Endomorphismes autoadjoints – Démonstrations

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E. Notons $A = \mathrm{Mat}_B(u)$
Alors $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^tA$

Démonstration : ⍟

Notons $B = \left(b_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \mathrm{Mat}_B(u^*)$

Soit $j \in [\![1, n]\!]$, la colonne j de B, $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$, correspond aux vecteur colonne des coordonnées de $u^*\left(e_{ij}\right)$ dans la base B.

Or puisque B est une base orthonormée de E, $\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, x \rangle e_k$ Ainsi pour $i \in [\![1, n]\!]$, b_{ij} correspond à la cordonnée du vecteur $u^*\left(e_j\right)$ selon le vecteur e_i, càd

$$b_{ij} = \left\langle e_i, u^*\left(e_j\right)\right\rangle = \left\langle u(e_i), e_j\right\rangle = \left\langle e_j, u(e_i)\right\rangle$$

Donc b_{ij} est la coordonnée du vecteur $u\left(e_{ij}\right)$ selon le vecteur e_j

Donc $b_{ij} = a_{ji}$, où $A = \mathrm{Mat}_B(u) = \left(a_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$

Donc $B = {}^tA$.

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\ker(u^*) = \left(Im(u)\right)^{\perp} \text{ et } Im(u^*) = (\ker(u))^*$$

Démonstration : ⍟

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in Im(u)^{\perp} &\Leftrightarrow \forall z \in Im(u), \langle x, z \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle x, u(y) \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall y \in E, \langle u^*(x), y \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow u^*(x) \in E^{\perp} \\ &\Leftrightarrow u^*(x) = 0_E \\ &\Leftrightarrow x \in \ker(u^*) \end{aligned}$$

Donc $\ker(u^*) = \left(Im(u)\right)^{\perp}$

En appliquant ceci à $v = u^* \in \mathcal{L}(E)$, on a $\ker(v^*) = \left(Im(u)\right)^{\perp}$

ie $\ker(u) = \left(Im(u^*)\right)^{\perp}$

Donc $(\ker u)^{\perp} = \left(\left(Im(u^*)\right)^{\perp}\right)^{\perp} = Im(u^*)$ car $\dim E < +\infty$

Propriété : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, soit F un sev de E stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Démonstration : ⍟

Soit $x \in F^{\perp}$, montrons que $u^*(x) \in F^{\perp}$

Soit $y \in F, \langle u^*(x), y \rangle = \left\langle \underbrace{x}_{\in F^\perp}, \underbrace{u(y)}_{\in F} \right\rangle = 0$

Ainsi $u^*(x) \in F^\perp$, d'où $u^*(F^\perp) \subset F^\perp$

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, les sous-espaces propres de u sont 2 à 2 orthogonaux.

Démonstration : ⍟

Soient $\lambda, \mu \in Sp(u)$ avec $\lambda \neq \mu$.

Montrons que $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont orthogonaux.

Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$

Alors $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$

Ainsi $\langle u(x), y \rangle = \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

Mais comme $u = u^*$,

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = \mu \langle x, y \rangle$$

D'où $\underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle x, y \rangle = 0$

Donc $\langle x, y \rangle = 0$

Ainsi $E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$