UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2020/2021**
ALGORITHMES STOCHASTIQUES

MARCHE DE L'ELEPHANT

La marche de l'éléphant est un processus aléatoire à temps discret fascinant introduit au début des années 2000 par les physiciens Schütz et Trimper. Elle est définie de la manière suivante : A l'instant 0, l'éléphant est situé à l'origine, $S_0 = 0$. A l'instant 1, il va vers la droite au point 1 avec probabilité q ou vers la gauche au point -1 avec probabilité $1-q$, avec $0 < q < 1$ Ensuite, à l'instant n, l'éléphant choisit uniformément au hasard un instant k entre 1 et n puis

$$X_{n+1} = \begin{cases} +X_k & \text{avec probabilité} \quad p, \\ -X_k & \text{avec probabilité} \quad 1-p, \end{cases}$$

où le paramètre $p \in [0,1]$ est la mémoire de la marche de l'éléphant. La position de la chaîne de l'éléphant est alors donnée par

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

A chaque instant $n \geq 1$, on a $X_{n+1} = \alpha_n X_{\beta_n}$ où α_n et β_n sont deux variables aléatoires indépendantes avec α_n de loi de Rademacher $\mathcal{R}(p)$ et β_n de loi uniforme discrète $\mathcal{U}\big([\![1,n]\!]\big)$.

1) Montrer que l'on a

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \Big(\frac{2p-1}{n}\Big)S_n \qquad \text{p.s.}$$

2) En déduire l'égalité presque sûre

$$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \gamma_n S_n \qquad \text{avec} \qquad \gamma_n = \Big(\frac{n+2p-1}{n}\Big).$$

3) Soit (M_n) la suite définie par $M_n = a_n S_n$ avec $a_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} \gamma_k^{-1} = \frac{\Gamma(n)\Gamma(2p)}{\Gamma(n+2p-1)}.$$

Montrer que (M_n) est une martingale de carré intégrable.

4) Prouver que son processus croissant $\langle M \rangle_n$ est donné par

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 - (2p-1)^2 \xi_n \qquad \text{where} \qquad \xi_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1}^2 \Big(\frac{S_k}{k}\Big)^2.$$

5) Si la mémoire de l'éléphant $0 \leq p < 3/4$, déduire de la loi forte des grands nombres pour les martingales la convergence presque sûre

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\langle M \rangle_n}{n^{3-4p}} = \ell \qquad \text{avec} \qquad \ell = \frac{(\Gamma(2p))^2}{3-4p}.$$

6) Si la mémoire de l'éléphant $0 \leq p < 3/4$, montrer via la loi forte et le théorème limite central pour les martingales que l'on a la convergence presque sûre

$$\lim_{n \to \infty} \frac{S_n}{n} = 0$$

ainsi que la normalité asymptotique

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{3-4p}\Big).$$

7) Etablir des résultats analogues dans le cas critique où la mémoire $p = 3/4$. Que pouvez-vous dire si la mémoire $3/4 < p \leq 1$?

8) Créer un premier code Python permettant de visualiser la convergence presque sûre et la normalité asymptotique de la marche de l'éléphant dans le cas où la mémoire $0 \leq p \leq 3/4$, où le paramètre p est affecté par l'utilisateur.

9) Créer un second code Python pour étudier la convergence presque sûre de la marche de l'éléphant dans le cas où la mémoire $3/4 < p \leq 1$.

10) Proposer un estimateur $\widehat{p}_n$ de la mémoire de l'éléphant p dans le cas $0 \leq p \leq 3/4$. Etudier par simulation le comportement asymptotique de votre estimateur $\widehat{p}_n$.