Chapitre 4 – Calcul différentiel

Dans tout le chapitre, E, F, G sont des $\mathbb{R}$-evn de dim $< +\infty$ non nulles (avec $n = \dim E$, $p = \dim F$), U désigne un ouvert de E et I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

1. <u>Dérivation d'une fonction d'une variable réelle à valeurs vectorielles</u>

<u>Définition :</u> Soit I un ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $f : I \subset \mathbb{R} \to F$. On dit que f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement

$$\frac{1}{t}\big(f(a+t) - f(a)\big)$$

admet une limite finie $\ell \in F$ lorsque $t \to 0$ ($t \neq 0$). Sa limite ℓ est alors appelée **vecteur dérivé** de f en a et noté $f'(a)$.

<u>Définition :</u> Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ est dite dérivable si elle l'est en tout point de l'ouvert non vide I. On peut alors introduire l'application $f' : I \to F$ appelée fonction dérivée de f.

$$t \mapsto f'(t)$$

<u>Théorème :</u> Soient $B = \big(e_1, \dots, e_p\big)$ une base de F et $f : I \subset \mathbb{R} \to F$ de fonction coordonnées $f_1, \dots, f_p$ dans la base B. On a équivalence entre :

(i) f est dérivable sur I
(ii) Les fonctions $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables sur I

De plus, si tel est le cas, on a

$$\forall t \in I, f'(t) = \sum_{k=1}^{p} f_k'(t) e_k$$

<u>Proposition :</u>

Soient $f, g : I \to F$ deux fonctions dérivables sur I. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda f + g$ est aussi dérivable sur I et

$$\forall t \in I, (\lambda f + g)'(t) = \lambda f'(t) + g'(t)$$

2. <u>Différentielle d'une fonction</u>

1) Développement limité à l'ordre 1

<u>Définition :</u>

Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. On dit que f admet un développement limité à l'ordre 1 en a s'il existe une application linéaire $u : E \to F$ et une fonction ε définie au voisinage de 0_E telle que

$$f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h), \text{ avec } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0_E]{} 0_F$$

On notera alors $f(a+h) = f(a) + u(h) + o(\|h\|)$ lorsque $h \to 0_E$.

Exemple :

- Pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x,y) \mapsto f(x,y)$, prenons $\| \|_2$ sur $\mathbb{R}^2$.
  f admet un DL_1 en $(0,0)$ ssi $\exists a, b \in \mathbb{R}$ tq
  $$f(h_1,h_2) = f(0,0) + ah_1 + bh_2 + \underset{(h_1,h_2)\to(0,0)}{o}(\|(h_1,h_2)\|)$$

Proposition : Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in E$. Si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a, il y a unicité de l'application linéaire u décrivant le développement limité.

2) Différentiabilité en un point

Définition : Soit $f : U \subset E \to F$. On dit que f est **différentiable** en $a \in U$ s'il existe une application linéaire $u : E \to F$ telle que :

$$\lim_{\substack{h\to 0_E \\ h\neq 0_E}} \frac{\|f(a+h)-f(a)-u(h)\|_F}{\|h\|_E} = 0_E$$

Remarque : Puisque nous sommes dans des evn de dim finie, toutes les normes sont équivalentes et la notion de limite est invariante par passage à une norme équivalente, donc on peut choisir les normes que l'on veut sur E et F. Ainsi on marquera donc $\| \|$ pour toutes les normes dans la suite du cours.

Proposition : Soient $f : U \subset E \to F$ et $a \in U$. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable en a
(ii) f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.

Proposition : Si f est différentiable en a, l'application linéaire u est unique. On la note $\mathrm{d}f(a)$, appelée différentielle de f en a.

Exemple :

1) Soit $f : E \to F$ une fonction constante (telle que $\forall x \in E, f(x) = C$)
   Soit $a \in E, \forall h \in E, f(a+h) = C = f(a) = f(a) + \underbrace{0_F}_{u(h)} + \underbrace{0_F}_{\|h\|\times 0_F}$
   Donc $f(a+h) = f(a) + u(h) + \|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon : h \mapsto 0_F$ et $u : E \to F, h \mapsto 0_F$
   Comme $u \in \mathcal{L}(E,F)$, ceci montre que f admet un DL_1 en a donc f est différentiable en a et $\mathrm{d}f(a) = u = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$
2) Soit $f : E \to F$ linéaire. Soit $a \in E, \forall h \in E,$
   $$f(a+h) = f(a) + f(h) = f(a) + f(h) +$$

Théorème : Soit $f : U \subset E \to F$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors f est continue en a.

Proposition : Soient I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to F$. On a équivalence entre :

(i) f est différentiable en a,
(ii) f est dérivable en a.

Dans ce cas, on a alors

$$\mathrm{d}f(a) : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & F \\ h & \mapsto & hf'(a) \end{array} \quad \text{et } f'(a) = \mathrm{d}f(a)(1)$$