

Endomorphismes orthogonaux – Démonstrations

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et B une base orthonormée de E . On a équivalence entre :

- (i) u est un endomorphisme orthogonal de E .
- (ii) $\text{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : \star

On a :

$$u \in O(E) \Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E$$

$$\Leftrightarrow \text{Mat}_B(u^*) \text{Mat}_B(u) = I_n$$

$$\Leftrightarrow {}^t\text{Mat}_B(u) \text{Mat}_B(u) = I_n$$

$$\Leftrightarrow \text{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R})$$

(Le 3^e point vient du fait que B est orthonormée, donc $\text{Mat}_B(u^*) = {}^t\text{Mat}_B(u)$)