



**02402, Statistik**

# **Handel med ETF**

**Projekt 1**

**S224465 – Aniq K. Shamim**

**10-10-2023**

# Indhold

<b>Beskrivende analyse .....</b>	<b>2</b>
a) Beskrivelse af datamaterialet .....	2
b) Histogram for de ugentlige afkast fra ETF'en AGG .....	2
c) ETF'ernes udvikling over tid.....	3
d) Boxplot af afkastene .....	4
e) Opsummerende størrelser for de fire ETF'er .....	4
<b>Statistisk analyse.....</b>	<b>5</b>
f) Statistiske modeller for det ugentlige afkast fra de fire ETF'er .....	5
g) Konfidensintervaller.....	7
h) Hypotesetest .....	8
i) Hypotesetest til undersøgelse af forskellen mellem VAWs – og AGGs middelværdi af de ugentlige afkast .....	10
j) Nødvendighed af hypotesetest .....	12
k) Korrelation .....	12
<b>Referencer .....</b>	<b>14</b>

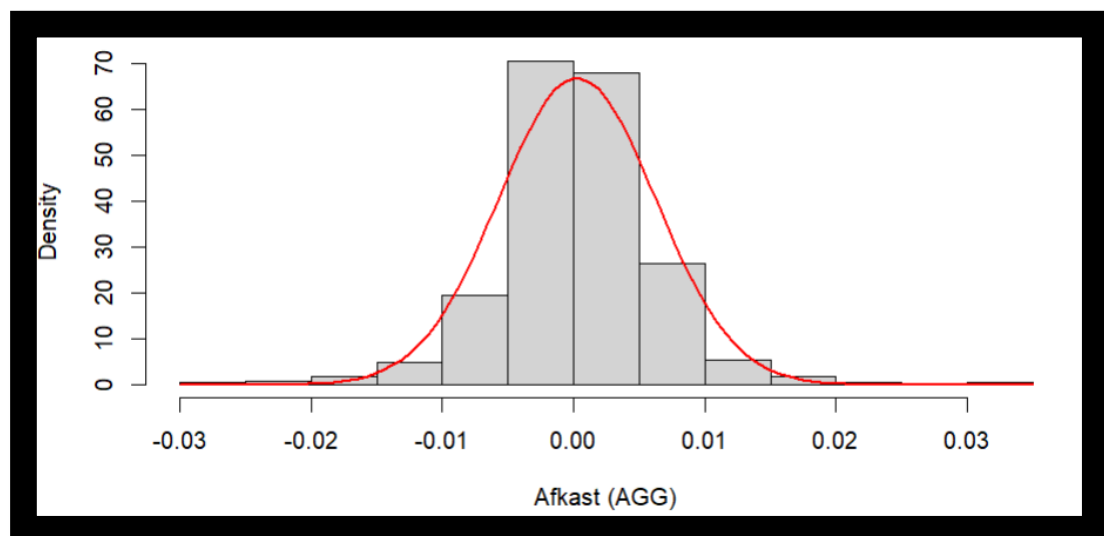
# Beskrivende analyse

## a) Beskrivelse af datamaterialet

Det givne datasæt indeholder observationer, bestående af de ugentlige afkast for 95 ETF'er. Datoen for, hvornår disse afkastværdier er taget fra, er også givet. Ud af disse 95 ETF'er, fokuseres på blot fire af de variable i dette projekt. Det er *AGG*, *VAW*, *IWN* og *SPY*. Dette er alle kvantitative variable, da der er tale om numerisk data, som kan måles og kvantiseres. Derudover er der, for hver ETF i datasættet, 454 observationer, som strækker sig over en periode med den første observation d. 05/05/2006 og den sidste observation d. 08/05/2015. Det skal desuden bemærkes, at den givne data ikke har nøjagtigt 7 dages intervaller gennem alle observationer, og der derfor kan være nogle uger, som der ikke er data fra.

## b) Histogram for de ugentlige afkast fra ETF'en AGG

På følgende densitetshistogram, med den overlagte normalkurve, kan det ugentlige afkast fra ETF'en AGG, ses.



Figur 1: Histogram med normalkurve for de ugentlige afkast fra AGG ETF'en.

På figuren ses der et gennemsnit, som er meget nær medianen og derudover også afkast i både den positive – og negative retning på figurens x-akse. Den empiriske tæthed på dette histogram, kan også ses som værende tæt på symmetrisk, da der som før nævnt, er et gennemsnit nær medianen, men også de såkaldte ”haler” på normalfordelingskurven, som er næsten lige lange. Normalfordelingskurven kan derudover også næsten spejles over grafens midte, hvilket igen fortæller at den empiriske tæthed er tæt på værende symmetrisk.

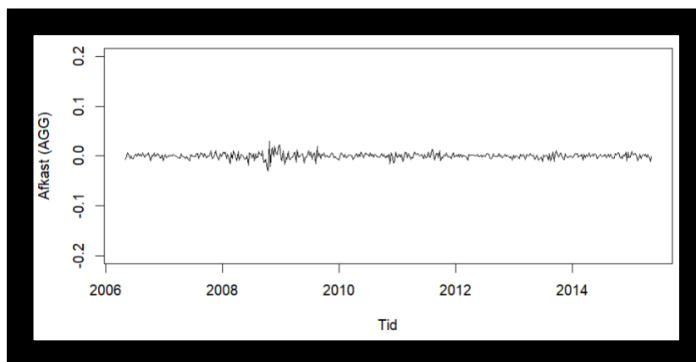
Spredningen af denne data er forholdsvis lav. Det er den, da standardafvigelsen er fundet til at være på blot 0.0059. Dette viser histogrammet også, ved den ”spidse”- eller stejle form.

### c) ETF’ernes udvikling over tid

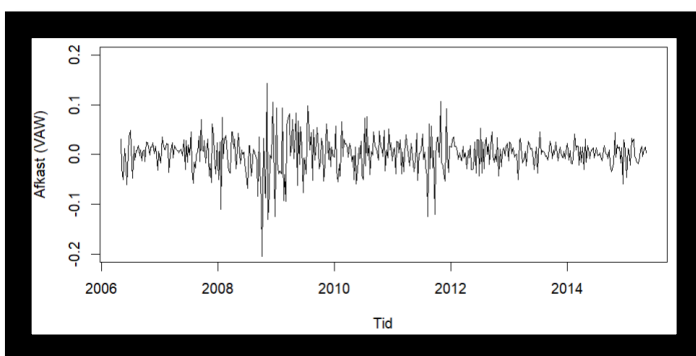
Når der foretages regelmæssige observationer over tid, bliver dataet heraf ofte omtalt som en tidsrække.

På følgende figurer ses netop observationer over tid og herved også forskellige udsving for de forskellige ETF’er gennem den tidsperiode. På de forskellige EFT’er ses forskellige størrelser af udsving, hvor AGG ETF’en særligt skiller sig ud. Dennes udsving er af en væsentligt mindre amplitude end VAW, IWN og SPY, hvilket betyder at potentielle gevinster eller tab, også er mindre end ved nogle af det andre ETF’er.

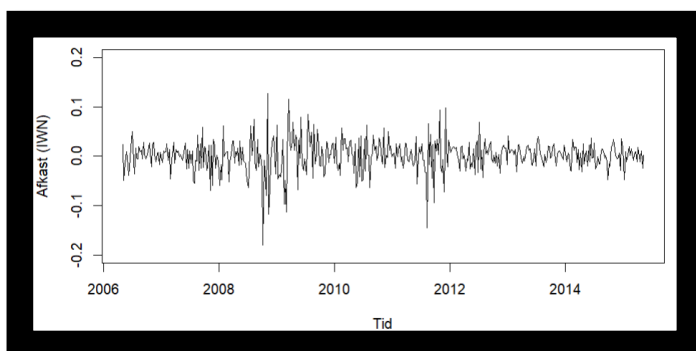
Ved alle fire ETF’er ses dog et fællestræk. Det er, at der er nogle perioder, hvor markedet er mere ustabil, hvilket ses på de større udsving. Dette findes særligt omkring år 2007 – 2008, hvor årsagen bag denne ustabilitet kunne være finanskrisen (Finans Danmark, u.d.). De lidt større udsving findes også omkring år 2011, som følgere fra den tidligere finanskrisen, hvor det gik fra at være en gældskrise i det private, til en gældskrise i det offentlige (Schjøtt, 2011).



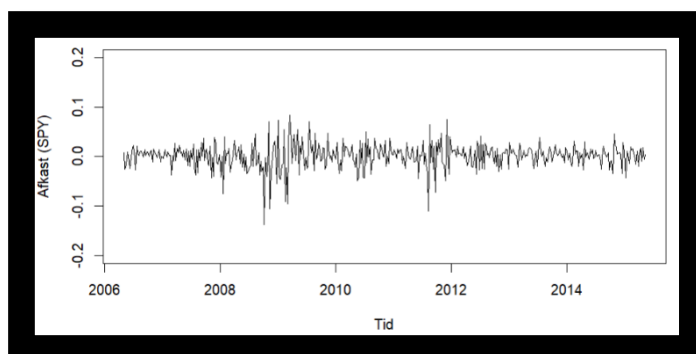
Figur 2: AGGs udvikling over tid.



Figur 3: VAWs udvikling over tid.



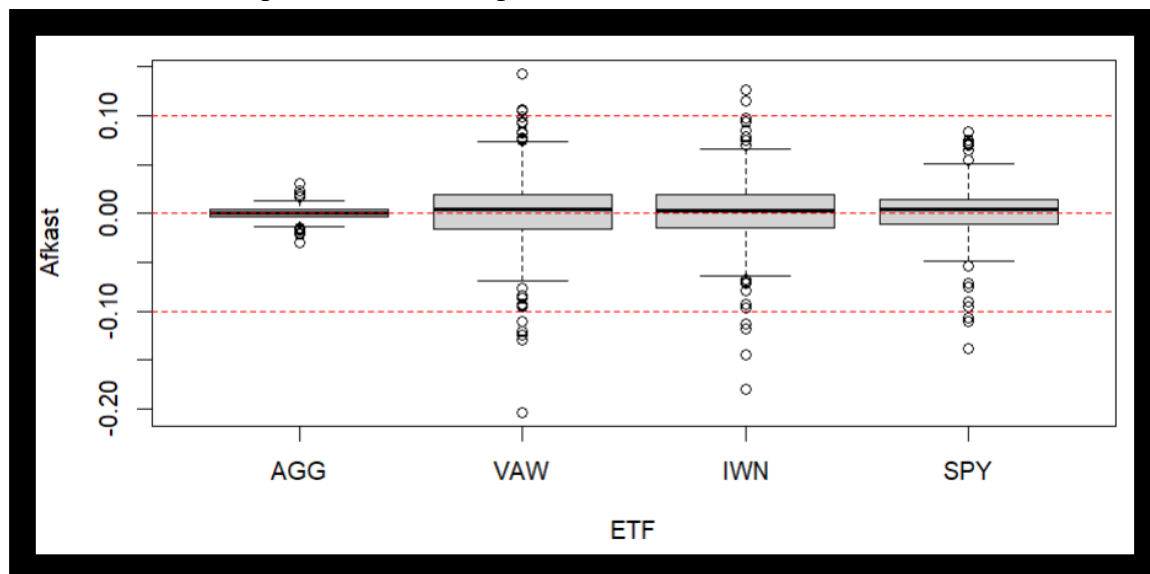
Figur 4: IWNs udvikling over tid.



Figur 5: SPYs udvikling over tid.

#### d) Boxplot af afkastene

Nedenfor er lavet et boxplot af afkastene opdelt efter de fire ETF'er.



Figur 6: Bokplot af afkastene for de fire ETF'er.

Disse boxplots, kan til at starte med, virke symmetriske, men kigges der nærmere på de enkelte plots, vil det bemærkes at der faktisk er nogle af dem, som er skæve. AGG, VAW og SPY er alle tre skæve, hvor AGG er lidt højreskæv og de to andre derimod er venstreskæve. IWN er den eneste af disse fire, som kan benævnes som værende mest symmetrisk. VAW gør sig desuden også bemærkelsesværdig på en parameter, da selvom at den har et større interval end de andre, har størst IQR og er skæv, så er IWNs og SPYs laveste ekstreme observationer, stadig mindre end VAWs laveste ekstreme observation. Fælles for de fire ETF'er er, at de alle har en del ekstreme observationer, som sandsynligvis forekommer af de økonomiske kriser, der nævnes i opgave c.

#### e) Opsummerende størrelser for de fire ETF'er

I den tidligere opgave, hvor der er lavet bokplots, er det vanskeligt at aflæse de præcise værdier af data, som f.eks. antal af observationer, stikprøvegennemsnit, stikprøvevarians, stikprøvestandardafvigelse og kvartiler. Til aflæsning af disse værdier, er nedenstående tabel opstillet.

ETF	Antal observationer	Stikprøve-gennemsnit	Stikprøve-varians	Stikprøve-standardafvigelse	Nedre kvartil (25%)	Median (50%)	Øvre kvartil (75%)
AGG	454	0.000265757	0.00003571068	0.005975841	-0.00297325	0.000237446	0.003893193
VAW	454	0.00179379	0.001301973	0.03608286	-0.01609575	0.004797925	0.019685224
IWN	454	0.001187679	0.00102499	0.03201547	-0.01430519	0.003119637	0.019056390
SPY	454	0.001360105	0.0006143463	0.02478601	0.011325006	0.004215788	0.014497573

Tabel 1: Opsummerende størrelser for de fire ETF'er.

Tabellen giver de præcise tal, som kunne bruges til noget præcisionsarbejde, hvorimod boksplots fra den tidligere opgave, kunne være med til at give en bedre visuel forståelse.

## Statistisk analyse

### f) Statistiske modeller for det ugentlige afkast fra de fire ETF'er

Nedenfor er opskrevet separate statistiske modeller for det ugentlige afkast fra de fire udvalgte ETF'er.

$AGG_i \sim N(\mu_{AGG}, \sigma_{AGG}^2)$ and i. i. d., where $i = 1, \dots, 454$
$VAW_i \sim N(\mu_{VAW}, \sigma_{VAW}^2)$ and i. i. d., where $i = 1, \dots, 454$
$IWN_i \sim N(\mu_{IWN}, \sigma_{IWN}^2)$ and i. i. d., where $i = 1, \dots, 454$
$SPY_i \sim N(\mu_{SPY}, \sigma_{SPY}^2)$ and i. i. d., where $i = 1, \dots, 454$

Tabel 2: Statistiske modeller

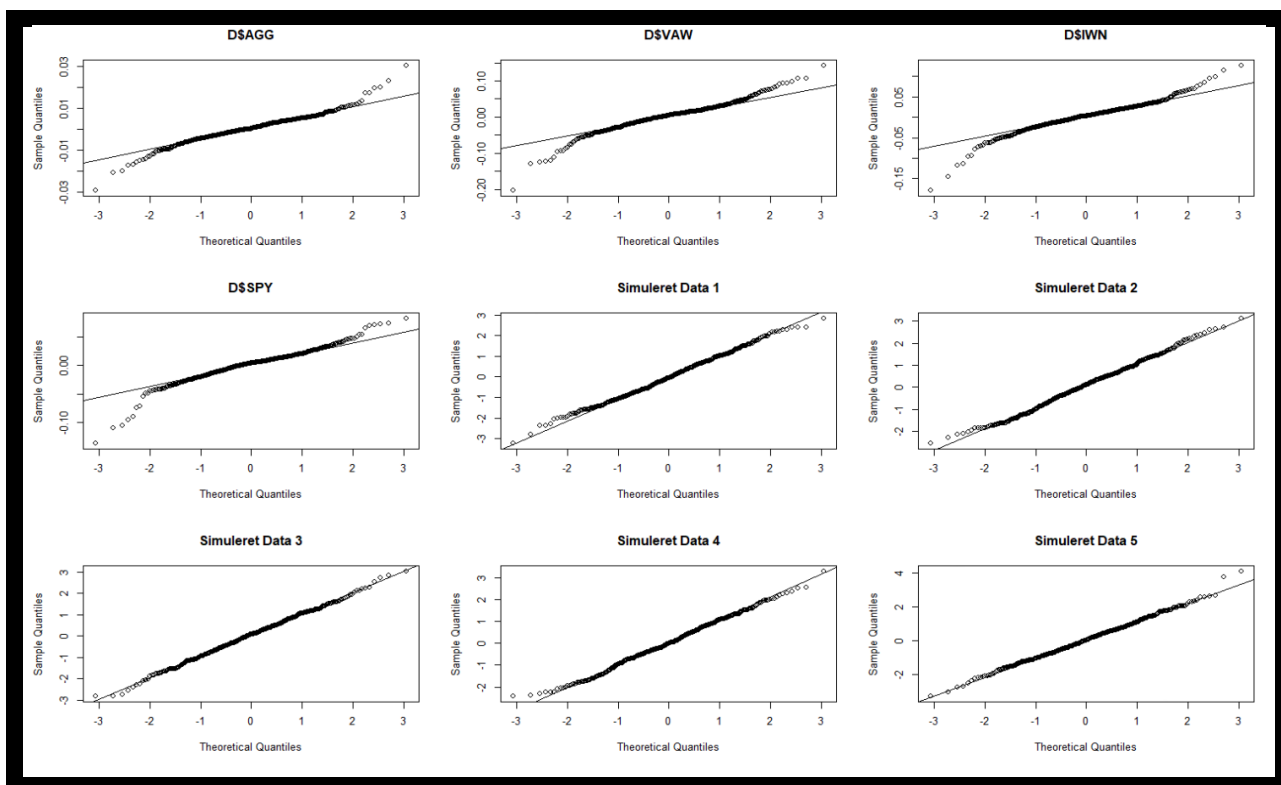
Det antages, at observationerne i disse statistiske modeller, er uafhængige af hinanden, har samme fordeling og er normalfordelte.

Fra de fire modeller, estimeres parametrene bedst ved stikprøvegennemsnittet og stikprøvevariansen. Disse er fundet i Tabel 1, fra opgave e, hvoraf følgende parametre fremkommer.

Stikprøvegennemsnit	$\hat{\mu}_{AGG} = 0.000265757$	$\hat{\mu}_{VAW} = 0.00179379$	$\hat{\mu}_{IWN} = 0.001187679$	$\hat{\mu}_{SPY} = 0.001360105$
Stikprøvevariens	$\hat{\sigma}_{AGG}^2 = 0.00003571068$	$\hat{\sigma}_{VAW}^2 = 0.001301973$	$\hat{\sigma}_{IWN}^2 = 0.00102499$	$\hat{\sigma}_{SPY}^2 = 0.0006143463$

Tabel 3: Estimerede parametre.

Nu foretages en modelkontrol for at kontrollere – og bekræfte, at observationerne er normalfordelte, som det tidligere er nævnt, at de er. Dette gøres ved brug af 4 Q-Q-plots med dataet fra de fire ETF'er der fokuseres på, i sammenligning med fem andre simulationer af normalfordelte Q-Q-plots. Måden hvorpå det ses om observationerne er normalfordelt via disse ni Q-Q-plots er, at plotsne må kunne sammenlignes til en vis grad visuelt.



Figur 7: Q-Q-plots af de fire ETF'er, samt fem normalfordelte simulationer.

På de fire Q-Q-plots af ETF'erne som der fokuseres på, kan der ses forholdsvis store udsving ved starten og slutningen af plotsne, hvis de sammenlignes med de fem simulerede normalfordelte Q-Q-plots. På baggrund af dette, kan det ikke bekræftes, at det er normalfordelt data. Grundet den store mængde af observationer, spiller den centrale grænseværdisætning også en væsentlig rolle. Det vil sige, at disse mange observationer, gør stikprøvefordelingen mindre betydelig, grundet gennemsnittets – og variansens uafhængighed fra denne. Dette kan beskrives ved følgende, hvor der ved et  $n$ , der er stort nok, vil gælde at:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1^2).$$

Ligning 1.

Af denne årsag forkastes modellerne ikke og vil fortsat kunne benyttes.

### g) Konfidensintervaller

I et 95% konfidensinterval for det ugentlige middelaflkast, kan følgende formel bruges til udregningen af dette.

$$\bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ligning 2.

$\alpha = 5\% = 0.05$  for sådan et 95% konfidensinterval, hvorfra at  $t_{0.975}$  er udregnet. Herved følger frihedsgraden  $n - 1 = 454 - 1 = 453$ . Med de informationer bruges qt-funktionen nu i R:

```
> qt(0.975, 453)  
[1] 1.965215
```

Konfidensintervallet for AGGs middelaflkast er så udregnet ved:

$$AGG: \bar{x} \pm t_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 0.000265757 \pm 1.97 \cdot \frac{0.005976}{\sqrt{454}} = -0.0002867641 \text{ og } 0.0008182781$$

Ved denne metode, kan konfidensintervaller for de resterende EFT'er der fokuseres på, udregnes. Resultaterne deraf er opstillet i en tabel således, hvor den nedre og øvre grænse for konfidensintervallerne kan ses:

ETF	Nedre grænse af konfidensinterval	Øvre grænse af konfidensinterval
AGG	-0.0002854073	0.0008169213
VAW	-0.001534208	0.005121788
IWN	-0.001765174	0.004140533
SPY	-0.000925960	0.003646171

Tabel 4: Grænseværdier for konfidensintervaller.



Konfidensintervallerne kan desuden også udregnes gennem R. Dette kan gøres som følgende:

```
> t.test(D$AGG, conf.level=0.95)$conf.int
[1] -0.0002854073 0.0008169213
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
> t.test(D$VAW, conf.level=0.95)$conf.int
[1] -0.001534208 0.005121788
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
> t.test(D$IWN, conf.level=0.95)$conf.int
[1] -0.001765174 0.004140533
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
> t.test(D$SPY, conf.level=0.95)$conf.int
[1] -0.000925960 0.003646171
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Som et eksempel, kigges på den manuelle udregning af AGGs konfidensinterval, sammenlignet med den automatiske udregning i R. Her ses at resultaterne er næsten ens, men med noget lignende mindre afrundingsforskelle.

#### **h) Hypotesetest**

Nu udføres en hypotesetest med henblik på at undersøge, om middelværdien af det ugentlige afkast for AGG afviger signifikant fra nul. Dette gøres ved at teste hypotesen:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_{AGG} &= 0, \\ H_1: \mu_{AGG} &\neq 0. \end{aligned}$$

Den måde det afgøres på om, hvorvidt nulhypotesen accepteres eller forkastes, er ved at se på p-værdien. Hvis p-værdien er større end signifikansniveauet, accepteres den, og hvis den er mindre end signifikansniveauet, forkastes den. Signifikansniveauet angives til at være  $\alpha = 5\% = 0.05$ .

Nu findes p-værdien. Dette gøres ved hjælp af teststørrelsens fordeling, som var det  $t_{975}$  for 95% konfidensintervaller, der blev fundet i opgave g, samt formelen for teststørrelsen:

$$t_{obs} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Ligning 3.

For AGG findes teststørrelsen til at være:

$$t_{obs} = \frac{0.000265757 - 0}{\frac{0.005975841}{\sqrt{454}}} = 0.9475750245$$

Herfra kan p-værdien udregnes, hvilket gøres som følgende:

$$p - værdi = 2 \cdot P(T > |t_{obs}|) = 2 \cdot P(1.97 > 0.948) = 0.3439$$

Det kan nu konkluderes at p-værdien er større end signifikantsniveauet på 0.05, hvilket betyder, at der er meget svag eller ingen evidens imod  $H_0$ .

Den statistiske test var ikke nødvendig at lave, da man allerede fra opgave g kunne se, at 0 var indenfor 95% konfidensintervallet for AGG-ETF'en, hvor  $\alpha = 5\% = 0.05$ . Allerede der, kunne det konkluderes, at der er meget svag eller ingen evidens imod  $H_0$ , blot med konfidensintervallet alene.

I R kan udregningen af p-værdien også laves. Resultatet giver nøjagtigt det samme i R, som det der er udregnet manuelt. Dette kan ses på følgende:

```
> t.test(D$AGG, mu=0)

One Sample t-test

data:  D$AGG
t = 0.94757, df = 453, p-value = 0.3439
alternative hypothesis: true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.0002854073  0.0008169213
sample estimates:
mean of x
0.000265757
```

**i) Hypotesetest til undersøgelse af forskellen mellem VAWs – og AGGs middelværdi af de ugentlige afkast**

Nu laves en hypotesetest, hvor det undersøges, om der kan påvises en forskel mellem middelværdien af det ugentlige afkast for ETF'erne VAW og AGG. For at gøre det, testes hypoteserne:

$$\begin{aligned} H_0: \mu_{AGG} - \mu_{VAW} &= \delta_0 = 0, \\ H_1: \mu_{AGG} - \mu_{VAW} &\neq \delta_0. \end{aligned}$$

Samme fremgangsmåde som tidligere benyttes. Derfor startes med at et signifikansniveau sættes til  $\alpha = 5\% = 0.05$ . For så at finde p-værdien, bruges en lidt anden opstilling af formelen for teststørrelsen for at finde denne.

$$t_{obs} = \frac{(\bar{x}_{AGG} - \bar{x}_{VAW}) - \delta_0}{\sqrt{\frac{s_{AGG}^2}{n_{AGG}} + \frac{s_{VAW}^2}{n_{VAW}}}}$$

Ligning 4.

Tallene indsættes i ligning fire og teststørrelsen bliver så.

$$t_{obs} = \frac{(0.000265757 - 0.00179379) - 0}{\sqrt{\frac{0.005975841^2}{454} + \frac{0.03608286^2}{454}}} = -890$$

For nu at finde teststørrelsens fordeling, bruges R, men i dette tilfælde kan frihedsgraden ikke blot udregnes ved  $n - 1$ . Til denne udregning bruges formelen:

$$v = \frac{(\frac{s_{AGG}^2}{n_{AGG}} + \frac{s_{VAW}^2}{n_{VAW}})^2}{\frac{(\frac{s_{AGG}^2}{n_{AGG}})^2}{n_{AGG} - 1} + \frac{(\frac{s_{VAW}^2}{n_{VAW}})^2}{n_{VAW} - 1}}$$

Ligning 5.

Så indsættes tallene:

$$v = \frac{\left(\frac{0.005975841}{454} + \frac{0.03608286}{454}\right)^2}{\frac{\left(\frac{0.005975841}{454}\right)^2}{454 - 1} + \frac{\left(\frac{0.03608286}{454}\right)^2}{454 - 1}} = 478$$

Med denne værdi fundet, kan udregningen laves i R, på samme måde som i opgave g.

```
> qt(0.975, 478)
[1] 1.964939
```

Så kan p-værdien også findes, på samme vis som før.

$$p - \text{værdi} = 2 \cdot P(T > |t_{obs}|) = 2 \cdot P(1.96 > 0.890) = 0.3738$$

Herfra vides det så at p-værdien er større end signifikansniveauet og dermed kan det konkluderes, at der er meget svag – eller ingen evidens imod  $H_0$ . Hermed kan der ikke påvises en signifikant forskel mellem middelværdien af det ugentlige afkast for ETF'erne VAW og AGG.

Som i opgave h, kan der igen laves samme udregninger ved hjælp af R. Igen giver resultat i R, nøjagtigt det samme som det fra den manuelle udregning. Dette ses på følgende:

```
> ## Sammenligning af afkast for VAW og AGG
> t.test(D$VAW, D$AGG)

Welch Two Sample t-test

data:  D$VAW and D$AGG
t = 0.89019, df = 477.83, p-value = 0.3738
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.001844827  0.004900893
sample estimates:
 mean of x   mean of y 
0.001793790 0.000265757
```

### j) Nødvendighed af hypotesetest

I modsætning til opgave h, var det i opgave i, nødvendigt at udføre hypotesetest. Grunden til dette er, at der var et overlap i de to konfidensintervaller. Dette gør, at der kræves yderligere tests i undersøgelsen, og at konfidensintervallerne ikke alene kan give en værdig konklusion. Hvis det f.eks. var antaget, at konfidensintervallerne ikke havde dette overlap, kunne nulhypotesen blot afvises og den alternative hypotese ville ikke afvises, grundet  $\alpha = 5\% = 0.05$ , som er det samme i udregningen af både konfidensinterval og hypotesens signifikansniveau.

### k) Korrelation

For at beregne korrelationen mellem ETF'erne VAW og IWN, bruges følgende formel:

$$r = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \bar{x}}{s_x} \right) \left( \frac{y_i - \bar{y}}{s_y} \right) = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y}$$

Ligning 6.

For at benytte denne formel, er der også behov for formlen for kovarians.

$$s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

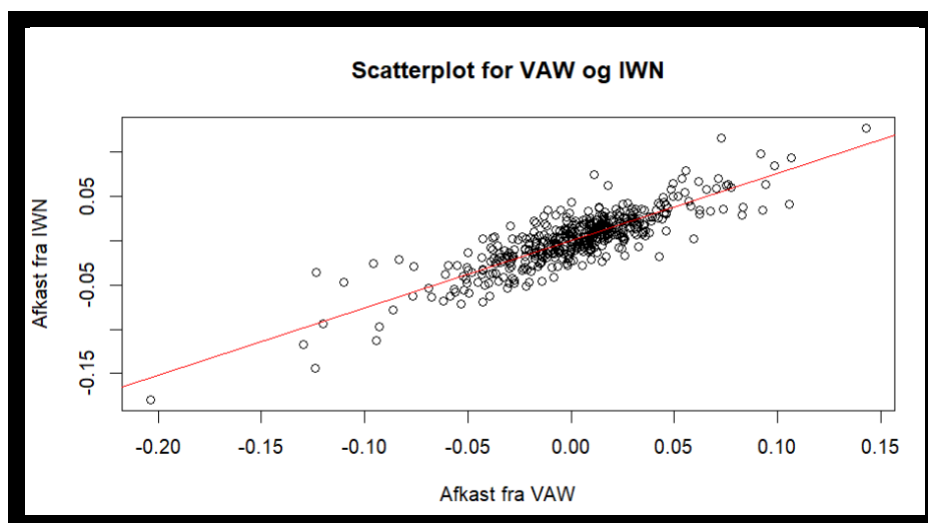
Ligning 7.

Med kovariansen udregnet til 0.000984, udregnes korrelation med den ovenstående formel, hvor tallene indsættes, for VAW og IWN. Disse to ETF'er betegner henholdsvis x og y i formlerne.

$$r = \frac{0.000984}{0.036083 \cdot 0.032015} = 0.852$$

Korrelationen er hermed beregnet til at være 0.852 og det kan herfra siges, at korrelationen mellem ETF'erne VAW og IWN er forholdsvist høj. Volatiliteten af en portefølje med disse to ETF'er, vil derfor være lidt højere.

Nedenfor er lavet et scatterplot, hvor sammenhængen mellem afkastene er illustrerede.



Figur 8: Scatterplot der illustrerer sammenhængen mellem afkastene.

Ud fra scatterplottet ovenfor, vides nu, at sammenhængen mellem plottet og korrelationen er som forventet. Dette er den, da der kan ses en stærk, positiv sammenhæng mellem VAW og IWN.

Korrelationen som er beregnet tidligere, kunne også godt have været udregnet gennem R. Dette ville også give de eksakt samme resultater, som den manuelle metode, hvilket f.eks. også kan ses på resultatet mellem ETF'erne VAW og IWN.

```
> ## Beregning af korrelation mellem udvalgte ETF'er  
> cor(D[,c("AGG","VAW","IWN","SPY")], use="pairwise.complete.obs")
```

	AGG	VAW	IWN	SPY
AGG	1.0000000	-0.1975679	-0.1352621	-0.2187164
VAW	-0.1975679	1.0000000	0.8516407	0.8863608
IWN	-0.1352621	0.8516407	1.0000000	0.9100966
SPY	-0.2187164	0.8863608	0.9100966	1.0000000

## Referencer

*Finans Danmark.* (u.d.). Hentet fra <https://finansdanmark.dk/10-aaret-for-krisen/hvad-skete-der/>

*Finans Danmark.* (u.d.). Hentet 2023 fra <https://finansdanmark.dk/10-aaret-for-krisen/hvad-skete-der/>

Schjøtt, A. C. (27. December 2011). *Børsen*. Hentet fra <https://borsen.dk/nyheder/penge/2011-aaret-hvor-krisen-gik-fra-privat-til-offentlig>