Calcul différentiel – Démonstrations

Théorème 6 : Si $f : U \subset E \to F$ est différentiable alors les dérivées partielles de f dans la base $B = (e_1, \dots, e_n)$ existent et pour tout $a \in U$, on a :

$$\partial_i f(a) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$$

De plus, pour tout $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i \in E$ (avec $(h_1, \dots h_n) \in \mathbb{R}^n$),

$$\mathrm{d}f(a)(h) = D_h f(a) = \sum_{k=1}^{n} h_i \partial_i f(a)$$

Démonstration : ⍟

Soit $u \in U$. Comme f est différentiable en a, par le théorème précédent, f admet des dérivées directionnelles selon tout vecteur, on a donc en particulier selon le vecteur e_i pour $i \in [\![1, n]\!]$. Ainsi $\partial_i f(u)$ existe et par définition, $\partial_i f(u) = D_i f(u) = \mathrm{d}f(a)(e_i)$ par le théorème précédent.

De plus, soit $h \in E, \exists! (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $h = \sum_{i=1}^{n} h_i e_i$.

Par le théorème précédent, on a $\mathrm{d}f_a(h) = D_h f(u)$ et $\mathrm{d}f(u)(h) = \mathrm{d}f(u)(\sum_{i=1}^{n} h_i e_i)$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \mathrm{d}f(u)(e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \partial_i f(u)$$