**Chapitre 2 – Orthogonalité**

Dans tout le chapitre, désigne un espace préhilbertien (réel ou complexe) de dimension quelconque, dont on notera le produit scalaire et la norme associée.

1. **Vecteurs orthogonaux**
2. Orthogonalité de 2 vecteurs

Définition : Soient . On dit que et sont orthogonaux si . On note alors .

Remarque : Le seul vecteur orthogonal à tous les éléments de est .

Remarque : Si , alors

Exemple : Dans muni du produit scalaire usuel, soit alors vérifie

car

Dans munie du produit scalaire usuel, considérons ,

Alors , donc .

Attention : la notion d’orthogonalité dépend du p.s. utilisé.

Propriété : Identité de Pythagore

1. Soient un espace préhilbertien réel et . On a :
2. Soient un espace préhilbertien complexe et . On a :

Démonstration : ⍟

1. On sait que

Ainsi

1. On sait que

Ainsi

Attention : la réciproque est fausse dans le cas préhilbertien complexe.

1. **Familles orthogonales**

Définition : On dit qu’une famille d’éléments est orthogonale si tous ses éléments sont orthogonaux 2 à 2 ie si :

On dit que la famille est orthonormée si elle est orthogonale et que tous ses éléments ont pour norme 1, ce qui est équivalent à :

Propriété : Toute famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre. En particulier, une famille orthonormée est libre.

Démonstration : ⍟

Une famille ne comportant aucun élément est par définition libre. Soit , soit une famille orthogonale d’éléments de tq . Soient tq

D’une part

D’autre part, par linéarité à droite de ,

Ainsi, d’où car car

Ainsi

Ce résultat s’étend à une famille infinie. En effet, une famille infinie est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

De plus, si est une famille orthonormée d’éléments de , alors est orthogonale et donc

1. Base orthonormée et calculs dans une telle base

Définition : Soit un espace préhilbertien ou hermitien. On appelle base orthonormée de toute famille de vecteurs de qui est à la fois orthonormée et une base de .

Propriété : Soient un espace euclidien ou hermitien et une base orthonormée de . Soit . Les coordonnées dans la base sont données par .

De sorte que

Propriété : Soient un espace euclidien ou hermitien et une base orthonormée de Soient de coordonnées respectives et dans la base . Alors

Où et

1. Procédé d’orthonormalisation et de Gram-Schmidt

Théorème : Soit un espace préhilbertien réel ou complexe. Pour toute famille libre d’éléments de , il existe une famille orthonormée tq

Remarque : Pour construire ce genre de famille, on pose puis

Exemple : Dans muni de son p.s. usuel considérons la famille où

Notons la base canonique de

Donc est libre (c’est même une base de ) donc on peut lui appliquer le procédé d’orthormalisation de Gram-Schmidt.

On pose , alors , on pose

Puis on pose

Alors . Ainsi on pose

Enfin on pose

De plus, , et on pose

Corollaire : Tout espace euclidien ou hermitien admet une base orthonormée.

Corollaire : Toute famille orthonormée d’un espace euclidien ou hermitien peut être complétée en une base orthonormée de .

1. **Sous-espaces vectoriels orthogonaux**
2. Orthogonal d’une partie

Définition : soit . On appelle orthogonal de l’ensemble noté , constitué des éléments de orthogonaux à tous les éléments de , ie

Exemples

1. ⍟ car
2. ⍟ car est le seul élément de orthogonal à tous les autres. (savoir redémontrer)

Propriété : Soit , alors est un sev de .

Propriété : Soit

1. On a
2. Si , alors

Propriété : Soit un sev de . Alors

Démonstration : ⍟ Soit , alors . Or

Ainsi

Réciproquement, soit tel que . Soit

Donc tq

D’où

Donc d’où l’inégalité voulue.

Définition : Soient 2 sev de . On dit que et sont orthogonaux si

1. Supplémentaires orthogonaux d’un sev de dimension finie

Théorème : Soit un sev de avec de dimension finie. Alors . On appelle le supplémentaire orthogonal de dans .

En particulier, si est euclidien ou hermitien, alors pour tout sev de ,

Attention : ce résultat est faux si n’est pas de dimension finie.

Corollaire : Si est un espace **euclidien** ou **hermitien**, alors pour tout sev de on a :

Attention : si est de dimension infinie, on peut avoir

**Projection orthogonale**

**Rappels sur les projecteurs et les symétries**

est un -ev de dimension quelconque (pas forcément finie), et sont deux sev de supplémentaires dans , ie

Définition : On appelle projection sur parallèlement à l’endomorphisme de défini par :

tq ,

Définition : On appelle symétrie par rapport à parallèlement à l’endomorphisme de tel que :

On a alors

Propriété : Soit On a équivalence entre :

1. est la projection sur parallèlement à . Dans ce cas, .

Remarque : Avec les notations , on a :

Soit

Propriété : Soit On a équivalence entre :

1. est la symétrie par rapport à parallèlement à

Remarque : Avec les notations , on a :

Soit

Remarque : Supposons . Notons la projection sur parallèlement à et la symétrie par rapport à parallèlement à .

En prenant la concaténation , est une base adaptée à la décomposition :

**Projection orthogonale :**

On revient au cadre où est un espace préhilbertien réel ou complexe. Si est un sev de de dimension finie, on a vu que

Définition : Soit un sev de tq (c’est vrai en particulier si )

On appelle projection orthogonale sur la projection, notée , sur parallèlement à . On appelle symétrie orthogonale par rapport à la symétrie, notée sur à parallèlement à .

Remarque : est l’unique élément de tel que Ainsi pour on a :

Exemple : dans muni du p.s. usuel, déterminons-le projeté orthogonal du vecteur

sur où

On sait que . Donc tel que

De plus,

Donc

Propriété : Avec les notations de la définition ci-dessus :

**Expression du projeté orthogonal**

Théorème : Soit un sev de de dimension finie. Soit une base orthonormée de . Alors pour tout , le projeté orthogonal de x sur vérifie :

Démonstration : ⍟

Soit , comme et puisque est une base orthonormée de ,

Soit

Où désigne la projection orthogonale sur

Ainsi

D’où

Remarque : En reprenant le procédé d’orthonormalisation de Gram-Schmidt :

Soit une famille libre, alors on peut construire une famille une famille orthogonale et une famille orthonormée telle que

En posant , et

Car la famille est une base orthonormée de

Remarque :

On a vu que dans un espace euclidien ou hermitien, pour tout sev de , on a

Ainsi si est de « grande » dimension, alors est de « petite » dimension, donc il peut être intéressant de d’appliquer la formule

Exemple : Dans muni de son produit scalaire usuel.

On considère

Déterminer pour , l’expression de

* Tout d’abord, (avec Tr linéaire) de est bien un sev de
* Comme ,
* Déterminons

Soit on a

Ainsi

Notons

Alors est génératrice de et libre (démo easy)

Ainsi est une base de , donc

Méthode 1 :

On remarque que pour tous donc est une base orthogonale de .

Ainsi, si on pose ,

Ainsi

Donc et on remplace

Méthode 2 :

Comme car est euclidien, on cherche une base orthonormée de .

Soit ,

Donc

Comme , alors est une base orthonormée de

Donc ,

Donc

**Distance à un sev**

Définition : Soit non vide et . On définit la distance de à par

Théorème : Soit un sev de tel que (ceci est vrai en particulier quand )

Alors

Ainsi la distance de à est un minimum. De plus, cette distance est uniquement atteinte en .

C’est-à-dire tel que , et

Démonstration : ⍟

Soit ,

Ainsi et sont orthogonaux donc par l’identité de Pythagore :

Alors par croissance de sur ,

Ainsi est un minorant de , et comme , il appartient à cet ensemble.

Ainsi c’est un minimum.

De plus, par les calculs ci-dessus,