Feuille 4 – Sous-espaces supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et G et H sont deux sev de E, on a :

$$E = F \oplus G \Leftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \text{ et } E = F + G \\ \forall x \in E, \exists (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \forall x \in E, \exists! \, (x_F, x_G) \in F \times G, x = x_F + x_G$$

Exercice 1

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B deux sev de E. Soit C le supplémentaire de $A \cap B$ dans B. Montrer que

$$A + B = A \oplus C$$

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev et A, B, C trois sev de E tels que

$$\begin{cases} E = A \oplus B \\ A \subset C \end{cases}$$

Montrer que $C = A \oplus (B \cap C)$

Exercice 3 :

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit F l'ensemble des fonctions π-périodiques, et G l'ensemble des fonctions convergeant vers 0 en $+\infty$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2) Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$.
3) Montrer que F et G ne sont pas supplémentaires dans E. (On pourra par exemple considérer la fonction identité).

Exercice 4 :

Dans $E = \mathbb{R}^4$, on considère (u_1, u_2, u_3, u_4) une famille libre dans E et :

$$\begin{cases} F = \mathrm{Vect}(u_1 + u_2, u_3) \\ G = \mathrm{Vect}(u_1 + u_3, u_4) \\ H = \mathrm{Vect}(u_1 + u_4, u_2) \end{cases}$$

Montrer que $F \cap G = \{0_E\}$, que $G \cap H = \{0_E\}$ et que $F \cap H = \{0_E\}$.

Pour autant, a-t-on une somme directe entre F, G et H ?