

Marche de l'éléphant  
MSS

Vishwa ELANKUMARAN  
Fabian MIRDITA  
Jordan PROCTOR

15 mars 2021

Enseignant : Bernard BERCU

## Introduction

La marche de l'éléphant est un processus aléatoire à temps discret fascinant introduit au début des années 2000 par les physiciens Schütz et Trimper. Elle est définie de la manière suivante : A l'instant 0, l'éléphant est situé à l'origine,  $S_0 = 0$ . A l'instant 1, il va vers la droite au point 1 avec probabilité  $q$  ou vers la gauche au point -1 avec probabilité  $1 - q$ , avec  $0 < q < 1$ . Ensuite, à l'instant  $n$ , l'éléphant choisit uniformément au hasard un instant  $k$  entre 1 et  $n$  puis

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité } p, \\ -X_k & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases}$$

où le paramètre  $p \in [0, 1]$  est la mémoire de la marche de l'éléphant. La position de la chaîne de l'éléphant est alors donnée par

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

A chaque instant  $n \geq 1$ , on a  $X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}$  où  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont deux variables aléatoires indépendantes avec  $\alpha_n$  de loi de Rademacher  $\mathcal{R}(p)$  et  $\beta_n$  de loi uniforme discrète  $\mathcal{U}([1, n])$ .

**Question 1 :** Cherchons l'espérance de  $X_{n+1}$  sachant la filtration  $\mathcal{F}_n$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\alpha_n X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Définition)} \\ &= \mathbb{E}(\alpha_n|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\ &= \mathbb{E}(\alpha_n)\mathbb{E}(X_{\beta_n}|\mathcal{F}_n) && \text{(Indépendance)} \\ &= (2p - 1)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k \mathbb{1}_{\beta_n=k}|\mathcal{F}_n\right) \\ &= (2p - 1)\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^n X_k|\mathcal{F}_n\right)\mathbb{P}(\beta_n = k) \\ &= (2p - 1)\sum_{k=1}^n X_k * \frac{1}{n} && \text{(Mesurable)} \\ &= (2p - 1)\sum_{k=1}^n X_k * \frac{1}{n} && \text{car } S_n = \sum_{k=1}^n X_k \\ &= \frac{2p - 1}{n} S_n \end{aligned}$$

**Question 2 :** Déterminons  $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(S_n + X_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Définition)} \\
&= \mathbb{E}(S_n|\mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\
&= S_n + \frac{2p-1}{n}S_n && \text{(Question 1)} \\
&= S_n(1 + \frac{2p-1}{n}) \\
&= S_n + \left(\frac{n+2p-1}{n}\right) \\
&= S_n\gamma_n \quad \text{avec } \gamma_n = \left(\frac{n+2p-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

### Question 3

Soit  $(M_n)$  la suite définie par  $(M_n) = a_n S_n$  avec  $a_1 = 1$  et pour  $n \geq 2$ ,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$$

Montrons que  $(M_n)$  est une martingale de carré intégrable. Quelques conditions sont à vérifier.

1.  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  qui est la tribu triviale et  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$  qui est elle la tribu naturelle engendrée par les  $X_i$ . Donc  $(M_n)$  est  $\mathcal{F}_n$ -adaptée.
2. Montrons que  $(M_n)$  est intégrable.

$$\begin{aligned}
|M_n| &= |a_n S_n| = \left| \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \sum_{k=1}^n X_k \right| \\
&\leq \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \sum_{k=1}^n |X_k| && \text{Inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{n\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} && \text{car au mieux } X_k = 1 \\
&\leq \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} && \text{Propriété de la fonction Gamma}
\end{aligned}$$

Donc  $(M_n)$  est intégrable.

3. Montrons la propriété de la martingale.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(M_{n+1}|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(a_{n+1}S_{n+1}|\mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(a_{n+1}|\mathcal{F}_n)\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n) && \text{(Linéarité de l'espérance)} \\
&= \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p)}\gamma_n S_n && \text{(Question 2)} \\
&= \frac{n\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)(n+2p-1)} \cdot \frac{(n+2p-1)}{n} \cdot S_n && \text{(Propriété fonction Gamma)} \\
&= \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \cdot S_n \\
&= a_n S_n \\
&= M_n
\end{aligned}$$

Par conséquent,  $(M_n)$  est une martingale.

4. Montrons cette fois-ci que  $(M_n)$  est de carré intégrable.  $(M_n)^2$  est une martingale de carré intégrable car  $|M_n|^2 \leq \left( \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)} \right)^2$

**Question 4 :** Calculons le processus croissant de  $\langle M \rangle_n$ .

1.  $(M_n)^2$  est une martingale de carré intégrable (vu précédemment).
2.  $(M_n^2)$  est une sous martingale.
3. Le crochet associé est  $\begin{cases} \langle M \rangle_0 = 0 \\ \langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \end{cases}$

Calculons le crochet  $\langle M \rangle_n$ . On a  $M_n = a_n S_n$ .

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] && \text{(Définition)} \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \end{aligned}$$

Or on sait que  $a_n = \frac{a_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$ . D'où,

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ \left( \frac{a_{k-1}}{\gamma_{k-1}} S_k - a_{k-1} S_{k-1} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E} \left[ \left( \frac{S_k}{\gamma_{k-1}} - S_{k-1} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] && \text{(Linéarité)} \end{aligned}$$

Cependant, on connaît que  $S_n$  vaut  $S_{n-1} + X_n$ .

$$\begin{aligned} \langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E} \left[ \left( \frac{S_{k-1}}{\gamma_{k-1}} + \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} - S_{k-1} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E} \left[ \left( S_{k-1} \left( \frac{1}{\gamma_{k-1}} - 1 \right) + \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \mathbb{E} \left[ S_{k-1}^2 \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right)^2 + 2S_{k-1} \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right) \cdot \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} + \left( \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ \mathbb{E} \left[ S_{k-1}^2 \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right)^2 | \mathcal{F}_{k-1} \right] + \mathbb{E} \left[ 2S_{k-1} \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right) \cdot \frac{X_k}{\gamma_{k-1}} | \mathcal{F}_{k-1} \right] + \mathbb{E} \left[ \frac{X_k^2}{\gamma_{k-1}^2} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ S_{k-1}^2 \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right)^2 + 2S_{k-1} \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right) * \frac{S_{k-1}}{k-1} \cdot (2p-1) + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] \right] \end{aligned}$$

Or  $\mathbb{E}[X_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\alpha^2 X_{\beta_n}^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$  et on a par indépendance  $\mathbb{E}[\alpha^2] \cdot \mathbb{E}[X_{\beta_n}^2 | \mathcal{F}_{k-1}]$ . Mais on sait que  $\alpha$  suit une loi  $R(p)$  donc  $\mathbb{E}[\alpha^2] = 1$  et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{\beta_n}^2 | \mathcal{F}_{k-1}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^n X_k^2 \mathbb{1}_{T=k}^2 | \mathcal{F}_{k-1}\right] \\
&= \sum_{k=1}^n X_k^2 * \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=k}) \\
&= \sum_{k=1}^n |X_k|^2 * \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T=k}) \\
&= k * \frac{1}{k} = 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ S_{k-1}^2 \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{k-1} \cdot \left( \frac{1 - \gamma_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \right) \cdot (2p-1) + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \right]$$

Or  $\gamma_n - 1 = \frac{n+2p-2}{n-1}$  donc :

$$\frac{1 - \gamma_{n-1}}{\gamma_{n-1}} = \left( \frac{-2p-1}{n-1} \right) \cdot \left( \frac{n-1}{n+2p-2} \right) = \frac{-2p-1}{n+2p-2} = \frac{(-1)(2p-1)}{n+2p-2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ S_{k-1}^2 \left( \frac{(2p-1)}{k+2p-2} \right)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{k-1} \cdot \frac{(-1)(2p-1)}{k+2p-2} \cdot \frac{(2p-1)}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ \frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \left( \frac{2p-1}{k+2p-2} \right)^2 \cdot (k-1)^2 + \frac{2S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (-1) \cdot \frac{(2p-1)^2}{k+2p-2} \cdot \frac{(k-1)}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ \frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (2p-1)^2 \cdot \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{2S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot \frac{(-1)(2p-1)^2}{\gamma_{k-1}} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \right]
\end{aligned}$$

Par identification :  $\frac{(k-1)^2}{(k+2p-2)^2} = \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}$  et aussi  $\frac{(k-1)}{k+2p-2} * \frac{1}{\gamma_{k-1}} = \frac{1}{\gamma_{k-1}^2}$

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_{k-1}^2 \left[ -\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot \frac{(2p-1)^2}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{1}{\gamma_{k-1}^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^n \left[ -\frac{S_{k-1}^2}{(k-1)^2} \cdot (2p-1)^2 \cdot \frac{a_{k-1}^2}{\gamma_{k-1}^2} + \frac{a_{k-1}^2}{\gamma_{k-1}^2} \right] \\
&= \sum_{k=1}^n -\left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 \cdot (2p-1)^2 \cdot a_k^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2
\end{aligned}$$

Par changement d'indice on obtient que

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n-1} -\left( \frac{S_k}{k} \right)^2 \cdot (2p-1)^2 \cdot a_{k+1}^2 + \sum_{k=1}^n a_k^2$$

Nous avons également trouvé une autre méthode afin de déterminer le crochet. Cette méthode a été trouvée lorsqu'on a fait la question 6.

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((M_k - M_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1})\end{aligned}$$

On a que  $a_k = \frac{a_{k-1}}{\gamma_{k-1}} \iff a_k \gamma_{k-1} = a_{k-1}$  avec  $\gamma_{n-1} = \frac{n+2p-2}{n-1}$ .

D'où, on a que

$$\begin{aligned}M_n - M_{n-1} &= a_n S_n - a_{n-1} S_{n-1} \\ &= a_n S_n - a_n \gamma_{n-1} S_{n-1} \\ &= a_n (S_n - \gamma_{n-1} S_{n-1})\end{aligned}$$

Ainsi, on peut calculer le crochet

$$\begin{aligned}\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{E}((a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}))^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \mathbb{E}((S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \left[ \mathbb{E}(S_k^2 - 2\gamma_{k-1} S_{k-1} S_k + \gamma_{k-1}^2 S_{k-1}^2 | \mathcal{F}_{k-1}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \left[ \mathbb{E}(S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) - \gamma_{k-1}^2 S_{k-1}^2 \right]\end{aligned}$$

Or, nous devons déterminer  $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n) \\ &= \mathbb{E}(S_n^2 + 2S_n X_{n+1} + X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) \\ &= S_n^2 + 2S_n \left( \frac{2p-1}{n} \right) + 1 \\ &= \frac{nS_n^2}{n} + 2S_n \left( \frac{2p-1}{n} \right) + 1 \\ &= S_n^2 \left( \frac{n+4p-2}{n} \right) + 1 \\ &= S_n^2 (2\gamma_n - 1) + 1\end{aligned}$$

D'où le crochet

$$\begin{aligned}
\langle M \rangle_n &= \sum_{k=1}^n a_k^2 \left[ S_{k-1}^2 (2\gamma_{k-1} - 1) + 1 - S_{k-1}^2 \gamma_{k-1}^2 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 \left[ S_{k-1}^2 (2\gamma_{k-1} - 1 - \gamma_{k-1}^2) + 1 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 \left[ -S_{k-1}^2 (\gamma_{k-1} - 1)^2 + 1 \right] \\
&= \sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left( \frac{S_k}{k} \right)^2
\end{aligned}$$

### Question 5

Si la mémoire de l'éléphant est entre  $0 \leq p \leq 3/4$  (cas sous critique), déduisons de la loi forte des grands nombres pour les martingales la convergence presque sûre.

Nous savons que  $(M_n)$  est une martingale de carré intégrable. On suppose une suite  $(b_n) = n^{3-4p}$  strictement positive, croissante jusqu'à  $+\infty$ . Il existe un  $l \in \mathbb{R}$  tel que la suite  $\frac{\langle M \rangle_n}{b_n}$  converge vers  $l$  en probabilité par la loi forte des grands nombres. On a

$$\langle M \rangle_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \left( \frac{S_k}{k} \right)^2}{n^{3-4p}}$$

On voit que le comportement asymptotique de la martingale  $(M_n)$  est similaire à  $\sum_{k=1}^n a_k^2$  presque sûrement. D'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{n^{3-4p}}$$

Or nous savons que  $a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left( \frac{\Gamma(k)\Gamma(2p)}{\Gamma(k+2p-1)} \right)^2}{n^{3-4p}} \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sum_{k=1}^n \Gamma(2p)^2 \frac{\Gamma(k)^2}{\Gamma(k+2p-1)}}{n^{3-4p}}
\end{aligned}$$

Or on sait que pour tout  $c > 0$ ,  $\frac{\Gamma(n+c)}{\Gamma(n)} \sim n^c$ . D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2p)^2 \sum_{k=1}^n k^{-(4p-2)}}{n^{3-4p}}$$

De plus, on sait que pour tout  $a > 0$ ,  $\sum_{k=1}^n k^2 \sim \frac{n^{a+1}}{a+1}$ . Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(2p)^2 \frac{n^{3-4p}}{3-4p}}{n^{3-4p}} = \frac{\Gamma(2p)^2}{3-4p}$$

### Question 6

Si la mémoire de l'éléphant est entre  $0 \leq p < 3/4$  (cas sous-critique), on sait que par la loi forte des grands nombres des martingales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = 0 \quad \text{presque sûrement}$$

Montrons que  $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{L} N(0, \frac{1}{3-4p})$ . Pour cela, nous allons utiliser le theoreme central limite des martingales qui va nous permettre de montrer la normalité asymptotique de  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ .

Nous savons que  $M_n = a_n S_n$ . De plus, nous savons que la suite  $(M_n)$  est une martingale de carré intégrable. On suppose que  $(b_n)$  qui vaut  $\sum_{k=1}^n a_k^2$  qui est une suite de réels stictements positifs, croissante et tendant vers  $+\infty$ . Ainsi, on sait qu'il existe un  $l \in \mathbb{R}$  tel que la suite  $(\frac{\langle M \rangle_n}{b_n})$  converge vers  $l$  en probabilité. Vérifions cela :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{b_n} &= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2 - (2p-1)^2 \sum_{k=1}^n a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^n a_k^2}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

car le terme  $(2p-1)^2 \sum_{k=1}^n a_{k+1}^2 (\frac{S_k}{k})^2 \sum_{k=1}^n a_k^2$  vaut 0 en  $+\infty$ .

De plus, nous nous devons de vérifier la condition de Lindeberg qui nous dit que pour tout  $\epsilon > 0$ , la suite

$$\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}] \longrightarrow 0 \quad \text{en probabilité}$$

Montrons cela, on a pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(M_k - M_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|M_k - M_{k-1}| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}] \\ &= \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})^2 \mathbb{1}_{|(a_k S_k - a_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}] \end{aligned}$$

On a vu que  $a_n = \frac{a_{n-1}}{\gamma_{n-1}}$ . Ainsi on a pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[(a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1}))^2 \mathbb{1}_{|a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1}]$$

Or on peut réécrire

$$\mathbb{1}_{|a_k (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} = \mathbb{1}_{a_k^2 (S_k - \gamma_{k-1} S_{k-1})^2 \geq \epsilon^2 \sum_{k=1}^n a_k^2}$$

Et on remarque que l'on peut majorer cette condition. Pour tout  $\epsilon > 0$  :



$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ (a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}))^2 \mathbb{1}_{|a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1})| \geq \epsilon \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& \leq \frac{1}{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} \left[ (a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}))^4 \frac{1}{\epsilon^2 \sum_{k=1}^n a_k^2} | \mathcal{F}_{k-1} \right] \\
& \leq \frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}))^4 | \mathcal{F}_{k-1}]
\end{aligned}$$

A partir de là, nous devons explicitement calculer notre espérance qui ressemble au crochet de  $(M_n)$ . Or pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{E} [(a_k(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1}))^4 | \mathcal{F}_{k-1}] = \frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \mathbb{E} [(S_k - \gamma_{k-1}S_{k-1})^4 | \mathcal{F}_{k-1}]$$

Or nous savons que l'identité remarquable  $(a - b)^4 = a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$ . Ainsi on a pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \mathbb{E} (S_k^4 - 4S_k^3 \gamma_{k-1} S_{k-1} + 6S_k^2 \gamma_{k-1}^2 S_{k-1}^2 - 4S_k \gamma_{k-1}^3 S_{k-1}^3 + \gamma_{k-1}^4 S_{k-1}^4 | \mathcal{F}_{k-1}) \\
& = \frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ \mathbb{E}(S_k^4 | \mathcal{F}_{k-1}) - 4\gamma_{k-1} S_{k-1} \mathbb{E}(S_k^3 | \mathcal{F}_{k-1}) + 6\gamma_{k-1}^2 S_{k-1}^2 \mathbb{E}(S_k^2 | \mathcal{F}_{k-1}) - 4\gamma_{k-1}^3 S_{k-1}^3 \mathbb{E}(S_k | \mathcal{F}_{k-1}) \right. \\
& \quad \left. + \gamma_{k-1}^4 S_{k-1}^4 \right]
\end{aligned}$$

Avant de calculer cela, nous devons déterminer  $\mathbb{E}(S_{n+1}^4 | \mathcal{F}_n)$ ,  $\mathbb{E}(S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n)$ ,  $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$  et  $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ . Cependant, nous avons précédemment calculer  $\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n)$  et  $\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n)$ .

$$\mathbb{E}(S_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \gamma_n S_n \text{ avec } \gamma_n = \frac{n + 2p - 1}{n}$$

$$\mathbb{E}(S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = S_n^2 (2\gamma_n - 1) + 1$$

Déterminons  $\mathbb{E}(S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_{n+1})$ . On a  $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ . On a grâce à la propriété des identités remarquables où à l'aide du triangle de Pascal que

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}((S_n + X_{n+1})^3 | \mathcal{F}_n) \\
&= \mathbb{E}(S_n^3 + 3S_n^2 X_{n+1} + 3S_n X_{n+1}^2 + X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n) \\
&= S_n^3 + 3S_n^2 \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) + 3S_n \mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) + \mathbb{E}(X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n)
\end{aligned}$$

Or on sait que  $\mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(X_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n) = \frac{2p-1}{n} S_n$  et  $\mathbb{E}(X_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n) = 1$ . D'où,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^3 | \mathcal{F}_n) &= S_n^3 + 3S_n^2 \left( \frac{2p-1}{n} \right) + 3S_n + \left( \frac{2p-1}{n} \right) S_n \\
&= S_n^3 \left( \frac{n+6p-3}{n} \right) + S_n \left( \frac{3n+2p-1}{n} \right) \\
&= S_n^3 (\gamma_n - 2) + S_n (\gamma_n + 2)
\end{aligned}$$

Appliquons le même principe pour déterminer  $\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathcal{F}_n)$ .

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}[(S_n + X_{n+1})^4|\mathcal{F}_n] \\
&= \mathbb{E}(S_n^4 + 4S_n^3X_{n+1} + 6S_n^2X_{n+1}^2 + 4S_nX_{n+1}^3 + X_{n+1}^4|\mathcal{F}_n) \\
&= S_n^4 + 4S_n^3\left(\frac{2p-1}{n}\right) + 6S_n^2 + 4S_n^2\left(\frac{2p-1}{n}\right) + 1 \\
&= S_n^4\left(\frac{n+8p-4}{n}\right) + S_n^2\left(\frac{6n+8p-4}{n}\right) + 1 \\
&= S_n^4(4\gamma_n - 3) + S_n^2(4\gamma_n + 2) + 1
\end{aligned}$$

Revenons à présent à notre calcul de la condition de Lindeberg. Pour tout  $\epsilon > 0$  on a :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ \mathbb{E}(S_k^4|\mathcal{F}_{k-1}) - 4\gamma_{k-1}S_{k-1}\mathbb{E}(S_k^3|\mathcal{F}_{k-1}) + 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2\mathbb{E}(S_{k-1}^2|\mathcal{F}_{k-1}) \right. \\
&\quad \left. - 4\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^3\mathbb{E}(S_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \gamma_{k-1}^4\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 4\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 3S_{k-1}^4 + 4\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 2S_{k-1}^2 + 1 - 12\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 + 8\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 4\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 \right. \\
&\quad \left. - 8\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 + 12\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^4 - 6\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^4 - 3\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 + 12\gamma_{k-1}S_{k-1}^4 - 3S_{k-1}^4 - 4\gamma_{k-1}S_{k-1}^2 + 2S_{k-1}^2 - 18\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^4 + 2\gamma_{k-1}^2S_{k-1}^2 \right. \\
&\quad \left. + 12\gamma_{k-1}^3S_{k-1}^4 - 3\gamma_{k-1}^4S_{k-1}^4 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 + S_{k-1}^4(12\gamma_{k-1} - 3 - 18\gamma_{k-1}^2 + 12\gamma_{k-1}^3 - 3\gamma_{k-1}^4) + S_{k-1}^2(-4\gamma_{k-1} + 2 + 2\gamma_{k-1}^2) \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 + 3S_{k-1}^4(4\gamma_{k-1} - 1 - 6\gamma_{k-1}^2 + 4\gamma_{k-1}^3 - \gamma_{k-1}^4) + 2S_{k-1}^2(-2\gamma_{k-1} + 1 + \gamma_{k-1}^2) \right]
\end{aligned}$$

On identifie les identités remarquables suivantes :  $(\gamma_{k-1} - 1)^2$  et  $(\gamma_{k-1})^4$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 + 3^4(-(\gamma_{k-1} - 1)^4) + 2S_{k-1}^2(\gamma_{k-1} - 1)^2 \right] \\
&= \frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 - 3S_{k-1}^4(\gamma_{k-1} - 1)^4 + 2S_{k-1}^2(\gamma_{k-1} - 1)^2 \right]
\end{aligned}$$

Or  $\gamma_{n-1} = \frac{n+2p-2}{n-1} - \frac{n-1}{n-1} = \frac{2p-1}{n-1}$ . Ainsi pour tout  $\epsilon > 0$ , on a

$$\frac{1}{\epsilon^2(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 - 3S_{k-1}^4\left(\frac{2p-1}{k-1}\right)^4 + 2S_{k-1}^2\left(\frac{2p-1}{k-1}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 - 3(2p-1)^4 \left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^4 + 2(2p-1)^2 \left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 \right]$$

On peut encore une fois majorer ceci par :

$$\frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 \left[ 1 - 3(2p-1)^4 \left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^4 + 2(2p-1)^2 \left( \frac{S_{k-1}}{k-1} \right)^2 \right] \leq \frac{1}{\epsilon^2 \sum_{k=1}^n a_k^2} \sum_{k=1}^n a_k^4$$

Ici, nous pouvons utiliser le lemme de Kronecker, car ici nous avons  $(b_n)$  une suite croissante de réels positifs qui tend vers  $+\infty$ . Donc, d'après le lemme de Kronecker on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 = 0$$

Par conséquent, on a que pour tout  $\epsilon > 0$  :

$$\frac{1}{\epsilon^2 (\sum_{k=1}^n a_k^2)^2} \sum_{k=1}^n a_k^4 = 0$$

Donc la condition de Lindeberg est vérifiée. Comme les deux conditions sont vérifiées, on a alors au sens de convergence en loi

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Cependant, nous cherchons la normalité asymptotique de  $S_n$ . Or :

$$M_n = a_n S_n$$

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{M_n}{a_n \sqrt{n}}$$

Or

$$a_n \sqrt{n} = \sqrt{(3-4p) \sum_{k=1}^n a_k^2}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{S_n}{\sqrt{n}} &= \frac{M_n}{a_n \sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \iff \frac{M_n}{\sqrt{(3-4p) \sum_{k=1}^n a_k^2}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \\ \iff \frac{M_n}{\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2}} &\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3-4p}) \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{3-4p})$$

**Question 8 et 9**

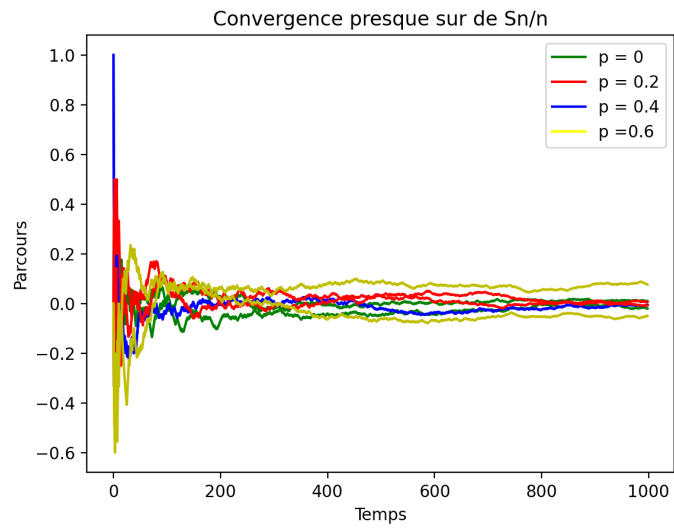


FIGURE 1 – La convergence presque sur (cas diffusive)

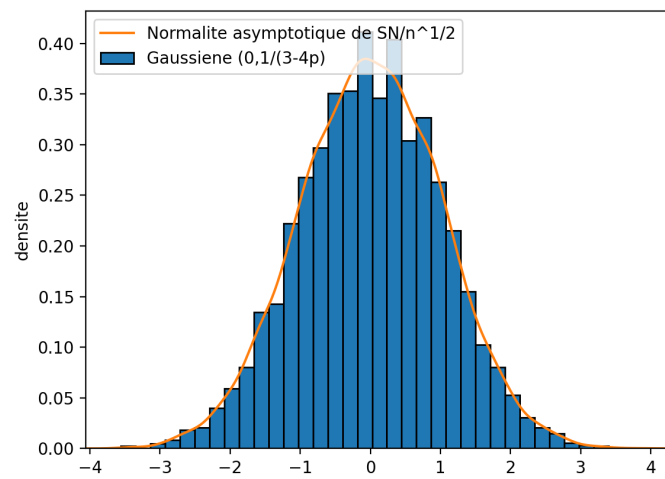


FIGURE 2 – La Normalite asymptotique ( $p = 1/2$ )

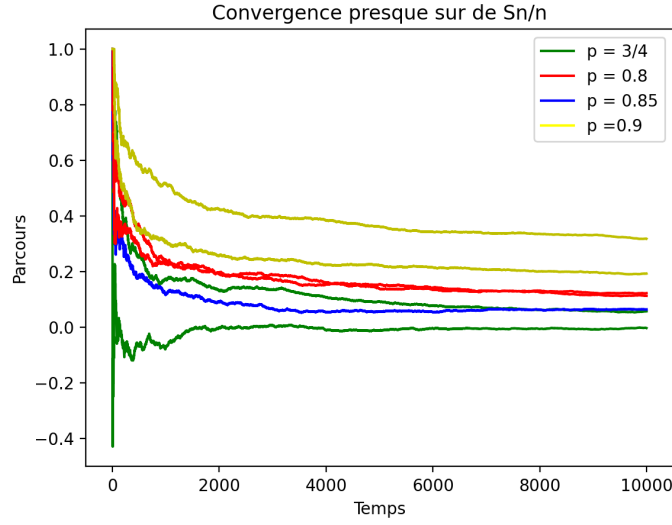


FIGURE 3 – La convergence presque sur : (  $p > 3/4$  )

**Question 10** Cherchons un estimateur  $\hat{p}_n$  de la mémoire de l'éléphant dans le cas sous-critique  $0 \leq p \leq 3/4$ .

Trouvons la loi de  $X_{n+1}$

$$X_{n+1}(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ Soit } B_k \sim \mathcal{U}(\{1, \dots, k\})$$

Soit

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=1\}} \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = 1 | \mathcal{F}_n) &= \frac{p \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}}{n} + \frac{n - \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{\{X_k=1\}}}{n} \cdot (1 - p) \\ &= \frac{a_n}{n} \cdot p + \frac{n - a_n}{n} \cdot (1 - p) \\ &= \frac{a_n}{n} \cdot (2p - 1) + 1 - p \\ &= \frac{a_n}{n} \cdot (1 - 2p) + p \end{aligned}$$

Pour  $x_{n+1} \in \{-1, 1\}$ ,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | \mathcal{F}_n) = \left( \frac{a_n}{n} \cdot (2p - 1) + 1 - p \right)^{\frac{1+x_{n+1}}{2}} \left( \frac{a_n}{n} \cdot (1 - 2p) + p \right)^{\frac{1-x_{n+1}}{2}}$$

En maximisant ceci, on trouve l'estimateur  $\hat{p}$

$$\hat{p}_{MV} = \frac{2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k} \right) - 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \frac{x_{n+1}}{2} \left( \frac{2a_k}{k} - 1 \right) - \frac{n}{2}}{4 \sum_{k=1}^n \left( \frac{a_k}{k} \right) - 4 \left( \frac{a_k}{k} \right)^2 - n}$$

Quelques Sorties python illustrant l'estimation (il faut préciser que ces images ne sont pas forcément représentative car la qualité de l'estimateur dépend de  $\frac{a_n}{n}$ , en effet, la fonction à maximiser n'est pas dérivable en ce point.

Dans le cas diffusif :

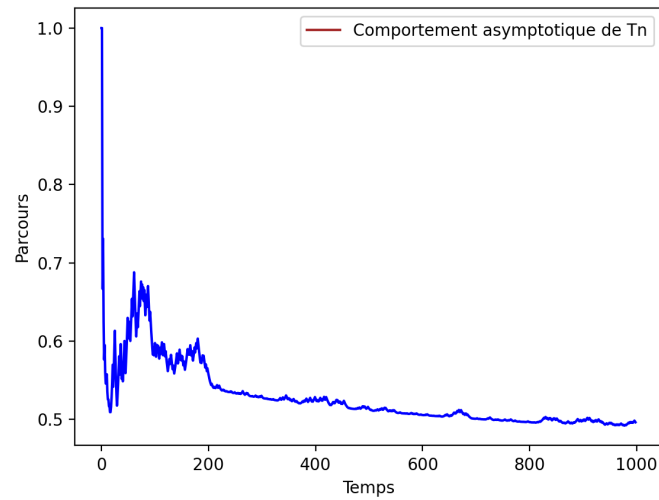


FIGURE 4 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (cas diffusive,  $p = 0.5$ )

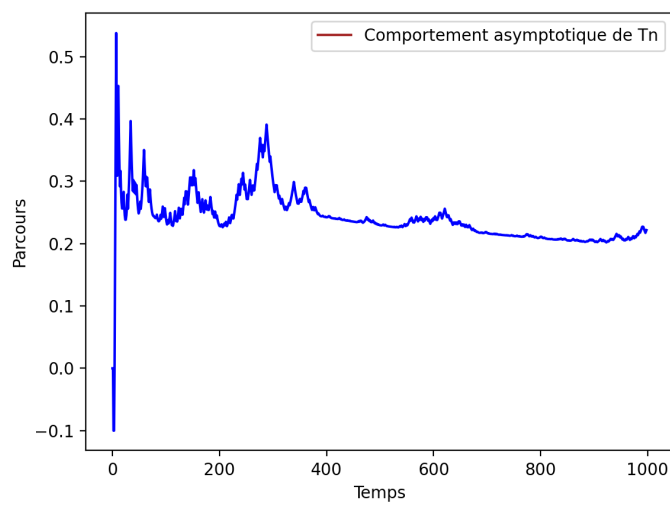


FIGURE 5 – Comportement asymptotique de l'estimateur : (cas diffusif,  $p = 0.2$ )

Dans le cas ou  $p > 3/4$ , nous remarquons qu'il y a moins de soucis car  $\frac{a_n}{n}$  est plus souvent différent de  $\frac{1}{2}$  que dans le cas diffusif

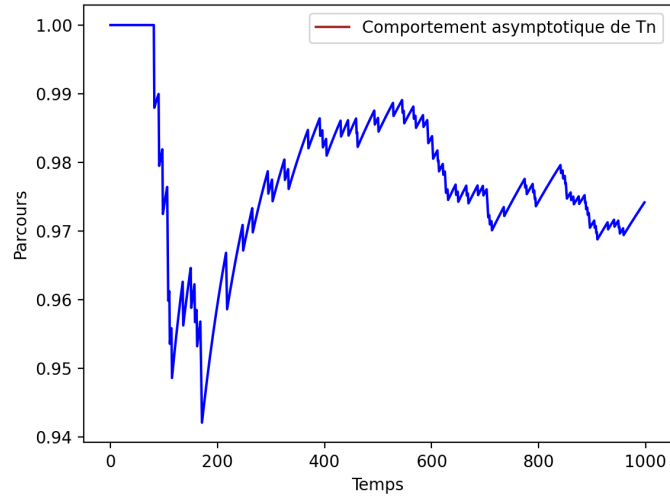


FIGURE 6 – Comportement asymptotique de l'estimateur : ( $p = 0.98$ )

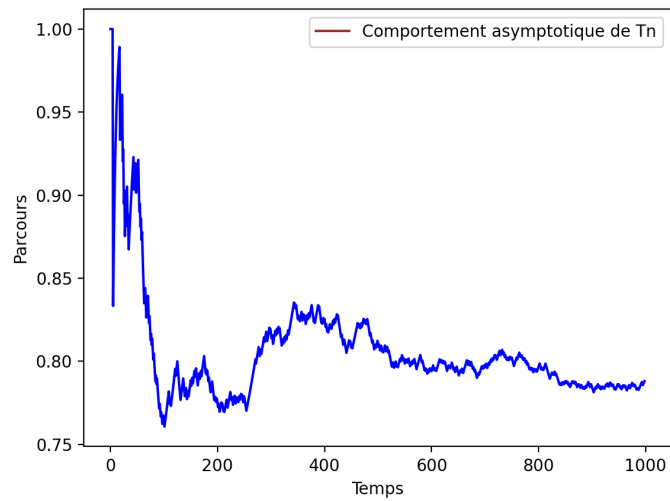


FIGURE 7 – Comportement asymptotique de l'estimateur : ( $p = 0.8$ )