

# Рівневий набір гармонійних функцій

А. В. Тор

Для  $\theta \in [0, \pi/2)$  розглянемо множини

$$\begin{aligned}\Sigma_{1,\theta} &= \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1] : \Re \left( \int_{[1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\}; \\ \Sigma_{-1,\theta} &= \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus [1, +\infty) : \Re \left( \int_{[-1,a]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\}; \\ \Sigma_\theta &= \left\{ a \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1] : \Re \left( \int_{[-1,1]} e^{i\theta} \sqrt{p_a(z)} dz \right) = 0 \right\};\end{aligned}$$

де  $p_a(z)$  — комплексний многочлен, визначений формулою

$$p_a(z) = (z - a)(z^2 - 1).$$

**Лемма 1.** Нехай  $\theta \in [0, \pi/2)$ . Тоді кожна з множин  $\Sigma_{1,\theta}$  та  $\Sigma_{-1,\theta}$  утворюється двома гладкими кривими, які локально ортогональні відповідно при  $z = 1$  та  $z = -1$  точніше:

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{a \rightarrow -1 \\ a \in \Sigma_{-1,\theta}}} \arg(a + 1) &= \frac{-2\theta + (2k + 1)\pi}{4}, \quad k = 0, 1, 2, 3; \\ \lim_{\substack{a \rightarrow +1, \\ a \in \Sigma_{1,\theta}}} \arg(a - 1) &= \frac{-\theta + k\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.\end{aligned}$$

Дві криві, що визначають  $\Sigma_{1,\theta}$  (відповідно  $\Sigma_{-1,\theta}$ ), перетинаються лише при  $z = 1$  (відповідно  $z = -1$ ). Більше того, для  $\theta \notin \{0, \frac{\pi}{2}\}$ , вони розходяться по-різному до  $\infty$  в одному з напрямків:

$$\lim_{\substack{a \rightarrow +\infty \\ a \in \Sigma_{\pm 1,\theta}}} \arg a = \frac{-2\theta + 2k\pi}{5}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Для  $\theta = 0$ , (відповідно  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), один промінь  $\Sigma_{1,\theta}$  (відповідно  $\Sigma_{-1,\theta}$ ) розходиться до  $z = -1$  (відповідно  $z = 1$ ).

*Доведення.* Нехай задано непостійну гармонічну функцію  $u$ , визначену в деякій області  $\mathcal{D}$  of  $\mathbb{C}$ . Критичними точками  $u$  є саме ті, де

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Вони ізольовані. Якщо  $v$  є гармонічним спряженим  $u$  у  $\mathcal{D}$ , скажімо,  $f(z) = u(z) + iv(z)$  аналітична у  $\mathcal{D}$ , тоді за Коші-Ріманом,

$$f'(z) = 0 \iff u'(z) = 0.$$

Встановлений рівень

$$\Sigma_{z_0} = \{z \in \mathcal{D} : u(z) = u(z_0)\}$$

$u$  через точку  $z_0 \in \mathcal{D}$  залежить від поведінки  $f$  поблизу  $z_0$ . Точніше, якщо  $z_0$  є критичною точкою  $u$ , ( $u'(z_0) = 0$ ), то існує околиця  $\mathcal{U}$  околу  $z_0$ , голоморфної функції  $g(z)$  визначена на  $\mathcal{U}$ , така, що:

$$\forall z \in \mathcal{U}, f(z) = (z - z_0)^m g(z); \quad g(z) \neq 0.$$

Взявши гілку  $m$ -го кореня з  $g(z)$ ,  $f$  має локальну структуру

$$f(z) = (h(z))^m, \quad \forall z \in \mathcal{U}.$$

Звідси випливає, що  $\Sigma_{z_0}$  локально утворена  $m$  аналітичними дугами, які проходять через  $z_0$  і перетинаються там під рівними кутами  $\pi/m$ . Через регулярну точку  $z_0 \in \mathcal{D}$ , ( $u'(z_0) \neq 0$ ), теорема про неявну функцію стверджує, що  $\Sigma_{z_0}$  є локально єдиною аналітичною дугою. Зауважте, що множина рівнів гармонічної функції не може закінчуватися у звичайній точці.

Розглянемо багатозначну функцію

$$f_{1,\theta}(a) = \int_1^a e^{i\theta} \sqrt{p_a(t)} dt, \quad a \in \mathbb{C}.$$

Інтегруючи вздовж відрізка  $[1, a]$ , можна припустити, що без втрати загальності, що

$$f_{1,\theta}(a) = ie^{i\theta}(a-1)^2 \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} \sqrt{t(a-1)+2} dt = (a-1)^2 g(a);$$

$$g(1) \neq 0. \quad (1)$$

Очевидно, що:

$$\forall a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1], \quad \{t(a-1) + 2; t \in [0, 1]\} = [2, a+1] \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Отже, при фіксованому виборі аргументу та квадратного кореня всередині інтеграла,  $f_{1,\theta}$  та  $g$  є однозначними аналітичними функціями в  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ .

Припустимо, що для деяких  $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -1]$ ,  $a \neq 1$ ,

$$u(a) = \Re f_{1,\theta}(a) = 0; \quad f'_{1,\theta}(a) = 0.$$

Тоді,

$$(a-1)^3 g'(a) + 2f_{1,\theta}(a) = 0.$$

Беручи справжні деталі, ми отримуємо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} \Im \left( e^{i\theta} (a-1)^2 \sqrt{t(a-1) + 2} \right) dt; \\ 0 &= \Re \left( (a-1)^3 g'(a) \right) = \int_0^1 t \sqrt{t(1-t)} \Im \left( \frac{e^{i\theta} (a-1)^3}{2\sqrt{t(a-1) + 2}} \right) dt. \end{aligned}$$

За неперервністю функцій всередині цих інтегралів на відрізку  $[0, 1]$ , існують  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  такі що

$$\Im \left( e^{i\theta} (a-1)^2 \sqrt{t_1(a-1) + 2} \right) = \Im \left( \frac{e^{i\theta} (a-1)^3}{2\sqrt{t_2(a-1) + 2}} \right) = 0;$$

а потім

$$e^{2i\theta} (a-1)^4 (t_1(a-1) + 2) > 0, \quad \left( \frac{e^{2i\theta} (a-1)^6}{t_2(a-1) + 2} \right) > 0.$$

Взявши їх співвідношення, отримуємо

$$\frac{(t_1(a-1) + 2)(t_2(a-1) + 2)}{(a-1)^2} > 0,$$

яка не може виконуватись, оскільки, якщо  $\Im a > 0$ , то

$$\begin{aligned} 0 &< \arg(t_1(a-1) + 2) + \arg((t_2(a-1) + 2)) \\ &< 2 \arg(a+1) < \arg((a-1)^2) < 2\pi. \end{aligned}$$

Випадок  $\Im a < 0$  є аналогічним, тоді як випадок  $a \in \mathbb{R}$  можна легко відкинути. Таким чином,  $a = 1$  є єдиною критичною точкою  $\Re f_{1,\theta}$ . Оскільки  $f''_{1,\theta}(1) = 2g(1) \neq 0$ , виводимо локальну поведінку  $\Sigma_{1,\theta}$  поблизу  $a = 1$ .

Припустимо, що для деяких  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , промінь  $\Sigma_{\pm 1,\theta}$  розходиться до певного моменту в  $(-\infty, -1)$ ; або, наприклад,

$$(\overline{\Sigma_{1,\theta}} \setminus \Sigma_{1,\theta}) \cap \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \Im z \geq 0\} = \{x_\theta\}.$$

Нехай  $\epsilon > 0$  таке, що  $0 < \theta - 2\epsilon$ . Для  $a \in \mathbb{C}$  задовольняє  $\pi - \epsilon < \arg a < \pi$ ,

$$0 < \theta - 2\epsilon < \theta + 2 \arg a + \arg \int_0^1 \sqrt{t(1-t)} \sqrt{t(a-1)+2} dt < \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{\epsilon}{2} < \pi,$$

що суперечить (1). Інші випадки подібні. Таким чином, будь-який промінь з  $\Sigma_{\pm 1,\theta}$  повинен розходитись на  $\infty$ . Випадок  $\theta = 0$  є простішим.

Якщо  $a \rightarrow \infty$ , тоді  $|f_{1,\theta}(a)| \rightarrow +\infty$ ; оскільки  $\Re f_{1,\theta}(a) = 0$ , маємо  $|\Im f_{1,\theta}(a)| \rightarrow +\infty$ . Звідси випливає, що

$$\arg(f(a)) \sim \arg\left(\frac{4}{15} e^{i\theta} a^{5/2}\right) \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \text{ як } a \rightarrow \infty.$$

Ми отримуємо поведінку будь-якої дуги  $\Sigma_{1,\theta}$ , яка розходиться до  $\infty$ . Зокрема, з принципу максимуму модуля, два промені з  $\Sigma_{1,\theta}$  не можуть розходитись у  $\infty$ .  $\Sigma_{1,\theta}$  не можуть розходитись до  $\infty$  в одному напрямку.

Якщо  $\Sigma_{1,\theta}$  містить регулярну точку  $z_0$  (наприклад,  $\Im z_0 > 0$ ), яка не належить дугам  $\Sigma_{1,\theta}$ , що виходять з точки  $a = 1$ . Два промені кривої набору рівнів  $\gamma$ , що проходять через  $z_0$ , розходяться до  $\infty$  у двох різних напрямках. Звідси випливає, що  $\gamma$  має проходити через  $z_1 = 1 + iy$ , для деяких  $y > 0$ , або  $z_1 = y$ , для деяких  $y > 1$ . Легко перевірити, що в обох випадках, для будь-якого вибору аргументу,

$$\Re \int_1^{z_1} \left( e^{i\theta} \sqrt{p_{z_1}(t)} dt \right) \neq 0;$$

і отримуємо протиріччя. Таким чином,  $\Sigma_{1,\theta}$  утворюється лише двома кривими, що проходять через  $a = 1$ . Таку саму ідею дає структура  $\Sigma_{-1,\theta}$ ; навіть більше, з співвідношення

$$\Re f_{\pm 1,\theta}(a) = 0 \iff \Re f_{\pm 1, \frac{\pi}{2}-\theta}(-\bar{a}) = 0, \quad (2)$$

доступних для довільного  $\theta \in [\pi/4, \pi/2)$ , можна легко побачити, що  $\Sigma_{-1, \frac{\pi}{2}-\theta}$  і  $\Sigma_{1, \theta}$  симетричні відносно уявної осі (2). Це приводить нас до того, щоб обмежити наше дослідження випадком.  $\square$