Propriété : Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$ n'est pas abélien si $n \geq 3$

Démonstration : supposons $n \geq 3$. Posons

$\theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 3 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$ et $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 3 & 2 & 1 & 4 & \dots & n \end{pmatrix}$

Alors on a $(\theta \circ \tau)(1) = \theta(3) = 3$

et $(\tau \circ \theta)(1) = \tau(2) = 2$

Donc $\theta \circ \tau \neq \tau \circ \theta$

Donc $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ n'est pas abélien

Propriété : La signature d'une transposition est -1

Démonstration : Soit $\tau = (i\ j) \in \mathfrak{S}_n$ une transposition, $i < j$

Alors $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i-1 & i & i+1 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & i-1 & j & i+1 & \dots & j-1 & i & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow I(\tau) = 0 + 0 + \cdots + \mathrm{Card}\{k \mid i+1 \leq k \leq j\} + \mathrm{Card}\{k \mid i+1 \leq k \leq j-1\} + 0 + 0 + \cdots + 0$

$= (j - (i+1) + 1) + (j - 1 - (i+1) + 1)$

$= 2(j - i) - 1$

Or puisque $j > i$, $2(j-1) - 1$ est un entier impair

Donc $\varepsilon(i) = (-1)^{2(j-i)-1} = -1$

Propriété : Le déterminant d'une matrice de taille 2 est $\det(A) = ad - bc$

Démonstration : Dans $\mathfrak{S}_2$, il n'existe que 2 permutations : $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $I(\sigma_1) = 0$ et $I(\sigma_2) = 1$, ce qui implique $\varepsilon(\sigma_1) = 1$ et $\varepsilon(\sigma_2) = -1$

Donc $\forall A \in M_2(\mathbb{K})$,

On a $\det(A) = \varepsilon(\sigma_1) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_1(i),i} + \varepsilon(\sigma_2) \prod_{i=1}^{2} a_{\sigma_2(i),i}$

$= a_{1,1} \times a_{2,2} + (-1) \times a_{2,1} \times a_{1,2}$

$= ad - bc$

Propriété : Soit $T = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure, alors $\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$

Démonstration :

On a $\det(T) = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_\mathrm{n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}$ $(\star)$

$\hookrightarrow$ $Soit\ \sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}$, si $\exists k \in [\![1,n]\!]$ tel que $\sigma(k) > k$ alors $a_{\sigma(k),k} = 0$

Et dans ce cas-là, $\prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} = a_{\sigma(k),k} \times \prod_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} a_{\sigma(i),i} = 0$

Donc dans $(\star)$, il reste les termes provenant de $\sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}$ tels que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma(k) \leq k$

Pour une telle σ, on a $\sigma(1) \in [\![1,n]\!], \sigma(1) \leq 1 \Rightarrow \sigma(1) = 1$

Puis $\sigma(2) \leq 2\ et\ \sigma(2) \neq 1 \Rightarrow \sigma(2) = 2$ … … … … $\Rightarrow \sigma = Id$

Donc en remplaçant dans $(\star)$:

$$\det(T) = \underbrace{\varepsilon(Id)}_{=1,} \left(a_{Id(1),1}, a_{Id(2),2}, \dots a_{Id(n),n}\right)$$

$$= a_{1,1}a_{2,2} \dots a_{n,n}$$

Propriété : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant 2 colonnes égales, alors $\det(A) = 0$

Démonstration : Notons $C_1, C_2, \dots, C_n$ les colonnes de A, on suppose qu'il existe $i, j \in [\![1,n]\!], i \neq j$ tels que $C_i = C_j$. Notons B la matrice obtenue en échangeant C_i et C_j alors $B = A$

Et $\det(A) = \det(B) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$

Corollaire : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$

(i) A inversible $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

(ii) Si A inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Démonstration :

« $\Rightarrow$ » : Si A est inversible, il existe $A^{-1} \in M_n(\mathbb{K})$ tel que $A \cdot A^{-1} = Id$

$$\Rightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det Id$$

$$\Rightarrow \det(A)\det(A^{-1}) = 1$$

Alors $\det(A) \neq 0$ et $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

« $\Leftarrow$ » : Supposons A non inversible. Alors les colonnes de A sont liées, donc $\det(A) = 0$

Lemme : Soient B et B' deux bases de E

Alors $Mat_B(u)$ et $Mat_{B'}(u)$ ont le même déterminant.

Démonstration :

Notons $A = Mat_B(u)$ et $A' = Mat_{B'}(u)$. Par la formule du changement de base :

$$A' = P^{-1}AP \text{ où } P = Pass_{B\to B'}$$

D'où $\det(A') = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$

$$= \frac{1}{\det(P)}\det(A)\det(P)$$

$$= \det(A)$$