Certamen Práctico Online ILI-286, v1.1

SCT - Lu.23.03.20

Pregunta	Puntos
1	
2	
3	
Total	

Instrucciones: ***Usted tiene que mostrar todo su trabajo de forma clara y ordenada para obtener todos los puntos***. *Este certamen consta de 3 preguntas, las cuales serán entregadas de una en una. Sus desarrollos y código sebe ser subido a la plataforma moodle cada vez que se acabe el tiempo de cada pregunta. Puntos parciales serán entregados a preguntas incompletas. Respuestas finales sin desarrollo o* ***sin nombre*** *reciben 0 puntos.* Copy-and-Paste *de algoritmos reciben 0 puntos. ¡Éxito!*

[Por favor copiar este texto en cada respuesta:]
Declaración de Trabajo Individual: *Juro o Prometo que la totalidad del trabajo que entregue en esta evaluación corresponde a mi trabajo individual, y es el fruto de mi estudio y esfuerzo.*

Nombre, Rol, Firma y Fecha: ____________________

1. **Usted dispone de 45 min para el desarrollo teórico (✍) y práctico (⌨).** Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria no-lineal:

$$
\begin{aligned}
u''(x) + 20\,\cos(20\,u(x)) &= 0,\\
u(0) &= -1,\\
u(\pi/2) &= 2/3.
\end{aligned}
$$

   (a) **✍, [10 puntos]** Proponga un algoritmo basado en diferencias finitas o el método del disparo que entregue una aproximación de $u(x_i) \approx U_i$ para $x_i = i\,\dfrac{\pi}{2N}$, donde $i \in \{0, 1, 2, \dots, N\}$. Considere N como *input* en su algoritmo y el output son los vectores $\langle x_0, x_1, \dots, x_N\rangle$ y $\langle U_0, U_1, \dots, U_N\rangle$.
   Hint: Notice you need to solve a non-linear system of equations in case you use FD!

   (b) **✍, [5 puntos]** Explique claramente como incluirá las condiciones de borde en su algoritmo.

   (c) **⌨, [10 puntos]** Implemente su algoritmo en un Jupyter Notebook y grafique la aproximación numérica de $u(x)$ en el dominio $[0, \pi/2]$ y $N = 1000$.

   (d) **⌨, [5 puntos]** Estime numéricamente $\displaystyle\int_0^{\pi/2} u(x)\,\mathrm{d}x$ con el Jupyter Notebook anteriormente construido.

Escriba en este recuadro los puntos que usted considera que obtendrá en esta pregunta: ☐

2. **Usted dispone de 50 min para el desarrollo teórico (✍) y práctico (⌨).** En las últimas semanas hemos vivido una conmoción mundial por el *Coronavirus* (COVID-19), ya declarado pandemia. Dentro de la información entregada por los expertos, se destaca la rapidez de propagación de este virus, lo cual puede generar un colapso en los servicios de urgencia. Por lo tanto, es crítico el aporte que puede hacer la ciencia e ingeniería para ayudar a cuantificar las implicancias de la rápida propagación.

   En esta dirección, analizaremos el modelo de propagación de enfermedades SIR, donde sus siglas indican las 3 variable a analizar:

   - $S(t)$: # de personas susceptibles a ser contagiadas.
   - $I(t)$: # de personas infecciosas o que pueden propagar la enfermedad.
   - $R(t)$: # de personas que se han recuperado y han generado anticuerpos, por lo que no se pueden enfermar nuevamente.

   Notar que este modelo es una simplificación de la realidad, sin embargo captura componentes críticas y es un buen punto de partida. Extensiones que se podrían incluir es el efecto de una cuarentena y la importancia de la pronta detección.

   En nuestro caso estudiaremos la propagación del COVID-19 sobre toda la población Chilena, esto considera aproximadamente que $N = 18.000.000$, donde N es la población total. Por simplicidad, podemos trabajar con las siguientes variables escaladas: $s(t) = \frac{S(t)}{N}$, $i(t) = \frac{I(t)}{N}$, y $r(t) = \frac{R(t)}{N}$. Por lo cual el modelo se expresa de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t) &= -\alpha\, s(t)\, i(t),\\
\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t) &= \alpha\, s(t)\, i(t) - \beta\, i(t),\\
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}(t) &= \beta\, i(t),
\end{aligned}
$$

   donde α es la número de infecciones por día de cada persona contagiada, β es la tasa de recuperaciones diarias de los infectados y $t \in [0, 300]$ y su unidad es en días. Del estudio del modelo SIR se ha determinado el factor $R_0 = \dfrac{\alpha}{\beta}$, el cual caracteriza que tan rápido se propaga el virus. Si $R_0 < 1$, el virus se extingue y $R_0 \geq 1$ se propaga. A medida que R_0 sea mayor, más significativa es la propagación del virus.

   (a) **✍, [5 puntos]** Considerando que inicialmente hay solo 1 persona afectada, determine las condiciones iniciales del sistema dinámico, es decir: $s(0)$, $i(0)$ y $r(0)$.
   Hint: Recall that the total of number of people in the system must remain constant and that nobody in the system has had the virus before, i.e. there are no recovered people.

   (b) **✍, [10 puntos]** Dado que el periodo de cuarentena requerido son 14 días, eso implica que uno podría definir $\beta = \frac{1}{14}$. Esto se obtiene considerando un grupo uniforme de infectados y que se contagiaron en distintos días. Respecto a α, se ha determinado que para el COVID-19 R_0 está entre 2 y 4 aproximadamente. Ahora, considerando la siguiente parametrización: $\alpha = \frac{1}{n_\alpha}$, donde n_α corresponde al número de días requeridos que un paciente infectado con COVID-19 contagie a otro. Determine el rango posible de n_α dado $\beta = \frac{1}{14}$ y $2 \leq R_0 \leq 4$.

   (c) **✍, [15 puntos]** Proponga un algoritmo que permita simular computacionalmente el sistema dinámico anteriormente indicado. El *input* debe ser α, β, el número de infectados inicialmente, el tamaño de la población total y la cantidad de puntos M (No confundir con N que es el tamaño de la población total en este caso) de la discretización temporal requerida. El *output* debe incluir 4 vectores: el vector de la discretización temporal con M puntos $\mathbf{t}$, el vector $\mathbf{s}$ de dimensión M, el vector $\mathbf{i}$ de dimensión M y el vector $\mathbf{r}$ de dimensión M. Usted debe describir como usará alguno de los algoritmos numéricos discutidos en el curso. *Hint: Notice that in your algorithm you don't need to use the Δt defined by M, but it should be larger so for the output you need to return M points.*

   (d) **⌨, [15 puntos]** Implemente su algoritmo en un Jupyter Notebook y grafique la aproximación numérica de $s(t)$, $i(t)$, y $r(t)$ en el dominio $[0, 300]$ para $\beta = \frac{1}{14}$, α obtenido anteriormente y $M = 1000$. Usted debe utilizar alguno de los algoritmos numéricos discutidos en el curso.
   Hint: Recall that when plotting it may be better to recover the original variables $S(t)$, $I(t)$, and $R(t)$, since we will use their values in the next question.

   (e) **⌨, [5 puntos]** Dado lo observado en su gráfica anterior, ¿Cuanta es la máxima cantidad de personas contagiadas al mismo tiempo que usted obtuvo en su simulación computacional? Esto es número muy importante dado que la capacidad de los establecimientos de salud en Chile es de aproximadamente 40.000. Comente sus resultados.

   (f) **⌨, [10 puntos]** Considerando que todas las personas contagiadas entran en cuarentena en no más de 7 días desde que fueron contagiadas, i.e. $\beta = \frac{1}{7}$ dado que no podrán contagiar luego de 7 días. Se desea evaluar una política de limitación de reuniones masiva, la que implica, si es que es exitosa, se puede reducir el impacto de transmisión del virus por los infectados, lo cual se ha estimado que α podría llegar a ser $\frac{1}{6}$. ¿Cuanta es la máxima cantidad de personas contagiadas al mismo tiempo en este caso? ¿Alcanzaría la capacidad de los establecimientos de salud en este caso? ¿Sirve aplanar la curva? Indique los parámetros utilizados en la simulación computacional y argumente su respuesta, entregue los resultados en su Jupyter Notebook.

3. **Usted dispone de 45 min para el desarrollo teórico (✍) y práctico (⌨).** Considere la siguiente ecuación diferencial parcial:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) &= u_{xx}(x,t) + u(x,t) - u^3(x,t),\ x \in [-1,1],\ 0 < t \leq 80,\\
u(-1,t) &= -1,\\
u(1,t) &= 1,\\
u(x,0) &= \frac{1}{100}\left(53\,x + 47\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\,x\right)\right),
\end{aligned}
$$

   (a) ✍**, [5 puntos]** Demuestre que las condiciones de borde son compatible con la condición inicial.
   Hint: Recall that continuity is very important here.

   (b) ✍**, [10 puntos]** Proponga un algoritmo basado en diferencias finitas que entregue una aproximación numérica de la ecuación diferencial parcial anterior. El *input* debe ser la N_x, número de puntos de la discretización espacial de la variable x, N_t, número de puntos de la discretización temporal de la variable t. El *output* debe ser la matriz con los valores discretos de $U_{i,k} \approx u(x_i, t_k)$, la matriz X y la matriz Y.
   Hint: It may be useful to use `np.meshgrid`!

   (c) ⌨**, [15 puntos]** Implemente su algoritmo en un Jupyter Notebook y grafique la aproximación numérica de $u(x,t)$ en el dominio $[-1,1] \times [0,2]$. Defina en un ipython widget la posibilidad de modificar N_x y N_t respectivamente, el output debe mostrar la gráfica.
   Hint: I suggest to use `https://matplotlib.org/mpl_toolkits/mplot3d/tutorial.html#wireframe-plots` for plotting.