AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA

Wydział Informatyki

Projekt nr 3
Z przedmiotu Rachunek Macierzowy

"Normy i współczynniki uwarunkowania macierzy"

Autor: *Jacek Tyszkiewicz i Michał Godek*
Kierunek studiów: *Informatyka*

Kraków, 2025

Spis treści

1. Normy i współczynniki uwarunkowania macierzy

1.1. Cel projektu

Celem projektu było zaimplementowanie algorytmów obliczający normy indukowane: jedynkowa, dwójkowa, p-ta i nieskończoność. Podobnie jest dla współczynników uwarunkowania: cztery funkcje obliczające współczynniki uwarunkowania macierzy odpowiadające tym normom. W sumie jest to 8 krótkich funkcji napisanych w pythonie przy pomocy biblioteki numpy.

1. Oblicza normę macierzową $||M||_1$
2. Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_1$
3. Oblicza normę macierzową $||M||_2$
4. Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_2$
5. Oblicza normę macierzową $||M||_p$
6. Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_p$
7. Oblicza normę macierzową $||M||_\infty$
8. Oblicza współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_\infty$

1.2. Omówienie i implementacje

1.2.1. Norma macierzowa $||M||_1$

Ogólny wzór dla normy macierzowej $||M||_1$ jest określony:

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right)$$

Rys. 1.1. Wzór normy macierzowej $||M||_1$

Czyli jest to maksymalna suma absolutnych wartości kolumn macierzy.

1.2.1.1. Implementacja

```python
import numpy as np

def norm_M1(a:np.array, m, n):
    sum_max = 0
    for i in range(n): # iterate over each of n columns
        sum_tmp = 0
        for j in range(m): # in i-th column sum each element
            sum_tmp += abs(a[j, i])
        if sum_tmp > sum_max: # update greates value
            sum_max = sum_tmp
    return sum_max
```

1.2.1.2. Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

na podstawie powyższego wzoru obliczamy

$$||A||_1 = max(1 + |-2|, |-7| + |-3|) = max(3, 10) = 10$$

1.2.2. Współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_1$

Obliczany mnożąc normy indukowane jedynką dla macierzy i jej odwrotności:

$$cond(A) = ||A||_1||A^{-1}||_1$$

1.2.2.1. Implementacja

Korzystamy z wcześnijszej definicji normy norm$_M1$:

```
import numpy as np

def cond_M1(a:np.array, n):
    a_inv =  np.linalg.inv(a)
    norm_a = norm_M1(a, n, n)
    norm_a_inv = norm_M1(a_inv, n, n)
    return norm_a * norm_a_invsum_tmp
    return sum_max
```

1.2.2.2. Przykład

A = $\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$

A^{-1} = $\begin{bmatrix} -66.0000 & 28.0000 \\ 97.0000 & -41.0000 \end{bmatrix}$

cond(A) = $||A||_1||A^{-1}||_1 \approx 13.8 * 163 \approx 2249.4$

1.2.3. Norma macierzowa $||M||_2$ (norma spektralna)

Określona wzorem

$$||A||_2 = |\lambda_1|$$

gdzie $|\lambda_1|$ to największa (na moduł) wartość własna macierzy A.
Wartości własne obliczane są na podstawie równania

$$det(A - \lambda I) = 0$$

1.2.3.1. Implementacja

Implementacja korzysta z wbudowanej w bibliotekę numpy funkcję eigvals która zwraca wartości własne.

```
import numpy as np

def norm_M2(a:np.array):
    a_lambda = np.linalg.eigvals(a)
    return np.max(np.abs(a_lambda))
```

1.2.3.2. Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

na podstawie powyższego wzoru obliczamy

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-\lambda & -7 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix}$$

$$det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -7 \\ -2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 10$$

$$x_1 \approx -5.24$$

$$x_2 \approx 3.24$$

więc $||A||_2 = 5.24$

1.2.4. Współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_2$

Obliczany mnożąc normy indukowane dwójką dla macierzy i jej odwrotności:

$$cond_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$$

1.2.4.1. Implementacja

Korzystamy z wcześnijszej definicji normy norm$_M 2$:

```
import numpy as np

def cond_M2(a:np.array, n):
    a_norm = norm_M2(a, n)
    a_norm_inv = norm_M2( np.linalg.inv(a), n)
    return a_norm * a_norm_inv
```

1.2.4.2. Przykład

A = $\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$

A^{-1} = $\begin{bmatrix} -66.0000 & 28.0000 \\ 97.0000 & -41.0000 \end{bmatrix}$

$cond_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2 \approx 10.7 * 107 \approx 1146.9$

1.2.5. Norma macierzowa $||M||_p$

Na podstawie p normy dla wektora:

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Rys. 1.2. Norma p dla wektora

Obliczenie tej normy dla macierzy będzie podobne - sumujemy każdą wartość bezwzględną podniesioną do potęgi a następnie zwracamy pierwiastek stopnia p z tej sumy.

1.2.5.1. Implementacja

```
def norm_p(a:np.array, p,  n):
    total = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            total += abs(a[i, j])**p
    return  total **(1/p)
```

1.2.5.2. Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad p = 3$$

$$norm_3(A) = \sqrt[3]{1^3 + |-2|^3 + 2^3 + 1^3} = \sqrt[3]{18} \approx 2.6$$

1.2.6. Współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_p$

$$cond_p(A) = ||A||_p||A^{-1}||_p$$

1.2.6.1. Implementacja

```
def norm_p(a:np.array, p,  n):
    total = 0
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            total += abs(a[i, j])**p
    return  total **(1/p)
```

1.2.6.2. Przykład

A = $\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$

A^{-1} = $\begin{bmatrix} -66.0000 & 28.0000 \\ 97.0000 & -41.0000 \end{bmatrix}$

p=3

$$cond_3(A) = ||A||_3||A^{-1}||_3 \approx 2.6 * 0.5 \approx 1.4$$

1.2.7. Norma macierzowa $||M||_\infty$

Ogólny wzór dla normy macierzowej $||M||_\infty$ jest określony:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \right)$$

Rys. 1.3. wzór na normę $||M||_\infty$

Czyli jest to wartość maksymalna spośród sum absolutnych wartości wierszy macierzy.

1.2.7.1. Implementacja

```

def norm_inf(a:np.array, m, n):
    sum_max = 0
    for i in range(m):
        sum_tmp = 0
        for j in range(n):
            sum_tmp += abs(a[i, j])
        if sum_tmp > sum_max:
            sum_max = sum_tmp
    return sum_max
```

1.2.7.2. Przykład

Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

na podstawie powyższego wzoru obliczamy

$$||A||_\infty = max(1 + |-7|, |-2| + |-3|) = max(8, 5) = 8$$

1.2.8. Współczynnik uwarunkowania macierzy $||M||_\infty$

$$cond_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty$$

1.2.8.1. Implementacja

```

def cond_inf(a:np.array, m):
    A_inv =  np.linalg.inv(a)
    norm_a = norm_inf(a, m, m)
    norm_a_inv = norm_inf(A_inv, m, m)
    return norm_a * norm_a_inv
```

1.2.8.2. Przykład

A = $\begin{bmatrix} 4.1 & 2.8 \\ 9.7 & 6.6 \end{bmatrix}$

A^{-1} = $\begin{bmatrix} -66.0000 & 28.0000 \\ 97.0000 & -41.0000 \end{bmatrix}$

$cond_\infty(A) = ||A||_\infty ||A^{-1}||_\infty \approx 8 * 0.85 \approx 4.7$

$cond_2(A) = ||A||_2 ||A^{-1}||_2 \approx 10.7 * 107 \approx 1146.9$ Celem algorytmu eliminacji Gaussa jest rozwiązanie układu równań liniowych:

$$A \cdot x = b \quad \text{gdzie} \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad x, b \in \mathbb{R}^n$$

1.2.9. Podsumowanie

1.2.9.1. normy

||A||1 - największa suma wartości bezwzgl w kolumnach ||A||2 - największa bezwzględna wartość własna ||A||p - wzór ||A||inf - największa suma wartości bezwzgl w wierszach

1.2.9.2. uwarunkowania

Odpowiedni iloczyn norm macierzy i jej przeciwności