Feuille 1 : Injectivité, Surjectivité, Bijectivité – Parité des fonctions

Exercice 1

Soit $f\,:\mathbb{R}\backslash\{2\}\;\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{4x-1}{x-2}$

f est-elle injective ? Surjective ? Bijective ?

Exercice 2

Soient $a, b, c\in\mathbb{R}$

1. Montrer que $ab\leq\frac{a^2+b^2}{2}$
2. Montrer que $ab+ac+bc\leq a^2+b^2+c^2$
3. Montrer que $3ab+3ac+3bc\leq(a+b+c)^2$

Exercice 3

Trouver tous les $x\in\mathbb{R}$ tels que $\sqrt{2-x}=x$

Exercice 4

Soit $f\,:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction paire. On suppose que la restriction de f à $\mathbb{R}_-$ est croissante. Que dire alors de la restriction à $\mathbb{R}_+$?

Exercice 5

1. f est paire. Peut-elle être bijective ?
2. Étudier la parité des fonctions suivantes :

   a) $f_1(x)=e^x+e^{-x}$ b) $f_2(x)=\frac{2}{x}+4x^3$ c) $f_3(x)=(x+1)(x-1)$

Exercice 6

Soit f une fonction définie par $f(x)=\frac{1}{1+x}$

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est dérivable sur son ensemble de définition et calculer sa dérivée.
3. On note maintenant $g:]-1\,;\,+\infty[\to\mathbb{R}_+, x\mapsto f(x)$. Montrer que g est bijective.
4. Montrer que la fonction $h\,:\mathbb{R}_+\to]-1\,;\,+\infty[\,, x\mapsto\frac{1-x}{x}$ est la fonction réciproque de g (on pourra s'intéresser à $f\circ h\ et\ h\circ f$)

Exercice 7

Donner le domaine et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x)=\tan x$ $f_2(x)=\ln(8x^2)$ $f_3(x)=\dfrac{1}{x^2-8}$ $f_4(x)=\arctan(x)$

Méthode : Preuves d'injectivité, surjectivité

Soit $f:E\to F$

Pour montrer que f est <u>injective</u>, on commence toujours par : Soit $(x,y)\in E, f(x)=f(y)\Leftrightarrow\cdots$

Pour montrer que f n'est <u>pas injective</u>, on trouve un couple $(x,y)\in E, x\neq y, f(x)=f(y)$

Pour montrer que f est <u>surjective</u>, on pose $f(x)=y$ et on trouve (au brouillon) une expression de y en fonction de x. Ensuite au propre, on écrit : Soient $x\in E, y\in F, f(x)=y$, alors on a $y=\cdots\in F$

Pour montrer que f n'est <u>pas surjective</u>, il suffit de trouver une image dans F qui n'a pas d'antécédant