**Orthogonalité – Démonstrations**

Propriété : Identité de Pythagore

1. Soient un espace préhilbertien réel et . On a :
2. Soient un espace préhilbertien complexe et . On a :

Démonstration : ⍟

1. On sait que

Ainsi

1. On sait que

Ainsi

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⍟

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit , soit une famille orthogonale d’éléments de tq . Soient tq

D’une part

D’autre part, par linéarité à droite de ,

Ainsi, d’où car car

Ainsi

Ce résultat s’étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si est une famille orthonormée d’éléments de , alors est orthogonale et donc

Définition : soit . On appelle orthogonal de l’ensemble noté , constitué des éléments de orthogonaux à tous les éléments de , ie

Exemples

1. ⍟ car
2. ⍟ car est le seul élément de orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit un sev de . Alors

Démonstration : ⍟ Soit , alors . Or

Ainsi

Réciproquement, soit tel que . Soit

Donc tq

D’où

Donc d’où l’inégalité voulue.

Théorème : Soit un sev de de dimension finie. Soit une base orthonormée de . Alors pour tout , le projeté orthogonal de x sur vérifie :

Démonstration : ⍟

Soit , comme et puisque est une base orthonormée de ,

Soit

Où désigne la projection orthogonale sur

Ainsi

D’où

Théorème : Soit un sev de tel que (ceci est vrai en particulier quand )

Alors

Ainsi la distance de à est un minimum. De plus, cette distance est uniquement atteinte en .

C’est-à-dire tel que , et

Démonstration : ⍟

Soit ,

Ainsi et sont orthogonaux donc par l’identité de Pythagore :

Alors par croissance de sur ,

Ainsi est un minorant de , et comme , il appartient à cet ensemble.

Ainsi c’est un minimum.

De plus, par les calculs ci-dessus,