Théorème :

Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\int_a^{+\infty} \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda > 1$

Démonstration : Posons

$f : [a; +\infty[\to \mathbb{R}$

$\quad t \mapsto \frac{1}{t^\lambda} \left(= e^{-\lambda \ln t}\right)$

est continue sur $[a\,; +\infty[$

Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite finie de $\int_a^x f(t)\,dt$ quand $x \to +\infty$

- Cas où $\lambda \neq 1$

Soit $x > a$:

$$\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt = \int_a^x t^{-\lambda}\,dt = \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_a^x = \frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda}$$

Or $x^\alpha \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda > 0 \\ 1 \text{ si } \lambda = 0 \\ 0 \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt \xrightarrow[x\to+\infty]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } 1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1 \\ -\frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda} \in \mathbb{R} \text{ si } 1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1 \end{cases}$

- Cas où $\lambda = 1$

Soit $x > a$, $\int_a^x \frac{1}{t} dt = \ln x - \ln a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda > 1$.

Théorème :

Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\int_0^a \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda < 1$

Démonstration : Posons

$f :]0\,; a] \to \mathbb{R}$

$\quad t \mapsto \frac{1}{t^\lambda} \left(= e^{-\lambda \ln t}\right)$

est continue sur $]0\,; a]$

Il suffit donc d'étudier l'existence d'une limite finie de $\int_x^a f(t)\,dt$ quand $x \to 0^+$

- Cas où $\lambda \neq 1$

Soit $0 < x < a$:

$$\int_x^a \frac{1}{t^\lambda} dt = \int_x^a t^{-\lambda}\,dt = \left[\frac{t^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_x^a = \frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda} - \frac{1}{1-\lambda}x^{1-\lambda}$$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt \xrightarrow[x\to 0^+]{} \begin{cases} \frac{1}{1-\lambda}a^{1-\lambda} \text{ si } 1-\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 1 \\ +\infty \text{ si } 1-\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 1 \end{cases}$

- Cas où $\lambda = 1$

Soit $0 < x < a$, $\int_x^a \frac{1}{t} dt = \ln a - \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$

Ainsi $\int_a^x \frac{1}{t^\lambda} dt$ converge ssi $\lambda < 1$.

Théorème (IPP généralisée) :

Soient $u, v : I \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de classe C^1. Si l'intégrale $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$ converge et si la fonction uv admet des limites finies en α^+et β^-, alors $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt$ converge et on a :

$$\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt = [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$$

Démonstration :

Comme u, v sont de classe C^1 sur I, uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

Notons G une primitive de uv', alors $H = uv - G$ est une primitive de $u'v$ (car H est dérivable sur I) et $H' = u'v$.

Comme $\int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$ converge, G admet des limites finies en α^+et β^-, comme uv (par hypothèse), donc H admet aussi des limites finies en α^+et β^-, donc $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt$ converge.

De plus, $\int_\alpha^\beta u'(t)v(t)\,dt = [H]_\alpha^\beta$

$$= [uv]_\alpha^\beta - [G]_\alpha^\beta$$

$$= [uv]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta u(t)v'(t)\,dt$$

Exemples de fonctions intégrables

1) Soit $a > 0, \lambda \in \mathbb{R}$. La fonction de Riemann $t \mapsto \frac{1}{t^\lambda}$ est intégrable sur $[a; +\infty[$ ssi $\lambda > 1$ et intégrable sur $]0; a]$ ssi $\lambda < 1$.
2) La fonction $f : t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En effet, f est continue positive, donc $|f| = f$. Une primitive de f est $F : t \mapsto -e^{-t}$, avec $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ et $F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -1$
   Donc $\int_0^{+\infty} |f(t)|\, dt$ converge (et vaut 1).
3) Toute fonction continue sur un segment est intégrable sur ce segment.

Propriété : Soient J un intervalle de $\mathbb{R}$, a un point adhérent à J, et $f, g : J \to \mathbb{C}$

1. Si $f(x) = \circ\,(\mathrm{g(x)})$, alors $f(x) = \mathcal{O}(\mathrm{g(x)})$
2. Si $f(x) \sim g(x)$, alors $f(x) = \mathcal{O}\big(g(x)\big)$ et $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$

Démonstration :

1. Si $f(x) = \circ\,\big(g(x)\big)$, alors $\exists \varepsilon$ définie sur un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) = g(x)\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
   Alors $\exists W \subset V$ tel que $\forall x \in W, |\varepsilon(x)| \leq 1$
   D'où $\forall x \in W, |f(x)| = |g(x)||\varepsilon(x)|$
   $\leq 1 \times |g(x)|$
   Donc $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.
2. Supposons que $f(x) \sim g(x)$
   Alors $\exists \varepsilon$ définie sur un voisinage V de a tel que $\forall x \in V, f(x) = g(x)(1 + \varepsilon(x))$, avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.
   Alors $\exists W \subset V$ tel que $\forall x \in W, |\varepsilon(x)| \leq 1$
   D'où $\forall x \in W, |f(x)| = |g(x)||1 + \varepsilon(x)|$
   $\leq |g(x)|(1 + |\varepsilon(x)|)$
   $\leq 2|g(x)|$
   Donc $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$.
   Et comme la relation d'équivalence est symétrique, on a bien $g(x) = \mathcal{O}(f(x))$