Marche de l'éléphant
MSS

Vishwa ELANKUMARAN
Fabian MIRDITA
Jordan PROCTOR

28 mai 2021

Enseignant : Bernard BERCU

Introduction

La marche de l'éléphant est un processus aléatoire à temps discret fascinant introduit au début des années 2000 par les physiciens Schütz et Trimper. Elle est définie de la manière suivante : A l'instant 0, l'éléphant est situé à l'origine, $S_0 = 0$. A l'instant 1, il va vers la droite au point 1 avec probabilité q ou vers la gauche au point 1 avec probabilité $1 - q$, avec $0 < \mathrm{q} < 1$ Ensuite, à l'instant n, l'éléphant choisit uniformément au hasard un instant k entre 1 et n puis

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité } p, \\ -X_k & \text{avec probabilité } 1-p, \end{cases}$$

où le paramètre $p \in [0,1]$ est la mémoire de la marche de l'éléphant. La position de la chaîne de l'éléphant est alors donnée par

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

A chaque instant $n \geq 1$, on a $X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}$ où α_n et β_n sont deux variables aléatoires indépendantes avec α_n de loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ et β_n de loi uniforme discrète $\mathcal{U}([1,n])$.

Question 1 : Cherchons l'espérance de X_{n+1} sachant la filtration $\mathcal{F}_n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\alpha_n X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Définition)} \\
&= \mathbb{E}(\alpha_n|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\
&= \mathbb{E}(\alpha_n)\mathbb{E}(X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Indépendance)} \\
&= (2p-1)\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k \mathbb{1}_{\beta_n=k}|\mathcal{F}_n\Big) \\
&= (2p-1)\mathbb{E}\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k|\mathcal{F}_n\Big)\mathbb{P}(\beta_n = k) \\
&= (2p-1)\sum_{k=1}^{n} X_k * \frac{1}{n} && \text{(Mesurable)} \\
&= (2p-1)\sum_{k=1}^{n} X_k * \frac{1}{n} && \text{car } S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \\
&= \frac{2p-1}{n} S_n
\end{aligned}$$

Question 2 : Déterminons $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Définition)}\\
&= \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)}\\
&= S_n + \frac{2p-1}{n}S_n && \text{(Question 1)}\\
&= S_n(1 + \frac{2p-1}{n})\\
&= S_n + \Big(\frac{n+2p-1}{n}\Big)\\
&= S_n\gamma_n && \text{avec } \gamma_n = \Big(\frac{n+2p-1}{n}\Big)
\end{aligned}
$$

Question 3

Soit (M_n) la suite définie par $(M_n) = a_nS_n$ avec $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$$

Montrons que (M_n) est une martingale de carré intégrable. Quelques conditions sont à vérifier.

1. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ qui est la tribu triviale et $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ qui est elle la tribu naturelle engendrée par les X_i. Donc (M_n) est $\mathcal{F}_n$-adaptée.
2. Montrons que (M_n) est intégrable.

$$
\begin{aligned}
|M_n| = |a_nS_n| &= \left|\frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \sum_{k=1}^{n} X_k\right|\\
&\leq \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \sum_{k=1}^{n} |X_k| && \text{Inégalité triangulaire}\\
&\leq \frac{n\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} && \text{car au mieux } X_k = 1\\
&\leq \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} && \text{Propriété de la fonction Gamma}
\end{aligned}
$$

Donc (M_n) est intégrable.

3. Montrons la propriété de la martingale.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(a_{n+1}S_{n+1}|\mathcal{F}_n)\\
&= \mathbb{E}(a_{n+1}|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)}\\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p)}\gamma_nS_n && \text{(Question 2)}\\
&= \frac{n\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)(n+2p-1)} \cdot \frac{(n+2p-1)}{n} \cdot S_n && \text{(Propriété fonction Gamma)}\\
&= \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \cdot S_n\\
&= a_nS_n\\
&= M_n
\end{aligned}
$$

Par conséquent, (M_n) est une martingale.

4. Montrons cette fois-ci que (M_n) est de carré intégrable. $(M_n)^2$ est une martingale de carré intégrable car $|M_n|^2 \leq \left(\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}\right)^2$

Question 4 : Calculons le processus croissant de $\langle M\rangle_n$.

1. $(M_n)^2$ est une martingale de carré intégrable (vu précédemment).
2. (M_n^2) est une sous martingale.
3. Le crochet associé est $\begin{cases} \langle M\rangle_0 = 0 \\ \langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] \end{cases}$

Calculons le crochet $\langle M\rangle_n$. On a $M_n = a_n S_n$.

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}] \qquad \text{(Définition)} \\
&= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k S_k - a_{k-1}S_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}]
\end{aligned}$$

Or on sait que $a_n = \frac{a_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$. D'où,

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}\left[\left(\frac{a_{k-1}}{\gamma_{k-1}}S_k - a_{k-1}S_{k-1}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_k}{\gamma_{k-1}} - S_{k-1}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] \qquad \text{(Linéarité)}
\end{aligned}$$

Cependant, on connait que S_n vaut $S_{n-1} + X_n$.

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E}\left[\left(\frac{S_{k-1}}{\gamma_{k-1}} + \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} - S_{k-1}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E}\left[\left(S_{k-1}\left(\frac{1}{\gamma_{k-1}} - 1\right) + \frac{X_k}{\gamma_{k-1}}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E}\left[S_{k-1}^2\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right)^2 + 2S_{k-1}\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right)\cdot\frac{X_k}{\gamma_{k-1}} + \left(\frac{X_k}{\gamma_{k-1}}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[\mathbb{E}\left[S_{k-1}^2\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right)^2|\mathcal{F}_{k-1}\right] + \mathbb{E}\left[2S_{k-1}\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right)^2\cdot\frac{X_k}{\gamma_{k-1}}|\mathcal{F}_{k-1}\right] + \mathbb{E}\left[\frac{X_k^2}{\gamma_{k-1}^2}|\mathcal{F}_{k-1}\right]\right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[S_{k-1}^2\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right)^2 + 2S_{k-1}\left(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\right) * \frac{S_{k-1}}{k-1}\cdot(2p-1) + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}]\right]
\end{aligned}$$

Or $\mathbb{E}[X_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\alpha^2 X_{\beta_n}^2|\mathcal{F}_{k-1}]$ et on a par indépendance $\mathbb{E}[\alpha^2]\cdot\mathbb{E}[X_{\beta_n}^2|\mathcal{F}_{k-1}]$. Mais on sait que α suit une loi $R(p)$ donc $\mathbb{E}[\alpha^2] = 1$ et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{\beta_n}^2|\mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \mathbb{1}_{T=k}^2|\mathcal{F}_{k-1}\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{n} X_k^2 * \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} |X_k|^2 * \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=k}) \\
&= k * \frac{1}{k} = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 \left[S_{k-1}^2 \Big(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\Big)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{k-1} \cdot \Big(\frac{1-\gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}}\Big) \cdot (2p-1) + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\right]$$

Or $\gamma_n - 1 = \frac{n+2p-2}{n-1}$ donc :

$$\frac{1-\gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \Big(\frac{-2p-1}{n-1}\Big) \cdot \Big(\frac{n-1}{n+2p-2}\Big) = \frac{-2p-1}{n+2p-2} = \frac{(-1)(2p-1)}{n+2p-2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 \left[S_{k-1}^2 \Big(\frac{(2p-1)}{k+2p-2}\Big)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{k-1} \cdot \frac{(-1)(2p-1)}{k+2p-2} \cdot \frac{(2p-1)}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 \left[\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \Big(\frac{2p-1}{k+2p-2}\Big)^2 \cdot (k-1)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{(2p-1)^2}{k+2p-2} \cdot \frac{(k-1)}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 \left[\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (2p-1)^2 \cdot \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{2S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot \frac{(-1)(2p-1)^2}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\right]
\end{aligned}$$

Par identification : $\frac{(k-1)^2}{(k+2p-2)^2} = \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}$ et aussi $\frac{(k-1)}{k+2p-2} * \frac{1}{\gamma_{k-1}} = \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}$

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}^2 \left[-\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot \frac{(2p-1)^2}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[-\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (2p-1)^2 \cdot \frac{a_{k-1}^2}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{a_{k-1}^2}{\gamma_{k-1}^2}\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} -\Big(\frac{S_{k-1}}{k-1}\Big)^2 \cdot (2p-1)^2 \cdot a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2
\end{aligned}$$

Par changement d'indice on obtient que

$$\langle M\rangle_n = \sum_{k=1}^{n-1} -\Big(\frac{S_k}{k}\Big)^2 \cdot (2p-1)^2 \cdot a_{k+1}^2 + \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

Nous avons également trouvé une autre méthode afin de déterminer le crochet. Cette méthode a été trouvé lorsqu'on a fait la question 6.

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((a_k S_k - a_{k-1}S_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1})\end{aligned}$$

On a que $a_k = \frac{a_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \iff a_k\gamma_{k-1} = a_{k-1}$ avec $\gamma_{n-1} = \frac{n+2p-2}{n-1}$.

D'où, on a que

$$\begin{aligned}M_n - M_{n-1} &= a_n S_n - a_{n-1}S_{n-1} \\ &= a_n S_n - a_n\gamma_{n-1}S_{n-1} \\ &= a_n(S_n - \gamma_{n-1}S_{n-1})\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer le crochet

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\mathbb{E}((S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1})^2|\mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big[\mathbb{E}(S_k^2 - 2\gamma_{k-1}S_{k-1}S_k + \gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1})\Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big[\mathbb{E}(S_k^2|\mathcal{F}_{k-1}) - \gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2\Big]\end{aligned}$$

Or, nous devons déterminer $\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2|\mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n^2 + 2S_nX_{n+1} + X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) \\ &= S_n^2 + 2S_n^2\Big(\frac{2p-1}{n}\Big) + 1 \\ &= \frac{nS_n^2}{n} + 2S_n^2\Big(\frac{2p-1}{n}\Big) + 1 \\ &= S_n^2\Big(\frac{n+4p-2}{n}\Big) + 1 \\ &= S_n^2(2\gamma_n - 1) + 1\end{aligned}$$

D'où le crochet

$$\begin{aligned}
\langle M\rangle_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big[S_{k-1}^2(2\gamma_{k-1}-1)+1-S_{k-1}^2\gamma_{k-1}^2\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big[S_{k-1}^2(2\gamma_{k-1}-1-\gamma_{k-1}^2)+1\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big[-S_{k-1}^2(\gamma_{k-1}-1)^2+1\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k^2-(2p-1)^2\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2\Big(\frac{S_k}{k}\Big)^2
\end{aligned}$$

Question 5

Si la mémoire de l'éléphant est entre $0 \leq p \leq 3/4$ (cas sous critique), déduisons de la loi forte des grands nombres pour les martingales la convergence presque sûre.

Nous savons que (M_n) est une martingale de carré intégrable. On suppose une suite $(b_n) = n^{3-4p}$ strictement positive, croissante jusqu'à $+\infty$. Il existe un $l \in \mathbb{R}$ tel que la suite$\frac{\langle M\rangle_n}{b_n}$ converge vers l en probabilité par la loi forte des grands nombres. On a

$$\langle M\rangle_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2-(2p-1)^2\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2(\frac{S_k}{k})^2}{n^{3-4p}}$$

On voit que le comportement asymptotique de la martingale (M_n) est similaire à $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ presque sûrement. D'où

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\langle M\rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{n^{3-4p}}$$

Or nous savons que $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\frac{\langle M\rangle_n}{n^{3-4p}} &= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)}\Big)^2}{n^{3-4p}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n}\Gamma(2p)^2\frac{\Gamma(k)^2}{\Gamma(k+2p-1)}}{n^{3-4p}}
\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout $c > 0$, $\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)} \sim n^c$. D'où :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{< M >_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(2p)^2\sum_{k=1}^{n} k^{-(4p-2)}}{n^{3-4p}}$$

De plus, on sait que pour tout $a > 0$, $\sum_{k=1}^{n} k^2 \sim \frac{n^{a+1}}{a+1}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\langle M\rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\Gamma(2p)^2\frac{n^{3-4p}}{3-4p}}{n^{3-4p}} = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p}$$

Question 6

Si la mémoire de l'éléphant est entre $0 \leq p < 3/4$ (cas sous-critique), on sait que par la loi forte des grands nombres des martingales que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \qquad \text{presque sûrement}$$

Montrons que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, \frac{1}{3-4p})$. Pour cela, nous allons utiliser le theorème central limite des martingales qui va nous permettre de montrer la normalité asymptotique de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.
Nous savons que $M_n = a_n S_n$. De plus, nous savons que la suite (M_n) est une martingale de carré intégrable. On suppose que (b_n) qui vaut $\sum_{k=1}^{n} a_k^2$ qui est une suite de réels stictements positifs, croissante et tendant vers $+\infty$. Ainsi, on sait qu'il existe un $l \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(\frac{\langle M \rangle_n}{b_n})$ converge vers l en probabilité. Vérifions cela :

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{b_n} &= \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

car le terme $(2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ vaut 0 en $+\infty$.

De plus, nous nous devons de vérifier la condition de Lindeberg qui nous dit que pour tout $\epsilon > 0$, la suite

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}] \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$

Montrons cela, on a pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}\big] \\
&= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\big[(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} | \mathcal{F}_{k-1}}\big]
\end{aligned}$$

On a vu que $a_n = \frac{a_{n-1}}{\gamma n-1}$. Ainsi on a pour tout $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\Big[(a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}))^2 \mathbb{1}_{|a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}\Big]$$

Or on peut réecrire

$$\mathbb{1}_{|a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum a_k^2}} = \mathbb{1}_{a_k^2 (s_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})^2 \geq \epsilon^2 \sum a_k^2}$$

Et on remarque que l'on peut majorer cette condition. Pour tout $\epsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(a_k(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1}))^2\mathbb{1}_{|a_k(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1})|\geq\epsilon\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}}|\mathcal{F}_{k-1}\Big]\\
&\leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(a_k(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1}))^4\frac{1}{\epsilon^2\sum_{k=1}^n a_k^2}|\mathcal{F}_{k-1}\Big]\\
&\leq \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1}))^4|\mathcal{F}_{k-1}]
\end{aligned}$$

A partir de là, nous devons explicitement calculer notre espérance qui ressemble au crochet de (M_n). Or pour tout $\epsilon>0$,

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n \mathbb{E}\Big[(a_k(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1})^4|\mathcal{F}_{k-1}\Big] = \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\mathbb{E}\Big[(S_k-\gamma_{k-1}S_{k-1})^4|\mathcal{F}_{k-1}\Big]$$

Or nous savons que l'identité remarquable $(a-b)^4=a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4$.
Ainsi on a pour tout $\epsilon>0$:

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\mathbb{E}(S_k^4-4S_k^3\gamma_{k-1}S_{k-1}+6S_k^2\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2-4S_k\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^3+\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4|\mathcal{F}_{k-1})$$

$$\begin{aligned}
=\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[&\mathbb{E}(S_k^4|\mathcal{F}_{k-1})-4\gamma_{k-1}S_{k-1}\mathbb{E}(S_k^3|\mathcal{F}_{k-1})+6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2\mathbb{E}(S_k^2|\mathcal{F}_{k-1})-4\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^3\mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_k\\
&+\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4\Big]
\end{aligned}$$

Avant de calculer cela, nous devons déterminer $\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathcal{F}_n)$, $\mathbb{E}(S_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)$, $\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Cependant, nous avons précédemment calculer $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ et $\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)$.

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\gamma_nS_n \text{ avec } \gamma_n=\frac{n+2p-1}{n}$$
$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)=S_n^2(2\gamma_n-1)+1$$

Déterminons $\mathbb{E}(S_{n+1}^3|\mathcal{F}_{n+1})$. On a $S_{n+1}=S_n+X_{n+1}$. On a grâce à la propriété des identités remarquables où à l'aide du triangle de Pascal que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)&=\mathbb{E}((S_n+X_{n+1})^3|\mathcal{F}_n)\\
&=\mathbb{E}(S_n^3+3S_n^2X_{n+1}+3S_nX_{n+1}^2+X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)\\
&=S_n^3+3S_n^2\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)+3S_n\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)+\mathbb{E}(X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

Or on sait que $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=\mathbb{E}(X_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)=\frac{2p-1}{n}S_n$ et $\mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)=1$. D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^3|\mathcal{F}_n)&=S_n^3+3S_n^3\Big(\frac{2p-1}{n}\Big)+3S_n+\Big(\frac{2p-1}{n}\Big)S_n\\
&=S_n^3\Big(\frac{n+6p-3}{n}\Big)+S_n\Big(\frac{3n+2p-1}{n}\Big)\\
&=S_n^3(\gamma_n-2)+S_n(\gamma_n+2)
\end{aligned}$$

Appliquons le même principe pour déterminer $\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathcal{F}_n)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}(S_n^4 + 4S_n^3X_{n+1} + 6S_n^2X_{n+1}^2 + 4S_nX_{n+1}^3 + X_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) \\ &= S_n^4 + 4S_n^3\Big(\frac{2p-1}{n}\Big) + 6S_n^2 + 4S_n^2\Big(\frac{2p-1}{n}\Big) + 1 \\ &= S_n^4\Big(\frac{n+8p-4}{n}\Big) + S_n^2\Big(\frac{6n+8p-4}{n}\Big) + 1 \\ &= S_n^4(4\gamma_n - 3) + S_n^2(4\gamma_n + 2) + 1\end{aligned}$$

Revenons à présent à notre calcul de la condition de Lindeberg. Pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[\mathbb{E}(S_k^4|\mathcal{F}_{k-1}) - 4\gamma_{k-1}S_{k-1}\mathbb{E}(S_k^3|\mathcal{F}_{k-1}) + 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2\mathbb{E}(S_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1})$$
$$-4\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^3\mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \gamma_{k-1}^4\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4\Big]$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[4\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 3S_{k-1}^4 + 4\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 2S_{k-1}^2 + 1 - 12\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 + 8\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 4\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2$$
$$-8\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 + 12\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^4 - 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^4 - 3\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4\Big]$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 + 12\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 3S_{k-1}^4 - 4\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 2S_{k-1}^2 - 18\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^4 + 2\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2$$
$$+12\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^4 - 3\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4\Big]$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 + S_{k-1}^4(12\gamma_{k-1} - 3 - 18\gamma_{k-1}^2 + 12\gamma_{k-1}^3 - 3\gamma_{k-1}^4) + S_{k-1}^2(-4\gamma_{k-1} + 2 + 2\gamma_{k-1}^2)\Big]$$
$$= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 + 3S_{k-1}^4(4\gamma_{k-1} - 1 - 6\gamma_{k-1}^2 + 4\gamma_{k-1}^3 - \gamma_{k-1}^4) + 2S_{k-1}^2(-2\gamma_{k-1} + 1 + \gamma_{k-1}^2)\Big]$$

On identifie les identités remarquables suivantes : $(\gamma_{k-1} - 1)^2$ et $(\gamma_{k-1})^4$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 + 3^4(-(\gamma_{k-1} - 1)^4) + 2S_{k-1}^2(\gamma_{k-1} - 1)^2\Big] \\ &= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 - 3S_{k-1}^4(\gamma_{k-1} - 1)^4 + 2S_{k-1}^2(\gamma_{k-1} - 1)^2\Big]\end{aligned}$$

Or $\gamma_{n-1} = \frac{n+2p-2}{n-1} - \frac{n-1}{n-1} = \frac{2p-1}{n-1}$. Ainsi pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2}\sum_{k=1}^n a_k^4\Big[1 - 3S_{k-1}^4\Big(\frac{2p-1}{k-1}\Big)^4 + 2S_{k-1}^2\Big(\frac{2p-1}{k-1}\Big)^2\Big]$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \Big[1 - 3(2p-1)^4 \Big(\frac{S_{k-1}}{k-1}\Big)^4 + 2(2p-1)^2 \Big(\frac{S_{k-1}}{k-1}\Big)^2\Big]$$

On peut encore une fois majorer ceci par :

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \Big[1-3(2p-1)^4 \Big(\frac{S_{k-1}}{k-1}\Big)^4 + 2(2p-1)^2 \Big(\frac{S_{k-1}}{k-1}\Big)^2\Big] \leq \frac{1}{\epsilon^2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n a_k^4$$

Ici, nous pouvons utiliser le lemme de Kronecker, car ici nous avons (b_n) une suite croissante de réels positifs qui tend vers $+\infty$. Donc, d'après le lemme de Kronecker on a :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 = 0$$

Par conséquent, on a que pour tout $\epsilon > 0$:

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 = 0$$

Donc la condition de Lindeberg est verifée. Comme les deux conditions sont vérifiées, on a alors au sens de convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Cependant, nous cherchons la normalité asymptotique de S_n. Or :

$$M_n = a_n S_n$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{M_n}{a_n\sqrt{n}}$$

Or

$$a_n\sqrt{n} = \sqrt{(3-4p)\sum_{k=1}^n a_k^2}$$

Ainsi,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{M_n}{a_n\sqrt{n}} \to \mathcal{N}(0,1)$$
$$\iff \frac{M_n}{\sqrt{(3-4p)\sum a_k^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$
$$\iff \frac{M_n}{\sqrt{\sum a_k^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3-4p})$$

Par conséquent, on a

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3-4p})$$

Question 8 et 9

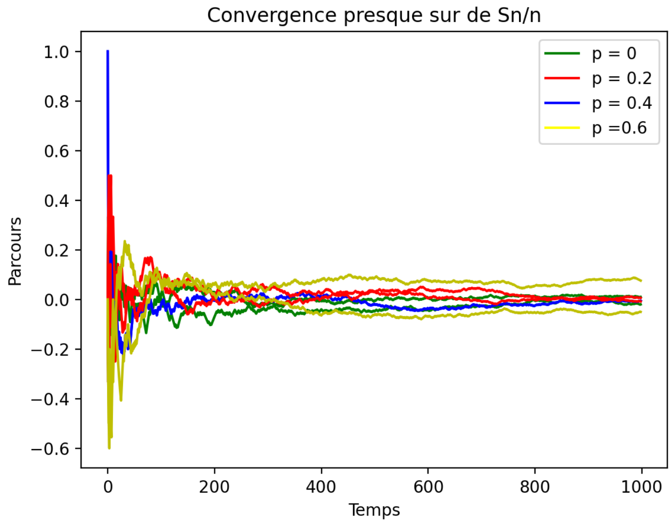

FIGURE 1 – La convergence presque sur (cas diffusive)

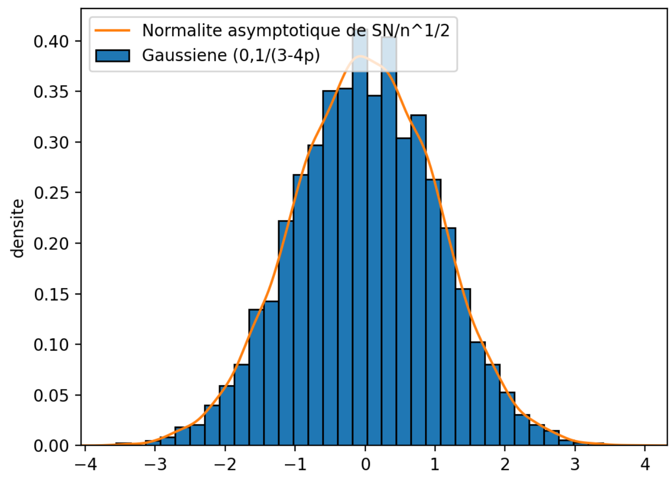

FIGURE 2 – La Normalite asymptotique (p = 1/2)

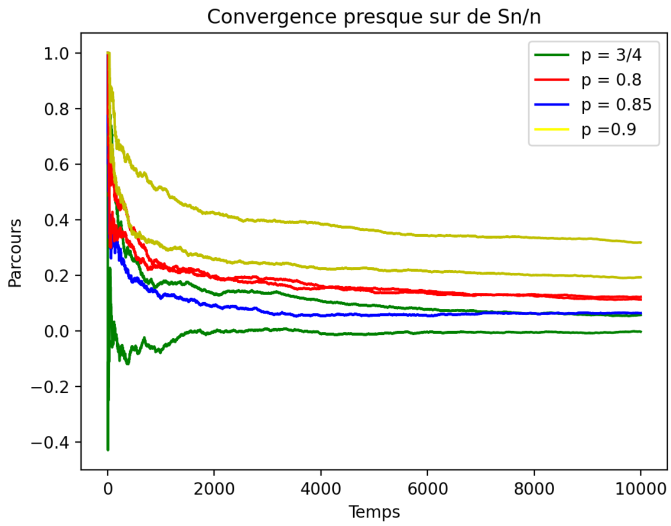

FIGURE 3 – La convergence presque sur : (p > 3/4)

Question 10 Cherchons un estimateur $\widehat{p}_n$ de la mémore de l'éléphant dans le cas sous-critique $0 \leq p \leq 3/4$.

Trouvons la loi de X_{n+1}

$$X_{n+1}(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ Soit } B_k \sim \mathcal{U}(\{1, ..., k\})$$

Soit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}$$

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|\mathcal{F}_n) = \frac{p\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}}{n} + \frac{n - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}}{n} \cdot (1-p)$$

$$= \frac{a_n}{n} \cdot p + \frac{n - a_n}{n} \cdot (1-p)$$

$$= \frac{a_n}{n} \cdot (2p-1) + 1 - p$$

$$= \frac{a_n}{n} \cdot (1-2p) + p$$

Pour $x_{n+1} \in \{-1, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \left(\frac{a_n}{n} \cdot (2p-1) + 1 - p\right)^{\frac{1+x_{n+1}}{2}} \left(\frac{a_n}{n} \cdot (1-2p) + p\right)^{\frac{1-x_{n+1}}{2}}$$

En maximisant ceci, on trouve l'estimateur $\widehat{p}$

$$\widehat{p}_{MV} = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_{n+1}}{2}\left(\frac{2a_k}{k} - 1\right) - \frac{n}{2}}{4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right) - 4\left(\frac{a_k}{k}\right)^2 - n}$$

Quelques Sorties python illustrant l'estimation (il faut preciser que ces images ne sont pas forcement représentative car la qualité de l'estimateur dépend de $\frac{a_n}{n}$,en effet, la fonction a maximiser n'est pas dérivable en ce point.

Dans le cas diffusif :

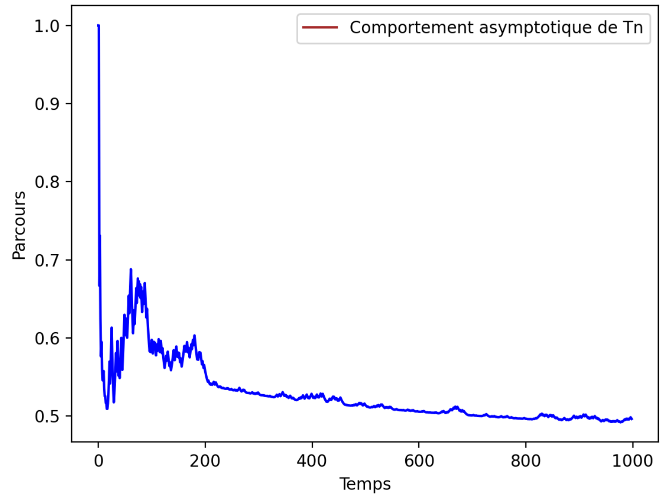

FIGURE 4 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (cas diffusive, p = 0.5)

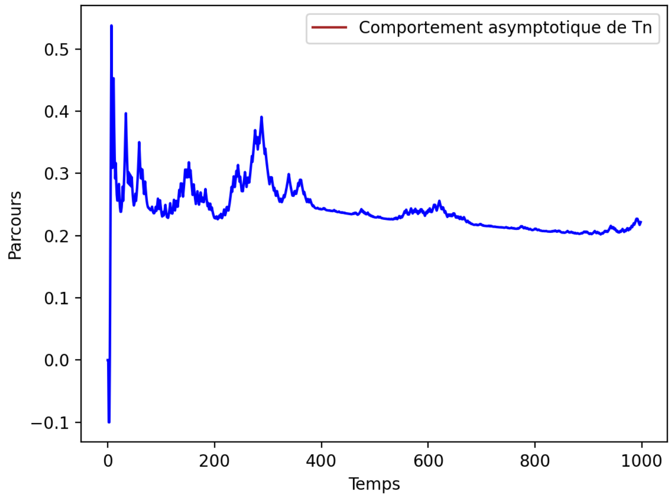

FIGURE 5 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (cas diffusif, p = 0.2)

Dans le cas ou $p > 3/4$, nous remarquons qu'il y a moins de soucis car $\frac{a_n}{n}$ est plus souvent différent de $\frac{1}{2}$ que dans le cas diffusif

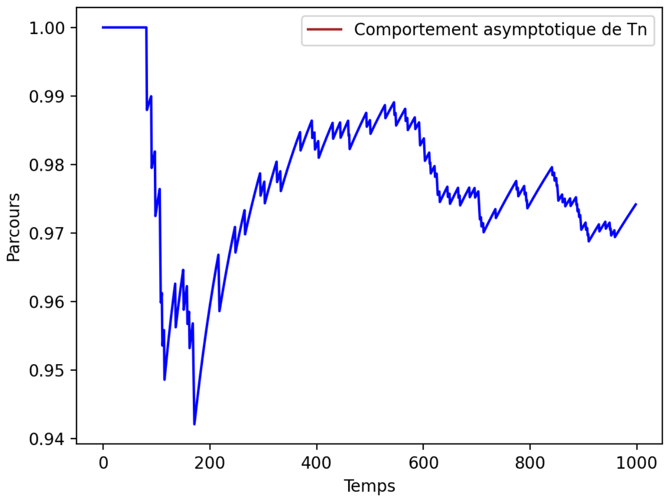

FIGURE 6 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (p = 0.98)

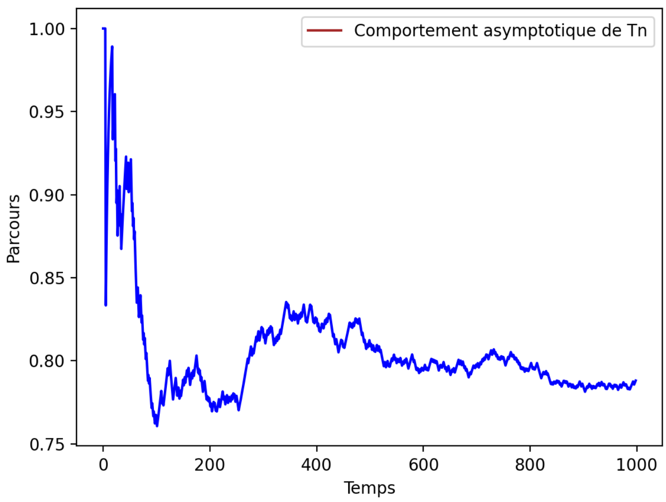

FIGURE 7 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (p = 0.8)