Endomorphismes orthogonaux – Démonstrations

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et B une base orthonormée de E. On a équivalence entre :

(i) u est un endomorphisme orthogonal de E.
(ii) $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u^*)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^t\mathrm{Mat}_B(u)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(Le 3e point vient du fait que B est orthonormée, donc $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_B(u)$)

Proposition : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \in \{1, -1\}$

Démonstration : ⍟

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors comme E est euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Alors d'une part : $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

Et d'autre part, $u \in O(E)$ donc u conserve la norme, ainsi $\|u(x)\| = \|x\|$

D'où $\|x\| = |\lambda|\|x\|$, ie $|\lambda| = 1$

Donc $\lambda = \pm 1$

Lemme : Soit $u \in O(E)$. Soit F un sev de E stable par u, alors $F^\perp$ est aussi stable par u. De plus, l'endomorphisme u_F (resp. $u_{F^\perp}$) est un endomorphisme orthogonal de F (resp. $F^\perp$) .

Démonstration : ⍟

Comme $u(F) \subset F$ et $u \in O(E)$, u est bijectif donc u conserve les dimensions ainsi

$$\dim\big(u(F)\big) = \dim F$$

(cela se prouve facilement en prenant une base $(e_1, \dots, e_r)$ de F, et en montrant que $\big(u(e_1), \dots, u(e_r)\big)$ est libre).

On en déduit donc que $u(F) = F$.

→ Soit $x \in F^\perp$, on veut montrer que $u(x) \in F^\perp$. Soit $y \in F$, alors

$\langle u(x), y\rangle = \langle u(x), u(z)\rangle$ car $y \in F = u(F)$, donc $\exists z \in F, u(z) = y$

$= \langle x, z\rangle$ car $u \in O(E)$ donc u conserve le produit scalaire.

$= 0$ car $x \in F^\perp$ et $z \in F$.

Ainsi $u(x) \in F^\perp$. D'où $u(F^\perp) \subset F^\perp$.

→ Montrons que $u_F : F \to F, x \mapsto u(x)$ appartient à $O(F)$

Soit $x \in F$, alors $\|u_F(x)\| = \|u(x)\| \underbrace{=}_{u \in O(E)} \|x\|$

Donc $u \in O(F)$.

(On fait pareil pour l'autre)