Wartości i wektory własne
&
Dekompozycja na wartości osobliwe

Maciej Paszyński

Wydział Informatyki
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
home.agh.edu.pl/paszynsk

Jeśli zamierzasz używasz fragmentów tego wykładu, skontaktuj się z autorem

Pierwsze macierze na świecie, Tybet 650 rok p.n.e.

Najstarsza znana ną świecie macierz

$$M = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Program trzeci (dla par dwuosobowych)

Proszę w wybranym języku programowania napisać program który

- Oblicza normę macierzową $\|M\|_1$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $\|M\|_1$
- Oblicza normę macierzową $\|M\|_2$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $\|M\|_2$
- Oblicza normę macierzową $\|M\|_p$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $\|M\|_p$
- Oblicza normę macierzową $\|M\|_\infty$
- Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzowy $\|M\|_\infty$
- ~~Oblicza SVD macierzy M~~

Proszę do obliczania wektorów i wartości własnych macierzy M użyć biblioteki numerycznej ze swojego języka programowania

Raport

Proszę przygotować raport który dla każdego punktu zawiera następujące elementy

- Przedstawia algorytm (np. sposób obliczania normy macierzowej $\|M\|_1$)
- Przedstawia istotne fragmenty kodu (np. obliczania normy macierzowej $\|M\|_1$)
- Przedstawia wynik dla macierzy M (ewentualnie z obliczeniami pośrednimi)

Normy wektorowe i macierzowe

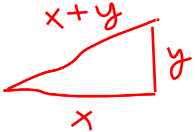
Norma wektorowa

$$\|x\| > 0 \text{ jeśli } x \neq 0$$

$$\|0\| = 0$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$



Norma macierzowa

$$\|A\| > 0 \text{ jeśli } A \neq 0$$

$$\|0\| = 0$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$$

Normy wektorowe

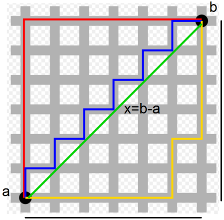


Figure: Norma wektorowa mierzy długość wektora lub odległość punktów np. $\|x\| = \|b-a\|$, dla $x = b - a$ wektora łączącego punkty a i b

$\|x\|_1 = \sum_{i=1,\dots,n} |x_i|$ norma jedynkowa (taksówkowa lub Manhatańska) (czerwona = niebieska = żółta)

$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1,\dots,n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ norma dwójkowa (Euklidesowa) (zielona linia)

$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$ norma nieskończoność (dłuższa czarna linia na brzegu)

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1,\dots,n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (p=1 taksówkowa, p=2 Euklidesowa)

Normy macierzowe indukowane z norm wektorowych

Norma wektorowa $\|x\|_v$ indukuje norme macierzową

$$\|A\|_M = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

NORMA Z WARTOŚCI / NORMA Z ARGUMENTU

Indukowane normy macierzowe $\frac{1}{\|x\|}$ = LICZBA $\quad \alpha\|y\| = \|\alpha y\|$

$$\|A\|_1 = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_1}\|_1 = max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1$$

$$\|A\|_2 = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2$$

Ax

$$\|A\|_p = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_p}\|_p = max_{\|x\|_p=1}\|Ax\|_p$$

$$\|A\|_\infty = max_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = max_{x\neq 0}\|A\frac{x}{\|x\|_\infty}\|_\infty = max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty$$

Dla każdej normy indukowanej mamy $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M\|x\|_v$

Norma Frobeniusa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Norma Frobeniusa (oryginalnia, nie indukowana norma macierzowa)

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\|A\|_F = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2)^{\frac{1}{2}} = (1 + 4 + 9 + 16)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{30}$$

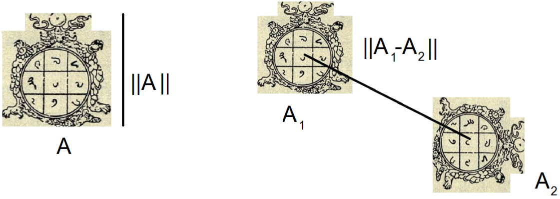


Figure: Każda norma macierzowa mierzy ”długość” macierzy, lub ”odległość” dwóch macierzy

Ferdinand Georg Frobenius

Figure: Niemiecki matematyk, urodzony 26 października 1849 w Berlinie, pracował na Uniwersytecie w Berlinie oraz na Uniwersytecie w Zurichu (w latach 1875-1892), zmarł 3 sierpnia 1917 w Berlinie.

Lista obiektów matematycznych nazwana na cześć Frobeniusa:

Arithmetic and geometric Frobenius, Frobenioid, Frobenius algebra, Frobenius category, Frobenius coin problem, Frobenius number, Frobenius covariant, Frobenius element, Frobenius endomorphism (also known as Frobenius morphism, Frobenius map), Frobenius determinant theorem, Frobenius formula, Frobenius group, Frobenius complement, Frobenius kernel, Frobenius inner product, Frobenius norm, Frobenius manifold, Frobenius matrix, Frobenius method, Frobenius normal form, Frobenius polynomial, Frobenius product, Frobenius pseudoprime, Frobenius reciprocity, Frobenius solution to the hypergeometric equation, Frobenius theorem (differential topology), Frobenius theorem (real division algebras), Frobenius's theorem (group theory), Frobenius conjecture, Frobenius–Schur indicator, Cauchy–Frobenius lemma, Perron–Frobenius theorem, Quadratic Frobenius test, Quasi-Frobenius ring

Norma indukowana jedynkowa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_1 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_1}{\|x\|_1} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_1}\|_1 = max_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1$$

$\|x\|_1 = 1$ w normie jedynkowej to znaczy $|x_1| + |x_2| = 1$ czyli

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}$ lub $x = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$

ZE SFERY W NORMIE $\|\cdot\|_1$

$x = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}$ wówczas

$$\|Ax\|_1 = \| \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} \alpha \\ 1 - \alpha \end{bmatrix}} \|_1 = \| \begin{bmatrix} \alpha + 2(1-\alpha) \\ 3\alpha + 4(1-\alpha) \end{bmatrix} \|_1 =$$

$$\| \begin{bmatrix} -\alpha + 2 \\ -\alpha + 4 \end{bmatrix} \|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$$

Norma indukowana jedynkowa

$x = \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix}$ wówczas

$\|A\|_1 = \max \|Ax\|_1$

x z6 SFFGN $\|x\|_1 = 1$

$$\|Ax\|_1 = \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \\ \alpha - 1 \end{bmatrix} \|_1 = \| \begin{bmatrix} -\alpha + 2(\alpha - 1) \\ -3\alpha + 4(\alpha - 1) \end{bmatrix} \|_1 =$$

$$\| \begin{bmatrix} \alpha - 2 \\ \alpha - 4 \end{bmatrix} \|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$$

W obu przypadkach mamy $\|Ax\|_1 = |\alpha - 2| + |\alpha - 4|$
podstawmy różne α
($\alpha = 0$) wówczas = 2+4=6
($\alpha = 1$) wówczas = 1+3=4
($\alpha = 1/2$) wówczas = 3/2+7/2=10/2=5 (funkcja liniowa na (0,1))

$$\|A\|_1 = max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1 = 6$$

Norma indukowana jedynkowa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Inny sposób liczenia (maksymalna suma wartości bezwzględnych z kolumn)

$$\|A\|_1 = max_{j=1,\ldots,n} \sum_{i=1,\ldots,n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_1 = max\{1+3, 2+4\} = max\{4, 6\} = 6$$

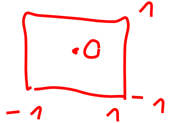
$\frac{1}{\|x\|_\infty}$ = LICZBA

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = \frac{\cancel{\|x\|}}{\cancel{\|x\|}} = 1$

WEKTOR ZE SFERY O PROMIENIU 1

$$\|A\|_\infty = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_\infty}{\|x\|_\infty} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_\infty} \|_\infty = max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$$



$max_{\|x\|_\infty = 1} \|Ax\|_\infty$
$\|x\|_\infty = 1$ oznacza $max\{|x_1|, |x_2|\} = 1$ czyli punkty (-1,*),(1,*),(*,-1),(*,1) Dość trudne do sprawdzenia.
Inny sposób liczenia (równoważny) (maksymalna suma wartości bezwzględnych z wierszy)

$$\|A\|_\infty = max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1,\dots,n} |a_{ij}|$$

$$\|A\|_\infty = max\{1 + 2, 3 + 4\} = max\{3, 7\} = 7$$

Normy macierzowe indukowane z norm wektorowych

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

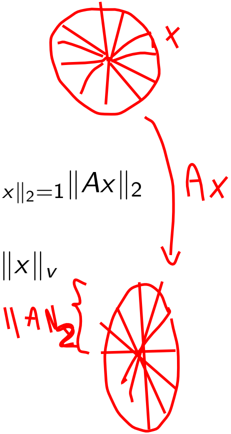
Norma wektorowa $\|x\|_v$ indukuje norme macierzową

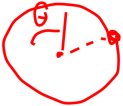
$$\|A\|_M = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v}$$

Indukowane normy macierzowe

$$\boxed{\|A\|_2} = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

Dla każdej normy indukowanej mamy $\|Ax\|_v \leq \|A\|_M \|x\|_v$





$(\cos\theta, \sin\theta)$

$\theta \in (0, 2\pi)$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = max_{x \neq 0} \|A \frac{x}{\|x\|_2}\|_2 = max_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$$

$\|x\|_2 = 1$ w normie dwójkowej to znaczy $x_1^2 + x_2^2 = 1$ czyli że leżą na okręgu o promieniu 1 czyli $x = \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix}$

wówczas szukamy takiego θ która da największą wartość

$$max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = max_\theta \| \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} cos\theta \\ sin\theta \end{bmatrix} \|_2 = max_\theta \| \begin{bmatrix} cos\theta + 2sin\theta \\ 3cos\theta + 4sin\theta \end{bmatrix} \|_2$$

$$= max_\theta \{((cos\theta + 2sin\theta)^2 + (3cos\theta + 4sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}\} = \ldots$$

Inny sposób obliczania

$$\|A\|_2 = |\lambda_1|$$

gdzie $|\lambda_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A

Wartości i wektory własne

Wartości własne λ (eigenvalues) i wektory własne x (eigenvectors) spełniają

$$Ax = \lambda x$$

$$\lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}}_{I} x$$

co jest równoważne równaniu $Ax - \lambda x = 0$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

Równanie takie ma rozwiązanie zerowe wtedy gdy wyznacznik $= 0$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

Z tego równania można policzyć wartości własne

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \|A\|_2 = |\lambda_1|$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix}}$$

Szukam największego λ by

$\|A\|_2$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 2 * 3 =$$

$$= 4 - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = \boxed{\lambda^2 - 5\lambda - 2}$$

$\Delta = (-5)^2 - 4 * 1 * (-2) = 25 + 8 = 33$, $\sqrt{\Delta} = \sqrt{33} = 5.7445$,

$\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2} = 5.3722$ $\quad |\lambda_1| = 5.3$ ✓

$\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2} = -0.3722$ $\quad |\lambda_2| = 0.3$

$$\|A\|_2 = |\lambda_1| = 5.3722$$

Historia wartości własnych

https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/math-origins-eigenvectors-and-eigenvalues

"Old English used the word agen to mean "owned or possessed (by)," and while this usage no longer exists in modern English, eigen is used to mean "self" in modern German."

"The proper mathematical history of the eigenvalue begins with celestial mechanics, in particular with Augustin-Louis Cauchy's 1829 paper "Sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires des mouvements des planétes" ("On the equation which helps one determine the secular inequalities in the movements of the planets")."

Wektory własne macierzy bezwładności bryły definiują oś obrotu bryły (co ma na przykład zastosowanie w obliczaniu orbit ciał niebieskich)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} == \begin{bmatrix} 998 & -999 \\ -999 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$$

$$cond_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$$

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = |\lambda_1|$$

(gdzie $|\lambda_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = |\hat{\lambda}_1|$$

(gdzie $|\hat{\lambda}_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A^{-1})

$$cond_2 = |\lambda_1| * |\hat{\lambda_1}|$$

Wartości własne A, tzn $Ax = \lambda x$ czyli $(A - \lambda I)x = 0$, możliwe gdy $\underbrace{det(A - \lambda I)}$ $= 0$ czyli

$$(A - \lambda I) = \overbrace{\begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}}^{A} - \lambda \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I} = \begin{bmatrix} 1000 - \lambda & 999 \\ 999 & 998 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} 1000 - \lambda & 999 \\ 999 & 998 - \lambda \end{bmatrix} = (1000-\lambda)(998-\lambda) - 999 * 999$$

$$= 998000 - 1000\lambda - 998\lambda + \lambda^2 - 998001 =$$

$b^2 - 4ac$

$$= \boxed{\lambda^2 - 1998\lambda - 1}$$

$\Delta = 1998 * 1998 + 4 * 1 = 3992000$

$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3992000} = 1997.998$

$\lambda_2 = \frac{1998 - 1997.998}{2} = 0,0001$

$\lambda_1 = \frac{1998 + 1997.998}{2} = 1997,999$ czyli $\|A\|_2 = 1997,999$

(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

Wartości własne A^{-1}, tzn $A^{-1}x = \lambda x$ czyli $(A^{-1} - \lambda I)x = 0$, możliwe gdy $det(A^{-1} - \lambda I) = 0$ czyli

$$(A^{-1} - \lambda I) = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix} - \lambda \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}^{I} = \begin{bmatrix} -998 - \lambda & 999 \\ 999 & -1000 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A^{-1} - \lambda I) = det \begin{bmatrix} -998 - \lambda & 999 \\ 999 & -1000 - \lambda \end{bmatrix} =$$

$$(-998 - \lambda)(-1000 - \lambda) - 999 * 999 =$$

$$(998 + \lambda)(+1000 + \lambda) - 999 * 999 = 998000 + 998\lambda + 1000\lambda + \lambda^2 - 998001$$

$$= \boxed{\lambda^2 + 1998\lambda - 1}$$

$\Delta = 1998 * 1998 + 4 * 1 = 3992008$

$\sqrt{\Delta} = \sqrt{3992008} = 1998,001$

$\lambda_1 = \frac{-1998 - 1998,001}{2} = -1998,0005$ czyli $\|A^{-1}\|_2 = 1998,005$

$\lambda_2 = \frac{-1998 + 1998,001}{2} = 0,0005$

(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Współczynnik uwarunkowania macierzy

$$cond_2 = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1000 & 999 \\ 999 & 998 \end{bmatrix}$$

$$\|A\|_2 = \lambda_1 = 1997,999$$

(gdzie λ_1 to największa wartość własna macierzy A)

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -998 & 999 \\ 999 & -1000 \end{bmatrix}$$

$$\|A^{-1}\|_2 = \hat{\lambda}_1 = 1998,005$$

(gdzie $\hat{\lambda}_1$ to największa wartość własna macierzy A^{-1})

PRAWIE 4 MILIONY

$$cond_2 = \lambda_1 * \hat{\lambda}_1 = 1997,999 * 1998,005 = 3992101,90195$$

Wartości własne dla ogólnej macierzy 2x2

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix}$$

Szukam największego λ by

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2 - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 + \lambda(-a_{11} - a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

czyli $a = 1, b = -a_{11} - a_{22}, c = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$\Delta = b^2 - 4ac = a_{11}^2 + a_{22}^2 - 6a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$

$\lambda_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\lambda_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

$$\|A\|_2 = MAX\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$$

(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Wartości i wektory własne

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1\cancel{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0 \qquad (1)$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - (-1)*(-1) = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0}$$

$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

czyli wartości własne $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = 1$
(wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Dla danej wartości własnej z reguły mamy wiele wektorów własnych
Wektory własne dla dla wartości własnej $\lambda_1 = 3$

To taki wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ że $Ax = \lambda_1 Ix$ czyli $(A - \lambda_1 I)x = 0$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda_1 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_1 I)x = 0$ czyli

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2$$

Każdy wektor własny postaci $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ -\alpha \end{bmatrix}$ jest dobry

na przykład $x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Wartości i wektory własne

Dla danej wartości własnej z reguły mamy wiele wektorów własnych

Wektory własne dla dla wartości własnej $\lambda_2 = 1$

To taki wektor $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ że $Ax = \lambda_2 I x$ czyli $(A - \lambda_2 I)x = 0$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 - \lambda_2 & -1 \\ -1 & 2 - \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$(A - \lambda_2 I)x = 0$ czyli

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$$

Każdy wektor własny postaci $x = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \end{bmatrix}$ jest dobry

na przykład $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Wartości i wektory własne

Jeśli macierz jest trójkątna górna, to jej wartości własne leżą na przekątnej

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = (3-\lambda)(1-\lambda) = 0$$

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ (wartości własne porządkujemy od największej do najmniejszej)

Jeśli macierz A jest symetryczna, wówczas wartości własne i wektory własne są rzeczywiste

Jeśli macierz A nie jest symetryczna, wówczas wartości własne mogą być zespolone

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$det(A - \lambda I) = 0$ czyli $| \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} | = 0$

czyli $(2-\lambda)(2-\lambda) + 1 = 0$, $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$

czyli $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 * 5 = -4$, czyli $\sqrt{\Delta} = 2i$ (i jednostka zespolona)

czyli$\lambda_i = \frac{-b+/-\sqrt{\Delta}}{2a}$ czyli $\lambda_1 = \frac{4+2i}{2} = 2 + i$, $\lambda_2 = \frac{4-2i}{2} = 2 - i$.

Wartości własne dla macierzy 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det(A - \lambda I) = |\begin{bmatrix} 4-\lambda & 9 & 2 \\ 3 & 5-\lambda & 7 \\ 8 & 1 & 6-\lambda \end{bmatrix}| = 0$$

$$(4-\lambda)|\begin{bmatrix} 5-\lambda & 7 \\ 1 & 6-\lambda \end{bmatrix}| - 9|\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 8 & 6-\lambda \end{bmatrix}| + 2|\begin{bmatrix} 3 & 5-\lambda \\ 8 & 1 \end{bmatrix}| = 0$$

$$(4-\lambda)(5-\lambda)(6-\lambda) - 7 - 9 * 3(6-\lambda) - 56 + 2 * 3 * 1 - (5-\lambda) * 8 = 0$$

Trudne do rozwiązania - dostajemy $\lambda_1 = 15$, oraz dwie wartości zespolone $\lambda_2, \lambda_3 = 4.89i$. Czyli $\|A\|_2 = 15$.

Znajdowanie wartości własnych

Wartości własne można znajdować poprzez znalezienie pierwiastków równania wielomianowego.
Niestety, Norweski matematyk, Neils Henrik Abel udowodnił w 1824 roku że nie ma ogólnego wzoru na pierwiastki równania wielomianowego dla wielomianów stopnia > 4.
Nie da się więc podać ogólnego algorytmu deterministycznego obliczania wartości własnych.
W tym celu stosujemy metody numeryczne.

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Tym razem mamy macierz która może nie być kwadratowa
(macierz ma n wierszy i m kolumn,
reprezentuje więc odwzorowane liniowe z $\mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^m$)

$$A \in \mathcal{R}^{n \times m}$$

Rozkład SVD to coś podobnego do LU lub QR faktoryzacji, można wykonać go również dla macierzy nie będącej macierzą kwadratową.

Def. **range** (obraz operatora reprezentowanego przez macierz A)

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in Ax : x \in \mathcal{R}^n\}$$

Def.**rank** (rząd macierzy A)

$$rankA = dim\mathcal{R}(A)$$

Def. **null space** (jądro operatora reprezentowanego przez macierz A)

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{R}^m : Ax = 0\}$$

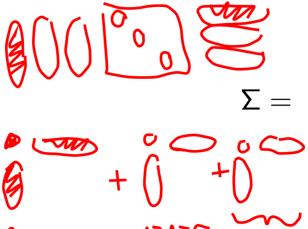
Mamy $dim\mathcal{R}(A) + dim\mathcal{N}(A) = m$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n\times m}$ da się zdekomponować

$$A = U\Sigma V^T$$

$U \in \mathcal{R}^{n\times n}$, $U^T = U^{-1}$, $V \in \mathcal{R}^{m\times m}$, $V^T = V^{-1}$ (macierze ortogonalne), gdzie $\Sigma \in \mathcal{R}^{n\times m}$ to macierz wartości osobliwych σ_i



$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_r & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

WARTOŚCI OSOBLIWE

RANK 1 UPDATE

$r = rank(A) =$ liczba liniowo niezależnych kolumn

Każda macierz $A \in \mathcal{R}^{n\times m}$ jest ortogonalnie równoważna do macierzy diagonalnej

Rozkład według wartości osobliwych $A = U\Sigma V^T$

Interpretacja geometryczna $\quad V^T = V^{-1}$

$\boxed{A = U\Sigma V^T}$ $/V$, V jest ortogonalne czyli $V^TV = V^{-1}V = I$ $\quad /V^T$

czyli $AV = U\Sigma$. Na przykład

$u_1 \quad u_2 \qquad \Sigma$

$$\boxed{A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\right]}_{U}\boxed{\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}}\overbrace{\frac{1}{3\sqrt{5}}\left[\begin{matrix}\begin{bmatrix}5 & 2 & 4\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0 & 2 & -1\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}-2 & 1 & 2\end{bmatrix}\end{matrix}\right]}^{V^T}\begin{matrix}v_1\\v_2\\v_3\end{matrix}$$

$n = 2, m = 3$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\left[\begin{bmatrix}5\\2\\4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\1\\2\end{bmatrix}\right]}_{V} = \underbrace{\left[\begin{bmatrix}\frac{1}{15}\\ \frac{2}{15}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{15}\\ -\frac{1}{15}\end{bmatrix}\right]}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\end{bmatrix}}_{\Sigma}$$

Mamy zbiór wektorów bazy $u_1, \ldots, u_r$ w przestrzeni $\mathcal{R}^n$

Mamy zbiór wektorów bazy $v_1, \ldots, v_r$ w przestrzeni $\mathcal{R}^m$

Mamy odwzorowanie $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ które przerzuca jedną bazę w drugą

$Av_i = \sigma_i u_i$ dla $i = 1, \ldots, r$

$A^T u_i = \sigma_i v_i$ dla $i = 1, \ldots, r$

$$
\begin{aligned}
v_1 \rightarrow \sigma_1 &\rightarrow u_1 \\
\vdots \rightarrow A \quad &\rightarrow \vdots \\
v_r \rightarrow \sigma_r &\rightarrow u_r \\
v_{r+1} &\rightarrow 0 \\
&\vdots \\
v_m &\rightarrow 0
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{R}(A) = \{y \in Ax : x \in \mathcal{R}^n\}; \qquad \mathcal{R}(A) = span\{u_1, ..., u_r\}$$

$$rankA = dim\mathcal{R}(A) = r$$

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathcal{R}^m : Ax = 0\}; \qquad \mathcal{N}(A) = span\{v_{r+1}, ..., v_n\}$$

Rozkład według wartości osobliwych $A^{-1} = A^T = V\Sigma^{-1}U^T$

$$
\begin{aligned}
u_1 \rightarrow \frac{1}{\sigma_1} \rightarrow v_1 \\
\vdots \rightarrow A^T \quad \rightarrow \vdots \\
u_r \rightarrow \frac{1}{\sigma_r} \rightarrow v_r \\
u_{r+1} \rightarrow 0 \\
\vdots \\
u_n \rightarrow 0
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{R}(A^T) = \{y \in A^T x : x \in \mathcal{R}^m\}$$

$$\mathcal{R}(A^T) = span\{v_1, ..., v_r\}$$

$$rankA^T = dim\mathcal{R}(A^T) = r$$

$$\mathcal{N}(A^T) = \{x \in \mathcal{R}^n : A^T x = 0\}$$

$$\mathcal{N}(A^T) = span\{u_{r+1}, ..., u_n\}$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

MUSZ DO LICZENIA SVD

1. AA^T obliczam wartości i wektory własne
2. A^TA

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n\times m}$ da się zdekomponować

$$A = U\Sigma V^T$$

Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}}^{u} \overbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \end{bmatrix}}^{\Sigma} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_1 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_2 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_3 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

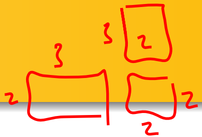
0 0 0

gdzie $A \in \mathcal{R}^{2\times3}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{R}^{2\times2}$, $\mathcal{V} \in \mathcal{R}^{3\times3}$,
σ_1, σ_2 to pierwiastki wartości własnych λ_1, λ_2 macierzy kwadratowej AA^T, czyli

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} \leftarrow \lambda_1, \lambda_2$$

$u_1, u_2 \in \mathcal{R}^{2\times1}$ wektory własne AA^T (left singular values of A)
$v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{R}^{3\times1}$ wektory własne A^TA (right singular values of A)

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

AA^T

Wielomian charakterystyczny $det(AA^T - \lambda I) = 0$

$$det(AA^T - \lambda I) = | \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 \\ 2 & (8-\lambda) \end{bmatrix} | =$$

$$(5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 40 - 5\lambda - 8\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$$

równanie kwadratowe $\Delta = b^2 - 4ac = 13^2 - 4 * 1 * 36 = 25$,
$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$
$\lambda = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4$, oraz $\lambda = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9$,
Sortujemy od największej do najmniejszej $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 4$.
Wartości osobliwe $\sigma_1 = \sqrt{9} = 3$, $\sigma_2 = \sqrt{4} = 2$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Teraz obliczamy wektory własne

$$AA^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = 9, \lambda_2 = 4$$

$$AA^T u_1 = \lambda_1 u_1, \quad AA^T v_2 = \lambda_2 u_2$$

$$(AA^T - \lambda_1 I)u_1 = 0, \quad (AA^T - \lambda_2 I)u_2 = 0$$

$$(AA^T - 9 * I)u_1 = 0, \quad (AA^T - 4 * I)u_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 \\ 2 & (8-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 \\ 2 & (8-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 \\ 2 & (8-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_1^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4u_1^1 + 2u_1^2 = 0; \quad 2u_1^1 - 1u_1^2 = 0;$$

$$4u_1^1 = 2u_1^2; \quad 2u_1^1 = u_1^2;$$

czyli

$$u_1 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|u_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|u_1\|_2}$ gdzie $\|u_1\|_2 = \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ czyli

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 \\ 2 & (8-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2^1 \\ u_2^2 \end{bmatrix} = 0$$

$$u_2^1 + 2u_2^2 = 0; \quad 2u_2^1 + 4u_2^2 = 0;$$

$$u_2^1 = -2u_2^2; \quad 2u_2^1 = -4u_2^2;$$

czyli

$$u_2 = \alpha \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|u_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|u_2\|_2}$ gdzie $\|u_2\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

czyli $u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$

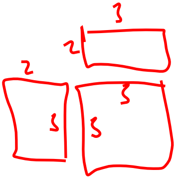
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$U = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$



$$A^TA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \; A^TA$$

Wielomian charakterystyczny $det(A^TA - \lambda I) = 0$

$$det(A^TA - \lambda I) = \left| \begin{bmatrix} (5-\lambda) & 2 & 4 \\ 2 & (4-\lambda) & 0 \\ 4 & 0 & (4-\lambda) \end{bmatrix} \right| =$$

$$(5-\lambda)(4-\lambda)^2 + 2*0*4 + 4*2*0 - (5-\lambda)*0*0 - 2*2*(4-\lambda) - 4*(4-\lambda)*4 =$$

$$(5-\lambda)(4-\lambda)(4-\lambda) - 2*2*(4-\lambda) - 4*(4-\lambda)*4 =$$

$$(4-\lambda)\left((5-\lambda)(4-\lambda) - 2*2 - 4*4\right) =$$

$$(4-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda) - 20) = 0$$

$$(4-\lambda)((5-\lambda)(4-\lambda)-20))=0$$

$$(4-\lambda)=0 \implies \lambda=4$$

$$((5-\lambda)(4-\lambda)-20))=0; \quad 20-4\lambda-5\lambda+\lambda^2-20=0; \quad \lambda^2-9\lambda=0$$

równanie kwadratowe $\lambda(\lambda-9)=0$ czyli $\lambda=0$ lub $\lambda=9$
Sortujemy od największej do najmniejszej $\lambda_1=9, \lambda_2=4, \lambda_3=0.$
Wartości osobliwe $\sigma_1=\sqrt{9}=3$, $\sigma_2=\sqrt{4}=2$

Teraz obliczamy wektory własne

$$A^T A v_1 = \lambda_1 v_1, \quad A^T A v_2 = \lambda_2 v_2, \quad A^T A v_3 = \lambda_3 v_3$$

$$(A^T A - \lambda_1 I)v_1 = 0, \quad (A^T A - \lambda_2 I)v_2 = 0, \quad (A^T A - \lambda_3 I)v_3 = 0$$

$$(A^T A - 9 * I)v_1 = 0, \quad (A^T A - 4 * I)v_2 = 0, \quad (A^T A - 0 * I)v_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-9) & 2 & 4 \\ 2 & (4-9) & 0 \\ 4 & 0 & (4-9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} (5-4) & 2 & 4 \\ 2 & (4-4) & 0 \\ 4 & 0 & (4-4) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 0$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 0 \\ 4 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \\ v_1^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$-4v_1^1 + 2v_1^2 + 4v_1^3 = 0; \quad 2v_1^1 - 5v_1^2 = 0; \quad 4v_1^1 - 5v_1^3 = 0;$$

$$-4v_1^1 + 2v_1^2 + 4v_3^1 = 0; \quad 2v_1^1 = 5v_1^2; \quad 4v_1^1 = 5v_1^3;$$

na przykład $v_1^1 = 5,\ v_1^2 = 2,\ v_1^3 = 4$
wówczas $-4 * 5 + 2 * 2 + 4 * 4 = -20 + 4 + 16 = 0;$

$$v_1 = \alpha \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_1\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_1\|_2}$ gdzie
$\|v_1\|_2 = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{25 + 4 + 16} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ czyli

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \\ v_2^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$v_2^1 + 2v_2^2 + 4v_2^3 = 0; \quad 2v_2^1 = 0; \quad 4v_2^1 = 0$$

$$v_2^1 = 0; \quad 2v_2^2 = -4v_2^3;$$

czyli

$$v_2 = \alpha \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_2\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_2\|_2}$ gdzie $\|v_2\|_2 = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$
czyli

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3^1 \\ v_3^2 \\ v_3^3 \end{bmatrix} = 0$$

$$5v_3^1 + 2v_3^2 + 4v_3^3 = 0; \quad 2v_3^1 + 4v_3^2 = 0; \quad 4v_3^1 + 4v_3^3 = 0$$

$$5v_3^1 + 2v_3^2 + 4v_3^3 = 0; \quad v_3^2 = -\frac{1}{2}v_3^1; \quad v_3^3 = -v_3^1$$

Przyjmuję $v_3^1 = 1$ wówczas $v_3^2 = -\frac{1}{2}$, oraz $v_3^3 = -1$ czyli

$$v_3 = \alpha \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T = (inna)\alpha \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

wersor $\|v_3\|_2 = 1$ daje $\alpha = \frac{1}{\|v_3\|_2}$ gdzie

$\|v_3\|_2 = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$ czyli

$$v_3 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

$$v_1 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$v_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$$

$$V = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 0 & -2\sqrt{5} \\ 2 & 6 & 1\sqrt{5} \\ 4 & -3 & 2\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Szybszy sposób na policzenie v_1, v_2, v_3

$$A = U\Sigma V^T$$

$$A^T = (U\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T U^T = V\Sigma U^T$$

$$A^T U = V\Sigma$$

$$V = A^T U \Sigma^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} v_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} \qquad \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} = A^T \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_2}$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \end{bmatrix} = \sigma_1^{-1} A^T \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} v_2 \end{bmatrix} = \sigma_2^{-1} A^T \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix}$$

Szybszy sposób na policzenie v_1, v_2, v_3

$$v_1 = \sigma_1^{-1} A^T u_1; \quad v_2 = \sigma_2^{-1} A^T u_2$$

Mamy $\sigma_1 = 3$, $\sigma_2 = 2$, czyli $\sigma_1^{-1} = \frac{1}{3}$, $\sigma_2^{-1} = \frac{1}{2}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T; \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$$

$$v_1 = \sigma_1^{-1} A^T u_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1*1+2*2 \\ 2*1+0*2 \\ 0*1+2*2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = \sigma_2^{-1} A^T u_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1*2-2*1 \\ 2*2+0 \\ 0*2-1*2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Natomiast v_3 liczymy jak poprzednio

Rozkład według wartości osobliwych
Singular Value Decomposition (SVD)

Każdą macierz $A \in \mathcal{R}^{n \times m}$ da się zdekomponować

$$A = U \Sigma V^T$$

Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{\sigma_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} & v_1 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_2 & \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} & v_3 & \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \color{red}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{2} & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$