La Marche de l'Éléphant

Elankumaran Vishwa
Mirdita Fabian
Proctor Jordan

Introduction

- Introduit au début des années 2000 par les physiciens Schütz et Trimper
- Une marche aléatoire qui se souvient de tout son passé
- Son analyse repose sur l’étude des Martingales

Comportement

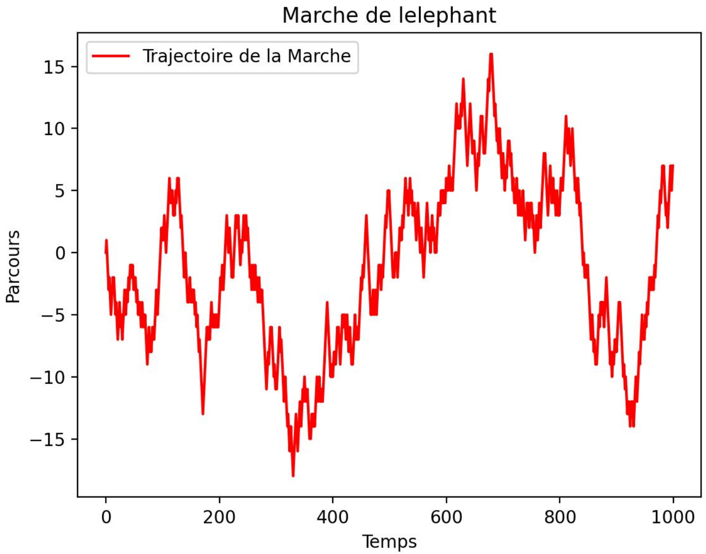
$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité} \quad p, \\ -X_k & \text{avec probabilité} \quad 1-p, \end{cases}$$

$$X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}$$

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

Cas Sous-Critique

Trajectoire de l'Éléphant



Pour p = 0.25

Comportement asymptotique de S_n

Martingale

$M_n = a_n S_n$ avec $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\,\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$$

Filtration

$$\mathscr{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$$

$$\mathscr{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$$

Intégrabilité

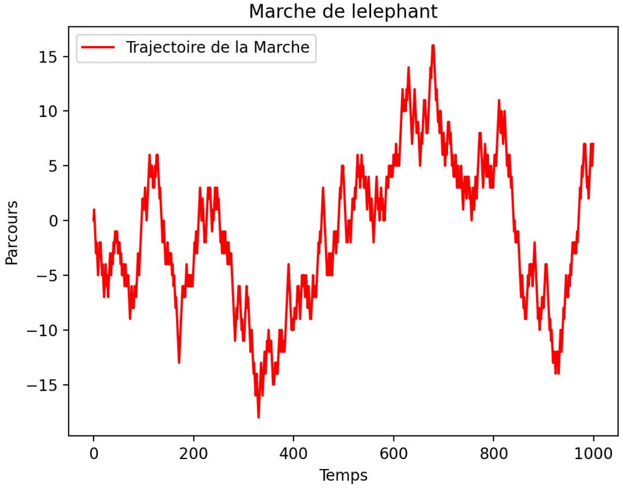
$$|M_n| \leq \frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$$

Propriété de la martingale

$$\mathbb{E}(M_{n+1} \mid \mathscr{F}_n) = M_n$$

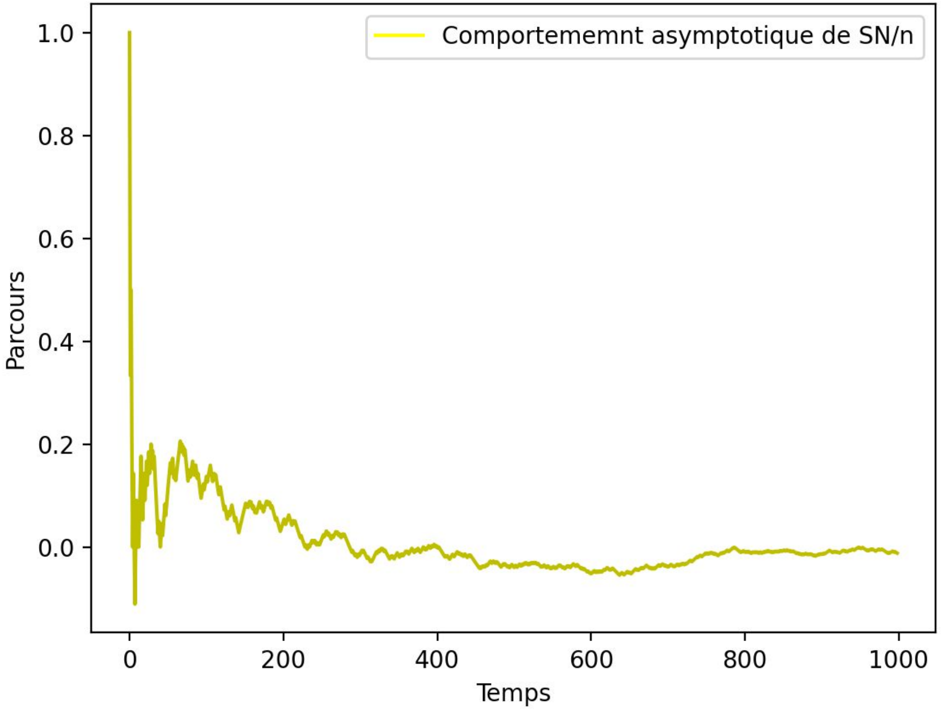
Loi Forte des Grands Nombres

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$



Marche de lelephant
Trajectoire de la Marche
Parcours
Temps

Pour p = 0.25



Comportememnt asymptotique de SN/n
Parcours
Temps

Normalité Asymptotique

$$(b_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$$

→ Positive

→ Croissante

→ Tend vers ∞

$$\exists\, l \in \mathbb{R},\ \left(\frac{\langle M\rangle_n}{b_n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} l$$

Crochet de $\langle M \rangle_n$

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathscr{F}_{k-1})$$

Or $a_k = \dfrac{a_{k-1}}{\gamma_{k-1}}$

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \mathbb{E}((S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \left[\mathbb{E}(S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) - \gamma_{k-1}^2 S_{k-1}^2 \right] \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left(\frac{S_k}{k} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = S_n^2 (2\gamma_n - 1) + 1$$

Calcul du l

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\langle M\rangle_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n} a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$$

$$= 1$$

Condition de Lindeberg

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 1_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} | \mathbb{F}_{k-1}] \longrightarrow 0$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})^2 1_{|(a_k S_k - a_{k-1} S_{k_1})| \geq \epsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} | \mathbb{F} k-1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[(a_k(S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}))^2 1_{|a_k(S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} | \mathbb{F}_{k-1}\right]$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k(S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}))^4 | \mathbb{F}_{k-1}]$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) = \gamma_n S_n$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n) = S_n^2(2\gamma_n - 1) + 1$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^3|\mathbb{F}_n) = S_n^3(\gamma_n - 2) + S_n(\gamma_n + 2)$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathbb{F}_n) = S_n^4(4\gamma_n - 3) + S_n^2(4\gamma_n + 2) + 1$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathbb{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^3|\mathbb{F}_n) = \tfrac{2p-1}{n} S_n$$

$$\mathbb{E}(X_{n+1}^4|\mathbb{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^2|\mathbb{F}_n) = 1$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[1 - 3(2p-1)^4 \left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^4 + 2(2p-1)^2 \left(\frac{S_{k-1}}{k-1}\right)^2\right]$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n a_k^4$$

Lemme de Kronecker

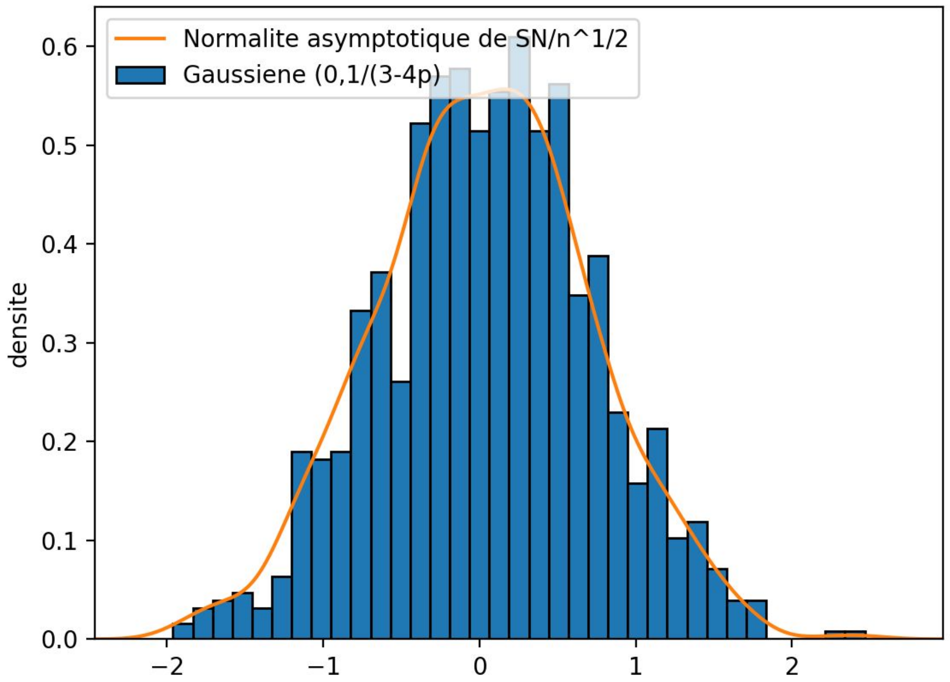
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2} \sum_{k=1}^{n} a_k^4 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \frac{1}{\epsilon^2\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^2} \sum_{k=1}^{n} a_k^4 = 0$$

Convergence en Loi

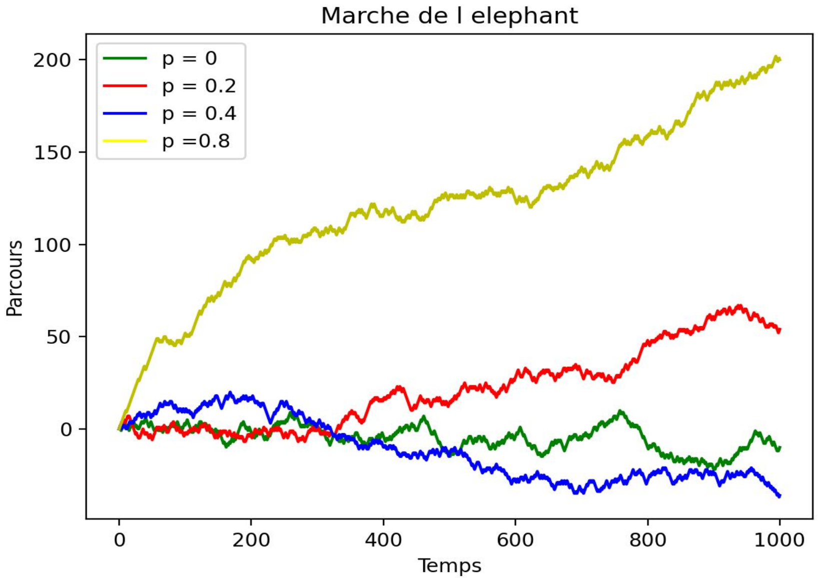
$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}} M_n \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$$\iff \quad \frac{S_n}{\sqrt{n}} \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{3-4p}\right)$$

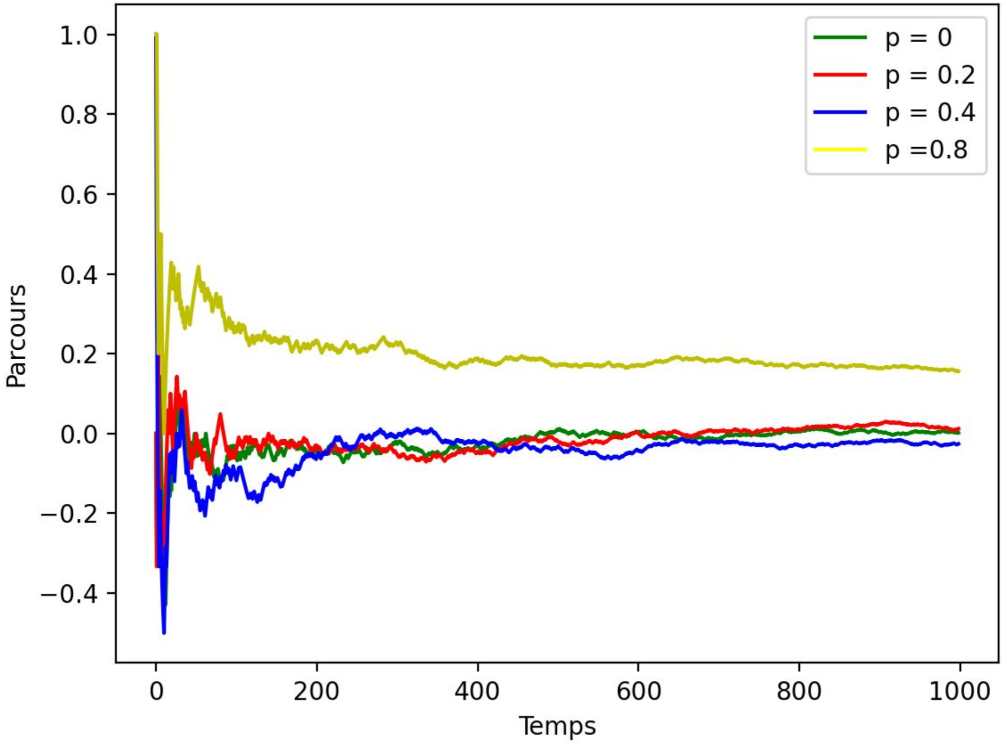

Normalite asymptotique de SN/n^1/2
Gaussiene (0,1/(3-4p)
densite
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
−2
−1
0
1
2

Pour p = 0.25

Comment Estimer p ?



$$\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n} = 0$$



Un Premier Estimateur :

- Prend en argument des éléments successives du passé de l'éléphant
- n’estime pas p mais la proportion de 1 versus -1 dans le mémoire

$$\mathbb{P}(X_n = x_n) = (1-p)^{\frac{1+x_n}{2}}(p)^{\frac{1-x_n}{2}}$$

En maximisant ceci, on trouve l’estimateur $\widehat{p}$

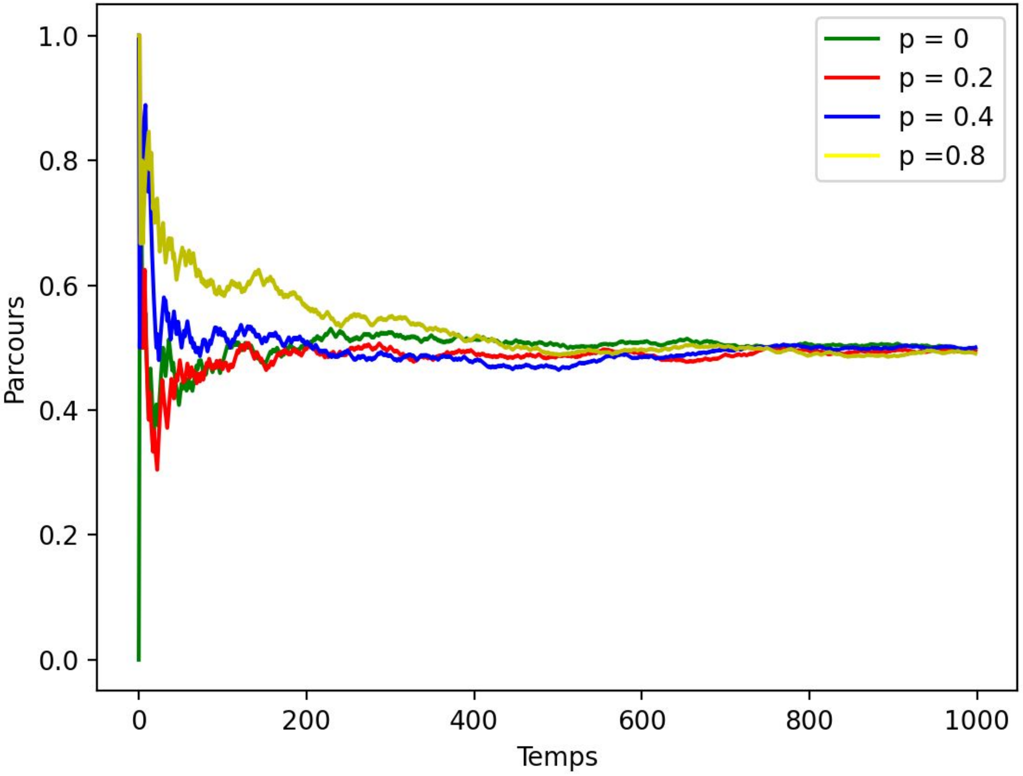
$$\lim_{n\to+\infty}[\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k] = 0$$

$$\widehat{p}_{MV} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)$$

1er Estimateur :

- Convergence vers 0 si p<3/4

$$\widehat{p}_{MV} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k)$$



Un deuxième Estimateur :

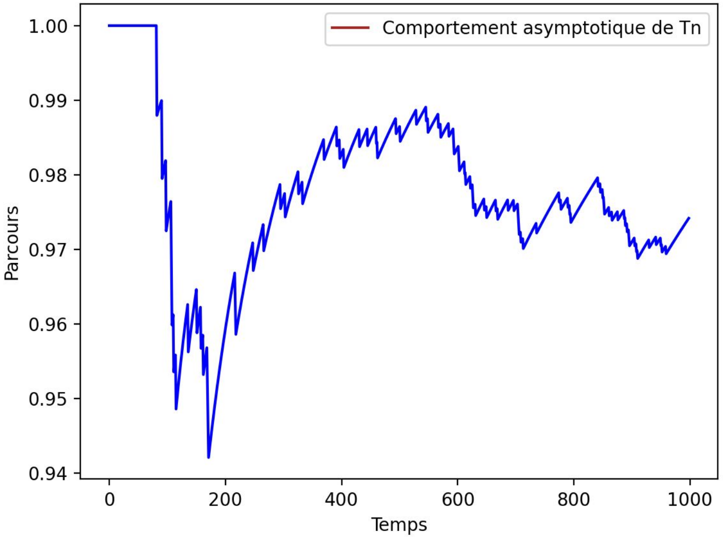
- prend en compte la proportion de 1’s versus -1’s dans le passé de l'éléphant
- Indépendance Conditionnelle nouse permet d’obtenir un Estimateur de Maximum de Vraisemblance

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \left(\frac{a_n}{n} \cdot (2p-1) + 1 - p\right)^{\frac{1+x_{n+1}}{2}} \left(\frac{a_n}{n} \cdot (1-2p) + p\right)^{\frac{1-x_{n+1}}{2}}$$

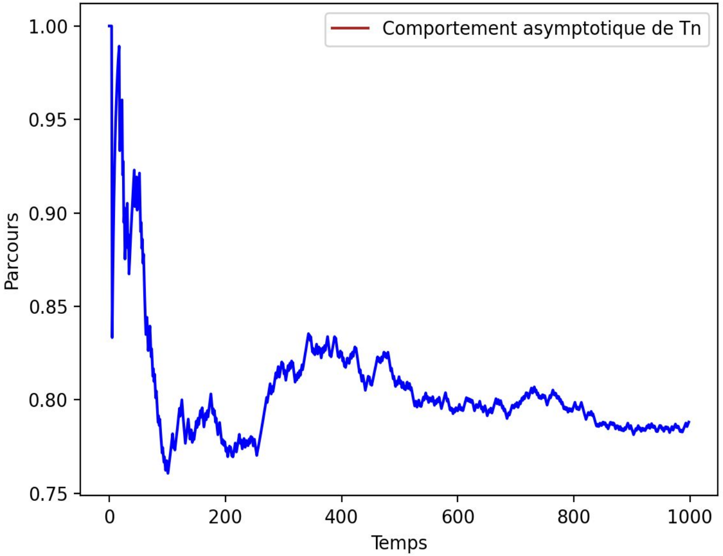
En maximisant ceci, on trouve l’estimateur $\widehat{p}$

$$\widehat{p}_{MV} = \frac{2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right) - 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n}\frac{x_{n+1}}{2}\left(\frac{2a_k}{k} - 1\right) - \frac{n}{2}}{4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{k}\right) - 4\left(\frac{a_k}{k}\right)^2 - n}$$

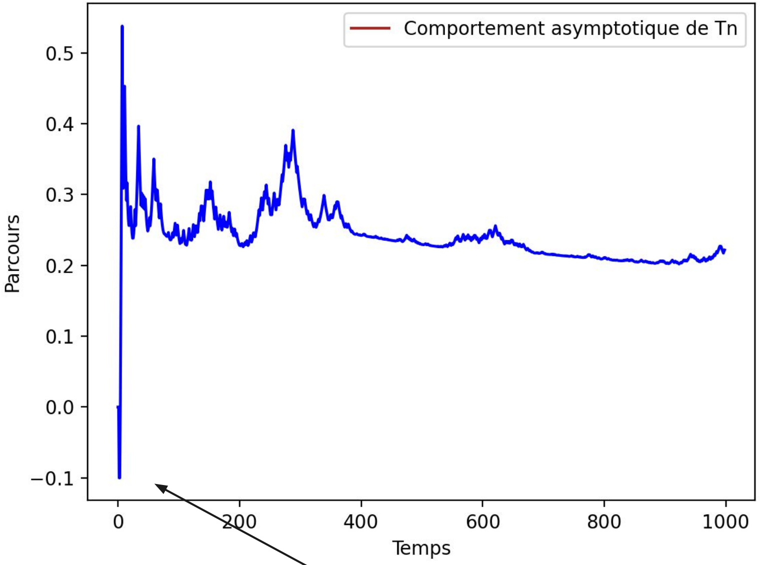
Cas critique : p = 0.98



Cas critique : p = 0.8

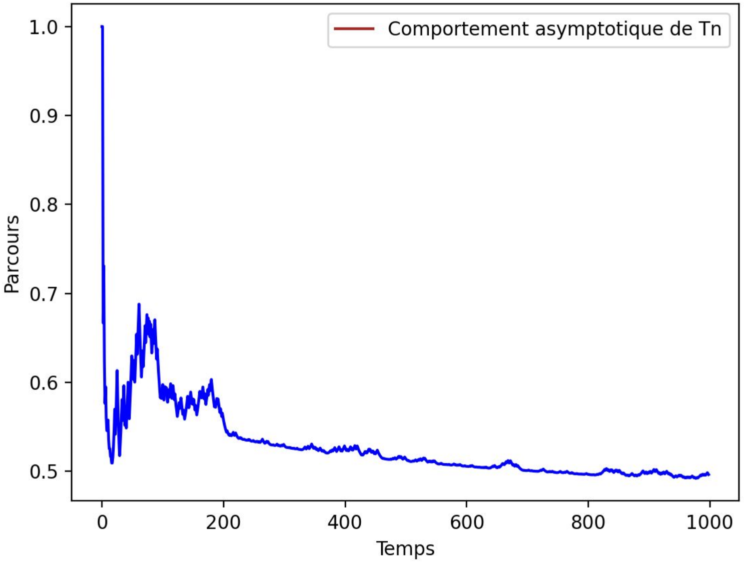


Cas sous critique p = 0.2



Valeur négative

Cas sous critique p = 0.5



Conclusion

.. et Questions