

FIR 滤波器原理与应用

有限冲激响应滤波器的理论基础与实现方法

June 16, 2025

Visier Rational
Lumen Institute
visier@lument.org

Visier Emotional
Lumen Institute
visier@lument.org

Visier Philosophical
Lumen Institute
visier@lument.org

SUMMARY

Contents

1	FIR 滤波器基础	1
2	数学基础	1
3	设计方法	1
4	实现方式	1
5	FIR 滤波器数学模型	1
6	FIR 滤波器性能分析	2
6.1	性能评估指标	2
7	FIR 滤波器窗函数设计	4
7.1	简介	4
7.1.1	设计参数	4
7.1.2	性能对比	4
7.1.3	设计建议	5
8	实际应用案例	6
8.1	音频处理系统	6
8.2	通信系统	6
8.3	结构分析	7
8.4	窗函数的频域特性	7
8.5	频域特性量化分析	8
8.6	矩形窗(Rectangular Window)	8
8.7	汉明窗(Hamming Window)	9
8.8	布莱克曼窗(Blackman Window)	10

SUMMARY

Term/Abbreviation	Explanation
FIR	Finite Impulse Response
IIR	Infinite Impulse Response
DSP	Digital Signal Processing
DFT	Discrete Fourier Transform
FFT	Fast Fourier Transform
IFFT	Inverse Fast Fourier Transform
LPF	Low Pass Filter
HPF	High Pass Filter
BPF	Band Pass Filter
BSF	Band Stop Filter
MAC	Multiply-Accumulate
FPGA	Field Programmable Gate Array
ADC	Analog-to-Digital Converter
DAC	Digital-to-Analog Converter
SNR	Signal-to-Noise Ratio
THD	Total Harmonic Distortion
SIMD	Single Instruction Multiple Data
ASIC	Application Specific Integrated Circuit

FIR 滤波器原理与应用

Visier Rational
Lumen Institute
visier@lument.org

Visier Emotional
Lumen Institute
visier@lument.org

Visier Philosophical
Lumen Institute
visier@lument.org

Abstract

本文详细介绍了有限冲激响应(FIR)滤波器的基本原理、设计方法和实际应用。FIR 滤波器作为数字信号处理中的重要组成部分，具有线性相位、稳定性好等优点，广泛应用于通信、音频处理、图像处理等领域。

1 FIR 滤波器基础

- 定义与特性
 - 有限冲激响应
 - 线性相位特性
 - 无条件稳定
- 与 IIR 滤波器对比
 - 无反馈结构
 - 计算复杂度较高
 - 设计相对简单
- 应用领域
 - 音频处理
 - 图像滤波
 - 通信系统
 - 生物医学信号

2 数学基础

- 时域表示
 - 差分方程
 - 卷积运算
- 频域特性
 - 频率响应
 - 幅度响应
 - 相位响应

3 设计方法

- 窗函数法
 - 矩形窗
 - 汉宁窗
 - 汉明窗
 - 布莱克曼窗
- 频率采样法
 - DFT 设计
 - 过渡带优化

3. 最优化设计

- Parks-McClellan 算法
- 最小二乘法

4 实现方式

- 直接形式
 - 时域卷积
 - MAC 运算
 - 延时线结构
- 频域实现
 - FFT 卷积
 - 重叠相加法
 - 重叠保存法
 - 分块处理
- 硬件实现
 - FPGA 并行处理
 - DSP 芯片优化
 - ASIC 专用设计
 - GPU 加速
- 软件优化
 - SIMD 指令
 - 多线程处理
 - 缓存优化
 - 向量化计算

5 FIR 滤波器数学模型

FIR 滤波器的输出可以表示为输入信号的加权和：

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k]$$

其中：

- $y[n]$ 是输出信号

- $x[n]$ 是输入信号
- $h[k]$ 是滤波器系数
- N 是滤波器长度

频率响应为：

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]e^{-j\omega k}$$

6 FIR 滤波器性能分析

FIR 滤波器的性能评估主要考虑以下几个方面：计算复杂度、滤波精度、相位特性和稳定性。在实际应用中，我们需要在这些指标之间进行权衡。

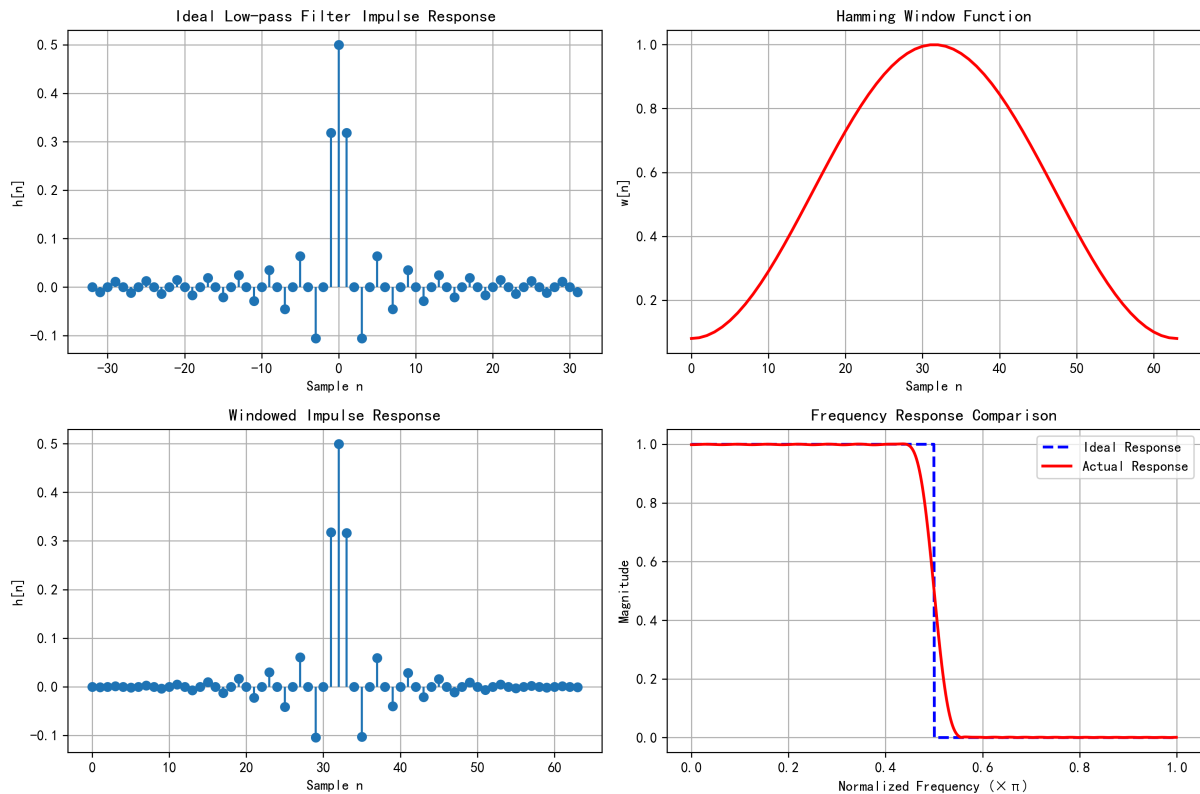


Figure 6.1: FIR Filter Mathematical Analysis

FIR 滤波器的性能可以用以下公式表示：

$$\text{Performance} = \text{Accuracy} * \alpha + \text{Speed} * \beta + \text{Stability} * \gamma$$

6.1 性能评估指标

1. **计算复杂度**：每个输出样本需要 N 次乘法和 $N - 1$ 次加法

$$\text{Complexity} = N \times \text{MAC operations per sample}$$

2. **滤波精度**：通过通带纹波和阻带衰减来衡量

$$\text{Accuracy} = \min(\text{Passband ripple}, \text{Stopband attenuation})$$

3. **群延迟**：FIR 滤波器具有恒定群延迟

$$\tau_g = \frac{N-1}{2} \text{ samples}$$

4. **内存需求**：需要存储 N 个系数和 $N-1$ 个延时样本

$$\text{Memory} = N + (N-1) = 2N-1 \text{ words}$$

7 FIR 滤波器窗函数设计

7.1 简介

窗函数法是 FIR 滤波器设计中最常用的方法之一，通过将理想滤波器的无限长冲激响应截断并加窗来获得有限长的滤波器系数。本案例比较了不同窗函数对低通滤波器性能的影响，包括矩形窗、汉宁窗、汉明窗和布莱克曼窗。

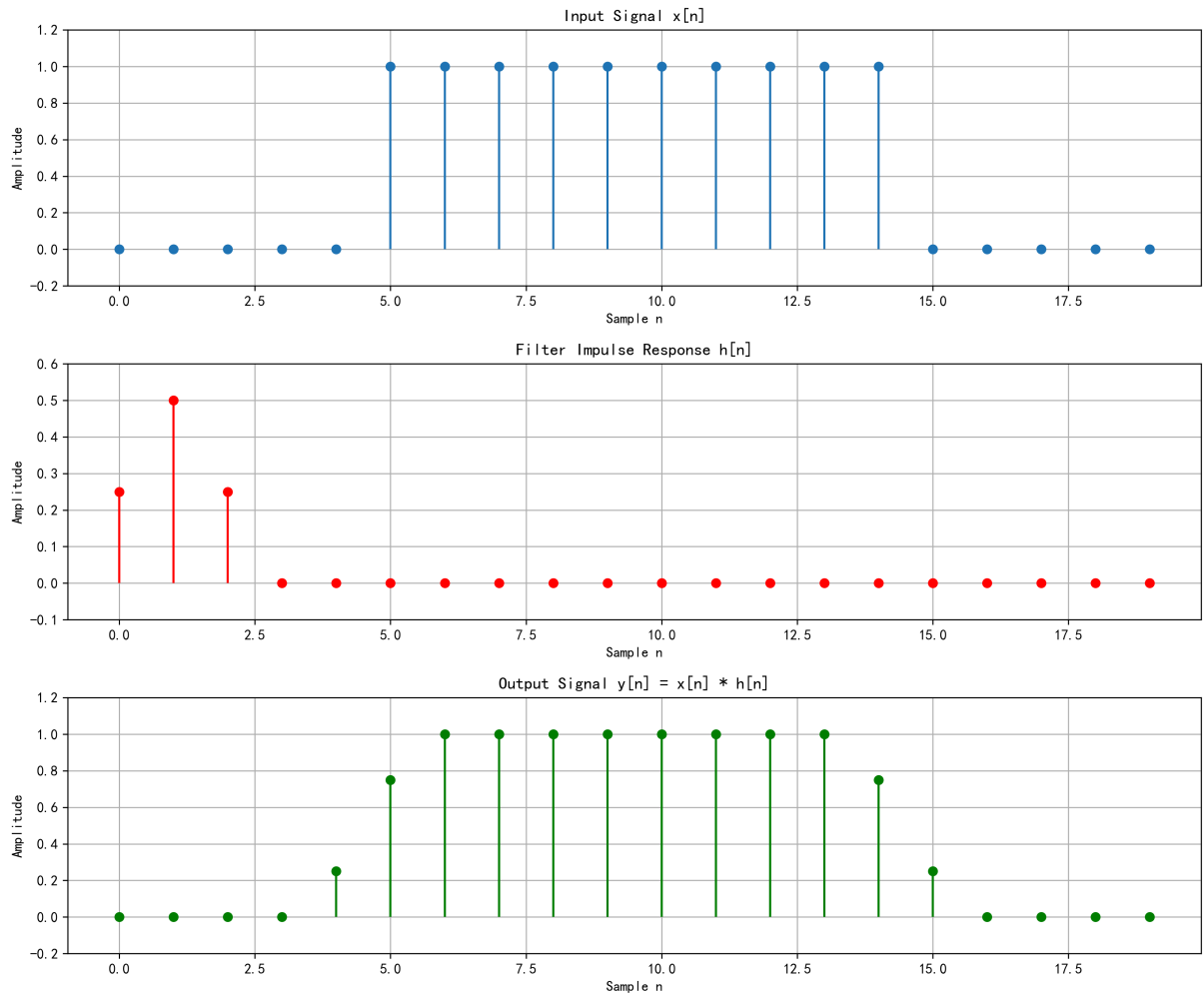


Figure 7.1.2: FIR Filter Convolution Operation Demonstration

7.1.1 设计参数

- 采样频率：48 kHz
- 截止频率：8 kHz
- 滤波器长度：64
- 过渡带：2 kHz

7.1.2 性能对比

窗函数	主瓣宽度	旁瓣抑制	过渡带
矩形窗	最窄	-13 dB	最陡峭
汉宁窗	中等	-32 dB	中等
汉明窗	中等	-43 dB	较平缓
布莱克曼窗	最宽	-57 dB	最平缓

1. **矩形窗**：适用于对过渡带要求严格的应用
2. **汉宁窗**：在主瓣宽度和旁瓣抑制之间提供良好平衡
3. **汉明窗**：工程中最常用，性能稳定可靠
4. **布莱克曼窗**：适用于对旁瓣抑制要求极高的场合

7.1.3 设计建议

根据应用需求选择合适的窗函数：

- 音频处理：推荐汉明窗或汉宁窗
- 通信系统：根据邻道干扰要求选择
- 测量仪器：优先考虑布莱克曼窗
- 实时系统：在性能允许情况下选择矩形窗

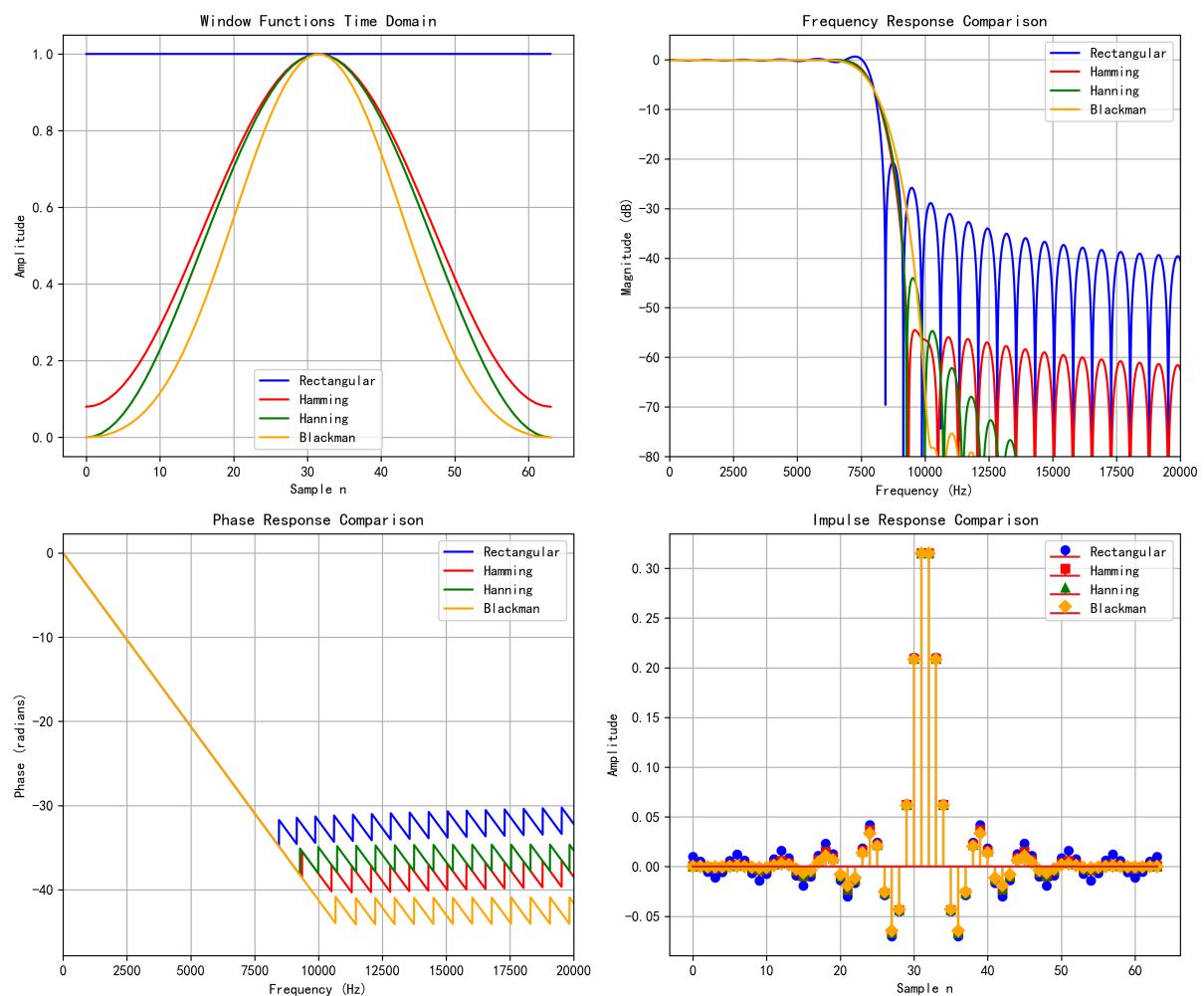


Figure 7.1.3.3: Time and Frequency Domain Characteristics Comparison of Different Window Functions

8 实际应用案例

8.1 音频处理系统

在数字音频工作站(DAW)中，FIR 滤波器广泛应用于：

- **均衡器**：使用多个带通 FIR 滤波器实现频率响应调节
- **降噪**：通过自适应 FIR 滤波器消除背景噪声
- **音效处理**：实现混响、回声等音频效果

典型参数设置：

- 采样率：44.1 kHz 或 48 kHz
- 滤波器长度：64-512 点
- 窗函数：汉明窗或汉宁窗

8.2 通信系统

在数字通信中，FIR 滤波器用于：

- **脉冲成形**：根升余弦滤波器减少符间干扰
- **信道均衡**：补偿信道失真
- **抗混叠**：防止频谱混叠

关键指标：

- 群延迟：影响系统延时
- 阻带衰减：决定邻道干扰抑制能力
- 计算复杂度：影响功耗和成本

8.3 结构分析

FIR 滤波器的实现结构直接影响其计算效率和硬件复杂度。

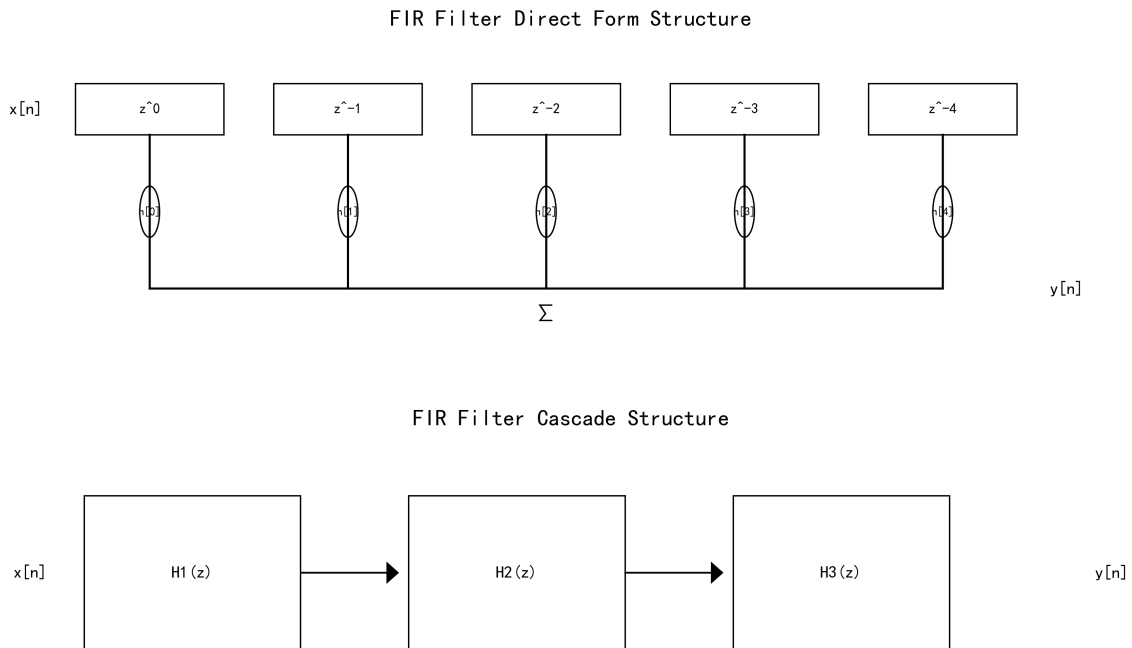


Figure 8.3.4: FIR Filter Direct Form and Cascade Structure Comparison

1. 直接型结构：

- 结构简单，易于理解和实现
- 所有系数直接参与运算
- 适合软件实现和短长度滤波器

2. 级联型结构：

- 将高阶滤波器分解为多个低阶段
- 降低量化误差的累积
- 适合硬件实现和长长度滤波器

8.4 窗函数的频域特性

窗函数的选择直接影响 FIR 滤波器的频率响应特性。不同窗函数在主瓣宽度和旁瓣抑制之间存在权衡关系。

理想低通滤波器的冲激响应为：

$$h_{d[n]} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

加窗后的滤波器系数为：

$$h[n] = h_{d[n]} * w[n]$$

其中 $w[n]$ 是窗函数。

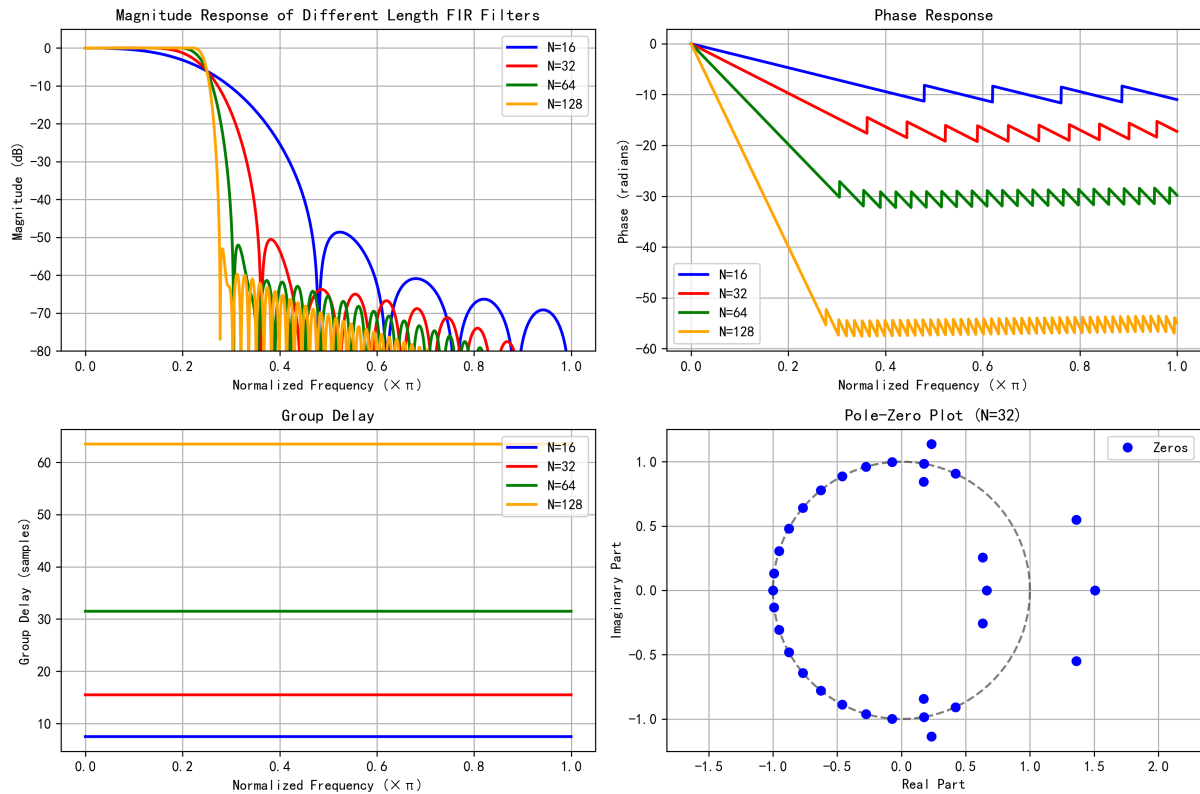


Figure 8.4.5: FIR Filter Frequency Domain Analysis

窗函数的选择需要在主瓣宽度和旁瓣抑制之间进行权衡。矩形窗具有最窄的主瓣但旁瓣抑制较差，而布莱克曼窗具有良好的旁瓣抑制但主瓣较宽。

8.5 频域特性量化分析

不同窗函数的频域特性可以通过以下参数量化：

1. **主瓣宽度**：影响滤波器的过渡带宽度

$$\Delta\omega_{\text{main}} = \frac{4\pi}{N} \text{ (矩形窗)}$$

2. **旁瓣抑制**：决定阻带衰减性能

$$A_{\text{sidelobe}} = 20 \log_{10} \left| \frac{H_{\text{sidelobe}}}{H_{\text{main}}} \right|$$

3. **泄漏系数**：衡量频谱泄漏程度

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} |W(k)| \left| \frac{W(k)}{W(0)} \right|$$

下面介绍三种常见的窗函数及其特性：

8.6 矩形窗(Rectangular Window)

矩形窗是最简单的窗函数，其定义为：

$$w[n] = \begin{cases} 1, & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

矩形窗的特点：

- 主瓣最窄，过渡带最陡峭
- 旁瓣抑制较差（约-13dB）
- 适用于对过渡带要求严格的应用

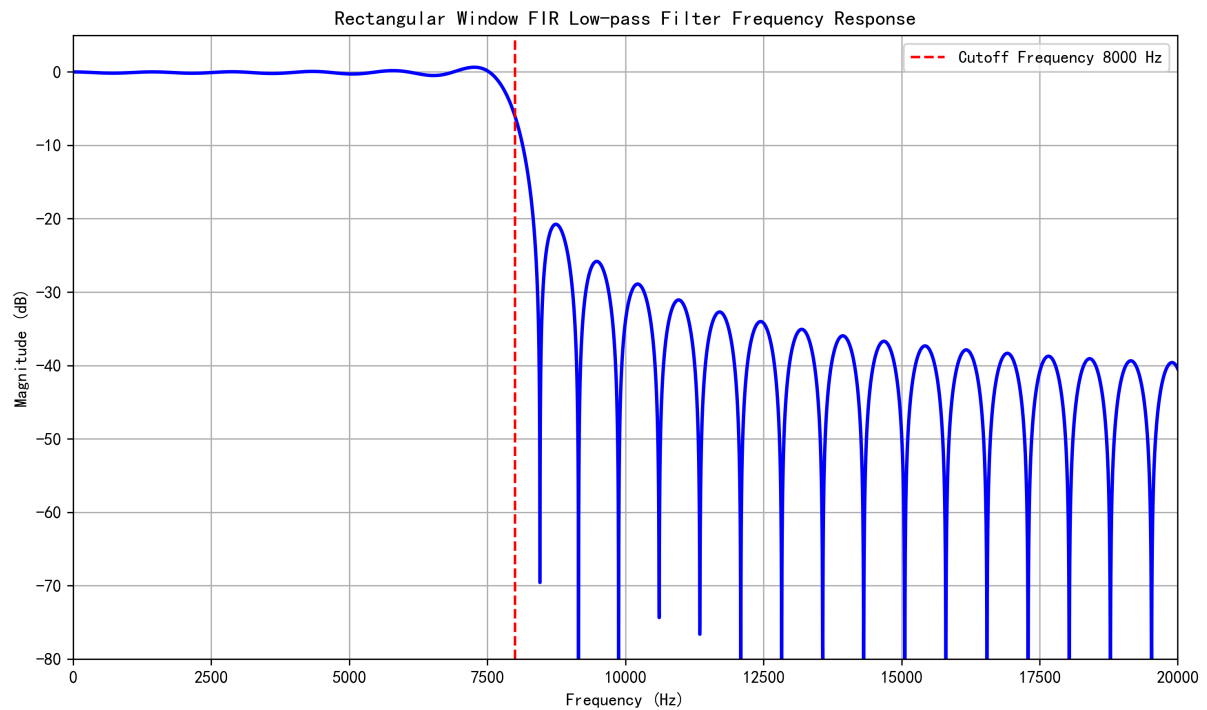


Figure 8.6.6: Rectangular Window FIR Low-pass Filter Frequency Response

8.7 汉明窗(Hamming Window)

汉明窗的定义为：

$$w[n] = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right)$$

汉明窗的特点：

- 主瓣宽度适中
- 旁瓣抑制良好（约-43dB）
- 在实际应用中使用最为广泛

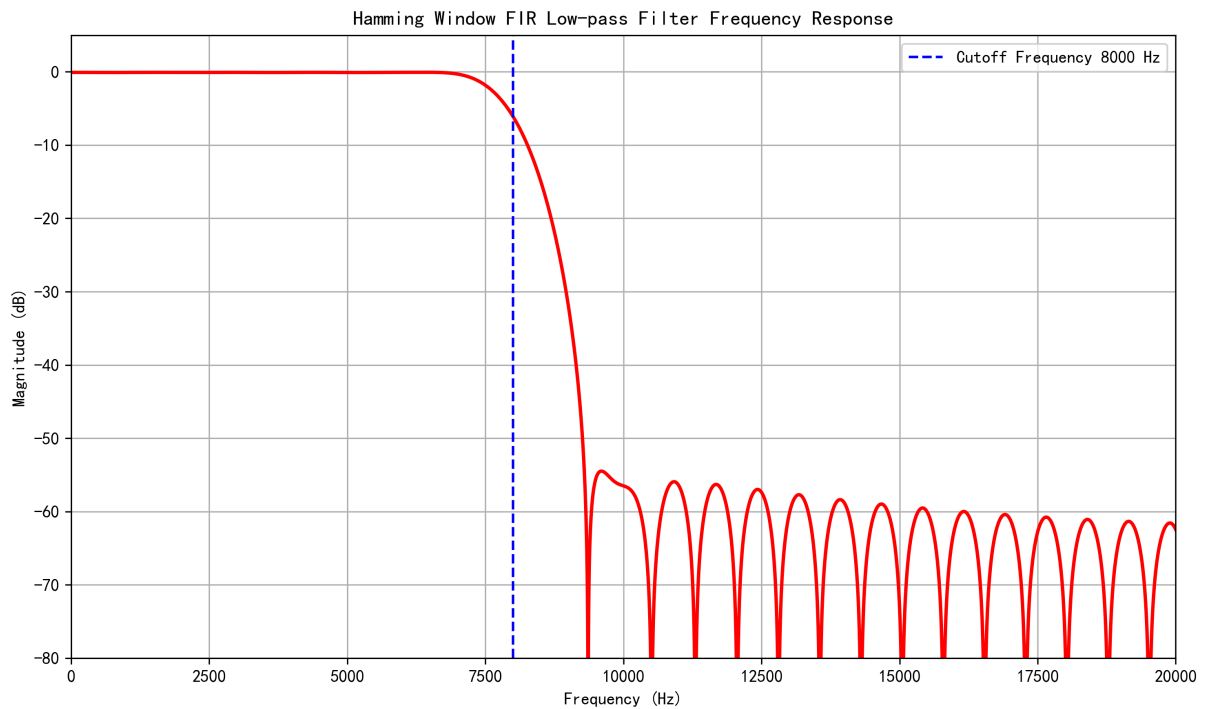


Figure 8.7.7: Hamming Window FIR Low-pass Filter Frequency Response

8.8 布莱克曼窗(Blackman Window)

布莱克曼窗的定义为：

$$w[n] = 0.42 - 0.5 \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) + 0.08 \cos\left(\frac{4\pi n}{N-1}\right)$$

布莱克曼窗的特点：

- 主瓣较宽
- 旁瓣抑制最好（约-57dB）
- 适用于对旁瓣抑制要求很高的应用