Vorlesung 10 | 27.11.2020 | 10:15–12:00 via Zoom

(Ein Handzettel für heutige Vorlesung finden Sie auf der Seite der Vorlesung auf meiner Website, siehe Tagebuch)

Prüfungs (in Präsenz): **9/2** (!!!!), 13/3.

3 Bedingte W-keiten, Unabhängigkeit und Produktmaße (fortsetzung)

(Kapitel 3 und 4 in Bovier Skript)

In der letzten Vorlesungen haben wir gesehen: Bedingte W-keit $\mathbb{P}_B$ und überschrankung von σ-Algebren $\mathscr{F}_B$, Bayes'sche Formel, $\sigma(X)$: von Z.V. erzeugten σ-Algebren, Unabhängigkeit von Ereignisse, von σ-Algebren, von $Z.V.$, Produkt σ-Algebra $\mathscr{F} \otimes \mathscr{G}$, Produktmaß, Satz von Fubini-Tonelli, Satz von Fubini-Lebesgue.

Heutige Vorlesung: unendliche Produkten, Summe unabhängiger Z.V.: Faltungen, stabilität gegen Faltungen.

Nachste Woche: die Irrfahrt, das Ruinproblem, das Arcsinusgesetz.

3.1 Unendliche Produkte

Die Konstruction von Produkträume erweitert problemlos auf endliche Produkte.

Ziel: Erweiterung auf $\hat{\Omega} = \prod_{k \geqslant 1} \Omega_k$. Folge $(\Omega_k, \mathscr{F}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Messräume.

Frage: Welche σ-Algebra sollen wir nehmen? $\mathscr{P}(\hat{\Omega})$ oder eine kleinerer?

Beispiel. Betrachten wir eine konkrete Situation: das ∞ Münzwufexperiment. $\Omega_k = \{0, 1\}$, $\mathscr{F}_k = \mathscr{P}(\{0, 1\})$.

$$\hat{\Omega} = \Omega^{\mathbb{N}} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \cong [0, 1]$$

(diadische Darstellung, Surjektiv)

$$\Phi : \omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \mapsto \sum_{k \geqslant 1} \omega_k 2^{-k} \in [0, 1]$$

Dann sind wir ein bisschen Skeptich, weil $\mathscr{P}(\hat{\Omega}) \supseteq \Phi^{-1}(\mathscr{P}([0, 1]))$ und wir weiß dass $\mathscr{P}([0, 1])$ is viel zu groß für eine gutes Maßtheorie. Denken Sie daran, dass Potenzmenge und σ-additivität nicht vereinbar sind.

Auswege:

a) Man kann Φ benutzen und betrachten die σ-Algebra

$$\Phi^{-1}(\mathscr{B}([0, 1])) \subseteq \mathscr{P}(\{0, 1\}^{\mathbb{N}})$$

aber es ist nicht allgemeine verfügbar/praktisch.

b) $\boxed{\text{Man gibt die Menge an, die wir im Erzeuger unbedingt haben will} \quad (!!!)}$

Z.B. Wir wollen auf jedenfalls endlich viele Münzwürfe beschreiben können. D.h. wir bauchen dass die Z.V. $X_k(\omega) = \omega_k$ messbar ist für alle $k \geqslant 1$.

Wir wollen, dass

$$\Phi : (\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{G}) \rightarrow ([0, 1), \mathscr{B}([0, 1)))$$

messbar ist.

Definition 1. *Seien* $(\Omega_k, \mathscr{F}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *Messräume und* $\hat{\Omega} = \otimes_{k\geqslant 1}\Omega_k$ *das unendliche Produkträum (geordnete Produkt).*

Definieren wir die Produkt-σ-Algebra $\hat{\mathscr{F}}$ auf $\hat{\Omega}$, als die kleinste σ-Algebra, die alle Teilmengen von $\hat{\Omega}$ der Form

$$A = \otimes_{k=1,\ldots,n} A_{i_k} \times \otimes_{\ell\notin\{i_1,\ldots,i_n\}}\Omega_\ell$$

enthält, wobei $A_k \in \mathscr{F}_k$, $I = (i_1,\ldots,i_n) \in \mathbb{N}^n$. Diese Mengen heißen Zylindermengen.

Bemerkung. Es gilt auch

$$\hat{\mathscr{F}} = \sigma(X_1, X_2, \ldots)$$

mit $X_k(\omega) = \omega_k$. $\hat{\mathscr{F}}$ ist die kleinste σ-Algebra, die alle die Z.V. $X_1, X_2, \ldots$ messbar machen. Und $\hat{\mathscr{F}} \neq \mathscr{P}(\hat{\Omega})$.

Beispiel. Die Abbildung

$$\Phi\colon (\{-1,1\}^{\mathbb{N}}, \mathscr{P}(\{-1,1\})^{\otimes\mathbb{N}}) \to ([0,1], \mathscr{B}([0,1]))$$

ist messbar. Zu das sehen, betrachten dass

$$\Phi(\omega) = \lim_{n\to\infty}\Phi_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\omega_k 2^{-k}$$

$$\mathscr{P}(\{-1,1\})^{\otimes n} \times \Omega^{\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{P}(\{-1,1\})^{\otimes\mathbb{N}}$$

und dass Φ_n ist messbar bzg. $\mathscr{P}(\{-1,1\})^{\otimes n} \times \Omega^{\mathbb{N}} = \sigma(X_1,\ldots,X_n)$ mit $X_k(\omega) = \omega_k$.

Definition 2. *Seien* $(\Omega_k, \mathscr{F}_k, \mathbb{P}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *W-raüme. Wir definieren das unendliche Produkt W-maß* $\hat{\mathbb{P}} := \otimes_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}_k$ *auf* $(\hat{\Omega}, \hat{\mathscr{F}})$ *s.d. für alle Zylindermengen A gilt*

$$\hat{\mathbb{P}}(A) = \hat{\mathbb{P}}(\otimes_{k=1,\ldots,n} A_{i_k} \times \otimes_{\ell\notin\{i_1,\ldots,i_n\}}\Omega_\ell) = \prod_{k\in I}\mathbb{P}_k(A_k).$$

Definition 3. *Sei* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ *ein W-raum. Eine messbare Abbildung*

$$X\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathscr{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}) = (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$$

heißt Zufallsfolge, oder stochasticher Prozess in diskreter Zeit. D.h. jede $X_k\colon (\Omega, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ is messbar.

Bemerkung. Falls die Verteilung von X, d.h. $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}\circ X^{-1}$, ein Produktmaß auf $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))^{\mathbb{N}}$ ist, dann ist $X = (X_1, X_2, \ldots)$ eine Folge unabhängiger Z.V.

Falls, dazu $\mathbb{P}\circ X_k^{-1}$ unabhängig von k ist, dann X ist eine Folge unabhängiger, identische verteilter Z.V. (i.i.d)

Ein wichtiger Teil der Wahrscheinlichkeittheorie ist die Untersuchung der Funktionen einer großen Anzahl unabhängiger Zufallsvariablen.

Wir sind interessiert an Funktionen von unab. Z.V. $X = (X_1, X_2, \ldots)$, wie z.B.

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k, \qquad \text{oder} \qquad \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Beispiel. Sei $(X_k)_{k\geqslant 0}$ eine Folge unabhängiger, identische verteilter Z.V. s.d. $X_k \sim \mathrm{Exp}(1)$ (X_k ist eine Z.V. mit Exponentiel Verteilung mit parameter 1), d.h.

$$\mathbb{P}(X_k \leqslant t) = \mathbb{P}_{X_k}((-\infty, t]) = \int_{-\infty}^{t} e^{-x}\mathrm{d}x, \qquad \mathbb{E}[g(X_k)] = \int_\Omega g(X_k(\omega))\mathbb{P}(\mathrm{d}\omega) = \int_\Omega g(x)\mathbb{P}_{X_k}(\mathrm{d}x)$$

und $\mathbb{P}_{X_k}(\mathrm{d}x) = e^{-x}\mathrm{d}x$. Wir fragen wie

$$\max_{1\leqslant k\leqslant n} X_k$$

sich verhalten als $n\to\infty$. Wir setzen

$$Q(\omega) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} e^{\alpha X_n(\omega)}$$

für $\alpha > 0$. Dann, falls $\alpha < 1$

$$\mathbb{E}[Q] = \mathbb{E}\left[\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} e^{\alpha X_n}\right] \xlongequal[\text{Mon. Kon.}]{} \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2} e^{\alpha X_n}\right] = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}[e^{\alpha X_n}] = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \underbrace{\int_{\mathbb{R}_+} e^{\alpha x} e^{-x}\mathrm{d}x}_{(1-\alpha)^{-1}} = \frac{1}{1-\alpha} \underbrace{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}}_{<+\infty}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} e^{-(1-\alpha)x}\mathrm{d}x = \int_0^\infty e^{-(1-\alpha)x}\mathrm{d}x = \left.\frac{e^{-(1-\alpha)x}}{-(1-\alpha)}\right|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{1}{1-\alpha}$$

$$\mathbb{E}[Q] < \infty.$$

Es foglt dass $Q(\omega) < \infty$ fast überall. Aber offensich

$$\frac{1}{n^2} e^{\alpha X_n(\omega)} \leqslant Q(\omega)$$

(„One to control all!!!“, Q ist the ring…) und dann auf bis ein Nullmenge haben wir :

$$X_n(\omega) \leqslant \alpha^{-1}\log[n^2 Q(\omega)] = 2\alpha^{-1}\log n + \alpha^{-1}\log[Q(\omega)]$$

Oder

$$\sup_{n\geqslant 1} \frac{X_n(\omega)}{\log(n+1)} \leqslant 2\alpha^{-1} + \alpha^{-1}\log[Q(\omega)],$$

und auch

$$\limsup_{n\geqslant 1} \frac{X_n(\omega)}{\log n} \leqslant 2\alpha^{-1} < \infty.$$

Wir sehen dass, die Folge höchstens logarithmisch wächst.

Bemerkung. Sei $(X_n)_{n\geqslant 0}$ eine Folge Z.V., dann die Z.V.

$$Z(\omega) := \limsup_{n\geqslant 1} \frac{X_n(\omega)}{\log(n+1)}$$

ist messbar bzg. $\sigma(X_1, X_2, \dots)$. Aber is auch messbar bzg.

$$\mathscr{G}_n = \sigma(X_n, X_{n+1}, \dots)$$

für alle $n \geqslant 1$, weil es gilt auch

$$\limsup_{k\geqslant n} \frac{X_k(\omega)}{\log k} = \limsup_{k\geqslant 1} \frac{X_k(\omega)}{\log k} = Z(\omega).$$

Dann ist es messbar für die Durchschnitt:

$$\mathscr{G}_\infty = \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{G}_n.$$

Z.V. messbare bezuglich $\mathscr{G}_\infty$ sind Z.V., die durch Verwerfen der Informationen einer endlichen Anzahl von Elementen in der Folge bestimmt werden können.
(Dazu später mehr)

4 Summe unabhängiger Z.V.

4.1 Faltungen

Frage: Seien X, Y unabhängige Z.V. mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Wie sieht es F_{X+Y} aus?

Lemma 4.

a) Seien X, Y zwei unabhängige Z.V. mit Verteilungsfunktionen F_X und F_Y. Dann ist die Verteilungsfunktion F_{X+Y} von $X+Y$ gegeben durch

$$F_{X+Y}(s) = \mathbb{P}(X+Y \leqslant s) = \int_{\mathbb{R}} F_X(s-y)\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} F_Y(s-x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

b) Falls dazu X, Y Dichten ρ_X, ρ_Y besitzen, dann besitz $X+Y$ die Dichte

$$\rho_{X+Y}(s) = \int_{\mathbb{R}} \rho_X(x)\rho_Y(s-x)\mathrm{d}x$$

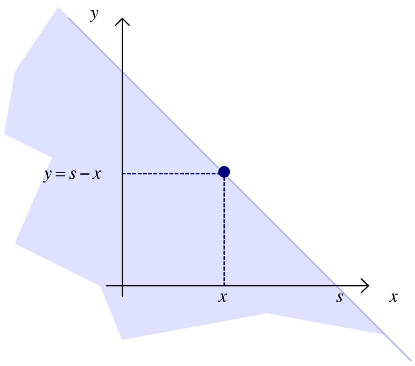
Beweis. (a) $\mathbb{P}_{(X,Y)} = \mathbb{P}_X \otimes \mathbb{P}_Y$

$$F_{X+Y}(s) = \mathbb{P}(X+Y \leqslant s) = \mathbb{P}_{(X,Y)}(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y\leqslant s\}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\mathrm{d}\mathbb{P}_{(X,Y)}(x,y)$$

$$\underset{\text{unab.}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\mathrm{d}(\mathbb{P}_X\otimes\mathbb{P}_Y)(x,y) \underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y)\right)}_{\mathbb{P}(Y\leqslant s-x)=F_Y(s-x)}\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} F_Y(s-x)\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x)$$

(b)



$$F_{X+Y}(s) = \int \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\mathrm{d}(\mathbb{P}_X\otimes\mathbb{P}_Y)(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\rho_X(x)\rho_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{x+y\leqslant s}\rho_Y(y)\mathrm{d}y\right)\rho_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\underset{y=t-x}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{t\leqslant s}\rho_Y(t-x)\mathrm{d}t\right)\rho_X(x)\mathrm{d}x$$

$$\underset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{t\leqslant s}\underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{t\leqslant s}\rho_Y(t-x)\rho_X(x)\mathrm{d}x\right)}_{h(t)}\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{s} h(t)\mathrm{d}t$$

und denn wir können $\rho_{X+Y}(t) = h(t)$ nehmen. ρ_{X+Y} ist die Dichte von $X+Y$. □

Definition 5. *Die Faltung $F_X * F_Y$ zweier Verteilungsfunktionen F_X und F_Y, ist definiert durch*

$$(F_X * F_Y)(s) = \int_{\mathbb{R}} F_X(s-y)\mathrm{d}\mathbb{P}_Y(y).$$

Die Faltung $F_X * F_Y$ ist eine neue Verteilungfunktion.

Beispiel. Sei $\rho_{X_k}(x) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(x)$ und $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d. Die Verteilung von X_k ist die Gleichverteilung auf $[-1/2, 1/2]$. Dann $S_m = X_1 + \cdots + X_m$ und dann S_m hat absolut stetig Verteilung mit Dichte

$$\rho_{S_m}(s) := \int_{\mathbb{R}} \rho_{S_{m-1}}(x)\mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(s-x)\mathrm{d}x = B_m(s), \qquad \text{falls } m>1,$$

oder

$$\rho_{S_1}(s) = \rho_{X_1}(s) = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}(s).$$

die Basis von Splines. (siehe Alma II).

Bemerkung 6. Man sieht aus dieser Beispiel, dass die Faltung glättend ist (z.B. $B_m \in C^m(\mathbb{R})$)

4.2 Stabilität der Gaußverteilung

Frage: Gibt es Verteilungen, die unter Faltungen invariant (die Form) bleiben? Falls ja, nennen wir solche Verteilungen <u>stabil</u>.

Erinnerung $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ dann X hat eine Dichte ρ:

$$\rho(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/2}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Satz 7. *Seien $X_1 \sim \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ und $X_2 \sim \mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ unabhängig. Dann ist*

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2).$$

Beweis. Wegen

$$\rho_{X_1+X_2}(s) = \rho_{X_1-m_1+X_2-m_2}(s - m_1 - m_2)$$

wir können o.B.d.A. $m_1 = m_2 = 0$ setzen. Wir haben

$$\rho_{X_1+X_2}(s) = \int_{\mathbb{R}} \rho_{X_1}(x)\rho_{X_2}(s-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{(2\pi\sigma_1^2)^{1/2}} \frac{1}{(2\pi\sigma_2^2)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1^2}} e^{-\frac{(s-x)^2}{2\sigma_2^2}} \mathrm{d}x$$

Es gilt

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{(s-x)^2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(x - s\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{s^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Setze (Änderung von Variablen)

$$y := \left(x - s\frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)\left(\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\right)^{1/2}$$

gilt:

$$\rho_{X_1+X_2}(s) = \frac{1}{2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/2}\mathrm{d}y}_{=(2\pi)^{1/2}}\, e^{-\frac{s^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} = \frac{e^{-\frac{s^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}}}{\left[2\pi(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\right]^{1/2}} = \rho_{\mathcal{N}(0,\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(s)$$

□

Folgerung 8. *Seien $X_1, X_2, \ldots$ i.i.d $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ Z.V. dann*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n^{1/2}} \overset{d}{=} X_1$$

in Verteilung

Beweis. Übung. □

> **Bemerkung.** Für X, Y unabhängig:
>
> - $X \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1), Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_2) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$
> - $X \sim \mathrm{Bin}(n_1, p), Y \sim \mathrm{Bin}(n_2, p) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Bin}(n_1 + n_2, p)$
> - $X \sim \mathrm{Cauchy}(\alpha), Y \sim \mathrm{Cauchy}(\beta) \Rightarrow X + Y \sim \mathrm{Cauchy}(\alpha + \beta)$
>
> Sie sind stabil. Aber
>
> - $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda), Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda') \Rightarrow X + Y \nsim \mathrm{Exp}(\mu)$!!!!
