线性代数的本质-3b1b's course

线性变换的定义

线性:
1. 保持直线
2. 原点固定
对角线同样不变

变换:
本质是函数：接受输入——函数处理——得到输出
*特定的角度*思考函数处理

线性变换:
在直角坐标系上对坐标轴线进行变换

矩阵

线性变换角度理解定义

线性变换时确定x和y轴正方向上的单位向量i和j，变换后的向量在原坐标轴上的坐标（xi, yi）、（xj, yj）就是变换关系——处理过程。

```
[xi, xj;
 yi, yj]
 *
 [xorigin, yorigin]
 =
 [xTransfered, yTransfered]
```

矩阵就是线性变换运算的数学标志：含有描述线性变换的信息。

非方阵的变换:
变换矩阵A有m行，n列就是说原本的向量是n维度，变换之后是m维。
一个3 * 2的矩阵乘以原本的二维向量的时候意味着二维到三维的变换

线性变换中的矩阵

复合变换:
将两次变换合并成为一次变换
可以在第一次变换的矩阵之后乘第二次变换的矩阵
多次变换的方法相同于第一次变换
但是乘法顺序不可以改变
矩阵起源于函数的记号由于函数写在变量的左侧，所以读矩阵的时候是从右向左读（此时是一个未知向量进行两次线性变换）

乘法规则：线性变换

进行两次线性变换的两个矩阵合并成一个矩阵的时候出现了矩阵的乘法:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

就是对于第一个矩阵中的单位向量i和j单独进行变换，之后合成新的矩阵。
乘积顺序不可以改变，是因为线性变换有先后

逆矩阵

几何:
将已经经过线性变换的图形变回原来的样子
与原矩阵相乘等于单位阵可是线性变换的结果是没有变换，也就是说能够抵消第一个矩阵带来的线性变换，将其变为原来的样子。

计算方法:
高斯-约旦消元法

存在条件:

1. 只有原矩阵是*方阵*而且*满秩*，才会存在逆矩阵。（因为跨纬度的线性变换时低维的图像再跨到高维度的时候，一个点对应多个点，需要多个矩阵。不是一对一的情况了，此时逆矩阵不只是有一个，不满足逆矩阵的存在条件）
2. 行列式不为0而且是方阵

行列式和秩

几何含义:
线性变换之后的面积相对于原来的原来倍数
负数是整个平面被反转了或者立体图形变成了右侧的
计算的规则

$$det(M_1M_2) = det(M_1)det(M_2)$$

秩：空间的维数
秩代表线性变换之后的维度

列(行)空间和零空间

几何:
矩阵列(行)向量张成的空间，空间的维度叫做列(行)空间的秩
图形乘以一个矩阵（经过特定的线性变换）到了原点，这些图形构成的空间称为零空间

秩-零化度定理
对于一个同矩阵：零空间的维度（零化度：n-r）+列空间的维度（r）=矩阵的列数（n）

点积和对偶性

对偶函数的定义:
如果一个函数可以把一个向量映射到一个标量，那么这个函数叫做对偶函数。对偶函数可以看作是一种特殊的线性变换，它把高维空间压缩到一维空间。
对偶函数的几何意义：如果一个对偶函数可以用一个特定的向量v来表示，那么它就相当于计算输入向量和v的点积。对偶函数可以看作是一种特殊的投影变换，它把高维空间投影到v所在的直线上。

基变换

B空间的向量 * B的基在A的向量表示 = A空间的向量
向量变换基使得待乘的函数成为数量矩阵，进行运算，然后变回去
乘以新空间中自己的位置

向量之间的基变换可以用一个矩阵来表示，这个*矩阵的列就是新的基向量用旧的基向量来表示的坐标。* 这个矩阵可以把旧的坐标转换成新的坐标，也就是把旧的基向量用新的基向量来表示。如果这个矩阵是可逆的，那么它的逆矩阵就可以把新的坐标转换成旧的坐标，也就是把新的基向量用旧的基向量来表示。