② $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)_{/\mathbb{R}}$

$$V'=\left\{A=\begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix} \mid u,x\in\mathbb{R}\right\}$$

a) Determinați o bază în V'

b) Determinați V'' un subspațiu complementar lui V'

Elemente de teorie

• Dacă $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=V'\oplus V''$ atunci V'' se numește subspațiu complementar lui V'.

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})=V'\oplus V'' \Rightarrow \begin{cases} V'\cap V''=O_2 \\ \dim V'+\dim V'' = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Rezolvare:

Pas 1:

Determinăm un SG pentru subspațiul V'

$$V' = \left\{ \begin{pmatrix} u & -u-x \\ 0 & x \end{pmatrix} \middle| u, x \in \mathbb{R} \right\}$$

<u>obs</u> Putem considera matricea de 2x2 ca un vector cu 4 componente $\{ \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^4 \}$

$$\Rightarrow V' = \{ (u, -u-x, 0, x) \mid u, x \in \mathbb{R} \}$$

$$(u, -u-x, 0, x) = (u, -u, 0, 0) + (0, -x, 0, x) =$$

$$= u(1, -1, 0, 0) + x(0, -1, 0, 1)$$

$\Rightarrow \forall v \in V \ \exists u, x \in \mathbb{R}$ a.î.

$$v = u(1, -1, 0, 0) + x(0, -1, 0, 1)$$

$\Rightarrow B' = \{ (\overset{e_1}{\overset{\shortparallel}{1, -1, 0, 0}}), (\overset{e_2}{\overset{\shortparallel}{0, -1, 0, 1}}) \}$

este SG pentru U'

fie $A = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \text{ (max)}$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} B' - SLi \\ B' - SG \end{array} \right| \Rightarrow B'$ - bază în U'

$\Rightarrow \dim U' = |B'| = 2$

Din faptul că $\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \dim U' + \dim U''$

$\Rightarrow \dim U'' = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) - \dim U'$

$\dim U'' = 4 - 2 = 2$

Pas 2

Extindem baza din V' la o bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\left.\begin{array}{l}\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4 \\ \dim V' \qquad = 2\end{array}\right| \Rightarrow$$ ne alegem 2 vectori cu care să extindem B'

fie $B'' = \{ \overset{f_1}{(0,1,0,0)}, \overset{f_2}{(0,0,1,0)} \}$

B'' - SLI !

$B' \cup B'' = \{(1,-1,0,0),(0,-1,0,1),$
$(1,0,0,0),(0,1,0,0)\}$

fie $A' = (e_1, e_2, f_1, f_2) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A' = 1 \cdot (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot -1 = 1$$

$\det A' \neq 0 \Rightarrow rg\, A' = 4 \Rightarrow SLi$
$\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow B' \cup B'' = \{e_1, e_2, f_1, f_2\}$ este bază în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

bază pt U''

$\Rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U' + U''$ unde $U'' = \langle B'' \rangle$

$\dim U' + \dim U'' = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ $\Big| \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = U' \oplus U''$

<u>Obs</u> când extindem baza U', ne putem alege orice vectori astfel încât împreună să formeze SLi.