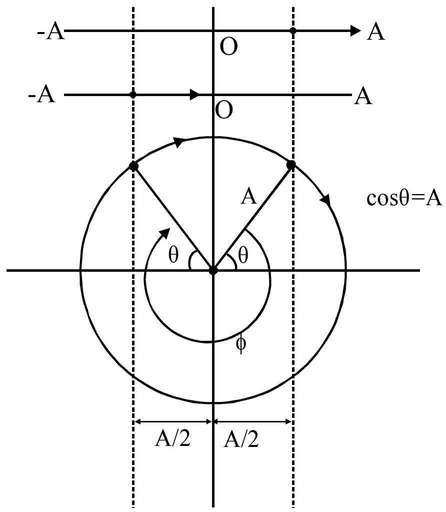
# UNIT # 06 (PART – I)

## SIMPLE HARMONIC MOTION

### EXERCISE –I

**1.** $\omega^2 = \pi^2 \Rightarrow \omega = \pi \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{\pi}{2\pi} = \dfrac{1}{2}\text{Hz}$

**2.**

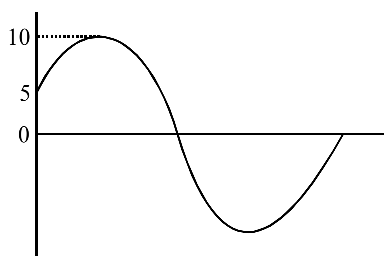



$\cos\theta = \dfrac{A/2}{A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

Total phase difference between them

(उनके मध्य कुल कलान्तर) $\phi = 2\theta + \pi = \dfrac{5\pi}{3}$

**3.**




From figure (चित्र से)

maximum amplitude (अधिकतम आयाम) A = 10

Position of particle at t = 0,

(t=0 पर कण की स्थिति) x =5

let equation of SHM is (माना सरल आवर्त गति का समी.)

$x = A\sin(\omega t+\phi)$ At t = 0, x = 5

$5 = 10 \sin\phi \Rightarrow \phi = \pi/6$ and $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$

Thus, equation of SHM $x = 10 \sin\left(\pi t + \dfrac{\pi}{6}\right)$

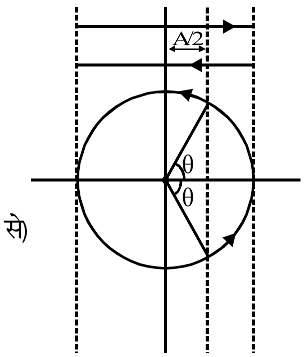
(अत: सरल आवर्त गति का समीकरण)

**4.** $x = A \sin \omega t = \dfrac{A}{2} \Rightarrow \omega t = \dfrac{\pi}{6}$ or $\dfrac{5\pi}{6}$

$\Rightarrow$ Phase difference (कलान्तर) $= \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\pi}{3}$ or 120

OR

from phaser (फेजर से)



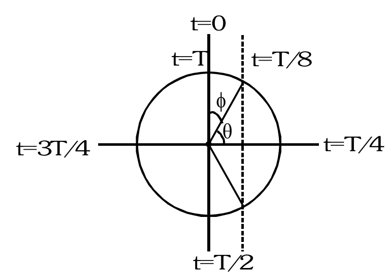

$\cos\theta = \dfrac{A/2}{A} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60$

phase difference (कलान्तर) $2\theta = 120$

**5.** $x = a \sin \omega t = a \sin\left(\dfrac{2\pi t}{T}\right)$

At $t = \dfrac{T}{8}$, $x = a \sin\left(\dfrac{2\pi\left(\dfrac{T}{8}\right)}{T}\right) = a\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

OR




$\omega = \omega t; \phi = \dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{8} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$

As $\cos\theta = \dfrac{x}{a}$ so $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$

**6.** $x_1 = a \sin \omega t$, $x_2 = a \sin(\omega t + \phi)$

Greatest distance (अधिकतम दूरी)

$= |x_2 - x_1|_{max} = 2a \sin\dfrac{\phi}{2} = \dfrac{3a}{2} \Rightarrow \sin\dfrac{\phi}{2} = \dfrac{3}{4}$

Now according to question (प्रश्नानुसार) $x_1 = x_2$

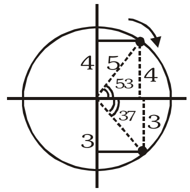
$\Rightarrow a \sin \omega t = a \sin(\omega t + \phi)$

$$\Rightarrow \pi - \omega t = \omega t + \phi \Rightarrow \omega t = \frac{\pi - \phi}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = a \sin\left(\frac{\pi-\phi}{2}\right) = a \cos\frac{\phi}{2} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$$

**7.** Minimum phase difference between two position (दोनों स्थितियों के मध्य न्यूनतम कलान्तर)

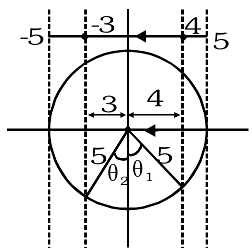
= 53 + 37 = 90




$$\Rightarrow \text{Time taken (लिया गया समय)} = \frac{T}{4} = \frac{20}{4} = 5s$$

**OR**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{20} = \frac{\pi}{10}$$




from figure $\theta_1 + \theta_2 = 53 + 37 = 90$ or $\frac{\pi}{2}$

$$\theta = \omega t \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{10}t \Rightarrow t = 5 \text{ sec}$$

**8.** $x = a \sin(\omega t + \phi)$

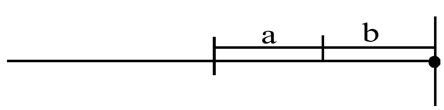
at t = 1s, $x = 0 = a \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \phi = -\omega$

$\because v = a\,\omega \cos(\omega t + \phi)$

$\therefore$ At t=2s, $\frac{1}{4} = a\omega \cos(2\omega + \phi)$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} = a\left(\frac{2\pi}{6}\right)\cos(\omega) = \frac{a\pi}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\pi}{3}\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{3}{2\pi}$$

**9.**




$x = A\cos\omega t \Rightarrow a = A\cos\omega$ and $a + b = A\cos 2\omega$

$$\Rightarrow a + b = A[2\cos^2\omega - 1] = A\left[2 \cdot \frac{a^2}{A^2} - 1\right]$$

$$\Rightarrow \frac{2a^2}{A} - A = a + b \Rightarrow A^2 + (a+b)A - 2a^2 = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{-(a+b) + \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab + 8a^2}}{2}$$

**Note** : Please correct the answer of the question

**10.** $x = 2\sin\omega t$ &

$$y = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\omega t + \sqrt{2}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - \sqrt{2}xy = 2$$

which represent oblique ellipse

(जो कि तिर्यक दीर्घवृत को प्रदर्शित करता है)

**11.** $\because x = A \sin \omega t$

$\therefore x_1 = A \sin \omega$ & $x_1 + x_2 = A \sin(2\omega)$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \text{ \& } x_1 + x_2 = A$$

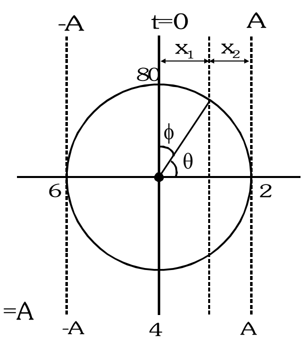
$$\Rightarrow x_2 = A - \frac{A}{\sqrt{2}}. \text{ Therefore } \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

**OR**

Suppose amplitude be A and distance traveled in 1 sec be $x_1$ and in 2 sec be $x_2$.

(मान लीजिये कि आयाम A है व 1s में तय की गई दूरी $x_1$ व 2s में तय की गई दूरी $x_2$ है)

$$\phi = \omega t = \frac{2\pi}{8}1 = \frac{\pi}{4}$$




Therefore $\theta = \frac{\pi}{4}$

$$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{x_1}{A}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{A}{\sqrt{2}} \text{ \& } x_1 + x_2 = A$$

$$\Rightarrow x_2 = A\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right). \text{ Therefore } \frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

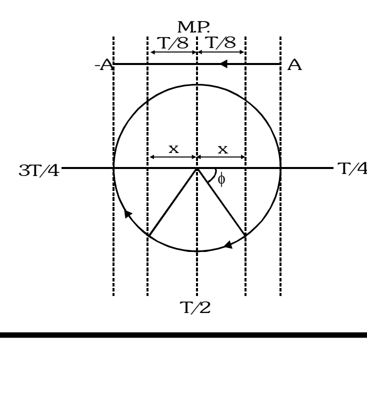
**12.** Maximum possible average velocity will be around mean position.

(अधिकतम सम्भव औसत वेग माध्य स्थिति के चारों ओर होगा)

Average velocity in time (समय में औसत वेग)

$$\frac{T}{4} = \frac{2\left(A/\sqrt{2}\right)}{T/4} = \frac{4\sqrt{2}A}{T}$$

**OR**



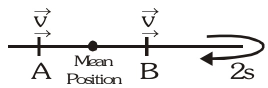
$$\phi=\omega t = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{8}=\frac{\pi}{4}$$

$$\cos\phi=\frac{x}{A}\Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{x}{A}\Rightarrow x=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

Average velocity (औसत वेग)

$$=\frac{\text{total displacement}}{\text{total time}}=\frac{2x}{T/4}=\frac{2A/\sqrt{2}}{T/4}=\frac{4\sqrt{2}A}{T}$$

**13.** Time period (आवर्तकाल)= 4(1+1) = 8




**14.** Maximum KE (अधिकतम गतिज ऊर्जा)= 2  5 = 10J

Total energy (कुल ऊर्जा)= 15 + 10 = 25J

**15.** For maximum displacement (अधिकतम विस्थापन के लिए)

$$Mg(x)=\frac{1}{2}k(2x)^2\Rightarrow x=\frac{Mg}{2k}\Rightarrow x=\frac{mg}{2k}-x_0$$

**16.** Both the spring are in series (दोनों स्प्रिंग श्रेणीक्रम में है)

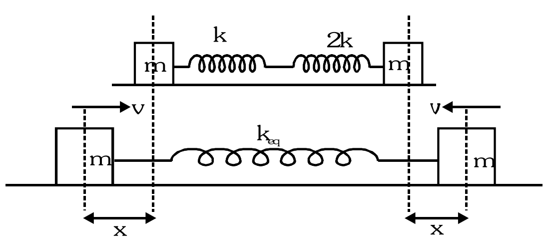
$$\therefore K_{eq}=\frac{K(2K)}{K+2K}=\frac{2K}{3}$$

Time period (आवर्तकाल) $T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{K_{eq}}}$

where (जहां) $\mu=\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ Here (यहां) $\mu=\frac{m}{2}$

$$\therefore T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2}\cdot\frac{3}{2K}}=2\pi\sqrt{\frac{3m}{4K}}$$

OR




Total extension (कुल विस्तार)= 2x

By energy conservation (ऊर्जा संरक्षण द्वारा)

$$E=\frac{1}{2}K_{eq}(2x)^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2$$

$$E=\frac{1}{2}\frac{2k}{3}4x^2+\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}mv^2=\frac{4}{3}kx^2+mv^2$$

$$\frac{dE}{dt}=\frac{4}{3}k(2x)\frac{dx}{dt}+m(2v)\frac{dv}{dt}$$

there is no loss of energy (यहां कोई ऊर्जा हानि नहीं है)

$$\frac{dE}{dt}=0\Rightarrow\frac{8}{3}kxv+2mva=0\Rightarrow\frac{8kxv}{3}=-2mva$$

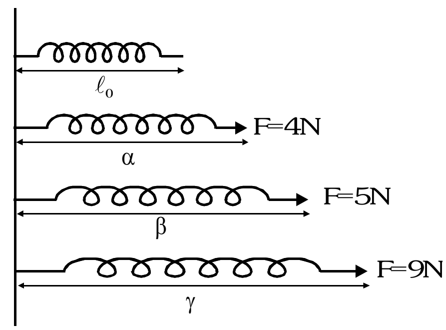
$$a=-\frac{4kx}{3m}\Rightarrow-\omega^2x=-\frac{4kx}{3m}\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}\Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{3m}{4k}}$$

**18.** Let the natural length of the spring = $\ell_0$

(माना स्प्रिंग की मूल लम्बाई)

From figure (चित्र से)




$4 = k(\alpha-\ell_0)$...(i)

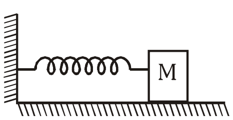
$5 = k(\beta-\ell_0)$...(ii)

$9 = k(\gamma-\ell_0)$ ...(iii)

eq. $\frac{(iii)-(i)}{(iii)-(ii)}\Rightarrow\frac{5}{4}=\frac{k(\gamma-\alpha)}{k(\gamma-\beta)}$

$$\gamma=5\beta-4\alpha$$

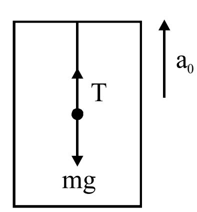
**19.**




$$f=\frac{1}{m}\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\Rightarrow\frac{f_1}{f_2}=\left(\frac{M+m}{M}\right)^{1/2}=\left(1+\frac{m}{M}\right)^{1/2}$$

**20.** $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g_{eff}}}$ ...(i)




Now $\frac{T_0}{2}=2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g+a}}$ ...(ii)

$$\Rightarrow\frac{g+a}{g}=4\Rightarrow a=3g\,(\text{upwards})$$

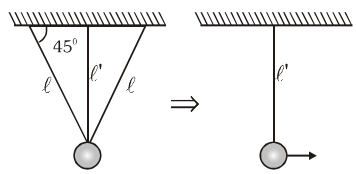
**21.** $\omega_1 = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ and $\omega_2 = \left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$

They will be in phase if (ये समान कला में होंगे यदि)

$(\omega_1 - \omega_2)\ t = 0,\ 2\pi,\ 4\pi...$

$$\Rightarrow t = \frac{2\pi}{(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{2\pi}{\pi - \frac{2\pi}{3}} = 6\,\text{sec}$$

**22.**

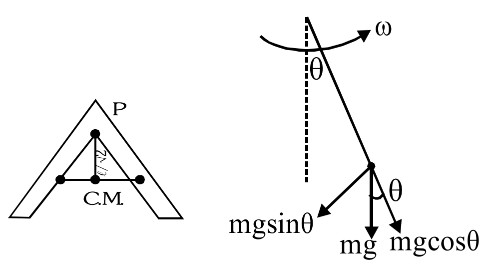



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell'}{g}} \text{ where } \ell' = \left(\frac{\ell}{\sqrt{2}}\right) \text{ so } T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{2}g}}$$

**23.** $T = \dfrac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}} \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{g}{\ell}}$

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{\ell_2}{\ell_1}} \Rightarrow \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \frac{\ell_2}{\ell_1} \Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2$$

**24.** Center of mass 2m of a system is at a distance from peg P is $\dfrac{\ell}{2\sqrt{2}}$ and moment of inertia of the system is $\dfrac{2m\ell^2}{3}$ (निकाय के द्रव्यमान केन्द्र 2m की खूंटी P से दूरी $\dfrac{\ell}{2\sqrt{2}}$ है तथा निकाय का जड़त्व आघूर्ण $\dfrac{2m\ell^2}{3}$ है)



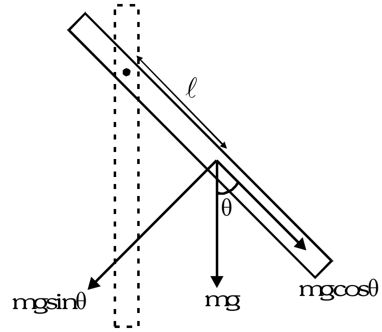

$$\tau = r \times F = -mg\sin\theta\frac{\ell}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow I\alpha = -mg\sin\theta\frac{\ell}{2\sqrt{2}} \quad (\sin\theta \simeq \theta \text{ for small } \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{2m\ell^2}{3}\alpha = -mg\theta\frac{\ell}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \alpha = -\frac{3g\theta}{2\sqrt{2}\ell} = -\omega^2\theta$$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2\sqrt{2}\ell}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}\ell}{3g}}$$

**25.**




$\tau = -mg\sin\theta\ell \Rightarrow I\alpha = -mg\ell\sin\theta$

$\Rightarrow m(\ell^2 + k^2)\alpha = -mg\ell\theta(\sin\tilde{\ }\theta)$

$$\Rightarrow \alpha = -\frac{g\ell\theta}{(\ell^2 + k^2)} = -\omega^2\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g\ell}{\ell + k^2}}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2 + k^2}{g\ell}} = 2\sqrt{\frac{\ell^2 + k^2}{\ell}}\left[g = \pi^2\right]$$

$$\Rightarrow \ell^2 - \left(\frac{T^2}{4}\right)\ell + k^2 = 0$$

**26.** For weightlessness (भारहीनता के लिए)

$mg = m\omega^2 a \Rightarrow g = (2\pi f)^2\ (0.5)$

$$\Rightarrow 2\pi f = \sqrt{2}\ g \Rightarrow f = \frac{\sqrt{2}g}{2\pi}$$

**27.** **Ans. (C)**

Time period for spring block system is $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ does not effected. (स्प्रिंग ब्लॉक निकाय के लिए आवर्तकाल $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ प्रभावित नहीं होता है)

**28.** **Ans. (C)**

$U(x) = ax^2 + bx^4$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} = -2ax - 4bx^3 \approx -2ax \text{ for small } x$$

$$\text{So } m\omega^2 = 2a \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2a}{m}}$$

**29.** at $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}A$

$$KE = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - \frac{3}{4}A^2\right) = \frac{1}{8}m\omega^2 A^2$$

KE is increased by an amount of $\dfrac{1}{2}m\omega^2 A^2$. Let now amplitude be $A_1$ then total KE

(गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}m\omega^2A^2$ से बढ़ जाती है। माना आयाम $A_1$ है तो कुल गतिज ऊर्जा)

$KE_1 = \frac{1}{8}m\omega^2A^2 + \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$= \frac{5}{8}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\left(A_1^2 - \frac{3}{4}A^2\right) \Rightarrow A_1 = \sqrt{2}A$

**30.** Here $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2(a^2-x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$

$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}cm$

**31.** Total energy (कुल ऊर्जा)

$E = \frac{1}{2}m\omega^2a^2 \Rightarrow E \propto \frac{a^2}{T^2}$

**32.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^2+k^2}{g\ell}}$

**33.** $x = 3\sin 2t + 4\cos 2t = 5\sin(2t+\phi)$
$\Rightarrow a = 5,\ v_{max} = a\omega = (5)(2) = 10$

**34.** For (A) : at $t = \frac{3T}{4}$, particle at extreme position (कण चरम स्थिति पर होगा)

$\because a = -\omega^2x \quad \therefore F \neq 0$

For (B) at $t = T/2$, particle at mean position
($t=T/2$ पर कण माध्य स्थिति पर होगा)
$v = \omega A$(maximum) (अधिकतम)

For (C) : at $t=T$, particle at mean position
($t=T$ पर कण माध्य स्थिति पर होगा)
$\Rightarrow a = -\omega^2x = 0$

For (D) : at $t = T/2$, particle at mean position
($t=T/2$ पर कण माध्य स्थिति पर होगा)

so $x = 0 \Rightarrow U = \frac{1}{2}kx^2 = 0$

**35.** $\sin\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

Now $x = a\sin(\omega t) = \frac{a}{2}$

**36.** $\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \Rightarrow \frac{2}{8} = \frac{\Delta\phi}{2\pi} \Rightarrow \Delta\phi = \frac{\pi}{2}$

**37.** For 1st condition $k_{eff} = \frac{k}{2}$

For 2nd condition $k_{eff} = \frac{(2k)(k)}{2k+k} = \frac{2}{3}k$

$\therefore T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \therefore f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{k/2}{2k/3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**38.** In an artificial satellite (कृत्रिम उपग्रह में)
$g_{eff} = 0 \Rightarrow T = \infty$

**39.** $\langle$acceleration(समय)$\rangle = \frac{\int_0^{T/2}\omega^2 a\sin\omega t\,dt}{\int_0^{T/2}dt} = \frac{2\pi\omega^2}{\pi}$

**40.** Required time (आवश्यक समय)$= \frac{T}{4} - \frac{T}{12} = \frac{T}{6}$

**41.** KE at centre (केन्द्र पर गतिज ऊर्जा)

$= \frac{1}{2}m\omega^2(A^2) = \frac{1}{2}m4\pi^2f^2A^2$

KE at distance x (x दूरी पर गतिज ऊर्जा)

$= \frac{1}{2}m4\pi^2f^2(A^2 - x^2)$

Difference (अन्तर)$= \frac{1}{2}m \times 4\pi^2f^2x^2 = 2\pi^2f^2x^2m$

**42.** From the graph, equation of acceleration can be written as (वक्र से त्वरण का समीकरण)

$a = -a_{max}\cos\omega t$

$\therefore$ velocity can be written is (वेग)

$v = -v_{max}\sin\omega t.$

$KE = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv^2_{max}\sin^2\omega t$

Hence the graph is as shown in A
(अतः वक्र A में प्रदर्शित है)

**43.** $a = 8\pi^2 - 4\pi^2x = -4\pi^2(x-2) \Rightarrow \omega = 2\pi$

Here $a=0$ so mean position at $x = 2$
(यहां $a=0$ अतः $x=2$ पर माध्य स्थिति होगी)

Let $x = A\sin(\omega t + \phi)$

As particle is at rest at $x=-2$ (extreme position) and Ampliutde = 4 as particle start from extreme position. Therefore
(चूंकि कण $x=-2$ पर विरामावस्था में है (चरम स्थिति) तथा आयाम =4 चूंकि कण चरम स्थिति से प्रारम्भ होता है इसलिए)

$x - 2 = -4\cos 2\pi t \Rightarrow x = 2 - 4\cos 2\pi t$

**44.** $x = A_0(1+ \cos 2\pi\gamma_2 t) \sin (2\pi\gamma_1 t)$

$= A_0[\sin 2\pi\gamma_1 t + \cos 2\pi\gamma_2 t + \sin 2\pi\gamma_1 t]$

$= A_0[\sin 2\pi\gamma_1 t + \frac{1}{2} \sin (2\pi (\gamma_1 + \gamma_2)t - \frac{1}{2} \sin (2\pi(\gamma_1-\gamma_2)t)]$

Required ratio (अभिष्ट अनुपात)= $\nu_1 : (\nu_1-\nu_2) : (\nu_1 + \nu_2)$

**45.** $y = \sin\omega t + \sqrt{3}\cos\omega t = 2\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$

To breaks off mg (mg को छोड़ने के लिए)

$mg = m\omega^2_{min}A \Rightarrow g = 2\omega^2_{min} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2}}$

moment it occurs first after t = 0

(t=0 समय पश्चात् जब ऐसा पहली बार होगा)

$$2 = 2\sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \omega t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{2}{g}}$$

## EXERCISE –II

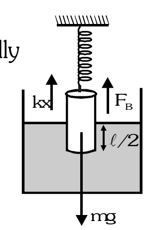
**1.** $v = A\,\omega\cos\omega t,\ a = -\omega^2 A \sin\omega t$

$$\Rightarrow \left(\frac{v}{A\omega}\right)^2 + \left(\frac{a}{\omega^2 A}\right)^2 = 1$$

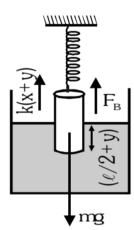
$\Rightarrow$ Straight line in $v^2$ and $a^2$

($v^2$ व $a^2$ में सरल रेखा है)

**2.** Initially




finally




$kx + F_B = mg$

$kx = mg - \rho Vg$

$kx = mg - \frac{\rho A\ell g}{2}$ ...(i)

Let cylinder be displaced through y then restoring force, (माना बेलन को y दूरी से विस्थापित किया जाता है तो प्रत्यानयन बल)

$f_{net} = -[k(x+y) + F_B - mg]$

$$f_{net} = -\left[kx + ky + \rho A\left(\frac{\ell}{2} + y\right)g - mg\right]$$

$f_{net} = -[ky + \rho Agy] \Rightarrow ma = -[ky + \rho Agy]$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k+\rho Ag}{m}} \Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k+\rho Ag}{m}}$$

**3.** $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{\omega_1}{2}$

$(\omega_1-\omega_2)\ t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots.\ t=0$

$\Rightarrow t = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2} = 4 \Rightarrow 2\pi = 4\ (\omega_1-\omega_2)$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} = (\omega_1 - \omega_2) \Rightarrow k = \pi^2\ N/m$

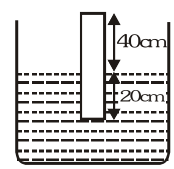
**4.** When cylindrical block is partially immersed

(जब बेलनाकार ब्लॉक को आंशिक रूप से डुबोया जाता है तो)

$F_B = mg \Rightarrow 3\rho Ayg = \rho A(60\ \ 10^{-2})\ g$

$y = 20$ cm

$\Rightarrow$ Maximum amplitude (अधिकतम आयाम)= 20 cm




Restoring force when it is slightly depressed by an amount of x.

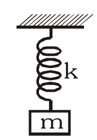
(प्रत्यानयन बल जब इसे धीरे से x दूरी से दबाया जाता है)

$F = -(\Delta V\sigma g) = -(A\sigma g)x$

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\sigma g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\rho Ah}{A3\rho g}} = 2\pi\sqrt{\frac{h}{3g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{60\times10^{-2}}{3\times9.8}} = \frac{2\pi}{7}s$$

**5.** At equilibrium mg (साम्यावस्था पर)= $kx_0$



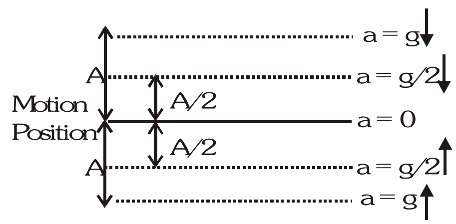

$\Rightarrow x_0 = \frac{mg}{k} = \frac{(0.2)(10)}{200} = 0.01$ m = 1 cm

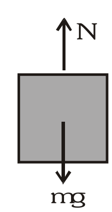
Amplitude of SHM (सरल आवर्त गति का आयाम)= 1cm

Frequency (आवृत्ति)= $\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{200}{0.2}} \approx 5Hz$

**6.** The position of momentary rest in S.H.M. is extreme position where velocity of particle is zero.

(सरल आवर्त गति में क्षणिक स्थिरावस्था की स्थिति चरम स्थिति होगी। जहां कण का वेग शून्य होता है)



As the block loses contact with the plank at this position i.e. normal force becomes zero, it has to be the upper extreme where acceleration of the block will be g downwards.
(चूंकि इस स्थिति पर ब्लॉक का पट्टे से सम्पर्क हट जाता है अर्थात् अभिलम्ब बल शून्य होगा, यह ऊपर चरम सीमा पर होगा जहां ब्लॉक का त्वरण g नीचे की ओर होगा)

$\therefore\ \omega^2A = g \Rightarrow \omega^2 = \frac{10}{0.4} = 25 \Rightarrow \omega = 5$ rad/s

Therefore period (अत: आवर्तकाल) $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$ s

Acceleration in S.H.M. is given by $a = \omega^2 x$
(सरल आवर्त गति का त्वरण)
From the figure we can see that, At lower extreme, acceleration is g upwards (चित्र से हम कह सकते हैं कि निम्न चरम सीमा पर त्वरण g ऊपर की ओर होगा)
$\therefore\ N - mg = ma \Rightarrow N = m(a + g) = 2mg$
At halfway up, acceleration is g/2 downwards
(आधी दूरी पर त्वरण g/2 नीचे की ओर होगा)

$\therefore\ mg - N = ma \Rightarrow N = m\left(g - \frac{g}{2}\right) = \frac{1}{2}mg$

At halfway down acceleration is g/2 upwards
(आधी दूरी पर त्वरण g/2 ऊपर की ओर होगा)

$\therefore\ N - mg = ma \Rightarrow N = m\left(g + \frac{g}{2}\right) = \frac{3}{2}mg$

7. $x = 3\sin(100\pi t)$, $y = 4\sin(100\pi t) \Rightarrow y = \frac{4}{3}x$

$\Rightarrow$ Motion of particle will be on a straight line with slope 4/3.
(कण सरल रेखा पर गति करेगा जिसका ढाल 4/3 होगा)

As $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 5\sin(100\pi t)$
so motion of particle will be SHM with amplitude 5.
(कण की गति सरल आवर्त गति होगी जिसका आयाम 5 होगा)

8. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{i} = (A\cos\omega t)\hat{i} + (2A\cos\omega t)\hat{j}$
$\Rightarrow x = A\cos\omega t$, $y = 2A\cos\omega t \Rightarrow y = 2x$
$\Rightarrow$ The motion of particle is on a straight line, periodic and simple harmonic
(कण की गति सरल रेखीय आवर्ती व सरल आवर्त गति होगी)

9. At maximum compression $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ & kinetic energy of A–B system will be minimum (अधिकतम सम्पीड़न पर $\vec{v}_A = \vec{v}_B$ तथा निकाय A-B की गतिज ऊर्जा न्यूनतम होगी)

so $v_A = v_B = \frac{v}{2} \Rightarrow K_{AB} = \frac{1}{4}mv^2$

From energy conservation (ऊर्जा संरक्षण से)

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}kx_m^2 \Rightarrow x_m = v\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

10. Let small angular displacement of cylinder be $\theta$ then restoring torque
(माना बेलन का अल्प कोणीय विस्थापन $\theta$ है तो प्रत्यानयन बलाघूर्ण)

$$I\alpha = -k(R\theta)R \text{ where } I = \frac{3}{2}MR^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{kR^2}{\frac{3}{2}MR^2}\theta = 0 \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2k}{3M}\theta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{2k}{3m}$$

11. As $\beta < \alpha$ so $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

12. $mgh = \frac{1}{2}(M + m)v^2 = \frac{1}{2}kx^2$

$$mgh = \frac{1}{2}kx^2 \Rightarrow x = \left[\frac{2mgh}{k}\right]^{1/2}$$

13. $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m + M}}$

14. $y = 10\sin(\omega t + \phi)$

Maximum KE (अधिकतम गतिज ऊर्जा) $= \frac{1}{2}m\omega^2A^2$

$\Rightarrow \frac{64}{100} \times \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2)$
$\Rightarrow 64A^2 = (A^2 - x^2)100 \Rightarrow x = 0.6\ A$
$\Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \times x$
$\Rightarrow A^2 - 0.25A^2 = A^2x$
$\Rightarrow x = 0.75$ means 75% of energy

15. Maximum speed = (अधिकतम चाल) $v_0 \Rightarrow A = \frac{v_0}{\omega_0}$

So equation of motion $x = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$
(इसलिए गति की समीकरण)

16. $x = 3\sin 100t + 8\cos^2 50t$
$= 3\sin(100t) + 4(1 + \cos 100t)$
$= 4 + 5\sin(100t + 37)$
Amplitude (आयाम) = 5
Maximum displacement (अधिकतम विस्थापन)
$= 4 + 5 = 9$ cm

17. Velocity of 3kg block just before collision (टक्कर के ठीक पहले 3kg के ब्लॉक का वेग)

$$=\omega\sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)(a^2-x^2)}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{900}{3}\right)(2^2-1^2)}=30\text{ m / s}$$

Velocity of combined masses immediately after the collision (टक्कर के तुरन्त पश्चात् संयुक्त द्रव्यमानों का वेग)

$$=\frac{(3)(30)}{3+6}=10\text{ m/s}$$

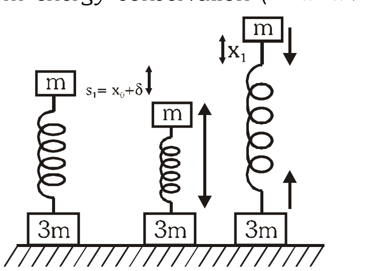
New angular frequency (नई कोणीय आवृत्ति)

$$\omega'=\sqrt{\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{900}{9}}=10$$

Therefore (इसलिए) $v'=\omega'\sqrt{a'^2-x^2}$

$\Rightarrow 10=10\sqrt{a'^2-1^2}\Rightarrow a'=\sqrt{2}m$

18. From energy conservation (ऊर्जा संरक्षण से)




At equilibrium position $mg = kx_0$ To leave surface $kx_1 = 3mg$

$$\frac{1}{2}k\delta_1^2=mg(\delta_1+x_1)+\frac{1}{2}kx_1^2$$

$$\Rightarrow \delta_1^2-\frac{2mg}{k}\delta_1-\frac{15m^2g^2}{k^2}=0$$

$$\Rightarrow \delta_1=\frac{5mg}{k}\Rightarrow \delta=\frac{4mg}{k}$$

$\Rightarrow$ If $\delta\geq\frac{4mg}{k}$ the lower disk will bounce up.

(यदि $\delta\geq\frac{4mg}{k}$ निचली चक्कती ऊपर की ओर उछलेगी)

Now If $\delta=\frac{2mg}{k}$ then maximum normal reaction from ground on lower disk (अब यदि $\delta=\frac{2mg}{k}$ तो निचली चकती पर जमीन द्वारा अधिकतम अभिलम्ब प्रतिक्रिया)

$N = 3mg + k(x_0 + \delta) = 6\ mg$

19. $\because a=-\omega^2y$ and at $t = T$, $y$ is maximum so acceleration is maximum at $t = T$. ($a=-\omega^2y$ तथा $t = T$ पर, $y$ अधिकतम है। अतः $t=T$ पर त्वरण अधिकतम होगा)

Also $y=0$ at $t=\frac{3T}{4}$, so force is zero at $t=\frac{3T}{4}$

(तथा $t=\frac{3T}{4}$ पर $y=0$)

At $t=\frac{T}{2}$, $v=0\Rightarrow$ PE = oscillation energy

(पर स्थितिज ऊर्जा = दोलन ऊर्जा)

## EXERCISE –III

**Fill in the blanks**

1. $\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2(a^2-x^2)=0.5$ and $\frac{1}{2}m\omega^2x^2=0.4$

$$\Rightarrow\frac{a^2-x^2}{x^2}=\frac{5}{4}\Rightarrow a=\frac{3}{50}m=0.06\text{ m}$$

2. $nT_1=(n+1)T_2=18\Rightarrow n=9\Rightarrow T_2=\frac{18}{10}=1.8s$

3. $k_1xL=k_2(1-x)L=kL$

$$f_1=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1}{m_1}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{x(1-x)m}}=\frac{f_0}{\sqrt{x(1-x)}}=f_2$$

4. $$\langle v\rangle=\frac{\int v\,dt}{\int dt}=\frac{\int_0^{2(2n-1)}4\sin\left(\frac{2\pi}{4}t\right)dt}{\int_0^{2(2n-1)}dt}=\frac{8}{(2n-1)\pi}\text{ m/s}$$

5. $\omega^2a=\mu g\Rightarrow a=\frac{\mu g}{\omega^2}$

6. $v_1^2=\omega^2(a^2-x_1^2)$, $v_2^2=\omega^2(a^2-x_2^2)$

$$\Rightarrow\omega=\sqrt{\frac{v_1^2-v_2^2}{x_2^2-x_1^2}}\ \&\ a=\sqrt{\frac{v_1^2x_2^2-v_2^2x_1^2}{v_1^2-v_2^2}}$$

7. $x_1=A\sin\omega t$, $x_2=A\sin(\omega t+\phi)$

$x_2-x_1=A(\cos\phi-1)\sin\omega t+A\sin\phi\cos\omega t$

Maximum value of $x_2-x_1$

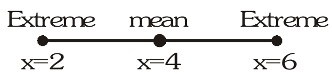
$$=\sqrt{A^2(\cos\phi-1)^2+A^2\sin^2\phi}=2A\sin\left(\frac{\phi}{2}\right)=A$$

$$\Rightarrow\frac{\phi}{2}=\frac{\pi}{6}\text{ or }\frac{5\pi}{6}\Rightarrow\phi=\frac{\pi}{3}\text{ or }\frac{5\pi}{3}$$

## Match the column

1. $y = A \sin \omega t + A \sin \omega t \cos \frac{2\pi}{3} + A \cos\omega t \sin\frac{2\pi}{3}$

$$= \frac{A}{2}\sin \omega t + \frac{A\sqrt{3}}{2}\cos \omega t = A \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$$

2. 


$F = 8-2x = -2(x-4)$

3. x is positive in II & IV; v is positive if $f_{ext} > 0$
(III व IV में x धनात्मक है,

## Compreshension # 1

1. Max. acceleration of 1kg (1kg का अधिकतम त्वरण)

$$= \frac{(0.6)(1)(10)}{1} = 6ms^{-2}$$

Max. acceleration of 2kg (2kg का अधिकतम त्वरण)

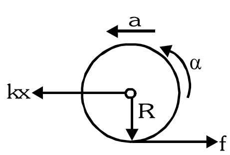
$$= \frac{(0.4)(3)(10)}{3} = 4ms^{-2}$$

Therefore maximum acceleration of system can be 4 m/s$^2$
(अतः निकाय का अधिकतम त्वरण 4 m/s$^2$ हो सकता है)

$$\Rightarrow \omega^2 A = 4 \Rightarrow A = \frac{4}{\omega^2} = \frac{4}{(k/m)} = \frac{4}{54/6} = \frac{4}{9}\text{ m}$$

2. $\omega^2 A$ = constant $\Rightarrow A \propto \frac{1}{k}$

## Comprehension # 2

1. 


$a = \alpha R$

$kx - f = ma,\ fR = \left(\frac{mR^2}{2}\right)\alpha \Rightarrow f = \frac{1}{3}kx$

But $x = A \cos \omega t$
($\therefore$ the cylinder is starting from x=A)
($\therefore$ चकती x=A से प्रारम्भ होती है)

So $f = \frac{kA}{3}\cos \omega t$

2. $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{k^2}{R^2}\right) = \frac{1}{2}mv^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}mv^2$

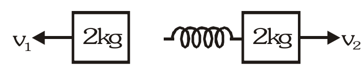
$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2kA^2}{3m}} = \sqrt{\frac{2(10)(2)^2}{3(2)}} = \sqrt{\frac{40}{3}}ms^{-1}$$

## Comprehension # 3

1. Both the blocks remains in contact until the spring is in compression. In this time system complete half oscillation. By reduced mass concept time period of system
(दोनों ब्लॉक सम्पर्क में रहते हैं जब तक कि स्प्रिंग में सम्पीड़न होता है। इस समय निकाय आधा दोलन पूरा करता है। समानित द्रव्यमान अवधारणा द्वारा निकाय का आवर्तकाल)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\mu}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\pi^2}} = 2s$$

$\Rightarrow$ Required time (आवश्यक समय)= $\frac{T}{2} = \frac{2}{2} = 1s$

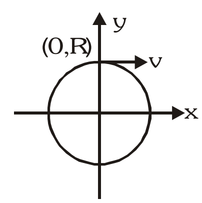
2. 


Let velocity of rear 2kg be $v_1$ and front 2kg be $v_2$ then $20 = 2v_2 - 2v_1 \Rightarrow v_2 - v_1 = 10$ (माना पीछे वाले 2kg का वेग $v_1$ व आगे वाले 2kg का वेग $v_2$ है तो)
Now by conservation of mechanical energy
(अब यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण द्वारा)

$$\frac{1}{2}(2)(10)^2 = \frac{1}{2}(2)v_1^2 + \frac{1}{2}(2)v_2^2$$

$\Rightarrow v_1^2 + v_2^2 = 100$
But $v_2^2 + v_1^2 - 2v_1v_2 = 100$
$\Rightarrow v_1v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = 0$ as $v_2 \neq 0$

## Comprehension # 4



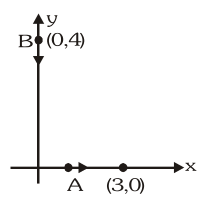

1. $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(2\pi R / v)} = \frac{v}{R}$

2. At t=0, x=0, $v = v_0 = \omega R$

so $\cos(\omega t + \phi) = 0$ & $-\sin(\omega t + \phi) = +1 \Rightarrow \phi = \frac{3\pi}{2}$

## Comprehension # 5

1. As A is at its negative extreme at t=0
(चूंकि A, t=0 पर यह ऋणात्मक चरम स्थिति पर है)
so $x-3 = 2 \sin (2\pi t + 3\pi/2) \Rightarrow x = 3 - 2 \cos (2\pi t)$




2. As B is at its equilibrium position and moving towards negative extreme at t = 0
(चूंकि B इसकी साम्यावस्था स्थिति पर है तथा t=0 पर ऋणात्मक चरम स्थिति की ओर गति कर रहा है।)
so $y-4 = 0\ 2 \sin (2\pi t + \pi) \Rightarrow y = 4 - 2\sin(2\pi t)$

3. Distance between A & B (A व B के मध्य दूरी)

$= \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{(3 - 2\cos 2\pi t)^2 + (4 - 2\sin 2\pi t)^2}$

$= \sqrt{9 + 4\cos^2 2\pi t - 12\cos 2\pi t + 16 + 4\sin^2 2\pi t - 16\sin 2\pi t}$

$= \sqrt{29 - 20\left(\frac{3}{5}\cos 2\pi t + \frac{4}{5}\sin 2\pi t\right)}$

$= \sqrt{29 - 20\sin(2\pi t + 37°)}$

Maximum distance (अधिकतम दूरी)

$= \sqrt{29 + 20} = \sqrt{49} = 7\text{cm}$

Minimum distance (न्यूनतम दूरी)

$= \sqrt{29 - 20} = \sqrt{9} = 3\text{cm}$

## EXERCISE –IV(A)

1. The maximum velocity of the particle at the mean position (माध्य स्थिति पर कण का अधिकतम वेग)

$v_{max} = A\omega = A\,(2\pi n)$

$\Rightarrow A = \frac{v_{max}}{2\pi n} = \frac{3.14}{2 \times 3.14 \times 20} = 0.025\text{m}$

If at the instant t = 0, displacement be zero so displacement equation is

(t=0 पर यदि कण का विस्थापन शून्य है तो विस्थापन समी.)

$y = A\sin\omega t = A\sin 2\pi nt = 0.025\ \sin\,(40\pi t)$ m

2. $S = A\cos\omega t - \frac{A}{2}\sin\omega t - \frac{A}{2}\cos\omega t + \frac{A}{8}\sin\omega t$

$= \frac{A}{2}\cos\omega t - \frac{3A}{8}\sin\omega t$

$= \frac{5A}{8}\left(\frac{4}{5}\cos\omega t - \frac{3}{5}\sin\omega t\right) = \frac{5A}{8}\cos(\omega t + 37°)$

$\Rightarrow A' = \frac{5A}{8},\ \delta = 37°$

3. $x = A\sin\,(\pi t + \phi)$

At t = 0  x = 1 cm $\Rightarrow A\sin\phi = 1$ ...(i)

Velocity  $v = \frac{dx}{dt} = \pi A\cos(\pi t + \phi)$

At t = 0  $\pi = \pi A\cos\phi \Rightarrow A\cos\phi = 1$ ...(ii)

from (i) & (ii) $A^2\,(\sin^2\phi + \cos^2\phi) = 1+1$

$\Rightarrow A = \sqrt{2}$ cm and $\tan\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$ rad

4. $\because\ y = A\sin\omega t = A\sin\frac{2\pi}{T}t$

$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2}A = A\sin\left(\frac{2\pi}{T} \times 2\right) = A\sin\left(\frac{4\pi}{T}\right)$

$\Rightarrow \frac{4\pi}{T} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow T = 12\text{s}$

5. Maximum distance( अधिकतम दूरी)

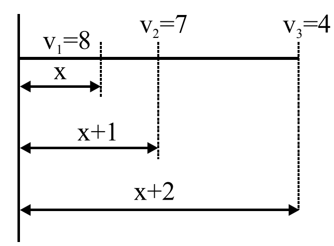
$= 2a\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) = (2a)(0.9) = 1.8a$

6. Velocity (वेग) $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

$\therefore \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{a^2 - x_2^2}}{\sqrt{a^2 - x_1^2}} \Rightarrow \frac{49}{100} = \frac{a^2 - 16}{a^2 - 9} \Rightarrow a = 4.76$ cm

$\Rightarrow$ length of path (पथ की लम्बाई)= 2a = 9.52 cm

7. Energy at all the three points are equal (सभी तीनों बिन्दुओं पर ऊर्जा समान है)




$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}k(x+1)^2$

$\frac{1}{2}m(64) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(49) + \frac{1}{2}k(x+1)^2$

$15 = \omega^2 + 2\omega^2 x$ ...(i)

$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 + \frac{1}{2}k(x+2)^2$

$\frac{1}{2}m(64) + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m(16) + \frac{1}{2}k(x+2)^2$

$12 = \omega^2 + \omega^2 x$ ...(ii)

from (i) & (ii) $\omega = 3$ & $x = 1/3$ then, total energy is equal for the maximum kinetic energy

(तो अधिकतम गतिज ऊर्जा के लिये कुल ऊर्जा समान होगी)

$\frac{1}{2}m(64) + \frac{1}{2}m\frac{1}{9} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{65}$ m/s

OR

$v = \omega\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow 8 = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$

$\Rightarrow 7 = \omega\sqrt{a^2 - (x+1)^2},\ 4 = \omega\sqrt{a^2 - (x+2)^2}$

After solving the equation (हल करने पर)

$V_{max} = a\omega = \sqrt{65}\ \text{m/s}$

**8.** As $v = \omega\sqrt{a^2 - x^2}$ so $v_1 = n\sqrt{a^2 - \frac{3a^2}{4}} = \frac{na}{2}$

and $v_2 = \frac{3}{2}na = n\sqrt{A^2 - \frac{3a^2}{4}}$

$\Rightarrow A = \sqrt{3}a = 15\sqrt{3}\text{cm}$

**9.** $x = 12\sin\omega t - 16\sin^3\omega t$

$= 12\sin\omega t - 4(4\sin^3\omega t)$ $(\because 4\sin^3\theta = 3\sin\theta - \sin 3\theta)$

$= 12\sin\omega t - 4(3\sin\omega t - \sin 3\omega t)$

$= 12\sin\omega t - 12\sin\omega t + 4\sin 3\omega t = 4\sin 3\omega t$

$\Rightarrow$ motion is SHM with angular frequency $3\omega$

So $a_{max} = 36\omega^2$

**10.** $\frac{1}{2}mv^2_{max} = 8 \quad 10^{-3}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 = 8 \quad 10^{-3}$

$\Rightarrow \omega = 4\text{rad/s}$

Therefore equation of SHM

(अतः सरल आवर्त गति की समीकरण)

$x = 0.1\sin\left(4t + \frac{\pi}{4}\right)$

**11.** (i) Maximum speed of oscillating body

(दोलन कर रहे पिण्ड की अधिकतम चाल)

$v_{max} = A\omega = A \quad \frac{2\pi}{T}$

Here A = 1 metre, T = 1.57 s

$\therefore \quad v_{max} = \frac{2 \times 3.14 \times 1}{1.57} = 4 \text{ m/s}$

(ii) Maximum kinetic energy

(अधिकतम गतिज ऊर्जा)

$K_{max} = \frac{1}{2}mv^2_{max} = \frac{1}{2} \quad 1 \quad (4)^2 = 8J$

(iii) Total energy of particle will be equal to maximum kinetic energy.

(कण की कुल ऊर्जा, अधिकतम गतिज ऊर्जा के बराबर होगी)

(iv) Time period of mass suspended by spring

(स्प्रिंग द्वारा लटकाये गये द्रव्यमान का आवर्तकाल)

$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$

so force constant (अतः बल नियत होगा)

$K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4 \times (3.14)^2 \times 1}{(1.57)^2} = 16 \text{ N/m}$

**12.** (i) At equilibrium position (साम्यावस्था से)

$F = -\frac{dU}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2m$

(ii) $F = -\frac{dU}{dx} = -(2x-4) = -2(x-2)$

$\Rightarrow F \propto -x \Rightarrow$ SHM

Here $\omega^2 = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi \text{ s}^{-1}$

(iii) $a\omega = 2\sqrt{6} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$ m

**13.** Frequency of oscillation (दोलनों की आवृति)

$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{600}{1.5}} = \frac{10}{\pi}$ Hz

Let maximum amplitude be A then

(माना अधिकतम आयाम A है तो)

$v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

where x= diference in equilibrium position

(जहां x= साम्यावस्था स्थिति में अन्तर )

$= \frac{(m_1 + m_2)g}{k} - \frac{m_1 g}{k} = \frac{1}{120}m$

and $\quad v = \frac{0.5 \times 3}{1.5} = 1$ m/s

Therefore (अतः)

$1 = 20\sqrt{A^2 - \left(\frac{1}{120}\right)^2} \Rightarrow A = \frac{5\sqrt{37}}{600} = \frac{5\sqrt{37}}{6}$ cm

**14.** Common velocity after collision be v then by COLM

(टक्कर के पश्चात् उभयनिष्ठ वेग v है तो रेखीय संवेग संरक्षण नियम द्वारा)

$2Mv = Mu \Rightarrow v = \frac{u}{2}$

Hence, kinetic energy (अतः गतिज ऊर्जा)

$= \frac{1}{2}(2M)\left(\frac{u}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}Mu^2$

It is also the total energy of vibration because the spring is unstretched at this moment, hence if A is the amplitude, then

(यह कम्पन्न की कुल ऊर्जा भी होगी। क्योंकि इसी क्षण पर स्प्रिंग में अविस्तारित स्थिति में है, अतः यदि A आयाम है तो)

$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{4}Mu^2 \Rightarrow A = \left(\sqrt{\frac{M}{2K}}\right)u$

15. Additional force (अतिरिक्त बल)

$$\frac{mg}{4} = kA \Rightarrow A = \frac{g}{4} = 2.45\text{m}$$

16. Centre of mass will be at rest as there is no external force acting on the system.

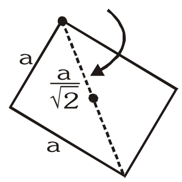
(द्रव्यमान केन्द्र विरामावस्था पर होगा चूंकि निकाय पर कोई बाह्य बल आरोपित नहीं है)

So effective length (अत: प्रभावी लम्बाई)

$$\ell_{eff} = \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)\ell$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{eff}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1\ell}{(m_1+m_2)g}}$$

17. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ma^2}{6}+\frac{ma^2}{2}}{mg\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\sqrt{2}a}{3g}}$$




18. $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\ell}}$ where (जहां)

$$I = \frac{mL^2}{3} + \left(\frac{mL^2}{12} + mL^2\right) = \frac{17mL^2}{12} \ \& \ \ell = \frac{3L}{4}$$

(Distance of centre of mass from hinge)

(कब्जे से द्रव्यमान केन्द्र की दूरी)

$$\Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{17mL^2}{12(2mg(3L/4))}} = 2\pi\sqrt{\frac{17L}{18g}}$$

19. Moment of inertia about hinged point

(किलकीत बिन्दु के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण)

$I = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\ell}{I}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{mg\sqrt{R^2+\frac{4R^2}{\pi^2}}}{2mR^2}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\sqrt{1+\frac{4}{\pi^2}}}{2R}}$$

## EXERCISE –IV(B)

1. Let block be displaced by x then displacement in springs be (माना ब्लॉक को x दूरी से विस्थापित किया जाता है तो स्प्रिंग में विस्थापन)

$x_1, x_2, x_3$ and $x_4$

Such that (इस प्रकार होंगे कि) $x = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4$

Now let restoring force on m be F = kx then

(अब माना m पर प्रत्यानयन बल F=kx है तो)

$2f = k_1x_1 = k_2x_2 = k_3x_3 = k_4x_4$

$$\Rightarrow \frac{F}{k} = \frac{4F}{k_1} + \frac{4F}{k_2} + \frac{4F}{k_3} + \frac{4F}{k_4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} = 4\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}\right)$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{4m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{k_4}\right)}$$

2. (i) Let $x_0 = \frac{Mg}{k}$ = initial compression in spring

(स्प्रिंग में प्रारम्भिक सम्पीड़न)

COME : $\frac{1}{2}k(x_0 + b)^2 = \frac{1}{2}k(a - x_0)^2 + (m+M)g\,(b+a)$

$$\Rightarrow k = \frac{2mg}{b-a}$$

(ii) $k = \frac{2mg}{(b-a)} \Rightarrow (m+M)\omega^2 = \frac{2mg}{b-a}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2mg}{(b-a)(m+M)}}$$

(iii) Let h = initial height of m over the pan

(माना h= पलड़े पर गिर रहे m की प्रारम्भिक ऊंचाई)

v = common velocity of (m+M) after collision

(v= टक्कर के पश्चात् (m+M) का उभयनिष्ठ)

COLM : $m\sqrt{2gh} = (m+M)v$ ....(i)

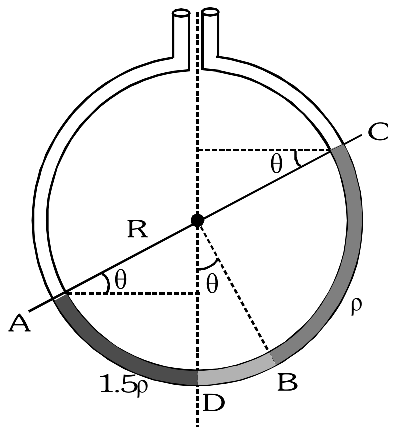
COME : $\frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}(m+M)v^2 + (m+M)gb = \frac{1}{2}k(x_0+b)^2$

$$\Rightarrow h = \left(\frac{M+m}{m}\right)\left(\frac{ab}{b-a}\right)$$

**3.** (a) Let the liquid of density 1.5 ρ occupy the left portion AB and the liquid of density ρ occupy the right portion BC of the tube. The pressure at the lowest point D due to the liquid on the left is

(माना बांये AB द्वारा घेरे गये द्रव का घनत्व 1.5 ρ तथा नली के दांये भाग BC द्वारा घेरे गये द्रव का घनत्व ρ है। बांये भाग पर द्रव के कारण निम्न बिन्दु D पर दाब)

$P_1 = (R - R\sin\theta)\ 1.5\ \rho g$




The pressure due to the liquid on the right is

(दांये भाग पर द्रव के कारण दाब)

$P_2 = (R\sin\theta + R\cos\theta)\rho g + (R - R\cos\theta) 1.5\ \rho g$

Since the liquids are in equilibrium

(चूंकि द्रव साम्यावस्था में है)

$P_1 = P_2$ or $(R - R\sin\theta)\ 1.5\ \rho g = (R\sin\theta + R\cos\theta)\rho g + (R - R\cos\theta) 1.5\ \rho g$

Solving, we get (हल करने पर)

$\tan\theta = 0.2$ or $\theta = \tan^{-1}(0.2)$

(b) Let the whole liquid be given a small angular displacement α towards right. Then the pressure difference between the right and the left limbs is

(माना α सम्पूर्ण द्रव का दांयी ओर दिया गया लघु कोणीय विस्थापन α है तो दांयी व बांयी भुजा के मध्य)

$dP = P_2 - P_1$

$= [R\sin(\theta+\alpha) + R\cos(\theta+\alpha)\ \rho g$

$+ [R - R\cos(\theta+\alpha)\ 1.5\rho g - [R - R\sin(\theta+\alpha)]\ 1.5\ \rho g$

$= R\rho g\ [2.5\ \sin(\theta+\alpha) - 0.5\ \cos(\theta+\alpha)]$

$= R\rho g\ [2.5\ (\sin\theta\ \cos\alpha + \cos\theta\ \sin\alpha)$

$-0.5\ (\cos\theta\ \cos\alpha - \sin\theta\sin\alpha)]$

For small α (अल्प α के लिए)

$\sin\alpha \approx \alpha, \cos\alpha \approx 1 \quad \therefore\ dP = R\rho g$

$[\ 2.5\ \sin\theta + 2.5\ \alpha\ \cos\theta - 0.5\ \cos\theta + 0.5\ \alpha\ \sin\theta]$

As $\tan\theta = 0.2$, $\sin\theta \dfrac{0.2}{\sqrt{1.04}} \approx 0.2$, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1.04}} \approx 1$

$\therefore\ dP = R\rho g\ [2.5 \quad 0.2 + 2.5\ \alpha - 0.5 + 0.5 \quad 0.2\ \alpha]$

$= R\rho g\ [\ 2.6\ \alpha]$

$= 2.6\ \rho g$

where $y = R\alpha$, the linear displacement.

(जहां $y = R\alpha$, रेखीय विस्थापन)

$\therefore$ Restoring force (प्रत्यानयन बल) $F = 2.6\ \rho gAy$

This shows that (यह प्रदर्शित करता है कि) $F \propto y$

Hence the motion is simple harmonic with force constant (अत: गति सरल आवर्त गति है जिसका बल नियतांक)

$k = 2.6\ \rho gA$

Now, total mass of the liquid (अब द्रव का कुल द्रव्यमान)

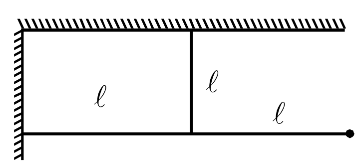
$$m = \frac{2\pi R}{4}A\rho + \frac{2\pi R}{4}A(1.5p) = \frac{5\pi RA\rho}{4}$$

$\therefore$ Time period (आवर्तकाल)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{5\pi rA\rho}{4 \times 2.6\rho gA}}$$

$$= \pi\sqrt{\frac{1.93\pi R}{9.8}} = 2.47\sqrt{R} \text{ seconds.}$$

**4.** $T\sin\theta\ell = I\alpha$



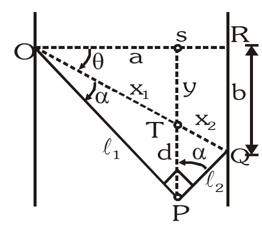

$$\Rightarrow -2mg\theta\ell = m(4\ell^2)\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{2g\theta}{4\ell}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2g}{4\ell}\theta = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2g}{4\ell}} = \sqrt{\frac{g}{2\ell}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{2\ell}{g}}$$

**5.** Given $a^2 + b^2 = \ell_1^{\,2} + \ell_2^{\,2}$

$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$

$\tan\alpha = \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$




Let $OT = x_1$, $TQ = x_2$, $PT = d$, $TS = y$

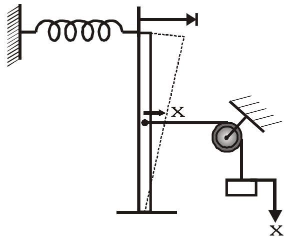
From geometry (ज्यामिति से)

$$d + y = \ell_1 \sin(\alpha + \theta)$$

and $d + \ell_1 \cos(\alpha + \theta) \tan\theta = \ell_1 \sin(\alpha + \theta)$

$$\Rightarrow d = \frac{\ell_1 \ell_2}{a} \quad \therefore\ T = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_1\ell_2}{ag}}$$

6. From energy equation (ऊर्जा समीकरण से)




$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{x}{a}b\right)^2 = E$$

$$\Rightarrow ma + \frac{kb^2}{a^2}x = 0 \Rightarrow T = 2\pi\frac{a}{b}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

7. $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (Lift is stationary) (लिफ्ट स्थिर है)

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$$

(Lift is accelerated upward)
(लिफ्ट ऊपर की ओर त्वरित है)

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$$

(Lift is deacelerated upward)
(लिफ्ट ऊपर की ओर अवमंदित है)
Let x = total upward distance travelled
(माना x= ऊपर की ओर तय कुल दूरी)

$$\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{x}{a}}$$

$\therefore$ for upward accelerated motion
(ऊपर की ओर त्वरित गति के लिये)

$$\Delta T = \left(t\frac{T_1}{T_0} - t\right)\times 2 = 2\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{g}{g+a}}\right) \ldots\text{(i)}$$

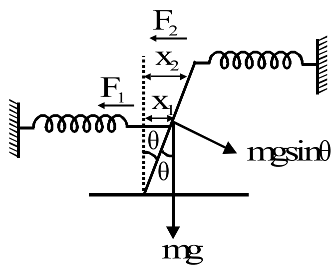
& for upward decelerated motion
(ऊपर की ओर अवमंदित गति के लिये)

$$\Delta T = \left(t_1\frac{T_2}{T_0} - t\right)\times 2 = 2\left(\sqrt{\frac{x}{a}} - 1\right)\left(\sqrt{\frac{g}{g-a}}\right) \ldots\text{(ii)}$$

$$\therefore \Delta T_{total} = 2\left(\sqrt{\frac{x}{a}}\right)\left(\sqrt{\frac{g}{g-a}} - \sqrt{\frac{g}{g+a}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{4x}{a}}\left(\sqrt{\frac{g}{g-a}} - \sqrt{\frac{g}{g+a}}\right)$$

8. (i)




$$\theta = \frac{x_1}{\ell/2},\ x_1 = \frac{\theta\ell}{2},\ f_1 = \frac{K\theta\ell}{2}$$

$$\theta = \frac{x_2}{\ell},\ x_2 = \theta\ell,\ f_2 = k\theta\ell$$

$$\tau = \frac{L}{2}\times F_1 + L\times F_2 \geq mg\sin\theta\frac{L}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2}\frac{K\theta L}{2} + LK\theta L \geq mg\theta\frac{L}{2}$$

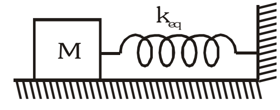
$$\Rightarrow \frac{5}{4}K\theta L^2 \geq mg\frac{\theta L}{2} \quad \Rightarrow K \geq \frac{2mg}{5L}$$

(ii) If the rod is displaced through an angle $\theta$, then
(यदि छड़ को कोण $\theta$ से विस्थापित किया गया है तो)

$$-(kL\theta)L - \left(\frac{kL}{2}\theta\right)\frac{L}{2} + Mg\left(\frac{L}{2}\right)\theta = \frac{ML^2}{3}\alpha \quad \left(k = \frac{Mg}{L}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{9k\theta}{4M} = \alpha \Rightarrow \omega = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

9. (i) This system can be reduced to (प्रश्न में प्रदर्शित निकाय को निम्न चित्रानुसार दर्शाया जा सकता है)




$$\text{Where } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{(0.1)(0.1)}{0.1 + 0.1} = 0.05\ \text{kg}$$

and $k_{eq} = k_1 + k_2 = 0.1 + 0.1 = 0.2\ \text{Nm}^{-1}$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{\mu}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{0.2}{0.05}} = \frac{1}{\pi}\text{Hz}$$

(ii) Compression in one spring is equal to extension in other spring (एक स्प्रिंग में सम्पीड़न, दूसरी स्प्रिंग में विस्तार के बराबर होता है)

$$= 2R\theta = 2(0.06)\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{50}\text{m}$$

Total energy of the system (निकाय की कुल ऊर्जा)

$$E = \frac{1}{2}k_1(2R\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta)^2$$

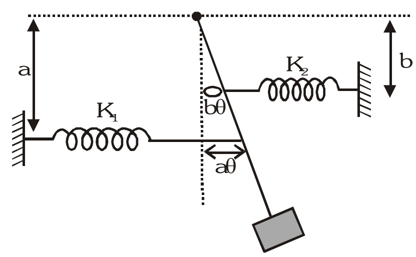
$$= k(2R\theta)^2 = (0.1)\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 = 4\pi \quad 10^{-5}\text{J}$$

(iii) From mechanical energy conservation (यांत्रिक ऊर्जा संरक्षण से)

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = E$$

$$\Rightarrow 0.1v^2 = 4\pi^2 \quad 10^{-5} \Rightarrow v = 2\pi \ 10^{-2}\text{ms}^{-1}$$

10.




For small angular displacement $\theta$, net torque towards mean position is (अल्पकोणीय विस्थापन $\theta$ के लिये, माध्य स्थिति की ओर कुल बलाघूर्ण)

$\tau = (k_1a\theta)\ a + (k_2b\theta)\ b \Rightarrow I\alpha = (k_1a^2 + K_2b^2)\ \theta$

$$\Rightarrow (mL^2 + \frac{1}{3}\ ML^2)\ \alpha = (k_1a^2 + k_2b^2)\ \theta$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2\ (m + \frac{M}{3})}\theta \quad \therefore \omega^2 = \frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2\ (m + \frac{M}{3})}$$

Hence frequency (अतः आवृत्ति)

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1a^2 + k_2b^2}{L^2(m + \frac{M}{3})}}$$

## EXERCISE –V-A

1. Time period of a mass loaded spring (द्रव्यमान भारित स्प्रिंग का आवर्तकाल)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ So } T \propto \frac{1}{\sqrt{k}} \ldots\text{(i)}$$

Spring constant (k) is inversely proportional to the length of the spring, i.e.
(स्प्रिंग नियतांक (k) स्प्रिंग की लम्बाई के व्युत्क्रमानुपाती है)

$$k \propto \frac{1}{\ell}$$

$$\frac{k_{\text{complete spring}}}{k_{\text{cut spring}}} = \frac{(1/\ell)}{\left(\frac{1}{\ell/n}\right)} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow k_{\text{cut spring}} = n\left(k_{\text{complete spring}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{T_{\text{cut spring}}}{T_{\text{complete spring}}} = \sqrt{\frac{k_{\text{complete spring}}}{k_{\text{cut spring}}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ [From (i)}$$

$$\Rightarrow T_{\text{cut spring}} = \frac{T_{\text{complete spring}}}{\sqrt{n}}$$

2. In a simple harmonic oscillator the potential energy is directly proportional to the square of displacement of the body from the mean position; at the mean position the displacement is zero so the PE is zero but speed is maximum; hence KE is maximum. (सरल आवर्ती दोलित्र में स्थितिज ऊर्जा वस्तु के माध्य अवस्था से विस्थापन के वर्ग के सीधे समानुपाती होती है। माध्य अवस्था पर विस्थापन शून्य है अत: स्थितिज ऊर्जा शून्य है परन्तु चाल अधिकतम है अत: गतिज ऊर्जा अधिकतम है)

3. The time period of the swing is (झूले का आवर्तकाल)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{\text{eff}}}{g}}$$

Where $l_{\text{eff}}$ is the distance from point of suspension to the centre of mass of child. As the child stands up; the $l_{\text{eff}}$ decrease hence T decreases.
(जहां $l_{\text{eff}}$ निलम्बन बिन्दु से बच्चे के द्रव्यमान केन्द्र की दूरी है। जब बच्चा खड़ा हो जाता है तब $l_{\text{eff}}$ घटता है अत: T घटता है)

4. $$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} \text{ and } \frac{5T}{3} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}$$

On dividing (भाग देने पर) $\frac{5T}{3T} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$

$$\Rightarrow \frac{25}{9} = \frac{M+m}{M} \Rightarrow \frac{m}{M} = \frac{16}{9}$$

5. As maximum value of (अधिकतम मान है)

$A\sin\theta + B\cos\theta = \sqrt{A^2+B^2}$

so amplitude of the particle (अत: कण का आयाम)

$= 4\sqrt{1^2+1^2} = 4\sqrt{2}$

6. A harmonic oscillator crosses the mean position with maximum speed hence kinetic energy is maximum at mean position (i.e., x=0)
(एक आवर्ती दोलित्र माध्य अवस्था से अधिकतम चाल से गुजरता है अत: माध्य अवस्था पर गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है)
Total energy of the harmonic oscillator is a constant. PE is maximum at the extreme position.
(आवर्ती दोलित्र की कुल ऊर्जा नियत है। चरम स्थिति पर स्थितिज ऊर्जा अधिकतम है)

7. Maximum velocity (अधिकतम वेग)
$v_{max} = \omega A$
Given (दिया है)
$(v_{max})_1=(v_{max})_2 \Rightarrow \omega_1 A=\omega_2 A_2$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{k_2}{m}\times\frac{m}{k_1}} = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$$

8. The time period of a simple pendulum of density ρ when held in a surrounding of density σ is
(ρ घनत्व के सरल लोलक का आवर्तकाल जब इसे σ घनत्व के परिवर्तन में रखा जाता है)

$$t_{medium} = t_{air}\sqrt{\frac{\rho}{\rho-\sigma}}$$

$$\Rightarrow t_{water} = t_0\sqrt{\frac{\frac{4}{3}\times 10^{-3}}{\left(\frac{4}{3}-1\right)\times 10^{-3}}} = t_0\sqrt{\frac{4}{3}\times\frac{3}{1}} = 2t_0$$

9. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T^2 \propto \frac{1}{k}$

$t_1^2 \propto \frac{1}{k_1}$ & $t_2^2 \propto \frac{1}{k_2} \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 \propto \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$

But $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k} \propto T^2 \Rightarrow t_1^2 + t_2^2 = T^2$

10. The total energy of a harmonic oscillator is a constant and it is expressed as (किसी आवर्ती दोलित्र की कुल ऊर्जा नियत है तथा इसे व्यक्त किया जाता है)

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2\,(\text{Amplitude})^2$$

E is independen to x instantaneous displacement.
(E का मान तात्क्षणिक विस्थापन x पर निर्भर नहीं करता है)

11. Natural frequency of oscillator = $\omega_0$
(दोलित्र की मूल आवृति)
Frequency of the applied force = $\omega$
(आरोपित बल की आवृति)
Net force acting on oscillator at a displacement x
(x विस्थापन पर दोलित्र पर कार्यरत कुल बल)
$=m(\omega_0^2-\omega^2)x$ ...(i)
Given that (दिया है) $F \propto \cos\omega t$ ...(ii)
From eqs. (i) and (ii) we get (समी. (i) व (ii) से)
$m(\omega_0^2-\omega^2)\ x \propto \cos\omega t$ ...(iii)
Also, $x = A\cos\omega t$ ...(iv)
From eqs. (iii) and (iv), we get

$$m(\omega_0^2-\omega^2)A\cos\omega t \propto \cos\omega t \Rightarrow A \propto \frac{1}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}$$

12. Initial acceleration (प्रारम्भिक त्वरण)

$$= \frac{F}{m} = \frac{(15)(0.20)}{0.3} = 10\ ms^{-2}$$

13. Ans. (4)

$$y = \sin^2\omega t = \frac{1-\cos 2\omega t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\omega t$$

⇒ motion is SHM with time period
(गतिज सरल आवर्त गति है जिसका आवर्तकाल)

$$= \frac{2\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{\omega}$$

14. $y_1=0.1\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$

$$v_1 = \frac{dy_1}{dt} = 0.1\times 100\pi\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 10\pi\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$y_2=0.1\ \cos 100\pi t$

$$\Rightarrow v_2 = -0.1\ \pi\sin 100\pi t = 0.1\pi\cos\left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Phase difference between $v_1$ and $v_2$
($v_1$ व $v_2$ के मध्य कलान्तर)

$$= \left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(100\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$$

15. $\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x = 0$

On comparing the above equation with the equation of SHM(उपरोक्त समीकरण की सरल आवर्त गति की समीकरण से तुलना करने पर)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \Rightarrow \omega^2=\alpha \Rightarrow \omega=\sqrt{\alpha} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}$$

**16.** The expression of time period of a simple pendulum is (सरल लोलक के आवर्तकाल का व्यंजक है)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_{eff}}{g_{eff}}}$$

Where $l_{eff}$ is the distance between point of suspension and centre of gravity of bob. As the hole is suddenly unplugged, $l_{eff}$ first increases then decrease because of shifting of CM due to which the time period first increases and then decreases to the original value. (जहां $l_{eff}$ निलम्बन बिन्दु एवं गोलक के गुरूत्व केन्द्र के मध्य दूरी है। जब छिद्र पर लगी डॉट अचानक खुल जाती है, $l_{eff}$ का मान पहले बढ़ता है फिर घटता है क्योंकि द्रव्यमान केन्द्र विस्थापित होता है जिसके कारण आवर्तकाल पहले बढ़ता हे तथा फिर अपने मूल मान तक घट जाता है)

**17.** Maximum velocity of a particle during SHM is ()सरल आवर्त गति के दौरान कण का अधिकतम वेग)

$$v_{max} = \omega A \Rightarrow 4.4 = \frac{2\pi}{T}\left(7\times10^{-3}\right) \Rightarrow T = 0.01s$$

**18.** $KE = \left(\frac{75}{100}\right)TE$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\omega^2\left(A^2 - x^2\right) = \frac{3}{4}\left[\frac{1}{2}m\omega^2A^2\right] \Rightarrow x = \frac{A}{2}$$

Now from $x = A\sin\omega t$ we have

$$\frac{A}{2} = A\sin(\omega t) \Rightarrow \left(\frac{2\pi}{T}\right)t = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t = \frac{1}{6}\text{ s}$$

**19.** $\because$ $x = 2\quad 10^{-2}\cos\pi t$

$\therefore$ $v = (2\quad 10^{-2})\ (\pi)\ (-\sin\pi t) = -2\pi\quad 10^{-2}\sin\pi t$

Speed will be maximum if (चाल अधिकतम होगी यदि)

$$\pi t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{1}{2} = 0.5s$$

**20.** $\because x = x_0\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = -x_0\omega\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{dv}{dt} = -x_0\omega^2\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= x_0\omega^2\cos\left(\pi + \omega t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow x_0\omega^2\cos\left(\pi + \omega t - \frac{\pi}{4}\right) = A\cos(\omega t + \delta)$$

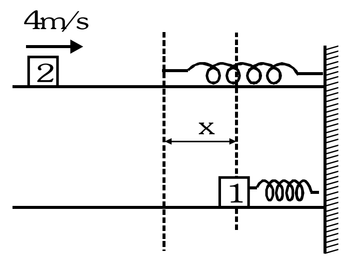
$$\Rightarrow A = x_0\omega^2 \text{ and } \delta = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

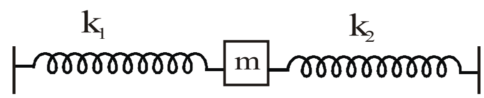
**21.** $W.D_f = K_f + U_f - K_i - U_i$

$$\Rightarrow -f.x = \frac{1}{2}kx^2 + 0 - \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\Rightarrow -15x = 5000x^2 - 16 = 0$$

$$\Rightarrow 5000x^2 + 15x - 16 = 0 \Rightarrow x = 5.5\text{ cm}$$




**22.** 


The original frequency of oscillation (दोलन की मूल आवृति)

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$

On increasing the $k_1$ and $k_2$ by 4 times, then f' becomes ($k_1$ और $k_2$ के मान में चार गुना वृद्धि करने पर)

$$f' = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4(k_1 + k_2)}{m}} = 2f$$

**23.** Mass = m, amplitude =a, frequency = $\nu$ (द्रव्यमान = m, आयाम=a, आवृति = $\nu$)

$$(KE)_{av} = \frac{1}{4}m(2\pi\nu)^2a^2 = \pi^2m\nu^2a^2$$

**24.** $a = -\omega^2x$, $v = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$$a^2T^2 + 4\pi^2v^2 = \omega^4x^2T^2 + 4\pi^2\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$= \frac{4\pi^2}{T^2}\omega^2x^2T^2 + 4\pi^2\omega^2(A^2 - x^2)$$

$$= 4\pi^2\omega^2A^2 = \text{constant (नियत)}$$

$$\frac{aT}{x} = -\frac{\omega^2xT}{x} = -\omega^2T = \text{constant (नियत)}$$

**25.** $n_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$ ..... (i) and $n_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M+m}}$ ..... (ii)

according to conservation of linear momentum (रेखीय संवेग संरक्षण के अनुसार)

$Mv_1 = (M + m)v_2 \Rightarrow M_1A_1\omega_1 = (M + m)A_2\omega_2$

From equation (i) & (ii)

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{M+m}{M}\right).\frac{\omega_2}{\omega_1} = \left(\frac{M+m}{M}\right)\sqrt{\frac{M}{M+m}} = \sqrt{\frac{M+m}{M}}$$

**26.** $X_1 = A \sin \omega t$

$X_2 = X_0 + A \sin(\omega t + \phi)$

$X_2 - X_1 = X_0 + A \sin(\omega t + \phi) - A \sin \omega t$

Become $\left|X_2 - X_1\right|_{max} = X_0 + A$

$|A \sin(\omega t + \phi) - A \sin \omega t|_{max} = A \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}$

**27.** By using $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{A\rho g}}$

Where $m = \ell^3 d$ and $A = \ell^2$

$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell^3 d}{\ell^2 \rho g}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell d}{\rho g}}$

**28.** $k_1\ell_1 = k_2\ell_2 = k\ell.\ k_1 = \frac{5k}{2}$

**29.** Equation of damped simple pendulum

(अवमंदित सरल लोलक की समीकरण)

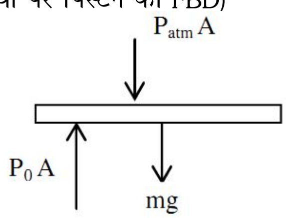
$\frac{d^2x}{dt^2} = -bv + g \sin\theta \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -bv + \frac{g}{\ell}x = 0$

By solving above equation $x = A_0 e^{-\frac{b}{2}t} \sin(\omega t + \phi)$

At $t = \tau$, $A = \frac{A_0}{2}$ so $\tau = \frac{2}{b}$

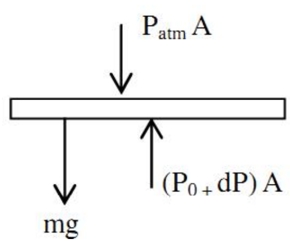
**30.** FBD of piston at equilibrium

(साम्यावस्था पर पिस्टन का FBD)




$\Rightarrow P_{atm} A + mg = P_0 A$ ...(i)

FBD of piston when piston is pushed down a distance x(जब पिस्टन को x दूरी नीचे तक दबाया जाता है तो पिस्टन का FBD)




$P_{atm} + mg - (P_0 + dP)A = m\frac{d^2x}{dt^2}$ ...(ii)

Process is adiabatic (प्रक्रम रूद्धोष्म है)

$\Rightarrow PV^\gamma = C \Rightarrow -dP = \frac{\gamma P dV}{V}$

Using 1, 2, 3 we get $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{A^2\gamma P_0}{MV_0}}$

## EXERCISE –V-B

**1.** $U(x) = k|x|^3$

$\therefore [k] = \frac{[U]}{[x^3]} = \frac{[ML^2T^{-2}]}{[L^3]} = [ML^{-1}T^{-2}]$

Now, time period may depend on

()अब, आवर्तकाल निर्भर कर सकता है

$T \propto (\text{mass})^x (\text{amplitude})^y (k)^z$

$\Rightarrow [M^0L^0T] = [M]^x[L]^y [ML^{-1} T^{-2}]^z = [M^{x+z} L^{y-z}T^{-2z}]$

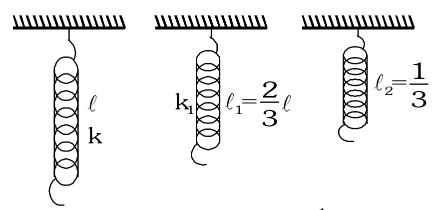
Equating the powers, we get

(घातों की तुलना करने पर)

$-2z = 1$ or $z = -1/2$ $y - z = 0$ or $y = z = -1/2$

Hence, $T \propto (\text{amplitude})^{-1/2} \Rightarrow T \propto (a)^{-1/2} \Rightarrow T \propto \frac{1}{\sqrt{a}}$

**2.** $\ell_1 = 2\ell_2$ $\therefore \ell_1 = \frac{2}{3}\ell$

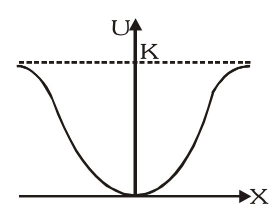



Force constant $k \propto \frac{1}{\text{length of spring}}$ $\therefore k_1 = \frac{3}{2}k$

**3.** $U(x) = k(1 - e^{-x^2})$

It is an exponentially increasing graph of potential energy (U) with $x^2$. Therefore, U versus x graph will be as shown.

(यह स्थितिज ऊर्जा (U) का $x^2$ के साथ चरघातांकीय रूपसे वृद्धि को प्रदर्शित करने वाला आरेख है अत: U का x के साथ आरेख चित्रानुसार होगा)




From the graph it is clear that at origin.Potential energy U is minimum (therefore, kinetic energy will be maximum) and force acting on the particle is also zero because

(उपरोक्त आरेख से यह स्पष्ट है कि मूल बिन्दु पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है (अत: गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी) तथा कण पर कार्यरत बल भी शून्य होगा क्योंकि)

$F = \frac{-dU}{dx} = -(\text{slope of U–x graph})=0.$

Therefore, origin is the stable equilibrium position. Hence, particle will oscillate simple harmonically about x=0 for small displacements. Therefore, correct option is (d). (a), (b) and (c) options are wrong due to following reasons :

(अत: मूल बिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति है। अत: लघु विस्थापनों के लिये कण x=0 के सापेक्ष सरल आवर्ती रूप से दोलन करेगा। अत: सही विकल्प (d) है। (a, (b) व (c) विकल्प गलत है जिसके कारण निम्नलिखित है)

(a) At equilibrium positoin $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ i.e, slope of U–x graph should be zero and from the graph we can see that slope is zero at x=0 and x=±∞.

Now among these equilibriums stable equilibrium position is that where U is minimum (Here x=0). Unstable equilibrium position is that where U is maximum (Here none).

Neutral equilibrium position is that where U is constant (Here x =± ∞). Therefore, option (a) is wrong.

(साम्यावस्था पर $F = \frac{-dU}{dx} = 0$ अर्थात् U–x आरेख का एाल शून्य होनाचाहिये तथा आरेख से हम देख सकते हैं कि x=0 व x=±∞ पर ढाल शून्य है। अब उपरोक्त साम्यावस्था की स्थितियों में से स्थायी अवस्था की स्थिति वह है जहां U न्यूनतम है (यहां x=0)। अस्थायी साम्यावस्था की स्थिति वह है जहां U अधिकतम है ( यहां कोई नहीं है)

उदासीन साम्यावस्था की स्थिति वह है जहां U नियत है (यहां x =± ∞). अत: विकल्प (a) गलत है।

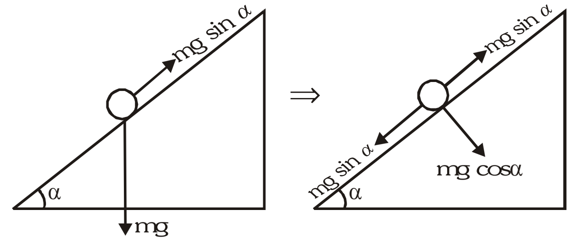
(b) For any finite non–zero value of x, force is directed towards the origin because origin is in stable equilibrium position. Therefore, option (b) is incorrect.

(x के किसी भी परिमित अशून्य मान के लिये, बल की दिशा मूल बिन्दु की ओर है क्योंकि मूल बिन्दु स्थायी साम्यावस्था की स्थिति में है। अत: विकल्प (b) गलत है)

(c) At origin, potential energy is minimum, hence kinetic energy will be maximum. Therefore, option (c) is also wrong.

(मूल बिन्दु पर, स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है अत: गतिज ऊर्जा अधिकतम होगी अत: विकल्प (c) भी गलत है)

4. Free body diagram of bob of the pendulum with respect to the accelerating frame of reference is as follows: (लोलक के गोलक का त्वरित निर्देश तंत्र के सापेक्ष FB निम्नानुसार है)




∴ Net force on the bob is (गोलक पर कुल बल)

$F_{net} = mg \cos \alpha$ (figure b)

or

Net acceleration of the bob is (गोलक का कुल त्वरण)

$g_{eff} = g \cos \alpha$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_{eff}}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g\cos\alpha}}$$

5. In SHM, velocity of particle also oscillates simple harmonically. Speed is more near the mean position and less near the extreme positions. Therefore, the time taken for the particle to go from O to A/2 will be less than the time taken to go it from A/2 to A, or $T_1 < T_2$.

(सरल आवर्त गति में, कण का वेग भी सरल आवर्ती रूप से दोलन करेगा। माध्य स्थिति के निकट चाल अधिक एवं चरम स्थिति के निकट चाल कम है। इसलिये 0 से A/2 तक जाने में कण द्वारा लिया गया समय, A/2 से A तक जाने के लिये गए समय से कम होगा $T_1 < T_2$.)

6. Potential energy is minimum (in this case zero) at mean position (x=0) and maximum at extreme positions (x= ±A).

(माध्य स्थिति (x=0) पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम ( इस स्थिति में शून्य है) है तथा चरम स्थिति (x=±A) पर अधिकतम है)

At time t=0, x=A. Hence, PE should be maximum. Therefore, graph I is correct. Further is graph III, PE is minimum at x=0. Hence, this is also correct.

(t=0 समय पर, x=A है अत: स्थितिज ऊर्जा अधिकतम होनी चाहिये। इसलिये आरेख I सही है। आरेख III में x=0 पर स्थितिज ऊर्जा न्यूनतम है। अत: यह भी सही है)

7. Block Q oscillates but does not slip on P. It means that acceleration is same for Q and P both. There is a force of friction between the two blocks while the horizontal plane is frictinless. The spring is connected to upper block. The (P–Q) system oscillates with angular

frequency ω. The spring is stretched by A.
(ब्लॉक Q दोलन करता है परन्तु P के ऊपर फिसलता नहीं है। इसका अर्थ है कि Q व P दोनों के लिये त्वरण समान है। यहां दोनों ब्लॉकों के मध्य घर्षण बल उपस्थित है जबकि क्षैतिज तल घर्षणहीन है। स्प्रिंग ऊपरी ब्लॉक से जुड़ी हुई है। (P–Q) निकाय कोणीय आवृति ω से दोलन करता है। स्प्रिंग A से विस्तारित किया जाता है)

$\therefore\ \omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+m}} = \sqrt{\dfrac{k}{2m}}$

$\therefore$ Maximum acceleration in SHM = $\omega^2 A$
(सरल आवर्त गति में अधिकतम त्वरण)

$a_m = \dfrac{kA}{2m}$ (i)

Now consider the lower block.
(अब निचले ब्लॉक पर विचार कीजिये)
Let the maximum force of friction = $f_m$
(माना अधिकतम घर्षण बल)

$\therefore\ f_m = ma_m \Rightarrow f_m = m\dfrac{kA}{2m} \Rightarrow f_m = \dfrac{kA}{2}$

8. $y = Kt^2 \Rightarrow \dfrac{d^2y}{dt^2} = 2K \Rightarrow a_y = 2m/s^2$ (as $K = 1\ m/s^2$)

$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g}}$ and $T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{\ell}{g+a_y}}$

$\therefore\ \dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{g+a_y}{g} = \dfrac{10+2}{10} = \dfrac{6}{5}$

9. $\dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}(4k)y^2 \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2}$

10. Displacement equation from graph
(ग्राफ से विस्थापन समीकरण)

$X = \sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)\ \left[\because \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{8} = \dfrac{\pi}{4}\right]$

Acceleration (त्वरण) $a = -\dfrac{\pi^2}{16}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}t\right)$

At $t = \dfrac{4}{3}s,\ a = -\dfrac{\sqrt{3}\pi^2}{32}\ cm/s^2$

11. In series spring force remain same; if extension in $k_1$ and $k_2$ are $x_1$ and $x_2$ respectively.
(श्रेणीक्रम में स्प्रिंग बल समान रहता है। यदि $k_1$ व $k_2$ में विस्तार क्रमशः $x_1$ व $x_2$ है)

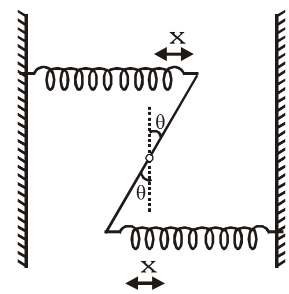
Then $k_1x_1 = k_2x_2 \Rightarrow x_1 + x_2 = A \Rightarrow x_1 + \dfrac{k_1x_1}{k_2} = A$

$\Rightarrow x_1\left(\dfrac{k_1+k_2}{k_2}\right) = A \Rightarrow x_1 = \dfrac{k_2A}{(k_1+k_2)}$

Amplitude of point P will be the max. ext. in $k_1$.
(बिन्दु P का आयाम $k_1$ में अधिकतम विस्तार के बराबर होगा)

So amplitude of point P is $\dfrac{k_2A}{(k_1+k_2)}$.
(अतः बिन्दु P का आयाम)

12. $x = \theta\dfrac{L}{2}$




$F = -k\left(\theta\dfrac{L}{2}\right)$

$\tau_1 = -k\left(\theta\dfrac{L}{2}\right)\ \dfrac{L}{2}$

$\tau_2 = -k\left(\theta\dfrac{L}{2}\right)\ \dfrac{L}{2}$

$\tau_{net} = -k\theta\dfrac{L^2}{2} \Rightarrow \alpha = -\left(\dfrac{kL^2}{2}\theta\right)\times\dfrac{12}{mL^2}$

$\Rightarrow -\left(\dfrac{k6}{m}\right)\theta \Rightarrow \omega = \left(\dfrac{k6}{m}\right)^{1/2} \Rightarrow f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{6k}{m}}$

## MCQ

1. From superposition principle :
(अध्यारोपण सिद्धान्त से)
$y = y_1 + y_2 + y_3$
$= a\sin\omega t + a\sin(\omega t + 45) + a\sin(\omega t + 90)$
$= a[\sin\omega t + \sin(\omega t + 90)] + a\sin(\omega t + 45)$
$= 2a\sin(\omega t + 45)\cos 45 + a\sin(\omega t + 45)$
$= (\sqrt{2}+1)a\sin(\omega t + 45°) = A\sin(\omega t + 45)$
Therefore, resultant motion is simple harmonic of amplitude. $A = (\sqrt{2}+1)a$ and which differ in phase by 45 relative to the first.
(इसलिए परिणामी गति $A = (\sqrt{2}+1)a$ आयाम की सरल आवर्त गति है जिसका पहले के सापेक्ष कलान्तर $45^0$ है)
Energy in SHM ∝ (amplitude)$^2$

$\therefore\ \dfrac{E_{resultant}}{E_{single}} = \left(\dfrac{A}{a}\right)^2 = (\sqrt{2}+1)^2 = (3+2\sqrt{2})$

$\therefore\ E_{resultant} = (3+2\sqrt{2})E_{single}$

2. For $A = -B$ and $C = 2B$

$X = B\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t = \sqrt{2}B\sin\left(2\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$

This is equation of SHM of amplitude $\sqrt{2}$ B

(यह $\sqrt{2}$ B आयाम की सरल आवर्त गति की समीकरण है)

If A = B and C = 2B, then X = B + B sin 2ωt

This is also equation of SHM about the point X=B. Function oscillates between X=0 and X=2B with amplitude B.

(यह भी बिन्दु x=B के सापेक्ष सरल आवर्त गति की समीकरण है। फलन x=0 एवं x=2B के मध्य B आयाम के साथ दोलन करता है)

### Paragraph

1. For linear motion of disc (चकती की रेखीय गति के लिये)

$F_{net}$ = Ma = –2kx + f

where f = frictional force (जहां f= घर्षण बल)

For rolling motion (लौटनी गति के लिये)

$$fR = -\left(\frac{MR^2}{2}\right)(\alpha) = -\left(\frac{Ma}{2}\right)R \Rightarrow f = -\frac{Ma}{2} = -\frac{F_{ext}}{2}$$

$$\text{Therefore } F_{ext} = -2kx - \frac{F_{ext}}{2} = -\frac{4kx}{3}$$

2. Total energy of system (निकाय की कुल ऊर्जा)

$$E = \frac{1}{2}Mv^2\left(1+\frac{1}{2}\right) + 2\quad\frac{1}{2}kx^2 = \frac{3}{4}Mv^2 + kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{3}{4}M(2v)\frac{dv}{dt} + 2k\times\left(\frac{dx}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} + \left(\frac{4k}{3M}\right)x = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{4k}{3M}}$$

3. Using energy conservation law

(ऊर्जा संरक्षण नियम का उपयोग करने पर)

$$\frac{1}{2}Mv_0^2\left(1+\frac{1}{2}\right) = 2\quad\frac{1}{2}kx_1^2$$

$$2kx_1 - f_{max} = Ma \;\&\; f_{max}R = \left(\frac{MR^2}{2}\right)\alpha$$

$$\text{But } f_{max} = \mu Mg \Rightarrow x_1 = \frac{3\mu Mg}{2K}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}Mv_0^2 = Kx_1^2 = \frac{1}{K}\left(\frac{9\mu^2M^2g^2}{4}\right) \Rightarrow v_0 = \mu g\sqrt{\frac{3M}{K}}$$

## SUBJECTIVE

1. **(i)** Two masses $m_1$ and $m_2$ are connected by a spring of length $\ell_0$. The spring is in compressed position. It is held in this position by a string. When the string snaps, the spring force is brought into operation. The spring force is an internal force w.r.t. masses–spring system. No external force is applied on the system. The velocity of centre of mass will not change.

(दो द्रव्यमानों $m_1$ व $m_2$ को $\ell_0$ लम्बाई की एक स्प्रिंग द्वारा जोड़ा गया है। स्प्रिंग संपीड़ित अवस्था में है। इसे रस्सी द्वारा इस स्थिति में रखा जाता है। जब रस्सी टूट जाती है तब स्प्रिंग बल कार्यशील हो जाता है। द्रव्यमान–स्प्रिंग निकाय के सापेक्ष स्प्रिंग बल एक आन्तरिक बल है। निकाय पर कोई बाह्य बल आरोपित नहीं है। द्रव्यमान केन्द्र का वेग परिवर्तित नहीं होता है।)

Velocity of centre of mass = $v_0$

(द्रव्यमान केन्द्र का वेग)

∴ Location/x–coordinate of centre of mass at time t=$v_0$t

(t समय पर द्रव्यमान केन्द्र के x- निर्देशांक/स्थिति =$v_0$t)

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow v_0t = \frac{m_1[v_0t - A(1-\cos\omega t)] + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

$\Rightarrow (m_1 + m_2)\, v_0t = m_1[v_0t - A\,(1-\cos\omega t)] + m_2x_2$

$\Rightarrow m_1v_0t + m_2v_0t = m_1v_0t - m_1A(1-\cos\omega t)] + m_2x_2$

$\Rightarrow m_2x_2 = m_2v_0t + m_1A(1-\cos\omega t)$

$$\Rightarrow x_2 = v_0t + \frac{m_1A}{m_2}(1-\cos\omega t)\ \ldots(i)$$

**(ii)** To express $\ell_0$ in terms of A.

(A के पदों में $\ell_0$ को व्यक्त करना)

$$\therefore x_1 = v_0t - A(1-\cos\omega t)\ \therefore \frac{dx_1}{dt} = v_0 - A\omega\sin\omega t$$

$$\therefore \frac{d^2x_1}{dt^2} = -A\omega^2\cos\omega t\ \ldots.(ii)$$

$x_1$ is displacement of $m_1$ at time t.

(t समय पर $m_1$ का विस्थापन $x_1$ है)

$\therefore \frac{d^2x_1}{dt^2}$ = acceleration of $m_1$ at time t.

(t समय पर $m_1$ का त्वरण)

When the spring attains its natural length $\ell_0$, then acceleration is zero and $(x_2 - x_1) = \ell_0$

(जब स्प्रिंग अपनी मूल लम्बाई $\ell_0$ प्राप्त कर लेती है तो त्वरण शून्य होगा तथा $(x_2 - x_1) = \ell_0$)

$\therefore x_2 - x_1 = \ell_0$. Put $x_2$ from (i)

$$\Rightarrow \left[v_0t + \frac{m_1A}{m_2}(1-\cos\omega t)\right] - [v_0t - A(1-\cos\omega t)] = \ell_0$$

$$\Rightarrow \ell_0 = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)A(1-\cos\omega t)$$

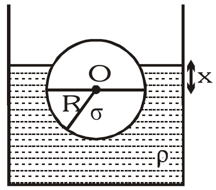
When $\frac{d^2x_1}{dt^2}$ =0, cos ωt = 0 from (ii).

$$\therefore \ell_0 = \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right)A.$$

2. A sphere of radius R is half sumerged in a liquid of density $\rho$.

(R त्रिज्या का एक गोला $\rho$ घनत्व के द्रव में आधा डूबा है)

For equilibrium of sphere (गोले की साम्यावस्था के लिए)




Weight of sphere = Upthrust of liquid on sphere.

(गोले का भार = गोले पर द्रव का उत्प्लावक बल)

$$\therefore\ V\sigma g = \frac{V}{2}(\rho)g$$

where $\sigma$= denisty of sphere(जहां $\sigma$= गोले का घनत्व)

$$\Rightarrow \sigma = \frac{\rho}{2} \qquad \ldots(i)$$

From this position, the sphere is slightly pushed down. Upthrust of liquid on the sphere will increase and it will act as the restoring force.

( इस स्थिति से, गोले को हल्का सा नीचे दबाते हैं। गोले पर द्रव का उत्प्लावक बढेगा तथा यह प्रत्यानयन बल की भांति कार्य करेगा)

$\therefore$ Restoring force (प्रत्यानयन बल)

F = Upthrust due to extra–immession

(अतिरिक्त डुबोने के कारण उत्प्लावक बल)

$\Rightarrow$ F = –(extra volume immersed) $\rho g$

( F = –(डूबा हुआ अतिरिक्त आयतन) $\rho g$)

$\Rightarrow$ (mass of sphere m) acc(a) = $-\pi R^2 \rho g x$

$\Rightarrow F = -\pi R^2 x \quad \rho g$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \sigma \quad a = -\pi R^2 \rho g x \Rightarrow a = -\frac{3g\rho}{4R\sigma}x$$

$$\Rightarrow a = -\frac{3g \times 2}{4R}x, \text{ [from (i)]}$$

$$= -\frac{3g}{2R}x$$

$\Rightarrow$ a is proportional to x.(x के समानुपाती है)

Hence the motion is simple harmonic.

(अतः यह गति सरल आवर्ती है)

$\therefore$ Frequency of oscillation (दोलन की आवृति)

$$= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{2R}}.$$

3. A small body of mass attached to one end of a vertically hanging spring performs SHM.

(ऊर्ध्वाधर लटकी हुई स्प्रिंग के एक सिरे से जुड़ी हुई m द्रव्यमानकी एक छोटी वस्तु सरल आवर्त गति कर रही है।)

Angular frequency (कोणीय आवृति)= $\omega$

Amplitude (आयाम)= a

Under SHM, velocity (सरल आवर्त गति के अधीन)

$$v = \omega\sqrt{a^2 - y^2}$$

After detaching from spring, net downward acceleration of the block = g. (स्प्रिंग से अलग होने के पश्चात्, ब्लॉक का नीचे की ओर कुल त्वरण =g)

$\therefore$ Height attained by the block = h

(ब्लॉक द्वारा प्राप्त ऊंचाई =h)

$$\therefore\ h = y + \frac{v^2}{2g} \Rightarrow h = y + \frac{\omega^2(a^2 - y^2)}{2g}$$

For h to be maximum (h के अधिकतम मान के लिए)

$$\frac{dh}{dy} = 0,\ y = y^*.$$

$$\therefore\ \frac{dh}{dy} = 1 + \frac{\omega^2}{2g}(-2y^*) \Rightarrow 0 = 1 - \frac{2\omega^2 y^*}{2g}$$

$$\Rightarrow \frac{\omega^2 y^*}{g} = 1 \Rightarrow y^* = \frac{g}{\omega^2}$$

Since $a\omega^2 > g$ (given)

$$\therefore\ a > \frac{g}{\omega^2}\ \therefore\ a > y^*.\ y^*$$

from mean position < a (माध्य अवस्था से <a)

$$\text{Hence } y^* = \frac{g}{\omega^2}.$$