Chapitre 5 – Isométries en dimension 2 et 3

Dans tout le chapitre, E désigne un espace préhilbertien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

On rappelle que si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille de n vecteurs de E et $B = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det(\mathrm{Mat}_B(x_1, \dots, x_n))$

$$= \det(X_1, \dots, X_n) \text{ où } \forall k \in [\![1, n]\!], X_k = \mathrm{Mat}_B(x_k)$$

Si B' est une autre base de E, si on note, $\forall k \in [\![1, n]\!], X'_k = \mathrm{Mat}_{B'}(x_k)$ et $P = Pass_{B \to B'}$

Alors $X_k = PX'_k$.

Donc $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det(PX'_1, \dots, PX'_n) = \det(P)\det(X'_1, \dots, X'_n) = \det_B(B') \times \det_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

1) Espaces euclidiens orientés

On se fixe une b.o.n $B_0 = (e_1, \dots, e_n)$ de E.

Pour toute base orthonormée B de E, on sait que $P = Pass_{B_0 \to B} \in O_n(\mathbb{R})$

Ainsi $\det(P) = \pm 1$

Ainsi l'ensemble des bases orthonormées de E peut donc s'écrire comme l'union disjointe :

$$\{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = 1 \} \cup \{ B \text{ b.o.n de } E \mid \det(Pass_{B_0 \to B}) = -1 \}$$

On dit que B a la même orientation que B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) > 0$.

On dit que B inverse l'orientation de B_0 si $\det(Pass_{B_0 \to B}) < 0$.

La base B_0 est appelée base de référence pour l'orientation de E.

Orienter l'espace euclidien consiste à choisir une b.o.n B_0 de B de référence et adopter le vocabulaire suivant :

Définition : Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée B_0. Soit B une b.o.n de E, on dit que la base B est directe si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = +1$ et indirecte si $\det(Pass_{B_0 \to B}) = -1$

Remarque :

1) B_0 est une base directe puisque $Pass_{B_0 \to B_0} = I_n \in SO_n(\mathbb{R})$
2) L'ordre des éléments de la base orthonormée B est important
3) À partir d'une b.o.n indirecte de E, on peut toujours construire une b.o.n directe de E en multipliant l'un des vecteurs par -1.

Produit mixte

Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.

Propriété : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Alors le déterminant $\det_B(x_1, \dots, x_n)$ est le même dans n'importe quelle b.o.n directe de E. On le nomme le produit mixte de la famille $(x_1, \dots x_n)$ et on le note $[x_1, \dots x_n] = \det_B(x_1, \dots, x_n)$ $\forall B$ b.o.n directe de E.

Remarque :

Par propriétés des déterminants, on a :

$[x_1, \dots, x_n] = 0 \Leftrightarrow$ la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée

2) Classification des isométries en dimension 2

Dans toute cette partie, E désigne un espace euclidien orienté de dimension 2.

Rotation du plan orienté

Théorème : Une isométrie directe du plan orienté E a la même matrice dans n'importe quelle base orthonormée directe de E. Plus précisément, il existe un réel θ, unique modulo 2π, tel que $\forall B$ b.o.n directe de E,

$$\mathrm{Mat}_B(u) = R_\theta$$

On dit alors que u est la rotation d'angle θ et on la note $u = Rot_\theta$

Remarque : comprendre l'unicité modulo 2π comme suit, si $\exists \theta, \theta' \in \mathbb{R}$ tel que $R_\theta = R_{\theta'}$ alors

$$\theta \equiv \theta' [2\pi]$$

Définition : Soient $x, y \in E$ non nuls. Il existe une unique rotation $r \in SO(E)$ qui envoie $\frac{x}{\|x\|}$ sur $\frac{y}{\|y\|}$. On appelle alors mesure de l'angle orienté de x à y le réel θ unique à 2π près tel que $r = Rot_\theta$ et on note $\widehat{(x, y)} \equiv \theta[2\pi]$.

Si de plus, $\theta \in]-\pi; \pi]$, on dit que θ est la mesure principale de l'angle orienté de x à y.

Proposition : pour tous $x, y, z \in E \backslash \{0_E\}$

(i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}_+^*, \widehat{(\lambda x, \mu y)} \equiv \widehat{(x, y)}[2\pi]$

(ii) $\widehat{(x, y)} \equiv \widehat{(x, z)} + \widehat{(z, y)}\ [2\pi]$

(iii) $\widehat{(y, x)} \equiv -\widehat{(x, y)}\ [2\pi]$

Proposition : Soient $x, y \in E \backslash \{0_E\}$. Notons $\theta \equiv \widehat{(x, y)}\ [2\pi]$. Alors

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad [x, y] = \|x\| \|y\| \sin(\theta)$$

Où $[x, y]$ désigne le produit mixte de x et y. (on a $[x, y] = \det_B(x, y)$ pour toute base orthonormée directe B de E.

Théorème : Soient u une isométrie indirecte du plan E (ie $u \in O(E)$ avec $\det(u) = -1$) et $B = (e_1, e_2)$ une base orthonormée de E. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_B(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Et u correspond à la réflexion par rapport à la droite vectorielle engendrée par le vecteur

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e_1 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e_2$$

Théorème : Les endomorphismes orthogonaux directs du plan orienté E sont les rotations vectorielles. Celles-ci commutent entre elles et ont même représentation matricielle dans toute base orthonormée directe de E. Les endomorphismes orthogonaux indirects du plan sont les réflexions.

Corollaire : Dans le plan, la composée de deux rotations est une rotation, la composée de deux réflexions est une rotation, et la composée d'une rotation et d'une réflexion est une réflexion.