Chapitre 5 – Intégrales à paramètres

Dans ce chapitre, on considèrera I un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} F : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème :

Soit $f : I \times [a,b] \to \mathbb{C}$. On suppose que

(i) f est continue sur $[a,b]$

(ii) f admet des dérivées partielles par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, et que $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $I \times [a,b]$.

alors la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x,t)dt$ est définie et de classe C^1 sur I et :

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et $u, v : I \to J$ continues. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est définie et continue sur I.

Théorème : Soient $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue, admettant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ continue sur $I \times J$ et $u, v : I \to J$ deux fonctions de classe C^1. Alors la fonction

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe C^1 sur I, et

$$\forall x \in I, \varphi'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t + v'(x)f\big(x,v(x)\big) - u'(x)f\big(x,u(x)\big)$$

2. Intégrales à paramètres généralisées

Théorème : (Continuité par domination)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) f est continue sur $I \times J$

(ii) Il existe $\varphi : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Idée : ⍟

Soit $a \in I$. Montrons que F est continue en a, par caractérisation séquentielle, cela équivaut à montrer que $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ tq $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$, $F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(a)$

Soit $(x_n)_n$ une suite d'éléments de I qui converge vers a. Alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$F(x_n) = \int_J f(x_n,t)dt = \int_J u_n(t)dt$$

Où $u_n : J \to \mathbb{C}, t \mapsto f(x_n,t)$

(i) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n$ est continue (donc c.p.m) sur J puisque f est continue sur J

(ii) Soit $t \in J$, $u_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(a,t)$ par continuité de f
Donc la suite de fonctions $(u_n)_n$ CVS sur J vers $u : J \to \mathbb{C}, t \mapsto f(a,t)$, qui est continue donc c.p.m sur J puisque f est continue sur $I \times J$.

(iii) $\exists \varphi : J \to \mathbb{R}^+$ c.p.m et intégrable sur J tq
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in J, |u_n(t)| = |f(x_n,t)| \leq \varphi(t)$$
Ainsi par le théorème de convergence dominée,
$$F(x_n) = \int_J u_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_J \lim_{n\to+\infty} u_n(t)\, dt = \int_J f(a,t)dt = F(a)$$
Ainsi F est continue en a, $\forall a \in I$, donc F est continue sur I.

Corollaire :

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) f est continue sur $I \times J$

(ii) Pour tout segment $[a,b] \subset I$, il existe $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}_+$ continue par morceaux et intégrable sur J vérifiant

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \qquad |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Exemple : Continuité de

$$F : x \in]0,+\infty[\mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt$$

On pose $f :]0,+\infty[\times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, (x,t) \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$

- f est continue sur $]0,+\infty[\times \mathbb{R}$
- Soit un segment $[a,b] \subset]0,+\infty[$
  $\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}$,
  $$|f(x,t)| = \frac{e^{-xt}}{1+t} \leq \frac{e^{-at}}{1+t} \coloneqq \varphi_{a,b}(t)$$
  Avec $\varphi_{a,b}$ indépendant de x.

Remarque : Comme la continuité est une propriété locale, on peut restreindre le « domaine du x » mais **on ne peut pas modifier le domaine J d'intégration**.

R2 :
Pour étudier la limite de $F(x) = \int_J f(x,t)dt$ lorsque $x \to a$ avec F discontinue en a ou a est une extrémité de I (ou $a = \pm\infty$).

- Par majoration directe : on essaie d'intuiter la limite puis on raisonne grâce à des changements de variables et des IPP
- En utilisant la caractérisation séquentielle de la limite :
  Soit $l \in \mathbb{C}$, on a
  $$F(x) \to l \Leftrightarrow \forall (x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}, x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \Longrightarrow F(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$$
  On se donne une suite quelconque $(x_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$ qui tend vers a, alors
  $$\forall n \in \mathbb{N}, F(x_n) = \int_J f(x_n,t)dt = \int_J u_n(t)dt \ \text{ où } u_n : t \mapsto f(x_n,t)$$
  Puis on essaie d'utiliser les théorèmes d'interversion lim/$\int$ sur les suites de fonctions (CVU sur un segment ou théorème de convergence dominée)

3. Dérivabilité

Théorème :
Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) La fonction f est continue sur $I \times J$

(ii) Il existe une fonction $\varphi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que
$$\forall (x,t) \in I \times J, \qquad |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

(iii) La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $I \times J$,

(iv) Il existe une fonction $\psi : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que
$$\forall (x,t) \in I \times J, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\,dt$ est définie et de classe C^1 sur I. De plus,
$$\forall x \in I, F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

Exemple : En étudiant la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)\,dt$, déterminer une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On admettra que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Posons $f : \mathbb{R} \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$
$$(x,t) \mapsto e^{-t^2}\cos(x,t)$$

De sorte que $F(x) = \int_0^{+\infty} f(x,t)dt$

- $f = \exp \circ p \times \cos \circ q$ où $p : (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty[\mapsto -t^2$ et $q : (x,t) \mapsto xt$ sont polynomiales donc de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ et exp et cos sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, donc f est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \times [0,+\infty[$.

Par conséquent, on a bien les (i) et (iii) du théorème.

(ii) Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$,

$$|f(x,t)| = e^{-t^2}|\cos(x,t)| \leq e^{-t^2} \coloneqq \varphi(t)$$

avec $\varphi : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continue (donc c.p.m) sur $\mathbb{R}^+$

De plus, $t^2 e^{-t^2} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$, donc $e^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, or la fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[A, +\infty[$ car $2 > 1$ (pour tout $A > 0$).

Ainsi φ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$

Donc d'après le théorème de dérivation par domination, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt = \int_0^{+\infty} -te^{-t^2}\sin(xt)\, dt$$

On opère une intégration par parties généralisée en posant $u : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t^2}$ et $v : t \mapsto \sin(x,t)$

On a

$$\begin{aligned} F'(x) &= \left[\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(x,t)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{1}{2}e^{-t^2}\cos(x,t)\, dt \\ &= \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-t^2}\sin(x,t)\right) - 0 - \frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(x,t)\, dt \\ &= -\frac{x}{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(x,t)\, dt \\ &= -\frac{x}{2}\, F(x) \end{aligned}$$

Donc F est solution de l'équation différentielle du premier ordre $y' + \frac{x}{2}y = 0$

Par conséquent, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$F(x) = \lambda e^{-\frac{x^2}{4}}$, or $F(0) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Et d'autre part, $F(0) = \lambda$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\frac{x^2}{4}}$.

<u>Théorème :</u>

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$. On suppose que :

(i) La fonction f est continue sur $I \times J$

(ii) Pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, \qquad |f(x,t)| \leq \varphi_{a,b}(t)$$

(iii) La fonction f admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable, notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, qui est continue sur $I \times J$,

(iv) Pour tout segment $[a, b] \subset I$, il existe une fonction $\psi_{a,b} : J \to \mathbb{R}^+$ continue par morceaux et intégrable sur J telle que

$$\forall (x,t) \in I \times J, \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi_{a,b}(t)$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\, dt$ est définie et de classe C^1 sur I. De plus,

$$\forall x \in I, F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt$$

<u>Exercice :</u> Soit $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$

Montrer que F est solution sur $]0, +\infty[$ de l'équation diff $y''(x) + y(x) = \frac{1}{x}$

puis en déduire la valeur de $F(x)$ pour tout $x > 0$.