# Chapitre 5 – Intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, on considèrera $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} F : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur $I$.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$. On suppose que

(i) $f$ est continue sur $[a,b]$

(ii) $f$ admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$.

alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est définie et de classe $C^1$ sur $I$ et :

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et $u, v : I \to J$ continues. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur $I$.

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue, admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et $u, v : I \to J$ deux fonctions de classe $C^1$. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $C^1$ sur $I$, et

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + v'(x)f\big(x, v(x)\big) - u'(x)f\big(x, u(x)\big)$$

## 2. Intégrales à paramètres généralisées

Théorème : (Continuité par domination)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) $f$ est continue sur $I \times J$

(ii) Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $J$ vérifiant

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $I$.

Idée : ⍟

Soit $a \in I$. Montrons que $F$ est continue en $a$, par caractérisation séquentielle, cela équivaut à montrer que $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(a)$

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de $I$ qui converge vers $a$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F(x_n) = \int_J f(x_n,t)dt = \int_J u_n(t)dt$$

Où $u_n : J \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x_n,t)$

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue (donc c.p.m) sur $J$ puisque $f$ est continue sur $J$

(ii) Soit $t \in J$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a,t)$ par continuité de $f$
Donc la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVS sur $J$ vers $u : J \to \mathbb{C}, t \mapsto f(a,t)$, qui est continue donc c.p.m sur $J$ puisque $f$ est continue sur $I \times J$.

(iii) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ c.p.m et intégrable sur $J$ tq
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, |u_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$$
Ainsi par le théorème de convergence dominée,
$$F(x_n) = \int_J u_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J \lim_{n\to+\infty} u_n(t)\,dt = \int_J f(a,t)dt = F(a)$$
Ainsi $F$ est continue en $a$, $\forall a \in I$, donc $F$ est continue sur $I$.

Corollaire :

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) $f$ est continue sur $I \times J$

(ii) Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur $J$ vérifiant

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur $I$.

Exemple : Continuité de

$$F : x \in ]0,+\infty[ \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}dt$$

On pose $f : ]0,+\infty[ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$

- $f$ est continue sur $]0,+\infty[ \times \mathbb{R}$
- Soit un segment $[a,b] \subset ]0,+\infty[$
  $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$,
  $$|f(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq \frac{e^{-at}}{1+t} := \varphi_{a,b}(t)$$
  Avec $\varphi_{a,b}$ indépendant de $x$.