Extremale Gibbsmaße

Hauptseminar Stochastik

Anne Weiß

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

01. Juli 2021

Wir wollen ein geeignetes Modell für Systeme im Gleichgewicht konstruieren. Da mikroskopische Zustände noch immer eine hohe Fluktation aufweisen, bietet es sich an, ihr Verhalten durch ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu beschreiben. Dieses Maß sollte konsistent sein mit beobachteten empirischen Spezifikationen (unser π in vorangegangenen Vorträgen). Wie wir bereits im ersten Vortrag zu Gibbsmaßen gesehen haben bieten sich hierfür Gibbsmaße an. Wenn wir in einem System im Gleichgewicht nun jedoch makroskopische Zustände betrachten, werden wir keine offensichtlichen Veränderungen feststellen. Das heißt diese Ereignisse verhalten sich nicht mehr zufällig. Dies soll durch unser Wahrscheinlichkeitsmaß abbgebildet werden. In diesem Vortrag werden wir sehen, dass hierfür extremale Gibbsmaße besonders geeignet sind. [1]

In diesem Vortrag werden grundlegende Kenntnisse der Vorlesung Stochastische Prozesse vorausgesetzt (insbesondere bedingte Erwartungswerte und Martingale), diese können in [2] nachgeschlagen werden. Der Vortrag basiert auf dem Lehrwerk Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction von Sacha Friedli und Yvan Velenik [3].

1 Wiederholung

Definition 1.1 (Gibbsmaß). *Es gilt $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ falls $\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ ist und μ kompatibel mit der Spezifikation $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$ ist, das heißt*

$$\mu = \mu\pi_\Lambda \qquad \textit{für alle } \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$$

Hierbei ist für $A \in \mathscr{F}$

$$\mu\pi_\Lambda(A) := \int \pi_\Lambda(A \mid \omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Definition 1.2. *Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_1(\Omega)$ eine Folge. Diese konvergiert gegen $\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ falls*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(C) = \mu(C) \text{ für alle } C \in \mathscr{C}.$$

Wir schreiben dann auch $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Für eine Spezifikation π_Λ gilt

$$\mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda^c})(\cdot) = \pi_\Lambda(A \mid \cdot)\mu \text{ fast überall .} \tag{1}$$

2 Gibbsmaße als konvexe Menge

Definition 2.1 (konvexe Kombination)**.** *Seien ν_1, $\nu_2 \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ und $\lambda \in [0,1]$, dann wird die konvexe Kombination von ν_1 und ν_2 folgendermaßen definiert:*

$$(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2)(A) := \lambda\nu_1(A) + (1-\lambda)\nu_2(A)$$

Definition 2.2 (Konvexe Menge)**.** *$\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}_1(\Omega)$ ist konvex, falls jede konvexe Kombination von Elementen ν_1 und $\nu_2 \in \mathscr{M}'$ wieder in $\mathscr{M}'$ ist.*

Satz 2.3. *$\mathscr{G}(\pi)$ ist konvex*

Definition 2.4 (Extremalpunkt)**.** *Sei M eine konvexe Menge. Ein Punkt $\mu \in M$ heißt Extremalpunkt, falls für alle a, $b \in M$ und $\lambda \in$ (0,1) mit $\mu = \lambda a + (1-\lambda)b$ folgt, dass $\mu = a = b$. Die Menge der Extremalpunkte wird als $Ex(M)$ bezeichnet.*

Die Elemente aus $ex(\mathscr{G}(\pi))$ heißen auch extremale Gibbsmaße.

3 Eigenschaften von extremalen Gibbsmaßen

Wir werden gleich sehen, dass sich Gibbsmaße auf makroskopischen Ereignissen deterministisch verhalten. Makroskopisch Ereignisse werden nicht durch lokale Änderungen verändert. Sie werden durch die **terminale σ -Algebra** beschrieben:

$$\mathscr{I}_\infty := \bigcap_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\Lambda^c} \tag{2}$$

Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$, welche $\mathscr{I}_\infty$ messbar sind, bleiben unverändert, wenn nur eine endliche Menge von Spins verändert wird. Aus diesem Grund nennt man diese Funktionen auch makroskopische Beobachtungen (macroscopic observables).

Proposition 3.1. *Sei π eine Spezifikation.*

1. *Sei $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathscr{F}$-messbar mit $\mu(f) = 1$. Dann ist $f\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ genau dann, wenn es eine $\mathscr{I}_\infty$-messbare Funktion h gibt, so dass $f = h$ μ-fast überall.*

2. *Seien $\mu, \nu \in \mathscr{G}(\pi)$, sodass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathscr{I}_\infty$. Dann gilt schon $\mu = \nu$.*

Lemma 3.2. *Sei $X \in L^1$ und $\mathscr{G}_n$ eine absteigende Folge von σ-Algebren, d.h. $\mathscr{G}_{n+1} \subset \mathscr{G}_n$. Wir definieren $\mathscr{G}_\infty := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathscr{G}_n$. Dann gilt:*

$$\lim_{n \to \infty} E(X|\mathscr{G}_n) = E(X|\mathscr{G}_\infty) \qquad \text{fast sicher und in } L^1$$

Satz 3.3. *Sei π eine Spezifikation und $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$. Dann sind äquivalent:*

1. *μ ist extremal*
2. *μ ist trivial auf $\mathscr{I}_\infty$, d.h für alle $A \in \mathscr{I}_\infty$ gilt $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.*
3. *Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{I}_\infty$-messbar ist, dann ist f μ-fast sicher konstant.*
4. *Für alle $A \in \mathscr{C}$, bzw. auch schon für alle $A \in \mathscr{F}$, gilt:*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sup_{B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \tag{3}$$

Lemma 3.4. *Seien $\mu, \nu \in ex\mathscr{G}(\pi)$ mit $\mu \neq \nu$. Dann sind μ und ν singulär. Insbesondere gibt es ein Ereignis $A \in \mathscr{I}_\infty$, so dass $\mu(A) = 0$ und $\nu(A) = 1$.*

4 Extremale Gibbsmaße als Limes von Spezifikationen

Satz 4.1. *Sei $\mu \in ex\mathscr{G}(\pi)$. Dann gilt für μ fast alle $\omega \in \Omega$, dass*

$$\pi_{B(n)}(\cdot \mid \omega) \Rightarrow \mu. \tag{4}$$

5 $\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$

Lemma 5.1. *$\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$ sind extremal.*

Korollar 5.2. *Sei*

$$m_{B(n)} := \frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \sigma_j.$$

Dann konvergiert $m_{B(n)} \to \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)$ in Wahrscheinlichkeit (bzgl. $\mu^+_{\beta,h}$), d.h.

$$\lim_{n \to \infty} \mu^+_{\beta,h}(|m_{B(n)} - \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Definition 5.3.

$$\mathscr{M}_{1,\theta}(\Omega) := \{\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega) : \mu \text{ ist translationsinvariant}\}$$

$$\mathscr{I} := \{A \in \mathscr{F} : \theta_j A = A, \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}\}$$

$\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}$ heißt ergodisch, falls für alle $A \in \mathscr{I}$ gilt $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.

Satz 5.4. *Sei $\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}$ ergodisch, dann gilt für alle $f \in L^1(\mu)$, dass*

$$\frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \theta_j f \to \mu(f) \quad \mu\text{-fast sicher und in } L^1(\mu). \tag{5}$$

Lemma 5.5. *Sei $\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}(\Omega, \mathscr{F}$. Dann gilt für alle $A \in \mathscr{I}$, dass ein $B \in \mathscr{I}_\infty$ existiert mit $\mu(A \triangle B) = 0$, insbesondere $\mu(A) = \mu(B)$.*

Satz 5.6. *$\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$ sind ergodisch.*

6 Extremale Zerlegung von Gibbsmaßen

Satz 6.1. *Es existiert eine Funktion $Q : \Omega \times \mathscr{F} \to [0,1]$, so dass:*

- *Q^ω ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{F}$ für alle ω*
- *$\omega \mapsto Q^\omega(B)$ ist $\mathscr{I}_\infty$-messbar für alle $B \in \mathscr{F}$*
- *$Q^\cdot(f) = \mu(f \mid \mathscr{I}_\infty)$ fast sicher für alle beschränkten, messbaren Funktionen f.*
- *$\{Q^\cdot \in \mathscr{G}(\pi)\} \in \mathscr{I}_\infty$ und $\mu(Q^\cdot \in ex\mathscr{G}(\pi)) = 1$.*

Definition 6.2.

$$e_B(\nu) := \nu(B)$$
$$e(\mathscr{P}) := \sigma(e_B : B \in \mathscr{F})$$

Satz 6.3. *Für alle $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ folgt, dass ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß λ_μ auf $(\mathscr{M}_1(\Omega), e(\mathscr{P}))$ existiert, so dass für alle $B \in \mathscr{F}$ folgende Zerlegung gilt:*

$$\mu(B) = \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \nu(B) \, \mathrm{d}\lambda_\mu(\nu) \tag{6}$$

Literatur

[1] Hans-Otto Georgii. *Gibbs Measures and Phase Transitions.* De Gruyter, zweite edition, 2011.

[2] Achim Klenke. *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Springer Spektrum, 4 edition, 2020.

[3] Sacha Friedli und Yvan Velenik. *Statistical Mechanics of Lattice Systems: a Concrete Mathematical Introduction.* Cambridge: Cambridge University Press, 2017.