

Formulario para C3, Campos electromagnéticos, a.k.a “Violencia Extrema”

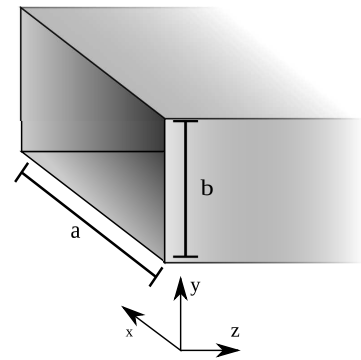
Felipe Vera A.

1. Guías de ondas rectangulares

Son canales en los que se transmiten ondas de frecuencias demasiado altas ($\sim 3\text{ GHz}$) para una línea de transmisión común y corriente con dos conductores, en el que se transmiten señales como voltajes/corrientes; en los cuales se transmiten las señales como campos eléctricos/magnéticos.

Con ello, la onda electromagnética rebota en la capa externa de material conductor, y circula por dentro del dieléctrico (generalmente aire o vacío), pero siempre desplazándose en la misma dirección de la guía de onda (por convención se acepta eje z).

Eso significa que cada señal se transmitirá como “imagen” con coordenadas xy ; **cada punto del plano corresponderá a una sinusoidal** cuya amplitud está dada por la función vectorial de dos coordenadas, E_0 y su constante de fase y atenuación está dada por γ_g (se asume casi siempre sin pérdidas al transmitirse en el vacío)



1.1. Glosario

- a, b : Dimensiones *ancho* y *alto* de la guía de ondas rectangular.
- k_c : *Número de onda de corte*. Dependen de las dimensiones de la G.O.
- γ_g : *Constante de propagación a lo largo de la G.O.*, β_g es su parte imaginaria.
- \vec{E}^0, \vec{H}^0 : *Amplitudes de onda*, dependientes sólo de las coordenadas x, y .
- **Modos TE, TM**: *Modo de onda* en que la componente z del campo eléctrico o magnético (respectivamente) son cero.
- m, n : Números correspondientes a los modos de onda.
- η : *Impedancia intrínseca del dieléctrico abierto* ???
- Z_g : *Impedancia de onda característica* ???
- f_c : *Frecuencia de corte* de un modo en la G.O.
- v_{gg} : *Velocidad de grupo* ???

1.2. Esenciales

$$\vec{E}_{\bullet}(x, y, z) = \vec{E}^0(x, y) \cdot e^{-\gamma_g \cdot z}$$

$$\vec{H}_{\bullet}(x, y, z) = \vec{H}^0(x, y) \cdot e^{-\gamma_g \cdot z}$$

1.3. Derivaciones de las ecuaciones de Maxwell

$$E_x^0(x, y) = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma_g \frac{\partial E_z^0}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial H_z^0}{\partial y} \right) \quad E_y^0(x, y) = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma_g \frac{\partial E_z^0}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial H_z^0}{\partial x} \right)$$

$$H_x^0(x, y) = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma_g \frac{\partial H_z^0}{\partial x} - j\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial y} \right) \quad H_y^0(x, y) = \frac{-1}{k_c^2} \left(\gamma_g \frac{\partial H_z^0}{\partial y} + j\omega\epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial x} \right)$$

$$\text{Donde: } k_c^2 = \gamma_g^2 + \omega^2\epsilon\mu$$

$$\text{O bien: } \gamma_g = \sqrt{k_c^2 - \omega^2\epsilon\mu}$$

1.4. Modos de propagación

Dependen de la frecuencia ω de la onda.

Caso 1: Modo de propagación guiado (sin atenuación)

Caso 2: No transmite energía/información.

Caso 3: Modo de atenuación evanescente (exponencial)

$$\omega > k_c\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\omega = k_c\sqrt{\mu\epsilon}$$

$$\omega < k_c\sqrt{\mu\epsilon}$$

En este caso $\gamma_g = \pm j\beta_g$ (imaginario puro)

En este caso $\gamma_g = 0$

En este caso $\gamma_g = \pm\alpha_g$ (real puro)

1.5. Modos transversales

Las ecuaciones de Maxwell y la de Helmholtz permiten reducir la cantidad de incógnitas (las cuales eran 7: $E_x^0, E_y^0, E_z^0, H_x^0, H_y^0, H_z^0$ y γ_g) a dos: H_z^0 y E_z^0 . Se puede pensar en la onda como una superposición entre ondas con componentes que son transversales al campo eléctrico ó al magnético, lo que da origen a:

1. **Modo transversal eléctrico $TE_{m,n}$.** En este caso m ó n pueden tomar valores naturales *incluyendo el cero*. Además ambos no pueden ser ceros a la vez.
2. **Modo transversal magnéticos $TM_{m,n}$.** En este caso m ó n pueden tomar valores naturales, ambos mayores a cero.

1.6. Frecuencia de corte y modo dominante

La menor frecuencia de onda que puede transmitir la GG.OO. es (donde a y b son las dimensiones de la guía de onda rectangular)

$$\text{Máx}\{a, b\} \geq \frac{\lambda}{2}$$

¹

En un modo la frecuencia de corte (de filtro pasa-bajos) es:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \cdot \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

Para un modo de propagación guiado:

$$\gamma_g = j\beta_g = j\omega\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

¹No estoy seguro si es máximo o mínimo...

Las frecuencias de corte son más pequeñas mientras más lo sean m y n . Se habla de **modo dominante** al modo más pequeño que puede transmitir una guía de ondas; y al **super-dominante**, al modo con frecuencia de corte inmediatamente mayor. Al intervalo de frecuencias entre esos dos modos se le llama **Banda de operación modo-modo**.

	$a < b$		$a > b$	
Dominante	TE _{0,1}		TE _{1,0}	
	$a < b < 2a$	$2a < b$	$b < a < 2b$	$a > 2b$
Super-dominante	TE _{1,0}	TE _{0,2}	TE _{0,1}	TE _{2,0}

k_c también puede obtenerse con los números n y m .

$$k_c^2 = \left(\frac{\pi \cdot m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi \cdot n}{b}\right)^2$$

1.7. Ecuaciones de campos para modo TE _{m,n}

Con estas ecuaciones se puede conocer las componentes de todos los campos dados para el modo TE _{m,n} dado el H_0 .

Ecuaciones de campo eléctrico

$$\begin{aligned} E_x^0(x, y) &= \frac{j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ E_y^0(x, y) &= \frac{-j\omega\mu}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ E_z^0(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de campo magnético

$$\begin{aligned} H_x^0(x, y) &= \frac{\gamma_g}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot H_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ H_y^0(x, y) &= \frac{\gamma_g}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ H_z^0(x, y) &= H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

1.8. Ecuaciones de campos para modo TM _{m,n}

Ídem para el anterior, con TM _{m,n} dado el E_0 .

Ecuaciones de campo eléctrico

$$\begin{aligned} E_x^0(x, y) &= \frac{-\gamma_g}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ E_y^0(x, y) &= \frac{-\gamma_g}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ E_z^0(x, y) &= E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned}$$

Ecuaciones de campo magnético

$$\begin{aligned} H_x^0(x, y) &= \frac{j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right) \cdot E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ H_y^0(x, y) &= \frac{-j\omega\epsilon}{k_c^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right) \cdot E_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \left[\frac{V}{m}\right] \\ H_z^0(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

Nótese que en la guía de ondas puede haber ondas de distintos modos superpuestas.

1.9. Otras variables del modo TE

- Impedancia de onda característica

$$Z_g^{\text{TE}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

- Velocidad de grupo

$$V_{gg} = \frac{1}{\left|\frac{\partial \beta_g}{\partial \omega}\right|} = \frac{\beta_g}{\mu\epsilon \sqrt{\omega_c^2 + \frac{\beta_g}{\mu\epsilon}}}$$

- Velocidad de fase

$$v_{pg} = \frac{\omega}{\beta_g} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

- Impedancia de onda característica TM

$$Z_g^{\text{TM}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}$$

- Impedancia intrínseca del dieléctrico abierto

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

- Longitud de onda de la guía

$$\lambda_g = \frac{v_{pg}}{f} = \frac{1}{f \sqrt{\mu\epsilon} \sqrt{1 - \left(\frac{f_c}{f}\right)^2}}$$

1.10. Potencia transmitida instantánea y promedio

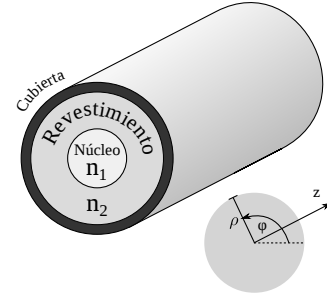
$$P_z(x, y, z) = \underline{E}_x \cdot \underline{H}_y^* - \underline{E}_y \cdot \underline{H}_x^* \quad P_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \frac{1}{Z_g^*} \right\} \iint_S \left(|E_x^0(x, y)|^2 + |E_y^0(x, y)|^2 \right) dA$$

Donde S es un corte transversal de la guía de onda.

2. Fibras ópticas

Se trata de dos dieléctricos concéntricos muy usados para transmitir información a muy altas frecuencias (hasta 25 THz), y la onda se transmite dentro de ésta gracias a las leyes de Snell de refracción (reflexión total interna) y las de Maxwell. Además permite tener muy poca contaminación por ruido o interferencias electromagnéticas al no poseer conductores.

Nótese que para trabajar con las fibras ópticas se usará principalmente *coordenadas cilíndricas* r, φ, z .



2.1. Glosario

- n_1, n_2 : Índices de refracción del dieléctrico interno y el externo respectivamente. Relaciona las velocidades en las que las o.e.m. se propagan dentro de ellos.
- a : Se define como el radio del núcleo.
- ϕ_1, ϕ_2 : Ángulos en los que ocurre la refracción de la onda entre los dieléctricos internos. (ϕ_1 : dentro, ϕ_2 : fuera)
- A : *Apertura numérica* de una fibra óptica de índice escalonado.
- $\text{TE}_{0,m}, \text{TM}_{0,m}$: *Modos transversal eléctrico y magnético de la fibra óptica*. En la primera $E_z^0 = 0$ y en la segunda, $H_z^0 = 0$.
- $\text{HE}_{\nu,m}, \text{EH}_{\nu,m}$: *Modos híbridos* que no cumplen con transversalidad. El campo mayor va primero.

- $J_\nu(up)$: Funciones de Bessel del primer tipo, de orden ν , para conocer los campos en el núcleo.
- $K_\nu(wp)$: Funciones de Bessel modificadas del segundo tipo, de orden ν , para conocer los campos en el revestimiento.
- V : Frecuencia normalizada, para saber en qué modos es posible que la onda se propague.
- b : Constante de fase normalizada.

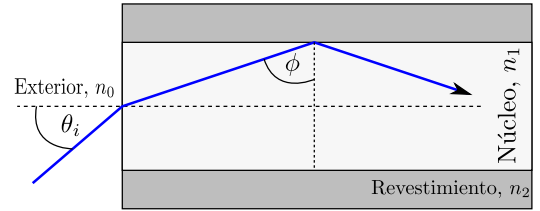
2.2. Propagación en multi-modo

En este tipo de propagación se sobreponen ondas en varios modos, del mismo modo que en las GG.OO. Se aplican en éstas las leyes de Snell, pero es mucho más susceptible a la dispersión que en el mono-modo. Para transmisión multi-modo, el núcleo debe ser relativamente ancho (diámetro $\sim 100[\mu m]$).

2.2.1. Fibras de índice escalonado

Este tipo de fibra óptica tiene su núcleo y revestimiento de un índice de refracción uniforme n_1 y n_2 .

La finalidad de la fibra óptica es mantener confinada a la onda dentro del núcleo. El ángulo incidente no debe ser muy grande para que la onda no se salga hacia el revestimiento, así como en las guías de onda había una longitud de onda máxima.



(μ_r comúnmente tiende a 1)

$$n = \frac{c}{v_p} = \sqrt{\mu_r \cdot \epsilon_r} \approx \sqrt{\epsilon_r}$$

Por ley de Snell, (la cual afirma que $n_1 \sin(\phi_1) = n_2 \sin(\phi_2)$, ángulos con respecto a las normales), el ángulo crítico de ϕ_1 es cuando $\phi_2 = 90^\circ$. Aplicando Ley de Snell dos veces y un poco de trigonometría se puede saber que:

$$\sin(\theta_{\text{crítico}}) = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_0} \quad A = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \approx n_1 \sqrt{2\Delta} \quad , \text{ con } \Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1}$$

Ese A es la APERTURA NUMÉRICA, parámetro comúnmente proporcionado en los datasheets de las fibras ópticas.

2.2.2. Fibras de índice gradual

En este tipo de onda, el n_1 del núcleo no es uniforme, lo que permite que la onda rebote de forma más fluida dentro del núcleo.

2.3. Propagación modal

En la propagación modal, se analizarán los casos según las leyes de Maxwell en coordenadas esféricas.

Las ondas en la fibra óptica se propagan de cuatro modos distintos, dependiendo de la apertura numérica de la fibra (A), la longitud de onda (λ_0) y el radio del núcleo a . Los índices ν, m son naturales y $m \neq 0$.

- $\mathbf{TE}_{0,m}$: Transversal eléctrico $E_z^0 = 0$
- $\mathbf{HE}_{\nu,m}$: Híbrido $|H_z^0| > |E_z^0|$
- $\mathbf{TM}_{0,m}$: Transversal magnético $H_z^0 = 0$
- $\mathbf{EH}_{\nu,m}$: Híbrido $|E_z^0| > |H_z^0|$

Los campos, tal como ocurre en las guías de ondas, transmiten una “imagen” dependiente de su radio y ángulo.

Campo eléctrico

$$\vec{E}(\rho, \phi, z) = \vec{E}^0(\rho, \phi) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$E_\rho^0(\rho, \phi) = \frac{-j}{q} \cdot \left(\beta \frac{\partial E_z^0}{\partial \rho} + \frac{\omega \mu}{\rho} \frac{\partial H_z^0}{\partial \phi} \right)$$

$$E_\phi^0(\rho, \phi) = \frac{-j}{q} \cdot \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial E_z^0}{\partial \phi} - \omega \mu \frac{\partial H_z^0}{\partial \rho} \right)$$

$$q = \omega^2 \epsilon \mu - \beta^2 = k^2 - \beta^2$$

Campo magnético

$$\vec{H}(\rho, \phi, z) = \vec{H}^0(\rho, \phi) \cdot e^{-j\beta z}$$

$$H_\rho^0(\rho, \phi) = \frac{-j}{q} \cdot \left(\beta \frac{\partial H_z^0}{\partial \rho} - \frac{\omega \epsilon}{\rho} \frac{\partial E_z^0}{\partial \phi} \right)$$

$$H_\phi^0(\rho, \phi) = \frac{-j}{q} \cdot \left(\frac{\beta}{\rho} \frac{\partial H_z^0}{\partial \phi} + \omega \epsilon \frac{\partial E_z^0}{\partial \rho} \right)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\epsilon_r \omega}$$

2

Por Helmholtz se puede encontrar soluciones para E_z^0 y H_z^0 .

En el núcleo ($\rho < a$)

$$E_z^0(\rho, \phi) = A \cdot J_v(u\rho) \cdot e^{j\nu\phi}$$

$$H_z^0(\rho, \phi) = B \cdot J_v(u\rho) \cdot e^{j\nu\phi}$$

$$u^2 = k_1^2 - \beta^2 \quad k_1 = \frac{2\pi n_1}{\lambda_0}$$

En el revestimiento ($\rho > a$)

$$E_z^0(\rho, \phi) = C \cdot K_v(w\rho) \cdot e^{j\nu\phi}$$

$$H_z^0(\rho, \phi) = D \cdot K_v(w\rho) \cdot e^{j\nu\phi}$$

$$w^2 = \beta^2 - k_2^2 \quad k_2 = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0}$$

La frecuencia normalizada permite hallar los modos en el que la onda puede desplazarse.

$$V = k_0 a \underbrace{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}_{\text{Ap. num.}} \approx \frac{2\pi}{\lambda_0} a n_1 \sqrt{2\Delta}$$

La constante b se busca a partir de V desde un gráfico.

$$\beta = k_0 \sqrt{A^2 b + n_2^2}$$

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

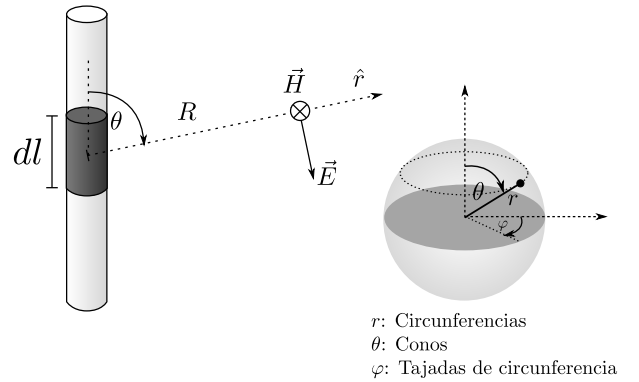
$$v_p = \frac{k_0 c}{\beta}$$

3. Antenas

Se trata de líneas de transmisión terminadas en circuito abierto o dipolo (líneas abiertas) deliberadamente hechas para irradiar o absorber radiación electromagnética.

Es posible compararlo con un fierro extendido y fijo en ambos extremos. Hay una frecuencia en la que vibran muy bien (resonancia)

Se trabajan en *coordenadas esféricas* r, θ, φ .



²Aquí λ y k son λ_0 y k_0 , cierto?

3.1. Glosario

- **Campo lejano:** Cuando el punto del campo está demasiado lejos del transmisor. $R \gg \frac{1}{\beta}$
- **Campo cercano:** Lo contrario. $R \ll \frac{1}{\beta}$
- **Estereo-radián:** Medida de ángulo sólido. es la proyección que tiene una superficie de una esfera en otra, pero de radio 1. $4\pi[Sr]$ es la superficie entera de una esfera.

3.2. Dipolo hertziano

Para hallar los campos irradiados se prefiere comenzar desde su función de potencial magnético \vec{A} . Como conocemos la corriente que circula por el trozo de alambre:

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\vec{J} \cdot e^{-jkR}}{R} dV' \quad \text{Como } \vec{J} = \iint_S \vec{I} \cdot d\vec{s} \Rightarrow d\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot e^{-jkR}}{R} dl \hat{z}$$

Con eso, integrando y luego rotando, obtendremos el campo \vec{H} . Con la ley de Ampère-Maxwell, el campo \vec{E} en el espacio.

Campo eléctrico $\vec{E}(r, \theta, \varphi)$

- $E_r(r, \theta, \varphi) = \frac{-Idl}{2\pi} \cdot \eta_0 \beta^2 \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) e^{-j\beta r}$
- $E_\theta(r, \theta, \varphi) = \frac{-Idl}{4\pi} \cdot \eta_0 \beta^2 \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} + \frac{1}{(j\beta r)^3} \right) e^{-j\beta r}$
- $E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0$

Campo magnético $\vec{H}(r, \theta, \varphi)$

- $H_r(r, \theta, \varphi) = H_\theta(r, \theta, \varphi) = 0$
- $H_\varphi(r, \theta, \varphi) = \frac{-Idl}{4\pi} \cdot \beta^2 \sin(\theta) \cdot \left(\frac{1}{j\beta r} + \frac{1}{(j\beta r)^2} \right) e^{-j\beta r}$

Nota Para *campo lejano*, $\frac{1}{(j\beta r)^2}$ y $\frac{1}{(j\beta r)^3} \rightarrow 0$

3.3. Cuestiones de potencia irradiada y dirección de radiación

La INTENSIDAD DE RADIACIÓN (U) refleja la densidad de potencia radiada por la antena hacia una dirección, por cada estereo-radián. Es decir, es la potencia promedio que se percibe en una cierta superficie (medida en estereo-radianes) a una distancia unitaria de la antena.

$$U(\theta, \varphi) = P_{av}(1, \theta, \varphi) \left[\frac{W}{Sr} \right] = P_{av}(r, \theta, \varphi) \cdot r^2$$

r indica los metros cuadrados que representan cada estereo-radián, y se mide en $\left[\frac{m^2}{Sr} \right]$

Para la POTENCIA IRRADIADA TOTAL (P_r), se integra esto en toda la esfera.

$$P_r = \oint\!\!\!\oint_{\text{Esfera}} U(\theta, \varphi) d\Omega \quad \text{con } d\Omega = \sin(\theta) d\varphi d\theta$$

Podemos concluir que:

$$U(\theta, \varphi) = \frac{1}{32\pi^2} |I|^2 \cdot \beta^2 \eta_0 \sin^2(\theta) (dl)^2$$

La GANANCIA DIRECTIVA (G_D) indica la capacidad de una antena para dirigir su radiación.

$$G_D = \frac{U(\theta, \varphi)}{\frac{P_r}{4\pi}} = \frac{P_{av}(r, \theta, \varphi)}{\frac{P_r}{4\pi r^2}}$$

La DIRECTIVIDAD (D) de una antena es la máxima ganancia directiva que puede alcanzar, e indica la capacidad de la antena de concentrar su radiación hacia algún ángulo y no dispersarla a otros.

$$D = \text{Máx}\{G_D(\theta, \varphi)\} = \frac{4\pi \text{Máx}\{U(\theta, \varphi)\}}{P_r} = \frac{4\pi \cdot |\text{Máx}\{E\}|^2}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi |E(\theta, \varphi)|^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi}$$

3.4. Eficiencia de radiación

La GANANCIA EN POTENCIA (G_P) de una antena relaciona la intensidad de radiación de la antena con la que emitiría una antena ideal con la misma potencia de entrada P_i .

$$G_P = \frac{4\pi \text{Máx}\{U\}}{P_i}$$

Asimismo se define la EFICIENCIA DE LA ANTENA (η) a la relación entre potencia emitida como radiación por la antena y su potencia total de entrada. Generalmente son cercanas al 90

$$\eta = \frac{P_r}{P_i} = \frac{G_D}{D}$$

La RESISTENCIA DE RADIACIÓN (R_r) de la antena es la magnitud de una resistencia hipotética que disiparía la misma potencia que la radiada por la antena.

$$P_r = \frac{1}{2} |I|^2 R_r \Rightarrow R_r = \frac{2P_r}{|I|^2}$$

3.5. Función de configuración

- **F. configuración en plano E:** Muestra la dependencia que tiene la componente del campo eléctrico E_θ con respecto al ángulo de elevación θ . Actúa como la magnitud E_θ “normalizada” con respecto al producto de funciones que dependan de otras variables; haciendo φ constante.

$$E_\theta = \frac{j60 |I|}{r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot \underbrace{\left(\frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \right)}_{\text{Función de configuración } F(\theta)}$$

Se puede graficar en coordenadas polares con respecto a θ .

- **F. configuración en plano H:** La dependencia que tiene la componente del campo magnético H_φ con respecto al ángulo azimutal φ haciendo $\theta = \frac{\pi}{2}$. Se normaliza del mismo modo que en el caso del plano H.

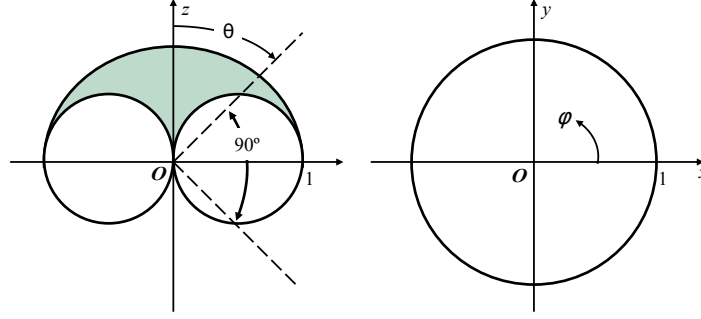


Diagrama en el plano E (φ cte.)

Diagrama en el plano H ($\theta = \frac{\pi}{2}$)

3.6. Ecuaciones del dipolo hertziano en campo lejano

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(r, \theta, \varphi) &= -\hat{\varphi} \frac{Idl}{4\pi} \cdot \frac{\beta}{jr} \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} & \vec{E}(r, \theta, \varphi) &= -\hat{\theta} \frac{Idl}{4\pi} \cdot \eta_0 \frac{\beta}{jr} \sin(\theta) \cdot e^{-j\beta r} \\
 \vec{P}(r, \theta, \varphi) &= \vec{E} \times \vec{H}^* = \hat{r} E_{\theta} H_{\varphi} & \vec{P}_{av}(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\vec{P}(r, \theta, \varphi) \right] \\
 &= \hat{r} \cdot \frac{|I|^2 \cdot \beta^2 \eta_0 \sin^2(\theta)}{16\pi^2 r^2} (dl)^2 & &= \hat{r} \cdot \frac{1}{32\pi^2} \cdot \frac{|I|^2 \cdot \beta^2 \eta_0 \sin^2(\theta)}{r^2} (dl)^2 \left[\frac{W}{m^2} \right] \\
 G_D(\theta, \varphi) &= \frac{3}{2} \sin^2(\theta) & D &= G_D\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1,5
 \end{aligned}$$

3.7. Dipolo lineal

Se trata de una antena con dos ramificaciones, y alimentada desde el centro, de modo que, a diferencia del dipolo hertziano, la corriente circule en una dirección en cada mitad de la antena. En la siguiente ecuación para E_{θ} se usa $\eta_0 = 120\pi$. Para otro medio hay que multiplicarlo por $\frac{\eta}{\eta_0}$

$$E_{\theta} = \eta_0 \cdot H_{\varphi} = \frac{j60I_{\text{máx}}}{r} \cdot e^{-j\beta r} \cdot F(\theta), \quad \text{con } F(\theta) = \left(\frac{\cos(\beta h \cos(\theta)) - \cos(\beta h)}{\sin(\theta)} \right)$$

Su variación más usada es el DIPOLO LINEAL DE MEDIA ONDA (haciendo $2h = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \beta h = \frac{\pi}{2}$), el cual posee características sobresalientes de rendimiento.

$$\text{En D.L. Media onda } F(\theta) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cdot \cos(\theta))}{\sin(\theta)}$$

3.8. Otras ecuaciones del dipolo de media onda en campo lejano

$$\begin{aligned}
 P_{av}(\theta) &= \frac{1}{2} E_{\theta} H_{\varphi}^* = \frac{15 I_{\text{máx}}^2}{\pi r^2} \cdot F^2(\theta) & P_r &= 36,54 \cdot I_{\text{máx}}^2 [W] \\
 U_{\text{máx}} &= \frac{15}{\pi} I_{\text{máx}}^2 & R_r &= 73,1 [\Omega] \\
 & & D &= 1,64 = 2,15 [dB]
 \end{aligned}$$

3.9. Área efectiva, antena como receptora

Corresponde a la relación entre la potencia media de la antena suministrada a una carga adaptada P_L , con la densidad de potencia media temporal P_{av} . V_{oc} es la tensión aplicada a estas dos resistencias en serie.

$$A_e = \frac{P_L}{P_{av}} [m^2] \quad \text{con } P_L = \frac{|V_{oc}|^2}{8 R_r} \quad \text{y } P_{av} = \frac{E_i^2}{240\pi}$$

Se puede encontrar el área efectiva como función de la ganancia directiva de la antena con su impedancia adaptada.

$$A_e = \frac{\lambda^2}{4\pi} \cdot G_D(\theta, \varphi)$$

3.10. Ecuación de Friis, enlace

Una forma conveniente para encontrar la relación entre la potencia transmitida y la recibida es la ecuación de Friis. Aquí P_L es la potencia que recibe la antena en una carga adaptada; y P_t es la potencia total que irradia la transmisora.

$$\frac{P_L}{P_t} = \frac{A_e^{tx} \cdot A_e^{rx}}{r^2 \lambda^2} \quad \frac{P_L}{P_t} = G_D^{tx} \cdot G_D^{rx} \cdot \left(\frac{\lambda}{4\pi r^2} \right)^2$$

Anexo Relación entre V y b :

