

## Chapitre 6 – Séries de Fourier

### I) Fonctions périodiques

#### 1) Propriétés

Proposition : On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  est périodique si  $\exists T > 0$  tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, f(t + T) = f(t)$$

On dit alors que  $T$  est une période de la fonction  $f$ , et que  $f$  est  $T$ -périodique.

Dans toute la suite du chapitre,  $T$  désignera un réel strictement positif.

Proposition : Soient  $a \in \mathbb{R}$ , et  $g : [a, a + T[ \rightarrow \mathbb{C}$ . Il existe une unique fonction  $T$ -périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  qui coïncide avec  $g$  sur  $[a, a + T[$

Proposition : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique et  $a \in \mathbb{R}$ . On a équivalence entre :

- (i)  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- (ii) La restriction  $f|_{[a, a+T]}$  est continue.

Proposition : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique,  $a \in \mathbb{R}$  et  $k \in \mathbb{N}$ . On a équivalence entre :

- (i)  $f$  est de classe  $C^k$  par morceaux sur  $\mathbb{R}$ .
- (ii) La restriction  $f|_{[a, a+T]}$  est de classe  $C^k$  par morceaux.

Proposition : Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction  $T$ -périodique. Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_a^{a+T} f(t) dt = \int_0^T f(t) dt$$

Démonstration : ⚡

Soit  $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(t) dt &= \int_a^0 f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_T^{a+T} f(t) dt \\ &= - \int_0^a f(t) dt + \int_0^T f(t) dt + \int_0^a \underbrace{f(u+T)}_{=f(u)} du \end{aligned}$$

(on a posé  $u = t - T$ )

$$= \int_0^T f(t) dt$$

Dans toute la suite du chapitre, on considèrera uniquement des fonctions  $2\pi$ -périodiques.

Notons  $C_{2\pi}$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{C}$  continues et  $2\pi$ -périodiques.

Et  $CM_{2\pi}$  l'ensemble des fonctions continues par morceaux et  $2\pi$ -périodiques.

#### 2) L'espace préhilbertien $C_{2\pi}$

Définition : Soient  $f, g \in CM_{2\pi}$ , on définit  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$

Proposition : L'application  $\langle, \rangle : CM_{2\pi} \times CM_{2\pi} \rightarrow \mathbb{C}$

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$$

est une forme sesquilinéaire hermitienne positive sur  $CM_{2\pi}$ .

Attention : ce n'est pas un produit scalaire hermitien sur  $CM_{2\pi}$  !!

Proposition :  $\langle, \rangle$  définit un produit scalaire hermitien sur  $C_{2\pi}$ .

Définition :  $\forall f \in CM_{2\pi}$ , on pose  $\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}$

Remarque : Même si ce n'est pas une norme sur  $CM_{2\pi}$ , elle vérifie quand même :

Proposition :  $\forall f, g \in CM_{2\pi}$ , on a :

- (1)  $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \|f\|_2$
- (2) Inégalité de Cauchy-Schwarz :  $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$
- (3) Inégalité triangulaire :  $\|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$

Définition :  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , on définit  $e_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto e^{int}$$

Et  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on définit  $C_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  et  $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

$$t \mapsto \cos(nt) \quad t \mapsto \sin(nt)$$

Proposition : La famille de fonctions  $\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$  est une famille orthonormée de  $C_{2\pi}$ .

La famille  $\{C_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{T_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  est une famille orthogonale de  $C_{2\pi}$ .

### 3) Polynômes trigonométriques

Définition :  $\forall n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}_n = \text{Vect}\{e_k \mid k \in \llbracket -n; n \rrbracket\}$  et  $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n = \text{Vect}\{e_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ .

Les éléments de  $\mathcal{P}$ , qui correspondent à des combinaisons linéaires finies d'éléments sont appelés polynômes trigonométriques.

Proposition : Soit  $P \in \mathcal{P}$  un polynôme trigonométrique. Alors  $\exists n \in \mathbb{N}$ ,

$$P = \sum_{k=-n}^n c_k e_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k C_k + b_k T_k)$$

et  $\forall k \in \llbracket -n; n \rrbracket, c_k = \langle e_k, P \rangle$ .

et  $\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, a_k = c_k + c_{-k} = 2\langle C_k, P \rangle, b_k = i(c_k - c_{-k}) = 2\langle T_k, P \rangle$ .

De plus, on a  $\|P\|^2 = \sum_{k=-n}^n |c_k|^2 = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_k|^2 + |b_k|^2)$

Définition : On appelle série trigonométrique toute suite de fonctions de la forme  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$ , où pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n$  est une combinaison linéaire de  $e_n$  et de  $e_{-n}$ , ie

$$\exists c_0 \in \mathbb{C}, u_0 = c_0 e_0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists c_n, c_{-n} \in \mathbb{C}, u_n = c_n e_n + c_{-n} e_{-n}$$

Remarque : On note souvent les séries trigonométriques comme des séries bilatère  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n$ . La somme partielle d'ordre  $n$  d'une telle série de fonctions est :  $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$ .

De même, en posant pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n = c_n + c_{-n}$  et  $b_n = i(c_n - c_{-n})$

On peut écrire  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e_n = \frac{a_0}{2} C_0 + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} (a_n C_n + b_n T_n)$

## II) Coefficients de Fourier

### 1) Définition et propriétés calculatoires

Définition : Soit  $f \in CM_{2\pi}$ . On définit ses coefficients de Fourier exponentiels de  $f$  par :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = \langle e_n, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

On définit les coefficients trigonométriques de  $f$  par

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) &= 2\langle C_n, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \\ b_n(f) &= 2\langle T_n, f \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \end{aligned}$$

Proposition : Si une série trigonométriques  $\sum \alpha_n e_n$  CVU sur  $\mathbb{R}$ , alors sa fonction somme

$$S : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$t \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \alpha_n e_n(t)$$

appartient à  $C_{2\pi}$ , et les coefficients de Fourier exponentiels de  $S$  sont égaux aux coefficients de la série trigonométrique, ie  $\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha_n = c_n(S)$

Proposition : Soit  $f \in CM_{2\pi}$ . Alors  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= c_n(f) + c_{-n}(f), b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) \\ c_n(f) &= \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2}, c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2} \end{aligned}$$

Remarque : On a  $a_0(f) = 2c_0(f) \Leftrightarrow c_0(f) = \frac{a_0(f)}{2}$  et  $b_0(f) = 0$

Proposition : Soit  $f \in CM_{2\pi}$

- (1) Si  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , alors ses coefficients de Fourier trigonométriques sont réels.
- (2) Si  $f$  est paire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, b_n(f) = 0$ .
- (3) Si  $f$  est impaire, alors  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n(f) = 0$ .

Proposition : Soient  $f, g \in CM_{2\pi}$ , alors  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{Z}, c_n(\lambda f + \mu g) = \lambda c_n(f) + \mu c_n(g)$ .