Feuille 6 – Corrigé

Exercice 1 :

1)
$$\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\ln(x)\right]_1^e - 2\int_1^e \frac{\sqrt{x}}{x}\,dx = 2\sqrt{e} - 2[\ln(x)]_1^e = 2\left(\sqrt{e}-1\right)$$

2)
$$\int_e^{e^2} (\ln x)^2 dx = [x\ln^2 x]_e^{e^2} - 2\int_e^{e^2} \ln x\,dx = 4e^2 - [x\ln x - x]_e^{e^2} = 3e^2$$

3)
$$\begin{aligned}\int_2^3 \ln(x^2-1)\,dx &= [x\ln(x^2-1)]_2^3 - \int_2^3 \frac{2x^2}{x^2-1}\,dx\\ &= 3\ln 8 - 2\ln 3 - \int_2^3 \left(1+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}\right)dx\\ &= 3\ln 8 - 2\ln 3 - (1 + 2\ln 2 - \ln 2 - \ln 3)\\ &= -1 + 8\ln 2 - \ln 3\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = (cos\,x + sin\,x)(cos\,x - sin\,x)$
2) f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{3\pi}{4} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z}\right\} := D$
   Et $\forall x \in D, \cos x + \sin x \neq 0$, donc :
$$\int f(x)dx = \int (\cos x - \sin x)dx = \sin x + \cos x + C, C \in \mathbb{R}$$

Exercice 3 :

1) $\forall a \in \mathbb{R}^*$,
$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \int \frac{1/a^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1/a}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C, C \in \mathbb{R}$$
2) On a :
$$\int \frac{3}{x^2+4x+29}\,dx = \int \frac{3}{(x+2)^2+5^2}\,dx = \int \frac{3}{u^2+5^2}\,du = \frac{3}{5}\arctan\left(\frac{x+2}{5}\right) + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$
   Où l'on a posé le changement de variable $u = x + 2$

Exercice 4 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, posons $t = \tan\frac{x}{2}$.
   Alors :
$$\frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \cos\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \cos x$$
   De même,
$$\frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\dfrac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}}{1 + \dfrac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}} = \frac{2\sin x\cos x}{1} = \sin\left(2\times\frac{x}{2}\right) = \sin x$$

Et enfin,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \frac{2t}{1-t^2}$$

2) On utilise le changement de variable proposé, on a $x = 2\arctan t$, $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\sin x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{2}{t^2+2t+1}dt = 2\left[-\frac{1}{t+1}\right]_0^1 = 1$$

3) Ici, il faut découper grâce à la relation de Chasles :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int_0^{\pi/2} dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

<u>Exercice 5 :</u>

1)

$$I \coloneqq \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}dx = \int_{1/4}^{3/4} \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}dx$$

On pose alors $u = \sqrt{x}$, on obtient $x = u^2$ et $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{dx}{2u} \Leftrightarrow dx = 2udu$

(n'oublions pas que l'on a le droit car la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est bijective sur $\left[\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right]$).

Ainsi

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{u\sqrt{1-u^2}} 2udu = 2\int_{1/2}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}du = 2[\arcsin(u)]_{1/2}^{\sqrt{3}/2} = 2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\pi}{3}$$

2) Nommons J cette intégrale et posons $u = 1 + x^3$ (pas de problème, la fonction $x \mapsto 1 + x^3$ est bijective même sur $\mathbb{R}$).

On a donc $du = 3x^2dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$, et

$$J = \int_1^2 x^2\sqrt[3]{u}\frac{du}{3x^2} = \frac{1}{3}\int_1^2 u^{1/3}du = \frac{1}{3}\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_1^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{2^4}\right) = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$$

3) Notons $K = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$. Il y a plusieurs manières de voir le problème.

1ère méthode : graphique

Littéralement, l'intégrale représente l'aire sous la courbe de l'intégrande. Ainsi, si l'on pose $y = \sqrt{1-x^2}$, on obtient $x^2 + y^2 = 1$, qui est l'équation de cercle de centre 0 et de rayon 1. Ainsi, compte tenu des restrictions de l'équation initiale (comme la fonction racine carrée est à valeur dans $\mathbb{R}^+$, y est forcément uniquement positif), on voit que l'on se ramène à calculer l'aire du demi-cercle supérieur de centre 0 et de rayon 1. Ainsi $K = \frac{1}{2}\pi \times 1^2 = \frac{\pi}{2}$.

2ème méthode : analytique

On a l'intégrale de quelque chose en « $1 - qqch^2$ » qui rappelle une forme trigonométrique. Ainsi on peut poser $x = \sin u$ (attention, comme le changement de variable doit rester bijectif sur $[-1,1]$, on ne peut pas prendre $x = \cos u$!)

On a ainsi $dx = \cos x\, du$, et donc

$$
\begin{aligned}
K = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 u}\cos u\, du &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2(u)\, du \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1+\cos(2u)}{2}\, du \\
&= \frac{1}{2}\left[u + \frac{\sin(2u)}{2}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

4) On voit qu'on intègre une fonction impaire sur un segment centré en zéro, donc l'intégrale est forcément nulle.
5) Soit $I = \int_0^{\pi} \frac{1}{(x^2+4)^2} dx$
   On pose, comme proposé $x = 2\tan\theta$.
   On a alors $dx = 2(1+\tan^2\theta) d\theta$, et

$$
\begin{aligned}
I = \int_0^{\pi} \frac{1}{(4\tan^2\theta + 4)^2} 2(1+\tan^2\theta) d\theta &= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{1}{16}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{16}(\pi - 0) = \frac{\pi}{16}
\end{aligned}
$$