Extremale Gibbsmaße

Hauptseminar Stochastik

Anne Weiß

Institut der Angewanden Mathematik der Rheinischen Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

01. Juli 2021

Motivation

Was wollen wir heute machen?

- Gibbsmaße als konvexe Menge
- elementare Eigenschaften von extremalen Gibbsmaßen
- extremale Gibbsmaße als Limes von Spezifikationen
- Anwendung auf das Ising-Modell
- extremale Zerlegung von Gibbsmaßen

Konvexe Mengen

Definition (konvexe Kombination)

Seien ν_1 , $\nu_2 \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ *und* $\lambda \in$ *[0, 1], dann wird die konvexe Kombination von* ν_1 *und* ν_2 *folgendermaßen definiert:*

$$(\lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2)(A) := \lambda\nu_1(A) + (1-\lambda)\nu_2(A)$$

Definition (Konvexe Menge)

$\mathscr{M}' \subset \mathscr{M}_1(\Omega)$ *ist konvex, falls jede konvexe Kombination von Elementen* ν_1 *und* $\nu_2 \in \mathscr{M}'$ *wieder in* $\mathscr{M}'$ *ist.*

Wiederholung

Es gilt $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ *falls* $\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ *und* μ *ist kompatibel mit der Spezifikation* $\pi = \{\pi_\Lambda\}_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d}$, *das heißt*

$$\mu = \mu\pi_\Lambda \qquad \text{für alle } \Lambda \Subset \mathbb{Z}^d.$$

Hierbei ist für $A \in \mathscr{F}$

$$\mu\pi_\Lambda(A) := \int \pi_\Lambda(A \mid \omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Satz

$\mathscr{G}(\pi)$ ist konvex

Beweis.
Seien ν_1 und $\nu_2 \in \mathscr{G}(\pi)$, $\lambda \in [0,1]$. Wir wollen zeigen $\mu := \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2 \in \mathscr{G}(\pi)$. Für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$ gilt:

$$\mu\pi_\Lambda = \lambda\nu_1\pi_\Lambda + (1-\lambda)\nu_2\pi_\Lambda = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2 = \mu \tag{1}$$

$\square$

Extremalpunkte

Definition (Extremalpunkt)

Sei M eine konvexe Menge. Ein Punkt $\mu \in M$ heißt Extremalpunkt, falls für alle $a, b \in M$ und $\lambda \in (0,1)$ mit $\mu = \lambda a + (1 - \lambda) b$ folgt, dass $\mu = a = b$. Die Menge der Extremalpunkte wird als $Ex(M)$ bezeichnet.

Die Elemente aus $ex(\mathscr{G}(\pi))$ heißen auch extremale Gibbsmaße.

Eigenschaften von extremalen Gibbsmaßen

Definition (terminale σ-Algebra)

$$\mathscr{T}_\infty := \bigcap_{\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d} \mathscr{F}_{\Lambda^c} \tag{2}$$

Ereignisse dieser σ-Algebra werden terminal oder makroskopisch genannt.

Bemerkung.

- Falls $A \in \mathscr{T}_\infty$ und ω und ω' auf allen bis auf endlich vielen Stellen übereinstimmen, dann gilt

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega')$$

- $\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \omega_j \quad \text{existiert und ist positiv}\} \in \mathscr{T}_\infty$

Proposition

Sei π eine Spezifikation.

1. *Sei $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ und sei $f : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ $\mathscr{F}$-messbar mit $\mu(f) = 1$. Dann ist $f\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ genau dann, wenn es eine $\mathscr{T}_\infty$-messbare Funktion h gibt, so dass $f = h$ μ-fast überall.*
2. *Seien $\mu, \nu \in \mathscr{G}(\pi)$, sodass $\mu(A) = \nu(A)$ für alle $A \in \mathscr{T}_\infty$. Dann gilt schon $\mu = \nu$.*

Hierbei ist $f\mu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$.

Eigenschaften von extremalen Gibbsmaßen

Satz

Sei π eine Spezifikation und $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$. Dann sind äquivalent:

1. *μ ist extremal*
2. *μ ist trivial auf $\mathscr{T}_\infty$, d.h für alle $A \in \mathscr{T}_\infty$ gilt $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.*
3. *Falls $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathscr{T}_\infty$-messbar ist, dann ist f μ-fast sicher konstant.*
4. *Für alle $A \in \mathscr{C}$, bzw. auch schon für alle $A \in \mathscr{F}$, gilt:*

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sup_{B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \tag{3}$$

1. μ ist extremal $\Rightarrow$ 2. μ ist trivial auf $\mathscr{T}_\infty$

Beweis.

Angenommen $A \in \mathscr{T}_\infty$ mit $\alpha = \mu(A) \in (0,1)$.

1. $A \in \mathscr{T}_\infty \Rightarrow \frac{1}{\alpha}\mathbb{1}_A$ und $\frac{1}{1-\alpha}\mathbb{1}_{A^c}$ $\mathscr{T}_\infty$-messbar.
2. $\mu_1 = \frac{1}{\alpha}\mathbb{1}_A\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ und $\mu_2 = \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{1}_{A^c}\mu \in \mathscr{G}(\pi)$
3. Nun gilt: $\mu = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$
4. Da wir $\mu_1 \neq \mu_2$ haben, ist dies ein Widerspruch zur Annahme.

$\square$

2. μ ist trivial auf $\mathscr{T}_\infty$ $\Rightarrow$ 3. Falls Funktion f $\mathscr{T}_\infty$-messbar ist, ist f μ-fast sicher konstant.

Beweis.

f $\mathscr{T}_\infty$-messbar.

1. $\{f \leq c\} \in \mathscr{T}_\infty$ und damit $\mu(f \leq c) \in \{0, 1\}$ für alle c.
2. $c_* := \inf\{c : \mu(f \leq c) = 1\}$
3. $$A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mu(\bigcup_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$ $$A_{n+1} \subset A_n \Rightarrow \mu(\bigcap_n A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$
4. Seien $c_n^+ > c_*$ monoton fallend und $c_n^- < c_*$ monoton steigend so gewählt, dass beide gegen c_* konvergieren.

$$\mu(f = c_*) = \mu\left(\bigcap_n \{f \leq c_n^+\} \setminus \bigcup_n \{f \leq c_n^-\}\right) = 1 - 0 = 1$$

2. μ ist trivial auf $\mathscr{T}_\infty$ $\Leftarrow$ 3. Falls Funktion f $\mathscr{T}_\infty$-messbar ist, ist f μ-fast sicher konstant.

Beweis.

$A \in \mathscr{T}_\infty$

1. $\mathbb{1}_A$ $\mathscr{T}_\infty$-messbar
2. $\mathbb{1}_A$ ist μ-fast sicher konstant.
3. $$\mu(A) = \mu(\mathbb{1}_A) \in \{0, 1\}$$

$\square$

Als nächstes benötigen wir eine Folgerung aus dem Konvergenzsatz für Rückwärtsmartingale:

Korollar

Sei $X \in L^1$ und $\mathscr{G}_n$ eine absteigende Folge von σ-Algebren, d.h. $\mathscr{G}_{n+1} \subset \mathscr{G}_n$. Wir definieren $\mathscr{G}_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathscr{G}_n$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} E(X|\mathscr{G}_n) = E(X|\mathscr{G}_\infty) \qquad \text{fast sicher und in } L^1$$

3. Falls Funktion f $\mathscr{T}_\infty$-messbar ist, ist f μ-fast sicher konstant $\Rightarrow$ 4. Für alle $A \in \mathscr{F}$ (bzw. $A \in \mathscr{C}$) gilt:

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sup_{B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \tag{4}$$

Beweis. $A \in \mathscr{F}$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda_n^c}) = \lim_{n\to\infty} \mu(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{F}_{\Lambda_n^c}) = \mu(\mathbb{1}_A \mid \mathscr{T}_\infty) = \mu(A \mid \mathscr{T}_\infty) \text{ in } L^1.$$

1. Es gibt ein $N \in \mathbb{N}$, s.d. für alle $n \geq N$

$$\| \mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda_n^c}) - \mu(A \mid \mathscr{T}_\infty) \|_{L^1} \leq \varepsilon. \tag{5}$$

2. $\mu(A \mid \mathscr{T}_\infty)$ $\mathscr{T}_\infty$-messbar $\Rightarrow$ $\mu(A \mid \mathscr{T}_\infty)$ fast sicher konstant $\Rightarrow$ $\mu(A \mid \mathscr{T}_\infty) = \mu(A)$ fast sicher.

3. Sei nun $n \geq N$, dann gilt nun für alle $B \in \mathscr{F}_{\Lambda_n{}^c}$:

$$\begin{aligned}
|\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| &= \left| \int_B \mathbb{1}_A - \mu(A) \,\mathrm{d}\mu \right| \\
&= \left| \int_B \mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda_n^c}) - \mu(A \mid \mathscr{T}_\infty) \,\mathrm{d}\mu \right| \\
&\leq \| \mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda_n^c}) - \mu(A \mid \mathscr{T}_\infty) \|_{L^1} \leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Lemma

Seien $\mu, \nu \in \mathrm{ex}\mathscr{G}(\pi)$ mit $\mu \neq \nu$. Dann sind μ und ν singulär. Insbesondere gibt es ein Ereignis $A \in \mathscr{T}_\infty$, so dass $\mu(A) = 0$ und $\nu(A) = 1$.

Beweis.

Sei $\mu \neq \nu$.

1. Mit Propsition: Es gibt $A \in \mathscr{T}_\infty$ mit $\mu(A) \neq \nu(A)$
2. Mit μ ist extremal $\Leftrightarrow$ μ ist trivial auf $\mathscr{T}_\infty$, folgt die Aussage.

□

Extremale Gibbsmaße als Limes von Spezifikationen

Wiederholung

Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathscr{M}_1(\Omega)$ *eine Folge. Diese konvergiert gegen* $\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega)$ *falls*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(C) = \mu(C) \text{ für alle } C \in \mathscr{C}.$$

Wir schreiben dann auch $\mu_n \Rightarrow \mu$.

Satz

Sei $\mu \in ex\mathscr{G}(\pi)$. *Dann gilt für* μ *fast alle* ω, *dass*

$$\pi_{B(n)}(\cdot \mid \omega) \Rightarrow \mu. \tag{6}$$

Hierbei war $B(n) := \{-n, ..., n\}^d$.

Wiederholung

Für eine Spezifikation π *und* $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ *gilt für alle* $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$

$$\mu(A \mid \mathscr{F}_{\Lambda^c})(\cdot) = \pi_\Lambda(A \mid \cdot) \quad \mu\text{-fast überall} \; . \tag{7}$$

Beweis.
Wir wollen nun zeigen, dass

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{B(n)}(C \mid \omega) = \mu(C) \text{ für alle } C \in \mathscr{C}.$$

1. $C \in \mathscr{C}$ fest $\Rightarrow$ es gibt ein $\Omega_{n,C}$ mit $\mu(\Omega_{n,C}) = 1$ und

$$\pi_{B(n)}(C \mid \omega) = \mu(C \mid \mathscr{F}_{B(n)^c})(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega_{n,C}. \tag{8}$$

2. Mit dem Rückwärtsmartingalkonvergenzsatz finden wir $\widetilde{\Omega}_C$ mit $\mu(\widetilde{\Omega}_C) = 1$, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\mathbb{1}_C \mid \mathscr{F}_{B(n)^c})(\omega) = \mu(C \mid \mathscr{T}_\infty)(\omega) \text{ für alle } \omega \in \widetilde{\Omega}_C. \tag{9}$$

3. $\mu(C \mid \mathscr{T}_\infty)$ ist $\mathscr{T}_\infty$-messbar $\Rightarrow$ fast überall konstant $\Rightarrow$ es gibt Ω_C mit $\mu(\Omega_C) = 1$ so dass

$$\mu(C) = \mu(C \mid \mathscr{T}_\infty)(\omega) \text{ für alle } \omega \in \Omega_C. \tag{10}$$

4. $\mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Omega_{n,C} \cap \Omega_C \cap \widetilde{\Omega}_C) = 1$

$\mu^{+}_{\beta,h}$ und $\mu^{-}_{\beta,h}$

Lemma

$\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$ sind extremal.

Beweis. Wir zeigen das Lemma nur für $\mu^+_{\beta,h}$. Für alle $\nu \in \mathscr{G}(\beta, h)$ und für jede monoton steigende, lokale Funktion gilt:

$$\nu(f) \leq \mu^+_{\beta,h}(f). \tag{11}$$

1. Angenommen $\mu^+_{\beta,h}$ sei nicht extremal, d.h. es gibt ein $\lambda \in (0,1)$ und $\nu_1, \nu_2 \in \mathscr{G}(\beta, h)$ mit $\nu_1 \neq \mu^+_{\beta,h}$ so dass:
$$\mu^+_{\beta,h} = \lambda\nu_1 + (1-\lambda)\nu_2.$$
2. $\nu_1 \neq \mu^+_{\beta,h} \Rightarrow$ es gibt eine lokale Funktion f mit $\nu_1(f) \neq \mu^+_{\beta,h}(f)$.

3. Mit Lemma 3.19 wissen wir:

$$f = \sum_{A \subset \mathrm{supp}(f)} \tilde{f}_A \prod_{j \in A} n_j. \tag{12}$$

   Hierbei ist $n_j := \frac{1}{2}(1 + \sigma_j)$ und $\tilde{f}_A \in \mathbb{R}$.

4. $\nu_1(n_A) < \mu^+_{\beta,h}(n_A)$ und $\nu_2(n_A) \leq \mu^+_{\beta,h}(n_A)$. Insgesamt also

$$\mu^+_{\beta,h}(n_A) = \lambda\nu_1(n_A) + (1-\lambda)\nu_2(n_A) < \mu^+_{\beta,h}(n_A).$$

Wir erhalten, dass

$$\langle \sigma_i ; \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} := \langle \sigma_i \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} - \langle \sigma_i \rangle^+_{\beta,h} \langle \sigma_j \rangle^+_{\beta,h}$$

für $\|j - i\|_\infty \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Hiermit erhalten wir ein schwaches Gesetz der großen Zahlen:

Korollar

Sei

$$m_{B(n)} := \frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \sigma_j .$$

Dann konvergiert $m_{B(n)} \to \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)$ *in Wahrscheinlichkeit (bzgl.* $\mu^+_{\beta,h}$*), d.h.*

$$\lim_{n\to\infty} \mu^+_{\beta,h}(|m_{B(n)} - \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Konvergiert die Magnetisierungsdichte auch fast sicher?

Hierfür benötigen wir Ergodizität von $\mu^{+}_{\beta,h}$:

Definition

$$\mathscr{M}_{1,\theta}(\Omega) := \{\mu \in \mathscr{M}_1(\Omega) : \mu \textit{ ist translationsinvariant}\}$$

$$\mathscr{I} := \{A \in \mathscr{F} : \theta_j A = A, \text{ für alle } j \in \mathbb{Z}^d\}$$

$\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}$ heißt ergodisch, falls für alle $A \in \mathscr{I}$ gilt $\mu(A) = 0$ oder $\mu(A) = 1$.

Falls $\mu^+_{\beta,h}$ nun ergodisch ist folgt die Konvergenz aus folgenden Satz:

Satz

Sei $\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}$ ergodisch, dann gilt für alle $f \in L^1(\mu)$, dass

$$\frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \theta_j f \to \mu(f) \quad \mu\text{-fast sicher und in } L^1(\mu). \tag{13}$$

Nun folgt falls $\mu^+_{\beta,h}$ ergodisch ist und dem Fakt, dass $\sigma_j = \theta_j \sigma_0$, dass

$$m = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \sigma_j$$

$\mu^+_{\beta,h}$-fast sicher existiert und gegen $\mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)$ konvergiert.

Um die Ergodizität von $\mu^+_{\beta,h}$ zu zeigen benötigen wir ein weiteres Lemma:

Lemma

Sei $\mu \in \mathscr{M}_{1,\theta}(\Omega, \mathscr{F})$. Dann gilt für alle $A \in \mathscr{I}$, dass ein $B \in \mathscr{T}_\infty$ existiert mit $\mu(A \triangle B) = 0$, insbesondere $\mu(A) = \mu(B)$.

Satz

$\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$ sind ergodisch.

Beweis.

Wir zeigen die Aussage nur für $\mu^+_{\beta,h}$.

1. $\mu^+_{\beta,h}$ ist translationsinvariant.
2. Sei $A \in \mathscr{I}$, dann gibt es ein $B \in \mathscr{T}_\infty$, sodass $\mu^+_{\beta,h}(A) = \mu^+_{\beta,h}(B)$
3. Da $\mu^+_{\beta,h}$ extremal ist, gilt $\mu^+_{\beta,h}(A) = \mu^+_{\beta,h}(B) \in \{0,1\}$

$\square$

Extremale Zerlegung von Gibbsmaßen

Beispiel

Wir betrachten nun das zweidimensionale Ising-Modell mit $h = 0$ *und* $\beta > \beta_c(2)$:

$$ex\mathscr{G}(\beta, 0) = \{\mu^+_{\beta,0}, \mu^-_{\beta,0}\}.$$

Nun gilt für alle $\mu \in \mathscr{G}(\beta, 0)$*, dass ein* $\lambda \in [0, 1]$ *existiert, sodass für alle* $B \in \mathscr{F}$

$$\mu(B) = \lambda\mu^+_{\beta,0}(B) + (1 - \lambda)\mu^-_{\beta,0}(B).$$

Was wollen wir zeigen?

Definition

$$e_B(\nu) := \nu(B)$$

$$e(\mathscr{P}) := \sigma(e_B : B \in \mathscr{F})$$

Satz

Für alle $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ folgt, dass ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß λ_μ auf $(\mathscr{M}_1(\Omega), e(\mathscr{P}))$ existiert, so dass für alle $B \in \mathscr{F}$ folgende Zerlegung gilt:

$$\mu(B) = \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \nu(B)\,\mathrm{d}\lambda_\mu(\nu) \tag{14}$$

Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeiten

Wissen bereits:

$$\mu(B) = \int \mu(B \mid \mathscr{T}_\infty)(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Nun wollen wir zeigen, dass $\mu(\cdot \mid \mathscr{T}_\infty)$ regulär ist:

Definition (Reguläre bedingte Wahrscheinlichkeit)

$(\mu(A \mid \mathscr{T}_\infty))_{A \in \mathscr{F}}$ *heißt regulär, falls eine Funktion*

$$Q^{\cdot} : \Omega \to \mathscr{M}_1(\Omega)$$

existiert, sodass

$$Q^\omega(A) = \mu(A \mid \mathscr{T}_\infty)(\omega), \quad \mu\text{-fast sicher.}$$

1. Konstruktion von Q^{ω}:
Sei $\pi = (\pi_\Lambda)_{\Lambda \in \mathbb{Z}^d}$. Dann definieren wir

$$\Omega_\pi := \bigcap_{C \in \mathscr{C}} \{\omega \in \Omega : \lim_{n \to \infty} \pi_{B(n)}(C \mid \omega) \text{ existiert}\}$$

Falls $\omega \notin \Omega_\pi$ dann definieren wir $Q^{\omega} := \mu_0$ mit $\mu_0 \in \mathscr{M}_1(\Omega)$. Für $\omega \in \Omega_\pi$ definieren wir:

$$Q^{\omega}(C) := lim_{n \to \infty} \pi_{B(n)}(C \mid \omega) \qquad \text{für alle } C \in \mathscr{C}$$

Eigenschaften von Q:

- Q^ω ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{F}$ für alle ω
- $\omega \mapsto Q^\omega(B)$ ist $\mathscr{T}_\infty$-messbar für alle $B \in \mathscr{F}$
- $Q^\cdot(f) = \mu(f \mid \mathscr{T}_\infty)$ fast sicher für alle beschränkten, messbaren Funktionen f.
- $\{Q^\cdot \in \mathscr{G}(\pi)\} \in \mathscr{T}_\infty$ und $\mu(Q^\cdot \in ex\mathscr{G}(\pi)) = 1$.

Korollar

Falls $\mathscr{G}(\pi) \neq \emptyset$ dann gilt auch schon $ex\mathscr{G}(\pi) \neq \emptyset$.

Pushforward von μ

1. $\lambda_\mu(M) := \mu(Q^\cdot \in M)$ für $M \subset \mathscr{M}_1(\Omega)$ ist ein Maß
2. $B \in \mathscr{F}$, $e_B : \mathscr{M}_1(\Omega) \to [0,1]$ mit

$$e_B(\nu) := \nu(B) \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\mu(B) &= \int_\Omega \mathbb{1}_B \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \mu(B \mid \mathscr{T}_\infty) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega Q^\cdot(B) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega e_B(Q^\cdot) \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} e_B(\nu) \,\mathrm{d}\mu \circ (Q^\cdot)^{-1}(\nu) = \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \nu(B) \,\mathrm{d}\lambda_\mu(\nu)
\end{aligned}$$

Satz

Für alle $\mu \in \mathscr{G}(\pi)$ folgt, dass ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß λ_μ auf $(\mathscr{M}(\Omega), e(\mathscr{P}))$ existiert, so dass für alle $B \in \mathscr{F}$ folgende Zerlegung gilt:

$$\mu(B) = \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \nu(B)\,\mathrm{d}\lambda_\mu(\nu) \tag{16}$$

Eindeutigkeit der Zerlegung.

1. Angenommen es gäbe ein weiteres solches Maß λ'_μ.
2. Es gilt $\nu \in ex\mathscr{G}(\pi) \Rightarrow \nu(Q^\cdot = \nu) = 1$. Sei $\nu \in ex\mathscr{G}(\pi)$, dann ist ν trivial auf $\mathscr{T}_\infty$. Nun folgt
$$\int_A \nu(B)\,\mathrm{d}\nu(\omega) = \nu(B)\nu(A) = \nu(A \cap B) \quad \text{für alle } A \in \mathscr{T}_\infty, B \in \mathscr{F}.$$
Also ist $\nu(B) = \nu(B \mid \mathscr{T}_\infty) = Q^\cdot(B)$ fast sicher.
3. Sei $M \subset \mathscr{M}_1(\Omega) \Rightarrow \nu(Q^\cdot \in M) = \mathbb{1}_M(\nu)$
$$\begin{aligned}\lambda'_\mu(M) &= \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \mathbb{1}_M(\nu)\,\mathrm{d}\lambda'_\mu(\nu)\\ &= \int_{ex\mathscr{G}(\pi)} \nu(Q^\cdot \in M)\,\mathrm{d}\lambda'_\mu(\nu) = \mu(Q^\cdot \in M) = \lambda_\mu(M).\end{aligned}$$

Hiermit folgt schon $\lambda_\mu = \lambda'_\mu$. □

Fragen?

- Hans-Otto Georgii, *Gibbs measures and phase transitions*, zweite ed., De Gruyter, 2011.
- Achim Klenke, *Wahrscheinlichkeitstheorie*, 4 ed., Springer Spektrum, 2020.
- Sacha Friedli und Yvan Velenik, *Statistical mechanics of lattice systems:a concrete mathematical introduction*, Cambridge: Cambridge University Press, 2017.

Anhang

Definition

$\nu \ll \mu$ (ν ist absolut stetig bezüglich μ) genau dann, wenn jede μ-Nullmenge auch eine ν-Nullmenge ist.

Beweis.

$2 \Rightarrow 1$: Sei nun μ trivial auf $\mathscr{T}_\infty$. Angenommen es gibt $\mu_1, \mu_2 \in \mathscr{G}(\pi)$ und $\alpha \in (0, 1)$ mit $\mu = \alpha\mu_1 + (1 - \alpha)\mu_2$.

1. $\mu_1 \ll \mu$, $\mu_2 \ll \mu$
2. Sei $A \in \mathscr{T}_\infty$
    - Falls $\mu(A) = 0 \Rightarrow \mu_1(A) = 0$, $\mu_2(A) = 0$
    - Falls $\mu(A) = 1 \Rightarrow \mu_1(A) = 1$, $\mu_2(A) = 1$
3. Mit der Proposition folgt: $\mu = \mu_1 = \mu_2$.

$\square$

Beweis.

$4 \Rightarrow 2$: Wir nehmen bei 4, die schwächere Annahme an: für alle $A \in \mathscr{C}$ gilt:

$$\lim_{\Lambda \uparrow \mathbb{Z}^d} \sup_{B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0 \tag{17}$$

1. $\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)$ für alle $B \in \mathscr{T}_\infty$ und $A \in \mathscr{C}$ ($B \in \mathscr{F}_{\Lambda^c}$ für alle $\Lambda \Subset \mathbb{Z}^d$)

Nun wollen wir zeigen:

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B) \text{ für alle } A \in \mathscr{F} \text{ und } B \in \mathscr{T}_\infty \tag{18}$$

Reicht aus, da wir für $B \in \mathscr{T}_\infty$ $A = B$ setzen:

$$\mu(B) = \mu(B \cap B) = \mu(B)^2.$$

Also $\mu(B) \in \{0, 1\}$.

Sei $B \in \mathscr{T}_\infty$ fest

1. $$\mathscr{D} := \{A \in \mathscr{F} : \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)\}.$$
   ist ein Dynkin System.
2. $\mathscr{C} \subset \mathscr{D}$ ist eine Algebra und erzeugt $\mathscr{F} \Rightarrow \mathscr{D} = \mathscr{F}$

Korollar

Sei

$$m_{B(n)} := \frac{1}{|B(n)|} \sum_{j \in B(n)} \sigma_j.$$

Dann konvergiert $m_{B(n)} \to \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)$ *in Wahrscheinlichkeit (bzgl.* $\mu^+_{\beta,h}$*), d.h.*

$$\lim_{n \to \infty} \mu^+_{\beta,h}(|m_{B(n)} - \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)| \geq \varepsilon) = 0.$$

Beweis.

Wir erhalten, dass es ein r gibt, so dass $0 \leq \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} \leq \varepsilon$ für alle $j \notin i + B(r)$. Hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(m_{B(n)}) &= |B(n)|^{-2} \sum_{i,j \in B(n)} \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} \\
&\leq |B(n)|^{-2} \sum_{i \in B(n)} \left[\sum_{j \in i+B(r)} \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} + \sum_{j \in B(n) \setminus \{i+B(r)\}} \langle \sigma_i; \sigma_j \rangle^+_{\beta,h} \right] \\
&\leq \frac{|B(r)|}{|B(n)|} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Somit haben wir $\lim_{n \to \infty} \mathrm{Var}(m_{B(n)}) = 0$. Da $E(m_B(n)) = \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)$ ist (Translationsinvarianz!), erhalten wir mit Chebyshevs Ungleichung:

$$\mu^+_{\beta,h}(|m_{B(n)} - \mu^+_{\beta,h}(\sigma_0)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{Var}(m_{B(n)})}{\varepsilon^2} \to 0.$$

Physikalische Relevanz von nicht-extremalen Gibbsmaßen

Beispiel

Wir betrachten nun das zweidimensionale Ising-Modell mit $h = 0$ *und* $\beta > \beta_c(2)$*:*

$$ex\mathscr{G}(\beta, 0) = \{\mu^+_{\beta,0}, \mu^-_{\beta,0}\}.$$

Nun gilt für alle $\mu \in \mathscr{G}(\beta, 0)$*, dass ein* $\lambda \in [0, 1]$ *existiert, sodass für alle* $B \in \mathscr{F}$

$$\mu(B) = \lambda\mu^+_{\beta,0}(B) + (1 - \lambda)\mu^-_{\beta,0}(B).$$

Sei nun $\lambda \in (0, 1)$ und $\mu := \lambda\mu^+_{\beta,h} + (1 - \lambda)\mu^-_{\beta,h}$.

Da $\mu^+_{\beta,h}$ und $\mu^-_{\beta,h}$ extremal sind, wissen wir, dass es Ereignisse $T^+, T^- \in \mathscr{T}_\infty$ gibt, so dass

$$\mu^+_{\beta,h}(T^+) = \mu^-_{\beta,h}(T^-) = 1, \qquad \mu^+_{\beta,h}(T^-) = \mu^-_{\beta,h}(T^+) = 0$$

Eine Konfiguration $\omega \in \Omega$ ist typisch für $\mu^+_{\beta,h}$, falls $\omega \in T^+$

$$\mu(T^+ \cup T^-) \geq \lambda\mu^+_{\beta,h}(T^+) + (1-\lambda)\mu^-_{\beta,h}(T^-) = 1$$

$$\mu(T^+) = \lambda\mu^+_{\beta,h}(T^+) = \lambda.$$

Mit

$$\mu(B \cap T^+) = \lambda \mu^+_{\beta,\boldsymbol{h}}(B \cap T^+) = \lambda \mu^+_{\beta,\boldsymbol{h}}(B) = \mu(T^+)\mu^+_{\beta,\boldsymbol{h}}(B).$$

erhalten wir

$$\mu(B \mid T^+) = \mu^+_{\beta,\boldsymbol{h}}(B).$$

Die physikalisch relevanten Gibbsmaße sind also extremal.