Endomorphismes orthogonaux – Démonstrations

Propriété : Soient $u \in \mathcal{L}(E)$, et B une base orthonormée de E. On a équivalence entre :

(i) u est un endomorphisme orthogonal de E.
(ii) $\mathrm{Mat}_B(u)$ est une matrice orthogonale.

Démonstration : ⍟

On a :

$$\begin{aligned} u \in O(E) &\Leftrightarrow u^* \circ u = Id_E \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u^*)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow {}^t\mathrm{Mat}_B(u)\,\mathrm{Mat}_B(u) = I_n \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Mat}_B(u) \in O_n(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

(Le 3e point vient du fait que B est orthonormée, donc $\mathrm{Mat}_B(u^*) = {}^t\mathrm{Mat}_B(u)$)

Proposition : Soit $u \in O(E)$, alors $Sp(u) \in \{1, -1\}$

Démonstration : ⍟

Soit $\lambda \in Sp(u)$, alors comme E est euclidien, $\lambda \in \mathbb{R}$

Alors $\exists x \in E, x \neq 0_E$, tel que $u(x) = \lambda x$.

Alors d'une part : $\|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$

Et d'autre part, $u \in O(E)$ donc u conserve la norme, ainsi $\|u(x)\| = \|x\|$

D'où $\|x\| = |\lambda|\|x\|$, ie $|\lambda| = 1$

Donc $\lambda = \pm 1$