a) $M_n(\mathbb{R}) = \underset{U}{\overset{\|}{M_n^s(\mathbb{R})}} \oplus \underset{W}{\overset{\|}{M_n^a(\mathbb{R})}}$

• În română s-ar traduce ca: Arătați că orice matrice poate fi scrisă ca suma dintre o matrice simetrică și una anti-simetrică

<u>Pas 1</u> Pentru a arăta că e sumă directă trebuie să arăt că $U \cap W = \{O_n\}$

Fie $S \in U \cap W$

$S \in U \Rightarrow S = S^T \Rightarrow s_{ij} = s_{ji}$

$S \in W \Rightarrow S = -S^T \Rightarrow \begin{cases} s_{ij} = -s_{ji} \\ s_{ii} = -s_{ii} \end{cases}$

I $\left.\begin{array}{l} s_{ij} = s_{ji} \\ s_{ij} = -s_{ji} \end{array}\right| \Rightarrow s_{ij} = 0$

2) $s_{ii} = -s_{ii} \Rightarrow s_{ii} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow S = O_n \Rightarrow U \cap W = \{O_n\}$

Pas II

Arăt că $\forall M \in M_n(\mathbb{R})$ $\exists S, A$ a.î. $M = S + A$, $S \in V$, $A \in W$

Ca să rezolv astfel de exerciții, trebuie să pornesc de la matricea M oarecare și să o descompun ca sumă dintre o matrice simetrică și una anti-simetrică

<u>**Obs**</u> $(M + M^T)^T = (M^T)^T + M^T =$
$= M + M^T$

$M + M^T = (M + M^T)^T \Rightarrow$
$\Rightarrow M + M^T$ simetrică

Obs $(M - M^T)^T = -(M^T)^T + M^T =$

$= -M + M^T =$

$= -(M - M^T)$

$\Rightarrow (M - M^T) = -(M - M^T)^T$

$\Rightarrow M - M^T$ - anti-simetrico

$M - M^T + M + M^T = 2M \Rightarrow$

$$\Rightarrow M = \underbrace{\frac{M - M^T}{2}}_{\in \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{M + M^T}{2}}_{\in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})}$$

$\mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \cap \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$

b) $\dim \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) = ?$

$\dim \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) = ?$

• Pentru a găsi dimensiunile, ne trebuie o bază în fiecare

Fie $E_{i,j} = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} & & & & i & & \end{matrix} \\ \hline & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix} \; j \end{array}$

Fie $A \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \Rightarrow A = A^T \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\, i,j = \overline{1,n}$

$$\Rightarrow A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} E_{ii} + \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} \overbrace{(E_{ij} + E_{ji})}^{F_{ij} \,=}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) = \langle \underbrace{(E_{ii})_{i=\overline{1,n}}, (F_{ij})_{1 \le i < j \le n}}_{SG} \rangle ?$$

• Ca să arăt că este SLI trebuie, de fapt, să văd ce valori ale elementelor a_{ij}, $i,j = \overline{1,n}$ formează matricea O_n

$$O_n = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot E_{ij} + \sum_{1 < i < j \leq n} 0 \cdot F_{ij}$$

$\Rightarrow$ SLI $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left\{ (E_{ii})_{i=\overline{1,n}}, (F_{ij})_{1 < i < j \leq n} \right\}$

bază

$E_{ii} \rightarrow$ elemente pe diagonală $\Rightarrow$

$\Rightarrow n$ vectori

$F_{ij} \rightarrow$ elemente deasupra diagonalei

$\Rightarrow \dfrac{n(n-1)}{2}$ vectori

$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_n^S(\mathbb{R}) = n + \dfrac{n(n-1)}{2} =$

$\frac{n(n+1)}{2}$

Știm de la a) că $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R})$

$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \dim \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R}) + \dim \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \dim \mathcal{M}_n^a(\mathbb{R}) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n(n-1)}{2}.$$

exemplu pt $\mathbb{R}^3$:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ +2 & 4 & 7 \\ +3 & 7 & 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^s(\mathbb{R})$$

$$S = 1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{11}} + 4 \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_{22}} +$$

$$5\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$\quad E_{33} \qquad\qquad\qquad\qquad F_{12}$$

$$3\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\quad F_{13} \qquad\qquad\qquad\qquad F_{23}$$

$\Rightarrow \mathcal{M}_3^S(\mathbb{R}) = \langle \{E_{11}, E_{22}, E_{33}, F_{12}, F_{13}$
$F_{23}\} \rangle$