Partiel du 18 novembre 2014.

Documents interdits. Calculatrices interdites. Merci de ne pas utiliser d'encre rouge. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la note. Sujet en anglais au verso.

Exercice 1 (Espérance conditionnelle)

1. Soit X une variable aléatoire réelle intégrable et φ une application mesurable et convexe de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(X)$ est intégrable. Soit $\mathcal{B}$ une tribu. Prouver l'inégalité de Jensen conditionnelle : $\mathrm{E}(\varphi(X)|\mathcal{B}) \geq \varphi(\mathrm{E}(X|\mathcal{B}))$.
2. Soient X et Y deux variables réelles telles que (X, Y) suit une loi uniforme sur le disque unité $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.

   a) Soit φ une application continue et bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

   $$\mathrm{E}(\varphi(Y)|X) = \int \varphi(y) \frac{1\{|y| \leq \sqrt{1 - X^2}\}}{2\sqrt{1 - X^2}} \mathrm{d}y, \quad \text{p.s.} \tag{1}$$

   b) En déduire la loi de Y conditionnellement à X.

   c) Calculer $\mathrm{E}(Y^2|X)$.

Exercice 2 (Marche aléatoire et temps de sortie d'un intervalle.) Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. telle que $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = -1) = 1/2$. On appelle marche aléatoire simple dans $\mathbb{Z}$ le processus $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ défini par

$$S_0 = 0 \quad \text{et} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \tag{2}$$

On note $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$.
2. Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Même question pour le processus $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$.

Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $\tau_a = \inf\{n \geq 0 \colon |S_n| \geq a\}$. On suppose que τ_a est fini p.s.

4. Montrer que τ_a est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.
5. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}[S_{n\wedge\tau_a}^2] = \mathrm{E}[n \wedge \tau_a]$ (rappel : $x \wedge y = \min(x, y)$).
6. En déduire que $\mathrm{E}[\tau_a] = a^2$.
7. Sans utiliser les réponses aux questions précédentes, justifier l'assertion "τ_a est fini p.s.".

Exercice 3 (Urne de Polya et convergence de martingales). Au temps $n = 0$, une urne contient une boule rouge et une boule blanche. A chaque temps $n \in \mathbb{N}$, une boule est choisie uniformément au hasard dans l'urne, puis est remise dans l'urne avec une autre boule de la même couleur. Au temps n, il y a $n + 2$ boules dans l'urne, dont B_n sont blanches.

1. Montrer que $(M_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{B_n}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ est une martingale.
2. Montrer que (M_n) converge p.s. vers une variable aléatoire que l'on notera M_∞.
3. Montrer que pour tout $k \in \{1, \ldots, n + 1\}$, $\mathrm{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ et en déduire la loi de M_∞.

Exercise 1 (Conditional expectation)

1. Let X be a real random variable, integrable, and φ be a measurable convex function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$ such that $\varphi(X)$ is integrable. Let $\mathcal{B}$ be a σ-algebra. Prove the conditional version of Jensen's inequality : $\mathrm{E}(\varphi(X)|\mathcal{B}) \geq \varphi(\mathrm{E}(X|\mathcal{B}))$.
2. Let X and Y be two real random variables such that (X, Y) has a uniform law on the unit disk $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$.
   a) Let φ be a continuous and bounded function from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$. Show that
   $$\mathrm{E}(\varphi(Y)|X) = \int \varphi(y) \frac{1\{|y| \leq \sqrt{1-X^2}\}}{2\sqrt{1-X^2}} \mathrm{d}y, \quad \text{a.s.} \tag{3}$$
   b) Deduce the law of Y conditionally to X.
   c) Compute $\mathrm{E}(Y^2|X)$.

Exercise 2 (Random walks and exit times from intervals) Let $(X_n)_{n\geq 1}$ be a sequence of i.i.d. random variables such that $\mathrm{P}(X_1 = 1) = \mathrm{P}(X_1 = -1) = 1/2$. We call simple random walk in $\mathbb{Z}$ the process $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined by

$$S_0 = 0 \quad \text{and} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

We define $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ for $n \geq 1$ and $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

1. Show that for $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(S_0, S_1, \ldots, S_n)$.
2. Prove that $(S_n)_{n\geq 0}$ is a martingale w.r.t. the filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
3. Same question for the process $(S_n^2 - n)_{n\geq 0}$.

Let $a \in \mathbb{N}$ and $\tau_a = \inf\{n \geq 0 \colon |S_n| \geq a\}$. Assume that τ_a is a.s. finite.

4. Show that τ_a is a $\mathcal{F}$-stopping time.
5. Prove that for $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathrm{E}[S_{n\wedge\tau_a}^2] = \mathrm{E}[n \wedge \tau_a]$ (recall : $x \wedge y = \min(x, y)$).
6. Deduce that $\mathrm{E}[\tau_a] = a^2$.
7. Justify the claim 'τ_a is a.s. finite' without using the answers to the previous questions.

Exercise 3 (Polya's urn and convergence of martingales). At time $n = 0$, an urn contains a red ball and a white ball. At each step $n \in \mathbb{N}$, a ball is picked uniformly at random in the urn, and is put back with another ball of the same colour. At time n, there are $n + 2$ balls in the urn, among which B_n balls are white.

1. Prove that $(M_n)_{n\geq 0} = \left(\frac{B_n}{n+2}\right)_{n\geq 0}$ is a martingale.
2. Prove that (M_n) converges a.s. to a random variable we shall denote by M_∞.
3. Show that for all $k \in \{1, \ldots, n+1\}$, $\mathrm{P}(B_n = k) = \frac{1}{n+1}$ and deduce thereof the law of M_∞.