Chapitre 6 – Séries de Fourier

I) Fonctions périodiques

1) Propriétés

Proposition : On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est périodique si $\exists T > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t+T) = f(t)$$

On dit alors que T est une période de la fonction f, et que f est T-périodique.

Dans toute la suite du chapitre, T désignera un réel strictement positif.

Proposition : Soient $a \in \mathbb{R}$, et $g : [a, a+T[\to \mathbb{C}$. Il existe une unique fonction T-périodique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ qui coïncide avec g sur $[a, a+T[$

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un fonction T-périodique et $a \in \mathbb{R}$. On a équivalence entre :

(i) f est continue sur $\mathbb{R}$.
(ii) La restriction $f|_{[a,a+T]}$ est continue.

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique, $a \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. On a équivalence entre :

(i) f est de classe C^k par morceaux sur $\mathbb{R}$.
(ii) La restriction $f|_{[a,a+T]}$ est de classe C^k par morceaux.

Proposition : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique. Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^a f(t)dt$$

Démonstration : ⍟

Soit $a \in \mathbb{R}$

$$\int_a^{a+T} f(t)dt = \int_a^0 f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_T^{a+T} f(t)dt$$

$$= -\int_0^a f(t)dt + \int_0^T f(t)dt + \int_0^a \underbrace{f(u+T)}_{=f(u)}du$$

(on a posé $u = t - T$)

$$= \int_0^T f(t)dt$$

Dans toute la suite du chapitre, on considèrera uniquement des fonctions 2π-périodiques.

Notons $C_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques.

Et $CM_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux et 2π-périodiques.

2) L'espace préhilbertien $C_{2\pi}$

Définition : Soient $f, g \in CM_{2\pi}$, on définit $\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{f(t)}g(t)dt$

Proposition : L'application $\langle , \rangle : CM_{2\pi} \times CM_{2\pi} \to \mathbb{C}$

$$(f,g) \mapsto \langle f,g \rangle$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur $CM_{2\pi}$.

Attention : ce n'est pas un produit scalaire hermitien sur $CM_{2\pi}$!!

Proposition : $\langle , \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur $C_{2\pi}$.

Définition : $\forall f \in CM_{2\pi}$, on pose $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f,f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$

Remarque : Même si ce n'est pas une norme sur $CM_{2\pi}$, elle vérifie quand même :

Proposition : $\forall f,g \in CM_{2\pi}$, on a :

(1) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$
(2) Inégalité de Cauchy-Schwarz : $|\langle f,g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
(3) Inégalité triangulaire : $\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

Définition : $\forall n \in \mathbb{Z}$, on définit $e_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto e^{int}$$

Et $\forall n \in \mathbb{N}$, on définit $C_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $T_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$t \mapsto \cos(nt) \qquad t \mapsto \sin(nt)$$

Proposition : La famille de fonctions $\{ e_n \mid n \in \mathbb{Z} \}$ est une famille orthonormée de $C_{2\pi}$.
La famille $\{ C_n \mid n \in \mathbb{N} \} \cup \{ T_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ est une famille orthogonale de $C_{2\pi}$.

3) Polynômes trigonométriques

Définition : $\forall n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\{ e_k \mid k \in [\![-n;n]\!] \}$ et $\mathcal{P} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\{ e_n \mid n \in \mathbb{Z} \}$.
Les éléments de P, qui correspondent à des combinaisons linéaires finies d'éléments sont appelés polynômes trigonométriques.

Proposition : Soit $P \in \mathcal{P}$ un polynôme trigonométrique. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$,

$$P = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k C_k + b_k T_k)$$

et $\forall k \in [\![-n;n]\!]$, $c_k = \langle e_k, P \rangle$.

et $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $a_k = c_k + c_{-k} = 2\langle C_k, P \rangle$, $b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2\langle T_k, P \rangle$.

De plus, on a $\|P\|^2 = \sum_{k=-n}^{n} |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$

Définition : On appelle série trigonométrique toute suite de fonctions de la forme $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est une combinaison linéaire de e_n et de e_{-n}, ie

$$\exists c_0 \in \mathbb{C}, u_0 = c_0 e_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}, u_n = c_n e_n + c_{-n} e_{-n}$$

Remarque : On note souvent les séries trigonométriques comme des séries bilatère $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n$. La somme partielle d'ordre n d'une telle série de fonctions est : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$.

De même, en posant pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n + c_{-n})$

On peut écrire $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e_n = \frac{a_0}{2} C_0 + \sum_{n\in\mathbb{N}^*} (a_n C_n + b_n T_n)$

II) Coefficients de Fourier

1) Définition et propriétés calculatoires

Définition : Soit $f \in CM_{2\pi}$. On définit ses coefficients de Fourier exponentiels de f par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \langle e_n, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt$$

On définit les coefficients trigonométriques de f par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 2\langle C_n, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$$

$$b_n(f) = 2\langle T_n, f\rangle = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Proposition : Si une série trigonométriques $\sum \alpha_n e_n$ CVU sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction somme

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$
$$t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n(t)$$

appartient à $C_{2\pi}$, et les coefficients de Fourier exponentiels de S sont égaux aux coefficients de la série trigonométrique, ie $\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = c_n(S)$

Proposition : Soit $f \in CM_{2\pi}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}$$

Remarque : On a $a_0(f) = 2c_0(f) \Leftrightarrow c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$ et $b_0(f) = 0$

Proposition : Soit $f \in CM_{2\pi}$

(1) Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels.
(2) Si f est paire, alors $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$.
(3) Si f est impaire, alors $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$.

Proposition : Soient $f, g \in CM_{2\pi}$, alors $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$.

2) Séries de Fourier

Définition : Soit $CM_{2\pi}$. On appelle série de Fourier de f la série trigonométrique $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n(f)e_n$. On appelle somme de Fourier de f la fonction somme de la série de Fourier de f :

$$S : t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera $s_n(f)$ la somme partielle d'ordre n de la série de Fourier de f :

$$S_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e_k = \frac{a_0(f)}{2}C_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)C_k + b_k(f)T_k)$$

3) Interprétation géométrique et comportement asymptotique

Proposition : Soit $f \in C_{2\pi}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, S_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$.

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|^2 \quad \text{et} \quad \|f - S_n(f)\|_2 = \mathrm{d}(f, \mathcal{P}_n)$$

Proposition : Soit $f \in CM_{2\pi}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}, f - S_n(f)$ est orthogonal au sev $\mathcal{P}_n$, ie $\forall P \in \mathcal{P}_n$,

$$\langle f - S_n(f), P\rangle = 0$$

En particulier, $\langle f - S_n(f), S_n(f)\rangle = 0$.

Corollaire : Inégalité de Bessel

Soit $f \in CM_{2\pi}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, \|S_n(f)\|_2 \leq \|f\|_2$.

Cela équivaut à

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

De plus, la série bilatère $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$ et la série numérique $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2)$ convergent, et on a

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) \leq \|f\|_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt$$

Corollaire : Soit $f \in CM_{2\pi}$, alors $c_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, $a_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$, $b_n(f) \xrightarrow[n\to\pm\infty]{} 0$.

Propriété : Soit $k \in \mathbb{N}, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique et de classe C_k. Alors $\forall n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k c_n(f)$$

En particulier, $c_n(f) = \underset{|n|\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^k}\right)$.

III) Théorème de convergence

Définition : Soit $f \in CM_{2\pi}$. On dit que f est développable en série de Fourier si elle est égale sur $\mathbb{R}$ à la somme de sa série de Fourier, ie si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{int}$$

$$= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(a_n(f)\cos(nt) + b_n(f)\sin(nt))$$

Théorème : (Théorème de Dirichlet)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique. Si f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la régularisée de f notée $\tilde{f}$, où

$$\tilde{f} : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}$$

<u>Remarque :</u> Si f est continue pour un certain $t_0 \in \mathbb{R}$, alors $\tilde{f}(t_0) = f(t_0)$.

<u>Théorème :</u> (théorème de convergence normale)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-périodique. Si f est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f, et $\forall t \in \mathbb{R}, S(f)(t) = f(t)$.

<u>Théorème :</u> (théorème de Parseval/Parseval-Bessel)

Soit $f \in CM_{2\pi}$, alors $\|S_n(f) - f\|_2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

De plus, …