Feuille 1 – Corrigé

Exercice 1 : On peut écrire explicitement A :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \cdots & n-2 \\ n-2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & n-2 \\ n-2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$

$$= (n-2)A + (n-1)I_n$$

Donc on a $A\frac{A-n+2}{n-1} = I_n$, et $\frac{A-n+2}{n-1}A = I_n$. Donc A est inversible, d'inverse $\frac{A-n+2}{n-1}$.

Exercice 2 :

Un calcul rapide de J^2 donne $J^2 = nJ$. Par récurrence sur $m \geq 1$, on prouve $J^m = n^{m-1}J$:

Initialisation : $m = 1$: $J = J$, c'est bon

Hérédité : Soit $m \geq 1$ tel que $J^m = n^{m-1}J$.

Alors $J^{m+1} = n^{m-1}J \times J = n^{m-1}nJ = n^{(m+1)-1}J$

Ainsi $J^m = \begin{cases} I_n \text{ si } m = 0 \\ n^{m-1}J \text{ sinon} \end{cases}$

Exercice 3 :

On a $B^2 + B = 0 \Leftrightarrow B(B + I_n) = 0$. Raisonnons par analyse-synthèse :

Supposons B inversible. Alors en multipliant par B^{-1} de chaque côté de l'équation, on a $B + I_n = 0$.

Ainsi $-I_n$ est la seule solution de l'équation.

Réciproquement, vérifions que $-I_n$ respecte bien la condition imposée sur B.

$$(-I_n)^2 - I_n = I_n - I_n = 0$$

Ainsi $-I_n$ est la seule solution.

Exercice 4 :

1) On obtient la réponse par simple calcul direct : $AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n + 8v_n \\ 2u_n + v_n \end{pmatrix} = X_{n+1}$
   Ainsi cette suite est une suite géometrique de raison A, donc
   $$\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^n X_0$$
   (si le résultat n'est pas évident pour vous, on peut le prouver grâce à une récurrence simple)
2)
   a) Vous pouvez utiliser le pivot de Gauss, même si la formule la plus rapide ici est :
   $$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$
   (valable uniquement si $ad - bc \neq 0$)

Ainsi on obtient $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ainsi on a $P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 20 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Cette matrice est diagonale, il est donc très facile d'en extraire les puissances.

b) On peut prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$

<u>Initialisation :</u> $n = 0$

On a $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = PD^nP^{-1}$

Alors $A^{n+1} = A^nA = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$

Ainsi la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On a donc, d'après la question précédente :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}^n\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 5^n & -2 \times (-3)^n \\ 5^n & (-3)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n & 4 \times 5^n - 4 \times (-3)^n \\ 5^n - (-3)^n & 2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = A^nX_0 = \begin{pmatrix} (2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n)u_0 + (4 \times 5^n - 4 \times (-3)^n)v_0 \\ (5^n - (-3)^n)u_0 + (2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n)v_0 \end{pmatrix}$

Et on en déduit les expressions de (u_n) et (v_n) :

$$\begin{cases} u_n = 2(2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n) + (4 \times 5^n - 4 \times (-3)^n) \\ v_n = 2(5^n - (-3)^n) + (2 \times 5^n + 2 \times (-3)^n) \end{cases}$$

<u>Exercice 5</u> :

Soit $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$. Notons $B = {}^tA$ et $C = A^tA = (c_{ij})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{R})$.

On cherche donc à trouver une expression de $Tr(C)$ en fonction des coefficients de A.

D'après la formule du produit matriciel,

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!], c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Donc sur les diagonales, on obtient

$$\forall i \in [\![1,n]\!], c_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ik} \text{ par définition de la transposée}$$

Ainsi, puisque la trace est la somme des coefficients diagonaux, on a :

$$Tr(C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

Donc $Tr(A^tA) = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall i, j \in [\![1, n]\!], a_{ij} = 0$.