



Comment gérer optimalement, et de manière durable, une  
forêt

Travail d'Expertise et de Recherche

Vishwa Elankumaran

Valentin Bartkowiak

Marius Puel

28 mai 2021

université  
de **BORDEAUX**

Tuteur : Adrien Richou

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Modèle simple</b>	<b>3</b>
2.1	Le processus $(\tilde{X}_{kh})$	3
2.1.1	Simulation de notre stock de bois $\tilde{X}_{kh}$	3
2.1.2	Loi de $(\tilde{X}_{(k+1)h})$	4
2.1.3	Espérance et Variance	4
2.2	La loi limite $\rho(x)$ de notre stock de bois	6
<b>3</b>	<b>Définition d'une stratégie de coupe optimale dans le modèle simple</b>	<b>8</b>
3.1	Le seuil de coupe $y$	8
3.2	Le temps de coupe dans le contexte de la forêt	8
3.3	Comment définir le gain	8
3.4	Solution au problème pour une dynamique $b$ connue	11
3.4.1	Cas déterministe	12
3.4.2	Cas aléatoire	13
<b>4</b>	<b>Estimation non paramétrique</b>	<b>15</b>
4.1	Estimation de la loi limite $\rho$	15
4.2	Calcul du gain $G$ et optimisation	19
<b>5</b>	<b>Application au modèle de Verhulst</b>	<b>21</b>
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>23</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>24</b>

# 1 Introduction

Les ressources renouvelables, que nous pouvons définir ici comme des ressources inépuisables tant qu'elles ne sont pas surexploitées, sont par définition d'un grand intérêt pour l'homme. Nous utiliserons pour la suite la métaphore historique de Faustmann qui concerne le problème d'exploitation du stock de bois dans une forêt. L'objectif est alors très simple. Il s'agit de maximiser les gains générés par la vente du bois coupé. On ne peut cependant pas se contenter de couper n'importe quand et la gestion optimale et durable de cette forêt suggère de bien connaître la dynamique de croissance de la quantité de bois qui la compose.

Notre travail se base sur les travaux de Christensen et Strauch (2020) qui modélisent la dynamique de cette forêt par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$X_t = \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s \quad (1)$$

dont le deuxième terme du second membre, aussi appelé intégrale d'Ito, est un objet mathématique hors de notre portée. Pour cette raison nous nous contenterons de l'approximation en temps discret donnée par la schématisation d'Euler qui simplifie grandement le problème.

Il s'agira dans un premier temps d'étudier un modèle très simple dont on étudiera la convergence en loi du processus et dont on estimera de façon non paramétrique la dynamique caractérisée par la fonction  $b$ . Cette estimation aura pour but de nourrir une stratégie optimale qui maximisera les gains. Enfin, nous appliquerons notre démarche à un modèle différent : celui de Verhulst.

## 2 Modèle simple

Dans cette partie, nous fixons  $b(x)$  et  $\sigma(x)$ , et nous étudions le processus  $(\tilde{X}_k)$ . Nous avons alors pour la suite :

- $b(x) = -\theta(x - l)$
- $\sigma(x) = \sigma$

avec  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\theta \in \mathbb{R}^+$  la vitesse de convergence et  $l \in \mathbb{R}^+$  la limite asymptotique.

### 2.1 Le processus $(\tilde{X}_{kh})$

Comme dit plus tôt, l'approche en temps continu du processus  $(X_t)$  étant difficile à appréhender, nous nous contentons des approximations en temps discret de celui-ci.

**Définition 2.1** (Stock de bois). *Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  le stock de bois au temps  $(k+1)$ . On a alors :*

$$\tilde{X}_{(k+1)h} = \tilde{X}_{kh} + b(\tilde{X}_{kh})h + \sigma(\tilde{X}_{kh})\sqrt{h}\epsilon_{k+1}, \quad (2)$$

avec  $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$  des variables indépendantes de loi normale centrée réduite et  $h$  un pas de temps petit.

En reprenant alors les paramètres fixés en début de chapitre, nous obtenons :

$$\tilde{X}_{(k+1)h} = \tilde{X}_{kh} - h\theta(\tilde{X}_{kh} - l) + \sigma\sqrt{h}\epsilon_{k+1}. \quad (3)$$

Nous avons avec l'équation (3) un cas simple que nous pouvons étudier.

#### 2.1.1 Simulation de notre stock de bois $\tilde{X}_{kh}$

Il convient désormais d'observer l'évolution de notre stock de bois. Avec les paramètres fixés en début de partie, nous avons vu que le processus initial (2) pouvait se réécrire comme en (3). En fixant  $l = 0.1$ ,  $\theta = 5$ ,  $h = \frac{1}{1000}$  avec  $n = 1000$  le nombre d'itérations et  $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$  des variables indépendantes de loi normale centrée réduite, on a le graphe ci-dessous :

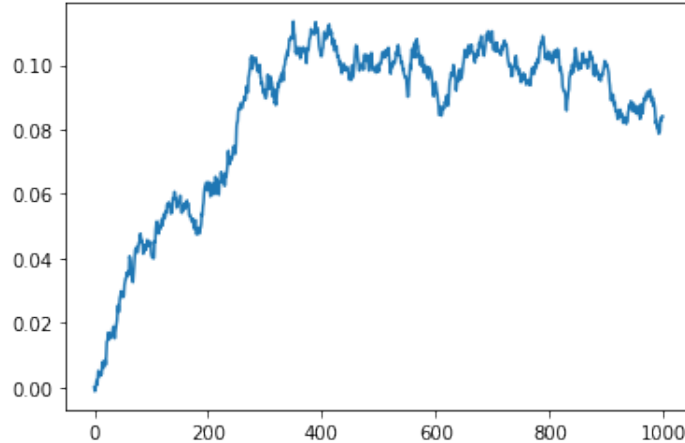


FIGURE 1 – Simulation du processus  $\tilde{X}_{kh}$

### 2.1.2 Loi de $(\tilde{X}_{(k+1)h})$

**Proposition 2.1** (Loi de  $\tilde{X}_{(k+1)h}$ ). *Soit  $(\tilde{X}_{(k+1)h})$  comme défini en (3). On a que le processus  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  suit pour tout  $k \in \mathbb{N}$  une loi normale d'espérance  $m_k$  et de variance  $v_k$ .*

**Preuve 2.1.** *Cherchons la loi du processus en reprenant l'équation (3). Montrons par un raisonnement par récurrence sa loi.*

- **Initialisation**

*On a  $\tilde{X}_0 = y_0 \rightarrow$  ce qui est déterministe d'où  $\tilde{X}_0 \sim \mathcal{N}(y_0, 1)$ .*

*De plus, lorsque  $k = 0$ , on a  $\tilde{X}_k = \theta lh + \sigma\sqrt{h}\varepsilon_1$  et ceci suit donc une loi normale  $\mathcal{N}(\theta lh, \sigma^2 h)$ .*

*Ainsi au rang 0, le processus étant déterministe ce dernier suit donc une loi normale  $\mathcal{N}(y_0, 1)$  et au rang  $k = 0$ , il suit une normale centrée en  $\theta lh$  et de variance  $\sigma^2 h$ .*

- **Hérédité**

*A présent, supposons qu'au rang  $k$ ,  $\tilde{X}_{kh}$  suit une normale d'espérance  $m_k$  et de variance  $v_k$ . Montrons qu'au rang suivant  $k + 1$ ,  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  est également une gaussienne.*

— On utilise l'hypothèse de récurrence

$$\tilde{X}_{(k+1)h} = \tilde{X}_{kh} - h\theta(\tilde{X}_{kh} - l) + \sigma\sqrt{h}\epsilon_{k+1}$$

— Les  $(\epsilon_k)_{k \geq 1}$  suivent une loi normale centrée réduite

*On remarque que  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  est une combinaison linéaire de loi gaussienne, qui sont indépendantes donc  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  est de même une gaussienne d'espérance  $m_k$  et de variance  $v_k$ . Par conséquent, la propriété au rang  $k + 1$  est vérifiée.*

- **Conclusion**

*Par conséquent, le processus  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  suit une loi Normale centrée en  $m_k$  et de variance  $v_k$ . Ces derniers seront déterminer dans la prochaine section (2.2).*

### 2.1.3 Espérance et Variance

En reprenant l'équation (3), nous pouvons calculer l'espérance et la variance de  $(\tilde{X}_{(k+1)h})$ . Commençons par l'espérance. Nous avons :

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_{(k+1)h}] &= E[\tilde{X}_{kh} - h\theta(\tilde{X}_{kh} - l)\sigma\sqrt{h}\epsilon_{k+1}] \\ &= E[\tilde{X}_{kh}] - h\theta E[\tilde{X}_{kh}] + lh\theta + \sqrt{h}\sigma E[\epsilon_{k+1}]. \end{aligned}$$

Ainsi, en posant  $m_k = E[\tilde{X}_{kh}]$ , on obtient alors  $m_{k+1} = lh\theta + m_k(1 - h\theta)$ .

On reconnaît ici une suite arithmético-géométrique, et la résolution de celle-ci nous donne :

$$E[\tilde{X}_{(k+1)h}] = (E[\tilde{X}_0] - l)(1 - h\theta)^{k+1} + l. \quad (4)$$

Pour la variance, nous obtenons par la même démarche :

$$\text{Var}(\tilde{X}_{(k+1)h}) = (V(\tilde{X}_0) - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)})(1-h\theta(2-h\theta))^{k+1} + \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)} \quad (5)$$

**Proposition 2.2** (Espérance et Variance). *Soit  $(\tilde{X}_{(k+1)h})$  comme défini en (3). On a alors :*

- $E[\tilde{X}_{(k+1)h}] = (E[\tilde{X}_0] - l)(1-h\theta)^{k+1} + l$
- $\text{Var}(\tilde{X}_{(k+1)h}) = (V(\tilde{X}_0) - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)})(1-h\theta(2-h\theta))^{k+1} + \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)}$

**Preuve 2.2. • Espérance**

On a en remplaçant  $(\tilde{X}_{(k+1)h})$  par son expression et en posant  $m_k = E[\tilde{X}_{kh}]$  que  $m_{k+1} = lh\theta + m_k(1-h\theta)$ . On reconnaît ici une suite arithmético-géométrique. Soit  $c_n$  le point fixe, on a alors :

$$c_n = lh\theta + c_n(1-h\theta) \iff c_n h\theta = lh\theta \iff c_n = l$$

On pose alors  $(v_n)$  une suite auxiliaire telle que  $v_k = m_k c_n$ .

On a alors :

$$\begin{aligned} v_{k+1} &= m_{k+1} - l = lh\theta + m_k(1-h\theta) - l \\ &= lh\theta + m_k - l - m_k h\theta \\ &= (m_k - l)(1-h\theta) = (1-h\theta)v_n \end{aligned}$$

De plus,  $v_0 = m_0 - l = E[\tilde{X}_0] - l$ . Donc  $v_n = v_0(1-h\theta)^n = (E[\tilde{X}_0] - l)(1-h\theta)^n$ . Finalement, on a bien  $m_{k+1} = E[\tilde{X}_{(k+1)h}] = (E[\tilde{X}_0] - l)(1-h\theta)^{k+1} + l$ .

**• Variance**

On a de la même façon que l'espérance :

$$\text{Var}(\tilde{X}_{(k+1)h}) = (1-h\theta)^2 \text{Var}(\tilde{X}_{kh}) + h\sigma^2$$

On pose ici aussi  $m_k = \text{Var}(\tilde{X}_{kh})$ . On a alors  $m_{k+1} = (1-h\theta)^2 m_k + h\sigma^2$ .

On calcule le point fixe  $c_n$  :

$$c_n = (1-h\theta)^2 c_n + h\sigma^2 \iff c_n = \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)}$$

On pose alors la suite auxiliaire  $t_k$  telle que  $t_k = m_k - c_n = m_k - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)}$ . Ainsi :

$$\begin{aligned} t_{k+1} &= m_{k+1} - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)} = (1-h\theta)^2 m_k + h\sigma^2 - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)} \\ &= (m_k - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)})(1-h\theta(2-h\theta)) \\ &= t_k(1-h\theta(2-h\theta)) \end{aligned}$$

De plus,  $t_0 = m_0 - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)} = V(\tilde{X}_0) - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)}$ . Donc on a  $t_k = (V(\tilde{X}_0) - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)})(1-h\theta(2-h\theta))^k$ .

Finalement, on a bien  $m_{k+1} = V(\tilde{X}_{(k+1)h}) = (V(\tilde{X}_0) - \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)})(1-h\theta(2-h\theta))^{k+1} + \frac{\sigma^2}{\theta(2-h\theta)}$ .

## 2.2 La loi limite $\rho(x)$ de notre stock de bois

**Définition 2.2.** Supposons qu'il existe des constantes  $\bar{v}, \underline{v} \in [0, \infty]$  et qui pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , satisfait l'inégalité  $\underline{v} \leq |\sigma(x)| \leq \bar{v}$  avec  $\sigma \in Lip_{loc}(\mathbb{R})$ . Ainsi, en prenant des constantes  $A, \gamma > 0$  et  $\mathbb{C} \geq 1$ , on peut définir l'ensemble  $\Sigma = \Sigma(\mathbb{C}, A, \gamma, \sigma)$  comme étant :

$$\Sigma := \left\{ b \in Lip_{loc}(\mathbb{R}) : |b(x)| \leq \mathbb{C}(1 + |x|), \forall |x| > A : \frac{b(x)}{\sigma^2(x)} \operatorname{sgn}(x) \leq -\gamma \right\} \quad (6)$$

avec  $\operatorname{sgn}(x)$  une fonction qui extrait le signe d'un nombre réel, c'est-à-dire  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Ainsi, il existe pour un  $\sigma$  donné et un quelconque  $b \in \Sigma$ , une densité invariante tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\rho(x) = \rho_b(x) := \frac{1}{C_{b,\sigma}\sigma^2(x)} \exp \left( \int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right) \quad (7)$$

avec

$$C_{b,\sigma} := \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma^2(u)} \exp \left( \int_0^u \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy \right) du$$

**Proposition 2.3** (Loi limite  $\rho_x$  de notre stock de bois). Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $\rho$ . On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $X$  qui suit une loi normale d'espérance  $l$  et de variance  $\tau^2$  avec  $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}$ .

**Preuve 2.3.** Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $\rho$ .

Tout d'abord, précisons que nous nous plaçons dans un cas simple donc nous avons

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \begin{cases} b(x) = -\theta(x - l) \\ \sigma(x) = \sigma \end{cases}.$$

Ainsi, on remarque que  $\frac{1}{C_{b,\sigma}\sigma^2(x)}$  est une constante de renormalisation ainsi :

$$\rho(x) \propto \exp \left( \int_0^x 2b(y) dy \right)$$

A présent, déterminons  $\int_0^x \frac{2b(y)}{\sigma^2(y)} dy$ . D'où pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
\int_0^x 2b(y)dy &= \int_0^x -2\theta(y-l)dy \\
&= -2\theta \int_0^x (y-l) dy \\
&= -2\theta \left[ \frac{y^2}{2} - ly \right]_0^x \\
&= -\theta x^2 + \theta 2lx \\
&= -\theta(x^2 - 2lx) \\
&= -\theta((x^2 - l) - l^2)
\end{aligned}$$

Définissons  $\tau^2 \in \mathbb{R}^+$ . Ainsi, on pose  $\frac{1}{2\tau^2} = \frac{\theta}{\sigma^2}$  ce qui équivaut à réécrire  $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}$ .

On a alors pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\rho(x) = \frac{1}{C_{b,\sigma}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(x-l)^2\right)$$

avec  $C_{b,\sigma}\sigma^2 = \tau^2\sqrt{2\pi} \Leftrightarrow C_{b,\sigma} = \frac{\sqrt{2\pi}}{2\theta}$ . Ainsi, on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\rho(x) = \frac{1}{\tau^2\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\tau^2}(x-l)^2\right) \quad \text{avec } \tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}$$

Par conséquent,  $X \sim \mathcal{N}(l, \tau^2)$ .

Nous pouvons alors illustrer (2.3). En prenant  $l = 0.1$ ,  $\tilde{X}_0 = 0.1 \times l$ ,  $N = 4096$  le nombre de trajectoires,  $T = 2000$  la taille des trajectoires,  $h = \frac{1}{T}$  un petit pas de temps et  $\theta = 40$ , on a :

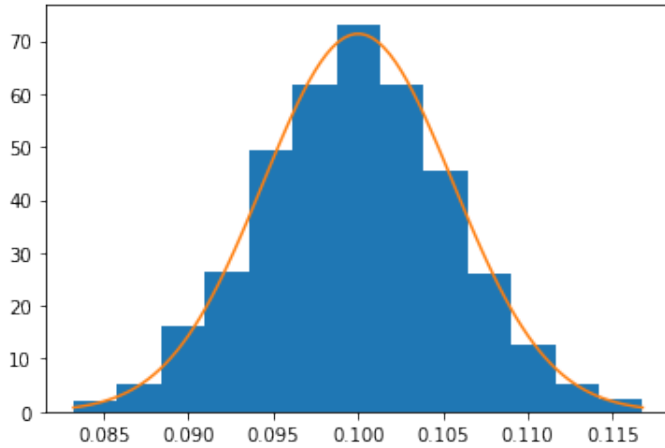


FIGURE 2 – Illustration de la convergence en loi de  $\tilde{X}_{kh}$  vers une  $\mathcal{N}(l, \tau^2)$  avec  $\tau^2 = \frac{\sigma^2}{2\theta}$



### 3 Définition d'une stratégie de coupe optimale dans le modèle simple

#### 3.1 Le seuil de coupe $y$

Nous avons notre stock de bois qui augmente au cours du temps, sans ou avec bruit selon si l'on se place dans le cas déterministe ou non. Quoiqu'il en soit, il y a un certain seuil à partir duquel l'on coupera.

**Définition 3.1.** Soit  $y \in \mathbb{R}^+$  notre seuil de coupe et  $y_0$  notre stock de bois après coupe. En clair, si  $\tilde{X}_{kh} \geq y$ ,  $k \in \mathbb{N}$ ,  $h \in \mathbb{R}^+$  un pas de temps petit, alors  $\tilde{X}_{(k+1)h} = y_0$ .

Quelque soit notre stock de bois juste avant la coupe, on aura jamais moins de  $y_0$  en stock de bois. Nous pouvons voir l'illustration du seuil de coupe ci-après.

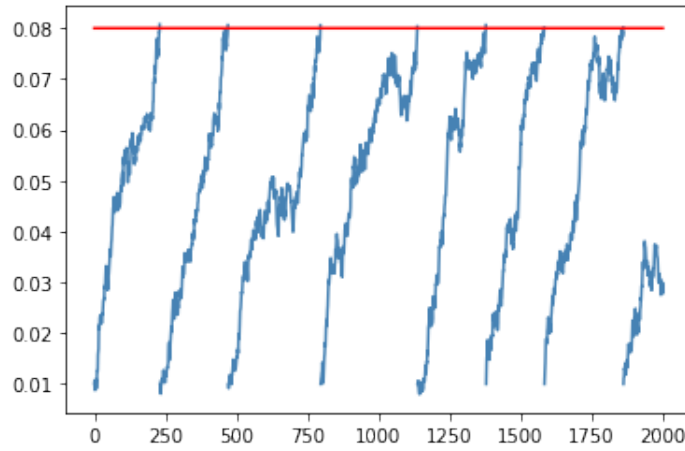


FIGURE 3 – Evolution du stock avec coupes

#### 3.2 Le temps de coupe dans le contexte de la forêt

Le seuil de coupe  $y$  étant maintenant défini, nous nous devons de définir le temps auquel on coupe jusqu'à ce que notre stock soit de  $y_0$ . Il est important de définir un temps de coupe, puisque l'on va s'en servir pour définir le gain de notre bûcheron.

**Définition 3.2** (Temps de coupe). Soit  $y$  le seuil de coupe. On définit alors le  $n$ -ième temps de coupe comme suit :

$$\tau_y^n = \inf\{kh > \tau_y^{n-1}, \forall k \in \mathbb{N}, \tilde{X}_{kh} \geq y\} \quad (8)$$

le temps de coupe pour un seuil fixé à  $y$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ .

**Remarque 3.1.** On a  $\tilde{X}_{\tau_y^n} = y_0$  et  $\tilde{X}_{\tau_y^n-} \geq y$ .

#### 3.3 Comment définir le gain

L'objectif dans cette gestion de forêt est de maximiser le gain du bûcheron. On s'intéresse à la gestion optimale et durable de la forêt dans le but de maximiser le gain du bûcheron.

Dans un premier temps, nous pouvons simplement définir la récompense du bûcheron.

**Définition 3.3** (Récompense du bûcheron). Soit  $g$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . La récompense du bûcheron est alors :

$$g(y) \quad (9)$$

En clair, la récompense du bûcheron pour une coupe correspondra à une fonction  $g$  en  $(X_{\tau_y^n-})$ , qui est en fait le stock de bois juste avant la coupe. Le pas de temps  $h$  étant très "petit", on peut écrire  $(X_{\tau_y^n-}) \approx y$ . Ceci est important puisque l'on peut alors exprimer le gain moyen par unité de temps.

**Définition 3.4.** Soit  $G$  la fonction de gain moyen par unité de temps définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $y$  le seuil de coupe comme défini en (3.1),  $\tau_y^n$  le  $n$ -ième temps de coupe et  $T \in \mathbb{N}$  un horizon de temps. On a alors :

$$G(y) := \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\left[ \sum_{n: \tau_y^n \leq T} g(y) \right] = \frac{g(y)}{E[\tau_y]} \quad (10)$$

Ceci définit bien le gain moyen par unité de temps, pour  $T$  grand et  $g$  la fonction de récompense du bûcheron (3.3).

**Preuve 3.1** (3.4). On a par définition :

$$G(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\left[ \sum_{n: \tau_y^n \leq T} g(y) \right]$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} G(y) &= \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\left[ \sum_{n: \tau_y^n \leq T} g(y) \right] \\ &= g(y) \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E[\text{Nombre De Coupes} \leq T] \\ &= g(y) \lim_{T \rightarrow +\infty} E\left[ \frac{N_T^y}{\sum_{i=1}^{N_T^y} \tau_y^i + \text{reste}} \right], \end{aligned}$$

avec  $N_T^y$  le nombre de coupes avant  $T$  au niveau  $y$ , et le reste plus petit que 1. En effet, on peut le voir comme ça :

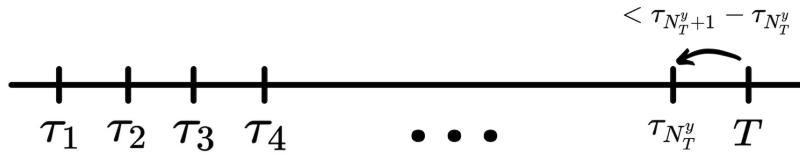


FIGURE 4 – Axe avec les différents temps d'arrêts

Or :  $\sum_{i=1}^{N_T^y} \tau_y^i \leq T \leq \sum_{i=1}^{N_T^y+1} \tau_y^i$ . Donc on a :

$$E\left[ \frac{N_T^y}{\sum_{i=1}^{N_T^y+1} \tau_y^i} \right] \leq E\left[ \frac{N_T^y}{T} \right] \leq E\left[ \frac{N_T^y}{\sum_{i=1}^{N_T^y} \tau_y^i} \right].$$

De plus,  $\lim_{T \rightarrow +\infty} E\left[ \frac{N_T^y}{\sum_{i=1}^{N_T^y} \tau_y^i} \right] = \frac{1}{E[\tau_y]}$  et  $\lim_{T \rightarrow +\infty} E\left[ \frac{N_T^y}{\sum_{i=1}^{N_T^y+1} \tau_y^i} \right] = \frac{1}{E[\tau_y]}$ .

Ainsi, on a par le théorème des gendarmes que  $\lim_{T \rightarrow +\infty} E\left[ \frac{N_T^y}{T} \right] = \frac{1}{E[\tau_y]}$ . Donc finalement :

$$G(y) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} E\left[ \sum_{n: \tau_y^n \leq T} g(y) \right] = \frac{g(y)}{E[\tau_y]}$$

**Remarque 3.2.** Dans le cas déterministe, on a que  $G(y) = \begin{cases} \frac{g(y)}{E[\tau_y]} & \text{si } y < l \\ 0 & \text{si } y \geq l \end{cases}$ , avec  $E[\tau_y] = -\frac{1}{\theta} \log(1 - \frac{y}{l})$ .

**Preuve 3.2.** Rappelons le processus  $\tilde{X}_{(k+1)h}$  dans le cas déterministe.

$$\tilde{X}_{(k+1)h} = \tilde{X}_{kh} + b(\tilde{X}_{kh})h$$

La solution générale de ce dernier vaut pour tout  $\theta > 0$ ,

$$x_G(t) = ce^{-\theta t} + l$$

Elle s'obtient en résolvant l'équation différentiel suivant : pour tout  $\theta > 0$

$$x'(t) + \theta x(t) = \theta l$$

La solution homogène s'obtient directement pour tout  $\theta > 0$ ,  $x_H(t) = ce^{-\theta t}$

De même pour la solution particulière, on a :

$$x(t) = A \Rightarrow \theta A = \theta l \Leftrightarrow A = l \Rightarrow x_p(t) = l$$

D'où  $\forall \theta > 0$ ,  $x_G(t) = ce^{-\theta t} + l$ . Ainsi, pour  $y < l$ , on a :

$$\begin{aligned} ce^{-\theta t} + l &= l(1 - e^{-\theta t}) = y \\ 1 - e^{-\theta t} &= \frac{y}{l} \\ e^{-\theta t} &= 1 - \frac{y}{l} \\ t &= \frac{-1}{\theta} \log(1 - \frac{y}{l}) \end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de définir le seuil optimal à dynamique  $b$  connue et pour une fonction récompense  $g(y) = \sqrt{y}$ .

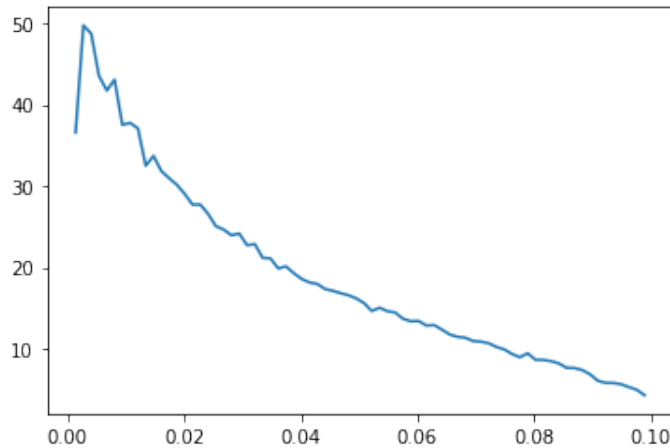


FIGURE 5 – Evolution de la fonction  $G$  pour différents seuils de coupe dans le cas aléatoire avec  $g(y) = \sqrt{y}$

On remarque alors que le seuil optimal à choisir est un seuil très bas, ce qui indique que pour cette fonction de récompense et dans le cadre de notre modèle simple il est conseillé de couper de façon continue la forêt. Or la réalité suggère des frais d'exploitation qui nous empêchent de couper en continu. Il convient alors de complexifier un peu plus notre fonction récompense qui doit prendre en compte les coûts.

Ainsi, en prenant  $g(y) = \sqrt{y - 0.03}$ , on obtient la fonction  $G$  suivante :

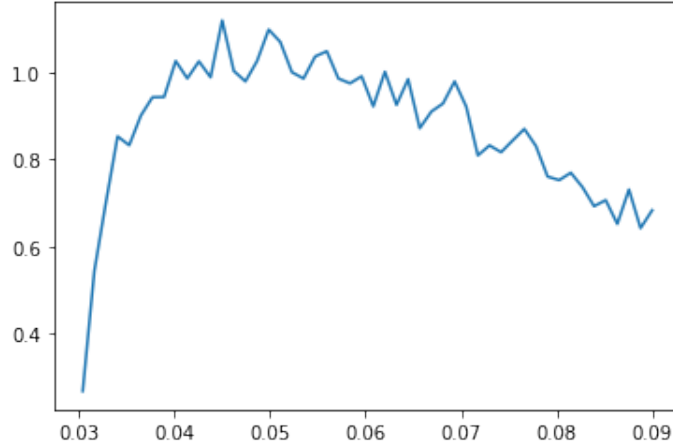


FIGURE 6 – Evolution de la fonction  $G$  pour différents seuils de coupe dans le cas aléatoire avec  $g(y) = \sqrt{y - 0.03}$

Ici, il est clair que le gain moyen par unité de temps est plus faible et qu'il n'est pas maximisé en coupant continuellement la forêt. On peut alors voir facilement que le gain par unité de temps maximum est atteint en  $y \approx 0.045$ . Ce qui montre que lorsque des coûts fixes sont présents, il faut attendre que la forêt grandisse avant de la couper pour obtenir un gain élevé.

### 3.4 Solution au problème pour une dynamique $b$ connue

Il convient désormais de trouver le seuil optimal pour lequel on maximisera notre gain. Lorsque la dynamique de la forêt est connue, i.e  $b$  connue, alors la solution est celle qui maximise  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$ , avec

$$\xi(y) := 2 \int_0^x \frac{1}{\sigma^2(y)\rho(y)} \int_{-\infty}^y \rho(z) dz dy \quad (11)$$

et  $g$  notre fonction récompense comme définie en (3.3). Ces résultats sont tirés de l'article (1) de Christensen et Strauch.

Pour le calcul de  $\xi$ , nous avons opté pour la méthode des trapèzes. (6)

La méthode des trapèzes est une méthode d'approximation d'une intégrale  $\int_a^b f(x) dx$ . Elle consiste à calculer une somme de surfaces de trapèzes en prenant des petites subdivisions. Sur chaque intervalle  $[a, b]$ , on réalise donc l'approximation suivante :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

### 3.4.1 Cas déterministe

Le cas déterministe est le cas où  $\sigma = 0$  dans (3). Dans ce cas là, nous avons vu que  $G(y) = \frac{g(y)}{E[\tau_y]} = \frac{g(y)}{-\frac{1}{\theta} \log(1-\frac{y}{l})}$ . Ainsi, en prenant  $g$  comme définie en (3.3),  $\theta = 5$  et  $l = 0.1$ , on a alors le graphe suivant.

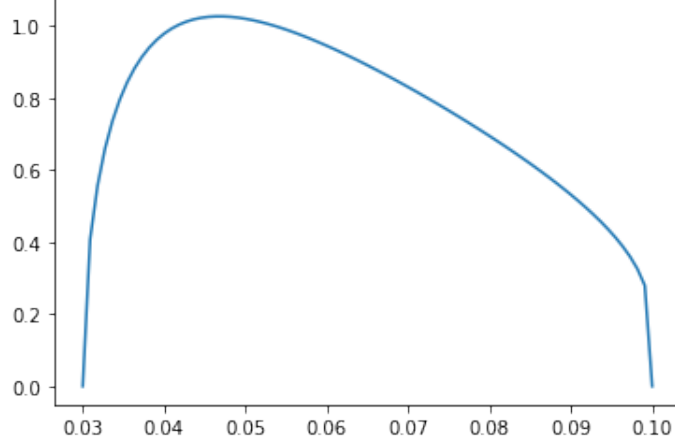


FIGURE 7 – Evolution de la fonction  $G$  pour différents seuils de coupe dans le cas déterministe avec  $g(y) = \sqrt{y - 0.03}$

Nous souhaitons chercher le seuil de coupe optimale afin de maximiser notre gain moyen par unité de temps. Pour cela, nous pouvons mettre en place un algorithme de gradient pour déterminer ce dernier car nous ne pouvons pas trouver de solution analytique. Nous allons plus spécifiquement utiliser une montée de gradient. Sa mise en place se fait de la manière suivante :

---

#### Algorithm 1 Algorithme du gradient

---

**Result:** Seuil de coupe  $y$  optimale

Initialisation : On prend un point initial  $y_0 \in G$  ainsi qu'un seuil de tolérance  $\varepsilon > 0$ .

**while**  $\|\nabla G(y_k)\| \leq \varepsilon$  **do**

$y_{k+1} = y_k + \alpha \nabla G(y_k)$

**end**

---

Ainsi par l'application de l'algorithme, nous trouvons que le gain déterministe est maximal pour le seuil  $y \approx 0.049$ . Par conséquent, nous devons attendre que la forêt grandisse jusqu'à  $y \approx 0.049$  avant de la couper afin d'obtenir le gain moyen par unité de temps optimal.

Or, nous venons de définir la solution au problème pour une dynamique  $b$  connue. Cette solution devrait vérifier le résultat que nous venons de trouver, c'est-à-dire un gain maximal en environ 0.049. On obtient, pour le cas déterministe et avec la définition du gain par  $\frac{g(y)}{\xi(y)}$  :

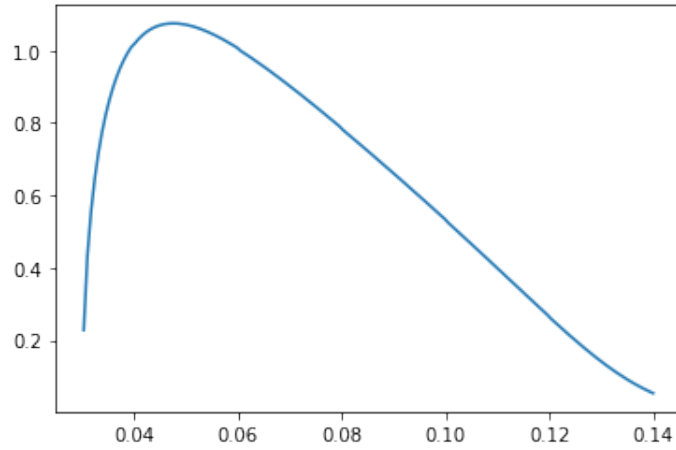


FIGURE 8 – Evolution de la fonction  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  pour différents seuils de coupe dans le cas déterministe avec  $g(y) = \sqrt{y - 0.03}$

De la même façon, en effectuant un algorithme de "montée" de gradient, on obtient que  $G$  est maximum en environ 0.049. Cela vient vérifier notre résultat et l'exactitude de (11).

### 3.4.2 Cas aléatoire

Nous nous plaçons maintenant dans le cas aléatoire, c'est-à-dire le cas où  $\sigma \neq 0$ . Ici, la solution au problème est uniquement donnée par  $\frac{g(y)}{\xi(y)}$ . Nous nous donnons alors toujours le même modèle (le même que dans le cas déterministe), avec  $\sigma = 0.05$ .

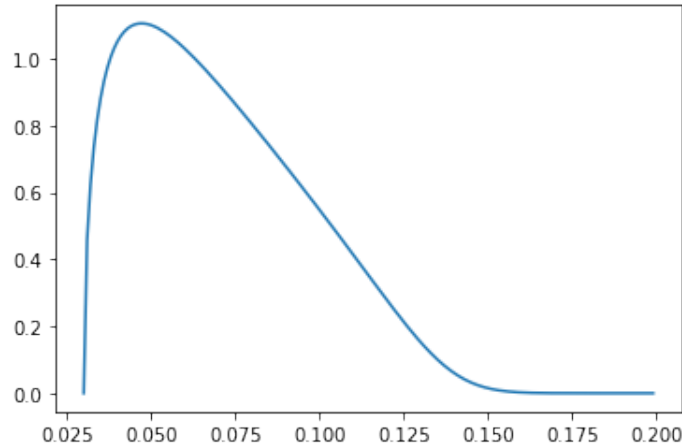


FIGURE 9 – Evolution de la fonction  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  pour différents seuils de coupe dans le cas aléatoire avec  $g(y) = \sqrt{y - 0.03}$ , avec  $\sigma = 0.05$

Une simple "montée" de gradient nous donne ici un maximum pour  $G$  en un seuil d'environ 0.047. Ici, nous remarquons également, qu'on obtient un seuil optimale très proche de celui du cas déterministe. En effet, ici le bruit est assez petit et donc plus ce dernier est petit plus on tendra vers le seuil optimal déterministe (cohérent car si  $\sigma \rightarrow 0$  alors il n'y a plus d'aléatoire).

Ce qui est intéressant de regarder, c'est comment évolue la solution avec un aléatoire plus fort. En augmentant le bruit sur notre dynamique de forêt, le seuil optimal de coupe en est-il impacté significativement ?

Nous simulons alors une nouvelle forêt mais avec une nouvelle valeur de  $\sigma$ . Dans les cas précédents, nous prenions  $\sigma = 0.05$ , et nous allons prendre ici  $\sigma = 0.5$ , soit 10 fois plus grand. On obtient la fonction  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  suivante :

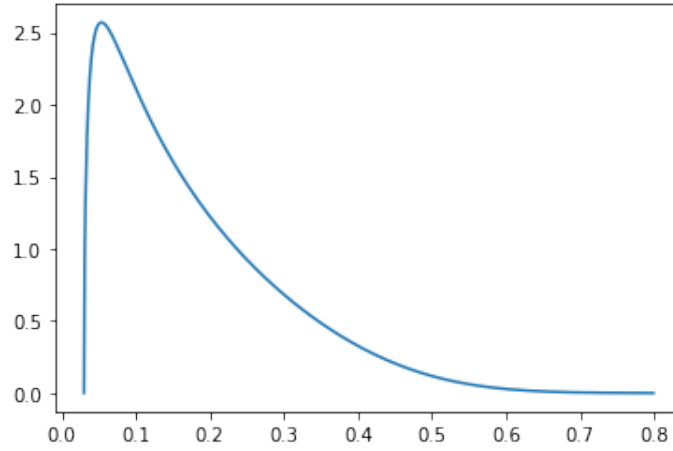


FIGURE 10 – Evolution de la fonction  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  pour différents seuils de coupe dans le cas aléatoire avec  $g(y) = \sqrt{y} - 0.03$ , avec  $\sigma = 0.5$

Nous avons alors, là aussi par une "montée" de gradient, que le maximum est atteint en environ  $y = 0.54$ . On pourrait vérifier en faisant d'autres simulations, mais la conclusion est qu'augmenter le bruit nous donne un seuil optimal de coupe plus grand. Une autre chose à remarquer est que le gain maximum ici est  $G(0.54) \approx 2.57$  environ, tandis qu'avec  $\sigma = 0.05$ , on avait le maximum  $G(0.047) \approx 1.105$ . Donc, nous devons attendre plus longtemps, soit  $\approx 11$  fois plus de temps avant de couper la forêt pour seulement obtenir 2 fois plus de gain. Ce qui n'est pas envisageable dans la pratique.

## 4 Estimation non paramétrique

Nous avons vu que la solution pour une dynamique  $b$  connue était d'optimiser  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  (11). Mais le but reste finalement de résoudre ce problème pour une dynamique  $b$  inconnue, et cela pour des soucis de réalisme. En effet, en pratique nous ne connaissons pas la dynamique d'une forêt, et donc nous ne pouvons pas calculer  $\xi(y)$ . De la même manière, il convient alors de trouver le seuil optimal, c'est-à-dire le seuil qui maximisera notre gain, et ce pour une dynamique de forêt inconnue. Cela passe alors par de l'estimation non paramétrique.

L'estimation non paramétrique consiste dans notre cas à juste estimer  $\rho(x)$  (7). En effet, dans notre solution pour  $b$  connue, nous avons  $\xi$  qui ne dépend que de la loi limite  $\rho$  (et pas de  $b$ ). En fait, trouver une solution pour  $b$  inconnue ne revient pas à estimer  $b$ , mais estimer  $\rho$ . C'est ensuite l'estimation de  $\rho$  (7) qui nous permettra de calculer  $\xi$  (11) et finalement, calculer  $G$  pour l'optimiser.

### 4.1 Estimation de la loi limite $\rho$

**Définition 4.1** (Ensemble sigma). Soit  $\beta, L > 0$ , définis par  $H_{\mathbb{R}}(\beta, L)$  la classe Hölderienne l'ensemble des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont  $l := \lfloor \beta \rfloor$ -fois différentiable et pour chaque

$$\begin{aligned} \|f^{(k)}\|_{\infty} &\leq L \quad \forall k = 0, 1, \dots, l, \\ \|f^{(l)}(\cdot + t) - f^{(l)}(\cdot)\|_{\infty} &\leq L|t|^{\beta-l} \quad \forall t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

On a :  $\Sigma(\beta, L) := \{b \in \Sigma(\mathbb{C}, A, \gamma) : \rho_b \in \Sigma(\beta, L)\}$ .

Cet ensemble est celui qui définit l'ensemble de nos dynamiques  $b$  possible. Considérant cet ensemble, on doit avoir que le noyau que l'on va noter  $Q$  doit respecter les conditions suivantes :

- $Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est Lipschitz continue symétrique,
- $\text{supp}(Q) \subset [-1/2, 1/2]$ ,
- $Q$  est d'ordre  $\lfloor \beta \rfloor$ , i.e.  $\int Q(u) du = 1$  et  $\int Q(u) u^j du = 0 \forall j = 1, \dots, \lfloor \beta \rfloor$ .

Il convient maintenant de définir l'estimateur de notre loi limite  $\rho$ .

**Définition 4.2.** Soit  $b \in \Sigma(\beta, l)$ , pour  $L > 0, \beta \geq 1$ , et  $Q$  un noyau respectant (4.1). On a alors :

$$\rho_{T,Q}(h)(x) := \frac{1}{Th} \sum_{u=0}^T Q\left(\frac{x - X_u}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (12)$$

avec  $T$  le nombre d'observations,  $h$  le pas de temps, et  $X$  notre stock de bois.

A savoir que ces résultats théoriques et définitions proviennent de l'article de Christensen et Strauch (1), et sont réécrits ici pour des soucis de compréhension.

La question est quel noyau choisir pour respecter les conditions sur celui-ci. Nous avons choisi un noyau rectangulaire, c'est-à-dire :

$$Q(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(|u| \leq 1)}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

Ce noyau ne respecte pas la première condition évoquée en (4.1), mais c'est un bon outil pour démarrer. On peut alors calculer  $\rho_{T,Q}$ , et obtient pour  $h = 0.001$  (petit pas de temps) et une quelconque dynamique  $b$  :



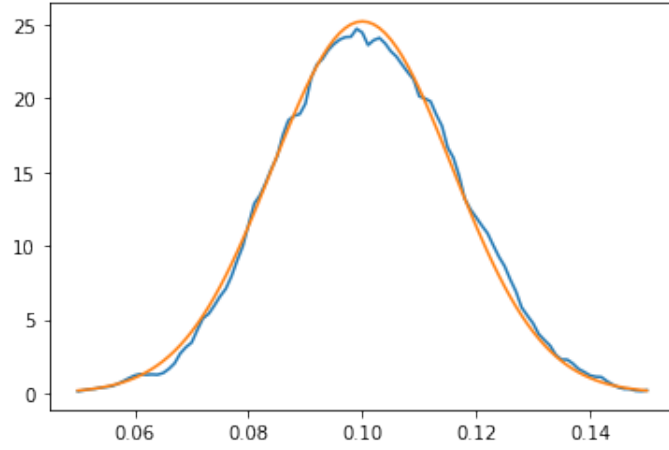


FIGURE 11 – Estimation de  $\rho$  avec un noyau rectangulaire

Nous avons donc estimé  $\rho$  en supposant qu'on ne connaissait pas la dynamique, et nous l'avons comparée à la loi limite théorique (2.2). On remarque que l'estimation (en bleu) est vérifiée par la loi limite théorique (en orange).

Nous pouvons faire de même avec un noyau triangulaire, c'est-à-dire :

$$Q(u) = (1 - |u|)\mathbb{1}_{(|u| \leq 1)}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

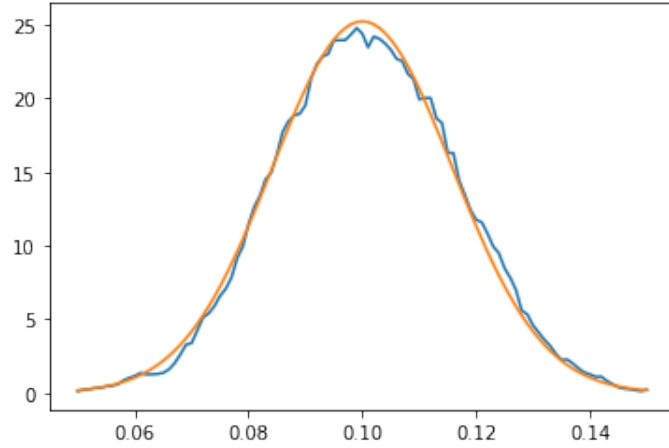


FIGURE 12 – Estimation de  $\rho$  avec un noyau triangulaire

Le résultat est sensiblement similaire, mais ce noyau ne vérifie pas la condition sur le support (4.1). Cependant, l'estimation par noyau triangulaire  $\rho_{T,Q}$  bien à la loi limite  $\rho_b$  (7).

Il convient alors de trouver un noyau qui respecte toutes les conditions. Nous en avons alors créer un :

$$Q(u) = (2 - 4|u|)\mathbb{1}_{(|u| \leq \frac{1}{2})}, \quad u \in \mathbb{R}. \quad (15)$$

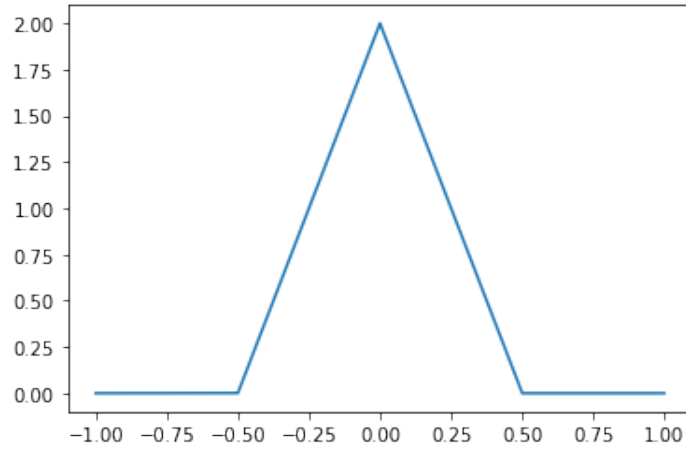


FIGURE 13 – Noyau triangulaire "remanié"

Ce noyau ci peut se voir comme un noyau triangulaire "remanié", et il vérifie les conditions (4.1). On peut alors estimer  $\rho$  avec ce noyau.

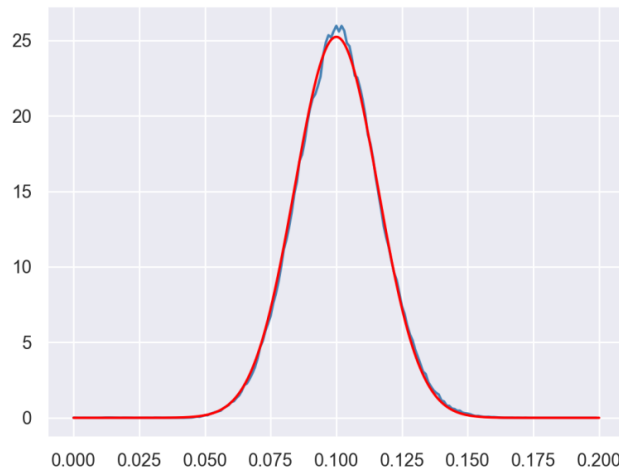


FIGURE 14 – Estimation de  $\rho$  avec un noyau triangulaire "remanié"

Soulignons que les simulations ont été obtenues à partir d'une fonction noyau que nous avons construit nous-mêmes.

Il est clair que le noyau triangulaire "remanié" est celui à garder, mais les résultats peuvent encore être mieux ! En effet, notre choix de fenêtre ( $h = 0.001$ ) est arbitraire, or il existe une fenêtre optimale que l'on peut déterminer.

*Démonstration de la fenêtre optimale.* Soit  $Q$  un noyau, on définit  $\rho$  est à noyau  $\rho_{T,Q}(h)(x)$  de fenêtre  $h$  par

$$\rho_{T,Q}(h)(x) := \frac{1}{Th} \sum_{u=0}^T Q\left(\frac{x - X_u}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (16)$$

Pour trouver la fenêtre optimale, nous devons déterminer le risque quadratique de  $\rho$ . Etudions le risque :

— Etude du biais

$\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} b(\rho_{T,Q}(h)(x)) &= \mathbb{E}(\rho_{T,Q}(h)(x)) - \rho(x) \\ &= \frac{1}{h} \mathbb{E}(Q(\frac{x - X_1}{h})) - \rho(x) \\ &= \frac{1}{h} \int_{\mathbb{R}} Q(\frac{y-x}{h}) \rho(y) dy - \rho(x) \quad \text{Symétrie du noyau} \end{aligned}$$

Changement de variable :  $u = \frac{y-x}{h} \Leftrightarrow y = x + uh$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} Q(u) \rho(x + uh) du - \rho(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(u) (\rho(x + uh) - \rho(x)) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(u) \left( \rho'(x)uh + \rho''(x + \tau uh) \frac{(uh)^2}{2} \right) du \\ &= \rho'(x)h \int_{\mathbb{R}} uQ(u) du + \frac{h^2}{2} \int_{\mathbb{R}} Q(u) \rho''(x + \tau uh) du \end{aligned}$$

On sait que  $\int_{\mathbb{R}} uQ(u) du = 0$  et  $\rho''$  est bornée.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\|\rho''\|_{\infty}}{2} h^2 \int_{\mathbb{R}} Q(u) du \\ &\leq \frac{\|\rho''\|_{\infty}}{2} h^2 \end{aligned}$$

— Etude de la variance

$\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} V(\rho_{T,Q}(h)(x)) &= V\left(\frac{1}{nh} \sum_{u=1}^n Q\left(\frac{X_u - x}{h}\right)\right) \\ &= \frac{1}{nh^2} V\left(Q\left(\frac{X_1 - x}{h}\right)\right) \\ &\leq \frac{1}{nh^2} \int_{\mathbb{R}} Q^2\left(\frac{y-x}{h}\right) \rho(y) dy \\ &\leq \frac{\|\rho\|_{\infty}}{nh^2} \int_{\mathbb{R}} Q^2\left(\frac{y-x}{h}\right) dy \quad \text{Toujours vrai!} \end{aligned}$$

Nous pouvons à présent écrire notre risque quadratique grâce à l'étude du biais et de la variance comme étant,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $R(\rho_{T,Q}(x), \rho(x)) \leq c'h^4 + \frac{c}{nh}$  avec  $c > 0$  et  $c' > 0$ .

Trouver la fenêtre optimale revient à minimiser le risque quadratique. D'où,

$$\begin{aligned} 4c''h^3 - \frac{c}{nh^2} &= 0 \\ h &= \left(\frac{c}{4c''n}\right)^{\frac{1}{5}} \end{aligned}$$

Nous obtenons que la fenêtre optimale est de l'ordre de  $n^{-\frac{1}{5}}$ .

□

Cependant, nous remarquons que la fenêtre optimale obtenu n'est pas calculable dans notre cas car cette dernière nécessite la connaissance de  $\|\rho\|_\infty$ . Ainsi, nous utiliserons la fenêtre optimale définie, pour un échantillon gaussien, comme suit (2) :

$$h = 1.06\sigma n^{-\frac{1}{5}}, \quad \text{avec } n \text{ le nombre d'observations. (2)}$$

En utilisant ce  $h$  ci et un noyau triangulaire "remanié"(15), on a alors une meilleure adéquation de notre estimation par noyau.

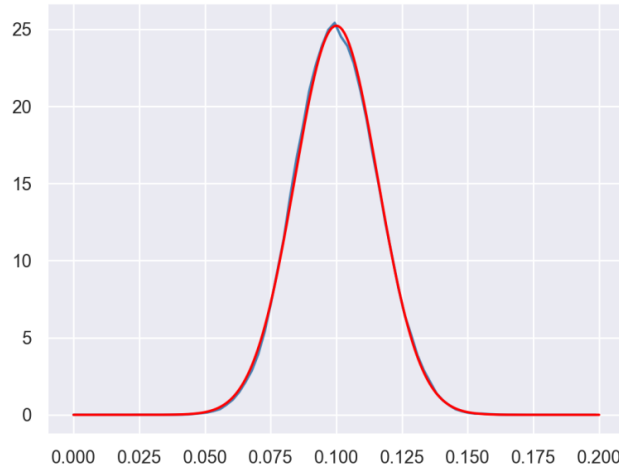


FIGURE 15 – Estimation de  $\rho$  avec un noyau triangulaire "remanié" et une fenêtre optimale  $h$  comme défini en (4.1)

Maintenant que nous avons notre estimation  $\rho_{T,Q}$ , nous pouvons l'utiliser pour calculer  $\xi$ . Nous pourrions dans ce cas calculer  $G$  et l'optimiser afin de trouver le seuil optimal.

## 4.2 Calcul du gain $G$ et optimisation

Il convient dans un premier temps de calculer  $\xi$ . Pour ce faire, avec une dynamique  $b$  supposée inconnue, on prend l'estimation  $\rho_{T,Q}$  de la loi limite, et utilisons la méthodes des trapèzes (3). On peut ainsi calculer  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$ , et le tracer pour différents  $y$  (seuils de coupe).

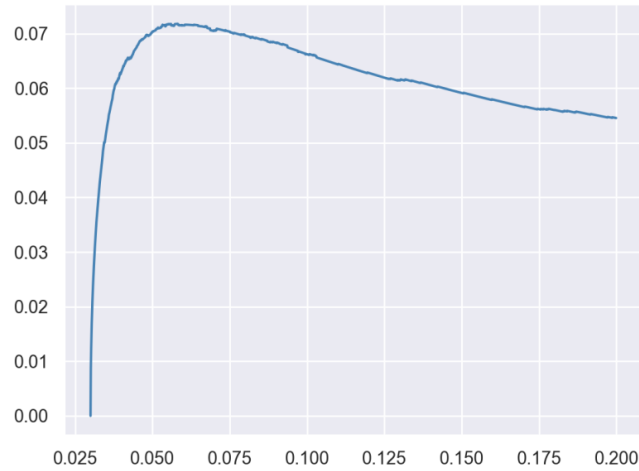


FIGURE 16 – Gain  $G(y) = \frac{g(y)}{\xi(y)}$  pour une dynamique  $b$  inconnue et différents seuils de coupe

Ici nous avons pris un pas  $h$  encore plus petit ( $h = 0.0001$ ), afin d'avoir une courbe de  $G$  la plus "lisse" possible, et pouvoir appliquer une "montée" de gradient. On obtient alors un seuil optimal d'environ 0.061, en lequel  $G$  vaut environ 0.072.

Il est nécessaire d'insister sur l'importance de l'estimation non paramétrique que l'on vient de réaliser. Nous venons de calculer, pour une dynamique  $b$  supposée inconnue, le seuil optimal. C'est-à-dire que si l'on observe l'évolution de notre stock de bois pendant un temps suffisamment grand, alors il est possible de savoir quand couper pour maximiser son gain, en déterminant un seuil optimal.

## 5 Application au modèle de Verhulst

Il convient à présent d'optimiser la gestion d'une forêt suivant un nouveau modèle. Nous choisissons le modèle de Verhulst aussi appelé modèle logistique. Ce dernier, utilisé en dynamique des populations considère que les faibles populations ont tendance à croître et que les fortes populations ont tendance à décroître, dans les deux cas vers une capacité d'accueil directement liée au taux de natalité et au taux de mortalité.

Dans cette partie nous utilisons maintenant les fonctions  $b$  et  $\sigma$  suivantes :

- $b(x) = a \left(1 - \frac{x}{K}\right)$ ,  $a, K > 0$ , avec  $K$  la capacité d'accueil.
- $\sigma(x) = 1$

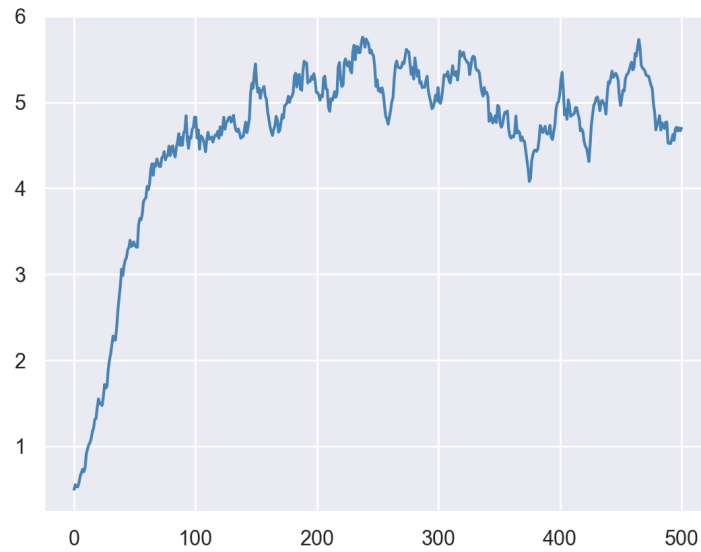


FIGURE 17 – Simulation du processus  $\tilde{X}_{kh}$  pour le modèle de Verhulst avec  $K = 5$ ,  $a = 5$  et  $\tilde{X}_0 = 0$

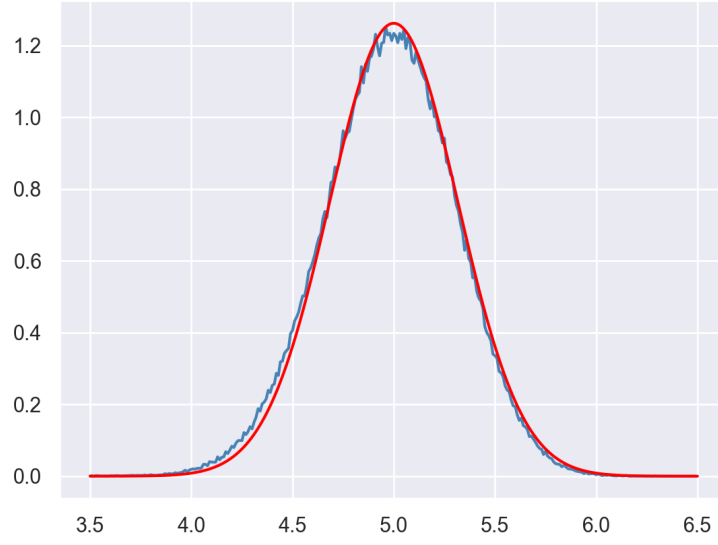


FIGURE 18 – Estimation par noyau de la densité  $\rho_b$  par noyau triangulaire "remanié"

De la même manière que précédemment l'estimation de la densité limite de notre processus permet de calculer la fonction  $G$  pour différents seuils et ainsi l'optimiser.

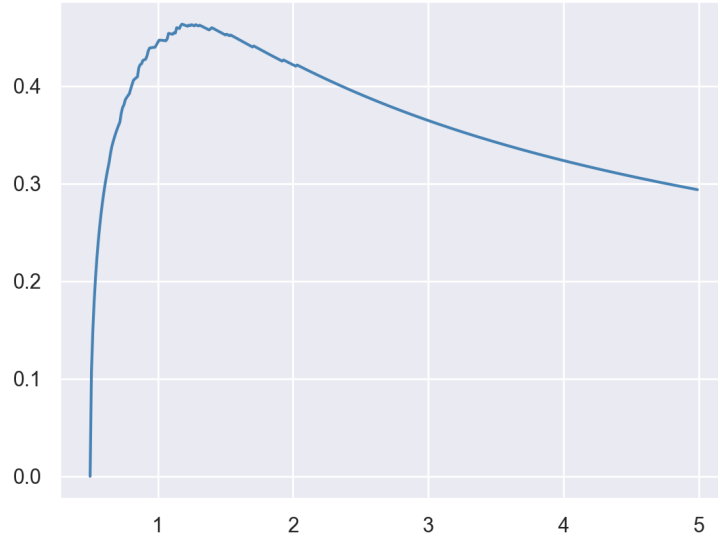


FIGURE 19 – Gain  $G(y)$  associée à la dynamique du modèle de Verhulst pour différents seuils

Pour ce nouveau modèle, le seuil optimal de coupe est d'environ 1.26 pour un gain moyen optimal de 0.46. La méthode que nous avons employée permet donc bien de déterminer une stratégie de coupe optimale sans connaissance préalable sur la dynamique de la forêt, pour des modèles différents, tant que les conditions 2.2 sont respectées.

## 6 Conclusion

Gérer une forêt optimalement et de manière durable ne se fait pas à l’aveugle et nécessite de suivre une démarche bien précise. Nous avons montré qu’il était nécessaire d’étudier le comportement du stock de bois sur une longue durée, afin d’en estimer la loi limite grâce à des méthodes d’estimation non paramétrique. Cette estimation est alors utilisée pour calculer le gain moyen que l’on peut espérer pour une stratégie de coupe donnée ce qui permet d’optimiser la stratégie maximisant le gain en déterminant un seuil de coupe.

Bien que cette démarche semble idéale, elle présente cependant quelques limites. La première est que cette dernière est soumise à de nombreuses conditions (voir 2.2). Il est de plus difficile, en pratique, de se permettre d’attendre assez longtemps pour avoir une estimation assez fine de la meilleure stratégie possible.

Une extension possible de notre travail consisterait alors à utiliser une alternance de phases d’apprentissage et de phases d’exploitation afin de ne pas délaissé la production tout en affinant l’estimation de notre stratégie optimale. Le problème à résoudre serait alors celui du choix de la durée des phases.

Enfin, bien que la métaphore retenue soit celle de la forêt, il est à noter que ce type de démarche est applicable à la gestion de ressource d’une manière plus générale.

*Que dit un bûcheron quand il va travailler ?  
Au bouleau !*



## Bibliographie

- [1] *Nonparametric learning for impulse control problems*, Sören Christensen, Claudia Strauch, Avril 2020, arXiv :1909.09528.
- [2] *Estimation par noyau*, Wikipedia :Propriétés
- [3] *Méthode des trapèzes*, Wikipedia
- [4] *Modèle de Verhulst*, Wikipedia