Vorlesung 8 | 20.11.2020 | 14:15–16:00 via Zoom

Handzettel

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Beschränkung eines σ-Algebra, Bedingte W-keiten.

Definition 1. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum, $A, B \in \mathscr{F}$ zwei Ereignisse. Für B s.d. $\mathbb{P}(B) > 0$, definieren wir*

$$\mathbb{P}(A \mid \mathrm{B}) = \mathbb{P}_B(A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)},$$

die bedingte W-keit von A gegeben B.

Satz 2. *Sei $B \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann*

a) Die bedingte W-keit $\mathbb{P}_B(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot|B)$ definiert ein W-maß auf $(B, \mathscr{F}_B)$, wobei

$$\mathscr{F}_B = \mathscr{F} \cap B := \{A \cap B \mid A \in \mathscr{F}\} \subseteq \mathscr{F}.$$

b) Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkt Mengen in $\mathscr{F}$, s.d.

1. $\cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \Omega$

2. $\mathbb{P}(B_n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Dann, $\forall A \in \mathscr{F}$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n).$$

Heutigen Vorlesung.

Lemma 3. *(Bayes'sche Formel) Seien $A, B \in \mathscr{F}$ $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(B|A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Definition 4. *Zwei Ereignisse $A, B \in \mathscr{F}$ mit $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\mathbb{P}(B) > 0$ heißen unabhängig, falls*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Allgemeiner, heißen n Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ (mit $\mathbb{P}(A_k) > 0$ für $k = 1, \ldots, n$) unabhängig, falls $\forall m \leqslant n$, $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n$,

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^m A_{i_k}) = \Pi_{k=1}^m \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Definition 5. *Sei $(\Omega, \mathscr{F})$ ein Messraum, $X: \Omega \to \mathbb{R}$ eine Z.V.. Definiere $\sigma(X)$ die* **kleinste** *unter-σ-Algebra von $\mathscr{F}$ s.d. X bzg. $\sigma(X)$ messbar ist. $\sigma(X)$ heißt die von X erzeugte σ-Algebra.*

Definition 6. *Sei $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ ein W-raum und X_1, X_2 zwei Z.V. X_1 und X_2 heißen unabhängig, falls $\forall A \in \sigma(X_1), B \in \sigma(X_2)$ mit $\mathbb{P}(A) > 0, \mathbb{P}(B) > 0$, gilt*

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A).$$

Lemma 7. *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum,* X_1, X_2 *unab. Z.V. Seien* g_1, g_2 *messbare Funktionen von* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *nach* $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ *mit*

$$\int_\Omega |g_i(X_i)| \mathrm{d}\mathbb{P} < \infty, \qquad i = 1, 2.$$

Dann,

$$\int_\Omega g_1(X_1) g_2(X_2) \mathrm{d}\mathbb{P} = \Big(\int_\Omega g_1(X_1) \mathrm{d}\mathbb{P} \Big) \Big(\int_\Omega g_2(X_2) \mathrm{d}\mathbb{P} \Big).$$

Definition 8. *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum.* X_1, X_2 *Z.V. heißen unkorreliert, falls*

$$\int X_1 X_2 \mathrm{d}\mathbb{P} = \int X_1 \mathrm{d}\mathbb{P} \int X_2 \mathrm{d}\mathbb{P}.$$

Notierung.

$$\mathbb{E}(X) := \int X \mathrm{d}\mathbb{P}, \qquad \textit{(Erwartungswert)}$$

$$\mathrm{Var}(X) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2], \qquad \textit{(Varianz)}$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]. \qquad \textit{(Covarianz)}$$

$\Rightarrow X, Y$ Unkorreliert $\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.

Definition 9.

- $$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) | \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2\}$$

  heißt das Produktraum von Ω_1 *und* Ω_2.

- $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ *ist die kleinste* σ*-Algebra, die alle Menge der Form* $C = A \times B$, $A \in \mathscr{F}_1$, $B \in \mathscr{F}_2$ *enthält.* $\mathscr{F} = \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$ *heißt die Produkt* σ*-Algebra von* $\mathscr{F}_1$ *und* $\mathscr{F}_2$.

Lemma 10. *Es gilt*

a) $\forall C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, $x \in \Omega_1$, $y \in \Omega_2$ *dann,* $C_x \in \mathscr{F}_2$, $C^y \in \mathscr{F}_1$

b) $\forall f: \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ *messbar dann,* $\forall x \in \Omega_1, y \in \Omega_2$ $f_x: (\Omega_2, \mathscr{F}_2) \to \mathbb{R}$, $f^y: (\Omega_1, \mathscr{F}_1) \to \mathbb{R}$ *messbar sind.*

Satz 11. *Seien* $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ *W-masse auf* $(\Omega_1, \mathscr{F}_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathscr{F}_2)$

a) $\exists!\ \mathbb{P} = \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2$ *W-masse auf* $(\Omega, \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2)$ *s.d.*

$$(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)(A \times B) = \mathbb{P}_1(A) \mathbb{P}_2(B) \qquad \forall A \in \mathscr{F}_1, B \in \mathscr{F}_2.$$

b) *Falls* $C \in \mathscr{F}_1 \otimes \mathscr{F}_2$, *dann*

$$\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2(C) = \int_{\Omega_1} \mathbb{P}_2(C_x) \mathrm{d}\mathbb{P}_1(x) = \int_{\Omega_2} \mathbb{P}_1(C^y) \mathrm{d}\mathbb{P}_2(y).$$