<u>Propriété :</u> Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_\mathrm{n}$ n'est pas abélien si $n \geq 3$

<u>Démonstration :</u> supposons $n \geq 3$. Posons

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

Alors on a $(\theta \circ \tau)(1) = \theta(3) = 3$

et $(\tau \circ \theta)(1) = \tau(2) = 2$

Donc $\theta \circ \tau \neq \tau \circ \theta$

Donc $(\mathfrak{S}_\mathrm{n}, \circ)$ n'est pas abélien

<u>Propriété :</u> La signature d'une transposition est -1

<u>Démonstration :</u> Soit $\tau = (i\ j) \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}$ une transposition, $i < j$

Alors $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I(\tau) = 0 + 0 + \cdots + \mathrm{Card}\{k \mid i+1 \leq k \leq j\} + \ \mathrm{Card}\{k \mid i+1 \leq k \leq j-1\} + \ 0 + 0 + \cdots + 0$

$= (j - (i+1) + 1) + (j - 1 - (i+1) + 1)$

$= 2(j - i) - 1$

Or puisque $j > i$, $2(j-1) - 1$ est un entier impair

Donc $\varepsilon(i) = (-1)^{2(j-i)-1} = \ -1$

<u>Propriété :</u> Le déterminant d'une matrice de taille 2 est $\det(A) = ad - bc$

<u>Démonstration :</u> Dans $\mathfrak{S}_2$, il n'existe que 2 permutations : $\theta_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\theta_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $I(\theta_1) = 0$ et $I(\theta_2) = 1$, ce qui implique $\varepsilon(\theta_1) = 1$ et $\varepsilon(\theta_2) = -1$

Donc $\forall A \in M_2(\mathbb{K})$,

On a $\det(A) = \varepsilon(\theta_1) \prod_{i=1}^{2} a_{\theta_1(i),i} + \ \varepsilon(\theta_2) \prod_{i=1}^{2} a_{\theta_2(i),i}$

$= a_{1,1} \times \mathrm{a}_{2,2} + (-1) \times a_{2,1} \times a_{1,2}$

$= ad - bc$