Théorèmes Algèbre

Groupe :

Un groupe est un couple $(G,*)$ où G et un ensemble $\neq \emptyset$ muni d'une loi de composition interne

$*: G \times G \to G$ qui est :

- Associative : $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$
- Existence d'un neutre noté e : $\exists e \in G, \forall g \in G, g * e = e * g = g$
- Existence d'un inverse h : $\forall g \in G, \exists h \in G, g * h = h * g = e$, on note $h = g^{-1}$

Un groupe $(G,*)$ est dit abélien si $\forall a, b \in G, a * b = b * a$

Groupe symétrique :

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $\mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ l'ensemble des bijections de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même :

$$\mathfrak{S}_{\mathrm{n}} = \{\sigma: [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!] | \sigma \; bijective\}$$

Un élément de $\mathfrak{S}_n$ est appelé permutation.

Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$, on note $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Propriété : $\mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ est de cardinal $n!$

Définition du cycle :

Un cycle est une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ telle que $\exists i_1, \dots, i_p \in [\![1, n]\!]$ 2 à 2 distincts (avec $2 \leq p \leq n$) tq $\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_{n-1}) = i_n, \sigma(i_n) = i_1$ et $\forall i \in [\![1, n]\!] \backslash \{i_1; \dots; i_p\}, \sigma(i) = i$

On note aussi $\sigma = (i_1, \dots, i_p)$. L'entier p est appelé longueur du cycle σ.

Commutation des permutations à supports disjoints :

Deux permutations de $\mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ à supports disjoints commutent entre elles.

Toute permutation se décompose en un produit de cycles à supports disjoints.

Toute permutation se décompose en un produit de transpositions.

Signature :

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ et (i, j) un couple tel que $1 \leq i \leq j \leq n$. On dit que σ réalise une inversion du couple $(i\ j)$ si $\sigma(i) > \sigma(j)$. On note $I(\sigma)$ le nombre de tels couples sur lesquels σ réalise une inversion, aussi appelé nombre d'inversions de σ.

On nomme signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{\mathrm{n}}$ le réel

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \operatorname{sgn}(\sigma(i) - \sigma(j))$$

Signature d'une transposition :

La signature d'une transposition est toujours -1

Signature de composée :

Soient $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}$ alors $\varepsilon(\sigma \circ \tau) = \varepsilon(\sigma) \times \varepsilon(\tau)$

Ainsi $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$

Signature d'un cycle :

Soit c un cycle de longueur p, alors $\varepsilon(c) = (-1)^{p-1}$

Déterminant :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On note $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et on note déterminant de A le scalaire :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_\mathrm{n}} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i} \quad \in \mathbb{K}$$

Encore noté $\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$

Déterminant des matrices triangulaires supérieures :

Soit $T = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure alors

$$\det(T) = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Déterminant de la transposée :

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = \det({}^tA)$

Multilinéarité du déterminant :

Le déterminant est une forme multilinéaire, *ie* il est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes

De plus, c'est une forme multilinéaire alternée, *ie* échanger deux colonnes de la matrice résultera en l'opposé du déterminant.

Matrice avec deux colonnes égales :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ ayant deux colonnes égales, alors $\det(A) = 0$

Colonnes liées :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si les colonnes de A sont liées, alors $\det(A) = 0$

Produit des déterminants :

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K}), \det(A \times B) = \det(A)\det(B)$

Inversibilité et déterminants :

i. A inversible $\Longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

ii. Si A inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Opérations sur les déterminants :

(Les énoncés utilisés pour les colonnes fonctionnent aussi pour les lignes)

- L'opération $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifie pas le déterminant
- L'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie le déterminant par -1
- L'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant par λ.

Développement de A par rapport à la colonne C_j

On note Δ_{ij} le mineur de A obtenu en supprimant L_i et C_j

Et A_{ij} le cofacteur de A, $A_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}$

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Développement de A par rapport à la ligne L_i

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij}\Delta_{ij}$$

Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs :

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*, A \in M_n(\mathbb{K}), B \in M_{n,p}(\mathbb{K}), C \in M_p(\mathbb{K})$, alors

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ 0_{M_{p,n}(\mathbb{K})} & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Comatrice :

La comatrice de A, notée $\mathrm{Com}(A)$, est la matrice des cofacteurs de A :

$$\mathrm{Com}(A) = \left(A_{ij}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$$

Inverse d'une matrice :

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$$