MIT18.06

矩阵

矩阵的类型:
线性代数课程 > ^778d0a
增广矩阵:
Ax = b
将A和b结合在一起形成的矩阵。

矩阵的运算

一般运算

乘法一般性法则
线性代数课程 > ^2ccff7
列图像：实质为线性代数
线性代数的本质-3b1b's course > ^fd2635
也可以将多乘多看作多个多乘单个列向量
行图像
相乘法则1:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2,5)*(1,2) \\ (1,3)*(1,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*2+2*5 \\ 1*1+2*3 \end{bmatrix}$$

可以将多乘多看作多次"一个行向量乘以多"
......
相乘法则2:
将矩阵的每一行看作方程的形式

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

可以看作是方程（反之亦然）

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$$

接下来是画图寻找焦点或者消元法解方程
行与列直接相乘:

第一个向量的第n列和第二个向量的第n行分别相乘后相加

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 8 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$$

分块乘法
将矩阵分乘大小相同的块，对块进行矩阵运算

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}, \quad C_{12} = A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}, C_{21} = A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}, \quad C_{22} =$$

运算的先决条件

$$m \times n * n \times p = m \times p$$

中间两个数字相同

特定种类以及运算

消元矩阵：通过*矩阵相乘*使得
*增广矩阵*达到消元的目的
将二行一列的系数消去的矩阵简称为E21
运算过程的数学表达为：

$$E_{23}E_{21}A(\text{系数矩阵}) = U\text{（上三角矩阵）}$$

^e351e2

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = [1,2,1] * -3 + [2,8,1] * 1 + [0,4,1] * 0 = [0,2,-2]$$

此时

$$E_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

消元矩阵放在右边，消元矩阵的第一行代表对待消元者第一行成分的表示，从左到右表示了拕别是几个第一、第二、第三行相加

……

核心：求消元矩阵就是从单位阵I入手，按照A每次变换的消元步骤操作I矩阵，能分别得到E某行某列，最后累积得到E即可。

逆矩阵

用

$$A^{-1}$$

来表示A的逆矩阵。

由来：

$$A^{-1}A = I = AA^{-1}$$

左逆等于右逆

计算逆矩阵的方法：

$$A^{-1}A = I$$

乘积的逆就是逆矩阵的反方向相乘

$$E_{12}E_{13}E_{23}A = U \Longleftrightarrow A = (E_{23})^{-1}(E_{13})^{-1}(E_{12})^{-1}U$$

$$AB\text{的逆矩阵是}B^{-1}A^{-1}$$

高斯-约旦方法：用来求逆矩阵（一次性解两个方程）

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & c\\b & d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

可以拆解成

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

合并成为增广矩阵，并且***对这个矩阵进行消元操作知道左侧变为单位矩阵***。

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

此时矩阵的右半部分就是翻转矩阵

原理：

$$EA = I \longrightarrow E = A^{-1}$$

^43a9f3

$$E\left[A \quad I\right] = \left[EA \quad EI\right] = \left[I \quad A^{-1}\right]$$

奇异矩阵（singular martix）
原矩阵为A：存在Ax = 0，则A为不可逆矩阵。
情况有：
1. 矩阵中的向量在同一条直线上

转置（transpose）：将矩阵的行和列互换位置得到一个新矩阵。对于矩阵A，它的转置矩阵可以表示

$$A^T$$

一些行变换矩阵的逆矩阵等于它的转置矩阵

$$P^{-1} = P^T$$

转置和逆矩阵对于同一个矩阵来说顺序是可以颠倒的 MIT18.06 > ^43a9f3

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

A的L(lower)U(upper)分解：
A必须是可逆矩阵
过程：

$$EA = U$$

$$L = E^{-1}$$

原理：

$$E^{-1}(EA) = E^{-1}(U) \longrightarrow A = LU = E^{-1}U$$

要求出L，不需要计算。只需要将消元系数依次写进来。也就是E的所有组分
置换矩阵：
行互换
实际分解方式：**PA=LU**
......
n * n的矩阵有n!种排列组合方式，所有矩阵均可逆，并且转置和可逆是同一个矩阵。

$$P^{-1} = P^T$$

$$P^TP = I$$

mathlab公式：矩阵'

$$(AB)^T = B^T A^T$$

相关

讲一个矩阵化简的（计算机角度，并且不需要行变换）步骤需要的运算次数有

$$\frac{1}{3}n^3$$

对square（n）进行积分就能得到

矩阵的对角化

推导过程：

前提条件：A为m * n矩阵，且有n个线性无关（包含特征值不同）的向量

S是由**特征向量**组成的矩阵。λ是**特征值组成的对角矩阵**

$$AS = A\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots\ldots & x_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ldots\ldots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$S^{-1}AS = \lambda$$

用处

用作矩阵幂运算的时候，变换基向量来简便运算的快捷方法

$$A^k = S\lambda^k S^{-1}$$

其他性质

$$Ax = \lambda x; A^2x = \lambda^2 x$$

向量空间与子空间

向量空间

定义：一整个空间的向量，对这个空间中的向量进行线性封闭运算（加法和数乘）之后该向量依旧在次空间之中。

$$n\text{维空间使用}R^n\text{表示。二维空间：}R^2$$

只有零维一维二维三维空间形式才能构成向量空间

子空间

定义：向量空间里面下分的向量空间
二维空间的子向量：

1. 二维空间
2. 经过原点的直线
3. 原点

三维空间的子向量：

1. 三维空间
2. 经过原点的平面
3. 经过原点的直线
4. 原点

列空间(Columnspace)

定义：根据矩阵构建的空间。*矩阵中所有向量经过线性组合构成的封闭向量空间*
例子：

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4\\3 & 7\\2 & 8\end{bmatrix}\text{列空间为（}1,3,2\text{）和（4，7，8）构成的平面}$$

如果列向量之间是共线的那么列空间是一条过原点的直线

零空间(Nullspace)

$$Ax=0\text{所有解构成的空间成为零空间}$$

基是向量的特殊解
维度是n-r
验证方法：

$$A(x+x^*)=0;cAx=0$$

c是常数

行空间（Rowspace）

由矩阵行的一组基组成
处理行空间 = 转置矩阵 + 处理列空间
维度是r（和列空间相同）

左零空间（Nullspace of A(m * n)^T,矩阵A转置的零空间）

行的零空间
维度是m-r

零空间与矩阵列向量的关系

- 如果 A 各列向量构成的向量组是线性无关的，那么矩阵 A 的零空间中只有零向量。
- 如果 A 各列向量构成的向量组是线性相关的，那么矩阵 A 零空间中除零向量之外还一定有其他向量。

从**秩的角度**看来：

- 线性无关对应向量组构成的矩阵，秩为 n，此时空间变换之后维度不发生变换，此时没有自由变量，零空间中只有零向量存在。
- 线性相关对应向量组构成的矩阵，秩小于 n，有 n-r 个自由变量，空间变换之后维度缩小，致使有新的变量重叠进原点，零空间中有很多向量。

基

性质：

1. 组成基的各个向量线性无关
2. 各个基共同构成整个空间
   空间是几维的，就有几个基向量
   $$R^n\text{中的}n\text{个向量构成基，则以这}n\text{个向量构成的}n*n\text{矩阵必须可逆。}$$
   矩阵可逆意味着矩阵中各个向量线性无关

维（DIM）

$$R^n\text{中}n\text{代表了空间的维数}$$

维数由秩的数值决定

求解Ax=b

特定解：
自由变量均为0时，求出的首元的解。

特殊解： （基础解系）
Ax=0时，给自由变量赋特解，得到的多个解

通解：

$$x_{通解} = x_{特定解} + cx_{特殊解1} + cx_{特殊解2} + \ldots\ldots$$

c是常数，特定解不乘c是因为Ax=b，右边的b也同样会变化。但是0不会
满秩的时候不会存在特殊解，此时特定解就是通解

算法：

1. 求出特定解
2. 求出特殊解
3. 求通解

无解方程的最优解

将方程改写成如下方式进行求解：

$$A^TA\hat{x} = A^Tb; 这不是Ax = b的解$$

A^T * A的特殊性质：

1. A^T * A的结果总是方阵
2. A^T *A总为对称阵*
   (A^T A不一定可逆）

如果A^T * A可逆，则有以下性质：

$$N(A^TA) = N(A)$$

$$A^TA与A的秩相同$$

$$矩阵A^TA可逆 \longrightarrow A^TA零空间中只有零向量 \longrightarrow A的各列线性无关$$

通解

方法A:
步骤：

1. 通过消元法确定主元

2. 确定主列和自由列
3. 分别带入自由列0和1，求得矩阵其他的未知数
4. 求得的矩阵就是0空间的基底矩阵。乘以常数c就是0空间的矩阵

性质:

1. 有秩r个，就有自由变量（n-r）个
2. 代入的0和1被称为“特解”。因为这些向量的线性组合能够构成整个向量空间

原方程组——阶梯型方程组（U：上三角形式）——标准式(R:rref行最简式)

$$R=\begin{bmatrix} I & F \\ O & O \end{bmatrix}; \ N(\text{零空间矩阵})=\begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

F:自由变量组成的矩阵

方法B（不完善）:
步骤:
已知原矩阵A、含有0行的矩阵R、EA = R

1. 使用高斯约旦消元法求出E
2. R矩阵中0行所对应的E中的行就是A矩阵的零空间的基中的一个
   此时0空间的秩可以通过A求出，由此得到零空间的基

秩与解的关系：可解性

矩阵的秩决定了方程解的个数

$$r=m=n\text{的时候只有一个特定解}$$

对于m * n秩为r的矩阵(n>m):
行满秩:
有特定解和常数倍特殊解的结合;无穷多解

$$\begin{bmatrix} I & F & I & F \end{bmatrix}: IF\text{混搭}$$

列满秩:
有特定解;0或者1个解

$$\begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$$

r < m,r < n:
特定解和常数倍特殊解的结合;0或无穷多个解的集合

$$\begin{bmatrix} I & F \\ O & O \end{bmatrix}$$

补充

对于m** **n矩阵，列空间最大是R^{m}的子空间，零空间最大是R^{n}维子空间

空间

正交

^51d9d3
空间的正交：一个空间中的*任意一个向量*，都与*另一个空间中的任意一个向量*正交
行空间与零空间始终正交
列空间与左零空间始终正交
(不在同一方向的，零空间与行（列）空间正交)
对于同一个矩阵，它的行空间与零空间始终正交。我们称之为

$$R^n\text{的正交补}$$

投影

定义作用于b的投影矩阵：

$$p = Pb$$

$$P = A(A^TA)^{-1}A^T; A\text{是被投影空间的基向量}(a_1, a_2, a_3)$$

P的性质：

1. $$P^T = P$$

2. $$P^2 = P$$

投影与空间的联系：

"Pasted image 20230604104928.png" 未创建，点击以创建。

b = p + e
b可以分解为两个分量，分别投影到列空间以及列空间的左零空间。

$$p = Pb$$

$$e = b - p = b - Pb = (I - P)b$$

标准正交基（标准正交向量组）

各个基都是标准向量而且各个向量正交

$$举例：\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Gram-Schmidt正交法

线性代数课程 > ^57baca

定义以及要点

怎么证明不在同一条直线上的三个向量能够组成任何向量
三个向量首尾相连在一起，变更长度就可以达到所能达到的地方。

线性相关：（一个基于向量组，而不是矩阵的概念）
除了零组合之外还有其他的线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性相关

$$cv_1 + cv_2 + \ldots\ldots + cv_n = o；向量倍加为0向量，则线性相关$$

如果一个向量组中有零向量存在，那么这个向量组一定是线性相关的。

线性无关：
除系数全为 0 的情况外，没有其他线性组合方式能得到零向量，则这组向量线性无关。

线性变换
"变换"和"函数"意义相同：有输入、输出、运算过程。

生成（空间）：
多个向量的线性组合组成一个空间。
这些向量不要求线性无关

矩阵可逆就意味着任意两行，两列都线性无关

矩阵的秩 = 行空间的维数 = 列空间的维数

如果A^TA的各列线性无关，则矩阵A^TA可逆

``