

La nage du requin

ELANKUMARAN Vishwa, PROCTOR Jordan, TOMILINA Ekaterina

7 décembre 2020

Introduction

Lors de la recherche de nourriture par certains prédateurs marins tels que le requin, l'on remarque un comportement que l'on pourrait qualifier de diffusion anormale : la variance de la position du requin n'évolue pas de façon linéaire en fonction du temps. C'est pour cela que la simulation qui constitue notre objet d'étude, et qui a pour but d'étudier l'impact des lois de probabilité α -stables, dont certaines à lourde queue sur le comportement asymptotique d'une marche aléatoire, est appelée la nage du requin.

Voici les principales caractéristiques de cette marche :

1. Notre requin démarre à la position initiale S_0 .
2. Ses déplacements suivent une loi de probabilité S_α , α -stable, avec $\alpha \in]0;2]$.
3. Il est doté d'un paramètre de mémoire p , avec $p \in [0;1]$, qui concerne tout le chemin effectué précédemment.

En voici maintenant les étapes :

1. Le requin se trouve à S_0 .
2. A l'instant 1, il se déplace de $X_1 = \zeta_1 \sim S_\alpha$
3. Pour tous les instants suivants, il se déplace de :

$$\begin{cases} X_k \text{ avec probabilité } p, \text{ les } X_k \text{ étant choisis uniformément parmi tous les déplacements précédents} \\ \zeta_n \text{ avec probabilité } 1 - p, \text{ les } \zeta_k \text{ étant indépendantes toutes de même loi } S_\alpha \end{cases}$$

Nous allons d'abord présenter les lois α -stables utilisées au cours de nos simulations, puis étudier le comportement asymptotique de celles-ci.

Sommaire

1	Les lois alpha-stables	3
2	Simulations de la nage du requin	4
2.1	Cas sous-critique	6
2.2	Cas critique	8
2.3	Cas super critique	10
3	Conclusion	13

Chapitre 1

Les lois alpha-stables

Définition

Soient α et σ deux paramètres réels, avec $\alpha \in]0;2]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi symétrique α -stable de paramètre d'échelle σ si $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$$

Nous allons ici utiliser trois lois alpha-stables de paramètre d'échelle $\sigma = 1$ différentes qui sont celle de Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$), de Cauchy ($\alpha = 1$), et la loi Normale ($\alpha = 2$). Les deux premières sont à queue lourde, comme toutes les distributions α -stables avec $\alpha < 2$. Ces trois distributions sont les seules lois α -stables pouvant être décrites par une formule explicite.

Ces trois lois appartiennent d'ailleurs à la famille des lois stable à quatre paramètres : un paramètre α qui est l'exposant caractéristique, un paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$ d'échelle, un paramètre $\beta \in (-1;1)$ d'asymétrie et un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de localisation.

Leurs densités peuvent ainsi s'écrire de façon générale :

Loi de Lévy : $S(\frac{1}{2}, \sigma, 1, \mu) = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\sigma}{2x-\mu}}$ pour $\mu < x < \infty$

Loi de Cauchy : $S(1, \sigma, 0, \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{(x-\mu)^2 + \sigma^2}$ pour $x \in (-\infty; \infty)$

Loi Normale : $S(2, \sigma, \beta, \mu) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2}}$ pour $x \in (-\infty; \infty)$

Nous avons choisi ici, comme dit précédemment, $\sigma = 1$. // En effet, afin de simuler une variable qui suit une loi α -stable, nous pouvons utiliser la proposition suivante :

Proposition

Soient $U \sim U[-1, 1]$ et $v \sim U[0, 1]$ et $\alpha \in]0, 2]$. On peut alors définir X comme :

$$\begin{cases} X = \frac{\sin(\frac{\alpha U}{2})}{(\cos(\frac{\pi U}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\frac{(1-\alpha)\pi U}{2})}{-\log(V)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1. \\ X = \tan(\frac{\pi U}{2}) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

C'est en utilisant ces formules que nous avons donc simulé nos variables dans la suite.

Chapitre 2

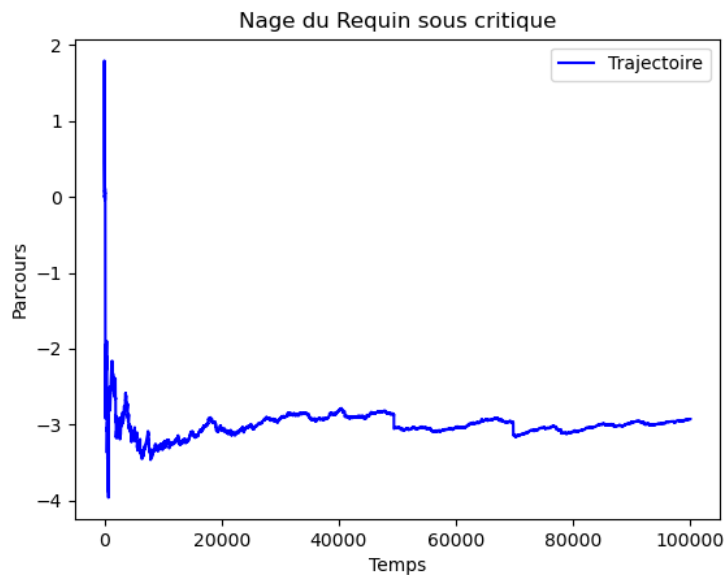
Simulations de la nage du requin

Nous allons ici présenter quelques résultats de la simulation de la nage du requin, en étudiant son comportement asymptotique. Nous pouvons distinguer trois cas :

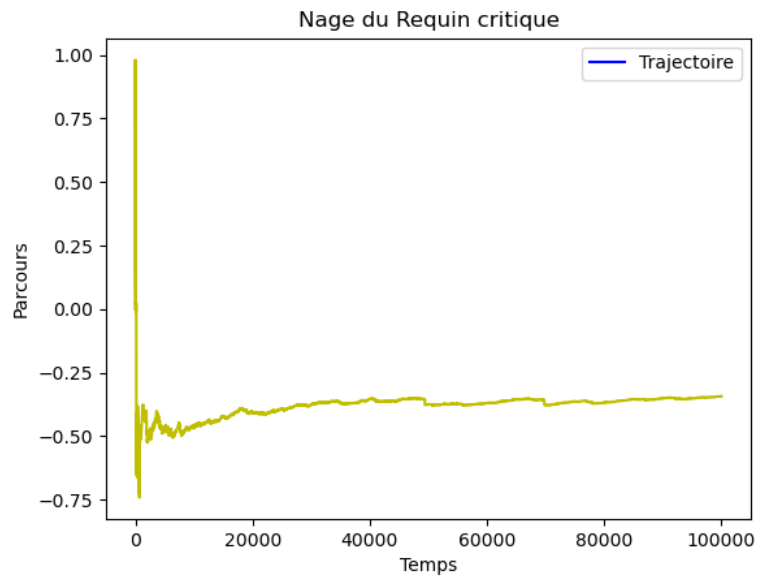
1. Le cas sous-critique, lorsque $\alpha p < 1$
2. Le cas critique lorsque $\alpha p = 1$
3. Le cas supercritique lorsque $\alpha p > 1$.

Il est intéressant de noter que lorsque $p \leq \frac{1}{2}$, le cas supercritique n'existe pas car $\alpha \in]0;2]$. Nous avons représenté trois simulations de la nage du requin, avec les différents cas :

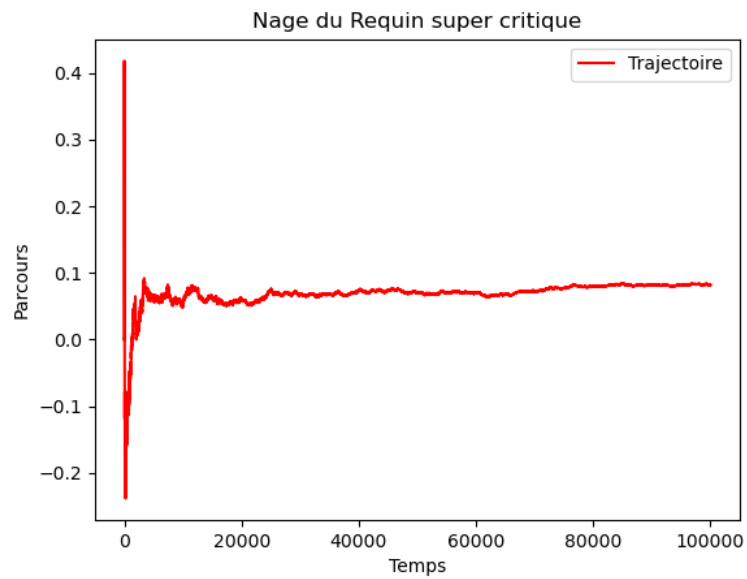
Nous voyons ici la nage dans le cas sous-critique.



Ici, le cas critique :



Enfin, le cas supercritique :



L'on remarque la différence entre la convergence en loi (cas sous-critique et critique), et la convergence presque sûre (cas supercritique) dont nous verrons les expressions par la suite.

2.1 Cas sous-critique

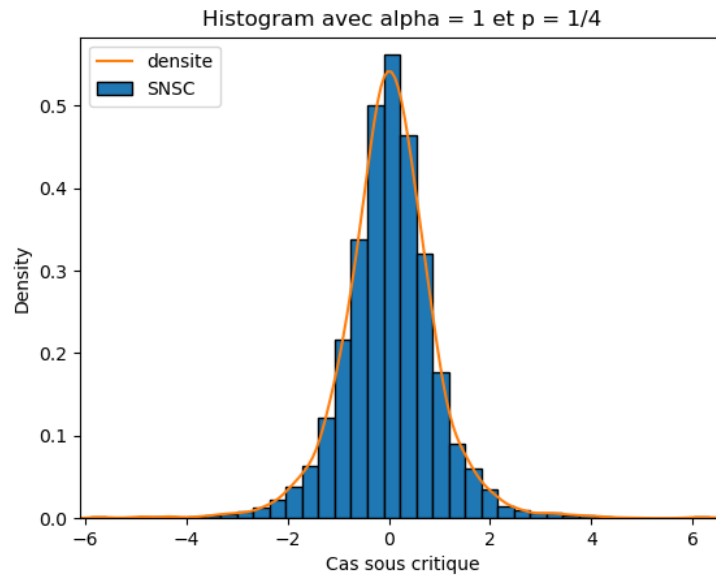
Voici quelques simulations dans le cas sous-critique, lorsque $\alpha p < 1$.

Proposition

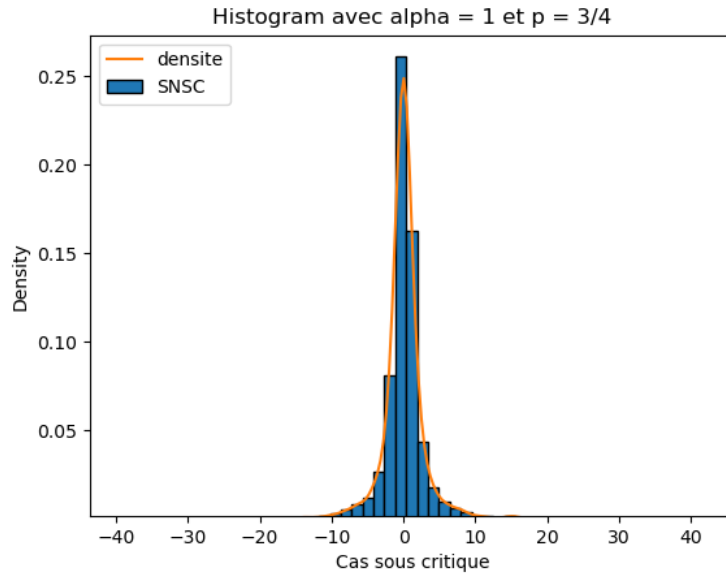
Dans le cas sous-critique, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} S_n \xrightarrow{L} S_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$$

avec σ_{α} un paramètre d'échelle dépendant de α .

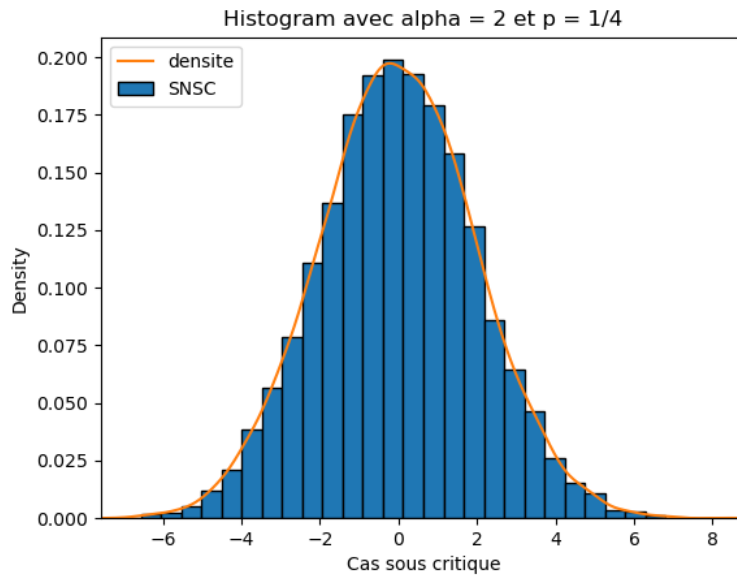


En prenant $\alpha=1$ et $p=\frac{1}{4}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{1}{4} < 1$ et nous sommes bien dans le cas sous-critique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations et l'allure de la densité de la loi de Cauchy que la convergence en loi vers une loi 1-stable de Cauchy est bien présente, de paramètre d'échelle 1.



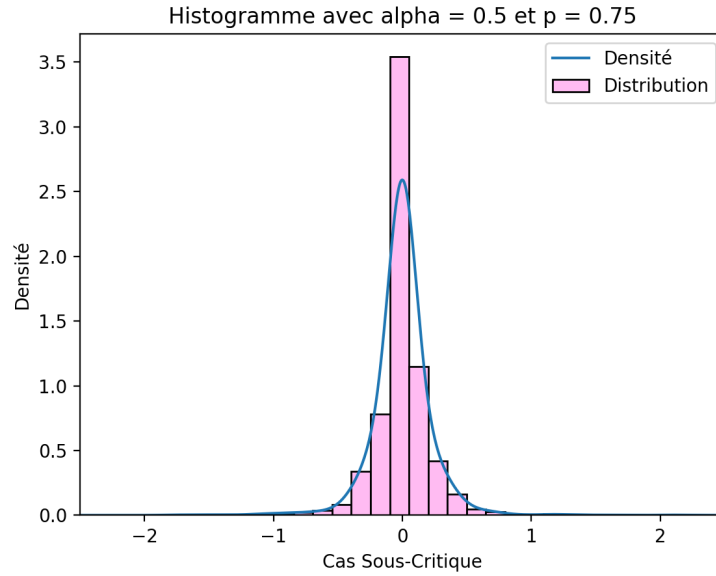
En prenant $\alpha=1$ et $p=\frac{3}{4}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{3}{4} < 1$ et nous sommes bien dans le cas sous-critique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations et l'allure de la densité de la loi de Cauchy que la convergence en loi vers une loi 1-stable de Cauchy est bien présente, de paramètre d'échelle 1.

En comparant les deux, nous voyons qu'un paramètre p plus grand alourdit les queues de la loi de Cauchy et baisse le maximum de la densité.



En prenant $\alpha=2$ et $p=\frac{1}{4}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{1}{2} < 1$ et nous sommes bien dans le cas sous-

critique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations et l'allure de la densité de la loi Normale que la convergence en loi vers une loi 2-stable Normale est bien présente.



En prenant $\alpha = \frac{1}{2}$ et $p = \frac{3}{4}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{3}{8} < 1$ et nous sommes bien dans le cas sous-critique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations et l'allure de la densité de la loi de Lévy que la convergence en loi vers une loi $\frac{1}{2}$ -stable de Lévy est bien présente.

2.2 Cas critique

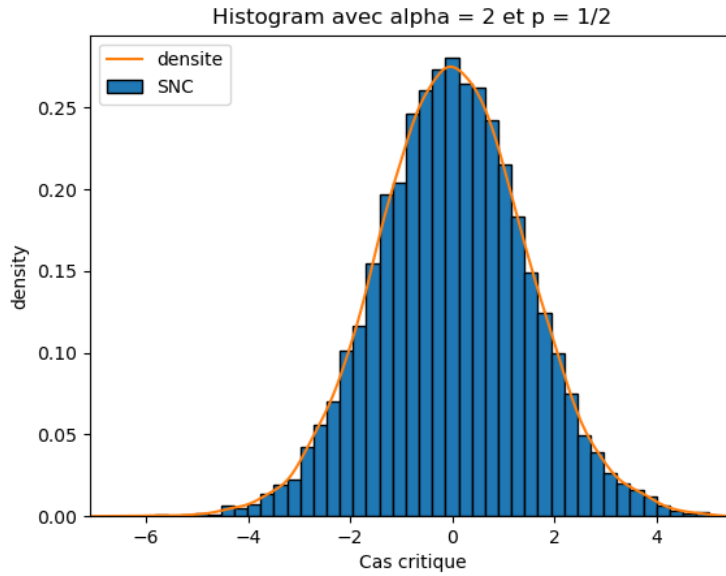
Voici quelques simulations dans le cas critique, lorsque $\alpha p = 1$.

Proposition

Dans le cas critique, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{1}{n \log(n)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} S_n \xrightarrow{L} S_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$$

avec $\sigma_{\alpha} = ((1-p)\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$



En prenant $\alpha=2$ et $p=\frac{1}{2}$, nous avons bien $\alpha p = 1$ et nous sommes bien dans le cas critique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations et l'allure de la densité de la loi Normale que la convergence en loi vers une loi 2-stable Normale est bien présente.

Ici, nous pouvons également calculer explicitement le paramètre d'échelle σ_α .

$$\begin{aligned}
 \sigma_\alpha &= ((1-p)\Gamma(1+\alpha))^{\frac{1}{\alpha}} \\
 &= ((1-\frac{1}{2})(\Gamma(1+2))^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2}\Gamma(3)} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2} \times 2!} \\
 &= \sqrt{1} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Si nous comparons avec la simulation précédente lorsque $\alpha=2$ et $p=\frac{1}{4}$ et que le cas était donc sous-critique, on voit que la densité de probabilité prenait des valeurs plus petites, avec un maximum à 0.20 alors qu'il est environ de 0.27 ici. Les queues étaient également plus lourdes.

2.3 Cas super critique

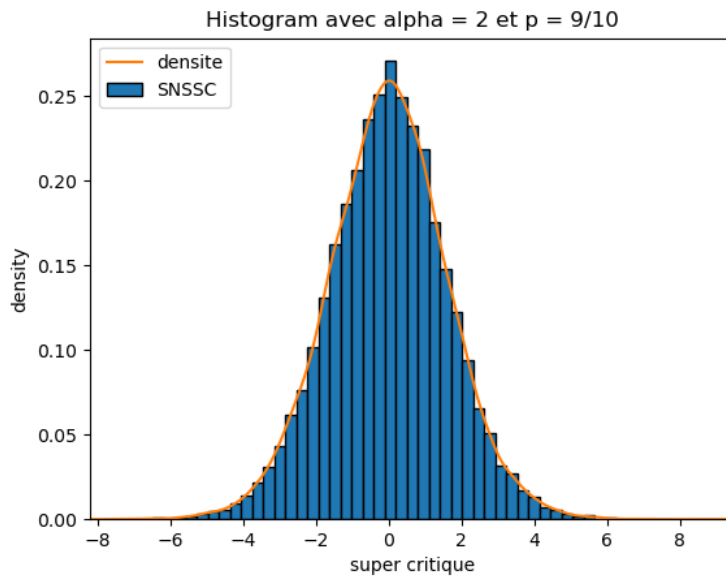
Voici quelques simulations dans le cas supercritique, lorsque $\alpha p > 1$.

Proposition

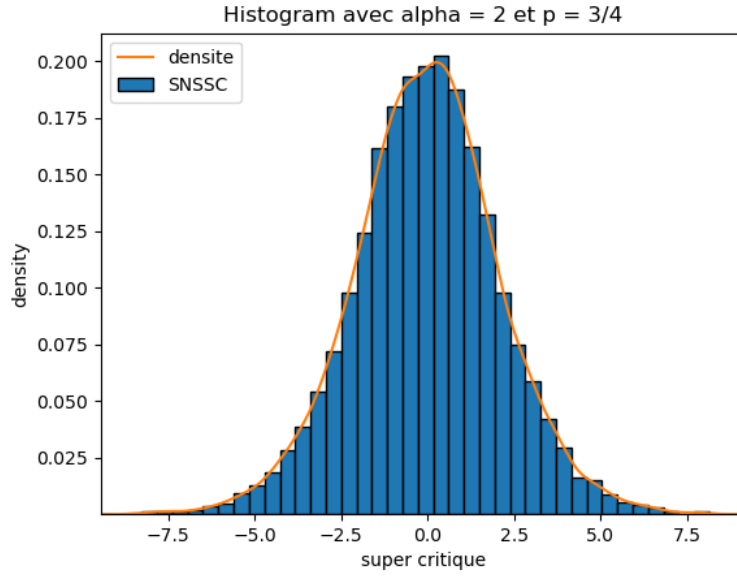
Dans le cas supercritique, nous avons la convergence presque sûre suivante :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^p} = Z$$

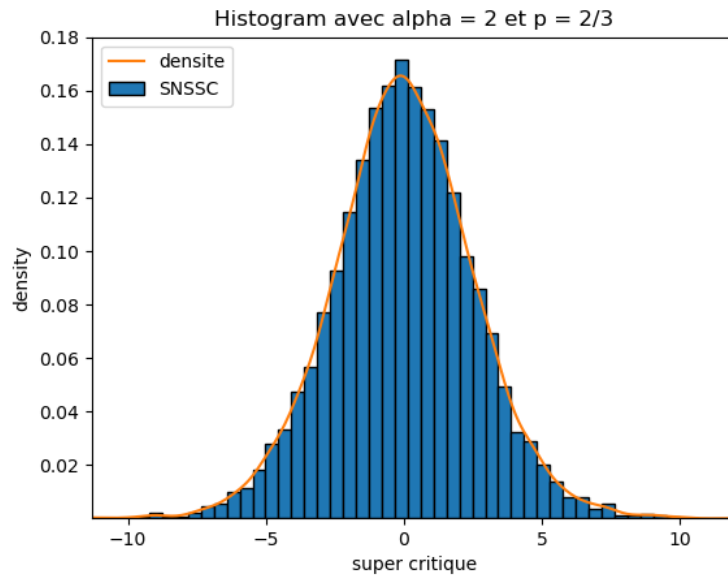
avec Z une variable aléatoire réelle finie presque sûrement.



En prenant $\alpha=2$ et $p=\frac{9}{10}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{9}{5} > 1$ et nous sommes bien dans le cas supercritique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations que l'histogramme ne semble pas vraiment suivre une densité Normale malgré $\alpha=2$.



En prenant $\alpha=2$ et $p=\frac{3}{4}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{3}{2} > 1$ et nous sommes bien dans le cas supercritique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations que l'histogramme ne semble pas vraiment suivre une densité Normale malgré $\alpha=2$.



En prenant $\alpha=2$ et $p=\frac{2}{3}$, nous avons bien $\alpha p = \frac{4}{3} > 1$ et nous sommes bien dans le cas supercritique. Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations que l'histogramme ne semble pas vraiment suivre une densité Normale malgré $\alpha=2$. Nous remarquons également dans le cas sous-critique que plus p est petit, plus le maximum

atteint par la densité est bas et plus les queues sont lourdes.

Nous constatons que dans le cas sous-critique pour une même valeur de α , plus p est grand, plus le maximum de la densité est faible est plus les queues sont lourdes alors que dans le cas supercritique l'inverse exact se produit : le maximum de la densité décroît avec la valeur de p .

Chapitre 3

Conclusion

En conclusion, les lois α -stables à queue lourde ainsi que la loi Normale ont une influence notable sur la marche aléatoire du requin. En effet, il suffit que certains de ses déplacements soient effectués selon une loi α -stable pour qu'asymptotiquement ses déplacements convergent en loi vers une loi α -stable du même α lorsque le produit de α et du paramètre de mémoire p est inférieur ou égal à 1.

Cependant, lorsque ce produit dépasse 1, l'on se retrouve dans un cas supercritique : les déplacements du requin convergent asymptotiquement vers une variable aléatoire réelle presque sûrement dont la loi est inconnue.