Formulario para C2: Campos electromagnéticos (a.k.a. "Violencia Extrema")

Felipe Vera A.

1. Glosario

   - $\underset{\bullet}{V}(x)$, $\underset{\bullet}{I}(x)$: Fasores de voltaje y corriente en algún punto x del cable. Corresponden a señales estacionarias.
   - $\underset{\bullet}{V}^{+}$, $\underset{\bullet}{I}^{+}$: Componentes fasoriales incidentes de tensión y corriente.
   - $\underset{\bullet}{V}^{-}$, $\underset{\bullet}{I}^{-}$: Componentes fasoriales reflejados de tensión y corriente (I^{-} viaja en sentido contrario a I^{+}, por lo que para calcular Z_0 se le invierte el signo).
   - R, L: Parámetros distribuidos de resistencia e inductancia del material conductor del cable. Si es un conductor perfecto, $R = 0$. Se miden en $\left[\frac{\Omega}{m}\right]$ y $\left[\frac{H}{m}\right]$ respectivamente.
   - G, C: Parámetros distribuidos de conductancia y capacitancia del material dieléctrico del cable. Si es un dieléctrico perfecto, $G = 0$. Se miden en $\left[\frac{S}{m}\right]$ y $\left[\frac{F}{m}\right]$ respectivamente.
   - Z_0: Impedancia característica de la LTX. Relaciona sus componentes de tensión con las de corriente (puede ser real aún cuando el cable sea de conductor/dieléctrico perfecto)
   - Y_0: Admitacia característica de la LTX. Recíproco de Z_0.
   - γ: Constante de propagación de la señal dentro del cable. Depende de las características de permeabilidad/permitividad/conductividad del material conductor y dieléctrico del cable; o también de sus parámetros distribuidos R,L,G,C.
   - α: Constante de atenuación. Parte real de γ. Representa la atenuación que sufre la amplitud de la onda dentro del cable tanto por efectos resistivos como capacitivos/inductivos.
   - β: Constante de fase. Parte imaginaria de γ. Define la longitud de la onda.
   - v_p: Velocidad de fase. Rapidez con la cual la onda se desplaza a través del dieléctrico del cable.

2. **EDOs de los fasores de tensión y corriente de las LTX**

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \cdot V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \cdot I(x)$$

3. **Solución general a la EDP de líneas de transmisión**

$$\underset{\bullet}{V}(x) = V^{+} \cdot e^{-\gamma x} + V^{-} \cdot e^{\gamma x}$$
$$\underset{\bullet}{V}(x) = \underset{\bullet}{V}^{+}(x) + \underset{\bullet}{V}^{-}(x)$$

$$\underset{\bullet}{I}(x) = I^{+} \cdot e^{-\gamma x} + I^{-} \cdot e^{\gamma x}$$
$$\underset{\bullet}{I}(x) = \underset{\bullet}{I}^{+}(x) + \underset{\bullet}{I}^{-}(x)$$
$$\underset{\bullet}{I}(x) = \frac{V^{+}}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{V^{-}}{Z_0} \cdot e^{\gamma x}$$

4. **Impedancia y admitancia característica**

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \qquad Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

5. **Constante de propagación, atenuación y fase** (Se recomienda emplear aproximaciones para α y β dependiendo de la naturaleza de la línea.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} - (\omega^2 LC - RG)}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} + (\omega^2 LC - RG)}{2}}$$

6. **Características de onda**

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

7. **Aproximaciones para líneas**

   a) **Línea con pequeñas pérdidas**
   Las condiciones para que una línea de transmisión posea pocas pérdidas es que posea conductores y dieléctricos perfectos, es decir...

$$R << \omega L \quad \left(\frac{R}{\omega L} < \frac{1}{10}\right) \qquad G << \omega C \quad \left(\frac{G}{\omega C} < \frac{1}{10}\right)$$

   - Constante de propagación, atenuación y fase.

$$\gamma \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) + j\omega\sqrt{LC} \qquad \alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\underbrace{\sqrt{\frac{C}{L}}}_{Y_0} + G\underbrace{\sqrt{\frac{L}{C}}}_{Z_0}\right) \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

   - Velocidad de fase e impedancia intrínseca del cable.

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \qquad Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad Y_0 \approx \sqrt{\frac{C}{L}}$$

   b) **Condición de distorsión mínima**
   Ocurre cuando la línea presenta comportamientos distintos para señales de distintas frecuencias, que terminarían deformando una señal compuesta de muchas frecuencias (como una cuadrada). Pueden ocurrir variaciones en Z_0 y α según la frecuencia (efecto de filtrado); o a v_p (efecto de dispersión). Para que la señal se distorsione lo menos posible al ser transmitida, se debe cumplir la condición de distorsión mínima.

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

   - Constante de propagación, atenuación y fase.

$$\gamma \approx \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC} \qquad \alpha \approx \sqrt{RG} \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

   - Velocidad de fase e impedancia intrínseca del cable.

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \qquad Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

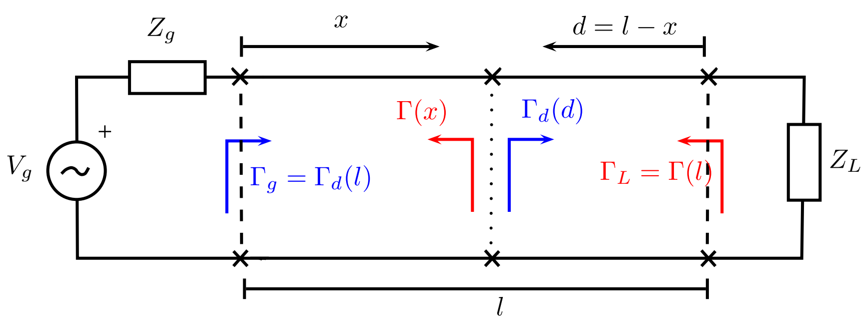
8. **Coeficientes de reflexión**

La señal proporcionada por el generador rebota en la carga, y luego en la impedancia de salida del generador también, debido a diferencias de impedancias con la característica de la línea de transmisión ($Z_L \neq Z_0$ -y/o- $Z_g \neq Z_0$)

Por ello es que se genera una onda estacionaria dentro del cable, la cual tiene máximos y mínimos provocados por interferencias.

Los coeficientes de reflexión son direccionales, no es el mismo para una onda yendo hacia la derecha como para otra yendo a la izquierda. En el caso de Γ_L el coeficiente de reflexión mira a la onda que incide desde la izquierda. En Γ_g ocurre todo lo contrario.

$$\Gamma_L = \frac{\text{Voltaje refejado al frente de la carga } (x = l)}{\text{Voltaje incidente al frente de la carga } (x = l)} = \frac{V^+}{V^-} \cdot e^{2\gamma l}$$



$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad\qquad \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0}$$

Casos especiales

- La carga es un *circuito abierto* $\rightarrow Z_L = \infty \Rightarrow \Gamma_L = 1$
- La carga es un *cortocircuito* $\rightarrow Z_L = 0 \Rightarrow \Gamma_L = -1$
- La carga está adaptada a la línea $\rightarrow Z_L = Z_0 \Rightarrow \Gamma_L = 0$

Es por eso que se dice que si la carga está adaptada a la línea la onda **no rebota** en ella. La impedancia del generador también puede estar adaptada, lo que haría que la onda sólo rebote una vez, en la carga.

También se puede definir el coeficiente de reflexión para cualquier punto de la línea $\Gamma(x)$ (la onda incidente viene del generador), util si esta tiene conectada otra en paralelo. Asimismo, existe $\Gamma_d(d)$, la cual representa el mismo coeficiente que el anterior, pero con la onda incidente desde la carga.

$$\Gamma(x) = \Gamma_L e^{-2\gamma l} \cdot e^{2\gamma x} \qquad\qquad \Gamma_d(d) = \Gamma_L e^{-2\gamma d}$$

La reflexión de la onda tanto en la carga como en el generador producen infinitas reflexiones de ondas en ambos lugares. Una expresión general (ecuación maestra) para la onda es:

$$\underset{\bullet}{V}(x) = \underbrace{\underset{\bullet}{V_g} \cdot \frac{Z_0}{Z_g + Z_0}}_{\text{Divisor de tensión}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma l}}}_{\text{Sumatoria rebotes}} \cdot \underbrace{(e^{-\gamma x} + \Gamma_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x})}_{\text{Componentes } V^+ y V^-} = V^+ e^{-\gamma x} \cdot (1 + \Gamma_L e^{-2\gamma(l-x)})$$

$$\underset{\bullet}{I}(x) = \underset{\bullet}{V_g} \cdot \frac{1}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_g e^{-2\gamma l}} \cdot \underbrace{(e^{-\gamma x} - \Gamma_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x})}_{\text{Componente } V^- \text{ invertida}}$$

Nótese que la expresión se simplifica muchísimo si la carga o el generador están adaptados a la línea (Γ_g o $\Gamma_L = 0$)

9. **Máximos y mínimos**:

Se grafica en el plano complejo el voltaje normalizado (asumiendo una línea sin pérdidas) obteniendo...

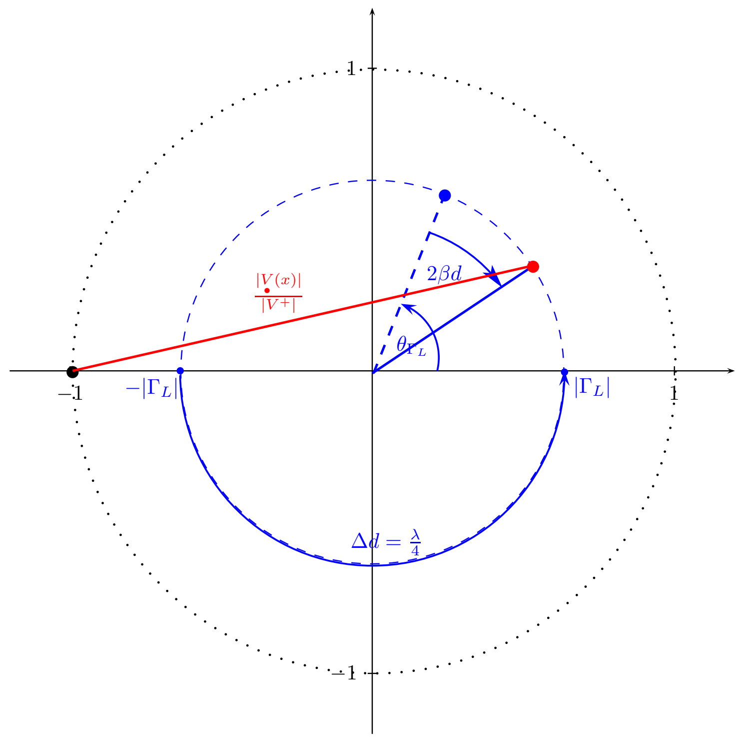
$$\frac{|\underset{\bullet}{V}(x)|}{|V^+|} = \left|1 + |\Gamma_L| \cdot e^{j(\theta_{\Gamma_L} - 2\beta d)}\right| \qquad\qquad \Gamma_L = |\Gamma_L| \cdot \theta_{\Gamma_L}$$

El gráfico de la figura representa el gráfico en el plano complejo de

$$|\Gamma_L| \cdot e^{j\theta_{\Gamma_L}} \cdot e^{-j2\beta d}$$

- $|\Gamma_L|$: Radio de la circunferencia azul. Representa la diferencia que tendrán las amplitudes de los máximos y los mínimos.
- θ_{Γ_L}: Grado de desfase que poseerá la reflexión de la onda al lado de la carga (en $d = 0$).
- $2\beta d$: Ligado a la longitud de onda, separación en el cable entre un máximo y un mínimo (el cual resulta ser $\frac{\lambda}{4}$)

Nota: Si $\alpha = 0$ la circunferencia azul de radio $|\Gamma_L|$ comienza a caer exponencialmente al origen, por lo que a medida que se recorre el cable también los máximos y mínimos empiezan a estar menos separados.



En esa circunferencia, se puede observar que el segmento rojo medirá como máximo $1 + |\Gamma_L|$ y como mínimo $1 - |\Gamma_L|$. Si a eso se le incluyen las pérdidas y se desnormaliza:

$$|\underset{\bullet}{V}(x)|_{\text{máx}} = V^+ e^{-\alpha d} \cdot \left|1 + e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|\right| \qquad\qquad |\underset{\bullet}{V}(x)|_{\text{mín}} = V^+ e^{-\alpha d} \cdot \left|1 - e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|\right|$$

Nota: Los máximos de corriente se encuentran en los mismos lugares de los mínimos de tensión y viceversa

Se define la razón de onda estacionaria ROE como:

$$ROE = \frac{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{máx}}}{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{mín}}} = \frac{1 + e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|}{1 - e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|}$$

Como ya se sabe, si la onda no se refleja, $ROE = 0$, y si se refleja completamente $ROE = \infty$.

También $\dfrac{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{máx}}}{|\underset{\bullet}{I}|_{\text{máx}}} \approx Z_0$ si $e^{-\alpha \cdot \frac{\lambda}{4}} \approx 1$

10. **Conversiones y constantes útiles**

$$1\,[dB] = 8,686\,[Np] \qquad\qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]$$