

Σήματα και Συστήματα

Αθανάσιος Π. Λιάβας, Γεώργιος Ν. Καρυστινός

Τμήμα ΗΜΜΥ

Πολυτεχνείο Κρήτης

Χανιά, Ιούλιος 2009

Εισαγωγή

Οι παρούσες σημειώσεις αποτελούν υλικό που διδάσκεται στο προπτυχιακό μάθημα *Σήματα και Συστήματα*. Είναι πλήρεις και περιέχουν ικανό αριθμό λυμένων και άλυτων ασκήσεων. Βασίζονται σε μεγάλο βαθμό σε υλικό των βιβλίων

1. A. V. Oppenheim, A. V. Willsky with S. Hamid Nawab. *Signals and Systems*. Prentice-Hall, 1997.
2. B. P. Lathi. *Signal Processing and Linear Systems*. Berkeley-Cambridge Press, 1998.

Βασικό χαρακτηριστικό των σημειώσεων, που δεν παρατηρείται στα συνήθη προπτυχιακά βιβλία θεωρίας Σημάτων και Συστημάτων, είναι η χρήση διαφορετικού συμβολισμού για τη συνάρτηση $\{x(t)\}$ (ακολουθία $\{x[n]\}$) και την τιμή της στη θέση t , $x(t)$ (στη θέση n , $x[n]$). Πιστεύουμε ότι με αυτόν τον τρόπο αποφεύγονται οι αμφισημίες κατά τη διάρκεια μερικών βασικών αποδείξεων.

Η ύλη που περιέχεται στο παρόν σύγγραμμα αναπτύχθηκε κατά τη διδασκαλία του μαθήματος *Σήματα και Συστήματα* στο Τμήμα Ηλεκτρονικών Μηχανικών και Μηχανικών Υπολογιστών του Πολυτεχνείου Κρήτης τα ακαδημαϊκά έτη 2002-2003 έως και 2008-2009. Για τη συγγραφή των σημειώσεων σημαντική ήταν η συνεισφορά του Δημήτρη Παπηλιόπουλου τον οποίο και ευχαριστούμε θερμά.

Οι παρατηρήσεις σας σχετικά με λάθη και παραλείψεις είναι ευπρόσδεκτες.

Α. Π. Λιάβας, Γ. Ν. Καρυστινός

Περιεχόμενα

1	Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου	5
1.1	Σήμα, σύστημα, επεξεργασία σήματος	5
1.2	Σήματα διακριτού χρόνου	7
1.3	Συστήματα διακριτού χρόνου	17
1.4	Ανάλυση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων	22
1.5	Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές	41
1.6	Λυμένες ασκήσεις	45
1.7	Άλυτες ασκήσεις	48
2	Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου	51
2.1	Σήματα συνεχούς χρόνου	51
2.2	Συστήματα συνεχούς χρόνου	62
2.3	Λυμένες ασκήσεις	78
2.4	Άλυτες ασκήσεις	79
3	Η Έννοια της Συχνότητας	83
3.1	Ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου	83
3.2	Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου	85
3.3	Αρμονικά συνδεδεμένα σήματα	88
3.4	Δειγματοληψία ημιτονοειδών σημάτων	89
3.5	Άλυτες ασκήσεις	91

4	Σειρές Fourier	93
4.1	Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου	93
4.2	Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου	100
4.3	Λυμένες ασκήσεις	108
4.4	Άλυτες ασκήσεις	109
5	Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Συνεχούς Χρόνου	115
5.1	Μετασχηματισμός Fourier	115
5.2	Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier	126
5.3	Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων	135
5.4	Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου	137
5.5	Λυμένες ασκήσεις	139
5.6	Άλυτες ασκήσεις	141
6	Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου	151
6.1	Μετασχηματισμός Fourier	151
6.2	Θεώρημα δειγματοληψίας Nyquist	158
6.3	Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier σημάτων διακριτού χρόνου	165
6.4	ΓΧΑ συστήματα στο πεδίο συχνοτήτων	170
6.5	Λυμένες ασκήσεις	172
6.6	Άλυτες ασκήσεις	173
7	Διαμόρφωση	179
7.1	Μέσο μετάδοσης και διαμόρφωση	179
7.2	Διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (double-sideband suppressed-carrier amplitude modulation ή DSB-SC AM)	181
7.3	Διαμόρφωση πλάτους (amplitude modulation ή AM)	188
7.4	Διαμόρφωση πλάτους απλής πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (single-sideband suppressed-carrier amplitude modulation ή SSB-SC AM)	192
7.5	Πολυπλεξία στο πεδίο των συχνοτήτων	197

7.6	Διαμόρφωση γωνίας	199
7.7	Άλυτες ασκήσεις	201
8	Μετασχηματισμός Laplace	207
8.1	Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού Laplace	211
8.2	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	214
8.3	Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace	216
8.4	Ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace	219
8.5	Λυμένες ασκήσεις	223
8.6	Άλυτες ασκήσεις	224

Κεφάλαιο 1

Σήματα και Συστήματα Διακριτού Χρόνου

1.1 Σήμα, σύστημα, επεξεργασία σήματος

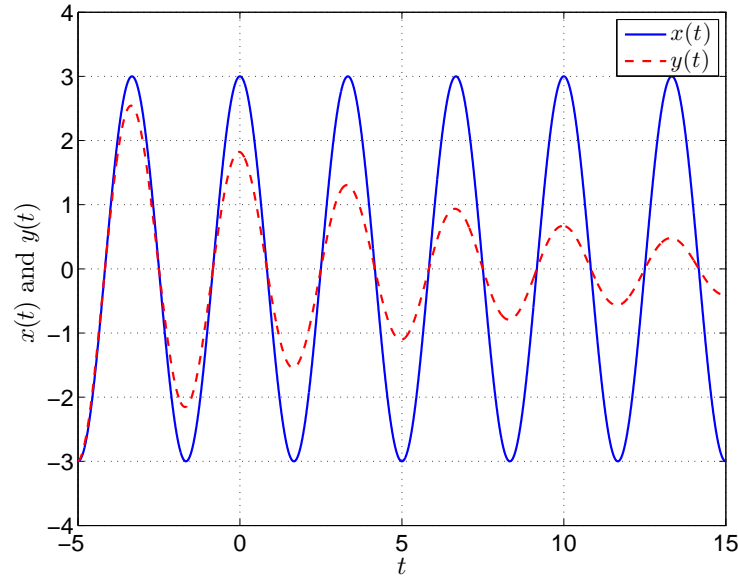
Σήμα (signal) καλούμε οποιαδήποτε συνάρτηση μίας ή περισσότερων ελεύθερων μεταβλητών. Με ένα λιγότερο μαθηματικό ορισμό, θα ορίζαμε ως σήμα κάθε φυσική ποσότητα, η οποία μεταβάλλεται ως προς το χρόνο, το χώρο ή ως προς κάθε σύνολο ελεύθερων μεταβλητών. Για παράδειγμα, μεταβολή ως προς το χρόνο t εκφράζεται από το σήμα $x(t) = 5t$, ενώ μεταβολή ως προς το επίπεδο (t_1, t_2) από το $x(t_1, t_2) = 3t_1 + 2t_2$.

Σύστημα (system) καλούμε οποιαδήποτε οντότητα, η οποία ενεργεί πάνω σε ένα σήμα για κάποιο σκοπό. Σε ένα σήμα μπορούμε να ενεργήσουμε είτε με μία φυσική συσκευή (υλικό) είτε με μία ακολουθία μαθηματικών πράξεων που συνθέτουν ένα αλγόριθμο (λογισμικό). Κάθε λειτουργία που εφαρμόζεται σε ένα σήμα με σκοπό την απόκτηση κάποιου είδους πληροφορίας καλείται **Επεξεργασία Σήματος** (Signal Processing).

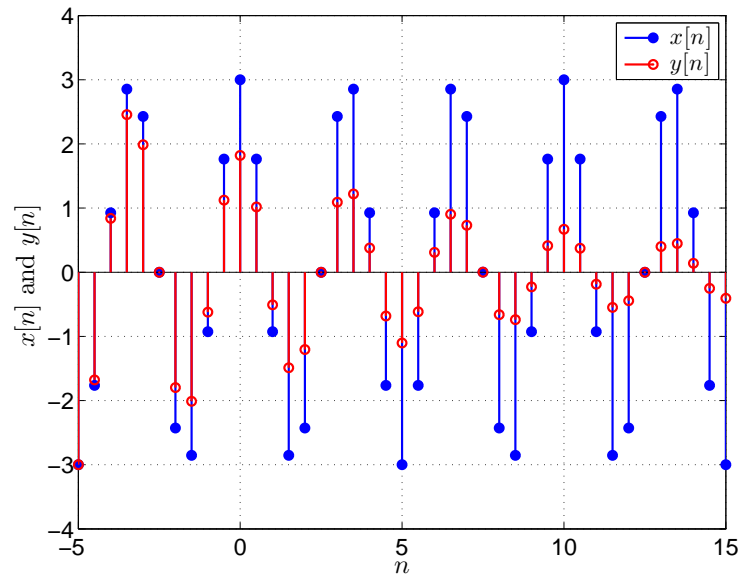
Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, θα μάς απασχολήσουν σήματα τα οποία μεταβάλλονται ως προς το χρόνο.

Ένα σήμα $\{x(t)\}$ το οποίο ορίζεται για κάθε τιμή του t στο διάστημα (a, b) καλείται **αναλογικό** (analog) σήμα ή σήμα συνεχούς χρόνου. Η τιμή του $\{x(t)\}$ τη χρονική στιγμή $t = t_0$ είναι $\{x(t)\}_{t=t_0} = x(t_0)$.

Όταν ένα σήμα ορίζεται για κάποιες συγκεκριμένες στιγμές του χρόνου, τότε καλείται



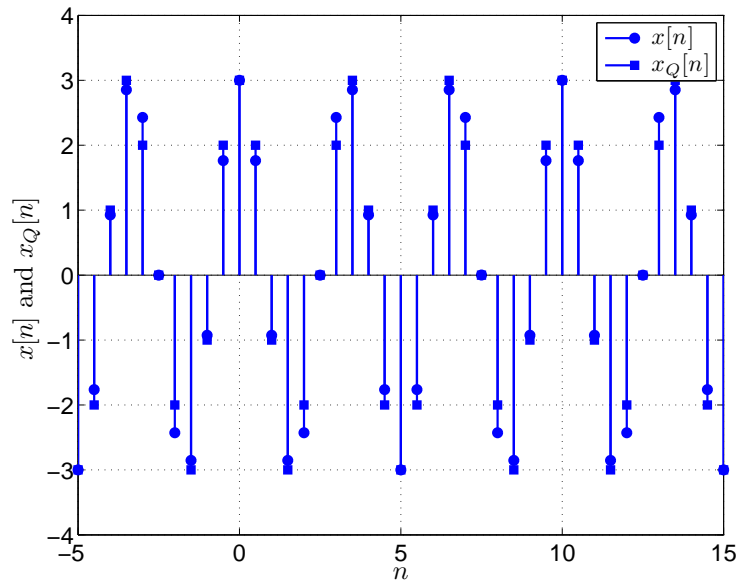
Σχ. 1.1. Σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\} = \{3 \cos(2\pi 0.2t)\}$ και $\{y(t)\} = \{3e^{-0.1t} \cos(2\pi 0.2t)\}$.



Σχ. 1.2. Σήματα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{3 \cos(2\pi 0.1n)\}$ και $\{y[n]\} = \{3e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.1n)\}$.

διακριτό (discrete) σήμα ή σήμα διακριτού χρόνου. Διακριτά σήματα συμβολίζονται από ακολουθίες $\{x[n]\}$. Η τιμή της ακολουθίας $\{x[n]\}$ τη χρονική στιγμή n_0 είναι το βαθμωτό $x[n_0]$.¹ Αν ένα σήμα παίρνει όλες τις δυνατές τιμές σε ένα διάστημα τιμών, τότε καλείται

¹Στη συντριπτική πλειοψηφία των συγγραμμάτων, το σύμβολο $x(t)$ ($x[n]$) χρησιμοποιείται για το συμβολι-



Σχ. 1.3. Σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{3 \cos(2\pi 0.1n)\}$ και ψηφιακό σήμα $\{x_Q[n]\} = \{\text{round}(x[n])\}$.

συνεχούς τιμής. Αν παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο τιμών, τότε καλείται *διακριτής τιμής*. Ένα σήμα διακριτού χρόνου, διακριτής τιμής καλείται *ψηφιακό* (digital).

Σήματα απαντώνται στη φύση, συνήθως, σε αναλογική μορφή. Ένα αναλογικό σήμα μετατρέπεται σε ψηφιακό μετά από *δειγματοληψία* (sampling) και *κβαντισμό* (quantization). Η ραγδαία ανάπτυξη της ψηφιακής τεχνολογίας έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αποδοτικών τεχνικών για την ταχεία και ακριβή επεξεργασία ψηφιακών δεδομένων.

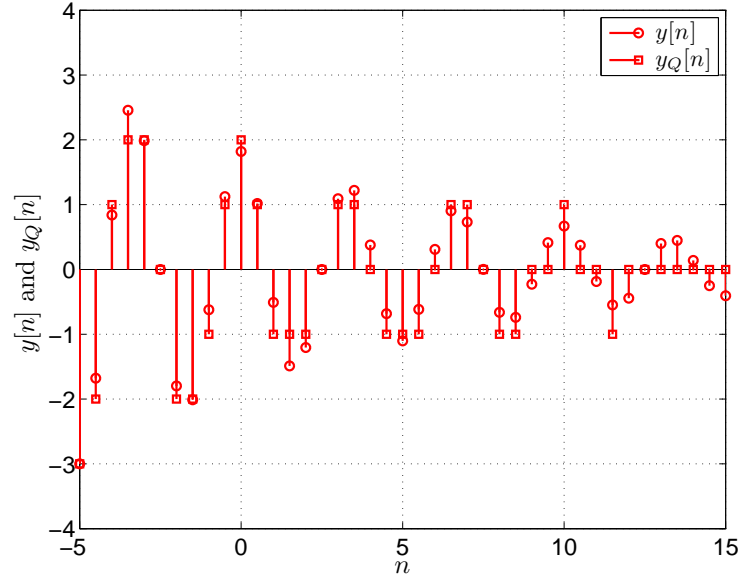
1.2 Σήματα διακριτού χρόνου

Ένα σήμα διακριτού χρόνου είναι μία συνάρτηση μίας ελεύθερης μεταβλητής, η οποία είναι ακέραιος, και αναπαρίσταται από μία ακολουθία $\{x[n]\}$. Η τιμή του σήματος τη χρονική στιγμή n_0 είναι

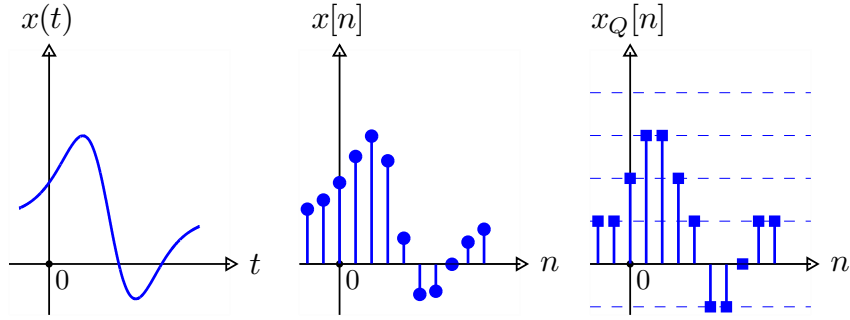
$$\{x[n]\}_{n=n_0} = x[n_0]. \quad (1.1)$$

Μερικά βασικά σήματα διακριτού χρόνου είναι τα ακόλουθα.

σμό του σήματος $\{x(t)\}$ ($\{x[n]\}$) καθώς και του στοιχείου $x(t)$ ($x[n]$). Θεωρούμε ότι αυτός ο διαφορούμενος συμβολισμός εισάγει δυσκολία στην κατανόηση ορισμένων βασικών σημείων της θεωρίας. Για το λόγο αυτό, θα διαχωρίζουμε το σήμα, $\{x(t)\}$ ή $\{x[n]\}$, από τις τιμές του, $x(t)$ ή $x[n]$.

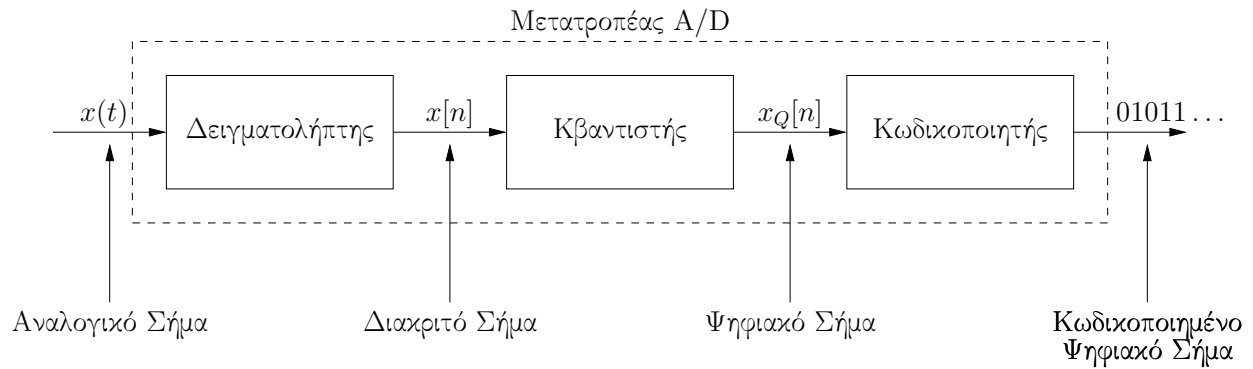


Σχ. 1.4. Σήμα διακριτού χρόνου $\{y[n]\} = \{3e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.1n)\}$ και ψηφιακό σήμα $\{y_Q[n]\} = \{\text{round}(y[n])\}$.

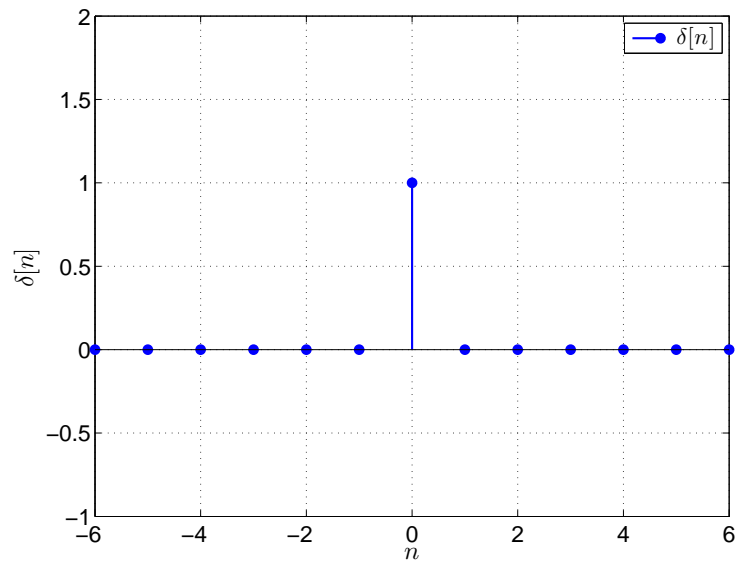


Σχ. 1.5. Ψηφιοποίηση σήματος.

1. Σήμα μοναδιαίου παλμού ή χρουστικό σήμα $\{\delta[n]\}$, με $\delta[n] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$
2. Σήμα μοναδιαίου βήματος $\{u[n]\}$, με $u[n] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$
3. Σήμα μοναδιαίας κλίμακος $\{u_r[n]\}$, με $u_r[n] = \begin{cases} n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$
4. Εκθετικό σήμα $\{e[n]\}$, με $e[n] = a^{|n|}$.



Σχ. 1.6. Μετατροπέας αναλογικού-σε-ψηφιακό.



Σχ. 1.7. Σήμα μοναδιαίου παλμού ή κρουστικό σήμα.

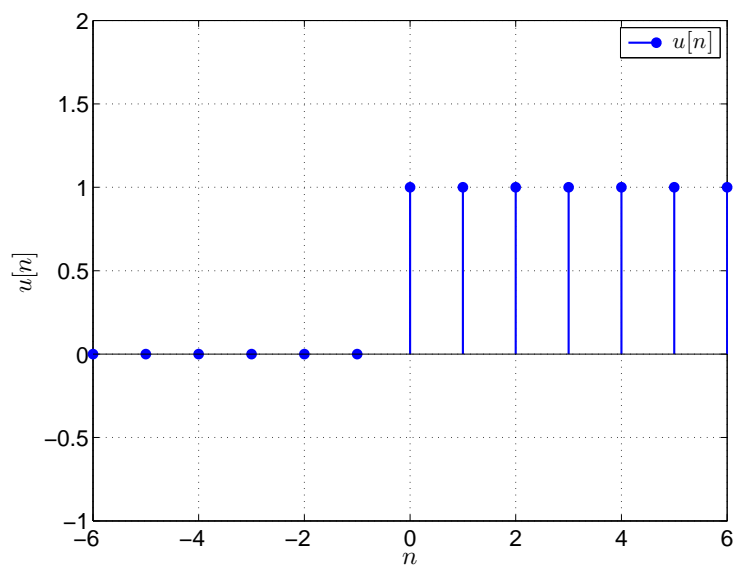
1.2.1 Ενέργεια, ισχύς, περιοδικότητα

Η **ενέργεια** (energy) ενός διακριτού σήματος $\{x[n]\}$ ορίζεται ως

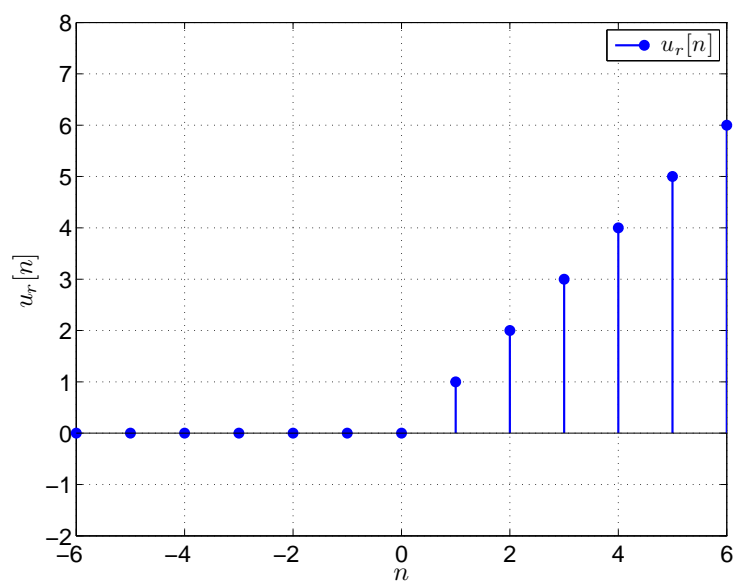
$$\mathcal{E}_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (1.2)$$

Αν $\mathcal{E}_x < \infty$, τότε το $\{x[n]\}$ καλείται σήμα πεπερασμένης ενέργειας. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει οι τιμές $|x[n]|$ να τείνουν “αρκετά γρήγορα” στο μηδέν, για μεγάλο $|n|$.

Παράδειγμα 1.1. Η ενέργεια του σήματος $\{x[n]\}$ με $x[n] = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ είναι



Σχ. 1.8. Σήμα μοναδιαίου βήματος.



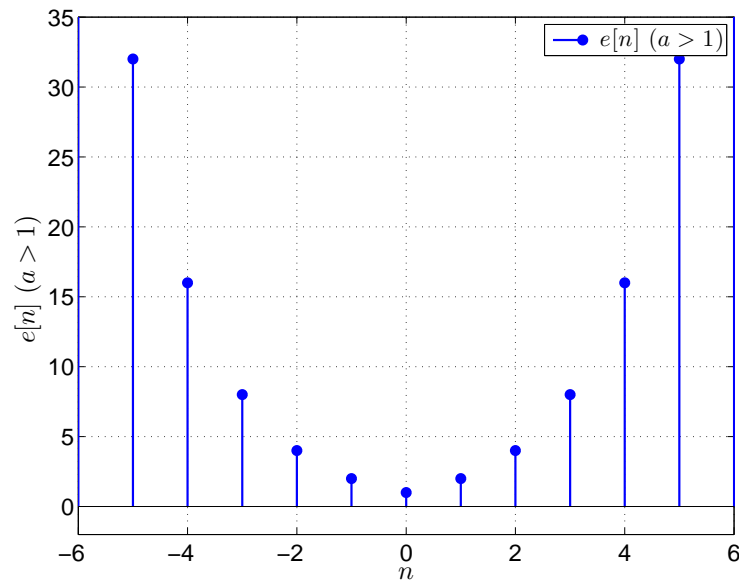
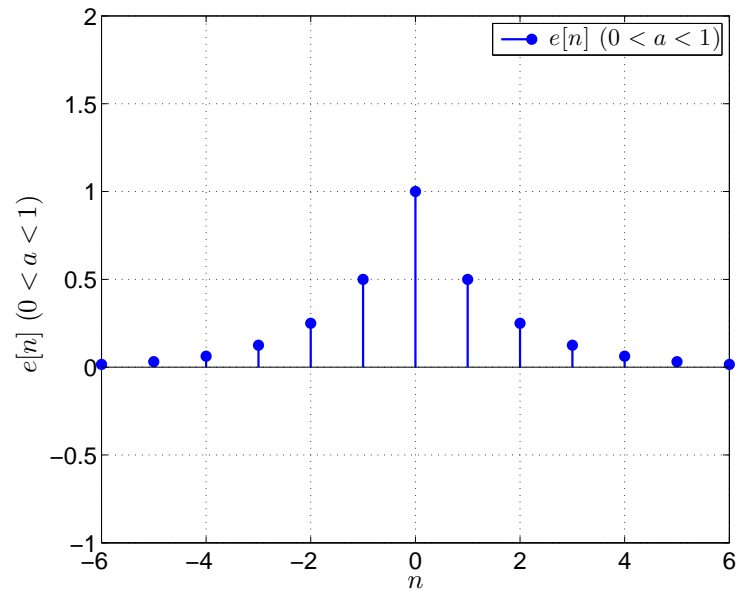
Σχ. 1.9. Σήμα μοναδιαίας κλίμακος.

$$E_x = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385.$$

Η ενέργεια του σήματος $\{x[n]\}$ με $x[n] = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)$ είναι $E_x = \infty$.

Η ενέργεια του εκθετικού σήματος $\{x[n]\}$ με $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$ είναι

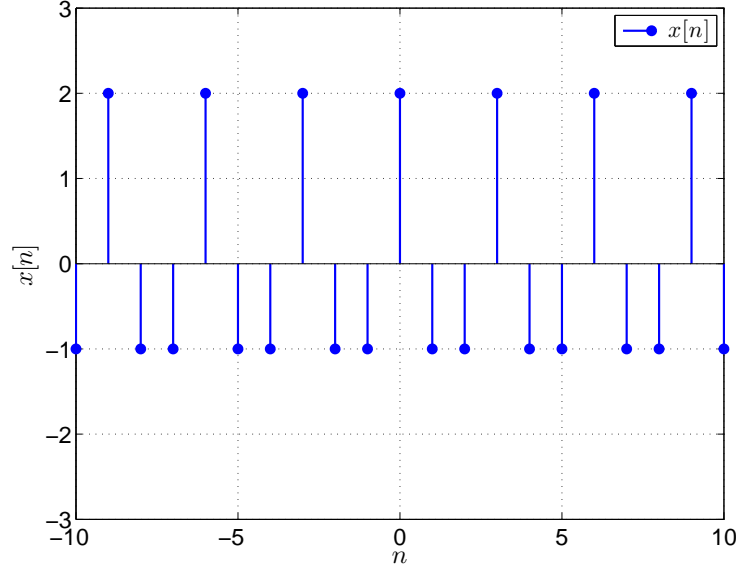
$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2|n|} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n - 1 = 2 \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - 1 = \frac{5}{3}. \quad (1.3)$$

Σχ. 1.10. Εκθετικό σήμα $\{e[n]\} = \{a^{|n|}\}$ με $a > 1$.Σχ. 1.11. Εκθετικό σήμα $\{e[n]\} = \{a^{|n|}\}$ με $0 < a < 1$.

◇

Μερικά σήματα άπειρης ενέργειας έχουν πεπερασμένη **ισχύ** (power), η οποία ορίζεται ως εξής.

$$\mathcal{P}_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2. \quad (1.4)$$



Σχ. 1.12. Το περιοδικό σήμα $\{x[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)\} = \{2 \cos(2\pi \frac{4}{3}n)\}$.

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι σήματα διακριτού χρόνου και πεπερασμένης ενέργειας έχουν μηδενική ισχύ (δηλ., αν $E_x < \infty$, τότε $P_x = 0$). Ομοίως, σήματα διακριτού χρόνου και θετικής ισχύος έχουν άπειρη ενέργεια (δηλ., αν $P_x > 0$, τότε $E_x = \infty$). Προφανώς, σήματα διακριτού χρόνου και άπειρης ισχύος έχουν άπειρη ενέργεια (δηλ., αν $P_x = \infty$, τότε $E_x = \infty$).

Ένα σήμα $\{x[n]\}$ καλείται **περιοδικό** (periodic) με περίοδο N , αν υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε

$$x[n + N] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.5)$$

Το μικρότερο δυνατό θετικό N που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση καλείται **θεμελιώδης περίοδος** (fundamental period). Αν δεν υπάρχει N που να ικανοποιεί τη σχέση αυτή, τότε το σήμα καλείται **απεριοδικό** (aperiodic).

Παράδειγμα 1.2. Το σήμα $\{x[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)\}$ λαμβάνει τις τιμές $-1, 2, 2, -1, 2, 2, \dots$, επομένως είναι περιοδικό με περίοδο $N = 3$. Έστω το σήμα $\{y[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{4}{3}n)\}$. Παρατηρήστε ότι $y[n] = 2 \cos(2\pi \frac{4}{3}n) = 2 \cos(2\pi(1 + \frac{1}{3})n) = 2 \cos(2\pi n + 2\pi \frac{1}{3}n) = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n) = x[n]$. Επομένως, το $\{y[n]\}$ λαμβάνει τις τιμές $-1, 2, 2, -1, 2, 2, \dots$ και είναι περιοδικό με περίοδο $N = 3$, επίσης, όπως φαίνεται και στο Σχ. 1.12. \diamond

Τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου είναι σήματα πεπερασμένης ισχύος. Αν N είναι περίοδος του $\{x[n]\}$, τότε

$$P_x = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2. \quad (1.6)$$

Παράδειγμα 1.3. Η ισχύς του σήματος $\{x[n]\}$ με $x[n] = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)$ είναι

$$P_x = \frac{1}{3}(x^2[0] + x^2[1] + x^2[2]) = \frac{1}{3}(2^2 + (-1)^2 + (-1)^2) = 2. \quad (1.7)$$

Η ισχύς του εκθετικού σήματος $\{x[n]\}$ με $x[n] = (\frac{1}{2})^{|n|}$ είναι $P_x = 0$ (εφόσον $E_x = \frac{5}{3}$ όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 1.1). \diamond

1.2.2 Απλές πράξεις διακριτών σημάτων

Χρονική ολίσθηση του $\{x[n]\}$ προκύπτει αντικαθιστώντας την ελεύθερη μεταβλητή n με $n-k$, όπου k δεδομένος ακέραιος. Η πράξη αυτή συμβολίζεται ως

$$\{y[n]\} = \{x[n-k]\} \quad \text{ή ισοδύναμα} \quad [y[n] = x[n-k], \forall n \in \mathbb{Z}]. \quad (1.8)$$

Η αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής n με $n-k$ σημαίνει μετατόπιση του σήματος $\{x[n]\}$ κατά $|k|$ θέσεις. Αν το k είναι θετικός ακέραιος, τότε προκύπτει ολίσθηση προς τα δεξιά (καθυστέρηση) κατά k χρονικές μονάδες. Αν το k είναι αρνητικός ακέραιος, τότε προκύπτει ολίσθηση προς τα αριστερά (προώθηση) κατά $|k|$ χρονικές μονάδες.

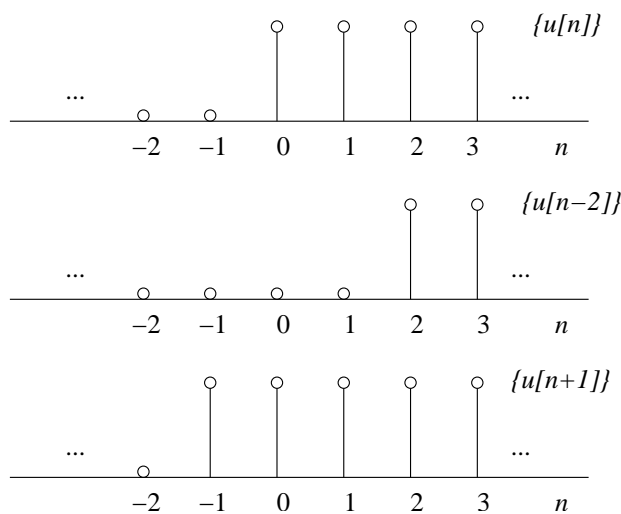
Και στις δύο περιπτώσεις, το δείγμα της $\{x[n]\}$ που βρισκόταν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή, το $x[0]$, θα μετακινηθεί στη θέση k . Φυσικά, ανάλογη μετατόπιση θα υποστούν όλα τα δείγματα της $\{x[n]\}$.

Η τιμή του $\{x[n-k]\}$ τη χρονική στιγμή $n = n_0$ είναι

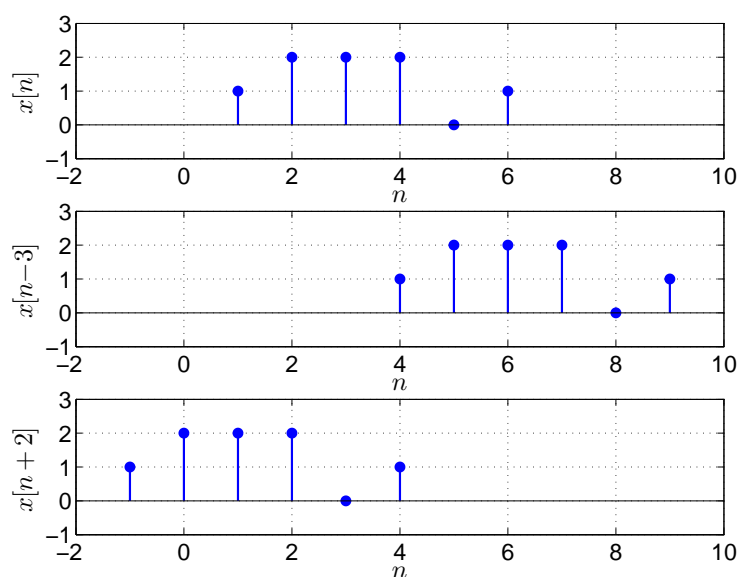
$$\{x[n-k]\}_{n=n_0} = x[n_0-k]. \quad (1.9)$$

Ανάκλαση ως προς τον κατακόρυφο άξονα προκύπτει με αντικατάσταση του n από $-n$ και συμβολίζεται ως

$$\{y[n]\} = \{x[-n]\}, \quad [y[n] = x[-n], \forall n \in \mathbb{Z}]. \quad (1.10)$$

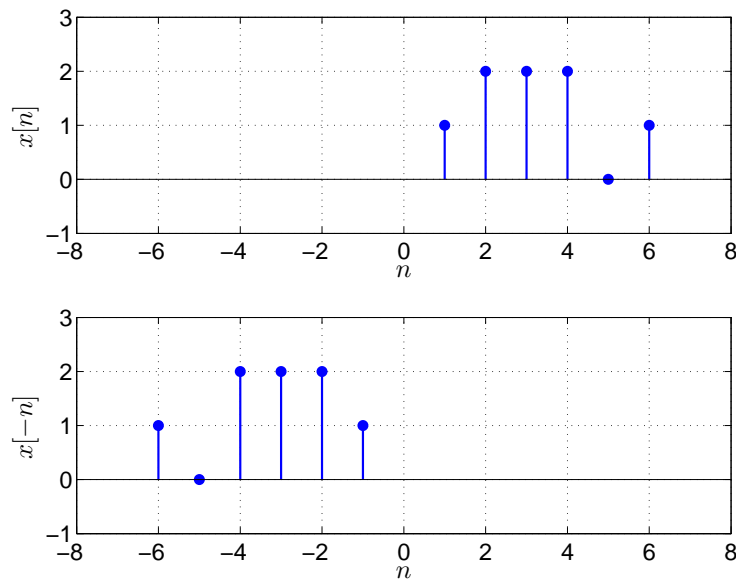


Σχ. 1.13. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{u[n]\}$, $\{u[n-2]\}$, και $\{u[n+1]\} = \{u[n-(-1)]\}$.



Σχ. 1.14. Χρονική ολίσθηση (μετατόπιση) του σήματος $\{x[n]\}$ κατά 3 και -2 .

Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, πολύ σημαντικός είναι ο υπολογισμός του σήματος $\{y[n]\} = \{x[k-n]\}$, όπου k δεδομένος ακέραιος. Αν το k είναι θετικός ακέραιος, τότε το $\{x[k-n]\}$ προκύπτει από το $\{x[-n]\}$ μετά από ολίσθηση κατά k θέσεις προς τα δεξιά, ενώ αν το k είναι αρνητικός ακέραιος, τότε το $\{x[k-n]\}$ προκύπτει από το $\{x[-n]\}$ μετά από ολίσθηση κατά $|k|$ θέσεις προς τα αριστερά.



Σχ. 1.15. Ανάκλαση του σήματος $\{x[n]\}$ ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

Και στις δύο περιπτώσεις, το δείγμα του $\{x[-n]\}$ που βρισκόταν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή, το $x[0]$, θα μετακινηθεί στη θέση k . Ανάλογη μετατόπιση θα υποστούν όλα τα δείγματα του $\{x[-n]\}$.

Η τιμή του $\{x[k - n]\}$ τη χρονική στιγμή $n = n_0$ είναι

$$\{x[k - n]\}_{n=n_0} = x[k - n_0]. \quad (1.11)$$

Κλιμάκωση πλάτους ενός σήματος από μία σταθερά A προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος του σήματος με A

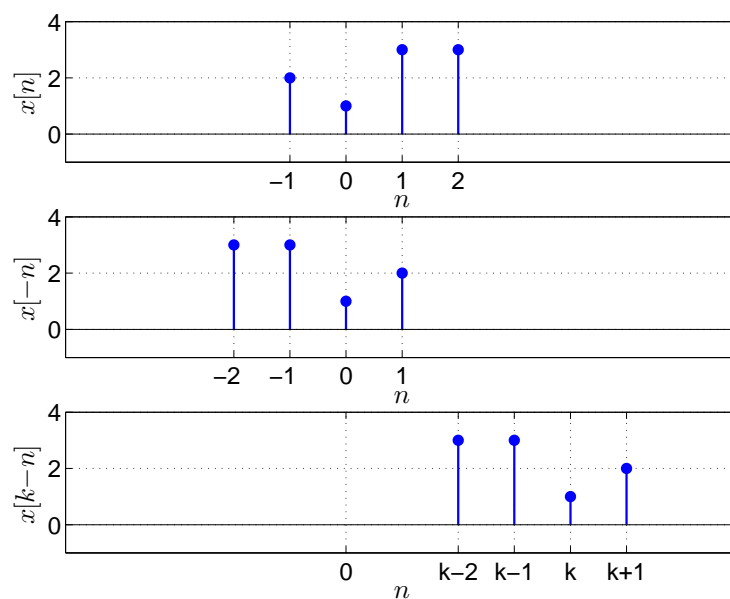
$$A \{x[n]\} = \{A x[n]\}. \quad (1.12)$$

Άθροισμα δύο σημάτων $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$ είναι ένα σήμα η τιμή του οποίου σε κάθε χρονική στιγμή είναι το άθροισμα των τιμών των δύο σημάτων την ίδια χρονική στιγμή

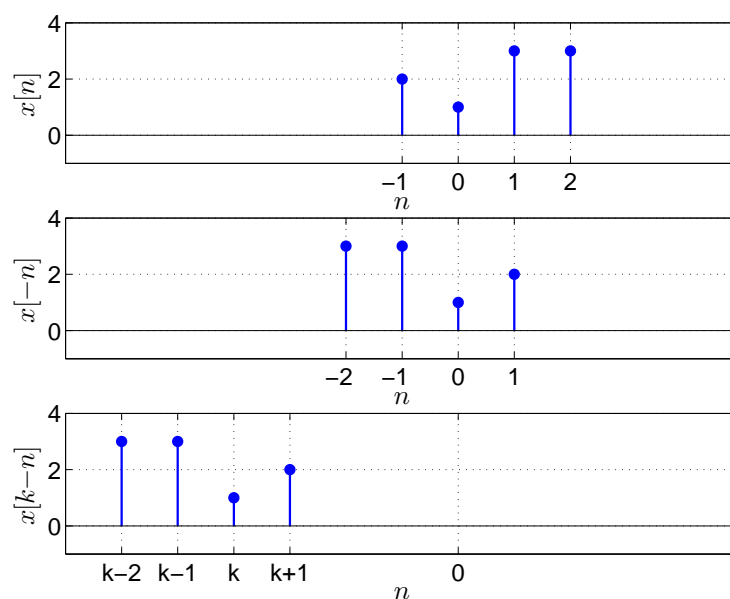
$$\{x_1[n]\} + \{x_2[n]\} = \{x_1[n] + x_2[n]\}. \quad (1.13)$$

Γινόμενο δύο σημάτων $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$ είναι ένα σήμα η τιμή του οποίου σε κάθε χρονική στιγμή είναι το γινόμενο των τιμών των δύο σημάτων την ίδια χρονική στιγμή

$$\{x_1[n]\} \cdot \{x_2[n]\} = \{x_1[n] x_2[n]\}. \quad (1.14)$$



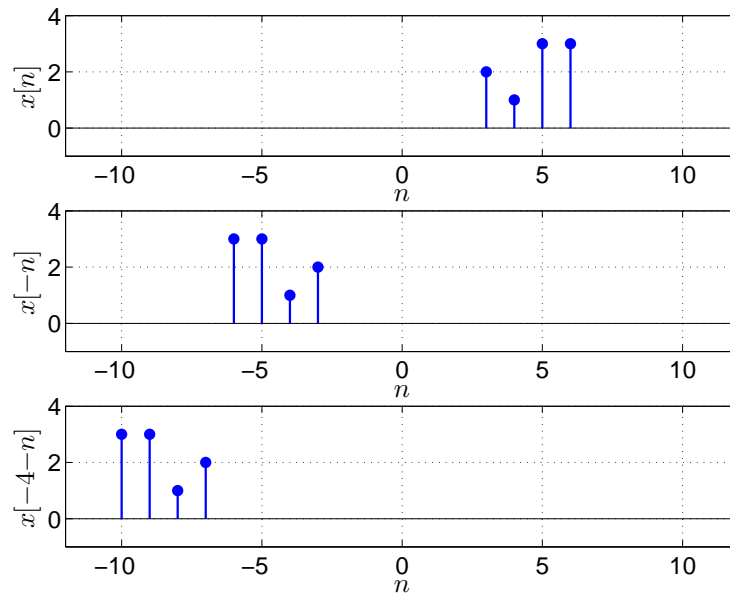
Σχ. 1.16. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x[k-n]\}$ όπου $k > 0$.



Σχ. 1.17. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x[k-n]\}$ όπου $k < 0$.

Για παράδειγμα, το σήμα $\{y[n]\}$ που προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$,

$$\{y[n]\} = A_1 \{x_1[n]\} + A_2 \{x_2[n]\}, \quad (1.15)$$

Σχ. 1.18. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x[-4-n]\}$.

υπολογίζεται ως εξής.

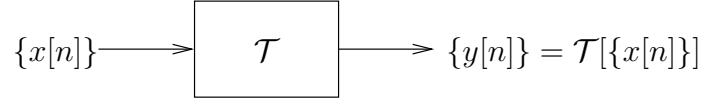
$$\{y[n]\} = A_1 \{x_1[n]\} + A_2 \{x_2[n]\} = \{A_1 x_1[n]\} + \{A_2 x_2[n]\} = \{A_1 x_1[n] + A_2 x_2[n]\}. \quad (1.16)$$

1.3 Συστήματα διακριτού χρόνου

Σύστημα διακριτού χρόνου (ΣΔΧ) καλείται κάθε οντότητα (υλικό ή λογισμικό) η οποία ενεργεί σε ένα σήμα εισόδου $\{x[n]\}$ και το μετασχηματίζει στο σήμα εξόδου $\{y[n]\}$. Ο μετασχηματισμός αυτός συμβολίζεται ως

$$\{y[n]\} = \mathcal{T}[\{x[n]\}]. \quad (1.17)$$

Υπάρχουν αρκετοί τρόποι περιγραφής της λειτουργίας συστημάτων. Η περιγραφή **εισόδου–εξόδου** (input-output) είναι μία περιγραφή του συστήματος στο πεδίο του χρόνου, η οποία εστιάζει στη συμπεριφορά στα άκρα του συστήματος (είσοδος – έξοδος), αγνοώντας την εσωτερική περιγραφή ή υλοποίηση του συστήματος.



Σχ. 1.19. Σύστημα διακριτού χρόνου.

1.3.1 Στατικά και δυναμικά ΣΔΧ

Ένα ΣΔΧ καλείται **στατικό** (static) ή σύστημα **χωρίς μνήμη** (memoryless) αν η έξοδος του τη χρονική στιγμή n εξαρτάται μόνο από την είσοδο την ίδια χρονική στιγμή. Για παράδειγμα, τα συστήματα που περιγράφονται από τις σχέσεις εισόδου–εξόδου (όπου $\{x[n]\}$ είσοδος και $\{y[n]\}$ έξοδος)

$$\{y[n]\} = a\{x[n]\}, \quad [y[n] = a x[n], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.18)$$

$$\{y[n]\} = \{x^2[n]\}, \quad [y[n] = x^2[n], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.19)$$

είναι στατικά. Σε κάθε άλλη περίπτωση, το σύστημα καλείται **δυναμικό** (dynamic) ή σύστημα με μνήμη, όπως, για παράδειγμα, τα παρακάτω συστήματα.

$$\{y[n]\} = \{x[n] + 2x[n-1]\}, \quad [y[n] = x[n] + 2x[n-1], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.20)$$

$$\{y[n]\} = \{0.5y[n-1] + x[n]\}, \quad [y[n] = 0.5y[n-1] + x[n], \forall n \in \mathbb{Z}]. \quad (1.21)$$

1.3.2 Χρονικά αμετάβλητα και χρονικά μεταβαλλόμενα ΣΔΧ

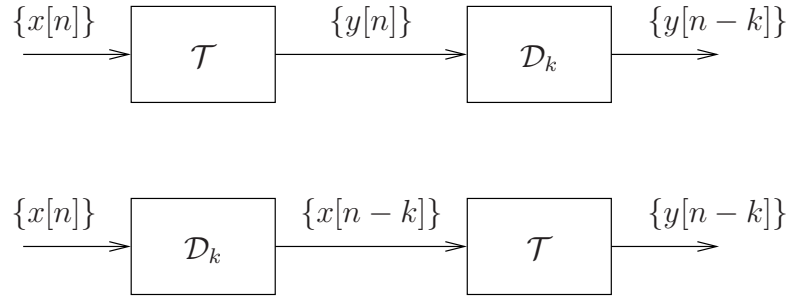
Ένα ΣΔΧ, που αρχίζει τη λειτουργία του από την ηρεμία, καλείται **χρονικά αμετάβλητο** (XA) (time-invariant) αν και μόνο αν

$$\{x[n]\} \xrightarrow{\mathcal{T}} \{y[n]\} \quad (1.22)$$

συνεπάγεται ότι

$$\{x[n-k]\} \xrightarrow{\mathcal{T}} \{y[n-k]\} \quad (1.23)$$

για κάθε σήμα εισόδου $\{x[n]\}$ και κάθε ολίσθηση k . Διαφορετικά, καλείται **χρονικά μεταβαλλόμενο** (XM) (time-varying).



Σχ. 1.20. Χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

Για να ελέγξουμε αν ένα ΣΔΧ είναι ΧΑ, υπολογίζουμε την έξοδο $\{y_k[n]\}$ του συστήματος για είσοδο $\{x_k[n]\} = \{x[n-k]\}$. Αν $\{y_k[n]\} = \{y[n-k]\}$, για κάθε είσοδο $\{x[n]\}$ και κάθε ολίσθηση k , τότε το ΣΔΧ είναι ΧΑ. Διαφορετικά, είναι ΧΜ.

Παράδειγμα 1.4. Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y[n]\} = \{x[n] - x[n-1]\}, \quad [y[n] = x[n] - x[n-1], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.24)$$

είναι ΧΑ, διότι αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα

$$\{x_k[n]\} = \{x[n-k]\}, \quad [x_k[n] = x[n-k], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.25)$$

λαμβάνουμε ως έξοδο

$$\{y_k[n]\} = \{x_k[n] - x_k[n-1]\} = \{x[n-k] - x[n-k-1]\}. \quad (1.26)$$

Το σήμα αυτό ταυτίζεται με την καθυστερημένη κατά k χρονικές μονάδες έξοδο $\{y[n]\}$, διότι $\{y[n-k]\} = \{x[n-k] - x[n-k-1]\} = \{y_k[n]\}$.

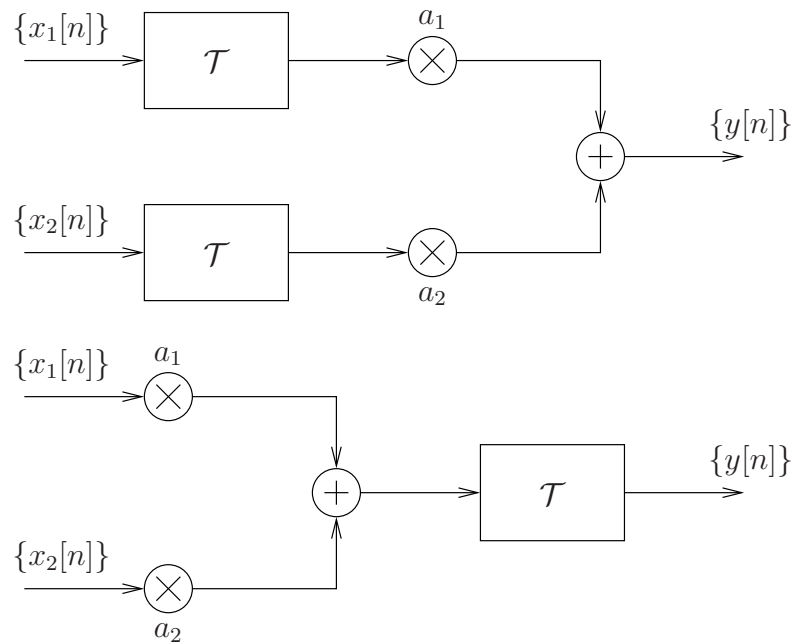
Ομοίως αποδεικνύεται ότι το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} + 2\{x[n-1]\}, \quad [y[n] = x[n] + 2x[n-1], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.27)$$

είναι ΧΑ. ◇

Παράδειγμα 1.5. Το ΣΔΧ που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y[n]\} = \{n x[n]\}, \quad [y[n] = n x[n], \forall n \in \mathbb{Z}] \quad (1.28)$$



Σχ. 1.21. Γραμμικό σύστημα.

είναι ΧΜ, διότι αν θέσουμε ως είσοδο $\{x_k[n]\} = \{x[n - k]\}$, λαμβάνουμε έξοδο

$$\{y_k[n]\} = \{n x_k[n]\} = \{n x[n - k]\}, \quad [y_k[n] = n x[n - k], \forall n \in \mathbb{Z}]. \quad (1.29)$$

Καθυστερώντας την έξοδο $\{y[n]\}$ κατά k χρονικές μονάδες, λαμβάνουμε

$$\{y[n - k]\} = \{(n - k) x[n - k]\}. \quad (1.30)$$

Άρα, γενικά $\{y_k[n]\} \neq \{y[n - k]\}$, και το εν λόγω σύστημα είναι ΧΜ. \diamond

1.3.3 Γραμμικά και μη γραμμικά ΣΔΧ

Ένα ΣΔΧ \mathcal{T} που αρχίζει τη λειτουργία του από την ηρεμία καλείται **γραμμικό** (linear) αν και μόνο αν

$$\mathcal{T}[a_1 \{x_1[n]\} + a_2 \{x_2[n]\}] = a_1 \mathcal{T}[\{x_1[n]\}] + a_2 \mathcal{T}[\{x_2[n]\}] \quad (1.31)$$

για κάθε βαθμωτά a_1, a_2 και ακολουθίες $\{x_1[n]\}, \{x_2[n]\}$. Διαφορετικά, καλείται **μη-γραμμικό** (nonlinear).

Η γραμμικότητα επεκτείνεται, μέσω επαγωγής, σε κάθε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό σημάτων. Δηλαδή, αν το \mathcal{T} είναι γραμμικό και

$$\{x_k[n]\} \xrightarrow{\mathcal{T}} \{y_k[n]\}, \quad k = 1, \dots, M, \quad (1.32)$$

τότε, για βαθμωτά a_k , $k = 1, \dots, M$, έχουμε

$$\{x[n]\} = \sum_{k=1}^M a_k \{x_k[n]\} \xrightarrow{\mathcal{T}} \{y[n]\} = \sum_{k=1}^M a_k \{y_k[n]\}. \quad (1.33)$$

Για να ελέγξουμε αν ένα $\Sigma\Delta X$ είναι γραμμικό, ελέγχουμε αν η έξοδος του συστήματος με είσοδο γραμμικό συνδυασμό εισόδων ισούται με τον αντίστοιχο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους εξόδων.

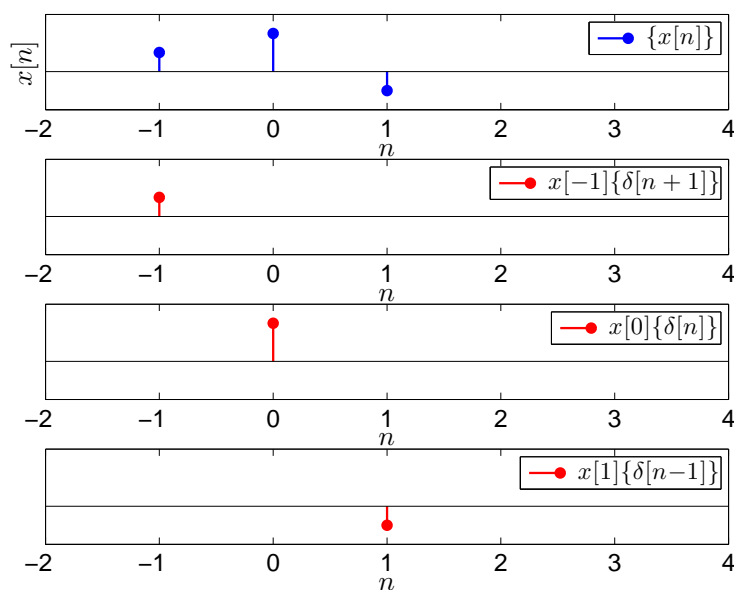
Παράδειγμα 1.6. Το $\Sigma\Delta X$ $\{y[n]\} = \{n x[n]\}$ είναι γραμμικό, διότι αν $\{y_1[n]\}$ και $\{y_2[n]\}$ δηλώνουν τις εξόδους για εισόδους $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$, αντίστοιχα (δηλαδή, αν $\{y_1[n]\} = \{n x_1[n]\}$ και $\{y_2[n]\} = \{n x_2[n]\}$), τότε η έξοδος $\{y[n]\}$ για είσοδο $a_1 \{x_1[n]\} + a_2 \{x_2[n]\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \{y[n]\} &= \mathcal{T}[a_1 \{x_1[n]\} + a_2 \{x_2[n]\}] = \mathcal{T}[\{a_1 x_1[n]\} + \{a_2 x_2[n]\}] \\ &= \mathcal{T}[\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\}] = \{n (a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n])\} \\ &\stackrel{!}{=} a_1 \{n x_1[n]\} + a_2 \{n x_2[n]\} = a_1 \mathcal{T}[\{x_1[n]\}] + a_2 \mathcal{T}[\{x_2[n]\}]. \end{aligned} \quad (1.34) \quad \diamond$$

Παράδειγμα 1.7. Το $\Sigma\Delta X$ $\{y[n]\} = \{x^2[n]\}$ είναι μη-γραμμικό, διότι αν $\{y_1[n]\}$ και $\{y_2[n]\}$ δηλώνουν τις εξόδους για εισόδους $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$, αντίστοιχα (δηλαδή, αν $\{y_1[n]\} = \{x_1^2[n]\}$ και $\{y_2[n]\} = \{x_2^2[n]\}$), τότε η έξοδος $\{y[n]\}$ για είσοδο $a_1 \{x_1[n]\} + a_2 \{x_2[n]\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \{y[n]\} &= \mathcal{T}[a_1 \{x_1[n]\} + a_2 \{x_2[n]\}] = \mathcal{T}[\{a_1 x_1[n]\} + \{a_2 x_2[n]\}] \\ &= \mathcal{T}[\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\}] = \{(a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n])^2\} \\ &\neq a_1 \{x_1^2[n]\} + a_2 \{x_2^2[n]\} = a_1 \mathcal{T}[\{x_1[n]\}] + a_2 \mathcal{T}[\{x_2[n]\}]. \end{aligned} \quad (1.35) \quad \diamond$$

Παράδειγμα 1.8. Έστω το μηδενικό σήμα $\{0[n]\}$ με τιμή $0[n] \triangleq 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Αν το σύστημα διακριτού χρόνου \mathcal{T} είναι γραμμικό, τότε $\mathcal{T}[\{0[n]\}] = \{0[n]\}$ γιατί $\mathcal{T}[\{0[n]\}] =$



Σχ. 1.22. Ανάλυση σήματος σε άθροισμα παλμικών σημάτων.

$T[0\{x[n]\}] = 0T[\{x[n]\}] = \{0[n]\}$. Επομένως, η έξοδος ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος με είσοδο τη μηδενική ακολουθία $\{0[n]\} = \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ είναι η ίδια η μηδενική ακολουθία. \diamond

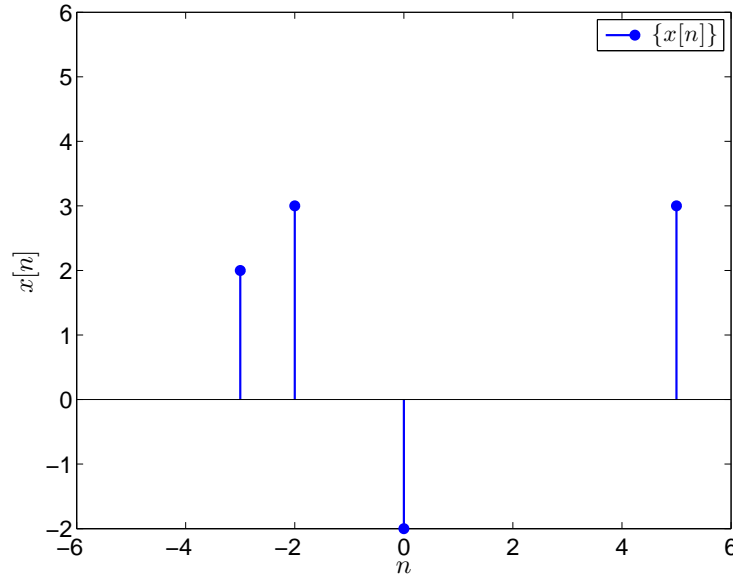
Απλά, θα λέγαμε ότι ένα ΣΔΧ είναι γραμμικό όταν θέτοντας ως είσοδο ένα γραμμικό συνδυασμό εισόδων λαμβάνουμε στην έξοδο τον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των επιμέρους εξόδων.

1.4 Ανάλυση γραμμικών χρονικά αμετάβλητων συστημάτων

1.4.1 Ανάλυση σημάτων διακριτού χρόνου σε παλμούς

Όπως είναι φανερό από το Σχ. 1.22, οποιοδήποτε σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ μπορεί να αναλυθεί σε άθροισμα σημάτων μοναδιαίου παλμού ως εξής

$$\boxed{\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}. \quad (1.36)}$$

Σχ. 1.23. Το σήμα $\{x[n]\}$ του Παραδείγματος 1.9.

Επιλέγοντας τη χρονική στιγμή $n = n_0$ στην (1.36), λαμβάνουμε

$$\{x[n]\}_{n=n_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}_{n=n_0} \Rightarrow x[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n_0-k] \quad (1.37)$$

ή, ισοδύναμα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (1.38)$$

Παράδειγμα 1.9. Το σήμα $\{x[n]\}$ με τιμή $x[n] = \begin{cases} 2, & n = -3, \\ 3, & n = -2 \text{ ή } 5, \\ -2, & n = 0, \end{cases}$ του Σχ. 1.23

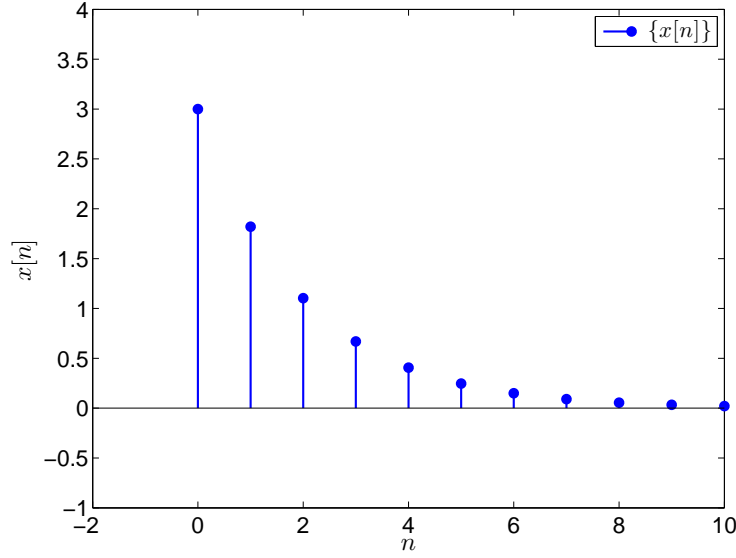
μπορεί να γραφεί ως

$$\{x[n]\} = 2\{\delta[n+3]\} + 3\{\delta[n+2]\} - 2\{\delta[n]\} + 3\{\delta[n-5]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}. \quad (1.39)$$

Ομοίως, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$x[n] = 2\delta[n+3] + 3\delta[n+2] - 2\delta[n] + 3\delta[n-5] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (1.40)$$

◇

Σχ. 1.24. Το σήμα $\{x[n]\}$ του παραδείγματος 1.10.

Παράδειγμα 1.10. Το σήμα $\{x[n]\}$ με τιμή $x[n] = 3e^{-\frac{1}{2}n}u[n] \forall n \in \mathbb{Z}$ του Σχ. 1.24 μπορεί να γραφεί ως

$$\{x[n]\} = 3\{\delta[n]\} + 3e^{-\frac{1}{2}}\{\delta[n-1]\} + 3e^{-1}\{\delta[n-2]\} + 3e^{-\frac{3}{2}}\{\delta[n-3]\} + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}. \quad (1.41)$$

Ομοίως, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, έχουμε

$$x[n] = 3\delta[n] + 3e^{-\frac{1}{2}}\delta[n-1] + 3e^{-1}\delta[n-2] + 3e^{-\frac{3}{2}}\delta[n-3] + \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]. \quad (1.42)$$

◇

1.4.2 Απόκριση ΓΧΑ ΣΔΧ σε αυθαίρετες εισόδους – Συνέλιξη

Έστω $\{h_k[n]\}$ η έξοδος ενός γραμμικού ΣΔΧ για είσοδο $\{\delta[n-k]\}$. Τότε, η έξοδος $\{y[n]\}$ για είσοδο $\{x[n]\}$ υπολογίζεται ως

$$\{y[n]\} = \mathcal{T}[\{x[n]\}] \stackrel{1}{=} \mathcal{T}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}\right] \stackrel{2}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\mathcal{T}[\{\delta[n-k]\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{h_k[n]\} \quad (1.43)$$

όπου στο σημείο 1 αναλύουμε το σήμα $\{x[n]\}$ σε άθροισμα παλμικών σημάτων και στο σημείο 2 χρησιμοποιούμε τη γραμμικότητα του ΣΔΧ. Επιλέγοντας τη χρονική στιγμή $n = n_0$, λαμβάνουμε

$$\{y[n]\}_{n=n_0} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \{h_k[n]\}_{n=n_0} \iff y[n_0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n_0] \quad (1.44)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h_k[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.} \quad (1.45)$$

Συνεπώς, για τον υπολογισμό της εξόδου ενός γραμμικού χρονικά μεταβαλλόμενου συστήματος είναι απαραίτητη η γνώση των ακολουθιών

$$\{h_k[n]\}, \quad \text{για} \quad -\infty < k < \infty. \quad (1.46)$$

Παρατηρούμε ότι $h_k[n]$ είναι το βάρος με το οποίο πολλαπλασιάζεται η είσοδος τη χρονική στιγμή k , $x[k]$, στον υπολογισμό της εξόδου τη χρονική στιγμή n , $y[n]$.

Όταν, επιπλέον, το εν λόγω σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, δηλαδή

$$\{h_k[n]\} = \{h[n - k]\}, \quad (1.47)$$

τότε

$$\{y[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \mathcal{T}[\{\delta[n - k]\}] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \{h[n - k]\}, \quad (1.48)$$

ή, ισοδύναμα,

$$\boxed{\boxed{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}.}} \quad (1.49)$$

Συνεπώς, ένα ΓΧΑ ΣΔΧ, που αρχίζει τη λειτουργία του από την ηρεμία, χαρακτηρίζεται πλήρως από την ακολουθία **χρουστικής απόκρισης** (impulse response) $\{h[n]\}$, διότι η γνώση της επιτρέπει τον υπολογισμό της εξόδου $\{y[n]\}$ του εν λόγω συστήματος, με είσοδο οποιαδήποτε δεδομένη ακολουθία $\{x[n]\}$ – στα πλαίσια του μαθήματος αυτού, θεωρούμε ότι οι ακολουθίες εισόδου είναι δεδομένες.

Η σχέση (1.48) ή, ισοδύναμα, η (1.49), η οποία υπολογίζει την έξοδο $\{y[n]\}$ ενός ΓΧΑ $\Sigma\Delta X$ με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ για είσοδο $\{x[n]\}$, καλείται **συνέλιξη** (convolution) και συμβολίζεται ως

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\} \iff y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.50)$$

Με την αλλαγή των δεικτών $m = n - k$, μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h[m]x[n-m] \iff \{y[n]\} = \{h[n]\} * \{x[n]\} \quad (1.51)$$

που δηλώνει ότι η συνέλιξη είναι αντιμεταθετική πράξη. Συνεπώς, το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T_1$ με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ και είσοδο $\{x[n]\}$ και το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T_2$ με κρουστική απόκριση $\{x[n]\}$ και είσοδο $\{h[n]\}$ έχουν την ίδια έξοδο $\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\} = \{h[n]\} * \{x[n]\}$.

Επιπλέον, μπορεί να αποδειχθεί ότι η συνέλιξη είναι προσεταιριστική πράξη και επιμεριστική ως προς την πρόσθεση, δηλαδή

$$\begin{aligned} (\{x[n]\} * \{h_1[n]\}) * \{h_2[n]\} &= \{x[n]\} * (\{h_1[n]\} * \{h_2[n]\}), \\ \{x[n]\} * (\{h_1[n]\} + \{h_2[n]\}) &= \{x[n]\} * \{h_1[n]\} + \{x[n]\} * \{h_2[n]\}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της συνέλιξης, το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T_1$ με κρουστική απόκριση $\{h_1[n]\}$ ακολουθούμενο από το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T_2$ με κρουστική απόκριση $\{h_2[n]\}$ ισοδυναμούν από κοινού με το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T$ με κρουστική απόκριση $\{h_1[n]\} * \{h_2[n]\}$. Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης, το άθροισμα των εξόδων δύο συστημάτων $\{h_1[n]\}$ και $\{h_2[n]\}$ με κοινή είσοδο $\{x[n]\}$ ισούται με την έξοδο του συστήματος με κρουστική απόκριση $\{h[n]\} = \{h_1[n]\} + \{h_2[n]\}$ όταν δέχεται την ίδια είσοδο $\{x[n]\}$.

Επίσης, μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι το ουδέτερο στοιχείο της συνέλιξης είναι η κρουστική ακολουθία $\{\delta[n]\}$, διότι

$$\{x[n]\} * \{\delta[n]\} = \{x[n]\}. \quad (1.53)$$

Αντίστοιχα, όταν έχουμε συνέλιξη ενός σήματος $\{x[n]\}$ με το καθυστερημένο κρουστικό

σήμα, δηλαδή $\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{\delta[n - n_0]\}$, τότε

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{Z}, \quad y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k - n_0] x[n - k] \stackrel{k' \leftarrow k - n_0}{=} \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \delta[k'] x[n - (k' + n_0)] \\ &\stackrel{k \leftarrow k'}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta[k] x[(n - n_0) - k] = \delta[0] x[n - n_0] = x[n - n_0] \end{aligned} \quad (1.54)$$

δηλαδή $\{y[n]\} = \{x[n - n_0]\}$, άρα

$$\{x[n]\} * \{\delta[n - n_0]\} = \{x[n - n_0]\}. \quad (1.55)$$

Η σχέση (1.55) αποδεικνύεται και διαφορετικά. Θεωρούμε ΓΧΑ ΣΔΧ με κρουστική απόκριση $\{x[n]\}$ και είσοδο $\{\delta[n - n_0]\}$. Εξ' ορισμού, η έξοδος θα είναι η καθυστερημένη κρουστική απόκριση $\{x[n - n_0]\}$. Εφόσον, $\{\text{Έξοδος}\} = \{\text{Είσοδος}\} * \{\text{Κρουστική Απόκριση}\}$, λαμβάνουμε $\{x[n - n_0]\} = \{\delta[n - n_0]\} * \{x[n]\}$.

Παράδειγμα 1.11. Να υπολογιστεί η συνέλιξη $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$, όταν

$$x[n] = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad \text{και} \quad y[n] = \begin{cases} a^n, & \text{αν } n \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.56)$$

Από τον τύπο της συνέλιξης (1.49), έχουμε ότι

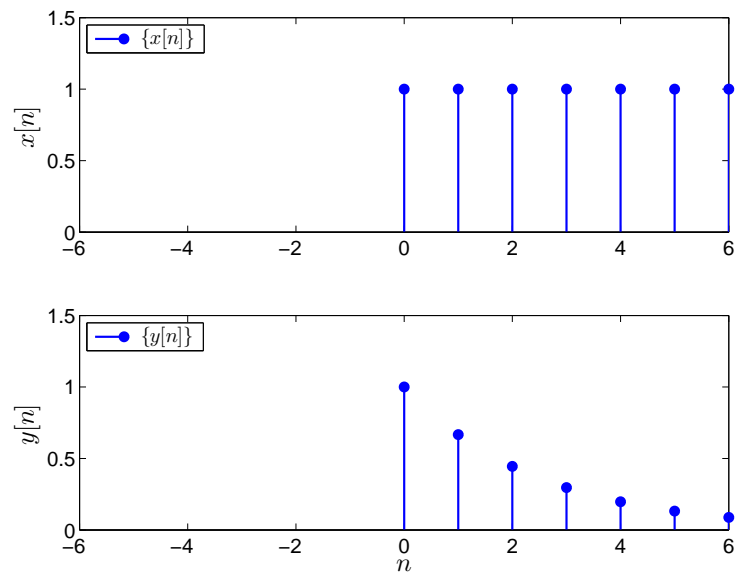
$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[n - k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.57)$$

Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, το $z[n]$ δίνεται από το άθροισμα των όρων της ακολουθίας

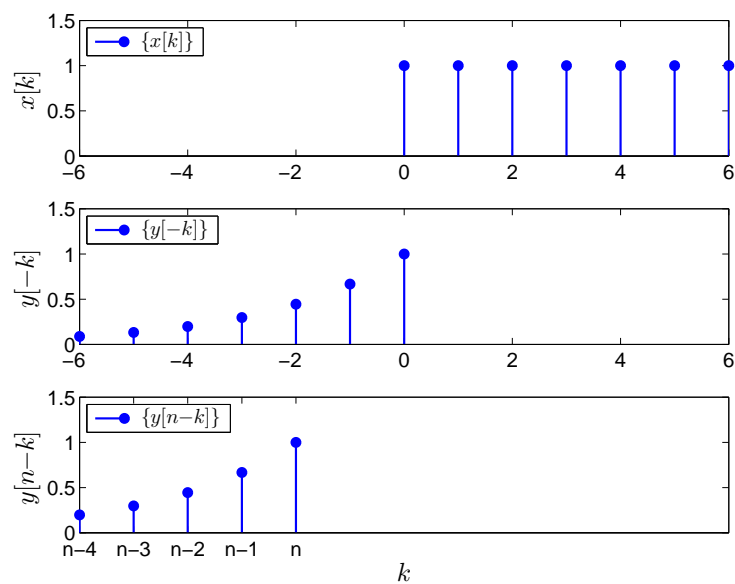
$$\{x[k] y[n - k]\} = \{x[k]\} \cdot \{y[n - k]\}, \quad (1.58)$$

όπου τώρα η ελεύθερη μεταβλητή είναι το k .

Άρα, για κάθε n , κατασκευάζουμε τις $\{x[k]\}$ και $\{y[n - k]\}$, υπολογίζουμε το γινόμενο τους (που είναι μία ακολουθία), και αθροίζουμε τα δείγματα του γινομένου. Το άθροισμα ισούται με $z[n]$.



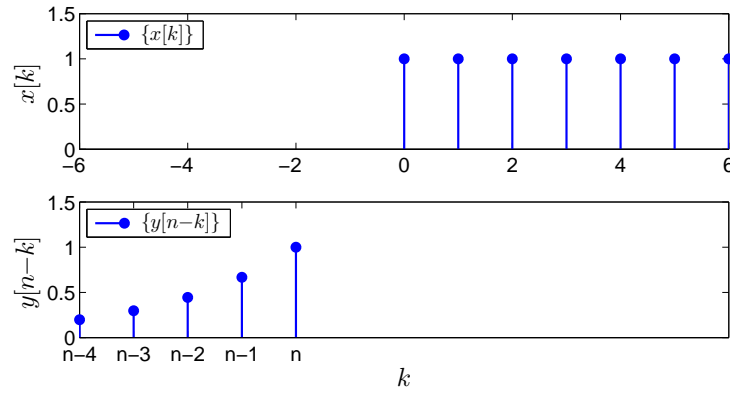
Σχ. 1.25. Σχηματική αναπαράσταση, ως προς n , των $\{x[n]\}$ και $\{y[n]\}$, για $0 < a < 1$.



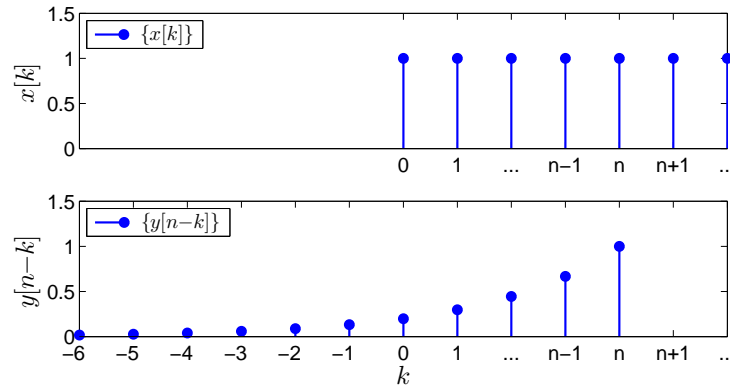
Σχ. 1.26. Κατασκευή ως προς k των σημάτων $\{y[-k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ σε αντιδιαστολή με το σήμα $\{x[k]\}$.

Στο Σχ. 1.26 σχεδιάζουμε ως προς k τα σήματα $\{y[-k]\}$ (που προκύπτει με ανάκλαση ως προς την αρχή των αξόνων) και $\{y[n-k]\}$ σε αντιδιαστολή με το σήμα $\{x[k]\}$. Παρατηρούμε ότι πρέπει να μελετήσουμε ξεχωριστά δύο περιπτώσεις, (α) $n < 0$ και (β) $n \geq 0$.

Όπως έχουμε δει, για $n < 0$, το σήμα $\{y[n-k]\}$ προκύπτει από το $\{y[-k]\}$ μετά από



Σχ. 1.27. Σχεδίαση των σημάτων $\{x[k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ ως προς k , για $n < 0$.

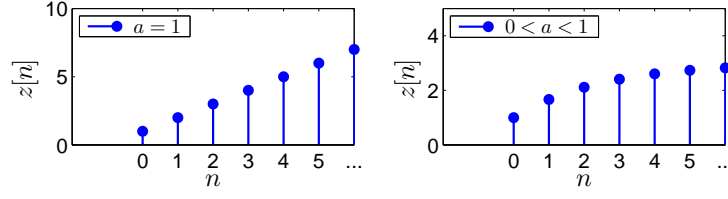


Σχ. 1.28. Σχεδίαση των σημάτων $\{x[k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ ως προς k , για $n \geq 0$.

ολίσθηση προς τα αριστερά κατά $|n|$ χρονικές μονάδες. Στην περίπτωση μας, με τη βοήθεια του Σχ. 1.27, παρατηρούμε ότι για $n < 0$, το γινόμενο $\{x[k]\} \cdot \{y[n-k]\}$ είναι η μηδενική ακολουθία, άρα $z[n] = 0$. Πράγματι,

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n 0 \cdot y[n-k] + \sum_{k=0}^{\infty} x[k] \cdot 0 = 0. \quad (1.59)$$

Για $n \geq 0$, το σήμα $\{y[n-k]\}$ προκύπτει από το $\{y[-k]\}$ μετά από ολίσθηση προς τα δεξιά κατά n χρονικές μονάδες. Σε αυτήν την περίπτωση, με τη βοήθεια του Σχ. 1.28, παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\{x[k]\} \cdot \{y[n-k]\}$ είναι μη μηδενικό στις θέσεις $k = 0, \dots, n$, και οι μη μηδενικές τιμές είναι, αντίστοιχα, $a^n, \dots, a^0 = 1$. Άρα, για $n \geq 0$,



Σχ. 1.29. Σχεδίαση του σήματος $\{z[n]\}$ για (α) $a = 1$ και (β) $0 < a < 1$.

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^n x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^n 1 \cdot a^{n-k} = \begin{cases} n+1, & a = 1 \\ \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, & a \neq 1. \end{cases} \quad (1.60)$$

Τελικά, έχουμε ότι

$$z[n] = \begin{cases} 0, & \text{για } n < 0 \\ n+1, & \text{για } n \geq 0 \text{ και } a = 1 \\ \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}, & \text{για } n \geq 0 \text{ και } a \neq 1. \end{cases} \quad (1.61)$$

Στο Σχ. 1.29 σχεδιάζουμε το σήμα $\{z[n]\}$ για τις περιπτώσεις (α) $a = 1$ και (β) $0 < a < 1$ (αν και το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για αρνητικές τιμές του a όπως και για τιμές του a μεγαλύτερες του 1).

Προφανώς, το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνουμε ανακλώντας και ολισθαίνοντας το σήμα $\{x[k]\}$. Στα Σχ. 1.30, 1.31, και 1.32, σχεδιάζονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις.

Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z[n] = \begin{cases} \infty, & a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a}, & -1 < a < 1, \end{cases} \quad (1.62)$$

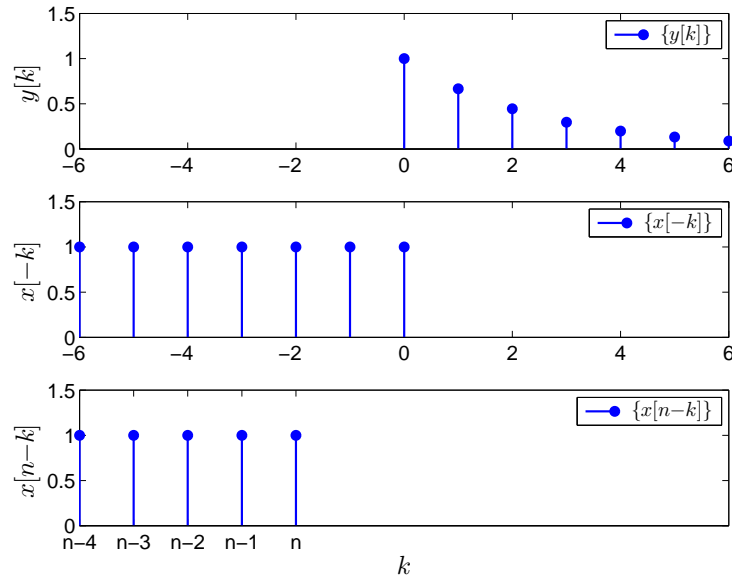
ενώ για $a \leq -1$ το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} z[n]$ δεν υπάρχει. \diamond

Παράδειγμα 1.12. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $\{x[n]\}$ και $\{y[n]\}$ με

$$x[n] = a^n (u[n] - u[n - N]), \quad y[n] = u[n + 2] \quad (1.63)$$

όπου $\{u[n]\}$ είναι το σήμα μοναδιαίου βήματος και N θετικός ακέραιος.

Θα συμβολίσουμε τη συνέλιξη με $\{z[n]\}$. Στο Σχ. 1.33, σχεδιάζουμε αρχικά τα σήματα $\{x[n]\}$ και $\{y[n]\}$. Ομοίως, στο Σχ. 1.34, σχεδιάζουμε αρχικά τα σήματα $\{x[k]\}$ και $\{y[k]\}$.



Σχ. 1.30. Κατασκευή ως προς k των σημάτων $\{x[-k]\}$ και $\{x[n-k]\}$ σε αντιδιαστολή με το σήμα $\{y[k]\}$.

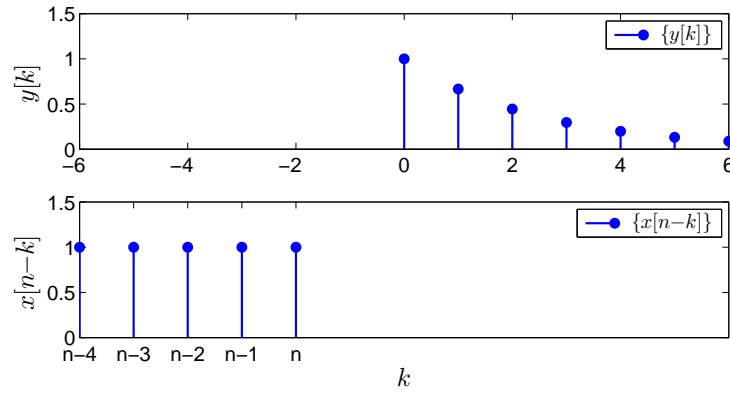
Για τον υπολογισμό της συνέλιξης, θα πρέπει να σχεδιάσουμε τα σήματα $\{x[n-k]\}$ για διάφορες τιμές του n . Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις.

1. Για $n < -2$, το γινόμενο $\{y[k]\} \cdot \{x[n-k]\}$ είναι η μηδενική ακολουθία, συνεπώς, η συνέλιξη $z[n] = 0$.
2. Για $-2 \leq n < N-3$, το γινόμενο των $\{y[k]\}$ και $\{x[n-k]\}$ είναι μη μηδενικό στις θέσεις $k = -2, \dots, n$ και η συνέλιξη ισούται με

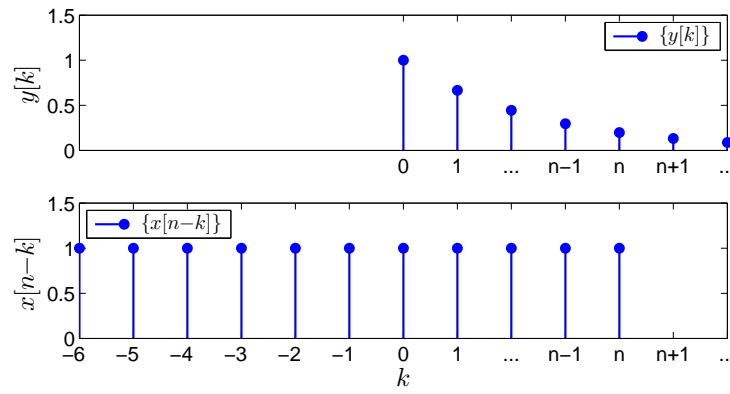
$$z[n] = 1 + a + \dots + a^{n+2} = \begin{cases} n+3, & \text{αν } a = 1 \\ \frac{a^{n+3} - 1}{a - 1}, & \text{αν } a \neq 1. \end{cases} \quad (1.64)$$

3. Για $n \geq N-3$, το γινόμενο $\{y[k]\} \cdot \{x[n-k]\}$ είναι μη μηδενικό στις θέσεις $k = n-N+1, \dots, n$ και η συνέλιξη ισούται με

$$z[n] = 1 + a + \dots + a^{N-1} = \begin{cases} N, & \text{αν } a = 1 \\ \frac{a^N - 1}{a - 1}, & \text{αν } a \neq 1. \end{cases} \quad (1.65)$$



Σχ. 1.31. Σχεδίαση των σημάτων $\{y[k]\}$ και $\{x[n-k]\}$ ως προς k , για $n < 0$.



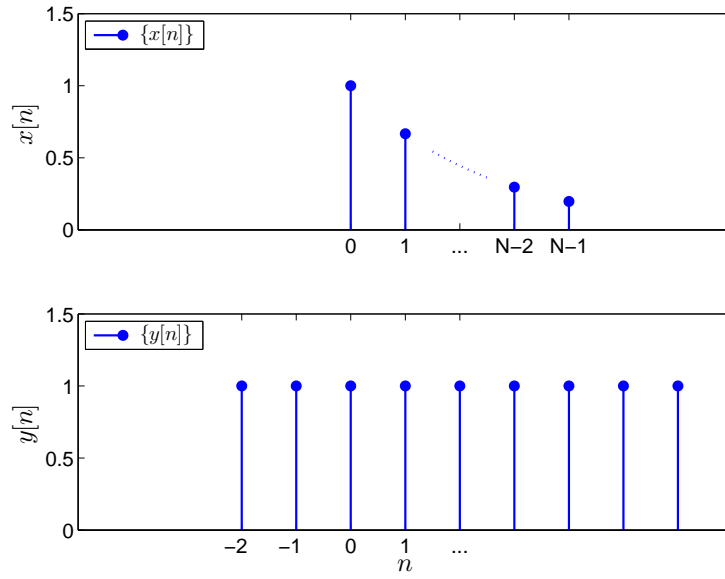
Σχ. 1.32. Σχεδίαση των σημάτων $\{y[k]\}$ και $\{x[n-k]\}$ ως προς k , για $n \geq 0$.

Τελικά, αν $a = 1$, έχουμε ότι

$$z[n] = \begin{cases} 0, & \text{για } n < -2 \\ n+3, & \text{για } -2 \leq n < N-3 \\ N, & \text{για } n \geq N-3, \end{cases} \quad (1.66)$$

ενώ, αν $a \neq 1$, έχουμε ότι

$$z[n] = \begin{cases} 0, & \text{για } n < -2 \\ \frac{a^{n+3} - 1}{a - 1}, & \text{για } -2 \leq n < N-3 \\ \frac{a^N - 1}{a - 1}, & \text{για } n \geq N-3. \end{cases} \quad (1.67)$$



Σχ. 1.33. Σχηματική αναπαράσταση, ως προς n , των $\{x[n]\}$ και $\{y[n]\}$, για $0 < a < 1$.

Στο Σχ. 1.35 σχεδιάζουμε το σήμα $\{z[n]\}$ για τις περιπτώσεις (α) $a = 1$ και (β) $0 < a < 1$ (αν και το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει και για αρνητικές τιμές του a όπως και για τιμές του a μεγαλύτερες του 1).

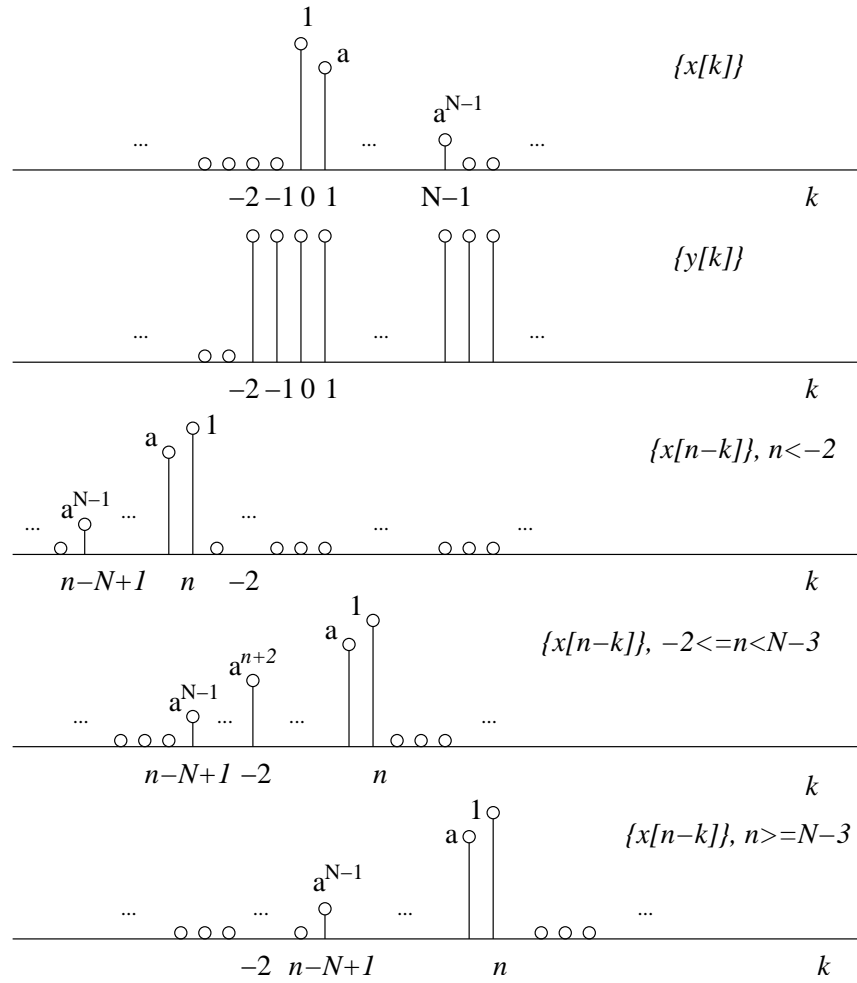
Προφανώς, το ίδιο αποτέλεσμα λαμβάνουμε ανακλώντας και ολισθαίνοντας την $\{y[n]\}$. Στα Σχ. 1.36-1.39, σχεδιάζονται οι αντίστοιχες γραφικές αναπαραστάσεις. Παρατηρούμε τα εξής.

1. Για $n < -2$, σύμφωνα με το Σχ. 1.37, το γινόμενο $\{x[k]\} \cdot \{y[n-k]\}$ είναι η μηδενική ακολουθία, συνεπώς $z[n] = 0$. Πράγματι,

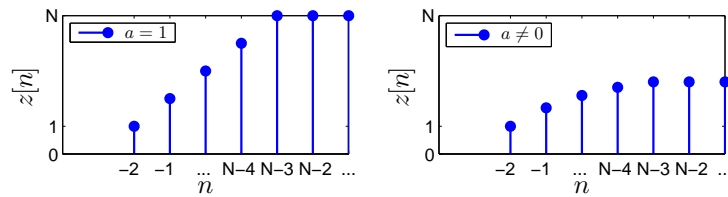
$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n+2} 0 \cdot y[n-k] + \sum_{k=0}^{N-1} x[k] \cdot 0 = 0. \quad (1.68)$$

2. Για $-2 \leq n < N-3$, σύμφωνα με το Σχ. 1.38, το γινόμενο $\{x[k]\} \cdot \{y[n-k]\}$ είναι μη μηδενικό για $k = 0, \dots, n+2$ και

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{n+2} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{n+2} a^k \cdot 1 = \begin{cases} n+3, & \text{αν } a = 1 \\ \frac{a^{n+3} - 1}{a - 1}, & \text{αν } a \neq 1. \end{cases} \quad (1.69)$$

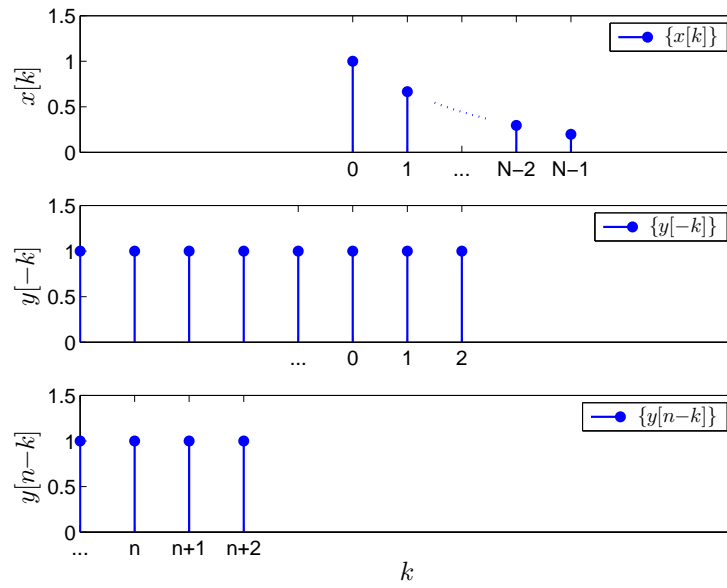


Σχ. 1.34. Σχηματικές αναπαραστάσεις, ως προς k , των $\{x[k]\}$, $\{y[k]\}$, $\{x[n-k]\}$ για $n < -2$, $\{x[n-k]\}$ για $-2 \leq n < N-3$, και $\{x[n-k]\}$ για $n \geq N-3$.

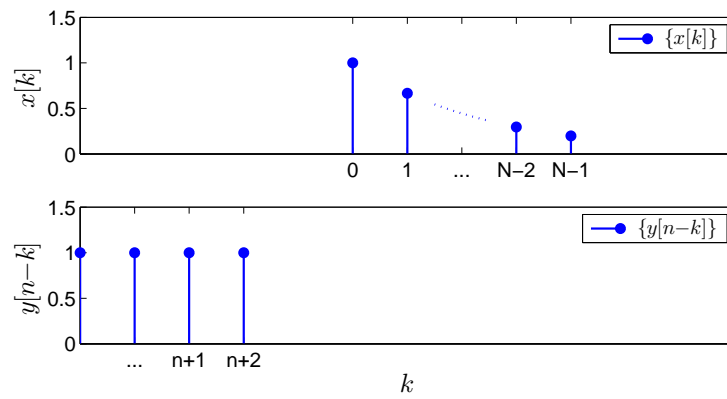


Σχ. 1.35. Σχεδίαση του σήματος $\{z[n]\}$ για (α) $a = 1$ και (β) $0 < a < 1$.

3. Για $n \geq N-3$, σύμφωνα με το Σχ. 1.39, το γινόμενο $\{x[k]\} \cdot \{y[n-k]\}$ είναι μη



Σχ. 1.36. Κατασκευή ως προς k των σημάτων $\{y[-k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ σε αντιδιαστολή με το σήμα $\{x[k]\}$.

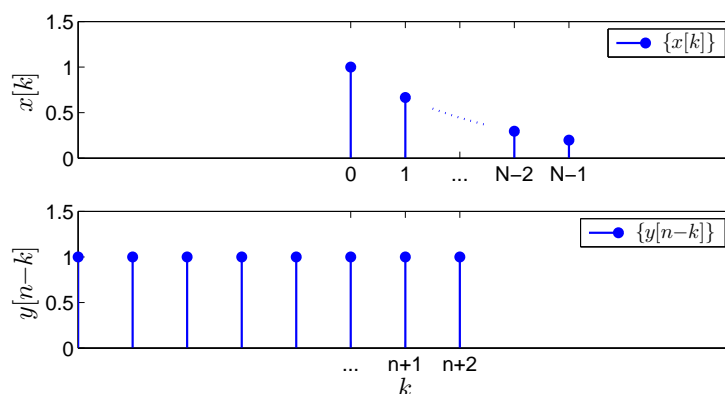


Σχ. 1.37. Σχεδίαση των σημάτων $\{x[k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ ως προς k , για $n < -2$.

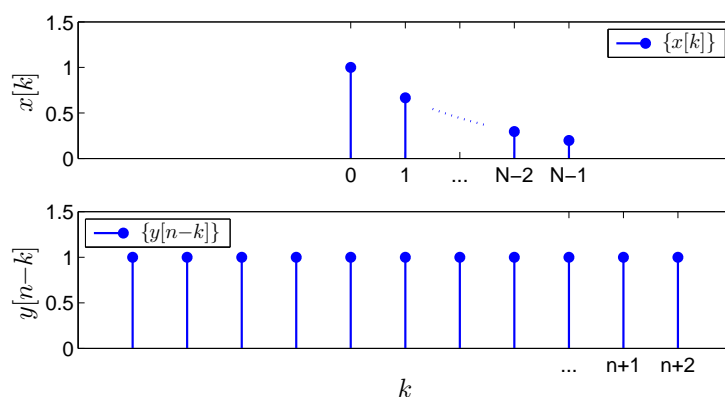
μηδενικό για $k = 0, \dots, N-1$ και

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^{N-1} a^k \cdot 1 = \begin{cases} N, & \text{αν } a = 1 \\ \frac{a^N - 1}{a - 1}, & \text{αν } a \neq 1. \end{cases} \quad (1.70)$$

◇



Σχ. 1.38. Σχεδίαση των σημάτων $\{x[k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ ως προς k , για $-2 \leq n < N-3$.



Σχ. 1.39. Σχεδίαση των σημάτων $\{x[k]\}$ και $\{y[n-k]\}$ ως προς k , για $n \geq N-3$.

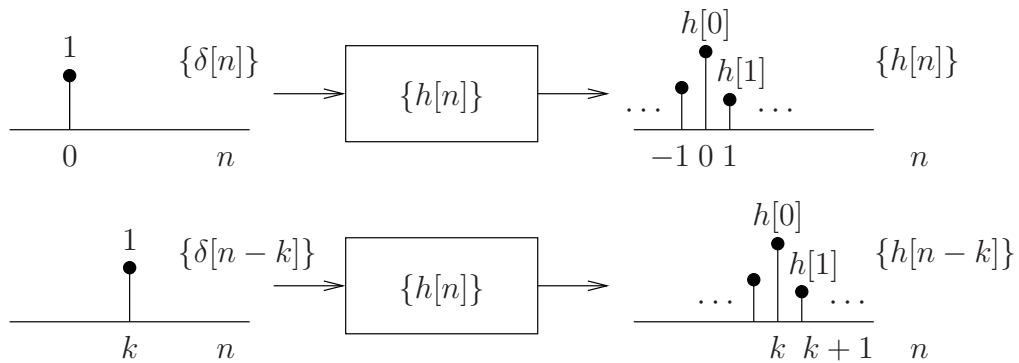
1.4.3 Κρουστική απόκριση

Στο Σχ. 1.40, παρουσιάζουμε την έξοδο ενός ΓΧΑ ΣΔΧ για είσοδο παλμικές ακολουθίες, οι οποίες παίρνουν μη μηδενικές τιμές μόνο για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Παρατηρούμε ότι

το ΓΧΑ ΣΔΧ αποκρίνεται με $h(0)$ σε τρέχουσα είσοδο πλάτους 1, με $h(i)$, για $i > 0$, σε είσοδο πλάτους 1 εφαρμοσμένη i χρονικές στιγμές πριν, και με $h(i)$, για $i < 0$, σε είσοδο πλάτους 1 που θα εφαρμοστεί $-i$ χρονικές στιγμές αργότερα.

Προφανώς, στη γενική περίπτωση, το εν λόγω σύστημα είναι δυναμικό ή σύστημα με μνήμη.

Όταν η είσοδος είναι μία ακολουθία $\{x[n]\}$, η οποία, γενικά, είναι μη μηδενική, τότε η



Σχ. 1.40. Απόκριση ΓΧΑ ΣΔΧ σε εισόδους $\{\delta[n]\}$ και $\{\delta[n-k]\}$. (Σημαντική παρατήρηση: Ο άξονας του χρόνου n είναι κοινός για όλα τα σχήματα).

έξοδος τη χρονική στιγμή k υπολογίζεται πιο πολύπλοκα. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα και τη χρονική αμεταβλητότητα, αποδείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο ότι η έξοδος $y[k]$ υπολογίζεται από τη συνέλιξη

$$y[k] = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h[l] x[k-l]$$

$$= [\dots + h[-1] x[k+1] + h[0] x[k] + h[1] x[k-1] + \dots]. \quad (1.71)$$

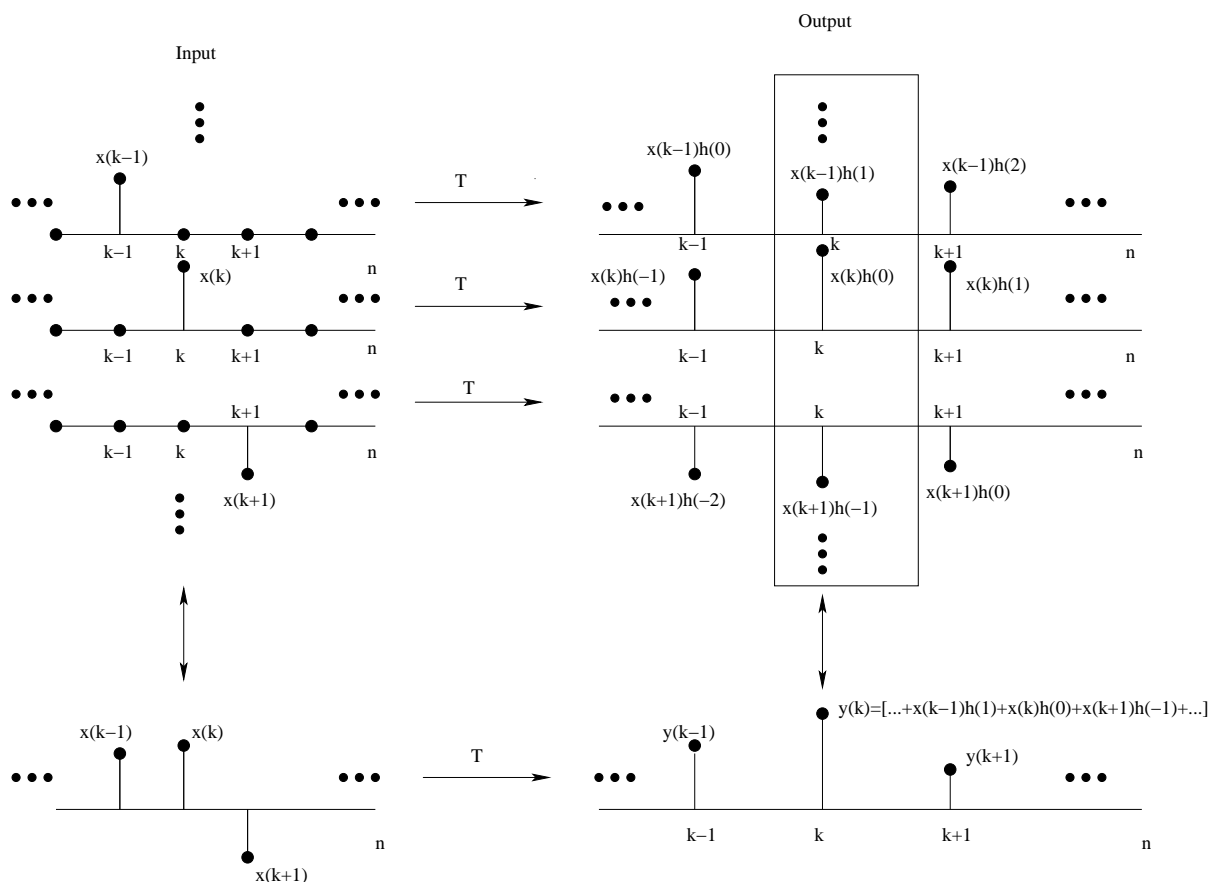
Άρα, όπως δείχνουμε στα Σχ. 1.41 και 1.42, γενικά, η έξοδος ενός ΓΧΑ ΣΔΧ τη χρονική στιγμή k , $y[k]$, εκφράζεται σαν το άθροισμα των “επιμέρους αποκρίσεων” του ΓΧΑ ΣΔΧ σε όλα τα δείγματα της εισόδου $x[n]$, $n \in \mathbb{Z}$. Η επιμέρους απόκριση για το δείγμα εισόδου τη χρονική στιγμή k , $x[k]$, είναι $h[0] x[k]$, για το δείγμα εισόδου $x[k-1]$ είναι $h[1] x[k-1]$, για το δείγμα $x[n+1]$ είναι $h[-1] x[k+1]$, κ.ο.κ.

Άρα, γενικά, η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος τη χρονική στιγμή k , $y[k]$, εξαρτάται από όλα τα δείγματα εισόδου $x[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

1.4.4 Αιτιατά συστήματα

Ένα σύστημα καλείται **αιτιατό** (causal) αν και μόνο αν η έξοδός του τη χρονική στιγμή n δεν εξαρτάται από μελλοντικές εισόδους. Για ΓΧΑ ΣΔΧ, είναι προφανές από την (1.71) ότι η έξοδος $y[n]$ δεν εξαρτάται από τις μελλοντικές εισόδους $x[n+1], x[n+2], \dots$, αν και μόνο

Graphical illustration of convolution



Σχ. 1.41. Πάνω: Έξοδος ΓΧΑ συστήματος με είσοδο παλμούς $x[l]\{\delta[n-l]\}$, αναλυτικά για $l = k-1, k, k+1$. Κάτω: Έξοδος ΓΧΑ συστήματος με είσοδο ακολουθία $\{x[n]\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\{\delta[n-k]\}$ (συνέλιξη).

αν $h[k] = 0, \forall k < 0$.

Άρα, ένα ΓΧΑ ΣΔΧ είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h[n] = 0, \forall n < 0$.

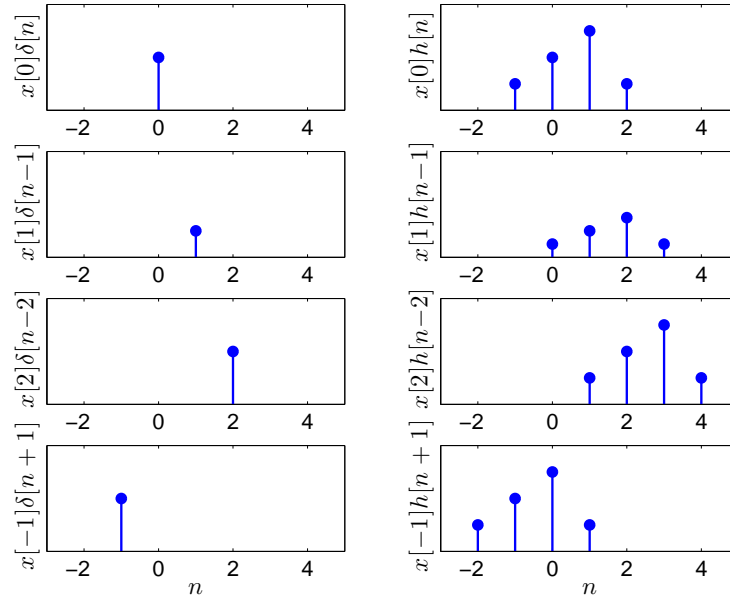
Αν ένα ΓΧΑ ΣΔΧ είναι αιτιατό, τότε

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n x[k] h[n-k]. \quad (1.72)$$

Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος τη χρονική στιγμή n , $y[n]$, εξαρτάται από το τρέχον και τα παρελθόντα δείγματα εισόδου $x[n], x[n-1], \dots$

Αντίστοιχα με τον ορισμό αιτιατών συστημάτων, ορίζουμε σαν *αιτιατή ακολουθία* κάθε ακολουθία $\{x[n]\}$ για την οποία ισχύει

$$x[n] = 0, \quad \text{για } n < 0. \quad (1.73)$$



Σχ. 1.42. Γραφικό παράδειγμα της σχέσης $y[1] = x[0]h[1] + x[1]h[1-1] + x[2]h[1-2] + x[-1]h[1+1] = \dots = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[1-k]$.

1.4.5 Συστήματα πεπερασμένης και άπειρης κρουστικής απόκρισης

Ένα ΓΧΑ ΣΔΧ καλείται **πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης** (finite impulse response - FIR) αν η κρουστική του απόκριση $\{h[n]\}$ είναι μία ακολουθία με πεπερασμένο πλήθος μη μηδενικών όρων. Διαφορετικά, καλείται **άπειρης κρουστικής απόκρισης** (infinite impulse response - IIR).

Η έξοδος ενός ΓΧΑ ΣΔΧ πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης $\{h[n]\}_{n=M_1}^{M_2}$, για είσοδο $\{x[n]\}$, ισούται με

$$y[n] = \sum_{k=M_1}^{M_2} h[k]x[n-k] = \sum_{k=n-M_2}^{n-M_1} x[k]h[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.74)$$

Η έξοδος ενός αιτιατού ΓΧΑ ΣΔΧ πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης $\{h[n]\}_{n=0}^M$, για είσοδο $\{x[n]\}$, ισούται με

$$y[n] = \sum_{k=0}^M h[k]x[n-k] = \sum_{k=n-M}^n x[k]h[n-k], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.75)$$

Στην περίπτωση αυτή, η έξοδος τη χρονική στιγμή n , $y[n]$, εξαρτάται μόνο από τα $M+1$ πιο πρόσφατα δείγματα της εισόδου $x[n], \dots, x[n-M]$.

Παράδειγμα 1.13. Έστω το σήμα $\{x_1[n]\}$ το οποίο έχει μη μηδενική τιμή για $N_1 \leq n \leq M_1$ και το σήμα $\{x_2[n]\}$ το οποίο έχει μη μηδενική τιμή για $N_2 \leq n \leq M_2$. Για ποιες τιμές του $n \in \mathbb{Z}$ η τιμή του σήματος $\{y[n]\} = \{x_1[n]\} * \{x_2[n]\}$ είναι μη μηδενική;

Θεωρούμε σταθερό $n \in \mathbb{Z}$. Γνωρίζουμε ότι $y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]x_2[n-k]$. Το $\{x_1[k]\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $N_1 \leq k \leq M_1$. Το $\{x_2[k]\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $N_2 \leq k \leq M_2$. Το $\{x_2[-k]\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $-M_2 \leq k \leq -N_2$. Το $\{x_2[n-k]\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $n-M_2 \leq k \leq n-N_2$. Για σταθερό n , τα σήματα $\{x_1[k]\}$ και $\{x_2[n-k]\}$ δεν επικαλύπτονται όταν $n - N_2 < N_1 \Leftrightarrow n < N_1 + N_2$ ή $n - M_2 > M_1 \Leftrightarrow n > M_1 + M_2$. Επομένως, υπάρχει επικάλυψη όταν $N_1 + N_2 \leq n \leq M_1 + M_2$. Άρα,

$$y[n] \neq 0 \text{ όταν } N_1 + N_2 \leq n \leq M_1 + M_2. \quad (1.76)$$

◇

1.4.6 Ευστάθεια ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου

Ένα ΓΧΑ ΣΔΧ καλείται **BIBO** (Bounded Input/Bounded Output) **ευσταθές** (stable), αν η ακολουθία εξόδου $\{y[n]\}$ είναι φραγμένη για κάθε φραγμένη ακολουθία εισόδου $\{x[n]\}$. Αν $|x[n]| \leq M < \infty$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, τότε

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] x[n-k] \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \cdot |x[n-k]| \leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]|. \quad (1.77)$$

Αν

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty, \quad (1.78)$$

τότε

$$|y[n]| \leq M S < \infty, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (1.79)$$

Άρα, η απόλυτη αθροισσιμότητα της κρουστικής απόκρισης ενός ΓΧΑ ΣΔΧ είναι ικανή συνθήκη για BIBO ευστάθεια του συστήματος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι επίσης και αναγκαία. Συνεπώς, BIBO ευστάθεια ενός ΓΧΑ ΣΔΧ με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ ισοδυναμεί με α-

πόλυτη ανθροισσιμότητα της $\{h[n]\}$, δηλαδή

$$\text{BIBO ευστάθεια ΓΧΑ } \Sigma\Delta X \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty. \quad (1.80)$$

1.5 Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Σε προηγούμενα εδάφια, είδαμε ότι ένα ΓΧΑ $\Sigma\Delta X$, γενικά, περιγράφεται από τη σχέση

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \quad (1.81)$$

όπου $\{x[n]\}$ είσοδος, $\{y[n]\}$ έξοδος, και $\{h[n]\}$ η κρουστική απόκριση του συστήματος.

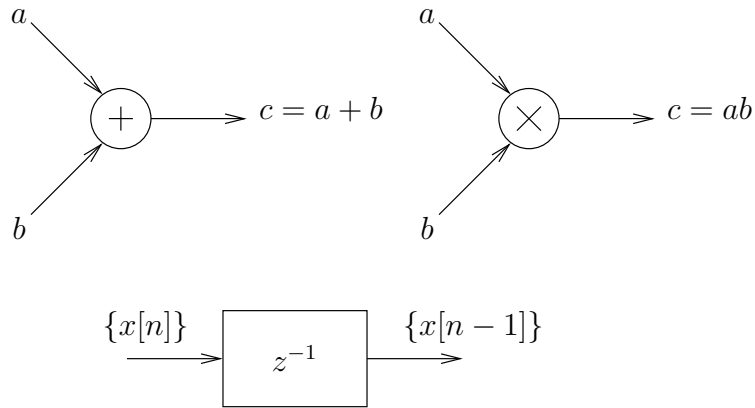
Σε αυτό το εδάφιο, θα παρουσιάσουμε τη σημαντική κατηγορία ΓΧΑ $\Sigma\Delta X$ που περιγράφεται από τη γραμμική εξίσωση διαφορών πεπερασμένης τάξης με σταθερούς συντελεστές

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (1.82)$$

με $a_k, k = 1, \dots, N$, και $b_k, k = 0, \dots, M$, δεδομένες σταθερές. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση (1.82) ισχύει για τις χρονικές στιγμές $n \geq n_0$. Αν οι τιμές $y[n_0-1], \dots, y[n_0-N], x[n_0-1], \dots, x[n_0-M]$ είναι ίσες με μηδέν, τότε λέμε ότι το σύστημα εκκινεί από ηρεμία ή ότι έχουμε μηδενικές αρχικές συνθήκες.

Στόχος μας σε αυτό το σημείο δεν είναι η σε βάθος μελέτη του παραπάνω συστήματος αλλά η ανάδειξη του γεγονότος ότι το εν λόγω σύστημα (όταν εκκινεί από ηρεμία) αποτελεί σημαντικό παράδειγμα ΓΧΑ $\Sigma\Delta X$. Αυτό συμβαίνει διότι

1. (αρχή ομογένειας) για είσοδο $A\{x[n]\}$ λαμβάνουμε έξοδο $A\{y[n]\}$ (ουσιαστικά, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1.82) με A),
2. (αρχή υπέρθεσης) αν οι είσοδοι $\{x_1[n]\}$ και $\{x_2[n]\}$ δίνουν εξόδους $\{y_1[n]\}$ και $\{y_2[n]\}$, αντίστοιχα, τότε η είσοδος $\{x_1[n] + x_2[n]\}$ δίνει έξοδο $\{y_1[n] + y_2[n]\}$ (ουσιαστικά, προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις εισόδου-εξόδου που συνδέουν τα $\{x_i[n]\}$ με τα $\{y_i[n]\}$, για $i = 1, 2$).



Σχ. 1.43. Σχηματική αναπαράσταση αθροιστή, πολλαπλασιαστή, και καταχωρητή.

Είναι προφανές ότι συνδυασμός των ιδιοτήτων της ομογένειας και της υπέρθεσης εξασφαλίζει την ιδιότητα της γραμμικότητας (άρα, δώσαμε ένα εναλλακτικό ορισμό της γραμμικότητας).

Η ιδιότητα της χρονικής αμεταβλητότητας εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι η ισότητα στην (1.82) διατηρείται αν μεταβάλλουμε το n σε $n - l$, για l σταθερό.

Αν οι αρχικές συνθήκες είναι μη μηδενικές, τότε η μελέτη χρειάζεται λίγο μεγαλύτερη προσοχή, όμως, δεν θα εμβαθύνουμε περισσότερο σε αυτό το σημείο.

Οι υλοποιήσεις ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές γίνονται με χρήση των τριών βασικών δομικών μονάδων που αναπαρίστανται στο Σχ. 1.43, δηλαδή, του αθροιστή, του πολλαπλασιαστή και του καταχωρητή (ή θέσης μνήμης).

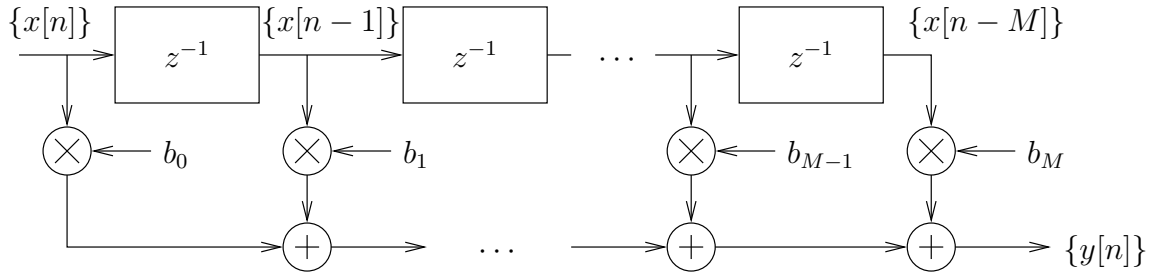
Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε κάποιες πολύ χρήσιμες ειδικές μορφές της (1.82).

1.5.1 Συστήματα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης

Έστω ότι $a_k = 0$ για $k = 1, \dots, N$. Τότε, η (1.82) γίνεται

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]. \quad (1.83)$$

Συγκρίνοντας τις (1.83) και (1.81), συμπεραίνουμε ότι το σύστημα που περιγράφεται από την (1.83) είναι ένα αιτιατό ΓΧΑ σύστημα πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης με κρουστική



Σχ. 1.44. Υλοποίηση FIR συστήματος.

απόκριση

$$h[k] = \begin{cases} b_k, & k = 0, \dots, M \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (1.84)$$

Εξαιτίας του ότι το πλήθος των μη μηδενικών όρων της κρουστικής απόκρισης $\{h[k]\}$ είναι πεπερασμένο, κάθε ΓΧΑ ΣΔΧ πεπερασμένης κρουστικής απόκρισης είναι εξ' ορισμού BIBO ευσταθές.

Μία υλοποίηση του συστήματος (1.83) παρουσιάζεται στο Σχ. 1.44.

1.5.2 Αναδρομικά συστήματα πρώτης τάξης

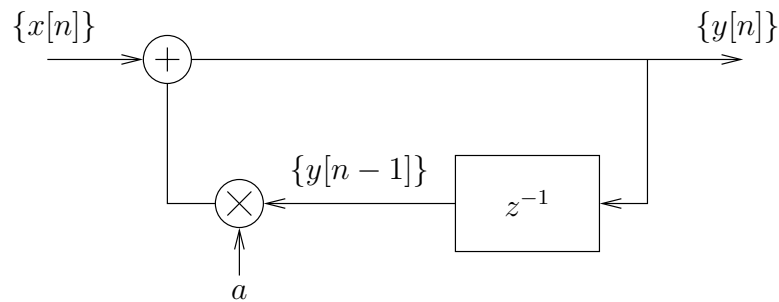
Έστω ότι $\forall n \in \mathbb{Z}$ η σχέση εισόδου-εξόδου είναι η εξής:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]. \quad (1.85)$$

Υποθέτουμε ότι το σύστημα είναι αιτιατό² και ότι εκκινεί από ηρεμία. Προφανώς, το σύστημα είναι ΓΧΑ. Για να βρούμε την κρουστική του απόκριση, θέτουμε ως είσοδο την ακολουθία $\{\delta[n]\}$. Αφού για $n < 0$ η είσοδος είναι 0, συμπεραίνουμε ότι $y[n] = 0$ για $n < 0$. Για $n = 0$, έχουμε $x[0] = \delta[0] = 1$ και

$$y[0] = ay[-1] + \delta[0] = 1. \quad (1.86)$$

²Προσέξτε ότι μπορούμε να λύσουμε την (1.85) ως προς $y[n-1]$ και τότε η έξοδος τη χρονική στιγμή $n-1$, $y[n-1]$, εξαρτάται από την είσοδο την επόμενη χρονική στιγμή, $x[n]$. Άρα, το παραπάνω σύστημα μπορεί να είναι ή να μην είναι αιτιατό. Αυτό είναι ένα λεπτό σημείο το οποίο δεν θα μας απασχολήσει στο μάθημα αυτό.



Σχ. 1.45. Υλοποίηση αναδρομικού συστήματος πρώτης τάξης.

Τις επόμενες χρονικές στιγμές η είσοδος είναι 0, όμως η έξοδος είναι μη μηδενική και υπολογίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
 y[1] &= ay[0] + \delta[1] = a \\
 y[2] &= ay[1] + \delta[2] = a^2 \\
 &\vdots \\
 y[k] &= ay[k-1] + \delta[k] = a^k.
 \end{aligned} \tag{1.87}$$

Άρα, το συγκεκριμένο αιτιατό σύστημα είναι άπειρης κρουστικής απόκρισης με

$$h[k] = a^k u[k]. \tag{1.88}$$

Το συγκεκριμένο σύστημα καλείται **αναδρομικό πρώτης τάξης** (first-order recursive) διότι για τον υπολογισμό της εξόδου τη χρονική στιγμή n χρησιμοποιούμε την προηγούμενη έξοδο. Γενικά, αν χρησιμοποιούσαμε τις εξόδους των προηγούμενων N χρονικών στιγμών, τότε το σύστημα θα ήταν αναδρομικό τάξης N .

Αν $|a| < 1$, τότε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = \frac{1}{1-|a|} < \infty, \tag{1.89}$$

συνεπώς το σύστημα είναι BIBO ευσταθές. Αν $|a| \geq 1$, τότε είναι BIBO ασταθές.

Μία υλοποίηση του αναδρομικού συστήματος πρώτης τάξης παρουσιάζεται στο Σχ. 1.45.

1.6 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1.1. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$

Άσκηση 1.2. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

Άσκηση 1.3. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $u_r[n] = \begin{cases} n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$

Άσκηση 1.4. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.5. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.6. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0. \end{cases}$

Άσκηση 1.7. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{|n|} = \begin{cases} \left(-\frac{1}{2}\right)^n, & n \geq 0 \\ \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}, & n < 0. \end{cases}$

Άσκηση 1.8. Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = 1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$.

Άσκηση 1.9. Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = 3x_1[n], \forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x_2[n]$.

Άσκηση 1.10. Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = \delta[n], \forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = x_1[n] - x_2[n]$.

Άσκηση 1.11. Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = \delta[n], \forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = x_1[n] \cdot x_2[n]$.

Άσκηση 1.12. (μετατόπιση στο χρόνο) Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = u[n - 1], \forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x_2[n]$.

Άσκηση 1.13. (μετατόπιση στο χρόνο) Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = u[n + 3]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x_2[n]$.

Άσκηση 1.14. (ανάκλαση) Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = u[-n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x_2[n]$.

Άσκηση 1.15. (μετατόπιση στο χρόνο και ανάκλαση) Έστω $x_1[n] = u[n]$ και $x_2[n] = u[3 - n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x_2[n]$.

Άσκηση 1.16. Έστω σήμα $\{x[n]\}$. Να υπολογιστεί η τιμή $x[n] \cdot \delta[n - n_0]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.17. Έστω σήμα $\{x[n]\}$. Να υπολογιστεί η τιμή $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n - n_0]$.

Άσκηση 1.18. Έστω σήμα $\{x[n]\}$. Να υπολογιστεί η τιμή $\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n - 3]$.

Άσκηση 1.19. Έστω σήμα $\{x[n]\}$. Να υπολογιστεί η τιμή $\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n + 3]$.

Άσκηση 1.20. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = u[n - 1] - u[n + 3]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.21. Να σχεδιαστεί το σήμα με τιμή $x[n] = u[n - 5] - (\delta[n] + \delta[-n] + \delta[-n + 1])$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.22. Να υπολογιστούν τα αθροίσματα:

α) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^3 + \sin(\frac{\pi}{2}n)) \delta[n - 3]$,

β) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2} \delta[n - 2]$, και

γ) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-an^2} \delta[n + 2]$.

Άσκηση 1.23. Να χαρακτηριστεί ως γραμμικό ή μη γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο ή μεταβαλλόμενο, στατικό ή δυναμικό, αιτιατό ή μη αιτιατό, και BIBO-ευσταθές ή όχι το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = x^2[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.24. Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = x[n] + x^2[n - 1]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.25. Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = x[n] + x[0]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.26. Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = x[n]u[-n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.27. Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = \log x[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.28. Σε ένα ΓΧΑ-ΣΔΧ η είσοδος

$$x_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 2, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{δίνει την έξοδο} \quad y_1[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 1, & n = 2 \\ -2, & n = 3 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

ενώ η είσοδος

$$x_2[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 1, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad \text{δίνει την έξοδο} \quad y_2[n] = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ -1, & n = 3 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Βρείτε την κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ του συστήματος. Είναι το σύστημα ευσταθές; Αιτιατό; Χωρίς μνήμη;

Άσκηση 1.29. Βρείτε την κρουστική απόκριση του ΓΧΑ-ΣΔΧ που περιγράφεται από την αναδρομική εξίσωση

$$y[n] = 10x[n] - 5y[n-1] \quad (1.90)$$

και έχει μηδενικές αρχικές συνθήκες ($y[n] = 0$, $\forall n < 0$). Μελετήστε την BIBO ευστάθειά του.

Άσκηση 1.30. Έστω σήμα $\{x[n]\} = \{\delta[n]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{x[n]\}$.

Άσκηση 1.31. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{u[n]\}$ και $\{y[n]\} = \{\delta[n]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.32. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{\delta[n-1] + \delta[n+1]\}$ και $\{y[n]\} = \{\delta[n] + \delta[n+1]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.33. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}\right\}$ και $\{y[n]\} = \{u[n+1] - u[n-1]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.34. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{b^{n+2}\}$, $0 < b < 1$, και $\{y[n]\} = \{u[-n]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.35. Έστω σήματα $\{x[n]\}$ και $\{y[n]\}$ με τιμές

$$x[n] = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ 3, & n = 1 \\ -2, & n = 2 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases} \quad \text{και} \quad y[n] = \begin{cases} 1, & n = \pm 1 \\ 2, & n = 0 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

αντίστοιχα. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.36. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{a^n u[-n]\}$ και $\{y[n]\} = \{u[n+1] - u[n-2]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$. Βρείτε τα όρια της συνέλιξης όταν $n \rightarrow \infty$ και όταν $n \rightarrow -\infty$, αν $a \neq 0$.

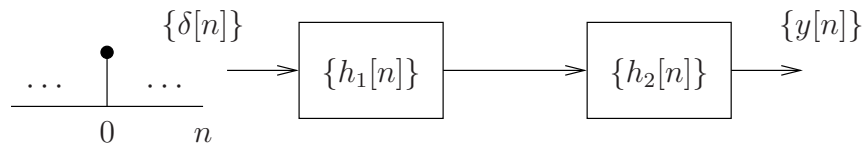
Άσκηση 1.37. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$ και $\{y[n]\} = \{b^n u[n]\}$ με $a \neq 0$, $b \neq 0$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.38. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$ και $\{y[n]\} = \{b^{|n|}\}$, όπου $|ab| < 1$ και $a \neq b$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

1.7 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 1.39. Δείξτε ότι το ΣΔΧ $\{y[n]\} = \{x^2[n]\}$ είναι μη γραμμικό.

Άσκηση 1.40. Να αποδειχτεί ότι η έξοδος ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος με είσοδο τη μηδενική ακολουθία $\{0[n]\} = \{\dots, 0, 0, 0, \dots\}$ είναι η ίδια η μηδενική ακολουθία.



Σχ. 1.46. Σχήμα για την Άσκηση 1.45.

Άσκηση 1.41. Πότε ένα ΓΧΑ ΣΔΧ είναι στατικό;

Άσκηση 1.42. Να χαρακτηριστεί το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου $y[n] = nx[n]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.43. Να χαρακτηριστεί στατικό ή δυναμικό, αιτιατό ή μη αιτιατό, και BIBO-ευσταθές ή όχι το ΓΧΑ-ΣΔΧ που περιγράφεται από την κρουστική απόκριση $h[n] = \frac{1}{n}u[n-1]$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Άσκηση 1.44. Να υπολογιστεί η συνέλιξη του Παραδείγματος 1.11 ανακλώντας και ολισθαίνοντας την $\{x[k]\}$.

Άσκηση 1.45. Να υπολογιστεί η έξοδος $\{y[n]\}$ της συστοιχίας συστημάτων του Σχ. 1.46.

Άσκηση 1.46. Έστω δύο ακολουθίες πεπερασμένου μήκους $\{x[n]\}_{n=a_1}^{a_2}$ και $\{h[n]\}_{n=b_1}^{b_2}$. Να αποδείξετε ότι η συνέλιξή τους είναι της μορφής $\{y[n]\}_{n=a_1+b_1}^{a_2+b_2}$.

Άσκηση 1.47. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{(-\frac{1}{2})^n u[n-4]\}$ και $\{y[n]\} = \{4^n u[2-n]\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.48. Έστω σήματα $\{x[n]\} = \{u[-n-3]\}$ και $\{y[n]\} = \{(-\frac{1}{2})^{|n+2|}\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\}$.

Άσκηση 1.49. [Εξέταση Προόδου 2008-2009] Το γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h[n]\} = \{(\frac{1}{2})^n u[n]\}$ δέχεται ως είσοδο το σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{\cos(\pi n)\}$. Υπολογίστε και σχεδιάστε το σήμα $\{y[n]\}$ στην έξοδο του συστήματος.

Κεφάλαιο 2

Σήματα και Συστήματα Συνεχούς Χρόνου

Στο κεφάλαιο αυτό, θα μελετήσουμε σήματα και συστήματα συνεχούς χρόνου. Η αναφορά μας σε αρκετές έννοιες θα είναι σύντομη εξαιτίας της ομοιότητας με αντίστοιχες αναφορές του προηγούμενου κεφαλαίου.

2.1 Σήματα συνεχούς χρόνου

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου μίας πραγματικής μεταβλητής είναι μία συνάρτηση $\{f(t)\}$ της ελεύθερης μεταβλητής t , με $t \in \mathbb{R}$. Η τιμή της $\{f(t)\}$ τη χρονική στιγμή t_0 είναι $\{f(t)\}_{t=t_0} = f(t_0)$.

Η **ενέργεια** του σήματος $\{f(t)\}$ ορίζεται ως

$$E_f \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt. \quad (2.1)$$

Για να έχει νόημα η ενέργεια σαν μέτρο του μεγέθους του σήματος θα πρέπει να είναι πεπερασμένη. Για να συμβαίνει αυτό, το πλάτος του σήματος θα πρέπει να φθίνει αρκετά γρήγορα προς το μηδέν όταν $|t| \rightarrow \infty$. Σε μερικές περιπτώσεις αυτό δεν συμβαίνει, π.χ. αν

$$f(t) = \cos(\Omega_0 t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (2.2)$$

Παράδειγμα 2.1. Η ενέργεια του σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 10 \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ είναι

$$E_x = \int_0^{10} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{10} = \frac{1000}{3}.$$

Η ενέργεια του σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}t)$ είναι $E_x = \infty$.

Η ενέργεια του εκθετικού σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = (\frac{1}{2})^{|t|}$ είναι

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2|t|} dt = 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^t dt = 2 \int_0^{\infty} \left(e^{t \ln \frac{1}{4}}\right) dt \\ &= 2 \left[\frac{e^{t \ln \frac{1}{4}}}{\ln \frac{1}{4}} \right]_0^{\infty} = 2 \left[\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^t}{\ln \frac{1}{4}} \right]_0^{\infty} = 2 \left(0 - \frac{1}{\ln \frac{1}{4}} \right) = \frac{2}{\ln 4} = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

◇

Μία άλλη ποσότητα η οποία, αν υπάρχει, είναι πιο χρήσιμη σε αυτές τις περιπτώσεις είναι η **ισχύς** (χρονικός μέσος της ενέργειας)

$$P_f \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |f(t)|^2 dt. \quad (2.4)$$

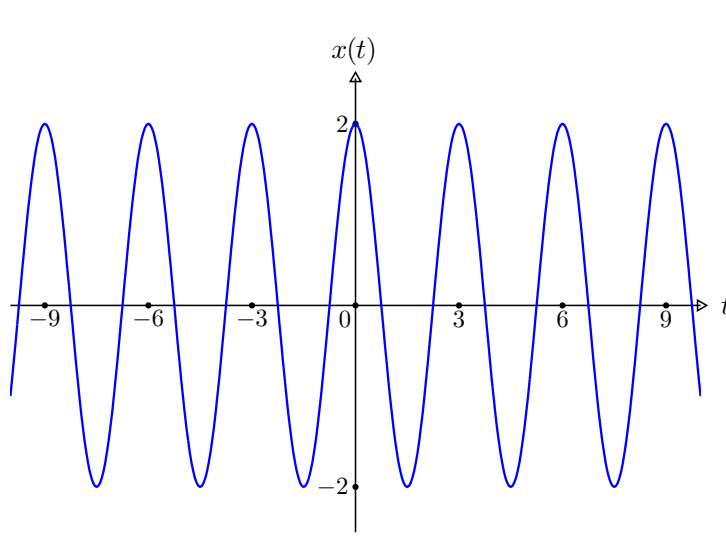
Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι σήματα συνεχούς χρόνου και πεπερασμένης ενέργειας έχουν μηδενική ισχύ (δηλ., αν $E_x < \infty$, τότε $P_x = 0$). Ομοίως, σήματα συνεχούς χρόνου και θετικής ισχύος έχουν άπειρη ενέργεια (δηλ., αν $P_x > 0$, τότε $E_x = \infty$). Προφανώς, σήματα συνεχούς χρόνου και άπειρης ισχύος έχουν άπειρη ενέργεια (δηλ., αν $P_x = \infty$, τότε $E_x = \infty$).

Ένα σήμα συνεχούς χρόνου $\{f(t)\}$ καλείται **περιοδικό** με περίοδο T , αν υπάρχει σταθερά $T \neq 0$ τέτοια ώστε

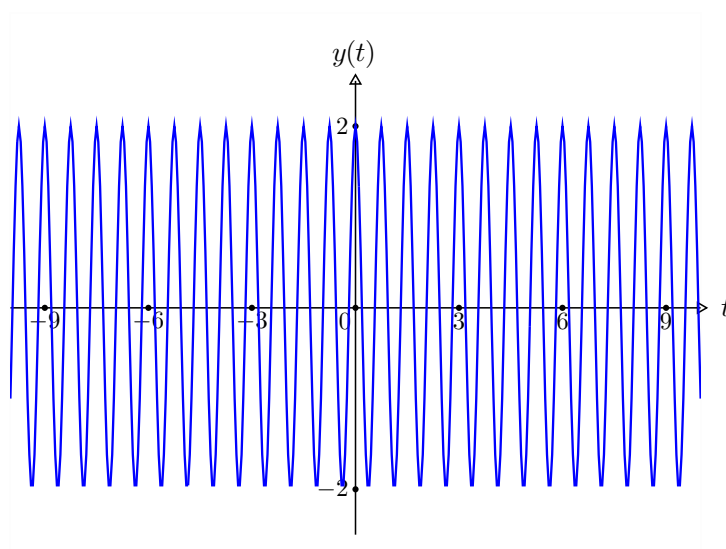
$$f(t) = f(t + T), \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Η μικρότερη θετική τιμή του T που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση καλείται **θεμελιώδης περίοδος**. Αν δεν υπάρχει T που να ικανοποιεί τη σχέση αυτή, τότε το σήμα καλείται **απεριοδικό**.

Παράδειγμα 2.2. Το σήμα $\{x(t)\} = \{2 \cos(2\pi \frac{1}{3}t)\}$ είναι περιοδικό με βασική περίοδο $T = 3$, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.1. Το σήμα $\{y(t)\} = \{2 \cos(2\pi \frac{4}{3}t)\}$ είναι περιοδικό με βασική περίοδο $T = \frac{3}{4}$, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.2. Παρατηρήστε ότι, σε αντίθεση με τα αντίστοιχα σήματα διακριτού χρόνου που μελετήσαμε στο Παράδειγμα 1.2, τα παραπάνω δύο ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου δεν έχουν την ίδια βασική περίοδο. ◇



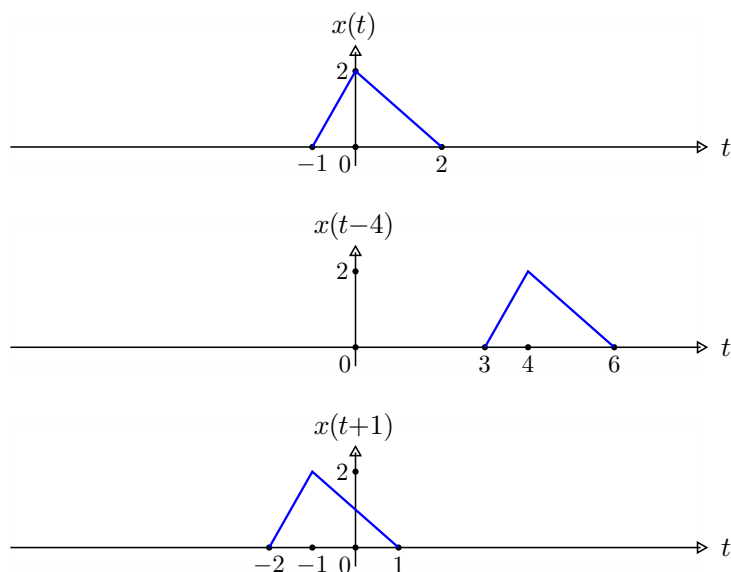
Σχ. 2.1. Το περιοδικό σήμα $\{x(t)\}$ με $x(t) = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}t)$ και βασική περίοδο $T = 3$.



Σχ. 2.2. Το περιοδικό σήμα $\{y(t)\}$ με $y(t) = 2 \cos(2\pi \frac{4}{3}t)$ και βασική περίοδο $T = \frac{3}{4}$.

Τα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου είναι σήματα πεπερασμένης ισχύος. Αν T είναι περίοδος του $\{x(t)\}$, τότε

$$\mathcal{P}_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt. \quad (2.6)$$



Σχ. 2.3. Χρονική ολίσθηση (μετατόπιση) του σήματος $\{x(t)\}$ κατά 4 και -1 .

Παράδειγμα 2.3. Η ισχύς του σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = 2 \cos(2\pi \frac{1}{3}t)$ είναι

$$P_x = \frac{1}{3} \int_0^3 x^2(t) dt = \frac{4}{3} \int_0^3 \cos^2(2\pi \frac{1}{3}t) dt = \frac{2}{3} \int_0^3 \left(1 + \cos(2\pi \frac{2}{3}t)\right) dt = \frac{2}{3}(3 + 0) = 2. \quad (2.7)$$

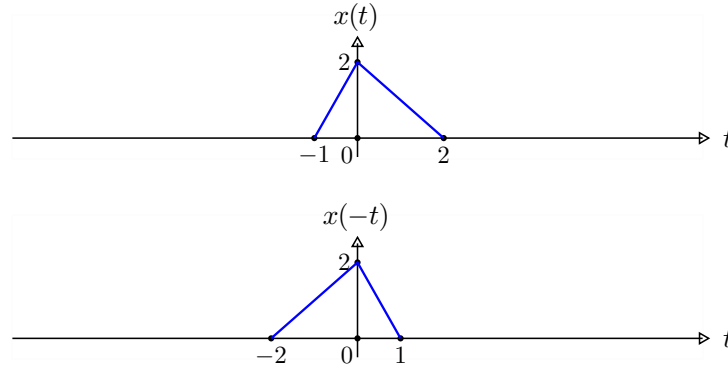
Η ισχύς του εκθετικού σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = (\frac{1}{2})^{|t|}$ είναι $P_x = 0$ (εφόσον $E_x = \frac{1}{\ln 2}$ όπως δείξαμε στο Παράδειγμα 2.1). \diamond

Ένα σήμα καλείται άρτιο ή περιττό, αν $x(t) = x(-t)$ ή $x(t) = -x(-t)$, αντίστοιχα, $\forall t \in \mathbb{R}$. Μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε σήμα $\{x(t)\}$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος (δείτε Άσκηση 2.8).

2.1.1 Απλές πράξεις σημάτων συνεχούς χρόνου

Χρονική μετατόπιση προκύπτει με αντικατάσταση της ελεύθερης μεταβλητής t από $t - t_0$ και είναι καθυστέρηση (ολίσθηση προς τα δεξιά) κατά t_0 , αν $t_0 > 0$, ή προώθηση (ολίσθηση προς τα αριστερά) κατά $-t_0$, αν $t_0 < 0$.

Ανάκλαση ως προς τον κατακόρυφο άξονα προκύπτει με αντικατάσταση της ελεύθερης μετα-

Σχ. 2.4. Ανάκλαση του σήματος $\{x(t)\}$ ως προς τον κατακόρυφο άξονα.

βλητής t από $-t$, και συμβολίζεται ως

$$\{y(t)\} = \{x(-t)\}, \quad [y(t) = x(-t), \forall t \in \mathbb{R}]. \quad (2.8)$$

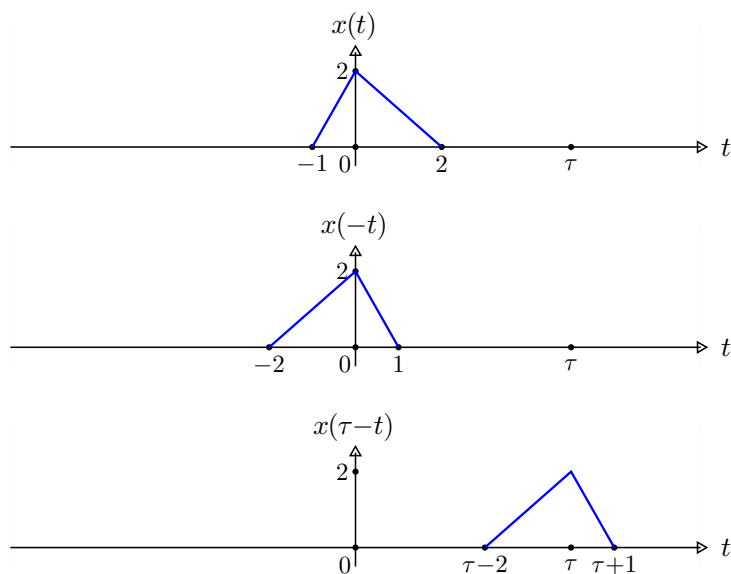
Όπως διαπιστώσαμε και στη μελέτη των σημάτων διακριτού χρόνου, πολύ σημαντικός είναι ο υπολογισμός του σήματος $\{y(t)\} = \{x(t_0 - t)\}$, όπου $t_0 \in \mathbb{R}$ δεδομένη σταθερά. Αν το t_0 είναι θετικός αριθμός, τότε το $\{x(t_0 - t)\}$ προκύπτει από το $\{x(-t)\}$ μετά από ολίσθηση κατά t_0 προς τα δεξιά, ενώ αν το t_0 είναι αρνητικός αριθμός, τότε το $\{x(t_0 - t)\}$ προκύπτει από το $\{x(-t)\}$ μετά από ολίσθηση κατά $|t_0|$ προς τα αριστερά.

Και στις δύο περιπτώσεις, το δείγμα του $\{x(-t)\}$ που βρισκόταν στην αρχή των αξόνων, δηλαδή, το $x(0)$, θα μετακινηθεί στη θέση t_0 . Ανάλογη μετατόπιση θα υποστούν όλα τα δείγματα του $\{x(-t)\}$.

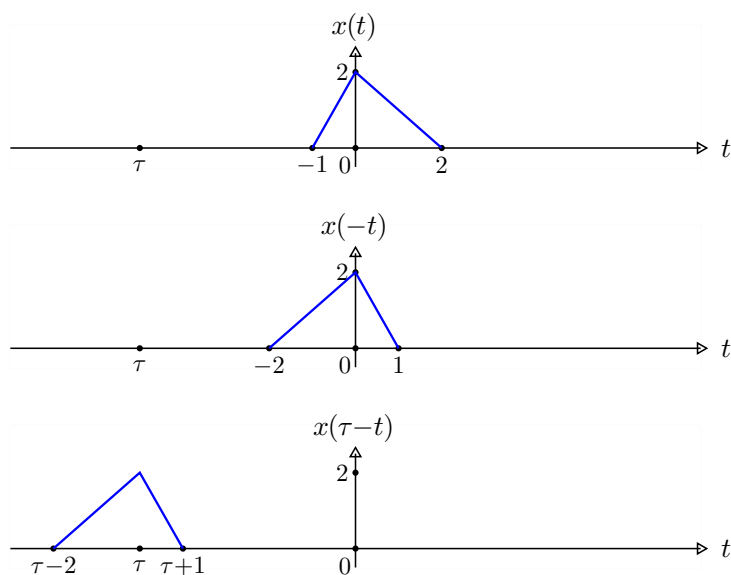
Η τιμή του $\{x(t_0 - t)\}$ τη χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι

$$\{x(t_0 - t)\}_{t=t_1} = x(t_0 - t_1). \quad (2.9)$$

Κλιμάκωση χρόνου κατά a προκύπτει από μεταβολή της ελεύθερης μεταβλητής από t σε at . Όπως είναι φανερό από το Σχ. 2.8, η κλιμάκωση χρόνου ισοδυναμεί με συστολή του $\{f(t)\}$ αν $a > 1$ και διαστολή αν $0 < a < 1$. Η αρχή των αξόνων $t = 0$ παραμένει αμετάβλητη.



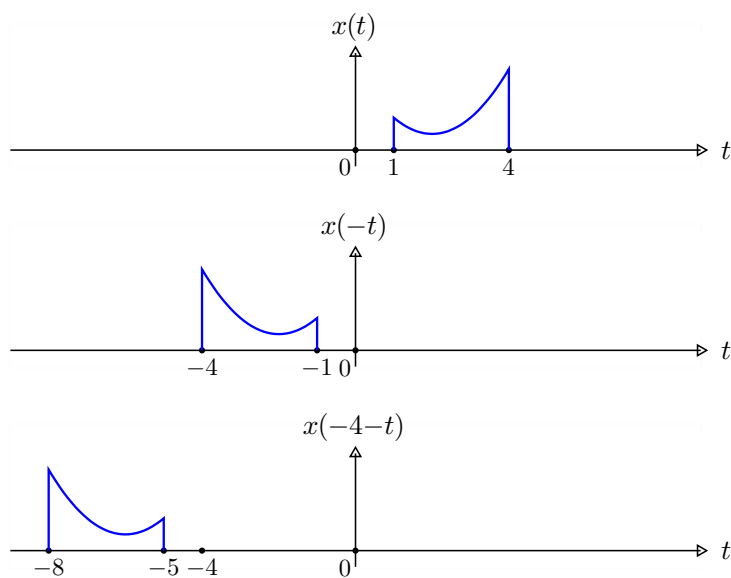
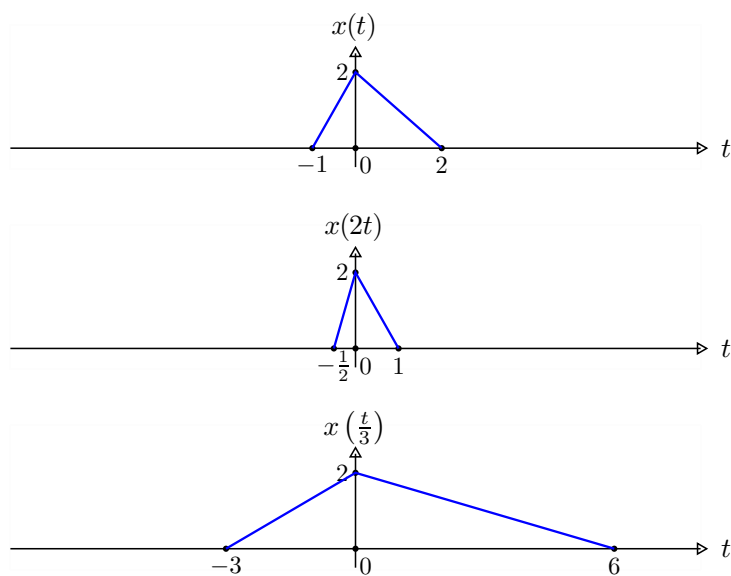
Σχ. 2.5. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x(\tau - t)\}$ όπου $\tau > 0$.



Σχ. 2.6. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x(\tau - t)\}$ όπου $\tau < 0$.

Κλιμάκωση πλάτους ενός σήματος από μία σταθερά A προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό κάθε δείγματος του σήματος με A

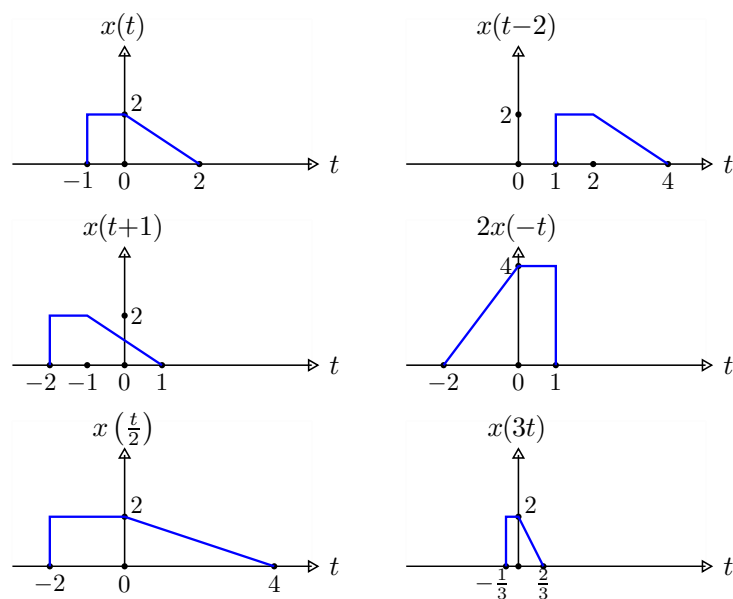
$$A \{x(t)\} = \{A x(t)\}. \quad (2.10)$$

Σχ. 2.7. Σχηματική αναπαράσταση του σήματος $\{x(-4-t)\}$.

Σχ. 2.8. Κλιμάκωση χρόνου.

Στο Σχ. 2.9, σχεδιάζουμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και διάφορους μετασχηματισμούς αυτού που περιλαμβάνουν μετατόπιση, ανάκλαση, κλιμάκωση πλάτους, και κλιμάκωση χρόνου.

Άθροισμα δύο σημάτων $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ είναι ένα σήμα η τιμή του οποίου σε κάθε χρονική



Σχ. 2.9. Διάφοροι μετασχηματισμοί ενός σήματος συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$.

στιγμή είναι το άθροισμα των τιμών των δύο σημάτων την ίδια χρονική στιγμή

$$\{x_1(t)\} + \{x_2(t)\} = \{x_1(t) + x_2(t)\}. \quad (2.11)$$

Γινόμενο δύο σημάτων $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ είναι ένα σήμα η τιμή του οποίου σε κάθε χρονική στιγμή είναι το γινόμενο των τιμών των δύο σημάτων την ίδια χρονική στιγμή

$$\{x_1(t)\} \cdot \{x_2(t)\} = \{x_1(t) x_2(t)\}. \quad (2.12)$$

Για παράδειγμα, το σήμα $\{y(t)\}$ που προκύπτει ως γραμμικός συνδυασμός των $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$,

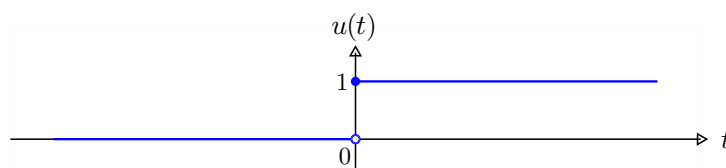
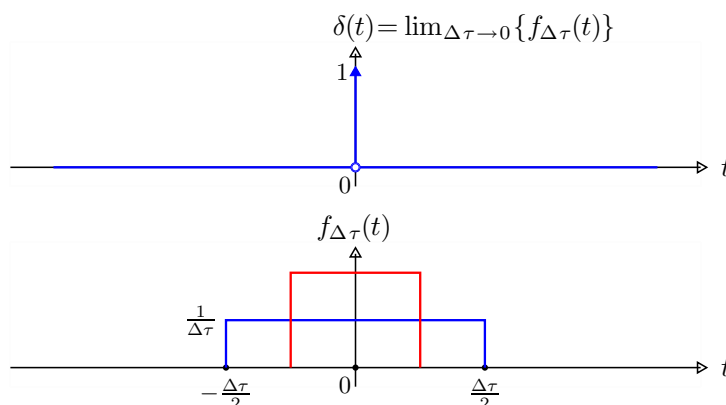
$$\{y(t)\} = A_1 \{x_1(t)\} + A_2 \{x_2(t)\}, \quad (2.13)$$

υπολογίζεται ως εξής.

$$\{y(t)\} = A_1 \{x_1(t)\} + A_2 \{x_2(t)\} = \{A_1 x_1(t)\} + \{A_2 x_2(t)\} = \{A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)\}. \quad (2.14)$$

2.1.2 Χρήσιμα σήματα συνεχούς χρόνου

Στα Σχ. 2.10 και 2.11, σχεδιάζουμε δύο πολύ σημαντικά σήματα συνεχούς χρόνου.

Σχ. 2.10. Το σήμα μοναδιαίου βήματος $\{u(t)\}$.Σχ. 2.11. Το σήμα μοναδιαίου παλμού $\{\delta(t)\}$ και προσεγγιστική αναπαράσταση αυτού με συνήθεις συναρτήσεις.

Σήμα μοναδιαίου βήματος $\{u(t)\}$ που ορίζεται ως

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.15)$$

Σήμα μοναδιαίου παλμού $\{\delta(t)\}$ (ή συνάρτηση δ του Dirac). Είναι από τις πιο σημαντικές ποσότητες στη μελέτη σημάτων και συστημάτων συνεχούς χρόνου. Σχηματικά, αναπαρίσταται με ένα βέλος στη θέση $t = 0$, όπως στο Σχ. 2.11. Ορίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} &\bullet \delta(t) = 0, \quad t \neq 0. \\ &\bullet \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Διαισθητικά, μπορούμε να φανταστούμε τη $\{\delta(t)\}$ σαν ένα ορθογώνιο παλμό, με εμβαδό μονάδα, πολύ μικρού εύρους και πολύ μεγάλου ύψους.¹

¹Το σημαντικό χαρακτηριστικό της $\{\delta(t)\}$ δεν είναι η ακριβής μορφή της αλλά το γεγονός ότι η χρονική της διάρκεια πλησιάζει στο μηδέν ενώ το εμβαδόν της παραμένει μονάδα.

Ας θεωρήσουμε μία συνάρτηση $\{f(t)\}$ συνεχή στο σημείο t_0 . Τότε, μία σχέση ισοδύναμη με τον ορισμό της $\{\delta(t)\}$ είναι η εξής.²

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0).} \quad (2.17)$$

Η παραπάνω σχέση η οποία καλείται συνήθως **ιδιότητα δειγματοληψίας** (sampling property) ορίζει τη $\{\delta(t)\}$ μέσω της “εφαρμογής” της σε συναρτήσεις.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνήθης συνάρτηση $\{\delta(t)\}$ που να έχει τις παραπάνω ιδιότητες. Τότε παραμένει το ερώτημα τι είναι η $\{\delta(t)\}$;

Έστω $\{\delta_{\Delta\tau}(t)\}$ ορθογώνιος παλμός με εύρος $\Delta\tau$ και ύψος $\frac{1}{\Delta\tau}$ (και, συνεπώς, με μοναδιαίο εμβαδό) όπως στο Σχ. 2.11, δηλαδή

$$\delta_{\Delta\tau}(t) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{\Delta\tau}, & -\frac{\Delta\tau}{2} \leq t \leq \frac{\Delta\tau}{2} \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.18)$$

Θα αποδείξουμε ότι η $\{\delta(t)\}$, όπως ορίζεται στην (2.17), είναι το όριο της $\{\delta_{\Delta\tau}(t)\}$ όταν $\Delta\tau \rightarrow 0$. Το όριο όμως δεν θα είναι το γνωστό όριο κατά σημείο αλλά υπό την εξής έννοια.

Έστω συνάρτηση $\{f(t)\}$ συνεχής στο σημείο t_0 . Τότε

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\Delta\tau}(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0). \quad (2.19)$$

Για να αποδείξουμε την παραπάνω σχέση, δουλεύουμε ως εξής.

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\Delta\tau}(t-t_0)dt = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_{t_0-\frac{\Delta\tau}{2}}^{t_0+\frac{\Delta\tau}{2}} f(t)\frac{1}{\Delta\tau}dt = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\xi) \int_{t_0-\frac{\Delta\tau}{2}}^{t_0+\frac{\Delta\tau}{2}} \frac{1}{\Delta\tau}dt \quad (2.20)$$

για κάποιο $\xi \in (t_0 - \frac{\Delta\tau}{2}, t_0 + \frac{\Delta\tau}{2})$ (από το θεώρημα μέσης τιμής του Απειροστικού Λογισμού). Εξαιτίας της συνέχειας της f στο σημείο t_0 , λαμβάνουμε

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} f(\xi) \cdot 1 = f(t_0) \quad (2.21)$$

και, συνεπώς, αποδείξαμε την επιθυμητή σχέση.

²Το διάστημα ολοκλήρωσης στη σχέση (2.17) δεν θα πρέπει να είναι αναγκαστικά όλος ο άξονας των t . Οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$, για $\epsilon > 0$, αρκεί.

Άρα, όταν συναντούμε εκφράσεις της μορφής $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)dt$ θα πρέπει να τις ερμηνεύουμε σαν ένα συμβολικό τρόπο για να δηλώνουμε το όριο

$$\lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{\Delta\tau}(t)dt = f(0). \quad (2.22)$$

Συνήθως, θα συναντούμε τη $\delta(t)$ μέσα σε ολοκληρώματα και, συνεπώς, χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.17) θα μπορούμε να κάνουμε τους απαιτούμενους υπολογισμούς χωρίς να χρειάζεται να καταφύγουμε σε πολύπλοκους υπολογισμούς ορίων.

Παρατηρήστε ότι αν υπολογίσουμε το όριο κατά σημείο της $\{\delta_{\Delta\tau}(t)\}$, τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \delta_{\Delta\tau}(t)dt = 0. \quad (2.23)$$

Η $\{\delta(t)\}$ χαρακτηρίζεται ως **γενικευμένη συνάρτηση** (generalized function), διότι ορίζεται μέσω της “εφαρμογής” της πάνω σε συναρτήσεις $\{f(t)\}$, όπως στην (2.17), και όχι μέσω του ακριβούς ορισμού των τιμών της.³

Αν η $\{f(t)\}$ είναι συνεχής στο t_0 , τότε μία χρήσιμη σχέση είναι η

$$\{f(t)\}\{\delta(t - t_0)\} = f(t_0)\{\delta(t - t_0)\}. \quad (2.24)$$

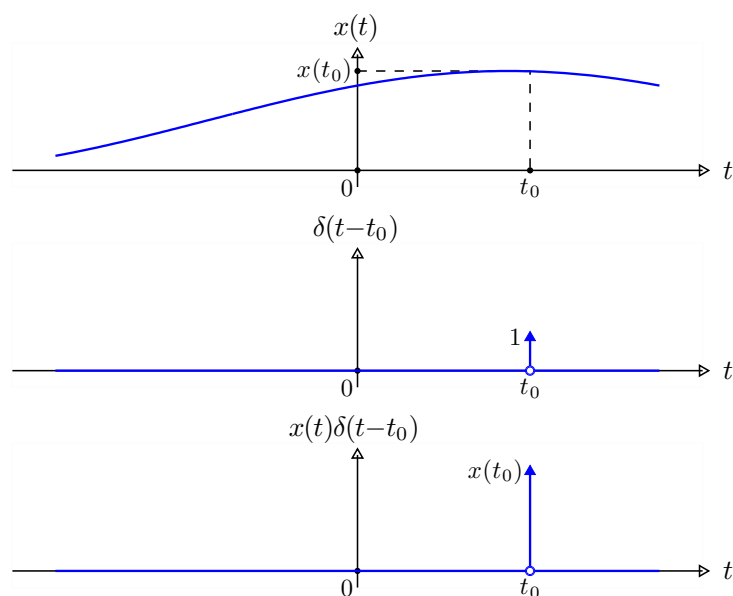
Δηλαδή, όπως αναπαρίσταται στο Σχ. 2.12, το γινόμενο της συνάρτησης $\{f(t)\}$ με έναν παλμό μοναδιαίου εμβαδού, που εμφανίζεται στη θέση $t = t_0$, είναι ένας παλμός στην ίδια θέση, με εμβαδό ίσο με την τιμή $f(t_0)$. Ισότητα εκφράσεων οι οποίες περιέχουν $\delta(\cdot)$ εκτός ολοκληρωμάτων αποδεικνύεται μέσω της ισότητας των αντίστοιχων ολοκληρωμάτων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \quad (2.25)$$

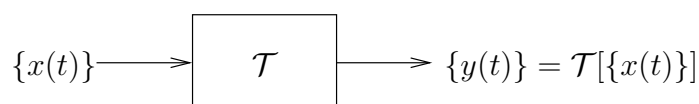
$$\text{και } \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t - t_0)dt = f(t_0) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)dt = f(t_0). \quad (2.26)$$

Άρα, η (2.24) ισχύει.

³Μία άλλη “ερμηνεία” η οποία αποδίδεται στη $\{\delta(t)\}$ είναι αυτή της παραγώγου της $\{u(t)\}$, δηλαδή, $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$. Είναι παντού μηδέν, εκτός του σημείου $t = 0$ όπου παίρνει την τιμή ∞ . Με αυτό τον τρόπο γενικεύεται η έννοια της παραγώγου σε μη συνεχείς συναρτήσεις.



Σχ. 2.12. Σχηματική αναπαράσταση της σχέσης $\{x(t)\}\{\delta(t-t_0)\} = x(t_0)\{\delta(t-t_0)\}$.



Σχ. 2.13. Σύστημα συνεχούς χρόνου.

2.2 Συστήματα συνεχούς χρόνου

Ως σύστημα συνεχούς χρόνου (ΣΣΧ) ορίζουμε οποιαδήποτε οντότητα μετασχηματίζει μία είσοδο $\{x(t)\}$ στην έξοδο $\{y(t)\}$. Ο μετασχηματισμός αυτός συμβολίζεται ως

$$\{y(t)\} = \mathcal{T}[\{x(t)\}]. \quad (2.27)$$

Η κατηγοριοποίηση των συστημάτων διακριτού χρόνου μεταφέρεται εύκολα σε συστήματα συνεχούς χρόνου. Έτσι, έχουμε κατηγοριοποίηση σε στατικά-δυναμικά, χρονικά αμετάβλητα - χρονικά μεταβαλλόμενα, γραμμικά - μη γραμμικά με ορισμούς ανάλογους των αντίστοιχων ορισμών συστημάτων διακριτού χρόνου.

Παράδειγμα 2.4. Τα συστήματα που περιγράφονται από τις σχέσεις εισόδου-εξόδου (όπου

$\{x(t)\}$ είσοδος και $\{y(t)\}$ έξοδος)

$$\{y(t)\} = a\{x(t)\}, \quad [y(t) = a x(t), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.28)$$

$$\{y(t)\} = \{x^2(t)\}, \quad [y(t) = x^2(t), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.29)$$

είναι στατικά. Αντίθετα, τα παρακάτω συστήματα είναι δυναμικά ή συστήματα με μνήμη.

$$\{y(t)\} = \{x(t) + 2x(t-1)\}, \quad [y(t) = x(t) + 2x(t-1), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.30)$$

$$\{y(t)\} = \{0.5y(t-1) + x(t)\}, \quad [y(t) = 0.5y(t-1) + x(t), \forall t \in \mathbb{Z}]. \quad (2.31)$$

◇

Παράδειγμα 2.5. Το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y(t)\} = \{x(t) - x(t-1)\}, \quad [y(t) = x(t) - x(t-1), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.32)$$

είναι ΧΑ, διότι αν θέσουμε ως είσοδο το σήμα

$$\{x_\tau(t)\} = \{x(t-\tau)\}, \quad [x_\tau(t) = x(t-\tau), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.33)$$

λαμβάνουμε ως έξοδο

$$\{y_\tau(t)\} = \{x_\tau(t) - x_\tau(t-1)\} = \{x(t-\tau) - x(t-\tau-1)\}. \quad (2.34)$$

Το σήμα αυτό ταυτίζεται με την καθυστερημένη κατά τ χρονικές μονάδες έξοδο $\{y(t)\}$, διότι $\{y(t-\tau)\} = \{x(t-\tau) - x(t-\tau-1)\} = \{y_\tau(t)\}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι το σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y(t)\} = \{x(t)\} + 2\{x(t-1)\}, \quad [y(t) = x(t) + 2x(t-1), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.35)$$

είναι ΧΑ.

◇

Παράδειγμα 2.6. Το ΣΣΧ που περιγράφεται από τη σχέση εισόδου-εξόδου

$$\{y(t)\} = \{tx(t)\}, \quad [y(t) = tx(t), \forall t \in \mathbb{R}] \quad (2.36)$$

είναι XM, διότι αν θέσουμε ως είσοδο $\{x_\tau(t)\} = \{x(t - \tau)\}$, λαμβάνουμε έξοδο

$$\{y_\tau(t)\} = \{t x_\tau(t)\} = \{t x(t - \tau)\}, \quad [y_\tau(t) = t x(t - \tau), \forall t \in \mathbb{R}]. \quad (2.37)$$

Καθυστερώντας την έξοδο $\{y(t)\}$ κατά τ χρονικές μονάδες, λαμβάνουμε

$$\{y(t - \tau)\} = \{(t - \tau) x(t - \tau)\}. \quad (2.38)$$

Άρα, γενικά $\{y_\tau(t)\} \neq \{y(t - \tau)\}$, και το εν λόγω σύστημα είναι XM.

Το παραπάνω σύστημα είναι γραμμικό, διότι αν $\{y_1(t)\}$ και $\{y_2(t)\}$ δηλώνουν τις εξόδους για εισόδους $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$, αντίστοιχα (δηλαδή, αν $\{y_1(t)\} = \{t x_1(t)\}$ και $\{y_2(t)\} = \{t x_2(t)\}$), τότε η έξοδος $\{y(t)\}$ για είσοδο $a_1 \{x_1(t)\} + a_2 \{x_2(t)\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= \mathcal{T}[a_1 \{x_1(t)\} + a_2 \{x_2(t)\}] = \mathcal{T}[\{a_1 x_1(t)\} + \{a_2 x_2(t)\}] \\ &= \mathcal{T}[\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\}] = \{t (a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))\} \\ &\stackrel{!}{=} a_1 \{t x_1(t)\} + a_2 \{t x_2(t)\} = a_1 \mathcal{T}[\{x_1(t)\}] + a_2 \mathcal{T}[\{x_2(t)\}]. \end{aligned} \quad (2.39) \quad \diamond$$

Παράδειγμα 2.7. Το ΣΣΧ $\{y(t)\} = \{x^2(t)\}$ είναι μη-γραμμικό, διότι αν $\{y_1(t)\}$ και $\{y_2(t)\}$ δηλώνουν τις εξόδους για εισόδους $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$, αντίστοιχα (δηλαδή, αν $\{y_1(t)\} = \{x_1^2(t)\}$ και $\{y_2(t)\} = \{x_2^2(t)\}$), τότε η έξοδος $\{y(t)\}$ για είσοδο $a_1 \{x_1(t)\} + a_2 \{x_2(t)\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= \mathcal{T}[a_1 \{x_1(t)\} + a_2 \{x_2(t)\}] = \mathcal{T}[\{a_1 x_1(t)\} + \{a_2 x_2(t)\}] \\ &= \mathcal{T}[\{a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)\}] = \{(a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t))^2\} \\ &\neq a_1 \{x_1^2(t)\} + a_2 \{x_2^2(t)\} = a_1 \mathcal{T}[\{x_1(t)\}] + a_2 \mathcal{T}[\{x_2(t)\}]. \end{aligned} \quad (2.40) \quad \diamond$$

Παράδειγμα 2.8. Έστω το μηδενικό σήμα $\{0(t)\}$ με τιμή $0(t) \triangleq 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Αν το σύστημα διακριτού χρόνου \mathcal{T} είναι γραμμικό, τότε $\mathcal{T}[\{0(t)\}] = \{0(t)\}$ γιατί $\mathcal{T}[\{0(t)\}] = T[0\{x(t)\}] = 0T[\{x(t)\}] = \{0(t)\}$. Επομένως, η έξοδος ενός οποιουδήποτε γραμμικού συστήματος με είσοδο το μηδενικό σήμα $\{0(t)\}$ είναι το ίδιο το μηδενικό σήμα. \diamond

2.2.1 Απόκριση ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου - Συνελικτικό ολοκλήρωμα

Σε αυτό το εδάφιο, θα υπολογίσουμε την έξοδο γραμμικών (χρονικά αμετάβλητων) συστημάτων με αυθαίρετες εισόδους.

Έστω $\{h_\tau(t)\}$ η απόκριση ενός γραμμικού συστήματος στο μοναδιαίο παλμό που εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή τ ,⁴ $\{\delta(t - \tau)\}$, δηλαδή

$$\mathcal{T}[\{\delta(t - \tau)\}] = \{h_\tau(t)\}. \quad (2.41)$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια συναρτήσεων $\{h_\tau(t)\}$, για $-\infty < \tau < \infty$, χαρακτηρίζει πλήρως το εν λόγω σύστημα, διότι η γνώση της επιτρέπει τον υπολογισμό της εξόδου $\{y(t)\}$ για αυθαίρετη είσοδο $\{x(t)\}$. Αρχικά, εκφράζουμε το $\{x(t)\}$ σαν “άθροισμα παλμών” ως εξής.

$$\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{\delta(t - \tau)\}d\tau. \quad (2.42)$$

Όπως φαίνεται στο Σχ. 2.14, η σχέση (2.42) είναι ισοδύναμη με

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t - \tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.43)$$

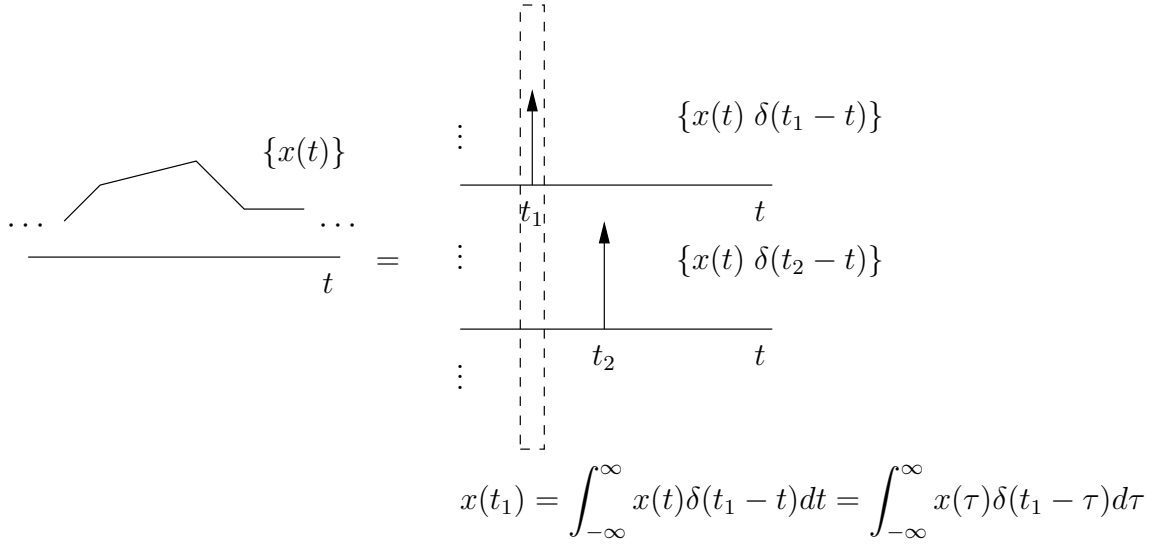
(Μπορείτε να μελετήσετε παράλληλα το αντίστοιχο εδάφιο για τις ακολουθίες, όπου η γραφική αναπαράσταση των αντίστοιχων σχέσεων γίνεται εύκολα κατανοητή.)

Κατόπιν, υπολογίζουμε την έξοδο ως εξής.

$$\begin{aligned} \{y(t)\} &= \mathcal{T}[\{x(t)\}] = \mathcal{T}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{\delta(t - \tau)\}d\tau\right] \\ &\stackrel{1}{=} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\mathcal{T}[\{\delta(t - \tau)\}]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{h_\tau(t)\}d\tau \end{aligned} \quad (2.44)$$

όπου στο σημείο 1 χρησιμοποιήσαμε χωρίς απόδειξη μία εκτεταμένη μορφή της γραμμικότητας. Στα πλαίσια του μαθήματος αυτού, θα υποθέσουμε τη δυνατότητα εναλλαγής των γραμμικών τελεστών \int και \mathcal{T} χωρίς λεπτομερή απόδειξη.

⁴Η αναλογία των συναρτήσεων $\{h_\tau(t)\}$ με τις ακολουθίες $\{h_k[n]\}$ του προηγούμενου κεφαλαίου είναι προφανής, όπως προφανής θα είναι η ομοιότητα σε όλη τη διαδικασία υπολογισμού της εξόδου.



Σχ. 2.14. Σχηματική αναπαράσταση αποσύνθεσης σήματος συνεχούς χρόνου σε “άθροισμα παλμών.”

Επιλέγοντας τη χρονική στιγμή t_0 , λαμβάνουμε ότι η έξοδος ενός γραμμικού συστήματος με είσοδο $\{x(t)\}$ είναι

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t_0)d\tau \quad (2.45)$$

ή, ισοδύναμα,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_{\tau}(t)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.46)$$

Το βάρος με το οποίο συνεισφέρει η είσοδος $x(\tau)$ στην έξοδο $y(t)$ είναι $h_{\tau}(t)$.

Αν, επιπλέον, το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, τότε

$$\{h_{\tau}(t)\} = \mathcal{T}[\{\delta(t - \tau)\}] = \{h(t - \tau)\}. \quad (2.47)$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή, η έξοδος $\{y(t)\}$ για αυθαίρετη είσοδο $\{x(t)\}$ δίνεται από τη σχέση

$$\{y(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\{h(t - \tau)\}d\tau \quad (2.48)$$

ή, ισοδύναμα,

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t - \tau)d\tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (2.49)$$

Η $\{h(t)\}$ είναι η χροστική απόκριση του ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου και, όπως στα συστήματα διακριτού χρόνου, περιγράφει πλήρως το ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου.

2.2.2 Ιδιότητες συνέλιξης

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι η συνέλιξη είναι πράξη αντιμεταθετική,

$$\{x(t)\} * \{y(t)\} = \{y(t)\} * \{x(t)\}, \quad (2.50)$$

Συνεπώς, το ΓΧΑ $\Sigma\Sigma X T_1$ με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ και είσοδο $\{x(t)\}$ και το ΓΧΑ $\Sigma\Sigma X T_2$ με κρουστική απόκριση $\{x(t)\}$ και είσοδο $\{h(t)\}$ έχουν την ίδια έξοδο $\{y(t)\} = \{x(t)\} * \{h(t)\} = \{h(t)\} * \{x(t)\}$.

Επίσης, η συνέλιξη είναι πράξη προσεταιριστική,

$$\{x_1(t)\} * (\{x_2(t)\} * \{x_3(t)\}) = (\{x_1(t)\} * \{x_2(t)\}) * \{x_3(t)\}, \quad (2.51)$$

επιμεριστική ως προς την πρόσθεση,

$$\{x_1(t)\} * (\{x_2(t)\} + \{x_3(t)\}) = \{x_1(t)\} * \{x_2(t)\} + \{x_1(t)\} * \{x_3(t)\}, \quad (2.52)$$

και με ουδέτερο στοιχείο $\{\delta(t)\}$,

$$\{x(t)\} * \{\delta(t)\} = \{\delta(t)\} * \{x(t)\} = \{x(t)\}. \quad (2.53)$$

Λόγω της προσεταιριστικής ιδιότητας της συνέλιξης, το ΓΧΑ $\Sigma\Sigma X T_1$ με κρουστική απόκριση $\{h_1(t)\}$ ακολουθούμενο από το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T_2$ με κρουστική απόκριση $\{h_2(t)\}$ ισοδυναμούν από κοινού με το ΓΧΑ $\Sigma\Delta X T$ με κρουστική απόκριση $\{h_1(t)\} * \{h_2(t)\}$. Λόγω της επιμεριστικής ιδιότητας της συνέλιξης, το άθροισμα των εξόδων δύο συστημάτων $\{h_1(t)\}$ και $\{h_2(t)\}$ με κοινή είσοδο $\{x(t)\}$ ισούται με την έξοδο του συστήματος με κρουστική απόκριση $\{h(t)\} = \{h_1(t)\} + \{h_2(t)\}$ όταν δέχεται την ίδια είσοδο $\{x(t)\}$.

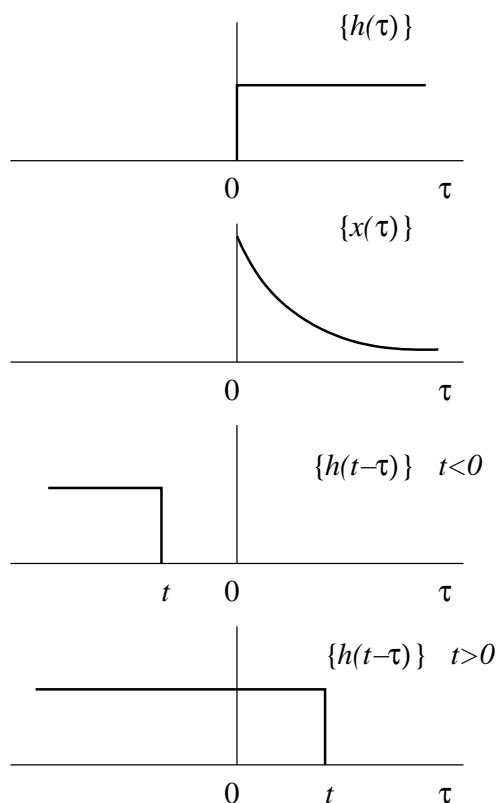
Αιτιατότητα: Ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου είναι αιτιατό αν και μόνο αν $h(t) = 0$ για $t < 0$. Τότε

$$y(t) = \int_0^\infty h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t x(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (2.54)$$

2.2.3 Γραφικός υπολογισμός της συνέλιξης

Για να υπολογίσουμε τη συνέλιξη

$$\{f_1(t)\} * \{f_2(t)\} = \int_{-\infty}^\infty f_1(\tau)\{f_2(t-\tau)\}d\tau \quad (2.55)$$



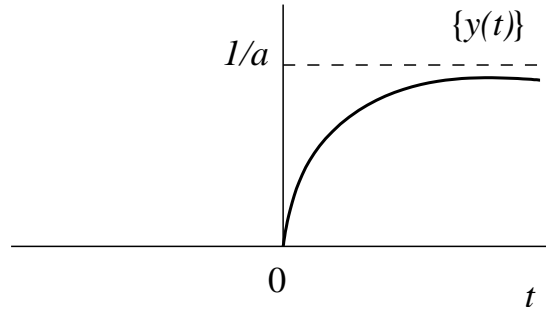
Σχ. 2.15. Γραφικός υπολογισμός συνέλιξης $\{e^{-at}u(t)\} * \{u(t)\}$.

σχεδιάζουμε το $\{f_1(\tau)\}$ (η ελεύθερη μεταβλητή είναι το τ) και το $\{f_2(t - \tau)\}$ (αρχικά σχεδιάζουμε το $\{f_2(-\tau)\}$ το οποίο προκύπτει από το $\{f_2(\tau)\}$ μέσω ανάκλασης ως προς τον κατακόρυφο άξονα, και κατόπιν το $\{f_2(t - \tau)\}$ το οποίο προκύπτει από τη μετακίνηση του $\{f_2(-\tau)\}$ κατά t προς τα δεξιά). Κατόπιν, πολλαπλασιάζουμε τα $\{f_1(\tau)\}$ και $\{f_2(t - \tau)\}$ σημείο προς σημείο και τέλος υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα του γινομένου. Προφανώς, το ίδιο αποτέλεσμα θα λαμβάναμε δουλεύοντας με τα $\{f_1(t - \tau)\}$ και $\{f_2(\tau)\}$.

Παράδειγμα 2.9. Να υπολογιστεί η συνέλιξη $\{x(t)\} * \{h(t)\}$ με

$$x(t) = e^{-at}u(t), \text{ με } a > 0, \text{ και } h(t) = u(t). \quad (2.56)$$

Στο Σχ. 2.15, έχουμε σχεδιάσει τις $\{h(\tau)\}$, $\{x(\tau)\}$, και $\{h(t - \tau)\}$ για t αρνητικό και θετικό. Παρατηρούμε ότι για $t < 0$, το γινόμενο των $\{x(\tau)\}$ και $\{h(t - \tau)\}$ είναι μηδέν και, συνεπώς,

Σχ. 2.16. Αποτέλεσμα συνέλιξης $\{e^{-at}u(t)\} * \{u(t)\}$.

η συνέλιξη $y(t)$ είναι μηδέν. Για $t > 0$,

$$x(\tau)h(t-\tau) = \begin{cases} e^{-a\tau}, & 0 < \tau < t \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.57)$$

Συνεπώς, για $t > 0$,

$$y(t) = \int_0^t e^{-a\tau} d\tau = -\frac{1}{a} e^{-a\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}). \quad (2.58)$$

Άρα, για όλα τα t , η συνέλιξη $\{y(t)\}$ δίνεται από τη σχέση

$$y(t) = \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) u(t) \quad (2.59)$$

και σχεδιάζεται στο Σχ. 2.16.

Παράδειγμα 2.10. Γνωρίζουμε τα σήματα $\{u(t)\}$ και $\{e(t)\}$ με $e(t) = a^{|t|}$, $a > 0$. Έστω $\{x(t)\} = \{u(t)\}$ και $\{y(t)\} = \{u(t)\}\{e(t)\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

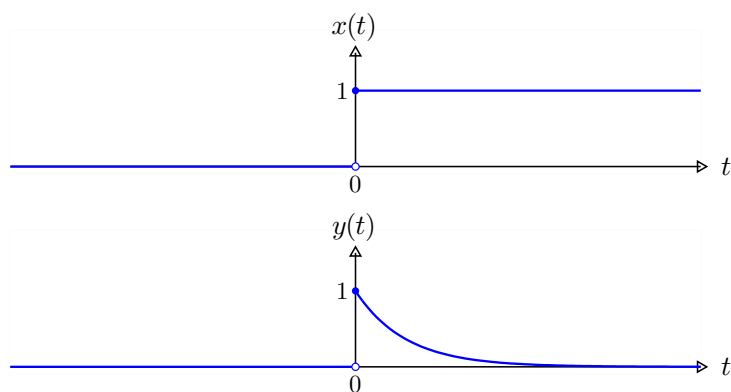
Καταρχήν,

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (2.60)$$

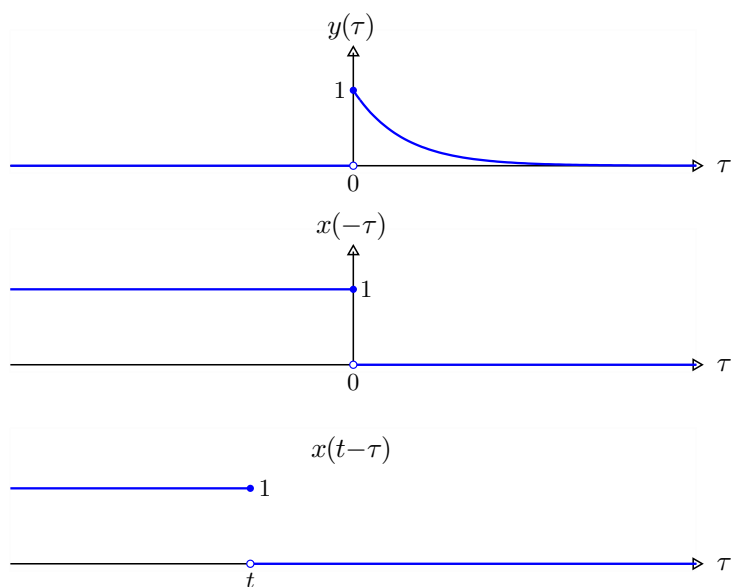
και

$$y(t) = u(t)e(t) = \begin{cases} a^t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (2.61)$$

Τα δύο σήματα σχεδιάζονται στο Σχ. 2.17 όπου έχουμε θεωρήσει ότι $a < 1$.



Σχ. 2.17. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$.



Σχ. 2.18. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{y(\tau)\}$, $\{x(-\tau)\}$, και $\{x(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.

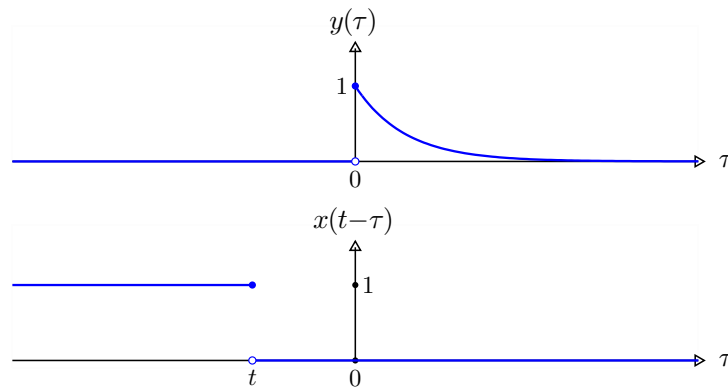
Τρόπος (α)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$. Στο Σχ. 2.18, σχεδιάζουμε ως προς τ τα σήματα $\{y(\tau)\}$, $\{x(-\tau)\}$, και $\{x(t-\tau)\}$ για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.

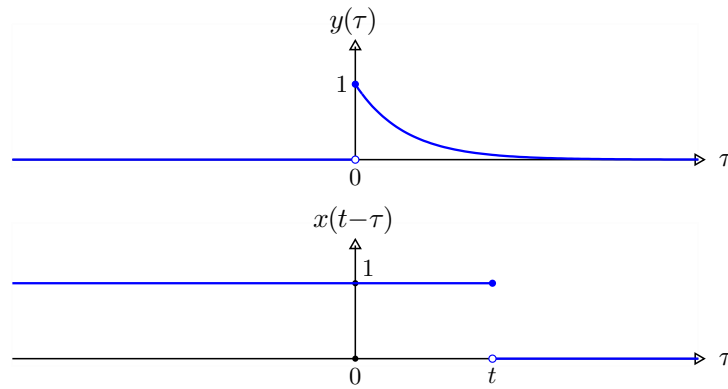
Παρατηρούμε ότι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Αν $t < 0$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.19,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t 0 x(t-\tau)d\tau + \int_t^{\infty} y(\tau) 0 d\tau = 0. \quad (2.62)$$



Σχ. 2.19. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{y(\tau)\}$ και $\{x(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και $t < 0$.



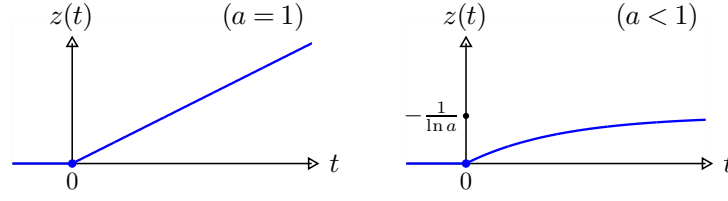
Σχ. 2.20. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{y(\tau)\}$ και $\{x(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και $t \geq 0$.

Αν, όμως, $t \geq 0$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.20,

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t y(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_0^t a^\tau 1 d\tau = \begin{cases} t, & a = 1 \\ \left[\frac{a^\tau}{\ln a}\right]_0^t, & a \neq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} t, & a = 1 \\ \frac{a^t - 1}{\ln a}, & a \neq 1. \end{cases} \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

Συνοπτικά, αν $a = 1$, τότε το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι το σήμα $\{z(t)\}$ με τιμή

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \geq 0, \end{cases} \quad (2.64)$$



Σχ. 2.21. Σχηματική αναπαράσταση του αποτελέσματος $\{z(t)\}$ της συνέλιξης του Παραδείγματος 2.10 για $a = 1$ και $a < 1$, αντίστοιχα.

ενώ, αν $a \neq 1$, τότε

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{a^t - 1}{\ln a}, & t \geq 0. \end{cases} \quad (2.65)$$

Παρατηρήστε ότι το όριο της συνέλιξης για $t \rightarrow \infty$ είναι

$$\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = \begin{cases} \infty, & a \geq 1 \\ -\frac{1}{\ln a}, & 0 < a < 1. \end{cases} \quad (2.66)$$

Στο Σχ. 2.21 αναπαρίσταται το αποτέλεσμα της συνέλιξης $\{z(t)\}$ όταν (α) $a = 1$ και (β) $a < 1$.

Τρόπος (β)

Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$. Στο Σχ. 2.22, σχεδιάζουμε ως προς τ τα σήματα $\{x(\tau)\}$, $\{y(-\tau)\}$, και $\{y(t-\tau)\}$ για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

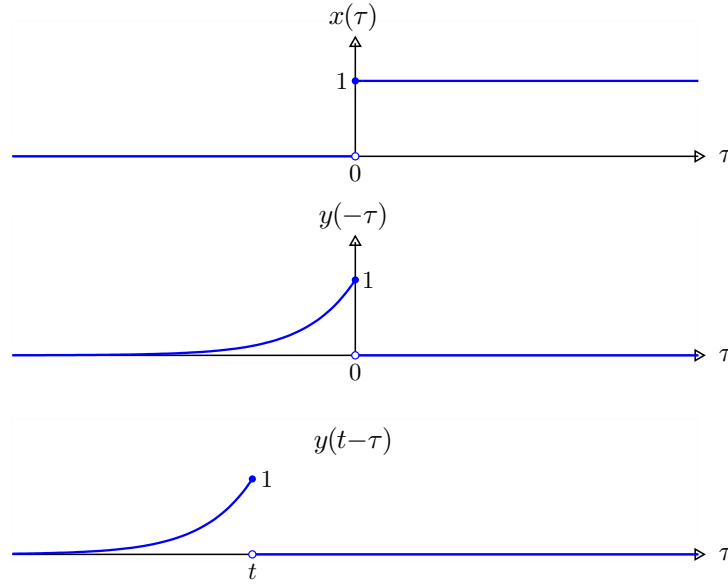
Αν $t < 0$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.23,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^t 0 y(t-\tau)d\tau + \int_0^{\infty} x(\tau) 0 d\tau = 0. \quad (2.67)$$

Αν, όμως, $t \geq 0$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.24,

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^t 1 a^{t-\tau}d\tau = a^t \int_0^t a^{-\tau}d\tau \\ &= \begin{cases} 1^t t, & a = 1 \\ a^t \left[-\frac{a^{-\tau}}{\ln a} \right]_0^t, & a \neq 1 \end{cases} = \begin{cases} t, & a = 1 \\ \frac{a^t - 1}{\ln a}, & a \neq 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Επομένως, λαμβάνουμε το ίδιο αποτέλεσμα που λάβαμε μέσω του τρόπου (α). \diamond



Σχ. 2.22. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$, $\{y(-\tau)\}$, και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2.11. Έστω $\{x(t)\} = \{a^t (u(t) - u(t - T))\}$, $a > 0$, και $\{y(t)\} = \{u(t+2)\}$.

Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

Καταρχήν,

$$x(t) = \begin{cases} a^t, & 0 \leq t < T \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (2.69)$$

και

$$y(t) = \begin{cases} 1, & t \geq -2 \\ 0, & t < -2. \end{cases} \quad (2.70)$$

Τα δύο σήματα σχεδιάζονται στο Σχ. 2.25 όπου έχουμε θεωρήσει ότι $a < 1$.

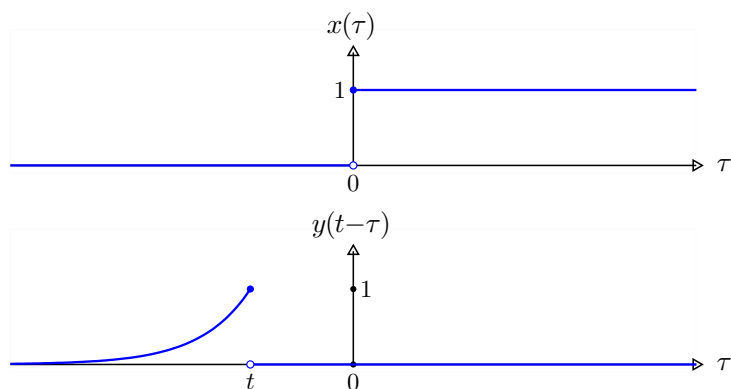
Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$. Στο Σχ. 2.26, σχεδιάζουμε ως προς τ τα σήματα $\{x(\tau)\}$, $\{y(-\tau)\}$, και $\{y(t-\tau)\}$ για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.

Παρατηρούμε ότι διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις.

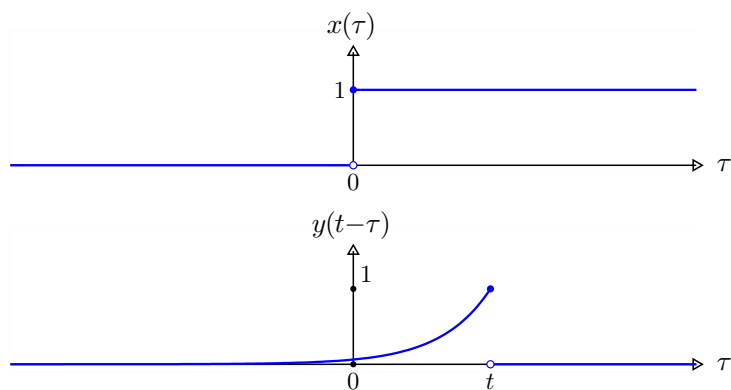
Αν $t + 2 < 0 \Leftrightarrow t < -2$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.27,

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t+2} 0 y(t-\tau)d\tau + \int_0^T x(\tau) 0 d\tau = 0. \quad (2.71)$$

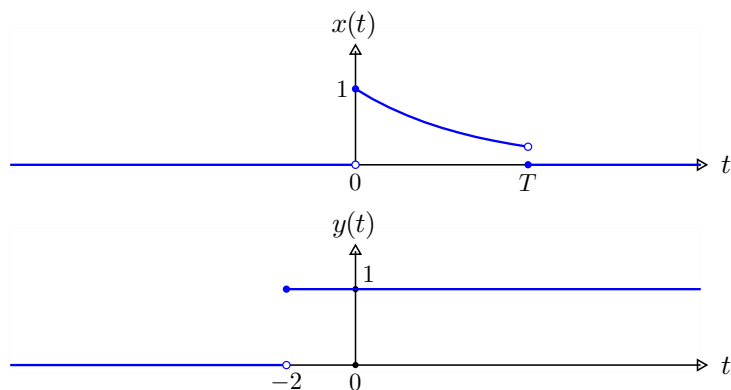
Αν $0 \leq t + 2 < T \Leftrightarrow -2 \leq t < T - 2$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.28,



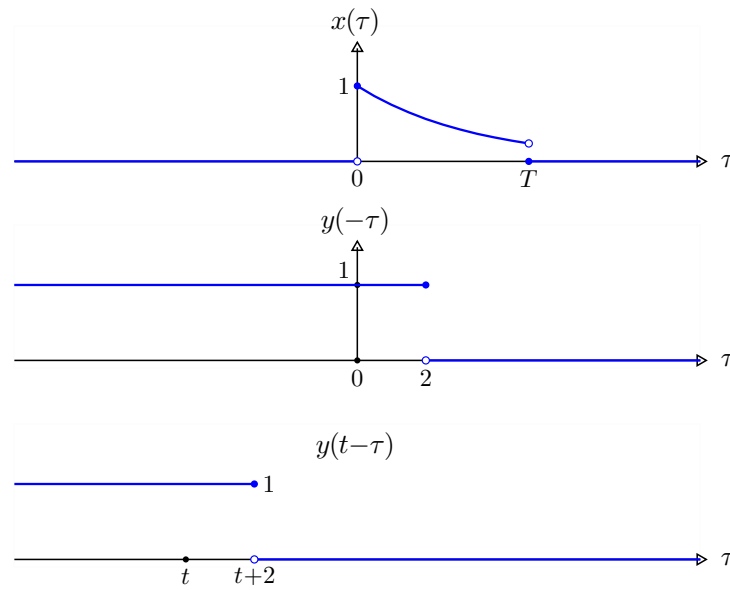
Σχ. 2.23. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$ και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και $t < 0$.



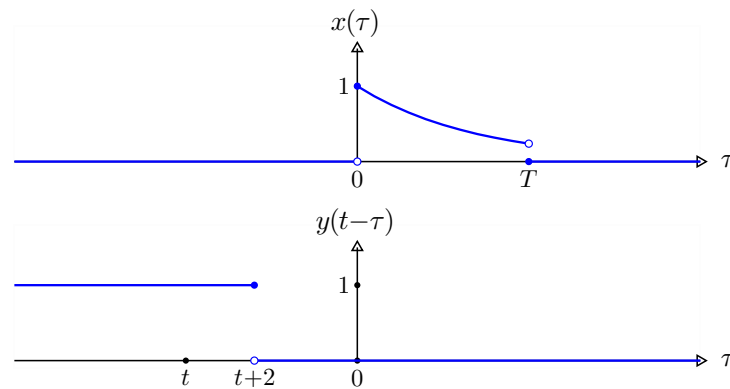
Σχ. 2.24. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$ και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.10 για $a < 1$ και $t \geq 0$.



Σχ. 2.25. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ του Παραδείγματος 2.11 για $a < 1$.



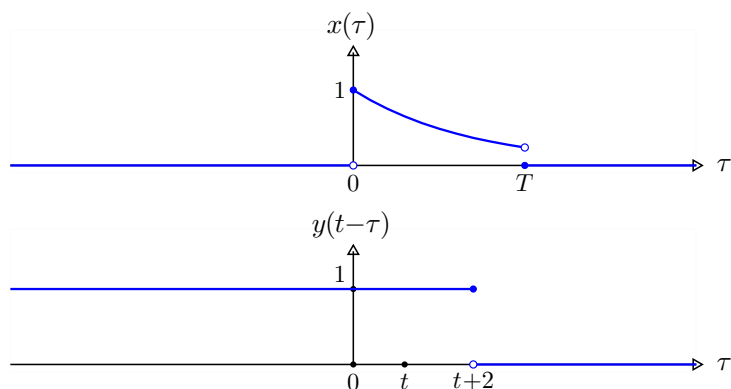
Σχ. 2.26. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$, $\{y(-\tau)\}$, και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.11 για $a < 1$ και αυθαίρετη τιμή $t \in \mathbb{R}$.



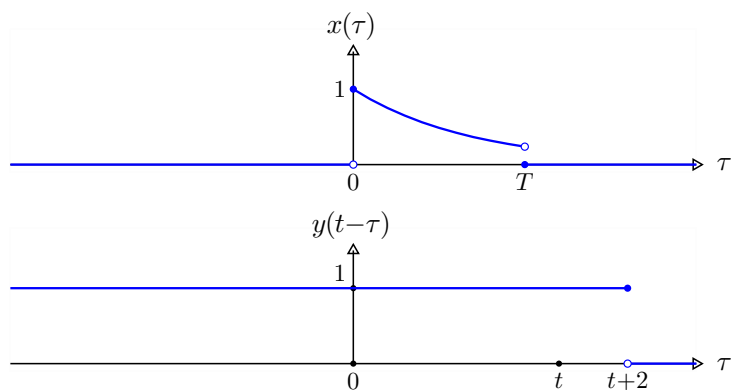
Σχ. 2.27. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$ και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.11 για $a < 1$ και $t < -2$.

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^{t+2} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^{t+2} a^\tau 1 d\tau = \begin{cases} t+2, & a=1 \\ \left[\frac{a^\tau}{\ln a}\right]_0^{t+2}, & a \neq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} t+2, & a=1 \\ \frac{a^{t+2}-1}{\ln a}, & a \neq 1. \end{cases} \quad (2.72)
 \end{aligned}$$

Τέλος, αν $t+2 \geq T \Leftrightarrow t \geq T-2$, τότε, όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.29,



Σχ. 2.28. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$ και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.11 για $a < 1$ και $-2 \leq t < T-2$.

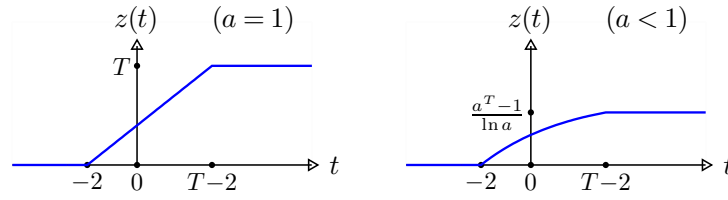


Σχ. 2.29. Σχηματική αναπαράσταση των σημάτων $\{x(\tau)\}$ και $\{y(t-\tau)\}$ του Παραδείγματος 2.11 για $a < 1$ και $-t \geq T-2$.

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^T x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_0^T a^\tau 1 d\tau = \begin{cases} T, & a = 1 \\ \left[\frac{a^\tau}{\ln a}\right]_0^T, & a \neq 1 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} T, & a = 1 \\ \frac{a^T - 1}{\ln a}, & a \neq 1. \end{cases} \quad (2.73)
 \end{aligned}$$

Συνοπτικά, αν $a = 1$, τότε το αποτέλεσμα της συνέλιξης είναι το σήμα $\{z(t)\}$ με τιμή

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ t+2, & -2 \leq t < T-2 \\ T, & t \geq T-2, \end{cases} \quad (2.74)$$



Σχ. 2.30. Σχηματική αναπαράσταση του αποτελέσματος $\{z(t)\}$ της συνέλιξης του Παραδείγματος 2.11 για $a = 1$ και $a < 1$, αντίστοιχα.

ενώ, αν $a \neq 1$, τότε

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ \frac{a^{t+2}-1}{\ln a}, & -2 \leq t < T-2 \\ \frac{a^T-1}{\ln a}, & t \geq T-2. \end{cases} \quad (2.75)$$

Στο Σχ. 2.30 αναπαρίσταται το αποτέλεσμα της συνέλιξης $\{z(t)\}$ όταν (α) $a = 1$ και (β) $a < 1$. \diamond

Παράδειγμα 2.12. Έστω το σήμα $\{x_1(t)\}$ το οποίο έχει μη μηδενική τιμή για $N_1 \leq t \leq M_1$ και το σήμα $\{x_2(t)\}$ το οποίο έχει μη μηδενική τιμή για $N_2 \leq t \leq M_2$. Για ποιες τιμές του $t \in \mathbb{R}$ η τιμή του σήματος $\{y(t)\} = \{x_1(t)\} * \{x_2(t)\}$ είναι μη μηδενική;

Θεωρούμε σταθερό $t \in \mathbb{R}$. Γνωρίζουμε ότι $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$. Το $\{x_1(\tau)\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $N_1 \leq \tau \leq M_1$. Το $\{x_2(\tau)\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $N_2 \leq \tau \leq M_2$. Το $\{x_2(-\tau)\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $-M_2 \leq \tau \leq -N_2$. Το $\{x_2(t-\tau)\}$ παίρνει τιμές τις χρ. στιγμές $t-M_2 \leq \tau \leq t-N_2$. Για σταθερό t , τα σήματα $\{x_1(\tau)\}$ και $\{x_2(t-\tau)\}$ δεν επικαλύπτονται όταν $t-N_2 < N_1 \Leftrightarrow t < N_1+N_2$ ή $t-M_2 > M_1 \Leftrightarrow t > M_1+M_2$. Επομένως, υπάρχει επικάλυψη όταν $N_1+N_2 \leq t \leq M_1+M_2$. Άρα,

$$\begin{aligned} y(t) &= 0, \text{ όταν } t < N_1+N_2 \text{ ή } t > M_1+M_2, \\ y(t) &\in \mathbb{R}, \text{ όταν } N_1+N_2 \leq t \leq M_1+M_2. \end{aligned} \quad (2.76)$$

\diamond

2.2.4 Ευστάθεια ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου

Μπορεί να αποδειχθεί, ανάλογα με την περίπτωση των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου, ότι ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ είναι BIBO ευσταθές

αν και μόνο αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (2.77)$$

2.3 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 2.1. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{a^t u(t)\}$ και $\{y(t)\} = \{b^t u(t)\}$, με $a \neq 0$, $b \neq 0$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

Άσκηση 2.2. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{\delta(t-1)\}$ και $\{y(t)\} = \{\delta(t+1)\}$. Να υπολογιστούν τα σήματα $\{z_1(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$ και $\{z_2(t)\} = \{x(t)\}\{y(t)\}$.

Άσκηση 2.3. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{e^{at}\}$ και $\{y(t)\} = \{\delta(t+10)\}$. Να υπολογιστούν τα σήματα $\{z_1(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$ και $\{z_2(t)\} = \{x(t)\}\{y(t)\}$.

Άσκηση 2.4. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t) \delta(t-0.5) dt$,
- 2) $\int_{-\infty}^{-2} \sin(2\pi t) \delta(t-2) dt$,
- 3) $\int_{-\infty}^{35} e^{at} u(t-5) \delta(t+0.2) dt$.

Άσκηση 2.5. Έστω σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ για τα οποία ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < T, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad \text{και} \quad y(t) = \begin{cases} t, & 0 < t < 2T, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (2.78)$$

Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

Άσκηση 2.6. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{e^{-a|t|}\}$ και $\{y(t)\} = \{e^{-2a(t-1)} u(t-1)\}$, $a > 0$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

Άσκηση 2.7. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{u(t+1) - 2u(t-1) + u(t-3)\}$ και $\{y(t)\} = \{2u(t-1) - 2u(t-3)\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

2.4 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 2.8. Δείξτε ότι κάθε σήμα $\{x(t)\}$ μπορεί να εκφραστεί ως άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος.

Άσκηση 2.9. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2007] Να παρασταθούν γραφικά τα ακόλουθα σήματα: $x_1(t) = u(t)u(10 - t)$, $x_2(t) = 2u(t) + \delta(t - 3)$, $x_3(t) = 4u(t)\delta(t + 2)$, $x_4(t) = 4u(t)\delta(t - 2)$, $x_5(t) = -u(t + 3) + 2u(t + 2) - u(t - 5)$.

Άσκηση 2.10. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2007] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα: $\int_{-\infty}^{\infty} (t^3 + \sin(\frac{\pi}{2}t)) \delta(t - 3)dt$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} \delta(t - 2)dt$, $\int_0^{\infty} e^{-at^2} \delta(t + 1)dt$.

Άσκηση 2.11. Πότε ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου είναι δυναμικό και πότε στατικό;

Άσκηση 2.12. Έστω ΓΧΑ ΣΣΧ με κρουστική απόκριση $\{h(t)\} = \{a^{|t|}\}$, $a > 0$. Για ποιες τιμές του a το εν λόγω σύστημα είναι ευσταθές;

Άσκηση 2.13. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2007] Να χαρακτηριστούν ως γραμμικά ή μη γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα ή χρονικά μεταβαλλόμενα, στατικά ή δυναμικά, αιτιατά ή μη αιτιατά, και BIBO-ευσταθή ή όχι τα συστήματα που περιγράφονται από τις παρακάτω σχέσεις εισόδου-εξόδου: $y(t) = x(t)u(-t)$, $y(t) = \log(x(t))$, και $y(t) = tx(t)$, όπου $t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 2.14. [Εξέταση Προόδου 2008-2009] Θεωρούμε ένα σύστημα συνεχούς χρόνου T το οποίο, όταν δέχεται ως είσοδο το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$, δίνει ως έξοδο το σήμα $\{y(t)\}$ με τιμή

$$y(t) = \begin{cases} x(3t), & \text{αν } x(t) \geq 0, \\ 0, & \text{αν } x(t) < 0. \end{cases} \quad (2.79)$$

1. Είναι το T γραμμικό ή μη γραμμικό, στατικό ή δυναμικό, αιτιατό ή μη αιτιατό, χρονικά μεταβλητό ή αμετάβλητο, BIBO ευσταθές ή όχι; Αιτιολογήστε τις απαντήσεις σας.
2. Αν η είσοδος του T έχει τιμή $x(t) = 2\sin(2\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, υπολογίστε την έξοδό του $\{y(t)\}$. Επίσης, σχεδιάστε την τιμή της εξόδου για $t \in [-1, 1]$.

Άσκηση 2.15. Να υπολογιστεί η συνέλιξη του Παραδείγματος 2.9 με χρήση των $\{h(\tau)\}$ και $\{x(t - \tau)\}$.

Άσκηση 2.16. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $\{x(t)\} = \{a^t u(t)\}$, $a > 0$, και $\{y(t)\} = \{u(t) - u(t - 10)\}$.

Άσκηση 2.17. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $\{x(t)\} = \{a^t u(-t)\}$, $a > 0$, και $\{y(t)\} = \{u(t + 1) - u(t - 2)\}$.

Άσκηση 2.18. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2004] Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $\{x(t)\} = \{\frac{1}{t^2} u(t - 1)\}$ και $\{y(t)\} = \{u(t) - u(t - 1)\}$.

Άσκηση 2.19. Να υπολογιστεί η συνέλιξη των σημάτων $\{x(t)\} = \{a^t (u(t) - u(t - T))\}$ και $\{y(t)\} = \{b^t u(-t)\}$, όπου $a, b, T > 0$.

Άσκηση 2.20. [Εξέταση Προόδου 2007-2008] Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$ όπου $x(t) = e^{-a|t|}$ και $y(t) = e^{-b|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R}$, με $a, b > 0$.

Άσκηση 2.21. Έστω σήματα $\{x(t)\} = \{|\cos(2\pi Ft)| (u(t + \frac{T}{4}) - u(t - \frac{T}{4}))\}$ και $\{y(t)\} = \{e^t |u(|t|) - u(t)|\}$. Να υπολογιστεί το σήμα $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

Άσκηση 2.22. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Να υπολογιστεί και να σχεδιαστεί η συνέλιξη των σημάτων συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ με τιμή

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 2 \\ 0, & |t| > 2, \end{cases} \quad (2.80)$$

και $\{y(t)\} = \{e^{-4|t|}\}$.

Άσκηση 2.23. Τα σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ ορίζονται ως

$$x(t) \triangleq u(t) - 2u(t - 2) + u(t - 5), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.81)$$

και

$$y(t) \triangleq e^{2t} u(1 - t), \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (2.82)$$

αντίστοιχα. Έστω $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

1. Να σχεδιαστεί η γραφική του $\{x(t)\}$ με τη χρήση του MATLAB στο διάστημα $t \in [-5, 10]$ με βήμα $\Delta t = \frac{1}{100}$ και όρια $[-2, 2]$ στον κάθετο άξονα.
2. Να σχεδιαστεί η γραφική του $\{y(t)\}$ με τη χρήση του MATLAB στο διάστημα $t \in [-10, 10]$ με βήμα $\Delta t = \frac{1}{100}$ και όρια $[0, 10]$ στον κάθετο άξονα.
3. Να υπολογιστεί θεωρητικά η τιμή $z(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
4. Να υπολογιστεί αριθμητικά η τιμή $z(t)$ με τη χρήση του MATLAB όπου δειγματοληπτούμε τα σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στα διαστήματα $t \in [-5, 10]$ και $t \in [-10, 10]$, αντίστοιχα, με $\Delta t = \frac{1}{100}$ και το ολοκλήρωμα της συνέλιξης προσεγγίζεται με το αντίστοιχο άθροισμα.
Ποια είναι τα νέα όρια για το t ως προς το $\{z(t)\}$;
5. Να δοθεί το γράφημα της αριθμητικής λύσης του υποερωτήματος 4 και στο ίδιο γράφημα να παρουσιαστεί η θεωρητική λύση του υποερωτήματος 3 με $\Delta t = \frac{1}{100}$. Να συγκριθούν οι δύο γραφικές.

Άσκηση 2.24. Δίνονται τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ των οποίων οι τιμές είναι

$$x(t) = \begin{cases} -\left(\frac{5}{2}\right)^{2t}, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 2^{-4t+1}, & t > 0 \end{cases}$$

και

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 3 \cdot 5^{-6t}, & t \geq 0 \end{cases}$$

αντίστοιχα. Έστω $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$.

1. Να σχεδιαστούν οι $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ με τη χρήση του MATLAB στο διάστημα $t \in [-5, 5]$ με βήμα $\Delta t = \frac{1}{100}$.
2. Να υπολογιστεί θεωρητικά η τιμή $z(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
3. Να υπολογιστεί αριθμητικά η τιμή $z(t)$ με τη χρήση του MATLAB όπου δειγματοληπτούμε τα σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στις χρονικές στιγμές $t_n = n \cdot \Delta t$, με $\Delta t = \frac{1}{100}$ και $n = -500, -499, \dots, 500$, και το ολοκλήρωμα της συνέλιξης προσεγγίζεται με το αντίστοιχο άθροισμα.

Να δοθεί το γράφημα της αριθμητικής λύσης του υποερωτήματος 3 και στο ίδιο γράφημα να παρουσιαστεί η θεωρητική λύση του υποερωτήματος 2 υπολογισμένη τις χρονικές στιγμές $t_n = n \cdot \Delta t$. Να συγκριθούν οι δύο γραφικές.

Κεφάλαιο 3

Η Έννοια της Συχνότητας

Η έννοια της συχνότητας είναι στενά συνδεδεμένη με ένα συγκεκριμένο τύπο περιοδικής κίνησης που καλείται αρμονική ταλάντωση και περιγράφεται από ημιτονοειδείς συναρτήσεις.

Η **συχνότητα** (frequency) έχει τη διάσταση του αντίστροφου χρόνου. Συνεπώς, αναμένουμε ότι η φύση του χρόνου (συνεχής ή διακριτός) θα επηρεάσει τη φύση της συχνότητας, αντίστοιχα.

3.1 Ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου

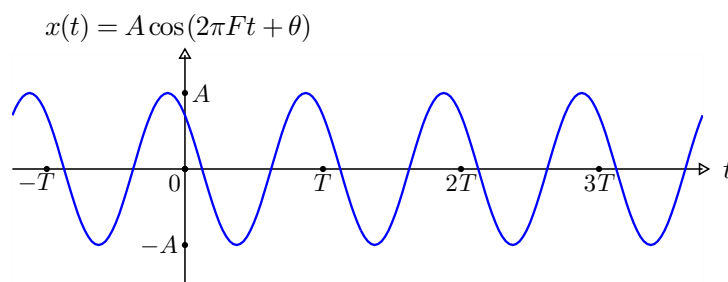
Μία απλή αρμονική ταλάντωση περιγράφεται από το **ημιτονοειδές σήμα** (sinusoidal signal) συνεχούς χρόνου

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \theta), \quad -\infty < t < \infty, \quad (3.1)$$

όπου A είναι το **πλάτος** (amplitude) της ταλάντωσης, Ω είναι η **γωνιακή συχνότητα** (angular frequency) σε rad/sec και θ είναι η **φάση** (phase) σε rads. Θέτοντας $\Omega = 2\pi F$, όπου F η **κυκλική συχνότητα** (cyclic frequency) σε cycles/sec, λαμβάνουμε

$$x(t) = A \cos(2\pi F t + \theta), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.2)$$

Τα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.



Σχ. 3.1. Το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\} = \{A \cos(2\pi Ft + \theta)\}$.

1. Για κάθε καθορισμένη τιμή F , το $x(t)$ είναι περιοδικό με περίοδο $T = \frac{1}{F}$, διότι για κάθε πραγματικό αριθμό t έχουμε

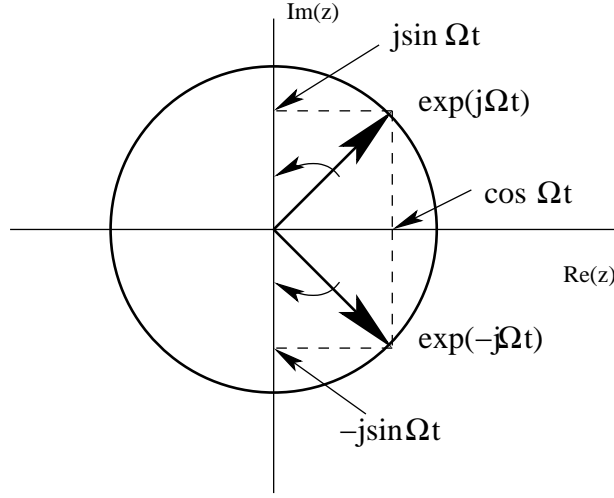
$$\begin{aligned} x(t+T) &= x\left(t + \frac{1}{F}\right) = A \cos\left(2\pi F\left(t + \frac{1}{F}\right) + \theta\right) = \\ &= A \cos(2\pi Ft + 2\pi + \theta) = A \cos(2\pi Ft + \theta) = x(t). \end{aligned} \quad (3.3)$$

2. Ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου με διαφορετικές συχνότητες είναι διαφορετικά.
3. Αύξηση της συχνότητας (Ω ή F) οδηγεί σε αύξηση του ρυθμού ταλάντωσης.

Εξ' ορισμού, η συχνότητα (Ω ή F) είναι μία θετική ποσότητα. Αυτό γίνεται προφανές αν μεταφράσουμε τη συχνότητα F ως τον αριθμό κύκλων που διαγράφει το ημιτονοειδές σήμα ανά μονάδα χρόνου. Όμως, σε αρκετές περιπτώσεις, και κυρίως για μαθηματική ευκολία, κρίνεται χρήσιμο να εισάγουμε αρνητικές συχνότητες ως εξής.

$$x(t) = A \cos(\Omega t + \theta) = \frac{A}{2} e^{j(\Omega t + \theta)} + \frac{A}{2} e^{-j(\Omega t + \theta)}. \quad (3.4)$$

Τα $e^{\pm j\Omega t}$ καλούνται **φάσορες** (phasors). Με την εξέλιξη του χρόνου, οι φάσορες περιστρέφονται σε αντίθετες κατευθύνσεις με γωνιακές ταχύτητες $\pm\Omega$ rad/sec. Η θετική συχνότητα Ω αντιστοιχεί στην κίνηση με φορά αντίθετη από τη φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, ενώ η αρνητική συχνότητα $-\Omega$ αντιστοιχεί, απλά, στην κίνηση με φορά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.



Σχ. 3.2. Φάσορες: Σχηματική αναπαράσταση.

3.2 Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου

Ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου εκφράζεται ως

$$x[n] = A \cos(\omega n + \theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

όπου ω είναι η γωνιακή συχνότητα σε rad/sample και θ η φάση σε rad. Αν $\omega = 2\pi f$, τότε $x[n] = A \cos(2\pi f n + \theta)$ όπου f είναι η κυκλική συχνότητα σε cycles/sample.

Τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου έχουν τις παρακάτω ιδιότητες.

1. Ένα ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου είναι περιοδικό μόνο αν η κυκλική του συχνότητα f είναι ρητός αριθμός.

Απόδειξη: Το $\{x[n]\}$ είναι περιοδικό με περίοδο N , αν

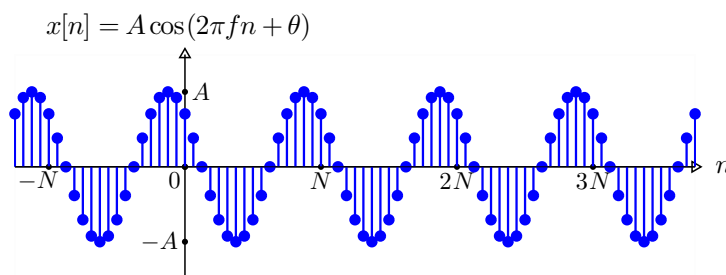
$$x[n + N] = x[n], \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.6)$$

Ένα ημιτονοειδές σήμα με συχνότητα f_0 είναι περιοδικό με περίοδο N , αν

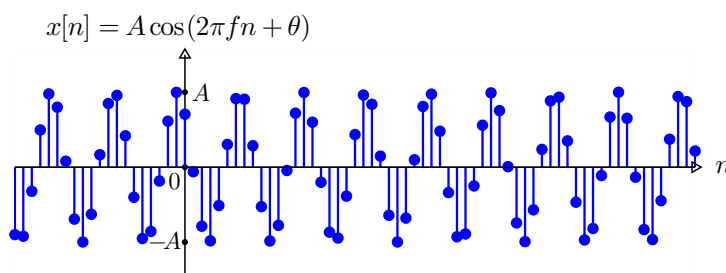
$$\cos(2\pi f_0(n + N) + \theta) = \cos(2\pi f_0 n + \theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.7)$$

Είναι γνωστό ότι αν $\cos \phi_1 = \cos \phi_2$, τότε $\phi_1 = 2k\pi \pm \phi_2$ όπου k ακέραιος. Παίρνοντας το ενδεχόμενο $\phi_1 = 2k\pi + \phi_2$, έχουμε

$$2\pi f_0(n + N) + \theta = 2k\pi + 2\pi f_0 n + \theta \iff 2\pi f_0 N = 2k\pi \iff f_0 = \frac{k}{N}. \quad (3.8)$$



Σχ. 3.3. Το περιοδικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{A \cos(2\pi f n + \theta)\}$ με συχνότητα $f = \frac{1}{16}$ και θεμελιώδη περίοδο $N = 16$.



Σχ. 3.4. Το αperiodικό ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{A \cos(2\pi f n + \theta)\}$ με συχνότητα $f = \frac{1}{\sqrt{55}}$.

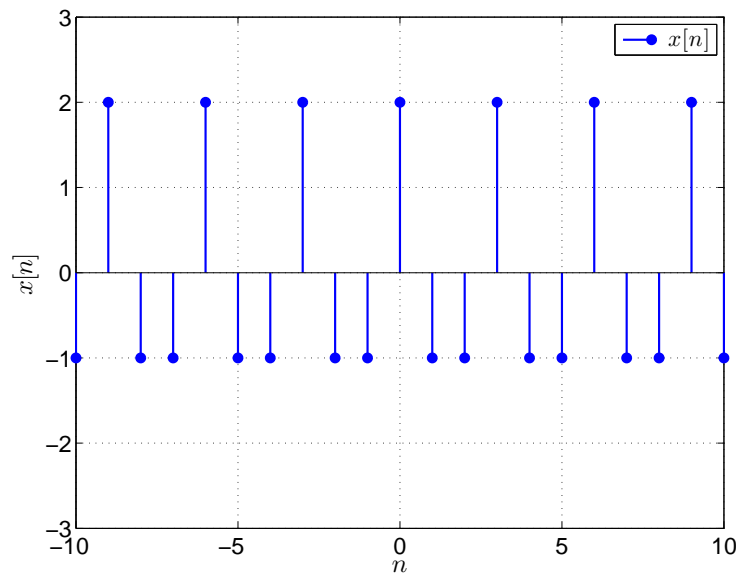
Το ενδεχόμενο $\phi_1 = 2k\pi - \phi_2$ δεν οδηγεί σε λύση ανεξάρτητη του n (δείξτε το ως άσκηση).

Η μικρότερη δυνατή θετική τιμή του N για την οποία η σχέση (3.6) είναι αληθής καλείται θεμελιώδης περίοδος. Για να υπολογίσουμε τη θεμελιώδη περίοδο, εκφράζουμε την f_0 ως $f_0 = \frac{K}{N} = \frac{K_p}{N_p}$, με K_p και N_p πρώτους μεταξύ τους. Η θεμελιώδης περίοδος είναι N_p .

2. Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου των οποίων οι γωνιακές (κυκλικές) συχνότητες απέχουν κατά $2k\pi$, όπου k ακέραιος, ταυτίζονται, διότι

$$\cos[(\omega_0 + 2k\pi)n + \theta] = \cos(\omega_0 n + 2k\pi n + \theta) = \cos(\omega_0 n + \theta). \quad (3.9)$$

3. Ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου με διαφορετικές συχνότητες στο διάστημα συχνοτήτων $-\pi \leq \omega < \pi$, ή ισοδύναμα $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$, είναι διαφορετικά.
4. Ο μέγιστος βαθμός ταλάντωσης ενός ημιτονοειδούς σήματος διακριτού χρόνου επιτυγχάνεται όταν $\omega = \pm\pi$ ή ισοδύναμα $f = \pm\frac{1}{2}$.



Σχ. 3.5. Το περιοδικό ημιτονοειδές σήμα $\{x[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)\} = \{2 \cos(2\pi \frac{4}{3}n)\}$.

Χρησιμοποιώντας την Ιδιότητα 2, μπορούμε να δείξουμε ότι οποιοδήποτε ημιτονοειδές σήμα διακριτού χρόνου με κυκλική συχνότητα f' εκτός του διαστήματος $[-1/2, 1/2)$ ταυτίζεται με κάποιο ημιτονοειδές σήμα με κυκλική συχνότητα f στο διάστημα αυτό. Η σχέση μεταξύ f' και f είναι

$$f' = f + k, \quad k \text{ ακέραιος.} \quad (3.10)$$

Τέτοια σήματα καλούνται **επικαλύψεις** (aliases) των βασικών ημιτονοειδών σημάτων διακριτού χρόνου, δηλαδή, αυτών με κυκλικές συχνότητες στο διάστημα $[-1/2, 1/2)$.

Στο Παράδειγμα 1.2 μελετήσαμε τα ημιτονοειδή σήματα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{1}{3}n)\}$ και $\{y[n]\} = \{2 \cos(2\pi \frac{4}{3}n)\}$ και δείξαμε ότι είναι ίσα μεταξύ τους. Αυτό είναι αναμενόμενο σύμφωνα με τις ιδιότητες των ημιτονοειδών σημάτων διακριτού χρόνου, εφόσον οι συχνότητες των δύο σημάτων είναι, αντίστοιχα, $\frac{1}{3}$ και $\frac{4}{3} = \frac{1}{3} + 1$. Εφόσον οι συχνότητες των δύο σημάτων είναι ρητοί αριθμοί, τα δύο σήματα είναι περιοδικά και, όπως φαίνεται και στο Σχ. 3.5, έχουν θεμελιώδη περίοδο $N = 3$.

3.3 Αρμονικά συνδεδεμένα σήματα

Περιοδικά σήματα καλούνται αρμονικά συνδεδεμένα αν οι συχνότητές τους είναι πολλαπλάσιες μίας κοινής συχνότητας.

3.3.1 Αρμονικά συνδεδεμένα σήματα συνεχούς χρόνου

Τα βασικά αρμονικά συνδεδεμένα μιγαδικά εκθετικά σήματα συνεχούς χρόνου είναι τα

$$s_k(t) = e^{jk\Omega_0 t} = e^{j2\pi k F_0 t}, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (3.11)$$

Για κάθε k , το $s_k(t)$ είναι περιοδικό με κυκλική συχνότητα kF_0 . Άρα, η περίοδος του $s_k(t)$ είναι $\frac{1}{kF_0} = \frac{T_0}{k}$ όπου $T_0 = \frac{1}{F_0}$. Αφού ένα περιοδικό σήμα με περίοδο $\frac{T_0}{k}$ είναι επίσης περιοδικό με περίοδο $k\frac{T_0}{k} = T_0$, όλα τα $s_k(t)$ έχουν κοινή περίοδο T_0 . (Πεισθείτε εξετάζοντας τα σήματα με συχνότητες $F = 1, 2, \dots$)

Τα βασικά περιοδικά σήματα $s_k(t)$ μπορούν να συνδυαστούν γραμμικά για τη δημιουργία πιο σύνθετων περιοδικών σημάτων $x(t)$ με περίοδο T_0 , ως εξής.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k s_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}. \quad (3.12)$$

Αργότερα, θα δούμε ότι κάθε περιοδικό σήμα, μέσα από μία ευρεία κλάση περιοδικών σημάτων με περίοδο T_0 μπορεί να εκφραστεί στη μορφή (3.12).

3.3.2 Αρμονικά συνδεδεμένα σήματα διακριτού χρόνου

Μιγαδικά εκθετικά σήματα διακριτού χρόνου είναι περιοδικά αν η συχνότητά τους f_0 είναι ρητός. Θέτοντας $f_0 = \frac{1}{N}$, κατασκευάζουμε τα

$$s_k[n] = e^{j2\pi k f_0 n} = e^{j2\pi k n / N}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (3.13)$$

τα οποία είναι περιοδικά με περίοδο N . Παρατηρούμε ότι

$$s_{k+N}[n] = e^{j2\pi(k+N)n/N} = e^{j2\pi n} \cdot s_k[n] = s_k[n]. \quad (3.14)$$

Άρα, υπάρχουν N διαφορετικά μιγαδικά εκθετικά σήματα με περίοδο N . Συνήθως, ως βασικά σήματα επιλέγουμε τα N διαφορετικά $s_k[n] = e^{j2\pi kn/N}$, με συχνότητες $f_k = \frac{k}{N}$ για $k = 0, \dots, N-1$.

Συνδυάζοντας γραμμικά αυτά τα βασικά σήματα, μπορούμε να κατασκευάσουμε πιο σύνθετα περιοδικά σήματα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ με περίοδο N ως εξής.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k s_k[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}. \quad (3.15)$$

Αργότερα, θα δούμε ότι κάθε περιοδικό σήμα με περίοδο N μπορεί να γραφεί σε αυτή τη μορφή.

3.4 Δειγματοληψία ημιτονοειδών σημάτων

Περιοδική ή ομοιόμορφη **δειγματοληψία** (sampling) εκφράζεται από τη σχέση

$$\{x[n]\} = \{x_a(nT_s)\}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \quad (3.16)$$

όπου $\{x[n]\}$ είναι η ακολουθία που λαμβάνουμε καταγράφοντας τις τιμές του αναλογικού σήματος $x_a(t)$ κάθε T_s sec (έστω $T_s > 0$). Το T_s καλείται **περίοδος δειγματοληψίας** (sampling period). Αντίστοιχα, το $F_s = \frac{1}{T_s}$ καλείται **συχνότητα δειγματοληψίας** (sampling frequency) (παρατηρήστε ότι $F_s > 0$).

Οι μεταβλητές t και n συνδέονται με τη σχέση

$$t = nT_s = \frac{n}{F_s}. \quad (3.17)$$

Έστω ότι το ημιτονοειδές σήμα συνεχούς χρόνου $x_a(t) = A \cos(2\pi F_0 t + \theta)$ δειγματοληπτείται με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{F_s}$. Τότε

$$x[n] = x_a(nT_s) = A \cos(2\pi F_0 nT_s + \theta) = A \cos\left(2\pi \frac{F_0}{F_s} n + \theta\right). \quad (3.18)$$

Ορίζοντας $f_0 = \frac{F_0}{F_s}$, λαμβάνουμε

$$x[n] = A \cos(2\pi f_0 n + \theta), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (3.19)$$

Αν $|f_0| < \frac{1}{2}$, που ισοδύναμα εκφράζεται ως $F_s > 2|F_0|$, τότε, γνωρίζοντας τις συχνότητες f_0 και F_s , μπορούμε να υπολογίσουμε μοναδικά την F_0 ως $F_0 = f_0 F_s$. Σε αυτή την περίπτωση, κατά τη διαδικασία της δειγματοληψίας δεν έχουμε απώλεια πληροφορίας.

Αν, όμως, $|f_0| > \frac{1}{2}$, ή, ισοδύναμα, $F_s < 2|F_0|$, τότε το ημιτονοειδές σήμα $\{x[n]\}$ της (3.19) με συχνότητα f_0 ταυτίζεται, λόγω επικάλυψης, με κάποιο ημιτονοειδές σήμα με συχνότητα f'_0 στο διάστημα $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Η σχέση που συνδέει τα f_0 και f'_0 είναι

$$f_0 = f'_0 + k \quad (3.20)$$

όπου k είναι άγνωστος ακέραιος. Σε αυτή την περίπτωση, δεν μπορούμε να υπολογίσουμε μοναδικά την F_0 , επομένως έχουμε απώλεια πληροφορίας.

Αν $|f_0| = \frac{1}{2}$, τότε και πάλι δεν μπορούμε να ανακτήσουμε μοναδικά την F_0 . (Πεισθείτε για αυτό δειγματοληπτώντας το $\sin(2\pi F_0 t)$ και το $\sin(2\pi(-F_0)t)$ με περίοδο δειγματοληψίας $F_s = 2F_0$. Μπορείτε να ανακτήσετε το αρχικό σήμα από τα δείγματα;).

Συνεπώς, για να μην έχουμε απώλεια πληροφορίας κατά τη δειγματοληψία ημιτονοειδών σημάτων με συχνότητα F_0 , θα πρέπει να ισχύει

$$\boxed{F_s > 2|F_0|}. \quad (3.21)$$

Αν το σήμα προς δειγματοληψία είναι ένας γραμμικός συνδυασμός ημιτονοειδών σημάτων συνεχούς χρόνου, δηλαδή, αν

$$x(t) = \sum_{k=1}^M c_k \cos(2\pi F_k t + \theta_k), \quad (3.22)$$

τότε, για να μην έχουμε απώλεια πληροφορίας, θα πρέπει να ισχύει

$$F_s > 2F_{\max} \quad (3.23)$$

όπου $F_{\max} = \max(|F_1|, \dots, |F_M|)$. Αν συμβαίνει αυτό, τότε μετά από τη δειγματοληψία θα λάβουμε το σήμα διακριτού χρόνου

$$x[n] = \sum_{k=1}^M c_k \cos(2\pi f_k n + \theta_k) \quad (3.24)$$

με $|f_k| < \frac{1}{2}$ για $k = 1, \dots, M$. Γνωρίζοντας τις συχνότητες f_k , $k = 1, \dots, M$, και τη συχνότητα δειγματοληψίας F_s , μπορούμε να υπολογίσουμε μοναδικά τις συχνότητες F_k , $k = 1, \dots, M$, από τη σχέση $F_k = f_k F_s$. Διαφορετικά, δεν μπορούμε να ανακτήσουμε ένα ή περισσότερα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς χρόνου, με συνέπεια την αδυναμία ανάκτησης του γραμμικού συνδυασμού τους $x(t)$.

3.5 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 3.1. Να αποδείξετε ότι το σήμα $x(t)$ της (3.12) είναι περιοδικό με περίοδο $T_0 = \frac{1}{F_0}$.

Άσκηση 3.2. Να αποδείξετε ότι το σήμα $x[n]$ της (3.15) είναι περιοδικό με περίοδο N .

Άσκηση 3.3. Δειγματοληπτήστε τα σήματα

$$x_1(t) = \cos 2\pi(10)t, \quad x_2(t) = \cos 2\pi(50)t, \quad (3.25)$$

με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{40}$ sec, στο διάστημα $0 \leq t \leq 2$, και συγκρίνετε τις ακολουθίες που λαμβάνετε. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Άσκηση 3.4. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2008] Να υπολογιστεί η βασική περίοδος του σήματος διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{\cos(\frac{3\pi n}{5}) + \cos(\frac{\pi n}{3})\}$. (α) $\frac{3}{10}$, (β) 30, (γ) $\frac{1}{6}$, (δ) 60.

Άσκηση 3.5. Δημιουργήστε με το MATLAB τα σήματα $x[n] = \cos(2\pi f n)$, $n = 0, \dots, 30$, για $f = \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{2}$. Είναι περιοδικά τα $\{x[n]\}$; Αν ναι, ποιες είναι οι βασικές περίοδοι;

Άσκηση 3.6. Δημιουργήστε με το MATLAB και συγκρίνετε τα σήματα $x[n] = \cos(2\pi f n)$, $n = 0, \dots, 30$, για $f = \frac{1}{8}, \frac{9}{8}, \frac{17}{8}$. Τι παρατηρείτε; Μπορείτε να εξηγήσετε το φαινόμενο;

Άσκηση 3.7. Δημιουργήστε με το MATLAB τα σήματα $x[n] = \cos(2\pi f n)$, $n = 0, \dots, 50$, για $f = \frac{1}{10}, \frac{1}{5}, \frac{1}{2}, \frac{2}{6}, \sqrt{2}$. Τι παρατηρείτε; Είναι περιοδικά τα $\{x[n]\}$; Αν ναι, ποιες είναι οι βασικές περίοδοι;

Κεφάλαιο 4

Σειρές Fourier

4.1 Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου

Ας υποθέσουμε ότι μάς δίνεται ένα περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ με περίοδο T_0 . Τότε, κάτω από ορισμένες συνθήκες που θα αναφερθούν στη συνέχεια, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε το $\{x(t)\}$ ως εξής.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}, \quad \text{με } F_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (4.1)$$

Υποθέτοντας ότι η σχέση (4.1) είναι αληθής, δεδομένου του περιοδικού σήματος $\{x(t)\}$, χρειαζόμαστε μία διαδικασία για να υπολογίζουμε τους συντελεστές c_k , $\forall k \in \mathbb{Z}$. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται ως εξής. Υποθέτοντας ότι ο l είναι ακέραιος, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης με $e^{-j2\pi l F_0 t}$, ολοκληρώνουμε πάνω σε μία περίοδο, και λαμβάνουμε

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \right) e^{-j2\pi l F_0 t} dt. \quad (4.2)$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά του ολοκληρώματος και του αθροίσματος, λαμβάνουμε

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \left(\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi(k-l)F_0 t} dt \right). \quad (4.3)$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος του δεξιού μέλους της (4.3), εξετάζουμε τις εξής περιπτώσεις.

1. Για $k \neq l$,

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi(k-l)F_0t} dt = \frac{e^{j2\pi(k-l)F_0t}}{j2\pi(k-l)F_0} \Big|_{t_0}^{t_0+T_0} = 0 \quad (4.4)$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει διότι το $e^{j2\pi(k-l)F_0t}$ είναι περιοδικό με περίοδο $\frac{T_0}{k-l}$ και, συνεπώς, με περίοδο T_0 .

2. Για $k = l$,

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} e^{j2\pi(k-l)F_0t} dt = \int_{t_0}^{t_0+T_0} e^0 dt = T_0. \quad (4.5)$$

Άρα, ο μοναδικός μη μηδενικός όρος του δεξιού μέλους της (4.3) εμφανίζεται για $k = l$ δίνοντας

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt = T_0 c_l \quad (4.6)$$

ή, ισοδύναμα,

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt. \quad (4.7)$$

Αφού το t_0 έχει επιλεγεί αυθαίρετα, το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογιστεί πάνω σε οποιαδήποτε περίοδο.

Συνοψίζοντας, συμπεραίνουμε ότι αν το $\{x(t)\}$ έχει μία αναπαράσταση της μορφής (4.1), τότε οι συντελεστές c_k δίνονται από τη σχέση (4.7). Άρα, οδηγούμαστε στο ζεύγος σχέσεων

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (\text{Εξίσωση σύνθεσης}) \quad (4.8)$$

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \quad (\text{Εξίσωση ανάλυσης}) \quad (4.9)$$

το οποίο ορίζει την αναπαράσταση ενός περιοδικού σήματος σαν **σειρά Fourier** (Fourier series). Η σχέση (4.8) καλείται εξίσωση σύνθεσης διότι υποδεικνύει ότι στοιχειώδη περιοδικά μιγαδικά εκθετικά σήματα συνδυάζονται γραμμικά και “παράγουν” πιο πολύπλοκα περιοδικά σήματα, ενώ η σχέση (4.9) καλείται εξίσωση ανάλυσης διότι, υπολογίζοντας τους συντελεστές c_k , υποδεικνύει με ποιο τρόπο πολύπλοκα περιοδικά σήματα μπορούν να αναλυθούν σε γραμμικό συνδυασμό στοιχειωδών περιοδικών σημάτων.

Οι συντελεστές c_k καλούνται **συντελεστές της σειράς Fourier** (Fourier series coefficients) και υποδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο τα αρμονικά συνδεδεμένα σήματα $\{e^{j2\pi k F_0 t}\}$ συνδυάζονται γραμμικά για τη σύνθεση του $\{x(t)\}$. Οι συντελεστές Fourier αποτελούν μία μοναδική περιγραφή του $\{x(t)\}$ στο πεδίο των συχνοτήτων, διότι διαφορετικά $\{x(t)\}$ οδηγούν σε διαφορετικά σύνολα συντελεστών Fourier.¹

Οι συνθήκες οι οποίες εγγυώνται ότι η σειρά στο δεξιό μέλος της (4.1) ισούται με $x(t)$ εκτός από τα σημεία ασυνέχειας του $\{x(t)\}$, καλούνται **συνθήκες Dirichlet** (Dirichlet conditions) και είναι οι εξής (η απόδειξη είναι εκτός των πλαισίων του μαθήματος).

1. Το $\{x(t)\}$ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών σε κάθε περίοδο.
2. Το $\{x(t)\}$ έχει πεπερασμένο αριθμό ακροτάτων σε κάθε περίοδο.
3. Το $\{x(t)\}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο σε κάθε περίοδο, δηλαδή,

$$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty. \quad (4.10)$$

(Αποδείξτε ότι αυτή η συνθήκη εγγυάται την ύπαρξη των συντελεστών Fourier, δηλαδή, $|c_k| < \infty, \forall k \in \mathbb{Z}$).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι στα σημεία ασυνέχειας του $\{x(t)\}$ η σειρά συγκλίνει στο μέσο της ασυνέχειας. Δηλαδή, αν υποθέσουμε ότι το t_0 είναι σημείο ασυνέχειας του $\{x(t)\}$, τότε, για $t = t_0$, το δεξιό μέλος της (4.1) συγκλίνει στην τιμή $\frac{1}{2} [x(t_0^-) + x(t_0^+)]$.

¹Χωρίς να μπορούμε σε μαθηματικές λεπτομέρειες, αναφέρουμε ότι αν τα σήματα $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ οδηγούν στους ίδιους συντελεστές $c_k, \forall k \in \mathbb{Z}$, τότε τα $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ διαφέρουν το πολύ σε πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος σημείων και θεωρούμε ότι “ταυτίζονται”.

4.1.1 Φασματική πυκνότητα ισχύος περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου

Έστω $\{x(t)\}$ περιοδικό σήμα με περίοδο T_0 και σειρά Fourier $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}$. Τότε, η ισχύς του² P_x υπολογίζεται ως εξής.³

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) x^*(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* e^{-j2\pi k F_0 t} \right) dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* \left(\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^* c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Άρα,

$$\boxed{P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \quad (\text{Σχέση Parseval}).} \quad (4.12)$$

Η παραπάνω σχέση καλείται σχέση Parseval και υποδεικνύει ότι η ισχύς ενός περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου, το οποίο έχει ανάπτυγμα σε σειρά Fourier, μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων. Επίσης, παρατηρούμε ότι για να παίρνει το άθροισμα απείρων όρων στο δεξιό μέλος της σχέσης Parseval πεπερασμένη τιμή θα πρέπει, για $|k|$ “μεγάλο,” οι ποσότητες $|c_k|^2$ να φθίνουν προς στο μηδέν “αρκετά γρήγορα.”

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ισχύς P_k της συνιστώσας $\{c_k e^{j2\pi k F_0 t}\}$ της σειράς Fourier που οφείλεται στη συχνότητα kF_0 είναι $|c_k|^2$. Η απόδειξη έχει ως εξής.

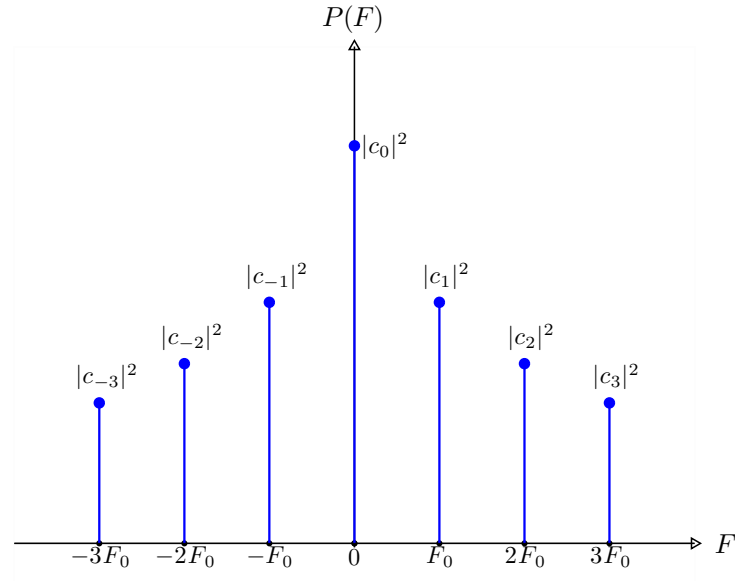
$$P_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |c_k e^{j2\pi k F_0 t}|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |c_k|^2 \underbrace{|e^{j2\pi k F_0 t}|^2}_{=1} dt = |c_k|^2. \quad (4.13)$$

Συνεπώς, η ακολουθία $\{|c_k|^2\}$ υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς του $\{x(t)\}$ στις συνιστώσες συχνότητες kF_0 , $k = 0, \pm 1, \dots$, και καλείται **φασματική πυκνότητα ισχύος** (power spectral density)⁴ του περιοδικού σήματος $\{x(t)\}$. Αν, για κάποιο i , το $|c_i|^2$ είναι “μεγάλο,” τότε η συχνότητα iF_0 “κατέχει σημαντικό ποσό της ισχύος του σήματος $\{x(t)\}$ ”. Στο Σχ. 4.1, παρατηρούμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού σήματος $\{x(t)\}$ είναι μη μηδενικό στα ακέραια πολλαπλάσια του F_0 . Συμβολικά, λέμε ότι το φάσμα ενός περιοδικού

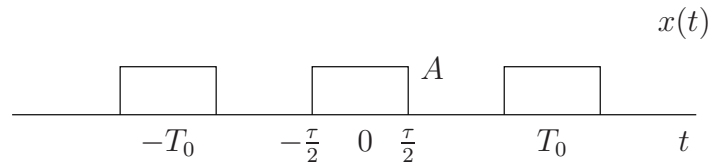
²Θυμηθείτε ότι κάθε περιοδικό σήμα έχει άπειρη ενέργεια.

³Η ποσότητα a^* συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή του a .

⁴Άλλες συνήθεις ονομασίες είναι **φάσμα ισχύος** (power spectrum) ή, απλά, **φάσμα** (spectrum).



Σχ. 4.1. Σχηματική αναπαράσταση της φασματικής πυκνότητας ισχύος $P(F)$ ως προς τη συχνότητα F .



Σχ. 4.2. Περιοδική συνάρτηση ορθογωνίου παραθύρου ύψους A εύρους τ με περίοδο T_0 .

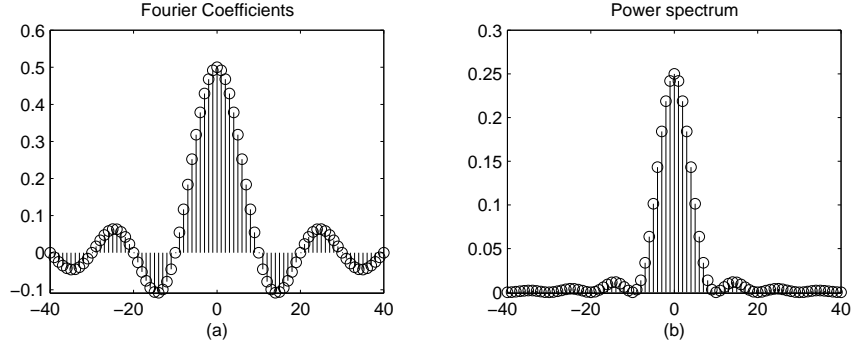
σήματος αποτελείται από “φασματικές γραμμές” (spectral lines).

Μπορεί να αποδειχθεί (δείτε Άσκηση 4.7) ότι αν το $\{x(t)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε $c_k = c_{-k}^*$, κάτι που ισοδυναμεί με $|c_k|^2 = |c_{-k}|^2$. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας.

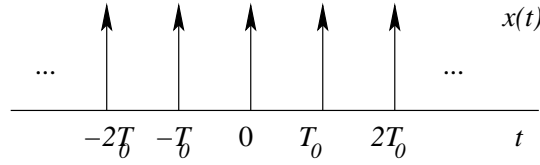
Παράδειγμα 4.1. Να υπολογίσετε τους συντελεστές της σειράς Fourier και την φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος του Σχ. 4.2.

Το περιοδικό αυτό σήμα ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet. Συνεπώς, αναπτύσσεται σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές c_k υπολογίζονται ως εξής.

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = \frac{A\tau}{T_0}. \quad (4.14)$$



Σχ. 4.3. Ανάλυση συχνοτήτων του $\{x(t)\}$ του Σχ. 4.2, για $A = 5$, $T_0 = 1$, και $\tau = 0.1$. (α) Συντελεστές Fourier c_k , $k = -40, \dots, 40$. (β) Φασματική πυκνότητα ισχύος $|c_k|^2$, $k = -40, \dots, 40$.



Σχ. 4.4. Σχηματική αναπαράσταση τρένου παλμών με περίοδο T_0 .

Ορίζοντας $F_0 = \frac{1}{T_0}$, λαμβάνουμε για $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \left. \frac{e^{-j2\pi k F_0 t}}{-j2\pi k F_0} \right|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{T_0 \pi k F_0} \frac{e^{j2\pi k F_0 \tau/2} - e^{-j2\pi k F_0 \tau/2}}{2j} \\ &= \frac{A}{T_0 \pi k F_0} \sin(\pi k F_0 \tau) = \frac{A \tau}{T_0} \frac{\sin(\pi k F_0 \tau)}{\pi k F_0 \tau}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος του $\{x(t)\}$ είναι η ακολουθία $|c_k|^2$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. \diamond

Παράδειγμα 4.2. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier το περιοδικό σήμα $\{x(t)\}$ του Σχ. 4.4 με

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0). \quad (4.16)$$

Παρόλο που το σήμα αυτό δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, μπορεί να αναλυθεί σε σειρά Fourier. Οι συντελεστές c_k υπολογίζονται ως εξής (με $F_0 = \frac{1}{T_0}$).

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right) e^{j2\pi k F_0 t} dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} \delta(t) e^{j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_0} e^0 = \frac{1}{T_0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k F_0 t} \quad (4.18)$$

και οι συντελεστές c_k είναι όλοι ίσοι με $\frac{1}{T_0} = F_0$. \diamond

4.1.2 Ανάπτυγμα σε ημίτονα και συνημίτονα

Οι συντελεστές Fourier c_k είναι, γενικά, μιγαδικοί αριθμοί. Επιπλέον, αν το $\{x(t)\}$ παίρνει πραγματικές τιμές, τότε οι συντελεστές c_k και c_{-k} είναι μιγαδικοί συζυγείς (δείτε Άσκηση 4.7), δηλαδή

$$c_k = |c_k|e^{j\theta_k}, \quad c_{-k} = |c_k|e^{-j\theta_k}. \quad (4.19)$$

Στην περίπτωση αυτή, η σειρά Fourier μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$x(t) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_k| \cos(2\pi k F_0 t + \theta_k). \quad (4.20)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\cos(2\pi k F_0 t + \theta_k) = \cos(2\pi k F_0 t) \cos \theta_k - \sin(2\pi k F_0 t) \sin \theta_k \quad (4.21)$$

λαμβάνουμε την καλούμενη τριγωνομετρική σειρά Fourier

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(2\pi k F_0 t) + b_k \sin(2\pi k F_0 t) \quad (4.22)$$

με

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_k &= 2|c_k| \cos \theta_k, \\ b_k &= -2|c_k| \sin \theta_k. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι ένας εναλλακτικός τρόπος υπολογισμού των συντελεστών a_k και b_k , χωρίς τον ενδιάμεσο υπολογισμό των c_k , είναι ο εξής.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) dt, \\ a_k &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(2\pi k F_0 t) dt, \quad k = 1, 2, \dots, \\ b_k &= \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \sin(2\pi k F_0 t) dt \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.24)$$

Αν το $\{x(t)\}$ είναι άρτιο, τότε, θεωρώντας σαν διάστημα ολοκλήρωσης το $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, προκύπτει εύκολα ότι $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Αντίστοιχα, αν το $\{x(t)\}$ είναι περιττό, τότε $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$ (δείτε Άσκηση 4.9).

4.2 Σειρά Fourier περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου

Έστω $\{x[n]\}$ περιοδική ακολουθία με περίοδο N . Η $\{x[n]\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν σειρά Fourier ως εξής.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (4.25)$$

Δεδομένης της $\{x[n]\}$, για να βρούμε μία έκφραση για τους συντελεστές c_k , υποθέτουμε ότι ο l είναι ακέραιος, με $l = 0, \dots, N-1$, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (4.25) με $e^{-j2\pi ln/N}$, και αθροίζουμε από 0 έως $N-1$, λαμβάνοντας

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \right) e^{-j2\pi ln/N}. \quad (4.26)$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά των αθροισμάτων, λαμβάνουμε

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi ln/N} = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} \right). \quad (4.27)$$

Ο υπολογισμός του αθροίσματος του δεξιού μέλους γίνεται με χρήση της σχέσης

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi kn/N} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (4.28)$$

η οποία αποδεικνύεται εφαρμόζοντας τον τύπο άθροισης γεωμετρικής προόδου

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N, & a = 1, \\ \frac{1 - a^N}{1 - a}, & a \neq 1, \end{cases} \quad (4.29)$$

για $a = e^{j2\pi k/N}$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $e^{j2\pi k} = 1$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Από την (4.28), λαμβάνουμε⁵

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} = \begin{cases} N, & k-l = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (4.30)$$

Εξαιτίας του τρόπου επιλογής του l ,⁶ η μόνη περίπτωση να έχουμε μη μηδενικό άθροισμα είναι για $k = l$. Συνεπώς,

$$\sum_{k=0}^{N-1} c_k \left(\sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(k-l)n/N} \right) = N c_l. \quad (4.31)$$

Τελικά, έχουμε το παρακάτω ζεύγος σχέσεων της σειράς Fourier διακριτού χρόνου.

$$x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N} \quad (\text{Εξίσωση σύνθεσης}) \quad (4.32)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (\text{Εξίσωση ανάλυσης}) \quad (4.33)$$

Οι συντελεστές c_k , $k = 0, \dots, N-1$, καλούνται συντελεστές Fourier της περιοδικής ακολουθίας $\{x[n]\}$ και δηλώνουν το πλάτος και τη φάση που αναλογεί στα $\{e^{j2\pi kn/N}\}$, $k = 0, \dots, N-1$, στη σύνθεση της $\{x[n]\}$. Αν θεωρήσουμε τους συντελεστές Fourier c_k εκτός του διαστήματος $k = 0, \dots, N-1$, μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι

$$c_{k+N} = c_k, \quad (4.34)$$

δηλαδή η ακολουθία $\{c_k\}$ είναι περιοδική με περίοδο N .

Οι συντελεστές Fourier c_k , $k = 0, \dots, N-1$, παρέχουν μία μοναδική περιγραφή του $\{x[n]\}$ στο χώρο των συχνοτήτων, διότι διαφορετικές ακολουθίες $\{x[n]\}_{n=0}^{N-1}$ οδηγούν σε διαφορετικά σύνολα συντελεστών Fourier $\{c_k\}_{k=0}^{N-1}$. Συνεπώς, οποιαδήποτε N διαδοχικά δείγματα του σήματος ή του φάσματός του παρέχουν μία πλήρη περιγραφή του σήματος στο πεδίο του χρόνου ή στο πεδίο των συχνοτήτων, αντίστοιχα.

⁵Για $k \neq l$, το $\{e^{j2\pi(k-l)n/N}\}$ είναι περιοδικό με (θεμελιώδη) περίοδο (ακέραιο υποπολλαπλάσιο του) N (δείτε Άσκηση 4.10). Συνεπώς, η φυσική σημασία της (4.30) είναι ότι το άθροισμα περιοδικών μιγαδικών εκθετικών σημάτων πάνω σε ακέραιο πλήθος περιόδων είναι μηδέν. Θυμηθείτε την αντίστοιχη σχέση για τα ολοκληρώματα ημιτονοειδών σημάτων πάνω σε ακέραιο πλήθος περιόδων. Για $k = l$, η σχέση είναι προφανής.

⁶Με λίγο κόπο, μπορεί να αποδειχθεί ότι το τελικό αποτέλεσμα παραμένει το ίδιο ανεξάρτητα της επιλογής του l ! Η συγκεκριμένη επιλογή απλουστεύει τους υπολογισμούς.

4.2.1 Φασματική πυκνότητα ισχύος περιοδικών σημάτων διακριτού χρόνου

Έστω $\{x[n]\}$ περιοδική ακολουθία με περίοδο N και σειρά Fourier $x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi kn/N}$.

Η ισχύς της $\{x[n]\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_x &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] x^*[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left(\sum_{k=0}^{N-1} c_k^* e^{-j2\pi kn/N} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* \left(\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \right) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k^* c_k = \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Συνεπώς, η ισχύς ενός περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων (σχέση Parseval).

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ισχύς \mathcal{P}_k της συνιστώσας $\{c_k e^{j2\pi kn/N}\}$ της σειράς Fourier που οφείλεται στη συχνότητα $f_k = k/N$ είναι $|c_k|^2$. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$$\mathcal{P}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |c_k e^{j2\pi kn/N}|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |c_k|^2 \underbrace{|e^{j2\pi kn/N}|^2}_{=1} = |c_k|^2. \quad (4.36)$$

Η ακολουθία $\{|c_k|^2\}$, $k = 0, \dots, N-1$, υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο κατανέμεται η ισχύς της ακολουθίας $\{x[n]\}$ στις συχνότητες $f_k = 0, \frac{1}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}$ και καλείται φασματική πυκνότητα ισχύος της $\{x[n]\}$.

Παράδειγμα 4.3. Να υπολογίσετε τη φασματική πυκνότητα ισχύος της περιοδικής ακολουθίας του Σχ. 4.6 η οποία είναι η περιοδική επανάληψη της ακολουθίας

$$x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n < L, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (4.37)$$

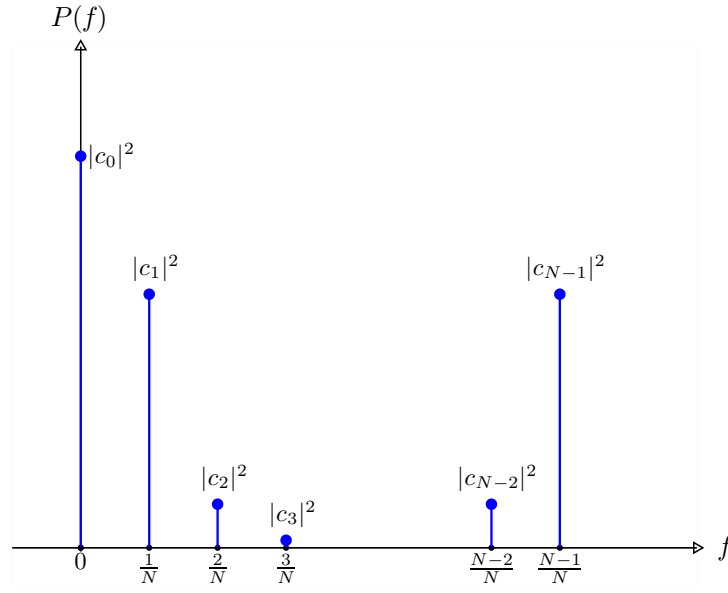
με περίοδο επανάληψης N .

Για $k = 0$, λαμβάνουμε

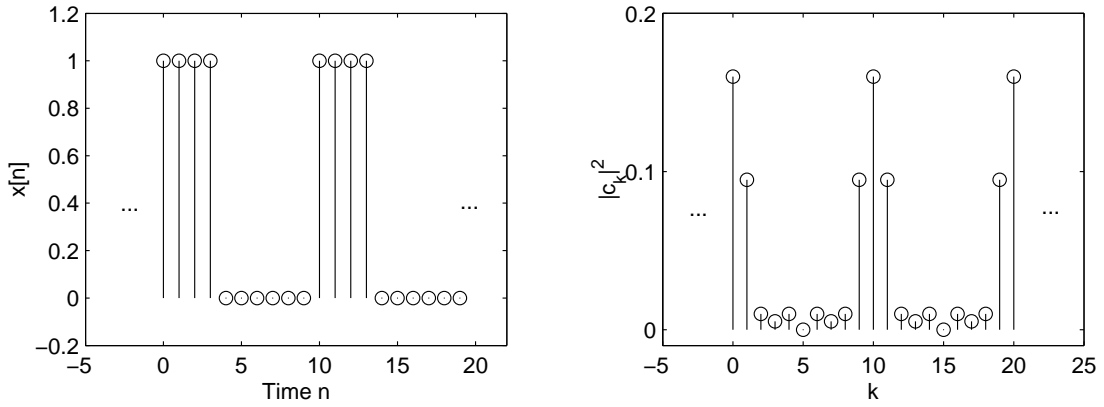
$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} 1 = \frac{L}{N}. \quad (4.38)$$

Για $k \neq 0$,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N} \frac{1 - e^{-j2\pi kL/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}}. \quad (4.39)$$



Σχ. 4.5. Σχηματική αναπαράσταση της φασματικής πυκνότητας ισχύος $P(f)$ περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου περιόδου N ως προς τη συχνότητα f .



Σχ. 4.6. Περιοδική ακολουθία $\{x[n]\}$ και η αντίστοιχη φασματική πυκνότητα ισχύος για $L = 4$, $N = 10$.

Η σχέση αυτή απλοποιείται αν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{1 - e^{-j2\pi kL/N}}{1 - e^{-j2\pi k/N}} = \frac{e^{-j\pi kL/N}}{e^{-j\pi k/N}} \frac{e^{j\pi kL/N} - e^{-j\pi kL/N}}{e^{j\pi k/N} - e^{-j\pi k/N}} = \frac{e^{-j\pi kL/N}}{e^{-j\pi k/N}} \frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}. \quad (4.40)$$

Η φασματική πυκνότητα ισχύος $\{|c_k|^2\}$ είναι

$$|c_k|^2 = \begin{cases} \left(\frac{L}{N}\right)^2, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \dots, \\ \frac{1}{N^2} \left(\frac{\sin(\pi kL/N)}{\sin(\pi k/N)}\right)^2, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (4.41)$$

Στο Σχ. 4.6, σχεδιάζουμε την περιοδική ακολουθία $\{x[n]\}$ και τη φασματική πυκνότητα ισχύος $\{|c_k|^2\}$. \diamond

Παράρτημα

Η σειρά Fourier ως ανάπτυγμα σε ορθογώνια βάση

Σε αυτό το παράρτημα, θα δούμε ότι η σειρά Fourier είναι ουσιαστικά το ανάπτυγμα του περιοδικού σήματος $\{x(t)\}$ πάνω σε συγκεκριμένη ορθογώνια βάση. Η εισαγωγή της έννοιας του διανυσματικού χώρου και η παράθεση κάποιων ιδιοτήτων του θα είναι σύντομες (και, συνεπώς, όχι πλήρεις).

Διανυσματικοί χώροι - Ορθοκανονικές Βάσεις

Ένας **διανυσματικός χώρος** (vector space) V πάνω σε ένα σώμα F είναι ένα σύνολο στοιχείων, τα οποία καλούνται **διανύσματα** (vectors), το οποίο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση, δηλαδή

$$x, y \in V \Rightarrow x + y \in V. \quad (4.42)$$

Επιπλέον, το ζεύγος $(V, +)$ είναι αβελιανή ομάδα (δηλαδή, η πρόσθεση είναι αντιμεταθετική, είναι προσεταιριστική, και έχει ουδέτερο στοιχείο και κάθε στοιχείο έχει αντίστροφο). Επίσης,

$$a \in F \text{ και } x \in V \Rightarrow ax \in V. \quad (4.43)$$

Η πράξη ax , δηλαδή ο πολλαπλασιασμός διανύσματος με βαθμωτό, έχει τις εξής ιδιότητες, για $a, b \in F$ και $x, y \in V$.

$$\begin{aligned} a(bx) &= (ab)x, \\ (a + b)x &= ax + bx, \\ a(x + y) &= ax + ay. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Επίσης, υπάρχουν στοιχεία $1, 0 \in F$, τέτοια ώστε $1x = x$ και $0x = 0$ για κάθε $x \in V$.

Ίσως το πιο γνωστό παράδειγμα διανυσματικού χώρου είναι ο \mathcal{R}^n , δηλαδή το σύνολο των n -διάστατων διανυσμάτων με στοιχεία

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

και πράξεις την πρόσθεση διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με βαθμωτό.

Βάση (basis) του διανυσματικού χώρου είναι ένα σύνολο από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα που παράγουν το χώρο. Ορίζοντας το **εσωτερικό γινόμενο** (inner product) n -διάστατων διανυσμάτων ως

$$\langle x, y \rangle = x^T y = \sum_{i=1}^n x_i y_i \quad (4.46)$$

μπορούμε να ορίσουμε μέτρο διανύσματος

$$\|x\| = \sqrt{x^T x} \quad (4.47)$$

και γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad (4.48)$$

Σε ένα n -διάστατο διανυσματικό χώρο, μία **ορθοκανονική βάση** (orthonormal basis) είναι ένα σύνολο n γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων $\{e_1, \dots, e_n\}$ με

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (4.49)$$

Τότε, είναι πολύ εύκολο να αναλύσουμε οποιοδήποτε διάνυσμα x σε γραμμικό συνδυασμό της μορφής

$$x = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n \quad (4.50)$$

διότι, πολλαπλασιάζοντας από τα αριστερά και τα δύο μέρη με e_i^T , λαμβάνουμε

$$e_i^T x = a_1 e_i^T e_1 + \dots + a_i e_i^T e_i + \dots + a_n e_i^T e_n = a_i. \quad (4.51)$$

Άρα, έχουμε μία απλή σχέση για τον υπολογισμό των συντελεστών a_i .

Ένα σημαντικό παράδειγμα διανυσματικού χώρου είναι το σύνολο με στοιχεία συναρτήσεις (με καλή συμπεριφορά) ορισμένες στο διάστημα $[a, b]$, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με βαθμωτό, δηλαδή

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad (4.52)$$

και

$$(af)(x) = af(x). \quad (4.53)$$

Μπορούμε να ορίσουμε την πράξη

$$\langle x, y \rangle = \int_a^b x(t)y^*(t)dt, \quad (4.54)$$

όπου x^* είναι ο μιγαδικός συζυγής του x , η οποία μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι έχει ιδιότητες εσωτερικού γινομένου. Πιο συγκεκριμένα, αν $\{x(t)\}$, $\{y(t)\}$, και $\{z(t)\}$ είναι στοιχεία του διανυσματικού χώρου και $c \in \mathbb{C}$, τότε

$$\begin{aligned} \langle x + y, z \rangle &= \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \\ \langle x, y \rangle &= \langle y, x \rangle^*, \\ \langle cx, y \rangle &= c \langle x, y \rangle, \\ \langle x, x \rangle &\geq 0, \text{ με ισότητα αν και μόνο αν } x = 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Μπορούμε να ορίσουμε μέτρο διανύσματος και γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων ως εξής.

$$\|x\| = \sqrt{\int_a^b |x(t)|^2 dt}, \quad (4.56)$$

$$\cos \angle(x, y) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}. \quad (4.57)$$

Αν $\{\phi_1(t)\}$, $\{\phi_2(t)\}$, ... αποτελούν βάση του συγκεκριμένου χώρου, τότε για κάθε στοιχείο $\{x(t)\}$ του χώρου υπάρχουν συντελεστές c_i τέτοιοι ώστε

$$\{x(t)\} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \{\phi_i(t)\}. \quad (4.58)$$

Αν, επιπλέον, τα $\{\phi_i(t)\}$ αποτελούν ορθοκανονική βάση, τότε τα c_i μπορούν να υπολογιστούν πολύ εύκολα, διότι

$$\langle x, \phi_i \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \langle \phi_j, \phi_i \rangle = c_i. \quad (4.59)$$

Παράδειγμα 4.4. Σε πεπερασμένο διάστημα $[a, b] = [t_0, t_0 + T_0]$,

1. οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T_0}} \right\}, \left\{ \frac{2}{\sqrt{T_0}} \cos \left(\frac{2\pi n t}{T_0} \right) \right\}, \left\{ \frac{2}{\sqrt{T_0}} \sin \left(\frac{2\pi n t}{T_0} \right) \right\}, \quad n = 1, 2, \dots, \text{ και} \quad (4.60)$$

2. οι εκθετικές συναρτήσεις

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{j2\pi n t/T_0} \right\}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (4.61)$$

είναι ορθοκανονικές.

Απόδειξη (για το 2): Ορίζουμε $F_0 = \frac{1}{T_0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \int_{T_0} \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{j2\pi k t/T_0} \frac{1}{\sqrt{T_0}} e^{-j2\pi l t/T_0} dt &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} e^{j2\pi(k-l)t/T_0} dt = \begin{cases} 1, & \text{αν } k = l \\ \frac{e^{j2\pi(k-l)F_0 t}}{jT_0(k-l)F_0} \Big|_{t_0}^{t_0+T_0}, & \text{αν } k \neq l \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{αν } k = l \\ 0, & \text{αν } k \neq l. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.62)$$

◇

Άρα, η σχέση σύνθεσης της σειράς Fourier είναι απλώς η έκφραση του $\{x(t)\}$ ως γραμμικός συνδυασμός των ορθογώνιων συναρτήσεων $\{e^{j2\pi l F_0 t}\}$ για $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, διότι

$$\langle \{x(t)\}, \{e^{j2\pi l F_0 t}\} \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cdot \langle \{e^{j2\pi k F_0 t}\}, \{e^{j2\pi l F_0 t}\} \rangle = c_l T_0 \quad (4.63)$$

και, συνεπώς,

$$c_l = \frac{1}{T_0} \langle \{x(t)\}, \{e^{j2\pi l F_0 t}\} \rangle = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-j2\pi l F_0 t} dt. \quad (4.64)$$

4.3 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 4.1. Έστω περιοδικό σήμα $\{x_p(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{x(t - lT_0)\}$ όπου

$$x(t) = \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (4.65)$$

$T \leq T_0$. Να βρείτε α) τους συντελεστές c_k , $k \in \mathbb{Z}$, της σειράς Fourier και β) τη φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $\{x_p(t)\}$.

Άσκηση 4.2. Έστω περιοδικό σήμα $\{x_p(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{x(t - 4l)\}$ όπου

$$x(t) = \begin{cases} t + 2, & -2 \leq t \leq -1, \\ 1, & -1 \leq t \leq 1, \\ 2 - t, & 1 \leq t \leq 2, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (4.66)$$

Να βρείτε τους συντελεστές c_k , $k \in \mathbb{Z}$, της σειράς Fourier του περιοδικού σήματος $\{x_p(t)\}$.

Άσκηση 4.3. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier το σήμα $\{x(t)\}$ με $x(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$, $t \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $\{x(t)\}$.

Άσκηση 4.4. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier το σήμα $\{x(t)\}$ με $x(t) = \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}t\right)$, $t \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4.5. Να γραφεί κώδικας Matlab που υπολογίζει προσεγγιστικά και σχεδιάζει τους συντελεστές Fourier c_k για $k \in \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$ και τη φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $\{x_p(t)\}$ στην Άσκηση 4.1, ανακατασκευάζει το σήμα $\{\hat{x}_p(t)\}$ για $t \in \left[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}\right]$ με βήμα $dt = 10^{-2}$, και το συγκρίνει στο ίδιο γράφημα με το αρχικό σήμα $\{x_p(t)\}$.

Άσκηση 4.6. Να γραφεί κώδικας Matlab που υπολογίζει και σχεδιάζει τους συντελεστές Fourier c_k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, και τη φασματική πυκνότητα ισχύος του περιοδικού σήματος διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ στο Παράδειγμα 4.3, με $N = 10$ και $L = 5$, ανακατασκευάζει το σήμα $\{\hat{x}_p[n]\}$ για $n = \{0, 1, \dots, N-1\}$, και το συγκρίνει στο ίδιο γράφημα με το αρχικό σήμα $\{x_p[n]\}$.

4.4 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 4.7. Να αποδειχθεί ότι αν το $\{x(t)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε $c_k = c_{-k}^*$, κάτι που ισοδυναμεί με $|c_k|^2 = |c_{-k}|^2$. Δηλαδή, στην περίπτωση αυτή, η φασματική πυκνότητα ισχύος είναι συμμετρική συνάρτηση της συχνότητας.

Άσκηση 4.8. Προσεγγίστε με το MATLAB το περιοδικό σήμα $\{x(t)\}$ του Σχ. 4.2 στο πλέγμα $t = -2T_0 : T_0/1000 : 2T_0$ για ύψος παλμού A , πλάτος παλμού τ , και περίοδο T_0 , χρησιμοποιώντας τους $2M + 1$ συντελεστές c_k , $k = 0, \pm 1, \dots, \pm M$, της σειράς Fourier. Τι παρατηρείτε όταν μεταβάλετε τις τιμές κάθε μίας εκ των παραμέτρων A , τ , T_0 , και M διατηρώντας τις τιμές των άλλων σταθερές;

Άσκηση 4.9. Θεωρώντας ως διάστημα ολοκλήρωσης το $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$, να αποδειχθεί ότι αν το $\{x(t)\}$ είναι άρτιο, τότε $b_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$, και, αντίστοιχα, αν το $\{x(t)\}$ είναι περιττό, τότε $a_k = 0$, $k = 0, 1, \dots$

Άσκηση 4.10. Να αποδειχθεί ότι, για $k \neq l$, το $\{e^{j2\pi(k-l)n/N}\}$ είναι περιοδικό με (θεμελιώδη) περίοδο (ακέραιο υποπολλαπλάσιο του) N .

Άσκηση 4.11. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2005] Να αναπτύξετε σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων τη συνάρτηση

$$f(t) = |t|, \quad -\pi \leq t \leq \pi. \quad (4.67)$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω ερώτημα, να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \quad (4.68)$$

Άσκηση 4.12. [Εξέταση Αυγούστου 2005] Να αναπτύξετε σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων τη συνάρτηση

$$f(t) = t, \quad -\pi \leq t < \pi. \quad (4.69)$$

Θέτοντας $t = \frac{\pi}{2}$ στο παραπάνω ερώτημα, να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{\pi}{2} = 2 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right). \quad (4.70)$$

Άσκηση 4.13. [Εξέταση Ιανουαρίου 2006] Να αναπτύξετε σε σειρά ημιτόνων και συνημιτόνων την περιοδική επέκταση, με περίοδο T_0 , της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} +1, & 0 < t < \frac{T_0}{2}, \\ -1, & \frac{T_0}{2} < t < T_0. \end{cases} \quad (4.71)$$

Θέτοντας $t = \frac{T_0}{4}$ στο παραπάνω ερώτημα, να αποδείξετε τη σχέση

$$\frac{\pi}{4} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\right). \quad (4.72)$$

Άσκηση 4.14. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Δείξτε ότι ο συντελεστής της σειράς Fourier ενός περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου με περίοδο T_0 είναι ο ίδιος είτε ορίζεται στο διάστημα $[-\frac{T_0}{2}, \frac{T_0}{2}]$ ή στο διάστημα $[0, T_0]$.

Άσκηση 4.15. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = e^{-\frac{t-mT}{T}}, \quad mT \leq t < mT + T, \quad (4.73)$$

για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

1. Σχεδιάστε τη γραφική του $\{x(t)\}$.
2. Υπολογίστε τους συντελεστές c_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, της σειράς Fourier του $\{x(t)\}$ και τα τετράγωνα των μέτρων αυτών. Στη συνέχεια, σχεδιάστε τη γραφική της φασματικής πυκνότητας ισχύος $\{|c_k|^2\}$.

Άσκηση 4.16. [Εξέταση Προόδου 2007-2008] Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier του σήματος $\{x(t)\}$ με τιμή $x(t) = |\cos(2\pi F_0 t)| \quad \forall t \in \mathbb{R}$. Σχεδιάστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος και γράψτε τη σχέση ανάκτησης του σήματος από τους συντελεστές που βρήκατε.

Άσκηση 4.17. [Εξέταση Προόδου 2008-2009] Το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ έχει τιμή $x(t) = \sin^2(\pi t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

1. Υπολογίστε την ενέργεια και την ισχύ του $\{x(t)\}$ στο πεδίο του χρόνου.

2. Υπολογίστε τους συντελεστές της σειράς Fourier του $\{x(t)\}$.
3. Αν οι συντελεστές της σειράς Fourier που υπολογίσατε είναι πραγματικοί, σχεδιάστε τους. Αν είναι μιγαδικοί, σχεδιάστε μόνο το μέτρο τους.
4. Σχεδιάστε τη φασματική πυκνότητα ισχύος.
5. Ξαναυπολογίστε την ισχύ του $\{x(t)\}$ στο πεδίο της συχνότητας και επιβεβαιώστε το Θεώρημα Parseval.

Άσκηση 4.18. Δίνεται το σήμα συνεχούς χρόνου $\{\tilde{x}(t)\}$ με τιμή

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 0, & t < -T \\ B + \frac{B-A}{T}t, & -T \leq t < 0 \\ B + \frac{A-B}{T}t, & 0 \leq t < T \\ 0, & t \geq T. \end{cases} \quad (4.74)$$

Με βάση το $\{\tilde{x}(t)\}$, κατασκευάζουμε το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ με τιμή

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(t - mT_0) \quad (4.75)$$

όπου $T \leq \frac{T_0}{2}$.

1. Υπολογίστε θεωρητικά τους συντελεστές της σειράς Fourier c_k , $k \in \mathbb{Z}$, του $\{x(t)\}$ και αναπτύξτε το $\{x(t)\}$ σε σειρά Fourier.
2. Για τις τιμές $A = 2$, $B = -1$, $T = 2$, $T_0 = 6$, και $M = 10$, υπολογίστε στο MATLAB τους συντελεστές της σειράς Fourier c_{-M} , c_{-M+1} , \dots , c_M βάσει των θεωρητικών αποτελεσμάτων του προηγούμενου υποερωτήματος και σχεδιάστε στο MATLAB
 (α') μέσω της συνάρτησης stem τη φασματική πυκνότητα ισχύος του $\{x(t)\}$ για τις συχνότητες που αντιστοιχούν στους συντελεστές c_{-M} , c_{-M+1} , \dots , c_M και
 (β') μέσω της συνάρτησης plot τις γραφικές του αρχικού σήματος $\{x(t)\}$ και του ανακτόμενου σήματος

$$\hat{x}_M(t) = \sum_{k=-M}^M c_k e^{j2\pi k F_0 t} \quad (4.76)$$

για όλες τις τιμές του t στο διάστημα $[-9, 9]$ (χρησιμοποιήστε βήμα $dt = 0.01$ και -επειδή το ανακτόμενο σήμα $\{\hat{x}_M(t)\}$ ενδέχεται να περιέχει και κάποιο αμελητέο

φανταστικό μέρος λόγω αριθμητικών σφαλμάτων- αντί του $\{\hat{x}_M(t)\}$ στο παραπάνω γράφημα σχεδιάστε μόνο το πραγματικό του μέρος $\text{Re}(\{\hat{x}_M(t)\})$.

Επαναλάβετε τα (α') και (β') για τις τιμές $M = 20$ και $M = 100$.

Άσκηση 4.19. Δίνεται το σήμα διακριτού χρόνου $\{\tilde{x}[n]\}$ με τιμή

$$\tilde{x}[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ A^n, & 0 \leq n < N_1 \\ 0, & n \geq N_1. \end{cases} \quad (4.77)$$

Με βάση το $\{\tilde{x}[n]\}$, κατασκευάζουμε το περιοδικό σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ με τιμή

$$x[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{x}[n - mN] \quad (4.78)$$

όπου $N_1 \leq N$.

1. Υπολογίστε θεωρητικά τους συντελεστές της σειράς Fourier c_k του $\{x[n]\}$ και αναπτύξτε το $\{x[n]\}$ σε σειρά Fourier.
2. Για τις τιμές $A = \frac{4}{5}$, $N_1 = 8$, και $N = 20$, υπολογίστε στο MATLAB τους συντελεστές της σειράς Fourier βάσει των θεωρητικών αποτελεσμάτων του προηγούμενου υποερωτήματος και σχεδιάστε στο MATLAB μέσω της συνάρτησης stem
 - (α') τη φασματική πυκνότητα ισχύος του $\{x[n]\}$ και
 - (β') τις γραφικές του αρχικού σήματος $\{x[n]\}$ και του ανακτούμενου σήματος

$$\hat{x}[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi \frac{k}{N}n} \quad (4.79)$$

για όλες τις τιμές του n στο διάστημα $[-40, 40]$ (επειδή το ανακτούμενο σήμα $\{\hat{x}[n]\}$ ενδέχεται να περιέχει και κάποιο αμελητέο φανταστικό μέρος λόγω αριθμητικών σφαλμάτων, αντί του $\{\hat{x}[n]\}$ στο παραπάνω γράφημα σχεδιάστε μόνο το πραγματικό του μέρος $\text{Re}(\{\hat{x}[n]\})$).

Άσκηση 4.20. Να προσεγγίσετε με το MATLAB στο πλέγμα $t = [-3 : \frac{1}{10} : 3]$ το περιοδικό σήμα $x_p(t)$ που προκύπτει από την περιοδική επανάληψη, με περίοδο $T_0 = 2$, του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} 2t + 1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -2t + 1, & 0 < t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τους $2M + 1$ συντελεστές a_0, a_1, \dots, a_M και b_1, \dots, b_M της σειράς Fourier (ενδεικτικά, $M = 4, 12, 64$).⁷

1. Να υπολογίσετε τους παραπάνω συντελεστές (παρατηρήστε ότι η $x(t)$ είναι άρτια συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 1]$ και, συνεπώς, οι συντελεστές b_k θα πρέπει να προκύψουν ίσοι με το μηδέν) και να δημιουργήσετε στο MATLAB το αντίστοιχο διάνυσμα συντελεστών.
2. Να δημιουργήσετε πίνακα, η k -οστή γραμμή του οποίου να είναι το $\cos(2\pi k F_0 t)$ πάνω στο δεδομένο πλέγμα.
3. Να πολλαπλασιάσετε το συντελεστή a_k με την k -οστή γραμμή του πίνακα, για $k = 1, \dots, M$.
4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τις συνιστώσες της σειράς Fourier (δηλαδή, τις γραμμές του πίνακα που λάβατε στο προηγούμενο υποερώτημα).
5. Να αθροίσετε τις συνιστώσες και να σχεδιάσετε την τελική προσέγγιση.

Αν όλα πήγαν καλά, τότε η προσέγγισή σας θα είναι καλή (όσο αυξάνει το M τόσο η προσέγγιση θα βελτιώνεται).

Άσκηση 4.21. Να προσεγγίσετε με το MATLAB στο πλέγμα $t = [-2\pi : \frac{1}{500} : 2\pi]$ το περιοδικό σήμα $\{x_p(t)\}$ που προκύπτει από την περιοδική επανάληψη, με περίοδο $T_0 = 2\pi$, του σήματος

$$x(t) = \begin{cases} t, & -\pi < t < \pi \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

χρησιμοποιώντας τους $2M + 1$ συντελεστές a_0, a_1, \dots, a_M και b_1, \dots, b_M της σειράς Fourier (ενδεικτικά, $M = 5, 10, 50$). Υποθέστε ότι στα σημεία ασυνέχειας του $\{x_p(t)\}$ η τιμή του είναι

⁷Η αναλυτική έκφραση για το $x_p(t)$ είναι $x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - kT_0)$.

0 (η υπόθεση αυτή δεν εισάγει καμία διαφορά στον υπολογισμό των συντελεστών Fourier). Η προσέγγιση να γίνει ως εξής.

1. Να υπολογίσετε τους παραπάνω συντελεστές (παρατηρήστε ότι η $\{x(t)\}$ είναι περιττή συνάρτηση στο διάστημα $(-\pi, \pi)$ και, συνεπώς, οι συντελεστές a_k θα πρέπει να προκύψουν ίσοι με το μηδέν) και να δημιουργήσετε στο MATLAB το αντίστοιχο διάνυσμα συντελεστών.
2. Να δημιουργήσετε πίνακα, η k -οστή γραμμή του οποίου να είναι το $\sin(2\pi k F_0 t)$ πάνω στο δεδομένο πλέγμα.
3. Να πολλαπλασιάσετε το συντελεστή b_k με την k -οστή γραμμή του πίνακα, για $k = 1, \dots, M$.
4. Να σχεδιάσετε στο ίδιο σχήμα τις συνιστώσες της σειράς Fourier (δηλαδή, τις γραμμές του πίνακα που λάβατε στο προηγούμενο υποερώτημα).
5. Να αθροίσετε τις συνιστώσες και να σχεδιάσετε την τελική προσέγγιση.

Αν όλα πήγαν καλά, τότε η προσέγγισή σας θα είναι καλή (όσο αυξάνει το M τόσο η προσέγγιση θα βελτιώνεται) εκτός από τις περιοχές γύρω από τα σημεία ασυνέχειας του $\{x_p(t)\}$ όπου θα παρουσιάζονται overshoots και undershoots (φαινόμενο Gibbs).

Άσκηση 4.22. Έστω περιοδικό σήμα $\{x_p(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{x(t - lT_0)\}$ όπου

$$x(t) = \begin{cases} A, & 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (4.80)$$

$T \leq T_0$. Να βρείτε α) τους συντελεστές c_k , $k \in \mathbb{Z}$, της σειράς Fourier και β) τη φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $\{x_p(t)\}$.

Άσκηση 4.23. Έστω περιοδικό σήμα $\{x_p(t)\} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{x(t - lT_0)\}$ όπου

$$x(t) = \begin{cases} 2\frac{A}{T}t, & 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \\ -2\frac{A}{T}t + 2A, & \frac{T}{2} \leq t \leq T, \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (4.81)$$

$T \leq T_0$. Να βρείτε α) τους συντελεστές c_k , $k \in \mathbb{Z}$, της σειράς Fourier και β) τη φασματική πυκνότητα ισχύος του σήματος $\{x_p(t)\}$.

Κεφάλαιο 5

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Συνεχούς Χρόνου

5.1 Μετασχηματισμός Fourier

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι για να εισάγουμε την έννοια του μετασχηματισμού Fourier αperiodικών σημάτων συνεχούς χρόνου. Ένας από αυτούς είναι να θεωρήσουμε το μετασχηματισμό Fourier σαν επέκταση της σειράς Fourier υπό την εξής έννοια. Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος periodικών σημάτων συνεχούς χρόνου αποτελείται από ισαπέχουσες φασματικές γραμμές. Η απόσταση F_0 μεταξύ των φασματικών γραμμών είναι αντίστροφη της θεμελιώδους περιόδου T_0 του σήματος. Ένα αperiodικό σήμα μπορεί να θεωρηθεί σαν periodικό με άπειρη περίοδο! Τότε, η απόσταση μεταξύ των φασματικών γραμμών μηδενίζεται και το φάσμα συχνοτήτων είναι μη μηδενικό πάνω σε ένα ή περισσότερα διαστήματα συχνοτήτων. Μπορεί να αποδειχθεί ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, ισχύει το εξής ζεύγος σχέσεων.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF \quad (\text{Αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier}) \quad (5.1)$$

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \quad (\text{Ευθύς μετασχηματισμός Fourier}) \quad (5.2)$$

Το ζεύγος αυτό καλείται **ζεύγος μετασχηματισμού Fourier** (Fourier transform pair) αperiοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου και συμβολίζεται ως εξής.¹

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}. \quad (5.5)$$

Η συνάρτηση $\{X(F)\}$ καλείται μετασχηματισμός Fourier της $\{x(t)\}$ και περιγράφει μοναδικά² το σήμα $\{x(t)\}$ στο πεδίο των συχνοτήτων. Η $\{X(F)\}$ υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $\{e^{j2\pi Ft}\}$ συνδυάζονται γραμμικά για να συνθέσουν το $\{x(t)\}$.

Οι συνθήκες οι οποίες εγγυώνται την ύπαρξη του μετασχηματισμού Fourier είναι αντίστοιχες με αυτές που εγγυώνται την ύπαρξη της σειράς Fourier, καλούνται συνθήκες Dirichlet, και είναι οι εξής.

1. Η $\{x(t)\}$ έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών, πεπερασμένου ύψους, σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.
2. Η $\{x(t)\}$ έχει πεπερασμένο πλήθος ακροτάτων σε κάθε πεπερασμένο διάστημα.
3. Η $\{x(t)\}$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη.

Τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ ορίζεται, διότι

$$|X(F)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(t) e^{-j2\pi Ft}| dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (5.6)$$

Στα σημεία ασυνέχειας της $\{x(t)\}$, το ολοκλήρωμα της (5.1) συγκλίνει στο μέσο της ασυνέχειας.

¹Πολλές φορές, αντί της κυκλικής συχνότητας F χρησιμοποιείται η γωνιακή συχνότητα $\Omega = 2\pi F$. Σε αυτήν την περίπτωση, το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier ορίζεται ως εξής.

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \quad (5.3)$$

$$X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt. \quad (5.4)$$

²Αν οι $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ διαφέρουν σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων, τότε έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier. Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό, υπολογίζουμε μία συνάρτηση $\{\hat{x}(t)\}$, η οποία μπορεί να μην ταυτίζεται με καμία από τις $\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2$, όμως διαφέρει από αυτές το πολύ σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων. Χωρίς να μπορούμε σε μαθηματικές λεπτομέρειες, στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος, υποθέτουμε ότι δύο συναρτήσεις ταυτίζονται αν διαφέρουν το πολύ σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων! Σε αυτό το πλαίσιο, το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier είναι μοναδικό.

Μία ασθενέστερη συνθήκη για την ύπαρξη του ζεύγους του μετασχηματισμού Fourier είναι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (5.7)$$

Για παράδειγμα, το $\{x(t)\} = \left\{ \frac{\sin 2\pi t}{\pi t} \right\}$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμο, όχι όμως απόλυτα ολοκληρώσιμο. Ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται και είναι

$$X(F) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |F| \leq 1, \\ 0, & \text{αν } |F| > 1. \end{cases} \quad (5.8)$$

Επιπλέον, αν επιτρέψουμε την εισαγωγή της συνάρτησης του Dirac, $\{\delta(\cdot)\}$, στο ζεύγος μετασχηματισμού Fourier, τότε μπορούμε να επεκτείνουμε το ζεύγος σε συναρτήσεις οι οποίες δεν είναι απόλυτα ή τετραγωνικά ολοκληρώσιμες (π.χ., περιοδικές συναρτήσεις). Με αυτό τον τρόπο, μπορούμε να ενσωματώσουμε τη σειρά και το μετασχηματισμό Fourier σε ένα κοινό πλαίσιο το οποίο αποδεικνύεται στην πράξη εξαιρετικά χρήσιμο.

Γενικά, ο μετασχηματισμός Fourier είναι μία μιγαδική συνάρτηση του F . Συνήθως, ειδικά όταν θέλουμε να σχεδιάσουμε το μετασχηματισμό Fourier, εκφράζουμε το $\{X(F)\}$ ως προς το μέτρο και τη γωνία (ή φάση) του ως

$$X(F) = |X(F)| e^{j\angle X(F)} \quad (5.9)$$

με

$$|X(F)| = \sqrt{\text{Re}^2(X(F)) + \text{Im}^2(X(F))} \quad (5.10)$$

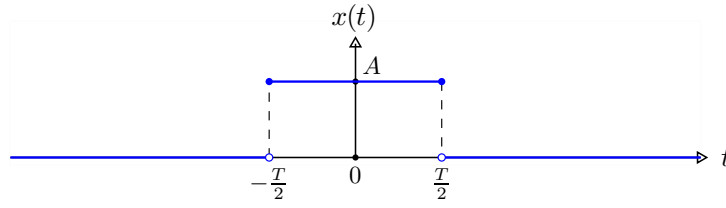
και

$$\angle X(F) = \tan^{-1} \frac{\text{Im}(X(F))}{\text{Re}(X(F))} \quad (5.11)$$

και σχεδιάζουμε ξεχωριστά το μέτρο $|X(F)|$ και τη φάση $\angle X(F)$ ως συναρτήσεις του F .

Αν το $\{x(t)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε $X(-F) = X^*(F)$. Η απόδειξη έχει ως εξής.

$$\begin{aligned} X^*(F) &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{-j2\pi Ft})^* dt = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) (e^{-j2\pi Ft})^* dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{j2\pi Ft} dt = X(-F). \end{aligned} \quad (5.12)$$



Σχ. 5.1. Σχηματική αναπαράσταση ορθογώνιου παραθύρου εύρους T και ύψους A .

Σε αυτήν την περίπτωση, μπορεί ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $\{|X(F)|\}$ είναι άρτια και η $\{\angle X(F)\}$ περιττή (δείτε Άσκηση 5.14).

Επίσης μπορούν ναδειχθούν τα ακόλουθα (δείτε Άσκηση 5.15). Αν το $\{x(t)\}$ είναι άρτια συνάρτηση του t , τότε το $\{X(F)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Αντίστοιχα, αν το $\{x(t)\}$ είναι περιττή συνάρτηση του t , τότε το $\{X(F)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Παράδειγμα 5.1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος του Σχ. 5.1 με τιμή

$$x(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & |t| > \tau/2. \end{cases} \quad (5.13)$$

Το σήμα $\{x(t)\}$ είναι απεριοδικό και ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet. Συνεπώς, αν $F \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-j2\pi Ft} dt = \frac{-A}{j2\pi F} (e^{-j2\pi F\tau/2} - e^{j2\pi F\tau/2}) \\ &= A\tau \frac{\sin(\pi F\tau)}{\pi F\tau} = A\tau \operatorname{sinc}(F\tau), \end{aligned} \quad (5.14)$$

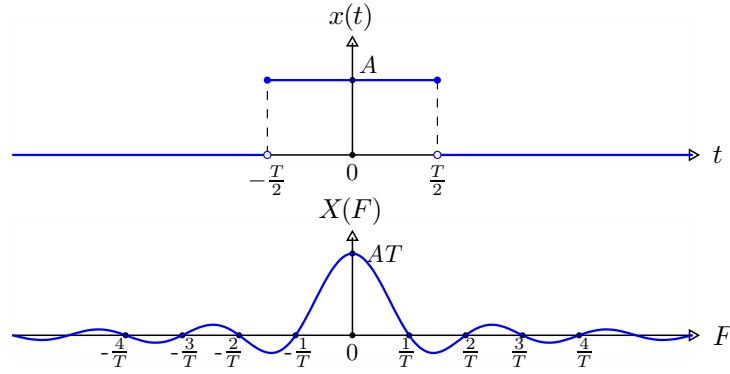
ενώ, αν $F = 0$, τότε

$$X(F) = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A dt = A\tau = A\tau \operatorname{sinc}(0\tau). \quad (5.15)$$

Επομένως, για κάθε $F \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$X(F) = A\tau \operatorname{sinc}(F\tau). \quad (5.16)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ σχεδιάζεται στο Σχ. 5.2 (στην περίπτωση αυτή, ο μετασχηματισμός Fourier παίρνει πραγματικές τιμές και συνεπώς μπορεί να σχεδιαστεί ως συνάρ-



Σχ. 5.2. Μετασχηματισμός Fourier ορθογώνιου παραθύρου εύρους T και ύψους A .

τηση του F – να σχεδιάσετε τα $\{|X(F)|\}$ και $\{\angle X(F)\}$ ως συναρτήσεις του F). Τα σημεία μηδενισμού του $\{X(F)\}$ είναι τα ακέραια πολλαπλάσια του $1/\tau$ εκτός από το μηδέν.³ Για $F = 0$, η τιμή του $\{X(F)\}$ είναι $A\tau$. Το πλάτος του κύριου λοβού (**ορισμός**), ο οποίος κατέχει το μεγαλύτερο ποσοστό της ενέργειας του σήματος, είναι $2/\tau$. Μείωση του τ οδηγεί σε διεύρυνση του κύριου λοβού. Αυτό σημαίνει ότι η ενέργεια μετακινείται προς υψηλότερες συχνότητες.

Θέτοντας $\tau = 1$ και $A = 1$ στο σήμα που μελετήσαμε, λαμβάνουμε το κανονικοποιημένο παράθυρο εύρους 1 και ύψους 1 το οποίο συμβολίζουμε ως $\{\Pi(t)\}$, δηλαδή

$$\Pi(t) \triangleq \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & |t| > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (5.17)$$

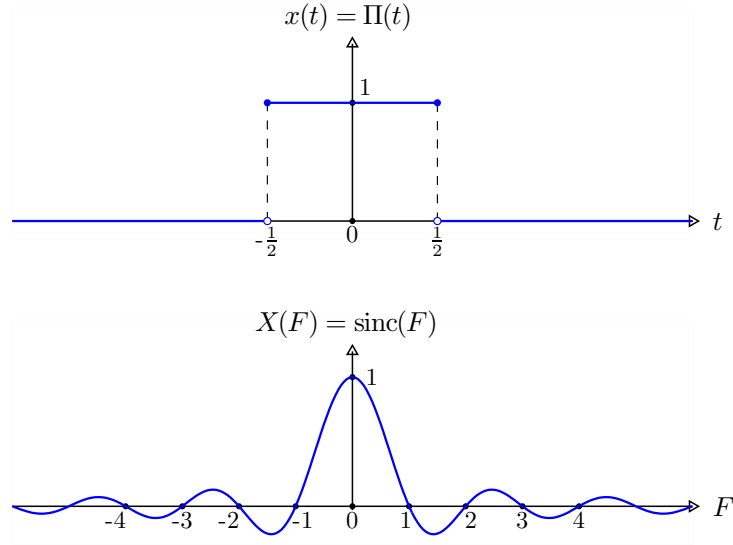
Σύμφωνα με τις ιδιότητες κλιμάκωσης πλάτους και χρόνου, το ορθογώνιο παράθυρο εύρους τ και ύψους A μπορεί να γραφεί ως $\{A \cdot \Pi(\frac{t}{\tau})\}$. Επομένως, σε αυτό το παράδειγμα αποδείξαμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$\left\{ A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{A\tau \operatorname{sinc}(F\tau)\} \quad (5.18)$$

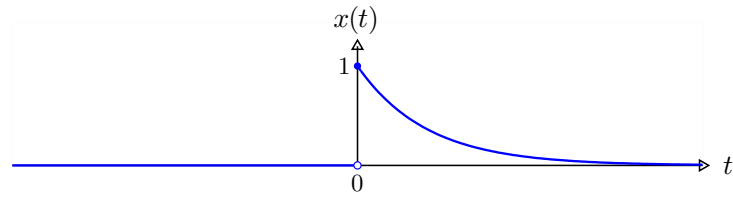
το οποίο, για το κανονικοποιημένο παράθυρο, απλοποιείται σε

$$\{\Pi(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{\operatorname{sinc}(F)\}. \quad (5.19)$$

³Παρατηρήστε ότι $\sin(\pi F\tau) = 0 \Leftrightarrow \pi F\tau = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow F = k/\tau, k \in \mathbb{Z}$.



Σχ. 5.3. Κανονικοποιημένο παράθυρο εύρους 1 και ύψους 1 και μετασχηματισμός Fourier αυτού.



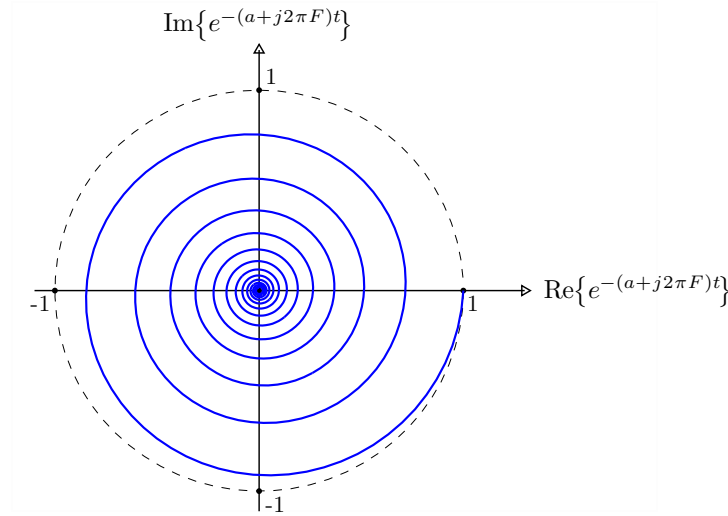
Σχ. 5.4. Σχεδιασμός του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$ του Παραδείγματος 5.2.

Στο Σχ. 5.3 σχεδιάζουμε το κανονικοποιημένο παράθυρο $\{\Pi(t)\}$ και το μετασχηματισμό Fourier $\{\text{sinc}(F)\}$ αυτού. \diamond

Παράδειγμα 5.2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$.

Στο Σχ. 5.4, για $a > 0$, σχεδιάζουμε το $\{x(t)\}$ το οποίο είναι απεριοδικό, με ένα σημείο ασυνέχειας (το μηδέν) και δύο ακρότατα (το μηδέν και το ένα). Όμως, είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο μόνο για $a > 0$, διότι για $a \neq 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt &= \int_0^{\infty} e^{-at} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-at} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{-a} (e^{-aT} - 1) \right) \\ &= \frac{1}{-a} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-aT} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$



Σχ. 5.5. “Γραφική απόδειξη” για το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi F)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} = 0, \quad \forall F \neq 0$.

Για $a < 0$, το όριο, επομένως και το ολοκλήρωμα, απειρίζεται, ενώ για $a > 0$ το όριο είναι μηδέν και, συνεπώς, το ολοκλήρωμα παίρνει πεπερασμένη τιμή. Προφανώς, για $a = 0$ το ολοκλήρωμα απειρίζεται. Για $a > 0$, ο μετασχηματισμός Fourier υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-(j2\pi F + a)t} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{-1}{j2\pi F + a} (e^{-(j2\pi F + a)T} - 1) = \frac{-1}{j2\pi F + a} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(j2\pi F + a)T} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.21)$$

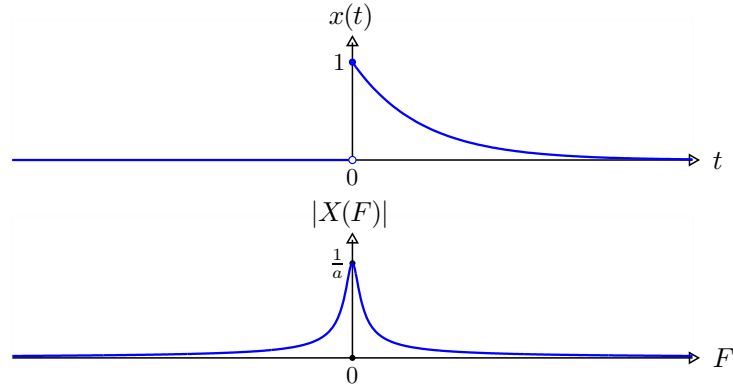
Για $a > 0$, το παραπάνω όριο είναι μηδέν. Πράγματι,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} |e^{-(j2\pi F + a)T}| = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{|e^{-j2\pi FT}|}_1 \cdot |e^{-aT}| = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-aT} = 0, \quad (5.22)$$

για $a > 0$.⁴ Εφόσον $\lim_{T \rightarrow \infty} |e^{-(j2\pi F + a)T}| = 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-(j2\pi F + a)T} = 0$, διότι $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Μία “γραφική απόδειξη” για το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-(a+j2\pi F)t} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-at} e^{-j2\pi Ft} = 0, \quad \forall F \neq 0$ φαίνεται στο Σχ. 5.5. Συνεπώς, για $a > 0$, ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$ είναι

$$X(F) = \frac{1}{j2\pi F + a}. \quad (5.23)$$

⁴Βλέπε οποιοδήποτε βιβλίο Απειροστικού Λογισμού.



Σχ. 5.6. Το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$ του Παραδείγματος 5.2 και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier $\{|X(F)|\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi F)^2 + a^2}} \right\}$ αυτού.

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα (δείτε Άσκηση 5.16) ότι

$$|X(F)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi F)^2 + a^2}}, \quad \angle X(F) = -\tan^{-1} \frac{2\pi F}{a}. \quad (5.24)$$

Στο Σχ. 5.6 σχεδιάζουμε το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$ και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier $\{|X(F)|\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{(2\pi F)^2 + a^2}} \right\}$ αυτού, εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\} = \left\{ \frac{1}{j2\pi F + a} \right\}$ λαμβάνει μιγαδικές τιμές. Οι ποσότητες $\{|X(F)|\}$ και $\{\angle X(F)\}$ σχεδιάζονται ως συναρτήσεις του F στο Σχ. 5.7. \diamond

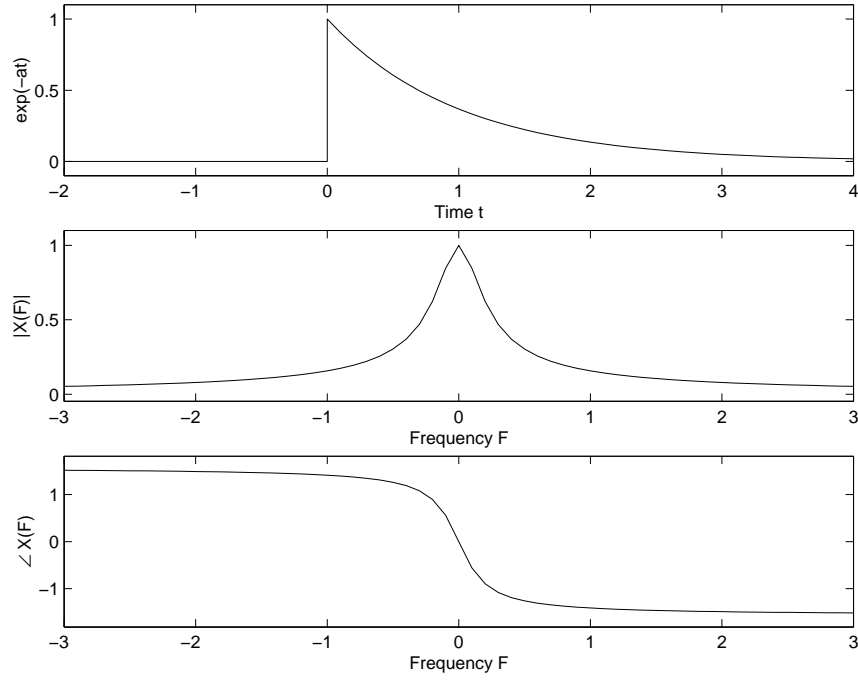
Παράδειγμα 5.3. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = e^{-2(t-1)}u(t-1)$.

Στο Σχ. 5.8, σχεδιάζουμε το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-2(t-1)}u(t-1)\}$. Υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Fourier του $\{x(t)\}$ από τον ορισμό

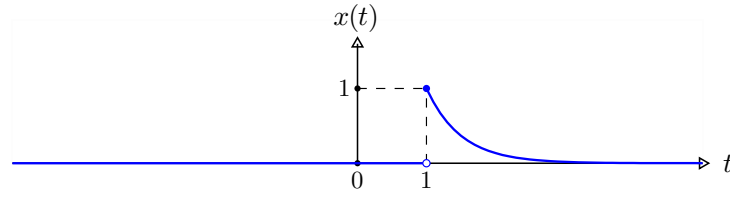
$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2(t-1)}u(t-1)e^{-j2\pi Ft}dt = e^2 \int_1^{\infty} e^{-2(1+j\pi F)t}dt \\ &= e^2 \left[\frac{e^{-2(1+j\pi F)t}}{-2(1+j\pi F)} \right]_1^{\infty} = -\frac{e^2}{2(1+j\pi F)} (0 - e^{-2(1+j\pi F)}) = \frac{e^2}{2(1+j\pi F)} e^{-2-j2\pi F} \\ &= \frac{e^{-j2\pi F}}{2+j2\pi F}. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Επομένως,

$$\{e^{-2(t-1)}u(t-1)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \frac{e^{-j2\pi F}}{2+j2\pi F} \right\}. \quad (5.26)$$



Σχ. 5.7. Μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ της $\{e^{-at}u(t)\}$ για $a = 1$.



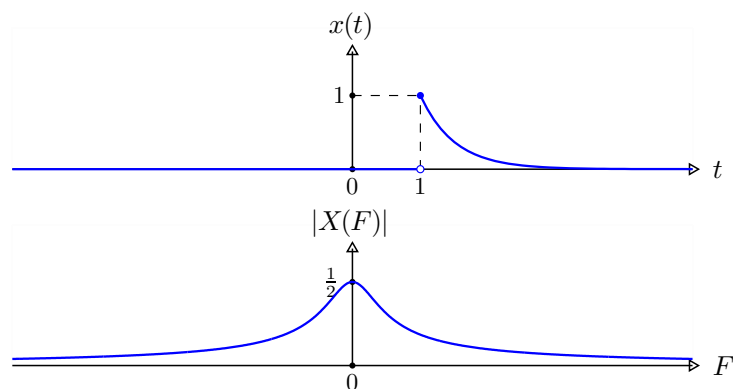
Σχ. 5.8. Το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-2(t-1)}u(t-1)\}$ του Παραδείγματος 5.3.

Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier είναι

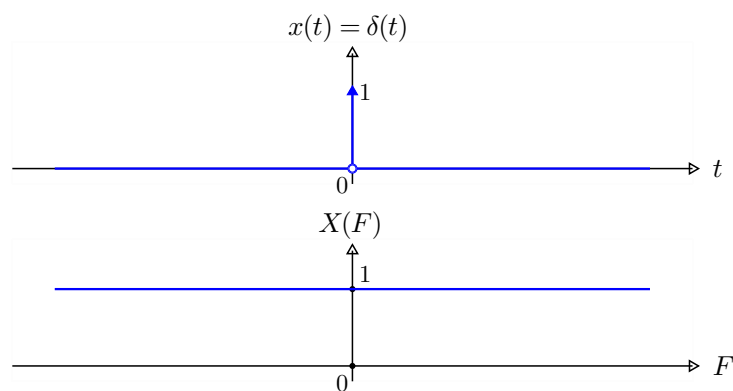
$$|X(F)| = \frac{1}{2\sqrt{1 + \pi^2 F^2}}, \quad \forall F \in \mathbb{R}. \quad (5.27)$$

Στο Σχ. 5.9 σχεδιάζουμε το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-2(t-1)}u(t-1)\}$ και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier $\{|X(F)|\} = \left\{\frac{1}{2\sqrt{1+\pi^2 F^2}}\right\}$ αυτού, εφόσον ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\} = \left\{\frac{e^{-j2\pi F}}{2+j2\pi F}\right\}$ λαμβάνει μιγαδικές τιμές. \diamond

Παράδειγμα 5.4. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{\delta(t)\}$.



Σχ. 5.9. Το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-2(t-1)}u(t-1)\}$ του Παραδείγματος 5.3 και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier $\{|X(F)|\} = \left\{\frac{1}{2\sqrt{1+\pi^2 F^2}}\right\}$ αυτού.



Σχ. 5.10. Το σήμα $\{\delta(t)\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτού.

Από τον ορισμό του $\{\delta(t)\}$, εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j2\pi Ft} dt = e^0 = 1. \quad (5.28)$$

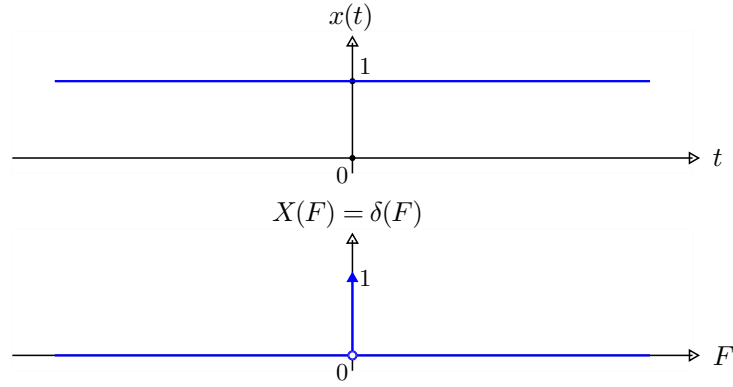
Ο μετασχηματισμός Fourier του $\{\delta(t)\}$ σχεδιάζεται στο Σχ. 5.10. \diamond

Κάνοντας χρήση του ζεύγους μετασχηματισμού Fourier, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} 1 e^{j2\pi Ft} dF = \delta(t). \quad (5.29)$$

Το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν ορίζεται με τη συνήθη έννοια. Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, θα χρησιμοποιούμε και τις δύο σχέσεις του ζεύγους

$$\{\delta(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{1\} \quad (5.30)$$



Σχ. 5.11. Το σήμα $\{\delta(F)\}$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier αυτού.

σαν να ήταν οποιοδήποτε σύννηθες ζεύγος συναρτήσεων που συνδέονται μοναδικά μέσω του ζεύγους μετασχηματισμού Fourier.

Παράδειγμα 5.5. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του $\{\delta(F)\}$.

Από τον ορισμό του $\{\delta(F)\}$, εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(F) e^{j2\pi Ft} dF = e^0 = 1. \quad (5.31)$$

Επομένως, λαμβάνουμε το ζεύγος

$$\{1\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{\delta(F)\} \quad (5.32)$$

το οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 5.11. ◇

5.1.1 Φασματική πυκνότητα ενέργειας απεριοδικών σημάτων

Έστω $\{x(t)\}$ απεριοδικό σήμα πεπερασμένης ενέργειας με μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$.

Η ενέργειά του υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) e^{-j2\pi Ft} dF \right) dt \quad (5.33) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt \right) dF = \int_{-\infty}^{\infty} X^*(F) X(F) dF = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αποδείξαμε ότι η ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί είτε στο πεδίο του χρόνου είτε στο πεδίο των συχνοτήτων (σχέση Parseval), δηλαδή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF. \quad (5.34)$$

Η ενέργεια του $\{x(t)\}$ στη ζώνη συχνοτήτων $F_1 \leq F \leq F_1 + \Delta F$, για ΔF “μικρό,” είναι ανάλογη του $|X(F_1)|^2$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής. Ορίζουμε το σήμα $\{x_{F_1}(t)\}$ ως

$$x_{F_1}(t) = \int_{F_1}^{F_1 + \Delta F} X(F) e^{j2\pi Ft} dF. \quad (5.35)$$

Το $\{x_{F_1}(t)\}$ είναι “η συνιστώσα του $\{x(t)\}$, η οποία οφείλεται στο διάστημα συχνοτήτων $[F_1, F_1 + \Delta F]$.” Προφανώς, ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x_{F_1}(t)\}$ είναι (γιατί;)

$$X_{F_1}(F) \simeq \begin{cases} X(F), & \text{αν } F_1 \leq F \leq F_1 + \Delta F, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.36)$$

Κάνοντας χρήση της σχέσης Parseval για το $\{x_{F_1}(t)\}$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{E}_{x_{F_1}} = \int_{-\infty}^{\infty} |x_{F_1}(t)|^2 dt = \int_{F_1}^{F_1 + \Delta F} |X(F)|^2 dF \simeq |X(F_1)|^2 \cdot \Delta F. \quad (5.37)$$

Συνεπώς, η ποσότητα $\{|X(F)|^2\}$ αναπαριστά την κατανομή της ενέργειας του $\{x(t)\}$ ως συνάρτηση της συχνότητας F . Για το λόγο αυτό, καλείται **φασματική πυκνότητα ενέργειας** (energy spectral density) του απεριοδικού σήματος συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$.

5.2 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier

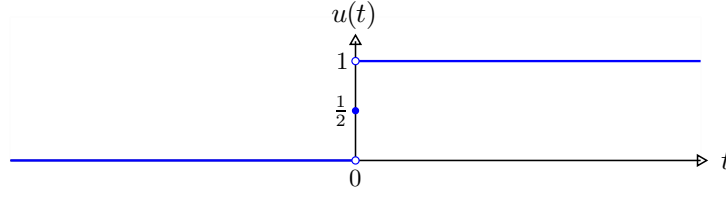
5.2.1 Γραμμικότητα

Αν $\{x_1(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X_1(F)\}$ και $\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X_2(F)\}$, τότε, για οποιαδήποτε βαθμωτά a_1 και a_2 ,

$$a_1\{x_1(t)\} + a_2\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} a_1\{X_1(F)\} + a_2\{X_2(F)\}. \quad (5.38)$$

Απόδειξη: Προφανής.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της γραμμικότητας, το φάσμα κάθε γραμμικού συνδυασμού σημάτων ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων φασμάτων.

Σχ. 5.12. Το σήμα $\{u(t)\}$ όπως ορίζεται στην (5.39).

Παράδειγμα 5.6. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{u(t)\}$.

Αρχικά, ξαναορίζουμε το σήμα $\{u(t)\}$ αλλάζοντας την τιμή του για $t = 0$ από 1 σε $\frac{1}{2}$. Επομένως,⁵

$$u(t) \triangleq \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (5.39)$$

Στο Σχ. 5.12, σχεδιάζουμε το $\{u(t)\}$ σύμφωνα με το νέο ορισμό του μέσω της (5.39). Παρατηρούμε ότι το $\{u(t)\}$ δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο, άρα δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet. Ακόμα κι αν αγνοήσουμε προσωρινά αυτό το γεγονός και προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} U(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-j2\pi Ft} dt = \int_0^{\infty} e^{-j2\pi Ft} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T e^{-j2\pi Ft} dt \\ &= \frac{1}{j2\pi F} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-j2\pi FT} - 1 \right). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Δυστυχώς, το παραπάνω όριο δεν υπάρχει και, συνεπώς, αυτός ο τρόπος υπολογισμού του μετασχηματισμού Fourier του $\{u(t)\}$ δεν αποδίδει.

Μία πιο αποδοτική προσέγγιση είναι να θεωρήσουμε το $\{u(t)\}$ σαν το όριο του $\{e^{-at}u(t)\}$ για $a \rightarrow 0$, δηλαδή,

$$\{u(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \{e^{-at}u(t)\}. \quad (5.41)$$

Για $F \neq 0$, υποθέτοντας ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά του ορίου και του ολοκληρώ-

⁵Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αν τα σήματα $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ διαφέρουν σε αριθμήσιμο πλήθος σημείων, τότε έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier. Επομένως η αλλαγή της τιμής του $\{u(t)\}$ σε ένα μόνο σημείο δεν επιφέρει καμία αλλαγή στο μετασχηματισμό Fourier $\{U(F)\}$ αυτού.

ματος, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\{U(F)\} &= \mathcal{F}\{u(t)\} = \mathcal{F}\left\{\lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}u(t)\right\} = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}u(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j2\pi Ft}dt\right\} = \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{F}\{e^{-at}u(t)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \left\{\frac{1}{a + j2\pi F}\right\} = \left\{\frac{1}{j2\pi F}\right\}.\end{aligned}\quad (5.42)$$

Για την περίπτωση $F = 0$, υπολογίζουμε την τιμή $U(0)$ ως εξής. Παρατηρούμε ότι $\{u(t)\} + \{u(-t)\} = \{1\}$, συνεπώς (λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier)

$$\mathcal{F}\{u(t)\} + \mathcal{F}\{u(-t)\} = \mathcal{F}\{1\}. \quad (5.43)$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι $\mathcal{F}\{x(-t)\} = \{X(-F)\}$ για οποιοδήποτε σήμα $\{x(t)\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}\{x(t)\} = \{X(F)\}$ (δείτε Άσκηση 5.17). Επίσης, στο Παράδειγμα 5.5 δείξαμε ότι $\mathcal{F}\{1\} = \{\delta(F)\}$. Επομένως, λαμβάνουμε

$$\{U(F)\} + \{U(-F)\} = \{\delta(F)\}. \quad (5.44)$$

Για $F = 0$, λαμβάνουμε $U(0) + U(0) = \delta(0)$, δηλαδή

$$U(0) = \frac{1}{2}\delta(0). \quad (5.45)$$

Άρα,

$$U(F) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & F = 0, \\ \frac{1}{j2\pi F}, & F \neq 0. \end{cases} \quad (5.46)$$

Επομένως, αποδείξαμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

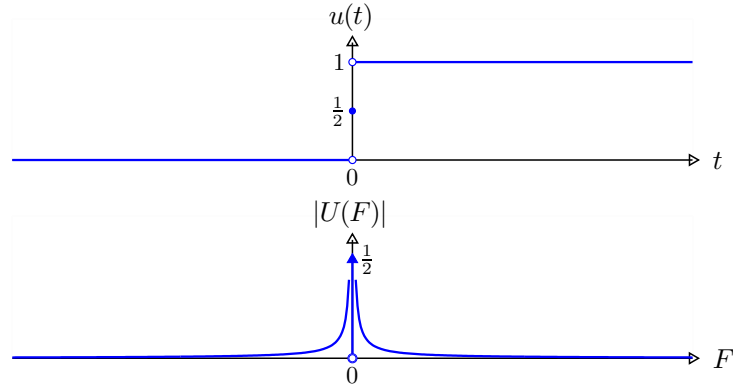
$$\{u(t)\} = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{U(F)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & F = 0 \\ \frac{1}{j2\pi F}, & F \neq 0. \end{cases} \quad (5.47)$$

το οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 5.13. ◇

5.2.2 Χρονική ολίσθηση

Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε

$$\{x(t - t_0)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{e^{-j2\pi Ft_0}X(F)\}. \quad (5.48)$$



Σχ. 5.13. Το σήμα $\{u(t)\}$ όπως ορίζεται στην (5.39) και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier αυτού.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x(t - t_0)\} &= \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi Ft} dt \right\} = \left\{ e^{-j2\pi Ft_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j2\pi F(t-t_0)} dt \right\} \\ &= \{e^{-j2\pi Ft_0} X(F)\}.\end{aligned}\quad (5.49)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, ολίσθηση (μετατόπιση) ενός σήματος στο χρόνο κατά t_0 ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του φάσματός του με το μιγαδικό αρμονικό σήμα $\{e^{-j2\pi Ft_0}\}$.

5.2.3 Ολίσθηση στη συχνότητα

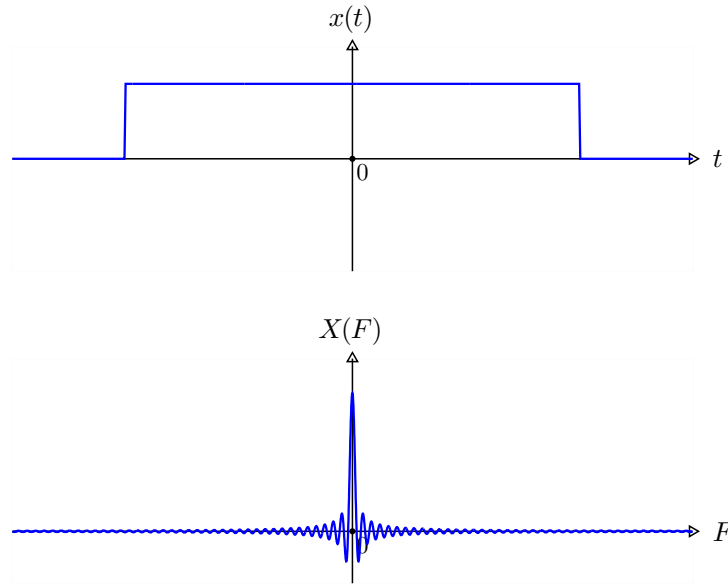
Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε

$$\{e^{j2\pi F_0 t} x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F - F_0)\}.\quad (5.50)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Fourier, θέτοντας $F' = F - F_0$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} X(F - F_0) e^{j2\pi Ft} dF &= \int_{-\infty}^{\infty} X(F') e^{j2\pi (F' + F_0)t} dF' \\ &= e^{j2\pi F_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} X(F') e^{j2\pi F' t} dF' = e^{j2\pi F_0 t} x(t).\end{aligned}\quad (5.51)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, πολλαπλασιασμός ενός σήματος με το μιγαδικό αρμονικό σήμα $\{e^{j2\pi F_0 t}\}$ ισοδυναμεί με μετατόπιση του φάσματός του στη συχνότητα κατά F_0 .



Σχ. 5.14. Το σήμα $\{x(t)\} = \{2\Pi(t/4)\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ αυτού.

Παράδειγμα 5.7. Διαμόρφωση (modulation). Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε

$$\{\cos(2\pi F_0 t)x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{2}X(F - F_0) + \frac{1}{2}X(F + F_0) \right\}. \quad (5.52)$$

Απόδειξη: Από τον τύπο του Euler έχουμε

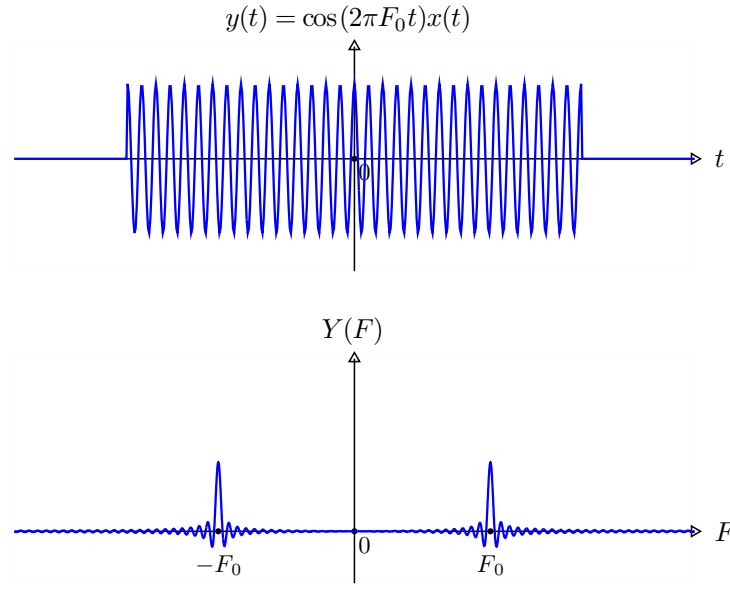
$$\cos(2\pi F_0 t) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t}). \quad (5.53)$$

Από τις ιδιότητες της γραμμικότητας και της ολίσθησης στη συχνότητα, λαμβάνουμε την (5.52).

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, πολλαπλασιασμός ενός σήματος με συνημίτονο συχνότητας F_0 ισοδυναμεί με διαμόρφωση του σήματος με φορέα F_0 . Ως παράδειγμα, στα Σχ. 5.14-5.16 αναπαριστούμε τη διαμόρφωση στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο των συχνοτήτων.

Στο Σχ. 5.14 σχεδιάζουμε το σήμα $\{x(t)\} = \{2\Pi(t/4)\}$ και το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\} = \{8 \operatorname{sinc}(4F)\}$ αυτού. Παρατηρούμε ότι το φάσμα του σήματος είναι συγκεντρωμένο γύρω από τη συχνότητα 0.

Στη συνέχεια, διαμορφώνουμε το παραπάνω σήμα με συχνότητα $F_0 = 8\text{Hz}$ και, στο



Σχ. 5.15. Το σήμα $\{x(t)\} = \{2\Pi(t/4) \cos(2\pi 8t)\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ αυτού.

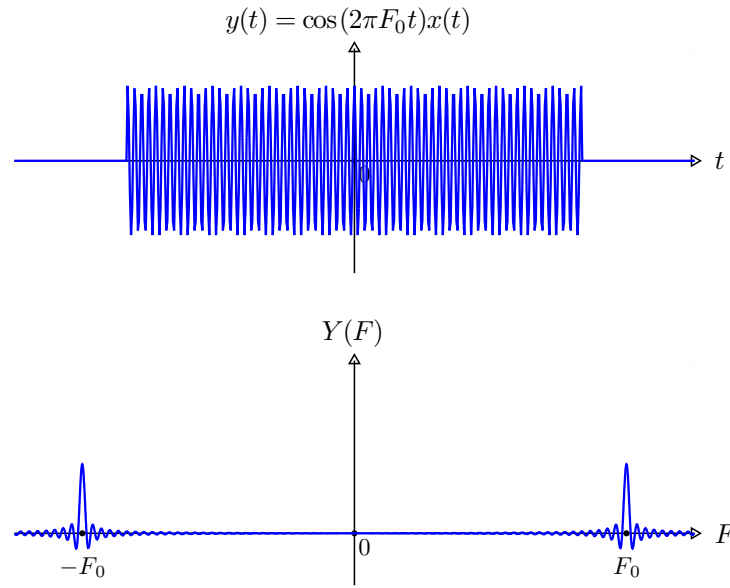
Σχ. 5.15, σχεδιάζουμε το διαμορφωμένο σήμα $\{x(t)\} = \{2\Pi(t/4) \cos(2\pi 8t)\}$ και το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\} = \{4 \operatorname{sinc}(4(F-8)) + 4 \operatorname{sinc}(4(F+8))\}$ αυτού. Παρατηρούμε ότι το αρχικό φάσμα έχει απομακρυνθεί από τη συχνότητα 0 και πλέον είναι συγκεντρωμένο γύρω από τις συχνότητες 8Hz και -8Hz. Ομοίως, αν χρησιμοποιήσουμε συχνότητα διαμόρφωσης $F_0 = 16\text{Hz}$, τότε το αρχικό φάσμα απομακρύνεται από τη συχνότητα 0 και συγκεντρώνεται γύρω από τις συχνότητες 16Hz και -16Hz, όπως φαίνεται και στο Σχ. 5.16.

Η διαμόρφωση είναι σημαντικότερη έννοια και αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο για την ανάπτυξη των τηλεπικοινωνιακών συστημάτων. Θα μας απασχολήσει εκτενέστερα σε επόμενο εδάφιο.

5.2.4 Ιδιότητα συνέλιξης

Αν $\{x_1(t)\} \xleftrightarrow{F} \{X_1(F)\}$ και $\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{F} \{X_2(F)\}$, τότε

$$\{x(t)\} = \{x_1(t)\} * \{x_2(t)\} \xleftrightarrow{F} \{X(F)\} = \{X_1(F)X_2(F)\}. \quad (5.54)$$



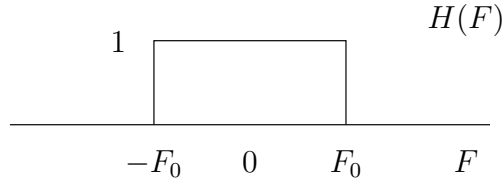
Σχ. 5.16. Το σήμα $\{x(t)\} = \{2\Pi(t/4) \cos(2\pi 16t)\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ αυτού.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
 X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau \right) e^{-j2\pi Ft} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t - \tau) e^{-j2\pi Ft} dt \right) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) X_2(F) e^{-j2\pi F\tau} d\tau \quad (5.55) \\
 &= X_2(F) \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) e^{-j2\pi F\tau} d\tau = X_1(F) X_2(F).
 \end{aligned}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική και δηλώνει ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό στο πεδίο των συχνοτήτων.

Εκτός των άλλων, αποτελεί το σημείο εκκίνησης για το σχεδιασμό ΓΧΑ συστημάτων με προδιαγραφές στο πεδίο των συχνοτήτων. Για παράδειγμα, ένα **ιδανικό κατωπερατό φίλτρο** (ideal lowpass filter) με **συχνότητα αποκοπής** (cutoff frequency) F_0 είναι ένα ΓΧΑ σύστημα το οποίο “περνάει αναλλοίωτες στην έξοδό του τις συχνότητες της εισόδου από $-F_0$ έως F_0 και κόβει τις υπόλοιπες.” Ας υποθέσουμε ότι η (άγνωστη, προς το παρόν) χροστική απόκριση αυτού του φίλτρου είναι $\{h(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{H(F)\}$. Εξαιτίας του γεγονότος ότι η έξοδός του $\{y(t)\}$, με είσοδο $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, στο πεδίο των συχνοτήτων καθορίζεται από τη σχέση $\{Y(F)\} = \{X(F)H(F)\}$, το φίλτρο αυτό μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο των



Σχ. 5.17. Αναπαράσταση στο πεδίο συχνοτήτων ιδανικού κατωπερατού φίλτρου με συχνότητα αποκοπής F_0 .

συχνοτήτων ως εξής (δείτε Σχ. 5.17).

$$H(F) = \begin{cases} 1, & |F| \leq F_0, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.56)$$

Συνεπώς, έχει κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ με τιμή

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1} \{H(F)\} = \frac{\sin(2\pi F_0 t)}{\pi t}. \quad (5.57)$$

Παρατηρούμε ότι το παραπάνω ιδανικό κατωπερατό φίλτρο είναι μη αιτιατό (επιπλέον, η μη αιτιατή συνιστώσα της κρουστικής απόκρισης έχει άπειρη χρονική διάρκεια), και συνεπώς μη άμεσα υλοποιήσιμο. Αντίστοιχα, ορίζουμε **ζωνοπερατά** (bandpass), **υψηπερατά** (high-pass) ιδανικά φίλτρα και συνδυασμούς τους, τα οποία επίσης είναι μη υλοποιήσιμα.

Στην πράξη, υλοποιούμε προσεγγίσεις ιδανικών φίλτρων. Στο σημείο αυτό θα πρέπει να πούμε ότι ο σχεδιασμός αναλογικών φίλτρων είναι μία βαθιά μελετημένη επιστημονική περιοχή η οποία όμως δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

5.2.5 Πολλαπλασιασμός στο χρόνο

Αν $\{x_1(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X_1(F)\}$ και $\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X_2(F)\}$, τότε

$$\{x(t)\} = \{x_1(t)x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\} = \{X_1(F)\} * \{X_2(F)\}. \quad (5.58)$$

Απόδειξη: Η απόδειξη γίνεται υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier του $X(F)$, ακολουθώντας αντίστοιχα βήματα με αυτά της απόδειξης της ιδιότητας της συνέλιξης στο χρόνο.

Άρα, παρατηρούμε ότι συνέλιξη στο ένα πεδίο (χρόνος, συχνότητα) αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο άλλο (συχνότητα, χρόνος).

5.2.6 Κλιμάκωση στο χρόνο και στη συχνότητα

Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε

$$\{x(at)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \frac{1}{|a|} X\left(\frac{F}{a}\right) \right\}, \quad (5.59)$$

$$\left\{ \frac{1}{|a|} x\left(\frac{t}{a}\right) \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(aF)\}. \quad (5.60)$$

Απόδειξη: Για $a > 0$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi Ft} dt \stackrel{t'=at}{=} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j2\pi(F/a)t'} dt' = \frac{1}{a} X\left(\frac{F}{a}\right). \quad (5.61)$$

Όμοια μπορεί να αποδειχθεί ότι για $a < 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-j2\pi Ft} dt = -\frac{1}{a} X\left(\frac{F}{a}\right), \quad (5.62)$$

αποδεικνύοντας την ιδιότητα. Η δεύτερη ιδιότητα αποδεικνύεται ανάλογα. Η ιδιότητα αυτή ουσιαστικά υποδεικνύει ότι “αν έχουμε συστολή στο ένα πεδίο, τότε θα έχουμε διαστολή στο άλλο!”

5.2.7 Δυϊκότητα του μετασχηματισμού Fourier

Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε $\{X(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{x(-F)\}$.

Απόδειξη: Εξ ορισμού,

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi Ft} dt. \quad (5.63)$$

Αντικατάσταση του t από το $-t$ οδηγεί σε

$$X(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-t) e^{j2\pi Ft} dt. \quad (5.64)$$

Αν εναλλάξουμε τα t και F , λαμβάνουμε

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(-F) e^{j2\pi Ft} dF. \quad (5.65)$$

5.2.8 Ιδιότητες παραγωγίσης και ολοκλήρωσης

Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, τότε

$$\left\{ \frac{d^n x(t)}{dt^n} \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{(j2\pi F)^n X(F)\}, \quad (5.66)$$

$$\{(-jt)^n x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \frac{d^n X(F)}{dF^n} \right\}, \quad (5.67)$$

$$\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0)X(0), & F = 0 \\ \frac{1}{j2\pi F}X(F), & F \neq 0. \end{cases} \quad (5.68)$$

Απόδειξη: Για $n = 1$, έχουμε

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(F) e^{j2\pi Ft} dF. \quad (5.69)$$

Παραγωγίζοντας ως προς το χρόνο και εναλλάσσοντας τη σειρά του ολοκληρώματος και της παραγώγου, λαμβάνουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt} (e^{j2\pi Ft}) X(F) dF = \int_{-\infty}^{\infty} (j2\pi F X(F)) e^{j2\pi Ft} dF \quad (5.70)$$

που αποδεικνύει την ιδιότητα για $n = 1$. Ανάλογα γίνεται η απόδειξη για μεγαλύτερα n .

Για να αποδείξουμε την ιδιότητα της ολοκλήρωσης, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$y(t) = \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) u(t - \tau) d\tau \Rightarrow \{y(t)\} = \{x(t)\} * \{u(t)\}. \quad (5.71)$$

Άρα,

$$Y(F) = X(F)U(F) = X(F) \cdot \left(\begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & F = 0 \\ \frac{1}{j2\pi F}, & F \neq 0 \end{cases} \right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0)X(0), & F = 0 \\ \frac{1}{j2\pi F}X(F), & F \neq 0. \end{cases} \quad (5.72)$$

5.3 Εφαρμογή του μετασχηματισμού Fourier στη μελέτη ΓΧΑ συστημάτων

Από την ιδιότητα της συνέλιξης συμπεραίνουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\{H(F)\}$ της χρουστικής απόκρισης $\{h(t)\}$ εκφράζεται ως

$$H(F) = \frac{Y(F)}{X(F)}, \quad \forall F \in \mathbb{R}. \quad (5.73)$$

Η συνάρτηση $\{H(F)\}$ χαρακτηρίζει μοναδικά το εν λόγω ΓΧΑ σύστημα στο πεδίο της συχνότητας και καλείται **απόκριση συχνότητας** (frequency response) του συστήματος.

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι συστήματα συνεχούς χρόνου που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές είναι ΓΧΑ. Έστω ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$ και έξοδο $\{y(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{Y(F)\}$, οι οποίες συνδέονται με τη σχέση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \quad (5.74)$$

με δεδομένα τα a_k , $k = 1, \dots, N$, και b_k , $k = 1, \dots, M$. Από την ιδιότητα της παραγωγίσης και τη γραμμικότητα λαμβάνουμε

$$\left\{ \sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{k=0}^N a_k (j2\pi F)^k \right\} \{Y(F)\}, \quad (5.75)$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \sum_{k=0}^M b_k (j2\pi F)^k \right\} \{X(F)\}. \quad (5.76)$$

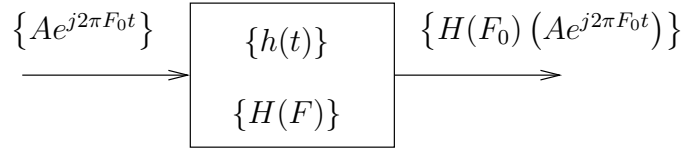
Τότε, η απόκριση συχνότητας του συστήματος εκφράζεται ως

$$H(F) = \frac{Y(F)}{X(F)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k (j2\pi F)^k}{\sum_{k=0}^N a_k (j2\pi F)^k}. \quad (5.77)$$

Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε την κρουστική απόκριση ως

$$\{h(t)\} = \mathcal{F}^{-1} \{H(F)\}. \quad (5.78)$$

Αυτός ο τρόπος υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης είναι απλός και εύχρηστος και φανερώνει την ισχύ του μετασχηματισμού Fourier ως μαθηματικού εργαλείου ανάλυσης ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η $\{H(F)\}$ είναι ρητή συνάρτηση του F και ο υπολογισμός του $\{h(t)\}$ γίνεται μέσω ανάλυσης σε απλά κλάσματα και χρήσης πινάκων μετασχηματισμού Fourier. Σε αυτό το σημείο, δεν θα εμβαθύνουμε στον παραπάνω τρόπο υπολογισμού της κρουστικής απόκρισης ΓΧΑ συστημάτων που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις. Θα το κάνουμε, χρησιμοποιώντας ανάλογες τεχνικές, κατά τη μελέτη του μετασχηματισμού Laplace.



Σχ. 5.18. ΓΧΑ σύστημα με είσοδο ημιτονοειδές σήμα.

5.3.1 Απόκριση ΓΧΑ συστήματος συνεχούς χρόνου σε ημιτονοειδείς εισόδους

Έστω ότι το $\{x(t)\} = \{Ae^{j2\pi F_0 t}\}$ είναι είσοδος σε ΓΧΑ σύστημα με χρονική απόκριση $\{h(t)\}$. Τότε, η έξοδος υπολογίζεται από τη συνέλιξη

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)Ae^{j2\pi F_0(t-\tau)}d\tau = Ae^{j2\pi F_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-j2\pi F_0 \tau}d\tau \\ &= H(F_0) (Ae^{j2\pi F_0 t}) = H(F_0)x(t). \end{aligned} \quad (5.79)$$

Άρα, η έξοδος είναι ένα ημιτονοειδές σήμα με την ίδια συχνότητα πολλαπλασιασμένο με $H(F_0) = |H(F_0)|e^{\angle H(F_0)}$. Συνεπώς, στην έξοδο παρατηρούμε κλιμάκωση πλάτους της εισόδου κατά $|H(F_0)|$ και μεταβολή φάσης κατά $\angle H(F_0)$.

Τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $\{e^{j2\pi F_0 t}\}$ αποτελούν **ιδιοσυναρτήσεις** (eigenfunctions) των ΓΧΑ συστημάτων συνεχούς χρόνου, διότι ικανοποιούν τη σχέση⁶

$$\mathcal{T} [\{e^{j2\pi F_0 t}\}] = H(F_0) \{e^{j2\pi F_0 t}\}. \quad (5.80)$$

5.4 Μετασχηματισμός Fourier περιοδικών σημάτων συνεχούς χρόνου

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι, κάτω από ορισμένες συνθήκες, περιοδικά σήματα συνεχούς χρόνου με περίοδο T_0 μπορούν να αναπαρασταθούν ως σειρές Fourier της μορφής

$$\{x(t)\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t} \right\}, \quad F_0 = \frac{1}{T_0}. \quad (5.81)$$

⁶Παρατηρήστε την ομοιότητα με τη σχέση $Ax = \lambda x$, η οποία ορίζει τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τετραγωνικού πίνακα A . Σημείωση: Ένας $n \times n$ πίνακας A μπορεί να θεωρηθεί ως ένας γραμμικός μετασχηματισμός με είσοδο $x \in \mathbb{R}^n$ και έξοδο $y \in \mathbb{R}^n$, τον οποίο μπορούμε να το συμβολίσουμε ως εξής: $y = A[x] = Ax$.

Κάνοντας χρήση του ζεύγους

$$\{1\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{\delta(F)\}, \quad (5.82)$$

της ιδιότητας ολίσθησης στη συχνότητα

$$\{1 \cdot e^{j2\pi k F_0 t}\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{\delta(F - kF_0)\}, \quad (5.83)$$

και της γραμμικότητας, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \mathcal{F}\left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi k F_0 t}\right\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mathcal{F}\{e^{j2\pi k F_0 t}\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \{\delta(F - kF_0)\}. \quad (5.84)$$

Συνεπώς, σε αυτό το πλαίσιο, ο μετασχηματισμός Fourier ενός περιοδικού σήματος συνεχούς χρόνου αποτελείται από ισapéχοντες παλμούς στις συχνότητες, με απόσταση ίση με τη θεμελιώδη συχνότητα F_0 . Το πλάτος του παλμού στη συχνότητα kF_0 ισούται με το συντελεστή Fourier c_k , $k \in \mathbb{Z}$.

Παράδειγμα 5.8. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\} = \{\cos(2\pi F_0 t)\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\{\cos(2\pi F_0 t)\} = \left\{\frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t})\right\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \left\{\frac{1}{2}\delta(F - F_0) + \frac{1}{2}\delta(F + F_0)\right\}. \quad (5.85)$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier του $\{\cos(2\pi F_0 t)\}$ αποτελείται από δύο παλμούς, πλάτους $1/2$, στις συχνότητες F_0 και $-F_0$. \diamond

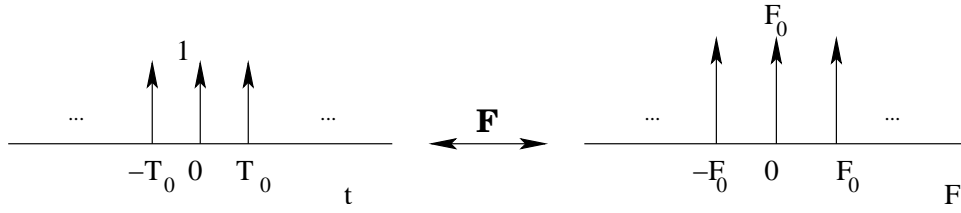
Παράδειγμα 5.9. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\} = \left\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0)\right\}$. Είδαμε σε προηγούμενο εδάφιο ότι

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) = \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k F_0 t} = F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k F_0 t} \quad (5.86)$$

με $F_0 = \frac{1}{T_0}$. Συνεπώς,

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{j2\pi k F_0 t}\} = F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(F - kF_0)\}. \quad (5.87)$$

Το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier αναπαρίσταται στο Σχ. 5.19. \diamond



Σχ. 5.19. Ζεύγος μετασχηματισμού Fourier τρένου παλμών.

5.5 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 5.1. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-2|t-1|}\}$.

Άσκηση 5.2. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{\delta(t+1)\} + \{\delta(t-1)\}$.

Άσκηση 5.3. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-a|t|}\}$, $a > 0$.

Άσκηση 5.4. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος

$$\{x(t)\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right\}. \quad (5.88)$$

Άσκηση 5.5. Έστω ημιτονοειδές σήμα $\{x(t)\} = \{Ae^{j2\pi F_0 t}\}$ το οποίο εφαρμόζουμε ως είσοδο σε ένα ΓΧΑ σύστημα με χρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ και απόκριση συχνοτήτων $\{H(F)\}$. Να βρείτε μία έκφραση κλειστής μορφής για την έξοδο $\{y(t)\}$.

Άσκηση 5.6. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ για το οποίο ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} 1, & -2 \leq t < -1 \\ 2, & -1 \leq t \leq 1 \\ 1, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.89)$$

Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του $\{x(t)\}$.

Άσκηση 5.7. Να βρείτε τους μετασχηματισμούς Fourier $\{X_1(F)\}$ και $\{X_2(F)\}$ των σημάτων $\{x_1(t)\} = \{e^{-a(t-1)}u(t-1)\}$ και $\{x_2(t)\} = \{e^{-a(t-1)}u(t)\}$, αντίστοιχα.

Άσκηση 5.8. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ για το οποίο ισχύει $x(t) = \lambda(t)$ όπου

$$\lambda(t) \triangleq \begin{cases} t+1, & -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1, & 0 \leq t \leq 1 \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.90)$$

Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του $\{x(t)\}$.

Άσκηση 5.9. Το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$ έχει μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\} = \left\{\frac{1}{a+j2\pi F}\right\}$. Να βρείτε με τη βοήθεια ιδιοτήτων του M.F. τους μετασχηματισμούς Fourier των παρακάτω σημάτων.

$$\alpha)\{x_1(t)\} = \{tx(t)\}$$

$$\beta)\{x_2(t)\} = \{t^2x(t)\}$$

$$\gamma)\{x_3(t)\} = \{t^2 \cos(2\pi F_0 t)x(t)\}$$

$$\delta)\{x_4(t)\} = \left\{x\left(\frac{4-t}{2}\right) \cos(2\pi F_0 t)\right\}$$

$$\epsilon)\{x_5(t)\} = \left\{\int_{t-T}^t x(\tau) d\tau\right\}$$

$$\sigma\tau)\{x_6(t)\} = \{e^{2at}e^{-4a}u(2-t)\}$$

Άσκηση 5.10. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\}$ για το οποίο ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} \frac{A}{T}t, & -T \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (5.91)$$

Άσκηση 5.11. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{3 \operatorname{sinc}(4t)\} * \{2 \cos(2\pi F_0 t)\}$.

Άσκηση 5.12. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{\operatorname{sinc}(t)\} * \{\operatorname{sinc}(t)\}$.

Άσκηση 5.13. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ ο οποίος είναι μη μηδενικός για $-B \leq F \leq B$. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο είναι μη μηδενικός ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{y(t)\} = \{x^2(t)\}$.

5.6 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 5.14. Να αποδειχθεί ότι αν το σήμα $\{x(t)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών, τότε το σήμα $\{|X(F)|\}$ είναι άρτιο και το σήμα $\{\angle X(F)\}$ είναι περιττό.

Άσκηση 5.15. Να αποδειχθούν τα εξής.

1. Αν το σήμα $\{x(t)\}$ είναι άρτιο, τότε το σήμα $\{X(F)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
2. Αν το σήμα $\{x(t)\}$ είναι περιττό, τότε το σήμα $\{X(F)\}$ παίρνει τιμές από το σύνολο των φανταστικών αριθμών.

Άσκηση 5.16. Για το σήμα $\{x(t)\}$ στο Παράδειγμα 5.2 να αποδειχθεί ότι $|X(F)| = \frac{1}{\sqrt{(2\pi F)^2 + a^2}}$ και $\angle X(F) = -\tan^{-1} \frac{2\pi F}{a}$.

Άσκηση 5.17. Να αποδειχθεί ότι αν $\mathcal{F}\{x(t)\} = \{X(F)\}$, τότε $\mathcal{F}\{x(-t)\} = \{X(-F)\}$.

Άσκηση 5.18. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = u\left(t + \frac{1}{2}\right) - u\left(t - \frac{1}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (5.92)$$

Συνελίσσοντας το $\{x(t)\}$ με τον εαυτό του παίρνουμε το σήμα $\{y(t)\} = \{x(t)\} * \{x(t)\}$.

α. Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του $\{x(t)\}$. **β.** Υπολογίστε την τιμή $y(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, σχεδιάστε τη γραφική του σήματος $\{y(t)\}$, και υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier $\{Y(F)\}$ του $\{y(t)\}$. **γ.** Εάν $a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$, σχεδιάστε τις γραφικές των σημάτων $\{a_1 \cdot x(a_2 \cdot t)\}$ και $\{a_3 \cdot y(a_4 \cdot t)\}$ και υπολογίστε τους μετασχηματισμούς Fourier αυτών. **δ.** Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα, υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier του σήματος συνεχούς χρόνου $\{z(t)\}$ που δίνεται από τον τύπο

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < -3 \\ 1, & -3 \leq t < -2, \\ -t-1, & -2 \leq t < 0, \\ t-1, & 0 \leq t < 2, \\ 1, & 2 \leq t < 3, \\ 0, & t \geq 3. \end{cases} \quad (5.93)$$

Άσκηση 5.19. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Το εύρος συχνοτήτων του σήματος συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ εκτείνεται από τη συχνότητα -5MHz έως τη συχνότητα 5MHz . Ποιο είναι το εύρος συχνοτήτων του σήματος $\{x^2(t)\}$ και γιατί;

Άσκηση 5.20. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ δέχεται στην είσοδο το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και παράγει στην έξοδο το σήμα $\{y(t)\}$. Γράψτε τη σχέση που συνδέει τους μετασχηματισμούς Fourier των παραπάνω σημάτων.

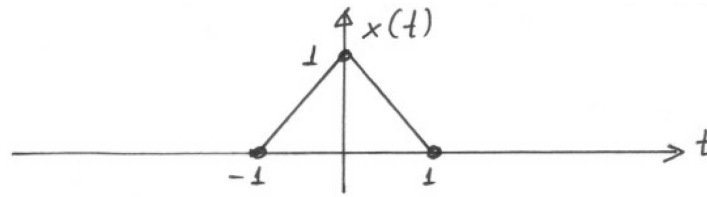
Άσκηση 5.21. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Ένα σύστημα συνεχούς χρόνου δέχεται στην είσοδο το σήμα συνεχούς χρόνου $\{5 \cdot \text{sinc}(t)\}$ και παράγει στην έξοδο το σήμα $\{2 \cdot \text{sinc}(2t)\}$. Είναι το παραπάνω σύστημα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο; Υπολογίστε την κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ αυτού (εάν έχει νόημα).

Άσκηση 5.22. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2008] Γνωρίζουμε ότι για κάθε $a > 0$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x(t)\}$ με $x(t) = e^{-at}u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, δίνεται από τον τύπο $X(F) = \frac{1}{a+j2\pi F}$, $F \in \mathbb{R}$. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{y(t)\}$ με τιμή $y(t) = e^{2at}e^{-4a}u(2-t)$, $t \in \mathbb{R}$. (α) $\frac{e^{-j4\pi F}}{2a-j2\pi F}$, (β) $\frac{e^{j4\pi F}}{2a-j2\pi F}$, (γ) $\frac{e^{-j2\pi F}}{a-j\pi F}$, (δ) $\frac{e^{j2\pi F}}{a-j\pi F}$.

Άσκηση 5.23. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2008] Τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ έχουν τιμές $x(t) = 3\text{sinc}(4t)$ και $y(t) = 2\cos(5\pi t)$, αντίστοιχα. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$, να υπολογιστεί η τιμή $z(t)$ του σήματος $\{z(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\}$. (α) $\frac{3}{4}\cos(5\pi t)$, (β) $6\text{sinc}(4t)$, (γ) 0 , (δ) $\frac{3}{2}\cos(5\pi t)$.

Άσκηση 5.24. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2004] Υπολογίστε τη συνέλιξη των σημάτων $\{x(t)\} = \{\cos(\omega_1 t)\}$ και $\{y(t)\} = \{\cos(\omega_2 t)\}$, για κάθε πραγματικό t , όπου ω_2 είναι διαφορετικό από το ω_1 .

Άσκηση 5.25. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2004] Υπολογίστε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του τριγωνικού παλμού $\{x(t)\}$ του Σχ. 5.20.



Σχ. 5.20. Σχήμα για την Άσκηση 5.25.

Άσκηση 5.26. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2004] Έχοντας βρει τη λύση στην Άσκηση 5.25, θέλετε να επιβεβαιώσετε την απάντησή σας υπολογιστικά. Γράψτε κώδικα MATLAB που να α) υπολογίζει τιμές (δείγματα) του σήματος $\{X(F)\}$ που υπολογίσατε στην Άσκηση 5.25, για ένα κατάλληλο εύρος τιμών του F και με βήμα $\Delta F = 0.1$, β) προσεγγίζει υπολογιστικά το ολοκλήρωμα Fourier για τις αντίστοιχες τιμές του F , και γ) συγκρίνει τα δύο αποτελέσματα. Δεν απαιτούνται πάνω από 20 γραμμές κώδικα.

Άσκηση 5.27. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2004] α) Κάνοντας χρήση κατάλληλων ιδιοτήτων του Μ/Σ Fourier, υπολογίστε το Μ/Σ Fourier, $\{X(F)\}$, του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{j\omega_0 t} w_T(t)\}$, $t \in \mathbb{R}$, όπου $\{w_T(t)\} = \{u(t+T)\} - \{u(t-T)\}$ είναι η συνάρτηση παραθύρου διάρκειας $2T$ (η $\{u(t)\}$ είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση). β) Σχεδιάστε το πλάτος του παραπάνω Μ/Σ Fourier (με όσο περισσότερη λεπτομέρεια γίνεται) ως συνάρτηση του F . γ) Στην πράξη, μπορείτε να δείτε το πλάτος του Μ/Σ Fourier ενός σήματος ως συνάρτηση του F κάνοντας χρήση μίας συσκευής ανάλυσης φάσματος (spectrum analyzer). Με βάση την απάντησή σας στο σκέλος β), πώς θα εκτιμούσατε την παράμετρο ω_0 από τη γραφική παράσταση στην οθόνη του αναλυτή φάσματος;

Άσκηση 5.28. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2004] Ένας αναλυτής φάσματος παίρνει ως είσοδο ένα σήμα (μιά συνάρτηση $\{x(t)\}$ της μεταβλητής $t \in \mathbb{R}$) και βγάζει στην έξοδο το πλάτος του Μ/Σ Fourier της εισόδου $\{|X(F)|\}$ (ένα άλλο σήμα που είναι συνάρτηση της μεταβλητής $F \in \mathbb{R}$). Προσέξτε ότι τα ονόματα των μεταβλητών εισόδου-εξόδου δεν έχουν σημασία, αυτό που έχει σημασία είναι ότι η είσοδος είναι μία συνάρτηση μίας πραγματικής μεταβλητής και το ίδιο και η έξοδος. α) Είναι το παραπάνω σύστημα γραμμικό; β) Τι θα συμβεί εάν για είσοδο βάλουμε το $\{x(t - t_0)\}$, όπου $t_0 \in \mathbb{R}$ είναι μιά σταθερά; γ) Είναι

το παραπάνω σύστημα ευσταθές με την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO-stable);

Άσκηση 5.29. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2005] **α)** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$. Για ποιες τιμές του a υπάρχει ο μετασχηματισμός Fourier; **β)** Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \quad (5.94)$$

όπου $\{x(t)\}$ είσοδος και $\{y(t)\}$ έξοδος (το παραπάνω ερώτημα ίσως σας φανεί χρήσιμο).

Άσκηση 5.30. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2005] **α)** Έστω ότι στην είσοδο ενός συστήματος θέτουμε ένα ημιτονοειδές σήμα ενώ στην έξοδο λαμβάνουμε γραμμικό συνδυασμό ημιτονοειδών σημάτων με διαφορετικές συχνότητες. Είναι το εν λόγω σύστημα γραμμικό και γιατί; **β)** Υπολογίστε την έξοδο του συστήματος $\{y(t)\} = \{x^2(t)\}$ με είσοδο $\{x(t)\} = \{\cos(2\pi F_0 t)\}$. Προσπαθήστε να συσχετίσετε την απάντηση με το προηγούμενο ερώτημα.

Άσκηση 5.31. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2005] Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-a|t|}\}$. Αποδείξτε ότι ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει για $a > 0$.

Άσκηση 5.32. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2006] **α)** Αν $\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\}$, να βρείτε μία έκφραση του $\mathcal{F}\{x(-t)\}$ συναρτήσει του $\{X(F)\}$ (να κάνετε αναλυτικά τις πράξεις). **β)** Παρατηρήστε ότι $e^{-a|t|} = x(t) + x(-t)$, με $x(t) = e^{-at}u(t)$ (για παράδειγμα, να το αποδείξετε γραφικά⁷). Υποθέστε ότι $a > 0$. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό Fourier του $\{e^{-at}u(t)\}$ και το προηγούμενο ερώτημα, να υπολογίσετε το $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\}$. **γ)** Να υπολογίσετε το $\mathcal{F}\{e^{-a|t-2|}\}$.

⁷Σημείωση: Ανάλογα με τον ορισμό του $\{u(t)\}$, είναι πιθανό η ισότητα $e^{-a|t|} = x(t) + x(-t)$ να μην ισχύει για $t = 0$. Όπως έχουμε δει, συναρτήσεις οι οποίες διαφέρουν σε ένα σημείο έχουν τον ίδιο μετασχηματισμό Fourier, άρα, δεν υπάρχει κανένα πρόβλημα.

Άσκηση 5.33. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Το σήμα $\{x(t)\} = \{e^{-t}u(t)\}$ αποτελεί την είσοδο σε ένα σύστημα (φίλτρο) με χροστική απόκριση $\{h(t)\} = 2F_0\{\text{sinc}(2F_0t)\}$, $F_0 > 0$. Υπολογίστε

1. την ενέργεια του σήματος εισόδου $\{x(t)\}$,
2. την ενέργεια του σήματος $\{y(t)\}$ στην έξοδο του φίλτρου συναρτήσει της τιμής F_0 , και
3. την τιμή F_0 έτσι ώστε στην έξοδο να εμφανίζεται το 50% της ενέργειας του σήματος εισόδου.

Χρήσιμες σχέσεις: $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(F)|^2 dF$, $\int_0^a \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 5.34. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ συνδέονται με τη σχέση

$$\{y(t)\} = \{\sin(4\pi t)x(1-2t)\}. \quad (5.95)$$

Να υπολογιστεί η σχέση που συνδέει τα φάσματά τους. Ναδειχθεί ότι

$$|Y(F)| = \frac{1}{4} \left| X\left(-\frac{F}{2} + 1\right) - X\left(-\frac{F}{2} - 1\right) \right|. \quad (5.96)$$

Άσκηση 5.35. Δίνονται τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ των οποίων οι τιμές είναι

$$x(t) = \begin{cases} \frac{t}{4} + 1, & -4 \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{4} + 1, & 0 < t \leq 4 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi F_c t), \quad F_c > 0,$$

αντίστοιχα. Το σήμα $\{y(t)\}$ αντιπροσωπεύει το διαμορφωμένο σήμα $\{x(t)\}$ με συχνότητα διαμόρφωσης F_c . Παρόμοια διαμόρφωση χρησιμοποιείται στη μετάδοση ραδιοφωνικών σημάτων ΑΜ.

1. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του $\{x(t)\}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ή -εναλλακτικά- παρατηρώντας ότι το $\{x(t)\}$ προκύπτει από τη συνέλιξη δύο τετραγωνικών παλμών να χρησιμοποιήσετε την κατάλληλη ιδιότητα του μετασχηματισμού Fourier.)

2. Να σχεδιαστεί η γραφική του $\{X(F)\}$ που βρήκατε στο υποερώτημα 1. (Αν το $\{X(F)\}$ δεν είναι πραγματικό αλλά μιγαδικό, τότε να σχεδιάσετε τη γραφική του $\{|X(F)|\}$ αντί για του $\{X(F)\}$.)
3. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{Y(F)\}$ του $\{y(t)\}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ή -εναλλακτικά- να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα της διαμόρφωσης.)
4. Να σχεδιαστεί η γραφική του $\{Y(F)\}$ που βρήκατε στο υποερώτημα 3. (Αν το $\{Y(F)\}$ δεν είναι πραγματικό αλλά μιγαδικό, τότε να σχεδιάσετε τη γραφική του $\{|Y(F)|\}$ αντί για του $\{Y(F)\}$.)
5. Να σχεδιάσετε τα σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ με τη χρήση του MATLAB στο πλέγμα χρόνου $t = [t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}]$.

Να προσεγγίσετε με τη χρήση του MATLAB το μετασχηματισμό Fourier των $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στο πλέγμα συχνοτήτων $F = [F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}]$ χρησιμοποιώντας τις τιμές των σημάτων $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στο πλέγμα $t = [t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}]$.

Να σχεδιάσετε επίσης τις προσεγγίσεις των $\{X(F)\}$ και $\{Y(F)\}$ που μόλις υπολογίσατε με τη χρήση του MATLAB στο πλέγμα συχνοτήτων $F = [F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}]$.

Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων: $t_{\min} = -8$, $t_{\max} = 8$, $t_{\text{step}} = 0.05$, $F_{\min} = -10$, $F_{\max} = 10$, $F_{\text{step}} = 0.02$, $F_c = 2$.

Για να αποκτήσετε ομοιόμορφες γραφικές, χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-8,8,-1,1])` για τα γραφήματα σημάτων χρόνου και την εντολή `axis([-10,10,-1,5])` για τα γραφήματα σημάτων συχνότητας.

6. Επαναλάβετε το υποερώτημα 5 με συχνότητα διαμόρφωσης $F_c = 4$ και όλες τις άλλες παραμέτρους ως έχουν. Συγκρίνετε τις γραφικές που παίρνετε στα υποερωτήματα 5 και 6. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 5.36. Δίνονται τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ των οποίων οι τιμές

είναι

$$x(t) = \begin{cases} 2, & -2 \leq t < -1 \\ 1 - t, & -1 \leq t < 0 \\ 1 + t, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t \leq 2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}$$

και

$$y(t) = x(t) \cos(2\pi F_c t), \quad F_c > 0,$$

αντίστοιχα. Το σήμα $\{y(t)\}$ αντιπροσωπεύει το διαμορφωμένο σήμα $\{x(t)\}$ με συχνότητα διαμόρφωσης F_c . Παρόμοια διαμόρφωση χρησιμοποιείται στη μετάδοση ραδιοφωνικών σημάτων ΑΜ.

1. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{X(F)\}$ του $\{x(t)\}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ή -εναλλακτικά- να χρησιμοποιήσετε κατάλληλες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.)
2. Να σχεδιαστεί στο χαρτί η γραφική του $\{X(F)\}$ που βρήκατε στο υποερώτημα 1. (Αν το $\{X(F)\}$ δεν είναι πραγματικό αλλά μιγαδικό, τότε να σχεδιάσετε τη γραφική του $\{|X(F)|\}$ αντί για του $\{X(F)\}$.)
3. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{Y(F)\}$ του $\{y(t)\}$. (Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ή -εναλλακτικά- να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα της διαμόρφωσης.)
4. Να σχεδιαστεί στο χαρτί η γραφική του $\{Y(F)\}$ που βρήκατε στο υποερώτημα 3. (Αν το $\{Y(F)\}$ δεν είναι πραγματικό αλλά μιγαδικό, τότε να σχεδιάσετε τη γραφική του $\{|Y(F)|\}$ αντί για του $\{Y(F)\}$.)
5. Να σχεδιάσετε τα σήματα $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ με τη χρήση του MATLAB στο πλέγμα χρόνου $t = [t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}]$.

Να προσεγγίσετε με τη χρήση του MATLAB το μετασχηματισμό Fourier των $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στο πλέγμα συχνοτήτων $F = [F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}]$ χρησιμοποιώντας τις τιμές των σημάτων $\{x(t)\}$ και $\{y(t)\}$ στο πλέγμα $t = [t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}]$.

Να σχεδιάσετε επίσης τις προσεγγίσεις των $\{X(F)\}$ και $\{Y(F)\}$ που μόλις υπολογίσατε με τη χρήση του MATLAB στο πλέγμα συχνοτήτων $F = [F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}]$.

Χρησιμοποιήστε τις ακόλουθες τιμές παραμέτρων: $t_{\min} = -8$, $t_{\max} = 8$, $t_{\text{step}} = 0.01$, $F_{\min} = -10$, $F_{\max} = 10$, $F_{\text{step}} = 0.02$, $F_c = 4$.

Για να αποκτήσετε ομοιόμορφες γραφικές, χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3,3,-3,3])` για τα γραφήματα σημάτων χρόνου και την εντολή `axis([-10,10,-4,8])` για τα γραφήματα σημάτων συχνότητας.

6. Επαναλάβετε το υποερώτημα 5 με συχνότητα διαμόρφωσης $F_c = 8$ και όλες τις άλλες παραμέτρους ως έχουν. Συγκρίνετε τις γραφικές που παίρνετε στα υποερωτήματα 5 και 6. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 5.37. Να προσεγγίσετε το μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων

1. $x(t) = e^{-at}u(t)$, $a > 0$,

2. $x(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$

στο πλέγμα $F = F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}$, χρησιμοποιώντας τις τιμές των συναρτήσεων $x(t)$ στο πλέγμα $t = t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}$ (ενδεικτικές τιμές: $a = 1$, $\tau = 1$, $t_{\min} = -t_{\max} = -5$, $t_{\text{step}} = 0.01$, $F_{\min} = -F_{\max} = -5$, $F_{\text{step}} = 0.01$). Να σχεδιάσετε τις προσεγγίσεις και τις αναλυτικές εκφράσεις των μετασχηματισμών Fourier (αφού υπολογίσετε στο χαρτί τις εκφράσεις που δεν γνωρίζετε) στο παραπάνω πλέγμα συχνοτήτων και να σχολιάσετε την ακρίβεια της προσέγγισης.

Άσκηση 5.38. Να αποδείξετε λεπτομερώς ότι, για $a > 0$, $\{x(t)\} = \{e^{-a|t|}\} \xleftrightarrow{F} \{X(F)\} = \left\{ \frac{2a}{a^2 + (2\pi F)^2} \right\}$. Να προσεγγίσετε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων

1. $X(F) = \frac{2a}{a^2 + (2\pi F)^2}$, $a > 0$,

2. $X(F) = \begin{cases} 1, & |F| \leq F_0 \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases}$

στο πλέγμα $t = t_{\min} : t_{\text{step}} : t_{\max}$ χρησιμοποιώντας τις τιμές των συναρτήσεων $X(F)$ στο πλέγμα $F = F_{\min} : F_{\text{step}} : F_{\max}$ (με $F_0 = 1$ και τις ενδεικτικές τιμές της Άσκησης 5.37). Να σχεδιάσετε τις προσεγγίσεις και τις αντίστοιχες αναλυτικές εκφράσεις (αφού υπολογίσετε στο χαρτί τις εκφράσεις που δεν γνωρίζετε) στο παραπάνω πλέγμα χρόνου και να σχολιάσετε την ακρίβεια της προσέγγισης.

Κεφάλαιο 6

Μετασχηματισμός Fourier Σημάτων Διακριτού Χρόνου

6.1 Μετασχηματισμός Fourier

Κάτω από ορισμένες συνθήκες οι οποίες θα αναφερθούν στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός Fourier ενός απειριοδικού σήματος διακριτού χρόνου, $\{x[n]\}$, ορίζεται ως εξής.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n}. \quad (6.1)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ είναι περιοδικός, με περίοδο 1, διότι

$$X(f+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi(f+1)n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \cdot \underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} = X(f). \quad (6.2)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ επιτρέπει την ανακατασκευή των δειγμάτων του σήματος $\{x[n]\}$ ως εξής. Θεωρούμε m ακέραιο, πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (6.1) με $e^{j2\pi f m}$, και ολοκληρώνουμε στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ λαμβάνοντας

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f m} df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \right) e^{j2\pi f m} df. \quad (6.3)$$

Εναλλάσσοντας τη σειρά του αθροίσματος και του ολοκληρώματος λαμβάνουμε

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f m} df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi f(m-n)} df \right). \quad (6.4)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι (δείτε Άσκηση 6.6)

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi f(m-n)} df = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m, \\ 0, & \text{αν } n \neq m. \end{cases} \quad (6.5)$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f m} df = x[m]. \quad (6.6)$$

Άρα, καταλήγουμε στο παρακάτω ζεύγος μετασχηματισμού Fourier απεριοδικών σημάτων διακριτού χρόνου¹

$$x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f n} df \quad (\text{Εξίσωση σύνθεσης}) \quad (6.9)$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \quad (\text{Εξίσωση ανάλυσης}). \quad (6.10)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ υποδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $\{e^{j2\pi f n}\}$, για $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, συνδυάζονται γραμμικά για τη σύνθεση του σήματος $\{x[n]\}$ και αποτελεί μία μοναδική περιγραφή του $\{x[n]\}$ στο πεδίο των συχνοτήτων.

Αν το σήμα $\{x[n]\}$ είναι απόλυτα αθροίσιμο, τότε ο μετασχηματισμός Fourier ορίζεται για κάθε f , διότι

$$|X(f)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n] e^{-j2\pi f n}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty. \quad (6.11)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier μπορεί να οριστεί για σήματα που είναι τετραγωνικά αθροίσιμα (δηλαδή, πεπερασμένης ενέργειας) αλλά όχι απόλυτα αθροίσιμα. Για παράδειγμα, ο περιοδικός

¹Χρησιμοποιώντας τη γωνιακή συχνότητα $\omega = 2\pi f$, μπορούμε να ορίσουμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier ως εξής.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}, \quad (6.7)$$

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{j\omega n} d\omega. \quad (6.8)$$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το σήμα $\{X(\omega)\}$ είναι περιοδική συνάρτηση του ω , με περίοδο 2π .

μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ ο οποίος στην περίοδο $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ έχει τιμή

$$X(f) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |f| \leq f_c \\ 0, & \text{αλλού,} \end{cases} \quad (6.12)$$

όπου $0 \leq f_c \leq \frac{1}{2}$, αντιστοιχεί στο σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ με τιμή

$$x[n] = \begin{cases} 2f_c, & \text{αν } n = 0 \\ \frac{\sin(2\pi f_c n)}{\pi n}, & \text{αν } n \neq 0 \end{cases} = 2f_c \text{sinc}(2f_c n) \quad (6.13)$$

το οποίο μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν είναι απόλυτα αθροίσσιμο. Ως συνέπεια, η σειρά

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2f_c \text{sinc}(2f_c n) e^{-j2\pi f n} \quad (6.14)$$

δεν συγκλίνει ομοιόμορφα για όλα τα f (η απόδειξη είναι εκτός των πλαισίων του μαθήματος).

Θεωρώντας την ακολουθία σημάτων $\{X_N(f)\}$ με τιμή

$$X_N(f) = \sum_{n=-N}^N 2f_c \text{sinc}(2f_c n) e^{-j2\pi f n}, \quad N \in \mathbb{Z}, \quad (6.15)$$

παρατηρούμε στο Σχ. 6.1 ότι, όσο αυξάνουμε το N , η προσέγγιση $\{X_N(F)\}$ του $\{X(F)\}$ βελτιώνεται αλλά δεν μειώνεται η μέγιστη απόκλιση η οποία εμφανίζεται κοντά στα σημεία ασυνέχειας (φαινόμενο Gibbs).

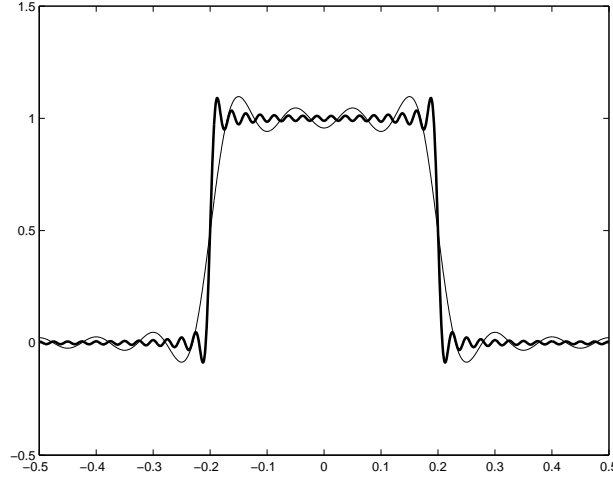
Επιπλέον, αν επιτρέψουμε την εισαγωγή συναρτήσεων Dirac στο πεδίο των συχνοτήτων, π.χ., $\{\delta(f - f_0)\}$, τότε μπορούμε να ορίσουμε ζεύγη μετασχηματισμού Fourier για σήματα τα οποία δεν είναι απόλυτα ούτε τετραγωνικά αθροίσσιμα, όπως, για παράδειγμα, περιοδικά σήματα.

Παράδειγμα 6.1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x[n]\}$, με

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (6.16)$$

Πριν υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier, παρατηρούμε ότι το σήμα $\{x[n]\}$ είναι απόλυτα αθροίσσιμο, διότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=-M}^M |x[n]| = (2M + 1) < \infty. \quad (6.17)$$



Σχ. 6.1. Φαινόμενο Gibbs: $X_N(f)$ για $N = 10$ (λεπτή γραμμή) και $N = 40$ (έντονη γραμμή), όπου $f_c = 0.2$.

Συνεπώς, ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και υπολογίζεται ως εξής.

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-M}^M e^{-j2\pi fn}. \quad (6.18)$$

Αν $f \in \mathbb{Z}$, τότε $e^{-j2\pi f} = 1$ και $X(f) = 2M + 1$. Αν $f \notin \mathbb{Z}$, τότε, θέτοντας $a = e^{-j2\pi f} \neq 1$, μπορούμε να εκφράσουμε το παραπάνω άθροισμα ως εξής.

$$\begin{aligned} S &= a^{-M} + a^{-M+1} + \dots + a^{M-1} + a^M = a^{-M} (1 + a^{-1} + a^{-2} + \dots + a^{2M}) \\ &= a^{-M} \frac{a^{2M+1} - 1}{a - 1} = \frac{a^{M+1} - a^{-M}}{a - 1} = \frac{a^{\frac{1}{2}} a^{M+\frac{1}{2}} - a^{-(M+\frac{1}{2})}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}} = \frac{a^{\frac{2M+1}{2}} - a^{-\frac{2M+1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}} - a^{-\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (6.19)$$

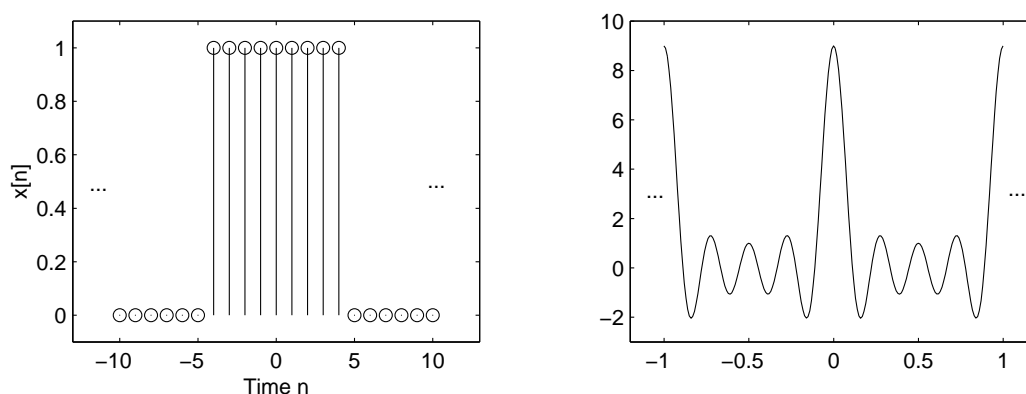
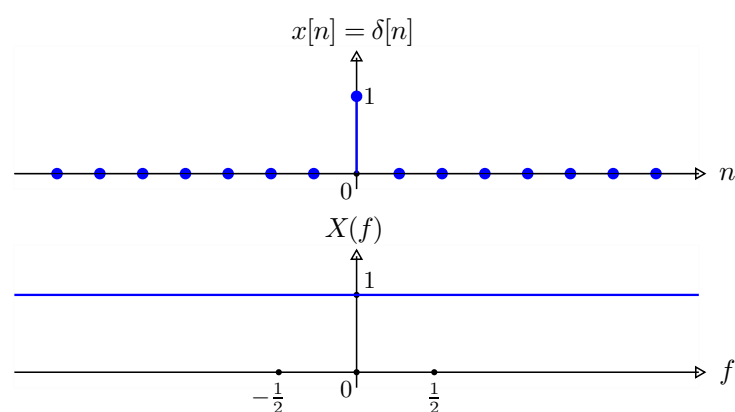
Αντικαθιστώντας, λαμβάνουμε την έκφραση για το μετασχηματισμό Fourier

$$X(f) = (2M + 1) \frac{\text{sinc}((2M + 1)f)}{\text{sinc}(f)}, \quad \forall f \notin \mathbb{Z}. \quad (6.20)$$

Επομένως,

$$X(f) = \begin{cases} 2M + 1, & f \in \mathbb{Z} \\ (2M + 1) \frac{\text{sinc}((2M+1)f)}{\text{sinc}(f)}, & f \notin \mathbb{Z} \end{cases} = (2M + 1) \begin{cases} 1, & f \in \mathbb{Z}^* \\ \frac{\text{sinc}((2M+1)f)}{\text{sinc}(f)}, & f \notin \mathbb{Z}^*, \end{cases} \quad (6.21)$$

όπου $\mathbb{Z}^* \triangleq \mathbb{Z} - \{0\}$. Το σήμα $\{x[n]\}$ και ο μετασχηματισμός $\{X(f)\}$ σχεδιάζονται στο Σχ. 6.2 για $M = 4$. ◇

Σχ. 6.2. Ορθογώνιο παράθυρο διακριτού χρόνου και μετασχηματισμός Fourier για $M = 4$.Σχ. 6.3. Το σήμα $\{\delta[n]\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτού.

Παράδειγμα 6.2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x[n]\} = \{\delta[n]\}$.

Από τον ορισμό του $\{\delta[n]\}$, εύκολα υπολογίζουμε ότι

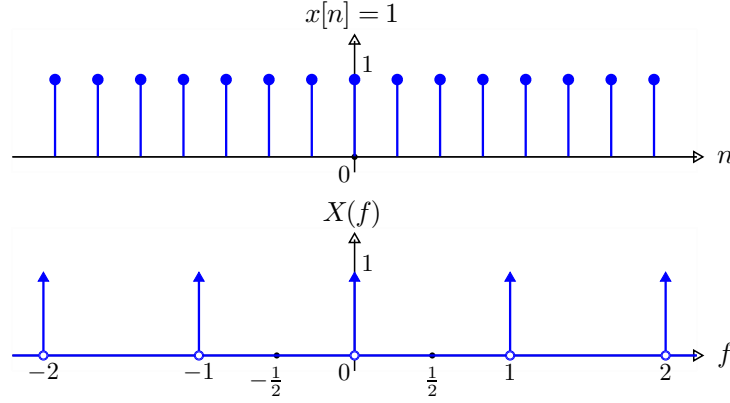
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]e^{-j2\pi fn} = e^{-j2\pi f0} = 1. \quad (6.22)$$

Επομένως, λαμβάνουμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$\{\delta[n]\} \xleftrightarrow{F} \{1\} \quad (6.23)$$

το οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 6.3.

◇



Σχ. 6.4. Το σήμα $\{x[n]\} = \{1\}$ και ο μετασχηματισμός Fourier αυτού.

Παράδειγμα 6.3. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{1\}$.

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο περιοδικό (συνεχές στο χώρο των συχνοτήτων) σήμα $\left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k) \right\}$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(f - k) \right\} = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \delta(f) e^{j2\pi f n} df \right\} = \{e^{j2\pi 0 n}\} = \{1\}. \quad (6.24)$$

Επομένως, προκύπτει το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$\{1\} \xleftrightarrow{F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k)\} \quad (6.25)$$

το οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 6.4. ◇

6.1.1 Φασματική πυκνότητα ενέργειας απεριοδικών σημάτων

Έστω το απεριοδικό σήμα $\{x[n]\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\}$. Η ενέργεια του $\{x[n]\}$ υπολογίζεται ως εξής.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] x^*[n] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*(f) e^{-j2\pi f n} df \right) = \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X^*(f) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \right) df = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στη σχέση Parseval για αperiοδικά σήματα διακριτού χρόνου

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df. \quad (6.27)$$

Το σήμα $\{|X(f)|^2\}$, αντίστοιχα με το σήμα $\{|X(F)|^2\}$ του προηγούμενου κεφαλαίου, αναπαριστά την κατανομή της ενέργειας του σήματος $\{x[n]\}$ ως συνάρτηση της συχνότητας f (η απόδειξη είναι ανάλογη με την αντίστοιχη απόδειξη για αperiοδικά σήματα συνεχούς χρόνου) και καλείται φασματική πυκνότητα ενέργειας του $\{x[n]\}$.

Παράδειγμα 6.4. Υπολογίστε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας του $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$, με $|a| < 1$.

Αφού $|a| < 1$, το $\{x[n]\}$ είναι απόλυτα αθροίσιμο, διότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a^n u[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n = \frac{1}{1-|a|} < \infty. \quad (6.28)$$

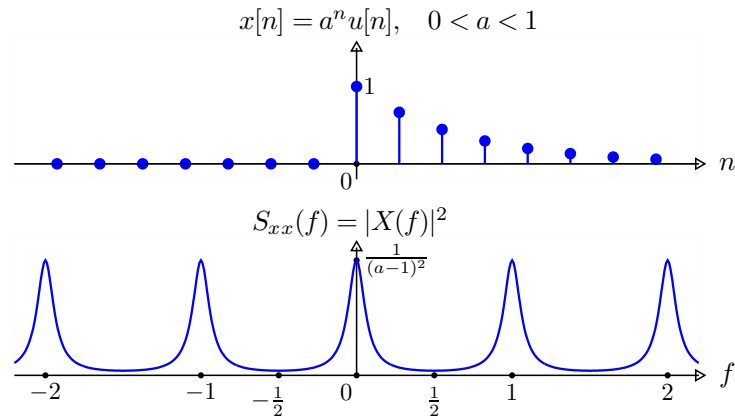
Άρα, ο μετασχηματισμός Fourier υπάρχει και υπολογίζεται ως εξής.

$$X(f) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j2\pi f})^n = \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}}. \quad (6.29)$$

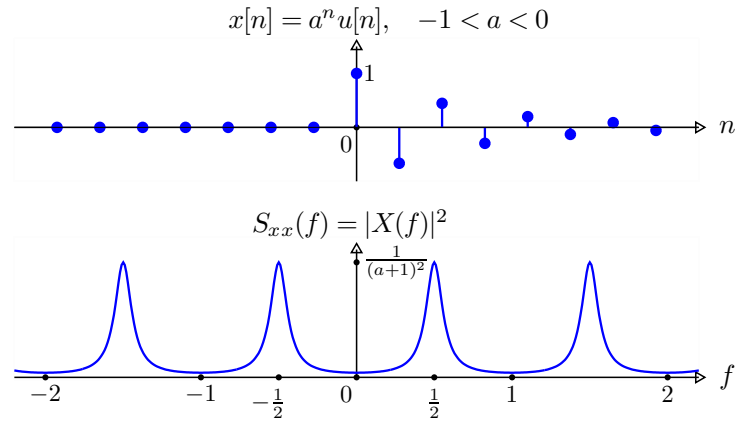
Η φασματική πυκνότητα ενέργειας είναι

$$S_{xx}(f) = |X(f)|^2 = X(f) X^*(f) = \frac{1}{(1 - a e^{-j2\pi f})(1 - a e^{j2\pi f})} = \frac{1}{1 - 2a \cos(2\pi f) + a^2}. \quad (6.30)$$

Το σήμα $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$ και η φασματική πυκνότητα ενέργειας $\{S_{xx}(f)\}$ αυτού σχεδιάζονται για $0 < a < 1$ στο Σχ. 6.5 και για $-1 < a < 0$ στο Σχ. 6.6. Παρατηρούμε ότι για $0 \ll a < 1$ η ενέργεια του σήματος $\{a^n u[n]\}$ οφείλεται κυρίως στις χαμηλές συχνότητες (δηλαδή, στις συχνότητες γύρω από το μηδέν) ενώ για $-1 < a \ll 0$ οφείλεται κυρίως στις υψηλές συχνότητες (δηλαδή, σε αυτές κοντά στα $\frac{1}{2}$ και $-\frac{1}{2}$). Αυτό είναι αναμενόμενο, διότι για $0 \ll a < 1$ το $\{a^n u[n]\}$ μεταβάλλεται στο χρόνο “αργά” ενώ, αντίθετα, για $-1 < a \ll 0$ το $\{a^n u[n]\}$ μεταβάλλεται στο χρόνο “γρήγορα.” \diamond



Σχ. 6.5. Το σήμα $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$ και η φασματική πυκνότητα ενέργειας $\{S_{xx}(f)\}$ αυτού για $0 < a < 1$.



Σχ. 6.6. Το σήμα $\{x[n]\} = \{a^n u[n]\}$ και η φασματική πυκνότητα ενέργειας $\{S_{xx}(f)\}$ αυτού για $-1 < a < 0$.

6.2 Θεώρημα δειγματοληψίας Nyquist

Για να επεξεργαστούμε ένα σήμα συνεχούς χρόνου $\{x_a(t)\}$ με τεχνικές ψηφιακής επεξεργασίας σήματος είναι απαραίτητο να το μετατρέψουμε σε ακολουθία. Αυτό επιτυγχάνεται, συνήθως, με περιοδική δειγματοληψία, η οποία περιγράφεται από τη σχέση

$$\{x[n]\} = \{x_a(nT_s)\}, \quad -\infty < n < \infty, \quad (6.31)$$

όπου T_s είναι η περίοδος δειγματοληψίας. Όπως αποδείχτηκε στη δειγματοληψία ημιτονοειδών σημάτων, για να μην έχουμε απώλεια πληροφορίας κατά τη δειγματοληψία θα πρέπει να επιλέξουμε κατάλληλα τη συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = \frac{1}{T_s}$.

Όπως έχουμε δείξει μέχρι τώρα, ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(F)\}$ ή $\{X(f)\}$ παρέχει μία μοναδική αναπαράσταση του σήματος $\{x_a(t)\}$ ή $\{x[n]\}$, αντίστοιχα. Έτσι, αν μπορούμε να ανακτήσουμε το φάσμα $\{X(F)\}$ του συνεχούς σήματος από το φάσμα $\{X(f)\}$ του διακριτού σήματος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι δεν υπάρχει απώλεια πληροφορίας κατά τη δειγματοληψία.

Έστω το αναλογικό σήμα $\{x_a(t)\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\{X_a(F)\}$. Άρα,

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt, \quad x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi Ft} dF. \quad (6.32)$$

Για το σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ έχουμε

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fn}, \quad x[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df. \quad (6.33)$$

Στόχος μας είναι η εύρεση της σχέσης μεταξύ των $X(f)$ και $X_a(F)$, όταν $x[n] = x_a(nT_s)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Για να βρούμε τη σχέση αυτή, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$nT_s = \frac{n}{F_s}. \quad (6.34)$$

Τότε,

$$\begin{aligned} x[n] = x_a(nT_s) &\iff x[n] = x_a\left(\frac{n}{F_s}\right) \iff \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(F) e^{j2\pi F \frac{n}{F_s}} dF \\ &\stackrel{f' \leftarrow \frac{F}{F_s}}{\iff} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df = F_s \int_{-\infty}^{\infty} X_a(f'F_s) e^{j2\pi f'n} df' \\ &\stackrel{f \leftarrow f'}{\iff} \frac{1}{F_s} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df = \int_{-\infty}^{\infty} X_a(fF_s) e^{j2\pi fn} df. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Τα ολοκληρώματα στην αρχή (πρώτη σειρά) της (6.35) είναι, απλά, οι εκφράσεις των $x[n]$ και $x_a\left(\frac{n}{F_s}\right)$ συναρτήσει των αντίστοιχων μετασχηματισμών Fourier. Ας θεωρήσουμε το $\int_{-\infty}^{\infty} X_a(fF_s) e^{j2\pi fn} df$ που εμφανίζεται στο τέλος της (6.35). Το διάστημα ολοκλήρωσης $(-\infty, \infty)$ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα άπειρο πλήθος υποδιαστημάτων, πλάτους 1 το καθένα.

Τότε,

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} X_a(fF_s) e^{j2\pi fn} df &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} X_a(fF_s) e^{j2\pi fn} df \\
 &\stackrel{f' \leftarrow f-k}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_a((f'+k)F_s) e^{j2\pi(f'+k)n} df' \\
 &\stackrel{k' \leftarrow -k}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k'=-\infty}^{\infty} X_a((f'-k')F_s) e^{-j2\pi k'n} \right) e^{j2\pi f'n} df' \\
 &\stackrel{\substack{k \leftarrow k' \\ f \leftarrow f'}}{=} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a((f-k)F_s) \right) e^{j2\pi fn} df
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $e^{-j2\pi k'n} = 1$. Συγκρίνοντας τις (6.35) και (6.36), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
 \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{F_s} X(f) e^{j2\pi fn} df \right\} &= \left\{ \int_{-1/2}^{1/2} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a((f-k)F_s) \right) e^{j2\pi fn} df \right\} \\
 &\iff \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{F_s} X(f) \right\} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a((f-k)F_s) \right\} \\
 &\iff \{X(f)\} = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_a((f-k)F_s)\}
 \end{aligned} \tag{6.37}$$

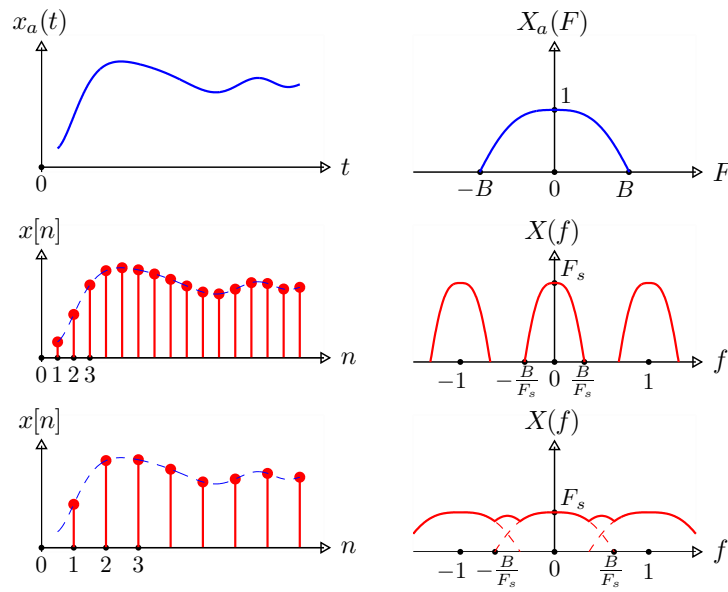
ή

$$\left\{ X \left(\frac{F}{F_s} \right) \right\} = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_a(F - kF_s)\} \tag{6.38}$$

θέτοντας $f = \frac{F}{F_s}$. Η σχέση (6.37) υποδεικνύει ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ του σήματος $\{x[n]\}$ που προκύπτει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος $\{x_a(t)\}$ με συχνότητα δειγματοληψίας F_s είναι το άθροισμα (κλιμακωμένων κατά F_s και) μετατοπισμένων εκδοχών του φάσματος του αναλογικού σήματος, $\{X_a(F)\}$, με βήμα μετατόπισης F_s .

Στο Σχ. 6.7, αναπαριστούμε τη σχέση των φασμάτων του αναλογικού και του αντίστοιχου διακριτού σήματος, για διάφορες συχνότητες δειγματοληψίας. Το αναλογικό σήμα $\{x_a(t)\}$ έχει φάσμα το $\{X_a(F)\}$. Έχουμε υποθέσει ότι το $\{x_a(t)\}$ είναι περιορισμένου εύρους φάσματος συχνοτήτων, δηλαδή

$$X_a(F) = 0, \quad \text{για } |F| > B. \tag{6.39}$$



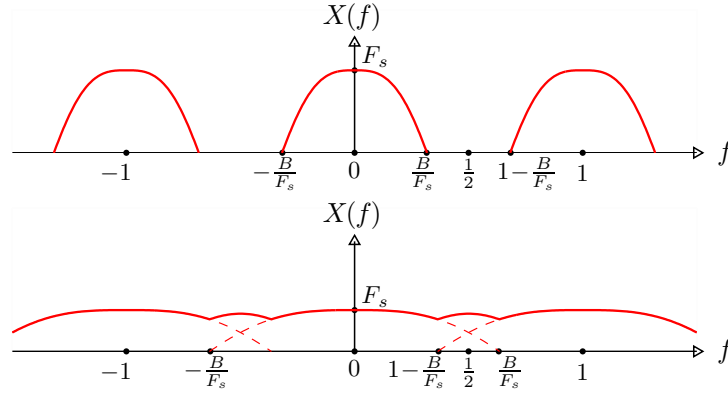
Σχ. 6.7. Το αναλογικό σήμα $\{x_a(t)\}$, το διακριτό σήμα $\{x[n]\}$ που προκύπτει από (γρήγορη ή αργή) δειγματοληψία του $\{x_a(t)\}$, και οι μετασχηματισμοί Fourier αυτών.

Το διακριτό σήμα $\{x[n]\}$ που προκύπτει από τη δειγματοληψία του αναλογικού σήματος $\{x_a(t)\}$ έχει φάσμα του οποίου η μορφή εξαρτάται από το ρυθμό δειγματοληψίας. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση της γρήγορης δειγματοληψίας μπορούμε να ανακτήσουμε το φάσμα του αναλογικού σήματος $\{X_a(F)\}$ από το φάσμα του διακριτού σήματος $\{X(f)\}$, διότι για $|f| \leq \frac{1}{2}$

$$X(f) = F_s X_a(f F_s). \quad (6.40)$$

Αντίθετα, στην περίπτωση που η συχνότητα δειγματοληψίας δεν είναι “αρκετά” υψηλή, δεν μπορούμε να ανακτήσουμε το φάσμα $\{X_a(F)\}$ του αναλογικού σήματος από το φάσμα $\{X(f)\}$ του διακριτού σήματος, διότι έχει προκύψει **επικάλυψη** (aliasing) φασμάτων με αποτέλεσμα τη μη-αντιστρεπτή αλλοίωση του αρχικού φάσματος, συνεπώς την απώλεια πληροφορίας. Είναι φανερό ότι στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να ανακτήσουμε το αναλογικό σήμα $\{x(t)\}$ από τα δείγματά του διότι δεν υπάρχει τρόπος να ανακτήσουμε το $\{X_a(F)\}$ από το $\{X(f)\}$ και, άρα, έχουμε απώλεια πληροφορίας κατά τη δειγματοληψία.

Το Σχ. 6.8 παρουσιάζει με περισσότερες λεπτομέρειες το φάσμα $\{X(f)\}$ του διακριτού σήματος $\{x[n]\}$ για τις περιπτώσεις της γρήγορης και της αργής δειγματοληψίας. Από το



Σχ. 6.8. Το φάσμα $\{X(f)\}$ του διακριτού σήματος $\{x[n]\}$ για διαφορετικές συχνότητες δειγματοληψίας.

σχήμα είναι προφανές ότι δεν υπάρχει επικάλυψη φασμάτων αν $\frac{B}{F_s} < 1 - \frac{B}{F_s}$, δηλαδή

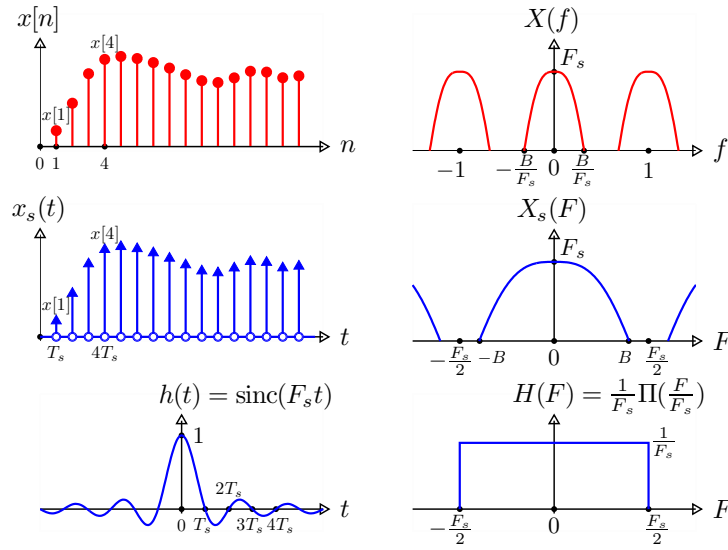
$$F_s > 2B. \quad (6.41)$$

Άρα, ένα σήμα συνεχούς χρόνου, πεπερασμένου εύρους συχνοτήτων, με μέγιστη συχνότητα B Hz μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του, αν ο ρυθμός δειγματοληψίας F_s είναι τέτοιος ώστε $F_s > 2B$ samples/sec.

Στην περίπτωση που η δειγματοληψία είναι αρκετά γρήγορη ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα 6.41, μπορούμε να ανακτήσουμε το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x_a(t)\}$ από το διακριτό σήμα $\{x[n]\}$ ως εξής. Αρχικά, κατασκευάζουμε το σήμα συνεχούς χρόνου

$$\{x_s(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\{\delta(t - nT_s)\}. \quad (6.42)$$

Το $\{x_s(t)\}$ αποτελείται από παλμούς οι οποίοι απέχουν χρονικά κατά T_s , με πλάτος παλμού τη χρονική nT_s , $x[n] = x_a(nT_s)$, όπως φαίνεται και στο Σχ. 6.9. Υποθέτοντας ότι έχουμε τη δυνατότητα να κατασκευάζουμε παλμικά σήματα, το γεγονός ότι γνωρίζουμε την ακολουθία $\{x[n]\}$ μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε το $\{x_s(t)\}$. Συνεπώς, το $\{x_s(t)\}$ μπορεί να θεωρηθεί



Σχ. 6.9. Διαδικασία ανάκτησης του σήματος συνεχούς χρόνου $\{x_a(t)\}$ από το σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{x_a(nT_s)\}$.

ως μία εναλλακτική έκφραση του $\{x[n]\}$. Το φάσμα του $\{x_s(t)\}$ είναι

$$\begin{aligned} \{X_s(F)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathcal{F}\{\delta(t - nT_s)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \{e^{-j2\pi F n T_s}\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi \frac{F}{F_s} n} \right\} \\ &= \left\{ X\left(\frac{F}{F_s}\right) \right\} = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{X_a(F - kF_s)\}. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι ανακτούμε το φάσμα του αναλογικού σήματος $\{X_a(F)\}$ (επομένως, το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x_a(t)\}$) αν περάσουμε το $\{x_s(t)\}$ από το κατάλληλο ιδανικό αναλογικό κατωπερατό φίλτρο με απόκριση συχνότητας

$$H(F) = \begin{cases} 1/F_s, & |F| < F_s/2 \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} = \frac{1}{F_s} \Pi\left(\frac{F}{F_s}\right), \quad (6.44)$$

άρα κρουστική απόκριση

$$\{h(t)\} = \mathcal{F}^{-1}\{H(F)\} = \{\text{sinc}(F_s t)\} = \left\{ \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right) \right\}. \quad (6.45)$$

Η έξοδος του φίλτρου με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ και είσοδο $\{x_s(t)\}$ υπολογίζεται ως

εξής.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_s(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)\delta(\tau-nT_s) \right) h(t-\tau)d\tau \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-nT_s)h(t-\tau)d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s)h(t-nT_s). \end{aligned} \quad (6.46)$$

Προφανώς, ο μετασχηματισμός Fourier της εξόδου θα είναι $\{X_a(F)\}$ (διότι οι μετατοπίσεις του έχουν “κοπεί” από το φίλτρο) και, συνεπώς, συμπεραίνουμε ότι το αναλογικό σήμα $\{x_a(t)\}$ μπορεί να ανακατασκευαστεί από τα δείγματά του $\{x_a(nT_s)\}$, ως εξής.

$$\boxed{x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_a(nT_s) \operatorname{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right).} \quad (6.47)$$

Η σχέση αυτή καλείται τύπος **παρεμβολής του Shannon** (Shannon interpolation). Άρα, αν $F_s > 2B$, τότε δεν έχουμε απώλεια πληροφορίας κατά τη δειγματοληψία.

6.2.1 Κατηγοριοποίηση σημάτων στο πεδίο συχνοτήτων

Μπορούμε να κατηγοριοποιήσουμε σήματα διακριτού χρόνου στο πεδίο συχνοτήτων χρησιμοποιώντας κάποιους γενικούς όρους.

1. Αν ένα σήμα έχει φάσμα ισχύος ή ενέργειας συγκεντρωμένο γύρω από τη μηδενική συχνότητα, τότε καλείται σήμα χαμηλών συχνοτήτων. Στο πεδίο του χρόνου, ένα σήμα χαμηλών συχνοτήτων μεταβάλλεται βραδέως.
2. Αν το φάσμα είναι συγκεντρωμένο στις υψηλές συχνότητες, δηλαδή κοντά στις περιοχές $f = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$, τότε το σήμα καλείται υψηλών συχνοτήτων. Στο πεδίο του χρόνου, ένα σήμα υψηλών συχνοτήτων μεταβάλλεται ταχέως.
3. Αν το φάσμα είναι συγκεντρωμένο σε μία ζώνη ανάμεσα στις χαμηλές και υψηλές συχνότητες, τότε το σήμα καλείται μεσαίων συχνοτήτων. Σε αυτή την περίπτωση, ο όρος **στενής ζώνης** (narrow-band) χαρακτηρίζει ένα σήμα αν το εύρος φάσματος $f_2 - f_1$ (θεωρούμε $f_2 > f_1$) είναι πολύ μικρότερο από τη μεσαία συχνότητα $(f_1 + f_2)/2$. Διαφορετικά, το σήμα καλείται **ευρείας ζώνης** (wide-band).

6.3 Ιδιότητες μετασχηματισμού Fourier σημάτων διακριτού χρόνου

Ένα ζεύγος μετασχηματισμού Fourier συμβολίζεται ως $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$. Αυτό σημαίνει

$$\begin{aligned} \{X(f)\} &= \mathcal{F}\{x[n]\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi fn} \right\}, \\ \{x[n]\} &= \mathcal{F}^{-1}\{X(f)\} = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi fn} df \right\}. \end{aligned} \quad (6.48)$$

6.3.1 Ιδιότητες συμμετρίας

1. Αν $\{x[n]\}$ πραγματικό σήμα, τότε $X(-f) = X^*(f)$, $|X(f)| = |X(-f)|$ και $\angle X(f) = -\angle X(-f)$, όπου $X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\angle X(f)}$ (δείτε Άσκηση 6.7).
2. Αν $\{x[n]\}$ πραγματικό άρτιο σήμα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση του f (δείτε Άσκηση 6.8).
3. Αν $\{x[n]\}$ πραγματικό περιττό σήμα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ είναι φανταστική και περιττή συνάρτηση του f (δείτε Άσκηση 6.9).

6.3.2 Γραμμικότητα

Αν $\{x_1[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_1(f)\}$ και $\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_2(f)\}$, τότε

$$a_1\{x_1[n]\} + a_2\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} a_1\{X_1(f)\} + a_2\{X_2(f)\}. \quad (6.49)$$

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier (δείτε Άσκηση 6.10).

Σύμφωνα με την ιδιότητα της γραμμικότητας, το φάσμα κάθε γραμμικού συνδυασμού σημάτων ισούται με το γραμμικό συνδυασμό των αντίστοιχων φασμάτων.

Παράδειγμα 6.5. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{u[n]\}$ με

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να θεωρήσουμε το $\{u[n]\}$ σαν το όριο του $\{a^n u[n]\}$ για $a \rightarrow 1$, δηλαδή,

$$u[n] = \lim_{a \rightarrow 1} (a^n u[n]), \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (6.50)$$

Για $f \notin \mathbb{Z}$, υποθέτοντας ότι μπορούμε να εναλλάξουμε τη σειρά του ορίου και του αθροίσματος, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \{U(f)\} &= \mathcal{F}\{u[n]\} = \mathcal{F}\left\{\lim_{a \rightarrow 1} (a^n u[n])\right\} = \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 1} (a^n u[n]) e^{-j2\pi f n}\right\} \\ &= \lim_{a \rightarrow 1} \left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j2\pi f n}\right\} = \lim_{a \rightarrow 1} \mathcal{F}\{a^n u[n]\} = \lim_{a \rightarrow 1} \left\{\frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{1 - e^{-j2\pi f}}\right\} = \left\{\frac{e^{j\pi f}}{e^{j\pi f} - e^{-j\pi f}}\right\} = \left\{\frac{e^{j\pi f}}{2j \sin(\pi f)}\right\}. \end{aligned} \quad (6.51)$$

Για την περίπτωση $f = 0$, υπολογίζουμε την τιμή $U(0)$ ως εξής. Παρατηρούμε ότι $\{u[n]\} + \{u[-n]\} = \{\delta[n]\} + \{1\}$, συνεπώς (λόγω της ιδιότητας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier)

$$\mathcal{F}\{u[n]\} + \mathcal{F}\{u[-n]\} = \mathcal{F}\{\delta[n]\} + \mathcal{F}\{1\}. \quad (6.52)$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι $\mathcal{F}\{x[-n]\} = \{X(-f)\}$ για οποιοδήποτε σήμα $\{x[n]\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\mathcal{F}\{x[n]\} = \{X(f)\}$. Επίσης, στα Παραδείγματα 6.2 και 6.3 δείξαμε ότι $\mathcal{F}\{\delta[n]\} = \{1\}$ και $\mathcal{F}\{1\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k)\}$, αντίστοιχα. Επομένως, λαμβάνουμε

$$\{U(f)\} + \{U(-f)\} = \{1\} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k)\}. \quad (6.53)$$

Για $f = 0$, λαμβάνουμε $U(0) + U(0) = 1 + \delta(0)$, δηλαδή

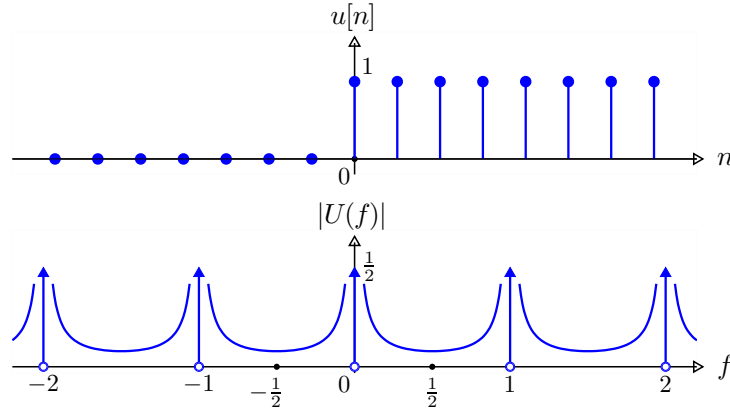
$$U(0) = \frac{1}{2}\delta(0). \quad (6.54)$$

Τέλος, αν $f \in \mathbb{Z}$, τότε γνωρίζουμε ότι $U(f) = U(0)$, επομένως $U(f) = \frac{1}{2}\delta(0)$. Άρα,

$$U(f) = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & f \in \mathbb{Z}, \\ \frac{e^{j\pi f}}{2j \sin(\pi f)}, & f \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (6.55)$$

Επομένως, αποδείξαμε το ζεύγος μετασχηματισμού Fourier

$$\{u[n]\} = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \xleftrightarrow{F} \{U(f)\} = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & f \in \mathbb{Z} \\ \frac{e^{j\pi f}}{2j \sin(\pi f)}, & f \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (6.56)$$



Σχ. 6.10. Το σήμα $\{u[n]\}$ και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier αυτού.

Το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier είναι

$$|U(f)| = \begin{cases} \frac{1}{2}\delta(0), & f \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2|\sin(\pi f)|}, & f \notin \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (6.57)$$

Στο Σχ. 6.10 σχεδιάζουμε το σήμα $\{u[n]\}$ και το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier αυτού.

◇

6.3.3 Χρονική ολίσθηση

Αν $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$, τότε

$$\{x[n - k]\} \xleftrightarrow{F} \{e^{-j2\pi f k} X(f)\}. \quad (6.58)$$

Απόδειξη: Ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x[n - k]\}$ είναι

$$\mathcal{F}\{x[n - k]\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n - k] e^{-j2\pi f n} \right\}. \quad (6.59)$$

Θέτοντας $m \leftarrow n - k$, λαμβάνουμε

$$\mathcal{F}\{x[n - k]\} = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{-j2\pi f(m+k)} \right\} = \{e^{-j2\pi f k} X(f)\}. \quad (6.60)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, ολίσθηση (μετατόπιση) ενός σήματος στο χρόνο κατά k ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό του φάσματός του με το μιγαδικό αρμονικό σήμα $\{e^{-j2\pi f k}\}$.

6.3.4 Ιδιότητα συνέλιξης

Αν $\{x_1[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_1(f)\}$ και $\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_2(f)\}$, τότε

$$\{x[n]\} = \{x_1[n]\} * \{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\} = \{X_1(f)\} \{X_2(f)\}. \quad (6.61)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) e^{-j2\pi f n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n-k] e^{-j2\pi f n} \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] X_2(f) e^{-j2\pi f k} \\ &= X_2(f) \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k] e^{-j2\pi f k} = X_1(f) X_2(f). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι πολύ σημαντική και δηλώνει ότι συνέλιξη στο πεδίο του χρόνου ισοδυναμεί με πολλαπλασιασμό στο πεδίο των συχνοτήτων. Ο ορισμός των ψηφιακών φίλτρων επιλογής συχνοτήτων αποτελεί άμεση συνέπειά της.

6.3.5 Μετατόπιση συχνότητας

Αν $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$, τότε

$$\{e^{j2\pi f_0 n} x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f - f_0)\}. \quad (6.63)$$

Απόδειξη:

$$\mathcal{F}\{e^{j2\pi f_0 n} x[n]\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{j2\pi f_0 n} x[n]) e^{-j2\pi f n} \right\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi (f-f_0) n} \right\} = \{X(f-f_0)\}. \quad (6.64)$$

Άρα, πολλαπλασιασμός του $\{x[n]\}$ με το $\{e^{j2\pi f_0 n}\}$ έχει ως αποτέλεσμα τη μετατόπιση του φάσματος $\{X(f)\}$ του $\{x[n]\}$ κατά f_0 .

Παράδειγμα 6.6. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x[n]\} = \{\cos(2\pi f_0 n)\}$.

Στο Παράδειγμα 6.3 δείξαμε ότι

$$\{1\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k)\}. \quad (6.65)$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\cos(2\pi f_0 n) = \frac{1}{2} (e^{j2\pi f_0 n} + e^{-j2\pi f_0 n}), \quad (6.66)$$

την ιδιότητα μετατόπισης συχνότητας, και την ιδιότητα γραμμικότητας, λαμβάνουμε

$$\{\cos(2\pi f_0 n) \cdot 1\} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k - f_0)\} + \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{\delta(f - k + f_0)\}. \quad (6.67)$$

Συνεπώς, λόγω της περιοδικότητας του φάσματος για τα σήματα διακριτού χρόνου, ο μετασχηματισμός Fourier ενός συνημιτόνου συχνότητας f_0 αποτελείται από παλμούς στις θέσεις $\pm f_0 + k$, $k \in \mathbb{Z}$. \diamond

6.3.6 Θεώρημα διαμόρφωσης

Αν $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$, τότε

$$\{x[n] \cos(2\pi f_0 n)\} \xleftrightarrow{F} \frac{1}{2} \{X(f - f_0)\} + \frac{1}{2} \{X(f + f_0)\}. \quad (6.68)$$

Απόδειξη: Εύκολη.

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, πολλαπλασιασμός ενός σήματος με συνημίτονο συχνότητας f_0 ισοδυναμεί με διαμόρφωση του σήματος με φορέα f_0 .

6.3.7 Θεώρημα Parseval

Αν $\{x_1[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_1(f)\}$ και $\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_2(f)\}$, τότε

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(f) X_2^*(f) df. \quad (6.69)$$

Απόδειξη: Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας εκφράζεται ως

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(f) X_2^*(f) df &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] e^{-j2\pi f n} \right) X_2^*(f) df \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_2^*(f) e^{-j2\pi f n} df \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2^*[n]. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Αν $\{x_2[n]\} = \{x_1[n]\} = \{x[n]\}$, τότε λαμβάνουμε τη σχέση Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |X(f)|^2 df. \quad (6.71)$$

6.3.8 Πολλαπλασιασμός στο πεδίο του χρόνου

Αν $\{x_1[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_1(f)\}$ και $\{x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X_2(f)\}$, τότε

$$\{x[n]\} = \{x_1[n] x_2[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\} = \left\{ \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(\lambda) X_2(f - \lambda) d\lambda \right\}. \quad (6.72)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1[n] x_2[n] e^{-j2\pi f n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(\lambda) e^{j2\pi \lambda n} d\lambda \right) x_2[n] e^{-j2\pi f n} \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(\lambda) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n] e^{-j2\pi(f-\lambda)n} \right) d\lambda = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X_1(\lambda) X_2(f - \lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (6.73)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι η δυϊκή της ιδιότητας της συνέλιξης. Παρατηρούμε ότι συνέλιξη στο ένα πεδίο αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό στο άλλο πεδίο.

6.3.9 Διαφόριση στο πεδίο συχνοτήτων

Αν $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$, τότε

$$\{nx[n]\} \xleftrightarrow{F} \frac{j}{2\pi} \left\{ \frac{dX(f)}{df} \right\}. \quad (6.74)$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{dX(f)}{df} \right\} &= \left\{ \frac{d}{df} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi f n} \right) \right\} = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \frac{d}{df} (e^{-j2\pi f n}) \right\} \\ &= -j2\pi \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx[n] e^{-j2\pi f n} \right\} = -j2\pi \mathcal{F}\{nx[n]\}. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Η ιδιότητα αποδεικνύεται πολλαπλασιάζοντας με j και διαιρώντας με 2π τα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης.

6.4 ΓΧΑ συστήματα στο πεδίο συχνοτήτων

Ο μετασχηματισμός Fourier $\{H(f)\}$ της κρουστικής απόκρισης $\{h[n]\}$ ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου ο οποίος έχει τιμή

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j2\pi f n} \quad (6.76)$$

καλείται **απόκριση συχνότητας** (frequency response) του ΓΧΑ συστήματος και αποτελεί μία πλήρη περιγραφή του συστήματος στο πεδίο συχνοτήτων.

Θυμίζουμε ότι γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές της μορφής

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad (6.77)$$

περιγράφουν ΓΧΑ συστήματα διακριτού χρόνου με είσοδο $\{x[n]\} \xleftrightarrow{F} \{X(f)\}$ και έξοδο $\{y[n]\} \xleftrightarrow{F} \{Y(f)\}$. Παίρνοντας μετασχηματισμό Fourier και στα δύο μέλη της (6.77) και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες χρονικής ολίσθησης και γραμμικότητας, λαμβάνουμε

$$\left(1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi f k}\right) Y(f) = \left(\sum_{k=0}^M b_k e^{-j2\pi f k}\right) X(f) \quad (6.78)$$

η οποία δίνει

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k e^{-j2\pi f k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k e^{-j2\pi f k}}. \quad (6.79)$$

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται ως εξής.

$$\{h[n]\} = \mathcal{F}^{-1} \{H(f)\}. \quad (6.80)$$

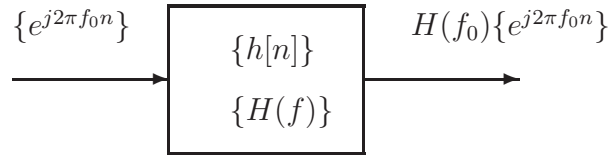
Ο υπολογισμός του $\mathcal{F}^{-1} \{H(f)\}$ γίνεται θεωρώντας το $\{H(f)\}$ ως ρητή συνάρτηση του $z = e^{j2\pi f}$. Αρχικά γίνεται ανάλυση του $H(f)$ σε απλά κλάσματα και κατόπιν χρήση πινάκων μετασχηματισμού Fourier. Ο λεπτομερής υπολογισμός του $\mathcal{F}^{-1} \{H(f)\}$ δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια αυτού του μαθήματος.

6.4.1 Ιδιοσυναρτήσεις ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου

Αν θέσουμε ως είσοδο στο ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ το σήμα $\{e^{j2\pi f_0 n}\}$ λαμβάνουμε ως έξοδο το σήμα $\{y[n]\} = \{h[n]\} * \{e^{j2\pi f_0 n}\}$, δηλαδή

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j2\pi f_0 [n-k]} = e^{j2\pi f_0 n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j2\pi f_0 k} = e^{j2\pi f_0 n} \cdot H(f_0). \quad (6.81)$$

Άρα, στην έξοδο λαμβάνουμε το ίδιο ημιτονοειδές σήμα, πολλαπλασιασμένο με $H(f_0)$. Συνεπώς,



Σχ. 6.11. Απόκριση ενός ΓΧΑ συστήματος σε είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα.

τα μιγαδικά εκθετικά σήματα $\{e^{j2\pi f_0 n}\}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων διακριτού χρόνου, διότι η έξοδος ΓΧΑ συστημάτων με είσοδο ένα μιγαδικό εκθετικό σήμα είναι ένα σήμα της ίδιας μορφής. Η μόνη διαφορά είναι ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας $H(f_0)$, ο οποίος επιβάλλει κλιμάκωση πλάτους κατά $|H(f_0)|$ και διαφορά φάσης κατά $\angle H(f_0)$.

Γενικότερα, από το θεώρημα της συνέλιξης, λαμβάνουμε ότι αν $\{x[n]\}$ είναι η είσοδος ενός ΓΧΑ συστήματος διακριτού χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$, τότε

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\} \xleftrightarrow{F} \{Y(f)\} = \{X(f)\}\{H(f)\}. \quad (6.82)$$

Άρα,

$$|Y(f)| = |X(f)| \cdot |H(f)|, \quad \angle Y(f) = \angle X(f) + \angle H(f). \quad (6.83)$$

Το σύστημα με κρουστική απόκριση $\{h[n]\}$ ενισχύει στην έξοδό του τις συχνότητες f της εισόδου $\{x[n]\}$ για τα f για τα οποία το $|H(f)|$ είναι “μεγάλο” και, αντίστοιχα, υποβαθμίζει τις συχνότητες f της εισόδου $\{x[n]\}$ για τα f για τα οποία το $|H(f)|$ είναι “μικρό.” Η έξοδος ενός ΓΧΑ συστήματος δεν περιέχει συχνότητες που δεν περιέχονται στο σήμα εισόδου.

6.5 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 6.1. Έστω σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ για το οποίο ισχύει

$$x[n] = \begin{cases} 1, & -M \leq n \leq M \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (6.84)$$

Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\}$ του $\{x[n]\}$.

Άσκηση 6.2. Έστω σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\}$ το οποίο έχει μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\}$ για τον οποίο, στο διάστημα $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, ισχύει

$$X(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq B \\ 0, & B < |f| \leq \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (6.85)$$

όπου $0 < B < \frac{1}{2}$. Να βρείτε μια έκφραση κλειστής μορφής για το σήμα $\{x[n]\}$.

Άσκηση 6.3. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\}$ του σήματος διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{a^{|n|}\}$, $|a| < 1$.

Άσκηση 6.4. Το σήμα διακριτού χρόνου $\{x[n]\} = \{a^{|n|}\}$, $|a| < 1$, έχει μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\} = \left\{ \frac{1-a^2}{1+a^2-2a \cos(2\pi f)} \right\}$. Να βρείτε με τη βοήθεια ιδιοτήτων του M.F. το μετασχηματισμό Fourier του σήματος $\{y[n]\} = \{x[1-n] - x[-1-n]\}$.

Άσκηση 6.5. Να βρείτε το μετασχηματισμό Fourier $\{X(f)\}$ του σήματος

$$\{x[n]\} = \{A \operatorname{sinc}(n)\} * \left\{ B \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right) \right\}. \quad (6.86)$$

6.6 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 6.6. Δείξτε ότι

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{j2\pi f(m-n)} df = \begin{cases} 1, & \text{αν } n = m, \\ 0, & \text{αν } n \neq m. \end{cases} \quad (6.87)$$

Άσκηση 6.7. Δείξτε ότι αν $\{x[n]\}$ πραγματικό σήμα, τότε $X(-f) = X^*(f)$, $|X(f)| = |X(-f)|$ και $\angle X(f) = -\angle X(-f)$, όπου $X(f) = |X(f)| \cdot e^{j\angle X(f)}$.

Άσκηση 6.8. Δείξτε ότι αν $\{x[n]\}$ πραγματικό άρτιο σήμα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ είναι πραγματική και άρτια συνάρτηση του f .

Άσκηση 6.9. Δείξτε ότι αν $\{x[n]\}$ πραγματικό περιττό σήμα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier $\{X(f)\}$ είναι φανταστική και περιττή συνάρτηση του f .

Άσκηση 6.10. Αποδείξτε την ιδιότητα της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Fourier διακριτού χρόνου.

Άσκηση 6.11. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2008] Έστω $\{X(f)\}$ ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{x[n]\}$, $n \in \mathbb{Z}$. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier του σήματος $\{y[n]\} = \{x[1-n]\} - \{x[-1-n]\}$. (α) $-2jX(-f)\sin(2\pi f)$, (β) $2jX(-f)\sin(2\pi f)$, (γ) $-2jX(f)\sin(2\pi f)$, (δ) $2jX(f)\sin(2\pi f)$.

Άσκηση 6.12. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2006] Έστω ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με απόκριση συχνοτήτων μη μηδενική στο διάστημα $[-B, B]$, με $B > 0$, και ένα σήμα εισόδου $\{x(t)\}$ με μη μηδενικό μετασχηματισμό Fourier στο διάστημα συχνοτήτων $[-B_1, B_1]$, με $B_1 > B$. Ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας του $\{x(t)\}$ πριν και μετά την είσοδό του στο εν λόγω σύστημα και γιατί; Σχολιάστε την απάντησή σας.

Άσκηση 6.13. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Η έξοδος $\{y[n]\}$ ενός γραμμικού χρονικά αμετάβλητου συστήματος διακριτού χρόνου με είσοδο $\{x[n]\}$ έχει τιμή

$$y[n] = 0.1x[n+1] + 0.8x[n] + 0.1x[n-1] \quad (6.88)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier της κρουστικής απόκρισης του συστήματος.

Άσκηση 6.14. Δημιουργήστε τα σήματα $\{x[n]\} = \{\cos(2\pi fn)\}$, $n = 0, \dots, N$, για $N = 50, 300$, και $f = 0.05, 0.2, 0.45$. Υπολογίστε και σχεδιάστε την πυκνότητα του ενεργειακού φάσματος $\{|X(f)|^2\}$ σε 1024 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$. Τι παρατηρείτε; Υπολογίστε τα φάσματα γραμμικών συνδυασμών των παραπάνω ημιτονοειδών σημάτων. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 6.15. Δημιουργήστε τα πρώτα 100 μη μηδενικά δείγματα του σήματος $\{a^n u[n]\}$, για $a = 0.5, -0.5, 0.9$, και -0.9 . Υπολογίστε και σχεδιάστε τις αντίστοιχες φασματικές πυκνότητες ενέργειας $\{S_{xx}(f)\}$, για $f = -\frac{1}{2} : \frac{1}{1000} : \frac{1}{2}$. Εξηγήστε τι παρατηρείτε. Πιο συγκεκριμένα, ποια η σχέση μεταξύ του a και του $\{S_{xx}(f)\}$;

Άσκηση 6.16. Να δημιουργήσετε τα σήματα $\{x[n]\}$ με

$$x[n] = \begin{cases} \cos(2\pi fn), & n = 0, \dots, N-1, \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases} \quad (6.89)$$

(ενδεικτικά, $N = 50, 300$ και $f = 0.05, 0.2, 0.45$). Να υπολογίσετε και να σχεδιάσετε το μέτρο του μετασχηματισμού Fourier $\{|X(f)|\}$ σε 1024 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$ (ο υπολογισμός να **μην** γίνει με χρήση της εντολής `fft`, αλλά με τον υπολογισμό των αντίστοιχων αθροισμάτων²). Τι παρατηρείτε; Να υπολογίσετε τα φάσματα γραμμικών συνδυασμών των παραπάνω ημιτονοειδών σημάτων. Τι παρατηρείτε;

Άσκηση 6.17. Χρησιμοποιώντας τα δείγματα a^n , $n = 0, \dots, N-1$ (ενδεικτικά, $a = 0.5, -0.5, 0.9, -0.9$ και $N = 100, 1000$), να προσεγγίσετε (και πάλι με τον υπολογισμό των αθροισμάτων, όπως στην Άσκηση 6.16) και να σχεδιάσετε τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της ακολουθίας $\{a^n u[n]\}$ σε 1024 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$.

1. Να σχεδιάσετε την προσέγγιση και την αντίστοιχη αναλυτική έκφραση σε κοινό σχήμα και να σχολιάσετε την προσέγγιση.
2. Πώς συμπεριφέρεται η φασματική πυκνότητα ενέργειας για $0 \ll a < 1$ και $-1 < a \ll 0$ (π.χ., για $a = 0.99, -0.99$ και $N = 1000$);

Άσκηση 6.18. Δίνεται το σήμα $\{m(t)\}$ με τύπο

$$m(t) = 3,2 \cdot \text{sinc}^2(4t) - 0,8 \cdot \text{sinc}(2t) + 1,5 \cdot \cos(8\pi t). \quad (6.91)$$

1. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του $\{m(t)\}$ ως προς t στο πλέγμα $t = [-1 : 0,002 : 1]$. Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -3 4])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.

²Για να ελέγξετε την ορθότητα των υπολογισμών σας, μπορείτε να συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με αυτά της εντολής

$$X = \text{fftshift}(\text{fft}(x, 1024)); \quad (6.90)$$

Η μεταβλητή X περιέχει τις τιμές του μετασχηματισμού Fourier $\{X(f)\}$ σε 1024 ισαπέχοντα σημεία στο διάστημα $-\frac{1}{2} \leq f < \frac{1}{2}$.

2. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{M(F)\}$ του $\{m(t)\}$. Αν πρόκειται να λάβουμε περιοδικά δείγματα του σήματος $\{m(t)\}$, ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (συχνότητα Nyquist) F_N η οποία εγγυάται την πλήρη ανάκτηση του αρχικού σήματος;
3. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τη συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = F_N$ (που υπολογίσατε παραπάνω) με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{F_s}$ και λαμβάνουμε τα δείγματα $x(n) = m_1(nT_s)$ όπου $n = -N, -N+1, \dots, N$ με $N = \lceil 40F_s \rceil$. Δημιουργήστε στο MATLAB το διάνυσμα x που περιέχει τα αντίστοιχα δείγματα που λαμβάνουμε. Ακολουθώντας, ανακτήστε το αρχικό σήμα χρησιμοποιώντας τη σχέση παρεμβολής του Nyquist $\hat{m}(t) = \sum_{n=-N}^N x_1(n) \text{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$ για κάθε μία από τις χρονικές στιγμές του πλέγματος $t = [-1 : 0,002 : 1]$, δημιουργώντας έτσι το διάνυσμα \hat{m} . Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m} ως προς t στο πλέγμα $t = [-1 : 0,002 : 1]$. Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -3 4])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
4. Επαναλάβετε το προηγούμενο υποερώτημα για τις συχνότητες δειγματοληψίας $F_s = 2F_N$, $F_s = \frac{3}{4}F_N$, και $F_s = \frac{1}{4}F_N$.
5. Βάσει των παραπάνω, ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας για δειγματοληψία με ρυθμό ταχύτερο ή βραδύτερο του ρυθμού δειγματοληψίας Nyquist; Για ποιες περιπτώσεις από τις παραπάνω το αρχικό σήμα ανακτάται πλήρως;

Άσκηση 6.19. Δίνεται το σήμα $\{m(t)\}$ με τύπο

$$m(t) = 20 \cdot \text{sinc}\left(-\frac{1}{2} + 10t\right) + 20 \cdot \text{sinc}\left(\frac{1}{2} + 10t\right) + 32 \cdot \text{sinc}(4t) + 2 \cdot \sin(18(t-1)). \quad (6.92)$$

1. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του $\{m(t)\}$ ως προς t στο πλέγμα $t = [-3 : 0,002 : 3]$. Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -20 60])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
2. Υπολογίστε θεωρητικά το μετασχηματισμό Fourier $\{M(F)\}$ του $\{m(t)\}$. Αν πρόκειται να λάβουμε περιοδικά δείγματα του σήματος $\{m(t)\}$, ποια είναι η ελάχιστη συχνότητα δειγματοληψίας (συχνότητα Nyquist) F_N η οποία εγγυάται την πλήρη ανάκτηση του αρχικού σήματος;

3. Έστω ότι χρησιμοποιούμε τη συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = F_N$ (που υπολογίσατε παραπάνω) με περίοδο δειγματοληψίας $T_s = \frac{1}{F_s}$ και λαμβάνουμε τα δείγματα $x[n] = m(nT_s)$ όπου $n = -N, -N + 1, \dots, N$ με $N = \lceil 40F_s \rceil$. Δημιουργήστε στο MATLAB το διάνυσμα x που περιέχει τα αντίστοιχα δείγματα που λαμβάνουμε. Ακολουθώντας, ανακτήστε το αρχικό σήμα χρησιμοποιώντας τη σχέση παρεμβολής του Nyquist $\hat{m}(t) = \sum_{n=-N}^N x[n] \text{sinc}\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right)$ για κάθε μία από τις χρονικές στιγμές του πλέγματος $t = [-3 : 0,002 : 3]$, δημιουργώντας έτσι το διάνυσμα \hat{m} . Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m} ως προς t στο πλέγμα $t = [-3 : 0,002 : 3]$. Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -20 60])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
4. Επαναλάβετε το προηγούμενο υποερώτημα για τις συχνότητες δειγματοληψίας $F_s = 2F_N$, $F_s = \frac{1}{2}F_N$, και $F_s = \frac{1}{4}F_N$.
5. Βάσει των παραπάνω, ποιες είναι οι παρατηρήσεις σας για δειγματοληψία με ρυθμό ίσο, ταχύτερο, ή βραδύτερο του ρυθμού δειγματοληψίας Nyquist; Για ποιες περιπτώσεις από τις παραπάνω το αρχικό σήμα ανακτάται πλήρως;

Άσκηση 6.20. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Το περιοδικό σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ δίνεται από τον τύπο

$$x(t) = e^{-\frac{t-mT}{T}}, \quad mT \leq t < mT + T, \quad (6.93)$$

για κάθε $m \in \mathbb{Z}$.

1. Σχεδιάστε τη γραφική του $\{x(t)\}$.
2. Υπολογίστε τους συντελεστές c_k , $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, της σειράς Fourier του $\{x(t)\}$ και τα τετράγωνα των μέτρων αυτών. Στη συνέχεια, σχεδιάστε τη γραφική της φασματικής πυκνότητας ισχύος $\{|c_k|^2\}$.
3. Θέλουμε να δειγματοληψήσουμε το σήμα $\{x(t)\}$ με περίοδο δειγματοληψίας T_s .
 - (α') Βρείτε το σύνολο των τιμών στο οποίο πρέπει να ανήκει η περίοδος T_s έτσι ώστε από τα δείγματα που λάβουμε να μπορούμε να ανακτήσουμε το αρχικό σήμα $\{x(t)\}$ χωρίς απώλειες.

(β') Επαναλάβετε το υποερώτημα 3α' θεωρώντας ότι το συχνοτικό περιεχόμενο του $\{x(t)\}$ μπορεί να αγνοηθεί για τους συντελεστές c_l , $l \in \mathbb{Z}$, για τους οποίους ο λόγος της αντίστοιχης τιμής $|c_l|^2$ προς τη μέγιστη τιμή $\max_k \{|c_k|^2\}$ είναι μικρότερος του -30dB . Δηλαδή, θεωρήστε ότι $c_l \approx 0$, εάν

$$10 \log_{10} \frac{|c_l|^2}{\max_k \{|c_k|^2\}} < -30. \quad (6.94)$$

Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $\sqrt{999} \approx 10\pi + \frac{1}{5}$.

Άσκηση 6.21. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Συνελίσσουμε τα σήματα συνεχούς χρόνου $\{x_1(t)\}$ και $\{x_2(t)\}$ και προκύπτει το σήμα $\{x(t)\} = \{x_1(t)\} * \{x_2(t)\}$. Δειγματοληπτούμε το τελευταίο με συχνότητα δειγματοληψίας F_s και προκύπτει το σήμα διακριτού χρόνου $\{y[n]\} = \{x(n/F_s)\}$. Αν $X_1(F) = 0$ όταν $|F| \geq F_1$ και $X_2(F) = 0$ όταν $|F| \geq F_2$, ποια είναι η ελάχιστη τιμή του F_s για την οποία το σήμα $\{x(t)\}$ μπορεί να ανακτηθεί από το $\{y[n]\}$ χωρίς αλλοίωση;

Κεφάλαιο 7

Διαμόρφωση

7.1 Μέσο μετάδοσης και διαμόρφωση

Σε ένα σύστημα επικοινωνίας, **κανάλι επικοινωνίας** ή **μέσο μετάδοσης** ονομάζεται ο φυσικός δρόμος μεταξύ του πομπού και του δέκτη από τον οποίο περνάει το σήμα που εκπέμπεται από τον πομπό μέχρι να το λάβει ο δέκτης. Τα κανάλια επικοινωνίας διακρίνονται σε ενσύρματα (χάλκινα καλώδια, ομοαξονικά καλώδια), ασύρματα (ραδιοεπικοινωνίες, μικροκυματικές επίγειες και δορυφορικές ζεύξεις), και οπτικές ίνες. Τα κύρια χαρακτηριστικά ενός καναλιού επικοινωνίας είναι τα εξής.

1. Το *εύρος ζώνης συχνοτήτων* (*bandwidth - BW*) προσδιορίζει το φάσμα συχνοτήτων που μπορούν να διέλθουν ανεμπόδια από το μέσο μετάδοσης. Για παράδειγμα, το χάλκινο καλώδιο έχει BW που εξαρτάται απόλυτα από τη διάμετρο και το μήκος του σύρματος¹ και κυμαίνεται από μερικά KHz έως εκατοντάδες MHz (π.χ. το ADSL χρησιμοποιεί 0 – 1.1MHz, 25 – 140KHz για uploading και 140 – 1100KHz για downloading, ενώ το ADSL2+ χρησιμοποιεί 0 – 2.2MHz), το ομοαξονικό καλώδιο έχει BW που φθάνει το 1GHz, και τα συστήματα ασύρματης επικοινωνίας χρησιμοποιούν συχνότητες έως και 100GHz.

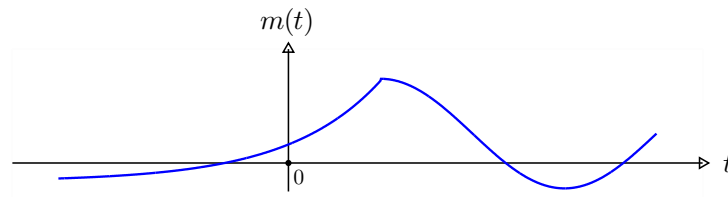
¹Όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος τόσο μεγαλύτερο είναι και το BW. Η απόσβεση του σήματος αυξάνεται στις υψηλές συχνότητες.

2. Το **μέγιστο μήκος** εξαρτάται από τις απώλειες που εισάγει το μέσο μετάδοσης στο μεταδιδόμενο σήμα.
3. Η **ευαισθησία στο θόρυβο** είναι η ευκολία με την οποία το μέσο επηρεάζεται από θορύβους που παρενοχλούν το μεταδιδόμενο σήμα.
4. Η **ευκολία χρήσης** καθορίζεται από την ευκολία επίτευξης της εγκατάστασης, των συνδέσεων, των ελέγχων, και της συντήρησης.
5. Η **ασφάλεια** του μέσου καθορίζεται από την δυσκολία με την οποία μπορούν να γίνουν παρεμβολές και υποκλοπές.

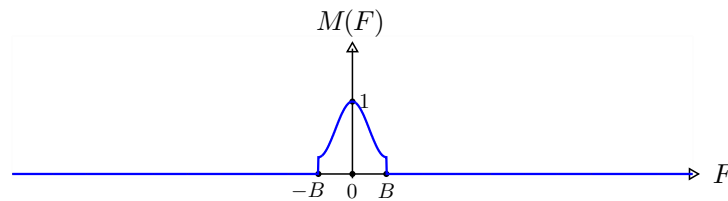
Η **διαμόρφωση** (modulation) είναι μία αντιστρέψιμη μεταβολή ενός σήματος που συνήθως συνοδεύεται με ταυτόχρονη “μεταφορά” του φάσματός του, δηλαδή συνήθως προκαλεί ολίσθηση στις συχνότητες του φάσματος του σήματος. Συνήθως, για να μεταδώσουμε ένα σήμα πληροφορίας το διαμορφώνουμε στην κατάλληλη περιοχή συχνοτήτων. Η αντίστροφη λειτουργία καλείται **αποδιαμόρφωση** (demodulation) και συνήθως συνδυάζει τεχνικές περιορισμού των απωλειών/παραμορφώσεων που εισήγαγε το κανάλι επικοινωνίας στο σήμα, επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο (υπό κάποιες συνθήκες) την τέλεια ανάκτηση του αρχικού σήματος στο δέκτη.

Η ιδιότητα της διαμόρφωσης ενός σήματος με ολίσθηση στις συχνότητες του φάσματός του είναι εξαιρετικά σημαντική. Για παράδειγμα, δύο από τους κύριους λόγους για τους οποίους η διαμόρφωση είναι εξαιρετικά σημαντική στις τηλεπικοινωνίες είναι οι εξής.

1. Η παραμόρφωση η οποία προκαλούν τα φυσικά κανάλια μέσω των οποίων μεταδίδεται η πληροφορία (π.χ., ατμόσφαιρα, ομοαξονικά καλώδια, οπτικές ίνες) διαφέρει ανάλογα με την περιοχή συχνοτήτων του μεταδιδόμενου σήματος. Για παράδειγμα, ακουστικά σήματα με συχνότητες στην περιοχή των 1 – 20KHz εξασθενούνται σημαντικά από την ατμόσφαιρα, ενώ σήματα με υψηλότερες συχνότητες (π.χ., στην περιοχή των GHz) διαδίδονται σε μεγάλες αποστάσεις με πολύ μικρότερες απώλειες.
2. Η ολίσθηση στις συχνότητες δίνει τη δυνατότητα της ταυτόχρονης μετάδοσης, μέσω του ίδιου φυσικού καναλιού, σημάτων πολλών χρηστών και της πλήρους ανάκτησης των σημάτων στους αντίστοιχους δέκτες, επιτρέποντας με αυτόν τον τρόπο την ταυ-



Σχ. 7.1. Σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.



Σχ. 7.2. Το φάσμα $\{M(F)\}$ του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.

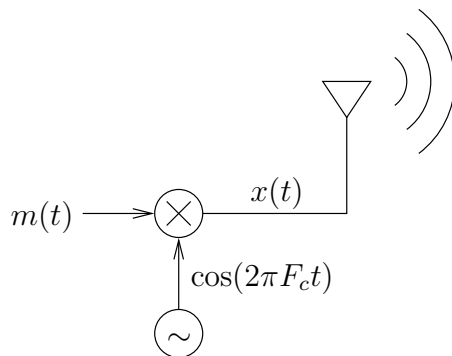
τόχρονη προσπέλαση του μέσου μετάδοσης από πολλές υπηρεσίες ή/και πολλά ζεύγη πομπών/δεκτών. Αυτή η διαδικασία καλείται **πολυπλεξία** (multiplexing) και η σπουδαιότητά της είναι προφανής.

7.2 Διαμόρφωση πλάτους διπλής πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (double-sideband suppressed-carrier amplitude modulation ή DSB-SC AM)

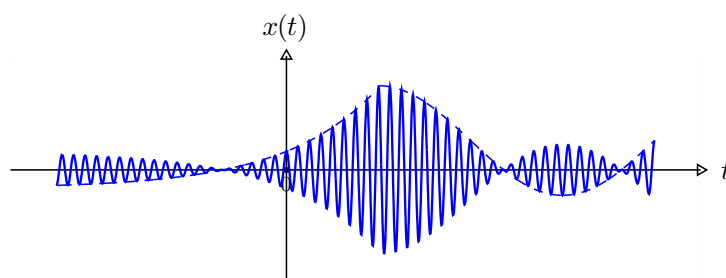
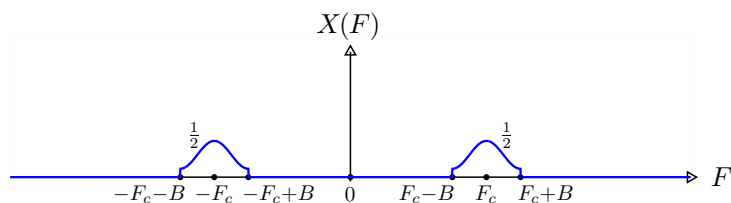
7.2.1 Διαμόρφωση DSB-SC AM

Έστω το πραγματικό σήμα πληροφορίας $\{m(t)\}$ με μετασχηματισμό Fourier $\{M(F)\}$, με **εύρος φάσματος** (bandwidth) B Hz, όπως ισχύει για παράδειγμα για το σήμα του Σχ. 7.1 για το οποίο έχουμε θεωρήσει (για λόγους απλούστευσης της παρουσίασης) ότι το φάσμα του είναι πραγματικό, όπως φαίνεται στο Σχ. 7.2.² Πολλαπλασιάζοντας το $\{m(t)\}$ με το **φορέα** (carrier) $\{\cos(2\pi F_c t)\}$ σύμφωνα με τη διάταξη του Σχ. 7.3, λαμβάνουμε το διαμορφωμένο σήμα **διπλής πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα** (double sideband with

²Επειδή το $\{m(t)\}$ είναι πραγματικό σήμα, το $\{|M(F)|\}$ είναι συμμετρική συνάρτηση του F . Συνεπώς, το φάσμα του $\{m(t)\}$ είναι μη μηδενικό για $F \in [-B, B]$. Συνήθως, στον ορισμό του εύρους φάσματος θεωρούμε μόνο τις θετικές συχνότητες.



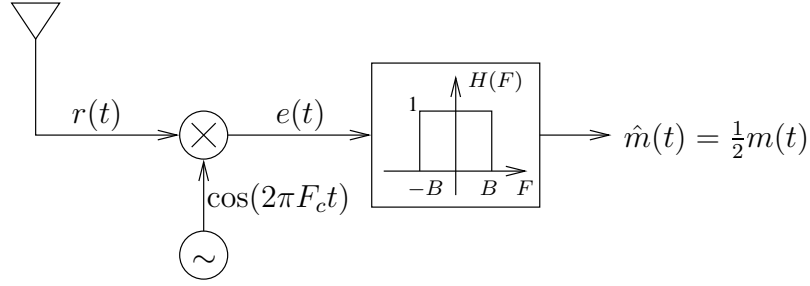
Σχ. 7.3. Πομπός DSB-SC AM.

Σχ. 7.4. Διαμορφωμένο σήμα (με διαμόρφωση DSB-SC AM) $\{x(t)\} = \{m(t) \cos(2\pi F_c t)\}$.Σχ. 7.5. Το φάσμα $\{X(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος (με διαμόρφωση DSB-SC AM) $\{x(t)\}$.

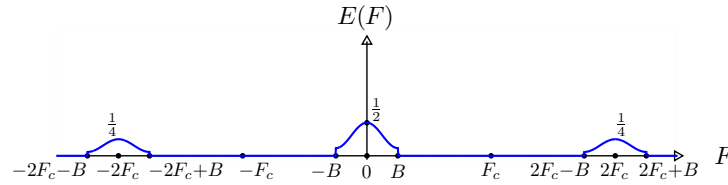
suppressed carrier - DSB-SC)

$$\{x(t)\} = \{m(t) \cos(2\pi F_c t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\} = \frac{1}{2} (\{M(F - F_c)\} + \{M(F + F_c)\}) \quad (7.1)$$

το οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 7.4. Όπως βλέπουμε στο Σχ. 7.5, το φάσμα του διαμορφωμένου σήματος αποτελείται από το ημίθροισμα των μετατοπίσεων, κατά $\pm F_c$, του φάσματος του αρχικού σήματος. Επιπλέον, το εύρος φάσματος του διαμορφωμένου σήματος είναι διπλάσιο από αυτό του αρχικού.



Σχ. 7.6. Δέκτης DSB-SC AM με συγχρονισμένο φορέα και φιλτράρισμα με κατωπερατό φίλτρο.



Σχ. 7.7. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος DSB-SC AM πριν το φιλτράρισμα.

7.2.2 Συγχρονισμένη αποδιαμόρφωση DSB-SC AM

Για να μελετήσουμε τη διαδικασία αποδιαμόρφωσης θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το κανάλι δεν αλλοιώνει το σήμα $\{x(t)\}$ (δηλαδή το κανάλι είναι ιδανικό), οπότε το λαμβανόμενο σήμα είναι $\{r(t)\} = \{x(t)\}$ και έχει φάσμα $\{R(F)\} = \{X(F)\}$. Αν στο δέκτη διαθέτουμε ένα φορέα σε τέλει συγχρονισμό με το διαμορφωμένο φορέα, τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το $\{m(t)\}$ ακολουθώντας τη διάταξη του Σχ. 7.6 ως εξής.

1. Αρχικά, πολλαπλασιάζουμε το διαμορφωμένο σήμα με τον τοπικό (στο δέκτη) φορέα, λαμβάνοντας (θυμηθείτε ότι $\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$)

$$\{e(t)\} = \{(m(t) \cos(2\pi F_c t)) \cos(2\pi F_c t)\} = \frac{1}{2} \{m(t)\} + \frac{1}{2} \{m(t) \cos(4\pi F_c t)\} \quad (7.2)$$

με μετασχηματισμό Fourier

$$\{E(F)\} = \frac{1}{2} \{M(F)\} + \frac{1}{4} \{M(F - 2F_c) + M(F + 2F_c)\} \quad (7.3)$$

το μέτρο του οποίου σχεδιάζεται στο Σχ. 7.7.

2. Μπορούμε να ανακτήσουμε το $\frac{1}{2} \{m(t)\}$ περνώντας το $\{e(t)\}$ από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής F_0 με $B \leq F_0 < 2F_c - B$. Φυσικά, αν στο

λαμβανόμενο στο δέκτη σήμα υπάρχουν διαμορφωμένοι και άλλοι χρήστες (που είναι η συνήθης περίπτωση), τότε θα πρέπει να επιλέξουμε $F_0 = B + F_g$, όπου F_g είναι μία μικρή ζώνη συχνοτήτων η οποία αφήνεται “κενή” για να ξεχωρίζουν οι διάφοροι χρήστες μεταξύ τους.

Στην πραγματικότητα, το μεταδιδόμενο σήμα υφίσταται εξασθένιση στο κανάλι με αποτέλεσμα το σήμα που λαμβάνουμε στο δέκτη να είναι (στην ιδανική περίπτωση) $\{r(t)\} = c \{x(t)\}$ όπου $0 < c < 1$, οπότε στην έξοδο του αποδιαμορφωτή παίρνουμε $\{\hat{m}(t)\} = \frac{c}{2} \{m(t)\}$. Σε αυτήν την περίπτωση, χρειάζεται ένας απλός ενισχυτής στο δέκτη για να ανακτήσουμε το $\{m(t)\}$ ακριβώς. Φυσικά, ο ενισχυτής συγχρόνως ενισχύει και άλλα σήματα (π.χ. σήματα θορύβου) που τυχόν υπάρχουν στις συχνότητες τις οποίες επιτρέπει το φίλτρο να “περάσουν” στην έξοδό του.

7.2.3 Μη-συγχρονισμένη αποδιαμόρφωση DSB-SC AM

Αν υπάρχουν ατέλειες στο συγχρονισμό, τότε θα υπάρχει παραμόρφωση. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν οι εξής περιπτώσεις παραμόρφωσης.

1. **Διαφορά φάσης θ μεταξύ των φορέων.** Θεωρώντας ξανά ότι το κανάλι είναι ιδανικό, δηλαδή το λαμβανόμενο σήμα είναι της μορφής $\{r(t)\} = \{m(t) \cos(2\pi F_c t)\}$, αν ο τοπικός φορέας στο δέκτη είναι $\{\cos(2\pi F_c t + \theta)\}$, τότε κατά την αποδιαμόρφωση λαμβάνουμε το σήμα

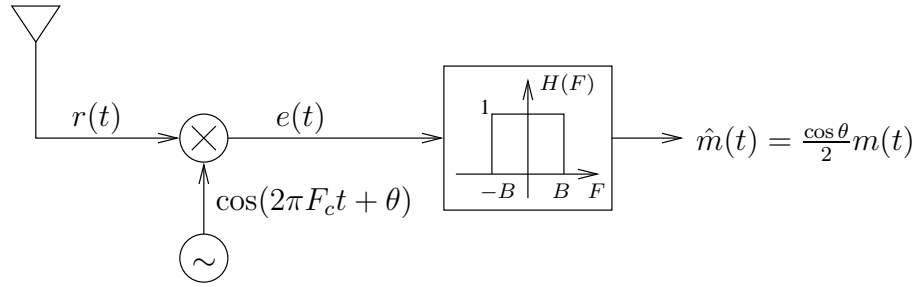
$$\begin{aligned} \{e(t)\} &= \{(m(t) \cos(2\pi F_c t)) \cos(2\pi F_c t + \theta)\} \\ &= \frac{1}{2} \cos \theta \{m(t)\} + \frac{1}{2} \{m(t) \cos(4\pi F_c t + \theta)\} \end{aligned} \quad (7.4)$$

με μετασχηματισμό Fourier

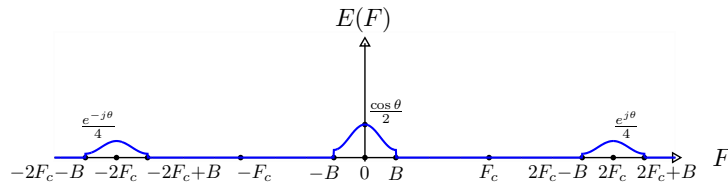
$$\{E(F)\} = \frac{\cos \theta}{2} \{M(F)\} + \frac{e^{j\theta}}{4} \{M(F - 2F_c)\} + \frac{e^{-j\theta}}{4} \{M(F + 2F_c)\}. \quad (7.5)$$

Ο δεύτερος όρος στην (7.4) “κόβεται” από το κατωπερατό φίλτρο, στην έξοδο του οποίου λαμβάνουμε το σήμα

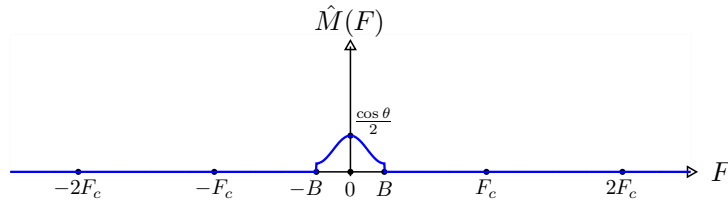
$$\{\hat{m}(t)\} = \frac{\cos \theta}{2} \{m(t)\} \quad (7.6)$$



Σχ. 7.8. Δέκτης DSB-SC AM με διαφορά φάσης μεταξύ των φορέων και φιλτράρισμα με κατωπερατό φίλτρο.



Σχ. 7.9. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος DSB-SC AM πριν το φιλτράρισμα, με διαφορά φάσης μεταξύ των φορέων.



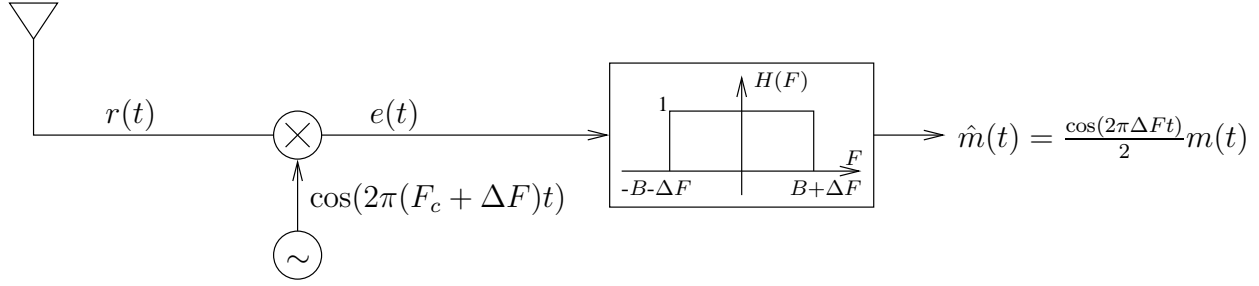
Σχ. 7.10. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος DSB-SC AM μετά το φιλτράρισμα, με διαφορά φάσης μεταξύ των φορέων.

με μετασχηματισμό Fourier

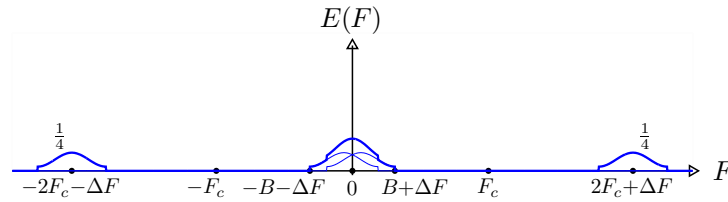
$$\{\hat{M}(F)\} = \frac{\cos \theta}{2} \{M(F)\}. \quad (7.7)$$

Παρατηρούμε λοιπόν εξασθένιση κατά $\cos \theta$ στο χρήσιμο όρο.³ Εκ πρώτης όψευς, η εξασθένιση του χρήσιμου σήματος στο δέκτη δεν φαίνεται καταστροφική. Θα πρέπει όμως να λάβουμε υπόψιν την παρουσία (θερμικού και όχι μόνο) θορύβου στο δέκτη. Τότε, είναι προφανές ότι αυτή η εξασθένιση είναι ανεπιθύμητη και θα πρέπει να αποφευχθεί. Πράγματι, εάν $\theta \simeq \pm \frac{\pi}{2}$, τότε $\cos \theta \simeq 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει να ενισχύσουμε το σήμα σημαντικά, ενισχύοντας όμως έτσι και τον τυχόν θόρυβο που εμ-

³Στην ακραία (αλλά πιθανή) περίπτωση όπου $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ έχουμε πλήρη απώλεια του σήματος πληροφορίας $\{m(t)\}$.



Σχ. 7.11. Δέκτης DSB-SC AM με διαφορά συχνότητας μεταξύ των φορέων και φιλτράρισμα με κατωπερατό φίλτρο.



Σχ. 7.12. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος DSB-SC AM πριν το φιλτράρισμα, με διαφορά συχνότητας μεταξύ των φορέων.

φανίζεται στο λαμβανόμενο σήμα $\{r(t)\}$ στις συχνότητες $F_c - B$ έως $F_c + B$. Επομένως, ο συγχρονισμός φάσης είναι απαραίτητος.

2. **Διαφορά συχνότητας ΔF μεταξύ των φορέων.** Αν οι φορείς του πομπού και του δέκτη παρουσιάζουν διαφορά στη συχνότητα κατά ΔF , τότε κατά την αποδιαμόρφωση λαμβάνουμε το σήμα

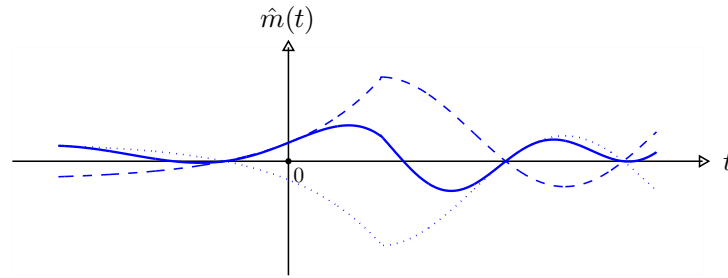
$$\begin{aligned} \{e(t)\} &= \{(m(t) \cos(2\pi F_c t)) \cos(2\pi(F_c + \Delta F)t)\} \\ &= \frac{1}{2} \{m(t) \cos(2\pi \Delta F t)\} + \frac{1}{2} \{m(t) \cos(2\pi(2F_c + \Delta F)t)\} \end{aligned} \quad (7.8)$$

με μετασχηματισμό Fourier

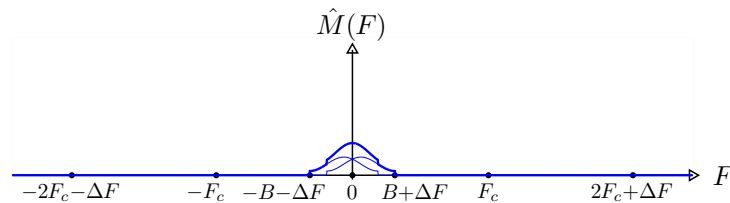
$$\begin{aligned} \{E(F)\} &= \frac{1}{4} \{M(F - \Delta F)\} + \frac{1}{4} \{M(F + \Delta F)\} \\ &\quad + \frac{1}{4} \{M(F - (2F_c + \Delta F))\} + \frac{1}{4} \{M(F + (2F_c + \Delta F))\}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Στην πράξη, το ΔF είναι μικρό. Έτσι, ο δεύτερος όρος στη (7.8) “κόβεται” από το κατωπερατό φίλτρο στην έξοδο του οποίου λαμβάνουμε το σήμα

$$\{\hat{m}(t)\} = \left\{ \frac{\cos(2\pi \Delta F t)}{2} m(t) \right\} \quad (7.10)$$



Σχ. 7.13. Αποδιαμορφωμένο σήμα DSB-SC AM μετά το φιλτράρισμα, με διαφορά συχνότητας μεταξύ των φορέων.



Σχ. 7.14. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος DSB-SC AM μετά το φιλτράρισμα, με διαφορά συχνότητας μεταξύ των φορέων.

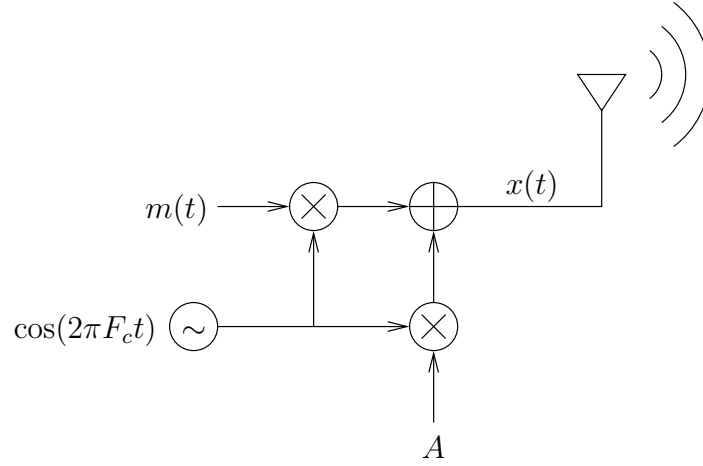
με μετασχηματισμό Fourier

$$\left\{ \hat{M}(F) \right\} = \frac{1}{4} \{ M(F - \Delta F) \} + \frac{1}{4} \{ M(F + \Delta F) \}. \quad (7.11)$$

Παρατηρούμε ότι η έξοδος του φίλτρου είναι το σήμα πληροφορίας $\frac{1}{2}\{m(t)\}$ διαμορφωμένο με το (συνήθως χαμηλής συχνότητας) συνημίτονο $\{\cos(2\pi\Delta Ft)\}$. Άρα, το κατάλληλο κατωπερατό φίλτρο θα παράγει στην έξοδό του το $\frac{1}{2}\{m(t)\}$ με πλάτος το οποίο αυξομειώνεται αργά (**fading**). Προφανώς, η διαφορά συχνοτήτων οδηγεί σε παραμόρφωση του σήματος και θα πρέπει να αποφεύγεται.

Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις ατελούς συγχρονισμού καθιστούν προφανή τη σημασία πλήρους συγχρονισμού κατά τη σύγχρονη αποδιαμόρφωση. Η δυνατότητα (σχεδόν) τέλει συγχρονισμού επιβάλλει απαιτήσεις, οι οποίες αυξάνουν το κόστος των αντίστοιχων συσκευών λήψης. Οι τεχνικές οι οποίες επιτυγχάνουν συγχρονισμό φάσης και συχνότητας μεταξύ του φορέα του διαμορφωμένου σήματος και του τοπικού φορέα στο δέκτη είναι αντικείμενο της θεωρίας τηλεπικοινωνιακών συστημάτων και δεν θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια.

Στη συνέχεια, θα μελετήσουμε ένα σχήμα το οποίο δεν απαιτεί συγχρονισμό των φορέων, αλλά “πληρώνει” σε εκπομπή επιπλέον ισχύος. Το σχήμα αυτό μπορεί να αποτελέσει μία



Σχ. 7.15. Πομπός AM.

ελκυστική λύση στην περίπτωση που έχουμε έναν πομπό (πληρώνουμε μία φορά σε ισχύ) και πολλούς δέκτες (κερδίζουμε πολλές φορές εξαιτίας φθηνών συσκευών λήψης), όπως, για παράδειγμα, στη ραδιοφωνία.

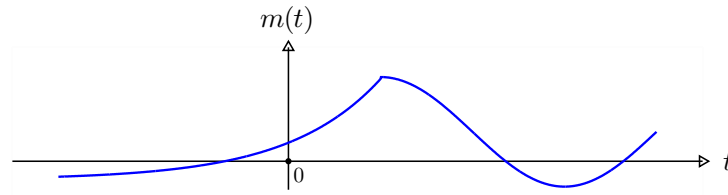
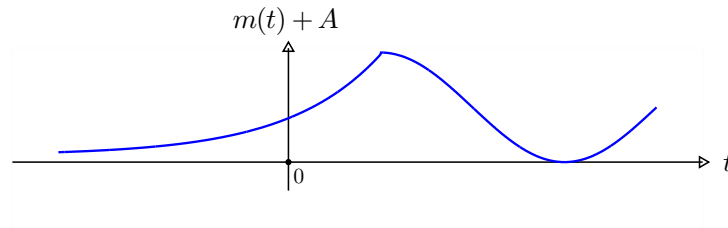
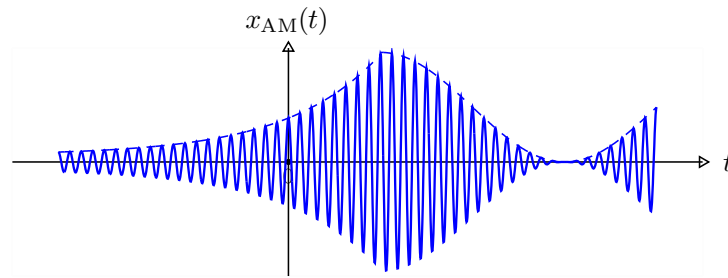
7.3 Διαμόρφωση πλάτους (amplitude modulation ή AM)

7.3.1 Διαμόρφωση AM

Στη **διαμόρφωση πλάτους** (amplitude modulation), ο πομπός μεταδίδει επιπλέον του διαμορφωμένου σήματος και ένα αντίγραφο του φορέα το οποίο αποδεικνύεται χρήσιμο κατά την αποδιαμόρφωση, όπως φαίνεται και στο Σχ. 7.15. Το σήμα που εκπέμπεται έχει τιμή

$$x_{AM}(t) = (m(t) + A) \cos(2\pi F_c t). \quad (7.12)$$

Στα Σχ. 7.16, 7.17, και 7.18, σχεδιάζουμε το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$, το μετατοπισμένο κατά A σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t) + A\}$, και το διαμορφωμένο σήμα $\{x_{AM}(t)\} = \{(m(t) + A) \cos(2\pi F_c t)\}$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η περιβάλλουσα (envelope) του εκπεμπόμενου σήματος $\{x_{AM}(t)\}$ έχει ακριβώς την ίδια μορφή με το $\{m(t)\}$ (μετατοπισμένο κατά A). Στο Σχ. 7.19, σχεδιάζουμε το μετασχηματισμό Fourier $\{M(F)\}$

Σχ. 7.16. Σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.Σχ. 7.17. Μετατοπισμένο κατά A σήμα πληροφορίας $\{m(t) + A\}$ βασικής ζώνης.Σχ. 7.18. Διαμορφωμένο σήμα (με διαμόρφωση AM) $\{x_{AM}(t)\} = \{(m(t) + A) \cos(2\pi F_c t)\}$.

του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$. Το διαμορφωμένο σήμα $\{x_{AM}(t)\}$ έχει μετασχηματισμό Fourier

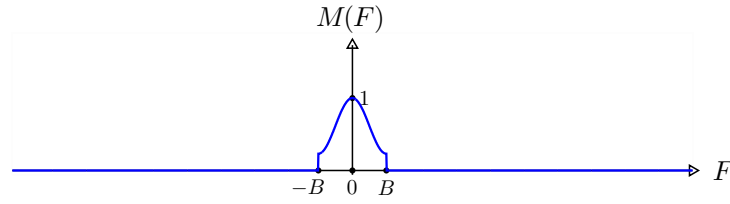
$$\{X_{AM}(F)\} = \frac{1}{2}\{M(F - F_c)\} + \frac{1}{2}\{M(F + F_c)\} + \frac{A}{2}\{\delta(F - F_c)\} + \frac{A}{2}\{\delta(F + F_c)\} \quad (7.13)$$

τον οποίο σχεδιάζουμε στο Σχ. 7.20.

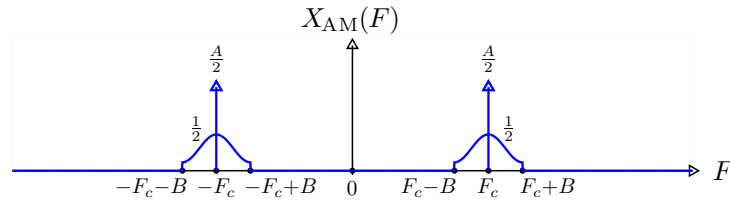
7.3.2 Αποδιαμόρφωση AM

Αν επιλέξουμε το A αρκετά μεγάλο ώστε

$$A + M(t) > 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (7.14)$$



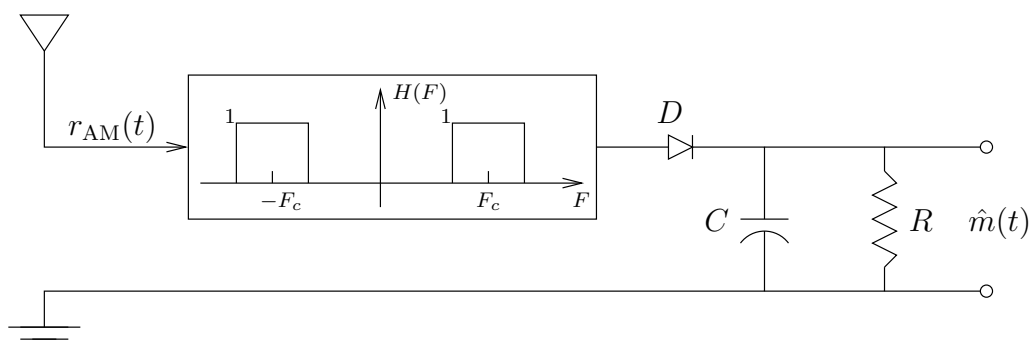
Σχ. 7.19. Φάσμα $\{M(F)\}$ του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.



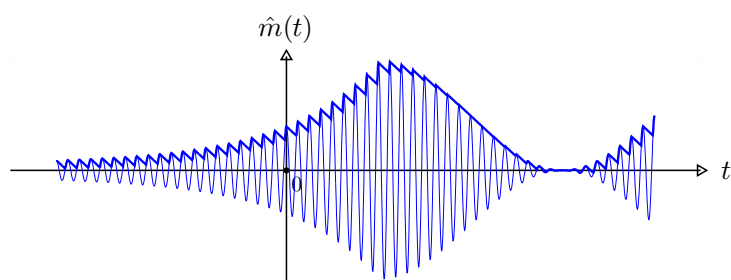
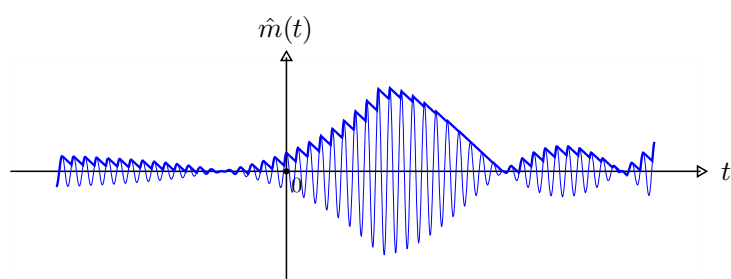
Σχ. 7.20. Φάσμα $\{X_{AM}(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος (με διαμόρφωση AM) $\{x_{AM}(t)\}$.

τότε μπορούμε να ανακτήσουμε μία ικανοποιητική προσέγγιση του $\{m(t)\}$ χρησιμοποιώντας τη διάταξη του Σχ. 7.21 η οποία καλείται **φωρατής περιβάλλουσας** (envelope detector) και λειτουργεί ως εξής. Κατά τη διάρκεια της πρώτης θετικής ημιπεριόδου του σήματος, η δίοδος άγει και ο πυκνωτής φορτίζεται στην τιμή του μεγίστου του σήματος εισόδου. Όταν η τάση εισόδου πέσει κάτω από την τάση στα άκρα του πυκνωτή, η δίοδος πολώνεται ανάστροφα και το σήμα εισόδου αποσυνδέεται από την έξοδο. Τότε, ο πυκνωτής αρχίζει να εκφορτίζεται (αργά) μέσω της αντίστασης. Στον επόμενο κύκλο του φέροντος, όταν η τάση εισόδου υπερβεί την τάση στα άκρα του πυκνωτή, η δίοδος άγει και πάλι και ο πυκνωτής φορτίζεται. Αυτό το σενάριο επαναλαμβάνεται συνεχώς. Αν τα C και R έχουν επιλεγθεί κατάλληλα, τότε η τάση εξόδου προσεγγίζει ικανοποιητικά την περιβάλλουσα, όπως φαίνεται και στο Σχ. 7.22. Αφαιρώντας το A από την προσέγγιση (το οποίο, φυσικά, θα πρέπει να είναι γνωστό), μπορούμε να ανακτήσουμε προσεγγιστικά το σήμα πληροφορίας $\{m(t)\}$.

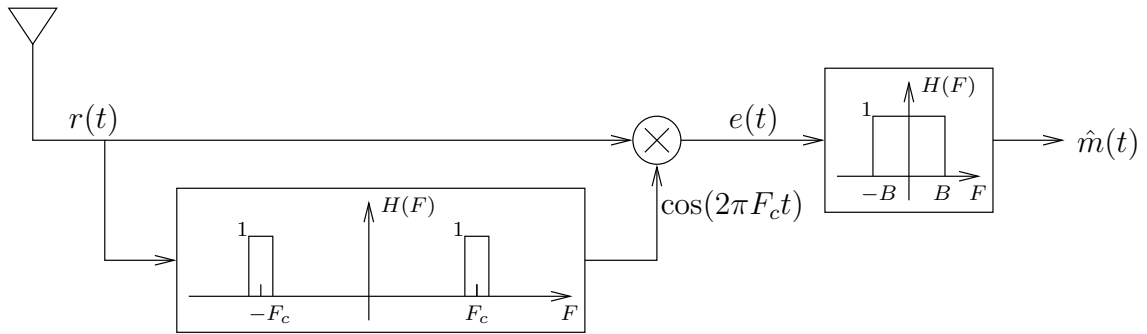
Αν δεν ισχύει η σχέση (7.14), τότε προφανώς δεν μπορεί να ανακτηθεί το σήμα πληροφορίας μέσω της απλής διαδικασίας που περιγράψαμε παραπάνω, όπως φαίνεται και στο Σχ. 7.23. Σε αυτήν την περίπτωση, ένας εναλλακτικός τρόπος αποδιαμόρφωσης ο οποίος εκμεταλλεύεται την ύπαρξη του φορέα και τον χρησιμοποιεί για συγχρονισμένη αποδιαμόρφωση φαίνεται στο Σχ. 7.24. Βέβαια, η δυσκολία υλοποίησής του έγκειται στον τρόπο απομόνωσης του φορέα με



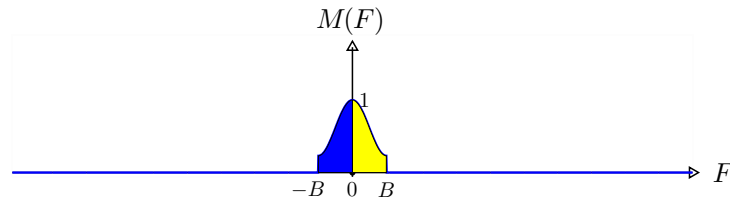
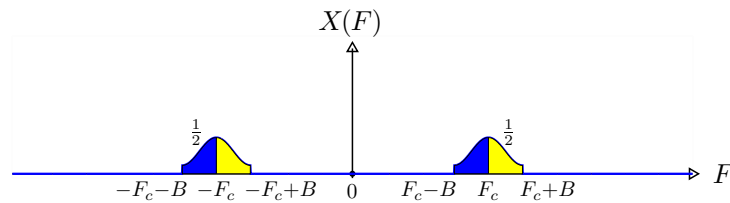
Σχ. 7.21. Φωρατής περιβάλλουσας.

Σχ. 7.22. Φώραση περιβάλλουσας όταν ικανοποιείται η συνθήκη $A + m(t) > 0, \forall t$.Σχ. 7.23. Φώραση περιβάλλουσας όταν δεν ικανοποιείται η συνθήκη $A + m(t) > 0, \forall t$.

τη βοήθεια ενός φίλτρου στενής ζώνης συντονισμένου στη συχνότητα F_c , κάτι που δεν είναι προφανές πώς μπορεί να επιτευχθεί πρακτικά.

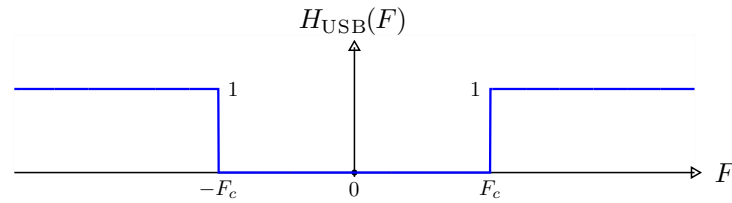


Σχ. 7.24. Εναλλακτικός δέκτης AM.

Σχ. 7.25. Φάσμα $\{M(F)\}$ του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.Σχ. 7.26. Φάσμα $\{X(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος (με διαμόρφωση DSB-SC AM) $\{x(t)\}$.

7.4 Διαμόρφωση πλάτους απλής πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (single-sideband suppressed-carrier amplitude modulation ή SSB-SC AM)

Στην Ενότητα 7.2.1 δείξαμε ότι στη διαμόρφωση DSB-SC AM το εύρος φάσματος του διαμορφωμένου σήματος είναι διπλάσιο από αυτό του αρχικού, όπως φαίνεται και από τα Σχ. 7.25 και 7.26 όπου σχεδιάζουμε το φάσμα $\{M(F)\}$ του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$ και το φάσμα $\{X(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος $\{x(t)\}$. Από τα σχήματα αυτά παρατηρούμε ότι το $\{x(t)\}$ καταλαμβάνει διπλάσιο εύρος συχνοτήτων. Όμως, οι δύο πλευρικές



Σχ. 7.27. Απόκριση συχνότητας $\{H_{\text{USB}}(F)\}$ του φίλτρου που χρησιμοποιεί ο πομπός USB-SC AM.

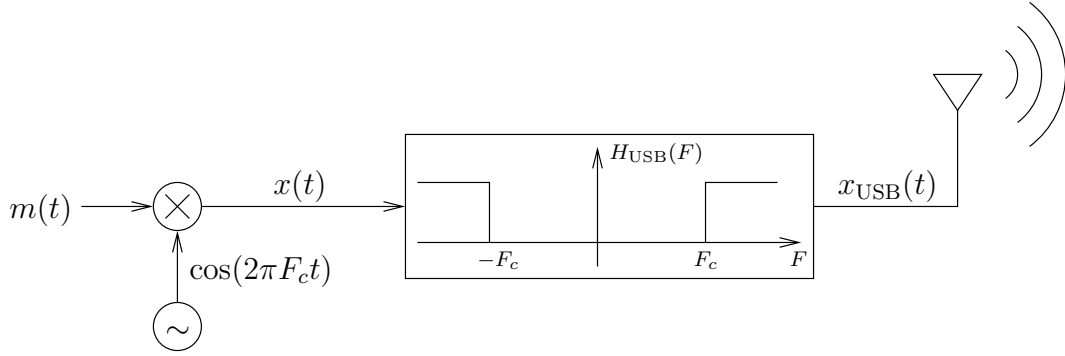
ζώνες αποτελούν πλεονασμό γιατί η χρήσιμη πληροφορία εμπεριέχεται μόνο στο μισό από το καταλαμβανόμενο εύρος. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η εκπομπή οποιασδήποτε από τις δύο πλευρικές ζώνες είναι αρκετή για να ανακτηθεί το σήμα πληροφορίας $\{m(t)\}$ στο δέκτη. Με αυτόν τον τρόπο, μειώνουμε στο μισό το εύρος φάσματος που καταλαμβάνει το μεταδιδόμενο σήμα.

7.4.1 Διαμόρφωση πλάτους άνω πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (upper SSB-SC AM ή USB-SC AM)

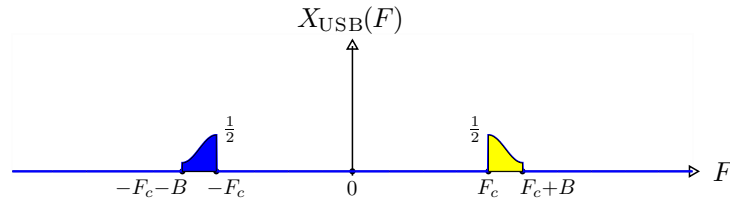
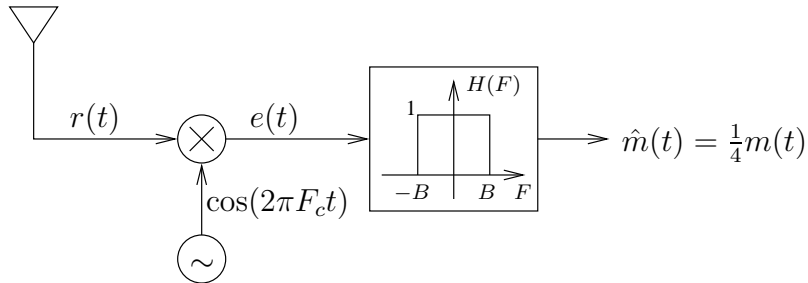
Στη διαμόρφωση USB-SC AM ο πομπός μεταδίδει μόνο την άνω πλευρική ζώνη ενός σήματος που έχει δημιουργηθεί με διαμόρφωση DSB-SC AM, απαλείφοντας την αντίστοιχη κάτω πλευρική ζώνη του τελευταίου. Αυτό επιτυγχάνεται με τη χρήση ενός ιδανικού φίλτρου $\{h_{\text{USB}}(t)\}$ που αποκόβει το περιεχόμενο του $\{x(t)\}$ του οποίου το φάσμα καταλαμβάνει τις αρνητικές συχνότητες δεξιά του $-F_c$ και τις θετικές συχνότητες αριστερά του F_c . Η απόκριση συχνότητας $\{H_{\text{USB}}(F)\}$ του φίλτρου σχεδιάζεται στο Σχ. 7.27.

Στο Σχ. 7.28, παρουσιάζουμε τη διαδικασία κατασκευής του διαμορφωμένου σήματος $\{x_{\text{USB}}(t)\}$, το φάσμα του οποίου σχεδιάζεται στο Σχ. 7.29. Συγκρίνοντας τα Σχ. 7.26 και 7.29, παρατηρούμε ότι, σε σύγκριση με τη διαμόρφωση DSB-SC AM, το σήμα $\{x_{\text{USB}}(t)\}$ που προκύπτει από τη διαμόρφωση USB-SC AM καταλαμβάνει το μισό bandwidth και περιέχει όλη την πληροφορία του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.

Αν το κανάλι είναι ιδανικό και διαθέτουμε στο δέκτη ένα φορέα σε τέλειο συγχρονισμό με το φορέα του πομπού, τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το $\{m(t)\}$ ακολουθώντας τη διάταξη του Σχ. 7.30 η οποία είναι πανομοιότυπη με τη διάταξη συγχρονισμένης αποδιαμόρφωσης DSB-SC AM. Πολλαπλασιάζοντας το διαμορφωμένο σήμα με τον τοπικό (στο δέκτη) φορέα,

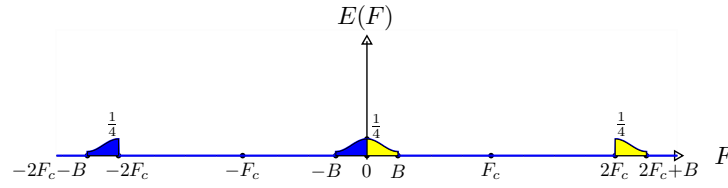


Σχ. 7.28. Πομπός USB-SC AM.

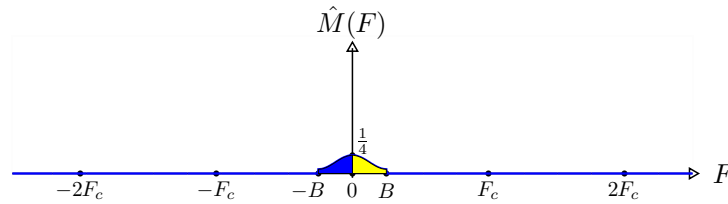
Σχ. 7.29. Φάσμα $\{X_{\text{USB}}(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος (με διαμόρφωση USB-SC AM) $\{x_{\text{USB}}(t)\}$.

Σχ. 7.30. Δέκτης SSB-SC AM με συγχρονισμένο φορέα και φιλτράρισμα με κατωπερατό φίλτρο.

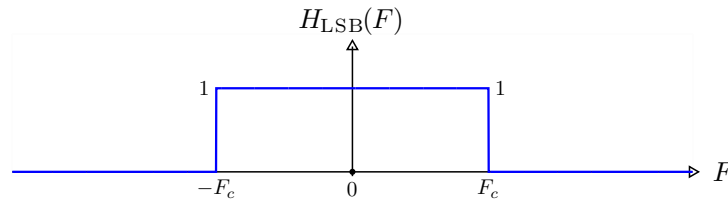
λαμβάνουμε το σήμα $\{e(t)\}$ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier σχεδιάζεται στο Σχ. 7.31. Περνώντας το $\{e(t)\}$ από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής F_0 με $B \leq F_0 < 2F_c$, αναχτούμε στην έξοδο του φίλτρου το $\frac{1}{4}\{m(t)\}$ του οποίου το φάσμα σχεδιάζεται στο Σχ. 7.32. Φυσικά, όπως και με τη διαμόρφωση DSB-SC AM, αν στο λαμβανόμενο στο δέκτη σήμα υπάρχουν διαμορφωμένοι και άλλοι χρήστες (που είναι η συνήθης περίπτωση), τότε θα πρέπει να επιλέξουμε $F_0 = B + F_g$, όπου F_g είναι μία μικρή ζώνη συχνοτήτων η οποία αφήνεται “κενή” για να ξεχωρίζουν οι διάφοροι χρήστες μεταξύ τους.



Σχ. 7.31. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος USB-SC AM πριν το φιλτράρισμα.



Σχ. 7.32. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος USB-SC AM μετά το φιλτράρισμα.

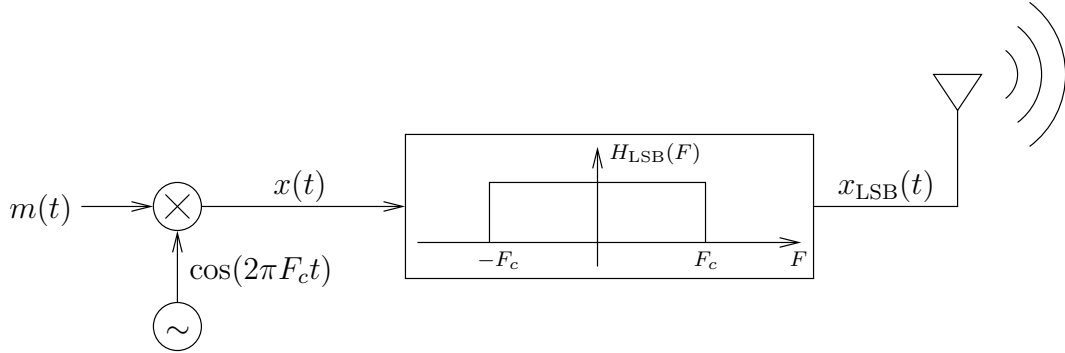


Σχ. 7.33. Απόκριση συχνότητας $\{H_{\text{LSB}}(F)\}$ του φίλτρου που χρησιμοποιεί ο πομπός LSB-SC AM.

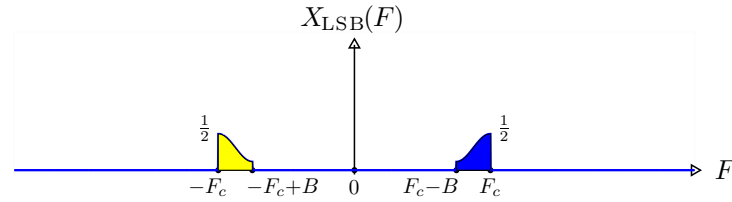
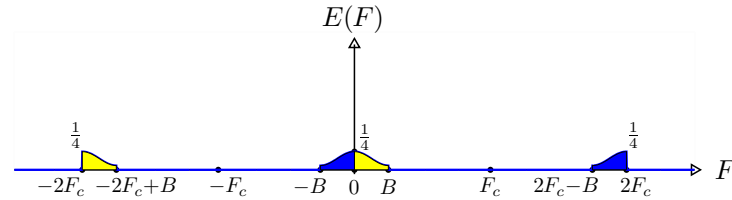
7.4.2 Διαμόρφωση πλάτους κάτω πλευρικής ζώνης με καταργημένο φορέα (lower SSB-SC AM ή LSB-SC AM)

Στη διαμόρφωση LSB-SC AM ο πομπός μεταδίδει μόνο την κάτω πλευρική ζώνη του σήματος DSB-SC AM, απαλείφοντας την αντίστοιχη άνω πλευρική ζώνη του τελευταίου με τη χρήση ενός ιδανικού φίλτρου $\{h_{\text{LSB}}(t)\}$ που αποκόβει το περιεχόμενο του $\{x(t)\}$ του οποίου το φάσμα καταλαμβάνει τις αρνητικές συχνότητες αριστερά του $-F_c$ και τις θετικές συχνότητες δεξιά του F_c . Η απόκριση συχνότητας $\{H_{\text{LSB}}(F)\}$ του φίλτρου σχεδιάζεται στο Σχ. 7.33.

Στο Σχ. 7.34, παρουσιάζουμε τη διαδικασία κατασκευής του διαμορφωμένου σήματος $\{x_{\text{LSB}}(t)\}$, το φάσμα του οποίου σχεδιάζεται στο Σχ. 7.35. Συγκρίνοντας τα Σχ. 7.26 και 7.35, παρατηρούμε ότι, σε σύγκριση με τη διαμόρφωση DSB-SC AM, το σήμα $\{x_{\text{LSB}}(t)\}$ που προκύπτει από τη διαμόρφωση LSB-SC AM καταλαμβάνει το μισό bandwidth και περιέχει όλη



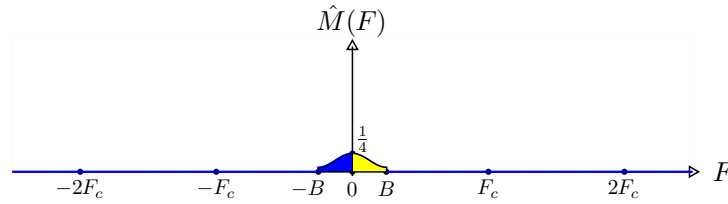
Σχ. 7.34. Πομπός LSB-SC AM.

Σχ. 7.35. Φάσμα $\{X_{\text{LSB}}(F)\}$ του διαμορφωμένου σήματος (με διαμόρφωση LSB-SC AM) $\{x_{\text{LSB}}(t)\}$.

Σχ. 7.36. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος LSB-SC AM πριν το φιλτράρισμα.

την πληροφορία του σήματος πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$.

Αν το κανάλι είναι ιδανικό και διαθέτουμε στο δέκτη ένα φορέα σε τέλει συγχρονισμό με το φορέα του πομπού, τότε μπορούμε να ανακτήσουμε το $\{m(t)\}$ ακολουθώντας, όπως και με τη διαμόρφωση USB-SC AM, τη διάταξη του Σχ. 7.30. Πολλαπλασιάζοντας το διαμορφωμένο σήμα με τον τοπικό (στο δέκτη) φορέα, λαμβάνουμε το σήμα $\{e(t)\}$ του οποίου ο μετασχηματισμός Fourier σχεδιάζεται στο Σχ. 7.36. Περνώντας το $\{e(t)\}$ από ένα ιδανικό κατωπερατό φίλτρο με συχνότητα αποκοπής F_0 με $B \leq F_0 < 2F_c - B$, αναχτούμε στην έξοδο του φίλτρου το $\frac{1}{4}\{m(t)\}$ του οποίου το φάσμα σχεδιάζεται στο Σχ. 7.37. Φυσικά, όπως και με τη διαμόρ-

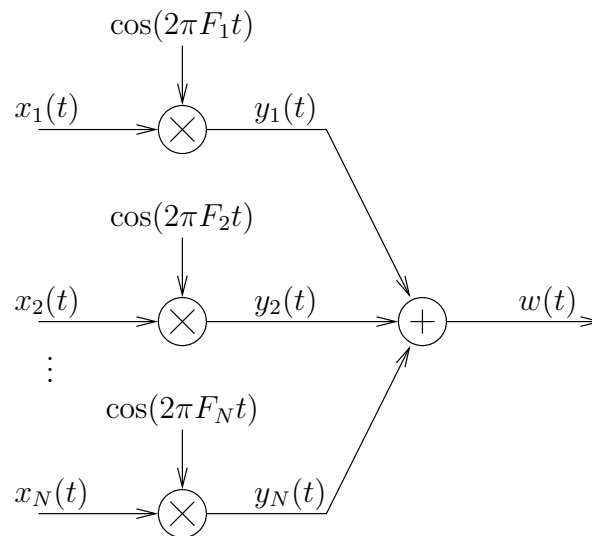


Σχ. 7.37. Φάσμα αποδιαμορφωμένου σήματος LSB-SC AM μετά το φιλτράρισμα.

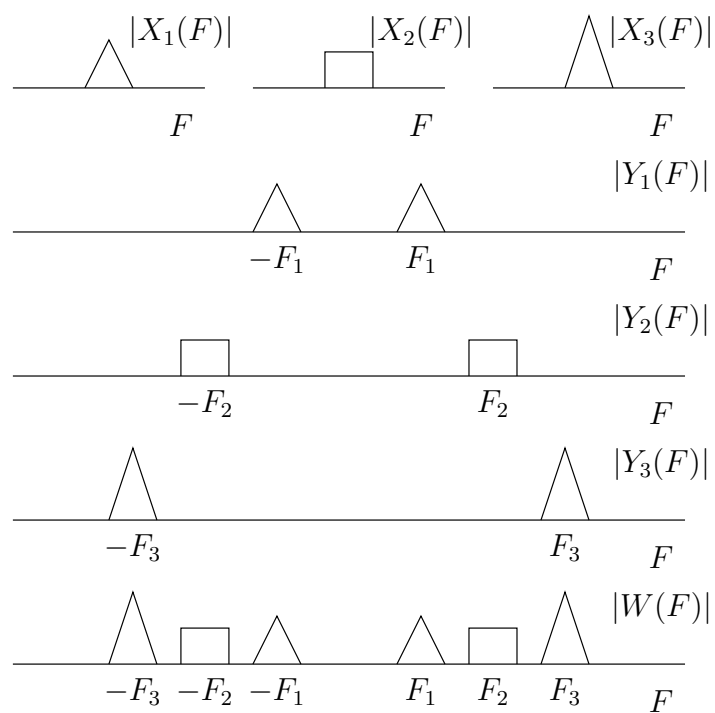
φωση DSB-SC AM, αν στο λαμβανόμενο στο δέκτη σήμα υπάρχουν διαμορφωμένοι και άλλοι χρήστες (που είναι η συνήθης περίπτωση), τότε θα πρέπει να επιλέξουμε $F_0 = B + F_g$, όπου F_g είναι μία μικρή ζώνη συχνοτήτων η οποία αφήνεται “κενή” για να ξεχωρίζουν οι διάφοροι χρήστες μεταξύ τους.

7.5 Πολυπλεξία στο πεδίο των συχνοτήτων

Έστω ότι θέλουμε να μεταδώσουμε ταυτόχρονα τα σήματα N πομπών, $\{x_i(t)\}$, $i = 1, \dots, N$, σε N δέκτες μέσω του ίδιου φυσικού καναλιού. Ας υποθέσουμε ότι τα $\{x_i(t)\}$ έχουν το ίδιο εύρος φάσματος B (η μελέτη μπορεί να επεκταθεί εύκολα στις περιπτώσεις που τα διαφορετικά σήματα έχουν διαφορετικό εύρος φάσματος). Αν τα $\{x_i(t)\}$ επικαλύπτονται και στο χρόνο και στις συχνότητες, τότε δεν είναι προφανές πώς μπορούν να μεταδοθούν ταυτόχρονα και, παράλληλα, να ανακτηθούν στους αντίστοιχους δέκτες. Η **πολυπλεξία στο πεδίο των συχνοτήτων** (frequency division multiplexing) επιτρέπει την ανάκτηση των αρχικών σημάτων ολισθαίνοντας κατάλληλα τα φάσματά τους, αποφεύγοντας την επικάλυψη στο πεδίο των συχνοτήτων. Μία διάταξη η οποία υλοποιεί πολυπλεξία στο πεδίο των συχνοτήτων αναπαρίσταται στο Σχ. 7.38, ενώ τα αντίστοιχα φάσματα, για $N = 3$, σχεδιάζονται στο Σχ. 7.39. Οι συχνότητες F_k θα πρέπει να διαφέρουν τουλάχιστον κατά $2B$. Όμως, για την κατά το δυνατό αποδοτική χρήση του καναλιού, θα πρέπει να φροντίσουμε να μην είναι “αρκετά” μακριά. Συνήθως, απέχουν κατά $2B + B_g$, όπου B_g είναι μία **ζώνη ασφαλείας** (guard-band) η οποία επιτρέπει την υλοποίηση της αποδιαμόρφωσης μέσω υλοποιήσιμων (και όχι ιδανικών, όπως δεχόμαστε εδώ) φίλτρων.

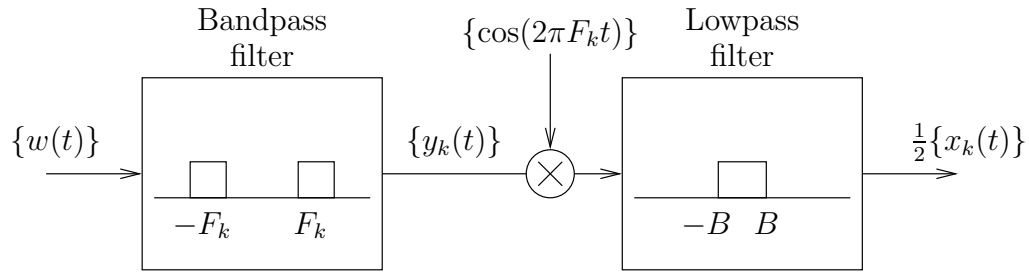


Σχ. 7.38. Πολυπλεξία στη συχνότητα.



Σχ. 7.39. Πολυπλεξία στη συχνότητα.

Η ανάκτηση των αρχικών σημάτων επιτυγχάνεται, όπως φαίνεται στο Σχ. 7.40, σε δύο βήματα.

Σχ. 7.40. Ανάκτηση k -οστού αρχικού σήματος.

1. Ζωνοπερατό φιλτράρισμα για την ανάκτηση του k -οστού διαμορφωμένου σήματος, μέσω του k -οστού ζωνοπερατού φίλτρου το οποίο περνάει αμετάβλητες τις συχνότητες στο διάστημα $F \in [F_k - (B + B_g), F_k + (B + B_g)]$ και “κόβει” τις άλλες.
2. Αποδιαμόρφωση για την ανάκτηση του k -οστού αρχικού σήματος.

7.6 Διαμόρφωση γωνίας

Στη διαμόρφωση γωνίας (angle modulation) η πληροφορία μεταφέρεται στη γωνία του φορέα. Δύο βασικές τεχνικές είναι η **διαμόρφωση συχνότητας** (frequency modulation - FM) με

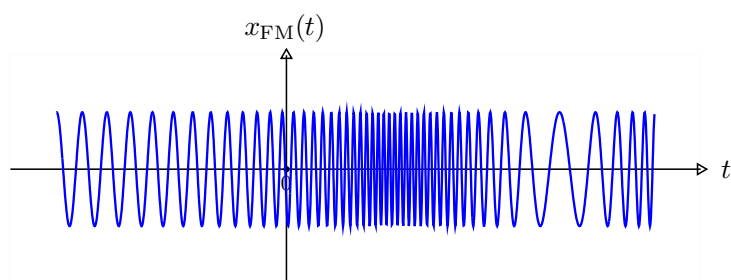
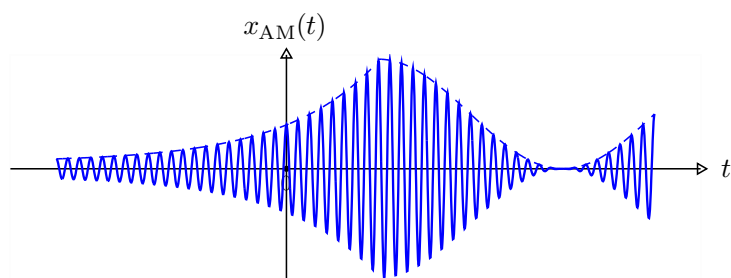
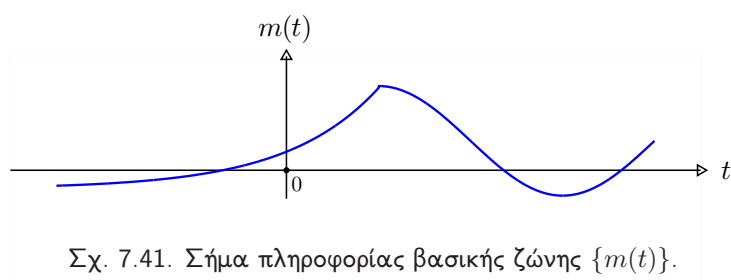
$$x_{\text{FM}}(t) = A \cos \left(2\pi F_c t + k \int_{-\infty}^t m(a) da \right) \quad (7.15)$$

και η **διαμόρφωση φάσης** (phase modulation - PM) με

$$x_{\text{PM}}(t) = A \cos (2\pi F_c t + km(t)) \quad (7.16)$$

Για να συγκρίνουμε τις τεχνικές διαμόρφωσης πλάτους (AM) και συχνότητας (FM), στα Σχ. 7.41, 7.42, και 7.43, σχεδιάζουμε το σήμα πληροφορίας βασικής ζώνης $\{m(t)\}$, το διαμορφωμένο σήμα AM $\{x_{\text{AM}}(t)\}$, και το διαμορφωμένο σήμα FM $\{x_{\text{FM}}(t)\}$. Παρατηρούμε ότι η πληροφορία που περιέχει το αρχικό μήνυμα (σήμα) έχει “περάσει” στη συχνότητα του διαμορφωμένου σήματος FM, σε αντίθεση με τη διαμόρφωση AM όπου η πληροφορία “περνά” στο πλάτος του διαμορφωμένου σήματος.

Η λεπτομερής μαθηματική μελέτη των συστημάτων διαμόρφωσης γωνίας είναι πολύπλοκη και δεν θα μας απασχολήσει στα πλαίσια του μαθήματος. Απλά, αναφέρουμε ότι αυτά τα συ-



στήματα χρησιμοποιούνται ευρέως διότι, υπό προϋποθέσεις, παρουσιάζουν σημαντική ανοσία στο θόρυβο.

7.6.1 Αποδιαμόρφωση σήματος FM

Ένας απλός τρόπος αποδιαμόρφωσης σημάτων FM είναι ο ακόλουθος. Αν στο δέκτη περάσουμε το λαμβανόμενο σήμα από ένα **διαφοριστή** (differentiator), λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\frac{dx_{FM}(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \left\{ A \cos \left(2\pi F_c t + k \int_{-\infty}^t m(a) da \right) \right\} \\ &= -A \sin \left(2\pi F_c t + k \int_{-\infty}^t m(a) da \right) (2\pi F_c + km(t))\end{aligned}\quad (7.17)$$

το οποίο έχει την ίδια μορφή με ένα σήμα διαμορφωμένο κατά πλάτος. Άρα, μπορούμε να συνεχίσουμε την αποδιαμόρφωση FM χρησιμοποιώντας έναν φωρατή περιβάλλουσας.

Προφανώς, οι παραπάνω σημειώσεις προσέφεραν μόλις μία στοιχειώδη κάλυψη μερικών βασικών εννοιών της διαδικασίας διαμόρφωσης – αποδιαμόρφωσης.

7.7 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 7.1. Έστω δύο σήματα βασικής ζώνης συχνοτήτων $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ με τύπους

$$m_1(t) = 2\text{sinc}(3t) \quad (7.18)$$

και

$$m_2(t) = 4\text{sinc}^2(5t), \quad (7.19)$$

αντίστοιχα.

1. Δημιουργήστε στο MATLAB τα διανύσματα m_1 και m_2 με τιμές των $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$. Δημιουργήστε στο MATLAB τα γραφήματα (ξεχωριστά) των m_1 και m_2 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -2 5])` για να ορίσετε τους άξονες των γραφημάτων.
2. Υπολογίστε θεωρητικά τους μετασχηματισμούς Fourier $\{M_1(F)\}$ και $\{M_2(F)\}$ των $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$, αντίστοιχα. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα B_1 του σήματος $\{m_1(t)\}$ και ποιο το εύρος ζώνης συχνοτήτων (bandwidth) αυτού; Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα B_2 του σήματος $\{m_2(t)\}$ και ποιο το bandwidth αυτού;

3. Αν πρόκειται να διαμορφώσουμε τα σήματα $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ με την αναλογική τεχνική διαμόρφωσης DSB-SC AM χρησιμοποιώντας τις φέρουσες συχνότητες F_1 και F_2 , αντίστοιχα, και να προσθέσουμε τα δύο διαμορφωμένα σήματα, σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις επιτυγχάνουμε πολυπλεξία συχνότητας (ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων και να μπορούν να ανακτηθούν τα αρχικά σήματα στο δέκτη);

$$(\alpha') \quad F_1 = 4\text{Hz}, F_2 = 10\text{Hz}$$

$$(\beta') \quad F_1 = 5\text{Hz}, F_2 = 15\text{Hz}$$

$$(\gamma') \quad F_1 = 8\text{Hz}, F_2 = 15\text{Hz}$$

4. Για τις τιμές των F_1 και F_2 που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρήστε το σήμα $\{x(t)\}$ με τύπο $x(t) = m_1(t) \cos(2\pi F_1 t) + m_2(t) \cos(2\pi F_2 t)$ και δημιουργήστε στο MATLAB το διάνυσμα x με τιμές του $\{x(t)\}$ στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του x ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -5 10])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
5. Κατά την αποδιαμόρφωση του $\{x(t)\}$, με χρήσιμο σήμα το $\{m_1(t)\}$, δημιουργούμε αρχικά το σήμα $\{y_1(t)\}$ με τύπο $y_1(t) = 2x(t) \cos(2\pi F_1 t)$ και το περνούμε μέσα από ένα κατωπερατό φίλτρο $\{h_1(t)\}$ με συνάρτηση μεταφοράς $H_1(F) = \Pi\left(\frac{F}{2B_1}\right)$. Υπολογίστε θεωρητικά την κρουστική απόκριση $\{h_1(t)\}$ του φίλτρου.
6. Έστω $\{\hat{m}_1(t)\} = \{y_1(t)\} * \{h_1(t)\}$ η έξοδος του φίλτρου. Υλοποιήστε στο MATLAB την παραπάνω συνέλιξη (με προσέγγιση του ολοκληρώματος μέσω αθροίσματος) όπου τα $\{y_1(t)\}$ και $\{h_1(t)\}$ παίρνουν τιμές στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$ ενώ το τελικό $\{\hat{m}_1(t)\}$ παίρνει τιμές στο πλέγμα $t = [-20 : 0,002 : 20]$. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m}_1 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -2 5])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
7. Επαναλάβετε τη διαδικασία αποδιαμόρφωσης για το χρήσιμο σήμα $\{m_2(t)\}$, όπου $y_2(t) = 2x(t) \cos(2\pi F_2 t)$ και $\{\hat{m}_2(t)\} = \{y_2(t)\} * \{h_2(t)\}$ με $H_2(F) = \Pi\left(\frac{F}{2B_2}\right)$. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m}_2 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-1 1 -2 5])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.

8. Είναι η αποδιαμόρφωση επιτυχής και για τα δύο χρήσιμα σήματα;

Άσκηση 7.2. Έστω δύο σήματα βασικής ζώνης συχνοτήτων $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ με τύπους

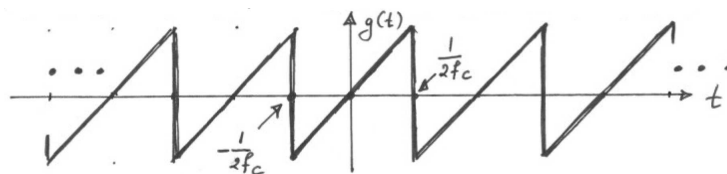
$$m_1(t) = \frac{5}{2} \cdot \text{sinc}\left(10t - \frac{1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cdot \text{sinc}\left(10t + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot \sin(18(t-1)) \quad (7.20)$$

και

$$m_2(t) = 4 \cdot \text{sinc}(4t), \quad (7.21)$$

αντίστοιχα.

1. Δημιουργήστε στο MATLAB τα διανύσματα m_1 και m_2 με τιμές των $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$. Δημιουργήστε στο MATLAB τα γραφήματα (ξεχωριστά) των m_1 και m_2 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -5 8])` για να ορίσετε τους άξονες των γραφημάτων.
2. Υπολογίστε θεωρητικά τους μετασχηματισμούς Fourier $\{M_1(F)\}$ και $\{M_2(F)\}$ των $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$, αντίστοιχα. Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα B_1 του σήματος $\{m_1(t)\}$ και ποιο το εύρος ζώνης συχνοτήτων (bandwidth) αυτού; Ποια είναι η μέγιστη συχνότητα B_2 του σήματος $\{m_2(t)\}$ και ποιο το bandwidth αυτού;
3. Αν πρόκειται να διαμορφώσουμε τα σήματα $\{m_1(t)\}$ και $\{m_2(t)\}$ με την αναλογική τεχνική διαμόρφωσης DSB-SC AM χρησιμοποιώντας τις φέρουσες συχνότητες F_1 και F_2 , αντίστοιχα, και να προσθέσουμε τα δύο διαμορφωμένα σήματα, σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις επιτυγχάνουμε πολυπλεξία συχνότητας (ώστε να μην υπάρχει επικάλυψη των σημάτων στο χώρο των συχνοτήτων και να μπορούν να ανακτηθούν τα αρχικά σήματα στο δέκτη);
 - (α') $F_1 = 5\text{Hz}, F_2 = 10\text{Hz}$
 - (β') $F_1 = 5\text{Hz}, F_2 = 15\text{Hz}$
 - (γ') $F_1 = 10\text{Hz}, F_2 = 15\text{Hz}$
4. Για τις τιμές των F_1 και F_2 που επιλέξατε στο προηγούμενο ερώτημα, θεωρήστε το σήμα $\{x(t)\}$ με τύπο $x(t) = m_1(t) \cos(2\pi F_1 t) + m_2(t) \cos(2\pi F_2 t)$ και δημιουργήστε στο MATLAB το διάνυσμα x με τιμές του $\{x(t)\}$ στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$.



Σχ. 7.44. Σχήμα για την Άσκηση 7.3.

Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του x ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -5 8])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.

5. Κατά την αποδιαμόρφωση του $\{x(t)\}$, με χρήσιμο σήμα το $\{m_1(t)\}$, δημιουργούμε αρχικά το σήμα $\{y_1(t)\}$ με τύπο $y_1(t) = 2x(t) \cos(2\pi F_1 t)$ και το περνούμε μέσα από ένα κατωπερατό φίλτρο $\{h_1(t)\}$ με συνάρτηση μεταφοράς $H_1(F) = \Pi\left(\frac{F}{2B_1}\right)$. Υπολογίστε θεωρητικά την κρουστική απόκριση $\{h_1(t)\}$ του φίλτρου.
6. Έστω $\{\hat{m}_1(t)\} = \{y_1(t)\} * \{h_1(t)\}$ η έξοδος του φίλτρου. Υλοποιήστε στο MATLAB την παραπάνω συνέλιξη (με προσέγγιση του ολοκληρώματος μέσω αθροίσματος) όπου τα $\{y_1(t)\}$ και $\{h_1(t)\}$ παίρνουν τιμές στο πλέγμα $t = [-10 : 0,002 : 10]$ ενώ το τελικό $\{\hat{m}_1(t)\}$ παίρνει τιμές στο πλέγμα $t = [-20 : 0,002 : 20]$. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m}_1 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -5 8])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
7. Επαναλάβετε τη διαδικασία αποδιαμόρφωσης για το χρήσιμο σήμα $\{m_2(t)\}$, όπου $y_2(t) = 2x(t) \cos(2\pi F_2 t)$ και $\{\hat{m}_2(t)\} = \{y_2(t)\} * \{h_2(t)\}$ με $H_2(F) = \Pi\left(\frac{F}{2B_2}\right)$. Δημιουργήστε στο MATLAB το γράφημα του \hat{m}_2 ως προς t . Χρησιμοποιήστε την εντολή `axis([-3 3 -5 8])` για να ορίσετε τους άξονες του γραφήματος.
8. Είναι η αποδιαμόρφωση επιτυχής και για τα δύο χρήσιμα σήματα;

Άσκηση 7.3. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2004] Είστε στο εργαστήριο και θέλετε να υλοποιήσετε έναν διαμορφωτή AM, αλλά δεν έχετε στη διάθεσή σας γεννήτρια ημιτόνου για την παραγωγή του φέροντος, παρά μόνον γεννήτρια που παράγει την κυματομορφή του Σχ. 7.44. Υπολογίστε και σχεδιάστε το πλάτος του μετασχηματισμού Fourier του διαμορφωμένου σήματος. Τι επιπτώσεις θα έχει η χρήση αυτής της γεννήτριας στο εκπεμπόμενο σήμα;

Άσκηση 7.4. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2004] Λαμβάνετε σήμα διαμορφωμένο κατά AM χωρίς φέρον (DSB-SC-AM) της μορφής $\{x(t)\} = \{m(t)\}\{\cos(2\pi F_c t + \phi)\}$ όπου το $\{m(t)\}$ είναι ακουστικό σήμα πληροφορίας, F_c είναι η συχνότητα φέροντος, και ϕ είναι μία άγνωστη σε εσάς φάση. Θεωρήστε ότι έχετε δείγματα του $\{x(t)\}$ που ελήφθησαν με υπερδειγματοληψία (πολύ περισσότερα από $2F_c$ δείγματα/δευτερόλεπτο) αποθηκευμένα σε ένα άνυσμα **x** του MATLAB. Επιπλέον, ένας συνάδελφός σας έχει γράψει ρουτίνα **c=glc(fc,theta)** που κατασκευάζει αντίστοιχα δείγματα του σήματος $\{c(t)\} = \{\cos(2\pi F_c t + \theta)\}$ και τα επιστρέφει στο άνυσμα **c**. Τέλος, έχετε στη διάθεσή σας ρουτίνα **d=lpf(z)** που περνάει μόνο τις ακουστικές συχνότητες από το σήμα **z** στο σήμα **d** κόβοντας όλες τις πιο υψηλές συχνότητες. Γράψτε ένα μικρό script MATLAB που να εκτιμάει την άγνωστη φάση ϕ . Σχόλια; (Σημ.: Σκεφτείτε από τη θεωρία τι συμβαίνει όταν $\theta \neq \phi$).

Άσκηση 7.5. [Εξετάσεις Φεβρουαρίου 2005 και Σεπτεμβρίου 2005] Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας ένα κανάλι με εύρος φάσματος A KHz (θεωρούμε μόνο το θετικό ημιάξονα των συχνοτήτων). Περιγράψτε με λεπτομέρεια έναν τρόπο που επιτρέπει την ταυτόχρονη μετάδοση των σημάτων N χρηστών, καθένα με (μονόπλευρο) εύρος φάσματος B KHz (επιθυμούμε οι χρήστες να χωρίζονται μεταξύ τους από μία ζώνη g KHz). Ποιος είναι ο μέγιστος αριθμός χρηστών που μπορεί να εξυπηρετήσει το σχήμα που προτείνετε;

Άσκηση 7.6. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2006] Έστω ότι επιθυμούμε να μεταδώσουμε ταυτόχρονα N **πραγματικά** σήματα $\{x_i(t)\}$ το καθένα από τα οποία έχει μη μηδενικό φάσμα στο διάστημα συχνοτήτων $[0, B)$ Hz. Έστω ότι το συνολικό διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων είναι το $[F_1, F_2)$ Hz.

1. Να σχεδιάσετε και να περιγράψετε λεπτομερώς ένα σύστημα που επιτυγχάνει αυτόν το σκοπό, όταν επιθυμούμε ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο διαδοχικά στη συχνότητα μεταδιδόμενα σήματα να υπάρχει μία “κενή” ζώνη συχνοτήτων μήκους g Hz.
2. Ποιους φορείς θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε και γιατί;
3. Ποιο είναι το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος φάσματος $F_2 - F_1$ σε σχέση με το πλήθος των σημάτων N , το εύρος φάσματος κάθε σήματος B , και το εύρος της “κενής” ζώνης g ;

Άσκηση 7.7. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2007] Το σήμα συνεχούς χρόνου $\{x(t)\}$ με τύπο $x(t) = \text{sinc}(t) + \text{sinc}^2(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ πολλαπλασιάζεται με το σήμα $\{y(t)\}$ με τύπο $y(t) = 10 \cdot \cos(6,28 \cdot 10^6 \cdot t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Έστω $\{z(t)\}$ το σήμα που προκύπτει.

- α. Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier του $\{x(t)\}$.
- β. Υπολογίστε και σχεδιάστε το μετασχηματισμό Fourier του $\{z(t)\}$. Ποιο είναι το εύρος συχνοτήτων του $\{z(t)\}$;
- γ. Χρησιμοποιώντας ένα κατάλληλο κατωπερατό φίλτρο, έναν πολλαπλασιαστή σημάτων συνεχούς χρόνου, και το $\{y(t)\}$, περιγράψτε αναλυτικά πώς μπορεί να ανακτηθεί το αρχικό σήμα $\{x(t)\}$.

Άσκηση 7.8. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2009] Έστω ότι επιθυμούμε να μεταδώσουμε με διαμόρφωση SSB ταυτόχρονα N πραγματικά σήματα $\{x_i(t)\}$, $i = 1, 2, \dots, N$, το καθένα από τα οποία έχει μη μηδενικό φάσμα στο διάστημα συχνοτήτων $(-B, B)\text{Hz}$. Έστω ότι το συνολικό διαθέσιμο φάσμα συχνοτήτων είναι το $(-F_2, -F_1) \cup (F_1, F_2)\text{Hz}$.

1. Να σχεδιάσετε και να περιγράψετε λεπτομερώς ένα σύστημα που επιτυγχάνει αυτόν το σκοπό, όταν επιθυμούμε ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο διαδοχικά στη συχνότητα μεταδιδόμενα σήματα να υπάρχει μία “κενή” ζώνη συχνοτήτων μήκους g Hz.
2. Ποιους φορείς θα πρέπει να χρησιμοποιήσετε και γιατί;
3. Ποιο είναι το ελάχιστο απαιτούμενο εύρος φάσματος $F_2 - F_1$ σε σχέση με το πλήθος των σημάτων N , το εύρος φάσματος κάθε σήματος B , και το εύρος της “κενής” ζώνης g ;

Κεφάλαιο 8

Μετασχηματισμός Laplace

Σε προηγούμενα κεφάλαια είδαμε ότι τεχνικές μετασχηματισμού Fourier είναι πολύ χρήσιμες για την ανάλυση σημάτων και ΓΧΑ συστημάτων. Αυτό συμβαίνει διότι

1. μεγάλες κλάσεις σημάτων διακριτού ή συνεχούς χρόνου μπορούν να αναπαρασταθούν σαν γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών εκθετικών σημάτων και
2. τα μιγαδικά εκθετικά σήματα αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις ΓΧΑ συστημάτων.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο μετασχηματισμός Laplace έχει πολλές από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier. Επιπλέον, αποτελεί ένα εξαιρετικό μαθηματικό εργαλείο σε περιπτώσεις που ο μετασχηματισμός Fourier αδυνατεί να βοηθήσει, όπως, για παράδειγμα, στη μελέτη ευστάθειας ΓΧΑ συστημάτων.

Αν s είναι μιγαδικός αριθμός $s = \sigma + j\Omega$,¹ τότε ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\}$ ορίζεται ως

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (8.2)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι συνάρτηση της μιγαδικής μεταβλητής s , της οποίας το πραγματικό μέρος είναι σ και το φανταστικό Ω . Άρα, το πεδίο ορισμού της, γενικά, είναι το

¹Σε αυτό το κεφάλαιο, για να εξασφαλίσουμε τη συμβατότητα μεταξύ των συμβολισμών του μετασχηματισμού Fourier και του μετασχηματισμού Laplace, θα χρησιμοποιήσουμε τον εξής συμβολισμό για το μετασχηματισμό Fourier

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt. \quad (8.1)$$

μιγαδικό επίπεδο. Αν ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\}$ ορίζεται, τότε βλέπουμε εύκολα ότι

$$X(s)|_{s=j\Omega} = \mathcal{F}\{x(t)\}. \quad (8.3)$$

Επιπλέον,

$$X(s) = X(\sigma + j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) e^{-\sigma t}) e^{-j\Omega t} dt. \quad (8.4)$$

Δηλαδή, ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\}$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν το μετασχηματισμό Fourier του $\{x(t)e^{-\sigma t}\}$. Το πραγματικό εκθετικό σήμα $\{e^{-\sigma t}\}$ αυξάνει (φθίνει) με την αύξηση του χρόνου αν το σ είναι αρνητικό (θετικό).

Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, λαμβάνουμε

$$x(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega. \quad (8.5)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της εξίσωσης με $e^{\sigma t}$, λαμβάνουμε

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\sigma + j\Omega) e^{(\sigma + j\Omega)t} d\Omega. \quad (8.6)$$

Αλλάζοντας μεταβλητή ολοκλήρωσης από Ω σε s και χρησιμοποιώντας το ότι το σ είναι σταθερό, λαμβάνουμε $ds = j d\Omega$. Συνεπώς, οδηγούμαστε στον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s) e^{st} ds.} \quad (8.7)$$

Το ζεύγος μετασχηματισμού Laplace συμβολίζεται ως

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s)\}. \quad (8.8)$$

Στα πλαίσια αυτού του μαθήματος, θα υπολογίσουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace ρητών συναρτήσεων του s με ανάλυση σε απλά κλάσματα και χρήση πινάκων μετασχηματισμών, αποφεύγοντας την αντιστροφή μέσω μιγαδικής ολοκλήρωσης.

Παράδειγμα 8.1. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\} = \{e^{-at}u(t)\}$.

Είδαμε σε προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)\}$ συγκλίνει για $a > 0$ και είναι

$$X(j\Omega) = \frac{1}{a + j\Omega}, \quad a > 0. \quad (8.9)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\}$ ορίζεται ως

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(t) e^{-(\sigma + j\Omega)t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+\sigma)t} e^{-j\Omega t} dt \quad (8.10)$$

που ισούται με το μετασχηματισμό Fourier του $\{e^{-(a+\sigma)t} u(t)\}$, δηλαδή,

$$X(s) = \frac{1}{(\sigma + a) + j\Omega}, \quad \sigma + a > 0. \quad (8.11)$$

Εξαιτίας του ότι $s = \sigma + j\Omega$, έχουμε

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \operatorname{Re}(s) > -a. \quad (8.12)$$

Άρα

$$\{e^{-at} u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{s + a}, \quad \operatorname{Re}(s) > -a \right\}. \quad (8.13)$$

◇

Βλέπουμε ότι, όπως ο μετασχηματισμός Fourier δεν συγκλίνει για όλα τα a , έτσι και ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να συγκλίνει για κάποια $\operatorname{Re}(s)$ και να μη συγκλίνει για κάποια άλλα.

Παράδειγμα 8.2. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\} = -\{e^{-at} u(-t)\}$.

$$X(s) = - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at} u(-t) e^{-st} dt = - \int_{-\infty}^0 e^{-(s+a)t} dt. \quad (8.14)$$

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα (συμπληρώστε τις λεπτομέρειες) ότι

$$X(s) = \frac{1}{s + a}, \quad \operatorname{Re}(s) < -a, \quad (8.15)$$

δηλαδή,

$$-\{e^{-at} u(-t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{s + a}, \quad \operatorname{Re}(s) < -a \right\}. \quad (8.16)$$

◇

Συγκρίνοντας τις (8.13) και (8.16), παρατηρούμε ότι οι αλγεβρικές εκφράσεις των μετασχηματισμών Laplace δύο διαφορετικών σημάτων ταυτίζονται. Η μοναδικότητα αποκαθίσταται όταν θεωρήσουμε και τις περιοχές στις οποίες ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace.

Η περιοχή στην οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός Laplace καλείται **περιοχή σύγκλισης** (region of convergence - ROC) και αποτελείται από τα $s = \sigma + j\Omega$ για τα οποία ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)e^{-\sigma t}\}$.

Παράδειγμα 8.3. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του

$$\{x(t)\} = 3\{e^{-2t}u(t)\} - 2\{e^{-t}u(t)\}. \quad (8.17)$$

Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Laplace, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} (3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)) e^{-st} dt \\ &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t}u(t)e^{-st} dt - 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-st} dt. \end{aligned} \quad (8.18)$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα συγκλίνει για $\text{Re}(s) > -2$ και η αλγεβρική του έκφραση είναι $\frac{1}{s+2}$, ενώ το δεύτερο συγκλίνει για $\text{Re}(s) > -1$ και η αλγεβρική του έκφραση είναι $\frac{1}{s+1}$. Ο μετασχηματισμός Laplace συγκλίνει στην τομή των δύο επιμέρους περιοχών σύγκλισης, συνεπώς

$$X(s) = \frac{3}{s+2} - \frac{2}{s+1} = \frac{s-1}{s^2+3s+2}, \quad \text{Re}(s) > -1. \quad (8.19)$$

◇

Παράδειγμα 8.4. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\} = \{\delta(t)\}$.

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{st} dt \right\} = \{e^0\} = \{1\}. \quad (8.20)$$

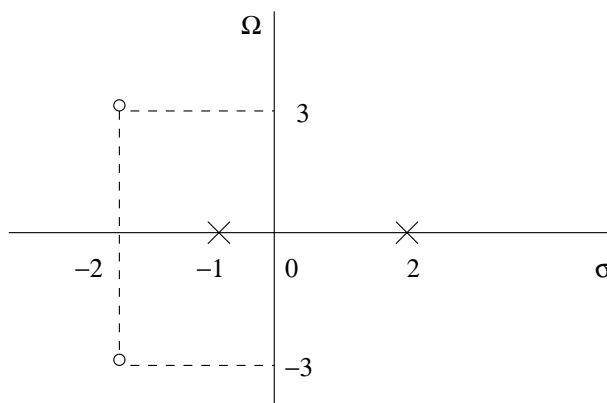
◇

Παράδειγμα 8.5. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του $\{x(t)\} = \{u(t)\}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $u(t) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-at}u(t)$, λαμβάνουμε

$$U(s) = \frac{1}{s}, \quad \text{Re}(s) > 0. \quad (8.21)$$

◇



Σχ. 8.1. Αναπαράσταση μηδενικών-πόλων μετασχηματισμού Laplace, με μηδενικά στις θέσεις $-2 \pm 3j$ και πόλους στις θέσεις $-1, 2$.

8.1 Περιοχή σύγκλισης μετασχηματισμού Laplace

Είδαμε παραπάνω ότι ο μετασχηματισμός Laplace σημάτων που είναι γραμμικός συνδυασμός πραγματικών εκθετικών σημάτων είναι ρητή συνάρτηση του s . Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ίδιο ισχύει για γραμμικούς συνδυασμούς μιγαδικών εκθετικών σημάτων.

Για ρητούς μετασχηματισμούς Laplace, τα s για τα οποία μηδενίζεται ο αριθμητής καλούνται **μηδενικά** (zeros) του $\{X(s)\}$, διότι για αυτά τα s έχουμε $X(s) = 0$. Αντίστοιχα, τα s για τα οποία μηδενίζεται ο παρονομαστής καλούνται **πόλοι** (poles) του $\{X(s)\}$. Ο μετασχηματισμός Laplace δεν ορίζεται πάνω στου πόλους. Η αναπαράσταση του $\{X(s)\}$ στο μιγαδικό επίπεδο διαμέσω των μηδενικών και των πόλων του καλείται **αναπαράσταση μηδενικών-πόλων** (zero-pole representation) του $\{X(s)\}$.

Ιδιότητα 1: Η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace αποτελείται από λωρίδες παράλληλες στον φανταστικό άξονα του μιγαδικού επιπέδου.

Η πρόταση αυτή αληθεύει διότι η περιοχή σύγκλισης του $\{X(s)\}$ αποτελείται από τα $s = \sigma + j\Omega$ για τα οποία ο μετασχηματισμός Fourier του $\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ συγκλίνει. Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει το $\{x(t)e^{-\sigma t}\}$ να είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο, δηλαδή,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty. \quad (8.22)$$

Η ιδιότητα 1 ισχύει διότι η παραπάνω συνθήκη εξαρτάται μόνο από το πραγματικό μέρος σ

του s .

Ιδιότητα 2: Για ρητούς μετασχηματισμούς Laplace, η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει πόλους.

Εξ ορισμού, οι πόλοι είναι σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία ο $\{X(s)\}$ απειρίζεται. Συνεπώς, δεν ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

Ιδιότητα 3: Αν το $\{x(t)\}$ είναι πεπερασμένης διάρκειας και απόλυτα ολοκληρώσιμο, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Η ιδιότητα 3 είναι αληθής διότι αν το $\{x(t)\}$ ορίζεται για $t \in [t_1, t_2]$, με $-\infty < t_1 < t_2 < \infty$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται για τα $s = \sigma + j\Omega$ για τα οποία

$$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \quad (8.23)$$

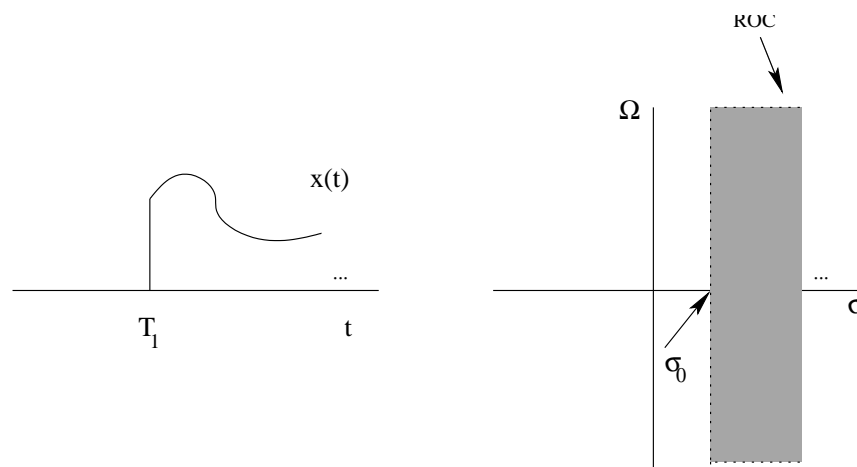
το οποίο ισχύει για κάθε $\sigma \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, η περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Ορίζουμε ένα σήμα $\{x(t)\}$ ως **δεξιόπλευρο** (right-sided) αν $x(t) = 0$ για $t < T_1$, όπου T_1 είναι ένας πεπερασμένος αριθμός. Για παράδειγμα, ένα αιτιατό σήμα είναι δεξιόπλευρο. Αντίστοιχα, το $\{x(t)\}$ καλείται **αριστερόπλευρο** (left-sided) αν $x(t) = 0$ για $t > T_2$, με T_2 πεπερασμένο αριθμό. Για παράδειγμα το $\{u(-t)\}$ και το $\{u(-t-2)\}$ είναι αριστερόπλευρα. Ένα σήμα καλείται **αμφίπλευρο** (two-sided) αν είναι μη μηδενικό πάνω σε όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών. Για παράδειγμα, το $\{e^{-|t|}\}$ είναι αμφίπλευρο.

Ιδιότητα 4: Αν το $\{x(t)\}$ είναι δεξιόπλευρο, και αν η γραμμή $\text{Re}(s) = \sigma_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε όλα τα s για τα οποία $\text{Re}(s) > \sigma_0$ ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

Αυτή η ιδιότητα είναι αληθής διότι αν $\sigma_1 > \sigma_0$, τότε

$$\begin{aligned} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_1 t} dt &= \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)t} dt \\ &\stackrel{(1)}{\leq} e^{-(\sigma_1 - \sigma_0)T_1} \int_{T_1}^{\infty} |x(t)| e^{-\sigma_0 t} dt < \infty \end{aligned} \quad (8.24)$$



Σχ. 8.2. Δεξιόπλευρο σήμα $\{x(t)\}$ και περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace.

όπου η ανισότητα (1) ισχύει διότι, για $a > 0$, το $\{e^{-at}\}$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του t . Συνεπώς, αν ένα σημείο s ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε κάθε σημείο που βρίσκεται στα δεξιά του s θα ανήκει στην περιοχή σύγκλισης. Άρα, η περιοχή σύγκλισης θα είναι ένα **δεξιό ημιεπίπεδο** (right-half plane).

Ιδιότητα 5: Αν το $\{x(t)\}$ είναι αριστερόπλευρο, και αν η γραμμή $\text{Re}(s) = \sigma_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε όλα τα s για τα οποία $\text{Re}(s) < \sigma_0$ ανήκουν στην περιοχή σύγκλισης.

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται ανάλογα με την προηγούμενη. Η περιοχή σύγκλισης θα είναι ένα **αριστερό ημιεπίπεδο** (left-half plane).

Ιδιότητα 6: Αν το $\{x(t)\}$ είναι αμφίπλευρο και αν η γραμμή $\text{Re}(s) = \sigma_0$ ανήκει στην περιοχή σύγκλισης, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι μία λωρίδα στο μιγαδικό επίπεδο που περιέχει τη γραμμή $\text{Re}(s) = \sigma_0$.

Η ιδιότητα αυτή αποδεικνύεται επιλέγοντας αυθαίρετα μία χρονική στιγμή T_0 και εκφράζοντας το $\{x(t)\}$ σαν το άθροισμα του δεξιόπλευρου σήματος $\{x_R(t)\}$ και του αριστερόπλευρου σήματος $\{x_L(t)\}$. Ο μετασχηματισμός Laplace $\{X(s)\}$ θα ορίζεται πάνω στην τομή των ημιεπιπέδων στα οποία ορίζονται ο $\{X_R(s)\}$ και ο $\{X_L(s)\}$.

Οι δύο παρακάτω ιδιότητες θα γίνουν εύκολα κατανοητές αφού μιλήσουμε για αντιστροφή ρητών μετασχηματισμών Laplace.

Ιδιότητα 7: Αν ο μετασχηματισμός Laplace $\{X(s)\}$ του $\{x(t)\}$ είναι ρητός, τότε η περιοχή σύγκλισης περιορίζεται ανάμεσα σε δύο πόλους του $\{X(s)\}$ ή εκτείνεται στο άπειρο. Επιπλέον, η περιοχή σύγκλισης δεν περιέχει κανένα πόλο του $\{X(s)\}$.

Ιδιότητα 8: Αν ο μετασχηματισμός Laplace $\{X(s)\}$ του $\{x(t)\}$ είναι ρητός, τότε, αν το $\{x(t)\}$ είναι δεξιόπλευρο, η περιοχή σύγκλισης είναι το κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκεται δεξιά από τον δεξιότερο πόλο του $\{X(s)\}$. Αν το $\{x(t)\}$ είναι αριστερόπλευρο, τότε η περιοχή σύγκλισης είναι το κομμάτι του μιγαδικού επιπέδου που βρίσκεται αριστερά από το αριστερότερο πόλο του $\{X(s)\}$.

8.2 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Στα πλαίσια του μαθήματος αυτού, θα ασχοληθούμε μόνο με την αντιστροφή ρητών μετασχηματισμών Laplace. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η τάξη του αριθμητή M είναι μικρότερη από την τάξη του παρονομαστή N . Εάν δεν ικανοποιείται αυτή η υπόθεση, μπορούμε να διαιρέσουμε τον αριθμητή με τον παρονομαστή λαμβάνοντας ένα πολώνυμο του s και μία ρητή συνάρτηση που να ικανοποιεί την υπόθεση. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να αναλύσουμε τη ρητή συνάρτηση σε απλά κλάσματα. Υποθέτοντας ότι οι πόλοι s_i είναι απλοί, έχουμε

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{\prod_{i=1}^N (s - s_i)} = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} \quad (8.25)$$

όπου τα A_i υπολογίζονται από τη σχέση

$$A_i = (s - s_i)X(s)|_{s=s_i}. \quad (8.26)$$

Εξαιτίας της γραμμικότητας του μετασχηματισμού Laplace (η οποία θα αποδειχθεί στο επόμενο εδάφιο), ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται ως εξής.

$$\{x(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i}\right\} = \sum_{i=1}^N A_i \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s - s_i}\right\}. \quad (8.27)$$

Συνεπώς, αρκεί να μπορούμε να υπολογίσουμε αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace της μορφής

$$X_i(s) = \frac{1}{s - s_i}. \quad (8.28)$$

Είδαμε προηγουμένως ότι²

$$\{e^{s_i t} u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{s - s_i}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_i) \right\}, \quad (8.29)$$

$$\{e^{s_i t} u(-t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{s - s_i}, \quad \operatorname{Re}(s) < \operatorname{Re}(s_i) \right\}. \quad (8.30)$$

Αν γνωρίζουμε την περιοχή σύγκλισης του $\{X(s)\}$ (υποθέτουμε ότι πάντα, άμεσα ή έμμεσα, θα γνωρίζουμε την περιοχή σύγκλισης), τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τον $\mathcal{L}^{-1}\{X_i(s)\}$, $i = 1, \dots, N$, και συνεπώς τον $\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}$.

Παράδειγμα 8.6. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του

$$\{X(s)\} = \left\{ \frac{1}{(s+1)(s+2)}, \quad \operatorname{Re}(s) > -1 \right\}. \quad (8.31)$$

Θα πρέπει να εκφράσουμε το $X(s)$ σε μορφή απλών κλασμάτων, δηλαδή

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}. \quad (8.32)$$

Τα A_1, A_2 υπολογίζονται ως εξής.

$$A_1 = (s+1)X(s)|_{s=-1} = 1 \quad (8.33)$$

$$A_2 = (s+2)X(s)|_{s=-2} = -1. \quad (8.34)$$

Άρα,

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}. \quad (8.35)$$

²Έχουμε κάνει την απόδειξη για $s_i \in \mathbb{R}$. Με αντίστοιχο τρόπο μπορεί να γίνει η απόδειξη για $s_i \in \mathbb{C}$.

Από τη μορφή της περιοχής σύγκλισης, ανταλαμβανόμαστε ότι το $\{x(t)\}$ πρέπει να είναι δεξιόπλευρο. Αυτό σημαίνει ότι αντιστρέφοντας κατά Laplace καθεμία από τις δύο παραπάνω συνιστώσες θα πρέπει να επιλέξουμε το μετασχηματισμό που οδηγεί σε δεξιόπλευρες λύσεις. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \{e^{-t}u(t)\} - \{e^{-2t}u(t)\} \\ &= \{(e^{-t} - e^{-2t})u(t)\}.\end{aligned}\tag{8.36}$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα ότι η περιοχή σύγκλισης του $\{(e^{-t} - e^{-2t})u(t)\}$ είναι $\operatorname{Re}(s) > -1$. \diamond

Παράδειγμα 8.7. Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του προηγούμενου παραδείγματος αν

1. $\operatorname{Re}(s) < -2$,
2. $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$.

Στην περίπτωση 1, η λύση θα πρέπει να είναι αριστερόπλευρη. Συνεπώς, για $\operatorname{Re}(s) < -2$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \{(-e^{-t} + e^{-2t})u(-t)\}.\tag{8.37}$$

Στην περίπτωση 2, η λύση που επάγεται από τον πόλο $s = -2$ θα πρέπει να είναι δεξιόπλευρη, ενώ αυτή που επάγεται από τον πόλο $s = -1$ αριστερόπλευρη. Άρα, για $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$,

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = \{-e^{-t}u(-t)\} - \{e^{-2t}u(t)\}.\tag{8.38}$$

\diamond

8.3 Ιδιότητες μετασχηματισμού Laplace

Στη συνέχεια, θα αναφερθούμε συνοπτικά σε κάποιες από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace. Οι περισσότερες αποδείξεις παραλείπονται λόγω της ομοιότητας με αντίστοιχες αποδείξεις ιδιοτήτων του μετασχηματισμού Fourier.

8.3.1 Γραμμικότητα

Αν

$$\{x_1(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X_1(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R_1\} \quad (8.39)$$

και

$$\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X_2(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R_2\} \quad (8.40)$$

τότε

$$\{ax_1(t) + bx_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{aX_1(s) + bX_2(s), \quad \text{η περιοχή σύγκλισης περιέχει την } R_1 \cap R_2\}. \quad (8.41)$$

8.3.2 Ολίσθηση στο χρόνο

Αν

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\} \quad (8.42)$$

τότε

$$\{x(t - t_0)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{e^{-st_0} X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\}. \quad (8.43)$$

8.3.3 Ολίσθηση στο πεδίο s

Αν

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\} \quad (8.44)$$

τότε

$$\{e^{s_0 t} x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s - s_0), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R + \text{Re}(s_0)\}. \quad (8.45)$$

Παράδειγμα 8.8. Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace του σήματος $\{x(t)\} = \{\cos(\Omega_0 t)u(t)\}$.

Από τον τύπο του Euler, έχουμε

$$\cos(\Omega_0 t)u(t) = \frac{1}{2} (e^{j\Omega_0 t} + e^{-j\Omega_0 t}) u(t). \quad (8.46)$$

Από την ιδιότητα ολίσθησης στο πεδίο s και τη γραμμικότητα, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\cos(\Omega_0 t)u(t)\} &= \frac{1}{2}\{U(s - j\Omega_0), \quad \operatorname{Re}(s) > 0\} + \{U(s + j\Omega_0), \quad \operatorname{Re}(s) > 0\} \\ &= \left\{ \frac{1}{2(s - j\Omega_0)} + \frac{1}{2(s + j\Omega_0)}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{s}{s^2 + \Omega_0^2}, \quad \operatorname{Re}(s) > 0 \right\}.\end{aligned}\tag{8.47}$$

◇

Δείτε παρόμοια προβλήματα στις Ασκήσεις 8.10-8.12.

8.3.4 Κλιμάκωση χρόνου

Αν

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\},\tag{8.48}$$

τότε

$$\{x(at)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R_1 = aR \right\}.\tag{8.49}$$

8.3.5 Συνέλιξη στο χρόνο

Αν

$$\{x_1(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X_1(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R_1\}\tag{8.50}$$

και

$$\{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X_2(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R_2\},\tag{8.51}$$

τότε

$$\{x_1(t)\} * \{x_2(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X_1(s)X_2(s), \quad \text{η περιοχή σύγκλισης περιέχει την } R_1 \cap R_2\}.\tag{8.52}$$

8.3.6 Διαφόριση στο χρόνο

Αν

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\},\tag{8.53}$$

τότε

$$\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{sX(s), \quad \text{η περιοχή σύγκλισης περιέχει την } R\}. \quad (8.54)$$

Απόδειξη: Από τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, έχουμε

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} dt. \quad (8.55)$$

Διαφορίζοντας και τα δύο μέλη ως προς το χρόνο, λαμβάνουμε

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} sX(s)e^{st} dt. \quad (8.56)$$

Άρα, ο μετασχηματισμός Laplace του $\left\{ \frac{dx(t)}{dt} \right\}$ είναι ο $\{sX(s)\}$.

8.3.7 Διαφόριση στο πεδίο s

Αν

$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\}, \quad (8.57)$$

τότε

$$-\{tx(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{dX(s)}{ds}, \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R \right\}. \quad (8.58)$$

8.3.8 Ολοκλήρωση στο χρόνο

Αν

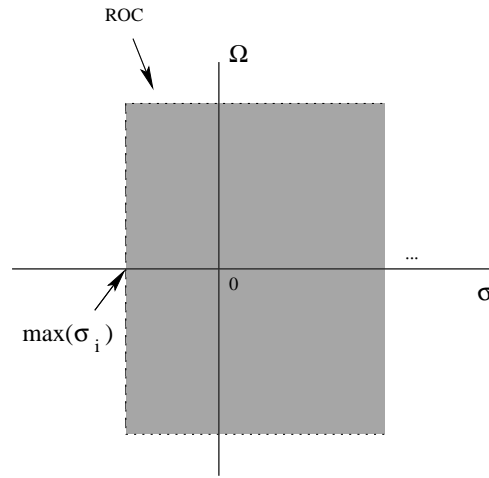
$$\{x(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \{X(s), \quad \text{περιοχή σύγκλισης } R\}, \quad (8.59)$$

τότε

$$\left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{X(s)}{s}, \quad \text{η περιοχή σύγκλισης περιέχει την } R \cap \{\operatorname{Re}(s) > 0\} \right\}. \quad (8.60)$$

8.4 Ανάλυση ΓΧΑ συστημάτων με χρήση του μετασχηματισμού Laplace

Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο, οι μετασχηματισμοί Laplace της εισόδου $\{x(t)\}$, της κρουστικής απόκρισης $\{h(t)\}$, και της εξόδου $\{y(t)\}$ ενός ΓΧΑ συστήματος συνεχούς



Σχ. 8.3. Περιοχή σύγκλισης ρητής συνάρτησης μεταφοράς αιτιατού και ευσταθούς ΓΧΑ συστήματος με πόλους $s_i = \sigma_i + j\Omega_i$.

χρόνου συνδέονται με τη σχέση

$$Y(s) = X(s)H(s). \quad (8.61)$$

Η συνάρτηση $\{H(s)\}$ καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** (transfer function) του εν λόγω ΓΧΑ συστήματος.

Αν θέσουμε ως είσοδο $\{x(t)\} = \{e^{st}\}$, με $s = \sigma + j\Omega$, στο ΓΧΑ σύστημα με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$, λαμβάνουμε ως έξοδο

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s). \quad (8.62)$$

Άρα, τα σήματα $\{e^{st}\} = \{e^{\sigma t}e^{j\Omega t}\}$ αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις των ΓΧΑ συστημάτων.

8.4.1 Αιτιατότητα

Η κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ ενός αιτιατού συστήματος είναι μηδενική για $t < 0$ και, συνεπώς, η περιοχή που ορίζεται η συνάρτηση μεταφοράς είναι ένα δεξιό ημιεπίπεδο.

Ειδικότερα, αν η συνάρτηση μεταφοράς είναι ρητή συνάρτηση του s , τότε το σύστημα είναι αιτιατό αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης είναι το δεξιό ημιεπίπεδο που βρίσκεται στα δεξιά του δεξιότερου πόλου.

8.4.2 Ευστάθεια

Έχουμε δει ότι ένα ΓΧΑ σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ είναι BIBO ευσταθές αν και μόνο αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)| dt < \infty. \quad (8.63)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, έχουμε ότι το σήμα $\{|h(t)|e^{\sigma t}\}$ με $\sigma = 0$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμο, συνεπώς ο φανταστικός άξονας ανήκει στην περιοχή σύγκλισης του μετασχηματισμού Laplace. Συνεπώς,

Ένα ΓΧΑ σύστημα είναι BIBO ευσταθές αν και μόνο αν η περιοχή ορισμού της συνάρτησης μεταφοράς περιλαμβάνει το φανταστικό άξονα, δηλαδή, $\text{Re}(s) = 0$.

Συνδυάζοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με το γεγονός ότι η συνάρτηση μεταφοράς ενός αιτιατού συστήματος με ρητή συνάρτηση μεταφοράς είναι το ημιεπίπεδο που βρίσκεται δεξιά του δεξιότερου πόλου, λαμβάνουμε το εξής.

Ένα αιτιατό σύστημα με ρητή συνάρτηση μεταφοράς $\{H(s)\}$ είναι ευσταθές αν και μόνο αν όλοι οι πόλοι του $\{H(s)\}$ έχουν αρνητικό πραγματικό μέρος.

8.4.3 Συστήματα που περιγράφονται από γραμμικές διαφορικές εξισώσεις

Έστω το ΓΧΑ σύστημα με είσοδο $\{x(t)\}$ και έξοδο $\{y(t)\}$ που περιγράφεται από τη γραμμική διαφορική εξίσωση

$$\sum_{k=0}^N a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^M b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (8.64)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace, λαμβάνουμε

$$\left(\sum_{k=0}^N a_k s^k \right) Y(s) = \left(\sum_{k=0}^M b_k s^k \right) X(s) \quad (8.65)$$

ή

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k s^k}{\sum_{k=0}^N a_k s^k}. \quad (8.66)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς ενός συστήματος που περιγράφεται από μία γραμμική διαφορική εξίσωση είναι ρητή συνάρτηση του s , με μηδενικά τις ρίζες της εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^M b_k s^k = 0 \quad (8.67)$$

και πόλους τις ρίζες της εξίσωσης

$$\sum_{k=0}^N a_k s^k = 0. \quad (8.68)$$

Η χροστική απόκριση του συστήματος βρίσκεται υπολογίζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, $\{h(t)\} = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$. Παρατηρούμε ότι η διαφορική εξίσωση δεν παρέχει την απαραίτητη πληροφορία για τον υπολογισμό του αντιστρόφου. Όμως με επιπλέον πληροφορία σχετικά με το σύστημα, όπως, για παράδειγμα, αιτιατότητα ή/και ευστάθεια, μπορούμε να συνάγουμε την περιοχή σύγκλισης και να υπολογίσουμε την χροστική απόκριση.

Παράρτημα: Αντιστροφή μετασχηματισμών Laplace με πολλαπλούς πόλους

Αν υπάρχουν ένας ή περισσότεροι πόλοι με πολλαπλότητα μεγαλύτερη του 1, τότε η ανάπτυξη σε απλά κλάσματα είναι λίγο πιο πολύπλοκη. Ας υποθέσουμε ότι ο $X(s)$ είναι της μορφής

$$X(s) = \frac{B(s)}{A(s)(s - s_*)^n} = \frac{B(s)}{\left(\prod_{i=1}^N (s - s_i)\right) (s - s_*)^n} \quad (8.69)$$

με $s_i, i = 1, \dots, N$, απλούς πόλους. Τότε η ανάπτυξη σε απλά κλάσματα έχει ως εξής.

$$X(s) = \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{s - s_i} + \frac{\alpha_0}{(s - s_*)^n} + \frac{\alpha_1}{(s - s_*)^{n-1}} + \dots + \frac{\alpha_{n-1}}{s - s_*} \quad (8.70)$$

με

$$A_i = (s - s_i)X(s)|_{s=s_i}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (8.71)$$

$$\alpha_i = \frac{1}{i!} \frac{d^i}{ds^i} [(s - s_*)^n X(s)] \Big|_{s=s_*}, \quad i = 0, \dots, n-1. \quad (8.72)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, θα πρέπει να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace εκφράσεων της μορφής

$$X_*(s) = \frac{1}{(s - s_*)^n} = \underbrace{\frac{1}{s - s_*} \cdots \frac{1}{s - s_*}}_n. \quad (8.73)$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο, λαμβάνουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace του $\left\{ \frac{1}{(s - s_*)^n} \right\}$ είναι η συνέλιξη του $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_*} \right\}$ με τον εαυτόν του n φορές.

Για παράδειγμα, αν γνωρίζουμε ότι η περιοχή σύγκλισης του $X(s)$ βρίσκεται δεξιά του s_* , τότε γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s - s_*} \right\} = \{e^{s_* t} u(t)\}. \quad (8.74)$$

Τότε, για $n = 2$,

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s - s_*)^2} \right\} = \{e^{s_* t} u(t)\} * \{e^{s_* t} u(t)\} = \{t e^{s_* t} u(t)\}. \quad (8.75)$$

8.5 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 8.1. Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{\cos(2\pi F_0 t)u(t)\}$.

Άσκηση 8.2. Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-at} \cos(2\pi F_0 t)u(t)\}$, $a \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8.3. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ με μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\} = \left\{ \frac{1}{(s - s_0)^2} \right\}$ και $\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : \Re(s) > \Re(s_0)\}$. Να βρείτε το $\{x(t)\}$.

Άσκηση 8.4. Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\}$ του σήματος $\{x(t)\}$ για το οποίο ισχύει

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at}, & 0 \leq t \leq T \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}, \quad a \in \mathbb{C}. \quad (8.76)$$

Άσκηση 8.5. Να βρείτε το μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\}$ του σήματος $\{x(t)\} = \{e^{-a|t|}\}$, $a \in \mathbb{C}$.

Άσκηση 8.6. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ με μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\} = \left\{ \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \Re(s) > -1 \right\}$. Να βρείτε το $\{x(t)\}$.

Άσκηση 8.7. Να βρείτε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace του $\{X(s)\} = \left\{ \frac{2s+4}{s^2+4s+3} \right\}$.

Άσκηση 8.8. Έστω ΓΧΑ σύστημα με απόκριση συχνοτήτων $\{H(s)\} = \left\{ \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2} \right\}$. Να βρείτε μέσω αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace την κρουστική απόκριση του συστήματος $\{h(t)\}$ και να χαρακτηρίσετε το σύστημα ως προς την BIBO ευστάθεια και την αιτιατότητα.

Άσκηση 8.9. Έστω σήμα $\{x(t)\}$ με μετασχηματισμό Laplace $\{X(s)\} = \left\{ \frac{1}{(s+1)(s-1)^2}, -1 < \Re(s) < 1 \right\}$. Να βρείτε το $\{x(t)\}$.

8.6 Άλυτες ασκήσεις

Άσκηση 8.10. Να αποδειχθεί ότι

$$\{\sin(\Omega_0 t)u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{\Omega_0}{s^2 + \Omega_0^2}, \Re(s) > 0 \right\}. \quad (8.77)$$

Άσκηση 8.11. Να αποδειχθεί ότι

$$\{e^{-at} \cos(\Omega_0 t)u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{s+a}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}, \Re(s) > -a \right\}. \quad (8.78)$$

Άσκηση 8.12. Να αποδειχθεί ότι

$$\{e^{-at} \sin(\Omega_0 t)u(t)\} \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \left\{ \frac{\Omega_0}{(s+a)^2 + \Omega_0^2}, \Re(s) > -a \right\}. \quad (8.79)$$

Άσκηση 8.13. Έστω ένα ΓΧΑ-ΣΣΧ με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace $\{H(s)\}$ έχει περιοχή σύγκλισης την $\text{ROC} = \{s \in \mathbb{C} : -2 < \Re(s) < 1\}$. Χωρίς να κάνετε καμία υπόθεση για τον τύπο του $\{h(t)\}$, βρείτε την περιοχή σύγκλισης των μετασχηματισμών Laplace των παρακάτω σημάτων.

1. $\{h(t-2)\}$
2. $\{e^{(3+j4\pi)t}h(t)\}$
3. $\{h(-t)\}$

4. $\{h(-2(t+2))\}$
5. $\{e^{-t}h(t)\} * \{h(\frac{t}{3})\}$

Άσκηση 8.14. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2005] Κάνοντας χρήση του μονόπλευρου μετασχηματισμού Laplace, να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του αιτιατού συστήματος που περιγράφεται από την εξίσωση

$$a \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t), \quad t \geq 0, \quad (8.80)$$

όπου $\{x(t)\}$ είσοδος και $\{y(t)\}$ έξοδος (προφανώς, το σύστημα ξεκινά από ηρεμία).

Άσκηση 8.15. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2006] Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{-3}{(s+1)(s-2)}. \quad (8.81)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος αν

1. το σύστημα είναι αιτιατό,
2. το σύστημα είναι ευσταθές,
3. το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές.

Άσκηση 8.16. [Εξέταση Φεβρουαρίου 2006] Να υπολογίσετε τον $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^3}\right\}$, θεωρώντας ως περιοχή σύγκλισης το ημιεπίπεδο $\text{Re}(s) > -1$.

Άσκηση 8.17. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2006] Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(s) = \frac{-2}{(s+3)(s+1)}. \quad (8.82)$$

1. Μπορείτε να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος χωρίς επιπλέον πληροφορία; Γιατί;
2. Να υπολογίσετε την κρουστική απόκριση του συστήματος αν σας δίνεται η παρακάτω επιπλέον πληροφορία.

- (α') Το σύστημα είναι αιτιατό.
- (β') Το σύστημα είναι ευσταθές.
- (γ') Το σύστημα είναι αιτιατό και ευσταθές.
- (δ') Το σύστημα είναι αντιατιατό και ευσταθές.

Άσκηση 8.18. [Εξέταση Σεπτεμβρίου 2007] Έστω ένα γραμμικό χρονικά αμετάβλητο σύστημα συνεχούς χρόνου με κρουστική απόκριση $\{h(t)\}$ της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ισούται με

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + s - 2}. \quad (8.83)$$

Να υπολογιστεί η κρουστική απόκριση του συστήματος όταν αυτό (i) είναι αιτιατό, (ii) είναι BIBO-ευσταθές, και (iii) δεν είναι ούτε αιτιατό ούτε BIBO-ευσταθές.

Λύσεις Ασκήσεων

Κεφάλαιο 1

Άσκηση 1.1. Δες Σχήμα 9.1.

Άσκηση 1.2. Δες Σχήμα 9.2.

Άσκηση 1.3. Δες Σχήμα 9.3.

Άσκηση 1.4. Δες Σχήμα 9.4.

Άσκηση 1.5. Δες Σχήμα 9.5.

Άσκηση 1.6. Δες Σχήμα 9.6.

Άσκηση 1.7. Δες Σχήμα 9.7.

Άσκηση 1.8.

$$x[n] = x_1[n] + x_2[n] = u[n] + 1 = \begin{cases} 2, & n \geq 0 \\ 1, & n < 0. \end{cases} \quad \Delta\epsilon\varsigma \text{ Σχήμα 9.8.}$$

Άσκηση 1.9.

$$x_2[n] = 3u[n] = \begin{cases} 3, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases} \quad \Delta\epsilon\varsigma \text{ Σχήμα 9.9.}$$

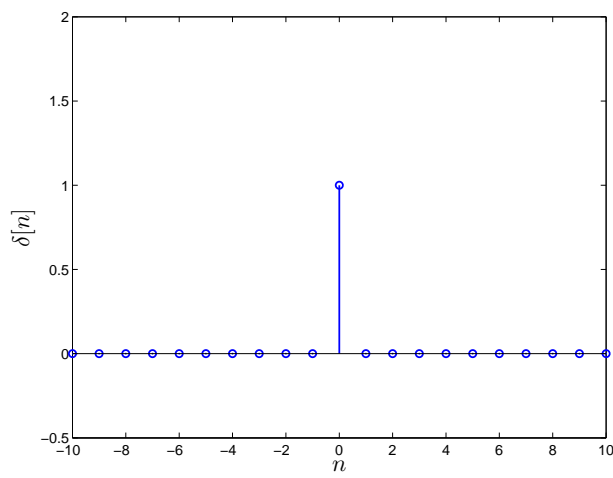
Άσκηση 1.10.

$$x[n] = x_1[n] - x_2[n] = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n \leq 0. \end{cases} \quad \Delta\epsilon\varsigma \text{ Σχήμα 9.10.}$$

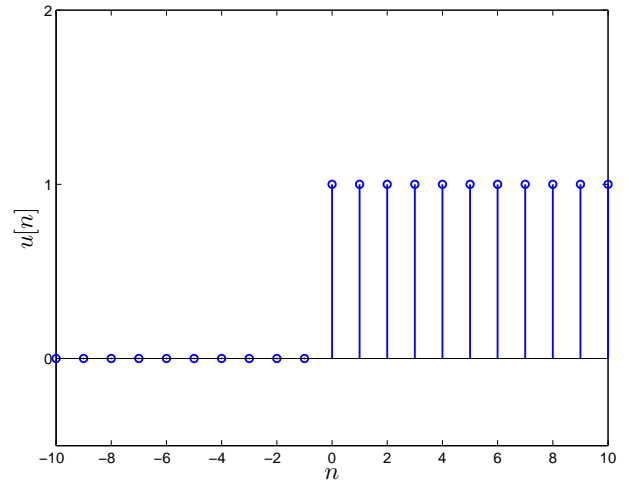
Άσκηση 1.11.

$$x[n] = u[n] \cdot \delta[n] = \left(\begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases} \right) \cdot \left(\begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \right) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} = \delta[n]. \quad \Delta\epsilon\varsigma \text{ Σχήμα 9.11.}$$

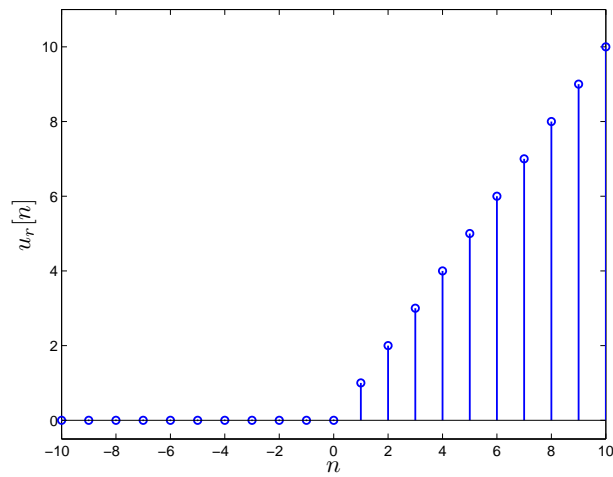
Άσκηση 1.12.



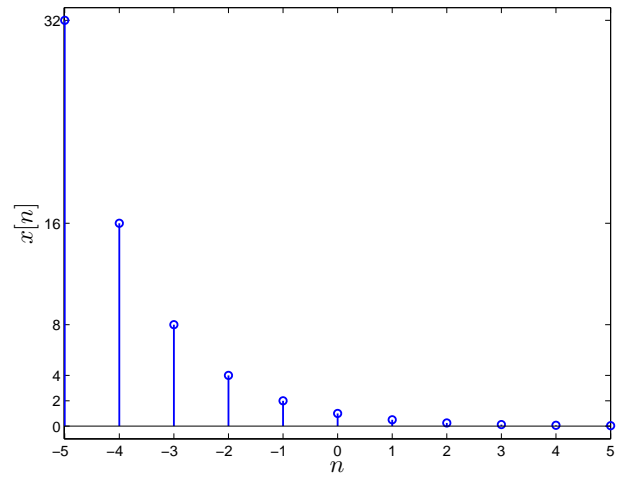
Σχ. 9.1. Σχήμα για την Άσκηση 1.1.



Σχ. 9.2. Σχήμα για την Άσκηση 1.2.



Σχ. 9.3. Σχήμα για την Άσκηση 1.3.

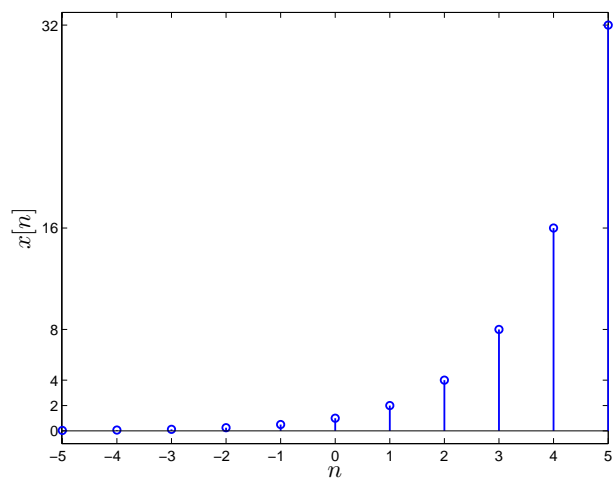


Σχ. 9.4. Σχήμα για την Άσκηση 1.4.

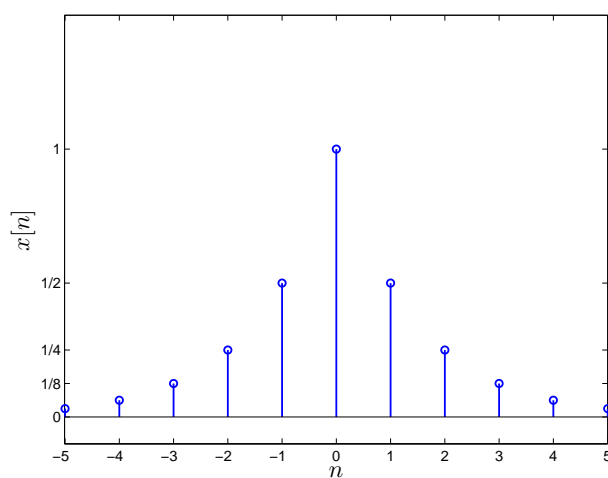
$$x_2[n] = x_1[n-1] = \begin{cases} 1, & n-1 \geq 0 \\ 0, & n-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \geq 1 \\ 0, & n < 1. \end{cases} \quad \text{Δες Σχήμα 9.12.}$$

Άσκηση 1.13.

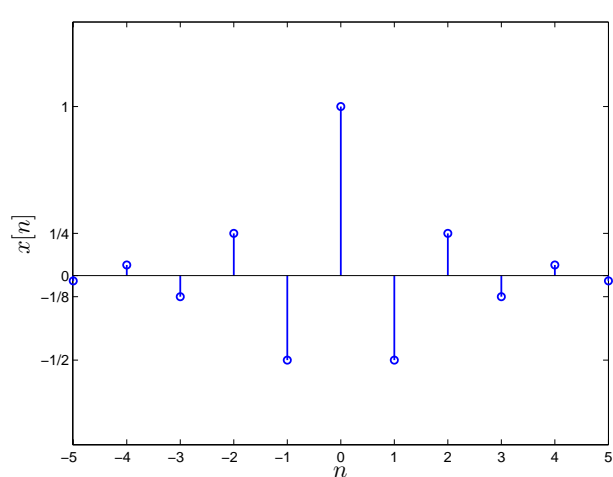
$$x_2[n] = x_1[n+3] = \begin{cases} 1, & n+3 \geq 0 \\ 0, & n+3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \geq -3 \\ 0, & n < -3. \end{cases} \quad \text{Δες Σχήμα 9.13.}$$



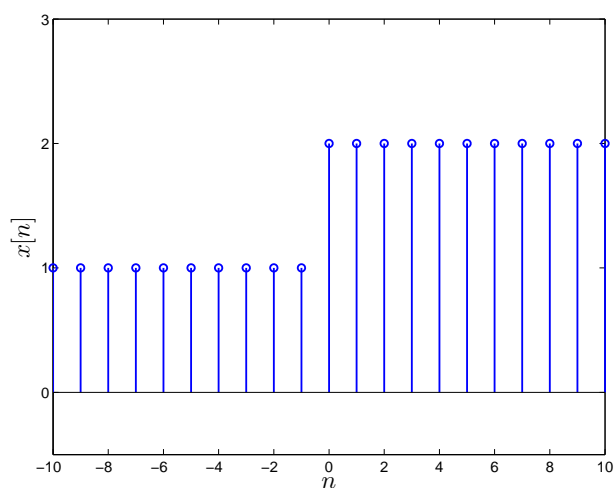
Σχ. 9.5. Σχήμα για την Άσκηση 1.5.



Σχ. 9.6. Σχήμα για την Άσκηση 1.6.



Σχ. 9.7. Σχήμα για την Άσκηση 1.7.



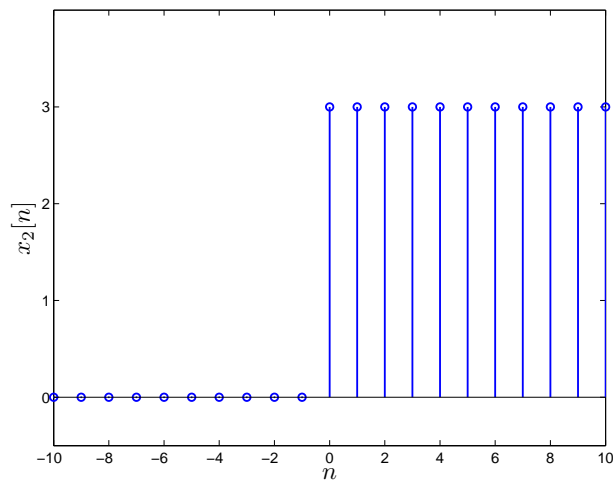
Σχ. 9.8. Σχήμα για την Άσκηση 1.8.

$$\text{Γενικά, } \{x[n - n_0]\} \Rightarrow \begin{cases} n_0 > 0 : \text{Μετατόπιση του } \{x[n]\}, n_0 \text{ θέσεις δεξιά.} \\ n_0 < 0 : \text{Μετατόπιση του } \{x[n]\}, -n_0 \text{ θέσεις αριστερά.} \end{cases}$$

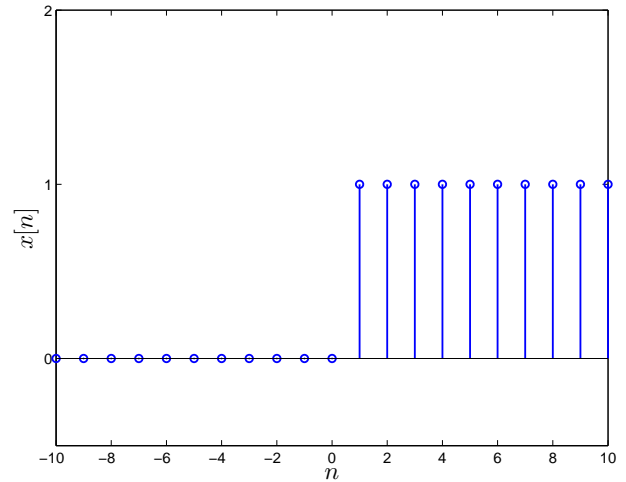
Άσκηση 1.14.

$$x_2[n] = u[-n] = \begin{cases} 1, & -n \geq 0 \\ 0, & -n < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n \leq 0 \\ 0, & n > 0. \end{cases} \quad \text{Δες Σχήμα 9.14.}$$

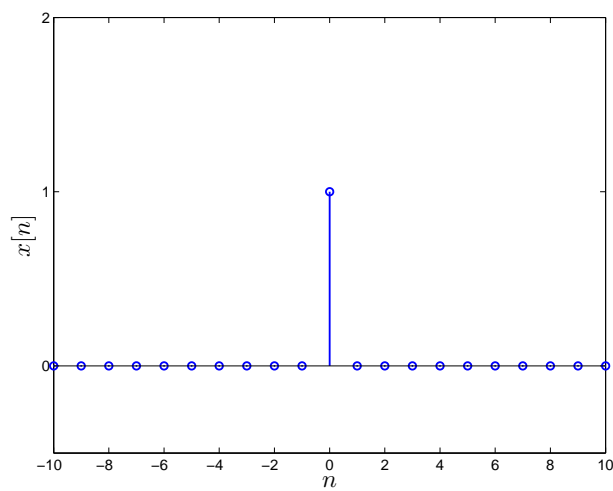
Άσκηση 1.15.



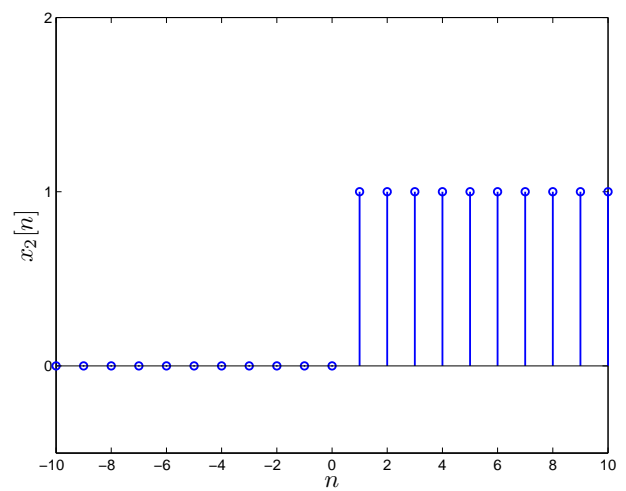
Σχ. 9.9. Σχήμα για την Άσκηση 1.9.



Σχ. 9.10. Σχήμα για την Άσκηση 1.10.



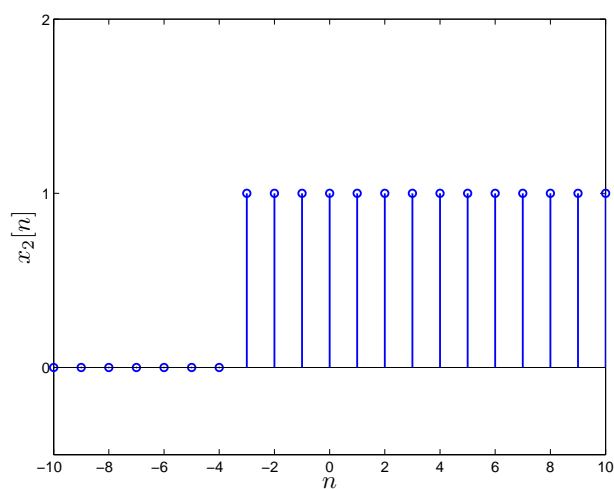
Σχ. 9.11. Σχήμα για την Άσκηση 1.11.



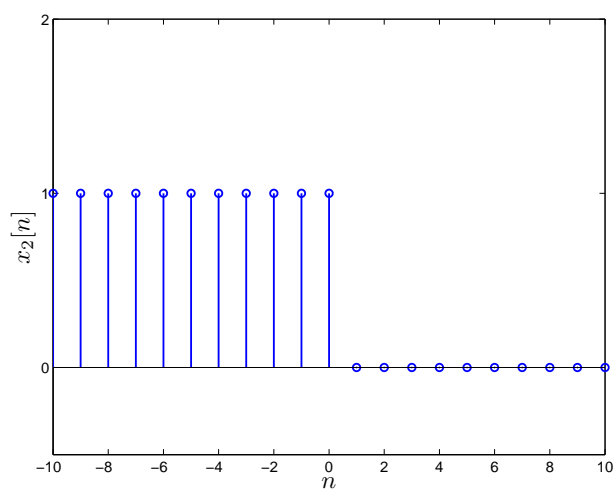
Σχ. 9.12. Σχήμα για την Άσκηση 1.12.

Λύση (α): $u[3 - n] = u[-(n - 3)] = x[n - 3]$, ($x[n] = u[-n]$) πρώτα ανάκλαση, μετά μετατόπιση δεξιά κατά 3. Δες Σχήμα 9.15.

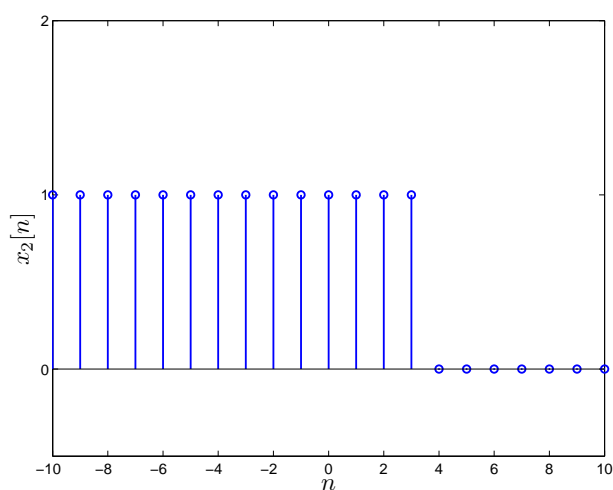
Λύση (β): $u[3 - n] = x[-n]$, ($x[n] = u[n + 3]$) πρώτα μετατόπιση αριστερά κατά 3, μετά ανάκλαση. Δες Σχήμα 9.15.



Σχ. 9.13. Σχήμα για την Άσκηση 1.13.



Σχ. 9.14. Σχήμα για την Άσκηση 1.14.



Σχ. 9.15. Σχήμα για την Άσκηση 1.15.

Γενικά, $\{x[n_0 - n]\} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ανάκλαση του } \{x[n]\} \text{ και μετατόπιση } n_0 \text{ θέσεις δεξιά.} \\ \text{Μετατόπιση του } \{x[n]\} n_0 \text{ θέσεις αριστερά και ανάκλαση.} \end{cases}$

Άσκηση 1.16.

$$x[n] \cdot \delta[n - n_0] = \begin{cases} x[n_0], & n = n_0 \\ 0, & n \neq n_0 \end{cases} = x[n_0] \cdot \delta[n - n_0].$$

Άσκηση 1.17.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n - n_0] = x[n_0].$$

Άσκηση 1.18.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n - 3] = x[3].$$

Άσκηση 1.19.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x[n] \cdot \delta[n + 3] = 0.$$

Άσκηση 1.20. Δες Σχήμα 9.16.

Άσκηση 1.21. Δες Σχήμα 9.17.

Άσκηση 1.22.

$$\alpha) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n^3 + \sin(\frac{\pi}{2}n)) \delta[n - 3] = 3^3 + \sin(\frac{\pi}{2}3) = 27 - 1 = 26,$$

$$\beta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-an^2} \delta[n - 2] = e^{-a2^2} = e^{-4a}, \text{ και}$$

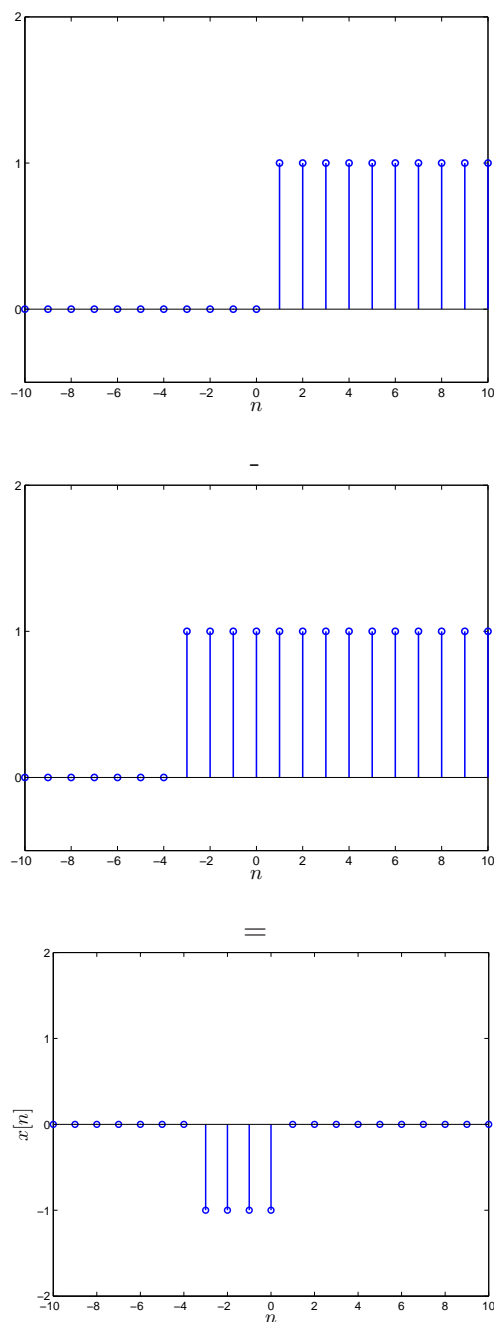
$$\gamma) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-an^2} \delta[n + 2] = 0.$$

Άσκηση 1.23.

- $T[a\{x[n]\}] = (a \cdot \{x[n]\})^2 = a^2\{x^2[n]\} = a^2T[\{x[n]\}] \neq aT[\{x[n]\}] \Rightarrow$ μη γραμμικό.
- $T[\{x[n - n_0]\}] = \{x^2[n - n_0]\} = \{y[n - n_0]\} \Rightarrow$ χρονικά αμετάβλητο (X.A.).
- Δεν περιλαμβάνει ούτε παλαιότερες ούτε μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n \pm 1], x[n \pm 2], \dots \Rightarrow$ στατικό.
- Δεν περιλαμβάνει μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n + 1], x[n + 2], \dots \Rightarrow$ αιτιατό.
- Αν $|x[n]| \leq M$, τότε $|y[n]| = |x^2[n]| = |x[n]|^2 \leq M^2 \Rightarrow$ BIBO ευσταθές.

Άσκηση 1.24.

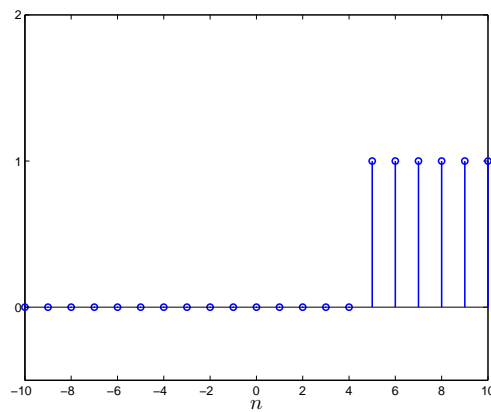
- $T[a\{x[n]\}] = a \cdot \{x[n]\} + (a \cdot \{x[n - 1]\})^2 = a \cdot \{x[n]\} + a^2 \cdot \{x^2[n - 1]\} \neq aT[\{x[n]\}] \Rightarrow$ μη γραμμικό.
- $T[\{x[n - n_0]\}] = \{x[n - n_0]\} + \{x^2[n - n_0]\} = \{y[n - n_0]\} \Rightarrow$ χρονικά αμετάβλητο (X.A.).
- Περιλαμβάνει παλαιότερες τιμές εισόδου $x[n - 1], x[n - 2], \dots \Rightarrow$ δυναμικό.
- Δεν περιλαμβάνει μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n + 1], x[n + 2], \dots \Rightarrow$ αιτιατό.
- Αν $|x[n]| \leq M$, τότε $|y[n]| = |x[n] + x^2[n - 1]| \leq |x[n]| + |x^2[n - 1]| \leq M + M^2 \Rightarrow$ BIBO ευσταθές.



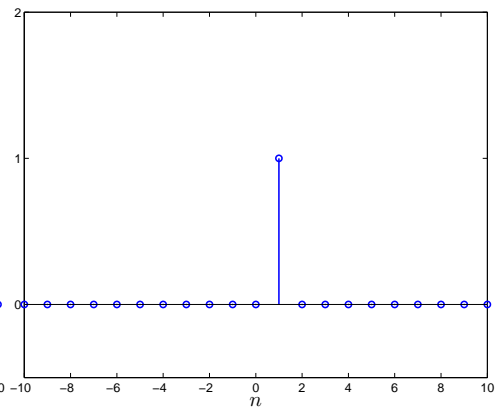
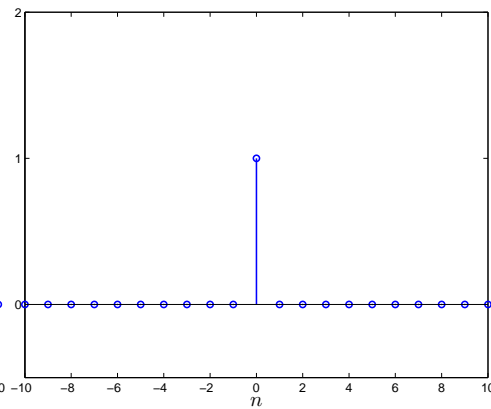
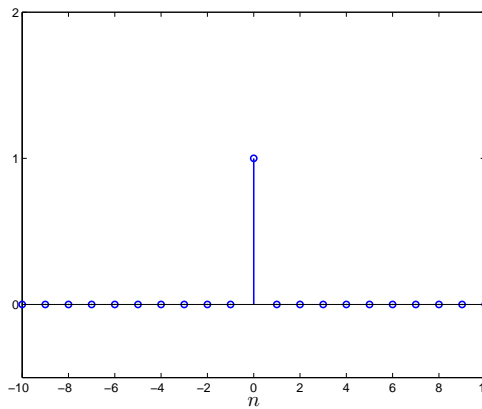
Σχ. 9.16. Σχήμα για την Άσκηση 1.20.

Άσκηση 1.25.

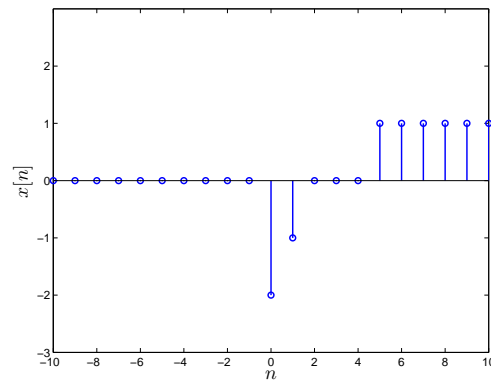
- $T[a_1\{x_1[n]\} + a_2\{x_2[n]\}] = a_1\{x_1[n]\} + a_2\{x_2[n]\} + a_1x_1[0] + a_2x_2[0] = a_1T[\{x_1[n]\}] + a_2T[\{x_2[n]\}] \Rightarrow$ γραμμικό.



-



=



Σχ. 9.17. Σχήμα για την Άσκηση 1.21.

- $T[\{x[n-n_0]\}] = T[\{z[n]\}] = \{z[n]\} + z[0] = \{x[n-n_0]\} + x[-n_0] \neq \{x[n-n_0]\} + x[0] = \{y[n-n_0]\} \Rightarrow$ χρονικά μεταβαλλόμενο (X.M.).
- Περιλαμβάνει παλαιότερη ή μελλοντική τιμή εισόδου αν $n \neq 0 \Rightarrow$ δυναμικό.

- Περιλαμβάνει μελλοντική τιμή εισόδου αν $n < 0 \Rightarrow$ μη αιτιατό.
- Αν $|x[n]| \leq M$, τότε $|y[n]| = |x[n] + x[0]| \leq |x[n]| + |x[0]| \leq M + M = 2M \Rightarrow$ BIBO ευσταθές.

Άσκηση 1.26.

- $T[a_1\{x_1[n]\} + a_2\{x_2[n]\}] = (a_1\{x_1[n]\} + a_2\{x_2[n]\})\{u[-n]\} = a_1\{x_1[n]\}\{u[-n]\} + a_2\{x_2[n]\}\{u[-n]\} = a_1T[\{x_1[n]\}] + a_2T[\{x_2[n]\}] \Rightarrow$ γραμμικό.
- $T[\{x[n - n_0]\}] = \{x[n - n_0]\}\{u[-n]\} \neq \{x[n - n_0]\}\{u[-(n - n_0)]\} = \{y[n - n_0]\} \Rightarrow$ χρονικά μεταβαλλόμενο (X.M.).
- Δεν περιλαμβάνει παλαιότερες ή μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n \pm 1], x[n \pm 2], \dots \Rightarrow$ στατικό.
- Δεν περιλαμβάνει μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n + 1], x[n + 2], \dots \Rightarrow$ αιτιατό.
- Αν $|x[n]| \leq M$, τότε $|y[n]| = |x[n]u[-n]| = |x[n]||u[-n]| \leq |x[n]| \leq M \Rightarrow$ BIBO ευσταθές.

Άσκηση 1.27.

- $T[a\{x_1[n]\}] = \{\log(a \cdot x[n])\} \neq a\{\log x[n]\} = aT[\{x[n]\}] \Rightarrow$ μη γραμμικό.
- $T[\{x[n - n_0]\}] = \{\log x[n - n_0]\} = \{y[n - n_0]\} \Rightarrow$ χρονικά αμετάβλητο (X.A.).
- Δεν περιλαμβάνει παλαιότερες ή μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n \pm 1], x[n \pm 2], \dots \Rightarrow$ στατικό.
- Δεν περιλαμβάνει μελλοντικές τιμές εισόδου $x[n + 1], x[n + 2], \dots \Rightarrow$ αιτιατό.
- Θεωρούμε σήμα $\{x[n]\}$ με $|x[n]| < M$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, όπου $M > 1$. Έστω ότι υπάρχει $M' > 0$ τέτοιο ώστε $|y[n]| < M'$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $0 < x[n] < 10^{-M'}$ (άρα $0 < x[n] < 1 < M \Rightarrow |x[n]| \leq M$), τότε $y[n] = \log x[n] < -M' < 0 \Rightarrow |y[n]| > M'$, άτοπο \Rightarrow BIBO ασταθές.

Άσκηση 1.28. Αρκεί να γράψουμε το $\{\delta[n]\}$ ως ένα γραμμικό συνδυασμό μετατοπισμένων εκδοχών των δύο εισόδων. Παρατηρούμε ότι

$$\delta[n] = \frac{1}{2} (x_1[n + 2] - x_2[n + 3]). \quad (9.1)$$

Άρα,

$$h[n] = \frac{1}{2} (y_1[n+2] - y_2[n+3]) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ -1, & n = 1 \\ 0, & \text{άλλοι.} \end{cases} \quad (9.2)$$

Επίσης:

- $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = 1 + 1 = 2 < \infty \Rightarrow$ BIBO ευσταθές.
- $h[n] = 0, \forall n < 0 \Rightarrow$ αιτιατό.
- $h[1] = -1 \neq 0 \Rightarrow$ δυναμικό.

Άσκηση 1.29. Αν $x[n] = \delta[n]$, τότε $y[n] = h[n]$. Συγκεκριμένα,

- $h[0] = y[0] = 10x[0] - 5y[-1] = 10\delta[0] = 10.$
- $h[1] = y[1] = 10x[1] - 5y[0] = 10\delta[1] - 5 \cdot 10 = -50.$
- $h[2] = y[2] = 10x[2] - 5y[1] = 10\delta[2] - 5 \cdot (-50) = 250.$
- $h[3] = y[3] = 10x[3] - 5y[2] = 10\delta[3] - 5 \cdot 250 = -1250.$
- \vdots
- $h[n] = 10(-5)^n, n \geq 0.$

Ευστάθεια:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |10 \cdot (-5)^n| = 10 \sum_{n=0}^{\infty} 5^n = \infty. \quad (9.3)$$

Άρα το σύστημα δεν είναι BIBO ευσταθές.

Άσκηση 1.30.

$$\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{x[n]\} = \{\delta[n]\} * \{\delta[n]\} = \{\delta[n]\}. \quad (9.4)$$

Άσκηση 1.31.

$$\{z[n]\} = \{x[n]\} * \{y[n]\} = \{u[n]\} * \{\delta[n]\} = \{u[n]\}. \quad (9.5)$$

Άσκηση 1.32.

$$\begin{aligned}
\{z[n]\} &= \{x[n]\} * \{y[n]\} = (\{\delta[n-1]\} + \{\delta[n+1]\}) * (\{\delta[n]\} + \{\delta[n+1]\}) \\
&= \{\delta[n-1]\} * \{\delta[n]\} + \{\delta[n-1]\} * \{\delta[n+1]\} \\
&\quad + \{\delta[n+1]\} * \{\delta[n]\} + \{\delta[n+1]\} * \{\delta[n+1]\} \\
&= \{\delta[n-1]\} + \{\delta[n]\} + \{\delta[n+1]\} + \{\delta[n+2]\}.
\end{aligned} \tag{9.6}$$

Άσκηση 1.33.

- Αν $n+1 \leq 0 \Leftrightarrow n \leq -1$, τότε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=n}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-n-1} = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{-n} = \frac{3}{2^{-n}}. \tag{9.7}$$

- Αν $n+1 > 0 \Leftrightarrow n > -1$, τότε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=n}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)\right) \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{3}{2^{n+1}}. \tag{9.8}$$

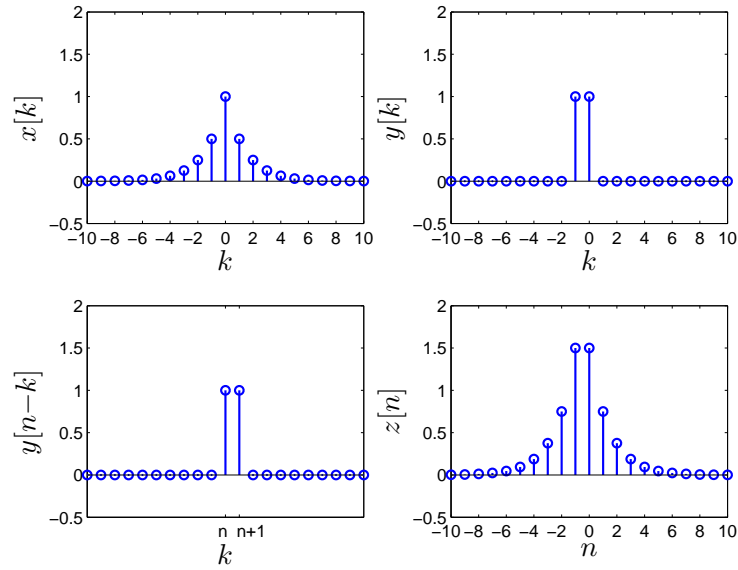
Άσκηση 1.34.

- $\forall n \leq -2$,

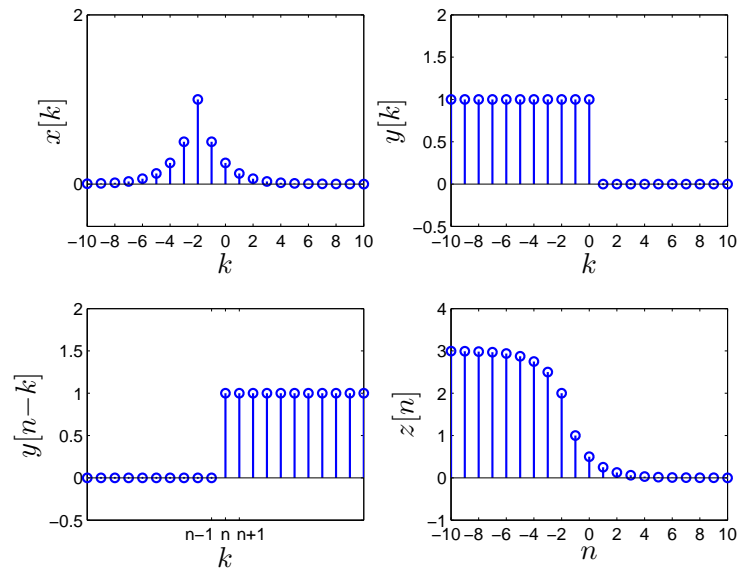
$$\begin{aligned}
z[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=n}^{\infty} x[k] = \sum_{k=n}^{-2} b^{-k-2} + \sum_{k=-1}^{\infty} b^{k+2} = b^{-2} \sum_{k=n}^{-2} b^{-k} + b^2 \sum_{k=-1}^{\infty} b^k \\
&= b^{-2} \sum_{k'=2}^{-n} b^{k'} + b^2 \sum_{k=-1}^{\infty} b^k = \sum_{k'=2}^{-n} b^{k'-2} + b^2 \sum_{k'=0}^{\infty} b^{k'-1} = \sum_{k=0}^{-n-2} b^k + b \sum_{k'=0}^{\infty} b^{k'} \\
&= \frac{b^{-n-1} - 1}{b - 1} + b \frac{1}{1 - b} = \frac{b + 1 - b^{-n-1}}{1 - b}.
\end{aligned} \tag{9.9}$$

- $\forall n > -2$,

$$\begin{aligned}
z[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=n}^{\infty} x[k] = \sum_{k=n}^{\infty} b^{k+2} = b^2 \sum_{k=n}^{\infty} b^k = b^2 \sum_{k'=0}^{\infty} b^{k'+n} = b^{n+2} \sum_{k'=0}^{\infty} b^{k'} \\
&= \frac{b^{n+2}}{1 - b}.
\end{aligned} \tag{9.10}$$



Σχ. 9.18. Σχήμα για την Άσκηση 1.33.



Σχ. 9.19. Σχήμα για την Άσκηση 1.34.

Άρα,

$$z[n] = \begin{cases} \frac{b+1-b^{-n-1}}{1-b}, & n \leq -2 \\ \frac{b^{n+2}}{1-b}, & n > -2. \end{cases} \quad (9.11)$$

Άσκηση 1.35.

Τρόπος α': Αντιστρέφοντας το $\{y[k]\}$. Υποπεριπτώσεις:

- Αν $n + 1 < 0 \Leftrightarrow \boxed{n < -1}$, τότε $z[n] = 0$.
- Αν $n + 1 = 0 \Leftrightarrow \boxed{n = -1}$, τότε $z[-1] = 1 \cdot 2 = 2$.
- Αν $n + 1 = 1 \Leftrightarrow \boxed{n = 0}$, τότε $z[0] = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7$.
- Αν $n + 1 = 2 \Leftrightarrow \boxed{n = 1}$, τότε $z[1] = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 6$.
- Αν $n + 1 = 3 \Leftrightarrow \boxed{n = 2}$, τότε $z[2] = 3 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = -1$.
- Αν $n + 1 = 4 \Leftrightarrow \boxed{n = 3}$, τότε $z[3] = (-2) \cdot 1 = -2$.
- Αν $n - 1 > 2 \Leftrightarrow \boxed{n > 3}$, τότε $z[n] = 0$.

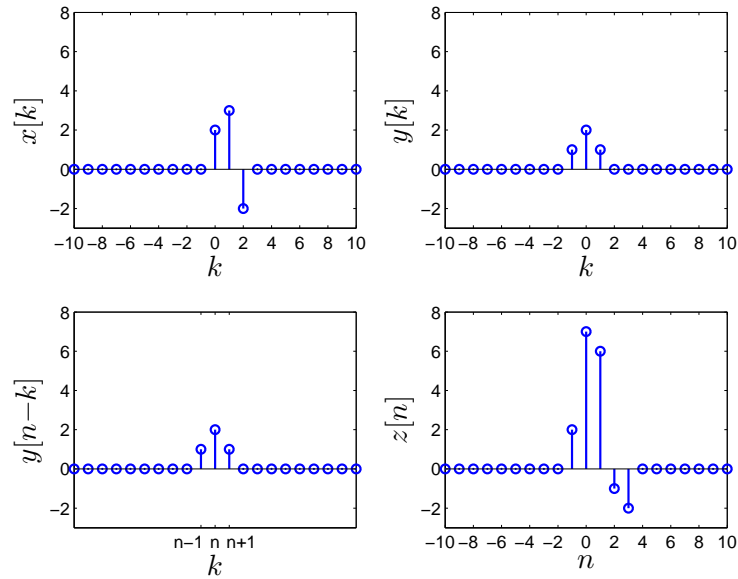
Άρα,

$$z[n] = \begin{cases} 0, & n < -1 \\ 2, & n = -1 \\ 7, & n = 0 \\ 6, & n = 1 \\ -1, & n = 2 \\ -2, & n = 3 \\ 0, & n > 3. \end{cases} \quad (9.12)$$

Τρόπος β': Αντιστρέφοντας το $\{x[k]\}$. Δοκιμάστε μόνοι σας.

Άσκηση 1.36. Υποπεριπτώσεις:

- Αν $n - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{n > 1}$, τότε $z[n] = 0$.
- Αν $\boxed{n = 1}$, τότε $z[1] = 1 \cdot 1 = 1$.
- Αν $\boxed{n = 0}$, τότε $z[0] = a^{-1} + 1$.
- Αν $\boxed{n = -1}$, τότε $z[-1] = a^{-2} + a^{-1} + 1$.
- Αν $\boxed{n = -2}$, τότε $z[-2] = a^{-3} + a^{-2} + a^{-1}$.
- \vdots
- Γενικά, αν $\boxed{n < 0}$, τότε $z[n] = a^{n-1} + a^n + a^{n+1}$.



Σχ. 9.20. Σχήμα για την Άσκηση 1.35.

Άρα,

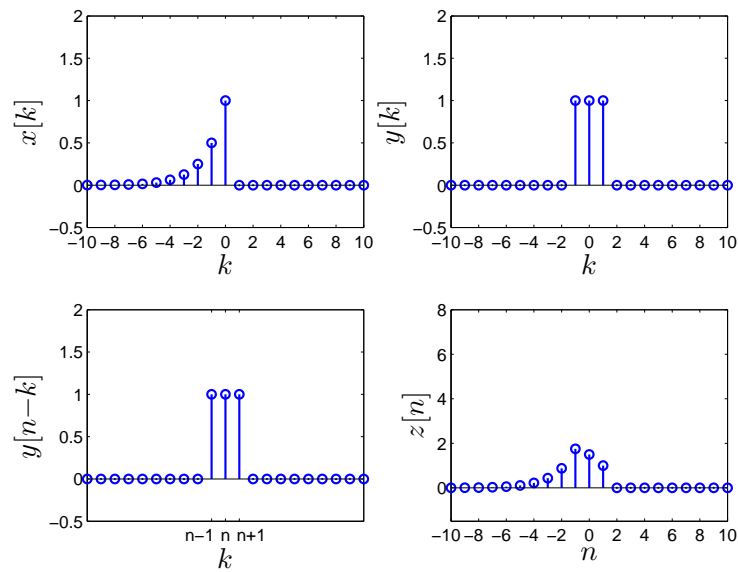
$$z[n] = \begin{cases} a^{n-1} + a^n + a^{n+1}, & n < 0 \\ a^{-1} + 1, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ 0, & n > 1. \end{cases} \quad (9.13)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z[n] = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow -\infty} z[n] = \lim_{n \rightarrow -\infty} (a^{n-1} + a^n + a^{n+1}) = \lim_{n \rightarrow -\infty} a^n \left(\frac{1}{a} + 1 + a \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a} \right)^n \left(\frac{1}{a} + 1 + a \right).$$

- Αν $\left| \frac{1}{a} \right| < 1 \Leftrightarrow |a| > 1 \Leftrightarrow a > 1 \text{ ή } a < -1$, τότε $z[n] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0$.
- Αν $\frac{1}{a} \leq -1 \Leftrightarrow -1 \leq a < 0$, τότε το $z[n]$ αποκλίνει όταν $n \rightarrow -\infty$.
- Αν $\frac{1}{a} > 1 \Leftrightarrow 0 < a < 1$, τότε $z[n] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} \infty$.
- Αν $\frac{1}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$, τότε $z[n] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 3$.

Άσκηση 1.37. Υποπεριπτώσεις:



Σχ. 9.21. Σχήμα για την Άσκηση 1.36.

- Αν $n < 0$, τότε

$$z[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = 0.$$

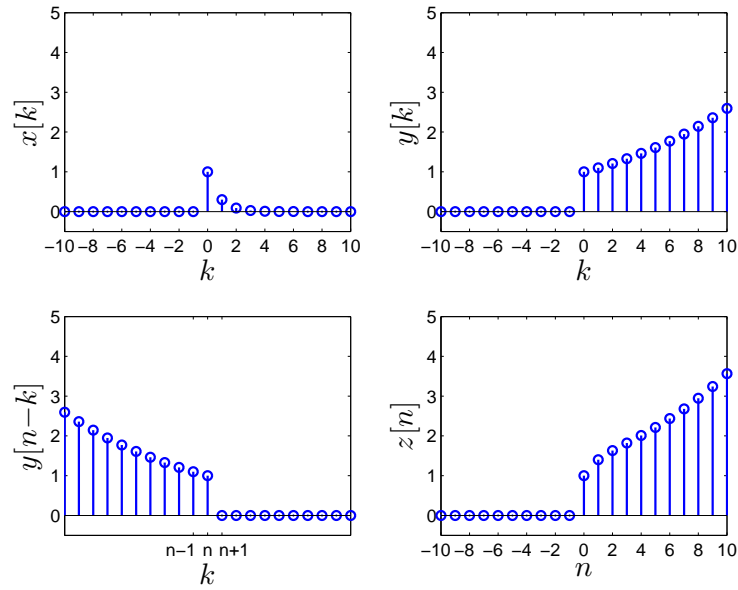
- Αν $n \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} z[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} = b^n \sum_{k=0}^n \left(\frac{a}{b}\right)^k \\ &= \begin{cases} b^n(n+1), & a = b \\ b^n \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} - 1}{\frac{a}{b} - 1} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}, & a \neq b. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.14)$$

Άρα,

$$z[n] = \begin{cases} b^n(n+1)u[n], & a = b \\ \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}u[n], & a \neq b \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (9.15)$$

Άσκηση 1.38. Υποπεριπτώσεις:



Σχ. 9.22. Σχήμα για την Άσκηση 1.37.

- Αν $n \leq 0$, τότε

$$\begin{aligned}
 z[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^n b^{-k}a^{n-k} \\
 &= a^n \sum_{k=-\infty}^n (ab)^{-k} = a^n \sum_{m=n-k}^{\infty} (ab)^{m-n} \\
 &= a^n (ab)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} (ab)^m = \frac{b^{-n}}{1-ab}.
 \end{aligned} \tag{9.16}$$

- Αν $n > 0$, τότε

$$\begin{aligned}
 z[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^0 b^{-k}a^{n-k} + \sum_{k=1}^n b^k a^{n-k} \\
 &= a^n \sum_{k=-\infty}^0 (ab)^{-k} + a^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = a^n \sum_{k=0}^{\infty} (ab)^k + a^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k \\
 &= a^n \frac{1}{1-ab} + a^n \frac{\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}.
 \end{aligned} \tag{9.17}$$

Άρα,

$$z[n] = \begin{cases} \frac{b^{-n}}{1-ab}, & n \leq 0 \\ \frac{a^n}{1-ab} + a^n \frac{\frac{b}{a} - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}}, & n > 0. \end{cases} \tag{9.18}$$

Κεφάλαιο 2

Άσκηση 2.1.

Περίπτωση 1: $a \neq b$.

- Αν $t < 0$, τότε

$$z(t) = 0. \quad (9.19)$$

- Αν $t \geq 0$, τότε

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_0^t x(\tau)y(t-\tau) d\tau = \int_0^t a^\tau b^{t-\tau} d\tau = b^t \int_0^t \left(\frac{a}{b}\right)^\tau d\tau \\ &= b^t \int_0^t e^{\tau \ln(\frac{a}{b})} d\tau = b^t \left[\frac{e^{\tau \ln(\frac{a}{b})}}{\ln(\frac{a}{b})} \right]_0^t = \frac{b^t}{\ln(\frac{a}{b})} \left(e^{t \ln(\frac{a}{b})} - 1 \right) \\ &= \frac{b^t}{\ln(\frac{a}{b})} \left(\left(\frac{a}{b}\right)^t - 1 \right) = \frac{a^t - b^t}{\ln a - \ln b}. \end{aligned} \quad (9.20)$$

Άρα,

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{a^t - b^t}{\ln a - \ln b}, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = \frac{a^t - b^t}{\ln a - \ln b} u(t). \quad (9.21)$$

Περίπτωση 2: $a = b$.

- Αν $t < 0$, τότε

$$z(t) = 0. \quad (9.22)$$

- Αν $t \geq 0$, τότε

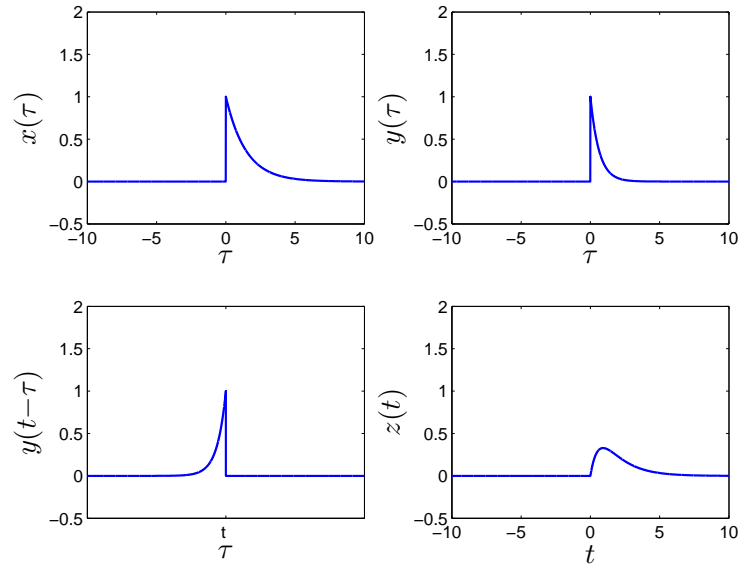
$$z(t) = \int_0^t x(\tau)y(t-\tau) d\tau = \int_0^t a^\tau b^{t-\tau} d\tau = \int_0^t a^{\tau+t-\tau} d\tau = a^t \int_0^t 1 d\tau = a^t t. \quad (9.23)$$

Άρα,

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ a^t t, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow z(t) = a^t t u(t). \quad (9.24)$$

Άσκηση 2.2.

$$\{z_1(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\} = \{\delta(t-1)\} * \{\delta(t+1)\} = \{\delta(t)\}. \quad (9.25)$$



Σχ. 9.23. Σχήμα για την Άσκηση 2.1.

$$\{z_2(t)\} = \{x(t)\}\{y(t)\} = \{\delta(t-1)\}\{\delta(t+1)\} = \{0\}. \quad (9.26)$$

Άσκηση 2.3.

$$\{z_1(t)\} = \{x(t)\} * \{y(t)\} = \{e^{at}\} * \{\delta(t+10)\} = \{e^{a(t+10)}\}. \quad (9.27)$$

$$\{z_2(t)\} = \{x(t)\}\{y(t)\} = \{e^{at}\}\{\delta(t+10)\} = \{e^{-10a}\delta(t+10)\}. \quad (9.28)$$

Άσκηση 2.4.

- 1) $\int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi t)\delta(t-0.5) dt = \cos(\pi) = -1,$
- 2) $\int_{-\infty}^{-2} \sin(2\pi t)\delta(t-2) dt = 0,$
- 3) $\int_{-\infty}^{35} e^{at}u(t-5)\delta(t+0.2) dt = e^{-a0.2}u(-5.2) = 0.$

Άσκηση 2.5.

- Αν $t < 0$, τότε

$$z(t) = 0. \quad (9.29)$$

- Αν $t - T \leq 0 \leq t \Leftrightarrow 0 \leq t \leq T$, τότε

$$z(t) = \int_0^t \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_0^t = \frac{t^2}{2}. \quad (9.30)$$

- Αν $0 \leq t - T \text{ \& } t \leq 2T \Leftrightarrow T \leq t \leq 2T$, τότε

$$z(t) = \int_{t-T}^t \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T}^t = \frac{t^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} = \frac{T(2t-T)}{2} = Tt - \frac{T^2}{2}. \quad (9.31)$$

- Αν $t - T \leq 2T \text{ \& } t > 2T \Leftrightarrow 2T \leq t \leq 3T$, τότε

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_{t-T}^{2T} \tau \cdot 1 d\tau = \left[\frac{\tau^2}{2} \right]_{t-T}^{2T} = \frac{(2T)^2}{2} - \frac{(t-T)^2}{2} = \frac{4T^2 - t^2 + 2tT - T^2}{2} \\ &= -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2. \end{aligned} \quad (9.32)$$

- Αν $t - T \geq 2T \Leftrightarrow t \geq 3T$, τότε

$$z(t) = 0. \quad (9.33)$$

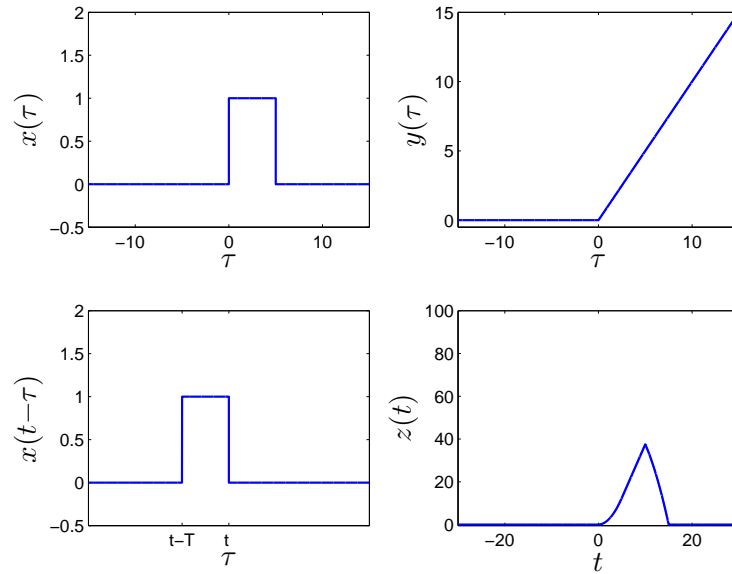
Άρα,

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ \frac{t^2}{2}, & 0 \leq t \leq T, \\ Tt - \frac{T^2}{2}, & T \leq t \leq 2T, \\ -\frac{1}{2}t^2 + Tt + \frac{3}{2}T^2, & 2T \leq t \leq 3T, \\ 0, & t \geq 3T. \end{cases} \quad (9.34)$$

Άσκηση 2.6.

- Αν $t < 1$, τότε

$$\begin{aligned} z(t) &= \int_1^\infty e^{-a(\tau-t)} e^{-2a(\tau-1)} d\tau = \int_1^\infty e^{-a\tau+at-2a\tau+2a} d\tau = e^{at+2a} \int_1^\infty e^{-3a\tau} d\tau \\ &= e^{at+2a} \left[\frac{e^{-3a\tau}}{-3a} \right]_1^\infty = e^{at+2a} \left(0 - \frac{e^{-3a}}{-3a} \right) = \frac{1}{3a} e^{at+2a-3a} = \frac{1}{3a} e^{a(t-1)}. \end{aligned} \quad (9.35)$$



Σχ. 9.24. Σχήμα για την Άσκηση 2.5.

- Αν $t \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned}
 z(t) &= \int_1^t e^{a(\tau-t)} e^{-2a(\tau-1)} d\tau + \int_t^\infty e^{-a(\tau-t)} e^{-2a(\tau-1)} d\tau \\
 &= \int_1^t e^{-at+a\tau-2a\tau+2a} d\tau + \int_t^\infty e^{-a\tau+at-2a\tau+2a} d\tau \\
 &= e^{-at+2a} \int_1^t e^{-a\tau} d\tau + e^{at+2a} \int_t^\infty e^{-3a\tau} d\tau = e^{-at+2a} \left[\frac{e^{-a\tau}}{-a} \right]_1^t + e^{at+2a} \left[\frac{e^{-3a\tau}}{-3a} \right]_t^\infty \\
 &= e^{-at+2a} \left(\frac{e^{-at} - e^{-a}}{-a} \right) + e^{at+2a} \left(0 - \frac{e^{-3at}}{-3a} \right) = \frac{e^{2a}}{a} (e^{-at-a} - e^{-2at}) + \frac{e^{2a}}{3a} e^{-2at} \\
 &= \frac{e^{2a-at}}{a} \left(e^{-a} - \frac{2}{3} e^{-at} \right) = \frac{e^{-at+a}}{a} - \frac{2}{3a} e^{-2at+2a} = \frac{1}{a} e^{-a(t-1)} - \frac{2}{3a} e^{-2a(t-1)}.
 \end{aligned} \tag{9.36}$$

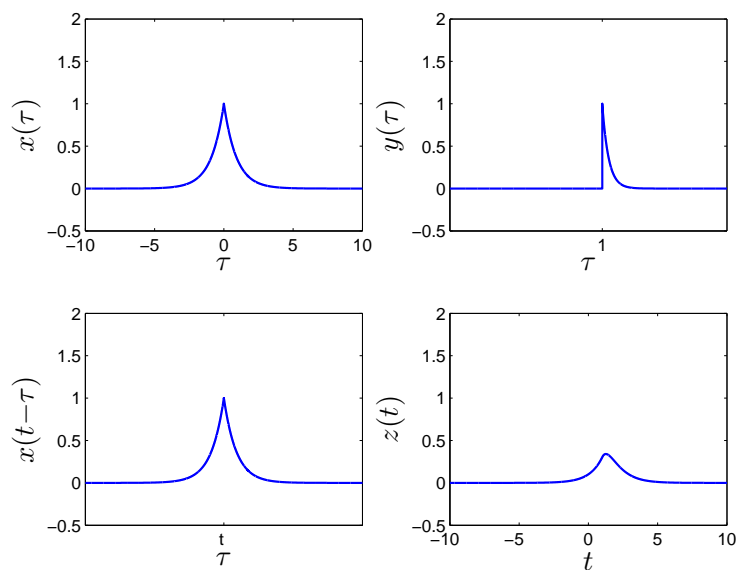
Άρα,

$$z(t) = \begin{cases} \frac{1}{3a} e^{a(t-1)}, & t < 1, \\ \frac{1}{a} e^{-a(t-1)} - \frac{2}{3a} e^{-2a(t-1)}, & t \geq 1. \end{cases} \tag{9.37}$$

Άσκηση 2.7.

- Αν $t+1 \leq 1 \Leftrightarrow t \leq 0$, τότε

$$z(t) = 0. \tag{9.38}$$



Σχ. 9.25. Σχήμα για την Άσκηση 2.6.

- Αν $1 \leq t+1 \leq 3 \Leftrightarrow 0 \leq t \leq 2$, τότε

$$z(t) = \int_1^{t+1} 2 \cdot 1 \, d\tau = 2t. \quad (9.39)$$

- Αν $t+1 \geq 3$ & $t-1 \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 4$, τότε

$$z(t) = \int_1^{t-1} 2 \cdot (-1) \, d\tau + \int_{t-1}^3 2 \, d\tau = -2(t-2) + 2(4-t) = -4t + 12. \quad (9.40)$$

- Αν $1 \leq t-3 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq t \leq 6$, τότε

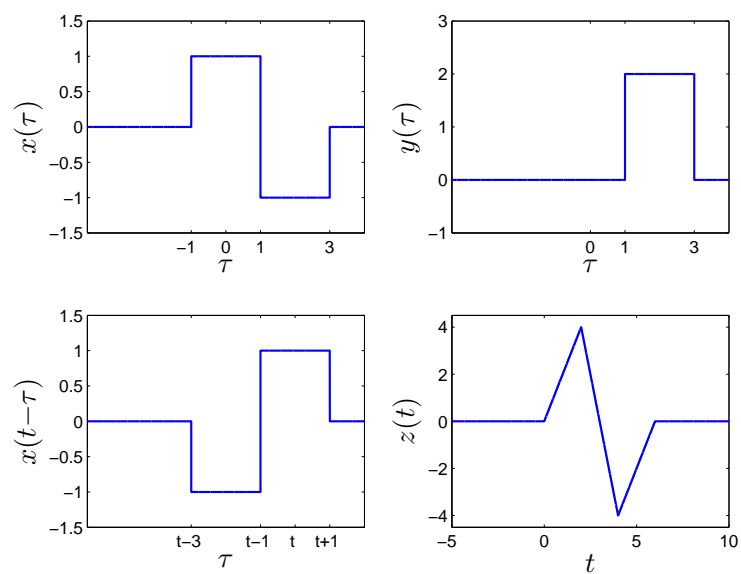
$$z(t) = \int_{t-3}^3 2 \cdot (-1) \, d\tau = -2(6-t) = 2t - 12. \quad (9.41)$$

- Αν $t-3 \geq 3 \Leftrightarrow t \geq 6$, τότε

$$z(t) = 0. \quad (9.42)$$

Άρα,

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 2t, & 0 \leq t \leq 2, \\ -4t + 12, & 2 \leq t \leq 4, \\ 2t - 12, & 4 \leq t \leq 6, \\ 0, & t \geq 6. \end{cases} \quad (9.43)$$



Σχ. 9.26. Σχήμα για την Άσκηση 2.7.

Κεφάλαιο 4

Άσκηση 4.1.

α)

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{A}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} e^{-j2\pi k F_0 t} dt \\
 &= \frac{A}{T_0} \left[\frac{e^{-j2\pi k F_0 t}}{-j2\pi k F_0} \right]_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} = -\frac{A}{j2\pi k F_0 T_0} \left(e^{-j2\pi k F_0 \frac{T_0}{2}} - e^{j2\pi k F_0 \frac{T_0}{2}} \right) \\
 &= \frac{A}{\pi k F_0 T_0} \frac{e^{j\pi k F_0 T} - e^{-j\pi k F_0 T}}{2j} = \frac{A}{\pi k F_0 T_0} \sin(\pi k F_0 T).
 \end{aligned} \tag{9.44}$$

Παρατηρήστε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα έχει νόημα μόνο για $k \neq 0$.

Για $k = 0$,

$$c_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) e^0 dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} A dt = \frac{AT}{T_0}. \tag{9.45}$$

Άρα,

$$c_k = \begin{cases} \frac{AT}{T_0}, & k = 0, \\ \frac{A}{\pi k F_0 T_0} \sin(\pi k F_0 T), & k \neq 0. \end{cases} \tag{9.46}$$

Ορίζουμε

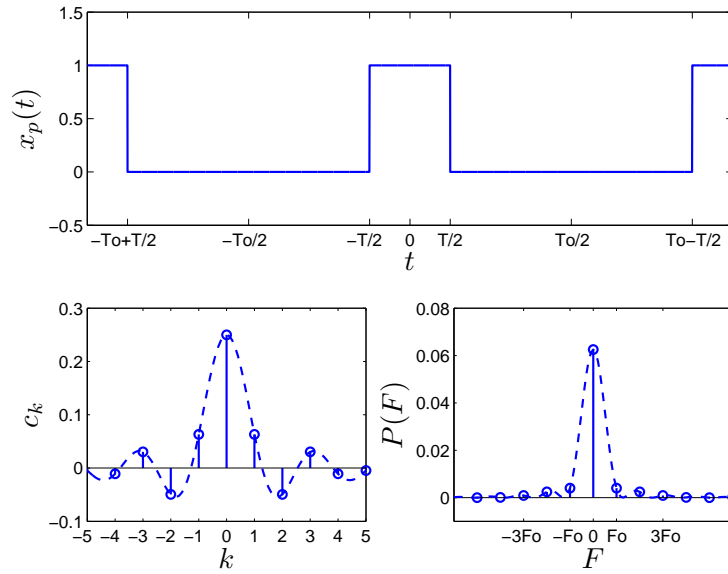
$$\text{sinc}(x) \triangleq \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}, & x \neq 0. \end{cases} \tag{9.47}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
 c_k &= \begin{cases} \frac{AT}{T_0}, & k = 0 \\ \frac{A}{\pi k F_0 T_0} \sin(\pi k F_0 T), & k \neq 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{AT}{T_0}, & k = 0 \\ \frac{AT}{T_0} \frac{\sin(\pi k F_0 T)}{\pi k F_0 T}, & k \neq 0 \end{cases} = \frac{AT}{T_0} \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\sin(\pi k F_0 T)}{\pi k F_0 T}, & k \neq 0 \end{cases} \\
 &= \frac{AT}{T_0} \text{sinc}(k F_0 T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned} \tag{9.48}$$

β)

$$P(k F_0) = |c_k|^2 = \left| \frac{AT}{T_0} \text{sinc}(k F_0 T) \right|^2 = \frac{A^2 T^2}{T_0^2} \text{sinc}^2(k F_0 T), \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{9.49}$$



Σχ. 9.27. Σχήμα για την Άσκηση 4.1.

Άσκηση 4.2.

$$T_0 = 4, \quad F_0 = \frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x_p(t) e^{-j2\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_{-2}^2 x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{4}} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{-1} (t+2) e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt + \frac{1}{4} \int_1^2 (2-t) e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt \\
 &= \frac{1}{4} \int_{-2}^{-1} t e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_{-2}^{-1} e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt + \frac{1}{4} \int_{-1}^1 e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt + \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt - \frac{1}{4} \int_1^2 t e^{-j\frac{\pi kt}{2}} dt.
 \end{aligned} \tag{9.50}$$

Γνωρίζουμε ότι

1)

$$\int_A^B e^{jCt} dt = \begin{cases} \left[\frac{e^{jCt}}{jC} \right]_A^B = \frac{e^{jCB} - e^{jCA}}{jC}, & C \neq 0, \\ \int_A^B 1 dt = B - A, & C = 0, \end{cases} \tag{9.51}$$

και

2)

$$\int_A^B t e^{jCt} dt = \begin{cases} \left[\frac{t e^{jCt}}{jC} \right]_A^B - \int_A^B \frac{e^{jCt}}{jC} dt = \frac{B e^{jCB} - A e^{jCA}}{jC} + \frac{e^{jCB} - e^{jCA}}{C^2}, & C \neq 0, \\ \int_A^B t dt = \left[\frac{t^2}{2} \right]_A^B = \frac{B^2 - A^2}{2}, & C = 0. \end{cases} \tag{9.52}$$

Άρα, αν $k = 0$, τότε

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{4} \frac{(-1)^2 - (-2)^2}{2} + \frac{1}{2}((-1) - (-2)) + \frac{1}{4}(1 - (-1)) + \frac{1}{2}(2 - 1) - \frac{1}{4} \frac{2^2 - 1^2}{2} \\ &= -\frac{3}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (9.53)$$

Αλλιώς, αν $k \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{4} \left(\frac{-e^{j\frac{\pi k}{2}} + 2e^{j\pi k}}{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\pi k}}{\frac{\pi^2 k^2}{4}} \right) + \frac{1}{2} \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\pi k}}{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{1}{4} \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\frac{\pi k}{2}}}{-j\frac{\pi k}{2}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{e^{-j\pi k} - e^{j\frac{\pi k}{2}}}{-j\frac{\pi k}{2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{2e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{-j\frac{\pi k}{2}} + \frac{e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{\frac{\pi^2 k^2}{4}} \right) \\ &= \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - 2e^{j\pi k}}{2j\pi k} + \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\pi k}}{\pi^2 k^2} + \frac{e^{j\pi k} - e^{j\frac{\pi k}{2}}}{j\pi k} + \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{2j\pi k} \\ &\quad + \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\pi k}}{j\pi k} + \frac{2e^{-j\pi k} - e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{2j\pi k} + \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}} - e^{-j\pi k}}{\pi^2 k^2} \\ &\stackrel{e^{j\pi k} = e^{-j\pi k}}{=} \underbrace{\frac{2e^{j\frac{\pi k}{2}} - 2e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{2j\pi k} + \frac{e^{-j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\frac{\pi k}{2}}}{j\pi k}}_{=0} + \frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\frac{\pi k}{2}} - e^{j\pi k} - e^{-j\pi k}}{\pi^2 k^2} \\ &= \frac{2}{\pi^2 k^2} \left(\frac{e^{j\frac{\pi k}{2}} + e^{-j\frac{\pi k}{2}}}{2} - \frac{e^{j\pi k} + e^{-j\pi k}}{2} \right) = \frac{2}{\pi^2 k^2} \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos(\pi k) \right). \end{aligned} \quad (9.54)$$

Άρα,

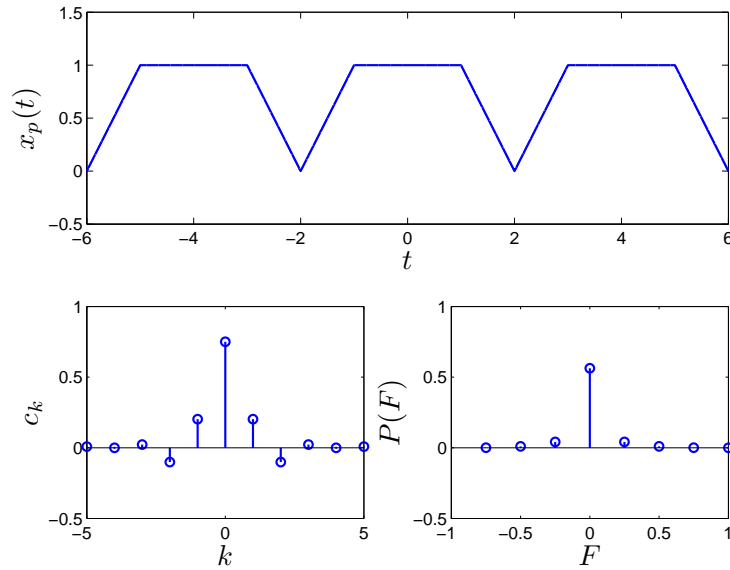
$$c_k = \begin{cases} \frac{3}{4}, & k = 0, \\ \frac{2}{\pi^2 k^2} \left(\cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) - \cos(\pi k) \right), & k \neq 0. \end{cases} \quad (9.55)$$

Άσκηση 4.3.

$$x(t) = 3 \cos\left(2\pi\frac{1}{4}t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Το $\{x(t)\}$ είναι περιοδικό σήμα με συχνότητα $F_0 = \frac{1}{4}$ και βασική περίοδο $T_0 = \frac{1}{F_0} = 4$.

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-j\pi k F_0 t} dt = \frac{1}{4} \int_0^4 3 \cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) e^{-j2\pi\frac{k}{4}t} dt \\ &= \frac{3}{8} \int_0^4 \left[e^{j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})} + e^{-j(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4})} \right] e^{-j\frac{\pi k t}{2}} dt \\ &= \frac{3}{8} e^{j\frac{\pi}{4}} \underbrace{\int_0^4 e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2})t} dt}_A + \frac{3}{8} e^{-j\frac{\pi}{4}} \underbrace{\int_0^4 e^{-j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2})t} dt}_B. \end{aligned} \quad (9.56)$$



Σχ. 9.28. Σχήμα για την Άσκηση 4.2.

$$A = \begin{cases} \int_0^4 1 \, dt = 4, & \frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = 1, \\ \left[\frac{e^{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2})t}}{j(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi k}{2})} \right]_0^4 = \frac{1}{j\frac{\pi}{2}(1-k)} \left(\overbrace{e^{j2\pi(1-k)}}^{=1} - 1 \right) = 0, & k \neq 1, \end{cases} \quad (9.57)$$

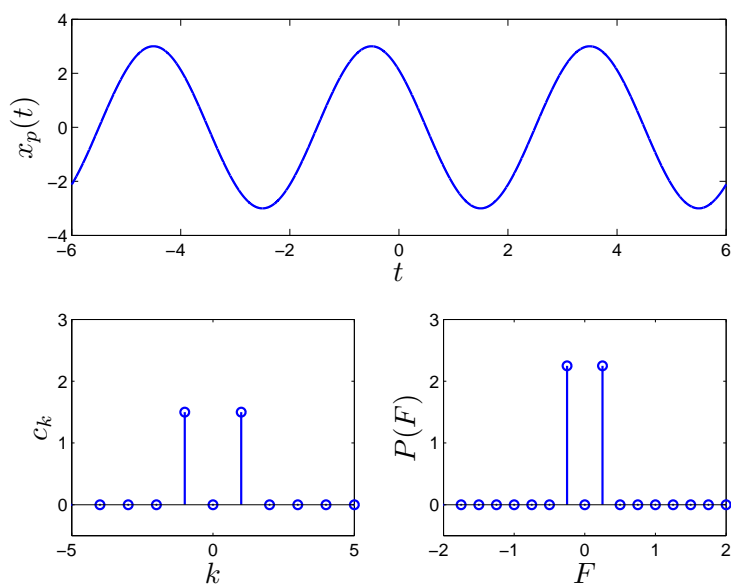
$$B = \begin{cases} \int_0^4 1 \, dt = 4, & \frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1, \\ \left[\frac{e^{-j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2})t}}{-j(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi k}{2})} \right]_0^4 = \frac{1}{-j\frac{\pi}{2}(k+1)} \left(\overbrace{e^{-j2\pi(k+1)}}^{=1} - 1 \right) = 0, & k \neq -1. \end{cases} \quad (9.58)$$

Άρα,

$$c_k = \begin{cases} \frac{3}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}4 + \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}0, & k = 1, \\ \frac{3}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}0 + \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}4, & k = -1, \\ \frac{3}{8}e^{j\frac{\pi}{4}}0 + \frac{3}{8}e^{-j\frac{\pi}{4}}0, & k \neq 1, -1. \end{cases} \quad (9.59)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} e^{j\frac{\pi}{4}} &= \cos \frac{\pi}{4} + j \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + j), \\ e^{-j\frac{\pi}{4}} &= \cos \left(-\frac{\pi}{4}\right) + j \sin \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - j \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - j). \end{aligned} \quad (9.60)$$



Σχ. 9.29. Σχήμα για την Άσκηση 4.3.

Επομένως,

$$c_k = \begin{cases} \frac{3(1+j)\sqrt{2}}{4}, & k = 1, \\ \frac{3(1-j)\sqrt{2}}{4}, & k = -1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (9.61)$$

Δηλαδή,

$$x(t) = \frac{3(1+j)\sqrt{2}}{4} e^{j2\pi 1 F_0 t} + \frac{3(1-j)\sqrt{2}}{4} e^{2\pi(-1)F_0 t} \Rightarrow x(t) = \frac{3(1+j)\sqrt{2}}{4} e^{j\frac{\pi t}{2}} + \frac{3(1-j)\sqrt{2}}{4} e^{-j\frac{\pi t}{2}}. \quad (9.62)$$

Επίσης, $|c_1| = |c_{-1}| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3}{2}$. Άρα,

$$P(kF_0) = |c_k|^2 = \begin{cases} \frac{9}{4}, & k = \pm 1, \\ 0, & \text{αλλού.} \end{cases} \quad (9.63)$$

Άσκηση 4.4. Αρχικά βρίσκουμε τη βασική περίοδο του σήματος $\{x(t)\}$.

$$\left. \begin{aligned} F_1 = 1 &\Rightarrow T_1 = 1 \\ F_2 = \frac{3}{8} &\Rightarrow T_2 = \frac{8}{3} \end{aligned} \right\} \Rightarrow T_0 = 8 \Rightarrow F_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{8}. \quad (9.64)$$

Συνεχίζουμε αναλύοντας το σήμα σε μιγαδικά εκθετικά σήματα.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{e^{j(2\pi t + \frac{\pi}{5})} + e^{-j(2\pi t + \frac{\pi}{5})}}{2} + \frac{e^{j\frac{3\pi}{4}t} + e^{-j\frac{3\pi}{4}t}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^{j\frac{\pi}{5}} e^{j2\pi t} + e^{-j\frac{\pi}{5}} e^{-j2\pi t} + e^{j\frac{3\pi}{4}t} + e^{-j\frac{3\pi}{4}t} \right) \\
 &= \frac{e^{j\frac{\pi}{5}}}{2} e^{j2\pi(8)\frac{1}{8}t} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{5}}}{2} e^{j2\pi(-8)\frac{1}{8}t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(3)\frac{1}{8}t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(-3)\frac{1}{8}t} \\
 &= \frac{e^{j\frac{\pi}{5}}}{2} e^{j2\pi(8)F_0 t} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{5}}}{2} e^{j2\pi(-8)F_0 t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(3)F_0 t} + \frac{1}{2} e^{j2\pi(-3)F_0 t}.
 \end{aligned} \tag{9.65}$$

Άρα,

$$c_k = \begin{cases} \frac{e^{-j\frac{\pi}{5}}}{2}, & k = -8, \\ \frac{1}{2}, & k = \pm 3, \\ \frac{e^{j\frac{\pi}{5}}}{2}, & k = 8, \\ 0, & \text{άλλοι.} \end{cases} \tag{9.66}$$

Επιπλέον,

$$P(kF_0) = |c_k|^2 = \begin{cases} \left| \frac{e^{-j\frac{\pi}{5}}}{2} \right|^2, & k = -8, \\ \left| \frac{1}{2} \right|^2, & k = \pm 3, \\ \left| \frac{e^{j\frac{\pi}{5}}}{2} \right|^2, & k = 8, \\ 0, & \text{άλλοι,} \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = \pm 3, \pm 8, \\ 0, & \text{άλλοι.} \end{cases} \tag{9.67}$$

Άσκηση 4.5.

```

A = 1;
T = 1;
T0 = 2;
F0 = 1/T0;
M = 10;
k = [-M:M]
dt = 0.01;
tx = [-T0/2:dt:T0/2-dt];
x = (tx>=-T/2)-(tx>=T/2);

for i = 1:length(k)
    c(i) = 1/T0*sum(x.*exp(-j*2*pi*k(i)*F0*tx))*dt;
end
stem(k, real(c))
figure
stem(k*F0, abs(c).^2)

for i = 1:length(tx)
    xp_hat(i) = sum(c.*exp(j*2*pi*k*F0*tx(i)));

```



```
end
figure
plot(tx, x)
hold on
plot(tx, real(xp_hat), 'r--')
hold off
```

Άσκηση 4.6.

```
L = 5;
N = 10;
Nx = [0:N-1];
x = (Nx>=0)-(Nx>=L);
k = [0:N-1];

for i = 1:length(k)
    c(i) = 1/N*sum(x.*exp(-j*2*pi*k(i)*Nx/N));
end
stem(k, real(c))
figure
stem(k/N, abs(c).^2)

for i = 1:length(Nx)
    x_hat(i) = sum(c.*exp(j*2*pi*k*Nx(i)/N));
end
figure
stem(Nx, x)
hold on
stem(Nx, real(x_hat), 'r')
hold off
```

Κεφάλαιο 5

Άσκηση 5.1.

$$\begin{aligned}
 X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt = \int_{-\infty}^1 e^{2(t-1)} e^{-j2\pi F t} dt + \int_1^{\infty} e^{-2(t-1)} e^{-j2\pi F t} dt \\
 &\stackrel{t_1 \leftarrow 1-t}{\stackrel{t_2 \leftarrow t-1}{=}} \int_0^{\infty} e^{-2t_1} e^{-j2\pi F(1-t_1)} dt_1 + \int_0^{\infty} e^{-2t_2} e^{-j2\pi F(t_2+1)} dt_2 \\
 &\stackrel{t \leftarrow t_1}{\stackrel{t \leftarrow t_2}{=}} e^{-2j\pi F} \int_0^{\infty} e^{-2(1-j\pi F)t} dt + e^{-2j\pi F} \int_0^{\infty} e^{-2(1+j\pi F)t} dt \\
 &= e^{-2j\pi F} \left(\left[\frac{e^{-2(1-j\pi F)t}}{-2(1-j\pi F)} \right]_0^{\infty} + \left[\frac{e^{-2(1+j\pi F)t}}{-2(1+j\pi F)} \right]_0^{\infty} \right) \\
 &= e^{-2j\pi F} \left(\left(0 - \frac{1}{-2(1-j\pi F)} \right) + \left(0 - \frac{1}{-2(1+j\pi F)} \right) \right) \\
 &= \frac{e^{-2j\pi F}}{2} \left(\frac{1}{1-j\pi F} + \frac{1}{1+j\pi F} \right) = \frac{e^{-2j\pi F}}{2} \left(\frac{1+j\pi F + 1-j\pi F}{1+\pi^2 F^2} \right) = \frac{e^{-2j\pi F}}{1+\pi^2 F^2}
 \end{aligned} \tag{9.68}$$

με μέτρο

$$|X(F)| = \frac{1}{1+\pi^2 F^2}. \tag{9.69}$$

Άρα,

$$\{e^{-2|t-1|}\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left\{ \frac{e^{-j2\pi F}}{1+\pi^2 F^2} \right\}. \tag{9.70}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

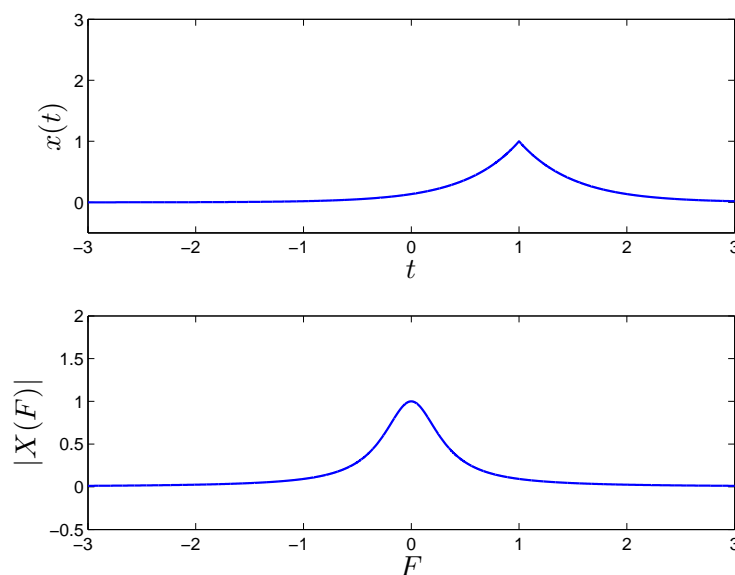
$$\left\{ \frac{e^{-2j\pi t}}{1+\pi^2 t^2} \right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{e^{-2|F+1|}\}. \tag{9.71}$$

Άσκηση 5.2.

$$\begin{aligned}
 X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi F t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} (\delta(t+1) + \delta(t-1)) e^{-j2\pi F t} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t+1) e^{-j2\pi F t} dt + \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-1) e^{-j2\pi F t} dt = e^{-j2\pi F(-1)} + e^{-j2\pi F(1)} \\
 &= 2 \cos(2\pi F).
 \end{aligned} \tag{9.72}$$

Άρα,

$$\{\delta(t+1)\} + \{\delta(t-1)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{2 \cos(2\pi F)\}. \tag{9.73}$$



Σχ. 9.30. Σχήμα για την Άσκηση 5.1.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\{2 \cos(2\pi t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{\delta(F+1)\} + \{\delta(F-1)\}. \quad (9.74)$$

Άσκηση 5.3. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι, $\forall a > 0$,

$$\{y(t)\} = \{e^{-at}u(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{Y(F)\} = \left\{ \frac{1}{a + 2j\pi F} \right\} \quad (9.75)$$

και παρατηρούμε ότι

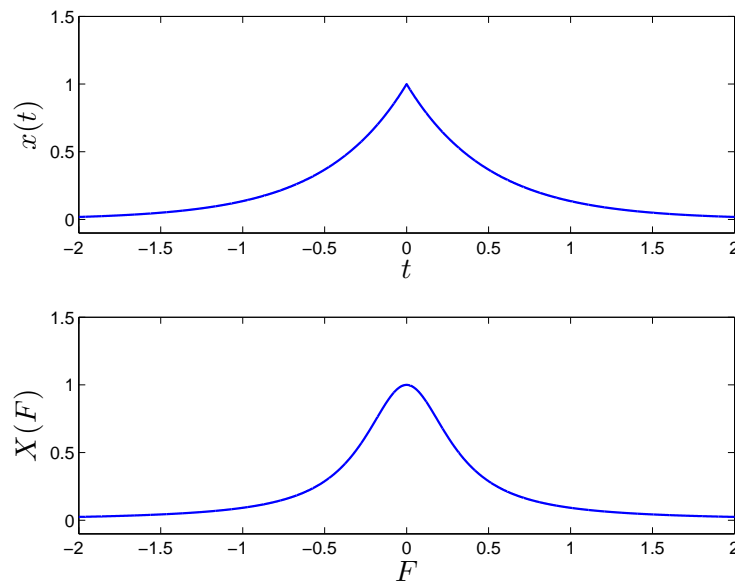
$$x(t) = y(t) + y(-t). \quad (9.76)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} X(F) &= \mathcal{F}\{\underbrace{e^{-at}u(t)}_{y(t)} + \underbrace{e^{at}u(-t)}_{y(-t)}\} = Y(F) + Y(-F) = \frac{1}{a + 2j\pi F} + \frac{1}{a - 2j\pi F} \\ &= \frac{a - 2j\pi F + a + j2\pi F}{a^2 + 4\pi^2 F^2} = \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2}, \end{aligned} \quad (9.77)$$

δηλαδή

$$\{e^{-a|t|}\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left\{ \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 F^2} \right\}. \quad (9.78)$$



Σχ. 9.31. Σχήμα για την Άσκηση 5.3.

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\left\{ \frac{2a}{a^2 + 4\pi^2 t^2} \right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{e^{-a|F|}\}. \quad (9.79)$$

Άσκηση 5.4. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι το σήμα $\{x(t)\}$ μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω σειράς Fourier ως

$$\{x(t)\} = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_0) \right\} = \left\{ \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k F_0 t} \right\} \quad (9.80)$$

όπου $F_0 = \frac{1}{T_0}$. Άρα,

$$\{X(F)\} = \mathcal{F} \left\{ F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi k F_0 t} \right\} = F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F} \{ e^{j2\pi k F_0 t} \} = F_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(F - kF_0) \}, \quad (9.81)$$

δηλαδή

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(t - kT_0) \} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta \left(F - \frac{k}{T_0} \right) \right\}. \quad (9.82)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\frac{1}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta \left(t - \frac{k}{T_0} \right) \right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{ \delta(F - kT_0) \}. \quad (9.83)$$

Άσκηση 5.5.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) x(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) A e^{j2\pi F_0(t-\tau)} d\tau = \underbrace{A e^{j2\pi F_0 t}}_{x(t)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j2\pi F_0 \tau} d\tau}_{H(F_0)}. \quad (9.84)$$

Άρα,

$$\{y(t)\} = H(F_0)\{x(t)\}. \quad (9.85)$$

Άσκηση 5.6. Γνωρίζουμε ότι

$$\{\Pi(Wt)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \frac{1}{W} \left\{ \text{sinc} \left(\frac{F}{W} \right) \right\}, \quad W > 0, \quad (9.86)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\{x(t)\} = \left\{ \Pi \left(\frac{t}{4} \right) + \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right\}. \quad (9.87)$$

Επομένως,

$$\{X(F)\} = \mathcal{F} \left\{ \Pi \left(\frac{t}{4} \right) + \Pi \left(\frac{t}{2} \right) \right\} = \{4\text{sinc}(4F) + 2\text{sinc}(2F)\}. \quad (9.88)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

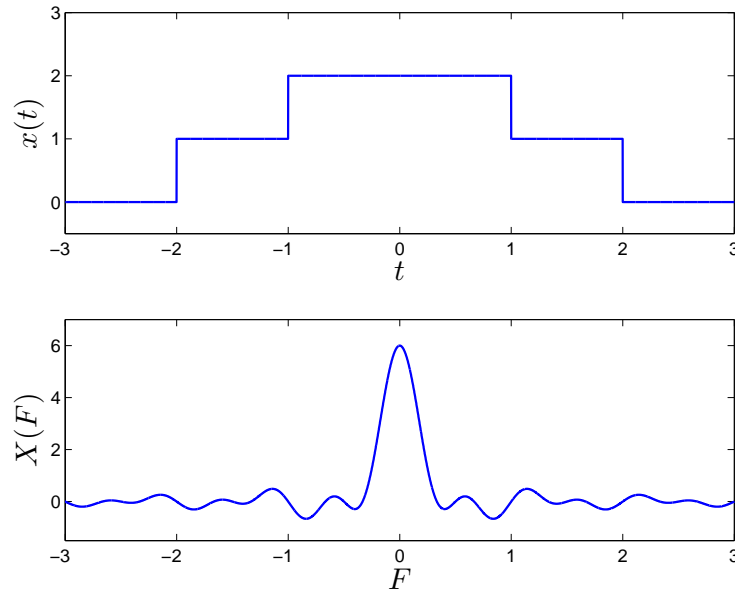
$$\{4\text{sinc}(4t) + 2\text{sinc}(2t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left\{ \Pi \left(\frac{F}{4} \right) + \Pi \left(\frac{F}{2} \right) \right\}. \quad (9.89)$$

Άσκηση 5.7. Γνωρίζουμε ότι

$$\{y(t)\} = \{e^{-at}u(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{Y(F)\} = \left\{ \frac{1}{a + j2\pi F} \right\}. \quad (9.90)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι

$$x_1(t) = y(t - 1). \quad (9.91)$$



Σχ. 9.32. Σχήμα για την Άσκηση 5.6.

Άρα,

$$\{x_1(t)\} = \{y(t-1)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{X_1(F)\} = \{e^{-2\pi F(1)}Y(F)\} = \left\{ \frac{e^{-2\pi F}}{a + 2j\pi F} \right\}. \quad (9.92)$$

Για το δεύτερο σήμα, παρατηρούμε ότι

$$x_2(t) = e^{-a(t-1)}u(t) = e^a e^{-at}u(t) = e^a y(t). \quad (9.93)$$

Άρα,

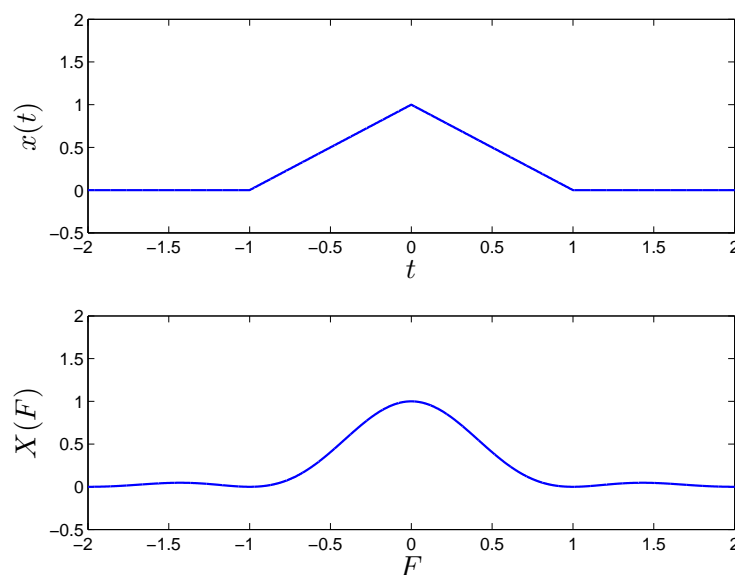
$$\{x_2(t)\} = e^a \{y(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{X_2(F)\} = e^a \{Y(F)\} = \left\{ \frac{e^a}{a + 2j\pi F} \right\}. \quad (9.94)$$

Άσκηση 5.8. Γνωρίζουμε ότι

$$\{\lambda(t)\} = \{\Pi(t)\} * \{\Pi(t)\}. \quad (9.95)$$

Άρα,

$$\{x(t)\} = \{\lambda(t)\} = \{\Pi(t)\} * \{\Pi(t)\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{X(F)\} = \{\text{sinc}(F)\}\{\text{sinc}(F)\} = \{\text{sinc}^2(F)\}, \quad (9.96)$$



Σχ. 9.33. Σχήμα για την Άσκηση 5.8.

δηλαδή

$$\{\lambda(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{\text{sinc}^2(F)\}. \quad (9.97)$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\{\text{sinc}^2(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{\lambda(-F)\} = \{\lambda(F)\}. \quad (9.98)$$

Άσκηση 5.9.

α) Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$x_1(t) = tx(t) = te^{-at}u(t). \quad (9.99)$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\{t^n x(t)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left(\frac{j}{2\pi}\right)^n \left\{\frac{d^n X(F)}{dF^n}\right\}. \quad (9.100)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \{X_1(F)\} &= \mathcal{F}\{x_1(t)\} = \mathcal{F}\{tx(t)\} = \frac{j}{2\pi} \left\{\frac{dX(F)}{dF}\right\} = \frac{j}{2\pi} \left\{\frac{-j2\pi}{(a + j2\pi F)^2}\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{(a + j2\pi F)^2}\right\}. \end{aligned} \quad (9.101)$$

β) Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$x_2(t) = t^2 x(t) = tx_1(t). \quad (9.102)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \{X_2(F)\} &= \mathcal{F}\{x_2(t)\} = \mathcal{F}\{tx_1(t)\} = \frac{j}{2\pi} \left\{ \frac{dX_1(F)}{dF} \right\} \\ &= \frac{j}{2\pi} \left\{ \frac{-2(2j\pi)}{(a + j2\pi F)^3} \right\} = \left\{ \frac{2}{(a + j2\pi F)^3} \right\}. \end{aligned} \quad (9.103)$$

γ) Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$x_3(t) = t^2 \cos(2\pi F_0 t) x(t) = x_2(t) \cos(2\pi F_0 t). \quad (9.104)$$

Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης,

$$\begin{aligned} \{X_3(F)\} &= \mathcal{F}\{x_2(t) \cos(2\pi F_0 t)\} = \frac{1}{2} \{X_2(F - F_0)\} + \frac{1}{2} \{X_2(F + F_0)\} \\ &= \left\{ \frac{1}{(a + j2\pi(F - F_0))^3} \right\} + \left\{ \frac{1}{(a + j2\pi(F + F_0))^3} \right\}. \end{aligned} \quad (9.105)$$

δ) Αρκεί να βρούμε το M.F. του σήματος $\{x(\frac{4-t}{2})\}$. Έστω σήμα $\{y(t)\} \triangleq \{x(-\frac{1}{2}t)\}$ με M.F. $\{Y(F)\} = \{2X(-2F)\}$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$x\left(\frac{4-t}{2}\right) = y(t-4). \quad (9.106)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{x\left(\frac{4-t}{2}\right)\right\} &= \mathcal{F}\{y(t-4)\} = \{e^{-j2\pi F 4} Y(F)\} = \{e^{-j2\pi F 4} 2X(-2F)\} \\ &= \left\{ \frac{2e^{-j8\pi F}}{a - j4\pi F} \right\}. \end{aligned} \quad (9.107)$$

Άρα, σύμφωνα με την ιδιότητα της διαμόρφωσης,

$$X_3(F) = \frac{e^{-j8\pi F}}{a - j4\pi(F - F_0)} + \frac{e^{-j8\pi F}}{a - j4\pi(F + F_0)}. \quad (9.108)$$

ε) Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} x_5(t) &= \int_{t-T}^t x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) (u(t-\tau) - u(t-T-\tau)) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) (u(\tau) - u(\tau-T)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau) \Pi\left(\frac{\tau - \frac{T}{2}}{T}\right) d\tau \\ \Rightarrow \{x_5(t)\} &= \{x(t)\} * \left\{ \Pi\left(\frac{t - \frac{T}{2}}{T}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (9.109)$$

Άρα,

$$X_5(F) = X(F)Te^{-j2\pi F\frac{T}{2}}\text{sinc}(TF) = \frac{Te^{-j\pi FT}}{a + j2\pi F}\text{sinc}(TF). \quad (9.110)$$

στ) Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$x_6(t) = e^{2at}e^{-4a}u(2-t) = e^{-2a(2-t)}u(2-t). \quad (9.111)$$

Ορίζουμε τα σήματα $\{\tilde{x}(t)\} \triangleq \{e^{-2at}u(t)\}$ και $\{\tilde{y}(t)\} \triangleq \{\tilde{x}(-t)\}$. Προφανώς, $\{\tilde{X}(F)\} = \left\{\frac{1}{2a+j2\pi F}\right\}$ και $\{\tilde{Y}(F)\} = \{\tilde{X}(-F)\}$. Παρατηρούμε ότι $x_6(t) = \tilde{x}(2-t) = \tilde{y}(t-2)$.

Άρα,

$$\{X_6(F)\} = \mathcal{F}\{\tilde{y}(t-2)\} = \left\{e^{-j2\pi F2}\tilde{Y}(F)\right\} = \left\{e^{-j4\pi F}\tilde{X}(-F)\right\} = \left\{\frac{e^{-j4\pi F}}{2a-j2\pi F}\right\}. \quad (9.112)$$

Άσκηση 5.10. Γνωρίζουμε ότι

$$\int_A^B te^{jCt} dt = \begin{cases} \left[\frac{te^{jCt}}{jC}\right]_A^B - \int_A^B \frac{e^{jCt}}{jC} dt = \frac{Be^{jCB}-Ae^{jCA}}{jC} + \frac{e^{jCB}-e^{jCA}}{C^2}, & C \neq 0, \\ \int_A^B t dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_A^B = \frac{B^2-A^2}{2}, & C = 0. \end{cases} \quad (9.113)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} X(F) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi Ft} dt = \int_{-T}^T \frac{A}{T} te^{-j2\pi Ft} dt \\ &= \frac{A}{T} \begin{cases} \frac{T^2-T^2}{2}, & F = 0 \\ \frac{Te^{-j2\pi FT}+Te^{-j2\pi F(-T)}}{-j2\pi F} + \frac{e^{-j2\pi FT}-e^{-j2\pi F(-T)}}{4\pi^2 F^2}, & F \neq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A}{T} \begin{cases} 0, & F = 0 \\ \frac{T}{-j2\pi F} (e^{-j2\pi FT} + e^{j2\pi FT}) + \frac{1}{4\pi^2 F^2} (e^{-j2\pi FT} - e^{-j2\pi F(-T)}), & F \neq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A}{T} \begin{cases} 0, & F = 0 \\ -\frac{T}{j\pi F} \cos(2\pi FT) + \frac{-2j}{4\pi^2 F^2} \frac{e^{j2\pi FT}-e^{-j2\pi FT}}{2j}, & F \neq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A}{T} \begin{cases} 0, & F = 0 \\ \frac{-2j}{4\pi^2 F^2} \sin(2\pi FT) - \frac{T}{j\pi F} \cos(2\pi FT), & F \neq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A}{T} \begin{cases} 0, & F = 0 \\ \frac{T}{j\pi F} \frac{\sin(2\pi FT)}{2\pi FT} - \frac{T}{j\pi F} \cos(2\pi FT), & F \neq 0 \end{cases} \\ &= \frac{A}{j\pi F} (\text{sinc}(2\pi FT) - \cos(2\pi FT)). \end{aligned} \quad (9.114)$$

Άσκηση 5.11.

$$\begin{aligned} X(F) &= \frac{3}{4} \Pi\left(\frac{F}{4}\right) (\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)) = \begin{cases} 0, & F_0 > 2 \\ \frac{3}{4} (\delta(F - F_0) + \delta(F + F_0)), & F_0 \leq 2 \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & F_0 > 2 \\ \frac{3}{4} \delta(F - F_0) + \frac{3}{4} \delta(F + F_0), & F_0 \leq 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.115)$$

Άσκηση 5.12.

$$X(F) = \Pi(F)\Pi(F) = \Pi^2(F) = \Pi(F). \quad (9.116)$$

Επομένως,

$$\{\text{sinc}(t)\} * \{\text{sinc}(t)\} = \{\text{sinc}(t)\}. \quad (9.117)$$

Άσκηση 5.13.

$$\{Y(F)\} = \mathcal{F}\{x^2(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)x(t)\} = \{X(F)\} * \{X(F)\}. \quad (9.118)$$

Από ιδιότητα της συνέλιξης γνωρίζουμε ότι όταν συνελίσσουμε δύο σήματα με πεπερασμένο μη μηδενικό εύρος, τότε το μη μηδενικό εύρος του αποτελέσματος αρχίζει στο άθροισμα των αρχικών στιγμών των δύο σημάτων και τελειώνει στο άθροισμα των τελικών στιγμών των δύο σημάτων. Άρα ο $\{Y(F)\}$ είναι μή μηδενικός στο $-B + (-B) \leq F \leq B + B \Leftrightarrow -2B \leq F \leq 2B$.

Κεφάλαιο 6

Άσκηση 6.1.

Για $f = k \in \mathbb{Z}$,

$$X(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi kn} = \sum_{n=-M}^M 1 = 2M + 1. \quad (9.119)$$

Για $f \notin \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=-M}^M e^{-j2\pi fn} = \sum_{n=0}^{2M} e^{-j2\pi f(n-M)} \\ &= e^{j2\pi fM} \sum_{n=0}^{2M} e^{-j2\pi fn} = e^{j2\pi fM} \frac{e^{-j2\pi f(2M+1)} - 1}{e^{-j2\pi f} - 1} = \underbrace{e^{j2\pi fM} \frac{e^{-j\pi f(2M+1)}}{e^{-j\pi f}}}_{=1} \frac{e^{-j\pi f(2M+1)} - e^{j\pi f(2M+1)}}{e^{-j\pi f} - e^{j\pi f}} \\ &= \frac{-2j \sin(\pi f(2M+1))}{-2j \sin(\pi f)} = (2M+1) \frac{\frac{\sin(\pi f(2M+1))}{\pi f(2M+1)}}{\frac{\sin(\pi f)}{\pi f}} = (2M+1) \frac{\text{sinc}(f(2M+1))}{\text{sinc}(f)}. \end{aligned} \quad (9.120)$$

Άρα,

$$X(f) = (2M+1) \begin{cases} 1, & f \in \mathbb{Z} \\ \frac{\text{sinc}(f(2M+1))}{\text{sinc}(f)}, & f \notin \mathbb{Z}. \end{cases} = (2M+1) \begin{cases} 1, & f \in \mathbb{Z}^* \\ \frac{\text{sinc}(f(2M+1))}{\text{sinc}(f)}, & f \notin \mathbb{Z}^*. \end{cases} \quad (9.121)$$

Ειδικότερα για $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, έχουμε $X(f) = \frac{\text{sinc}(f(2M+1))}{\text{sinc}(f)}$. Τέλος, σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

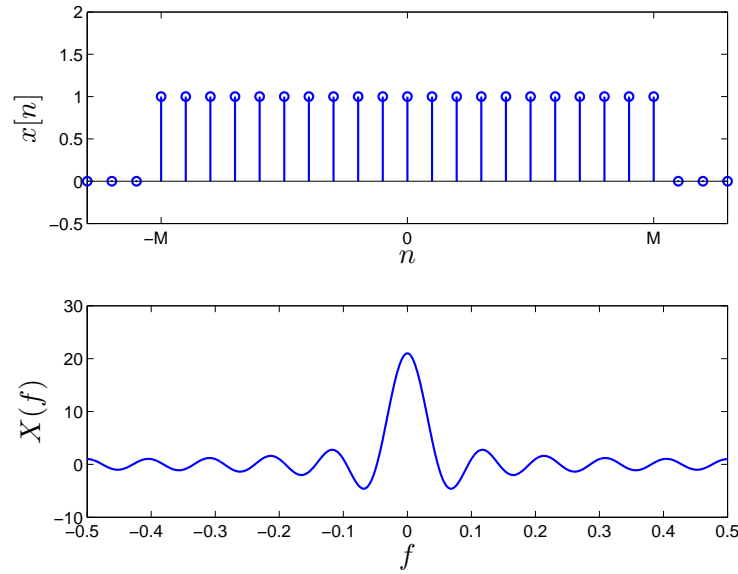
$$(2M+1) \begin{cases} 1, & t \in \mathbb{Z}^* \\ \frac{\text{sinc}(t(2M+1))}{\text{sinc}(t)}, & t \notin \mathbb{Z}^* \end{cases} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{c_k\} = \{x[-k]\} = \begin{cases} 1, & -M \leq k \leq M \\ 0, & \text{αλλού} \end{cases}. \quad (9.122)$$

Άσκηση 6.2. Παρατηρούμε ότι, για $f \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$,

$$X(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right). \quad (9.123)$$

Για $n = 0$,

$$x[0] = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi 0n} df = \int_{-B}^B df = 2B. \quad (9.124)$$



Σχ. 9.34. Σχήμα για την Άσκηση 6.1.

Για $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
 x[n] &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(f) e^{j2\pi f n} df = \int_{-B}^B e^{j2\pi f n} df = \left[\frac{e^{j2\pi f n}}{j2\pi n} \right]_{-B}^B \\
 &= \frac{1}{j2\pi n} (e^{j2\pi B n} - e^{-j2\pi B n}) = \frac{1}{\pi n} \frac{e^{j2\pi B n} - e^{-j2\pi B n}}{2j}.
 \end{aligned} \tag{9.125}$$

Άρα, $\forall n \in \mathbb{Z}$,

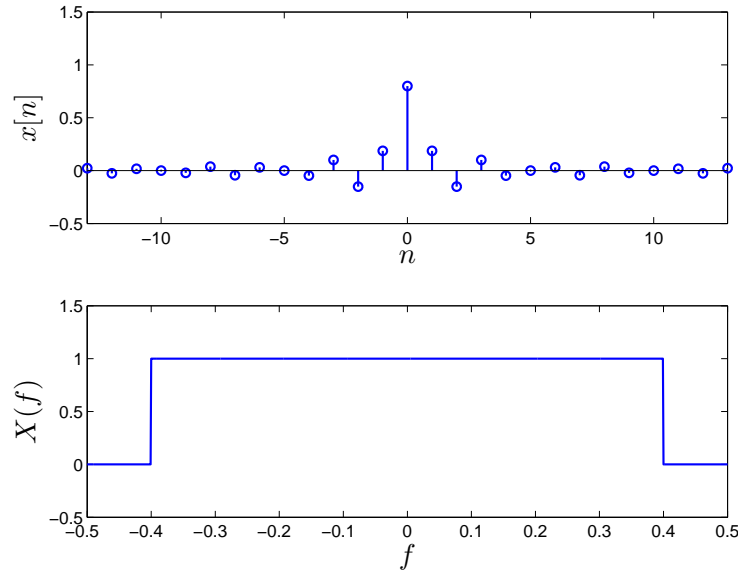
$$x[n] = \begin{cases} 2B, & f = 0 \\ \frac{1}{\pi n} \frac{e^{j2\pi B n} - e^{-j2\pi B n}}{2j}, & f \neq 0 \end{cases} = 2B \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \frac{\sin(2\pi B n)}{2\pi B n}, & n \neq 0 \end{cases} = 2B \text{sinc}(2Bn), \tag{9.126}$$

δηλαδή

$$2B \{\text{sinc}(2Bn)\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi \left(\frac{f-l}{2B} \right) \right\}. \tag{9.127}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \left\{ \Pi \left(\frac{t-l}{2B} \right) \right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{c_k\} = 2B \{\text{sinc}(2Bk)\}. \tag{9.128}$$



Σχ. 9.35. Σχήμα για την Άσκηση 6.2.

Άσκηση 6.3.

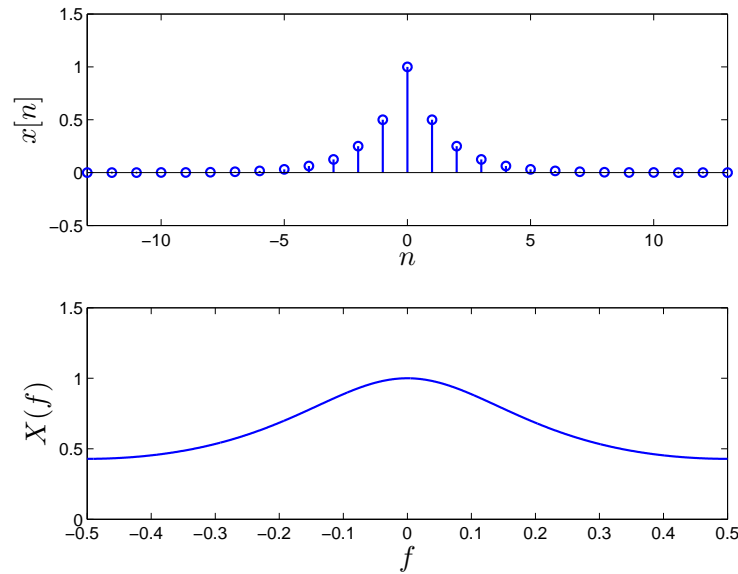
$$\begin{aligned}
 X(f) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{|n|} e^{-j2\pi f n} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n} e^{-j2\pi f n}}_{n \leftarrow -n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n e^{j2\pi f n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} = a \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1} e^{j2\pi f n}}_{n \leftarrow n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} \\
 &= a \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{j2\pi f (n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j2\pi f n} = a e^{j2\pi f} \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{j2\pi f})^n + \sum_{n=0}^{\infty} (a e^{-j2\pi f})^n \\
 &= a e^{j2\pi f} \frac{1}{1 - a e^{j2\pi f}} + \frac{1}{1 - a e^{-j2\pi f}} = \frac{a e^{j2\pi f} (1 - a e^{-j2\pi f}) + (1 - a e^{j2\pi f})}{(1 - a e^{j2\pi f})(1 - a e^{-j2\pi f})} \\
 &= \frac{a e^{j2\pi f} - a^2 + 1 - a e^{j2\pi f}}{1 - a e^{j2\pi f} - a e^{-j2\pi f} + a^2} = \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)}.
 \end{aligned} \tag{9.129}$$

Άρα,

$$\{a^{|n|}\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \left\{ \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \right\}. \tag{9.130}$$

Σύμφωνα με την ιδιότητα της δυϊκότητας του M.F.,

$$\left\{ \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi t)} \right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} \{c_k\} = \{a^{|-k|}\} = \{a^{|k|}\}. \tag{9.131}$$



Σχ. 9.36. Σχήμα για την Άσκηση 6.3.

Άσκηση 6.4. Έστω σήμα $\{z[n]\}$ με τιμή

$$z[n] = x[-n] \quad (9.132)$$

και μετασχηματισμό Fourier

$$\{Z(f)\} = \left\{ \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(-2\pi f)} \right\} = \left\{ \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \right\}. \quad (9.133)$$

Τότε, $z[n-1] = x[1-n]$ και $z[n+1] = x[-1-n]$. Άρα,

$$\{x[1-n]\} = \{z[n-1]\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{e^{-j2\pi f} Z(f)\} \quad (9.134)$$

και

$$\{x[-1-n]\} = \{z[n+1]\} \xrightarrow{\mathcal{F}} \{e^{-j2\pi f(-1)} Z(f)\}. \quad (9.135)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} Y(f) &= e^{-j2\pi f} Z(f) - e^{j2\pi f} Z(f) = -(e^{j2\pi f} - e^{-j2\pi f}) \frac{1 - a^2}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)} \\ &= 2j(a^2 - 1) \frac{\sin(2\pi f)}{1 + a^2 - 2a \cos(2\pi f)}. \end{aligned} \quad (9.136)$$

Άσκηση 6.5.

$$X(f) = A \Pi(f) 2B \Pi(2f) = 2AB \Pi(2f), \quad -\frac{1}{2} \leq f \leq \frac{1}{2}. \quad (9.137)$$

Άρα,

$$\{A \operatorname{sinc}(n)\} * \left\{B \operatorname{sinc}\left(\frac{n}{2}\right)\right\} \stackrel{\mathcal{F}}{\rightleftharpoons} 2AB \sum_{l=-\infty}^{\infty} \{\Pi(2(f-l))\}. \quad (9.138)$$

Κεφάλαιο 8

Άσκηση 8.1.

$$\begin{aligned}
 \{X(s)\} &= \mathcal{L}\{\cos(2\pi F_0 t)u(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t}}{2}u(t)\right\} \\
 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{j2\pi F_0 t}u(t)\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-j2\pi F_0 t}u(t)\} \\
 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s - j2\pi F_0}, \Re(s) > \underbrace{\Re(j2\pi F_0)}_{=0}\right\} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{s + j2\pi F_0}, \Re(s) > \underbrace{\Re(-j2\pi F_0)}_{=0}\right\} \\
 &= \frac{1}{2}\left\{\frac{s + j2\pi F_0 + s - j2\pi F_0}{(s + j2\pi F_0)(s - j2\pi F_0)}, \Re(s) > 0\right\} = \left\{\frac{s}{s^2 + (2\pi F_0)^2}, \Re(s) > 0\right\}.
 \end{aligned}
 \tag{9.139}$$

Άσκηση 8.2. Παρατηρούμε ότι $x(t) = e^{-at}y(t)$, όπου $y(t) = \cos(2\pi F_0 t)$, με M.L. $\{Y(s)\} = \left\{\frac{s}{s^2 + (2\pi F_0)^2}, \Re(s) > 0\right\}$. Από ιδιότητες γνωρίζουμε ότι

$$\{X(s)\} = \{Y(s + a), \Re(s + a) > 0\} \Rightarrow \{X(s)\} = \left\{\frac{s + a}{(s + a)^2 + (2\pi F_0)^2}, \Re(s) > -a\right\}.
 \tag{9.140}$$

Άσκηση 8.3.

$$\begin{aligned}
 \{x(t)\} &= \{e^{s_0 t}u(t)\} * \{e^{s_0 t}u(t)\} \\
 \Rightarrow x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 \tau}u(\tau)e^{s_0(t-\tau)}u(t-\tau) d\tau = e^{s_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau) d\tau \\
 &= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{s_0 t} \int_0^t d\tau, & t \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ te^{s_0 t}, & t \geq 0 \end{cases} = te^{s_0 t}u(t).
 \end{aligned}
 \tag{9.141}$$

Άσκηση 8.4.

$$\begin{aligned}
X(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt = \int_0^T e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^T e^{-(a+s)t} dt \\
&= \begin{cases} \int_0^T 1 dt = T, & a+s=0 \\ \left[\frac{e^{-(a+s)t}}{-(a+s)} \right]_0^T = -\frac{1}{a+s} (e^{-(a+s)T} - 1), & a+s \neq 0 \end{cases} \quad (9.142) \\
\Rightarrow X(s) &= \begin{cases} T, & s = -a, \\ -\frac{1}{a+s} (e^{-(a+s)T} - 1), & s \neq -a, \end{cases} \quad \text{ROC} = \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 8.5. Παρατηρούμε ότι

$$x(t) = e^{-a|t|} = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t). \quad (9.143)$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\{X(s)\} &= \left\{ \frac{1}{s+a}, \Re(s) > -\Re(a) \right\} - \left\{ \frac{1}{s-a}, \Re(s) < \Re(a) \right\} \\
&= \left\{ \frac{(s-a) - (s+a)}{(s+a)(s-a)}, -\Re(a) < \Re(s) < \Re(a) \right\} \quad (9.144) \\
&= \left\{ -\frac{2a}{s^2 - a^2}, |\Re(s)| < \Re(a) \right\}.
\end{aligned}$$

1) Αν $\Re(a) > 0$, τότε

$$\{X(s)\} = \left\{ -\frac{2a}{s^2 - a^2}, |\Re(s)| < \Re(a) \right\}. \quad (9.145)$$

2) Αν $\Re(a) \leq 0$, τότε το $\{X(s)\}$ δεν υπάρχει.**Άσκηση 8.6.** Το $s^2 + 4s + 3$ έχει ρίζες τα $s_1 = -1$ και $s_2 = -3$. Άρα,

$$\{X(s)\} = \left\{ \frac{2s+4}{s^2+4s+3}, \Re(s) > -1 \right\} = \left\{ \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}, \Re(s) > -1 \right\}, \quad (9.146)$$

με

$$\begin{aligned}
A_1 &= \{(s+1)X(s)\}|_{s=-1} = \left\{ \frac{2s+4}{s+3} \right\} \Big|_{s=-1} = \frac{2(-1)+4}{-1+3} = 1, \\
A_2 &= \{(s+3)X(s)\}|_{s=-3} = \left\{ \frac{2s+4}{s+1} \right\} \Big|_{s=-3} = \frac{2(-3)+4}{-3+1} = 1. \quad (9.147)
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\{X(s)\} = \left\{ \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+3}, \Re(s) > -1 \right\} \Rightarrow \{x(t)\} = \{e^{-t}u(t)\} + \{e^{-3t}u(t)\}. \quad (9.148)$$

Άσκηση 8.7. Παρατηρούμε ότι

$$X(s) = \frac{2s+1}{s+2} = \frac{2s+4-3}{s+2} = \frac{2(s+2)-2}{s+2} = 2 - \frac{3}{s+2}. \quad (9.149)$$

Επίσης,

$$\mathcal{L}^{-1}\{2, s \in \mathbb{C}\} = 2\{\delta(t)\} \quad (9.150)$$

και

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}, \Re(s) > -2\right\} &= \{e^{-2t}u(t)\}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}, \Re(s) < -2\right\} &= -\{e^{-2t}u(-t)\}. \end{aligned} \quad (9.151)$$

1) Αν $\Re(s) > -2$, τότε $x(t) = 2\delta(t) - 3e^{-2t}u(t)$.

2) Αν $\Re(s) < -2$, τότε $x(t) = 2\delta(t) + 3e^{-2t}u(-t)$.

Άσκηση 8.8.

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{s^2+6s+7}{s^2+3s+2} = \frac{(s^2+3s+2) + (3s+5)}{s^2+3s+2} \\ &= 1 + \frac{3s+5}{s^2+3s+2} = 1 + \frac{3s+5}{(s+1)(s+2)} = 1 + \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+2}, \end{aligned} \quad (9.152)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{ \frac{3s+5}{s+2} \right\} \Big|_{s=-1} = \frac{3(-1)+5}{-1+2} = 2, \\ A_2 &= \left\{ \frac{3s+5}{s+1} \right\} \Big|_{s=-2} = \frac{3(-2)+5}{-2+1} = 1. \end{aligned} \quad (9.153)$$

Άρα,

$$H(s) = 1 + \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2}. \quad (9.154)$$

1) Αν $\Re(s) > -1$, τότε

$$h(t) = \delta(t) + 2e^{-t}u(t) + e^{-2t}u(t). \quad (9.155)$$

Το σύστημα είναι ευσταθές εφόσον το ROC περιλαμβάνει το $\Re(s) = 0$ και αιτιατό εφόσον αυτό εκτείνεται δεξιά του μεγαλύτερου πόλου του συστήματος.

2) Αν $-2 < \Re(s) < -1$, τότε

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(-t) + e^{-2t}u(t). \quad (9.156)$$

Το σύστημα είναι μη ευσταθές και μη αιτιατό.

3) Αν $\Re(s) < -2$, τότε

$$h(t) = \delta(t) - 2e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(-t). \quad (9.157)$$

Το σύστημα είναι μη ευσταθές και μη αιτιατό.

Άσκηση 8.9.

$$X(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)^2} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{a_0}{(s-1)^2} + \frac{a_1}{s-1} \quad (9.158)$$

όπου

$$\begin{aligned} A_1 &= \{(s+1)X(s)\}|_{s=-1} = \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{(-1-1)^2} = \frac{1}{4}, \\ a_0 &= \frac{1}{0!} \{(s-1)^2 X(s)\}|_{s=1} = \frac{1}{1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} \Big|_{s=1} = \frac{1}{2}, \\ a_1 &= \frac{1}{1!} \left\{ \frac{d}{ds} [(s-1)^2 X(s)] \right\} \Big|_{s=1} = \frac{1}{1} \left\{ \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s+1} \right] \right\} \Big|_{s=1} \\ &= \left\{ -\frac{1}{(s+1)^2} \right\} \Big|_{s=1} = -\frac{1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Άρα,

$$X(s) = \frac{1}{4} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{4} \frac{1}{s-1}, \quad -1 < \Re(s) < 1. \quad (9.160)$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s+1} \right\} &= \begin{cases} \{e^{-t}u(t)\}, & \text{αν } \Re(s) > -1 \quad (\checkmark) \\ \{-e^{-t}u(-t)\}, & \text{αν } \Re(s) < -1, \end{cases} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-1} \right\} &= \begin{cases} \{e^t u(t)\}, & \text{αν } \Re(s) > 1 \\ \{-e^t u(-t)\}, & \text{αν } \Re(s) < 1, \quad (\checkmark) \end{cases} \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s-1)^2} \right\} &= \begin{cases} \{e^t u(t)\} * \{e^t u(t)\}, & \text{αν } \Re(s) > 1 \\ \{-e^t u(-t)\} * \{-e^t u(-t)\}, & \text{αν } \Re(s) < 1. \quad (\checkmark) \end{cases} \end{aligned} \quad (9.161)$$

Άρα,

$$\{x(t)\} = \frac{1}{4}\{e^{-t}u(t)\} + \frac{1}{2}\underbrace{\{e^t u(-t)\} * \{e^t u(-t)\}}_{x'(t)} + \frac{1}{4}\{e^t u(-t)\} \quad (9.162)$$

όπου

$$\begin{aligned} x'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\tau} u(-\tau) e^{t-\tau} u(-(t-\tau)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^t u(-\tau) u(\tau-t) d\tau \\ &= e^t \int_{-\infty}^0 u(\tau-t) d\tau = \begin{cases} e^t 0 = 0, & t > 0 \\ e^t \int_t^0 1 d\tau = -te^t, & t \leq 0 \end{cases} = -te^t u(-t). \end{aligned} \quad (9.163)$$

Άρα,

$$\{x(t)\} = \frac{1}{4}\{e^{-t}u(t)\} - \frac{1}{2}\{te^t u(-t)\} + \frac{1}{4}\{e^t u(-t)\}. \quad (9.164)$$