UNIVERSITÉ DE BORDEAUX **MASTER 1, 2019/2020**
OUTILS DE SIMULATION

LA NAGE DU REQUIN

La nage aléatoire du requin est une marche aléatoire sur $\mathbb{R}$ qui est très proche de la marche de l'éléphant. La description de la nage du requin fait intervenir des lois symétriques α-stable à valeurs dans $\mathbb{R}$. On va commencer par expliquer ce qu'est une loi symétrique α-stable.

Définition. Soit α et σ deux nombres réels positifs avec $\alpha \leqslant 2$. On dit que X est de loi symétrique α-stable de paramètre d'échelle σ, et on note $X \sim \mathcal{S}_\alpha(\sigma)$, si sa fonction caractéristique vérifie, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[\exp(itX)] = \exp(-\sigma^\alpha |t|^\alpha).$$

Il est facile de voir que les lois normales centrées et les lois de Cauchy sont des lois α-stables dont on précisera les coefficients. Dans toute la suite on parlera de loi α-stable $\mathcal{S}_\alpha$ lorsque l'on aura $\sigma = 1$. On ne peut utiliser la méthode d'inversion pour simuler des variables aléatoires de loi α-stable $\mathcal{S}_\alpha$ et leur simulation est loi d'être aisée. On peut cependant utiliser la proposition suivante.

Proposition. Soitent U et V deux variables aléatoires indépendantes avec $U \sim \mathcal{U}([-1,1])$ et $V \sim \mathcal{U}([0,1])$ et soit $\alpha \in]0,2]$. On pose, pour $\alpha \neq 1$,

$$X = \frac{\sin(\alpha\pi U/2)}{(\cos(\pi U/2))^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\pi U/2)}{-\log(V)}\right)^{(1-\alpha)/\alpha}$$

tandis que $X = \tan(\pi U/2)$ si $\alpha = 1$. Alors, on a $X \sim \mathcal{S}_\alpha$.

On va maintenant décrire la nage du requin. On fixe des paramètres $\alpha \in]0,2]$, $p \in [0,1]$ et on note S_n la position du requin au temps $n \in \mathbb{N}$. On considère également une suite (ξ_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{S}_\alpha$. A l'instant 0, le requin est situé à l'origine, $S_0 = 0$. A l'instant 1, il se déplace de X_1 avec $X_1 = \xi_1 \sim \mathcal{S}_\alpha$ et l'on a $S_1 = X_1$. Ensuite, à chaque instant $n \geqslant 2$, on choisit uniformément au hasard un instant k parmi les instants précédents $\{1, \ldots, n\}$, puis on détermine

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_k & \text{avec probabilité} \quad p, \\ \xi_{n+1} & \text{avec probabilité} \quad 1-p. \end{cases}$$

La position du requin au temps $n+1$ est alors donnée par

$$S_{n+1} = S_n + X_{n+1}.$$

Par exemple, $S_2 = 2\xi_1$ avec probabilité p et $S_2 = \xi_1 + \xi_2$ avec probabilité $1-p$. Le comportement asymptotique de la nage du requin est étroitement lié aux valeurs de α et à la mémoire du requin p. Dans le cas sous-critique $\alpha p < 1$, on a

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{1/\alpha} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{S}_\alpha(\sigma_\alpha)$$

avec σ_α un paramètre dépendant de α. Dans le cas critique $\alpha p = 1$, on a

$$\left(\frac{1}{n\log(n)}\right)^{1/\alpha} S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{S}_\alpha(\sigma_\alpha)$$

avec $\sigma_\alpha = ((1-p)\Gamma(1+\alpha))^{1/\alpha}$. Dans le cas super-critique $\alpha p > 1$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^p} = Z \qquad \text{p.s.}$$

avec Z une variable aléatoire réelle finie presque sûrement.

1) Créer trois codes Python permettant de visualiser les nages du requin dans les cas sous-critique, critique et super-critique. Simuler les résultats de convergence ci-dessus.

2) Appliquer vos codes Python à différents types de lois symétriques α-stables.