Réductions algébriques – Démonstrations

Théorème : ⍟

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les valeurs propres de u figurent parmi les racines (dans $\mathbb{K}$) de tout polynôme annulateur de u, c'est-à-dire :

Si $P \in \mathbb{K}[X]$ est annulateur de u, $Sp(u) \subset \{\lambda \in \mathbb{K} \mid P(\lambda) = 0\}$

Démonstration :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de u (ie $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$)

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = \lambda^k x$:
Initialisation : $k = 0$
On a $u^0(x) = Id_{\mathcal{L}(E)} = \lambda^0 x$.
Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$, tel que $u^k(x) = \lambda^k x$.
Alors $u^{k+1}(x) = u\left(u^k(x)\right) = u\left(\lambda^k(x)\right) = \lambda^k u(x) = \lambda^k \lambda x = \lambda^{k+1} x$.

Notons $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ $(a_0, \dots, a_d \in \mathbb{K})$

Alors $P(u)(x) = 0_{\mathcal{L}(E)}(x) = 0$

Et $P(u)(x) = \left(\sum_{k=0}^{d} a_k u^k\right)(x)$

$= \sum_{k=0}^{d} a_k u^k(x)$

$= \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \lambda^k\right)x$

$= P(\lambda)x$

Ainsi $P(\lambda)x = 0$ et $x \neq 0_E$

Donc $P(\lambda) = 0$

□

Propriété : ⍟

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, elles ont les mêmes polynômes annulateurs.

Démonstration :

Supposons que A et B sont semblables, alors $\exists Q \in GL_n(\mathbb{K}), B = Q^{-1}AQ$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$

On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$:
Initialisation : $k = 0$

$$B^0 = I_n = Q^{-1}Q = Q^{-1}A^0Q$$

Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$
Alors $B^{k+1} = B \times B^k = (Q^{-1}AQ)\left(Q^{-1}A^kQ\right) = Q^{-1}AA^kQ = Q^{-1}A^{k+1}Q$

Donc $P(B) = \sum_{k=0}^{d} a_k Q^{-1}A^kQ$

$= Q^{-1}\left(\sum_{k=0}^{d} a_k A^k\right)Q$

$= Q^{-1}P(A)Q$

Donc $P(B) = 0_{M_n(\mathbb{K})} \Leftrightarrow P(A) = 0_{M_n(\mathbb{K})}$

□