Eliminacja Gaussa i LU faktoryzacja

Maciej Paszyński

Katedra Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli używasz fragmentów tego wykładu, zacytuj źródło

Pytanie bonusowe dla osób z wykładu

Proszę rozwiązać układ równań $Ax = b_1$ i wysłać wynik oraz zdjęcie obliczeń z kartki wykonane komórką na adres maciej.paszynski@agh.edu.pl do końca wykładu

paszynsk@agh.edu.pl

$$A = \begin{bmatrix} 999 & 998 \\ 1000 & 999 \end{bmatrix}$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1997 \\ 1999 \end{bmatrix}$$

Program 2 (do oddania w UPEL i zreferowania na ćwiczeniach za tydzień)

Proszę zaimplementować dla macierzy o rozmiarze = (Państwa miesiąc urodzenia + dzień urodzenia)
1) Algorytm eliminacji Gaussa bez pivotingu generujący jedynki na przekątnej (slajd 14)
2) Algorytm eliminacji Gaussa z pivotingiem (slajd 26)
4) Algorytm LU faktoryzacji bez pivotingu (slajd 33)
5) Algorytm LU faktoryzacji z pivotingiem (slajd 36)

Eliminacja Gaussa

Algorytm eliminacji Gaussa jest podstawowym najszerzej znanym algorytmem rozwiązywania układów równań liniowych.
Algorytm eliminacji, zwany algorytmem Gaussa został wynaleziony w Chinach w roku 179 p.n.e. (autor nieznany)
W Europie algorytm zaczął być używany w roku 1771 przez Leonarda Eulera, który nazywał go najbardziej naturalnym sposobem rozwiązywania układów równań.
Jest on niesłusznie nazywany algorytmem eliminacji Gaussa, od matematyka Carla Friedricha Gaussa (1777-1855), który nie żył jeszcze w roku 1771.

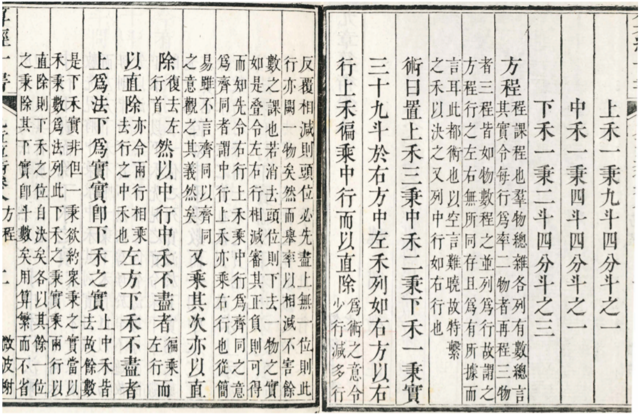

上禾一秉九斗四分斗之一
中禾一秉四斗四分斗之一
下禾一秉二斗四分斗之三
方程
術曰置上禾三秉中禾二秉下禾一秉實
三十九斗於右方中左禾列如右方以右
行上禾徧乘中行而以直除

Figure: 8 rozdział z "Dziewięć rozdziałów o Sztuce Matematycznej

Rozdział 8 zawiera opisy różnych problemów, z których jeden rozwiązywany jest algorytmem znanym na Zachodzie pod nazwą eliminacji Gaussa.

Algorytm z "9 rozdziałów o sztuce matematycznej"

Problem z 8 rodziału z "9 rozdziałów o sztuce matematycznej", Chiny 179 r. p.n.e.

Problem I. *Istnieją trzy gatunki ziarna: najwyżej, średniej i niskiej jakości.*
Trzy garście najwyższej jakości, dwie garście średniej klasy i jedna garść niskiej jakości to 39 jednostki miary. Dwie garście najwyższej jakości, trzy garście średniego gatunku i jedna garść niskiej jakości wynoszą 34 jednostki miary. Jedna garść najwyższej jakości, dwie garście średniej klasy i trzy garście o niskiej jakości wynoszą 26 jednostek miary.
Ile jednostek miary robi jedna garść plonu ziarna odpowiednio najwyższej, średniej i niskiej jakości?

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Algorytm z "9 rozdziałów o sztuce matematycznej'

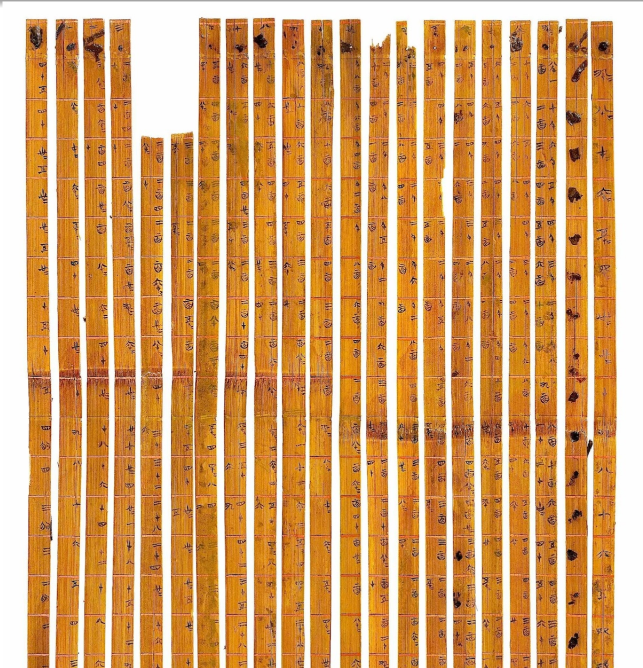
$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

"Przemnażamy drugi wiersz przez liczbę garści ziaren najwyższej jakości z pierwszego wiersza"

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 * 3 & 3 * 3 & 1 * 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 34 * 3 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 9 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 102 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Pierwsza tabliczka mnożenia, Chiny 305 rok p.n.e.



Pierwsza tabliczka mnożenia, Chiny 305 rok p.n.e.

1/2	1	2	3	(4)	(5)	6	7	8	9	10	20	(30)	40	50	60	70	80	90		
•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•		•
45	90	180	270	(360)	(450)	540	630	720	810	900	1800	2700	3600	4500	5400	6300	7200	8100	•	90
40	80	160	240	(320)	(400)	480	560	640	720	800	1600	2400	3200	4000	4800	5600	6400	7200	•	80
35	70	140	210	280	350	420	490	560	630	700	1400	2100	2800	3500	4200	4900	5600	6300	•	70
30	60	120	180	240	300	360	420	480	540	600	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400	•	60
25	50	100	150	200	250	300	350	400	450	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	•	50
20	40	80	120	160	200	240	280	320	360	400	800	1200	1600	2000	2400	2800	3200	3600	•	40
15	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	600	900	1200	1500	1800	2100	2400	2700	•	30
10	20	40	60	80	100	120	140	160	180	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800	•	20
5	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600	700	800	900	•	10
$4\frac{1}{2}$	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	180	270	360	450	540	630	720	810	•	9
4	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	160	240	320	400	480	560	640	720	•	8
$3\frac{1}{2}$	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	140	210	280	350	420	490	560	630	•	7
3	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	120	180	240	300	360	420	480	540	•	6
$2\frac{1}{2}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	100	150	200	250	300	350	400	450	•	5
2	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	80	120	160	200	240	280	320	360	•	4
$1\frac{1}{2}$	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	150	180	210	240	270	•	3
1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	100	120	140	160	180	•	2
1/2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70	80	90	•	1
1/4	1/2	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4	$4\frac{1}{2}$	5	10	15	20	25	30	35	40	45	•	1/2

Antyczny kalkulator, Chiny, 305 rok p.n.e. , tłumaczenie

Przykład:

22.5 x 35.5 rozbijamy na (20 + 2 + 0.5) x (30 + 5 + 0.5) =

20 x 30 + 20 x 5 + 20 x 0.5 + 2 x 30 + 2 x 5 + 2 x 0.5 + 0.5 x 30 + 0.5 x 5 + 0.5 x 0.5

i każde z tych działań można odczytać z tabliczki

Algorytm z ”9 rozdziałów o sztuce matematycznej”

”Odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego tyle razy dopóki nie wyeliminujemy liczby ziaren najwyższej jakości z pierwszej kolumny”

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6-3-3 & 9-2-2 & 3-1-1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 102-39-39 \\ 26 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 26 \end{bmatrix}$$

Antyczni Chińczycy wykonywali działania przenosząc drewniane lub bambusowe patyczki, tak więc zero reprezentowane było przez brak patyczków.

"Podobnie dla trzeciego wiersza przemnażamy i odejmujemy"

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ 1*3 & 2*3 & 3*3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 26*3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ 3-3 & 6-2 & 9-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 78-39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ & 4 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 39 \end{bmatrix}$$

Algorytm z "9 rozdziałów o sztuce matematycznej"

"Następnie przemnażamy trzeci wiersz przez liczbę garści ziaren średniej jakości z drugiego wiersza"

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ & 4*5 & 8*5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 39*5 \end{bmatrix}$$

"i odejmujemy wiele razy"

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ & 20-5-5-5-5 & 40-1-1-1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 195-24-24-24-24 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ & & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 99 \end{bmatrix}$$

Algorytm z "9 rozdziałów o sztuce matematycznej"

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 5 & 1 \\ & & 36 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 39 \\ 24 \\ 99 \end{bmatrix}$$

"Dwie liczby ktore zostały w ostatnim wierszu decydują o liczbie miar ziaren niskiej jakości. Lewa to mianownik, prawa licznik"

Liczba ziaren niskiej jakości $= 99/36 = 2\frac{3}{4}$ jednostek miary

"Podobnie uzyskujemy liczbe miar ziaren średniej jakości z drugiego wiersza. Lewa liczba to mianownik, prawa to licznik, minus liczba miar ziaren najniższej jakości razy liczba z drugiego wiersza"

Liczba ziaren średniej jakości $= [24 - 1 * 2\frac{3}{4}]/5 = 4\frac{1}{4}$

"Podobnie uzyskujemy liczbe miar ziaren najwyższej jakości z pierwszego wiersza. Lewa liczba to mianownik, prawa to licznik, minus liczba miar ziaren średniej jakości razy liczba z pierwszego wiersza, minus liczba miar ziaren najniższej jakości razy liczba z pierwszego wiersza"

Liczba ziaren najwyższej jakości $= [39 - 2 * 4\frac{1}{4} - 1 * 2\frac{3}{4}]/3 = 9\frac{1}{4}$

"Nowoczesna" Eliminacja Gaussa

$Ax = b \rightarrow Ux = Cb$ $O(N^3)$ $c_1 N^3$

$x = A^{-1} \cdot b$ $O(N^3)$ $c_2 N^3$ $c_1 << c_3$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Cel:

- Rozwiązanie układu równań.

Narzędzia:

- Układ równań będzie równoważny (będzie miał takie samo rozwiązanie) jeśli wybrany wiersz **przemnożymy przez stałą** różną od (numerycznego) zera.
- Układ równań będzie równoważny (będzie miał takie samo rozwiązanie) jeśli wybrany wiersz **dodamy lub odejmiemy** od innego wiersza.

Eliminacja Gaussa

Metoda:

- W taki sposób skalować i dodawać / odejmować od siebie wiersze układu równań, żeby dostać macierz trójkątną.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

- Macierz trójkątną potrafimy rozwiązać niewiadoma po niewiadomej.

$\hat{a}_{33} x_3 = \hat{b}_3 \rightarrow$

$$x_3 = \frac{\hat{b}_3}{\hat{a}_{33}}$$

$\hat{a}_{22} x_2 + \hat{a}_{23} x_3 = \hat{b}_2 \rightarrow$

$$x_2 = \frac{\hat{b}_2}{\hat{a}_{22}} - \frac{\hat{a}_{23}}{\hat{a}_{22}} x_3$$

$$x_1 = \frac{\hat{b}_1}{\hat{a}_{11}} - \frac{\hat{a}_{12}}{\hat{a}_{11}} x_2 - \frac{\hat{a}_{13}}{\hat{a}_{11}} x_3$$

Eliminacja Gaussa

Algorytm 1

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$1^{st} = 1^{st} / a_{11}$
(dzielimy pierwszy wiersz tak żeby dodstać jedynkę na przekątnej)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * a_{21}$
(odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego przeskalowany tak, żeby dostać zero pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 1^{st} * a_{31}$
(odejmujemy pierwszy wiersz od trzeciego przeskalowany tak, żeby dostać zero dalej pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - a_{21}\frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{31}\frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - a_{31}\frac{a_{13}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ b_3 - a_{31}\frac{b_1}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - {\color{blue}a_{21}} \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{23} - {\color{blue}a_{21}} \frac{a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - {\color{brown}a_{31}} \frac{a_{12}}{a_{11}} & a_{33} - {\color{brown}a_{31}} \frac{a_{13}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - {\color{blue}a_{21}} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_3 - {\color{brown}a_{31}} \frac{b_1}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

Oznaczamy nowe wyrazy macierzy i prawej strony dla ułatwienia $\tilde{a}_{ij}$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & {\color{red}\tilde{a}_{22}} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} / {\color{red}\tilde{a_{22}}}$

(dzielimy drugi wiersz tak żeby dodstać jedynkę na przekątnej)

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & 1 & \frac{\tilde{a}_{23}}{\tilde{a}_{22}} \\ 0 & {\color{blue}\tilde{a}_{32}} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & 1 & \frac{\tilde{a}_{23}}{\tilde{a}_{22}} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 2^{nd} * \tilde{a}_{32}$
(odejmujemy drugi wiersz od trzeciego przeskalowany tak, żeby dostać zero dalej pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} 1 & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & 1 & \frac{\tilde{a}_{23}}{\tilde{a}_22} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} - \tilde{a}_{32}\frac{\tilde{a}_{23}}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \\ \tilde{b}_3 - \tilde{a}_{32}\frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \tilde{b}_3 - \tilde{a}_{32} \frac{\tilde{b}_2}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} / \hat{a}_{33}$
(dzielimy trzeci wiersz przez przekątną)

$$\begin{bmatrix} 1 & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & 1 & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

Obserwacja
Jeśli podczas odejmowania / dodawania dwóch wierszy uzyskamy wiersz zerowy (uzyskamy zera numeryczne) wówczas będziemy mieli problem z rozwiązaniem takiego układu równań.
Dzieje się tak wtedy jeśli wszystkie wyrazy jednego wiersza różnią się od wszystkich wyrazów drugiego wiersza jedynie o stałą
(jeśli dwa wiersze są liniowo zależne)

Algorytm 2

(ta wersja algorytmu nie generuje jedynek na przekątnej,
nie dzieli wiersza z przekątną, używa innego mnożnika,
poza tym jest identyczna,
nie rozwiązuje ona również problemu z liniowo zależnymi wierszami)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * \frac{a_{21}}{a_{11}}$

(odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego przeskalowany tak,
żeby dostać zero pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 1^{st} * \frac{a_{31}}{a_{11}}$
(odejmujemy pierwszy wiersz od trzeciego przeskalowany tak żeby dostać zero dalej pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

Wprowadzamy nowe oznaczenie wyrazów $\tilde{a}_{ij}$

$\sim$

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 2^{nd} * \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}}$

(odejmujemy drugi wiersz od trzeciego przeskalowany tak żeby dostać zero dalej pod przekątną)

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} - \tilde{a}_{13}\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 - \tilde{b}_2\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \color{red}{\tilde{a}_{22}} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} - \tilde{a}_{13}\frac{\color{blue}{\tilde{a}_{32}}}{\color{red}{\tilde{a}_{22}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 - \tilde{b}_2\frac{\color{blue}{\tilde{a}_{32}}}{\color{red}{\tilde{a}_{22}}} \end{bmatrix}$$

Na koniec dla uproszczenia oznaczamy nowe wyrazy $\hat{a}_{ij}$ oraz $\hat{b}_i$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & \hat{a}_{13} \\ 0 & \hat{a}_{22} & \hat{a}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

Różnica w stosunku do Algorytmu 1: Brak jedynek na przekątnej

Eliminacja Gaussa z pivotingiem

$(?)\ \frac{1}{0}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$2 = \max(|0|, |1|, |2|)$

Zamieniamy pierwszy i trzeci wiersz (ALE NIE NIEWIADOME!!!)

$\frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 - (-2)\frac{1}{2} = 2 & 3 - 1\frac{1}{2} = \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 - (-1)\frac{1}{2} = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

Eliminacja Gaussa z pivotingiem

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{13}{2} \\ 9 \end{bmatrix}$$

4=max(|2|,|4|)

Zamieniamy drugi i trzeci wiersz

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix}$$

$$3^{rd} = 3^{rd} - 2^{nd} * \frac{2}{4} = 3^{rd} - 2^{nd} * \frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} - 1\frac{1}{2} = 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ \frac{13}{2} - 9\frac{1}{2} = \frac{13-9}{2} = \frac{4}{2} = 2 \end{bmatrix}$$

u Lb L

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} == \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$2x_3 = 2$, więc $x_3 = 1$
$4x_2 + x_1 = 9$, $4x_2 = 9 - 1$ więc $x_2 = 2$
$2x_1 - 2x_2 + x_3 = -1$, $2x_1 = 2 * 2 - 1 - 1$, więc $x_1 = 1$
Sprawdzenie

$$\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 * 1 + 4 * 2 + 1 * 1 \\ 1 * 1 + 1 * 2 + 3 * 1 \\ 2 * 1 - 2 * 2 + 2 * 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

OK!

$Ax \stackrel{?}{=} b$

LU faktoryzacja

Algorytm LU faktoryzacji został zaproponowany przez Polskiego matematyka Tadeusza Banachiewicza w 1938 roku

Tadeusz Banachiewicz, Bulletin of the Polish Academy of Sciences, 1938, Seria A 393 (po francusku)

Figure: Tadeusz Banachiewicz , astronom, matematyk i geolog, urodzony 13 lutego 1882 w Warszawie, od 1919 pracował na Uniwersytecie Jagiellońskim, dyrektor obserwatorium astronomicznego w Krakowie, od 1945 roku pracował również na AGH, zmarł 17 listopada 1954 w Krakowie. Zdjęcie Apollo 11 kratera Banachiewicza na Księżycu.

Tadeusz Banachiewicz wynalazł również w 1930 tzw. "Krakowiany" metodę operacji na macierzach $A@B = B^T A$ która jak obecnie wiemy pozwala przyspieszać obliczenia na komputerach.

LU faktoryzacja

Banachiewicz nie jest powszechnie kojarzony na świecie z algorytmem LU faktoryzacji. Są ku temu dwa powody

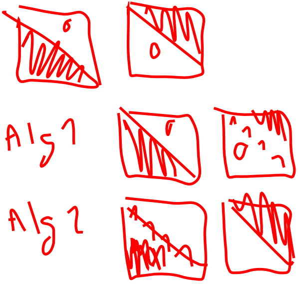
Czasem niesłusznie mówi się na świecie że LU faktoryzacja została odkryta przez Prescott Durand Crouta, amerykańskiego matematyka (urodzony 28 lipca 1907, pracował na wydziale matematyki Masachusset Institue of Technology, zmarł 25 września 1984). Crout opisał swoją wersje algorytmu w 1941 roku.
P.D. Crout, A short method for evaluating determinants and solving systems of linear equations with real or complex coefficients, Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, 60 (1941) 1235–1240.
W 1924 algorytm faktoryzacji dla macierzy symetrycznych (czyli mniej ogólną metodę) zaproponował André-Louis Cholesky (urodzony 15 października 1875 w Montguyon, zginął podczas bitwy 31 sierpnia 1918 w Bagneux, Francuski oficer wojskowy oraz matematyk, studiował na Ecole Polytechnique w Paryżu)
Cholesky, Bulletin of Geodesia, 1924, 2, 5 (opublikowane po francusku przez kolegę Choleskiego)

```
c
c   Least squares solution by Cholesky-Banachiewicz
c   triangle decomposition of normal equations.
c
c     Alex Schwarzenberg-Czerny,
c              Astronomical Observatory
c            of Adam Mickiewicz University,
c     Poznan,                                    1993
c
      real function cracow(en,n1,maxn1,idf,detnth)
      implicit none
      real en,enii,s,detnth,eniimx,eniimn,tol
      integer n1,maxn1,idf,i,j,k,l,n
      dimension en(maxn1,maxn1)
      data tol/5.e-8/
c  Normal equations solver
      if (n1.gt.maxn1) goto 99
      n=n1-1
      do 4 i=1,n
        enii=0.
        if (en(i,i).ge.tol) enii=1./sqrt(en(i,i))
        en(i,i)=-1.
        do 4 l=i,n+i
          j=mod(l,n1)+1
          if (l.gt.n) en(j,i+1)=0.
          en(j,i)=en(j,i)*enii
          do 4 k=max(1,l-n),i
 4          en(j,i+1)=en(j,i+1)-en(j,k)*en(i+1,k)
c  The equations are already solved
c  Now square Q to get  inverse/covariance
c  matrix en(n1,n1)*Q'*Q
      en(n1,n1)=en(n1,n1)/max(1,idf)
      detnth=0.
      eniimx=en(1,1)
      eniimn=eniimx
      do 12 i=1,n
        enii=en(i,i)
        if (idf.gt.0) then
          do 10 j=1,i
            s=0.
            do 11 k=i,n
 11           s=s+en(i,k)*en(j,k)
 10         en(j,i)=s*en(n1,n1)
        endif
        if(enii.lt.0.) then
          detnth=detnth-log(-enii)
          en(n1,i)=-1./enii
        endif
        eniimx=max(enii,eniimx)
 12     eniimn=min(enii,eniimn)
      cracow=eniimx/eniimn
      detnth=exp(2.*detnth/n)
 99   end
```

Figure: Algorytm Tadeusza Banachiewicza według artykułu ”On matrix factorization and efficient least square problem” A. Schwarzenberg-Czerny, Astronomy and Astrophysics Supplement Series 110, 405-410 (1995)

LU faktoryzacja

$$A = LU$$



U trójkątna górna
L trójkątna dolna

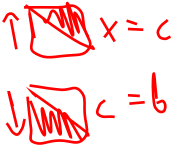
$$Ax = b$$

$$LUx = b$$

$$L\underbrace{Ux}_{c} = b$$

$Lc = b$ rozwiązujemy względem c
$Ux = c$ rozwiązujemy względem x

$Ux = c$



Obserwacja:
Algorytm eliminacji Gaussa generuje U

Problem:
Gdzie jest L?

L jest rekonstruowane na podstawie wyrazów przez które mnożymy wiersze przy odejmowaniu

$\frac{a_{21}}{a_{11}}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * \frac{a_{21}}{a_{11}}$
(odejmujemy pierwszy wiersz od drugiego przeskalowany tak, żeby dostać zero dalej pod przekątną)

L U

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

LU faktoryzacja

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 1^{st} * \frac{a_{31}}{a_{11}}$
(odejmujemy pierwszy wiersz od trzeciego przeskalowany tak, żeby dostać zero dalej pod przekątną)

L U

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - a_{12}\frac{a_{21}}{a_{11}} & a_{23} - a_{13}\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32} - a_{12}\frac{a_{31}}{a_{11}} & a_{33} - a_{13}\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - b_1\frac{a_{21}}{a_{11}} \\ b_3 - b_1\frac{a_{31}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

LU faktoryzacja

Dla uproszczenia oznaczamy nowe wyrazy $\tilde{a}_{ij}$ oraz $\tilde{b}_i$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 \end{bmatrix}$$

$3^{rd} = 3^{rd} - 2^{nd} * \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}}$

(odejmujemy drugi wiersz od trzeciego przeskalowany tak, żeby dostać zero dalej pod przekątną)

L U

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & 0 \\ \frac{a_{31}}{a_{11}} & \frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} - \tilde{a}_{23}\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{b}_1 \\ \tilde{b}_2 \\ \tilde{b}_3 - \tilde{b}_2\frac{\tilde{a}_{32}}{\tilde{a}_{22}} \end{bmatrix}$$

Wynik LU faktoryzacji (wyrazy oznaczone $\hat{l}_{ij}$, $\hat{u}_{ij}$, oraz $\hat{b}_i$)

Alg 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hat{l}_{21} & 1 & 0 \\ \hat{l}_{31} & \hat{l}_{32} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_{11} & \hat{u}_{12} & \hat{u}_{13} \\ 0 & \hat{u}_{22} & \hat{u}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{u}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$2 = \max(|0|,|1|,|2|)$, zamieniamy pierwszy i trzeci wiersz , czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{13} = P_{13}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

L $\quad$ P_{13} $\quad$ A

LU faktoryzacja z pivotingiem

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$2^{nd} = 2^{nd} - 1^{st} * \frac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & \frac{5}{2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

POCZĄTKOWE PERM CZĘŚCIOWE

L L

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&2&\frac{5}{2}\\0&4&1\end{bmatrix}$$

4=max(|2|,|4|), zamieniamy drugi i trzeci wiersz

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$P_{23}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&4&1\\0&2&\frac{5}{2}\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&4&1\\0&2&\frac{5}{2}\end{bmatrix}$$

$$3^{rd}=3^{rd}-2^{nd}*\frac{2}{4}=3^{rd}-2^{nd}*\frac{1}{2}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&4&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

I   PERM   CZĘŚCIOWE L   PERM   CZĘŚCIOWE L   U

LU faktoryzacja z pivotingiem

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&-2&1\\0&4&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

P_{13} P_{23} h

$$PL = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\\frac{1}{2}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

L^1 L^2

$$P = (permutacje) = P_{23} * P_{13}\begin{bmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad L = (reszta) = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&1\end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix}2&-2&1\\0&4&1\\0&0&2\end{bmatrix}$$

h

$$P = (permutacje) = P_{23} * P_{13} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = (reszta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$PLU = PA$

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Sprawdzamy

$$PLU = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}^{P} \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}}^{L} \overbrace{\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}^{U} =$$

$$PA = \underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}}$$

LU faktoryzacja i wiele prawych stron

Obserwacja

Algorytm LU faktoryzacji umożliwia szybkie rozwiązanie problemu gdy pojawia się nowa prawa strona (szybciej niż eliminacja Gaussa)

$A = LU \quad O(N^3)$

$$Ax = b_1$$

$$LUx = b_1 \quad \mathcal{O}(N^2)$$

$Lc_1 = b_1$ rozwiązujemy względem c_1 $\mathcal{O}(N)^2$

$Ux = c_1$ rozwiązujemy względem x $\mathcal{O}(N)^2$

$Lc_1 = b_1 \qquad c_1 = b_1$

$Ux = c_1 \qquad x = c_1$

$$Ax = b_2$$

$$LUx = b_2 \quad \text{(za darmo)}$$

$Lc_2 = b_2$ rozwiązujemy względem c_2 $\mathcal{O}(N)^2$

$Ux = c_2$ rozwiązujemy względem x $\mathcal{O}(N)^2$

Podsumowanie

A macierz kwadratowa $A \in \mathcal{R}^{n \times n}$
Wówczas następujące warunki są równoważne

- Istnieje A^{-1}
- Istnieje $y \neq 0$ takie że $Ay = 0$
- Kolumny A są liniowo niezależne
- Wiersze A są liniowo niezależne
- $det(A) \neq 0$
- Dla wszystkich b istnieje dokładnie jedno x takie że $Ax = b$

Otwarty problem naukowy

Tadeusz Banachiewicz wprowadził "Krakowiany" które umożliwiały tańsze wykonywanie obrotów podczas obliczeń pozycji obiektów astronomicznych.
https://www.jacquesvallee.net/wp-content/uploads/2018/11 The_Strange_Case_of_the_Cracovian_Operat-1.pdf
Czy da się zaprojektować i zaimplementować *QR* faktoryzacje używającą "Krakowianów" tak żeby ilość operacji zmiennoprzecinkowych była tańsza?
Zaimplementowanie QR faktoryzacji za pomocą szybkiego mnożenia "Krakowianów" Tadeusza Banasiewicza na CPU lub GPU (rozwiązanie grozi doktoratem)
Jak to dobrze zrobić dla zwykłych macierzy?
//wersja Konrada Jopka (mojego doktoranta)
https://bitbucket.org/aghflops/dgemm/src/master/
//wersja prof. Roberta van de Geijna (Uniwersytet Teksański)
http://wiki.cs.utexas.edu/rvdg/HowToOptimizeGemm

Blokowa eliminacja Gaussa

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

gdzie $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ to podmacierze, x_1, x_2 to wektory niewiadomych, b_1, b_2 to wektory prawych stron

$$\begin{aligned} A_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$A_{11} = L_{11}U_{11}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^{-1} * \{ \quad L_{11}U_{11}x_1 + A_{12}x_2 &= b_1 \quad \} \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_{11}^{-1}L_{11}U_{11}x_1 + L_{11}^{-1}A_{12}x_2 &= L_{11}^{-1}b_1 \\ A_{21}x_1 + A_{22}x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

Blokowa eliminacja Gaussa

$$
\begin{aligned}
L_{11}^{-1} L_{11} U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\
A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\
A_{21} x_1 + A_{22} x_2 &= b_2
\end{aligned}
$$

$2^{nd} = 2^{nd} - A_{21} U_{11}^{-1} 1^{st}$ ponieważ
$\left(A_{21} - A_{21} U_{11}^{-1} U_{11}\right) x_1 = 0$, czyli

$$
\begin{aligned}
U_{11} x_1 + L_{11}^{-1} A_{12} x_2 &= L_{11}^{-1} b_1 \\
0 + \left(A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12}\right) x_2 &= b_2 - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} b_1
\end{aligned}
$$

To się nazywa dopełnienie Schura $\left(A_{22} - A_{21} U_{11}^{-1} L_{11}^{-1} A_{12}\right)$