Espaces vectoriels normés

Propriété : (Inégalité triangulaire inversée)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

Démonstration : ⍟

Soit $x, y \in E$,

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

Ainsi $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$.

Par symétrie, on a aussi $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|x - y\|$

Donc $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$

Propriété : (Exemples de normes sur $\mathbb{K}^n$)

Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, on pose

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1,n]\!]} |x_k|.$$

Ces trois applications sont des normes sur $\mathbb{K}^n$

Démonstration : ⍟

- Soit $x \in \mathbb{K}^n$, alors $\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \geq 0$ donc $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ existe et est à valeurs positives
  Ainsi $\|\cdot\|_2 : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}_+$
- Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$.
  $$\|x\|_2 = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], |x_k|^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in [\![1,n]\!], |x_k| = 0 \Leftrightarrow x = 0_{\mathbb{K}^n}$$
- Soient $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \lambda \in \mathbb{K}$,
  $$\lambda x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \Longrightarrow \|\lambda x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\lambda x_k|^2} = \lambda \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} = \lambda \|x\|_2$$
- Soient $x = (x_1, \dots x_n), y = (y_1, \dots y_n) \in \mathbb{K}^n$
  On veut montrer que $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$
  On a : $\|x + y\|_2^2 = \sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (|x_k|^2 + |y_k|^2)$
  Donc $\|x + y\|_2^2 \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 + 2\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k| + \sum_{k=1}^{n} |y_k|^2$

  Or par Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} |x_k||y_k|\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}$$

Donc $\|x+y\|_2^2 \leq (\|x_k\|_2 + \|y_k\|_2)^2$

On obtient le résultat demandé par croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}_+$

Tracé des boules unitaires :

Démonstration : ⍟

- Notons $\overline{B_{\|\cdot\|_2}}((0{,}0),1) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq 1\right\}$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2, \|(x,y)-(0{,}0)\|_2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 \leq 1$

Donc $\overline{B_{\|\cdot\|_2}}((0{,}0),1)$ est le disque de centre 0 et de rayon 1

- Notons $\overline{B_{\|\cdot\|_\infty}}((0{,}0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(0{,}0)\|_\infty \leq 1\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} \leq 1\}$$

$$= \begin{cases} |x| \leq 1 \\ |y| \leq 1 \end{cases}$$

$$= [-1;1] \times [-1;1]$$

- Notons $\overline{B_{\|\cdot\|_1}}((0{,}0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(0{,}0)\|_1 \leq 1\}$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x|+|y| \leq 1\}$$

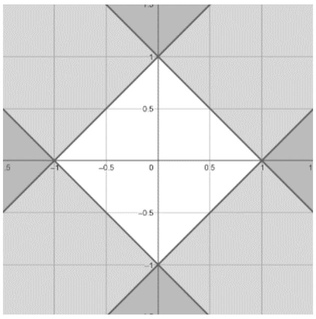
Si $y \geq 0, x \geq 0$, alors $y \leq 1-x$

Si $y \leq 0, x \geq 0$, alors $y \leq x-1$

Si $y \geq 0, x \leq 0$, alors $y \leq 1+x$

Si $y \leq 0, x \leq 0$, alors $y \leq -1-x$

(ça fait un genre de losange)



Prop 2.2 ⍟ (démonstration de la norme infinie)

- Soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$, l'ensemble $\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$ est non vide (car $X \neq 0$), inclus dans $\mathbb{R}_+$ et est majoré car f est bornée donc $\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$.
  Ainsi $\{\|f(x)\|, x \in X\}$ admet une borne supérieure (≥ 0) donc $\|f\|_\infty$ est bien définie.
  Aussi on a bien $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(X,E) \to \mathbb{R}_+$
- Séparation : Soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$
  $\rightarrow$ Si $f=0$, alors $\forall x \in X, f(x) = 0_E$ donc $\|f\|_\infty = 0$
  $\rightarrow$ Supposons $\|f\|_\infty = 0$. Alors $\forall x \in X, 0 \leq \underbrace{\|f(x)\|}_{\in E} \leq \underbrace{\|f\|_\infty}_{\in \mathcal{B}(X,E)} = 0$
  Donc $\|f(x)\| = 0$, ie $f(x) = 0_E$ par séparation de $\|\cdot\|$, donc $f = 0_{\mathcal{B}(X,E)}$
- Homogénéité : Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, soit $f \in \mathcal{B}(X,E)$. On veut montrer $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$
  $$\forall x \in X, \|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f\| \leq |\lambda|\|f\|_\infty$$
  Et comme le sup d'un ensemble est le plus petit majorant de cet ensemble,
  $$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty$$

Si $\lambda \neq 0$, alors $\|f\|_\infty = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda f\right\|_\infty \leq \left|\frac{1}{\lambda}\right| \|\lambda f\|_\infty$
Donc comme $|\lambda| > 0$, $|\lambda|\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty$
Ainsi, $|\lambda|\|f\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty$
Et on vérifie que cette égalité est vraie même si $\lambda = 0$:

$$\|\lambda f\|_\infty = 0 = |\lambda|\|f\|_\infty$$

- Inégalité triangulaire : Soient $f, g \in \mathcal{B}(X, E)$, soit $x \in X$, $\|(f+g)(x)\| = \|f(x) + g(x)\|$

$$\leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$$

$$\leq \|f(x)\|_\infty + \|g(x)\|_\infty$$

On passe à la borne supérieure pour conclure : $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

Donc $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(X, E)$