Révisions : DS3

Exercice : Arithmétique

Montrer que $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}.$$

En déduire que $\forall n \in N^*, 485 \mid 2^{9n} - 3^{3n}$.

Exercice : Arithmétique

On rappelle que $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$. Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\phi : \mathbb{U}_a \times \mathbb{U}_b \to \mathbb{U}_{ab}$

$(z_1, z_2) \mapsto z_1 z_2$.

1) Montrer que ϕ est bien définie, c'est-à-dire que si $z_1 \in \mathbb{U}_a$ et $z_2 \in \mathbb{U}_b$, alors $z_1 z_2 \in \mathbb{U}_{ab}$.
2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Justifier qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$, tels que :
$$\frac{1}{ab} = \frac{u}{a} + \frac{v}{b}.$$
3) En déduire que $e^{\frac{2i\pi}{ab}} \in Im(\phi)$, c'est-à-dire qu'il existe $(z_1, z_2) \in \mathbb{U}_a \times \mathbb{U}_b$, tel que $\phi(z_1, z_2) = e^{\frac{2i\pi}{ab}}$.

Exercice : Complexes

Soit $\omega = a + ib, (a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$. On pose $z = \frac{\omega - i}{\omega + i}$.

1) Montrer que
$$Re(z) = \frac{|\omega|^2 - i}{|\omega|^2 + 1 + 2b} \quad \& \quad Im(z) = \frac{-2a}{|\omega|^2 + 1 + 2b}.$$
2) Montrer que $(|\omega|^2 - 1)^2 + (2a)^2 < (|\omega|^2 + 1)^2$.
3) En déduire que $|z| < 1$.

Exercice : Complexes

On admet que :

$$\sum_{k=0}^{n} e^{ik} = e^{\frac{in}{2}} \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Calculer

$$\sum_{k=0}^{n} \sin(k) \quad \& \quad \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \sin(k+j)$$

(Bonus) : Démontrer la formule donnée en indication

Exercice : Suites

1) Encadrer la partie entière d'un nombre x.
2) On pose $u_n = \frac{E(x) + E(2x) + \cdots + E(nx)}{n^2}$. Encadrer u_n.
3) Montrer que $(u_n)_n$ converge, déterminer sa limite.
4) En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. (Indication : on pourra utiliser le fait que si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n \in]a, b[\cap \mathbb{Q}$, alors $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.