<u>Théorèmes – Réductions géométriques</u>

Sommes directe d'une famille de sev

Soit $m \in \mathbb{N}^*$

<u>Définition :</u> (Somme de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On appelle somme des sev $F_1, F_2, \dots, F_m$ l'ensemble :

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_m &= \{f_1 + \cdots + f_m \mid \forall i \in [\![1; n]\!], f_i \in F_i\} \\ &= \{e \in E \mid \exists (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, e = f_1 + \cdots + f_m\} \end{aligned}$$

<u>Propriété :</u>

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E, alors $F_1 + \cdots + F_m$ est un sev de E.

<u>Définition :</u> (Somme directe de sev)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On dit que la somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe si :

$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_m, \exists!\, (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, x = f_1 + \cdots + f_m$$

Autrement dit, il y a unicité de la décomposition.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_m$ ou $\bigoplus\limits_{i=1}^{m} F_i$

<u>Propriété :</u> (Unique décomposition en somme directe)

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Alors

Les sev $F_1, \dots, F_m$ sont en somme directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\forall (f_1, \dots, f_m) \in F_1 \times \dots \times F_m, f_1 + \cdots + f_m = 0_E \Rightarrow \forall i \in [\![1; n]\!], f_i = 0_E$$

<u>Propriété</u> : Intersection des sev en somme directe

Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. Si $F_1, \dots, F_m$ est en somme directe, alors :

$$\forall i, j \in [\![1; n]\!], i \neq j, F_i \cap F_j = \{0_E\}$$

<u>Propriété :</u> (Dimension des sev en somme directe)

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension <u>finie</u>. Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

La somme $F_1 + \cdots + F_m$ est directe

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(F_1 + \cdots + F_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i)$$

<u>Théorème :</u> (Bases de sev en somme directe)

Soient E un $\mathbb{K}$-ev de dimension <u>finie</u> et $F_1, \dots, F_m$ des sev de E. On a :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$$

$$\Leftrightarrow$$

Pour toutes bases respectives $B_1, \dots, B_m$ de $F_1, \dots, F_m$,

$B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ forme une base de E

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} E = F_1 + \cdots + F_m \\ \dim E = \sum_{i=1}^{m} \dim(F_i) \end{cases}$$

<u>Définition :</u> (Base adaptée)

Soit $F_1, \dots, F_m$ des sev de E tq $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$

On appelle <u>base adaptée</u> à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ toute base B de E obtenue par concaténation de bases respectives $B_1, \dots, B_m$ de $F_1, \dots, F_m$, ie toute base de la forme $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ où $\forall i \in [\![1, n]\!], B_i$ est une base de F_i.

Sous-espaces stables

<u>Définition :</u> (Sous-espace stable)

Un sev F de E est dit stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ si $u(F) \subset F$

<u>Propriété :</u> (Inter & Union stables)

Soient F et G deux sev de E stables par $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors $F + G$ et $F \cap G$ sont aussi stables par u.

<u>Propriété :</u> (Stabilité des images et noyaux)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$, tels que $u \circ v = v \circ u$. Alors $\ker u$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

<u>Définition :</u> (Endomorphismes induite)

Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E <u>stable</u> par u. On définit l'endomorphisme induit par u sur F par :

$$u_F : F \to F$$
$$x \mapsto u(x)$$

<u>Propriété :</u> (Combinaisons linéaires d'endomorphismes stables)

Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u ET v. Alors $\forall \lambda \in \mathbb{K}, F$ est stable par $\lambda u, u + v, u \circ v$

De plus, $(\lambda u)_F = \lambda u_F, (u + v)_F = u_F + v_F, (u \circ v)_F = u_F \circ v_F$

<u>Propriété :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, F un sev de E stable de u. Alors $\ker u_F = \ker u \cap F$, $\mathrm{Im}\, u_f \subset \mathrm{Im}\, u \cap F$

<u>Corollaire :</u> Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sev de E stable par u. Si u est injectif, u_F l'est aussi.

Version matricielle en dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème : Soit F un sev de E de dimension $p \in \mathbb{N}^*$, et $F = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F. On complète F en une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

On a équivalence entre :

(i) F est stable par u

(ii) La matrice de u dans B est de la forme $Mat_B(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}$

Si c'est le cas, $A = Mat_F(u_F)$

Propriété : Soient $F_1, \dots, F_m$ des sev de E tq $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_m$. Soit $B = B_1 \cup \dots \cup B_m$ une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre :

(i) $\forall i \in [\![1, n]\!], F_i$ est stable par u

(ii) La matrice de u dans B est de la forme :

$$\begin{pmatrix} A_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A_n \end{pmatrix} \text{ où } \forall i \in [\![1, n]\!], A_i \in M_{d_i}(\mathbb{K}), d_i = \dim(F_i)$$

De plus, si c'est le cas, $\forall i \in [\![1, n]\!], A_i = Mat_{B_i}\left(u_{F_i}\right)$

Éléments propres

On considère E un $\mathbb{K}$-ev non réduit à $\{0_E\}$, et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définition : $x \in E$ est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Dans ce cas, il y a unicité de λ

Le scalaire λ est appelé valeur propre à laquelle est associée le vecteur propre x.

Définition : On appelle valeur propre tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\exists x \in E, x \neq 0_E, u(x) = \lambda x$

Définition : L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u, noté $Sp(u)$.

Sous-espace propre

Définition :

Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda Id) = \{x \in E | u(x) = \lambda x\}$ l'espace formé des vecteurs $x \in E$ solutions de $u(x) = \lambda x$.

Propriété :

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a équivalence entre :

(i) $\lambda \in Sp(u)$

(ii) $E_\lambda(u) \neq 0$

(iii) $u - \lambda Id_E$

Définition : (Sous-espace propre)

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si λ est une valeur propre de u, le sev $E_\lambda(u)$ est appelé sous-espace propre de u associé à λ.

Stabilité et somme directe des sous-espaces propres

Propriété : Les sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont stables par u et $\forall \lambda \in Sp(u)$,

$$u_{E_\lambda(u)} = \lambda Id_{E_\lambda(u)}$$

Propriété : Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, avec $v \circ u = u \circ v$, alors les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Théorème : Des sous-espaces propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes de u sont en somme directe, c'est-à-dire si $n \in \mathbb{N}^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(u)$, avec $\forall i, j \in [\![1, n]\!], i \neq j, \lambda_i \neq \lambda_j$, alors $E_{\lambda_1}(u), \dots, E_{\lambda_n}(u)$ est en somme directe.

Corollaire : Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres de u 2 à 2 distinctes est libre.

Corollaire : Si E est de dimension finie, $\dim E = n$, alors $u \in \mathcal{L}(E)$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Éléments propres en dimension finie

Dans cette partie E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$.

Éléments propres d'une matrice carrée

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de A si $\exists x \in M_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AX = \lambda X$

On dit que X est un vecteur propre de A, associé à la valeur propre λ. L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A noté $Sp(A)$.

Définition : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ le sev formé des éléments

$$X \in M_{n,1}(\mathbb{K}), AX = \lambda X$$