Vorlesung 10 | 27.11.2020 | 10:15–12:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Beschränkung eines σ-Algebra, Bedingte W-keiten, Bayes'sche Formel, Unabhängigkeit, von Z.V. erzeugten σ-Algebren, Produkt σ-Algebra, Produktmaß, Satz von Fubini-Tonelli, Satz von Fubini-Lebesgue.

Heutigen Vorlesung.

Unendliche Produkte

Definition 1. *Seien $(\Omega_k, \mathscr{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Messräume und $\hat{\Omega} = \prod_{k\geqslant 1} \Omega_k$ das unendliche Produkträum (geordnete Produkt).*

Definieren wir die Produkt-σ-Algebra $\hat{\mathscr{F}}$ auf $\hat{\Omega}$, als die kleinste σ-Algebra, die alle Teilmengen von $\hat{\Omega}$ der Form $A = \otimes_{k\in I} A_k \times \otimes_{\ell\notin I} \Omega_\ell$ enthält, wobei $A_k \in \mathscr{F}_k$, $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$. Diese Mengen heißen Zylindermengen.

Definition 2. *Seien $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathbb{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ W-raüme. Wir definieren das unendliche Produktmaß $\hat{\mathbb{P}} := \otimes_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}_k$ auf $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{F}})$ s.d. für alle Zylindermengen A gilt*

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \hat{\mathbb{P}}(\otimes_{k\in I} A_k \times \otimes_{\ell\notin I} \Omega_\ell) = \prod_{k\in I} \mathbb{P}_k(A_k).$$

Definition 3. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum. Eine messbare Abbildung*

$$X: (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}))$$

heißt Zufallsfolge, oder stochasticher Prozess in diskreter Zeit.

Lemma 4.

a) *Seien X, Y zwei unabhängige Z.V. mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Dann ist die Verteilungsfunktion F_{X+Y} von $X + Y$ gegeben durch*

$$F_{X+Y}(s) = \int_{\mathbb{R}} F_X(s-y)\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(s-x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

b) *Falls dazu X, Y Dichten ρ_X, ρ_Y besitzen, dann besitz $X + Y$ die Dichte*

$$\rho_{X+Y}(s) = \int_{\mathbb{R}} \rho_X(x)\rho_Y(s-x)\mathrm{d}x$$

Definition 5. *Die Faltung $F_X * F_Y$ zweier Verteilungsfunktionen F_X und F_Y, ist definiert durch*

$$(F_X * F_Y)(s) = \int_{\mathbb{R}} F_X(s-y)\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y).$$

Satz 6. *Seien $X_1 \sim \mathscr{N}(m_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathscr{N}(m_2, \sigma_2^2)$ unhabängig. Dann ist*

$$X_1 + X_2 \sim \mathscr{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Definition 7. *Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von i.i.d. Z.V. mit $\mathbb{P}(X_k = 1) = 1 - \mathbb{P}(X_k = -1) = p$. Dann heißt die Folge*

$$n \mapsto S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k$$

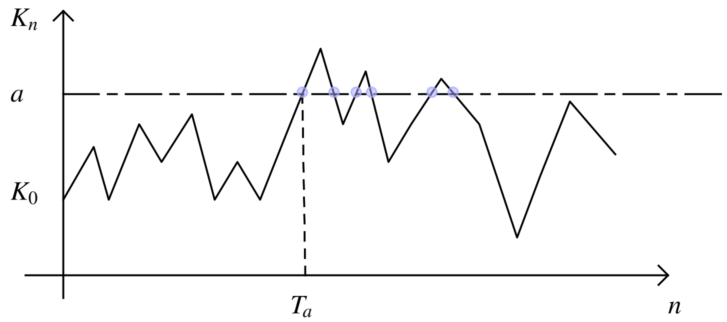
die einfache Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ (simple random walk).
Fur $p = 1/2$ heißt die einfache symmetrische Irrfahrt.

Ruinproblem

$$K_n = K_0 + S_n$$

$$T_a = \inf\{n \geqslant 1 : K_n = a\} \qquad \left[\inf \emptyset = +\infty\right]$$

$$T_a : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$



$T_0 > T_a$

$$A = \Big\{\inf\{n \geqslant 1 : S_n = -K_0\} < \inf\{n \geqslant 1 : S_n = G\}\Big\} = \{T_0 < T_{\tilde{G}}\}$$

mit $\tilde{G} = K_0 + G$.

$$\begin{cases} h(k) := \mathbb{P}\left(T_0 < T_{\tilde{G}} \middle| K_0 = k\right) & \text{für } 0 < k < \tilde{G} \\ h(0) = 1, \\ h(\tilde{G}) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} h(k) &= (1-p)h(k-1) + (1-p)h(k+1), \quad 0 < k < \tilde{G} \\ h(0) &= 1 \\ h(\tilde{G}) &= 0 \end{cases}$$

Das Arcsinusgesetz

(a). $Z_{2n} := \sum_{\ell=1}^{2n} Y_\ell$ mit

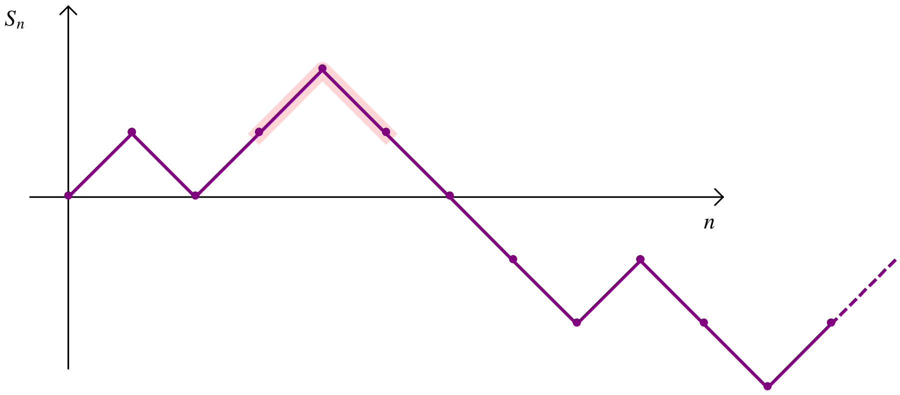
$$Y_\ell = \begin{cases} 1, & \text{falls } S_\ell > 0 \text{ und } S_{\ell+1} > 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Z_{2n} = \sharp\text{schritten in positiven Bereich}$$

(b). $f_{2n} := \mathbb{P}\Big(\underbrace{\inf\{\ell > 0 : S_\ell = 0\}}_{\text{erste Rückkehr nach 0}} = 2n\Big)$

(c). Die W-keit Rückkehr nach $2n$ Schritten

$$u_{2n} := \mathbb{P}(S_n = 0)$$

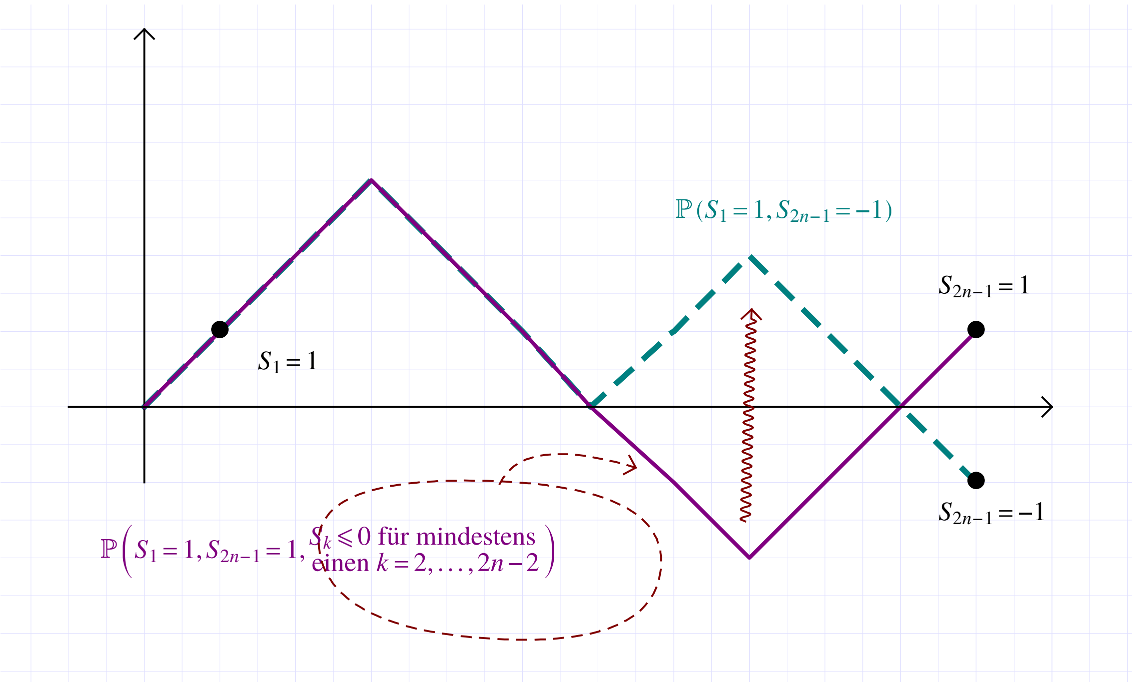


Lemma 8. *Es gilt*

$$(a) \quad u_{2n} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$$

$$(b) \quad f_{2n} = \frac{1}{2^n} u_{2n-2} = u_{2n-2} - u_{2n}$$

Reflection principle:

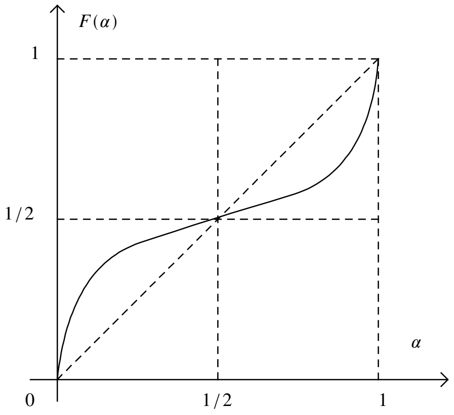


Satz 9. *Es gilt*

$$\mathbb{P}(Z_{2n} = 2k) =: p_{2k,2n} = u_{2k} \cdot u_{2n-2k}$$

$$= \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2(n-k)}}$$

Asymptotischer Ergebnis



Die Dichte

$$\rho(\alpha) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha} F(\alpha) = \frac{1}{\pi(\alpha(1-\alpha))^{1/2}}$$

Es ist viel größer für $\alpha \approx 0$ oder $\alpha \approx 1$ als in der Mitte $\alpha \approx 1/2$.