Chapitre 2 – Orthogonalité

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension quelconque, dont on notera $\langle , \rangle$ le produit scalaire et $\|\cdot\|$ la norme associée.

I) Vecteurs orthogonaux

1) Orthogonalité de 2 vecteurs

Définition : Soient $x, y \in E$. On dit que x et y sont orthogonaux si $\langle x, y\rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Remarque : Le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de E est 0_E.

Remarque : Si $x \perp y$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \perp \lambda y$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel, soit $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ alors $y = (-b, a)$ vérifie

$x \perp y$ car $\langle x, y\rangle = -ab + ab = 0$

Dans $E = \mathcal{C}([0; 2\pi]; \mathbb{C})$ munie du produit scalaire usuel, considérons $f : x \mapsto i$, $g : x \mapsto \sin x$

Alors $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x)dx = [i \times \cos x]_0^{2\pi} = 0$, donc $f \perp g$.

Attention : la notion d'orthogonalité dépend du p.s. utilisé.

Propriété : Identité de Pythagore

1) Soient E un espace préhilbertien réel et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Leftrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$
2) Soient E un espace préhilbertien complexe et $x, y \in E$. On a :
$$x \perp y \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : ⍟

1) On sait que $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2$
Ainsi $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \Leftrightarrow 2\langle x, y\rangle = 0 \Leftrightarrow x \perp y$
2) On sait que $\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y\rangle = \|x\|^2 + 2Re(\langle x, y\rangle)$
Ainsi $\langle x, y\rangle = 0 \Longrightarrow Re(\langle x, y\rangle) = 0 \Longrightarrow \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

Attention : la réciproque est fausse dans le cas E préhilbertien complexe.

II) Familles orthogonales

Définition : On dit qu'une famille d'éléments $(e_i)_{i\in I} \in E$ est orthogonale si tous ses éléments sont orthogonaux 2 à 2 ie si :

$$\forall i, j \in I, i \neq j \Longrightarrow \langle e_i, e_j\rangle = 0$$

On dit que la famille $(e_i)_{i\in I}$ est orthonormée si elle est orthogonale et que tous ses éléments ont pour norme 1, ce qui est équivalent à :

$$\forall (i, j) \in I^2, \langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} = \delta_{i,j} \text{ (symbole de Kronecker)}$$

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⍟

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille orthogonale d'éléments de E tq $\forall i \in [\![1, n]\!], e_i \neq 0_E$. Soient $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}^n$ tq $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$

D'une part $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \left\langle e_j, 0_E \right\rangle$

D'autre part, par linéarité à droite de $\langle , \rangle$, $\left\langle e_j, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\left\langle e_j, e_k \right\rangle}_{0 \text{ si } k \neq j} = \lambda_j \left\| e_j \right\|^2$

Ainsi, $\lambda_j \left\| e_j \right\|^2 = 0$, d'où $\lambda_j = 0$ car $\left\| e_j \right\| \neq 0$ car $e_j \neq 0_E$

Ainsi $(e_1, \dots, e_n)$.

Ce résultat s'étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille orthonormée d'éléments de E, alors $(e_i)_{i \in I}$ est orthogonale et $\forall i \in I, \|e_i\| = 1 \neq 0$ donc $e_i \neq 0_E$

3) Base orthonormée et calculs dans une telle base

Définition : Soit E un espace préhilbertien ou hermitien. On appelle base orthonormée de E toute famille de vecteurs de E qui est à la fois orthonormée et une base de E.

Propriété : Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Soit $x \in E$. Les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans la base $\mathcal{B}$ sont données par $\forall k \in [\![1, n]\!], x_k = \langle e_k, x \rangle$.

De sorte que $x = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\langle e_k, x \rangle}_{\in \mathbb{K}} e_k$

Propriété : Soient E un espace euclidien ou hermitien et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E Soient $x, y \in E$ de coordonnées respectives $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots y_n$ dans la base E. Alors

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} y_k = {}^t\overline{X} Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = {}^t\overline{X} X$$

Où $X = Mat_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = Mat_{\mathcal{B}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

4) Procédé d'orthonormalisation et de Gram-Schmidt

Théorème : Soit E un espace préhilbertien réel ou complexe. Pour toute famille libre $(u_1, \dots, u_n)$ d'éléments de E, il existe une famille orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ tq

$$\forall k \in [\![1, n]\!], Vect\{u_1, \dots, u_n\} = Vect\{e_1, \dots, e_n\}$$

Remarque : Pour construire ce genre de famille, on pose $v_1 = u_1, e_1 = \frac{v_1}{\|e_1\|}$ puis

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!], v_{k+1} = u_{k+1} - \sum_{j=1}^{n} \langle e_j, u_{k+1} \rangle e_j \quad \text{et} \quad e_{k+1} = \frac{v_{k+1}}{\|v_{k+1}\|}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son p.s. usuel considérons la famille $\mathcal{F} = (u_1, u_2, u_3)$ où

$$u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,0,1), u_3 = (1,1,0)$$

Notons $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$

$$\det(\mathcal{F}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Donc $\mathcal{F}$ est libre (c'est même une base de $\mathbb{R}^3$) donc on peut lui appliquer le procédé d'orthormalisation de Gram-Schmidt.

On pose $v_1 = u_1$, alors $\|v_1\|^2 = \langle v_1, v_1 \rangle = 2$, on pose $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

Puis on pose $v_2 = u_2 - \langle e_1, u_2 \rangle e_1 = (1,0,1) - \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1), (1,0,1) \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1) = \frac{1}{2}(2,-1,1)$

Alors $\|v_2\| = \left\| \frac{1}{2}(2,-1,1) \right\| = \frac{1}{2}\|2,-1,1\| = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Ainsi on pose $e_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,1)$

Enfin on pose $v_3 = u_3 - \langle e_1, u_3 \rangle e_1 - \langle e_2, u_3 \rangle e_2 = \frac{1}{6}(4,4,-4) = \frac{2}{3}(1,1,-1)$

De plus, $\|v_3\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$, et on pose $e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1)$

Corollaire : Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.

Corollaire : Toute famille orthonormée d'un espace E euclidien ou hermitien peut être complétée en une base orthonormée de E.

III) Sous-espaces vectoriels orthogonaux

1) Orthogonal d'une partie

Définition : soit $A \subset E$. On appelle orthogonal de A l'ensemble noté $A^\perp$, constitué des éléments de E orthogonaux à tous les éléments de A, ie

$$\boxed{A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A, \langle a, x \rangle = 0\}}$$

Exemples

1) ⍟ $\{0_E\}^\perp = E$ car $\forall x \in E, \langle x, 0_E \rangle = 0$
2) ⍟ $E^\perp = \{0_E\}$ car 0_E est le seul élément de E orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit $A \subset E$, alors $A^\perp$ est un sev de E.

Propriété : Soit $A, B \subset E$

(1) On a $A \subset (A^\perp)^\perp$
(2) Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$
(3) $A^\perp = \left(Vect(A)\right)^\perp$

Propriété : Soit $F = Vect(e_i)_{i \in I}$ un sev de E. Alors $\boxed{F^\perp = \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}}$

Démonstration : ⍟ Soit $x \in F^\perp$, alors $\forall y \in F, \langle x, y \rangle = 0$. Or $\forall i \in I, e_i \in F$, donc $\langle x, e_i \rangle = 0$

Ainsi $F^\perp \subset \{x \in E \mid \forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0\}$

Réciproquement, soit $x \in E$ tel que $\forall i \in I, \langle x, e_i \rangle = 0$. Soit $y \in F = Vect(e_i)_{i \in I}$

Donc $\exists n \in \mathbb{N}^*, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ et $\exists i_1, \dots, i_n \in I$ tq $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_{i_k}$

D'où $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \underbrace{\langle x, e_{i_k} \rangle}_{=0} = 0$

Donc $x \in F^\perp$ d'où l'inégalité voulue.

Définition : Soient F, G 2 sev de E. On dit que F et G sont orthogonaux si $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$

3) Supplémentaires orthogonaux d'un sev de dimension finie

Théorème : Soit F un sev de E avec F de dimension finie. Alors $E = F \oplus F^\perp$. On appelle $F^\perp$ le supplémentaire orthogonal de F dans E.

En particulier, si E est euclidien ou hermitien, alors pour tout sev F de E,

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp}$$

Attention : ce résultat est faux si F n'est pas de dimension finie.

Corollaire : Si E est un espace **euclidien** ou **hermitien**, alors pour tout sev F de E on a :

$$\boxed{\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F} \text{ et } (F^\perp)^\perp = F$$

Attention : si E est de dimension infinie, on peut avoir $F \underset{\neq}{\subset} (F^\perp)^\perp$

Projection orthogonale

Rappels sur les projecteurs et les symétries

E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque (pas forcément finie), F et G sont deux sev de E supplémentaires dans E, ie $E = F \oplus G$

Définition : On appelle projection sur F parallèlement à G l'endomorphisme de E défini par :

$$\forall x \in E, \exists!\, (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G, p(x) = x_F$$

Définition : On appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s de E tel que :

$$\forall x \in E, \exists!\, (x_F, x_G) \in F \times G \text{ tq } x = x_F + x_G, s(x) = x_F - x_G$$

On a alors $s = 2p - Id_E$

Propriété : Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $p^2 = p$
(ii) p est la projection sur $Im(p)$ parallèlement à $\ker p$. Dans ce cas, $Im(p) = \ker(p - Id_E)$.

Remarque : Avec les notations $F = Im(p), G = \ker(p)$, on a :

$$\text{Soit } x \in E, \begin{cases} p(x) = x \Leftrightarrow x \in F \\ p(x) = 0_E \Leftrightarrow x \in G \end{cases}$$

<u>Propriété :</u> Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $s^2 = Id_E$

(ii) s est la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$

<u>Remarque :</u> Avec les notations $F = \ker(s - Id_E)$, $G = \ker(s + Id_E)$, on a :

$$\text{Soit } x \in E, \begin{cases} s(x) = x \Leftrightarrow x \in F \\ s(x) = -x \Leftrightarrow x \in G \end{cases}$$

<u>Remarque :</u> Supposons $\dim E < +\infty$. Notons p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.

En prenant la concaténation $B = B_F \cup B_G$, B est une base adaptée à la décomposition :

$$\mathrm{Mat}_B(p) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Mat}_B(s) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & (0) \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & (0) & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$

Projection orthogonale :

On revient au cadre où E est un espace préhilbertien réel ou complexe. Si F est un sev de E de dimension finie, on a vu que $E = F \oplus F^\perp$

<u>Définition :</u> Soit F un sev de E tq $E = F \oplus F^\perp$ (c'est vrai en particulier si $\dim F < +\infty$)

On appelle projection orthogonale sur F la projection, notée p_F, sur F parallèlement à $F^\perp$. On appelle symétrie orthogonale par rapport à F la symétrie, notée s_F, sur à F parallèlement à $F^\perp$.

<u>Remarque :</u> $\forall x \in E, p_F(x)$ est l'unique élément de F tel que $x - p_F(x) \in F^\perp$. Ainsi pour $y \in E$, on a :

$$y = p_F(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y \in F \\ \forall z \in F, \langle x - y, z \rangle = 0 \end{cases}$$

Exemple : dans $\mathbb{R}^3$ muni du p.s. usuel, déterminons-le projeté orthogonal $p_F(e_1)$ du vecteur

$e_1 = (1,0,0)$ sur $F = \mathrm{Vect}\{e_2, e_3\}$ où $\begin{cases} e_2 = (0,1,1) \\ e_3 = (1,0,-1) \end{cases}$

On sait que $p_F(e_1) \in F = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$. Donc $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $p_F(e_1) = \alpha e_1 + \beta e_2 = (\beta, \alpha, \alpha - \beta)$

De plus, $e_1 - p_F(e_1) \in F^\perp \Leftrightarrow \forall y \in F, \langle e_1 - p_F(e_1), y \rangle = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \langle e_1 - p_F(e_1), e_2 \rangle = 0 \\ \langle e_1 - p_F(e_1), e_3 \rangle = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{2}{3} \\ \alpha = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc $p_F(e_1) = \frac{1}{3}(0,1,1) + \frac{2}{3}(1,0,-1) = \frac{1}{3}(2,1,-1)$

Propriété : Avec les notations de la définition ci-dessus :

$$p_F + p_{F^\perp} = Id_E$$

$$p_F \circ p_{F^\perp} = p_{F^\perp} \circ p_F = 0$$

$$s_F = 2p_F - Id_E = Id_E - 2p_{F^\perp}$$