Topologie des espaces vectoriels normés

I) Parties ouvertes et fermées

1) Parties ouvertes

Définition : Une partie $\mathcal{U}$ de E est dite ouverte si elle est voisinage de chacun de ses points, ie

$$\forall x \in \mathcal{U}, \exists r > 0, B(x,r) \subset U$$

On dit aussi que $\mathcal{U}$ est un ouvert de E.

Exemples ⍟

1) $\emptyset$ et E sont deux ouverts de E
En effet, $\forall x \in E, \forall r > 0, \mathcal{B}(x,r) = \{y \in E \mid \|y-x\| < r\} \subset E$
Et $\forall x \in \emptyset, \exists r > 0, \mathcal{B}(x,r) \subset \emptyset$
2) Dans $\mathbb{R}$ muni de $|\cdot|$, soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ alors $]a,b[,]-\infty, a[,]b, +\infty[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$.
Soit $r > 0, x \in \mathbb{R}$,
$\mathcal{B}(x,r) = \{y \in \mathbb{R} \mid -r < y - x < r\}$
$\quad =]x-r, x+r[$
Montrons que $]a,b[$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}$. Soit $x \in]a,b[$
Posons $r = \min(x-a, b-x)$, alors $r > 0$
Soit $y \in]x-r, x+r[$, alors $x - r \leq y \leq x + r$
Donc $a < y < b$
Donc $\mathcal{B}(x,r) \subset]a,b[$, donc $]a,b[$ est ouvert.
3) Montrons que dans l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$, $\forall a \in E, \forall r > 0$, la boule ouverte $B(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| < r\}$ est une partie ouverte.
Soit $x \in B(a,r)$
Objectif : construire $\rho > 0$ tel que $B(x,\rho) \subset B(a,r)$
Soit $\rho = r - \|x-a\| > 0$
Soit $y \in B(x,\rho)$, montrons que $y \in B(a,r)$
On a $\|y-a\| = \|y-x+x-a\|$
$\quad \leq \|y-x\| + \|x-a\|$
$\quad < \rho + \|x-a\| = r$
Ainsi $y \in B(a,r)$
4) Montrons que $\overline{B}(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leq r\}$ et $S(a,r) = \{x \in E \mid \|x-a\| = r\}$ ne sont pas des ouverts de E.
Soit $x \in S(a,r)$. Objectif : montrer que $\forall \varepsilon > 0, B(x,e) \not\subset \overline{B}(a,r)$
Soit $\varepsilon > 0$, posons $z = x + \frac{\varepsilon}{2}u$, où $u = \frac{x-a}{\|x-a\|}$
Alors $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}u - x\right\| = \left|\frac{\varepsilon}{2}\right| \times \underbrace{\|u\|}_{=1} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$
Ainsi $z \in B(x\,;\varepsilon)$
Mais $\|z-x\| = \left\|x + \frac{\varepsilon}{2}\frac{x-a}{\|x-a\|} - x\right\| = \left\|\underbrace{1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}}_{\in\mathbb{R}}\underbrace{(x-a)}_{\in E}\right\| = \left|1 + \frac{\varepsilon}{2\|x-a\|}\right|\|x-a\|$
$\quad = \|x-a\| + \frac{\varepsilon}{2} > r$
Ainsi $\overline{B}(a,r)$ et $S(a,r)$ ne sont pas des ouverts de E

Propriété : Une réunion (finie ou infinie) d'ouverts est un ouvert.

Propriété : Une intersection finie d'ouverts est un ouvert

2) Parties fermées

Définition : Une partie F de E est dite fermée si son complémentaire (dans E) est un ouvert. On dit aussi que F est un fermé de E

Remarque : On n'utilisera jamais la notation $\overline{X}$ pour désigner le complémentaire : elle désigne l'adhérence. On utilisera plutôt X^C ou $E\backslash X$.

Propriété : Une intersection (finie ou infinie) de fermés de E est un fermé de E.

Propriété : Une union finie de fermés de E est un fermé de E.