

Feuille 1 – Développements limités, équivalents

Développements limités			
$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$		$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$	
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \cdots + \alpha(\alpha-1) \dots \frac{(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n), \alpha \in \mathbb{R}$			
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$		$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n})$		$\sinh x = x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$		$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$	
$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$		$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1})$	
Équivalents usuels			
$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$	$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x$

Exercice 1 : Soit $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$

- 1) À l'aide d'un équivalent, trouver $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. Valider votre réponse avec la règle de L'Hôpital.
- 2) Trouver un équivalent de f en 0.

Exercice 2 : Soit $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x}\right)^x$

Calculer $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} g(x)$, et trouver un équivalent en $+\infty$ de $g(x) - l$.

Attention : On ne peut pas, en règle générale, composer les équivalents !
 $\ln(e^x - 1)$ n'est pas équivalent en 0 à $\ln x$