

رياضيات 3

الفصل الدراسي الثاني

اسم الطالب /

الصف :

أوراق عمل





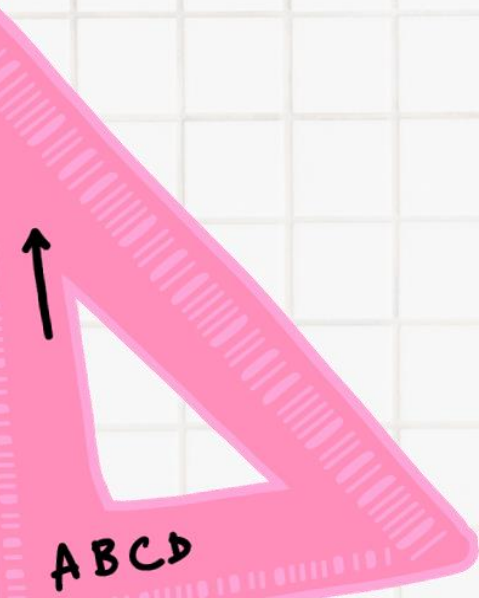
م	التاريخ	الدرجة	الملاحظات	التوقيع
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				
16				
17				



الفصل الثالث

المتطابقات والمعادلات المثلثية

- المتطابقات المثلثية
- إثبات صحة المتطابقات المثلثية
- المتطابقات المثلثية لمجموع زاويتين والفرق بينهما
- المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية ونصفها
- حل المعادلات المثلثية



1 المتطابقات المثلثية الأساسية

تكون المعادلة **متطابقة** إذا تساوى طرفاها لجميع قيم المتغيرات فيها
المتطابقة المثلثية هي متطابقة تحوي دوال مثلثية
إذا وجدت مثالا مضادا يثبت خطأ المعادلة ، فالمعادلة حينئذ لا تكون متطابقة

المتطابقات النسبية..

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

متطابقات المقلوب..

$$\sin \theta = \frac{1}{\csc \theta}, \csc \theta \neq 0$$

$$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \sin \theta \neq 0$$

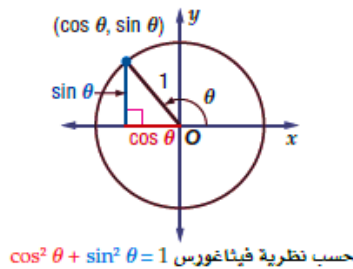
$$\cos \theta = \frac{1}{\sec \theta}, \sec \theta \neq 0$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \cos \theta \neq 0$$

$$\tan \theta = \frac{1}{\cot \theta}, \cot \theta \neq 0$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}, \tan \theta \neq 0$$

متطابقات فيثاغورس

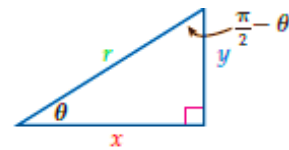


$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

$$\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$$

$$\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$$

متطابقات الزاويتين المتتامتين



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

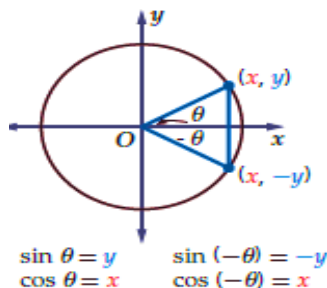
$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \sin \theta$$

$$\tan \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cot \theta$$

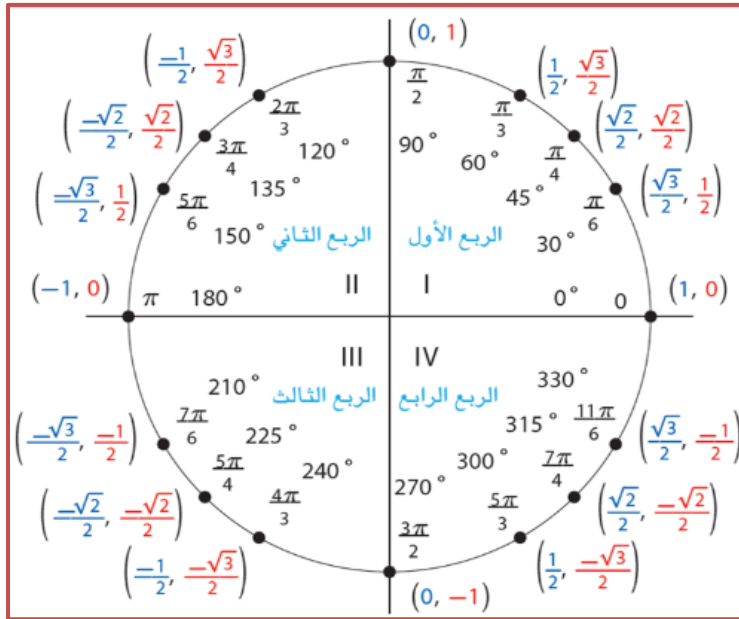
متطابقات الدوال الفردية والزوجية



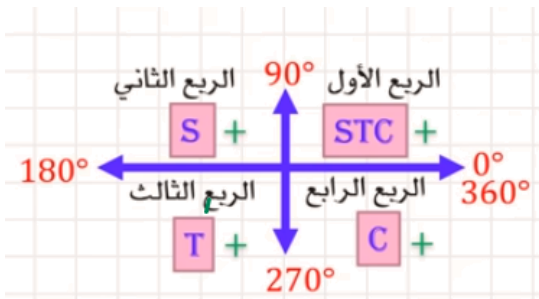
$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

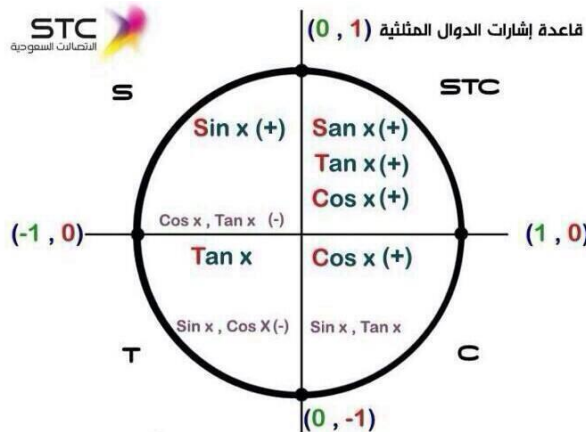


360	270	180	90	0	60	45	30	
								sin
								cos
								tan



-	+	الدالة
3, 4	1, 2	sin θ
		csc θ
2, 3	1, 4	cos θ
		sec θ
2, 4	1, 3	tan θ
		cot θ

STC
التعليمات السعودية



المتطابقات المثلثية الأساسية

1

تحقق من فهمك: ص 11-



1B) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sec \theta$
إذا كان $\sin \theta = \frac{-2}{7}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$

1A) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \theta$
إذا كان $\cos \theta = \frac{1}{3}$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$

تدرب: ص 13-



8) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\cot \theta$
إذا كان $\sec \theta = \frac{-9}{2}$, $\sin \theta < 0$

1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\tan \theta$
إذا كان $\cot \theta = 2$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$



إرشادات للدراسة

عند تبسيط العبارات المثلثية
يكون من الأسهل عادة أن تكتب
حدود العبارة جميعها بدلالة
 $\sin \theta$ و $\cos \theta$

هو إيجاد القيمة العددية للعبارة أو كتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة فقط , إن أمكن.

تحقق من فهمك : ص 12 -



بسط كل عبارة مما يأتي:

$$\frac{\sec \theta}{\sin \theta} (1 - \cos^2 \theta) \quad (2B)$$

$$\frac{\tan^2 \theta \csc^2 \theta - 1}{\sec^2 \theta} \quad (2A)$$

بسط كل عبارة مما يأتي:

تدرب: ص 13 -



$$2 - 2 \sin^2 \theta \quad (17)$$

$$\tan \theta \cos^2 \theta \quad (9)$$

تصليي رياضيات

- 1/ العبارة $\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \tan \theta$ تكافئ....
 (A) $\tan \theta$ (B) $\csc \theta$ (C) $\cot \theta$ (D) $\sin \theta \times \cos \theta$
- 2/ العبارة: $(1 - \cot \theta) \sin \theta$ تكافئ.....
 (A) $\sin \theta \cos \theta$ (B) $\sin \theta - \cos \theta$ (C) $\cos^2 \theta$ (D) $\sec \theta$
- 3/ العبارة $\cot^2 \theta \sin^2 \theta$ تكافئ:.....
 (A) $\sin^2 \theta$ (B) $\cos^2 \theta$ (C) $\tan^2 \theta$ (D) $\frac{\cos^4 \theta}{\cos^2 \theta}$
- 4/ إذا كانت: $270^\circ < \theta < 360^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ فأوجد $\sin \theta$
 (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (D) $-\frac{1}{2}$
- 5/ إذا كانت: $270^\circ < \theta < 360^\circ$ و $\sin \theta = -\frac{1}{3}$ فأوجد $\cos \theta$
 (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (C) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ (D) $\frac{8}{9}$
- 6/ العبارة: $\cot \theta \cdot \sin \theta$ تكافئ.....
 (A) $\sin \theta$ (B) $\sec \theta$ (C) $\cos \theta$ (D) $\csc \theta$
- 7/ ما قيمة $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta$ ؟
 (A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) $\cos 20$
- 8/ إذا كان: $\cos \theta = \frac{4}{5}$ و $\sin \theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\tan \theta$
 (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) $\frac{7}{5}$ (D) $\frac{1}{5}$
- 9/ ما قيمة $[\cos^2(\cot 75^\circ)] + [\sin^2(\cot 75^\circ)]$ ؟
 (A) 1 (B) 45 (C) 60 (D) 75

تحصيلي رياضيات

/10 ما العبارة المكافئة لـ $\frac{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}{\sin \theta}$ ؟

- (A) $\tan \theta$ (B) $\csc \theta$ (C) $\sec \theta$ (D) $\tan^2 \theta$

/11 العبارة $\frac{\sec \theta}{\csc \theta}$ تكافئ.....

- (A) $\tan \theta$ (B) $\cot \theta$ (C) 1 (D) $\sec \theta$

/12 العبارة $\left(\frac{\cos \theta}{\csc \theta}\right) \tan \theta$ تكافئ.....

- (A) $\sin^2 \theta$ (B) $\csc^2 \theta$ (C) $\sin \theta$ (D) $\cos \theta$

/13 $(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)$

- (A) $\sin^2 \theta$ (B) $\cos^2 \theta$ (C) $\sin \theta$ (D) $\cos \theta$

/14 إذا كانت x تمثل زاوية حادة و $\cos 50 = \sin x$ فأوجد قيمة x

- (A) 40° (B) 30° (C) 60° (D) 130°

/15 ما أبسط قيمة للمقدار: $(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)$

- (A) $\sin^2 \theta$ (B) $\cos^2 \theta$ (C) $\sin \theta$ (D) $\cos \theta$

/16 أوجد قيمة: $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta$ ؟

- (A) 1 (B) 0 (C) 0.5 (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

باستعمال المتطابقات المثلثية الأساسية هناك طريقتان للإثبات

تحويل طرفي المعادلة

في بعض الأحيان يكون من الأسهل
أن تحول كل طرف في المتطابقة
بصورة منفصلة إلى صورة مشتركة.



تحويل أحد طرفي المعادلة

بسط أحد طرفي المتطابقة حتى يصبح الطرفان
متساويين وفي العادة يكون من الأسهل البدء
بالطرف الأكثر تعقيدا

تحقق من فهمك : ص 15 -



(1) أثبت صحة المتطابقة، $\cot^2 \theta - \cos^2 \theta = \cot^2 \theta \cos^2 \theta$

تدرب: ص 17 -



أثبت صحة المتطابقات الآتية /

$$\tan \theta = \frac{\sec \theta}{\csc \theta} \quad (7)$$

$$\cos^2 \theta + \tan^2 \theta \cos^2 \theta = 1 \quad (1)$$

تحقق من فهمك : ص 17-



(3) أثبت صحة المتطابقة، $csc^2 \theta - cot^2 \theta = cot \theta tan \theta$

أثبت صحة المتطابقات الآتية

تدرب: ص 18-



$$csc \theta - 1 = \frac{cot^2 \theta}{csc \theta + 1} \quad (18)$$

$$sec \theta csc \theta = tan \theta + cot \theta \quad (14)$$

بسط كلا من العبارات الآتية، لتحصل على الناتج (1) أو (-1)

$$cos(-\theta) sec \theta \quad (32)$$

$$cot(-\theta) tan(-\theta) \quad (26)$$

متطابقات الفرق

$$\begin{aligned}\sin(A - B) &= \sin A \cos B - \cos A \sin B \\ \cos(A - B) &= \cos A \cos B + \sin A \sin B \\ \tan(A - B) &= \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}\end{aligned}$$



متطابقات المجموع

$$\begin{aligned}\sin(A + B) &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ \cos(A + B) &= \cos A \cos B - \sin A \sin B \\ \tan(A + B) &= \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}\end{aligned}$$

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تحقق من فهمك : ص 20 -



$\cos(-15^\circ)$ (1B)

$\sin 15^\circ$ (1A)

دون استخدام الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يأتي:

تدرب: ص 22 -



$\tan 195^\circ$ (8)

$\cos 165^\circ$ (1)



متطابقات ضعف الزاوية
المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم θ

1 المتطابقات المثلثية لضعف الزاوية

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \\ \cos 2\theta &= 2\cos^2 \theta - 1 \\ \cos 2\theta &= 1 - 2\sin^2 \theta\end{aligned}$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

تحقق من فهمك : ص 25 -



1) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin 2\theta$ إذا كان: $90^\circ < \theta < 180^\circ, \cos \theta = \frac{-1}{3}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل مما يلي إذا كان: $90^\circ < \theta < 180^\circ, \cos \theta = \frac{-1}{3}$

تحقق من فهمك : ص 26 -



$\tan 2\theta$ (2B)

$\cos 2\theta$ (2A)



دون استعمال الآلة الحاسبة ، أوجد القيمة الدقيقة لكل من $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$

$$\sin \theta = \frac{1}{4}, 0^\circ < \theta < 90^\circ (1)$$

المتطابقات المثلثية لنصف الزاوية

3



متطابقات نصف الزاوية
المتطابقات الآتية صحيحة لجميع قيم θ

$$\tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

تحقق من فهمك : ص 27-



(3) أوجد القيمة الدقيقة لـ $\sin \frac{\theta}{2}$ إذا كان $\sin \theta = \frac{2}{3}$ في الربع الثاني

تحصيلي رياضيات

1/ إذا علمت أن: $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ و $\tan \theta = 0$ فإن القيمة الدقيقة لـ $\tan 2\theta$ تساوي ...

- 0 (A) 1 (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 2 (D)

2/ إذا علمنا أن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\cos \frac{\theta}{2}$ تساوي ...

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D)

3/ إذا علمت أن: $270^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$ و $\cos \theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\cos 2\theta$ تساوي ...

- $-\frac{24}{7}$ (A) $-\frac{7}{25}$ (B) $\frac{7}{25}$ (C) $-\frac{24}{25}$ (D)

4/ إذا علمت أن: $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ و $\sin \theta = \frac{3}{5}$ فإن قيمة $\sin 2\theta$ تساوي ...

- $-\frac{24}{7}$ (A) $-\frac{7}{25}$ (B) $\frac{7}{25}$ (C) $-\frac{24}{25}$ (D)

5/ إذا علمنا أن: $0^\circ < \theta < 90^\circ$ و $\cos \theta = \frac{1}{2}$ ، فإن قيمة $\sin \frac{\theta}{2}$ تساوي ...

- $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D)