Théorèmes – Réductions géométriques

Sommes directe d'une famille de sev

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

Définition : (Somme de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On appelle somme des sev $F_1, F_2, \dots, F_m$ l'ensemble :

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_m = \{f_1 + \cdots + f_m \mid \forall i \in [\![1; n]\!], f_i \in F_i\}$$
$$= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, e = f_1 + \cdots + f_m\}$$

Propriété :

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E, alors $F_1 + \cdots + F_m$ est un sev de E.

Définition : (Somme directe de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe si :

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_m, \exists!\, (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = f_1 + \cdots + f_m$$

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ ou $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$

Propriété : (Unique décomposition en somme directe)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Alors

Les sev $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, f_1 + \cdots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], f_i = 0_E$$

Propriété : Intersection des sev en somme directe

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Si $F_1, \dots, F_m$ est en somme directe, alors :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

Propriété : (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

La somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \cdots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$$

Théorème : (Bases de sev en somme directe)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$$

$$\Leftrightarrow$$

Pour toutes bases respectives $B_1, \ldots, B_m$ de $F_1, \ldots, F_m$,

$B = B_1 \cup \ldots \cup B_m$ forme une base de E

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} E = F_1 + \cdots + F_m \\ \dim E = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \dim(F_i) \end{cases}$$