Formulario para C2: Campos electromagnéticos (a.k.a. "Violencia Extrema")

Felipe Vera A.

1. Glosario

   - $\underset{\bullet}{V}(x)$, $\underset{\bullet}{I}(x)$: Fasores de voltaje y corriente en algún punto x del cable. Corresponden a señales estacionarias.
   - $\underset{\bullet}{V}^+$, $\underset{\bullet}{I}^+$: Componentes fasoriales incidentes de tensión y corriente.
   - $\underset{\bullet}{V}^-$, $\underset{\bullet}{I}^-$: Componentes fasoriales reflejados de tensión y corriente (I^- viaja en sentido contrario a I^+, por lo que para calcular Z_0 se le invierte el signo).
   - R, L: Parámetros distribuidos de resistencia e inductancia del material conductor del cable. Si es un conductor perfecto, $R = 0$. Se miden en $\left[\frac{\Omega}{m}\right]$ y $\left[\frac{H}{m}\right]$ respectivamente.
   - G, C: Parámetros distribuidos de conductancia y capacitancia del material dieléctrico del cable. Si es un dieléctrico perfecto, $G = 0$. Se miden en $\left[\frac{S}{m}\right]$ y $\left[\frac{F}{m}\right]$ respectivamente.
   - Z_0: Impedancia característica de la LTX. Relaciona sus componentes de tensión con las de corriente (puede ser real aún cuando el cable sea de conductor/dieléctrico perfecto)
   - Y_0: Admitacia característica de la LTX. Recíproco de Z_0.
   - γ: Constante de propagación de la señal dentro del cable. Depende de las características de permeabilidad/permitividad/conductividad del material conductor y dieléctrico del cable; o también de sus parámetros distribuidos R,L,G,C.
   - α: Constante de atenuación. Parte real de γ. Representa la atenuación que sufre la amplitud de la onda dentro del cable tanto por efectos resistivos como capacitivos/inductivos.
   - β: Constante de fase. Parte imaginaria de γ. Define la longitud de la onda.
   - v_p: Velocidad de fase. Rapidez con la cual la onda se desplaza a través del dieléctrico del cable.

2. **EDOs de los fasores de tensión y corriente de las LTX**

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \cdot V(x) \qquad \frac{d^2I(x)}{dx^2} = (R + j\omega L)(G + j\omega C) \cdot I(x)$$

3. **Solución general a la EDP de líneas de transmisión**

$$\underset{\bullet}{V}(x) = V^+ \cdot e^{-\gamma x} + V^- \cdot e^{\gamma x}$$
$$\underset{\bullet}{V}(x) = \underset{\bullet}{V}^+(x) + \underset{\bullet}{V}^-(x)$$

$$\underset{\bullet}{I}(x) = I^+ \cdot e^{-\gamma x} + I^- \cdot e^{\gamma x}$$
$$\underset{\bullet}{I}(x) = \underset{\bullet}{I}^+(x) + \underset{\bullet}{I}^-(x)$$
$$\underset{\bullet}{I}(x) = \frac{V^+}{Z_0} \cdot e^{-\gamma x} - \frac{V^-}{Z_0} \cdot e^{\gamma x}$$

4. **Impedancia y admitancia característica**

$$Z_0 = \frac{V^+}{I^+} = -\frac{V^-}{I^-} \qquad Z_0 = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \qquad Y_0 = \frac{1}{Z_0}$$

5. **Constante de propagación, atenuación y fase** (Se recomienda emplear aproximaciones para α y β dependiendo de la naturaleza de la línea.

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} - (\omega^2 LC - RG)}{2}}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} + (\omega^2 LC - RG)}{2}}$$

6. **Aproximaciones para líneas:** Por default, μ_r y ϵ_r son 1.

   a) **Línea con pequeñas pérdidas**

   Las condiciones para que una línea de transmisión posea pocas pérdidas es que posea conductores y dieléctricos perfectos, es decir...

$$R << \omega L \quad \left(\frac{R}{\omega L} < \frac{1}{10}\right) \qquad G << \omega C \quad \left(\frac{G}{\omega C} < \frac{1}{10}\right)$$

   - Constante de propagación, atenuación y fase.

$$\gamma \approx \frac{1}{2}\left(R\sqrt{\frac{C}{L}} + G\sqrt{\frac{L}{C}}\right) + j\omega\sqrt{LC} \qquad \alpha \approx \frac{1}{2}\left(R\underbrace{\sqrt{\frac{C}{L}}}_{Y_0} + G\underbrace{\sqrt{\frac{L}{C}}}_{Z_0}\right) \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

   - Velocidad de fase e impedancia intrínseca del cable.

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \qquad Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}} \qquad Y_0 \approx \sqrt{\frac{C}{L}}$$

   b) **Condición de distorsión mínima**

   Ocurre cuando la línea presenta comportamientos distintos para señales de distintas frecuencias, que terminarían deformando una señal compuesta de muchas frecuencias (como una cuadrada). Pueden ocurrir variaciones en Z_0 y α según la frecuencia (efecto de filtrado); o a v_p (efecto de dispersión). Para que la señal se distorsione lo menos posible al ser transmitida, se debe cumplir la condición de distorsión mínima.

$$\frac{R}{L} = \frac{G}{C}$$

   - Constante de propagación, atenuación y fase.

$$\gamma \approx \sqrt{RG} + j\omega\sqrt{LC} \qquad \alpha \approx \sqrt{RG} \qquad \beta \approx \omega\sqrt{LC}$$

   - Velocidad de fase e impedancia intrínseca del cable

$$v_p \approx \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \qquad Z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{C}}$$

   - Parámetros distribuidos del cable

$$R = Z_0\alpha \qquad G = \frac{\alpha}{Z_0} \qquad L = \frac{Z_0\beta}{\omega} \qquad C = \frac{\beta}{\omega Z_0}$$

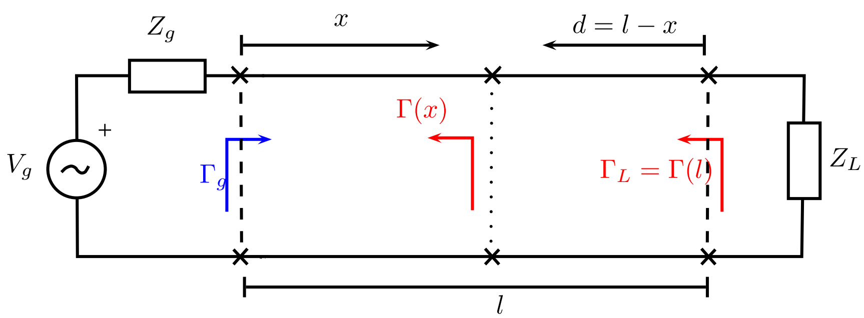
7. **Coeficientes de reflexión**

La señal proporcionada por el generador rebota en la carga, y luego en la impedancia de salida del generador también, debido a diferencias de impedancias con la característica de la línea de transmisión ($Z_L \neq Z_0$ -y/o- $Z_g \neq Z_0$)

Por ello es que se genera una onda estacionaria dentro del cable, la cual tiene máximos y mínimos provocados por interferencias.

Siempre se habla de *coeficiente de reflexión con onda incidiendo hacia la carga y reflejándose hacia el generador*. Hacia la otra dirección no tiene sentido, puesto que se tiene la onda que viene sin reflejarse desde el generador, salvo en Γ_g, que representa a las ondas que vuelven desde la carga que rebotan nuevamente en la impedancia del generador.

$$\Gamma_L = \frac{\text{Voltaje refejado al frente de la carga en } (x = l)}{\text{Voltaje incidente al frente de la carga en } (x = l)} = \frac{V^+}{V^-} \cdot e^{2\gamma l}$$



$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} \qquad \Gamma_g = \frac{Z_g - Z_0}{Z_g + Z_0} \qquad \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L}$$

Casos especiales

- La carga es un *circuito abierto* $\rightarrow Z_L = \infty \Rightarrow \Gamma_L = 1$
- La carga es un *cortocircuito* $\rightarrow Z_L = 0 \Rightarrow \Gamma_L = -1$
- La carga está adaptada a la línea $\rightarrow Z_L = Z_0 \Rightarrow \Gamma_L = 0$

Es por eso que se dice que si la carga está adaptada a la línea la onda **no rebota** en ella. La impedancia del generador también puede estar adaptada, lo que haría que la onda sólo rebote una vez, en la carga.

También se puede definir el coeficiente de reflexión para cualquier punto de la línea $\Gamma(x)$ (la onda incidente viene del generador), util si esta tiene conectada otra en paralelo. Asimismo, existe $\Gamma_d(d)$, la cual representa el mismo coeficiente que el anterior a una distancia d de la carga.

$$\Gamma(x) = \frac{V^-}{V^+} e^{2\gamma x} \qquad \Gamma(x) = \Gamma_L e^{-2\gamma(l-x)} \qquad \Gamma_d(d) = \Gamma_L e^{-2\gamma d}$$

La reflexión de la onda tanto en la carga como en el generador producen infinitas reflexiones de ondas en ambos lugares. Una expresión general (ecuación maestra) para la onda es:

$$\underset{\bullet}{V}(x) = K \cdot \underbrace{e^{-\gamma x} \cdot (1 + \Gamma(x))}_{V^+ \text{ y } V^-} \qquad \underset{\bullet}{I}(x) = \frac{K}{Z_0} e^{-\gamma x} \cdot (1 - \Gamma(x)) \qquad K = \underbrace{\underset{\bullet}{V_g} \cdot \frac{Z_0}{Z_g + Z_0} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_g \Gamma_L e^{-2\gamma l}}}_{\text{Propiedades de la línea}}$$

$$K = \tfrac{1}{2}\underset{\bullet}{V_g} \text{ si el generador o la carga está(n) adaptado(s) a la línea } (\Gamma_g \text{ o } \Gamma_L = 0)$$

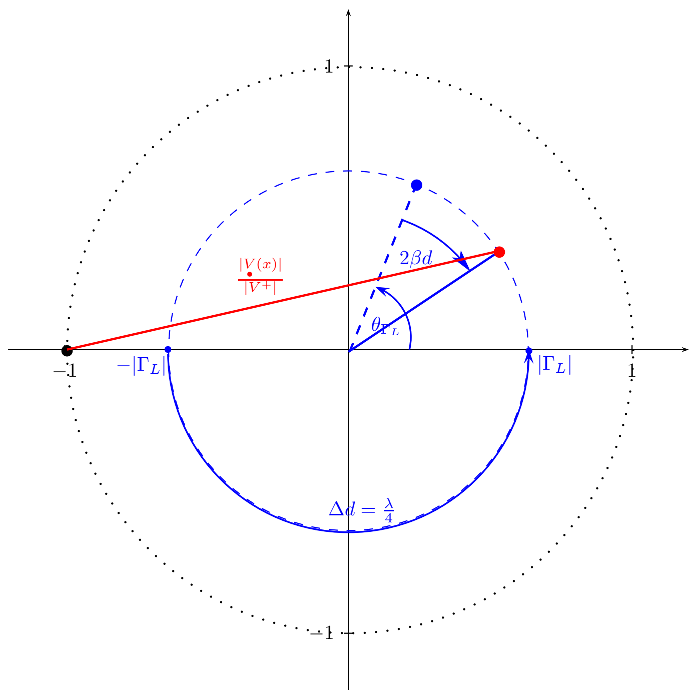
8. **Máximos y mínimos**:

   Se grafica en el plano complejo el voltaje normalizado (asumiendo una línea sin pérdidas y generador adaptado) obteniendo...

$$\frac{|\underset{\bullet}{V}(x)|}{|V^+|} = \left|1 + |\Gamma_L| \cdot e^{j(\theta_{\Gamma_L} - 2\beta d)}\right| \qquad\qquad \Gamma_L = |\Gamma_L| \cdot \theta_{\Gamma_L}$$

   El gráfico de la figura representa el gráfico en el plano complejo de

$$|\Gamma_L| \cdot e^{j\theta_{\Gamma_L}} \cdot e^{-j2\beta d}$$



   - $|\Gamma_L|$: Radio de la circunferencia azul. Representa la diferencia que tendrán las amplitudes de los máximos y los mínimos. (Impedancia aparente es resistiva pura)
   - θ_{Γ_L}: Grado de desfase que poseerá la reflexión de la onda al lado de la carga (en $d = 0$).
   - $2\beta d$: Ligado a la longitud de onda, separación en el cable entre un máximo y un mínimo (el cual resulta ser $\frac{\lambda}{4}$)

   Nota: Si $\alpha = 0$ la circunferencia azul de radio $|\Gamma_L|$ comienza a caer exponencialmente al origen, por lo que a medida que se recorre el cable también los máximos y mínimos empiezan a estar menos separados.

   En esa circunferencia, se puede observar que el segmento rojo medirá como máximo $1 + |\Gamma_L|$ y como mínimo $1 - |\Gamma_L|$. Si a eso se le incluyen las pérdidas y se desnormaliza:

$$|\underset{\bullet}{V}(x)|_{\text{máx}} = V^+ e^{-\alpha d} \cdot (1 + e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|) \qquad\qquad |\underset{\bullet}{V}(x)|_{\text{mín}} = V^+ e^{-\alpha d} \cdot (1 - e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|)$$

   Nota: Los máximos de corriente se encuentran en los mismos lugares de los mínimos de tensión y viceversa

   Se define la razón de onda estacionaria ROE como:

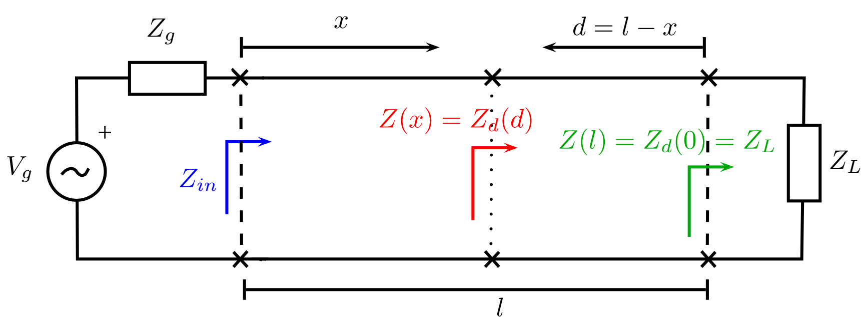
$$ROE = \frac{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{máx}}}{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{mín}}} = \frac{1 + e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|}{1 - e^{-2\alpha d}|\Gamma_L|}$$

   Como ya se sabe, si la onda no se refleja, $ROE = 0$, y si se refleja completamente $ROE = \infty$.

   Como los máximos de voltaje y corriente ocurren en distintos puntos, $\frac{|\underset{\bullet}{V}|_{\text{máx}}}{|\underset{\bullet}{I}|_{\text{máx}}} \approx Z_0$ sólo si la línea no tiene pérdidas.

9. **Impedancia aparente**

   Es el cuociente de la tensión y la corriente en un punto de la línea, corresponde a una impedancia Thévenin **observada hacia la carga**.

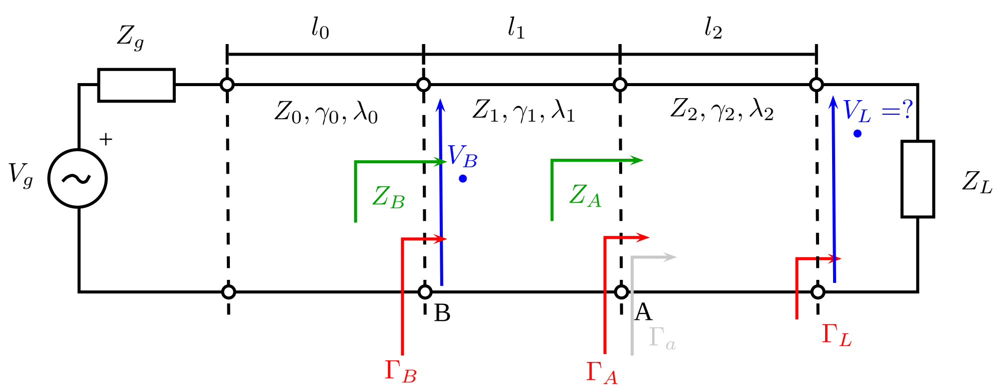


$$Z(x) = \frac{\dot{V}(x)}{\dot{I}(x)} = Z_0 \frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)} \qquad Z_d(d) = \frac{\dot{V}(l-d)}{\dot{I}(l-d)} = Z_0 \frac{1+\Gamma_L e^{-2\gamma d}}{1-\Gamma_L e^{-2\gamma d}} \qquad Z_{in} = Z_0 \frac{1+\Gamma_L e^{-2\gamma l}}{1-\Gamma_L e^{-2\gamma l}}$$

$$Z(x) = Z_0 \frac{Z_{in} - Z_0 tgh(\gamma x)}{Z_0 - Z_{in} tgh(\gamma x)} = \underbrace{Z_0 \frac{Z_{in} - jZ_0 \tan(\beta x)}{Z_0 - jZ_{in} \tan(\beta x)}}_{\text{Si } \alpha=0}$$

Por eso, la impedancia aparente es periódica cada $\frac{\lambda}{2}$ si la línea no tiene pérdidas, y se invierte cada $\frac{\lambda}{4}$.

10. **Líneas compuestas**



a) **Encontrar la impedancia aparente y el coeficiente de reflexión en el punto B**

- Conocer el Γ_L en la carga.
- Calcular la impedancia aparente Z_A.

$$Z_A = Z_2 \cdot \frac{1+\Gamma_L e^{-2\gamma_2 l_2}}{1-\Gamma_L e^{-2\gamma_2 l_2}}$$

- Obtener el coeficiente de reflexión Γ_A con la impedancia calculada Z_A y la impedancia del medio Z_1. (ojo que $\Gamma_a \neq \Gamma_A$)

$$\Gamma_A = \frac{Z_A - Z_1}{Z_A + Z_1}$$

- Repetir este procedimiento hasta encontrar Z_B y Γ_B.

b) **Encontrar el voltaje en la carga $\dot{V}_L$**

- Se desarrolla el primer trozo como una línea homogénea (carga = Z_B, Z_0), para crear un equivalente Thévenin en el punto B hacia el generador (encontrar voltaje $\dot{V}_B$ e impedancia Thévenin Z_{gb})
- Esa impedancia $Z_g b$ y V_b serán el generador para el próximo trozo de línea. Repetir el procedimiento.
- En el último trozo se puede encontrar $\dot{V}_L$.
- FORMULASSSS!!!

11. **Estrategias de adaptación de cargas**

   a) **Transformador de $\frac{\lambda}{4}$**
   Sirve para adaptar una carga real a una línea de impedancia real pura. Se trata de alargar la línea un largo m tal que al principio de la extensión $Re\{Z(x)\} = Re\{Z_0\}$.
   En el caso del transformador de $\frac{\lambda}{4}$, lo que varía es la impedancia de la extensión: Z_T. Para adaptarla, la extensión debe medir $\frac{\lambda}{4}$.

   $$Z_T = \sqrt{Z_0 \cdot Z_L}$$

   b) **Stubs en paralelo/serie**
   Sirven para adaptar la parte imaginaria (generalmente anularla) de la carga a una línea con impedancia real. Los stubs son extensiones de cable en serie o paralelo sin carga al final, actúan como una capacitancia/inductor. La diferencia si están en serie o paralelo es cómo se suman con la carga.

12. **Carta de Smith**

   Parte del análisis trigonométrico de la impedancia $Z_d(d)$. Se analiza con impedancias de carga *normalizadas*, tal que:

   $$z_l = \frac{Z_L}{Z_0} = r + jx$$

   Se ubica r en los círculos reales (desde la derecha hacia la izquierda), y x en los círculos imaginarios (desde la derecha hacia arriba para x positivo -*capacitivo*- y para abajo para x negativo -*inductivo*-)

   Luego se traza un segmento desde el origen (centro de la carta de Smith) hacia ese punto marcado para generar una circunferencia con ese radio, el cual corresponde a $|\Gamma_L|$

   Al avanzar una distancia d hacia el generador, se recorrerá esa circunferencia en sentido reloj; y al avanzar una distancia x hacia la carga, se recorrerá en sentido contrarreloj. Una vuelta completa equivale a $\frac{\lambda}{2}$

   Al avanzar la distancia deseada, se ubica con los círculos reales e imaginarios la impedancia aparente normalizada en ese punto, y se desnormaliza (multiplica nuevamente por Z_0) para obtener $Z_d(d)$

13. **Características de onda**

   $$v_p = \frac{\omega}{\beta} \qquad \omega = 2\pi f \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

14. **Conversiones y constantes útiles**

   $$1\,[dB] = 8,686\,[Np] \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \left[\frac{m}{s}\right]$$