   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}, f'(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}$
3. Soit $x, x' \in]-1\,;\,+\infty[$, supposons que $g(x) = g(x')$
   On a alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'} \Leftrightarrow 1 + x = 1 + x' \Leftrightarrow x = x'$
   Donc g est injective.

   Soit maintenant $y \in \mathbb{R}_+$ et supposons qu'il existe $x \in]-1\,;\,+\infty[\,, g(x) = y$
   Alors $\frac{1}{1+x} = y \Leftrightarrow x = \frac{1}{y} - 1 \in]-1\,;\,+\infty[$
   Donc g est surjective.
   Ainsi g est bel et bien bijective.
4. Montrons que h $\circ\, g = g \circ h = Id$.
   On a $h \circ g(x) = \frac{1-\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = (1+x)\left(1 - \frac{1}{1+x}\right) = 1 + x - 1 = x$
   Et $g \circ h(x) = \frac{1}{1+\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{x+1-x}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$
   Donc h est bien la bijection réciproque de g

Exercice 7 :

1. $f_1(x) = \tan x$

   La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ et dérivable sur cet intervalle.

   De plus, sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$, $f_1'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

2. $f_2(x) = \ln(8x^2)$

   $\forall x \in \mathbb{R}^*, 8x^2 > 0$, donc f_2 est définie sur tout $\mathbb{R}^*$.

   De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*, f_2'(x) = \frac{16x}{8x^2} = \frac{2}{x}$

3. $f_3(x) = \frac{1}{x^2-8}$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$

   Donc f_3 est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\pm 2\sqrt{2}\}$

   Et $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\pm 2\sqrt{2}\}, f_3'(x) = \frac{-2x}{(x^2-8)^2}$