Équations différentielles

dejou@math.univ-lyon1.fr

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

1. Équations différentielles d'ordre 1

1.1. Présentation générale

Définition

On appelle équation différentielle d'ordre 1 définie sur I toute équation de la forme (E) : $y' = f(y, t)$ où $f : U \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une fonction donnée (avec $U \subset \mathbb{K}$), et d'inconnue $y : J \subset I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivable.

Définition

Soit $U \subset \mathbb{K}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : U \times I \longrightarrow \mathbb{K}$. On appelle solution de l'équation différentielle (E) : $y' = f(y, t)$ toute fonction φ dérivable sur un intervalle $J \subset I$ contenant au moins deux points telle que

$$\forall t \in J, \quad \varphi'(t) = f(\varphi(t), t).$$

Dans toute la suite de cette partie, on s'intéressera seulement à des équations d'ordre 1 particulières, appelées équations différentielles linéaires.

1.2. **Équations différentielles linéaires d'ordre 1**

Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 1 *définie sur* I *toute équation de la forme*

$$(E) : \quad a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

où $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *sont continues.*

Définition

L'équation (E) *est dite* **sous forme normalisée** *ou* **résolue** *sur* I *si elle peut s'écrire sous la forme*

$$y' + \widetilde{a}(t)y = \widetilde{b}(t)$$

avec $\widetilde{a}, \widetilde{b} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continues.*

Remarque

Toute l'étude théorique est faite dans le cadre des équations normalisées. Pour une équation non normalisée

$$a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

on se placera sur un intervalle J **où** a **ne s'annule pas**, et on étudiera sur cet intervalle l'équation

$$(E) : \quad y' + \frac{b(t)}{a(t)}y = \frac{c(t)}{a(t)}$$

avec $\widetilde{a} : t \in J \longmapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$ et $\widetilde{b} : t \in J \longmapsto \dfrac{c(t)}{a(t)}$ continues.

Soient $a, b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. On s'intéresse à l'équation différentielle $(E) : y' + a(t)y = b(t)$.

Définition

L'équation $(E_0) : y' + a(t)y = 0$ est appelée équation différentielle homogène associée à l'équation différentielle (E).

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène (E_0) est la droite vectorielle de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ engendrée par

$$t \longmapsto e^{A(t)}$$

où A désigne une primitive sur I de la fonction continue $-a$, i.e.

$$\mathcal{S}_0 = \{t \in I \longmapsto \lambda e^{A(t)} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation complète $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ est

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\} = \{t \in I \longmapsto \lambda e^{A(t)} + y_p \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$$

où y_p est une solution particulière sur I de l'équation (E) (et A désigne une primitive sur I de la fonction $-a$).

Méthode de résolution de $(E) : y' + a(t)y = b(t)$

- on identifie le type de l'équation (E) en reconnaissant a et b fonctions continues,
- on résout l'équation homogène (E_0) ce qui donne la forme de la solution générale y_0,
- on cherche une solution particulière y_p de (E) (par exemple avec la méthode de variation de la constante),
- on exprime la solution générale de (E) comme $y : t \longmapsto y_0(t) + y_p(t)$.

2. Équations différentielles linéaires du second ordre

2.1. Contexte général

Définition

On appelle équation différentielle linéaire d'ordre 2 *définie sur* I *toute équation du type*

$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$

avec $a, b, c, d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *continues et d'inconnue* $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *deux fois dérivable.*

Définition

L'équation (E) est dite sous forme normalisée ou résolue si elle peut se mettre sous la forme

$$(E) : y'' + \widetilde{a}(t)y' + \widetilde{b}(t)y = \widetilde{c}(t)$$

avec $\widetilde{a}, \widetilde{b}, \widetilde{c} : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues.

Comme pour l'ordre 1, toute la théorie est effectuée dans le cas des équations linéaires d'ordre 2 normalisées. Pour résoudre l'équation

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$

on se placera sur un intervalle J **où** a **ne s'annule pas** de manière à pouvoir écrire l'équation sous la forme résolue :

$$y'' + \frac{b(t)}{a(t)}y' + \frac{c(t)}{a(t)}y = \frac{d(t)}{a(t)}$$

avec $\widetilde{a} = \dfrac{b}{a}$, $\widetilde{b} = \dfrac{c}{a}$ et $\widetilde{c} = \dfrac{d}{a}$ continues sur J.

2.2. **Problème de Cauchy**

Définition

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *des fonctions continues, et* $(t_0, u_0, u_1) \in I \times \mathbb{K}^2$*.*
Un problème de Cauchy associé à l'équation différentielle

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

en t_0 *consiste à déterminer les solutions de l'équation* (E) *vérifiant les conditions initiales*

$$y(t_0) = u_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = u_1.$$

Théorème (Cauchy-Lipschitz pour les équations linéaires d'ordre 2)

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ des fonctions continues, et $(t_0, u_0, u_1) \in I \times \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = u_0 \\ y'(t_0) = u_1 \end{cases}$$

admet une unique solution φ définie sur I. De plus, φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

Exemple : considérons l'équation différentielle

$$(E) : y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

avec $p, q : I \longrightarrow \mathbb{R}$ continues. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y(t_0) = y'(t_0) = 0$, alors y est la fonction nulle sur I. En effet, la fonction nulle et la fonction y sont alors solutions du même problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = 0 \\ y'(t_0) = 0 \end{cases}$$

et ce problème détermine une unique solution.

2.3. **Structure des solutions**

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. On étudie l'équation

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Définition

L'équation $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ *est appelée équation homogène associée à l'équation* (E)*.*

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}_0$ *des solutions sur* I *de l'équation homogène* (E_0) *est un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ *de dimension* 2*.*

Définition

On appelle **système fondamental de solutions** *de l'équation homogène* $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ *toute base* (φ_1, φ_2) *de l'espace* $\mathcal{S}_0$.

Remarque : Si (φ_1, φ_2) est un système fondamental de solutions, alors la solution générale de l'équation (E_0) est :

$$y : t \in I \longmapsto \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

On peut étudier la liberté de deux solutions à l'aide de l'outil suivant, qui servira aussi dans certains cas à déterminer à partir d'une seule solution de (E_0) un système fondamental de solutions.

Définition

On appelle **wronskien** *de deux solutions* (φ_1, φ_2) *de l'équation homogène* (E_0) *la fonction*

$$w : t \in I \longmapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

Proposition

Le wronskien w de deux solutions de l'équation $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 : $w' + a(t)w = 0$.

Corollaire

Le wronskien w de deux solutions de l'équation $(E_0) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ est soit identiquement nul sur I, soit ne s'annule jamais sur I.

Proposition

Soient (φ_1, φ_2) deux solutions de l'équation homogène (E_0). Notons w leur wronskien. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- i) (φ_1, φ_2) *est un système fondamental de solutions,*
- ii) *pour tout* $t \in I$, $w(t) \neq 0$,
- iii) *il existe* $t_0 \in I$ *tel que* $w(t_0) \neq 0$.

Théorème

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions sur I de l'équation complète

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

est de la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 + \{y_p\} = \{t \in I \longmapsto y(t) + y_p(t) \mid y \in \mathcal{S}_0\}$$

où y_p est une solution particulière de (E).

Méthode de résolution de $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ **:**

- on identifie le type d'équation en reconnaissant a, b, c fonctions continues,
- on résout l'équation homogène associée (E_0) : on trouve un système fondamental de solutions (φ_1, φ_2),
- on détermine une solution particulière notée y_p,
- on exprime la solution générale de (E) :

$$y : t \longmapsto \lambda\varphi_1(t) + \mu\varphi_2(t) + \; y_p(t) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

2.4. **Cas des équations à coefficients constants**

On étudie l'équation $(E) : y'' + ay' + by = c(t)$ avec $a, b \in \mathbb{K}$ constantes et $c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continue.

Considérons l'équation homogène associée $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ que l'on considère définie sur $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, la fonction $t \longmapsto e^{\lambda t}$ est solution de (E_0) si et seulement si λ est racine de l'équation $r^2 + ar + b = 0$.

Définition

L'équation $r^2 + ar + b = 0$ *est appelée équation caractéristique associée à l'équation* (E) *(ou* (E_0)*).*

Théorème

Notons Δ le discriminant le l'équation caractéristique de $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ avec $a, b \in \mathbb{K}$ définie sur I.

- *Cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:*
  1. *Si $\Delta \neq 0$, la solution générale de (E_0) est donnée par*

     $$y : t \in I \longmapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \quad \textit{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

     où $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ sont les deux solutions de l'équation caractéristique de (E_0).
  2. *Si $\Delta = 0$, la solution générale de (E_0) est donnée par*

     $$y : t \in I \longmapsto (\lambda + \mu t) e^{\alpha t} \quad \textit{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$$

     où $\alpha \in \mathbb{C}$ est la solution double de l'équation caractéristique de (E_0).

Théorème

- *Cas* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *:*
  1. *Si* $\Delta > 0$*, la solution générale de* (E_0) *est donnée par*

     $$y : t \in I \longmapsto \lambda e^{\alpha t} + \mu e^{\beta t} \quad \textit{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

     où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *sont les deux solutions réelles de l'équation caractéristique de* (E_0)*.*
  2. *Si* $\Delta = 0$*, la solution générale de* (E_0) *est donnée par*

     $$y : t \in I \longmapsto (\lambda + \mu t)e^{\alpha t} \quad \textit{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

     où $\alpha \in \mathbb{R}$ *est la solution double réelle de l'équation caractéristique de* (E_0)*.*
  3. *Si* $\Delta < 0$*, la solution générale de* (E_0) *est donnée par*

     $$y : t \in I \longmapsto e^{\alpha t}\left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t)\right) \quad \textit{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

     où $\alpha \pm i\omega$ *avec* $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ *tel que* $\omega \neq 0$ *sont les solutions complexes conjuguées de l'équation caractéristique de* (E_0)*.*

Dans le cas où $c : t \in I \longmapsto P(t)e^{\lambda t}$ où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on peut chercher une solution particulière sous la forme :

$$y : t \in I \longmapsto Q(t)e^{\lambda t}$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ de degré

$$\begin{cases} \deg(P) \text{ si } \lambda \text{ n'est pas racine de l'équation caractéristique de } (E_0) \\ \deg(P) + 1 \text{ si } \lambda \text{ est racine simple de l'équation caractéristique de } (E_0) \\ \deg(P) + 2 \text{ si } \lambda \text{ est racine double de l'équation caractéristique de } (E_0) \end{cases}$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et c est de la forme $c : t \longmapsto B\cos(\omega t)$ ou $B\sin(\omega t)$. On peut aussi trouver une solution particulière en étudiant l'équation complexe

$$z'' + az' + bz = Be^{i\omega t}$$

et en considérant la partie réelle ou la partie imaginaire d'une solution particulière.

2.5. Méthode de variations des constantes

Il n'y a pas de méthode générale pour calculer deux solutions indépendantes de l'équation homogène. Cependant, si on connaît deux telles solutions, on peut calculer une solution particulière de l'équation avec second membre par variation des constantes.

Soient $a, b, c : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues. On s'intéresse à l'équation différentielle

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Supposons connu un système fondamental de solutions (φ, ψ) de l'équation homogène $(E_0) = y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Alors la solution générale de (E_0) est donnée par

$$y : t \in I \longmapsto \lambda\varphi(t) + \mu\psi(t) \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Proposition

Avec les notations précédentes, si $y : t \in I \longmapsto \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$ *avec* $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *dérivables vérifie le système*

$$\forall t \in I, \quad \begin{cases} \lambda'(t)\varphi(t) + \mu'(t)\psi(t) = 0 \\ \lambda'(t)\varphi'(t) + \mu'(t)\psi'(t) = c(t) \end{cases}$$

alors y *est solution sur* I *de l'équation différentielle*

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Remarque : Une autre manière de rédiger le problème est de dire qu'il suffit de chercher une solution y de (E) sous la forme $y : t \in I \longmapsto \lambda(t)\varphi(t) + \mu(t)\psi(t)$ avec $\lambda, \mu : I \longrightarrow \mathbb{K}$ dérivables telle que $y' : t \in I \longmapsto \lambda(t)\varphi'(t) + \mu(t)\psi'(t)$, ce qui donne lieu à la même condition.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}.$$

2.6. Résolution pratique de l'équation homogène

En dehors des équations à coefficients constants, il n'y a pas de méthode systématique pour trouver un système fondamental de solutions de l'équation homogène (et surtout pas d'équation caractéristique).
Cependant, on peut chercher des solutions de forme particulière :

- recherche de solutions polynomiales,
- recherche de solutions développables en séries entières.

Cela ne donne pas forcément une base de solutions, mais permet souvent de trouver une solution de l'équation homogène (cf TD).

2.7. Méthode de Lagrange ou d'abaissement de l'ordre

On suppose que l'on connaît φ une solution de l'équation homogène (E_0) qui **ne s'annule pas** sur I. Alors on peut déterminer toutes les solutions de (E). Soit $y : I \longrightarrow \mathbb{K}$ deux fois dérivable. On pose

$$\lambda : t \in I \longmapsto \frac{y(t)}{\varphi(t)}$$

de sorte que pour tout $t \in I$, $y(t) = \lambda(t)\varphi(t)$ (on remarque que λ est deux fois dérivable sur I). Alors on a l'équivalence :

$$\begin{aligned}
& y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \\
\iff \quad & \forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I, \quad \lambda''(t)\varphi(t) + (a(t)\varphi(t) + 2\varphi'(t))\lambda'(t) = c(t) \\
\iff \quad & \forall t \in I, \quad \lambda''(t) + \left(a(t) + 2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\right)\lambda'(t) = \frac{c(t)}{\varphi(t)}
\end{aligned}$$

qui est une équation différentielle linéaire du premier ordre (sous forme résolue) en λ'. On peut donc déterminer toutes les fonctions λ solutions de cette équation sur I, et ainsi retrouver toutes les solutions de (E) sur I.

Cette méthode est aussi appelée méthode de variation de **la** constante.
Exemple : Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'équation

$$(E) : t^2y'' + ty' - y = t^2$$

2.8. Le problème des raccords

On a déjà vu que pour une équation différentielle

$$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$$

avec $a, b, c, d : I \longrightarrow \mathbb{K}$ continues, on se place dans un premier temps sur les intervalles les plus grands $J \subset I$ sur lesquels a ne s'annule pas, afin de se ramener à une équation sous forme résolue

$$y'' + \frac{b(t)}{a(t)}y' + \frac{c(t)}{a(t)}y = \frac{d(t)}{a(t)}$$

et appliquer les théorèmes précédents. Pour résoudre l'équation sur I tout entier, il faut alors chercher à raccorder les solutions. On procède comme pour les équations d'ordre 1 en étudiant cette fois-ci le caractère deux fois dérivable au lieu de la simple dérivabilité.

Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation :

$$(E) : (t-1)y'' - ty' + y = 0.$$

Remarque : Attention, comme pour les équations différentielles d'ordre 1, différents comportements sont possibles pour les raccords. Par exemple, l'équation différentielle

$$(E) : t^2 y'' + ty' - y = 0$$

a pour solution générale sur $]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$:

$$y : t \longmapsto \lambda t + \frac{\mu}{t} \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

mais la solution générale de (E) sur $\mathbb{R}$ est

$$y : t \in \mathbb{R} \longmapsto \lambda t \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Résolution de $(E) : t^2 y'' + t y' - y = t^2$ sur $]0;+\infty[$

Equation homogène $(E_0) : t^2 y'' + t y' - y = 0$

Cherchons des solutions de (E_0) sous forme polynomiale

soit $P \in \mathbb{R}[X]$ (non nul). Notons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$

Si la fonction polynômiale associé à P est solution de (E_0) sur $]0;+\infty[$,

alors $\forall t > 0$, $t^2 P''(t) + t P'(t) - P(t) = 0$

car seul le polynôme nul admet une infinité de solutions

$$\Leftrightarrow \quad X^2 P''(X) + X P'(X) - P(X) = 0_{\mathbb{R}[X]}$$

$$\Rightarrow \quad n(n-1)a_n + n a_n - a_n = 0$$

$$\Rightarrow \quad (n+1)(n-1) \underbrace{a_n}_{\neq 0} = 0$$

$$\Rightarrow \quad n = 1$$

On pose donc $P = aX + b$, $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$

alors $t \mapsto P(t)$ est solution de (E_0) sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \forall t > 0$, $at - at - b = 0$

$\Leftrightarrow \quad b = 0$

donc $P : t \to at$ est sol° de (E_0)

On pose $\varphi : t \mapsto t$, solution de (E_0) sur $]0;+\infty[$ qui ne s'annule pas sur cet intervalle

$\Rightarrow$ Méthode de Lagrange

Soit $y :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ $\in$ 2 fois dérivable

Posons $\lambda :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{y(t)}{\varphi(t)} = \frac{y(t)}{t}$$

λ est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ et $\forall t > 0$, $y(t) = \lambda(t)\varphi(t) = \lambda(t) t$

alors $y'(t) = \lambda'(t) t + \lambda(t)$

$y''(t) = \lambda''(t) t + \lambda'(t) + \lambda'(t)$

$= t\lambda''(t) + 2\lambda'(t)$

Ainsi y est solution de (E) sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \forall t > 0$, $t^2(t\lambda''(t) + 2\lambda'(t)) + t(t\lambda'(t) + \lambda(t)) - t\lambda(t) = t^2$

$\Leftrightarrow \forall t > 0$, $t^3\lambda''(t) + 3t^2\lambda'(t) = t^2$

$\Leftrightarrow \forall t > 0$, $\lambda''(t) + \frac{3}{t}\lambda'(t) = \frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \lambda'$ est solution sur $]0;+\infty[$ de F : $z'(t) + \frac{3}{t} z(t) = \frac{1}{t}$

Or l'ensemble des solutions de l'éq homogène associée à (F) est $\left\{ t \mapsto \mu e^{-3\ln(t)} = \frac{\mu}{t^3} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$

On cherche une solution particulière de (F) avec la méthode de la variation de la constante.

Soit $\mu :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$ dérivable et $z :]0;+\infty[\to \mathbb{R}$, $t \mapsto \frac{\mu(t)}{t^3}$

alors z est solution de (F) $\Leftrightarrow \forall t>0, \frac{\mu'(t)t^3 - \mu(t)3t^2}{t^6} + \frac{3}{t}\cdot\frac{\mu(t)}{t^3} = \frac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \forall t>0, \mu'(t) = t^2$

on prend donc $\mu : t \mapsto \frac{t^3}{3}$

donc l'ensemble des solutions de (F) est : $\left\{ t \mapsto \frac{\mu}{t^3} + \frac{1}{3} \mid \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Ainsi y est solution de (E) sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \lambda'$ est solution de F sur $]0;+\infty[$

$\Leftrightarrow \exists \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $\lambda : t \in]0;+\infty[\mapsto -\frac{\mu}{2t^2} + \frac{1}{3}t + \gamma$

$\Leftrightarrow \exists \mu, \gamma \in \mathbb{R}$ tq $y : t \in]0;+\infty[\mapsto -\frac{\mu}{2t} + \frac{1}{3}t^2 + \gamma t$ car $y(t) = \lambda(t)t \ \forall t>0$

Problème de raccord

Résoudre sur $\mathbb{R}$, $(E) : (t-1)y'' - ty' + y = 0$

(E) est résoluble sur $I_1 =]-\infty;1[$, $I_2 =]1;+\infty[$

→ On résoud (E) sur I_1 et I_2. On cherche l'ensemble des fct DSE en 0 solutions sur I_i

et on se rend compte que $\forall a \in \mathbb{R}$, $t \mapsto at$ et $\forall b \in \mathbb{R}$, $t \mapsto be^t$ sont solution de (E) sur I_i (mê sur $\mathbb{R}$)

On pose $\varphi : t \mapsto t$ & $\psi : t \mapsto e^t$. φ & ψ sont sol de l'éq homogène de (E) sur I_i

De + elles forment un système fondamental de sol° sur I_i

car $\forall t \in I_i$, leur wronskien vérifie $w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} t & e^t \\ 1 & e^t \end{vmatrix}$

$= (t-1)e^t \neq 0$

dc l'ensemble des solutions de (E) sur I_i est $S = \{ t \in I_i \mapsto \lambda t + \mu e^t \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$

→ Résolution sur $\mathbb{R}$ toujours par analyse-synthèse

• Analyse Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors y est sol° de (E) sur I_i pour $i \in [\![1;2]\!]$

Ainsi $\exists \lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tq

$$y(t) = \begin{cases} \lambda_1 t + \mu_1 e^t \text{ si } t<1 \\ \lambda_2 t + \mu_2 e^t \text{ si } t>1 \end{cases}$$

y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc y est continue en 1

donc $\lim\limits_{t\to 1^-} y(t) = \lambda_1 + \mu_1 e = y(1) = \lambda_2 + \mu_2 e = \lim\limits_{t\to 1^+} y(t)$

de m̂, y' est continue en 1,

$\lim\limits_{t\to 1^-} y'(t) = \lambda_1 + \mu_1 e = y'(1) = \lim\limits_{t\to 1^+} y'(t) = \lambda_1 + \mu_1 e$

enfin y est 2 fois dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en 1,

$$\lim_{t\to 1} \frac{y'(t)-y'(1)}{t-1} = \mu_1 e = y''(1) = \lim_{t\to 1^+} \frac{y'(t)-y'(1)}{t-1}$$
$$= \lim_{t\to 1^+} \frac{\lambda_2 + \mu_2 e^t - (\lambda_2 + \mu_2 e)}{t-1}$$
$$= \lim_{t\to 1^+} \mu_2 \frac{e^t - e^1}{t-1} = \mu_2 e^1$$

donc $\mu_1 = \mu_2$, et $\lambda_1 = \lambda_2$

donc $y : t \in \mathbb{R} \to \lambda_1 t + \mu e^t$

• synthèse : Soit $\lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R}$, $y : t \mapsto \lambda_1 t + \mu_1 e^t$ alors y est 2 fois dérivable en 1 et comme $t \mapsto t$ et $t \mapsto e^t$ est sol° de (E) sur $\mathbb{R}$, on a bien y sol° de (E) sur $\mathbb{R}$ (en remplaçant)

donc l'ensemble des sol° de (E) sur $\mathbb{R}$ est $\{t \mapsto \lambda t + \mu e^t \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$