Théorème Analyse

Intégrale généralisée : Soient $f: I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue et F une primitive de f sur I. On dit que l'intégrale impropre $\int_I f(t)dt$ converge si F admet des limites finies en α^+et β^-. On pose alors $\int_I f(t)dt = \lim_{x\to\beta^-} F(x) - \lim_{x\to\alpha^+} F(x)$. Sinon on dit que l'intégrale diverge.

Intégrales de Riemann :

1. Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda > 1$.
2. Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{a} \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda < 1$.

Linéarité :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues. SI $\int_I f(t)dt$ et $\int_I g(t)dt$ convergent, alors $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\int_I (\lambda f + \mu g)(t)dt$ converge.

Relation de Chasles :

Si $\int_\alpha^\beta f(t)\, dt$ converge, alors $\forall \gamma \in [\alpha; \beta]$, $\int_\alpha^\gamma f(t)dt$ et $\int_\gamma^\beta f(t)dt$ convergent également.

Changement de variables :

Soit $\varphi : J \to I$ une bijection de classe C^1 strictement croissante sur l'intervalle J d'extrémités

$a = \inf(J)$ et $b = \sup(J)$. Alors les intégrales $\int_\alpha^\beta f(t)dt$ et $\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)du$ sont de même nature, et sont égales en cas de convergence.

Intégration par parties généralisées :

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^1. Si l'intégrale $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)dt$ converge et si la fonction uv admet des limites finies en α^+ et β^-, alors $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)dt$ converge, et on a :

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)dt = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)dt$$

Fonction intégrable :

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue. On dit que f est intégrable sur I si $\int_I |f(t)|dt$ converge.

Intégrabilité sur un segment inclus dans celui de départ :

Soient $f: I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue et $J \subset I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.

i. Si f est intégrable sur I alors elle l'est aussi sur J.
ii. Si f n'est pas intégrable sur J, alors elle ne l'est pas non plus sur I.

Théorème de comparaison :

Soient $f, g: I \to \mathbb{R}$ continues et à valeurs positives telles que $f \leq g$

i. Si g est intégrable sur I, alors f l'est également.
ii. Si f n'est pas intégrable sur I, alors g non plus.

Intégrabilité des fonctions dominées :

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues telles que $f(x) =_{x\to b} O(g(x))$.

i. Si g est intégrable sur I alors f l'est également.
ii. Si f n'est pas intégrable sur I, alors il en va de même pour g.

Intégrabilité des fonctions équivalentes :

Soient $a \in \mathbb{R}, b \in]a; +\infty[\cup \{+\infty\}$. Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues telles que $f(x) \sim_{x\to b} g(x)$.

Alors f intégrable sur $[a, b[\Leftrightarrow g$ intégrable sur $[a, b[$.

Linéarité de l'intégrabilité :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continues. Si f et g sont intégrables sur I, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues. Si f^2 et g^2 sont intégrables sur I, alors fg l'est aussi et :

$$\int_I |f(t)g(t)|dt \leq \sqrt{\int_I f^2(t)dt}\sqrt{\int_I g^2(t)dt}$$

Lien entre intégrabilité de f et convergence de $\int_I f(t)dt$

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f est intégrable sur I, alors $\int_I f(t)dt$ converge, et :

$$\left|\int_I f(t)dt\right| \leq \int_I |f(t)|dt$$

Définition de l'absolue convergence :

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ continue. On dit que l'intégrale $\int_I f(t)dt$ est absolument convergente si f est intégrable sur I. Si $\int_I f(t)dt$ converge mais pas absolument, on dit qu'elle est semi-convergente.

Intégrales de Bertrand :

Soient $b > 1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda (\ln t)^\mu}$ est intégrable sur $[b; +\infty[$ ssi $\lambda > 1$ ou ($\lambda = 1$ et $\mu > 1$)