

La Nage du Requin

ELANKUMARAN Vishwa, PROCTOR Jordan, TOMILINA Ekaterina

Université de Bordeaux

7 décembre 2020

Introduction

Définition

Diffusion anormale : la variance de la position n'est pas fonction linéaire du temps

Principe des déplacements du requin

Le requin se trouve à S_0 . Il a un paramètre de mémoire p .

A l'instant 1, il se déplace de $X_1 = \zeta_1 \sim S_\alpha$ avec S_α une loi α -stable.

Pour tous les instants suivants, il se déplace de :

$$\begin{cases} X_k \text{ avec probabilité } p, \text{ les } X_k \text{ étant choisis uniformément} \\ \text{parmi tous les déplacements précédents} \\ \zeta_n \text{ avec probabilité } 1 - p, \text{ les } \zeta_k \text{ étant indépendantes toutes de même} \\ \text{loi } S_\alpha \end{cases}$$

BUT

Etudier l'influence asymptotique des lois de probabilité symétriques α -stables sur une marche aléatoire.

Sommaire

1 Les lois symétriques α -stables

- Définition
- Comment simuler la variable $X \sim S_\alpha$?

2 Simulations de la Nage du Requin

- Le cas sous-critique
- Le cas critique
- Le cas supercritique

Les lois symétriques α -stables

Définition

Les lois symétriques α -stables Soient α et σ deux paramètres réels, avec $\alpha \in]0;2]$. On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi symétrique α -stable de paramètre d'échelle σ si $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{itX}) = e^{-\sigma^\alpha |t|^\alpha}$$

Exemple

Les seules lois α -stables à expression analytique sont : la loi de Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$), la loi de Cauchy ($\alpha = 1$), loi Normale ($\alpha = 2$)

Les lois symétriques α -stables

Ces trois lois appartiennent d'ailleurs à la famille des lois stable à quatre paramètres : un paramètre α qui est l'exposant caractéristique, un paramètre $\sigma \in \mathbb{R}$ d'échelle, un paramètre $\beta \in (-1; 1)$ d'asymétrie et un paramètre $\mu \in \mathbb{R}$ de localisation.

Exemple

Loi de Lévy : $S(\frac{1}{2}, \sigma, 1, \mu) = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\pi}\right)} \frac{1}{(x-\mu)^{\frac{3}{2}}} e^{\frac{\sigma}{2x-\mu}}$ pour $\mu < x < \infty$

Loi de Cauchy : $S(1, \sigma, 0, \mu) = \frac{1}{\pi} \frac{\sigma}{(x-\mu)^2 + \sigma^2}$ pour $x \in (-\infty; \infty)$

Loi Normale : $S(2, \sigma, \beta, \mu) = \frac{1}{2\sigma\sqrt{\pi}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{4\sigma^2}}$ pour $x \in (-\infty; \infty)$

Nous avons choisi ici, comme dit précédemment, $\sigma = 1$.

Les lois symétriques α -stables

Simulation d'une variable $X \sim S_\alpha$

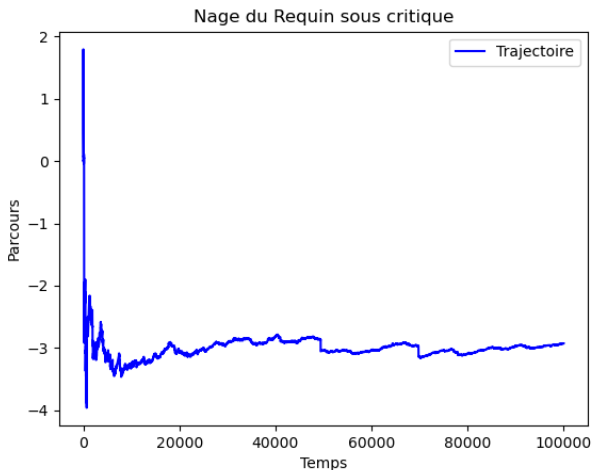
Soient $U \sim U[-1, 1]$ et $v \sim U[0, 1]$ et $\alpha \in]0, 2]$. On peut alors définir X comme :

$$\begin{cases} X = \frac{\sin(\frac{\alpha U}{2})}{(\cos(\frac{\pi U}{2}))^{\frac{1}{\alpha}}} \left(\frac{\cos(\frac{(1-\alpha)\pi U}{2})}{-\log(V)} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} & \text{si } \alpha \neq 1. \\ X = \tan\left(\frac{\pi U}{2}\right) & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

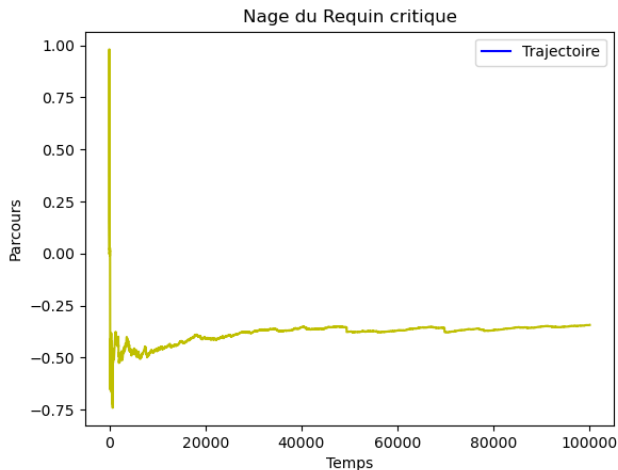
Simulations de la Nage du Requin

Nous allons étudier la convergence asymptotique de la position du requin dans trois cas différents : le cas sous-critique ($\alpha p < 1$), le cas critique ($\alpha p = 1$) et enfin le cas supercritique ($\alpha p > 1$).

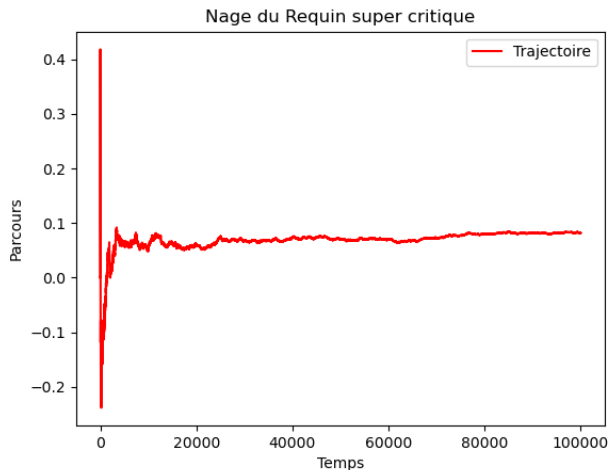
Représentation directe de la convergence des trajectoires



Représentation directe de la convergence des trajectoires



Représentation directe de la convergence des trajectoires

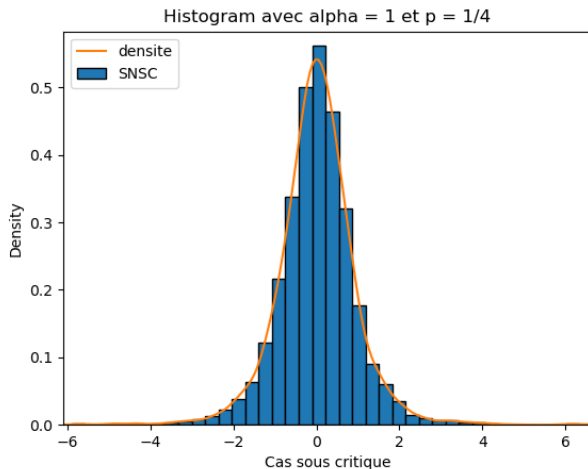


Le cas sous-critique

Dans le cas sous-critique, c'est-à-dire $\alpha p < 1$, nous avons la convergence en loi suivante :

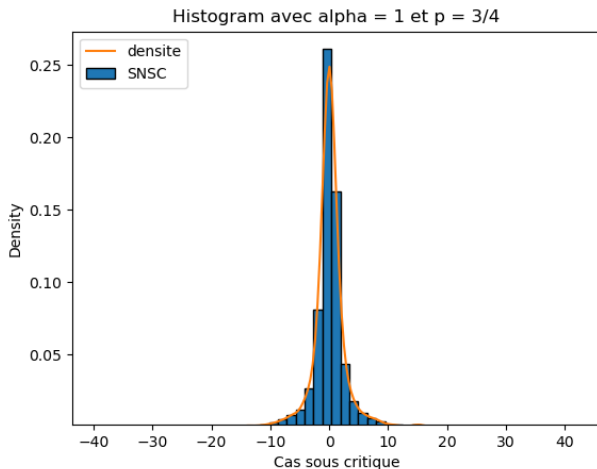
$$\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} S_n \xrightarrow{L} S_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$$

Le cas sous-critique



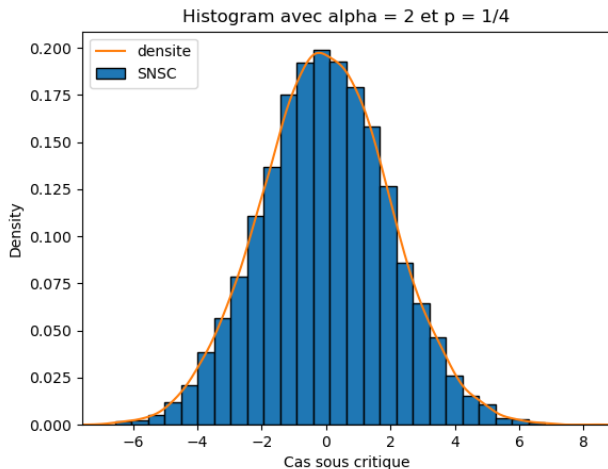
L'histogramme semble bien suivre la densité d'une loi de Cauchy ($\alpha=1$).

Le cas sous-critique



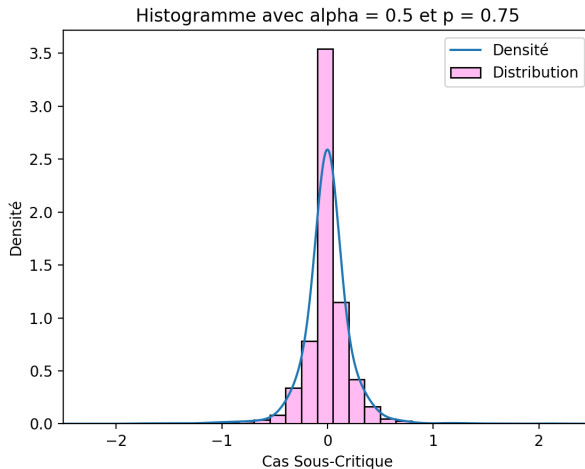
Ici, l'histogramme semble bien suivre la loi de Cauchy ($\alpha = 1$).

Le cas sous-critique



L'histogramme semble suivre la densité de la loi Normale ($\alpha = 2$).

Le cas sous-critique



L'histogramme semble suivre la densité de la loi de Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$).

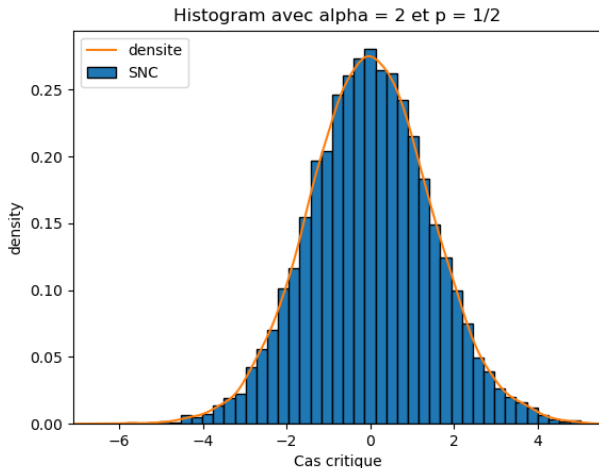
Le cas critique

Dans le cas sous-critique, c'est-à-dire $\alpha p = 1$, nous avons la convergence en loi suivante :

$$\left(\frac{1}{n \log(n)}\right)^{\frac{1}{\alpha}} S_n \xrightarrow{L} S_{\alpha}(\sigma_{\alpha})$$

avec $\sigma_{\alpha} = ((1 - p)\Gamma(1 + \alpha))^{\frac{1}{\alpha}}$

Le cas critique



Ici, l'histogramme semble bien suivre la loi Normale ($\alpha = 2$).

Le cas supercritique

Dans le cas supercritique, c'est-à-dire $\alpha p > 1$, nous avons la convergence en loi suivante :

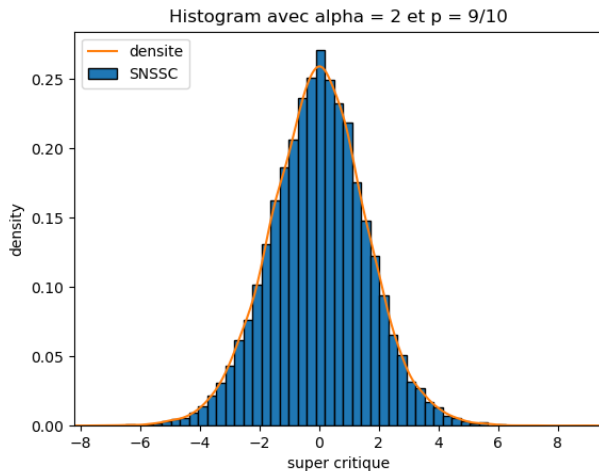
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^p} = Z$$

avec Z une variable aléatoire réelle finie presque sûrement.

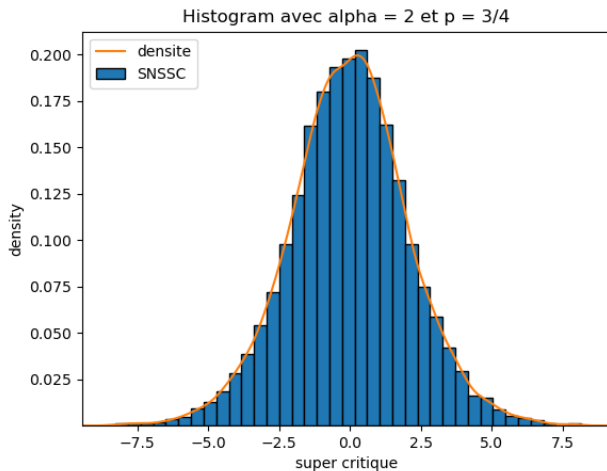
Attention !

Ce cas n'existe pas pour $p < \frac{1}{2}$ vu que $\alpha \in]0,2]$.

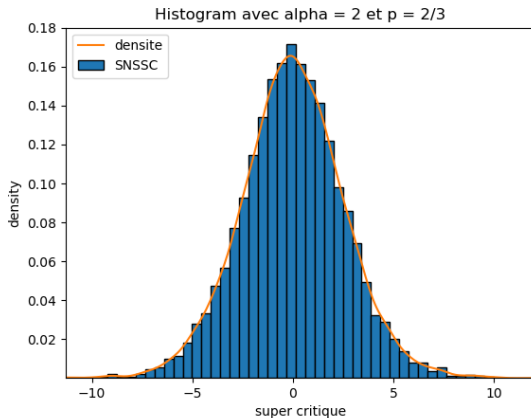
Le cas supercritique



Le cas supercritique



Le cas supercritique



Nous pouvons voir en traçant l'histogramme des simulations que l'histogramme ne semble pas suivre une densité Normale malgré $\alpha=2$. En effet, il converge presque sûrement vers une variable Z inconnue.

Conclusion

En conclusion, nous pouvons formuler plusieurs remarques suite à ce travail :

Asymptotiquement, dans les cas sous-critique et critique, si certains déplacements suivent une loi α -stable, la position converge vers une loi α -stable du même α dont on peut connaître le paramètre d'échelle en fonction de celui-ci et du paramètre de mémoire p .

Dans le cas supercritique, l'on ne peut cependant pas déterminer la loi de la variable aléatoire vers laquelle la position du requin converge asymptotiquement.